

# **Линейные колебания и волны**

Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнёв

# Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>7</b>
<b>Предисловие авторов</b>	<b>8</b>
<b>Введение</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Линейный гармонический осциллятор</b>	<b>14</b>
§ 1. Общие замечания и определения . . . . .	14
§ 2. Консервативный осциллятор . . . . .	16
§ 3. Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии . . . . .	18
§ 4. “Экономический маятник” — линейные колебания в про- стой модели экономики . . . . .	23
§ 5. Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы . . .	25
§ 6. Изохронные и неизохронные колебания . . . . .	31
§ 7. Энергетические соотношения для усредненных величин. Те- орема вириала . . . . .	35
<b>Глава 2. Осциллятор как динамическая система</b>	<b>39</b>
§ 1. Динамические системы: основные определения и классифи- кация . . . . .	39
§ 2. Особая точка типа центр . . . . .	42
§ 3. Положения равновесия и особые точки . . . . .	43
§ 4. Фазовый портрет системы хищник-жертва . . . . .	44
§ 5. Особая точка типа седло . . . . .	46
§ 6. Устойчивость положений равновесия . . . . .	50
<b>Глава 3. Линейный осциллятор с затуханием</b>	<b>52</b>
§ 1. Основные свойства осциллятора с затуханием. Логарифми- ческий декремент и добротность . . . . .	52
§ 2. Колебания с медленно меняющейся амплитудой . . . . .	57

§ 3. Метод нормальных колебаний . . . . .	64
§ 4. Немного о квантовом осцилляторе . . . . .	67
§ 5. Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы . . . . .	68
§ 6. Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел . . . . .	69

#### **Глава 4. Осцилляторы с отрицательным трением. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости 72**

§ 1. Примеры систем с отрицательным трением . . . . .	72
§ 2. Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел	75
§ 3. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости	78
§ 4. Понятие бифуркации динамической системы . . . . .	81

#### **Глава 5. Осциллятор под действием внешних сил. Резонанс 83**

§ 1. Примеры и эталонное уравнение . . . . .	83
§ 2. Метод комплексных амплитуд . . . . .	85
§ 3. Случай гармонической внешней силы . . . . .	89
§ 4. Резонанс . . . . .	91
§ 5. Фазовые соотношения при резонансе . . . . .	95
§ 6. Энергетические соотношения при резонансе и метод усреднения . . . . .	100

#### **Глава 6. Осциллятор под произвольным внешним воздействием 103**

§ 1. Периодическая внешняя сила . . . . .	103
§ 2. Произвольная внешняя сила . . . . .	106
§ 3. Предельные случаи . . . . .	108

#### **Глава 7. Осциллятор с изменяющимися параметрами 111**

§ 1. Вводные замечания . . . . .	111
§ 2. Параметрическая неустойчивость . . . . .	114
§ 3. Теория Флоке . . . . .	118
§ 4. Модельная система . . . . .	123
§ 5. Уравнение Матье . . . . .	125
§ 6. Неустойчивость в двухконтурной схеме . . . . .	131
§ 7. Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант . . . . .	139
§ 8. Движение в быстро осциллирующем поле . . . . .	148

#### **Глава 8. Колебания в системе связанных осцилляторов 157**

§ 1. Примеры связанных осцилляторов . . . . .	157
§ 2. Два связанных идентичных осциллятора . . . . .	162

§ 3. Парциальные системы и парциальные частоты . . . . .	168
§ 4. Два связанных осциллятора с силовой связью . . . . .	171
§ 5. Связанные осцилляторы под действием гармонической силы . . . . .	180
§ 6. Колебания системы $N$ связанных осцилляторов . . . . .	186
§ 7. Цепочка идентичных осцилляторов . . . . .	192

## **Глава 9. Переход к одномерной сплошной среде в цепочке связанных осцилляторов. Волны. Дисперсия . . . . . 208**

§ 1. Вводные замечания . . . . .	208
§ 2. Что же такое волна? . . . . .	212
§ 3. Общее линейное уравнение. Дисперсия. . . . .	217
§ 4. Пространственная и временная дисперсия . . . . .	223
§ 5. О квазичастицах . . . . .	229

## **Глава 10. Волны в распределенных системах с границами . . . . . 232**

§ 1. Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волн в среде со скачкообразным изменением параметров . . . . .	232
§ 2. Струна с закрепленными концами . . . . .	236
§ 3. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем . . . . .	242

## **Глава 11. Линейные волны в жидкости . . . . . 251**

§ 1. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Звуковые волны. Акустический эффект Допплера . . . . .	251
§ 2. Основные уравнения теории волн в стратифицированной жидкости . . . . .	256
§ 3. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости . . . . .	261
§ 4. Круговые волны на воде . . . . .	271
§ 5. Волны за движущимся источником . . . . .	275
§ 6. Внутренние волны в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби. . . . .	281

## **Глава 12. Линейные волны в плазме . . . . . 288**

§ 1. Общие сведения о плазме. . . . .	288
§ 2. Гидродинамическое описание плазмы. (основные уравнения плазменной гидродинамики) . . . . .	290
§ 3. Дисперсионное уравнение для ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев. . . . .	291
§ 4. Элементы кинетической теории плазмы. . . . .	296

§ 5. Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике. Ионно — звуковые волны . . . . .	308
<b>Глава 13. Кинематика волнового движения.</b>	<b>312</b>
§ 1. О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии . . . . .	312
§ 2. Парадоксы Л.И. Мандельштама . . . . .	321
§ 3. Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в некоторых сплошных средах . . . . .	322
<b>Глава 14. Введение в теорию устойчивости и неустойчивости волновых систем</b>	<b>328</b>
§ 1. Общие замечания . . . . .	328
§ 2. Примеры волновых неустойчивостей . . . . .	338
§ 3. Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик). Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков. . . . .	348
§ 4. Неустойчивость Гельмгольца. . . . .	359
§ 5. Усиление и непропускание. Критерий разделения. Еще примеры неустойчивостей . . . . .	361
<b>Глава 15. Энергия и импульс волн</b>	<b>366</b>
§ 1. Уравнение переноса плотности энергии волнового пакета в диспергирующей среде . . . . .	366
§ 2. Вариационный принцип Уизема . . . . .	370
§ 3. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией . . . . .	375
§ 4. Что же такое волновая энергия для линейных волн? . . . .	383
§ 5. Импульс волнового пакета . . . . .	384
<b>Глава 16. Волны с отрицательной энергией. Связанные волны</b>	<b>386</b>
§ 1. Общие замечания . . . . .	386
§ 2. Волны с положительной и отрицательной энергией . . . . .	388
§ 3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Допплера . . . . .	397
<b>Глава 17. Волны в неоднородных средах</b>	<b>406</b>
§ 1. Приближение геометрической оптики . . . . .	406
§ 2. Образование каустик и рефракция . . . . .	415
§ 3. Градиентный диэлектрический волновод . . . . .	422

§ 4. Электромагнитные волны слоисто-неоднородной среде . . .	432
§ 5. Взаимодействие линейных волн в неоднородной среде . . .	439

<b>Литература</b>	<b>448</b>
-------------------	------------

“Я начну с классической линейной теории колебаний. Такие понятия, как гармонический осциллятор, логарифмический декремент, нормальные и парциальные частоты, резонанс, принцип суперпозиции, спектральный подход и т.д., обладают для физика исключительно большой наглядностью и в совокупности создают стройную, цельную и прозрачную картину процессов, происходящих в линейных колебательных системах.

Эти понятия и все это линейное мировоззрение тесно связаны с математикой. Математический аппарат, трактующий линейные колебательные системы, весьма разработан и чрезвычайно адекватен физическим задачам классической теории линейных колебаний. В своей дискретной части он связан с алгеброй линейных преобразований и квадратичных форм, в своей распределенной части — с проблемой собственных значений, теорией специальных функций и т.д. Адекватность этого аппарата физическим задачам классической теории линейных колебаний не должна нас удивлять, так как именно эта область может служить наиболее разительным примером взаимного плодотворного сотрудничества физики и математики. Достаточно вспомнить знаменитый спор Эйлера, Д’Аламбера и Лагранжа о теории колебаний струны, откуда ведут свое происхождение многие относящиеся сюда понятия и методы. С Лагранжа же в сущности начинается и теория малых колебаний, т.е. теория линейных дискретных систем”.

*А.А.Андронов. “Л.И.Мандельштам и теория нелинейных колебаний” в книге “Академик Л.И.Мандельштам. К столетию со дня рождения. — М.: Наука, 1970, с.107–108.*

## Предисловие авторов

Предлагаемая читателю книга — первая в логическом ряду серии “Современная теория колебаний и волн”, издаваемой в рамках программы “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы”. Книга в известной степени продолжает традиции Саратовской школы по радиофизике и электронике профессора Владимира Николаевича Шевчика, в которой исследования, основанные на глубоком знании линейной теории колебаний и волн, занимали важное место. Достаточно упомянуть книгу В.Н. Шевчика, Г.Н. Шведова и А.В. Соболевой “Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах” (Изд-во Саратовского университета, 1962, 336 с.) остающейся своеобразной энциклопедией по вопросам, охватываемым названием, до сегодняшнего дня<sup>1</sup>.

Во многом наша книга соответствует курсам лекций, которые читаются в Саратовском государственном университете по линейной теории колебаний и волн. В ней сделана попытка, анализируя основные модели линейной теории колебаний и волн показать единство колебательных и волновых процессов на примерах из различных областей науки. При этом достаточно подробно излагается математический аппарат теории.

Эта книга — учебник, и мы старались писать ее так, чтобы все выкладки были максимально полными. По нашему убеждению, математический аппарат, используемый в линейной теории колебаний и волн, является основой всего математического образования физика.

Некоторые вспомогательные вопросы включены в основной текст в виде задач. Однако этих задач не так много, поскольку одновременно с данной книгой в рамках серии “Современная теория колебаний и волн” должен быть издан отдельной книгой задачник “Линейные колебания и волны. Сборник задач”. Мы надеемся, что совместное изучение теории и решение большого числа задач, поможет читателю более глубоко освоить эту увлекательную науку.

---

<sup>1</sup>Вскоре после выхода книга была переведена и издана в Великобритании.



Раздел “Колебания и волны в линейных системах” изначально входил в курс лекций “Теория волновых процессов” для студентов четвертого курса радиофизического отделения университета, который на протяжении многих лет читал чл.-корр. РАН Д.И.Трубецков. В основном его содержание соответствовало идеологии книги М.И.Рабиновича и Д.И.Трубецкова “Введение в теорию колебаний и волн” (М.:Наука, 1984 — первое издание, 1992 — второе издание). Доцентом А.Г.Рожневым был разработан и читался специальный курс лекций “Линейные колебания” для студентов второго курса Высшего колледжа прикладных наук (на правах факультета университета), в основу учебного плана которого положена современная теория колебаний и волн. Ныне Колледж преобразован в факультет нелинейных процессов, все книги серии отражают учебный план факультета, соответствуя в той или иной мере лекционным курсам. Параллельно чтению курса по линейным колебаниям доцент А.Г.Рожнева проводил семинары по решению задач. Курс линейные волны был подготовлен Д.И.Трубецковым для студентов третьего курса факультета нелинейных процессов. Задачи по этому курсу давались на лекциях и включались в экзаменационные билеты.

В заключении, мы считаем своим долгом поблагодарить Е.В.Блохину за большую помощь, оказанную в подготовке рукописи книги.

Д.И. Трубецков  
А.Г. Рожнев

## Введение

Может показаться странным, что в наше время, к которому вполне подходит титул “нелинейное”, появляется книга о линейных колебаниях и волнах.

В своем известном эссе “Нелинейность” (Знание-сила, 1982, № 1, с. 34–36) Ю.А. Данилов пишет следующее: “Отпечаток распространенного некогда заблуждения относительно якобы главенствующей роли линейности в окружающем нас мире несет на себе сам термин “нелинейность”: его создатели сочли первичной линейность а нелинейность восприняли как нечто вторичное, производное от линейности и определили через ее отрицание”. И далее: “Современный физик, доведись ему заново создавать определение столь важной сущности, как нелинейность, скорее всего поступил бы иначе и, отдав предпочтение нелинейности как более важной и распространенной из двух противоположностей определил бы линейность как “не нелинейность.”” Однако, есть и другое мнение, принадлежащее М.А. Миллеру (Волны, волны, волны ... Препринт. Нижний Новгород, 1993, с.36): “... я осмеливаюсь позволить себе высказать совсем уж смелую догадку”, которая теперь уж выглядит почти как теорема. Я утверждаю: описание любого нелинейного явления может быть сведено к набору (конечному!) или для страховки — к бесконечному!) линейных соотношений (уравнений или других алгоритмических представлений — открытых или скрытых для непосредственных измерительных проверок). Кое-кто посчитает это сведение тривиальным, а кое-кто неверным. Пожалуйста, определите свое место между этими крайними позициями, а может быть вам удастся найти критерии (признаки), определяющие виды нелинейных связей, допускающих сведение к конечным комбинациям линейных.

Обе гипотезы красивы и допустимы, но существует классическая линейная теория колебаний и волн, существует линейное мировоззрение, тесно связанное с математическим аппаратом. Этот аппарат весьма разработан, вполне адекватен многим задачам естествознания, а иногда и зада-

чам из гуманитарных наук. Так что следуя все той же работе М.А. Миллера, хочется воскликнуть: “Все линейное от Бога, а нелинейное от Лукавого!”

Главная идея книги показать единство колебательных и волновых процессов совершенно различной природы, интересуясь, в первую очередь, свойствами этих процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлениями ее природы (физической, биологической, химической и т.д.). Общие свойства реальных систем устанавливаются на основе анализа моделей, основная из которых классический линейный осциллятор и его модификации. В первой главе рассматривается линейный гармонический осциллятор. В качестве примеров анализируются математический маятник, колебательный контур, система хищник - жертва, химический и экономический “маятники”. Там же определенное внимание уделено неизохронным колебаниям. Осциллятор как динамическая система, поведение которой исследуется с помощью фазовой плоскости, является героем главы 2. Анализ различных состояний равновесия для линейного осциллятора с затуханием продолжен в главе 3, где вводится понятие нормальных колебаний, неоднократно используемое на протяжении всех книги. Изучение фазовой плоскости завершает глава 4, где рассматривается осциллятор с отрицательным трением и дана общая классификация особых точек на фазовой плоскости. Здесь же кратко обсуждается понятие бифуркации.

Первое усложнение модели — осциллятор под действием внешней силы (главы 5 и 6). Следующий шаг состоит в рассмотрении осциллятора с изменяющимися во времени параметрами и параметрического резонанса (глава 7). Важным в этой главе представляется изложение математического аппарата, связанного с исследованием уравнения Матье, методом усреднения, приближением Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна и нахождением адиабатических инвариантов.

В последующих двух главах модель осциллятора используется как “кирпичик” для построения более сложных систем: двух связанных осцилляторов и цепочки связанных осцилляторов (главы 8 и 9). В главе вводятся важные понятия собственных мод и собственных частот колебаний, связанности колебаний, рассматривается влияние граничных условий на собственные частоты. Глава 9 начинает часть книги, посвященную волновым явлениям. Последовательно проведен переход в цепочке связанных осцилляторов к одномерной сплошной среде, подробно обсуждаются понятие волны и причины существования в среде пространственной и временной дисперсии, вводится понятие квазичастиц.

Волны в системах с границами и резонанс волновых систем рассмо-

трены в главе 10. В следующих двух главах обсуждаются линейные волны в реальных средах — в жидкости (глава 11) и в плазме (глава 12). В частности, описаны гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (в случае капиллярных волн указывается на связь с моделью атомного ядра), рассмотрены особенности волн в стратифицированной жидкости (внутренние волны Россби), волны от мгновенного источника на поверхности воды и система волн за движущимся источником.

Для плазмы приводится гидродинамическое описание и элементы кинетической теории. Рассмотрены плазменные ленгмюровские колебания, плазма в продольном поле и затухание Ландау.

Важные вопросы о способах введения понятий групповой скорости, фазовой скорости и скорости распространения энергии составляют содержание главы 13. Примеры волновых不устойчивостей в различных системах приведены в главе 14. В не же на примере задачи о двух взаимодействующих электронных потоках вводятся и обсуждаются понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей. В главе об энергии и импульсе волн (глава 15) на примере уравнения Клейна-Гордона выведено уравнение переноса усредненной плотности энергии волнового пакета в диспергирующей среде. Приводится изящный способ вычисления плотности электромагнитного поля в среде с дисперсией, принадлежащий М.Л. Левину. Достаточно подробно изложен вариационный принцип Уизема получения уравнения, характеризующего перенос усредненной плотности энергии волновым пакетом в средах с дисперсией без “привязки” к конкретному уравнению. Волны с положительной и отрицательной энергией в электронике, физике плазмы и гидродинамике описаны в главе 16. Там же устанавливается их связь с нормальным и аномальным эффектами Допплера. Рассмотрен метод связанных волн и его приложение к задачам сверхвысокочастотной электроники. Завершает книгу глава о волнах в плавно неоднородных средах и нерезонансных параметрических процессах. Рассмотрено приближение геометрической оптики и выход за ее рамки. Изложено решение задачи о поведении электромагнитной волны вблизи точки поворота при отражении от неоднородного диэлектрического слоя. Кратко обсуждается взаимодействие линейных волн.

В книге довольно много математики, но это не математика ради математики. Авторы, используя математический аппарат, руководствовались следующим высказыванием Л.И. Мандельштама (восьмая лекция из “Лекций по теории колебаний”, М.:Наука, 1972, с. 73), относящимся к обсуждения лимитационного движения материальной точки по желобку определенной формы: “Здесь наглядные рассуждения ничего не дают,

а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинающему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что и “так все ясно”. Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру.”

Сумели ли авторы этого добиться, судить читателю.

## ГЛАВА 1

### Линейный гармонический осциллятор

*Общие замечания и определения. Консервативный осциллятор. Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии. “Экономический маятник” — линейные колебания в простой модели экономики. Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы. Изохронные и неизохронные колебания. Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала.*

#### § 1. Общие замечания и определения

Движение груза на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется *линейным гармоническим осциллятором*.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t)$  — переменная, описывающая состояние системы (смещение груза, заряд конденсатора и т.д.),  $\gamma$  — параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре),  $\omega_0$  — собственная частота колебаний,  $t$  — время. Точками сверху принято обозначать производные по времени:  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  и т.д.

Уравнение (1.1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером *линейной* динамической системы. Основные понятия теории динамических систем будут рассмотрены в гл. 2, здесь же мы обсудим свойство линейности.

Поведение линейных систем описывается функциональным уравнением  $\hat{\mathcal{L}}x = f$ , где  $\hat{\mathcal{L}}$  — линейный оператор,  $f$  — известная функция. Оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  называется линейным, если для любых двух функций  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$

из области его определения выполняется условие  $\hat{L}[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] = C_1\hat{L}x_1(t) + C_2\hat{L}x_2(t)$ , где  $C_1, C_2$  — постоянные. Из линейности оператора  $\hat{L}$  следуют два утверждения, составляющие содержание *принципа суперпозиции*.

- 1) Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения  $\hat{L}x = 0$ , то их линейная комбинация  $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$  также является решением.
- 2) Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения неоднородного уравнения  $\hat{L}x = f$ , то их разность  $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$  является решением соответствующего однородного уравнения  $\hat{L}x = 0$ .

Доказательство этих утверждений элементарно просто. Принцип суперпозиции играет фундаментальную роль во всей линейной теории колебаний и волн, именно благодаря ему часто удается построить решение линейной задачи в замкнутом виде.

Большинство колебательных систем подчиняется принципу суперпозиции только приближенно, при выполнении определенных условий, чаще всего — малости отклонения системы от положения равновесия. Однако, как показано ниже, не всегда малость отклонения является достаточным условием линейности колебаний.

Математическим аппаратом, адекватным задачам теории колебаний, является теория обыкновенных дифференциальных уравнений [1–3], а в случае линейных систем — теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения, в которые время не входит явным образом, соответствуют *автономным* системам. Их параметры и действующие на них внешние силы не зависят от времени. Гармонический осциллятор (1.1) — автономная система.

*Порядок* дифференциального уравнения определяется степенью входящей в него старшей производной. Порядок уравнения совпадает с числом независимых начальных условий, которые необходимо задать в фиксированный момент времени, чтобы однозначно определить решение. Помимо порядка дифференциального уравнения используют также понятие *числа степеней свободы*. Оно равно порядку дифференциального уравнения, деленному на два. Уравнению второго порядка соответствует система с одной степенью свободы, третьего порядка — с полутора степенями, четвертого порядка — с двумя, и т.д. Линейный осциллятор — это система с одной степенью свободы.

## § 2. Консервативный осциллятор

Если потери в системе отсутствуют ( $\gamma = 0$ ), то вместо (1.1) получаем уравнение *консервативного* осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

энергия колебаний которого сохраняется во времени. Такой осциллятор является частным случаем нелинейного консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (1.3)$$

для которого постоянной во времени остается сумма кинетической и потенциальной энергий

$$W = W_k + W_n = \frac{\alpha \dot{x}^2}{2} + \alpha \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

Коэффициент  $\alpha$  имеет свой смысл для каждой конкретной системы. Например, для грузика на пружинке  $\alpha$  — масса. Дифференцируя (1.4) по времени, получаем  $\dot{W} = \alpha \dot{x}[\ddot{x} + f(x)] = 0$ , т.е. величина  $W$  действительно не зависит от  $t$ .

Чтобы в системе (1.3) существовали колебания, потенциальная энергия  $W_n(x)$  как функция  $x$  должна иметь локальный минимум. Считая отклонения осциллятора от точки минимума  $x_0$  малыми, положим  $W_n(x) \approx W_n(x_0) + \beta(x - x_0)^2/2$ ,  $\beta = d^2 W_n(x_0)/dx^2 \neq 0$ . Используя это выражение в формуле для полной энергии и приравнявая  $\dot{W}$  нулю, получаем уравнение (1.2), причем

$$\omega_0^2 = \beta/\alpha. \quad (1.5)$$

Таким образом, уравнение гармонического осциллятора получается из общего случая (1.3) в результате замены функции потенциальной энергии ее квадратичной аппроксимацией вблизи локального минимума. Если  $\beta = 0$ , то в разложении потенциальной энергии в ряд Тейлора необходимо удерживать следующие за квадратичным слагаемые, в этом случае уравнение осциллятора не будет линейным даже для малых колебаний.

Формула (1.5) очень удобна для вычисления собственных частот линейных систем с одной степенью свободы, для этого достаточно выразить потенциальную и кинетическую энергии системы через любую подходящую переменную  $x$ , определяющую состояние системы, и разложить полученные выражения в ряд до квадратичных слагаемых по  $x$  и  $\dot{x}$ . Много подобных задач можно найти в [4].



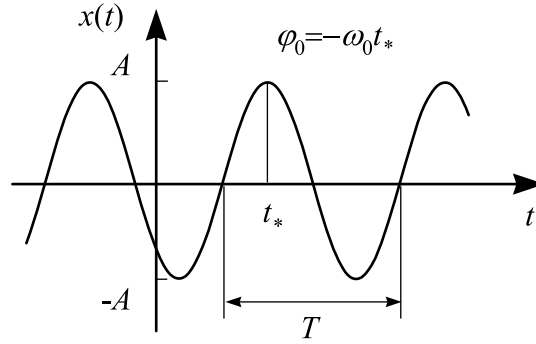


Рис. 1.1. Решение уравнения гармонического осциллятора.

Решение уравнения (1.2) хорошо известно:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6)$$

Здесь  $A$  — амплитуда колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза. Зависимость  $x(t)$  показана на рис. 1.1. Период колебаний — интервал времени, через который состояние системы повторяется — связан с собственной частотой формулой  $T = 2\pi/\omega_0$ . Начальная фаза определяет сдвиг графика косинуса относительно нулевого момента времени: время  $t_*$  первого с начала отсчета максимального отклонения в сторону положительных  $x$  связано с начальной фазой формулой  $\varphi_0 = -\omega_0 t_*$ . Так как  $\varphi_0$  всегда находится под аргументом синуса или косинуса, то она определена с точностью до произвольного, кратного  $2\pi$ , слагаемого. Например фазы  $0$  и  $2\pi$ ,  $-\pi$  и  $\pi$  эквивалентны.

Амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями. Если при  $t = 0$  координата и скорость<sup>1</sup> осциллятора равны, соответственно,  $x_0$  и  $v_0$ , то из (1.6) следует

$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi_0. \quad (1.7)$$

Отсюда находим

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2} \quad (1.8)$$

---

<sup>1</sup>Под координатой осциллятора понимается любая переменная, однозначно определяющая его состояние, а под скоростью — производная координаты по времени. Например, если для электрического контура в качестве “координаты” выступает заряд на конденсаторе, то “скорость” равна  $\dot{Q} = I$  — току через конденсатор.

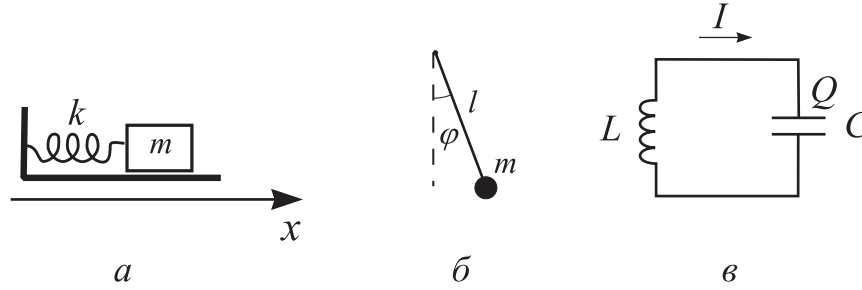


Рис. 1.2. Примеры осцилляторов: грузик на пружинке (а), маятник (б) и колебательный контур (в).

и

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{-v_0/\omega_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}}. \quad (1.9)$$

Разлагая в (1.6) косинус суммы и используя соотношения (1.7), решение можно также представить в виде

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (1.10)$$

иногда более удобном для решения задач с начальными условиями. Если начальные условия сформулированы для произвольного момента времени  $t_0$ , то в формулы (1.6) и (1.10) следует вместо  $t$  подставить  $t - t_0$ .

### § 3. Примеры осцилляторов в физике, химии, биологии

Рассмотрим примеры систем, в которых появляется уравнение линейного осциллятора. Для полноты изложения, начнем со “школьных” примеров — грузика на пружинке, маятника и колебательного контура.

**Грузик на пружинке.** Брусек массы  $m$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности и прикреплен к стенке пружиной (рис. 1.2,а). При смещении бруска на величину  $x$  от положения равновесия возникает сила  $F(x)$ , которую при малых деформациях пружины можно с достаточной точностью аппроксимировать линейным соотношением  $F(x) = -kx$  (закон Гука). Знак минус показывает, что сила является возвращающей, т.е. она

направлена в сторону, противоположную смещению бруска. Динамику системы описывает второй закон Ньютона  $m\ddot{x} = -kx$ , что очевидно совпадает с уравнением (1.2), причем  $\omega_0^2 = k/m$ . Подчеркнем, что в общем случае больших деформаций сила  $F(x)$  не является линейной функцией  $x$ , поэтому такие колебания будут нелинейными.

**Маятник.** Рассмотрим простейший случай, когда маятник представляет собой точечную массу  $m$  на невесомом жестком стержне длиной  $l$ , который может свободной вращаться вокруг оси, проходящей через один из его концов (рис. 1.2,б). Уравнение вращательного движения  $I\ddot{\varphi} = M$  ( $I = ml^2$  — момент инерции маятника,  $M = -mgl \sin \varphi$  — момент силы тяжести,  $\varphi$  — угол поворота маятника) приводится к виду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.11)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Это уравнение называется *уравнением математического маятника*. Считая угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия малым, можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ , в результате чего вновь получается уравнение линейного осциллятора. Отметим, что сделанное приближение означает, что возвращающий (знак минус в формуле для  $M$ !) момент сил пропорционален углу поворота.

**Колебательный контур.** В этом случае уравнение получается из закона Киргофа  $L\dot{I} + V_c = 0$  ( $V_c$  — напряжение на конденсаторе), записанного для замкнутого контура (рис. 1.2,в). Заряд на конденсаторе функционально связан с приложенным напряжением:  $Q = Q(V_c)$ , эта зависимость носит название вольт-фарадной характеристики. Если конденсатор заполняет обычный диэлектрик, то при малых напряжениях можно положить  $Q = V_c/C$ , где  $C$  — линейная емкость. Тогда, учитывая соотношение  $I = \dot{Q}$ , получаем уравнение осциллятора  $\ddot{Q} + 1/(LC)Q = 0$ . Собственная частота колебаний равна  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ .

Во всех рассмотренных примерах уравнение гармонического осциллятора получается с помощью замены некоторой функциональной связи между физическими величинами, характеризующими состояние системы, линейным соотношением. Такая замена возможна, если отклонение системы от положения равновесия мало. Подобная процедура называется *линеаризацией* и она эквивалентна, как мы видели, замене выражения для потенциальной энергии полиномом второй степени.

То обстоятельство, что уравнения для всех систем совпадают, позволяет распространить выводы, получаемые для одной из них, на остальные

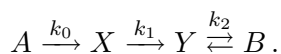
Грузик на пружинке	Маятник	Колебательный контур
Деформация пружинки $x$	Угол поворота маятника $\varphi$	Заряд конденсатора $Q$
Скорость грузика $\dot{x}$	Угловая скорость вращения $\dot{\varphi}$	Ток в контуре $I$
Масса грузика $m$	Момент инерции маятника $I$	Индуктивность $L$
Жесткость пружинки $k$	Коэффициент между углом поворота и моментом силы $mgl$	Величина, обратная емкости $1/C$
Возвращающая сила — сила Гука $F = -kx$	Возвращающий момент силы тяжести $M = -mgl\varphi$	Напряжение на емкости (с обратным знаком) $-V_c = -Q/C$
Кинетическая энергия $W_k = m\dot{x}^2/2$	Энергия вращения маятника $W_{вр} = I\dot{\varphi}^2/2$	Энергия магнитного поля в индуктивности $W_m = LI^2/2$
Потенциальная энергия пружинки $W_n = kx^2/2$	Потенциальная энергия поля силы тяжести $W_n = mgl\varphi^2/2$	Энергия электрического поля в конденсаторе $W_e = Q^2/2C$
Сила трения $F_{тр} = -\lambda\dot{x}$	Момент силы трения $M_{тр} = -\chi\dot{\varphi}$	Напряжение на сопротивлении (с обратным знаком) $-V_R = -RI$

Таблица 1.1. Соответствие между физическими величинами и параметрами различных линейных осцилляторов

ные. Такому переводу с “языка” одной системы на “язык” другой помогает словарь, представленный в таблице 1.1. При небольшом опыте вы сможете добавлять в эту таблицу новые колонки, соответствующие другим примерам осцилляторов.

Приведем еще два нетривиальных, хотя уже и ставших классическими примера линейных осцилляторов, которые встречаются в химии и биологии.

**Химический осциллятор.** В химии простейшим примером колебательной реакции, протекающей в гомогенной (однородной) среде, является модель Лотки [5, 6], кинетическая схема которой



Данная запись соответствует следующей гипотетической реакции. В некотором объеме находится вещество А, расход которого в процессе реакции почти незаметен (говорят, что А находится в избытке). Происходит

превращение молекул вещества А в молекулы вещества Х. Эта реакция нулевого порядка протекает с постоянной скоростью  $k_0$ . Далее, Х превращается в Y с тем большей скоростью, чем больше концентрация Y (это обстоятельство в кинетической схеме отмечено обратной стрелкой над Y). Эта реакция является реакцией второго порядка. Наконец, молекулы Y необратимо распадаются, образуя вещество В (реакция первого порядка). Используя правила составления кинетических уравнений [6] и сохранив для концентрации веществ обозначения А, Х, Y и В, запишем математическую модель реакции Лотки в следующем виде:

$$\dot{X} = k_0 - k_1XY, \quad \dot{Y} = k_1XY - k_2Y, \quad \dot{B} = k_2Y. \quad (1.12)$$

Если концентрации X и Y не меняются во времени, то реакция может протекать так, что скорость образования В будет постоянной.

Сказанному соответствуют условия  $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ , или

$$k_0 - k_1X_0Y_0 = 0, \quad k_1X_0Y_0 - k_2Y_0 = 0, \quad (1.13)$$

где  $X_0$  и  $Y_0$  — равновесные концентрации. Из системы (1.13) следует, что

$$X_0 = k_2/k_1, \quad Y_0 = k_0/k_2. \quad (1.14)$$

Предположим, что существуют малые отклонения  $x(t)$  и  $y(t)$  от равновесных значений концентраций  $X_0, Y_0$ , т.е. будем считать  $X(t) = X_0 + x(t)$ ,  $Y(t) = Y_0 + y(t)$ , причем  $|x| \ll X_0$ ,  $|y| \ll Y_0$ . Подставляя выражения для  $X(t)$  и  $Y(t)$  в первые два уравнения системы (1.12), учитывая (1.14) и пренебрегая произведениями переменных величин как членами второго порядка малости, получим

$$\dot{x} = -k_2y - (k_1k_0/k_2)x, \quad \dot{y} = (k_1k_0/k_2)x. \quad (1.15)$$

Система уравнений (1.15) сводится к уравнению линейного осциллятора (1.1), если формально обозначить  $k_1k_0/k_2 = 2\gamma$ ,  $k_1k_0 = \omega_0^2$ . Разумеется, нелинейная система уравнений (1.12) богаче решениями, чем уравнение линейного осциллятора (1.1), которое получилось из нее лишь в силу сделанных допущений о малости возмущений концентрации. Если сохранить нелинейность, то модель Лотки может служить составным элементом более сложных периодических химических реакций.

Самая известная из колебательных химических реакций — реакция Белоусова - Жаботинского [7, 8]. В ней периодически (примерно раз в секунду) происходит изменение цвета раствора, в котором идет реакция

окисления малоновой кислоты  $C_3H_4O_4$  смесью  $KBrO_2$  и  $Ce(SO_4)_2$ . Изменение цвета раствора с голубого на розовый происходит за счет образования в растворе ионов  $(Ce^{4+})$ . Эта реакция хорошо изучена и с точки зрения теории колебаний. В математическом плане она сложнее реакции Лотки, поскольку в ней взаимодействуют три вещества и возможно существование автоколебательных режимов.

**Модель хищник — жертва.** Следующий пример — известная модель экологии “хищник — жертва” (модель Вольтерра [5,6,9]). В этой модели рассматриваются два вида животных, один из которых питается другим. Соответствующую задачу часто формулируют в виде вопроса: “Могут ли рыси съесть всех зайцев?” (или лисы — зайцев, или щуки — карасей, в зависимости от фантазии авторов).

Пусть на замкнутом ареале живут два вида — хищники и вегетарианцы — жертвы. Жертвы (их число  $N_1(t)$ ) питаются растительной пищей, имеющейся в избытке, а хищники (их число  $N_2(t)$ ) питаются только жертвами. Если жертвы живут на ареале одни и пищи им хватает, то численность этого вида будет увеличиваться:

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1. \quad (1.16)$$

( $\varepsilon_1$  — коэффициент прироста — постоянный и положительный). Заметим, что уравнение (1.16) аналогично рассмотренной выше химической реакции первого порядка. Если бы на ареале жили одни хищники, то из-за отсутствия пищи они бы вымерли:

$$\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2. \quad (1.17)$$

( $\varepsilon_1$  — постоянный и положительный коэффициент изменения вида — вымирания). Можно допустить, что при совместном проживании видов численность хищников будет увеличиваться тем быстрее, чем больше их частота столкновений с жертвами. Эта частота столкновений пропорциональна  $N_1 N_2$ . Таким образом, для описания численности двух совместно существующих видов мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2), \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1), \quad (1.18)$$

где  $\gamma_2$  — положительная постоянная, характеризующая гибель жертв из-за встречи с хищниками;  $\gamma_1$  — положительная постоянная, характеризующая размножение хищников.

Подобно тому, как мы поступали в случае модели Лотки, найдем состояния равновесия  $N_1^0$  и  $N_2^0$ . Из уравнений (1.18) при  $\dot{N}_1 = 0$  и  $\dot{N}_2 = 0$  имеем

$$N_1^0 = \varepsilon_2/\gamma_1 \quad N_2^0 = \varepsilon_1/\gamma_2. \quad (1.19)$$

Для малых отклонений численности видов от стационарных значений ( $N_1(t) = N_1^0 + n_1(t)$  и  $N_2(t) = N_2^0 + n_2(t)$ ) после линеаризации уравнений (1.18) получим

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= -\gamma_2 N_1^0 n_2 = -(\gamma_2 \varepsilon_2 / \gamma_1) n_2, \\ \dot{n}_2 &= \gamma_1 N_2^0 n_1 = (\gamma_1 \varepsilon_1 / \gamma_2) n_1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Дифференцируя первое уравнение системы ((1.20) по времени и используя второе уравнение, приходим к уравнению для гармонического осциллятора:

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0, \quad (1.21)$$

где  $\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  (такое же уравнение получается и для  $n_2$ ). Если в (1.21) ввести обозначение  $n_1 = x$ , то приходим к уравнению (1.2).

Отметим, что в уравнениях (1.18) существует еще одна точка равновесия  $N_1^0 = 0$ ,  $N_2^0 = 0$ , вблизи которой система ведет себя совершенно иначе, чем гармонический осциллятор. Это поведение будет более подробно исследовано в главе 2.

#### § 4. “Экономический маятник” — линейные колебания в простой модели экономики [10]

Будем называть экономическую систему замкнутой, если весь произведенный продукт либо потребляется, либо вкладывается в рамках этой же экономической системы, т.е. отсутствуют экспорт, импорт и приток капитала извне. Пусть  $Y$  — объем производства,  $C$  — потребление,  $I$  — капиталовложения. Для некоторой замкнутой экономической системы в момент времени  $t$  можно написать  $Y = C + I$ . Если имеет место приток капитала (например, правительственные расходы  $G$ ), то экономика уже перестает быть замкнутой и объем производства увеличивается на величину  $G$ :

$$Y = C + I + G. \quad (1.22)$$

Потребление возрастает с увеличением объема производства, т.е.

$$C = Yd = Y(1 - S), \quad (1.23)$$

где  $d$  и  $S$  — предельные склонности к потреблению и сбережению. Предположим, что правительственные расходы  $G_0$  постоянны. В каждый момент времени  $t$  в экономике существует спрос  $D(t)$ , определяющий желаемый уровень потребления и капиталовложений. Задача состоит в следующем: сбалансировать экономику таким образом, чтобы объем производства совпал со спросом, т.е.  $D(t) = Y(t)$ . Однако на практике производство не может мгновенно реагировать на изменение спроса (существует запаздывание  $\tau$ , которое связано со временем, необходимым, например, для постройки нового завода и т.п.). Чтобы сбалансировать экономику при наличии запаздывания, нужно составлять планы на будущее и строить производство так, чтобы удовлетворить прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1 - S)Y(t - \tau) + I(t) + G_0. \quad (1.24)$$

В уравнении (1.24) сделано предположение, что за время  $\tau$  капиталовложения существенно не меняются, т.е.  $I(t - \tau) = I(t)$ . При малых  $\tau$  разность  $[Y(t) - Y(t - \tau)]/\tau \approx dY/dt$ , поэтому

$$Y(t - \tau) = Y(t) - \frac{dY}{dt} \tau + O(\tau^2), \quad (1.25)$$

где через  $O(\tau^2)$  обозначены все величины порядка  $\tau^2$  и выше. Уравнение (1.23) с учетом соотношения (1.24) и основного требования  $D(t) = Y(t)$  с точностью до величины первого порядка относительно  $\tau$  принимает вид:

$$(1 - S)\tau \frac{dY}{dt} = -SY(t) + I(t) + G_0. \quad (1.26)$$

Хотя величина  $I(t)$  за время порядка  $\tau$  существенно не меняется, она не является постоянной. Капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одна из возможных стратегий в области капиталовложения — “принцип акселератора”, согласно которому желательное выполнение соотношения  $I(t) = a dY/dt$ ,  $a > 0$ . Это равенство не может точно выполняться, но к нему можно приближаться, если считать, что

$$\frac{dI}{dt} = b[a \frac{dY}{dt} - I(t)], \quad b > 0. \quad (1.27)$$



Уравнения (1.26) и (1.27) являются динамической моделью экономики. Поставим  $I(t)$  из уравнения (1.27) в уравнение (1.26); тогда имеем:

$$(1 - S)\tau \frac{d^2 Y}{dt^2} + S \frac{dY}{dt} = ba \frac{dY}{dt} - b(1 - S)\tau \frac{dY}{dt} - bSY + bG_0.$$

Вводя обозначения  $y(t) = Y(t) - G_0/S$ , получим

$$(1 - S)\tau \frac{d^2 y}{dt^2} + [S - ba + (1 - S)\tau b] \frac{dy}{dt} + Sby = 0.$$

Таким образом, разность между объемом производства и постоянной величиной  $G/S$  удовлетворяет уравнению (1.1) где

$$2\gamma = \frac{S - ba(1 - S)\tau b}{\tau(1 - S)} \quad \omega_0^2 = \frac{Sb}{\tau(1 - S)} > 0. \quad (1.28)$$

Если величина  $\gamma$  неотрицательна, то имеют место либо затухающие колебания ( $\gamma$ ), либо колебания величины  $Y$  около  $G_0/S$  ( $\gamma = 0$ ). Последнее соответствует периодам подъема и спада в экономике. Когда  $\gamma < 0$ , то, как будет показано в дальнейшем, возникает неустойчивость, с возрастанием времени пики подъемов увеличиваются все больше, так же, как и глубина спадов.

## § 5. Электрон в магнитном поле. Электроны — осцилляторы

Следующий пример осциллятора вновь из области физики, это движение заряженной частицы (электрона) в однородном магнитном поле. На первый взгляд этот пример отличается от рассмотренных выше физических осцилляторов. Мы уже привыкли, что для существования гармонических колебаний необходимо наличие возвращающей силы (или момента силы, или напряжения, как в контуре), которая растет пропорционально отклонению системы от положения равновесия. В данном случае такой "силы" нет, однако получаемое уравнение оказывается совпадающим с уравнением гармонического осциллятора. Пусть электрон движется в однородном магнитном поле  $H_0$ , направленном вдоль оси  $z$ . Будем предполагать, что скорость электрона может быть достаточно большой и пользоваться релятивистскими уравнениями движения. Они имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{e}{c} [\mathbf{v}, H_0 \mathbf{z}^0], \quad (1.29)$$

где  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс электрона,  $e$  — абсолютная величина его заряда,  $c$  — скорость света,  $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  — релятивистская масса,  $m_0$

— масса покоя,  $\mathbf{z}^0$  — единичный вектора в направлении оси  $z$ . В правой части (1.29) стоит сила Лоренца, действующая на электрон со стороны магнитного поля. Ее составляющая вдоль магнитного поля равна нулю, поэтому продольная компонента импульса сохраняется  $p_z = \text{const}$ . Легко видеть, что сохраняется также величина (но не направление!) полного импульса. Чтобы показать это, умножим (1.29) скалярно на  $\mathbf{p}$ . Тогда в левой части получаем  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = (1/2)dp^2/dt$ , а в правой части  $\mathbf{p} \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{z}^0] = m\mathbf{z}^0 \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{v}] = 0$ . Таким образом,  $p^2 = \text{const}$ . Отсюда следует, что масса  $m$  в процессе движения также остается неизменной, и тогда в уравнении (1.29) ее можно вынести из под знака производной, после чего переписать это уравнение, разделив продольное и поперечное движения частицы, в виде

$$\dot{v}_x = -\omega_c v_y, \quad \dot{v}_y = \omega_c v_x \quad (1.30)$$

и  $v_z = \text{const}$ . Здесь введена величина  $\omega_c$  с размерностью частоты:

$$\omega_c = \frac{eH_0}{mc} = \frac{eH_0\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_0c}, \quad (1.31)$$

которая называется *циклотронной* частотой вращения электрона.

Введем вместо двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$  одну комплексную функцию  $Z(t) = x(t) + iy(t)$ . Умножим второе уравнение в (1.30) на мнимую единицу и сложим с первым; в результате получаем

$$\ddot{Z} + i\omega_c \dot{Z} = 0. \quad (1.32)$$

Уравнение (1.32) отличается от уравнения гармонического осциллятора, но оно также имеет колебательные решения. Чтобы показать это, проинтегрируем (1.32) один раз по времени:  $\dot{Z} + i\omega_c Z = Z_0$ , ( $Z_0$  — постоянная интегрирования) и введем новую переменную  $\tilde{Z} = Z - Z_0$ . Для нее получается уравнение

$$\dot{\tilde{Z}} + i\omega_c \tilde{Z} = 0, \quad (1.33)$$

решение которого есть  $\tilde{Z}(t) = \tilde{Z}(0) \exp(-i\omega_c t)$ . Таким образом,  $Z(t) = Z_0 + \tilde{Z}(0) \exp(-i\omega_c t)$  и, разделяя действительную и мнимую части  $Z(t)$ , получаем для поперечных координат электрона формулы

$$x(t) = x_0 + r_c \cos(\omega_c t - \varphi_0), \quad y(t) = y_0 - r_c \sin(\omega_c t - \varphi_0), \quad (1.34)$$

где  $Z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $r_c = |\tilde{Z}|$ ,  $\varphi_0 = \text{Arg } \tilde{Z}$ . Соотношения (1.34) показывают, что в плоскости  $(x, y)$ , поперечной к направлению магнитного поля,

электрон вращается по окружности радиуса  $r_c$  с центром в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ , причем вращение происходит по часовой стрелке. Угловая скорость вращения равна циклотронной частоте. С учетом продольного движения, траектория электрона есть винтовая линия. Положение центра орбиты и ее радиус определяются начальными условиями. В частности легко показать, что радиус орбиты связан с сохраняющейся величиной поперечной скорости электрона соотношением  $r_c = v_{\perp}/\omega_c$ .

Из уравнения (1.32) можно получить и непосредственно уравнение осциллятора. Для этого сделаем подстановку  $Z(t) = \exp(-i\omega_c t/2)Y(t)$ ; для функции  $Y(t)$  имеем

$$\ddot{Y} + (\omega_c/2)^2 Y = 0, \quad (1.35)$$

что совпадает с (1.2), если положить  $\omega_0 = \omega_c/2$ .

Поведение совокупности большого числа электронов в постоянном магнитном поле во многом аналогично поведению системы большого числа несвязанных между собой осцилляторов. Чтобы подчеркнуть эту аналогию, используют специальный термин *электроны — осцилляторы*. Среда из электронов-осцилляторов определяет свойства таких сложных систем, как плазма в магнитном поле (циклотронный резонанс и спектр возможных электромагнитных волн [11, 12]), металлы (геликоидальные и магнитоплазменные волны [11, § 88-89]) и многих других. Если следовать законам квантовой механики, необходимо учитывать то, что энергия осциллятора квантуется, то есть может принимать только определенные дискретные значения. Квантовые уровни энергии осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$  равны

$$E_0 = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) \quad (1.36)$$

( $n$  — номер уровня). Для электрона в магнитном поле  $\omega_0 = \omega_c$ , формула (1.36) в этом случае определяет значения уровней Ландау [13] — дискретных уровней энергии вращения. Отметим, что квантуется только поперечное к магнитному полю движение, так как продольные импульс и связанная с ним кинетическая энергия могут принимать произвольные, определяемые начальными условиями, значения.

Существование уровней Ландау приводит к таким макроскопическим эффектам, как диамагнетизм Ландау [14], квантовые осцилляции проводимости металлов (эффект Шубникова-де Гааза) [11, § 90], квантовый эффект Холла [15, 16].

В электронике СВЧ среда из электронов — осцилляторов используется в качестве активного вещества для генерации и усиления мощного

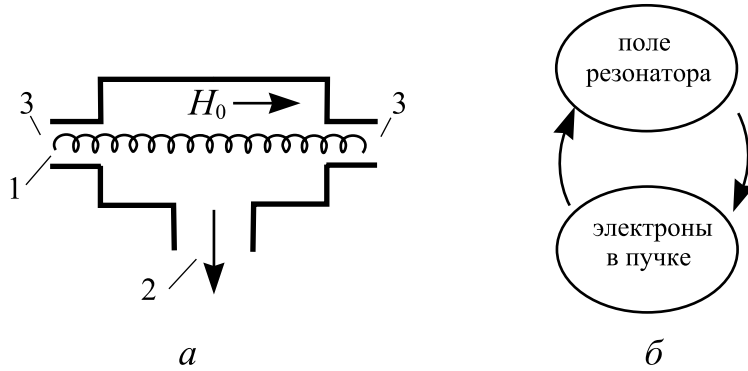


Рис. 1.3. Простейший мазер на циклотронном резонансе — МЦР-монотрон. *а* — схематическое устройство монотрона [17]: 1 — винтовой электронный пучок (показана траектория только одного электрона), 2 — вывод электромагнитной энергии, 3 — отверстия в стенках резонатора для транспортировки пучка; *б* — качественная картина самосогласованного взаимодействия пучка с полем в резонансном электронном генераторе [18].

электромагнитного излучения. На этом принципе работают, в частности, *мазеры на циклотронном резонансе* (МЦР) [17]. Простейшим МЦР-генератором является гиромонотрон (рис. 1.3,*а*). В нем электронный поток движется в сильном продольном магнитном поле через металлическую полость, называемую *резонатором*. Поперечная компонента скорости электронов создается за счет специальной конструкции электронной пушки, поэтому каждый электрон движется по винтовой траектории. Все вместе электроны образуют среду из несвязанных между собой (если не учитывать поле пространственного заряда электронов) осцилляторов.

Предназначение резонатора двоякое. С одной стороны, он поддерживает колебания электромагнитного поля, которое действует на электроны и индуцирует в пучке переменный ток. Этот ток, в свою очередь, возбуждает в резонаторе дополнительное поле, которое при определенных условиях складывается с первичным полем, усиливая его. Таким образом, электромагнитное поле действует на электроны, а электроны возбуждают поле в резонаторе. Говорят, что происходит самосогласованное взаимодействие электронного пучка и электромагнитного поля. Сказанное схематически

иллюстрируется рисунком 1.3,б<sup>2</sup>.

Представленная на этом рисунке схема лежит в основе работы всех резонансных электронных СВЧ генераторов [18]. Гиромонотрон выделяется среди них тем, среда из осцилляторов состоит из вращающихся в постоянном магнитном поле электронов. При взаимодействии с полем резонатора, осцилляторы могут как забирать у него энергию, так и отдавать ее благодаря процессам индуцированного (вынужденного) поглощения или индуцированного излучения, точно также, как это делают атомы рабочего вещества в оптических лазерах. Наглядная качественная картина работы МЦР-монотрона, опирающаяся на аналогию между поведением классического и квантового осцилляторов, была дана в лекциях [17]<sup>3</sup>. Известно, что если квантовая система имеет дискретные уровни  $E_n$ , ее переход из начального состояния  $n$  в конечное состояние  $m$  под действием переменного поля сопровождается поглощением или излучением кванта поля с частотой  $\omega_{n,m}$ , определяемой формулой Бора

$$E_n - E_m = \pm \hbar \omega_{n,m}. \quad (1.37)$$

Знак плюс соответствует излучению кванта, а знак минус — его поглощению. Для осциллятора энергетические уровни определяются формулой (1.36). Если процессы излучения преобладают над процессами поглощения, то в целом энергия переходит от пучка к полю, усиливая его. Легко показать, что в среде из линейных осцилляторов энергия может только поглощаться. Связано это с тем, что спектр энергий линейного осциллятора *эквидистантный*, т.е. расстояние между любыми двумя соседними уровнями одинаково и равно, как следует из (1.36),  $\Delta E = \hbar \omega_0$ . Взаимодействие наиболее эффективно, если переходы происходят между соседними уровнями, когда номер уровня  $n$  меняется на единицу, из (1.37) при этом следует, что расстояние между уровнями должно равняться энергии кванта, или  $\omega_0 \approx \omega$  ( $\omega$  — частота поля в резонаторе). По законам квантовой механики [19] вероятность перехода  $n \rightarrow n + 1$  с поглощением кванта пропорциональна величине  $(n + 1)|E(\omega_{n+1,n})|^2$ , а вероятность перехода  $n \rightarrow (n - 1)$  с излучением кванта пропорциональна величине  $n|E(\omega_{n,n-1})|^2$ , где  $|E(\omega)|$  — амплитуда колебаний поля на частоте  $\omega$ . Таким образом, интенсивность энергообмена между электронами и полем  $I$

---

<sup>2</sup>Интересно отметить, что колебания поля в резонаторе также описываются уравнением гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила.

<sup>3</sup>Для понимания следующего материала следует знать основы квантовой физики. Впрочем, он может быть пропущен без ущерба для дальнейшего изложения.

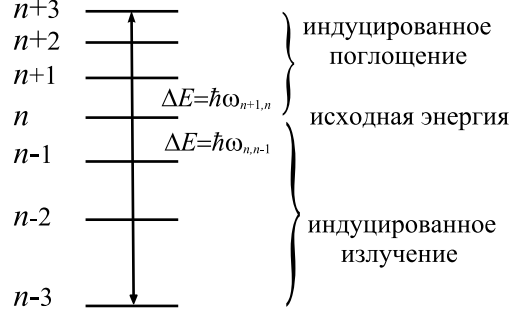


Рис. 1.4. Спектр уровней Ландау для среды из электронов—осцилляторов [17].

определяется выражением

$$I \sim n|E(\omega_{n,n-1})|^2 - (n+1)|E(\omega_{n+1,n})|^2. \quad (1.38)$$

Если спектр эквидистантный, то  $\omega_{n,n-1} = \omega_{n+1,n}$ , и из (1.38) получаем  $I < 0$ , т.е. энергия может только поглощаться.

Может показаться, что уровни Ландау образуют эквидистантный спектр и МЦР-монотрон работать не может, однако это не так. Дело в том, что циклотронная частота  $\omega_c$  сама зависит от энергии электрона через релятивистскую массу  $m$ , поэтому соотношение (1.36) нужно рассматривать как неявную формулу для определения энергии, так как она входит и в левую и в правую части (1.36). Следовательно энергетический спектр среды из электронов — осцилляторов является неэквидистантным. Расстояния между соседними уровнями лишь приближенно равны  $\hbar\omega_c$ , по мере увеличения энергии спектр сгущается (рис. 1.4). На классическом языке это эквивалентно уменьшению частоты вращения электронов с ростом их скорости. Действительно, при  $\beta = v/c \ll 1$ , формулу (1.31) можно приближенно записать в виде

$$\omega_c \approx \frac{eH_0}{m_0c} (1 - \beta^2/2), \quad (1.39)$$

что подтверждает сказанное. Поэтому поглощение (переходы  $n \rightarrow n+1$ ) и излучение (переходы  $n \rightarrow n-1$ ) происходят на разных, хотя и очень близких частотах

$$\omega_{n+1,n} - \omega_{n,n-1} \approx - \left( \frac{\hbar\omega_c}{E_n} \right) \frac{\beta^2}{2} \omega_c.$$

Если интенсивность спектра переменной силы  $|E(\omega)|$  на частотах  $\omega_{n+1,n}$  и  $\omega_{n,n-1}$  разная, то вероятность излучения может превысить вероятность поглощения. Из выражения (1.38) видно, что для этого, во всяком случае, требуется выполнение условия  $d|E(\omega_c)|^2/d\omega > 0$ .

У нас нет возможности останавливаться на этом рассмотрении более подробно, детали простых, но красивых оценок, которые позволяют определить основные параметры и рабочие характеристики МЦР-генераторов можно найти в лекциях [17]. Здесь упомянем только одно обстоятельство. На самом деле величина элементарного кванта энергии  $\hbar\omega_c$ , которым обмениваются пучок и поле, настолько мала по сравнению с энергией, излучаемой монотроном, что квантовые эффекты не играют в его работе практически никакого значения. Взаимодействие носит чисто классический характер и большинство существующих теорий МЦР-приборов используют классические, а не квантовые законы. Привлечение квантовой аналогии оказывается, однако, очень полезным для выяснения сути явления и проведения оценок. Такая ситуация характерна для многих задач теории колебаний и волн.

## § 6. Изохронные и неизохронные колебания

В предыдущем параграфе показано, что частота электрона — осциллятора зависит от его энергии. В таких случаях говорят, что колебания осциллятора *неизохронные*. В противном случае, когда такой зависимости нет, осциллятор называется *изохронным*. В уравнении (1.2) частота  $\omega_0$  считается константой, поэтому колебания обычного линейного осциллятора изохронные. Если уравнение осциллятора нелинейное, то его колебания чаще всего (но не всегда) будут неизохронными.

Рассмотрим этот вопрос более подробно на примере одномерного движения частицы массы  $m$  в поле с потенциальной энергией, показанной на рис. 1.5. Очевидно, что если полная энергия частицы  $W$  меньше, чем  $W_0$  — высота максимума потенциальной кривой — и она находится слева от точки  $x_0$ , то частица будет совершать колебания между двумя точками  $x_1$  и  $x_2$ , которые можно найти из решения уравнения

$$W_{\text{п}}(x) = W. \quad (1.40)$$

Точки  $x_1$  и  $x_2$  называются точками поворота. В системе сохраняется энергия  $mv^2/2 + W_{\text{п}}(x) = W = \text{const}$ , поэтому

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2[W - W_{\text{п}}(x)]/m}. \quad (1.41)$$

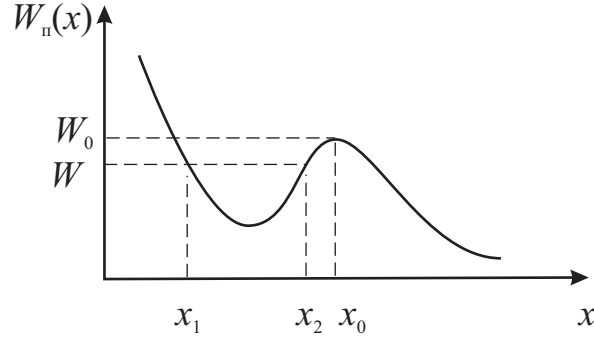


Рис. 1.5. Колебания частицы в потенциальной яме;  $x_1$  и  $x_2$  — точки поворота.

Два знака корня соответствуют движению частицы слева направо и справа налево. Для двух этих участков траектории в каждой точке  $x$  скорости равны друг другу по абсолютной величине, поэтому время движения от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени движения от  $x_2$  до  $x_1$ . Используя уравнение (1.41), можно записать для времени одного полного цикла, т.е. для периода колебаний

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[W - W_n(x)]/m}}. \quad (1.42)$$

Из этой формулы следует, что для произвольной потенциальной функции  $W_n(x)$  период колебаний, вообще говоря, должен зависеть от энергии  $W$ . Эта зависимость обусловлена, во-первых, наличием  $W$  в знаменателе подинтегрального выражения, а во-вторых, тем, что пределы интегрирования также зависят от энергии, так как они есть результат решения уравнения (1.40).

Обратимся к примерам. Самый простой случай, это линейный осциллятор, для него  $W_n(x) = kx^2/2$ . Поскольку  $W_n(x)$  — четная функция и точки поворота  $x_{1,2} = \pm a$  симметрично расположены относительно нуля, то интеграл в (1.42) можно брать только по положительным значениям  $x$ , а результат умножить на два. Подставляя соотношение  $ka^2/2 = W$  вместе с выражением для  $W_n(x)$  в (1.42), получаем

$$T = 4\sqrt{m/k} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\sqrt{m/k} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$



Как и следовало ожидать, получился тривиальный результат: линейный осциллятор совершает изохронные колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ .

Второй пример — маятник, причем будем считать, что угол отклонения от нижнего положения равновесия может быть большим (но не превышать по модулю  $\pi$ , чтобы движение маятника было колебательным). Потенциальная энергия равна  $W_{\text{п}}(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi)$ , и, используя аналогию между грузиком на пружинке и маятником, записываем выражение для периода колебаний

$$T = 4 \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2[W - mgl(1 - \cos \varphi)]/I}}. \quad (1.43)$$

Максимальный угол отклонения  $\varphi_m$  находится из условия  $W = mgl(1 - \cos \varphi_m)$ , подставляя которое в (1.43), получаем

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_m)}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_m/2) - \sin^2(\varphi/2)}}, \quad (1.44)$$

$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Обозначим  $\varkappa = \sin(\varphi_m/2) = \sqrt{W/(2mgl)}$ ,  $0 < \varkappa < 1$ , и сделаем замену переменных  $\sin(\varphi/2) = \varkappa t$ , тогда формулу (1.44) можно преобразовать к виду

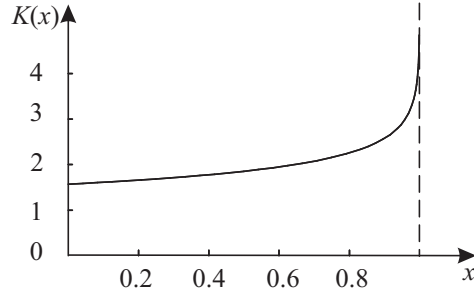
$$T = \frac{4}{\omega_0} K(\varkappa^2). \quad (1.45)$$

где  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл первого рода [20]

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-xt^2}}, \quad (1.46)$$

Вид функции  $K(x)$  показан на рис. 1.6, из него следует, что период колебаний математического маятника увеличивается с ростом амплитуды колебаний, причем в пределе  $\varphi_m \rightarrow \pi$ , когда маятник близко подходит к верхнему положению равновесия, период стремится к бесконечности. Таким образом, математический маятник совершает неизохронные колебания.

Полезно определить поправку к периоду линейных колебаний  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ , если  $\varphi_m$  мало, но конечно, что соответствует случаю  $\varkappa \approx$

Рис. 1.6. Функция  $K(x)$ 

$\varphi/2 \ll 1$ . В этом пределе в формуле (1.46) можно положить  $(1 - \kappa^2 t^2)^{-1/2} \approx 1 + \kappa^2 t^2/2$ , тогда приближенно

$$K(\kappa^2) \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 dx}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right).$$

Подставляя этот результат в формулу (1.45) и выражая  $\kappa$  через  $\varphi_m$ , получаем

$$T = T_0(1 + \varphi_m^2/16). \quad (1.47)$$

Из формулы (1.47) следует, что поправка с периоду за счет нелинейности колебаний мала: маятник можно считать изохронным при выполнении условия  $\varphi_m^2/16 \ll 1$ . При угле в  $30^\circ$  относительное изменение периода составляет 0,017, то есть не более двух процентов. Таким образом, при малых отклонениях колебания маятника можно считать изохронными, а при достаточно больших углах этого делать уже нельзя.

Итак, *линейные* колебания изохронны. Однако это не значит, что таковыми будут любые *малые* колебания. Рассмотрим потенциальную энергию вида  $W_{\text{п}}(x) = c|x|^n$ , где  $c > 0$  — константа, а  $n > 1$  — показатель степени, который может быть нецелым. Для такого потенциала точка минимума  $x = 0$ , малые колебания вблизи минимума подчиняются закону  $m\ddot{x} + cn \operatorname{sign}(x)|x|^{n-1} = 0$ . Это уравнение нелинейное, если  $n \neq 2$ . Период колебаний определяется по формуле (1.42), в которую следует подставить  $x_{1,2} = \pm a$ ,  $W = ca^n$ ,  $a$  — максимальное отклонение частицы от нуля. После простых преобразований получаем

$$T = 2\sqrt{2mc}^{-(n+2)/(2n)} W^{-(n-2)/2n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}.$$

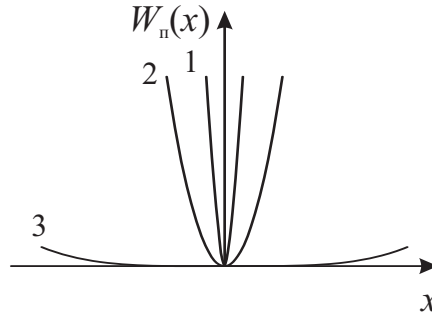


Рис. 1.7. Потенциальная энергия  $W_n(x) = c|x|^n$ : 1 —  $1 < n < 2$ , 2 —  $n = 2$ , 3 —  $n > 2$ .

Интеграл есть число порядка единицы, зависящее только от  $n$ , поэтому  $T(W) \sim W^{-(n-2)/2n}$ . При  $n = 2$ , как и должно быть, колебания изохронны. Если  $1 < n < 2$ , то с уменьшением энергии период уменьшается, стремясь к нулю при  $W \rightarrow 0$ , если же  $n > 2$ , то с уменьшением энергии период, увеличивается, стремясь в нулевом пределе к бесконечности. Разное поведение системы в этих двух случаях объясняется различием в форме графика функции потенциальной энергии (рис. 1.7): при  $1 < n < 2$  с уменьшением энергии расстояние между точками поворота уменьшается быстрее, чем средняя скорость частицы на интервале  $[-a, a]$ , при  $n > 2$ , расстояние между точками поворота уменьшается, наоборот, медленнее, чем средняя скорость.

Этот пример показывает, что ответ на вопрос, будут ли изохронными колебания зависит не от того, являются они малыми или нет, а от того, являются колебания линейными, или они существенно нелинейны.

## § 7. Энергетические соотношения для усредненных величин. Теорема вириала

При решении задач в которых фигурирует энергия, необходимо всегда конкретизировать вид осциллятора, так как входящие в уравнения коэффициенты зависят от его физической природы. Выберем в качестве примера осциллятора грузик на пружинке. Его энергия состоит из суммы кинетической энергии движения грузика  $W_k = m\dot{x}^2/2$  и потенциальной энергии пружины  $W_p = kx^2/2$ . Используя найденное решение (1.6), по-

лучаем

$$W_{\text{к}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \quad W_{\text{п}} = \frac{kA^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (1.48)$$

Из этих формул видно, что и кинетическая и потенциальная энергии меняются с частотой, в два раза большей, чем частота изменения координаты. Полная энергия  $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = m\omega_0^2 A^2 = kA^2/2$ , естественно, сохраняется. Видно, что энергия, запасенная в гармоническом осцилляторе, пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний.

Наряду с соотношениями для мгновенных значений энергии, в теории важную роль играют формулы, связывающие усредненные величины. Для их вывода сделаем несколько определений.

Функция  $f(t)$  действительной переменной  $t$  называется периодической, если существует такое число  $T$ , что для любого  $t$  выполняется  $f(t+T) = f(t)$ . Очевидно, что если  $T$  — период, то периодом будут также  $2T$ ,  $3T$ , и т.д. Если функция  $f(t)$  кусочно непрерывна и отлична от константы, то она имеет единственный наименьший период, который для краткости называют просто периодом.

Средним значением периодической функции называется число

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt. \quad (1.49)$$

Черта сверху обычно означает операцию усреднения за период. Очевидно, что результат усреднения не зависит от конкретного значения  $t$  в пределах интегрирования, поэтому их чаще всего кладут равными 0 и  $T$ .

Операцию усреднения полезно ввести и для непериодической функции. Соответствующее определение имеет вид

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(t) dt. \quad (1.50)$$

**Задача 1.1.** Покажите, что для периодической функции определение (1.50) приводит к тому же результату, что и определение (1.49).

**Задача 1.2.** Докажите формулы  $\overline{\sin \omega t} = \overline{\cos \omega t} = 0$ ,  $\overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0$ ,  $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ .

**Задача 1.3.** Покажите, что если  $f(t)$  — периодическая функция, то  $\overline{\dot{f}(t)} = 0$ . Покажите, что этот результат сохраняет силу для непериодической функции  $f(t)$ , если она вместе со своей первой производной ограничена.

Вычислим средние значения кинетической и потенциальной энергий. Применяя операцию усреднения к формулам (1.48) и используя результаты задачи 1.2, легко находим

$$\overline{W}_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}, \quad \overline{W}_n = \frac{kA^2}{4}. \quad (1.51)$$

Поскольку  $\omega_0^2 = k/m$ , то  $\overline{W}_k = \overline{W}_n = m\omega_0^2 A^2/4$ . Итак, для гармонического осциллятора  $\overline{W}_k = \overline{W}_n = W/2$ . Это обстоятельство играет важную роль в определении статистических свойств газа из осцилляторов, как в классическом, так и в квантовом случаях. Равенство средних значений потенциальной и кинетической энергий характерно только для потенциальной энергии в виде параболы, т.е. только для гармонического осциллятора.

Равенство средних значений является частным случаем известной в механике теоремы *вириала* [21]. В простейшем виде она формулируется для одномерного движения частицы под действием силы  $F(x)$ . Умножим уравнение Ньютона  $m\ddot{x} = F(x)$  на  $x(t)$  и воспользуемся формулой  $x\ddot{x} = d(x\dot{x})/dt - \dot{x}^2$ . Это приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt}(mx\dot{x}) - m\dot{x}^2 = xF(x). \quad (1.52)$$

Усредним (1.52) по времени и, пользуясь результатом задачи 1.3, получаем

$$2\overline{W}_k + V = 0, \quad (1.53)$$

где  $V = \overline{x F(x)}$  — вириал системы [21]. Операция усреднения правомерна в двух случаях:

- 1) движение системы периодическое;
- 2) в процессе движения координата и скорость системы остаются ограниченными.

Мы предполагаем, что одно из этих условий выполнено.

Вернемся теперь к задаче о движении частицы в потенциальном поле  $W_{\Pi}(x) = c|x|^n$ . Вычисляя вириал, получаем,  $V = -x \overline{dW_{\Pi}/dx} = -n\overline{W_{\Pi}}$ . Поэтому можно записать  $2\overline{W_k} - n\overline{W_{\Pi}} = 0$  и  $\overline{W_k} + \overline{W_{\Pi}} = W$ , откуда следует

$$\overline{W_k} = \frac{nW}{n+2}, \quad \overline{W_{\Pi}} = \frac{2W}{n+2}. \quad (1.54)$$

Видно, что при  $n > 2$  справедливо соотношение  $\overline{W_k} > \overline{W_{\Pi}}$ , а при  $1 < n < 2$ , наоборот, соотношение  $\overline{W_k} < \overline{W_{\Pi}}$ . Равенство усредненных энергий выполняется только для гармонического осциллятора.

## ГЛАВА 2

### Осциллятор как динамическая система

*Динамические системы: основные определения и классификация. Примеры систем на фазовой плоскости. Линейный осциллятор: особая точка типа центр. Положения равновесия и особые точки. Фазовый портрет системы хищник — жертва. Особая точка типа седло.*

#### § 1. Динамические системы: основные определения и классификация

Уравнение гармонического осциллятора позволяет найти его состояние, т.е. координату и скорость в любой момент времени, если эти величины известны в некоторый начальный момент (при  $t = t_0$ ). Согласно этому свойству, осциллятор принадлежит к классу *динамических систем*. Понятие динамической системы лежит в основе всей современной теории колебаний, включая нелинейную динамику и теорию хаоса. Термины и методы теории динамических систем будут постоянно использоваться в этой книге, поэтому цель данной главы — дать основные определения, касаясь, в основном, тех понятий, которые используются именно в линейной теории колебаний и волн. Теорию нелинейных динамических систем можно изучить, например, по книгам [1–3]<sup>1</sup>. Здесь также будет рассмотрен один из главных методов теории динамических систем используемых при исследовании систем второго порядка, к которым относится и осциллятор, — метод фазовой плоскости. Метод фазовой плоскости был развит в работах Л.И. Мандельштама и его учеников и замечательно изложен в лекциях [4] и книге [1].

Интуитивное определение динамической системы базируется на понятиях *состояния* и *детерминированной*, т.е. однозначно предопределенной эволюции во времени системы любой природы. Хотя существуют более

---

<sup>1</sup>Эти вопросы будут являться также предметом других книг серии “Современная теория колебаний и волн”, к которой принадлежит этот учебник.

строгие математические определения (см., например, [5]), мы воспользуемся определением динамической системы, понятным физику, которое принадлежит В.С. Афраймовичу [6]: “Динамическая система — математический объект, соответствующий реальным физическим (химическим, биологическим и др.) системам, эволюция во времени которых на бесконечном интервале времени однозначно определяется начальным состоянием. Можно сказать, что реальному процессу соответствует динамическая система, если этот процесс удастся описать с помощью системы уравнений (разностных, дифференциальных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственного решения для любого начального условия.”

Таким образом, динамическая система должна иметь единственное решение на бесконечности. Не любое дифференциальное уравнение, даже такое, для которого выполняются условия существования и единственности решения, определяет динамическую систему; например уравнение

$$\dot{x} = x^2 \quad (2.1)$$

имеет решение  $x(t) = x_0/(1 - x_0 t)$ , подчиняющееся при  $t = 0$  начальному условию  $x = x_0$ . Если  $x_0 > 0$ , то при  $t = 1/x_0$  решение обращается в бесконечность и дальше неопределено. Значит уравнение (2.1), имеющее само по себе смысл для всех начальных значений  $x_0$ , не отвечает никакой динамической системе. Интересно отметить, что если ограничить множество возможных состояний системы условием  $x < 0$ , то (2.1) становится динамической системой. Таким образом, чтобы определить динамическую систему, необходимо задать не только закон ее эволюции, но и множество ее возможных состояний.

Детерминированное описание динамической системы подразумевает, что случайные флуктуации, существующие в любой реальной системе и описываемые вероятностными законами, не принимаются во внимание. Поэтому такой подход справедлив только если эти флуктуации малы и не могут существенно повлиять на поведение системы.

Данное выше определение динамической системы неполно, пока не определено, что такое состояние. Под состоянием системы в момент времени  $t$  будем понимать значения физических (соответственно химических, биологических и т.д.) величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Такие величины называются *динамическими переменными*. Например, для осциллятора состояние системы однозначно определено заданием его координаты и скорости.



Множество всех возможных состояний системы называется *фазовым пространством*. На фазовом пространстве должно быть определено расстояние между любыми двумя элементами. Если число динамических переменных конечно и равно  $N$ , то фазовое пространство имеет конечную размерность, совпадающую с  $N$ . В таком случае фазовое пространство может быть вложено в обычное евклидово пространство конечной размерности. Системы с фазовым пространством конечной размерности называются *конечномерными* или *сосредоточенными*. Примеры из главы 1 относятся к сосредоточенным системам.

Во многих случаях состояние системы определяется заданием одной или нескольких функций. Например, колебания рояльной струны при некоторой идеализации описываются уравнением  $y_{tt} - v^2 y_{xx} = 0$ , где  $y(x, t)$  — поперечное смещение струны от положения равновесия,  $v$  — скорость поперечных волн, нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Чтобы рассчитать колебания струны, необходимо при  $t = 0$  задать две функции — начальное смещение  $y(x, 0)$  и начальную поперечную скорость  $y_t(x, 0)$ , т.е. бесконечный набор динамических переменных. Системы, обладающие таким свойством, называются *бесконечномерными* или *распределенными*. Сосредоточенные системы чаще всего описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, а распределенные системы — с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.

Кроме этого, динамические системы подразделяются на системы с непрерывным временем и системы с дискретным временем. В первом случае параметр  $t$  пробегает все возможные значения от начального  $t_0$  до бесконечности, во втором случае  $t$  принимает определенные дискретные значения. Например, в биологии дискретность времени может быть связана с сезонностью и годовыми циклами развития. Последовательные состояния системы во времени можно просто нумеровать индексом, принимающим целые значения. Поведение системы с дискретным временем описывается отображениями. Чрезвычайно популярна простая модель, описывающая развитие биологического вида, так называемое логистическое отображение  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ , где  $\lambda$  — положительный действительный параметр. Несмотря на кажущуюся простоту, логистическое отображение демонстрирует очень сложную динамику, исследование которой внесло огромный вклад в развитие современной теории динамического хаоса [7].

Динамические системы разделяются также на *автономные* и *неавтономные*. Автономным системам отвечают дифференциальные или разностные уравнения, в которые время не входит явным образом. Это значит, что параметры физической системы не зависят от времени и на нее

не действуют внешние силы. Неавтономные системы — это системы, в уравнения которых время входит явно.

Рассмотрим конечномерную динамическую систему с непрерывным временем. Любая точка, принадлежащая ее фазовому пространству определяет возможное начальное состояние. Эволюция системы во времени сопровождается изменением ее динамических переменных  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , при этом точка, изображающая состояние системы в фазовом пространстве, перемещается вдоль некоторой кривой, которая называется *фазовой траекторией*. Для систем с дискретным временем фазовой траекторией называют упорядоченное множество состояний системы  $x_0, x_1, \dots$ , которые она принимает в соответствии с законом эволюции.

**Задача 2.1.** Исходя из определения динамической системы, покажите, что ее фазовые траектории не могут пересекаться.

## § 2. Особая точка типа центр

Линейный осциллятор — динамическая система с непрерывным временем и размерностью фазового пространства, равной двум. В качестве динамических переменных выступают координата осциллятора  $x$  и его скорость<sup>2</sup>  $\dot{x}$ . Поскольку обе эти величины могут принимать произвольные действительные значения, то фазовым пространством линейного осциллятора является плоскость  $R^2$ , на которой можно ввести декартову систему координат, откладывая вдоль осей  $x$  и  $\dot{x}$ . Картину фазовых траекторий осциллятора проще всего получить, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2W/k})^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\sqrt{2W/m})^2} = 1, \quad (2.2)$$

откуда следует, что фазовые траектории являются эллипсами с полуосями  $\sqrt{2W/k}$  и  $\sqrt{2W/m}$ . При изменении энергии осциллятора  $W$  размер эллипса также меняется, так что вся совокупность траекторий представляет собой систему вложенных друг в друга эллипсов, охватывающих начало координат (рис. 2.1). Помимо этого, есть еще одна траектория  $x(t) \equiv 0$ ,  $\dot{x}(t) \equiv 0$ , отвечающая осциллятору, покоящемуся в положении равновесия.

---

<sup>2</sup>Для механических систем часто вместо скорости удобно использовать импульс  $p = m\dot{x}$ .

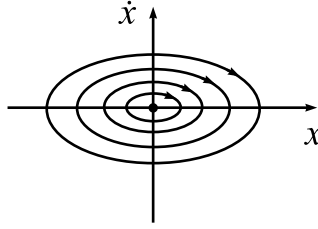


Рис. 2.1. Особая точка типа центр. Стрелки показывают направление движения изображающей точки.

Картина фазовых траекторий вблизи положения равновесия гармонического осциллятора называется *особой точкой типа центр*.

Наличие замкнутых фазовых траекторий говорит о том, что движение системы является периодическим. Действительно, если в момент  $t_0 + T$  изображающая точка оказывается в той же точке фазового пространства, в которой она была в момент  $t_0$ , то дальше, на временном интервале  $[t_0 + 2T, t_0 + 3T]$ , она повторит движение на интервале  $[t_0 + T, t_0 + 2T]$ , что и доказывает сделанное утверждение. Разумеется это свойство выполняется для любых автономных динамических систем, как с непрерывным, так и с дискретным временем, независимо от их размерности.

### § 3. Положения равновесия и особые точки

Динамическая система второго порядка с непрерывным временем описывается в общем случае системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2.3)$$

(для упрощения записи мы обозначили  $\dot{x} = y$ ). Предположим, что  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — аналитические функции своих переменных. Решения системы уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

определяют положения равновесия динамической системы: если в некоторый момент  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , где  $(x_0, y_0)$  — решение (2.4), то система и дальше будет оставаться в этом состоянии. Разделим второе уравнение в (2.3) на первое, и получим дифференциальное уравнение, которому подчиняются траектории на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2.5)$$

Каждая фазовая траектория динамической системы (2.3) является либо целой интегральной кривой уравнения (2.5), либо ее частью. Если правая часть в (2.5) с некоторой точке фазовой плоскости удовлетворяет условию существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения [5], то через эту точку проходит единственная интегральная кривая уравнения (2.5). Такая точка называется неособой. Условия существования и единственности нарушаются в точках, где выполняются уравнения (2.4). Таким образом, положения равновесия на фазовой плоскости являются одновременно особыми точками уравнения (2.5). По этой причине положения равновесия удобно классифицировать по типу особой точки. Через особую точку может проходить произвольное число интегральных кривых, либо не проходить ни одной [1]. В первом случае особые интегральные кривые состоят из кусков нескольких фазовых траекторий, во втором сама особая точка дает отдельную траекторию ( $x(t) \equiv 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ ).

Как было показано в предыдущем параграфе, линейному осциллятору отвечает особая точка второго типа, называемая центром. В случае центра система фазовых траекторий состоит из вложенных друг в друга гладких замкнутых кривых, окружающих положение равновесия. Центр присутствует на фазовой плоскости всех систем, для которых линеаризованные уравнения вблизи положения равновесия сводятся к уравнению линейного осциллятора (1.2) и у которых существует закон сохранения [3, 8]. Этот результат принадлежит А.М. Ляпунову, его доказательство выходит за рамки линейной теории.

Опираясь на это утверждение, можно сразу сказать, что рассмотренные в главе 1 нелинейный маятник, грузик на нелинейной пружинке и колебательный контур также имеют центр на фазовой плоскости. При учете нелинейности замкнутые траектории уже не будут в точности эллипсами, однако картина траекторий вблизи центра будет топологически эквивалентна картине траекторий линейного осциллятора.

#### § 4. Фазовый портрет системы хищник-жертва

Поскольку численности популяция обоих видов не могут быть отрицательными ( $N_1 \geq 0$ ,  $N_2 \geq 0$ ), то фазовым пространством будет четверть плоскости ( $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$ ). В § 3 установлено, что вблизи точки с координатами  $N_1^0 = \varepsilon_1/\gamma_2$ ,  $N_2^0 = \varepsilon_2/\gamma_1$  нелинейные уравнения (1.18) приводятся к виду уравнений линейного осциллятора. Покажем, что в этой точке на фазовой плоскости расположен центр. Для этого получим для уравнений (1.18) закон сохранения.

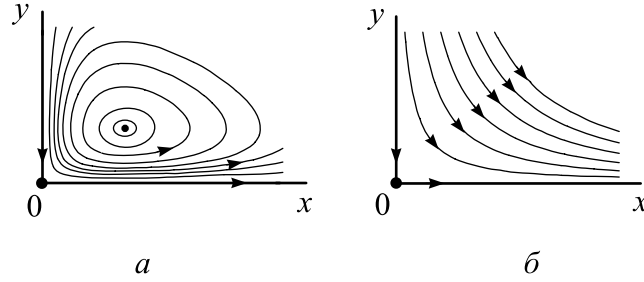


Рис. 2.2. Фазовый портрет системы хищник — жертва (а) и вид фазовых траекторий в окрестности особой точки типа седло (б)

Удобно перейти к безразмерным координатам  $x = N_1/N_1^0$ ,  $y = N_2/N_2^0$ . Сделав такой переход в (1.18) и поделив второе из этих уравнений на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x(y-1)}{y(x-1)},$$

где  $\alpha = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ . Это уравнение легко проинтегрировать:

$$(x - \ln x) + \alpha(y - \ln y) = C, \quad (2.6)$$

$C$  — постоянная интегрирования. При заданном  $C$  уравнение (2.6) определяет интегральную кривую на фазовой плоскости  $x, y$ . Подставляя в (2.6)  $x = 1 + \tilde{x}$ ,  $y = 1 + \tilde{y}$ ,  $|\tilde{x}|, |\tilde{y}| \ll 1$ , и разлагая логарифмы в ряд с помощью формулы  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ , получаем, что вблизи особой точки закон сохранения принимает вид  $\tilde{x}^2/2 + \alpha\tilde{y}^2/2 = C$ . Это говорит о том, что фазовые траектории вблизи особой точки являются вложенными друг в друга эллипсами, т.е. мы имеем дело с центром. Впрочем, этот вывод можно было бы сделать сразу, на основании закона сохранения (2.6), используя сформулированный выше критерий существования центра. Фазовый портрет системы хищник — жертва приведен на рис. 2.2,а.

**Задача 2.2.** Покажите, что на фазовой плоскости системы хищник — жертва все траектории, кроме положений равновесия и положительных полуосей  $x$  и  $y$  являются замкнутыми, т.е. отвечают периодическому движению.

## § 5. Особая точка типа седло

Система хищник — жертва имеет на фазовой плоскости еще одну особую точку — положение равновесия  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$ . Исследуем поведение фазовых траекторий вблизи нее. Для такого анализа достаточно считать в уравнениях (1.18) величины  $N_1$  и  $N_2$  малыми и провести линеаризацию, отбросив в (1.18) произведения малых величин  $N_1 N_2$ . В результате такой процедуры получаем в безразмерных переменных:

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y. \quad (2.7)$$

Решение этих уравнений не вызывает труда:  $x(t) = x_0 \exp(\varepsilon_1 t)$ ,  $y(t) = y_0 \exp(-\varepsilon_2 t)$  (считается, что при  $t = 0$  изображающая точка имеет на фазовой плоскости координаты  $(x_0, y_0)$ ). Из этого решения видно, что численность жертв экспоненциально нарастает, в то время, как численность хищников экспоненциально убывает с течением времени. Вдоль направления, параллельного оси  $y$ , точка приближается к положению равновесия, а вдоль направления, параллельного оси  $x$ , — убывает от него. Это поведение кардинально отличается от того, что мы имели в случае центра. Можно найти форму фазовой траектории вблизи особой точки. Для этого прологарифмируем выражения для  $x(t)$  и  $y(t)$  и приравняем  $t$  из обеих формул. Такая процедура приводит к соотношению  $\ln(x/x_0)/\varepsilon_1 + \ln(y/y_0)/\varepsilon_2 = \text{const}$ , из которого следует, что

$$x(t)y^\alpha(t) = x_0 y_0^\alpha = \text{const}, \quad (2.8)$$

где  $\alpha = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 0$ . Это уравнение показывает, что вблизи особой точки фазовые траектории имеют вид гипербол, причем роль асимптот выполняют оси координат.

Оси координат являются *особыми* траекториями. Чтобы исследовать их, предположим, что численность хищников при  $t = 0$  равна нулю. Подставив  $y = 0$  в уравнения, полученные после нормировки (1.18), находим  $\dot{y} = 0$ , т.е. равна нулю и скорость изменения хищников. Следовательно, величина  $y = 0$  не меняется со временем. В этом случае уравнение для  $x(t)$  из (1.18) совпадает с первым уравнением линеаризованной системы (2.7) и имеет то же самое решение  $x(t) = x_0 \exp(\varepsilon_1 t)$ . Это знаменитый закон Мальтуса, говорящий о том, что в условиях достаточного количества пищи и в отсутствии врагов вид размножается экспоненциально.

Найденное решение означает, что если в начальный момент изображающая точка лежит на положительной полуоси  $x$ , то она будет оставаться на ней всегда, удаляясь в пределе  $t \rightarrow \infty$  на бесконечность.

Можно рассматривать динамику в “обратном” времени, т.е. в пределе  $t \rightarrow -\infty$ . Очевидно, что при этом система приближается к нулевому положению равновесия, однако с течением времени изображающая точка движется все медленнее и медленнее, так что особая точка никогда не будет достигнута.

Таким образом, положительная полуось  $x$  (с выброшенной точкой  $x = 0$ ) представляет собой особую траекторию системы, двигаясь вдоль которой система выходит из положения равновесия при  $t = -\infty$  и удаляется на бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ . Полное время движения по такой траектории бесконечно.

Аналогично исследуется случай, когда при  $t = 0$  точка лежит на оси  $y$ . В этом случае  $x(t) \equiv 0$  и  $y(t) = y_0 \exp(-\varepsilon_2 t)$ . Эти формулы описывают вторую особую траекторию, двигаясь вдоль которой система приходит из бесконечности при  $t = -\infty$  и приближается к особой точке, никогда не попадая в нее, в пределе  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотренная особая точка называется особой точкой типа *седло*, а траектории, входящие и выходящие из седла, называются *сепаратрисами*. Картина фазовой плоскости вблизи седла характеризуется наличием следующих компонент: положения равновесия, сепаратрис и остальных фазовых траекторий, имеющие вид гипербол. Сепаратрисы разделяют области фазового пространства на множества траекторий с разным поведением при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Вид фазовых траекторий вблизи седла для системы хищник — жертва показан на рис. 2.2,б. На этом рисунке седло в некотором смысле вырождено, поскольку фазовое пространство системы ограничено условиями  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Ниже будет рассмотрен случай, когда таких ограничений нет.

Рассмотрим одномерное движение частицы вблизи максимума потенциальной энергии (рис. 2.3,а). Отсчитывая координату частицы  $x$  от точки максимума, запишем разложение потенциальной энергии в ряд вблизи этой точки:  $W_{\text{п}}(x) = W(0) - \beta^2 x^2/2 + O(x^3)$ . Мы предполагаем, что  $\beta^2 = (d^2 W_{\text{п}}/dx^2)_{x=0} > 0$ . Тогда линейное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0. \quad (2.9)$$

Оно отличается от уравнения консервативного осциллятора (1.2) только знаком перед вторым слагаемым. Решая уравнение (2.9) и вычисляя

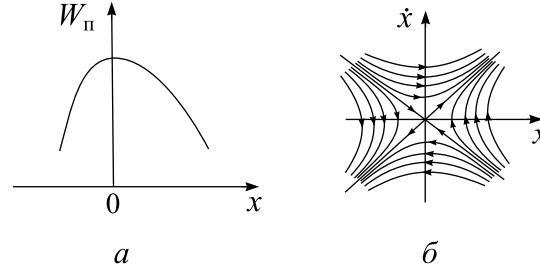


Рис. 2.3. Особая точка типа седло: вид потенциальной функции вблизи максимума (а) и картина фазовых траекторий вблизи неподвижной точки (б).

производную от полученного решения, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}, \\ \dot{x}(t) &= \beta(C_1 e^{\beta t} - C_2 e^{-\beta t}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $C_{1,2}$  — константы интегрирования. Комбинируя два уравнения в (2.10), запишем

$$\begin{aligned} C_1 e^{\beta t} &= \frac{1}{2} [x(t) + \dot{x}(t)/\beta], \\ C_2 e^{-\beta t} &= \frac{1}{2} [x(t) - \dot{x}(t)/\beta]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Предположим сначала, что  $C_1 C_2 \neq 0$ . Тогда, перемножив почленно уравнения в (2.11), получаем

$$\frac{x^2}{4C_1 C_2} - \frac{\dot{x}^2}{4C_1 C_2} = 1. \quad (2.12)$$

Это каноническое уравнение гиперболы.

Рассмотрим условия, при которых требование  $C_1 C_2 \neq 0$  нарушается. Пусть сначала  $C_2 = 0$ . Из второго уравнения (2.10) следует, что это возможно, если  $\dot{x}(t) = \beta x(t)$ . Множество точек на фазовой плоскости, удовлетворяющее этому условию, есть прямая с угловым коэффициентом  $\beta$ , проходящая через начало координат. Таким образом, изображающая точка остается на этой прямой во все последующие моменты времени.

Подставив  $C_2 = 0$  в (2.10), находим с увеличением  $t$  система уходит на бесконечность. При  $t \rightarrow -\infty$  изображающая точка, напротив, стремиться к точке равновесия. Прямая  $\dot{x} = \beta x$  состоит из двух сепаратрис, выходящих из точки равновесия и, вдобавок, самой этой точки.



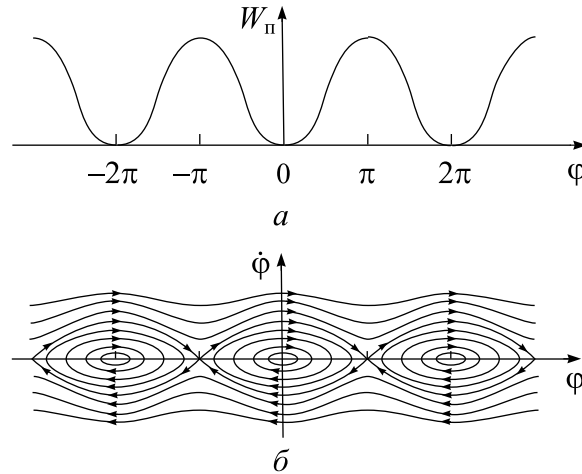


Рис. 2.4. Фазовая плоскость математического маятника: (а) — вид потенциальной функции и (б) — картина фазовых траекторий.

Аналогично, если  $C_1 = 0$ , то  $\dot{x}(t) = -\beta x(t)$ . Движение системы вдоль этой прямой таково, что при  $t \rightarrow \infty$  она приближается к точке равновесия, а при  $t \rightarrow -\infty$  — удаляется от нее. Эта прямая состоит из второй пары сепаратрис, входящих в особую точку и самой этой точки.

Таким образом в общем случае картины фазовых траекторий вблизи седла состоит из неподвижной точки, четырех особых траекторий — пары сепаратрис, входящих в особую точку и пары выходящих из нее, и остальных траекторий, которые вблизи седла близки по форме к гиперболам (рис. 2.3,б).

Еще одним примером системы, у которой на фазовой плоскости присутствуют седла, является математический маятник. Для него график потенциальной энергии имеет вид, показанный на рис. 2.4,а. Вблизи нижнего положения равновесия (т.е. при  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ , полная энергия системы приближенно равна  $W = mgl\varphi^2/2 + ml^2\dot{\varphi}^2/2$ , что соответствует локальному минимуму функции  $W(\varphi, \dot{\varphi})$ . Такие же минимумы расположены в точках  $\varphi = 2\pi n, \dot{\varphi} = 0$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . На фазовой плоскости маятника в этих точках находятся центры. Вблизи точек  $\varphi = \pi(2n + 1), \dot{\varphi} = 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  функция  $W(\varphi, \dot{\varphi}) \approx W = mgl[\varphi - \pi(2n + 1)]^2/2 + ml^2\dot{\varphi}^2/2$  — это седловые точки, на фазовой плоскости здесь находятся седла. Общая картина фазовых траекторий показана на рис. 2.4,б.

Движению вдоль сепаратрис соответствует тому, что маятник бесконечно долго находится в верхнем положении равновесия, затем, набирая

скорость, отклоняется от него, делает оборот и вновь бесконечно долго приближается к верхнему положению равновесия, которое будет достигнуто только при  $t \rightarrow \infty$ . Если энергия маятника больше, чем  $2mgl$ , то он вращается по или против часовой стрелки вокруг точки подвеса. На фазовой плоскости это соответствует траекториям, лежащим вне сепаратрис. Таким образом, сепаратрисы разделяют траектории с разным характером движения.

## § 6. Устойчивость положений равновесия

Вид фазовых траекторий вблизи центра и седла показывает, что если начальные условия заданы вблизи неподвижной точки, то поведение системы на больших временах может быть совершенно различным. В случае центра система совершает малые колебания и в любой момент времени остается вблизи точки равновесия. В случае седла фазовая траектория удаляется от положения равновесия на большие расстояния, если только начальное положение специально не было выбрано на сепаратрисе, входящей в седло. Это наблюдение приводит к понятию устойчивости неподвижной точки динамической системы. Введем определение устойчивой неподвижной точки, применимое к конечномерным динамическим системам [1, 3].

Неподвижная точка  $\mathbf{x}_0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$  динамической системы в  $N$ -мерном фазовом пространстве называется устойчивой (по Ляпунову), если для любого  $\varepsilon > 0$  всегда найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что из условия  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$  следует выполнение условия  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$  для любого  $t > 0$ . Если такого числа  $\delta$  не существует, то система называется неустойчивой.

Символ  $\|\dots\|$  означает расстояние в фазовом пространстве. Говоря другим языком, особая точка называется устойчивой, если система гарантированно остается достаточно близко от положения равновесия во все моменты времени, при условии, что ее начальное положение в фазовом пространстве выбрано произвольным, но достаточно близким к положению равновесия.

Кроме понятия устойчивости по Ляпунову, в теории динамических систем вводится также понятие асимптотически устойчивого положения равновесия.

Положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ .

Таким образом, для асимптотической устойчивости требуется, чтобы траектория системы не только все время оставалась в окрестности неподвижной точки, но и стремилась к ней при  $t \rightarrow \infty$ .

Центр является устойчивой по Ляпунову особой точкой, но не является асимптотически устойчивой. Седло — неустойчивая особая точка.

**Задача 2.3.** Докажите строго это утверждение.

Более подробное обсуждение роли устойчивости и неустойчивости в различных системах, а также критерии, позволяющие определить устойчивость особой точки конечномерной динамической системы, содержатся в главе 14.

## ГЛАВА 3

### Линейный осциллятор с затуханием

*Основные свойства осциллятора с затуханием. Логарифмический декремент и добротность. Колебания с медленно меняющейся амплитудой. Метод нормальных колебаний. Немного о квантовом осцилляторе. Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы. Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел*

#### § 1. Основные свойства осциллятора с затуханием.

##### Логарифмический декремент и добротность

В предыдущих главах основное внимание уделялось консервативному осциллятору в котором нет диссипации энергии. В реальных системах диссипация почти всегда присутствует, поэтому ее необходимо учитывать. Введение даже очень малых потерь качественно меняет динамику осциллятора — вместо периодических колебаний получаются затухающие. Меняется и вид фазовой плоскости. Все эти вопросы будут рассмотрены в данной главе.

В механических системах обычный способ введения затухания состоит в принятии гипотезы, согласно которой сила трения, действующая на осциллятор, пропорциональна его скорости:  $F_{\text{тр}} = -\lambda \dot{x}$ . Ясно, что такое предположение справедливо только для жидкого трения [1], и, вдобавок, выполняется лишь при относительно малых скоростях. Однако желание оставаться в рамках линейной теории заставляет считать это гипотезу справедливой.

Потери энергии в линейных электрических цепях обусловлены джоулевым нагревом. Закон Ома  $V_R = RI$  для сопротивления  $R$  ( $V_R$  — напряжение на сопротивлении,  $I$  — ток через него) экспериментально подтверждается значительно лучше, чем его аналог в механике. Уравнение колебаний в электрическом контуре с учетом сопротивления (рис. 3.1

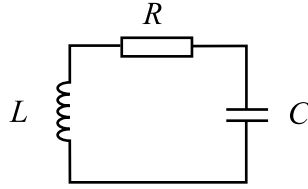


Рис. 3.1. Осциллятор с затуханием

имеет вид

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0. \quad (3.1)$$

После переобозначений  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ,  $2\gamma = R/(2L)$  это уравнение приводится к виду (1.1). Коэффициент  $\gamma$  называется коэффициентом затухания. Для механической осциллятора (грузик на пружинке) коэффициент затухания равен  $\gamma = \lambda/(2m)$ .

Для решения уравнения (1.1) воспользуемся общим методом решения линейных однородных дифференциальных уравнений [2]. Будем искать решение в виде  $x(t) = \exp(pt)$ . Подставляя  $x(t)$  в (1.1), проводя все дифференцирования и сокращая на общий множитель  $\exp(pt)$ , получаем, что предполагаемое решение действительно будет таковым, если параметр  $p$  удовлетворяет уравнению

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение называется характеристическим для уравнения (1.1). Оно имеет два корня

$$p_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (3.3)$$

которые либо действительны, если  $\gamma \geq \omega_0$ , либо комплексно сопряжены друг другу, если  $0 < \gamma < \omega_0$ . Основной интерес для нас пока будет представлять второй случай.

В этом режиме формулу (3.3) можно переписать в виде

$$p_{1,2} = -\gamma \mp i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.4)$$

Корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Двум корням характеристического уравнения соответствуют два решения  $x_{1,2} = \exp(p_{1,2}t)$ , поэтому, согласно принципу суперпозиции (см. главу 1), их

линейная комбинация

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (3.5)$$

( $C_{1,2}$  — константы) также является решением. В теории линейных дифференциальных уравнений показано, что если  $p_1 \neq p_2$ , то формула (3.5) дает общее решение. Константы  $C_{1,2}$  находятся из начальных условий. Предположим, что при  $t = 0$  выполняются начальные условия  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , т.е. заданы координата и скорость осциллятора. Тогда обычным образом из (3.5) получаем:

$$C_1 + C_2 = x_0, \quad p_1 C_1 + p_2 C_2 = v_0. \quad (3.6)$$

Решение системы уравнений (3.6) дает

$$C_1 = \frac{p_2 x_0 - v_0}{p_2 - p_1}, \quad C_2 = \frac{p_1 x_0 - v_0}{p_1 - p_2}. \quad (3.7)$$

Если выполнено условие слабого затухания, используя формулу (3.4), будем иметь

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обратим внимание, что  $C_1 = C_2^*$ . Такое соотношение должно выполняться всегда, если  $x(t)$  — действительная функция. Подставляя формулы (3.8) в (3.5), после простых преобразований приходим к окончательному выражению:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (3.9)$$

Эта формула дает решение уравнения гармонического осциллятора с затуханием для заданных при  $t = 0$  начальных условий. Напомним, что если начальные условия ставятся в момент времени  $t_0$ , то в (3.9) вместо  $t$  следует написать  $t - t_0$ .

Решение уравнения гармонического осциллятора можно также представить в виде

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.10)$$

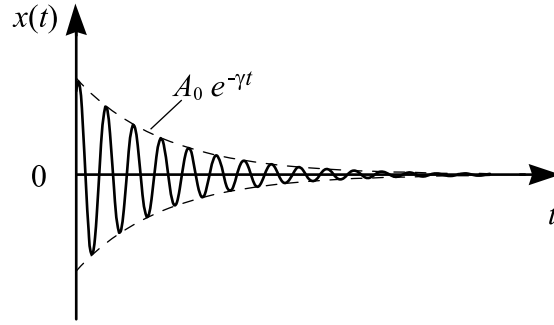


Рис. 3.2. Затухающие колебания

где

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2}, \quad (3.11)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0). \quad (3.12)$$

Зависимость координаты от времени  $x(t)$ , задаваемая выражением (3.10), показана на рис. 3.2.

Видно, что движение осциллятора больше не является периодическим, поэтому понятие амплитуды, периода и частоты колебаний в их прежнем понимании теряют смысл. Тем не менее, некоторые черты периодического процесса сохраняются. В частности, из (3.10) следует, что положение равновесия осциллятор проходит через равные интервалы времени  $T/2$ , где  $T = 2\pi/\omega$ . Легко показать, что точки максимума и минимума  $x(t)$  также следуют периодически, с периодом  $T$ . По этой причине параметр  $\omega$  иногда называют частотой затухающих колебаний, а параметр  $T$  — их периодом, несмотря на то, что функция  $x(t)$ , конечно, непериодическая.

Запишем формулу (3.10) в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.13)$$

где функция

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} \quad (3.14)$$

описывает изменение во времени “размаха” колебаний. Величину  $A(t)$  называют просто амплитудой затухающих колебаний. С течением времени амплитуда экспоненциально уменьшается, так что через время порядка

нескольких  $\tau = 1/\gamma$  колебания полностью затухают. Чтобы дать представление о скорости затухания, скажем, что через время  $2\tau$  амплитуда затухает в  $e^2 \approx 7,4$  раза, за время  $4\tau$  — в  $e^4 \approx 54,6$  раза, за время  $10\tau$  — в  $2,2 \cdot 10^4$  раз. Таким образом,  $\tau$  определяет характерное время изменения амплитуды и, следовательно, энергии колебаний.

Обозначим через  $A_n$  последовательные значения максимальных отклонений осциллятора от точки равновесия в сторону положительных значений  $x$ . Очевидно, что эти максимумы подчиняются рекуррентной формуле  $A_{n+1} = e^{-\gamma T} A_n$ . Величина  $d = \gamma T$  называется *логарифмическим декрементом затухания* осциллятора. За период  $T$  амплитуда уменьшается в  $\exp(-d)$  раз. Если, как это часто бывает,  $d \ll 1$ , то  $A_{n+1}/A_n \approx 1-d$ , откуда следует, что относительное изменение амплитуды за период равно логарифмическому декременту.

В современной теории колебаний более употребителен другой параметр, характеризующий затухание в осцилляторе — добротность. Она определяется через декремент с помощью формулы<sup>1</sup>.

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega}{2\gamma}. \quad (3.15)$$

Добротность и логарифмический декремент — безразмерные величины, поэтому они характеризуют потери осциллятора более полно, нежели коэффициент затухания. Два осциллятора с одинаковой добротностью теряют одинаковую долю своей начальной энергии за одинаковые промежутки времени, если измерять их в периодах  $T$ .

Из формулы (3.4) видно, что частота затухающих колебаний  $\omega$  отличается от параметра  $\omega_0$  в уравнении (1.1), однако это отличие мало для систем со слабым затуханием, для которых выполняется условие  $\gamma \ll \omega_0$ . Используя его, выражение для  $\omega$  можно представить в виде

$$\omega = \omega_0(1 - \gamma^2/\omega_0^2)^{-1/2} \approx \omega_0[1 - \gamma^2/(2\omega_0^2)].$$

С той же точностью выражение для добротности записывается как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right).$$

Отсюда видно, что  $Q \approx \omega_0/(2\gamma)$ , причем погрешность этой формулы составляет не более 0,5% при  $Q > 5$ .

---

<sup>1</sup>Мы надеемся, что использование традиционного обозначения добротности через  $Q$  не внесет путаницы ее с зарядом на обкладках конденсатора



Добротность разных осцилляторов может различаться друг от друга на много порядков. Радиотехнические контура обычно имеют добротность несколько десятков. Механические осцилляторы более добротны, для них  $Q$  порядка сотни. Резонаторы электронных СВЧ приборов, в которых происходят колебания электромагнитного поля имеют добротность от нескольких сотен до нескольких тысяч единиц. Открытые резонаторы, используемые в технике СВЧ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов характеризуются добротностью порядка  $10^4$ , тоже самое относится к оптическим резонаторам, применяемым в лазерах. Наконец, возбужденный атом можно трактовать как осциллятор, а спонтанное излучение кванта энергии и переход на нижний уровень — как затухание колебаний. Добротность такого резонатора составляет  $10^8$ .

## § 2. Колебания с медленно меняющейся амплитудой

Затухающие колебания линейного осциллятора не являются гармоническими, поскольку их амплитуда меняется во времени. Тем не менее, если добротность осциллятора велика, то в формуле (3.13) характерные временные масштабы изменения обоих сомножителей сильно различаются. Как показано выше, амплитуда  $A(t)$  заметно меняется за время порядка  $\tau$ , а для косинуса характерным временным масштабом является период  $T$ . Если добротность велика ( $Q \gg 1$ ), отношение  $\tau/T = 1/(\gamma T) = 1/d$  есть большая величина. Для таких систем “локально” можно считать, что колебания *почти гармонические*. Оговорка “почти” означает, что если проводить измерения координаты осциллятора  $x(t)$  на интервале времени в несколько периодов, то для того, чтобы отличить эту функцию от синусоиды, потребуется аппаратура с достаточно большой точностью, причем эта точность должна увеличиваться при переходе к системам с большей добротностью.

Различить гармонический сигнал и колебания затухающего осциллятора можно и формально математическим способом. Для этого следует воспользоваться аппаратом преобразования Фурье, которое разлагает произвольную функцию времени по совокупности гармонических колебаний.

Пусть  $f(t)$  — функция времени, удовлетворяющая достаточно общим

условиям<sup>2</sup>, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.16)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.17)$$

Формула (3.16), очевидно, осуществляет разложение функции  $f(t)$  на гармонические сигналы, а параметр  $\omega$  играет роль их частоты. Функция  $F(\omega)$  называется фурье-спектром, или частотным спектром сигнала  $f(t)$ . Вычислим фурье-спектр затухающего колебания (3.9), ограничившись, для простоты, случаем начальных условий  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  (покоящийся осциллятор получает толчком скорость  $v_0$ ). Подставляя формулу (3.9) в (3.17) и учитывая, что  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , после несложных преобразований получаем

$$X(\omega') = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 + (\omega' - \omega)^2} \sqrt{\gamma^2 + (\omega' + \omega)^2}} \quad (3.18)$$

(мы использовали обозначение  $\omega'$  для текущей частоты, т.к. символ  $\omega$  уже занят — он обозначает собственную частоту осциллятора).

Функция  $|X(\omega')|^2$  (ее еще называют спектром мощности сигнала) показана на рис. 3.3. Из него следует, что для затухающего колебания спектр, вообще говоря, является сплошным: он состоит из гармонических сигналов со всеми возможными частотами от  $-\infty$  до  $\infty$ . Если затухание мало ( $\gamma \ll \omega$ ), то функция спектр имеет вид двух острых пиков вблизи частот  $\omega' = \omega$  и  $\omega' = -\omega$ . Доминирующий вклад в полный сигнал дают спектральные составляющие с частотами, лежащими вблизи этих значений. Ширина пиков определяется величиной коэффициента затухания  $\gamma$ . Рассмотрим, например, поведение  $|X(\omega')|^2$  вблизи точки  $\omega' = \omega$ . В приближении  $\gamma/\omega \ll 1$  второй корень в знаменателе можно при этом считать

---

<sup>2</sup>Функция  $f(t)$  должна быть абсолютно интегрируемой в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  и на любом конечном интервале удовлетворять условиям Дирихле, т.е. иметь не более чем конечное число разрывов первого рода и этот интервал должен допускать разбиение на конечное число подинтервалов, на которых  $f(t)$  меняется монотонно [3].

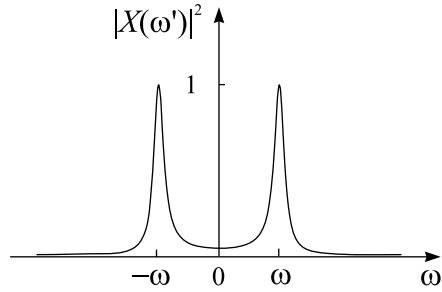


Рис. 3.3. Фурье спектр затухающего колебания линейного осциллятора

постоянным и равным  $2\omega$ , и записать

$$X(\omega') \approx \frac{v_0/(2\omega\gamma)}{\sqrt{1 + (\omega' - \omega)^2/\gamma^2}}. \quad (3.19)$$

Отсюда видно, что функция  $|X(\omega')|^2$  имеет максимум в точке  $\omega' = \omega$  и при отстройке от этого значения на величину  $\gamma$  уменьшается вдвое. Поэтому шириной спектра можно считать величину  $2\gamma$ . Поведение функции  $|X(\omega')|^2$  вблизи точки  $\omega' = -\omega$  не требует специального исследования, поскольку для действительных функций  $f(t)$  из (3.17) легко показать, что их спектр должен удовлетворять условию  $F^*(\omega') = F(-\omega')$ .

**Замечание.** Обратите внимание, что для действительных функций их фурье-спектр всегда имеет компоненты как на положительных, так и на отрицательных частотах. Это легко понять, рассмотрев простейший случай гармонического сигнала  $x(t) = \cos \omega_0 t$ . По формуле Эйлера  $x(t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$ , следовательно частотный спектр косинуса состоит из двух дискретных частот  $\pm\omega_0$ . По этой причине, кстати, считается, что гармоническому осциллятору соответствует *две* собственные частоты  $\pm\omega_0$ , таким образом, число собственных частот совпадает с числом динамических переменных осциллятора и размерностью его фазового пространства.

Рассмотрение примера осциллятора со слабым затуханием показывает, что если спектр колебания сосредоточен в относительно узкой области  $\Delta\omega$  относительно некоторой центральной частоты  $\omega_0$ , то его оказывается полезным представить в виде

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.20)$$

где функции  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  —медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебания. Медленность их изменения означает, что за "период"  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , соответствующий центральной частоте, функции  $A(t)$  и  $\varphi(t)$  меняются мало. Другой способ выразить это свойство заключается в неравенствах  $|\dot{A}/(\omega_0 A)| \ll 1$  и  $|\dot{\varphi}/(\omega_0 \varphi)| \ll 1$ . Для линейного осциллятора с затуханием во времени меняется только амплитуда, условие медленности ее изменения совпадает с условием  $\gamma \ll \omega_0$ , т.е. с условием слабого затухания.

Последовательный учет медленности изменения амплитуды и фазы колебаний позволяет получить приближенное аналитическое решение многих задач, точное решение для которых неизвестно. Несколько таких примеров применительно к линейным системам, приведено в главах 7 и 17. Для более общего случая нелинейных систем большое число подобных задач исследуется в [4–6].

Для сигналов с медленно меняющимися параметрами полезно также обобщить операцию усреднения, введенную в главе 1. Поскольку  $f(t)$  непериодическая, то казалось бы, необходимо использовать определение (1.50). Однако, подставляя в эту формулу вместо  $f(t)$  выражение (3.10), получаем  $\overline{x(t)} = 0$ ,  $\overline{x^2(t)} = 0$  и т.д. Следовательно, таким образом определенное среднее не несет никакой информации о сигнале. Между тем интуитивно ясно, что если за много периодов колебаний их амплитуда и фаза практически не меняются, то должны иметь, например, смысл понятия средних потенциальной и кинетической энергий колебаний за период, причем разумно предположить, что они должны определяться формулами (1.51), в которые следует подставить вместо  $A_0$  текущее значение амплитуды  $A(t)$ .

Введем понятие локального усреднения для функции  $\mathcal{F}[f(t)]$  от сигнала  $f(t)$  с помощью формулы

$$\widetilde{\mathcal{F}[f(t)]} = \left\langle \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T} \mathcal{F}[f(t')] dt' \right\rangle. \quad (3.21)$$

Смысл операции, обозначаемой угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$ , будет пояснен чуть позднее, а сначала исследуем интеграл внутри них. Взглянув на формулу (1.50), можно видеть, что этот интеграл точно такой же, как и в операции определения среднего для периодической функции. Теперь, однако,  $f(t)$  непериодическая, и это приводит к тому, что в результате интегрирования получается быстро осциллирующая функция.

Покажем это на простом примере, вычислив среднюю мощность потерь за период колебаний линейного осциллятора в виде грузика на пружинке. Мгновенная мощность равна  $P(t) = F_{\text{тр}} \dot{x} = -\lambda \dot{x}^2$ . Используя

решение (3.9), скорость осциллятора представим в виде

$$\dot{x}(t) = V_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \psi), \quad (3.22)$$

где  $V_0 = \sqrt{v_0^2 + (\omega_0^2 x + \gamma v_0)^2 / \omega^2}$ ,  $\arctg \psi = (\omega_0^2 x_0 + \gamma v_0) / (\omega v_0)$ . Подставляя это соотношение в формулу для мгновенной мощности и интегрируя по периоду  $T$ , получаем

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t') dt' = -\lambda V_0^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e^{-2\gamma t'} \cos^2(\omega t' + \psi) dt'.$$

Простое, но несколько громоздкое вычисление интеграла показывает, что это выражение равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t') dt' = & \frac{-\lambda V_0^2 e^{-2\gamma t}}{2} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{2\gamma T} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} [\gamma \cos(2\omega t + 2\psi) - \omega \sin(2\omega t + 2\psi)] \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что помимо первого слагаемого в фигурных скобках, не зависящего от текущего момента времени  $t$ , есть еще два быстро меняющихся во времени члена. Частота их изменения равна  $2\omega$ , а амплитуда порядка  $\gamma/\omega \ll 1$ . Несмотря на относительную малость, просто так их отбросить нельзя. Например, при вычислении производной по времени от выражения (3.23), эти слагаемые умножаются на дополнительный множитель  $2\omega$ , и оказываются того же порядка, что и единица. Еще одна неприятность состоит в том, что полученный в (3.23) результат зависит от выбора пределов интегрирования: если вместо  $t$  и  $t+T$  в определении (3.21) взять, скажем  $t - T/2$  и  $t + T/2$ , то вид этих членов изменится.

Чтобы избавиться от подобных проблем, следует провести еще одно, второе усреднение, оставив в (3.23) только те спектральные компоненты, которые отвечают медленно меняющимся функциям. Это условие соответствует отбрасыванию в (3.23) быстро меняющихся слагаемых, пропорциональных синусу и косинусу. Именно такая операция обозначается в (3.21) угловыми скобками.

На спектральном языке такое усреднение соответствует тому, что в фурье-спектре величины  $(1/T) \int_t^{t+T} \mathcal{F}[x(t')] dt'$  — следует оставить только

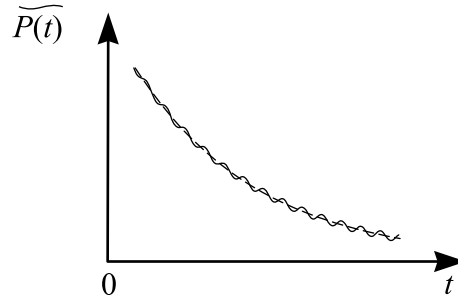


Рис. 3.4. Зависимость средней по периоду колебаний мощности потерь осциллятора от времени. Сплошная линия — формула (3.23), пунктир — результат усреднения быстро переменных компонент.

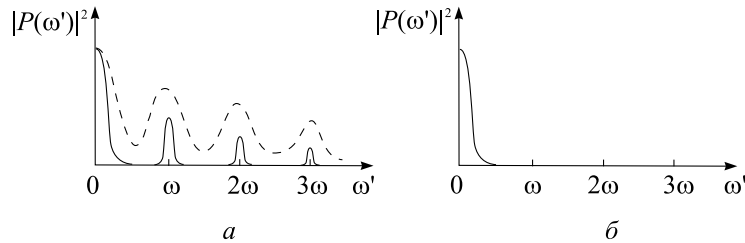


Рис. 3.5. Спектр мощности потерь осциллятора с затуханием до (*a*) и после (*б*) операции усреднения. На рис. *a* пунктиром показан спектр для случая, когда операция усреднения теряет смысл

спектральные компоненты, лежащие вблизи нулевой частоты и отфильтровать спектральные компоненты, лежащие вблизи частот  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$  и т.д.

Процедура двойного усреднения поясняется рисунками 3.4 и 3.5. На первом из них показан качественный вид функции  $P(t)$  после первого усреднения (сплошная линия) и после второго усреднения (пунктир). Цель второго усреднения — сгладить мелкие дрожания функции  $P(t)$ . На втором рисунке показаны спектры функции  $P(t)$  до операции второго усреднения и после нее.

Понятия медленно меняющейся амплитуды и фазы колебаний на самом деле определены неоднозначно, потому что для произвольного ко-

лебания  $x(t)$  можно ввести бесконечно много пар функций  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , которые будут давать с помощью формулы (3.20) одну и ту же функцию  $x(t)$  [6]. Точно также, неоднозначной является операция усреднения  $\langle \dots \rangle$ . Если амплитуда и фаза заметно меняются на интервале времени  $T_0$ , то спектры вблизи частот  $\omega_0, 2\omega_0, \dots$  сильно перекрываются, при этом операция фильтрации спектра оказывается неопределенной. Спектр для такого случая показан на рис. 3.5,б пунктиром. В такой ситуации пользоваться понятиями медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний следует с осторожностью, поскольку для получения аналитических результатов с достаточной точностью этим необходимо проводить вычисления в высших приближениях по малому параметру  $\varepsilon = |\dot{A}/A|$ , при этом простой способ усреднения, введенный здесь, может приводить к ошибкам. В таких случаях следует использовать более мощные методы, являющиеся развитием описанных здесь идей [4–6].

Из приведенного обсуждения может показаться, что вычисление локальных средних — сложная процедура. На самом деле это не так. Правильный результат в первом неисчезающем порядке по  $\varepsilon$  будет получаться, если при интегрировании в (3.21) амплитуду  $A(t)$  и фазу  $\varphi(t)$  считать постоянными, не обращая внимания на их зависимость от времени. Для полиномиальной функции  $\mathcal{F}$  в этом случае все операции усреднения сводятся к вычислениям средних от степеней синусов и косинусов, которые находятся элементарно.

Вычислим в качестве примера, используя это правило, вновь среднюю мощность потерь. Считая, что величина  $V(t) = V_0 \exp(-\gamma t)$  в формуле (3.22) постоянна, и вынося ее за знак интегрирований, имеем

$$\widetilde{P}(t) = -\lambda V_0^2 e^{-2\gamma t} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t' + \psi) dt' = -\frac{\lambda V_0^2 e^{-\gamma t}}{2}. \quad (3.24)$$

Это выражение отличается от получаемого с помощью усреднения из формулы (3.23) только множителем  $(1 - e^{-2\gamma T})/(2\gamma T) \approx 1 - \gamma T + O(\gamma^2 T^2)$ , который при  $\gamma T \ll 1$  близок к единице.

Процедура усреднения обладает полезным свойством: она перестановочна с операцией дифференцирования по времени. Действительно,

$$\frac{\widetilde{df}}{\widetilde{dt}} = \left\langle \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{df}{dt} dt \right\rangle = \frac{\widetilde{f(t+T)} - \widetilde{f(t)}}{T} \approx \frac{df(t)}{dt}$$

Последнее приближенное равенство выполняется благодаря тому, что за время  $T$  усредненная функция  $\widetilde{f(t)}$  меняется слабо

С помощью усреднения можно получать полезные соотношения между средними от различных физических величин. Выведем, например, усредненный закон сохранения энергии для осциллятора с затуханием. Для этого умножим уравнение (1.1) на  $2\dot{x}$ , воспользуемся тождествами  $2x\dot{x} = d x^2/dt$  и  $2\dot{x}\ddot{x} = d\dot{x}^2/dt$  и учтем, что  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $2\gamma = \lambda/m$ . Полученное в результате этих преобразований уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -\lambda\dot{x}^2. \quad (3.25)$$

Оно имеет очевидный смысл: скорость изменения энергии осциллятора равна мощности силы трения. Однако непосредственно в таком виде, это соотношение мало пригодно для использования, поскольку все входящие в него величины являются быстропеременными: за период  $T$  каждая успевает дважды измениться от максимального значения до нуля и обратно. Усредним уравнение (3.25), используя процедуру усреднения (3.21). Тогда в правом части получается величина  $\langle P(t) \rangle$ , которая уже вычислена нами, а при усреднении левой части можно переставить операции дифференцирования и усреднения. В результате получаем

$$\frac{d\widetilde{W}}{dt} = -2\gamma\widetilde{W}. \quad (3.26)$$

Здесь мы воспользовались формулой (3.25) и тем, что  $\lambda V_0^2 \exp(-\gamma t)/2 = 2\gamma m V_0^2 \exp(-\gamma t)/2 = 2\gamma\widetilde{W}$ . Решая дифференциальное уравнение (3.26), находим, что  $\widetilde{W}(t) = \widetilde{W}(0) \exp(-2\gamma t)$ . Это соотношение показывает, что средняя энергия уменьшается по экспоненте вдвое быстрее, чем амплитуда колебаний.

### § 3. Метод нормальных колебаний

Уравнение линейного гармонического осциллятора можно представить в форме, отличающейся от (1.1). Такой переход производится с помощью линейного преобразования от динамических переменных  $x$  и  $v$  к новым переменным, которые выбираются так, чтобы получающиеся для них уравнения имели бы максимально простой вид.

Прежде всего, запишем уравнение второго порядка (1.1) в виде двух уравнений первого порядка, введя дополнительную переменную  $v$ :

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v. \quad (3.27)$$



Умножим первое и второе уравнения на некоторые константы  $\alpha$  и  $\beta$  и сложим их. Такая процедура приводит к выражению

$$\frac{d}{dt}[\alpha x + \beta v] = -\frac{\omega_0^2 \beta}{\alpha} \left[ \alpha x + \frac{(\alpha - 2\gamma\beta)\alpha}{-\omega_0^2 \beta} v \right] \quad (3.28)$$

Выберем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы в этой формуле множители перед  $v$ , а, следовательно, и полные выражения в прямых скобках, справа и слева были одинаковы. Это выполняется, если  $\beta = -(\alpha^2 - 2\gamma\alpha\beta)/(\omega_0^2\beta)$ , или

$$\omega_0^2 (\beta/\alpha)^2 - 2\gamma (\beta/\alpha) + 1 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения получаем

$$(\beta/\alpha)_{1,2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) = \frac{\gamma \pm i\omega}{\omega_0^2}. \quad (3.29)$$

(мы предположили, что  $\gamma < \omega_0$  и использовали обозначения (3.4). Уравнение (3.29) определяет только отношение коэффициентов, а не каждый из них по отдельности. Это объясняется линейностью уравнений (3.28). Один из коэффициентов, скажем  $\alpha$ , следует находить из дополнительных соображений.

Введем функции  $a(t)$  и  $a^*(t)$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha \left( x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v \right), \\ a^*(t) &= \alpha \left( x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Эти величины называют *нормальными колебаниями*. Подставляя формулы (3.29) в уравнение (3.28), находим, что нормальные колебания удовлетворяют уравнениям

$$\dot{a}(t) = (-\gamma - i\omega) a(t), \quad (3.31)$$

$$\dot{a}^*(t) = (-\gamma + i\omega) a^*(t). \quad (3.32)$$

Уравнения (3.31)-(3.32) называют уравнениями гармонического осциллятора в форме нормальных колебаний. Их решения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{i(-\omega+i\gamma)t}, \\ a^*(t) &= a^*(0)e^{i(\omega+i\gamma)t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Заметим, что если по физическому смыслу координата и скорость осциллятора — действительные величины, то начальные значения нормальных колебаний  $a(0)$  и  $a^*(0)$  комплексно сопряжены друг другу. Тогда из решений (3.33) следует, что нормальные колебания будут сопряжены друг другу и во все последующие моменты времени. В таком случае для описания динамики осциллятора достаточно одного из уравнений (3.31)-(3.32). Поскольку нормальное колебание — комплексные функции, то число степеней свободы при переходе от уравнения (1.1) к уравнениям (3.31)-(3.32) не уменьшается.

Из формул (3.33) следует, что колебанию  $a(t)$  соответствует комплексная собственная частота  $-\omega + i\gamma$ , а колебанию  $a^*(t)$  — собственная частота  $\omega + i\gamma$ . Этим исчерпывается спектр собственных частот линейного осциллятора с затуханием.

Запись уравнений осциллятора в форме нормальных колебаний часто значительно облегчает решение сложной задачи. Подобные примеры рассмотрены в главе 5 (действие на осциллятор произвольной внешней силы), главе 7 (параметрические колебания в двухконтурной схеме), главе 8 (связанные колебания системы большого числа осцилляторов).

До этого момента коэффициент  $\alpha$  оставался неопределенным. Как уже говорилось, поскольку уравнения линейны, его выбор обусловлен только соображениями удобства. Часто просто считают  $\alpha = 1$ , при рассмотрении параметрических процессов принято выбирать  $\alpha$  так, чтобы в пределе нулевого затухания  $\gamma = 0$  энергия осциллятора определялась выражением

$$W = \omega_0 a^*(t) a(t). \quad (3.34)$$

Тогда для каждого типа осциллятора коэффициент  $\alpha$  получается свой. Например для грузика на пружинке подставляя в (3.34)  $W = (mv^2/2 + kx^2/2)$  и формулы (3.30), находим, что  $\alpha = \sqrt{k/(2\omega_0)}$ . В такой нормировке нормальные колебания равны

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{k}{2\omega_0}} \left( x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v \right), \\ a^*(t) &= \sqrt{\frac{k}{2\omega_0}} \left( x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для осцилляторов других типов легко получить аналогичные выражения.

Из уравнений (3.35) можно выразить величины  $x$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} [(1 + i\gamma/\omega)a + (1 - i\gamma/\omega)a^*] , \\ v &= \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \frac{\omega_0^2}{i\omega} [a - a^*] . \end{aligned} \quad (3.36)$$

#### § 4. Немного о квантовом осцилляторе<sup>3</sup>

Нормальные колебания осциллятора играют фундаментальную роль в теоретической физике. Как известно, переход от классических динамических уравнений к квантовым осуществляется с помощью замены динамических переменных соответствующими операторами, действующими на волновую функцию системы. Эти операторы подчиняются определенным коммутационным соотношениям. Нормальные колебания  $a(t)$  и  $a^*(t)$  для консервативного осциллятора являются такими динамическими переменными, для операторов которых коммутационные соотношения выглядят наиболее просто. Так же простой вид имеет выраженный через эти операторы гамильтониан. В квантомеханических уравнениях удобно выбрать такую нормировку нормальных колебаний, чтобы гамильтониан имел вид [7]

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^* \hat{a} . \quad (3.37)$$

Этому соответствует выбор  $\alpha = \sqrt{k/(2\hbar\omega_0)}$ . Операторы  $\hat{a}^*$  и  $\hat{a}$  называют, соответственно, операторами рождения и уничтожения. Нетрудно показать, что для них перестановочные соотношения принимают форму

$$\hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 .$$

Собственные значения гамильтониана (3.37), т.е. квантовые уровни энергии равны

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2) . \quad (3.38)$$

Здесь  $n$  — номер уровня, или, как еще говорят, число квантов. Добавка  $1/2$  соответствует нулевой энергии осциллятора и имеет чисто квантовую природу. Оператор рождения, действуя на волновую функцию системы с энергией  $E_n$ , переводит ее в состояние с энергией  $E_{n+1}$ . Аналогично, оператор уничтожения

---

<sup>3</sup>Читатель, не знакомый с основами квантовой механики, может пропустить этот параграф

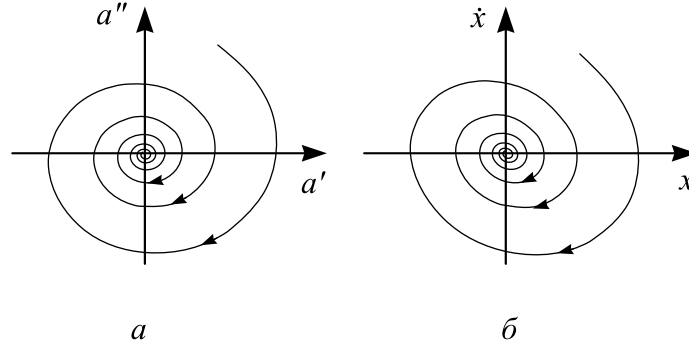


Рис. 3.6. Особая точка типа устойчивый фокус:  $a$  — на комплексной плоскости  $a$ ,  $б$  — на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$

переводит систему из состояния  $E_n$  в состояние  $E_{n-1}$ . Из формул (3.37) и (3.38) следует, что  $n = \langle \hat{a}^* \hat{a} \rangle - 1/2$ , угловые скобки определяют операцию квантомеханического усреднения по волновой функции. В классическом пределе  $n$  очень велико и добавкой  $1/2$  можно пренебречь, а операторы рождения и уничтожения превращаются в нормальные колебания. Отсюда получаем формулу для числа квантов колебаний  $n = a^* a$ , которую часто используют и в классическом случае.

## § 5. Особая точка типа устойчивый фокус. Аттракторы

Воспользуемся уравнениями нормальных колебаний для построения картины фазовых траекторий осциллятора с затуханием. В качестве фазовой плоскости выберем комплексную плоскость  $a = a' + ia''$  с координатами  $a'$  и  $a''$  — действительной и мнимой частью нормального колебания.

Динамика изображающей точки на плоскости задается первым уравнением в (3.33). Вычислив его модуль и аргумент, получаем

$$|a(t)| = |a(0)|e^{-\gamma t}, \quad \text{Arg } a(t) = \text{Arg } a(0) - \omega_0 t. \quad (3.39)$$

Эти уравнения задают в полярной системе координат в параметрической форме логарифмическую спираль (рис. 3.6,  $a$ ). Радиус-вектор, соединяющий начало координат с изображающей точкой, равномерно вращается по часовой стрелке и его длина уменьшается по экспоненциальному закону. С течением времени система приближается к положению равновесия, но никогда его не достигает, при этом спираль совершает бесконечное число оборотов.

Несложно найти и вид траектории на фазовой плоскости  $(x, v)$ . Из соотношений (3.32) следует связь между динамическими переменными

$a', a''$  и  $x, v$  (для упрощения формул считаем  $\alpha = 1$ ):

$$x = (a' - \gamma a''/\omega), \quad v = \omega_0^2 a''/\omega. \quad (3.40)$$

Отсюда видно, что отображение плоскости  $(a', a'')$  на плоскость  $(x, \dot{x})$ ,  $(\dot{x} = v)$  является линейным преобразованием и качественный вид фазовых траекторий при этом сохраняется (рис. 3.6,б). В случае малого затухания ( $\gamma \ll \omega_0$ ) отображение близко к тождественному, поэтому для высокочастотных осцилляторов можно считать, что фазовые траектории на плоскости  $(x, v)$  близки к логарифмической спирали.

Положение равновесия линейного осциллятора с затуханием соответствует на фазовой плоскости особой точке типа *фокус*. Очевидно, что эта особая точка устойчива, поскольку все траектории с течением времени стремятся к ней. Устойчивый фокус является простейшим примером *аттрактора*. Аттрактором динамической системы называется множество в фазовом пространстве, к которому стремятся все достаточно близкие к нему траектории. Аттракторов в динамической системе общего вида может быть много (в том числе и бесконечно много) и их знание очень важно, поскольку они определяют характер режима, который установится в системе после переходного процесса.

## § 6. Осциллятор с сильным затуханием. Устойчивый узел

До сих пор рассматривался случай, когда затухание осциллятора не очень велико ( $\gamma < \omega_0$ ) и было показано, что при этом движение осциллятора сохраняет черты колебательного процесса. Исследуем теперь случай сильного затухания<sup>4</sup>  $\gamma > \omega_0$ .

Общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, полученное в § 1, пригодно и в этом случае. Корни характеристического уравнения, определяемые формулой (3.3), теперь оба действительные и отрицательные, причем  $|p_1| > |p_2|$ . Коэффициенты  $C_{1,2}$  в общем решении (3.5) равны

$$C_1 = -\frac{|p_1|x_0 - v_0}{|p_1| - |p_2|}, \quad C_2 = \frac{|p_2|x_0 - v_0}{|p_1| - |p_2|}. \quad (3.41)$$

Чтобы качественно установить характер движения, зададимся вопросом: при каких начальных условиях система может пройти через положение равновесия? Другими словами, когда существует решение уравнения

<sup>4</sup>Пограничный случай  $\gamma = \omega_0$  не представляет особого интереса, так как является *нетипичным*: бесконечно малое изменение параметров нарушает это условие.

$x(t) = 0$ ? Запишем это уравнение, используя в качестве  $x(t)$  выражение (3.5):  $C_1 \exp(-|p_1|t) + C_2 \exp(-|p_2|t) = 0$ , или

$$\exp[(|p_1| - |p_2|)t] = -C_1/C_2. \quad (3.42)$$

Очевидно, что решение уравнения (3.42) существует, только если  $C_1$  и  $C_2$  имеют разные знаки. В этом случае оно равно

$$t_* = \frac{\ln(-C_1/C_2)}{|p_1| - |p_2|}. \quad (3.43)$$

Если при этом  $|C_1| > |C_2|$ , то траектория, проходящая через точку  $(x_0, v_0)$  пересечет ось  $v$  в будущем (при  $t_* > 0$ ). Если же  $|C_1| < |C_2|$ , то такое пересечение было в прошлом (при  $t_* < 0$ ). Траектории, пересекающие ось  $v$ , а заодно и, как нетрудно показать точно таким же способом, ось  $x$ , лежат на фазовой плоскости целиком в областях  $I$  и  $II$ , ограниченных отрезками прямых  $v = -|p_1|x$  (прямая  $L_1$  на рис. 3.7) и  $v = -|p_2|x$  (прямая  $L_2$ ). Для точек из областей  $III$  и  $IV$  коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют одинаковый знак, и лежащие в этих областях траектории стремятся к положению равновесия, не переходя через граничные линии.

Из (3.5) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  каждая траектория стремится к началу координат, а при  $t \rightarrow -\infty$  уходит на бесконечность. Можно установить также асимптотическое поведение траекторий. Поскольку  $|p_1| > |p_2|$ , то при  $t \rightarrow \infty$  первая экспонента в (3.5) затухает быстрее, чем вторая (мы полагаем, что оба коэффициента,  $C_1$  и  $C_2$  отличны от нуля), и при достаточно больших временах  $x(t) \approx C_2 \exp(-|p_2|t)$ ,  $v(t) \approx -|p_2|C_2 \exp(-|p_2|t)$ , откуда следует, что  $v(t) \approx -|p_2|x(t)$ . Это значит, что при приближении к началу координат каждая траектория стремится "коснуться" прямой  $L_2$ .

Аналогично при  $t \rightarrow -\infty$  имеем  $v(t) \approx -|p_1|x(t)$  — это соотношение показывает, что вдали от положения равновесия все траектории выстраиваются параллельно прямой  $L_1$ . Исключения из общего поведения составляют сами прямые  $L_1$  и  $L_2$ : легко показать, что если в начальный момент изображающая точка находилась на одной из них, то она будет оставаться на этой же прямой и во все последующие моменты времени, монотонно стремясь к точке равновесия. Каждая прямая состоит из трех траекторий: точки равновесия и двух лучей, лежащих в верхней и нижней полуплоскостях фазовой плоскости.

Этих сведений достаточно, чтобы нарисовать качественный вид фазовых траекторий (рис. 3.7) вблизи положения равновесия. Этот тип особой точки называется *устойчивый узел*. Такое движение соответствует

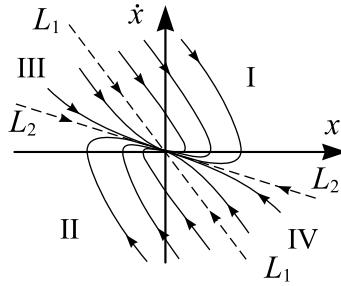


Рис. 3.7. Особая точка типа устойчивый узел. Пунктиром показаны прямые  $L_1$  и  $L_2$

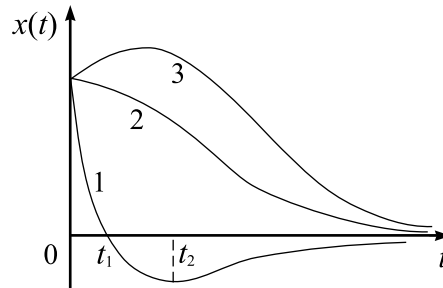


Рис. 3.8. Вид решения для осциллятора с сильным затуханием при различных начальных условиях.

апериодическому затуханию: колебаний в системе нет. Примером осциллятора с сильным затуханием является например, грузик или маятник, движущиеся в среде с большой вязкостью.

Легко также нарисовать зависимость  $x(t)$  (см. рис. 3.8) [8]. Если уравнение (3.42) имеет положительный корень, то система один раз проходит положение равновесия в некоторый момент времени  $t_1$ , затем достигает максимума отклонения в момент времени  $t_2$  а затем монотонно стремится к нулю (кривая 1 на рис. 3.8). Если же у (3.42) имеется отрицательный корень или их нет вообще, то возможны два случая: либо осциллятор монотонно стремится к положению равновесия (кривая 2), либо он сначала удаляется от точки равновесия, но затем его скорость обращается в нуль и он вновь возвращается к состоянию покоя (кривая 3).

## ГЛАВА 4

### **Осцилляторы с отрицательным трением. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости**

*Примеры систем с отрицательным трением. Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости. Понятие бифуркации динамической системы.*

#### **§ 1. Примеры систем с отрицательным трением**

В системах, лишенных источника энергии процессы всегда протекают так, что первоначальная энергия возбуждения либо сохраняется, либо уменьшается с течением времени. Для осциллятора это свойство выражается в том, что коэффициент затухания удовлетворяет условию  $\gamma > 0$ . Между тем, существует большое число примеров, когда энергия поступает к осциллятору извне, приводя на линейной стадии процесса к раскачке колебаний. Системы, обладающие подобным свойством, играют огромную роль в технике, обеспечивая возможность преобразования энергии от постоянного источника в энергию колебательного процесса. В теории колебаний подобные системы называются автогенераторами или автоколебательными системами.

Подробное исследование автогенераторов будет проведено в другой книги серии "Современная теория колебаний и волн", поскольку для полного объяснения их свойств принципиальным является учет нелинейности. Здесь наше внимание будет сосредоточено на начальной стадии процесса генерации — раскачке колебаний начиная с бесконечно малых начальных условий.

Одним из основных свойств автогенератора является то, что если он находится в покое (колебаний нет), то в идеальном случае отсутствия шумов он будет находиться в этом состоянии бесконечно долго. Однако малейшая флуктуация динамических переменных приводит к тому,



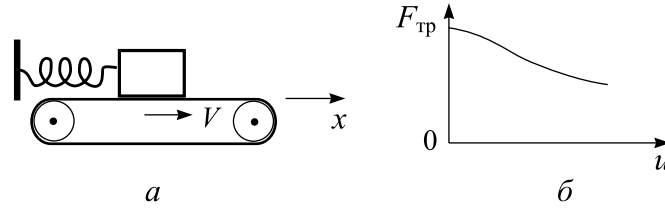


Рис. 4.1. Механическая система с отрицательным трением (а) и зависимость силы "сухого" трения от относительной скорости бруска и ленты (б).

что возникают колебания с нарастающей во времени амплитудой. Через некоторое время в системе устанавливаются колебания, свойства которых не зависят от начальных условий. Это состояние устойчиво и к внешнему воздействию (если оно, конечно, не превышает некоторого уровня) и к флуктуациям параметров системы<sup>1</sup>. Рассмотрим несколько примеров.

Простейшим механическим примером служит устройство, показанное на рис. 4.1,а [1, 4]. Брусок, прикрепленный к пружине лежит на ленте транспортера, которая может двигаться с регулируемой скоростью  $V$ . Между бруском и лентой существует сила "сухого" трения, качественный вид зависимости которой от их относительной скорости  $u = V - \dot{x}$  показан на рис. 4.1,б. Уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(V - \dot{x}). \quad (4.1)$$

Предположим, что скорость бруска мала ( $|\dot{x}| \ll V$ ) и разложим функцию  $F(u)$  в ряд вблизи точки  $u = V$ , ограничившись двумя слагаемыми:  $F(V - \dot{x}) \approx F(V) - \dot{x}F'(V)$ . Тогда из (4.1) получаем

$$m\ddot{x} + [\lambda + F'(V)]\dot{x} + kx = F(V). \quad (4.2)$$

Постоянное слагаемое в правой части уравнения (4.2) приводит только к смещению положения равновесия на величину  $x_0 = F(V)/k$ , поэтому для малых отклонений от этой точки  $\xi = x - x_0$  выполняется уравнение

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + k\xi = 0, \quad (4.3)$$

где  $2\gamma = [\lambda + F'(V)]/m$ . Это уравнение совпадает по форме с (1.1), но теперь параметр  $\gamma$  может быть отрицательным. Это случается, если

<sup>1</sup>Такая схема установления колебаний характерна для так называемого "мягкого" режима возбуждения генератора [1–3].

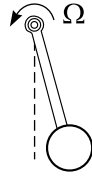


Рис. 4.2. Маятник Фроуда

$F'(V) < -\lambda$ . В случае сухого трения график функции  $F(u)$  имеет спадающий участок, на котором  $F'(u) < 0$ , поэтому при определенном выборе параметров системы такое требование можно выполнить. Формально условие  $\gamma < 0$  отвечает системе с отрицательным трением.

Совершенно также работает маятник Фроуда [1] (рис. 4.2). Он прикреплен к муфте, насаженной на вал, который вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Момент силы трения между валом и муфтой имеет вид, аналогичный функции  $F(u)$ . Уравнения системы после соответствующих преобразований в точности повторяют уравнения (4.1)–(4.3), поэтому мы не будем на них останавливаться.

Самым важным примером системы с отрицательным трением несомненно является радиотехнический генератор [1–3]. Его обобщенная схема показана на рис. 4.3. Сигнал с колебательного контура подается на вход усилителя, а его выход нагружен на катушку  $L_1$ , которая индуктивно связана с катушкой контура. Конструкция усилителя может быть различной. Раньше это были ламповые усилители, сейчас используются транзисторные схемы.

Ограничиваясь линейным случаем, будем считать, что вольт-амперная характеристика усилителя (т.е. функция, связывающая напряжение на входе  $V$  с током на выходе  $i$ ) линейна:  $i = SV$ . Величина  $S$  называется крутизной характеристики. Уравнения, описывающие генератор, имеют

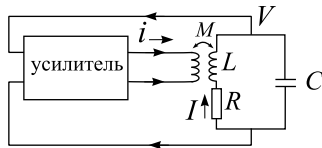


Рис. 4.3. Радиотехнический генератор

вид

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI &= -V + Mi, \\ V &= Q/C, \quad i = SV. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Все обозначения показаны на рис. 4.3. В первом из этих уравнений член  $Mdi/dt$  отвечает за обратную связь за счет взаимной индукции катушки контура и катушки в цепи выхода усилителя. Для простоты полагаем, что входное сопротивление усилителя бесконечно, тогда  $I = dQ/dt$ . Учитывая это в (4.4) и комбинируя все уравнения, получаем

$$\ddot{Q} + \frac{RC - MS}{LC} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (4.5)$$

Вводя обозначения  $2\gamma = (RC - MS)/(LC)$ ,  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ , вновь приходим к уравнению осциллятора (1.1). Знак  $\gamma$  может быть отрицательным, если коэффициент взаимной индукции положителен и достаточно велик:  $M > RC/S$ .

## § 2. Фазовые портреты: неустойчивый фокус и неустойчивый узел

Решение (3.5) уравнения осциллятора с затуханием пригодно и в случае, когда  $\gamma < 0$ . Корни характеристического уравнения теперь равны  $p_{1,2} = |\gamma| \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  и, считая что  $|\gamma| < \omega_0$ , имеем

$$p_{1,2} = |\gamma| \pm i\omega. \quad (4.6)$$

На комплексной плоскости  $p$  корни лежат справа от мнимой оси и симметрично относительно действительной оси. Решение, отвечающее заданным начальным условиям, получаются из (3.10)-(3.12) простой заменой  $\gamma \rightarrow -|\gamma|$ .

$$x(t) = A_0 e^{|\gamma|t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.7)$$

где

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 - |\gamma|x_0)^2/\omega^2}, \quad (4.8)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0/A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 - |\gamma|x_0)/(\omega A_0). \quad (4.9)$$

Амплитуда колебаний теперь не убывает, а нарастает со временем (рис. 4.4). Положение равновесия  $x = 0$ ,  $v = 0$  оказывается неустойчивым: сколь

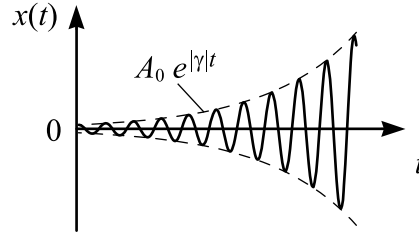


Рис. 4.4. Нарастающие колебания осциллятора с отрицательным трением

угодно малое отклонение системы от этих значений приводит к раскачке колебаний. Разумеется, энергия, необходимая на это, черпается из внешнего источника. В случае механической системы это работа, производимая мотором и необходимая для поддержания постоянной скорости ленты транспортера, в генераторе — работа постоянного источника, питающего усилитель.

В отличие от устойчивых особых точек — центра и устойчивых фокуса и узла, уравнение осциллятора с отрицательным трением не может описывать систему на бесконечном интервале времени. Рано или поздно, амплитуда колебаний станет настолько большой, что сделанные при вывод уравнения предположения будут нарушены. Обычно это происходит за счет нелинейных эффектов. После этого момента для описания динамики реальной системы следует использовать более общую нелинейную модель.

Можно получить картину фазовых траекторий осциллятора с отрицательным трением точно также, как это было сделано в случае устойчивого фокуса, однако мы воспользуемся другим, более поучительным способом. Представим уравнения осциллятора в виде

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x + 2|\gamma|v \quad (4.10)$$

и произведем с ними следующие преобразования. Во-первых, сделаем замену  $v = -v'$  в уравнениях (4.10), они при этом перейдут в

$$\dot{x} = -v', \quad \dot{v}' = \omega_0^2 x + 2|\gamma|v', \quad (4.11)$$

а во-вторых, сменим направление течения времени:  $t = -t'$ , тогда уравнения (4.11) превратятся в уравнения

$$\dot{x} = v', \quad \dot{v}' = -\omega_0^2 x - 2|\gamma|v', \quad (4.12)$$

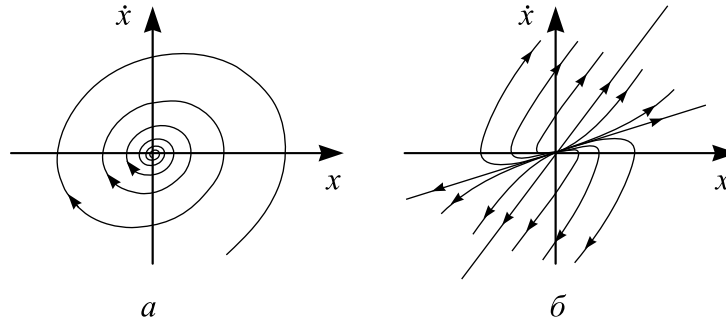


Рис. 4.5. Фазовые портреты для осциллятора с отрицательным трением: (а) — неустойчивый фокус ( $|\gamma| < \omega_0$ ), (б) — неустойчивый узел ( $|\gamma| > \omega_0$ ).

Но эти соотношения совпадают с уравнениями осциллятора с обычным, положительным затуханием! Для него картина на фазовой плоскости нам известна — это устойчивый фокус. По этой причине фазовая плоскость осциллятора с отрицательным трением получается в результате таких же преобразований: смены знаков перед  $v$  и  $t$ . Первая операция соответствует на фазовой плоскости отражению фазовых траекторий в плоскости оси  $x$ , а вторая — изменению направления стрелок, показывающих направление движения изображающих точек по траекториям. В итоге фазовый портрет для осциллятора с отрицательным затуханием имеет вид, показанный на рис. 4.5,а.

В заключении этого параграфа совсем кратко остановимся на случае сильной неустойчивости, когда  $\gamma > \omega_0$ . Как и при сильном затухании, движение носит аperiodический характер. Корни характеристического уравнения равны  $p_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , оба корня действительные и положительные. При  $t \rightarrow \infty$  одна из экспонент в (3.6) растет быстрее, чем вторая, и, следовательно,  $x(t) \sim \exp(p_1 t)$ . Нарастание решения носит характер аperiodической экспоненциальной неустойчивости. Все слова, сказанные относительно ограниченности линейной модели в случае неустойчивого фокуса, применимы в полной мере и здесь. Фазовый портрет получается из устойчивого узла с помощью тех же преобразований  $v = -v'$  и  $t = -t'$ , он показан на рис. 4.6,б. Эта особая точка называется неустойчивым узлом.

### § 3. Общая классификация особых точек на фазовой плоскости

Исследованными нами в гл. 2–4 случаями ограничиваются все возможные "типичные" виды особых точек не только для линейного дифференциального уравнения (1.1), но и для произвольной нелинейной системы второго порядка. Рассмотрим, следуя [1], систему с динамическими переменными  $x$  и  $y$ , которая описывается двумя дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y), \quad (4.13)$$

где функции  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  предполагаются аналитическими функциями своих переменных. Состояния равновесия определяются решениями нелинейной системы уравнений

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0. \quad (4.14)$$

Предположим, что точка  $(x_0, y_0)$  на фазовой плоскости есть такая неподвижная точка. Для исследования характера траекторий вблизи нее представим  $x$  и  $y$  в виде  $x = x_0 + \xi$ ,  $y = y_0 + \eta$ ,  $\xi, \eta$  — малые добавки<sup>2</sup>. Подставляя эти формулы в (4.13), разлагая  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  в ряды Тейлора и ограничиваясь линейными слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a\xi + b\eta, \\ \dot{\eta} &= c\xi + d\eta, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $a = F_x(x_0, y_0)$ ,  $b = F_y(x_0, y_0)$ ,  $c = G_x(x_0, y_0)$ ,  $d = G_y(x_0, y_0)$ . Чтобы уравнения имели смысл, необходимо, чтобы выполнялись условия  $a^2 + b^2 \neq 0$  и  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Если они нарушены, одно из уравнений (4.15) имеет нулевые коэффициенты, это значит, что ограничиваться только линейными членами разложения нельзя при его получении. Будем считать эти условия выполненными. Таким образом, для описания динамики системы вблизи положения равновесия можно пользоваться уравнением линейного приближения (4.15)<sup>3</sup>.

Ищем решение (4.15) в виде  $\xi(t) = \xi_0 \exp(pt)$ ,  $\eta(t) = \eta_0 \exp(pt)$ . Тогда величины  $\xi_0$  и  $\eta_0$  должны удовлетворять линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} (a - p)\xi_0 + b\eta_0 &= 0, \\ c\xi_0 + (d - p)\eta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>Критерий малости — возможность сохранения в разложениях  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  вблизи точки  $(x_0, y_0)$  только членов первого порядка по  $\xi$  и  $\eta$ .

<sup>3</sup>У этого утверждения есть одно исключение, о котором будет сказано ниже.

Она имеет решение, только если  $(p - a)(p - d) - bc = 0$ , или

$$p^2 - (a + d)p + ad - bc = 0, . \quad (4.17)$$

Это характеристическое уравнение для системы (4.15). Его корни равны

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( S \pm \sqrt{S^2 - 4D} \right) . \quad (4.18)$$

где  $S = a + d$  — след матрицы коэффициентов  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , а  $D$  — ее детерминант.

В зависимости от значений величин  $S$  и  $D$ , возможны всего пять различных случаев расположения корней  $p_{1,2}$  на комплексной плоскости  $p$ , и, соответственно, пять различных типов особых точек:

- 1) при  $S > 0, D > 0, S^2 < 4D$  два комплексно сопряженных корня лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Это случай особой точки типа неустойчивый фокус (см. гл. 4, § 2);
- 2) при  $S > 0, D > 0, S^2 > 4D$  характеристическое уравнение имеет два действительных положительных корня. Это особая точка типа неустойчивый узел (гл. 4, § 2);
- 3) при  $S < 0, D > 0, S^2 < 4D$  два комплексно сопряженных корня лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $p$ . Это случай особой точки типа устойчивый фокус (гл. 3, § 5);
- 4) при  $S < 0, D > 0, S^2 > 4D$  характеристическое уравнение имеет два действительных отрицательных корня. Это особая точка типа устойчивый узел (гл. 3, § 6)
- 5) если  $D < 0$ , характеристическое уравнение имеет два действительных корня разных знаков, эта особая точка является седлом (гл. 2, § 5).

Расположение соответствующих областей на плоскости параметров  $(S, D)$  показано на рис. 4.6.

Все остальные возможности соответствуют положению системы на плоскости параметров на границах между областями, и сколь угодно малое их изменение приведет к тому, что точка, изображающая систему, сместится в одну из этих областей. По этой причине такие "граничные" случаи не представляют физического интереса.

Исключением является случай, когда  $S = 0, D > 0$ . Из (4.18) следует, что при этом  $p_{1,2} = \pm i\sqrt{D}$  и формально можно сделать вывод, что особая

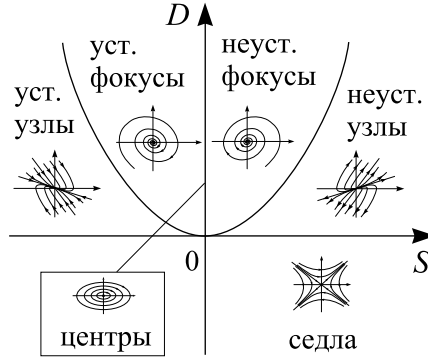


Рис. 4.6. Области на плоскости параметров  $(S, D)$ , в которых реализуются различные типы особых точек.

точка является центром. Оказывается, однако, что это не всегда так. Дело в том, что условие  $S = 0$  эквивалентно тому, что у линеаризованной системы (4.15) существует закон сохранения, т.е. она является консервативной. Чтобы показать это, умножим первое из уравнений (4.15) на величину  $a - i\omega$ , где  $\omega = \sqrt{D} = \sqrt{-a^2 - cb}$  (мы сразу учли, что  $a = -d$ ), а второе уравнение на  $b$  и сложим их. После простых преобразований получаем

$$\frac{d}{dt} [(a - i\omega)\xi + b\eta] = -i\omega [(a - i\omega)\xi + b\eta] .$$

Обозначив выражение в прямых скобках через новую переменную  $\alpha$ , получаем для нее  $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha$ . По виду это уравнение нормальных колебаний, совпадающее с уравнением (3.31), если положить в нем  $\gamma = 0$ . Его решение есть  $\alpha(t) = \alpha(0) \exp(-i\omega t)$ , поэтому величина  $|\alpha|^2 = (a\xi + b\eta)^2 + \omega^2\xi^2$  сохраняется во времени.

Следовательно, траектории вблизи особой точки системы (4.15) имеют вид вложенных друг в друга эллипсов, и это центр. Однако наличие центра в линеаризованных уравнениях не означает, что особая точка имеет тот же характер и в полных уравнениях (4.13). Возможны ситуации, когда закон сохранения появляется в результате процедуры линеаризации. Подобным примером служит система [5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{4.19}$$



Линеаризованная вблизи нуля система  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$ , удовлетворяет условию  $S = 0$  и для обоих переменных легко получить уравнение консервативного осциллятора. Тем не менее, в полной системе (4.19) закона сохранения нет: если умножить первое уравнение на  $x$ , второе на  $y$  и сложить их, то получим для величины  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  уравнение  $\dot{r} = -r^3$ , решение которого  $r(t) = [2t + 1/r^2(0)]^{-1/2}$ . При  $t \rightarrow \infty$  получаем  $r(t) \rightarrow 0$ , следовательно закон сохранения для уравнений (4.19) отсутствует. Этот пример еще раз иллюстрирует положение теоремы Ляпунова, уже упомянутой на стр. 44.

Итак, если исходная система консервативная, то положение равновесия, для которого  $S = 0$ ,  $D > 0$ , является центром. На плоскости параметров  $(S, D)$  этому случаю соответствует положительная полуось  $D$  (см. рис. 4.6). Казалось бы, можно вновь не обращать на этот случай особого внимания, т.к. малое изменение параметров приведет к смещению системы с этой линии и превращению эллипса либо в устойчивый, либо в неустойчивый фокус. Однако для консервативной системы этот аргумент теряет силу. Если потребовать, чтобы при "шевелении" параметров система оставалась консервативной, то условие  $S = 0$  должно сохраняться, это значит, изображающая систему точка просто сместится вдоль оси  $D$ .

Перечисленные выше пять особых точек и дополнительно к ним центр являются типичными: при произвольных случайно выбранных параметрах динамической системы на плоскости, ее положения равновесия с вероятностью единица окажутся одной из пяти особых точек. Если же система второго порядка консервативная, то на ее фазовой плоскости в типичном случае могут быть только седла и центры.

#### § 4. Понятие бифуркации динамической системы

Пусть функции  $F$  и  $G$  в (4.13) кроме переменных  $x$  и  $y$ , зависят еще от параметра  $\lambda$ . Выберем одну из неподвижных точек, и будем наблюдать за изменением характера фазовых траекторий вблизи нее при изменении параметра. Если меняется  $\lambda$ , то будут меняться и коэффициенты в линеаризованной системе (4.15), значит на плоскости  $(S, D)$ , точка, отвечающая текущим значениям параметра, будет двигаться вдоль некоторой непрерывной линии (рис. 4.7. Пока точка находится внутри одной из областей 1–5, небольшое изменение параметра не меняет типа особой точки и характера траекторий вблизи нее. Если же система находится на одной из границ этих областей (например, в одной из точек:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) то малое изменение параметра приводит к изменению типа особой точки и вида фазовых траекторий. Такое перестроение фазового портре-

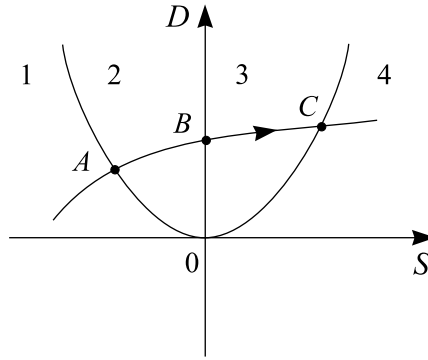


Рис. 4.7. К объяснению понятия бифуркации

та системы называется *бифуркацией*, а значение параметра, при котором оно происходит — бифуркационным. Более точное определение [1] гласит: значение параметра  $\lambda = \lambda_0$  называется обыкновенным, если существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что для всех  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые одна и та же. Значения параметров, при которых это условие не выполняется, называются бифуркационными.

Простейший пример бифуркации — превращение устойчивого фокуса линейного осциллятора при  $\gamma < \omega_0$  в неустойчивый фокус при  $\gamma > \omega_0$ . Бифуркационным значением при этом является  $\gamma = \omega$ .

Теория бифуркаций является обширным и хорошо развитым разделом теории динамических систем. В серии "Современная теория колебаний и волн" ей будут посвящена отдельная книга.

## ГЛАВА 5

### Осциллятор под действием внешних сил. Резонанс

*Примеры и эталонное уравнение. Метод комплексных амплитуд. Случай гармонической внешней силы. Резонанс. Фазовые соотношения при резонансе. Энергетические соотношения и резонансная кривая.*

#### § 1. Примеры и эталонное уравнение

В природе не существует абсолютно изолированных от окружения систем, поэтому одной из задач линейной теории колебаний является исследование поведения гармонического осциллятора под действием внешней силы. При этом выясняется замечательное свойство осциллятора, состоящее в том, что он избирательно откликается на гармоническое воздействие с частотой, близкой к его собственной частоте. Такое явление называется *резонансом*. Круг вопросов, связанных с резонансом в колебательных системах является предметом этой главы.

Начнем, как всегда, с примеров. На рис. 5.1,а показан маятник, который прикреплен к одному из концов пружины жесткостью  $k$ , а другой конец пружины может совершать заданное движение в горизонтальном направлении по закону  $x_0(t)$ . Пусть в состоянии покоя и при недеформированной пружине  $x_0 = 0$ . Уравнение движения системы записывается аналогично тому, как это было сделано в главе 1, но теперь необходимо дополнительно учесть момент силы, действующей на маятник со стороны пружины. Считая отклонения маятника и деформацию пружины малыми величинами, запишем уравнение вращательного движения:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi + kl[x_0(t) - x].$$

Учитывая, что  $x \approx \varphi l$ , получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t), \quad (5.1)$$

где  $\omega_0^2 = g/l + k/m$ ,  $F(t) = kx_0(t)/m$ . Мы пришли к уравнению гармонического осциллятора, в правой части которого вместо нуля стоит заданная функция независимой переменной  $t$ .

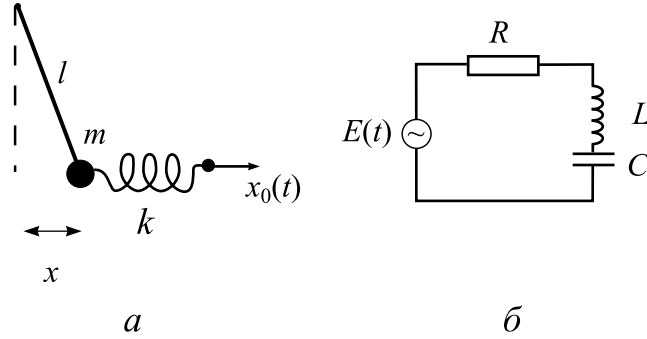


Рис. 5.1. Примеры осцилляторов под внешним воздействием: маятник (а) и колебательный контур (б)

Второй пример — электрический контур на рис. 5.1,б. В цепь последовательно с другими элементами включен источник ЭДС. Закон Киргофа для контура имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t), \quad (5.2)$$

и, учитывая, что  $\dot{Q} = I$ , приходим к уравнению

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = \frac{1}{L} E(t).$$

Вводя стандартные обозначения  $2\gamma = R/L$ ,  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ , а также функцию  $F(t) = E(t)/L$ , вновь получаем уравнение вида (5.1), в котором, кроме того, учтены потери энергии в контуре.

Эти примеры показывают, что эталонное уравнения для гармонического осциллятора с затуханием под внешним воздействием имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (5.3)$$

Сделаем небольшое замечание относительно использования термина “сила”. На самом деле, функция, стоящая справа в уравнении (5.3) для механических систем совпадает с физической силой лишь с точностью до множителя  $1/m$ , а для систем другой природы вообще не является силой. Однако термин “сила” стал общеупотребительным для обозначения внешнего воздействия на колебательную систему, вообще говоря, зависящего от времени.

Свойство линейности системы позволяет получить полное решение уравнения (5.3) для произвольных начальных условий и произвольного вида функции  $F(t)$ . Вспомним сформулированный в главе 1 принцип суперпозиции. Применяя этот принцип к уравнению (5.3), можно сказать, что его решение можно представить в виде  $x(t) = X(t) + \xi(t)$ , где  $X(t)$  — общее решение однородного уравнения, а  $\xi(t)$  — какое-либо частное решение уравнения (5.3).

Предположим, что  $\xi(t)$  известно. Тогда

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \xi(t). \quad (5.4)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями, которые для простоты будем ставить при  $t = 0$ . Если  $x_0$  и  $v_0$  — начальные смещение и скорость осциллятора, то легко получить

$$A = x_0 - \xi(0), \quad B = \frac{[v_0 - \dot{\xi}(0)] + \gamma[x_0 - \xi(0)]}{\omega}. \quad (5.5)$$

Из этих соотношений видно, что значения постоянных  $A$  и  $B$  зависят от выбора частного решения  $\xi(t)$ . Это решение, как уже говорилось, можно получить при произвольном виде функции  $F(t)$ , однако некоторые важные частные случаи полезно исследовать отдельно. Самым главным таким случаем является случай гармонического воздействия, когда сила имеет вид

$$F(t) = F_0 \cos(pt + \psi_0), \quad (5.6)$$

$F_0$  — амплитуда внешней силы,  $p$  — ее частота,  $\psi_0$  — фаза (отметим, что при расчете процессов установления колебаний фаза внешней силы важна и ее нельзя просто положить равной нулю). Для получения решения в этом случае воспользуемся методом комплексных амплитуд.

## § 2. Метод комплексных амплитуд

Метод комплексных амплитуд столь широко используется в теории колебаний, радиофизике и физике вообще, что часто в книгах и научных статьях его применение специально даже не оговаривается. Метод предназначен для описания линейных систем, в которых происходят гармонические или близкие к гармоническим колебания. Для вывода основных соотношений метода полезно воспользоваться геометрической интерпретацией, связывающей колебательный процесс с вращением некоторого

вектора на плоскости<sup>1</sup>. Не определяя конкретную физическую природу колебаний, будем в этом разделе говорить просто о гармоническом сигнале  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  с частотой  $\omega$ , амплитудой  $x_0$  и начальной фазой  $\varphi_0$ . Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  (см. рис. 5.2) вектор длины  $x_0$ , выходящий из начала координат и составляющий в момент  $t = 0$  угол  $\varphi_0$  с положительным направлением оси  $x$ . Если вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция его конца на ось  $x$  меняется по закону  $x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , т.е. в соответствии с законом изменения  $x(t)$ . Мы получаем соответствие между гармоническим колебанием и движением точки на плоскости. С другой стороны, эту плоскость можно представить как комплексную плоскость  $z = x + iy$ , тогда движение точки будет описываться комплексной функцией

$$z(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0) = x_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = \bar{X} e^{i\omega t},$$

где  $\bar{X} = x_0 \exp(i\varphi_0)$ . Функция  $z(t)$  называется *комплексным сигналом*, отвечающим гармоническому сигналу  $x(t)$ , а величина  $\bar{X}$  называется *комплексной амплитудой* сигнала<sup>2</sup>. Непосредственно из определения этих величин следует формула

$$x(t) = \operatorname{Re}(\bar{X} e^{i\omega t}), \quad (5.7)$$

позволяющая вычислить настоящий сигнал, если известны его комплексная амплитуда и частота. Комплексная амплитуда соединяет в себе две характеристики сигнала — амплитуду и начальную фазу, таким образом, что

$$\bar{X} = x_0 e^{i\varphi_0}, \quad \text{или} \quad x_0 = |\bar{X}| \quad \varphi_0 = \operatorname{Arg} \bar{X}. \quad (5.8)$$

Комплексная амплитуда обладает рядом важных свойств.

- 1) **Линейность.** Сумме гармонических колебаний с одинаковой частотой соответствует комплексная амплитуда, являющаяся суммой комплексных амплитуд каждого из колебаний. Условно это свойство можно записать в следующем виде: если

$$x_1(t) \leftrightarrow \bar{X}_1, x_2(t) \leftrightarrow \bar{X}_2, \quad \text{то} \quad x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow \bar{X}_1 + \bar{X}_2, \quad (5.9)$$

---

<sup>1</sup>Эта же аналогия лежит в основе другого метода — метода векторных диаграмм, который используется в электротехнике для расчета электрических схем.

<sup>2</sup>Мы будем обозначать комплексную амплитуду сигнала таким же символом как и сам сигнал, но заглавными буквами и с чертой сверху

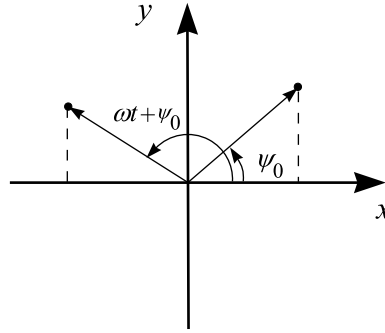


Рис. 5.2. К определению комплексной амплитуды гармонического колебания

и если

$$x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad Cx(t) \leftrightarrow C\bar{X}. \quad (5.10)$$

Здесь  $C$  — действительная константа, а знак  $\leftrightarrow$  обозначает соответствие между сигналом и его комплексной амплитудой.

- 2) Свойство производной. Комплексная амплитуда производной гармонического сигнала получается из комплексной амплитуды самого сигнала умножением на  $i\omega$ :

$$\text{если } x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad \dot{x}(t) \leftrightarrow i\omega\bar{X}. \quad (5.11)$$

- 3) Свойство интеграла. Комплексная амплитуда интеграла от гармонического сигнала получается из комплексной амплитуды сигнала делением на  $i\omega$ :

$$\text{если } x(t) \leftrightarrow \bar{X}, \quad \text{то} \quad \int x(t) dt \leftrightarrow \bar{X}/(i\omega). \quad (5.12)$$

**Задача 5.1.** Докажите свойства (5.9)-(5.12).

Здесь необходимо сделать два важных замечания, которые при использовании метода комплексных амплитуд иногда ускользают из поля

зрения. В свойстве (5.9) важным требованием является то, что оба сигнала имеют одинаковую частоту. Складывать комплексные амплитуды сигналов с различными частотами нельзя, это приведет к неверным результатам. Второе замечание касается свойства (5.12). Очевидно, что результатом интегрирования гармонической функции является сумма гармонического сигнала и постоянной интегрирования. Частота первого слагаемого равна частоте исходного сигнала, в то время как частота постоянной равна нулю. Когда говорят о комплексной амплитуде, речь, разумеется, идет только о первом слагаемом.

Использование метода комплексных амплитуд эффективно в линейных системах, когда благодаря принципу суперпозиции колебания с несколькими частотами можно рассматривать независимо друг от друга. При вычислении величин, квадратично зависящих от  $x(t)$ , следует быть осторожным. Так, например, функции  $x^2(t)$  нельзя поставить в соответствие никакой комплексной амплитуды, поскольку она содержит колебания с частотами 0 и  $2\omega$ , отличными от частоты колебаний самого сигнала  $x(t)$ .

Тем не менее, существует важная формула, связывающая *среднее по времени* значение квадратичной функции от сигнала с его комплексной амплитудой. Рассмотрим эту связь на примере колебательного контура, рассчитав среднюю за период колебаний мощность джоулевых потерь, если в контуре поддерживаются стационарные колебания с частотой  $\omega$ . Пусть  $V(t)$  и  $I(t)$  — мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока через него, тогда по закону Джоуля-Ленца мгновенная мощность потерь равна

$$\begin{aligned} P(t) = I(t)V(t) &= \frac{1}{4} (\bar{V} e^{i\omega t} + \text{к.с.}) (\bar{I} e^{i\omega t} + \text{к.с.}) = \\ &= \frac{1}{4} (\bar{V} \bar{I}^* + \bar{V}^* \bar{I} + \bar{V} \bar{I} e^{i2\omega t} + \bar{V}^* \bar{I}^* e^{-i2\omega t}). \end{aligned}$$

Здесь к.с. означает операцию комплексного сопряжения. После усреднения по периоду колебаний получаем

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{V} \bar{I}^*). \quad (5.13)$$

Для омического сопротивления  $V = RI$ , поэтому (5.13) превращается в известные формулы  $\overline{V(t)} = R|\bar{I}|^2/2 = |\bar{V}|^2/(2R)$ .

Комплексную величину  $P_c = \bar{V} \bar{I}^*/2$  в электротехнике и электронике принято называть комплексной мощностью, выделяющейся на элементе схемы. Очевидно, что  $P_c = P_a + iP_r$ , где активная мощность взаимодействия  $P_a$  определяется формулой (5.13), а реактивная мощность равна



$P_r = \text{Im}(\bar{V}\bar{I}^*)/2$ . Как будет видно в дальнейшем, понятие реактивной мощности тесно связано с понятием вириала, используемым в механике. Для сопротивления реактивная мощность равна нулю.

Рассмотрим теперь вместо сопротивления индуктивность контура. Для нее напряжение и ток связаны соотношением  $V = L\dot{I}$ , поэтому, используя свойство (5.11), для комплексных амплитуд можно записать  $\bar{V} = i\omega\bar{I}$ . Комплексная мощность теперь равна  $P_c = i\omega L|\bar{I}|^2/2$ . Активная мощность, как и следовало ожидать, равна нулю (потерь в индуктивности нет), а реактивная пропорциональна средней за период энергии, накопленной в индуктивности.

### § 3. Случай гармонической внешней силы

Используем метод комплексных амплитуд для нахождения частного решения  $\xi(t)$  уравнения (5.3) в случае, когда  $F(t)$  — гармонический сигнал:

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = F_0 \cos(pt + \psi_0). \quad (5.14)$$

Предположим, что это решение также имеет вид гармонического сигнала с частотой внешней силы. Комплексные сигналы, соответствующие  $\xi(t)$  и  $F(t)$ , есть  $z(t) = \bar{\Xi} \exp(ipt)$  и  $\mathcal{F}(t) = \bar{F} \exp(ipt)$ . Подставляя  $\xi(t) = (z + z^*)/2$  и  $F(t) = (\mathcal{F} + \mathcal{F}^*)/2$  в (5.14) и разделяя слагаемые, пропорциональные  $\exp(ipt)$  и  $\exp(-ipt)$ , которые по отдельности должны равняться нулю, получаем уравнение для комплексного сигнала

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \mathcal{F}(t).$$

Формально это уравнение совпадает с (5.14), но его решение следует искать среди комплексных функций. Подставляя в него выражения для  $z(t)$  и  $\mathcal{F}(t)$ , дифференцируя, и сокращая на общую экспоненту, получаем алгебраическую связь между комплексными амплитудами:  $(-p^2 + 2i\gamma p + \omega_0^2)\bar{\Xi} = \bar{F}$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= \frac{\bar{F}}{-p^2 + 2i\gamma p + \omega_0^2} = \\ &= \frac{-p^2 + \omega_0^2 - 2i\gamma p}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2} \bar{F} = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \bar{F}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Величина  $\psi$  определяется формулами

$$\cos \psi = \frac{\omega_0^2 - p^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}, \quad \sin \psi = \frac{-2\gamma p}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}. \quad (5.16)$$

Используя (5.15) в формуле  $\xi(t) = \operatorname{Re}[\bar{\Xi} \exp(ipt)]$ , получаем выражение для частного решения в виде

$$\xi(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \cos(pt + \psi + \psi_0). \quad (5.17)$$

Это гармоническое колебание с частотой внешнего сигнала, амплитуда которого равна

$$A(p) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}}, \quad (5.18)$$

а угол  $\psi$  есть сдвиг фазы между внешней силой и откликом на нее осциллятора.

**Задача 5.2.** Убедитесь прямой подстановкой, что формула (5.17) действительно дает решение уравнения (5.14).

Полное решение записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2 p^2}} \cos(pt + \psi + \psi_0). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  вычисляются по формулам (5.5), в которых, в соответствии с (5.17), следует положить  $\xi(0) = A(p) \cos(\psi + \psi_0)$ ,  $\dot{\xi}(0) = -pA(p) \sin(\psi + \psi_0)$ .

Решение (5.19) показывает, что движение осциллятора под внешним гармоническим воздействием является суперпозицией двух движений: первое слагаемое описывает собственные затухающие колебания осциллятора, а второе происходит с частотой внешней силы и является *вынужденным* движением осциллятора. Амплитуда и фаза собственных колебаний зависят как от начальных условий, так и, через константы  $A$  и  $B$ , от параметров внешней силы. В выражение для вынужденных колебаний начальные условия не входят, поэтому это движение целиком определяется внешним воздействием. Самое важное состоит в том, что оба слагаемых различным образом ведут себя на больших временах. Экспоненциальный множитель  $\exp(-\gamma t)$  в первом слагаемом приводит к тому, что за время порядка нескольких  $\tau \sim 1/\gamma$  с момента начала действия силы собственные колебания практически полностью затухают и вклад в полное движение будет давать только вынужденное колебание.

Таким образом, полная картина процесса следующая. После начала действия силы в течении времени порядка нескольких  $\tau$  (это время называется временем установления) движение представляет собой суперпозицию собственных затухающих колебаний осциллятора с частотой  $\omega$  и вынужденных незатухающих колебаний с амплитудой и частотой, зависящих только от параметров внешней силы. После окончания времени установления остаются только вынужденные колебания.

Наиболее отчетливо процесс установления можно наблюдать в специальном случае, когда сначала осциллятор покоился ( $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ) и в момент времени  $t = 0$  на него начинает действовать сила  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ . Будем также считать, что добротность осциллятора велика. Из формул (5.16) следует, что вынужденное колебание сдвинуто по фазе на  $\psi = -\pi/2$  относительно внешней силы, а подставив  $p = \omega_0$  в (5.18), получаем, что амплитуда вынужденных колебаний равна  $F_0/(2\gamma\omega_0)$ . В полном решении необходимо учесть также собственные колебания осциллятора:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t) - \frac{F_0}{2\gamma\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

В первом слагаемом сделана замена  $\omega$  на  $\omega_0$ , т.к. эти частоты мало отличаются друг от друга, и накапливающаяся из-за такой замены ошибка в фазе колебаний за время установления будет мала. Потребовав выполнение начальных условий, получаем  $A = F_0/(2\gamma\omega_0)$ ,  $B = F_0/(2\omega_0^2)$ . Так как  $A/B = \omega_0/\gamma \gg 1$ , то слагаемое, пропорциональное коэффициенту  $B$  дает заметный вклад в полное колебание только в течении нескольких первых периодов действия внешней силы, а затем его влиянием можно пренебречь. В итоге получаем простой результат:

$$x(t) = -\frac{F_0}{2\gamma\omega_0} (1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t. \quad (5.20)$$

Процесс установления колебаний, рассчитанный по формуле (5.20), показан на рис. 5.3. На начальном этапе, пока  $t \ll \tau$ , амплитуда колебаний меняется во времени по линейному закону:  $1 - \exp(-\gamma t) \approx \gamma t$ , поэтому  $x(t) \approx -F_0 t/(2\omega_0) \cos \omega_0 t$ , однако затем происходит насыщение и на временах порядка времени установления амплитуда выходит на стационарный уровень  $A_m = F_0/(2\gamma\omega_0)$ .

#### § 4. Резонанс

Через достаточно большое время после начала действия силы в системе устанавливаются вынужденные колебания, амплитуда и фаза которых

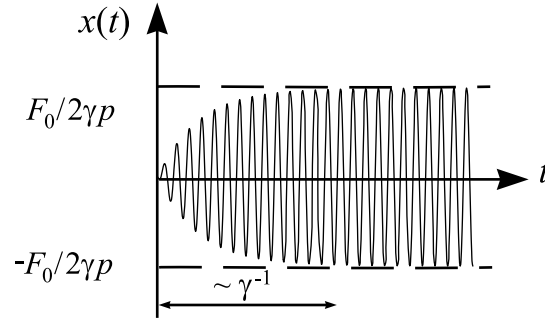


Рис. 5.3. Установление колебаний в осцилляторе при точном резонансе

задаются формулами (5.18) и (5.16). Исследуем эти соотношения более подробно. Начнем с амплитуды. Введем безразмерную величину  $u = p/\omega_0$  и перепишем формулу (5.18) в виде

$$A(u) = \frac{F_0/\omega_0^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}, \quad (5.21)$$

$Q = \omega_0/2\gamma$  — добротность осциллятора. Зависимости  $A(u)$  для разных значений добротности приведены на рис. 5.4. Из них видно, что максимальное значение амплитуда достигает при  $p \approx \omega_0$ . Возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте осциллятора, называется *резонансом*, а зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия называется резонансной кривой. Кривые на рис. 5.4 показывают, что чем выше добротность системы, тем “острее” резонансная кривая. Максимальное значение амплитуды достигается при частотах, несколько меньших, чем  $\omega_0$ , однако чем больше добротность, тем резонансная частота ближе к  $\omega_0$ . Точное значение резонансной частоты можно найти, вычислив нуль производной функции  $A(u)$ . Обозначим выражением под корнем в (5.21) через  $D(u) = (1-u^2)^2 + u^2/Q^2$ , тогда  $D'(u) = -4u(1-u^2) + 2u/Q^2$ , следовательно  $A(u)$  имеет два экстремума  $u = 0$  и  $u = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$ . Второй корень соответствует резонансу, отсюда получаем  $\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ . В условиях большой добротности  $\omega_p \approx \omega_0[1 - 1/(4Q^2)]$ . Видно, что уже при  $Q = 5$  относительная разность между  $\omega_p$  и  $\omega_0$  оказывается меньше одного процента. Для колебательных систем, у которых добротность больше нескольких десятков, этой разностью почти всегда

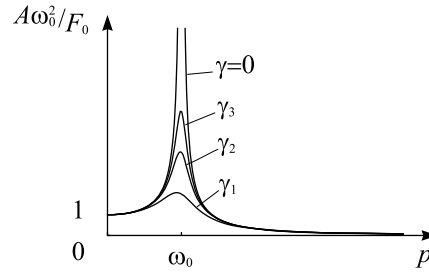


Рис. 5.4. Резонансные кривые осциллятора для различных величин затухания.  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ .

можно пренебречь. По этой причине в дальнейшем мы будем полагать  $\omega_p = \omega_0$  без специальных оговорок.

Если внешняя сила постоянна ( $p = 0$ ), то статическое смещение осциллятора равно  $A(0) = F_0/\omega_0^2$ . Положив в (5.21)  $p = \omega_0$ , получаем, что точно в резонансе амплитуда колебаний есть  $A_m = F_0/(2\gamma\omega_0)$ . Отношение  $A_m/A(0) = Q$ , откуда видно, что для добротных систем размах резонансных колебаний может достигать огромных величин! Система, устойчивая к внешнему статическому воздействию, может быть разрушена, если внешняя сила содержит частотные компоненты, совпадающие с резонансной частотой. Именно поэтому необходим тщательный расчет резонансных частот таких сложных колебательных систем, как балки, мосты, турбины моторов, корпуса самолетов и кораблей, а также сложных электрических схем.

Красивый пример использования резонанса можно найти у Л.И. Мандельштама [2, с.251]. "Звонарь на колокольне, раскачивающий тяжелый колокол, пользуется, хотя и бессознательно, тем же явлением. Он не в состоянии преодолеть тяжесть колокола одним усилием и поэтому поступает так. Он дает веревке слабый толчок: колокол отклоняется, но очень незначительно, а затем возвращается обратно; как раз в момент возвращения звонарь дает следующий толчок и такими ритмичными, следующими в *tempo* колебаний колокола толчками, он его раскачивает до тех пор, пока язык не ударит по колоколу. Вот почему, между прочим, звонить в тяжелый колокол, особенно снизу, при помощи веревки, т.е. в условиях, когда следить за колебаниями нельзя, требует немалого навыка".

Резонансные кривые на рис. 5.4 соответствуют системам с малой добротностью. Если добротность осциллятора велика, то качественный вид резонансных кривых оказывается иным из-за необходимости другого вы-

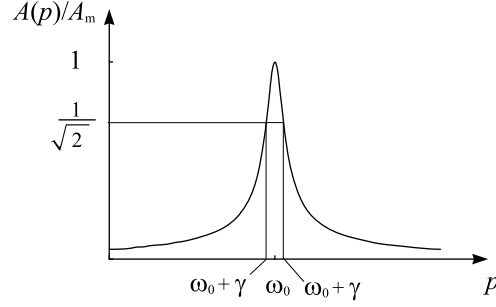


Рис. 5.5. Резонансная кривая осциллятора в случае большой добротности. Ширина резонансной кривой на уровне  $A/A_m = 1/\sqrt{2}$  равна  $2\gamma$ .

бора масштабов по осям координат. Чтобы исследовать этот случай, разложим функцию  $D(u)$  вблизи резонансного значения в ряд, ограничившись двумя слагаемыми. Пренебрегая поправками порядка  $1/Q^2$  к основным членам разложения, получим  $D(u) \approx 1/Q^2 + 4(u - 1)^2$ . Подставляя это разложение в (5.21) и возвращаясь к размерным величинам, получаем

$$A(p) = \frac{F_0/(2\gamma\omega_0)}{\sqrt{1 + (p - \omega_0)^2/\gamma^2}}. \quad (5.22)$$

В этом приближении резонансная кривая симметрична относительно частоты  $\omega_0$ . Полученная зависимость часто называется лоренцевой кривой, или лоренцевым распределением, поскольку она играет важную роль в теории дисперсии света, построенной Г.Лоренцем. Резонансная кривая (5.22) приведена на рис. 5.5.

На измерении формы резонансной кривой основан метод экспериментального определения параметров осциллятора — собственной частоты и добротности. Для этого в эксперименте снимают зависимость амплитуды колебаний осциллятора от частоты и строят ее в координатах  $(p, A^2/A_m^2)$ . Максимум этой кривой приходится на резонансную частоту. Кроме того, из (5.22) следует, что при  $p = \omega_0 \pm \gamma$  квадрат амплитуды уменьшается в два раза по сравнению с резонансным значением. Поэтому измерив ширину резонансной кривой на уровне  $1/2$ , можно определить  $\Delta\omega = 2\gamma$  и вычислить добротность осциллятора по формуле  $Q = \omega_0/\Delta\omega_0$ .

Рассмотрим теперь случай резонанса в осцилляторе без затухания. Прямая подстановка в (5.18)  $\gamma = 0$  и  $p = \omega_0$  дает бесконечность, поэтому иногда можно встретить утверждение, что амплитуда колебаний

консервативного осциллятора в резонансе бесконечна. На самом деле это утверждение неверно и ошибка состоит в том, что вынужденное решение (5.17) найдено в предположении, существования стационарных колебаний с постоянной амплитудой, что в данном случае не выполняется. Чтобы получить правильный ответ, следует действовать более аккуратно. Рассмотрим, например, осциллятор без затухания, который покоится и при  $t = 0$  на него начинает действовать сила  $F(t) = F_0 \cos(pt + \psi_0)$ , причем сначала  $p \neq \omega_0$ . Решение равно

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{\omega_0^2 - p^2} \cos(pt + \psi_0)$$

Находя коэффициенты  $A$  и  $B$  из начальных условий, приводим эту формулу к виду

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - p^2} [\cos(pt + \psi_0) - \cos(\omega_0 t + \psi_0)] - \frac{F_0}{\omega_0(\omega_0 + p)} \sin \psi_0 \sin \omega_0 t.$$

При переходе к пределу  $p \rightarrow \omega_0$  в первом слагаемом следует аккуратно вычислить неопределенность типа  $0/0$ , что дает

$$x(t) = -\frac{F_0}{2\omega_0^2} \sin \psi_0 \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + \psi_0), \quad (5.23)$$

Видно, что решение является суммой двух слагаемых, одно из которых ограничено, а второе соответствует колебанию с линейно растущей во времени амплитудой. Таким образом, в любой момент времени решение остается конечным, однако колебания никогда не выходят на стационарный уровень. Через некоторое время второе слагаемое оказывается преобладающим, в итоге получаются колебания с линейно растущей амплитудой. В реальных системах, конечно, такое возрастание будет в конце концов ограничено одним из неучтенных факторов: малым затуханием или нелинейностью.

## § 5. Фазовые соотношения при резонансе

Исследуем теперь фазовые соотношения между вынуждающей силой и откликом осциллятора. Сдвиг фазы между этими колебаниями задается формулами (5.16). Из них, во-первых, следует, что при любой частоте  $\sin \psi < 0$ , т.е.  $-\pi < \psi < 0$ . Следовательно отклик всегда отстает по фазе от воздействия. Во-вторых, из (5.16) следует, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-2\gamma p}{\omega_0^2 - p^2}$$

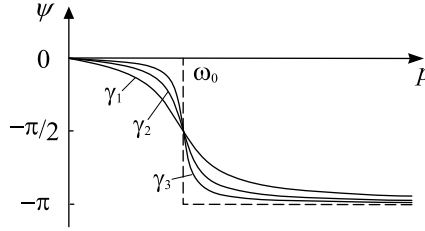


Рис. 5.6. Фаза вынужденных колебаний осциллятора относительно фазы внешней силы.  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ .

Предположим, что частота  $p$  такова, что резонанса нет. Это значит, что  $|\omega_0 - p| \gg \gamma$ . Если  $\omega_0 \gg p$ , то  $\operatorname{tg} \psi \approx \psi \approx -p/(Q\omega_0)$ , если же  $\omega \ll p$ , то  $\operatorname{tg} \psi \approx \omega_0/(Qp)$  и  $\psi \approx -\pi + \omega_0/(Qp)$ . Таким образом, вне резонанса колебания осциллятора происходят либо в фазе с внешним воздействием ( $p \ll \omega_0$ ), либо в противофазе с ним ( $p \gg \omega_0$ ). Переход из одного состояния в другое при изменении частоты воздействия происходит в узкой полосе шириной порядка  $2\gamma$  вблизи резонансной частоты. Точно в резонансе ( $p = \omega_0$ ) сдвиг фазы равен  $\psi = -\pi/2$ .

Зависимости  $\psi(p)$  для нескольких значений добротности приведены на рис. 5.6. Отметим, что при увеличении добротности, эти кривые все более приближаются к функции-ступеньке. Для осциллятора без потерь  $\psi = 0$ , если  $p < \omega_0$  и  $\psi = -\pi$ , если  $p > \omega_0$ .

Явление резонанса проявляется буквально на каждом шагу. Приведем несколько примеров.

Резонанс лежит в основе принципа действия сверхвысокочастотных электронных приборов, в которых используются высокодобротные объемные резонаторы. Типичными приборами этого класса являются клистроны, а простейшим из них можно назвать двухрезонаторный пролетный усилительный клистрон (рис. 5.7) [3]. Входной сигнал от внешнего источника с частотой  $\omega$ , близкой к собственной частоте  $\omega_0$  резонатора, воздействует на электронный пучок внутри высокочастотного зазора. Поэтому на входе в трубу дрейфа электроны имеют разные скорости. Труба дрейфа — пространство, свободное от внешних высокочастотных полей. В этом пространстве из-за конечного времени пролета электроны, покинувшие резонатор с большими скоростями, догоняют электроны, вылетевшие раньше с меньшими скоростями. Это приводит к группированию электронов, образованию электронных сгустков — уплотнений и в результате — к возникновению переменной составляющей тока [4]. Если частота воз-



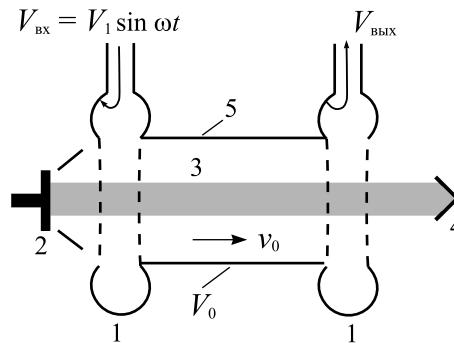


Рис. 5.7. Схематическое изображение двухрезонаторного клистрона — усилителя: 1 — входной и выходной объемные резонаторы; 2 — электронная пушка; 3 — электронный поток; 4 — коллектор, собирающий электроны; 5 — трубка дрейфа;  $V_0$  — потенциал резонаторов и трубки дрейфа;  $V_{вх}$  и  $V_{вых}$  — СВЧ входное и выходное напряжения.

буждения входного резонатора близка к собственной частоте выходного, то электронные сгустки будут возбуждать его резонансным образом, что приведет к усилению входного сигнала. Когда входной сигнал велик, в пучке начинают сказываться нелинейные процессы и возникают гармоники тока частоты  $\omega$ . Такие гармоники будут эффективно возбуждать колебания в выходном резонаторе опять-таки при выполнении условий резонанса во времени, которые для  $n$ -й гармоники запишутся в виде  $n\omega \approx \omega_0$  ( $n$ -целое). Это будет уже клистрон-умножитель частоты.

Использование явления резонанса чрезвычайно разнообразно. На его основе определяют, в частности, собственные колебания молекул в веществе. Молекулы некоторых газов, молекулы с электрическим дипольным моментом, парамагнитные атомы и ионы во внешнем магнитном поле и т.п. имеют такой набор энергетических уровней, которому соответствуют собственные (резонансные) частоты, лежащие в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне радиоволн. Если такая молекула или атом облучаются СВЧ электромагнитными колебаниями, частота которых удовлетворяет условию  $h\nu = W_{\text{в}} - W_{\text{н}}$ , ( $h$  — постоянная Планка;  $W_{\text{в}}, W_{\text{н}}$  — значения энергии на верхнем и нижнем уровнях), то может произойти резонансное поглощение.

Для изучения поглощения СВЧ колебаний атомами или молекулами применяют радиоспектроскопы (рис. 5.8) [5]. От генератора СВЧ колеба-

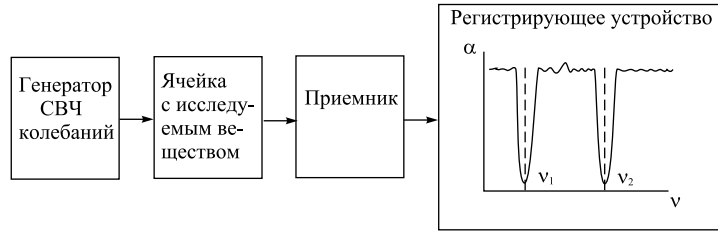


Рис. 5.8. Блок-схема спектрокопа:  $\alpha$  — величина, характеризующая поглощение,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — резонансные частоты

ний<sup>3</sup> излучение попадает в поглощающую ячейку — объемный резонатор (или отрезок волновода), заполненный исследуемым веществом. Когда частота сигнала, подаваемого от внешнего источника, совпадает в резонаторе или волноводе с резонансной частотой поглощения исследуемого вещества, то происходит поглощение СВЧ излучения, которое приводит к ослаблению сигнала на выходе приемника и к появлению на кривой зависимости поглощаемой мощности от частоты пиков — максимумов поглощения спектральных линий. Исследование резонансных частот, ширины и формы спектральных линий позволяет определить структуру молекул, структуру атомных ядер и строение электронных оболочек атомов, устанавливать характер взаимодействия между атомами и молекулами в веществе и т. д. (подробнее см. [5]).

Резонанс можно использовать и для глобальных измерений. С его помощью удалось, например, определить параметры осциллятора Земля - атмосфера [6]. Внешней силой в этом случае служит Луна, которая вращается вокруг Земли и вызывает два раза в сутки приливы атмосферы с периодом 12 часов 40 минут. Если атмосферу сместить, то благодаря возвращающей гравитационной силе возникнут ее колебания относительно Земли. Для измерения параметров  $\gamma$  и  $\omega_0$  такого глобального осциллятора достаточно найти  $A^2/A_m^2$  и  $\psi$  при каком-нибудь одном значении  $\omega$ . Так и было сделано: измерили величину атмосферных приливов и время их

<sup>3</sup>В качестве генератора СВЧ колебаний часто применяют отражательные клистроны (рис. 5.8), в которых модуляция электронов по скорости и передача энергии сгруппированным пучком электронов высокочастотному полю осуществляется в одном резонаторе благодаря тому, что электроны группируются в тормозящем статическом поле в пространстве резонатор-отражатель (электрод с потенциалом  $V_R$  на рис. 5.9) и возвращаются в резонатор. Частоту колебаний можно плавно изменять, меняя напряжение на отражателе. Сигнал от клистрона, поступающий в ячейку, модулируется по частоте.

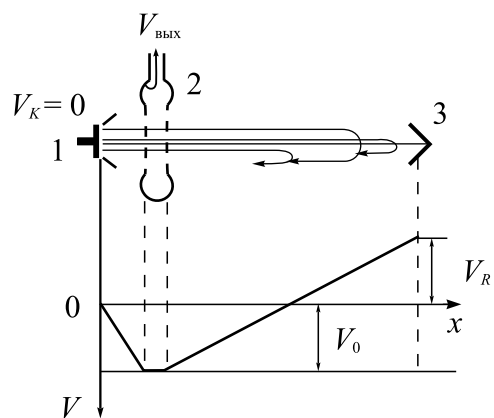


Рис. 5.9. Схематическое изображение клистронного генератора и картина распределения статического потенциала вдоль длины прибора;

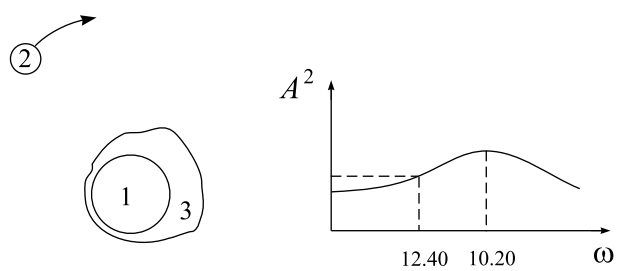


Рис. 5.10. К определению собственных параметров Земля — атмосфера:  $= 2\pi/\omega = 10$  ч. 20 мин. 1 — Земля, 2 — Луна, 3 — атмосфера Земли.

задержки, что позволило по одной известной точке построить резонансную кривую (рис. 5.10).

## § 6. Энергетические соотношения при резонансе и метод усреднения

Полезно получить выражения для резонансной кривой и фазы вынужденных колебаний другим способом, в основе которого лежит метод усреднения. Проведем этот вывод на примере колебательного контура, описываемого уравнением (5.2). Умножим его на  $I = \dot{Q}$  и учтем, что  $2Q\dot{Q} = dQ^2/dt$ ,  $2\dot{Q}\ddot{Q} = d(\dot{Q})^2/dt$ ,  $\omega_0^2 = (1/LC)$  и  $\gamma = R/(2L)$ . Полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2(t)}{2} + \frac{Q^2(t)}{2C} \right) + RI^2(t) = E(t)I(t). \quad (5.24)$$

Очевидно, что это закон сохранения энергии: работа, совершаемая ЭДС, расходуется на изменение энергии в контуре и омические потери. Усредним это уравнение по времени, предполагая, что переходной процесс завершился и в контуре существуют только периодические вынужденные колебания. При усреднении полной производной по периоду получается нуль, поэтому результат усреднения таков:

$$R\overline{I^2(t)} = \overline{E(t)I(t)}. \quad (5.25)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии в среднем за период.

Одного уравнения недостаточно, чтобы определить амплитуду и фазу колебаний. Для получения второго уравнения умножим (5.2) на  $Q(t)$  и воспользуемся формулой  $Q\ddot{Q} = d(Q\dot{Q})/dt - \dot{Q}^2$ . Получаем

$$\frac{d}{dt}(Q\dot{Q} - \gamma Q^2) - \dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2 = \frac{1}{L}E(t)Q(t).$$

После усреднения по времени слагаемое с полной производной вновь исчезает, а оставшееся выражение приводится к виду

$$\frac{\overline{Q^2(t)}}{2C} - \frac{\overline{LI^2(t)}}{2} = \frac{1}{2}\overline{E(t)Q(t)}. \quad (5.26)$$

В левой части (5.26) стоит разность средних за период значений электрической и магнитной энергий колебаний. Физический смысл этого соотношения становится понятным, если привлечь аналогию между колебаниями в контуре и колебаниями механической системы, например грузика

на пружинке. Уравнения второй системы получаются из первой заменами  $Q(t) \rightarrow x(t)$ ,  $I(t) \rightarrow v(t)$ ,  $L \rightarrow m$ ,  $1/C \rightarrow k$  и  $E(t) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{вн}}(t)$  ( $\mathcal{F}_{\text{вн}}$  — внешняя сила, действующая на грузик). При этом уравнение (5.26) преобразуется в

$$\frac{\overline{kx^2(t)}}{2} - \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{1}{2}\overline{\mathcal{F}_{\text{вн}}(t)x(t)},$$

или  $2(\overline{W_{\text{п}}} - \overline{W_{\text{к}}}) = \overline{\mathcal{F}_{\text{вн}}(t)x(t)}$ . Поскольку упругая сила, действующая на грузик, равна  $\mathcal{F}_{\text{упр}} = -kx$ , то эта формула может быть переписана следующим образом:  $2\overline{W_{\text{к}}} + V = 0$ , где  $V = \overline{(\mathcal{F}_{\text{вн}} + \mathcal{F}_{\text{упр}})x(t)}$  — вириал системы [7]. Таким образом, уравнение (5.26) есть полный аналог теоремы вириала (1.53) для механических систем, о которой шла речь в главе 1.

До сих пор единственным предположением, сделанным при выводе уравнений (5.25) и (5.26) было предположение о периодичности движения осциллятора. Конкретизируем его, считая, что ЭДС меняется по гармоническому закону<sup>4</sup>  $E(t) = E_0 \cos pt$ , а отклик осциллятора равен  $Q(t) = Q_0 \cos(pt + \psi)$ . В этом случае все средние в формулах (5.25) и (5.26) легко вычисляются, что дает соотношения

$$\begin{aligned} Rp^2Q_0^2 &= -pQ_0E_0 \sin \psi, \\ \frac{Q_0^2}{2C} - \frac{p^2L^2Q_0^2}{2} &= \frac{1}{2}Q_0E_0 \cos \psi, \end{aligned} \quad (5.27)$$

или

$$\begin{aligned} 2\gamma pQ_0 &= -E_0/L \sin \psi, \\ (\omega_0^2 - p^2)Q_0 &= E_0/L \cos \psi, \end{aligned} \quad (5.28)$$

Возводя в квадрат и складывая эти формулы, получаем

$$Q_0^2 = \frac{E_0^2/L^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\gamma^2p^2},$$

что, очевидно, с точностью до переобозначений совпадает с формулой для резонансной кривой (5.18). Подставив найденное значение  $Q_0$  в (5.28), получаем формулы (5.16) для сдвига фазы  $\psi$ .

---

<sup>4</sup>Фазу внешней силы  $\psi_0$  можно положить равной нулю, так как рассматривается только установившееся решение, и отсчет времени можно выбрать так, чтобы обеспечить выполнение этого условия.



## ГЛАВА 6

### Осциллятор под произвольным внешним воздействием

*Периодическая внешняя сила. Произвольная внешняя сила.  
Предельные случаи: толчок и медленное изменение внешнего воздействия.*

#### § 1. Периодическая внешняя сила

В этой главе будут рассмотрены несколько случаев, когда сила, действующая на осциллятор не является гармонической. Речь будет идти о режиме установившихся колебаний, когда собственным движением осциллятора можно пренебречь.

Рассмотрим сначала случай периодической силы с периодом  $T$ , т.е.  $F(t + T) = F(t)$ . Известно, что периодическую функцию можно разложить в ряд по гармоническим компонентам — синусам и косинусам, это разложение называется рядом Фурье [1]. Ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} + \chi_n\right), \quad (6.1) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \overline{F(t)}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ , а фаза гармоники с номером  $n$  — формулами

$$\cos \chi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \chi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}. \quad (6.3)$$

Ряд Фурье существует и сходится к исходной функции  $F(t)$ , если она на периоде абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле (см. примечание на стр. 58). В точке разрыва первого рода ряд Фурье сходится к значению, равному полусумме предельных значений функции справа и слева от разрыва [1].

Благодаря принципу суперпозиции отклик осциллятора на периодическую силу можно рассчитать как сумму откликов на действие каждой временной гармоники. Поэтому сразу можно записать вынужденное решение в виде

$$\xi(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}} \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n), \quad (6.4)$$

где  $p_n = 2\pi n/T$  — частота  $n$ -й Фурье гармоники, а фазовые сдвиги  $\psi_n$ , определяются из формул, подобных (5.16), в которых вместо  $p$  следует подставить  $p_n$ .

Обычно наибольший интерес вызывает случай, когда осциллятор имеет высокую добротность. При этом характер решения зависит от того, попадает частота хотя бы одной из гармоник в полосу резонанса, или нет. Если существует такое  $n$ , что выполняется условие  $|\omega_0 - 2\pi n/T| \lesssim \gamma$ , то гармоника с этим номером оказывает значительно большее воздействие



на осциллятор чем все остальные благодаря резонансу<sup>1</sup>. В таком случае

$$\xi(t) \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}} \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n). \quad (6.5)$$

Если же все гармоники находятся вне резонанса, то их результирующее воздействие определяется, в основном, скоростью спада амплитуд  $a_n$  и  $b_n$  с ростом  $n$ .

Таким образом, резонанс возможен не только под действием гармонической внешней силы, но и когда внешняя сила периодическая, следовательно данное выше определение резонанса требует обобщения. Резонанс под действием периодической внешней силы будет возникать, если собственная частота системы близка к частоте одной из фурье-гармоник силы  $p_n = 2\pi n/T$ , и амплитуда этой гармоники  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  не равна нулю.

Часто пользуются комплексной формой записи ряда Фурье:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t/T}, \quad (6.6a)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i2\pi n t/T} dt. \quad (6.6b)$$

Связь между представлениями (6.1) и (6.6a) легко получить, если воспользоваться условием, что функция  $F(t)$  — действительная. Тогда  $c_n = c_{-n}^*$  и формулу (6.6a) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} F(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{i2\pi n t/T} + c_n^* e^{-i2\pi n t/T} \right) = \\ &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( c'_n \cos \frac{2\pi n t}{T} - c''_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $c'_n$  и  $c''_n$  — действительная и мнимая части  $c_n$ . Сравнивая это соотношение с формулой (6.1), получаем, что  $c_0 = a_0$ ,  $a_n = 2c'_n$ ,  $b_n = -2c''_n$ ,  $\chi_n = \text{Arg } c_n$ . Формула (6.4) при этом принимает вид

$$\xi(t) = \frac{c_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|c_n| \cos(p_n t + \chi_n + \psi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - p_n^2)^2 + 4\gamma^2 p_n^2}}. \quad (6.7)$$

---

<sup>1</sup>Предполагается, естественно, что для этого значения  $n$  выполняется условие  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \neq 0$ .

## § 2. Произвольная внешняя сила

Уравнение гармонического осциллятора допускает точное решение для вынужденных колебаний и в случае произвольной внешней силы. Для вывода соответствующей формулы воспользуемся переходом к нормальным колебаниям. Для этого перепишем уравнение (5.3) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = v, \quad (6.8a)$$

$$\dot{v} = -2\gamma v - \omega_0^2 x + F(t) \quad (6.8b)$$

Умножая второе из этих уравнений на коэффициент  $\beta$  и складывая со вторым, получаем

$$\frac{d}{dt}(x + \beta v) = -\beta\omega_0^2 \left( x - \frac{1 - 2\gamma\beta}{\omega_0^2\beta} v \right) + \beta F(t). \quad (6.9)$$

Потребуем, чтобы выражения в круглых скобках справа и слева совпали, это выполняется, если  $\beta = -(1 - 2\gamma\beta)/(\omega_0^2\beta)$ , или

$$\omega_0^2\beta^2 - 2\gamma\beta + 1 = 0.$$

Отсюда находим  $\omega_0^2\beta_{1,2} = (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) = (\gamma \pm i\omega)$ . Подстановка  $\beta = \beta_1$  в (6.9) приводит к уравнению

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma + i\omega)a + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} F(t), \quad (6.10)$$

а подстановка  $\beta = \beta_2$  — к уравнению

$$\frac{da^*}{dt} = -(\gamma - i\omega)a^* + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} F(t), \quad (6.11)$$

где  $a(t)$  и  $a^*(t)$  — нормальные колебания (см. главу 3), равные

$$a(t) = x + \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} v, \quad a^*(t) = x + \frac{\gamma - i\omega}{\omega_0^2} v, \quad (6.12)$$

Обратив эти формулы, запишем выражения для  $x(t)$  и  $v(t)$  через нормальные колебания:

$$x = \frac{1}{2} [(1 + i\gamma/\omega) a + (1 - i\gamma/\omega) a^*], \quad v = \frac{\omega_0^2}{2i\omega} (a - a^*). \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.10) ищем в виде  $a(t) = A(t) \exp[(-\gamma - i\omega)t]$ ; для  $A(t)$  получается уравнение  $\dot{A} = (\gamma + i\omega) \exp[(\gamma + i\omega)t] F(t)/\omega_0^2$ , проинтегрировав которое и подставив результат в формулу для комплексной амплитуды, получаем

$$a(t) = \frac{\gamma + i\omega}{\omega_0^2} \int_0^t e^{-(\gamma+i\omega)(t-t')} F(t') dt'. \quad (6.14)$$

Используя это выражение в первом из уравнений (6.13), будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega(t-t') F(t') dt'. \quad (6.15)$$

При выводе (6.15) предполагалось, что сила начинает действовать на неподвижный осциллятор в момент времени  $t = 0$ . Если начальные координата и (или) скорость осциллятора ненулевые, то к (6.15) следует добавить слагаемые, соответствующие собственным затухающим колебаниям. Другой вариант начальных условий состоит в том, что к моменту времени  $t$  сила действует достаточно долго. В этом случае в уравнении (6.15) нижний предел интегрирования следует заменить на  $-\infty$ .

Если потерь нет ( $\gamma = 0$ ), то формулу (6.15) можно преобразовать к виду  $x(t) = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t$ , где

$$A(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 t' F(t') dt', \quad B(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \cos \omega_0 t' F(t') dt'. \quad (6.16)$$

Если, например,  $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$ , то  $A(t) = (F_0/2\omega_0)[t - \sin(2\omega_0 t)/(2\omega_0)]$  и при  $t \rightarrow \infty$  решение неограниченно — получаем секулярный рост. Очевидно, что если с ростом  $t$  коэффициенты  $A(t)$  и  $B(t)$  остаются малыми, то резонанса в системе нет. Таким образом, условие отсутствия резонанса записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \begin{array}{c} \sin \omega_0 t' \\ \cos \omega_0 t' \end{array} \right\} F(t') dt' = 0. \quad (6.17)$$

Математически это соотношение означает, что функция  $F(t)$  не должна содержать собственных функций задачи. В общем случае, когда затухание не равно нулю, математически строгое определение резонанса (6.17) заменяется физическим условием “значительного возрастания амплитуды колебаний”.

### § 3. Предельные случаи

**Резкий толчок.** Предположим, что сила  $F(t)$  имеет характерный вид короткого импульса длительностью  $\Delta\tau$  (рис. 6.1,а), причем  $\Delta\tau \ll 2\pi/\omega_0 \ll 1/\gamma$ . В этом случае можно считать, что осциллятору резким толчком сообщается импульс  $m \int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau$ , после чего он начинает совершать колебания по закону

$$x(t) = \frac{\int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (6.18)$$

Как получить этот физически очевидный результат из общей формулы (6.15)? Представим ее в виде

$$x(t) = \left[ -\frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\gamma\tau} \sin \omega\tau F(\tau) d\tau \right] e^{-\gamma t} \cos \omega t + \\ + \left[ \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\gamma\tau} \cos \omega\tau F(\tau) d\tau \right] e^{-\gamma t} \sin \omega t.$$

При  $t > \Delta\tau$  верхний предел интегрирования можно положить равным  $\Delta\tau$ , при этом под интегралами можно приближенно считать  $\sin \omega\tau \approx \omega\tau$ ,  $\cos \omega\tau \approx 1$  и  $\exp(\gamma\tau) \approx 1$ . Тогда отношение первого из этих интегралов ко второму оценивается как  $\omega\Delta\tau \ll 1$ , поэтому первым слагаемым можно пренебречь, в результате чего приходим к формуле (6.18).

Формула (6.18) лежит в основе работы баллистических приборов, предназначенных для определения импульса кратковременно действующих сил [2]. К таким приборам относятся, в частности, баллистический маятник, служащий для измерения скорости пули и баллистический гальванометр, измеряющий количество заряда, прошедшего по цепи.

Устройство баллистического маятника показано на рис. 6.1,б. Пуля массой  $m$ , имеющая скорость  $v_0$ , попадает в неподвижный маятник массы  $M \gg m$  и застревает в нем. В результате этого маятник приобретает начальную горизонтальную скорость  $V \approx mv_0/M$ . В эксперименте удобней всего измерять величину первого максимального отклонения маятника от положения равновесия. Подставляя в (6.18)  $\int_0^{\Delta\tau} F(\tau) d\tau = V$ , легко

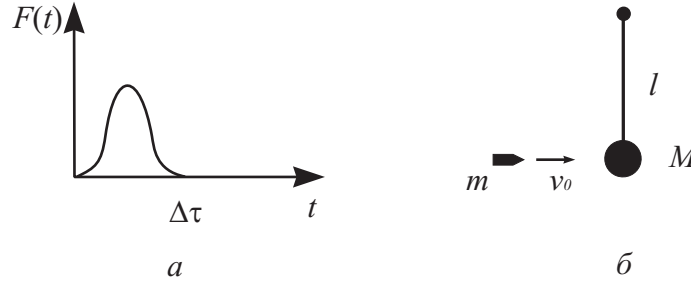


Рис. 6.1. Действие на осциллятор резкого толчка: качественный вид внешней силы (а) и устройство баллистического маятника (б).

находим, что это отклонение равно

$$X_1 = \frac{mv_0}{M\omega} e^{-\gamma t_1} \sin \omega t_1, \quad (6.19)$$

где  $t_1 = \arctg(\omega/\gamma)/\omega$ . Таким образом, величина первого максимального отклонения пропорциональна скорости:  $X_1 = \beta v_0$ , где константа  $\beta$  обычно определяют градуировкой прибора. Тем не менее, формула (6.19) необходима для выбора параметров прибора и оценки погрешностей.

**Очень медленное изменение внешней силы.** Этот случай соответствует выполнению других соотношений между временными масштабами задачи:  $\Delta\tau \gg 1/\gamma \gg 2\pi/\omega_0$ . Характерное время изменения внешней силы можно определить, например, как  $\Delta\tau \sin |F/F'|$ . Интуитивно ясно, что если сила меняется очень медленно, то в каждый момент времени осциллятор успевает “подстроиться” к ее текущей величине, меняя положение равновесия. В уравнении (5.3) первое и второе слагаемые слева, пропорциональные соответственно силе инерции и силе трения, пренебрежимо малы по сравнению с возвращающей силой (третье слагаемое), которая почти целиком уравнивает внешнюю силу справа. Отсюда следует простое соотношение

$$x(t) \approx \frac{F(t)}{\omega_0^2}. \quad (6.20)$$

Поучительно получить его непосредственно из общей формулы (6.15). Предположим, что  $F(t)$  дифференцируема, тогда в (6.15) можно провести

интегрирование по частям:

$$x(t) = \frac{F(t)}{\omega^2} - \frac{F(0)e^{-\gamma t} \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega(t-t') \left[ \frac{dF(t')}{dt} + \gamma F(t') \right] dt'. \quad (6.21)$$

Второе слагаемое в этом выражении представляет собой собственные затухающие колебания осциллятора, возникшие из-за скачкообразного “включения” внешней силы при  $t = 0$ . Через время порядка  $1/\gamma$  они затухают, поэтому на интересующих нас масштабах времени это слагаемое пренебрежимо мало.

Используя оценку  $F' \sim F/\tau$ , получаем, что последнее слагаемое в (6.21) имеет порядок

$$\max \left( \frac{1}{\omega\tau}, \frac{\gamma}{\omega} \right) \left[ \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega(t-t') F(t') dt' \right].$$

Выражение в квадратных скобках имеет тот же порядок величины, что и само  $x(t)$  (см. (6.15)), значит все это слагаемое в  $\max(1/(\omega\tau), \gamma/\omega) \ll 1$  раз меньше, чем первый член в (6.21). В результате в (6.21) остается только первое слагаемое, что совпадает с выражением (6.20) в приближении большой добротности.

Заметим, что если существуют производные функции  $F(t)$  более высокого порядка, то интегрирование по частям может быть повторено еще несколько раз, таким образом получается разложение для  $x(t)$  в асимптотический ряд по степеням  $1/\omega$ .

## ГЛАВА 7

### Осциллятор с изменяющимися параметрами

*Примеры осцилляторов с переменными параметрами: колебательный контур, маятник с вибрирующим подвесом, качели. Параметрический резонанс. Теория Флоке. Параметрическая неустойчивость в модельной системе. Уравнение Матье. Метод Ван-дер-Поля для основного параметрического резонанса. Влияние затухания. Параметрическая неустойчивость в двухконтурной схеме. Соотношения Мэнли-Роу. Медленное изменение параметров осциллятора. Адиабатический инвариант. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазер на свободных электронах.*

#### § 1. Вводные замечания

Существует несколько способов, которыми можно сообщить энергию колебательной системе. С тремя из них мы уже познакомились в предыдущих главах. Во-первых, можно сделать это в начальный момент времени, выведя осциллятор из положения равновесия или толкнув его, т. е. использовать начальные условия. Во-вторых, можно реализовать систему с отрицательным трением, когда положение равновесия станет неустойчивым. Третий способ состоит в действии на осциллятор внешней силы, находящейся с ним в резонансе. Оказывается, что существует еще один способ, заключающийся в *изменении параметров осциллятора во времени*. При определенных условиях это может приводить к появлению неустойчивости в системе, а также к ряду других интересных физических эффектов.

Рассмотрим колебательный контур, емкость которого меняется во времени (рис. 7.1,а), что можно обеспечить, например, механически изменяя расстояние между пластинами конденсатора<sup>1</sup>. Мгновенное значение заряда на конденсаторе  $Q(t)$  связано с напряжением на нем  $V_c(t)$  соотно-

---

<sup>1</sup>В современных радиотехнических схемах роль переменной емкости обычно играет заряженный слой свободных носителей в области  $p-n$ -перехода полупроводникового

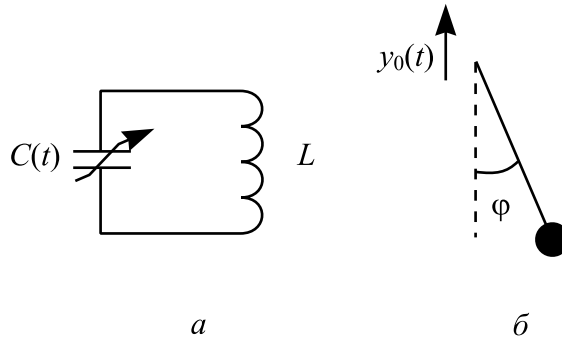


Рис. 7.1. Примеры осцилляторов с переменными параметрами: колебательный контур с меняющейся емкостью (а) и маятник, точка подвеса которого движется с ускорением в вертикальном направлении (б).

шением  $Q(t) = C(t)V_c(t)$ , а уравнение Киргхофа для контура имеет вид  $L\dot{I}(t) + V_c(t) = 0$ . Учитывая, что  $I(t) = \dot{Q}(t)$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC(t)} Q(t) = 0. \quad (7.1)$$

Это уравнение имеет вид уравнения гармонического осциллятора, частота колебаний которого меняется во времени. С математической точки зрения, мы имеем дело с линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Отметим, что если в качестве динамической переменной выбрать не заряд, а ток в контуре, то вместо (7.1) получается уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ LC(t) \frac{dI(t)}{dt} \right] + I(t) = 0. \quad (7.2)$$

Это означает, что уравнения (7.1) и (7.2) эквивалентны и могут быть получены друг из друга заменой переменных.

Другой пример осциллятора с переменными параметрами дает маятник, точка подвеса которого совершает движение с ускорением в вертикальном направлении по заданному закону  $y = y_0(t)$  (рис. 7.1,б). Переход

---

диода, а изменение емкости во времени обеспечивается изменением постоянного напряжения смещения на диоде.



в неинерциальную систему отсчета, в которой точка подвеса покоится, позволяет записать уравнение маятника:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi - m\ddot{y}_0(t)l\varphi,$$

где  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия, который считается малым. Второе слагаемое в правой части есть момент силы инерции  $F_{ин} = -m\ddot{y}_0(t)$ , действующей в вертикальном направлении в неинерциальной системе отсчета. Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\ddot{\varphi} + \left( \omega_0^2 + \frac{\ddot{y}_0(t)}{l} \right) \varphi = 0. \quad (7.3)$$

Видно, что (7.3) с точностью до переобозначений совпадает с уравнением (7.1) (здесь  $\omega_0^2 = g/l$ ).

Третий пример хорошо знаком читателю с детства: это качели. Для того, чтобы увеличивать амплитуду качания, мальчик на качелях должен приседать и выпрямлять ноги в определенные моменты времени согласованно с движением самих качелей. При этом происходит изменение во времени положения центра тяжести и момента инерции системы в целом. Не записывая соответствующего уравнения, скажем, что после некоторых упрощений оно также может быть приведено к виду (7.1).

В этих примерах изменению подвергается частота колебательной системы. Можно, однако, рассмотреть систему, в которой меняется во времени также и величина потерь, например колебательный контур с переменными сопротивлением и емкостью. В этом случае уравнение осциллятора имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma(t)\dot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0. \quad (7.4)$$

Заменой переменных

$$x(t) = \exp \left[ - \int^t \gamma(t') dt' \right] y(t), \quad (7.5)$$

такое уравнение преобразуется в уравнение

$$\ddot{y}(t) + [\omega^2(t) - \gamma^2(t) - \dot{\gamma}(t)] y(t) = 0, \quad (7.6)$$

в котором слагаемое с первой производной от  $y(t)$  по времени отсутствует. Таким образом, в наиболее общем случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами можно привести к канонической форме:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0. \quad (7.7)$$

Это уравнение будет основным объектом исследования в данной главе.

С физической точки зрения наибольший интерес представляют такие системы, которые в некотором смысле близки по своим свойствам к гармоническому осциллятору. Так происходит, если  $\omega(t)$  - функция, близкая к константе, тогда в нулевом приближении можно считать, что в системе существуют колебания с периодом  $2\pi/\omega(t)$ . Свойства системы оказываются существенно зависящими от соотношения двух характерных временных масштабов: периода колебаний и характерного времени изменения функции  $\omega(t)$ , назовем его  $\tau$ . Можно выделить три случая:

- 1) Оба временных масштаба имеют один порядок, т.е.  $\tau \sim 2\pi/\omega(t)$ . При этом говорят о *параметрических колебаниях*. Наиболее важен случай, когда  $\omega(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , тогда возможно возникновение параметрической неустойчивости, когда малое начальное отклонение системы от положения равновесия будет приводить к нарастанию колебаний. Именно это происходит при раскачивании качелей.
- 2) Функция  $\omega(t)$  мало меняется за время одного колебания, т. е.  $\tau \gg 2\pi/\omega(t)$ . Это соответствует *адиабатически медленному* изменению параметров системы.
- 3) Параметры системы меняются значительно быстрее, чем характерный период колебаний осциллятора. В этом случае также возможны интересные физические эффекты, связанные с дополнительной силой, возникающей за счет эффекта усреднения быстрых колебаний в неоднородных пространственных полях.

Анализу всех этих ситуаций посвящена настоящая глава.

## § 2. Параметрическая неустойчивость

Пусть квадрат частоты осциллятора в уравнении (7.7) можно представить в виде  $\omega^2(t) = \omega_0^2 f(t)$ , где  $f(t+T) = f(t)$ ,  $f(t)$  — безразмерная периодическая функция, которую мы будем считать мало уклоняющейся

от единицы,  $T$  — ее период,  $\omega_0$  — величина с размерностью частоты. Если  $\omega(t)$  близка к константе  $\omega_0$  то мы ожидаем, что решения близки к гармоническим колебаниям с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Подчеркнем, что параметры  $T$  и  $T_0$  *независимы*, и наибольший интерес представляет случай, когда они относятся как небольшие целые или полуцелые числа. Почему это так, можно понять на примере все того же колебательного контура с переменной емкостью.

Пусть в контуре возбуждены колебания, а емкость конденсатора меняется следующим образом. В момент, когда заряд на пластинах конденсатора максимален, пластины резко раздвигают, делая емкость равной значению  $C_1$ , при этом напряжение на конденсаторе скачком увеличивается. Через четверть периода свободных колебаний в получившемся контуре, т.е. через время  $\pi\sqrt{LC_1}/2$ , заряд на пластинах оказывается равным нулю. В этот момент пластины резко сдвигают, так что емкость становится равной значению  $C_2 > C_1$ . Еще через время  $\pi\sqrt{LC_2}/2$ , когда заряд конденсатора снова оказывается максимальным, но противоположным по знаку заряду в начальный момент, пластины снова раздвигают, еще раз увеличивая напряжение, и так далее. Графики изменения емкости конденсатора и напряжения на нем в зависимости от времени показаны на рис. 7.2. Нетрудно понять, что в таком процессе будет постоянно совершаться работа, которая пойдет на увеличение энергии осциллятора т. е. на рост амплитуды колебаний. Такое возрастание амплитуды колебаний при периодическом изменении параметров гармонического осциллятора называется *параметрическим резонансом*.

Можно сделать и количественные оценки. Пусть в момент перед раздвиганием пластин напряжение на них равно  $V_c$ , а энергия в системе  $W = C_2 V_c^2/2$  (вся энергия сосредоточена в этот момент в конденсаторе). При резком увеличении расстояния между пластинами заряд на них не успевает измениться, а напряжение скачком увеличивается до значения  $V'_c$ , которое можно найти из закона сохранения заряда  $C_2 V_c = C_1 V'_c$ . Энергия в контуре становится равной  $W' = C_1 V_c'^2/2$ . Собирая эти соотношения вместе, получаем для изменения энергии

$$\Delta W = W' - W = W \left( \frac{C_2}{C_1} - 1 \right) \approx W \frac{\Delta C}{C},$$

где  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2)/2$  (считаем, что  $\Delta C/C \ll 1$ ). Поскольку за один цикл пластины раздвигаются дважды, для энергии, закачиваемой в систему за время одного "периода" колебаний осциллятора, равного

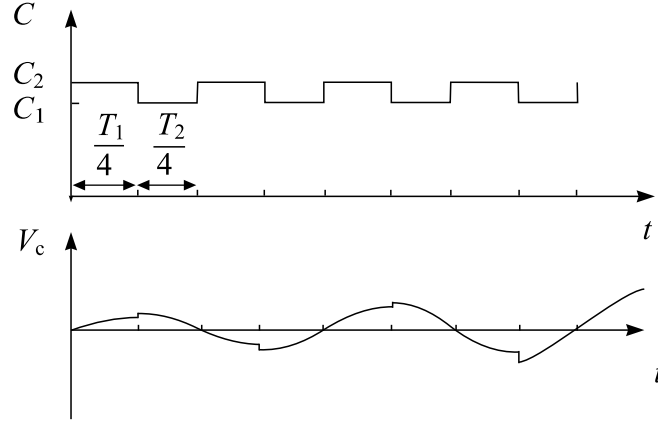


Рис. 7.2. Изменение емкости в колебательном контуре и напряжения на ней в зависимости от времени

$\pi(\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2}) \approx 2\pi\sqrt{LC}$ , можно записать

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{2\Delta C}{C}. \quad (7.8)$$

Для периода изменения параметра  $T$  выполняется соотношение

$$T = \frac{\pi}{2} (\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2}) \approx \frac{T_0}{2}. \quad (7.9)$$

Это значит, что наиболее эффективно энергия закачивается в систему, когда период изменения параметра примерно равен половине собственного периода колебаний осциллятора.

Можно, однако, раздвигать пластины не каждый раз, когда заряд на конденсаторе максимален, а через раз, энергия все равно будет поступать в систему, хотя и в меньшем количестве. Условие такого резонанса вместо (7.9) примет вид  $T \approx T_0$ . Очевидно, что в общем случае можно раздвигать пластины только в каждый  $n$ -й благоприятный для этого момент, что позволяет обобщить условие параметрического резонанса, записав его следующим образом:

$$T \approx \frac{nT_0}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Для  $n = 1$  говорят об основном резонансе, для произвольного значения  $n$  — о резонансе  $n$ -го порядка.

Проведенное рассмотрение не учитывает потерь в системе, что легко сделать. Если потери малы, то оба эффекта — параметрическую неустойчивость и влияние затухания — можно рассматривать независимо друг от друга. За счет затухания потери энергии за период равны  $\Delta W \approx -2\gamma T_0 W$ , где  $\gamma$  — коэффициент затухания. С учетом (7.8), общее изменение энергии есть

$$\Delta W = W \left( \frac{2\Delta C}{C} - 2\gamma T_0 \right),$$

откуда получаем, что если  $\Delta C/C > \gamma_0 T_0 = d = \pi/Q$  ( $d$  — логарифмический декремент,  $Q$  — добротность осциллятора), то в целом колебания нарастают. Таким образом при конечных потерях в системе параметрическая неустойчивость возникает только при достаточно большой глубине модуляции параметра.

Отметим, что для развития неустойчивости требуется, чтобы изначально колебания в системе уже существовали. Если осциллятор покоится, то изменение его параметров не приводит к появлению колебаний.

Проще и удобнее сделать так, чтобы параметры системы менялись непрерывным образом, а не скачками. Пусть, например, емкость в контуре меняется по закону  $C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\omega_0 t)$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ ,  $\Delta C \ll C_0$  (предполагается, что реализован наиболее благоприятный случай основного резонанса). Так как значение емкости мало отклоняется от своего среднего, то можно считать, что в течение одного периода амплитуда колебаний почти не меняется и напряжение на емкости равно  $V_c(t) = \bar{V}_c \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $\varphi$  — сдвиг фазы. При изменении емкости конденсатора на малую величину  $\Delta C$  совершается работа  $\Delta A = -W_c \Delta C/C$ ,  $W_c = CV_c^2/2$  — энергия, запасенная в конденсаторе. Поэтому за один период колебаний совершается работа

$$A = -\frac{1}{2} \int_t^{t+2\pi/\omega_0} V_c^2(t') \dot{C}(t') dt'.$$

Подставляя выражения для  $C(t)$  и  $V_c(t)$ , получаем

$$A = \Delta C \omega_0 \bar{V}^2 \int_t^{t+2\pi/\omega_0} \sin 2\omega_0 t' \cos^2(\omega_0 t' + \varphi) dt' = -\frac{\pi \Delta C}{C_0} W \sin 2\varphi.$$

Вся эта работа идет на приращение энергии системы. Максимальным прирост энергии будет, если  $\varphi = -\pi/4$  или  $\varphi = 3\pi/4$ , при этом  $\Delta W/W = \pi \Delta C/C$ . Если в системе есть потери, то, как и в предыдущем случае,

глубина модуляции должна быть достаточно большой для возникновения неустойчивости:

$$\frac{\Delta C}{C_0} > \frac{2}{Q}. \quad (7.11)$$

Этот анализ является приближенным, так как в нем не учитывались некоторые важные факторы. Например, условие резонанса может выполняться только приближенно, или частота колебаний в контуре на самом деле может немного отличаться от  $\omega_0$ , и так далее. Однако сам результат (7.11) оказывается верным, что будет показано ниже.

**Задача 7.1.** Предположим, что мальчик раскачивает качели, дважды за период качания резко приседая и резко выпрямляя ноги. В какие именно моменты он должен это делать, чтобы качели раскачивались наиболее эффективно? Как нужно действовать, если процесс приседания и вставания растянут во времени?

Итак, проведенное качественное рассмотрение позволяет выделить основные особенности параметрического резонанса:

- 1) Параметрический резонанс может появляться в колебательной системе при периодическом изменении ее параметров, если выполняются определенные соотношения (7.10) между периодом изменения параметров и собственным периодом колебаний системы.
- 2) Для развития неустойчивости необходимо, чтобы колебания в системе уже существовали. Если осциллятор покоится в положении равновесия, то изменение параметров не ведет к возникновению колебаний.
- 3) При конечных потерях в системе глубина модуляции параметров должна быть достаточно большой, чтобы неустойчивость появилась.

### § 3. Теория Флоке

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами можно привести к виду

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0, \quad (7.12)$$

где  $\omega^2(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Для произвольной функции  $\omega^2(t)$  это уравнение называется уравнением Хилла [1]. Существует общая теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, результаты которой, применительно к уравнению второго порядка (7.12), будут даны здесь без строгих доказательств. Их можно найти, например, в [1–3].

У уравнения (7.12) существует два линейно независимых решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , так что любое решение представимо в виде их линейной комбинации. С другой стороны, делая в (7.12) замену  $t \rightarrow t + T$ , мы вновь получаем то же самое уравнение, следовательно функции  $x_1(t + T)$  и  $x_2(t + T)$  также должны являться решениями исходного уравнения. Поэтому, используя матричные обозначения, можно записать

$$\begin{bmatrix} x_1(t + T) \\ x_2(t + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

где коэффициенты  $a_{i,j}$  — постоянные, причем в каждой строке матрицы  $[A]$  хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Матрица  $[A]$  называется *матрицей отображения за период*, и она играет главную роль при анализе параметрических систем.

Детерминант матрицы  $[A]$  равен единице, что можно показать следующим образом. Запишем уравнение (7.12) для решений  $x_{1,2}(t)$ :

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2(t)x_1(t) = 0, \quad \ddot{x}_2(t) + \omega^2(t)x_2(t) = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на  $x_2(t)$ , а второе — на  $x_1(t)$ , и вычтем одно из другого. В результате получим  $\ddot{x}_1x_2 - x_1\ddot{x}_2 = d(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)/dt = 0$ , т. е.  $\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2 = \text{const}$ . Приравнявая эти комбинации в моменты времени  $t$  и  $t + T$ , и, используя (7.13), непосредственно получаем

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det [A] = 1. \quad (7.14)$$

Собственные числа матрицы отображения за период называются *мультипликаторами*, они определяются из уравнения

$$\det [A - \mu I] = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (7.15)$$

или, с учетом (7.14),

$$\mu^2 - (a_{11} + a_{22})\mu + 1 = 0. \quad (7.16)$$

Корни квадратного уравнения (7.16) равны

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \text{Sp} [A] \pm \sqrt{\text{Sp} [A]^2 - 4} \right], \quad (7.17)$$

где  $\text{Sp} [A] = a_{11} + a_{22}$  - след матрицы, то есть сумма ее диагональных элементов. Так как мы полагаем функцию  $\omega^2(t)$  действительной, то коэффициенты матрицы  $[A]$  также будут действительными числами. В зависимости от величины  $\text{Sp} [A]$  возможны три случая:

- 1)  $|\text{Sp} [A]| < 2$ , при этом мультипликаторы являются комплексно сопряженными величинами, причем  $\mu_1 \mu_2 = 1$ , то есть оба мультипликатора лежат на единичной окружности в комплексной плоскости  $\mu$ . Матрица  $[A]$  при этом может быть с помощью преобразования подобия  $[B] = [P]^{-1} [A] [P]$  ( $[P]$  — квадратная невырожденная матрица) приведена к диагональному виду, так что на главной диагонали матрицы  $[B]$  лежат собственные значения. Отсюда легко показать (см. [3]), что два линейно независимых решения уравнения (7.12) вида

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = [P]^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

обладают следующим свойством:  $u_{1,2}(t + T) = \mu_{1,2} u_{1,2}(t)$ . Общее решение этого функционального уравнения есть

$$u_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2} t} \Phi(t), \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{T} \ln \mu_{1,2}, \quad (7.19)$$

где  $\Phi_{1,2}(t)$  — периодические с периодом  $T$  функции.

На больших временах эти решения остаются ограниченными. Действительно, для произвольного  $t$  имеем  $|u_1(t + nT)| = |\mu_1^n u_1(t)| = |\mu_1^n| |u_1(t)| = |u_1(t)|$ . То же самое справедливо и для  $u_2(t)$ . Так как произвольное решение представляется в виде линейной суперпозиции решений  $u_{1,2}(t)$ , то отсюда вытекает ограниченность решения. Неустойчивости в системе нет.

- 2) Если  $|\text{Sp} [A]| > 2$ , то из соотношения (7.17) получаются два действительных мультипликатора, один из которых по модулю обязательно больше, а другой — меньше единицы. В этом случае опять можно так выбрать два линейно независимых решения, что для них будут выполняться формулы (7.19). Однако теперь ограниченности



решения нет. Если, например,  $|\mu_1| > 1$ , то имеем  $|u_1(t + nT)| = |\mu_1|^n |u_1(t)|$ . Видно, что функция  $u_1(t)$  по модулю неограниченно возрастает. Аналогично показывается, что функция  $u_2(t)$  при больших  $t$  стремится к нулю. Поэтому при произвольных ненулевых начальных условиях система будет уходить от положения равновесия, что соответствует параметрической неустойчивости.

- 3) Если  $\text{Sp}[A] = \pm 2$ , то мультипликаторы равны между собой и по модулю равны единице. Несколько более сложное рассмотрение показывает (подробности см. в [2,3]), что в этом случае линейно независимые решения можно выбрать или в виде чисто периодических функций  $u_{1,2}(t)$ , период которых равен  $T$ , если  $\mu_{1,2} = 1$ , или  $2T$ , если  $\mu_{1,2} = -1$ , либо периодической функцией будет только одно из решений, а второе представимо в форме  $u_2(t) = t\Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  — снова периодическая функция. Во всяком случае, одно из решений является периодическим. Здесь мы имеем дело с граничной ситуацией между устойчивым и неустойчивым поведением системы.

Эти свойства решений уравнений Хилла служат основой для их численного или приближенного аналитического определения.

Линейно независимые решения вида (7.19) называются решениями Флоке, а сама эта формула служит математическим выражением одного из утверждений так называемой *теоремы Флоке*: если собственные числа матрицы отображения за период системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами различны, то можно выбрать ее линейно независимые решения так, что будет выполняться соотношение (7.19).

Обратимся еще раз к свойствам решений Флоке. Когда неустойчивости нет, то комплексно сопряженные мультипликаторы лежат на единичной окружности в комплексной плоскости  $\mu$ , поэтому их можно представить в виде  $\mu_{1,2} = \exp[\pm i\vartheta]$ , следовательно  $\lambda_{1,2} = \pm i\vartheta/T$ . Подставляя это соотношение в (7.19) и разлагая периодические функции  $\Phi_{1,2}(t)$  в ряды Фурье, получаем, что движение системы представляется в виде суперпозиции гармоник с частотами  $\omega_n = (2\pi n \pm \vartheta)/T$ . Так как в общем случае величина  $\vartheta$  несоизмерима с  $2\pi$ , то движение носит квазипериодический характер.

Если параметры системы таковы, что реализуется неустойчивость, то  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Если к тому же считать, что неустойчивость слабая, в том смысле, что мультипликаторы близки по модулю к единице, то  $|\lambda_{1,2}|T \ll 1$ . Тогда одно из решений Флоке представляет собой сумму периодических гармоник с основной частотой  $2\pi/T$ , амплитуды которых медленно растут

во времени пропорционально  $e^{\lambda t}$ , а для второго решения они уменьшаются пропорционально  $e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda$  — общий модуль величин  $\lambda_{1,2}$ .

Предположим, что функция  $\omega^2(t)$  зависит от параметра  $\varepsilon$  так, что при  $\varepsilon = 0$  имеем  $\omega^2(t) = \omega_0^2 = \text{const}$ , и зададимся вопросом, как ведет себя система при достаточно малых  $\varepsilon$ . На плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  каждой точке соответствует либо устойчивое, либо неустойчивое движение, либо точка принадлежит границе между этими случаями. Благодаря непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра [1, 2] можно утверждать, что области устойчивого и неустойчивого движения образуют открытые множества<sup>2</sup>: если при некоторых значениях параметров система устойчива (неустойчива), то выполняется  $|\text{Sp}[A]| < 2$  (соответственно  $|\text{Sp}[A]| > 2$ ). Малое изменение параметров приведет к малому изменению значения  $\text{Sp}[A]$ , так что система останется устойчивой (неустойчивой).

При  $\varepsilon = 0$  матрицу  $[A]$  легко построить в явном виде. Действительно, в этом случае система есть просто гармонический осциллятор, для которого два линейно независимых решений есть  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$ . Используя формулы тригонометрии, запишем

$$\begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+T) \\ \sin \omega_0(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & -\sin \omega_0 T \\ \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

откуда  $\text{Sp}[A] = 2 \cos \omega_0 T$ . Следовательно, если  $\omega_0 T \neq \pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $|\text{Sp}[A]| < 2$ , поэтому все точки на оси  $\omega_0$ , кроме точек, для которых выполняется условие

$$\frac{T}{T_0} = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.21)$$

соответствуют устойчивым системам. Кроме того, все системы, отличающиеся от них на бесконечно малое значение  $\varepsilon$  также устойчивы. Зоны неустойчивости на плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  могут подходить к оси абсцисс только в точках (7.21). Детальный анализ показывает, что в конкретных случаях так и происходит. Этот результат является обоснованием условий (7.10) параметрического резонанса.

Строго говоря, при  $n = 0$  также имеем  $\text{Sp}[A] = 2$ , поэтому система может демонстрировать неустойчивое поведение и вблизи начала

---

<sup>2</sup>Напомним, что в математике множество называется открытым, если оно состоит только из внутренних точек, т. е. если каждая его точка имеет окрестность, также целиком принадлежащую множеству.

координат на плоскости параметров, однако это соответствует пределу  $T \gg 2\pi/\omega_0$ , и по нашему соглашению не относится к случаю параметрического резонанса.

#### § 4. Осциллятор с параметрической неустойчивостью (модельная система)

Исследуем модельную систему, для которой возможно получить вид зон параметрической неустойчивости явным образом. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] x(t) = 0, \quad (7.22)$$

которое описывает осциллятор с частотой, испытывающей  $\delta$ -образные толчки. Амплитуда толчков пропорциональна безразмерному параметру  $\varepsilon$  и они следуют с периодом  $T$ . Матрицу отображения за период такой системы можно найти явным образом. Пусть  $x_n$  и  $y_n = \dot{x}/\omega_0$  — координата и нормированная скорость осциллятора сразу после  $n$ -го толчка. В промежутках между толчками движение происходит по закону гармонического осциллятора с частотой  $\omega_0$ , поэтому перед  $(n+1)$ -м толчком для этих величин можно записать

$$\begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & \sin \omega_0 T \\ -\sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

В результате толчка координата осциллятора не изменяется, а изменение скорости можно найти, проинтегрировав уравнение (7.22) по бесконечно малому интервалу времени, содержащему момент  $(n+1)$ -го импульса. Уравнения, связывающие динамические переменные до и после толчка, имеют вид  $x_{n+1} = x'_{n+1}$ ,  $y_{n+1} = y'_{n+1} - \varepsilon x'_{n+1}$ , или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Матрица отображения за период изменения параметра дается произведением матриц в (7.23) и (7.24):

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 T & \sin \omega_0 T \\ -\sin \omega_0 T - \varepsilon \cos \omega_0 T & \cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

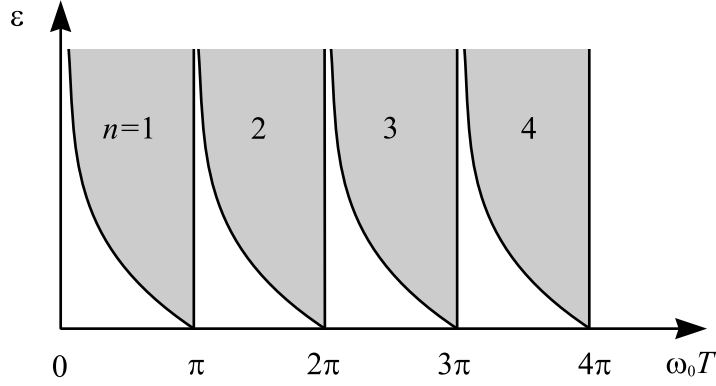


Рис. 7.3. Зоны параметрической неустойчивости на плоскости параметров для модельной системы (7.22).

Границы зон параметрической неустойчивости определяются уравнением  $|\text{Sp}[A]| = |2 \cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T| = 2$ , которое распадается на два отдельных случая:

$$1. \cos \omega_0 T - (\varepsilon/2) \sin \omega_0 T = 1.$$

После простых тригонометрических преобразований это уравнение сводится к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \sin(\omega_0 T/2) = 0, \\ \text{tg}(\omega_0 T/2), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \omega_0 T = 2\pi n, \\ \omega_0 T = -2 \arctg(\varepsilon/2) + 2\pi n, \end{cases}$$

для  $n = 1, 2, \dots$ . На плоскости параметров  $(\omega_0 T, \varepsilon)$  линии, заданные этими уравнениями, ограничивают зоны параметрической неустойчивости, опирающиеся своим острием на точки с координатами  $\omega_0 T = 2\pi n$  на оси абсцисс (см. рис. 7.3).

$$2. \cos \omega_0 T - \varepsilon \sin \omega_0 T/2 = -1.$$

Из этого уравнения получаем

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 T/2) = 0, \\ \text{ctg}(\omega_0 T/2), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \omega_0 T = (2n+1)\pi, \\ \omega_0 T = 2 \text{arctg}(\varepsilon/2) + 2\pi n, \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие линии на рис. 7.3 образуют "клювы", опирающиеся остриями на точки с координатами  $\omega_0 T = (2n+1)\pi$ .

Мы нашли границы зон неустойчивости, а для определения того, где система устойчива, а где нет, необходим дополнительный анализ. Для этого рассмотрим предел  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Тогда  $|\text{Sp}[A]| \approx \varepsilon |\sin \omega_0 T|$ , поэтому,

если  $\omega_0 T \neq \pi n$ , для достаточно больших  $\varepsilon$  выполняется  $|\operatorname{Sp}[A]| > 2$ . В этом пределе зоны неустойчивости преобладают, что соответствует заштрихованным областям на рис. 7.3.

В рассмотренном примере форма зон неустойчивости не зависит от номера параметрического резонанса, что объясняется очень резкой, в форме  $\delta$ -импульсов, зависимостью параметра от времени. Для более реалистичных ситуаций ширина зоны быстро убывает с ее номером.

**Задача 7.2.** Емкость колебательного контура скачком меняется со значения  $C_1$  на значение  $C_2$  и обратно через каждый интервал времени  $T/2$ . Получите матрицу отображения за период  $T$  и найдите две первые зоны параметрической неустойчивости на плоскости параметров  $(\omega_0 T, \Delta C/C)$ , считая, что  $\Delta C/C \ll 1$ , где  $\Delta C = C_2 - C_1$ ,  $C = (C_1 + C_2)/2$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

## § 5. Уравнение Матье

Наиболее важен случай, когда параметры системы меняются по гармоническому закону. При этом уравнение (7.12) можно записать в виде

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos \omega t) x(t) = 0. \quad (7.26)$$

Это уравнение называется *уравнением Матье*. Его точные решения выражаются через специальные функции, называемые функциями Матье [4], непосредственный анализ которых затруднителен. Поэтому в этих целях используют различные приближенные аналитические методы<sup>3</sup>. В их основе лежит предположение, что параметр  $\varepsilon$  мал ( $\varepsilon \ll 1$ ). Если вспомнить условие параметрического резонанса (7.21), то в задаче появляется еще один малый параметр  $\delta = (\omega_0 - n\omega/2)$ ,  $|\delta| \ll \omega_0$ . Последовательный учет малости величин  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$  позволяет получить приближенное решение уравнения Матье.

Покажем, как сделать это для случая основного резонанса ( $n = 1$ ). Решение будем искать в виде:

$$x(t) = a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}. \quad (7.27)$$

Смысл этого представления таков. Если  $\varepsilon = 0$  и  $\delta = 0$ , то выражение (7.27) дает точное решение, причем  $a$  и  $b$  — постоянные. Если же эти

---

<sup>3</sup>Прекрасным введением в эти методы может служить книга [3].

параметры малы, то можно считать, что величины  $a$  и  $b$  становятся медленно меняющимися функциями времени по сравнению с синусом и косинусом. Формулу (7.27) можно переписать в виде  $x(t) = A(t) \cos[\omega t/2 + \varphi(t)]$ , т.е. в виде колебания с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Введение двух функций  $a(t)$  и  $b(t)$  вместо одной действительной функции  $x(t)$  дает некоторый произвол в их определении, который можно исключить, потребовав, чтобы они удовлетворяли какому-нибудь функциональному соотношению. Положим, что выполняется условие

$$\dot{a}(t) \cos \frac{\omega t}{2} + \dot{b}(t) \sin \frac{\omega t}{2} = 0. \quad (7.28)$$

Вычислим, используя (7.28), первую и вторую производную от (7.27):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{\omega}{2} [a(t) \sin \frac{\omega t}{2} - b(t) \cos \frac{\omega t}{2}], \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{\omega}{2} [\dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} - \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2}] - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 [a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}]. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в исходное уравнение (7.26), получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{2} \dot{a}(t) \sin \frac{\omega t}{2} + \frac{\omega}{2} \dot{b}(t) \cos \frac{\omega t}{2} &= -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2] [a(t) \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2}] - \\ &\quad - \varepsilon \omega_0^2 [a(t) \cos \omega t \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \cos \omega t \sin \frac{\omega t}{2}]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Уравнения (7.28) и (7.29) позволяют выразить величины  $\dot{a}(t)$  и  $\dot{b}(t)$  по отдельности:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \dot{a}(t) &= [\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2] [a(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin^2 \frac{\omega t}{2}] + \\ &\quad + \varepsilon \omega_0^2 [a(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \cos \omega t + b(t) \sin^2 \frac{\omega t}{2} \cos \omega t], \\ \frac{\omega}{2} \dot{b}(t) &= -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2] [a(t) \cos^2 \frac{\omega t}{2} + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2}] - \\ &\quad - \varepsilon \omega_0^2 [a(t) \cos^2 \frac{\omega t}{2} \cos \omega t + b(t) \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \cos \omega t]. \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, эти соотношения можно приве-

сти к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\omega}{2}\dot{a}(t) &= [\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\sin\omega t - b(t)\cos\omega t + b(t)] + \\
&\quad + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\sin 2\omega t - b(t)\cos 2\omega t + 2b(t)\cos\omega t - b(t)], \\
\frac{\omega}{2}\dot{b}(t) &= -[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2][a(t)\cos\omega t + b(t)\sin\omega t + a(t)] - \\
&\quad - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}[a(t)\cos 2\omega t + b(t)\sin 2\omega t + 2a(t)\cos\omega t + a(t)].
\end{aligned} \tag{7.30}$$

При выводе выражений (7.30) не было сделано никаких приближений, поэтому они эквивалентны одному уравнению (7.26), которое, вдобавок, выглядит существенно проще. Однако они хорошо приспособлены для аналитического решения с использованием теории возмущений. Так как можно записать  $\omega_0^2 - (\omega/2)^2 = (\omega_0 - \omega/2)(\omega_0 + \omega/2) = \delta(\omega + \delta) \approx \delta\omega$ , то правые части формул (7.30) пропорциональны малым множителям  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$ . Следовательно производные  $\dot{a}(t)$  и  $\dot{b}(t)$  малы, что можно использовать для построения приближенного решения. Существует значительное число различных приближенных методов [3], но если ограничиться только первым приближением по малому параметру, то проще всего использовать так называемый метод Ван-дер-Поля, или метод усреднения.

Метод усреднения применительно к уравнениям (7.30) основан на следующих соображениях. Так как в их правых частях содержатся как медленно меняющиеся слагаемые, пропорциональные только амплитудам  $a(t)$  и  $b(t)$ , так и быстро осциллирующие функции вида  $a(t)\sin\omega t$ ,  $a(t)\cos\omega t$  и т.д., то функции  $a(t)$  и  $b(t)$  можно представить как сумму плавно меняющихся со временем “главных” частей и быстро осциллирующих добавок, имеющих малую амплитуду. Усредним уравнения (7.30) по отрезку времени  $T = 2\pi/\omega$ . В правой части при усреднении выражений подобных  $a(t)\sin\omega t$ , можно считать  $a(t)$  и  $b(t)$  постоянными, так как за такое время они практически не изменяются, в результате все такие слагаемые дадут при усреднении нуль. Ненулевой вклад останется от величин  $a(t)$  и  $b(t)$ , они дадут как раз плавно меняющиеся средние значения  $\bar{a}(t)$  и  $\bar{b}(t)$ . Слева по тем же соображениям можно записать  $\overline{\dot{a}(t)} = \dot{\bar{a}}(t)$  и  $\overline{\dot{b}(t)} = \dot{\bar{b}}(t)$ . В результате такой процедуры уравнения (7.30) переходят в уравнения

$$\begin{aligned}
\omega\dot{\bar{a}}(t) &= \left\{ \left[ \omega_0^2 - \frac{\omega}{2} \right]^2 - \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2} \right\} \bar{b}(t), \\
\omega\dot{\bar{b}}(t) &= - \left\{ \left[ \omega_0^2 - \frac{\omega}{2} \right]^2 + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2} \right\} \bar{a}(t).
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Поскольку рассматривается только первое приближение, то можно положить  $\omega_0^2 - (\omega/2)^2 \approx \delta\omega$  и  $\omega_0/\omega \approx 1/2$ , поэтому окончательные уравнения для усредненных амплитуд таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}}(t) &= \left(\delta - \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)\bar{b}(t), \\ \dot{\bar{b}}(t) &= -\left(\delta + \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)\bar{a}(t).\end{aligned}\tag{7.32}$$

Уравнения (7.32) имеют постоянные коэффициенты, их решение можно искать обычным образом, используя экспоненциальную подстановку  $\bar{a}(t) = a_0 \exp(\lambda t)$ ,  $\bar{b}(t) = b_0 \exp(\lambda t)$ . Тогда из (7.32) следует

$$\begin{aligned}\lambda a_0 & - (\delta - \varepsilon\omega_0/4) b_0 &= 0, \\ (\delta + \varepsilon\omega_0/4) a_0 & + \lambda b_0 &= 0.\end{aligned}\tag{7.33}$$

Ненулевые решения этой системы возможны, если

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}.\tag{7.34}$$

В системе будет существовать неустойчивость, если корни (7.34) — действительные, тогда одна из экспонент  $\exp(\lambda_{1,2}t)$  будет нарастающей. Это реализуется при

$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{4} < \delta < \frac{\varepsilon\omega_0}{4}.\tag{7.35}$$

Максимальный инкремент неустойчивости достигается при  $\delta = 0$ , он равен

$$\lambda_{\max} = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}.\tag{7.36}$$

Так как  $\varepsilon$  мало, то неустойчивость слабая, что согласуется со сделанным предположением о медленности изменения амплитуд  $a(t)$  и  $b(t)$ .

При  $|\delta| > \varepsilon\omega_0/4$  значения  $\lambda$  получаются чисто комплексные, решение при этом остается ограниченным. Граница неустойчивости определяется условием  $|\delta| = \varepsilon\omega_0/4$ , которое, учитывая определение параметра  $\delta$  и его малость, можно представить в виде

$$\varepsilon = 8 \left| \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{1}{2} \right|.\tag{7.37}$$

На плоскости параметров  $(\omega_0/\omega, \varepsilon)$  основная зона неустойчивости ограничена двумя отрезками прямых, выходящими из точки  $1/2$  на оси абсцисс (рис. 7.4,а).



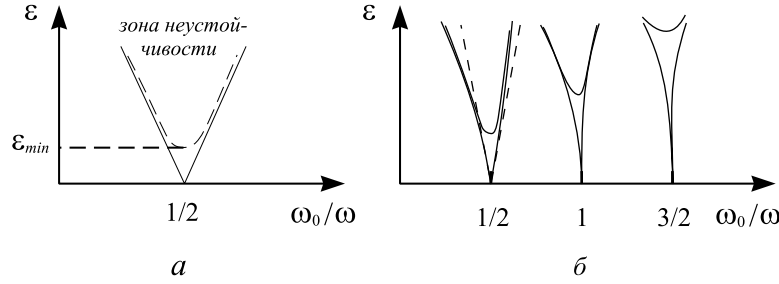


Рис. 7.4. а) Основная зона параметрической неустойчивости для уравнения Маттье в области малых  $\varepsilon$ . Пунктиром показана граница зоны при учете малого затухания. б) Зоны параметрической неустойчивости для трех первых резонансов. Границы зон искривляются при учете высших приближений теории возмущений. Пунктиром показана граница основной зоны в первом порядке теории возмущений.

Как на параметрическую неустойчивость влияют потери? Уравнение Маттье с учетом потерь имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)x(t) = 0. \quad (7.38)$$

Воспользовавшись преобразованием (7.5), слагаемое с первой производной можно исключить. Коэффициент  $\gamma$  не зависит от времени, поэтому замена переменных имеет вид  $x(t) = \exp(-\gamma t)y(t)$ , в результате для  $y(t)$  получается уравнение Маттье, в котором собственная частота  $\omega_0$  сдвинута на относительную величину порядка  $\gamma^2/\omega_0^2$ . В рассматриваемом приближении этот сдвиг можно не учитывать. Когда корни (7.34) действительные, величина  $y(t) \sim \exp(|\lambda_{1,2}|t)$ , следовательно неустойчивость для  $x(t)$  возникнет при условии  $\gamma < |\lambda_{1,2}|$ , или

$$\gamma < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}. \quad (7.39)$$

Граница зоны резонанса определяется уравнением

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 - \delta^2}, \quad (7.40)$$

которое задает ветвь гиперболы, показанной на рис. 7.4,а пунктиром. Таким образом, учет затухания приводит к тому, что зона неустойчивости

"отрывается" от оси абсцисс и появляется пороговое значение параметра модуляции  $\varepsilon$ , меньше которого неустойчивость не может возникнуть вообще. Это значение равно

$$\varepsilon_{\min} = \frac{4\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{Q}, \quad (7.41)$$

где  $Q$  — добротность системы. С физической точки зрения этот результат очевиден: глубина модуляции параметра должна быть достаточно большой, чтобы совершаемая работа компенсировала диссипацию энергии. Формула (7.41) согласуется с формулой (7.11), полученной для колебательного контура.

**Задача 7.3.** Найдите значение параметра  $\varepsilon$  для колебательного контура, емкость которого гармонически изменяется во времени и покажите, что формулы (7.11) и (7.41) эквивалентны.

Полученные результаты справедливы в первом порядке по малым параметрам  $\varepsilon$  и  $\delta/\omega_0$ . Если учитывать следующие приближения, то границы зон несколько искривляются, как это показано на рис. 7.4,б, еще больше приобретая форму "клюва". Потери в системе делают форму зон неустойчивости похожей на "язык".

Аналогично можно исследовать колебания вблизи высших резонансов ( $n > 1$ ), однако при этом следует использовать более точный метод, чем простой метод усреднения. Связано это с тем, что в следующих порядках необходимо учитывать также малые осцилляции коэффициентов  $a(t)$  и  $b(t)$  с частотами, кратными  $\omega$ , чем мы пренебрегали при выводе укороченных уравнений (7.32) [3].

Приведем основные результаты такого исследования [1]:

- 1) При больших номерах резонанса  $n$  область неустойчивости подходит к оси  $\omega_0/\omega$  узким языком, ширина которого резко уменьшается с ростом номера  $n$  (пропорционально  $\varepsilon^n$ ).
- 2) Сама неустойчивость слабо выражена, так как при больших  $n$  собственные числа матрицы отображения за период по модулю близки к единице.
- 3) Малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса  $n$ -го порядка имеется пороговое значение  $\varepsilon_{\min, n}$  которое быстро растет с номером  $n$ . При меньших значениях  $\varepsilon$  колебания затухают.

Эти обстоятельства приводят к тому, что на практике параметрический резонанс можно наблюдать только для нескольких первых зон (обычно двух — трех).

Все проведенное рассмотрение базировалось на линейном приближении, когда при резонансе величина  $x(t)$  растет неограниченно. В реальных системах, разумеется, начиная с некоторой величины амплитуды, такой рост будет сменяться насыщением из-за нелинейных эффектов, которые не учитывались в настоящем анализе.

## § 6. Параметрическая неустойчивость в двухконтурной схеме.

### Соотношения Мэнли-Роу.

Основное применение параметрическая неустойчивость находит в параметрических генераторах, усилителях и умножителях частоты [5–7]. Главное достоинство этих устройств заключается в очень низком уровне собственных шумов. Основной частью радиотехнических параметрических генераторов и усилителей является колебательный контур с меняющейся во времени емкостью — система, описываемая уравнением Матье, подробно рассмотренном в предыдущем параграфе.

На практике переменную емкость проще всего реализовать, воздействуя на полупроводниковый диод переменным напряжением [6]. Барьерная емкость  $p-n$ -перехода в диоде служит местом накопления заряда, а его величина нелинейным образом зависит от приложенного напряжения. Свойства емкости описываются вольт-фарадной характеристикой  $q(V)$ , связывающей заряд на переходе с напряжением. Помимо емкости, диод обладает также и нелинейной проводимостью, которая играет важную роль в механизмах ограничения параметрической неустойчивости, однако ее влияние на возникновение неустойчивости не столь велико, поэтому мы не будем ее здесь учитывать.

При малых переменных напряжениях, приложенных к диоду, его описание как нелинейной емкости оказывается эквивалентным описанию в виде емкости, зависящей от напряжения [5]. Действительно, пусть напряжение равно  $V(t) = V_0 + V_1 \cos \omega t$ , где  $V_1 \ll V_0$ . Представим функцию  $q(V)$  разложением в ряд Тейлора вблизи точки  $V_0$ :

$$q(V) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (V - V_0)^n.$$

Нас интересует емкость  $p-n$  перехода, определяющая изменение заряда

на нем при малом изменении напряжения, т.е. величина  $C = dq/dV$ , которая представляется рядом

$$C(V) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (V - V_0)^{n-1}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для  $V(t)$  и используя малость  $V_1$ , получаем приближенную формулу

$$C(t) = C_0 + \tilde{C}(t) \approx C_0 + \Delta C \cos \omega t, \quad (7.42)$$

в которой величины  $C_0$  и  $\Delta C$  выражаются через коэффициенты  $a_n$ . Эта формула доказывает эквивалентность нелинейной емкости и емкости, зависящей от напряжения в рассматриваемых системах.

Система с одним колебательным контуром и переменной емкостью во многих отношениях уступает по своим параметрам системе, в которой используются два резонансных контура. В *двухконтурных* генераторах возбуждаются колебания на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна из которых является частотой полезного сигнала, а вторая — частотой дополнительного сигнала (его также называют холостым сигналом). Частота изменения емкости (частота накачки)  $\omega_3$  такова, что выполняется условие резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (7.43)$$

Схема двухконтурного генератора с нерезонансной цепью накачки показана на рис. 7.5,а. В ней источником мощности на частоте накачки служит генератор тока  $i(t)$ , а нелинейный элемент (диод) представляется в виде параллельно подключенных нелинейных емкости  $C(V)$  и проводимости  $g(V)$ . Резонансные частоты колебательных контуров равны  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Для исследования линейной стадии неустойчивости эта схема может быть существенно упрощена, если не учитывать сопротивления колебательных контуров и нелинейную проводимость, а вместо нелинейной емкости рассмотреть эквивалентную емкость, зависящую от времени в соответствии с формулой (7.42). Тогда вместо схемы на рис. 7.5,а, мы приходим к линейной схеме на рис. 7.5,б.

Колебания в системе описываются переменными токами и напряжениями, определения которых показаны на рис. Уравнения Кирхгофа для

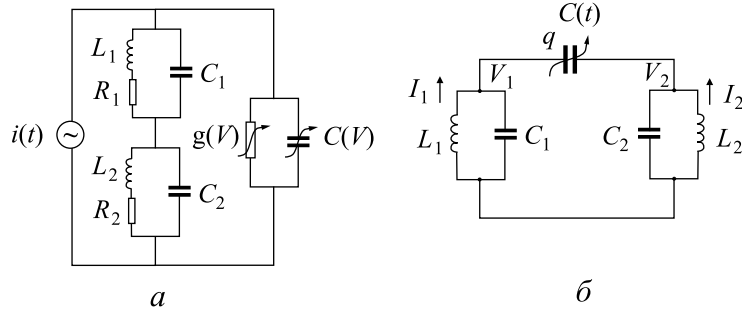


Рис. 7.5. Схема двухконтурного параметрического генератора с нерезонансной цепью накачки [6] (а), и эквивалентная линейная схема для исследования возникновения параметрической неустойчивости (б).

этой схемы имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} &= 0, \\
 C_1 \frac{dI_1}{dt} - I_1 &= -\frac{dq}{dt}, \\
 V_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} &= 0, \\
 C_2 \frac{dI_2}{dt} - I_2 &= \frac{dq}{dt}, \\
 q = C(t) (V_1 - V_2) &= [C_0 + \tilde{C}(t)] (V_1 - V_2).
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Для получения укороченных уравнения для двухконтурной схемы, мы воспользуемся методом, основанным на теории связанных линейных колебаний [5]. Этот метод отличается от использованного в предыдущем параграфе метода усреднения Ван-дер-Поля, однако полученные укороченные уравнения в рассматриваемом приближении будут точно такими же, как и в методе Ван-дер-Поля.

Перейдем от напряжений и токов в колебательных контурах к нормальным колебаниям, введенным в гл. 1. В данном случае нормальные колебания определяются для каждого из контуров с помощью соотношений

$$a_{1,2}(t) = \sqrt{\frac{C_{01,2}}{2\omega_{01,2}}} (V_{1,2} + iZ_{1,2}I_{1,2}), \tag{7.45}$$

где  $C_{01,2} = C_0 + C_{1,2}$ ,  $Z_{1,2} = \sqrt{L_{1,2}/C_{01,2}}$ ,  $\omega_{01,2}^2 = 1/(L_{1,2}C_{01,2})$ . Отметим, что постоянная составляющая переменной емкости  $C_0$  присутствует в определении полной емкости и собственных частот каждого из контуров<sup>4</sup>. Напряжения на контурах выражаются через нормальные колебания формулами

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_{01,2}}{2C_{01,2}}} (a_{1,2} + a_{1,2}^+) . \quad (7.46)$$

Напомним, что нормальные колебания  $a_{1,2}^+$  являются комплексно сопряженными величинами к нормальным колебаниям  $a_{1,2}$ , поэтому все уравнения для  $a_{1,2}^+$  получаются из уравнений для  $a_{1,2}$  комплексным сопряжением. Энергия в каждом контуре равна  $\mathcal{E}_{1,2} = \omega_{01,2}|a_{1,2}|^2$ . Для первого осциллятора нормальное колебание  $a_1^+$  ассоциируется с собственной частотой  $+\omega_{01}$ , а нормальное колебание  $a_1$  — с собственной частотой  $-\omega_{01}$ , они могут быть представлены на комплексной плоскости как два вектора, вращающихся с угловой скоростью  $\omega_{01}$  по и против часовой стрелки. То же самое можно сказать про нормальные колебания  $a_2^+$  и  $a_2$  второго осциллятора.

Умножим первое из уравнений (7.44) на величину  $\sqrt{\omega_{01}/2C_{01}}$ , а второе — на  $i\sqrt{L_1/2\omega_{01}}$  и сложим их. Аналогично поступим с третьим и четвертым уравнениями, с заменой всех индексов 1 на 2 и наоборот. Используя последнее уравнение в (7.44), после простых преобразований получаем уравнения для нормальных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + i\omega_{01}a_1 = & \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{C_0}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} (\dot{a}_2 + \dot{a}_2^+) - \frac{1}{2C_{01}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t) (a_1 + a_1^+)] + \\ & + \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{1}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t) (a_2 + a_2^+)] , \end{aligned} \quad (7.47a)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} + i\omega_{02}a_2 = & \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{C_0}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} (\dot{a}_1 + \dot{a}_1^+) - \frac{1}{2C_{02}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t) (a_2 + a_2^+)] + \\ & + \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{1}{2\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt} [\tilde{C}(t) (a_1 + a_1^+)] . \end{aligned} \quad (7.47b)$$

Уравнения (7.47) имеют вид системы связанных осцилляторов: в правой части первого уравнения для нормального колебания  $a_1$  присутствуют слагаемые, зависящие от нормальных колебаний  $a_1^+$ ,  $a_2$  и  $a_2^+$ ; аналогично

---

<sup>4</sup>Это соответствует концепции парциальных систем и парциальных частот, вводимой для систем связанных осцилляторов, которая будет подробно рассматриваться в следующей главе.

в уравнении для нормального колебания  $a_2$  присутствуют нормальные колебания  $a_1$ ,  $a_1^+$  и  $a_2^+$ .

Предположим, что связь между контурами отсутствует, т.е.  $C(t) = 0$ . Тогда из (7.47) получаются уравнения для несвязанных нормальных колебаний, решения которых есть  $a_1(t) = a_1(0) \exp(-i\omega_{01}t)$  и  $a_2(t) = a_2(0) \exp(-i\omega_{02}t)$ . При учете связи уравнения (7.47) можно приближенно трактовать как уравнения осцилляторов по действием вынуждающих сил, зависящих, в свою очередь, от нормальных колебаний. Для качественного анализа в первом приближении в правые части (7.47) можно подставить выражения для нормальных амплитуд, найденные при отсутствии связи. Если это сделать, то выясняется, что различные слагаемые справа оказывают разное по величине воздействие на колебания в контурах. Рассмотрим, например, слагаемое в первом уравнении, пропорциональное  $\dot{a}_2$ . Его временная зависимость определяется формулой

$$\frac{d}{dt} [a_2(0)e^{-i\omega_{02}t}] = -i\omega_{02}a_2(0)e^{-i\omega_{02}t},$$

что соответствует колебанию с частотой  $(-\omega_{02})$ . Мы будем рассматривать невырожденный случай, когда частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  достаточно сильно различаются. Поэтому это слагаемое является нерезонансным и не может оказать существенного влияния на нормальное колебание  $a_1$ , частота которого равна  $(-\omega_{01})$ . Аналогично можно сразу сказать, что слагаемое в первом уравнении, пропорциональное  $\dot{a}_2^+$ , имеет частоту  $\omega_{02}$ , и также является нерезонансным.

Рассмотрим теперь слагаемое в уравнении (7.47a), пропорциональное величине  $d[\tilde{C}(t)(a_2 + a_2^+)]/dt$ . Представим переменную часть емкости  $\tilde{C}(t)$  в виде

$$\tilde{C}(t) = \Delta C \cos \omega_3 t = \frac{\Delta C}{2} (e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t}),$$

тогда это слагаемое можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta C}{2} \{ (e^{i\omega_3 t} + e^{-i\omega_3 t}) [a_2(0)e^{-i\omega_{02}t} + a_2^+(0)e^{i\omega_{02}t}] \} = \\ & = \frac{\Delta C}{2} \left[ i(\omega_3 - \omega_{02}) a_2(0) e^{+i(\omega_3 - \omega_{02})t} + i(\omega_3 + \omega_{02}) a_2^+(0) e^{i(\omega_3 + \omega_{02})t} - \right. \\ & \quad \left. - i(\omega_3 + \omega_{02}) a_2(0) e^{-i(\omega_3 + \omega_{02})t} - i(\omega_3 - \omega_{02}) a_2^+(0) e^{-i(\omega_3 - \omega_{02})t} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая условие резонанса (7.43), можно прийти к выводу, что из четырех слагаемых в этой формуле, резонансным будет только последнее,

зависящее от времени как  $\exp[-i(\omega_3 - \omega_{02})t]$ . Таким же образом анализируется слагаемое, пропорциональное  $d[\tilde{C}(t)(a_1 + a_1^+)/dt$  в правой части (7.47a), в котором резонансные члены отсутствуют.

Аналогичное рассмотрение уравнения (7.47b) показывает, что единственный резонансный член в его правой части пропорционален величине

$$\frac{d}{dt}(e^{-i\omega_3 t} a_1^+) \approx -i(\omega_3 - \omega_{01}) e^{-i(\omega_3 - \omega_{01})t}.$$

Из всего этого анализа можно сделать важный вывод. Известно, что отклик осциллятора на внешнее воздействие резко возрастает, если частота этого воздействия близка или совпадает с частотой самого осциллятора. Поэтому всеми нерезонансные слагаемые в правых частях уравнений (7.47) можно пренебречь, так как результат их воздействия будет пренебрежимо мал по сравнению с результатом воздействия резонансных членов. Как следствие этой процедуры, приходим к укороченным уравнениям, описывающим параметрическую неустойчивость в схеме с двумя резонансными контурами:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + i\omega_{01}a_1 &= \sqrt{\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}} \frac{\Delta C}{4\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt}(e^{-i\omega_3 t} a_2^+), \\ \frac{da_2}{dt} + i\omega_{02}a_2 &= \sqrt{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}} \frac{\Delta C}{4\sqrt{C_{01}C_{02}}} \frac{d}{dt}(e^{-i\omega_3 t} a_1^+). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Нормальные амплитуды  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  связанных осцилляторов представим в виде

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \bar{a}_1(t) e^{-i\omega_{01}t}, \\ a_2(t) &= \bar{a}_2(t) e^{-i\omega_{02}t}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Функции  $\bar{a}_{1,2}(t)$  медленно меняются во времени по сравнению с нормальными колебаниями  $a_{1,2}(t)$ :  $|\dot{\bar{a}}_{1,2}(t)| \ll \omega_{01,2}|\bar{a}_{1,2}(t)|$  и это изменение обусловлено связью между контурами. Кроме этого, учтем, что величина *частотной расстройки* от резонанса  $\delta = \omega_3 - \omega_{01} - \omega_{02}$  мала, т.е.  $|\delta| \ll \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_3$ . Подставляя эти определения в (7.48) и оставляя только слагаемые, имеющие первый порядок малости, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}_1}{dt} &= -i\varepsilon e^{-i\delta t} \bar{a}_2^+, \\ \frac{d\bar{a}_2}{dt} &= -i\varepsilon e^{-i\delta t} \bar{a}_1^+, \end{aligned} \quad (7.50)$$



где  $\varepsilon = \sqrt{\omega_{01}\omega_{02}}\Delta C/(4\sqrt{C_{01}C_{02}})$  — коэффициент связи. Уравнения (7.50) показывают, что гармоническое изменение во времени реактивного элемента (емкости) приводит к связи между нормальными колебаниями  $a_1$  и  $a_2^+$  (а также  $a_1^+$  и  $a_2$ ), частоты которых существенно отличаются друг от друга. Характер этой связи таков, что в системе может возникнуть неустойчивость.

Подстановка  $\bar{a}_{1,2} = \exp(-i\delta t/2)b_{1,2}(t)$  приводит (7.50) к уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{db_1}{dt} - i\frac{\delta b_1}{2} &= -i\varepsilon b_2^*, \\ \frac{db_2^*}{dt} + i\frac{\delta b_2^*}{2} &= +i\varepsilon b_1.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Для удобства здесь приведено уравнение для  $b_2^*$ , а не для  $b_2$ . Решение для (7.51) ищем в виде  $b_1(t), b_2(t) \sim \exp(\lambda t)$ . Тогда из (7.51) для величины  $\lambda$  получаем формулу

$$\lambda = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2/4}. \quad (7.52)$$

Неустойчивость реализуется при  $-2\varepsilon < \delta < 2\varepsilon$ , при  $\delta = 0$  максимальный инкремент неустойчивости равен  $\lambda_{max} = \varepsilon$ .

В области неустойчивости колебания в контурах происходят с частотами  $\omega_1 = \omega_{01} + \delta/2$  и  $\omega_2 = \omega_{02} + \delta/2$  и медленно нарастают по амплитуде с инкрементом  $\lambda$ , поскольку величина  $\varepsilon$  мала. Можно считать, что колебания близки к гармоническим, причем, учитывая определение расстройки  $\delta$ , приходим к выводу, что условие резонанса (7.43) выполняется точно.

Уравнения (7.50) имеют важный закон сохранения. Чтобы его найти, умножим первое из них на  $a_1^+$ , а второе — на  $a_2^+$  и вычтем друг из друга. Тогда

$$\frac{d|a_1|^2}{dt} - \frac{d|a_2|^2}{dt} = 0, \quad (7.53)$$

или  $|a_1|^2 - |a_2|^2 = \text{const}$ . Отсюда следует, что колебания в обоих контурах либо одновременно нарастают, либо одновременно затухают. Полученные соотношения имеют важное энергетическое толкование. Вспомним, что энергия, запасенная в каждом из контуров, равна  $\mathcal{E}_{1,2} = \omega_{1,2}|a_{1,2}|^2$ , поэтому соотношения (7.53) переписываются в виде

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2}, \quad (7.54)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — скорости изменения энергии (т.е. мощности) каждого контура. Одновременно из закона сохранения энергии вытекает соотношение  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ , где  $P_3$  — работа в единицу времени, совершаемая при изменении емкости  $C(t)$ , или, другими словами, мощность, поступающая в контур на частоте  $\omega_3$ . Мы считаем, что мощность положительна, если энергия колебаний на соответствующей частоте увеличивается, и отрицательна, если она уменьшается. Поделив последнее соотношение на  $\omega_3$  и воспользовавшись условием резонанса (7.43), можно записать

$$\frac{P_3}{\omega_3} + \frac{P_1 + P_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{P_3}{\omega_3} + \frac{P_1 + \omega_2 P_1 / \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0.$$

Таким образом, дополнительно к формулам (7.54), получаем

$$\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0, \quad \frac{P_2}{\omega_2} + \frac{P_3}{\omega_3} = 0. \quad (7.55)$$

Формулы (7.55) носят название *соотношений Мэнли-Роу* [5, 8] и они играют исключительно важную роль в теории параметрических и нелинейных колебаний и волн. Соотношения Мэнли-Роу показывают в какой пропорции распределяется мощность накачки между колебаниями с разной частотой.

Смысл соотношений Мэнли-Роу легко понять, воспользовавшись кванто-механической интерпретацией, согласно которой энергия колебания гармонического осциллятора с частотой  $\omega$  равна  $\mathcal{E} = \hbar\omega N$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $N$  — число квантов. Тогда, например,

$$\frac{P_1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} \frac{d\mathcal{E}_1}{dt} = \hbar \frac{dN_1}{dt}.$$

Аналогичные формулы справедливы для частот  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . В результате соотношения (7.55) принимают вид

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} = 0, \quad (7.56)$$

и из них следует, что при параметрическом резонансе один квант на частоте накачки, распадаясь, рождает два кванта, по одному на частотах полезного и холостого сигналов.

Соотношения Мэнли-Роу допускают обобщения на случай многочастотных параметрических процессов. В частности, если предположить, что в системе возможно существование частот  $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ , где  $n$

и  $m$  — целые числа, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — две несоизмеримые частоты, то соотношения Мэнли-Роу для этого случая имеют вид [5, 9]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0. \quad (7.57)$$

Здесь  $P_{mn}$  — мощность изменения энергии колебаний на частоте  $\omega_{mn}$ . Для таких  $m$  и  $n$ , для которых  $\omega_{mn} < 0$ , по определению полагается  $P_{mn} = P_{-m-n}$ . Суммирование формулах (7.57) производится по фактически существующим в системе частотам.

Подчеркнем еще одно важное обстоятельство. Под мощностью  $P_{mn}$  подразумевается систематический ход изменения энергии в системе на частоте  $\omega_{mn}$ ; другими словами, речь идет об энергии, усредненной на интервалах времени, больших по сравнению с временами  $1/\omega_1$  и  $1/\omega_2$  [9].

Рассмотренный пример двухконтурного генератора относится к случаю, когда частоты полезного и холостого сигналов обе меньше, чем частота накачки. Соотношения Мэнли-Роу показывают, что в этом случае энергия, поступающая от источника на частоте накачки выделяется в обоих контурах, так что мощности  $P_1$  и  $P_2$  положительны, а мощность  $P_3$  отрицательна. Возможен другой случай, когда частота полезного сигнала  $\omega_1$  больше, чем частота накачки, т. е. условие резонанса имеет вид  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Соотношения Мэнли-Роу в этом случае дают:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_3}{\omega_3} &= 0 \\ \frac{P_2}{\omega_2} - \frac{P_3}{\omega_3} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что мощность холостого сигнала  $P_2$  должна быть отрицательной, также, как и мощность накачки  $P_3$ . Таким образом, для параметрической генерации или усиления сигнала с преобразованием частоты вверх, энергия должна поступать в систему из внешнего источника как на частоте накачки, так и на частоте холостого сигнала.

## § 7. Медленное изменение параметров.

### Адиабатический инвариант

Пусть параметры осциллятора меняются настолько медленно, что в течении нескольких циклов колебаний можно считать, что они практически неизменны. В этом случае функцию  $\omega^2(t)$  в уравнении (7.7) удобно

представить в виде

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 f(t/\tau), \quad (7.58)$$

где  $\omega_0$  — параметр с размерностью частоты,  $f$  — безразмерная функция величиной порядка единицы,  $\tau$  — характерное время ее изменения. Условие медленности изменения параметра можно выразить соотношением  $\omega_0\tau \gg 1$ , или, поскольку  $\tau \sim |f|/|\frac{df}{dt}|$ , это же условие можно записать непосредственно для  $\omega(t)$ :

$$\frac{1}{|\omega^2(t)|} \left| \frac{d\omega(t)}{dt} \right| \ll 1. \quad (7.59)$$

Видно, что это соотношение во всяком случае нарушается вблизи нулей функции  $\omega(t)$ , поэтому далее мы предполагаем, что в рассматриваемом интервале времени таких точек нет.

Для построения приближенного решения удобно перейти к безразмерной переменной  $\xi = t/\tau$  и ввести малый параметр  $\varepsilon = 1/(\omega_0\tau)$ , тогда уравнение (7.58) приобретает вид

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x(\xi)}{d\xi^2} + f(\xi) x = 0. \quad (7.60)$$

Уравнение (7.60) имеет малый параметр при старшей производной и его решение ищется следующим образом. Сначала сделаем замену переменных

$$x(\xi) = \exp\left[\int_0^\xi y(\xi') d\xi'\right] = \exp[\theta(\xi)]. \quad (7.61)$$

Первая и вторая производные от (7.61) равны:

$$x'(\xi) = y(\xi) \exp[\theta(\xi)], \quad x''(\xi) = [y'(\xi) + y^2(\xi)] \exp[\theta(\xi)].$$

Подставляя эти выражения в (7.60), получаем уравнение для функции  $y(\xi)$ :

$$\varepsilon^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi} + \varepsilon^2 y^2(\xi) + f(\xi) = 0. \quad (7.62)$$

Это уравнение называется уравнением Рикатти, и оно, в отличие от (7.60), является нелинейным. Тем не менее, оно оказывается более удобным для построения ряда теории возмущений, чем исходное.

Решение уравнения Рикатти ищем в виде

$$y(\xi) = y_{-1}(\xi)/\varepsilon + y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \dots \quad (7.63)$$

Индекс при каждой функции  $y_i(\xi)$  равен степени малого параметра  $\varepsilon$ , на которую она умножается в ряде (7.63). Подставим (7.63) в (7.62) и приравняем нулю слагаемые, пропорциональные каждой степени  $\varepsilon$  по отдельности. Получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & y_{-1}^2(\xi) + f(\xi) = 0, \\ \varepsilon^1 : \quad & y_{-1}'(\xi) + 2y_{-1}(\xi)y_0(\xi) = 0, \\ \varepsilon^2 : \quad & \dots, \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $y_{-1}(\xi) = \pm i\sqrt{f(\xi)}$  (мы считаем, что  $f(\xi) > 0$ , что соответствует колебаниям осциллятора, а не апериодическому затуханию<sup>5</sup>). Подставляя  $y_{-1}(\xi)$  во второе уравнение, находим

$$y_0(\xi) = -\frac{y_{-1}'(\xi)}{2y_{-1}(\xi)} = \frac{d}{d\xi} \ln |y_{-1}(\xi)|^{-1/2} = \frac{d}{d\xi} \ln |f(\xi)|^{-1/4}.$$

Ограничившись двумя найденными членами ряда, получаем для  $x(\xi)$  приближенное решение:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \exp \left[ \pm i \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi' + \ln |f(\xi)|^{-1/4} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{f(\xi)}} \exp \left[ \pm i \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi' \right]. \quad (7.64) \end{aligned}$$

Использованная процедура приводит к асимптотическому ряду, который расходится при увеличении количества членов ряда: при фиксированном  $\varepsilon$ , начиная с некоторого номера  $n$ , следующие слагаемые оказываются не меньше, а больше предыдущих. Однако, если ограничиться конечным отрезком ряда, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  он будет давать все более и более хорошие приближения к точному решению<sup>6</sup>. При малых  $\varepsilon$  уже во втором порядке, который был учтен при выводе (7.64), получается очень хорошее приближенное аналитическое решение.

---

<sup>5</sup>Сам метод решения справедлив и для случая  $f(\xi) < 0$ .

<sup>6</sup>Подробнее о свойствах асимптотических рядов см. [10].

Для применимости приближенного решения (7.64) необходимо, как уже отмечалось, выполнение условия (7.59). Однако само по себе оно может оказаться недостаточным, поскольку получено путем оценки по порядку величины различных членов в уравнении (7.7). Более правильно оценивать справедливость сделанного приближения, оценивая малость отброшенных членов разложения решения в асимптотический ряд (7.63). Более подробно этот вопрос обсуждается в [11, §46].

Возвращаясь к размерным переменным, два линейно независимых решения уравнения (7.7) с медленно меняющейся частотой  $\omega(t)$  можно представить в виде

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp \left[ \pm i \int^t \omega(t') dt' \right]. \quad (7.65)$$

Эти решения называются приближением Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна, или ВКБ-приближением [11, 12]. ВКБ-приближение сыграло огромную роль в квантовой механике, так как исходное уравнение (7.7) описывает не только осциллятор с переменными параметрами, но также и распространение волн в слабонеоднородных средах, в частности, распространение волны де-Бройля для микрочастицы в медленно меняющемся в пространстве потенциальном поле. Уравнение для волн в неоднородной вдоль одной из пространственных координат среде получается из (7.7) формальной заменой  $t \rightarrow x$ ,  $\omega^2(t) \rightarrow k^2(x)$ , где  $k(x)$  — локальное волновое число в точке  $x$ . Подробно этот вопрос будет рассмотрен в главе 17.

Отметим, что метод получения ВКБ-решения нигде не использовал положительность функции  $\omega^2(t)$ . Главное, чтобы во всей области изменения независимой переменной выполнялось условие (7.59). Если вместо  $\omega^2(t) > 0$  имеем  $\omega^2(t) < 0$ , то ВКБ-решение для такого случая есть

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{|\omega(t)|}} \exp \left[ \pm \int^t |\omega(t')| dt' \right]. \quad (7.66)$$

В теории колебаний решения вида (7.66) используются довольно редко, однако для задач распространения волн они оказываются столь же важными, как и решения (7.65)<sup>7</sup>. Они описывают, в частности, туннельный эффект в квантовой механике.

---

<sup>7</sup>Естественно, при этом следует сделать указанный выше переход от переменной  $t$  к переменной  $x$  в соответствии с пространственно-временной аналогией.

При заданных начальных условиях, комбинируя выражения (7.65), можно представить решение в тригонометрической форме

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \cos \left[ \int^t \omega(t') dt' + \varphi_0 \right] = A(t) \cos [\Phi(t)] , \quad (7.67)$$

где  $A(t) = A_0/\sqrt{\omega(t)}$  — медленно меняющаяся амплитуда колебаний,  $\Phi(t) = \int^t \omega(t') dt' + \varphi_0$  — их фаза,  $\varphi_0$  — начальная фаза. Формула (7.67) показывает, что колебание осциллятора с медленно меняющимися параметрами представляет собой сигнал, промодулированный по амплитуде и частоте. Это обстоятельство широко используется в радиотехнике. Подчеркнем важное соотношение между фазой колебаний и мгновенной частотой, которое потребуется в дальнейшем:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega(t) . \quad (7.68)$$

Рассмотрим вопрос, как меняется энергия осциллятора при медленном изменении его параметров. Чтобы записать выражение для энергии, конкретизируем тип осциллятора. Пусть это будет шарик массы  $m$  на пружинке с жесткостью  $k$ , которая медленно меняется во времени. Тогда  $k(t) = m\omega^2(t)$ , и энергия равна  $\mathcal{E} = m[\dot{x}^2(t) + \omega^2(t)x^2(t)]/2$ . Для  $\dot{x}(t)$  можно записать  $\dot{x}(t) \approx -\omega(t)A(t)\sin[\Phi(t)]$ . При вычислении производной мы отбросили слагаемое пропорциональное  $\dot{A}(t)$ , так как его учет означал бы превышение точности: оно имеет тот же порядок малости, что и члены асимптотического ряда, отброшенные при выводе (7.65). Учитывая это, для энергии колебаний получаем

$$\mathcal{E} = \frac{mA_0^2}{2} \left[ \frac{\omega^2(t) \sin^2 \Phi(t) + \omega^2(t) \cos^2 \Phi(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{mA_0^2}{2} \omega(t) .$$

Мы пришли к важному соотношению

$$I = \frac{\mathcal{E}(t)}{\omega(t)} = \text{const} , \quad (7.69)$$

из которого следует, что энергия осциллятора меняется со временем пропорционально изменению его частоты. Такие комбинации динамических переменных системы, которые остаются постоянными при медленном изменении ее параметров, называются *адиабатическими инвариантами* [13]. Для осциллятора с медленно меняющимися параметрами отношение энергии к частоте колебаний — адиабатический инвариант.

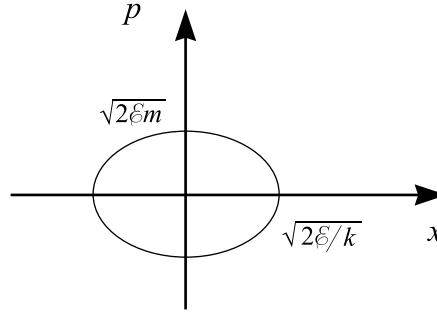


Рис. 7.6. Геометрическая интерпретация адиабатического инварианта. Площадь, ограниченная замкнутой траекторией, есть адиабатический инвариант.

Формула (7.69) показывает, что в таком процессе энергия осциллятора может существенно меняться. Действительно, если весь процесс длится большое время, то абсолютное значение частоты изменится очень сильно, хотя условие (7.59) нарушено не будет, при этом осциллятор отдаст или наоборот приобретет значительную часть своей энергии.

Адиабатический инвариант имеет геометрическую интерпретацию. Представим траекторию движения осциллятора на фазовой плоскости, в которой в качестве координат выбраны смещение осциллятора  $x$  и импульс  $p = \dot{x}/m$ . Если параметры не меняются, то траектория движения с энергией  $\mathcal{E}$  есть эллипс с полуосями, равными  $\sqrt{2\mathcal{E}/k}$  и  $\sqrt{2m\mathcal{E}}$  (см. рис. 7.6), а его площадь равна  $S = 2\pi\sqrt{m/k}\mathcal{E} = 2\pi\mathcal{E}/\omega = 2\pi I$ . Если параметр медленно меняется со временем, то в течение одного периода колебаний траектория будет близка к эллипсу, соответствующему текущим значениям энергии и частоты, площадь которого пропорциональна адиабатическому инварианту  $I$ . Следовательно, на больших интервалах времени траектория осциллятора будет трансформироваться так, что локально в каждый момент она будет близка к замкнутой траектории, площадь которой сохраняется.

Площадь, ограниченную замкнутой траекторией на фазовой плоскости можно представить в виде  $S = \oint p dx$ , где интегрирование ведется вдоль траектории по одному ее витку. Это позволяет записать

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx. \quad (7.70)$$

В такой форме выражение для адиабатического инварианта справедливо не только для гармонического осциллятора, но и для произвольной



динамической системы с одной степенью свободы, совершающей колебания [13]. Для системы с  $n$  степенями свободы, если она допускает полное разделение переменных, можно записать  $n$  различных адиабатических инвариантов, но в общем случае произвольной системы число адиабатических инвариантов меньше, чем  $n$ . Количество существующих адиабатических инвариантов тесно связано с понятием полной интегрируемости уравнений движения системы. Более подробно см. об этом [13, 14].

Понять, почему сохраняется именно величина  $\mathcal{E}/\omega$ , помогает квантово-механическая аналогия, в которой состояние осциллятора можно описать как существование конечного числа квантов возбуждения или *квазичастиц*. Энергия одного кванта есть  $\hbar\omega$  ( $\hbar$  — постоянная Планка), поэтому  $\mathcal{E}/\hbar\omega = N$  — число квантов. При медленном изменении параметров число квантов неизменно — они не рождаются и не исчезают. Полная энергия может измениться за счет энергии каждого кванта. Таким образом, смысл соотношения (7.69) довольно прозрачен. Эти соображения, вместе с уравнением (7.70), позволяют записать

$$\oint p \, dx = 2\pi\hbar N. \quad (7.71)$$

Соотношение (7.71) есть условие квантования для гармонического осциллятора: если принимать во внимание квантовые эффекты, то возможны только такие движения системы, для которых выполняется условие (7.71)<sup>8</sup>. Если учесть, что адиабатические инварианты можно записать не только для линейных систем, но и для некоторых систем более общего вида, включая системы со многими степенями свободы, то это приводит к методу получения квантовых уравнений для целого класса динамических систем. Этот метод был первым последовательным методом квантовой теории, предложенным П.Эренфестом еще до появления матричной механики Гейзенберга и волнового уравнения Шредингера. Хотя область его применимости ограничивалась системами с разделяющимися переменными, он во многом послужил основой для создания нерелятивистской квантовой механики в ее современном виде.

При параметрической неустойчивости картину можно также трактовать с точки зрения квантовой аналогии, только в этом случае энергия колебательной системы растет за счет увеличения числа квантов, энергия же каждого кванта остается неизменной. Для основного параметрического резонанса энергия одного кванта накачки (сигнала, изменяющего

---

<sup>8</sup>Точное квантово-механическое рассмотрение показывает, что в правой части (7.71) вместо  $N$  следует писать  $N + 1/2$ , чтобы учесть энергию нулевых колебаний осциллятора. При большом числе квантов этой разницей можно пренебречь.

параметры системы) есть  $\hbar\omega \approx 2\hbar\omega_0$ , а один квант полезного сигнала имеет энергию  $\hbar\omega_0$ . Таким образом, один квант накачки распадается на два кванта полезного сигнала, за счет чего и растет полная энергии колебаний на частоте  $\omega_0$ .

Адиабатический инвариант для гармонического осциллятора можно также получить непосредственно из уравнения движения осциллятора, используя метод усреднения. Для этого умножим уравнение (7.7) на  $2\dot{x}(t)$  и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} 2\dot{x}\ddot{x} + \omega^2(t)2\dot{x}x &= \frac{d\dot{x}^2}{dt} + \omega^2(t)\frac{dx^2}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2] - \omega^2(t)x^2 \frac{1}{\omega^2(t)} \frac{d\omega^2(t)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Так как потенциальная энергия системы равна  $\mathcal{E}_n = m\omega^2(t)x^2/2$ , а полная —  $\mathcal{E} = m[\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2]/2$ , то это соотношение можно записать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2 \frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} \mathcal{E}_n.$$

Усредним его по одному периоду быстрых колебаний  $2\pi/\omega(t)$ . В течении этого времени полная энергия практически не меняется, так же, как и множитель перед  $\mathcal{E}_n$ , а средняя по периоду потенциальная энергия равна половине полной энергии. Следовательно

$$\frac{1}{\mathcal{E}(t)} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \frac{1}{\omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt}.$$

Проинтегрировав это уравнение, приходим к соотношению  $\mathcal{E}(t)/\omega(t) = \text{const}$ , то есть к выражению для адиабатического инварианта.

В качестве физического примера рассмотрим электрон, вращающийся в однородном магнитном поле (ротатор). Для постоянного во времени и однородного в пространстве поля движение ротатора уже было исследовано в гл. 1. При произвольных начальных условиях электрон будет двигаться по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля. Так как продольное движение не имеет отношения к интересующему нас эффекту, будем считать, что начальная продольная скорость электрона равна нулю, так что все движение происходит в поперечной к направлению магнитного поля плоскости, с координатами  $x$  и  $y$ . Если магнитное поле постоянно, то движение происходит по окружности с циклотронной частотой  $\omega_c = eB/mc$  (используем гауссову систему единиц). Пусть теперь магнитное поле медленно меняется за циклотронный период  $2\pi/\omega_c$ . В результате

индуцируется электрическое поле, равное  $\mathbf{E} = -[\mathbf{z}^0, \mathbf{r}] \dot{B}(t)/(2c)$ , где  $\mathbf{z}^0$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Движение электрона под действием силы Лоренца описывается уравнением (релятивистскими эффектами здесь, для простоты, пренебрегаем)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - \frac{eB(t)}{c} [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{z}^0] .$$

Расписанное в координатах, оно дает два уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega(t)\dot{y}(t) + \frac{1}{2}\dot{\omega}(t)y(t) &= 0, \\ \ddot{y}(t) - \omega(t)\dot{x}(t) - \frac{1}{2}\dot{\omega}(t)x(t) &= 0, \end{aligned} \quad (7.72)$$

где  $\omega(t) = eB(t)/(mc)$ . Если ввести новую переменную  $\xi = x + iy$ , то можно представить эту систему уравнений в виде одного комплексного уравнения для величины  $\xi(t)$ :

$$\ddot{\xi}(t) - i\omega(t)\dot{\xi}(t) - \frac{i}{2}\dot{\omega}(t)\xi(t) = 0. \quad (7.73)$$

Слагаемое с первой производной можно исключить, используя замену переменных (7.5):  $\xi(t) = u(t) \exp[(i/2) \int^t \omega(t') dt']$ . Для функции  $u(t)$  получаем уравнение

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega^2(t)}{4} u(t) = 0, \quad (7.74)$$

соответствующее осциллятору с медленно меняющейся частотой  $\omega(t)/2$ . Отличие от уравнения (7.7) состоит в том, что в данном случае координата осциллятора является комплексной величиной. ВКБ-решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[i\theta(t)/2] + \frac{A_2}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[-i\theta(t)/2],$$

где  $\theta(t) = \int^t \omega(t') dt'$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — две комплексные постоянные, зависящие от начальных условий. Возвращаясь к переменной  $\xi(t)$ , получаем:

$$\xi(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\omega(t)}} \exp[i\theta(t)] + \frac{A_2}{\sqrt{\omega(t)}}. \quad (7.75)$$

Первое слагаемое описывает вращение по окружности с радиусом  $|A_1|/\sqrt{\omega(t)}$  и мгновенной частотой вращения  $\omega(t)$ , а второе слагаемое

— медленное смещение центра окружности в плоскости  $x, y$ . Напомним, что при дифференцировании ВКБ-решений следует рассматривать предэкспоненциальные множители как постоянные, поэтому

$$\dot{\xi}(t) = A_1 \sqrt{\omega(t)} \exp[i\theta(t)]. \quad (7.76)$$

Так как  $|\dot{\xi}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_{\perp}^2$  — квадрат поперечной скорости вращения, то из (7.76) следует  $v_{\perp}^2/\omega(t) = |A_1|^2 = \text{const}$ , или

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{B(t)} = \text{const}. \quad (7.77)$$

Это соотношение показывает, что кинетическая энергия поперечного вращения меняется пропорционально магнитному полю, а их отношение является адиабатическим инвариантом. Мы пришли к важному выводу: энергия электрона-осциллятора в переменном магнитном поле может сильно изменяться. Например, электрон-осциллятор может непрерывно отдавать высокочастотную энергию полю, такое произойдет, если квазистатическая составляющая поля будет плавно уменьшаться во времени.

## § 8. Движение в быстро осциллирующем поле.

### Маятник Капицы. Лазер на свободных электронах.

Рассмотрим случай, когда в уравнении Матье частота изменения параметра гораздо больше, чем собственная частота осциллятора ( $\omega \gg \omega_0$ ). В этом случае его можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 x \cos \omega t. \quad (7.78)$$

и трактовать это уравнение так, что на осциллятор действует переменная внешняя сила  $\mathcal{F}(x, t) = F(x) \cos \omega t$ , амплитуда которой  $F(x) = -\varepsilon \omega_0^2 x$  зависит от мгновенного положения осциллятора. Метод, который будет здесь использован, пригоден для решения уравнения более общего вида, чем (7.78), поэтому проведем рассмотрение в общем случае. Рассмотрим механическое движение частицы под действием суммы медленно меняющейся в пространстве силы  $f(x)$  и гармонической во времени силы  $\mathcal{F}(x, t)$ , амплитуда которой также медленно изменяется в пространстве, а частота велика. Уравнение движения такой системы имеет вид (массу частицы  $m$  полагаем равной единице):

$$\ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \omega t, \quad (7.79)$$

причем  $\omega \gg \omega_0 = 2\pi/T_0$ ,  $T_0$  — характерное время движения по траектории автономной системы, если внешняя переменная сила не действует.

Движение частицы представляет собой перемещение вдоль плавной траектории, на которое наложены быстрые осцилляции под действием переменной силы. Так как частота внешней силы велика, то амплитуда осцилляций должна быть малой из-за инерции частицы. Будем искать решение уравнения (7.79) в виде  $x(t) = X(t) + \mu\chi(t)$ ,  $\mu \sim \omega_0/\omega \ll 1$ . Функция  $X(t)$  представляет собой результат усреднения траектории  $\underline{x(t)}$  по периоду быстрого движения  $2\pi/\omega$ , следовательно можно записать  $\underline{x(t)} = X(t)$ . Подставляя такую форму решения в (7.79) и разлагая функции  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряды Тейлора вплоть до слагаемых, пропорциональных первой степени малого параметра  $\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) + \mu\ddot{\chi}(t) + f[X(t)] + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X(t)} \chi(t) = \\ = F[X(t)] \cos \omega t + \mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{X(t)} \chi(t) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Это уравнение содержит как медленно меняющиеся во времени слагаемые, так и быстро осциллирующие, они должны по отдельности компенсировать друг друга. Для быстро переменных величин получаем

$$\mu\ddot{\chi}(t) = F[X(t)] \cos \omega t. \quad (7.81)$$

Другие слагаемые пропорциональные  $\mu$  опущены, так как они малы. Что касается члена в (7.81), содержащего  $\ddot{\chi}$ , то он умножается на большую величину  $\omega^2$  и его следует сохранить. При решении этого уравнения силу  $F[X(t)]$  следует считать "замороженной" во времени. Тогда

$$\chi(t) = -\frac{F[X(t)]}{\mu\omega^2} \cos \omega t. \quad (7.82)$$

Подставим это решение в уравнение (7.80) и усредним его по быстрым осцилляциям, при этом получим следующее уравнение для медленного движения:

$$\ddot{X} + f(X) = -\frac{1}{\omega^2} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=X(t)} F[X(t)] \overline{\cos^2 \omega t} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{F^2(x)}{2\omega^2} \right] \right\}_{x=X(t)}. \quad (7.83)$$

Мы получили очень важный результат, совершенно неожиданный с точки зрения интуитивных представлений: вместо того, чтобы "мелко

вибрируя" под действием быстрых внешних пульсаций, сохранить среднее движение по траекториям, совпадающим с траекториями автономного аналога, наш новый эффективный осциллятор ведет себя совершенно иначе — в возвращающей силе появилось дополнительное не малое слабое, пропорциональное квадрату амплитуды внешних пульсаций.

Предположим, что медленно меняющаяся сила, действующая на частицу, потенциальная, т.е. что ее можно представить в виде  $f(x) = -\partial U(x)/\partial x$ . Тогда усредненное движение происходит в поле эффективного потенциала, равного

$$U_{\text{эфф}}(x) = U(x) + \frac{F^2(x)}{2\omega^2}. \quad (7.84)$$

Из этого выражения следует, что дополнительная сила так действует на осциллятор, чтобы он смещался в область с меньшим значением амплитуды быстро осциллирующего воздействия. Дополнительная сила не является малой, более того, она может качественно изменить характер движения системы.

Впервые этот результат был получен в 1951 г. П.Л. Капицей и применен к расчету маятника с быстро вибрирующим подвесом [15, 16]. Теоретическая модель маятника Капицы и схематическое изображение прибора для опытов с вибрирующим маятником представлены на рис. 7.7. Точка подвеса маятника, находящегося вблизи верхнего положения равновесия, совершает вибрации вдоль вертикальной оси с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . Уравнение движения маятника Капицы имеет вид

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - mla\omega^2 \sin \omega t \sin \theta. \quad (7.85)$$

где  $l$  — длина маятника,  $m$  — его масса. Предположив, что угол отклонения маятника  $\theta(t) = \varphi(t) + \beta(t)$ , где  $\varphi(t)$  и  $\beta(t)$  отвечают медленному и быстрому движениям, и применив описанную выше процедуру усреднения, приходим к выводу, что в результате вибраций точки подвеса на маятник действует дополнительный момент. Он ведет себя как пара сил, стремящихся расположить маятник так, чтобы его стержень был ориентирован по направлению вибраций, т.е. вдоль оси  $y$ . Этот момент равен

$$M_{\text{вибр}} = -(ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi.$$

Он не зависит от длины маятника и пропорционален квадрату амплитуды колебаний подвеса. Полный момент в уравнении для усредненного движения равен

$$M_{\text{эфф}}(\varphi) = mgl \sin \varphi - (ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi. \quad (7.86)$$

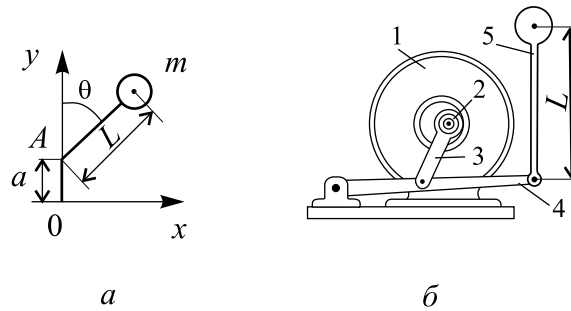


Рис. 7.7. Маятник Капицы [15]: а) теоретическая модель; математический маятник длиной  $L$  и массой  $m$  свободно вращается в точке подвеса  $A$ , которая колеблется вдоль оси  $y$  с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ . б) Схема прибора для опытов с маятником Капицы; на оси электромотора (1) от швейной машинки (число оборотов от 4000 до 6000  $\text{мин}^{-1}$ ) эксцентрично насажен шариковый подшипник (2), к обойме которого присоединена тяга (3); она приводит в колебание рычаг (4), один конец которого вращается в неподвижной опоре; на другой конец рычага подвешивается стержень маятника (5) ( $L \sim 15$  см) так, чтобы он свободно качался ( $a \sim 3\text{--}4$  мм).

Среди состояний равновесия маятника, определяемых из равенства  $M_{\text{эфф}} = 0$ , есть тривиальное  $\varphi = 0$ , соответствующее положению маятника "вверх ногами". Чтобы это состояние равновесия было устойчивым, необходимо  $dM_{\text{эфф}}/d\varphi < 0$ , откуда получаем условие устойчивости:  $a^2\omega^2 > 2gl$ . При выполнении этого условия вертикальное положение маятника Капицы устойчиво. На опыте это выглядит следующим образом: "Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто для него существует особая сила, направленная по оси колебания подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник... Эти колебания затухают, и маятник приходит в вертикальное положение" [15].

"Если повернуть прибор так, что маятник колеблется в горизонтальной плоскости, то на движение исключается влияние момента силы тя-

жести. Если осторожно прикосаться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом, и легко убедиться, что его наибольшая величина соответствует углу поворота в  $45^\circ$  [16]. Когда маятник находится в обычном устойчивом положении, колебания подвеса приводят к уменьшению периода колебаний маятника. Это значит, что любые вертикальные колебания, влияющие на часы, с периодом, меньшим периода маятника часов, всегда будут ускорять их ход (это П.Л. Капица демонстрировал на двойном маятнике [16]).

Изложенная выше теория была в дальнейшем обобщена на случай трехмерного движения заряженной частицы в электромагнитных полях [17]; было, в частности, предложено использовать движение электронов в слабо неоднородных переменных полях для создания СВЧ генераторов [18]. Подобный подход был успешно применен в теории определенного типа лазеров на свободных электронах, действие которых основано на излучении электронов в периодических статических полях (убитрон) и рассеянии волн потоками релятивистских электронов (скаттрон) [19, 20]. Схематическое изображение таких лазеров дано на рис. 7.8. Элементарная теория скаттрона применительно к схеме 7.8,2 изложена в [21].

Для простоты рассмотрим случай, когда две плоские электромагнитные волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $z$  с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_s$  и волновыми числами  $-k_i$  и  $k_s$  (это соответствует углам  $\varphi_i$  и  $\varphi_s$  на рис. 7.8,2, равным нулю). Волна с частотой  $\omega_i$  называется волной накачки и ее амплитуду можно считать заданной, а волна с частотой  $\omega_s$  — сигнальной волной (полезным сигналом). В инерциальной системе отсчета  $K'$ , которая движется поступательно в положительном направлении оси  $z$  (направление движения электронного потока) со скоростью, равной фазовой скорости комбинационной волны  $v_\phi = (\omega_s - \omega_i)/(k_s + k_i)$ , поле двух волн, воздействующих на пучок является одночастотным. Усредненное движение электронов в поле комбинационной волны приводит к их группировке в сгустки, которые затем могут эффективно обмениваться энергией с полем.

Будем описывать электромагнитное поле с помощью векторного потенциала

$$\vec{A}(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{A}_s(z) e^{i\theta_s} + \vec{A}_i(z) e^{i\theta_i} \right].$$

где  $\theta_s = \omega_s t - k_s z$  и  $\theta_i = \omega_i t + k_i z$  — фазы, а  $\vec{A}_s(z)$  и  $\vec{A}_i(z)$  — медленно меняющиеся в пространстве амплитуды полей сигнала и накачки. Так как мы полагаем, что амплитуды не зависят от поперечных координат, то из



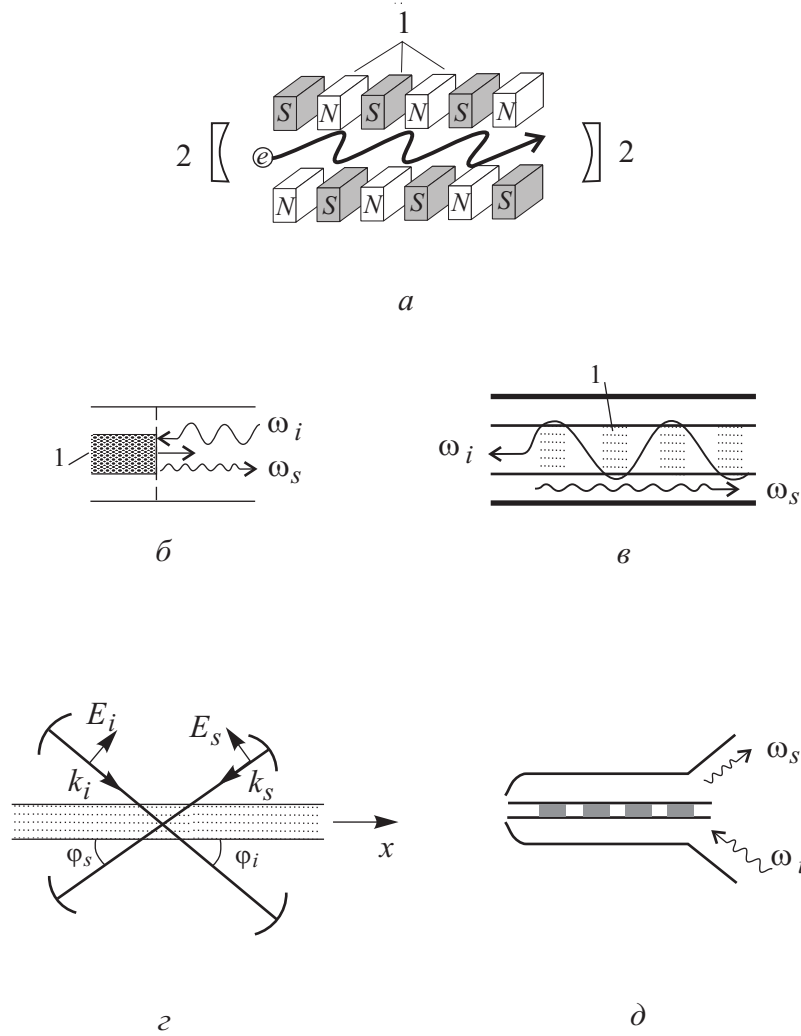


Рис. 7.8. Схематическое изображение лазеров на свободных электронах; а) убитрон – генератор, роль системы накачки в котором выполняет периодическая магнитная система (1); в спектре тока пучка возникают гармоники, скорость которых больше скорости света; они и взаимодействуют с полем резонатора сигнала (2); б) скаттрон – генератор с зеркальным отражением от быстро движущегося переднего фронта пучка электронов (1), в) скаттрон – генератор с рассеянием волны накачки на возмущениях плотности (1), вызванных комбинационной волной на частоте  $\omega_i - \omega_s$  приводящим к появлению сигнала; накачка (индекс  $i$ ) и сигнал (индекс  $s$ ) могут соответствовать различным типам колебаний электродинамической структуры; г), д) схематическое изображение модели скаттрона, используемой в теории.

уравнений Максвелла следует, что  $z$ -компоненты обоих векторов равны нулю. Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через векторный потенциал соотношениями

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (7.87)$$

Движения электрона определяется электрической силой и силой Лоренца

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}], \quad (7.88)$$

где  $\vec{p}$  — вектор импульса электрона. Используя предполагаемые свойства векторного потенциала и соотношения (7.87), для поперечных компонент уравнений движения можно записать

$$\frac{dp_{x,y}}{dt} = \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_{x,y}}{\partial t} + v_z \frac{\partial A_{x,y}}{\partial z} \right].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках в правой части этого уравнения, равна  $dA_{x,y}/dt$ , где при вычислении полной производной по времени подразумевается, что значение полей в бесконечно близкие моменты времени берутся в тех точках пространства, в которых в данные моменты находится электрон. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\frac{d}{dt} \left( p_{x,y} - \frac{e}{c} A_{x,y} \right) = 0. \quad (7.89)$$

Будем считать, что слева от области, где происходит взаимодействие, пучок движется только вдоль оси  $z$  и электромагнитное поле отсутствует. Тогда из (7.89) следует  $p_{x,y} = (e/c)A_{x,y}$ . Так как импульс и скорость связаны соотношением  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ , где  $\gamma = \mathcal{E}/(mc^2)$  — релятивистский фактор,  $\mathcal{E}$  — энергия электрона, то  $v_{x,y} = (ec^2/\mathcal{E})A_{x,y}$ . Используя эту формулу в продольной компоненте уравнения движения (7.88), приходим к уравнению

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{e^2 c}{\mathcal{E}} \left( A_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = -\frac{e^2 c}{2\mathcal{E}} \frac{\partial \vec{A}^2}{\partial z}. \quad (7.90)$$

Эта уравнение показывает, что, совершая поперечные колебания в поле электромагнитной волны, электрон испытывает дополнительную подемоторную силу, которая смещает его в продольном направлении. Подставляя векторный потенциал в виде суммы полей двух волн, находим

$$\vec{A}^2 = \frac{1}{2} \left\{ |\vec{A}_i|^2 + |\vec{A}_s|^2 + \text{Re} \left[ \vec{A}_s \vec{A}_i^* e^{i(\theta_s - \theta_i)} \right] + \dots \right\}. \quad (7.91)$$

Здесь опущены слагаемые, носящие нерезонансный характер. Амплитуды волн  $\vec{A}_i$  и  $\vec{A}_s$  изменяются вдоль  $z$  за счет энергообмена с электронным пучком. В первом приближении можно считать, что они постоянны, поэтому основной вклад в продольную силу будет давать слагаемое, пропорциональное  $\exp[i(\theta_s - \theta_i)] = \exp[i(\omega_s - \omega_i)t - i(k_s + k_i)z]$ . В качестве координаты следует подставить продольную координату электрона, которая в том же приближении равна  $z = v_{0z}(t - t_0)$ , где  $v_{0z}$  — начальная продольная скорость электрона,  $t_0$  — время его влета в область взаимодействия. Отсюда видно, что фазовый множитель медленно меняется, если скорость электрона  $v_{0z} \approx (\omega_s - \omega_i)/(k_s + k_i)$ . При этом условии поле комбинационной волны с амплитудой, пропорциональной  $\vec{A}_s \vec{A}_i^*$ , синхронно электронному потоку, т.е. он во время своего движения видит примерно одну и ту же фазу поля, что приводит к группировке электронного потока в сгустки, совершенно также, как это происходит в лампе бегущей волны (ЛБВ) (см. главу 14). В свою очередь сгруппированный электронный поток усиливает поле комбинационной волны. Поэтому теория скаттрона полностью аналогична теории ЛБВ с заменой высокочастотного электрического поля в ЛБВ на эффективное поле комбинационной волны.

В одной из разновидностей скаттрона обе волны — сигнальная и накачки — незамедленные, для них выполняются соотношения  $\omega_{i,s} = ck_{i,s}$ . В этом случае условие синхронизма можно переписать в виде

$$\omega_s \approx \frac{1 + v_{0z}/c}{1 - v_{0z}/c} \omega_i \approx 4\gamma_0^2 \omega_i,$$

$\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_{0z}^2/c^2}$  — релятивистский гамма-фактор, соответствующий начальной энергии электронов. Отсюда следует, что если пучок имеет релятивистскую энергию ( $\gamma_0 \gg 1$ ), то частота полезного сигнала значительно превосходит частоту волны накачки. Фактически при этом происходит встречное рассеяние волны накачки на электронах как на движущемся зеркале, трансформацию в этом процессе частоты можно трактовать как Комптон-эффект.

На волновом языке механизм индуцированного излучения сигнальной волны выглядит следующим образом. При воздействии двух волн с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_s$  и амплитудами  $\vec{A}_i$  и  $\vec{A}_s$ , на электронный поток на электроны начинает действовать периодическая сила с разностной частотой  $\omega_s - \omega_i$  и амплитудой  $\vec{A}_s \vec{A}_i^*$ . При условии  $v_{0z} \approx v_\phi$  комбинационная волна, действуя на пучок, приводит к его группированию; при этом плотность электронов изменяется по амплитуде пропорционально  $\vec{A}_s \vec{A}_i^*/(\omega_s - \omega_i)^2$  с частотой  $\omega_s - \omega_i$ . Поскольку диэлектрическая проницаемость электронного потока и его показатель преломления определяются

плотностью электронов, изменение плотности означает и изменение этих величин. При этом волна накачки  $(\vec{A}_i, \omega_i)$  рассеивается на возмущениях показателя преломления. Но тогда разностная частота  $\omega_s - \omega_i$  и частота накачки  $\omega_i$  складываются, что приводит к появлению волны сигнала с частотой  $\omega_s$ .

Аналогично можно рассмотреть принцип действия лазеров на свободных электронах других типов [19].

## ГЛАВА 8

### Колебания в системе связанных осцилляторов

*Примеры связанных осцилляторов. Два связанных идентичных маятника. Симметричные и антисимметричные колебания. Биения. Парциальные системы и парциальные частоты. Общий случай связанных осцилляторов с силовым (емкостным) типом связи. Слабая и сильная связанности осцилляторов. Влияние трения на процесс биений. Связанные осцилляторы под действием гармонической силы. Демпфирование колебаний. Теорема взаимности. Колебания в системе  $N$  связанных осцилляторов (общий случай). Цепочка идентичных осцилляторов. Спектр и собственные моды колебаний. Плотность распределения собственных частот. Колебания в цепочке чередующихся осцилляторов двух типов. Низкочастотная и высокочастотная ветви спектра. Акустическая и оптическая моды колебаний в модели одномерного кристалла.*

#### § 1. Примеры связанных осцилляторов

Общий подход к описанию сложных систем может быть таким. Сначала исследуется простая система, которая служит элементарной ячейкой для построения сложной системы. Затем рассматривается система двух связанных между собой элементарных ячеек и выясняются новые особенности, появившиеся в результате введения связи. Следующим шагом может быть рассмотрение большого или даже бесконечного числа связанных ячеек, моделирующих поведение сплошной среды. Если в качестве такой ячейки выбрать осциллятор, то можно подойти к построению теории колебаний и волн в распределенных системах.

В связи с этим, следующим логическим шагом в теории линейных колебаний является анализ системы двух связанных линейных осцилляторов. Оказывается, что в некотором смысле система двух связанных

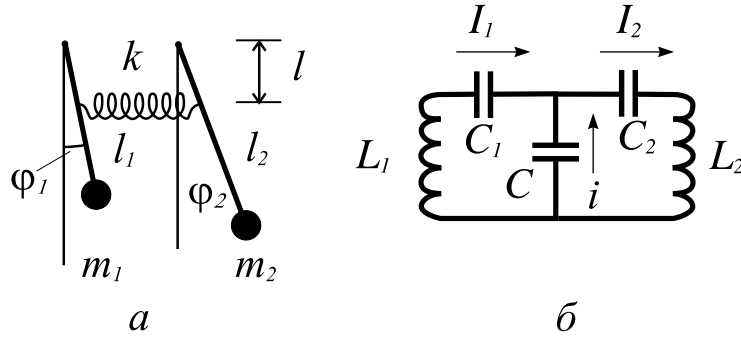


Рис. 8.1. Система связанных маятников с силовым типом связи (а) и соответствующая система связанных колебательных контуров (б).

осцилляторов не более сложна, чем одиночный осциллятор. Простым преобразованием координат можно свести такую систему к двум не связанным между собой осцилляторам. За этой теоретической простотой скрываются многие красивые и важные физические явления, к изучению которых мы переходим в этой главе.

Связь между осцилляторами можно ввести различными способами. Рассмотрим, например, механическую систему из двух математических маятников, соединенных пружиной (рис. 8.1,а). Уравнения колебаний маятников в предположении малых углов отклонения можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g l_1 \varphi_1 + k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g l_2 \varphi_2 - k l^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Обозначения переменных и параметров в этих уравнениях показаны на рис. 8.1,а. Если бы связи не было ( $k = 0$ ), то получились бы уравнения для двух несвязанных осцилляторов с собственными частотами  $\omega_{01} = \sqrt{g/l_1}$  и  $\omega_{02} = \sqrt{g/l_2}$ . Наличие связи приводит к тому, что в первом из уравнений (8.1) появляется слагаемое, пропорциональное координате второго осциллятора, а во втором — слагаемое, пропорциональное координате первого осциллятора: осцилляторы связываются.

Электрическая система, аналогичная связанным маятникам, имеет вид показанный на рис. 8.1,б. Действительно, по первому закону Кирхгофа можно записать  $i = I_1 - I_2$ , или  $dq/dt = dq_1/dt - dq_2/dt$ , где  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q$  — заряды на соответствующих конденсаторах. Тогда  $q = q_1 - q_2$  (постоянную

интегрирования считаем равной нулю, полагая, что когда колебаний нет, все конденсаторы незаряжены). Второй закон Кирхгофа, записанный для двух контуров на рис. 8.1,б, дает уравнения

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C} q &= 0, \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C} q &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 &= \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \\ \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 &= -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \end{aligned} \quad (8.2)$$

С точностью до переобозначений, уравнения (8.2) совпадают с уравнениями (8.1). Такой способ связи осцилляторов, при котором в каждом из уравнений для несвязанных систем появляются слагаемые, пропорциональные координате второй системы, называется *силовой* связью, в приложении в механических системах, или *емкостной* связью, применительно к колебательным контурам [1].

Хотя для рассмотренной механической системы введение связи каким-либо другим способом кажется искусственным, для колебательных контуров это не так. Обратимся, например, к системе, изображенной на рис. 8.2,а. Катушки индуктивностей двух колебательных контуров связаны между собой с коэффициентом взаимной индукции  $M$ . Для каждого из контуров можно записать (сразу учитываем, что  $I_1 = \dot{q}_1$ ,  $I_2 = \dot{q}_2$ )

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + M \ddot{q}_2 &= 0, \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 + M \ddot{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Видно, что в этом случае связь уравнений обеспечивается присутствием слагаемых, пропорциональных второй производной по времени от координат осцилляторов. Такую связь естественно назвать *индуктивной*. Возникает вопрос, что является аналогом индуктивной связи в механическом случае? Чтобы разобраться с этим, рассмотрим колебания механической балки, подвешенной на двух пружинах, причем будем считать, что балка неоднородная, так что ее центр тяжести смещен в сторону одной из пружин (см. рис. 8.2,б). Уравнения колебаний такой системы проще всего получить, записав выражения для кинетической и потенциальной энергии

системы через динамические переменные, выбранные в качестве координат осцилляторов. Например, в качестве таких переменных можно взять  $x_1$  и  $x_2$  — смещения концов балки от положения равновесия. Тогда потенциальная энергия системы равна<sup>1</sup>  $U = k_1 x_1^2/2 + k_2 x_2^2/2$ . Кинетическую энергию проще выразить через смещение центра тяжести балки  $\xi$  и угол ее поворота  $\theta$  вокруг оси, проходящей через центр тяжести:  $K = M\dot{\xi}^2/2 + I\dot{\theta}^2/2$ , где  $M$  и  $I$  — масса балки и момент ее инерции относительно точки Р. Величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\xi$  и  $\theta$  связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi - l_1 \theta, \\ x_2 &= \xi + l_2 \theta, \end{aligned}$$

используя которые, выразим кинетическую энергию системы через  $x_1$  и  $x_2$ :

$$K = \frac{1}{2l^2}[(Ml_2^2 + I)\dot{x}_1^2 + 2(Ml_1l_2 - I)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (Ml_1^2 + I)\dot{x}_2^2],$$

где  $l = l_1 + l_2$  — общая длина балки. Уравнения движения можно получить из лагранжиана системы  $L = K - U$ , используя уравнения Лагранжа [2]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{Ml_2^2 + I}{l^2} \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_2 &= 0, \\ \frac{Ml_1^2 + I}{l^2} \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \frac{Ml_1l_2 - I}{l^2} \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Уравнения (8.4) имеют тот же вид, что и уравнения (8.3), описывающие индуктивную связь между контурами. Для механических систем подобный способ связи принято называть *инерционным*.

Более внимательное рассмотрение последнего примера показывает, однако, что различие между силовой и инерционной (или емкостной и индуктивной) связью в значительной степени является условным. Действительно, если вместо того, чтобы выражать кинетическую энергию через переменные  $x_1$  и  $x_2$ , мы выразим потенциальную энергию через  $\xi$  и  $\theta$ , то

---

<sup>1</sup>Вклад в потенциальную энергию, связанный с силой тяжести, не учитываем, так как она не является в данном случае возвращающей, и не может привести к появлению колебательного движения.



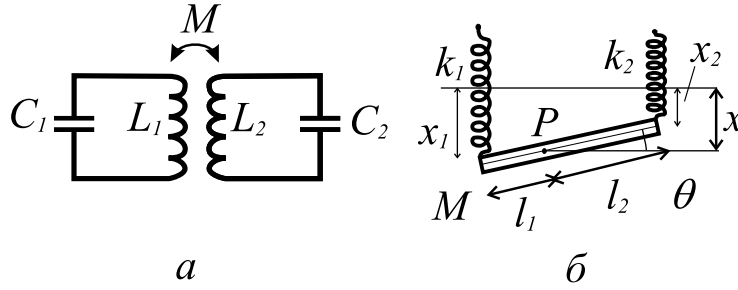


Рис. 8.2. Связанные колебательные контуры с индуктивным типом связи (а); соответствующая механическая система (б).

уравнения Лагранжа приведут к системе двух связанных осцилляторов, в которых связь будет описываться слагаемыми, пропорциональными  $x_1$  и  $x_2$ , то есть характер связи будет силовым. Таким образом, одна и та же система в одних переменных выглядит как связанные осцилляторы с силовой связью, а в других — с инерционной связью. Тип связи определяется выбором динамических переменных [1, Глава 22].

В общем случае кинетическая и потенциальная энергии системы двух связанных осцилляторов, выраженные через некоторые динамические переменные  $x_1$  и  $x_2$ , имеют вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} k_{ij} x_i x_j, \quad (8.5)$$

$m_{12} = m_{21}$ ,  $k_{12} = k_{21}$ . Условие положительности кинетической энергии приводит к ограничениям на коэффициенты  $m_{ij}$  следующего вида:

$$m_{11} > 0, \quad m_{22} > 0, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0. \quad (8.6)$$

Потенциальная энергия также должна быть положительной при любых отличных от нуля значениях  $x_1$  и  $x_2$ , в противном случае силы, возникающие в системе при некоторых отклонениях, будут уводить осцилляторы от положения равновесия, и гармонических колебаний в системе не возникнет. Поэтому таким же ограничениям, как (8.6), должны подчиняться и коэффициенты  $k_{ij}$ :

$$k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0. \quad (8.7)$$

Математически соотношения (8.6) и (8.7) определяют условия положительной определенности квадратичных форм в выражениях (8.5). Перейдем к новым переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , линейно связанным с  $x_1$  и  $x_2$  соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \xi_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Выбирая определенным образом коэффициенты  $c_{ij}$ , можно исключить из выражения для кинетической энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные произведению  $\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2$ . В этом случае уравнения движения системы в переменных  $\xi_i$  будут демонстрировать связь силового (или емкостного) типа. Можно, наоборот, исключить из потенциальной энергии перекрестные слагаемые, пропорциональные  $\xi_1\xi_2$ , получив систему с инерционной (или индуктивной) связью. Самое замечательное состоит в том, что коэффициентов  $c_{ij}$  в соотношениях (8.8) достаточно, чтобы исключить слагаемые, определяющие связь, одновременно и в кинетической и в потенциальной энергии! Если выполнены условия (8.6) и (8.7), это приведет к двум несвязанным между собой уравнениям гармонических осцилляторов. Соответствующие динамические переменные могут не нести прямого физического смысла, как координата какой-либо точки механической системы, или напряжение на каком-либо элементе электрической схемы, однако в этих переменных уравнения будут выглядеть наиболее просто. Такие координаты называются *нормальными*, а соответствующие им простые гармонические колебания системы — *нормальными* колебаниями, или *собственными модами* системы.

Расчет нормальных колебаний может быть проведен чисто математическими методами, с привлечением линейной алгебры и теории квадратичных форм [3], однако нам важно понять, как ведет себя система связанных осцилляторов с физической точки зрения. По этой причине мы подробно рассмотрим колебания в конкретной системе, причем для наглядности выберем в качестве таковой систему связанных маятников, показанную на рис. 8.1,а.

## § 2. Два связанных идентичных осциллятора

Пусть осцилляторы, составляющие систему одинаковы. Тогда для маятников на рис. 8.1,а  $m_1 = m_2$ ,  $l_1 = l_2$ . Не ограничивая общности, можно

положить также  $l_1 = l$ . Уравнения (8.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= \frac{k}{m_1}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= -\frac{k}{m_2}(\varphi_2 - \varphi_1).\end{aligned}\tag{8.9}$$

Здесь введено обозначение  $\omega_0^2 = g/l$ . Поведение связанных идентичных осцилляторов легко понять из простых соображений, связанных с симметрией системы. Предположим, что в начальный момент времени оба маятника отклонены на один и тот же угол  $\varphi_{0s}$  и имеют одинаковую угловую скорость  $\dot{\varphi}_{0s}$ . Очевидно, что движение системы будет таким, что в любой момент времени пружина останется не растянутой, т. е. маятник будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ , соответствующей одиночному маятнику без связи. Углы отклонения осцилляторов в зависимости от времени равны

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t.\tag{8.10}$$

Предположим теперь, что при  $t = 0$  маятники отклонены на одинаковый угол  $\varphi_{0a}$ , но в разные стороны, и их начальные угловые скорости равны по абсолютной величине  $\dot{\varphi}_{0a}$ , но имеют разные знаки. В этом случае очевидно, что средняя точка пружины в любой последующий момент времени останется неподвижной, поэтому можно заменить систему двух маятников на один, прикрепленный пружиной половинной длины к неподвижной стенке (см. рис. 8.3). Колебания будут иметь частоту  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k/m}$ , их временная зависимость будет иметь вид

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_{0a} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t.\tag{8.11}$$

Таким образом, специальным подбором начальных условий в системе можно возбудить гармонические колебания с одной из двух частот  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . В первом случае маятники двигаются идентично друг другу, такие колебания называются симметричными, а соответствующий им тип колебаний — симметричной модой. Во втором случае движение маятников происходит в противофазе, такой тип колебаний называется антисимметричной модой.

Для того, чтобы возбудить в чистом виде симметричную или антисимметричную моды, необходим, как мы видим, специальный подбор начальных условий. При произвольных начальных условиях движение будет

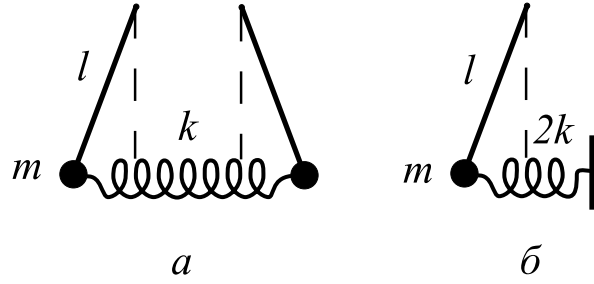


Рис. 8.3. Антисимметричные колебания в системе идентичных осцилляторов (а), эквивалентная система с одной степенью свободы (б).

суперпозицией движений (8.10) и (8.11):

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \varphi_{0a} \cos \omega_2 t + \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t, \\ \varphi_2(t) &= \varphi_{0s} \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\varphi}_{0s}}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \varphi_{0a} \cos \omega_2 t - \frac{\dot{\varphi}_{0a}}{\omega_2} \sin \omega_2 t.\end{aligned}\quad (8.12)$$

Из этих соотношений следует, что в общем случае в движение каждого осциллятора вносят вклад гармонические колебания с обеими частотами — симметричной и антисимметричной мод. Никаких других частот появиться не может, так как в решениях (8.12) содержится четыре произвольные постоянные, ровно столько, сколько необходимо задать для полного определения движения системы с двумя степенями свободы.

Представляет интерес вопрос, каким образом решения (8.12) можно получить непосредственно из уравнений (8.9)? Для его выяснения введем новые переменные  $\xi_s$  и  $\xi_a$  соотношениями

$$\xi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \xi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

и сложим и вычтем уравнения (8.9) друг из друга. Получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_s + \omega_0^2 \xi_s &= 0, \\ \ddot{\xi}_a + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) \xi_a &= 0.\end{aligned}\quad (8.13)$$

Эти уравнения не связаны между собой и определяют колебания соответственно симметричной и антисимметричной моды. Каждое из них является уравнением линейного осциллятора, но соответствующая координата

осциллятора  $\xi_s$  или  $\xi_a$  не имеет прямого физического толкования, как переменная, описывающая движение какой-либо части системы. Напротив, в них вносят равноправный вклад углы отклонения обоих осцилляторов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так как и в симметричном, и в антисимметричном движениях участвуют оба осциллятора. Решения уравнений (8.13) для величин  $\xi_s$  и  $\xi_a$  записываются обычным образом, и возврат к переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приводит к выражениям (8.12).

Симметричная и антисимметричная моды выступают в данном примере в качестве нормальных типов колебаний, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Полная энергия системы (с учетом малости углов отклонения) имеет вид

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{mgl\varphi_1^2}{2} + \frac{mgl\varphi_2^2}{2} + \frac{kl^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что  $\xi_s^2 + \xi_a^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$  и  $\dot{\xi}_s^2 + \dot{\xi}_a^2 = \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2$ , получаем

$$E = \frac{ml^2\dot{\xi}_1^2}{2} + \frac{mgl\xi_1^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\xi}_2^2}{2} + \frac{(mgl + 2kl^2)\xi_2^2}{2}. \quad (8.14)$$

Вклад в энергию колебаний симметричной и антисимметричной мод независим друг от друга. Если, используя уравнения Лагранжа, записать уравнения системы, то, естественно, получатся уравнения (8.13).

Наиболее отчетливо свойства решений (8.12) проявляются при специальном выборе начальных условий. Пусть один из маятников отклонили на угол  $\varphi_0$ , второй удерживают в положении равновесия, и при  $t = 0$  маятники отпустили без начальной скорости. Такая ситуация соответствует следующему выбору постоянных в (8.12):

$$\varphi_{0s} = \varphi_{0a} = \frac{\varphi_0}{2}, \quad \dot{\varphi}_{0s} = \dot{\varphi}_{0a} = 0.$$

Колебания маятников будут происходить по закону

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Предположим, что выполняется условие  $k/m \ll \omega_0^2$  (приближение слабой связи). Тогда

$$\begin{aligned} \omega_2 - \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} - \omega_0 \approx \frac{k}{m\omega_0}, \\ \omega_1 + \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} + \omega_0 \approx 2\omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \approx 2\omega_0, \end{aligned}$$

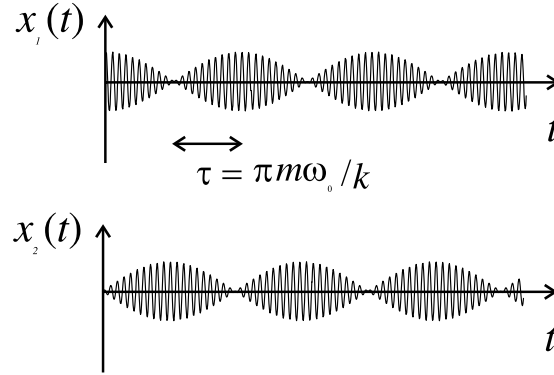


Рис. 8.4. Биения в системе связанных идентичных осцилляторов.

и решения (8.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\approx \varphi_0 \cos \frac{k}{2m\omega_0}t \cos \omega_0 t, \\ \varphi_2(t) &\approx \varphi_0 \sin \frac{k}{2m\omega_0}t \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Зависимости  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  показаны на рис. 8.4. Колебания маятников имеют характерный вид *биений*. В соответствии с условием слабой связи, первые множители в обоих уравнениях в (8.16) меняются гораздо медленнее вторых, поэтому их, вместе с постоянной  $\varphi_0$  можно трактовать как медленное изменение амплитуды колебаний осцилляторов во времени. На начальном отрезке времени амплитуда колебаний первого маятника максимальна и меняется слабо, а амплитуда колебаний второго маятника растет почти по линейному закону, так как можно считать  $\sin[kt/(2m\omega_0)] \approx kt/(2m\omega_0)$ . На этой стадии весь процесс можно приближенно трактовать, как движение второго маятника под действием внешней силы, передаваемой через пружину от первого. Так как осцилляторы одинаковы, частоты колебаний каждого из них совпадают, и имеет место точный резонанс, при котором происходит сингулярный рост амплитуды, как это было показано в главе 5. Так продолжается до тех пор, пока заметная часть энергии первого маятника не перейдет ко второму. Передача энергии сопровождается уменьшением амплитуды колебаний первого осциллятора и замедлением скорости роста амплитуды второго. Через время  $\tau = \pi m\omega_0/k$  вся энергия переходит ко второму маятнику, амплитуда его колебаний максимальна, а амплитуда колебаний второго

становится равной нулю. Осцилляторы меняются местами и начинается обратный процесс — перекачка энергии из второго осциллятора в первый.

Необходимо подчеркнуть, что движение системы в целом не является, вообще говоря, периодическим, так как частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть несоизмеримыми. Это приводит, в частности, к тому, что через время  $2\tau$  полной перекачки энергии от первого осциллятора ко второму и обратно не будет, фазы колебаний обоих осцилляторов будут отличаться от их значений при  $t = 0$ . Поэтому имеет смысл говорить только о периодичности процесса перекачки энергии, а не всего колебания в целом.

В заключении этого параграфа выясним физический смысл приближения слабой связи. Для этого вычислим среднюю по времени энергию колебаний каждого из осцилляторов  $\bar{E}_{1,2}$  и среднюю по времени энергию в элементе связи (пружине). Так как маятники идентичны, то

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \frac{ml^2 \overline{\dot{\varphi}_1^2}}{2} + \frac{mgl \overline{\varphi_1^2}}{2}.$$

Используя выражения (8.15), легко получить

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \overline{\cos^2 \omega_1 t} + \overline{\cos^2 \omega_2 t} + 2 \overline{\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t} \right) = \frac{\varphi_0^2}{8}, \\ \overline{\dot{\varphi}_1^2} &= \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \omega_1^2 \overline{\sin^2 \omega_1 t} + \omega_2^2 \overline{\sin^2 \omega_2 t} + 2 \omega_1 \omega_2 \overline{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t} \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \frac{\varphi_0^2}{4} = \frac{\varphi_0^2}{4} \left( \omega_0^2 + \frac{k}{m} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\bar{E}_{1,2} = \frac{ml^2 \varphi_0^2}{4} \left( \omega_0^2 + \frac{k}{2m} \right).$$

Для средней по времени энергии, запасенной в пружине имеем

$$\bar{E}_{\text{св}} = \frac{kl^2 \overline{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}}{2} = \frac{\varphi_0^2}{4} kl^2.$$

Условие  $k/m \ll \omega_0^2$ , введенное как условие слабой связи, означает, таким образом, что

$$\bar{E}_{\text{св}} \ll \bar{E}_{1,2}, \quad (8.17)$$

то есть в приближении слабой связи средняя по времени энергия колебаний каждого из осцилляторов в отдельности значительно больше средней по времени энергии, запасенной в элементе связи.

### § 3. Парциальные системы и парциальные частоты

Важную роль в теории связанных колебания играют понятия парциальных систем и парциальных частот. Для их введения рассмотрим систему двух связанных осцилляторов самого общего вида, для которой кинетическая и потенциальная энергии задаются формулами (8.5) и положим, например,  $x_2 \equiv 0$ . Это означает, что второй осциллятор принудительно удерживается в положении равновесия. Полученная система с одной степенью свободы имеет кинетическую энергию  $m_{11}\dot{x}_1^2/2$  и потенциальную энергию  $k_{11}x_1^2/2$ , что соответствует гармоническому осциллятору

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_{11}}{m_{11}}x_1 = 0$$

с частотой  $n_1 = \sqrt{k_{11}/m_{11}}$ . Наоборот, если положить  $x_1 \equiv 0$ , та же процедура приводит к уравнению осциллятора

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_{22}}{m_{22}}x_2 = 0$$

с частотой  $n_2 = \sqrt{k_{22}/m_{22}}$ . Системы с одной степенью свободы, полученные из исходной в результате того, что одна из переменных принудительно обращается в нуль, называются *парциальными системами*, а соответствующие им частоты колебаний — *парциальными частотами*.

Найдем парциальные системы для связанных маятников (рис. 8.1,а). Для этого закрепим правый маятник в положении равновесия ( $\varphi_2 \equiv 0$ ) и получим систему с одной степенью свободы, совершающую гармонические колебания с частотой  $n_1 = \sqrt{g/l_1 + kl^2/(m_1l_1^2)}$ . Если закрепить левый маятник, то частота колебаний будет равна  $n_2 = \sqrt{g/l_2 + kl^2/(m_2l_2^2)}$ . Это и есть парциальные частоты. Дадим более строгое определение парциальных систем и частот, применимое к колебательным системам с  $N$  степенями свободы.

Пусть имеется линейная динамическая система с  $N$  степенями свободы, описываемая динамическими переменными  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим  $x_j \equiv 0$  для  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ . Новая система с одной степенью свободы называется  $i$ -й парциальной системой. Если она совершает гармонические колебания, то соответствующая частота называется  $i$ -й парциальной частотой.

Важно подчеркнуть два обстоятельства:



- 1) У колебательной системы с  $n$  степенями свободы существует ровно  $n$  парциальных частот, некоторые из которых могут совпадать между собой. Определение парциальных частот не вызывает трудностей, если известны уравнения системы или функции потенциальной и кинетической энергии.
- 2) Понятие парциальных систем и парциальных частот не является однозначным, а зависит от выбора динамических переменных. Действительно, совершив линейное преобразование переменных  $x_i$  с помощью соотношений

$$x'_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad (8.18)$$

получим функцию Лагранжа, а значит и уравнения связанных колебаний с новыми коэффициентами  $m_{ij}$  и  $k_{ij}$ , и, таким образом, другие значения парциальных частот.

Рассмотрим, например, колебания балки, показанной на рис. 8.2,б. Если в качестве переменных выбрать смещения концов балки  $x_1$  и  $x_2$ , то первой парциальной системой будет система, в которой правый конец закреплен с помощью проходящей через него оси, позволяющей балке свободно вращаться, но запрещающей вертикальные смещения правого конца. Аналогично второй парциальной системой будет система с таким же образом закрепленным левым концом балки. Эти парциальные системы показаны на рис. 8.5,а. Парциальные частоты определяются из простых соображений. Если  $I$  — момент инерции балки относительно центра тяжести, то, в соответствии с теоремой Кенига, моменты инерции относительно концов балки равны  $I_1 = I + Ml_1^2$  (для левого конца) и  $I_2 = I + Ml_2^2$  (для правого конца). Поэтому

$$n_1^2 = \frac{k_1 l^2}{I + Ml_2^2}, \quad n_2^2 = \frac{k_2 l^2}{I + Ml_1^2}. \quad (8.19)$$

Предположим теперь, что в качестве динамических переменных выбраны  $\xi$  и  $\theta$  — вертикальное смещение центра тяжести и угол поворота балки вокруг оси, проходящий через этот центр. В этом случае парциальные системы показаны на рис. 8.5,б, а парциальные частоты равны

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}, \quad (8.20)$$

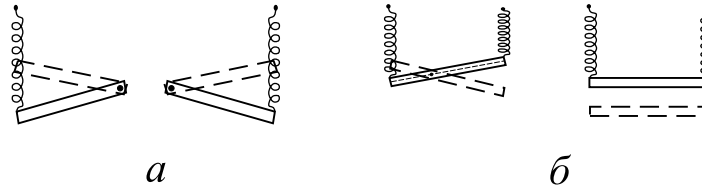


Рис. 8.5. Парциальные системы для балки, подвешенной на двух пружинах, когда в качестве динамических переменных выбраны вертикальные смещения концов балки (а), и смещение центра тяжести и поворот относительно оси, проходящей через центр (б). Пунктиром показаны положения балки через полпериода колебаний парциальной системы.

что отличается от выражений (8.19).

Возвращаясь к общему случаю системы с  $n$  степенями свободы, можно, в частности, провести такое преобразование переменных вида (8.18), что уравнения системы станут независимыми друг от друга: в каждом из  $n$  уравнений будет присутствовать только одна из динамических переменных. Ясно, что такое преобразование дает формальное решение задачи, поскольку означает переход к собственным типам колебаний. В таких переменных парциальные частоты совпадают с собственными частотами системы. Подобный выбор парциальных систем, однако, не имеет особого смысла, так как для его осуществления необходимо фактически предварительно получить полное решение задачи.

Использование понятий парциальных систем и парциальных частот упрощает многие уравнения теории колебания связанных осцилляторов, но основное их свойство состоит в том, что знание парциальных частот позволяет получить хорошие оценки для собственных частот без решения самой задачи. В частности, если упорядочить парциальные и собственные частоты в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} n_1 &\leq n_2 \leq \dots \leq n_{N-1} \leq n_N; \\ \omega_1 &\leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{N-1} \leq \omega_N, \end{aligned}$$

то

$$\omega_1 \leq n_1, \quad \text{и} \quad \omega_N \geq n_N, \quad (8.21)$$

то есть минимальная собственная частота меньше чем минимальная парциальная, а максимальная собственная частота больше, чем максимальная парциальная [1, 3]. Для частного случая системы двух связанных осцилляторов этот результат будет получен в следующем параграфе.

#### § 4. Два связанных осциллятора с силовой связью

Обратимся к общему случаю, когда осцилляторы неидентичны (рис. 8.1,а). В качестве динамических переменных выберем углы отклонения маятников, то есть положим  $x_1 = \varphi_1$ ,  $x_2 = \varphi_2$ . Уравнения (8.1) представим в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \left(\omega_{01}^2 + \frac{k}{\bar{m}_1}\right)x_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1}x_2, \\ \ddot{x}_2 + \left(\omega_{02}^2 + \frac{k}{\bar{m}_2}\right)x_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2}x_1,\end{aligned}\tag{8.22}$$

где  $\omega_{01}^2 = g/l_1$ ,  $\omega_{02}^2 = g/l_2$ ,  $\bar{m}_1 = ml_1^2/l^2$ ,  $\bar{m}_2 = ml_2^2/l^2$ . Парциальные частоты равны

$$n_1^2 = \omega_{01}^2 + \frac{k}{\bar{m}_1}, \quad n_2^2 = \omega_{02}^2 + \frac{k}{\bar{m}_2},\tag{8.23}$$

поэтому уравнения (8.22) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1} x_2, \\ \ddot{x}_2 + n_2^2 x_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2} x_1.\end{aligned}\tag{8.24}$$

Для расчета собственных частот воспользуемся методом комплексных амплитуд, положив  $x_{1,2}(t) = \text{Re}[X_{1,2}e^{i\omega t}]$ ,  $X_{1,2}$  — комплексные амплитуды колебаний осцилляторов. Тогда из (8.24) получаем

$$\begin{aligned}(-\omega^2 + n_1^2)X_1 &= \frac{k}{\bar{m}_1}X_2, \\ (-\omega^2 + n_2^2)X_2 &= \frac{k}{\bar{m}_2}X_1.\end{aligned}\tag{8.25}$$

Условие совместности этих уравнений приводит к характеристическому уравнению системы

$$(\omega^2 - n_1^2)(\omega^2 - n_2^2) - \frac{k^2}{\bar{m}_1\bar{m}_2} = 0,\tag{8.26}$$

решения которого есть собственные частоты колебаний. Уравнение (8.26) — биквадратное относительно  $\omega$ :

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \frac{k^2}{\bar{m}_1 \bar{m}_2} = 0, \quad (8.27)$$

его решения равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1 \bar{m}_2)} \right]. \quad (8.28)$$

Условимся, что нумерация динамических переменных выбрана так, что  $n_1 \leq n_2$ , знак минус в формуле (8.28) соответствует частоте  $\omega_1$ , а знак плюс —  $\omega_2$ . Тогда непосредственно из (8.28) получаем

$$n_1^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - n_2^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1 \bar{m}_2)} - (n_2^2 - n_1^2) \right].$$

Таким образом, введение связи сдвигает первую собственную частоту вниз относительно меньшей парциальной частоты, а вторую собственную частоту — вверх на ту же величину относительно большей парциальной частоты.

Пусть в системе возбуждена только первая мода с частотой  $\omega_1$ . Тогда отношение комплексных амплитуд осцилляторов, найденное из первого уравнения (8.25), равно

$$r_1 = \frac{X_2}{X_1} = \frac{n_1^2 - \omega_1^2}{k/\bar{m}_1} > 0.$$

Аналогично, для второго типа колебаний, используя второе из уравнений (8.25), получаем

$$r_2 = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{\omega_2^2 - n_2^2}{k/\bar{m}_2} < 0.$$

Таким образом, для первой моды отношение комплексных амплитуд есть положительное действительное число, что означает, что колебания осцилляторов совершаются в фазе. Для второй моды это отношение действительно и отрицательно — колебания совершаются в противофазе. Величины  $r_1$  и  $r_2$  называют коэффициентами распределения амплитуд [1], и они имеют следующий смысл. Коэффициент  $r_1$  определяет относительный вклад в первую собственную моду со стороны второго осциллятора,

а коэффициент  $r_2$  определяет относительный вклад во вторую собственную моду со стороны первого осциллятора. Используя формулу (8.28),  $r_1$  и  $r_2$  можно представить в виде

$$r_1 = \sqrt{\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}} r, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1}} r,$$

где

$$r = \frac{\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4k^2/(\bar{m}_1\bar{m}_2) - (n_2^2 - n_1^2)}}{2k/\sqrt{\bar{m}_1\bar{m}_2}} > 0. \quad (8.29)$$

Решения, соответствующие собственным типам колебаний, удобно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_1 e^{i\omega_1 t} \}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_2 e^{i\omega_2 t} \}, \quad (8.30)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — комплексные амплитуды собственных типов колебаний. В общем случае, когда возбуждены обе моды, решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_1 e^{i\omega_1 t} \} + \begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{Re} \{ A_2 e^{i\omega_2 t} \}. \quad (8.31)$$

Две комплексных амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  дают четыре действительных постоянных, которых достаточно, чтобы удовлетворить произвольные начальные условия системы с двумя степенями свободы.

Матрицы-столбцы  $\begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} r_2 \\ 1 \end{bmatrix}$  называются собственными векторами колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и они имеют следующий смысл: если в системе связанных осцилляторов возбуждено колебание с одной из собственных частот, то компоненты собственных векторов дают относительные амплитуды и фазы колебаний каждого из осцилляторов. Такое определение работает в общем случае системы  $N$  связанных осцилляторов, для которой существует  $N$  собственных частот и столько же собственных векторов. Собственные векторы определены с точностью до произвольного постоянного множителя, что является следствием линейности системы.

Рассмотрим такие же начальные условия, как и в случае идентичных осцилляторов. При  $t = 0$  потребуем, чтобы  $x_1(0) = x_0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = 0$ : первый осциллятор отклонен на величину  $x_0$ , второй находится в равновесии, скорости обоих равны нулю. Легко показать, что при таких граничных условиях амплитуды собственных мод равны

$$A_1 = \frac{x_0}{1 - r_1 r_2}, \quad A_2 = -\frac{r_1 x_0}{1 - r_1 r_2}. \quad (8.32)$$

Подставляя (8.29) и (8.32) в (8.31), получаем

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{x_0}{1 - r_1 r_2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\
 &= \frac{2x_0}{1 + r^2} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - x_0 \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \cos \omega_2 t, \\
 x_2(t) &= \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{r x_0}{1 + r^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\
 &= \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{2r x_0}{1 + r^2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

Из выражения для  $x_2(t)$  видно, что если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  близки в том смысле, что  $\omega_2 - \omega_1 \ll (\omega_1 + \omega_2)/2$ , то движение второго маятника опять, как и в случае идентичных осцилляторов, можно представить в виде колебаний со средней частотой  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  и медленно меняющейся амплитудой. Через время  $\tau = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$  амплитуда колебаний второго осциллятора станет максимальной:

$$x_{2 \max} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \frac{2r}{1 + r^2} x_0, \tag{8.34}$$

а амплитуда первого осциллятора будет равна величине

$$x_{1 \min} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} x_0. \tag{8.35}$$

Из этих соотношений следует, что доля передаваемой в процессе колебаний энергии зависит от параметра  $r$ . Из формулы (8.29) вытекает, что  $0 < r \leq 1$ . Когда  $r \ll 1$ , второй маятник практически не возбуждается, если  $r = 1$ , происходит полная передача энергии между осцилляторами.

Для неидентичных осцилляторов практически важным остается приближение слабой связи, которое мы по-прежнему будем определять как ситуацию, при которой средние по времени энергии колебаний осцилляторов  $\bar{E}_{1,2}$  значительно больше средней по времени энергии, запасенной в элементе связи  $\bar{E}_{св}$ . Когда осцилляторы различаются, требуется обобщение условий (8.17), так как энергии колебаний осцилляторов могут сильно отличаться друг от друга. Чтобы учесть это, определим условие слабой связи следующим образом:

$$\bar{E}_{св} \ll \sqrt{\bar{E}_1 \bar{E}_2}, \tag{8.36}$$

Количественной характеристикой степени связи осцилляторов является коэффициент связи  $\rho$  [1]:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{\bar{m}_1 \bar{m}_2 n_1 n_2}}. \tag{8.37}$$

Можно показать непосредственным вычислением, что условия  $\rho \ll 1$  и (8.36) эквивалентны.

Приближение слабой связи означает, что осцилляторы не теряют своей индивидуальности при введении связи между ними. Оказывается, однако, что это приближение само по себе еще не определяет поведение системы в целом. Впервые на это обстоятельство указал Л.И. Мандельштам, введя понятие *связанности* осцилляторов. Запишем выражения (8.28) и (8.26), используя в них определение коэффициента связи (8.37):

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2} \right], \\ r &= \frac{\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2} - (n_2^2 - n_1^2)}{2\rho n_1 n_2}.\end{aligned}\quad (8.38)$$

Анализ этих соотношений показывает, что существенным является не малость коэффициента связи  $\rho$  самого по себе, а соотношение между величинами  $n_2^2 - n_1^2$  и  $2\rho n_1 n_2$ , т. е. между относительной расстройкой парциальных частот и коэффициентом связи. Если

$$\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \gg \rho, \quad (8.39)$$

то оба осциллятора ведут себя практически независимо друг от друга<sup>2</sup>. Мандельштам назвал такую ситуацию случаем *слабой связанности*. В противоположном пределе

$$\frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} \ll \rho, \quad (8.40)$$

реализуется случай *сильной связанности*, при котором энергия практически полностью перекачивается от одного осциллятора к другому и обратно, т. е. система ведет себя подобно связанным идентичным осцилляторам. Из (8.40) видно, что если парциальные частоты равны, то при любых коэффициентах связи реализуется режим сильной связанности.

Доказательство этих утверждений начнем со случая слабой связанности (8.39). Тогда в выражениях (8.38) под квадратным корнем первое слагаемое значительно больше второго, и для приближенного представления корней можно воспользоваться формулой  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ ,  $|x| \ll 1$ .

---

<sup>2</sup>Напомним, что выбрана такая нумерация парциальных частот, что  $n_2 \geq n_1$ .

Это дает

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &\approx n_1^2 \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \rho \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2} \right), \\ \omega_2^2 &\approx n_2^2 \left( 1 + \frac{n_1}{n_2} \rho \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2} \right), \\ r &\approx \frac{\rho n_1 n_2}{n_2^2 - n_1^2}.\end{aligned}\tag{8.41}$$

В соответствии с условием (8.39),  $r \ll 1$ , а сдвиг собственных частот относительно парциальных имеет второй порядок малости. Поэтому формулы (8.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}x_1(t) &\approx x_0 \cos n_1 t, \\ x_2(t) &\approx 0.\end{aligned}$$

Каждый осциллятор совершает колебания с частотой, близкой к его парциальной частоте, амплитуда колебаний первого осциллятора близка к величине его начального отклонения  $x_0$ , а амплитуда колебаний второго осциллятора близка к нулю.

Теперь обратимся к случаю сильной связанности (8.40). На этот раз под квадратным корнем первое слагаемое гораздо меньше второго. Раскладывая квадратный корень в ряд, и ограничиваясь первыми не исчезающими слагаемыми, получаем

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &\approx \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2) - \rho n_1 n_2, \\ \omega_2^2 &\approx \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2) + \rho n_1 n_2, \\ r &\approx 1 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{2\rho n_1 n_2},\end{aligned}\tag{8.42}$$

Дальнейший анализ можно провести, если обратить внимание на следующее обстоятельство. Мы считаем, что выполняются одновременно и условие слабой связи  $\rho \ll 1$  и условие сильной связанности (8.40), поэтому можно записать следующую цепочку неравенств

$$1 \gg \rho \gg \frac{n_2^2 - n_1^2}{2n_1 n_2} = \frac{n_2 - n_1}{(n_1 + n_2)/2} \left[ \frac{n_1 + n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}} \right]^2 \geq \frac{n_2 - n_1}{(n_1 + n_2)/2}.$$

Это означает, что относительная расстройка парциальных частот очень мала, и существует еще один малый параметр  $\Delta n/n$ , где  $\Delta n = n_2 - n_1$ ,



$n = (n_1 + n_2)/2$ . Выражая  $n_1$  и  $n_2$  через  $n$  и  $\Delta n$  и ограничиваясь главными членами разложения по малым параметрам  $\rho$  и  $\Delta n/n$ , получаем

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &\approx n^2 \left\{ 1 \mp \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta n}{\rho n} \right)^2 \right] \right\}, \\ r &\approx 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta n}{n}.\end{aligned}\quad (8.43)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом пределе для расчета собственных частот с высокой точностью можно пользоваться формулой  $\omega_{1,2}^2 = n^2(1 \pm \rho)$ , которая является точной для случая совпадающих парциальных частот. Поправки к ней имеют второй порядок малости по параметру  $\Delta n/(\rho n) \ll 1$ . Параметр  $r$  близок к единице, поэтому, подставляя (8.22) в (8.33), будем иметь

$$\begin{aligned}x_1(t) &\approx x_0 \cos \frac{\rho n t}{2} \cos n t, \\ x_2(t) &\approx \sqrt{\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}} x_0 \sin \frac{\rho n t}{2} \sin n t,\end{aligned}\quad (8.44)$$

Поведение системы в этом случае практически не отличается от поведения двух связанных идентичных осцилляторов. В процессе биений энергия полностью перекачивается между осцилляторами, причем время перекачки равно  $\tau = \pi/(\rho n)$ . При малой связи время перекачки может быть очень большим.

До сих пор при рассмотрении связанных колебаний мы пренебрегали потерями в системе. Возникает вопрос, насколько соответствует картина биений поведению реальных систем, в которых присутствует небольшое затухание? Характерное время затухания колебаний составляет  $t_1 \sim 1/\gamma$ , ( $\gamma$  — коэффициент затухания), поэтому ясно, что для того, чтобы биения были наблюдаемы, должно выполняться условие  $t_1 \gg \tau$ , или

$$\gamma \ll \frac{\rho n}{\pi}.$$

Так как мы считаем, что парциальные частоты близки, а коэффициент связи мал, то можно положить  $l_1 \sim l_2$ ,  $n \sim \sqrt{g/l_1}$ , в результате получаем критерий экспериментальной наблюдаемости биений [4]:

$$\gamma \ll \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{l}{l_1} \right)^{3/2}.\quad (8.45)$$

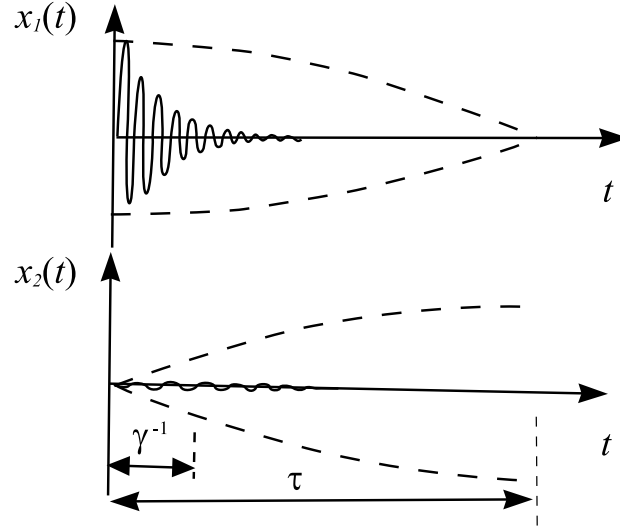


Рис. 8.6. Колебания в системе связанных осцилляторов в случае сильного затухания. Пунктиром показаны огибающие колебаний осцилляторов в случае, когда затухания нет.

При заданном уровне трения связь должна быть достаточно велика, чтобы наблюдаемый процесс был близок к теоретическому описанию, сделанному выше без учета сил трения. В противном случае будет наблюдаться картина, показанная на рис. 8.6. Подробное исследование системы связанных осцилляторов с учетом потерь можно найти в [4].

При рассмотрении системы двух идентичных осцилляторов в качестве собственных мод выступали симметричные и антисимметричные колебания. Каковы будут собственные моды в случае связи двух произвольных осцилляторов? Введем величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(\xi_1 + r_2\xi_2), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(r_1\xi_1 + \xi_2), \end{aligned} \quad (8.46)$$

и покажем, что они являются координатами собственных мод. Для этого

выразим  $\xi_1, \xi_2$  через  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(x_1 - r_2x_2), \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-r_1r_2}}(-r_1x_1 + x_2).\end{aligned}\tag{8.47}$$

Умножим второе из уравнений (8.24) на  $r_2$  и вычтем из первого. Используя легко доказываемые соотношения  $n_1^2 + r_2k/\bar{m}_2 = n_2^2 + k/(r_2\bar{m}_1) = \omega_1^2$ , получаем уравнение гармонического осциллятора для  $\xi_1$  с частотой  $\omega_1$ :  $\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = 0$ . Аналогично, если умножить первое из уравнений (8.22) на  $r_1$  и вычесть из второго, то получим уравнение осциллятора для  $\xi_2$  с частотой  $\omega_2$ :  $\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = 0$ . Таким образом, введенные переменные действительно представляют собственные моды колебаний системы. Можно также показать, что переход к переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в выражениях для кинетической и потенциальной энергии системы исключает из них слагаемые вида  $\xi_1\xi_2$  и  $\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2$ , отвечающие за связь между осцилляторами.

**Задача 8.1.** Кинетическая энергия колебаний связанных маятников на рис. 8.1,а равна

$$K = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{x}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{x}_2^2),$$

а потенциальная —

$$U = \frac{1}{2} [m_1 g l_1 x_1^2 + m_2 g l_2 x_2^2 + k l^2 (x_2 - x_1)^2].$$

Покажите, что переход к переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , приводит к выражениям для кинетической и потенциальной энергий в виде суммы энергий двух несвязанных осцилляторов:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} (\bar{m}_1 \dot{\xi}_1^2 + \bar{m}_2 \dot{\xi}_2^2), \\ U &= \frac{1}{2} (\bar{m}_1 \omega_1^2 \xi_1^2 + \bar{m}_2 \omega_2^2 \xi_2^2).\end{aligned}$$

Из выражений (8.46) и (8.47) еще раз следует, что если коэффициент  $r$ , а, следовательно, и коэффициенты  $r_1$  и  $r_2$  гораздо меньше единицы, то координаты собственных мод близки к координатам каждого из осцилляторов в отдельности. Если же  $r \sim 1$ , то оба осциллятора дают соизмеримый вклад в обе собственные моды.

## § 5. Связанные осцилляторы под действием гармонической силы

Так как система линейна, то зная решение задачи о действии гармонической силы на систему связанных осцилляторов, можно найти решение о действии на такую систему произвольной силы. Если внешняя сила периодическая, то ее можно разложить в ряд Фурье и просуммировать результаты действия каждой из гармоник ряда; если внешняя сила является произвольной функцией времени, то тоже самое можно проделать с помощью интеграла Фурье. Поэтому ключевой задачей является задача о действии на систему гармонической силы с заданной частотой.

Предположим, что на осцилляторы действуют силы с комплексными амплитудами  $F_1$  и  $F_2$  и частотой  $p$ , т. е. реальные действующие силы<sup>3</sup> можно записать в виде  $\mathcal{F}_{1,2} = \text{Re}[F_{1,2}e^{ipt}]$ . Уравнения связанных маятников, обобщенные на случай действия внешних сил, имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 - \frac{k}{\bar{m}_1} x_2 &= \frac{\mathcal{F}_1}{\bar{m}_1}, \\ \ddot{x}_2 + n_2^2 x_2 - \frac{k}{\bar{m}_2} x_1 &= \frac{\mathcal{F}_2}{\bar{m}_2}.\end{aligned}\tag{8.48}$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, общее решение этой неоднородной системы представляется в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения системы с ненулевыми правыми частями. Что касается решения однородной системы, его подробное исследование было проведено в предыдущих параграфах этой главы, поэтому мы сосредоточимся на решении неоднородной системы. Если не интересоваться переходным процессом, то такое решение дает отклик системы на гармоническое воздействие. Можно представить, что исследуемая система имеет малое затухание и мы подождали достаточно долго, чтобы собственные колебания затухли. Мы хотим изучить поведение осцилляторов на еще больших интервалах времени. Если частота внешнего сигнала не слишком близка к одной из резонансных частот, то для исследования установившегося решения можно пренебречь затуханием. Такой подход не работает при точном резонансе, когда затухание в системе служит механизмом ограничения роста амплитуды колебаний.

---

<sup>3</sup>Напомним, что, как и в случае одиночного осциллятора, рассмотренном в главе 5, под  $\mathcal{F}_1(t)$  и  $\mathcal{F}_2(t)$  имеются ввиду обобщенные силы, сопряженные соответствующим обобщенным координатам осцилляторов  $x_1$  и  $x_2$ . Например, если для маятников  $x_1$  и  $x_2$  — углы отклонения, то  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  имеют смысл моментов сил.

В установившемся режиме осцилляторы совершают колебания с частотой внешней силы, поэтому можно записать  $x_{1,2} = \text{Re}[X_{1,2}e^{ipt}]$ ,  $X_{1,2}$  — комплексные амплитуды. Из уравнений (8.48) получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} (-p^2 + n_1^2)X_1 - \frac{k}{\bar{m}_1}X_2 &= \frac{F_1}{\bar{m}_1}, \\ -\frac{k}{\bar{m}_2}X_1 + (-p^2 + n_2^2)X_2 &= \frac{F_2}{\bar{m}_2}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

решения которых суть

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(-p^2 + n_2^2)F_1/\bar{m}_1 + kF_2/\bar{m}_1\bar{m}_2}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2}, \\ X_2 &= \frac{kF_1/\bar{m}_1\bar{m}_2 + (-p^2 + n_1^2)F_2/\bar{m}_2}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1\bar{m}_2}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Выражение в знаменателях обеих формул есть детерминант линейной системы уравнений (8.49). Если частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот системы —  $\omega_1$  или  $\omega_2$  — то детерминант будет равен нулю, при этом решения (8.50) теряют смысл. В таком случае либо необходимо учитывать потери в системе, либо, если потери все-таки точно равны нулю, строить полное нестационарное решение. Последняя ситуация не является надуманной, например в квантовой механике воздействие на атомную систему периодической силы приводит к переходам между атомными уровнями, и процесс такого перехода описывается нестационарными решениями указанного типа. Мы, однако, для простоты ограничимся случаем, когда точного резонанса нет.

Предположим, что сила действует только на один из осцилляторов, например на первый. Тогда  $F_2 \equiv 0$ , и без ограничения общности можно считать, что  $F_1$  — действительная величина. Знаменатель дробей в формулах (8.50) можно представить как  $(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)$ . Это очевидно, так как оба этих полинома относительно  $p^2$  имеют одинаковые нули а коэффициенты при старшей степени равны. Поэтому

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-(p^2 - n_2^2)}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)} \frac{F_1}{\bar{m}_1}, \\ X_2 &= \frac{k/\bar{m}_1\bar{m}_2}{(p^2 - \omega_1^2)(p^2 - \omega_2^2)} F_1. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Из этих выражений следует, что колебания осцилляторов происходят либо в фазе, либо в противофазе с внешней силой. На рис. 8.7,а показано,

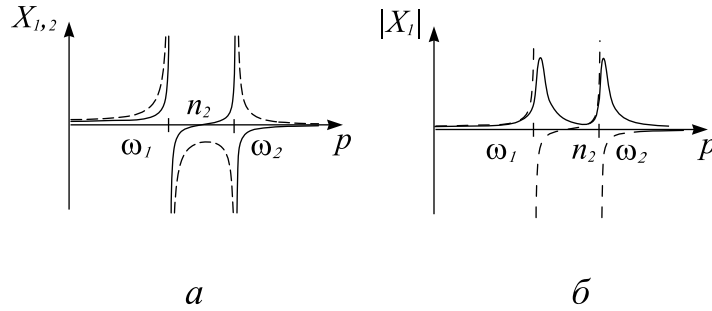


Рис. 8.7. (а) Комплексные амплитуды колебаний первого (сплошная кривая) и второго (пунктир) осцилляторов в зависимости от частоты силы, действующей на первый осциллятор; (б) Амплитуда колебаний первого осциллятора (сплошная линия) в зависимости от частоты, если в системе присутствует малое затухание. Для сравнения пунктиром показана зависимость для комплексной амплитуды, когда затухания нет.

как меняются величины  $X_1$  и  $X_2$  при изменении частоты внешнего воздействия. Если  $p < \omega_1$ , то колебания обоих маятников происходят в фазе с силой  $F_1$ . После прохождения первого резонанса при  $p = \omega_1$ , вплоть до точки  $p = n_2$ , колебания происходят в противофазе с внешней силой. Затем амплитуда первого осциллятора проходит через ноль, а фаза вновь меняется на  $\pi$ . Наконец, при  $p > \omega_2$  первый осциллятор движется в противофазе, а второй — в фазе с силой  $F_1$ . Учет малого затухания меняет картину только в непосредственной окрестности резонансов. Как пример, на рис. 8.7,б показана соответствующая резонансная кривая для первого осциллятора.

Возвращаясь к случаю системы без потерь, обратим внимание на то, что при  $p = n_2$  амплитуда колебаний первого осциллятора равна нулю, несмотря на то, что сила действует именно на него. Из формул (8.50) получаем, что если  $p = n_2$  и  $F_2 = 0$ , то  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = -F_1/k$ . Это соответствует случаю *динамического демпфирования* колебаний [1].

На основе эффекта динамического демпфирования работают многие устройства, служащие для подавления нежелательных механических и электрических вибраций. Наиболее эффективное из них — успокоитель качки корабля Фрама, суть действия которой можно понять из рис. 8.8,а [1].

Внутри корпуса судна находится большой резервуар, наполняемый водой, период колебаний жидкости в резервуаре зависит от уровня воды. Сам корабль и резервуар с водой составляют связанные колебательные системы. На корабль действует сила с периодом морского волнения, если период колебаний жидкости примерно равен периоду качки, то колебания корабля заметно уменьшаются.

Во многих промышленных установках существует заметная вибрация, связанная, например, с вращением недостаточно сбалансированного ротора электродвигателя или турбины. Для уменьшения этой вибрации на один фундамент с установкой можно поместить демпфер в виде механической колебательной системы, подобрав парциальную частоту так, чтобы она совпадала с основным “тоном” вибрации. При этом колебания машины будут подавлены.

Совершенно аналогичные системы используются в электротехнике. Здесь колебательный контур служит фильтром, не пропускающим в определенный участок цепи сигнал с частотой, совпадающей с его резонансной частотой. Рассмотрим, например, схему на рис. 8.8,б. Легко показать, что если частота внешней ЭДС равна  $p = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ , то ток в цепи  $L_2 C_2$  будет равным нулю. Это происходит потому, что контур  $L_1 C_1$  имеет на данной частоте бесконечное сопротивление.

Пользоваться эффектом динамического демпфирования следует с осторожностью, особенно если спектр внешней силы содержит много частотных компонент, или, что тоже самое, амплитуда внешней силы еще не установилась. Если связь между колебательными системами мала, то разность парциальной частоты  $n_2$  и собственной частоты  $\omega_2$  также мала, поэтому легко может наступить переход от режима демпфирования к режиму резонанса.

Формулы (8.50) демонстрируют еще одно свойство связанных линейных систем, которое играет исключительно важную роль в физике вообще. Рассмотрим две ситуации: первую, когда сила  $F$  действует только на первый осциллятор, в этом случае отклик второго равен

$$X_2 = \frac{F/(\bar{m}_1 \bar{m}_2)}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1 \bar{m}_2},$$

и вторую, когда точно такая же сила  $F$  действует на второй осциллятор, отклик первого при этом равен

$$X_1 = \frac{F/(\bar{m}_1 \bar{m}_2)}{(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) - k^2/\bar{m}_1 \bar{m}_2}.$$

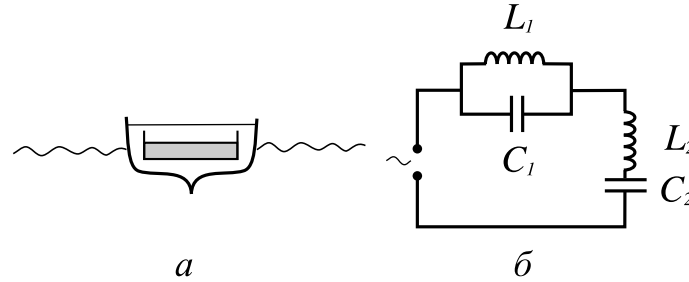


Рис. 8.8. Примеры динамического демпфирования колебаний: успокоитель качки корабля Фрама (а) и резонансный фильтр в радиотехнической схеме (б).

Мы видим, что эти отклики одинаковы. Это проявление *теоремы взаимности*, связывающей отклик с силами, действующими на разные части сложной системы. Теорема взаимности может быть сформулирована для систем со многими степенями свободы, и даже для распределенных систем. Главное условие ее применимости — линейность исследуемой системы. В электродинамике, например, теорема взаимности широко используется в теории антенн. В применении к идеализированным антеннам — диполям — ее можно сформулировать следующим образом [5].

Пусть диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}_1$ , расположенный в точке 1, возбуждает электромагнитное поле  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ , а диполь  $\mathbf{p}_2$ , находящийся в точке 2, — поле  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ , тогда теорема взаимности выражается равенством

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{E}_2(1) = \mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2), \quad (8.52)$$

где  $\mathbf{E}_2(1)$  — значение поля  $\mathbf{E}_2$  в точке нахождения диполя  $\mathbf{p}_1$ , а  $\mathbf{E}_1(2)$  — значение поля  $\mathbf{E}_1$  там, где находится диполь  $\mathbf{p}_2$ . При равенстве дипольных моментов диполь 1 действует на диполь 2 также, как диполь 2 действует на диполь 1.

Если, например,  $\mathbf{p}_1$  соответствует передающей антенне, расположенной вблизи земли, а нужно найти поле, создаваемое этим диполем высоко над землей, в точке 2, где находится летательный аппарат с приемной антенной на борту, то можно решить вспомогательную задачу, в которой передающая антенна — диполь  $\mathbf{p}_2$  — расположен в точке 2, а приемная антенна — в точке 1 и воспользоваться теоремой взаимности.

Задача о действии внешней гармонической силы на систему связанных осцилляторов одним обстоятельством отличается от задачи, в которой воздействию подвергается одиночный осциллятор. А именно, для воз-



никновения резонанса в системе *необходимо, но недостаточно*, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот. Наличие нескольких сил, действующих на систему, позволяет так подобрать их относительную величину, что резонанс не возникнет.

Покажем это для системы двух связанных осцилляторов. Пусть частота внешних сил совпадает с частотой первой собственной моды, т. е.  $p = \omega_1$ , а силы  $F_1$  и  $F_2$  подобраны так, что

$$kF_1/\bar{m}_1\bar{m}_2 + (-\omega_1^2 + n_1^2)F_2/\bar{m}_2. \quad (8.53)$$

Используя характеристическое уравнение (8.28), легко показать, что при этом будет также выполняться соотношение

$$(-\omega_1^2 + n_2^2)F_1/\bar{m}_1 + kF_2/\bar{m}_1\bar{m}_2,$$

т. е. числители обеих дробей в (8.50) равны нулю. При этом равны нулю и знаменатели дробей, так как  $p = \omega_1$ . Соотношения (8.50) оказываются в данном случае неприменимыми. Это происходит потому, что определитель системы линейных уравнений (8.49), при  $p = \omega_1$  обращается в нуль и она становится вырожденной. В таком случае необходим более тщательный анализ, который основан на переходе к уравнениям для собственных мод.

Умножим второе из уравнений (8.48) на  $r_2$  и вычтем из первого; кроме того, умножим первое уравнение на  $r_1$  и вычтем из второго. Как мы уже видели, если внешние силы равны нулю, такая процедура приводит к уравнениям для собственных типов колебаний. В случае, когда силы отличны от нуля, получаем уравнения для собственных мод под внешним воздействием:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - r_1 r_2}} (\mathcal{F}_1/\bar{m}_1 - r_2 \mathcal{F}_2/\bar{m}_2), \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - r_1 r_2}} (-r_1 \mathcal{F}_1/\bar{m}_1 + \mathcal{F}_2/\bar{m}_2). \end{aligned} \quad (8.54)$$

В интересующем нас случае обе внешние силы имеют одинаковую частоту  $p = \omega_1$  и выполняется условие для комплексных амплитуд сил (8.53), что выражается так:  $\mathcal{F}_1/\bar{m}_1 = r_2 \mathcal{F}_2/\bar{m}_2$ , поэтому правая часть первого уравнения в (8.54) равна нулю. Таким образом, отклик системы формируется только из колебаний второй моды. Решение уравнений (8.54) можно записать в виде:

$$\xi_1(t) \equiv 0, \quad \xi_2(t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - r_1 r_2}} \frac{F_2/\bar{m}_2}{-\omega_1^2 + \omega_2^2} e^{i\omega_1 t} \right].$$

Производя обратный переход к координатам осцилляторов  $x_1$  и  $x_2$ , получаем

$$x_1(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\omega_1 t} F_1 / \bar{m}_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right], \quad x_2(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\omega_1 t} F_2 / \bar{m}_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right].$$

Мы видим, что резонанса в системе нет, несмотря на то, что частота внешней силы совпадает с одной из собственных частот. Объясняется это тем, что компоненты внешней силы “ортогональны” собственному вектору соответствующей моды (в данном случае первой). Другими словами можно сказать, что величины и соотношения фаз внешних сил таковы, что полная работа, совершаемая над системой, равна нулю.

Этот пример показывает, что условия наступления резонанса в системе связанных осцилляторов требуют обобщения по сравнению со случаем одиночного осциллятора. В общем случае системы  $N$  связанных осцилляторов для возникновения резонанса необходимо выполнение следующих условий:

- 1) Частота внешней силы<sup>4</sup> должна совпадать с одной из собственных частот системы.
- 2) Вектор “приведенных” сил  $[\mathcal{F}_1/\bar{m}_1, \mathcal{F}_2/\bar{m}_2, \dots, \mathcal{F}_N/\bar{m}_N]^T$  ( $T$  — знак транспонирования) не должен быть ортогонален собственному вектору, соответствующему колебанию с этой частотой.

## § 6. Колебания системы $N$ связанных осцилляторов<sup>5</sup>

Аналитическое исследование колебаний в системе  $N$  связанных осцилляторов, если в системе нет симметрии высокого порядка, невозможно, так как для нахождения собственных частот требуется решать алгебраическое уравнение  $N$ -ой степени относительно  $\omega^2$ . Тем не менее, на практике часто необходимо исследовать колебания в системах с очень большим числом степеней свободы. Это могут быть, например, колебания в сложных электрических схемах, или механические вибрации в конструкциях мостов или корпусов самолетов. Современные

<sup>4</sup>Под внешней силой в данном случае понимается вектор с компонентами, равными силам, действующим на каждый из осцилляторов.

<sup>5</sup>Для понимания этого параграфа желательно знакомство с курсом линейной алгебры в объеме программы физических и механико-математических специальностей технических вузов или университетов. Впрочем, дальнейшее изложение не зависит от содержания этого раздела, поэтому в случае необходимости он может быть пропущен.

численные методы расчета колебаний в сплошных средах также часто основаны на представлении распределенной системы в виде связанных между собой элементарных осцилляторов. Например, уравнения колебаний тонких оболочек в строительной механике [6], или колебания электромагнитного поля в резонаторах современных сверхвысокочастотных приборов [7, 8] можно, с помощью различных методов дискретизации уравнений в частных производных, привести к системам связанных линейных осцилляторов, причем число осцилляторов в таком случае может достигать сотен тысяч и даже миллионов!

По этой причине необходимо иметь общий метод расчета собственных колебаний в системе связанных осцилляторов общего вида. Изложению такого метода посвящен этот параграф.

Рассмотрим систему  $N$  связанных осцилляторов, кинетическая и потенциальная энергии которой выражаются формулами

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} x_i x_j. \quad (8.55)$$

Удобно воспользоваться матричными обозначениями, вводя вектор-столбец  $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  и матрицы  $[K]$  и  $[M]$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

По очевидным соображениям матрица  $[K]$  называется матрицей жесткости, а матрица  $[M]$  — матрицей масс. Матрицы  $[K]$  и  $[M]$  обладают двумя свойствами, чрезвычайно важными с точки зрения теоретического анализа и практических вычислений:

- 1) Непосредственно из их определения следует, что  $m_{ij} = m_{ji}$  и  $k_{ij} = k_{ji}$ , то есть  $[K] = [K]^T$ , и  $[M] = [M]^T$ . Такие матрицы называются *симметрическими* [3, 9]. Их элементы, лежащие симметрично относительно главной диагонали равны друг другу.
- 2) Симметрические матрицы  $[K]$  и  $[M]$  обладают свойством *положительной определенности* [3, 9], которое означает, что для произвольных нену-

левых векторов  $[X]$  и  $[\dot{x}] = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N]^T$  выполняются неравенства

$$K = \frac{1}{2} [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] > 0, \quad U = \frac{1}{2} [x]^T [K] [x] > 0.$$

С физической точки зрения это просто условия положительности потенциальной и кинетической энергий; если они не выполняются, то движение не будет носить характер колебаний вблизи положения равновесия, для которого  $x_i = 0$ ,  $\dot{x}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Существует несколько критериев положительной определенности произвольной симметрической матрицы, два из которых формулируются так:

- все собственные значения положительно определенной матрицы строго положительны;
- определители всех главных подматриц<sup>6</sup> матрицы строго положительны.

Используя введенные обозначения, можно записать функцию Лагранжа системы следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ [\dot{x}]^T [M] [\dot{x}] - [x]^T [K] [x] \right\}.$$

а уравнения динамики будут иметь вид

$$\frac{d^2}{dt^2} [M] [x] = [K] [x]. \quad (8.57)$$

Наша цель — определение собственных мод системы, то есть вычисление собственных частот и соответствующее им распределение амплитуд и фаз колебаний каждого из осцилляторов. Это значит, что решение уравнения (8.57) нужно искать в виде  $[x] = \text{Re}\{e^{i\omega t} [X]\}$ , где  $[X] = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$  — вектор-столбец, составленный из комплексных амплитуд. Подставляя это соотношение в (8.57), получаем матричное уравнение

$$[K] [X] = \omega^2 [M] [X], \quad (8.58)$$

которое в линейной алгебре носит название обобщенной алгебраической проблемы собственных значений. Это уравнение является линейным однородным алгебраическим уравнением относительно компонент вектора  $[X]$ , поэтому оно

---

<sup>6</sup>Главная подматрица порядка  $n$  симметрической матрицы  $[A]$  получается из нее вычеркиванием всех строк и столбцов с номерами  $i, j > n$ .

имеет нетривиальное решение только в том случае, если его определитель равен нулю, то есть если выполняется условие

$$\det \left[ [K] - \omega^2 [M] \right] = 0. \quad (8.59)$$

Формально левая часть уравнения (8.59) есть полином степени  $N$  относительно  $\omega^2$ , коэффициенты которого сложным образом выражаются через элементы матриц  $[M]$  и  $[K]$ . Полином имеет ровно  $N$  корней  $\{\omega_1^2, \omega_1^2, \dots, \omega_N^2\}$ , некоторые из них могут совпадать друг с другом, поэтому нетривиальное решение уравнения (8.58) существует только для одного из этих  $N$  значений частоты  $\omega^2$ . Такие значения называются *собственными значениями* или собственными числами алгебраической проблемы, а вектор  $[X]_i$ , являющийся решением (8.58) при  $\omega^2 = \omega_i^2$ , называется  $i$ -м собственным вектором.

Следствием положительной определенности матриц  $[X]$  и  $[K]$  являются важные свойства собственных чисел и собственных векторов [3, 9, 10], которые приводятся здесь без доказательства:

- 1) все собственные числа строго положительны:  $\omega_i^2 > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) компоненты собственных векторов  $[X]$  могут быть выбраны чисто действительными;
- 3) два собственных вектора  $[X]_i$  и  $[X]_j$ , соответствующих разным собственным числам  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$  ортогональны с весом, задаваемом матрицей  $[M]$ , т. е. выполняется

$$[X]_i^T [M] [X]_j = 0, \quad \text{если } \omega_i^2 \neq \omega_j^2; \quad (8.60)$$

- 4) Если существует вырождение собственных чисел, т. е. если для  $i, j \in k+1, k+2, \dots, k+m$ ,  $k \geq 0$ ,  $k+m \leq N$  выполняется  $\omega_i^2 = \omega_j^2$ , то собственные векторы  $[X]_{k+1}, \dots, [X]_{k+m}$  все равно можно выбрать ортогональными в указанном выше смысле;
- 5) собственные векторы  $[X]_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  линейно независимы, и образуют базис в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}^N$  комплексных векторов-столбцов порядка  $N$  со скалярным произведением  $([X], [Y]) = [X]^{*T} [M] [Y]$ .

Еще раз подчеркнем, что все эти свойства являются прямым следствием положительной определенности матриц  $[K]$  и  $[M]$ .

Если известно решение алгебраической проблемы собственных значений (8.58), т. е. все собственные значения и собственные векторы, то общее решение задачи о колебаниях связанных осцилляторов представляется в виде

$$[x(t)] = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N C_i [X]_i e^{i\omega_i t} \right\}, \quad (8.61)$$

где комплексные константы  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  определяются из начальных условий. Если  $[x_0] = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)]^T$  — вектор начальных координат, а  $[\dot{x}_0] = [\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dots, \dot{x}_N(0)]^T$  — вектор начальных скоростей, то  $C_i = C'_i + iC''_i$  находятся из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^N C'_i [X]_i = [x_0], \quad \sum_{i=1}^N C''_i \omega_i [X]_i = -[\dot{x}_0]. \quad (8.62)$$

Расписанных по компонентам, этих уравнений  $2N$  штук — столько, сколько необходимо для определения неизвестных  $C'_i$  и  $C''_i$ .

Зная собственные векторы системы можно также легко найти нормальные моды колебаний. Для этого введем квадратную матрицу  $[S]$  порядка  $N$  так, что ее  $i$ -й столбец является  $i$ -м собственным вектором, т. е.

$$[S] = [[X]_1, [X]_2, \dots, [X]_N]. \quad (8.63)$$

Используя свойства собственных векторов 1–5, перечисленные выше, легко показать, что преобразование подобия

$$[K'] = [S]^T [K] [S], \quad [M'] = [S]^T [M] [S] \quad (8.64)$$

одновременно диагонализует матрицы  $[K]$  и  $[M]$ , т. е. приводит их к виду, когда ненулевые элементы обеих матриц  $[K']$  и  $[M']$  присутствуют только на главных диагоналях. Новые матрицы имеют вид

$$[M'] = \begin{bmatrix} \|X_1\|^2 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & \|X_2\|^2 & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \|X_N\|^2 \end{bmatrix}, \quad (8.65)$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \|X_1\|^2 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & \omega_2^2 \|X_2\|^2 & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \omega_n^2 \|X_N\|^2 \end{bmatrix}.$$

где  $\|X_i\|^2 = [X]_i^T [M] [X]_i$  — квадрат нормы  $i$ -го собственного вектора. Удобно нормировать собственные вектора так, чтобы  $\|X_i\|^2 = 1$ , тогда матрица масс приводится к единичной, а матрица жесткости содержит на главной диагонали квадраты собственных частот системы. Вектор нормальных координат вводится соотношением

$$[\xi] = [S]^{-1} [x], \quad [\xi] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]. \quad (8.66)$$

Действительно, учитывая правило транспонирования произведения матриц, получаем, например, для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} 2U &= [x]^T [K] [x] = [x]^T ([S]^T)^{-1} [S]^T [K] [S] [S]^{-1} [x] = \\ &= \left( [x]^T ([S]^T)^{-1} \right) ([S]^T [K] [S]) ([S]^{-1} [x]) = \\ &= ([S]^{-1} [x])^T [K'] ([S]^{-1} [x]) = [\xi]^T [K'] [\xi]. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Для кинетической энергии можно таким же образом записать  $2K = [\dot{\xi}]^T [M'] [\dot{\xi}]$ .

Если собственные векторы  $[X]_i$  нормированы в указанном выше смысле, то кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные через переменные  $\xi_i$  будут иметь вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \xi_i^2. \quad (8.68)$$

Таким образом, произвольная система  $N$  связанных гармонических осцилляторов представима в виде совокупности  $N$  несвязанных между собой осцилляторов с частотами, совпадающими с собственными частотами системы.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний по поводу методов решения алгебраической проблемы собственных значений (8.58). Очевидно, если число осцилляторов больше четырех и в системе отсутствует симметрия, то единственным способ ее решения — численный. При этом прямой метод решения, связанный с разложением детерминанта в (8.59) для определения коэффициентов характеристического полинома и последующим отысканием его корней, является самым неудачным. Можно с уверенностью сказать, что для системы уже из 10 осцилляторов такая попытка потребовала бы невообразимо большого времени, затраченного на подсчет всех необходимых определителей, но даже

если бы вычисления можно было бы довести до конца, результат не имел бы ничего общего с истинным решением из-за погрешностей округления [10].

Необходимо отметить, что задача на отыскание собственных значений матриц является самой трудной задачей вычислительной алгебры и на ее решение были потрачены огромные усилия в течении почти пятидесяти лет, с тех пор, как появились первые ЭВМ. Сегодня можно утверждать, что для матриц умеренного размера ( $N \leq 200$ ) такую задачу можно считать практически решенной. Разработаны чрезвычайно красивые с алгебраической точки зрения алгоритмы, и на их основе созданы эффективные программы, позволяющие находить решения алгебраической проблемы собственных значений, причем даже необязательно для симметричных и действительных матриц. Подробное изложение этих методов можно найти в [10, 11], а сами программы можно бесплатно получить через сеть Интернет в общедоступной библиотеке научного программного обеспечения *NETLIB*, главный сайт которой находится по адресу <http://www.netlib.org>, а его зеркала расположены по всему миру.

В случае матриц очень большого порядка проблему численного решения задачи собственных значений нельзя считать закрытой и в настоящее время. Обычно в задачах, где появляются подобные матрицы, они оказываются разреженными, т. е. только очень малая часть их элементов не равна нулю. Это позволяет хранить только ненулевые элементы матриц и значительно сокращает объем необходимой памяти и время решения задачи на ЭВМ. Однако при этом требуется разработка специальных алгоритмов, ориентированных на работу с разреженными матрицами, которые обычно являются существенно более сложными, чем алгоритмы для заполненных матриц.

## § 7. Цепочка идентичных осцилляторов

Система связанных осцилляторов, в которой они упорядочены так, что каждый из осцилляторов связан только с двумя соседями (за исключением, может быть, двух крайних), называется цепочкой осцилляторов. Исследование процессов в цепочке связанных осцилляторов имеет большое значение как в чисто теоретическом плане, так и с точки зрения практических приложений. Наиболее широкое распространение получили радиотехнические цепочки, которые используют как *фильтры* для выделения или подавления сигналов с частотами, лежащими в определенной полосе частот. Радиотехнические цепочки удобно также использовать как модели сред, в которых могут существовать колебания и волны с заданными свойствами [12, 13]. Другим примером колебательных цепочек являются многие электронные приборы СВЧ диапазона, в которых электродинами-



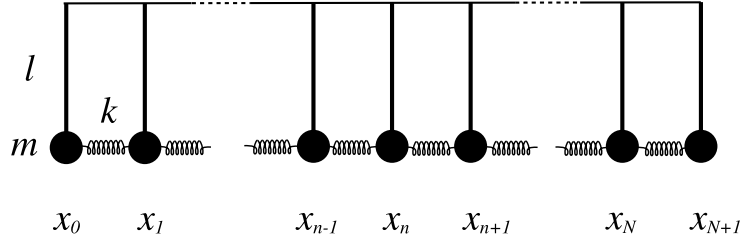


Рис. 8.9. Цепочка связанных идентичных маятников.

ческая система представляет собой последовательно связанные резонаторы, в каждом из которых могут возбуждаться колебания на дискретных частотах, а связь между резонаторами обеспечивает возможность передачи энергии колебаний вдоль системы. Одним из наиболее плодотворных способов теоретического анализа процессов в таких системах, как без электронного пучка, так и в его присутствии, является их описание как цепочки связанных осцилляторов [14, 15].

Наконец, для построения современной теории твердого тела огромную роль сыграла модель кристалла, в котором периодически расположенные атомы были представлены шариками, связанными между собой пружинками, заменяющими межатомные силы [16].

Важное значение имеет то, что в случае цепочек связанных идентичных осцилляторов анализ можно провести до конца. Рассмотрим для наглядности цепочку механических маятников, связанных пружинками (рис. 8.9). Все маятники и пружинки одинаковы и расположены на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга. Для анализа необходимо задать условия на концах цепочки, определив, каким образом устроены два крайних осциллятора. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда всего имеется  $N + 2$  маятника, и крайние закреплены в положении равновесия. Таким образом мы имеем динамическую систему с  $N$  степенями свободы. Пронумеруем все осцилляторы числами от 0 до  $N + 1$  и обозначим через  $x_n$  угол отклонения  $n$ -го из них. Тогда можно записать следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_n + \omega_0^2 x_n &= \frac{k}{m}(x_{n+1} - x_n) - \frac{k}{m}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (8.69) \\ x_{N+1} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Введем комплексные амплитуды  $X_n$  с помощью формулы

$x_n(t) = \text{Re}\{e^{i\omega t} X_n\}$ ; для  $X_n$  из (8.69) следуют разностные уравнения

$$X_0 = 0, \quad (8.70a)$$

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) X_n = \frac{k}{m} (X_{n+1} + X_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.70b)$$

$$X_{N+1} = 0. \quad (8.70c)$$

Решение этих уравнения будем искать в виде  $X_n = A \sin \psi n$ , где  $A$  и  $\psi$  — некоторые постоянные. Тогда уравнение (8.70a) выполняется автоматически, а из уравнения (8.70b) после простых тригонометрических преобразований следует

$$\omega^2(\psi) = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (8.71)$$

Остается неиспользованным условие (8.70c), из которого находим, что должно выполняться  $\sin \psi(N+1) = 0$ , или

$$\psi_j = \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8.72)$$

Совместно уравнения (8.71) и (8.72) определяют собственные частоты колебаний цепочки осцилляторов:

$$\omega_j = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi j}{2(N+1)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8.73)$$

а формула

$$X_n^{(j)} = A_j \sin \psi_j n \quad (8.74)$$

задает распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для  $j$ -ой собственной моды. Отметим, что в системе существует  $N$  собственных мод, что совпадает с числом степеней свободы. Другие целые значения  $j$ , лежащие вне диапазона  $1, 2, \dots, N$ , не приводят к новым типам колебаний.

Распределение собственных частот удобно представить графически так, как показано на рис. 8.10 на котором в координатах  $(\psi, \omega)$  построен график функции  $\omega(\psi)$ , задаваемой уравнением (8.71). Положение собственных частот на графике отмечено точками, координаты которых по оси абсцисс выражаются формулой (8.72). Все частоты лежат в интервале между значениями  $\bar{\omega}_1 = \omega_0$  и  $\bar{\omega}_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 4k/m}$ , причем сами эти

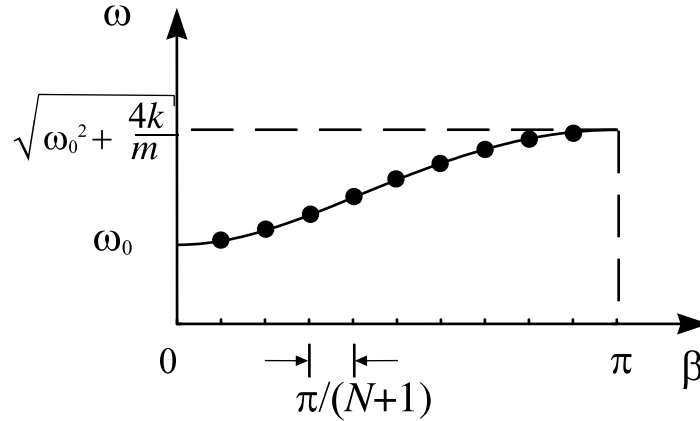


Рис. 8.10. Распределение собственных частот системы связанных идентичных маятников.

крайние точки в данном случае не являются собственными частотами. Совокупность всех собственных частот системы называется ее *спектром*.

Расстояние между любыми двумя точками спектра вдоль оси  $\psi$  равно  $\pi/(N+1)$ , т. е. их расположение эквидистантно. При этом распределение собственных частот вдоль оси  $\omega$  существенно неоднородное. Особенно хорошо это становится видно, если увеличивать количество осцилляторов  $N$ , тогда плотность проекций точек, изображающих собственные частоты, на ось  $\omega$  будет возрастать около крайних точек спектра  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  быстрее, чем в его средней части.

Если в системе возбуждена одна собственная мода, то ее амплитуду  $A_j$  можно выбрать чисто действительной величиной, тогда из (8.74) следует, что все  $X_n^{(j)}$  действительны, т. е. колебания всех осцилляторов в цепочке происходят либо в фазе, либо в противофазе друг с другом. Наглядно вид собственных мод можно представить, если отложить на графике вдоль оси абсцисс номера осцилляторов, а вдоль оси ординат — амплитуду колебаний. На рис. 8.11 показаны такие распределения для трех первых собственных мод в случае, когда  $N = 9$ . Картина похожа на колебания струны, закрепленной в двух конечных точках, однако следует помнить, что в нашем примере речь идет о продольных колебаниях.

Для первой собственной моды, имеющей наименьшую собственную частоту, все осцилляторы колеблются в фазе, максимальную амплитуду имеет центральный осциллятор, если число  $N$  — нечетное, или два ближайших к центру осциллятора, если  $N$  — четное. Для следующей моды

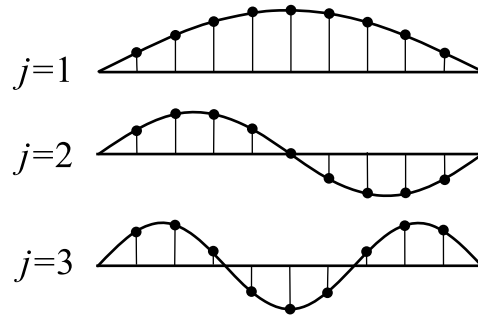


Рис. 8.11. Распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для первых трех собственных мод.

осцилляторы разбиваются на две группы, колебания в которых происходят в противофазе. Для третьей моды таких групп три, и так далее. Мы приходим к выводу, что картина колебаний имеет вид стоячих волн, причем по длине системы должно укладываться целое число полуволн (условие резонанса), если длиной волны называть расстояние вдоль системы между двумя осцилляторами, совершающими одинаковое движение. Используя (8.74), это определение можно записать в виде  $\psi_j \lambda_j / d = 2\pi$ , где  $d$  — расстояние между соседними осцилляторами,  $\lambda_j$  — длина волны  $j$ -го типа колебаний. Длина всей цепочки равна  $(N + 1)d$ , тогда условие резонанса представляется как  $(\lambda_j j) / 2 = (N + 1)d$ . Совместно два этих уравнения дают  $\psi_j = \pi j / (N + 1)$ , то есть результат, совпадающий с (8.72).

Введем волновое число  $k$ , связанное с длиной волны обычным соотношением  $k = 2\pi / \lambda$ . Тогда получаем  $\psi_j = 2\pi d / \lambda_j = k_j d$ . Отсюда следует, что величина  $\psi_j$  определяет пространственный набег фазы стоячей волны между двумя соседними осцилляторами.

Таким образом, колебания дискретной цепочки осцилляторов можно описывать в терминах стоячих волн. Для непрерывной среды такой подход будет развит в главе 10. Следует, однако, отметить, что существует важное отличие колебаний дискретной цепочки и колебаний отрезка непрерывной среды с заданными граничными условиями на концах, которое состоит в том, что собственных типов колебаний в цепочке *конечное* число, совпадающее с числом степеней свободы, а количество собственных типов колебаний в непрерывной модели бесконечно. Это обстоятельство играет важную роль в объяснении термодинамических свойств твердых тел [16, 17].

Исследуем вопрос, насколько влияют на полученные результаты условия на концах цепочки, или, другими словами, *граничные условия*? Чтобы выяснить его, рассмотрим цепочку, в которой самый правый осциллятор не закреплен, а свободен. Тогда вместо уравнения (8.70с) для него следует записать уравнение

$$\left(-\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{k}{m}\right) X_{N+1} = \frac{k}{m} X_N. \quad (8.75)$$

Решение вновь ищем в виде  $X_n = A \sin \psi n$ , тогда, как и в предыдущем случае, уравнение (8.70а) выполняется автоматически, из (8.70б) следует соотношение (8.71), а из (8.75), после простых преобразований получаем, что должно выполняться  $\sin(\psi/2) \cos \psi(2N + 3/2) = 0$ . Так как первый множитель не может быть равен нулю (в противном случае все  $X_n \equiv 0$ ), то отсюда следует, что

$$\psi_j = \frac{(2j-1)\pi}{2(N+1)+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N+1. \quad (8.76)$$

Мы получили, что значения собственных частот лежат на плоскости с координатами  $(\psi, \omega)$  на той же самой кривой (8.71), что и в случае цепочки с закрепленными концами, однако они смещены относительно значений (8.73), так как их координаты вдоль оси  $\psi$  теперь задаются формулой (8.76). Расстояние между соседними точками спектра вдоль этой оси снова эквидистантно, но оно не равно расстояниям между двумя крайними точками спектра, для которых  $j = 1$  и  $j = N+1$  и предельными точками, для которых  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ . Отметим, что и в данном случае количество собственных мод совпадает с числом степеней свободы системы.

**Задача 8.2.** Постройте распределения амплитуд колебаний осцилляторов нескольких первых мод для цепочки, закрепленной только на одном конце, и покажите, что они соответствуют условию, что по длине системы должно укладываться нечетное число четвертей длины волны.

Использованный метод решения разностных уравнений можно использовать и в случае других условий на концах цепочки. Например, можно рассмотреть ситуацию, когда один, или оба крайних осциллятора отличаются от всех остальных осцилляторов по массе. Подобное рассмотрение позволяет сделать некоторые выводы об общих свойствах полученных решений, которые не зависят от конкретного вида граничных условий:

- 1) Собственные частоты системы на плоскости  $(\psi, \omega)$  лежат на кривой, уравнения которой определяется устройством регулярной части цепочки. В рассмотренном случае маятников, связанных пружинками, это уравнение (8.71).
- 2) Количество собственных мод совпадает с числом степеней свободы системы.
- 3) Спектр системы вдоль оси  $\psi$  эквидистантный, однако само расстояние между точками спектра зависит как от общей длины системы, так и от граничных условий.
- 4) Вдоль оси  $\omega$  спектр в общем случае не является эквидистантным, например для рассмотренной системы точки спектра сгущаются к граничным частотам  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ .
- 5) Крайние точки спектра могут совпадать, а могут и не совпадать с граничными частотами  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ , это определяется условиями на концах цепочки.

Эти утверждения носят общий характер и не зависят от конкретного устройства регулярной цепочки.

При большом числе элементов цепочки спектр колебаний становится все гуще и гуще, все более плотно заполняя кривую  $\omega(\psi)$ . При этом теряет смысл вопрос о самих значениях собственных частот, и на первый план выдвигается вопрос о *плотности распределения* собственных частот. Например, если рассматривать цепочку связанных осцилляторов как одномерную модель кристалла, то количество элементов в такой цепочке  $N \sim 10^{23}$ . При этом в любом физически бесконечно малом интервале частот  $\Delta\omega$ , принадлежащем отрезку  $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$ , все еще будет содержаться очень большое число собственных мод  $\Delta n(\omega)$ . Для описания многих макроскопических свойств кристалла необходимо знать, чему равно это число. Для этого вводится функция  $\rho(\omega)$ , называемая плотностью распределения собственных частот, или плотностью спектра, с помощью соотношения

$$\Delta n(\omega) = \rho(\omega) \Delta\omega. \quad (8.77)$$

Каждая собственная мода представляет собой гармонический осциллятор, и, как известно из статистической физики, если осциллятор с частотой  $\omega_i$  находится в тепловом равновесии с окружающей средой (термостатом),

имеющей температуру  $T$ , то его средняя энергия выражается формулой

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_i}{e^{\hbar\omega_i/k_b T} - 1},$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $k_b$  — постоянная Больцмана [17]. Тогда внутренняя энергия всей среды равна

$$E(T) = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) \rho(\omega) d\omega. \quad (8.78)$$

Это соотношение можно использовать, в частности, для построения теории теплоемкости кристалла, если вычислить для него плотность распределения  $\rho(\omega)$ . Отсюда видно, что эта функция играет чрезвычайно важную роль в теоретической физике.

Вычислим плотность распределения для модели связанных идентичных маятников, предположив, что их число  $N$  очень велико. Тогда, обратив уравнения (8.71) и (8.72), получаем

$$j(\omega) = \frac{2(N+1)}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4k/m}},$$

откуда, используя формулу  $\rho(\omega) = dj/d\omega$ , будем иметь

$$\rho(\omega) = \frac{2(N+1)}{\pi} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}_1^2)(\bar{\omega}_2^2 - \omega^2)}}. \quad (8.79)$$

Функция  $\rho(\omega)$  для этого случая показана на рис. 8.12. Видно, что вблизи границ спектра  $\rho(\omega)$  обращается в бесконечность по закону

$$\begin{aligned} \rho &\sim \frac{1}{\sqrt{\omega - \bar{\omega}_1}}, & \omega - \bar{\omega}_1 &\ll \bar{\omega}_1, \\ \rho &\sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}_2 - \omega}}, & \bar{\omega}_2 - \omega &\ll \bar{\omega}_2. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Это обстоятельство является отражением свойства сгущения собственных частот вблизи краев спектра, о котором упоминалось выше.

Сгущение спектра происходит вблизи тех точек кривой  $\omega(\psi)$ , где она носит “пологий” характер, т. е. там, где  $d\omega/d\psi = 0$ . Действительно, так как спектр вдоль оси  $\psi$  эквидистантный, то для бесконечно малых  $\Delta\omega$  и  $\Delta\psi$  можно записать

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{d\psi} \Delta\psi \sim \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right| \Delta n,$$

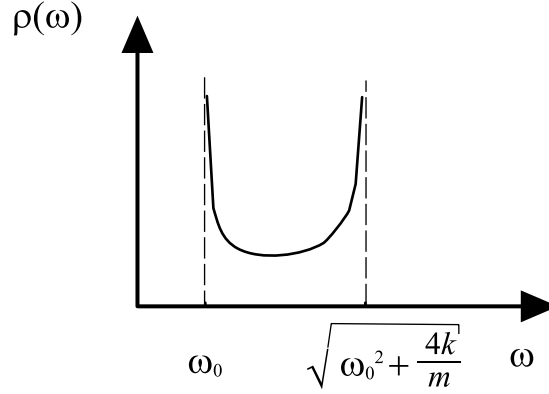


Рис. 8.12. Плотность распределения собственных частот цепочки связанных идентичных осцилляторов.

откуда получаем важное соотношение

$$\rho(\omega) \sim \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right|^{-1}. \quad (8.81)$$

Фактически мы уже воспользовались им при выводе формулы (8.79). Отметим, что соотношение (8.81) справедливо для одномерных цепочек, его обобщение на случай систем большей размерности см. в [16, глава 2]. Коэффициент пропорциональности в (8.81) можно найти из условия нормировки, зная, что полное число собственных мод равняется числу степеней свободы.

Как будет видно при рассмотрении волн в непрерывных средах (см. § 13.3), точки, где  $d\omega/d\psi = 0$ , соответствуют равенству нулю так называемой групповой скорости, отвечающей за распространение энергии волнового движения вдоль среды. Столь сильная сингулярность функции  $\rho(\omega)$  в критических точках — обращение ее в бесконечность — является отличительной особенностью одномерных цепочек. Для колебаний в двумерных и трехмерных решетках осцилляторов можно показать, что  $\rho(\omega)$  остается конечной, а ее производная терпит разрыв [16]. По этой причине прямое обобщение полученных результатов на случай трехмерной кристаллической решетки требует осторожности, однако они оказываются полезны при исследованиях линейных полимеров [18].

Модель цепочки идентичных осцилляторов оказывается слишком простой и не улавливает некоторые важные особенности колебаний в дискретных цепочках. Чтобы продвинуться дальше, рассмотрим более слож-



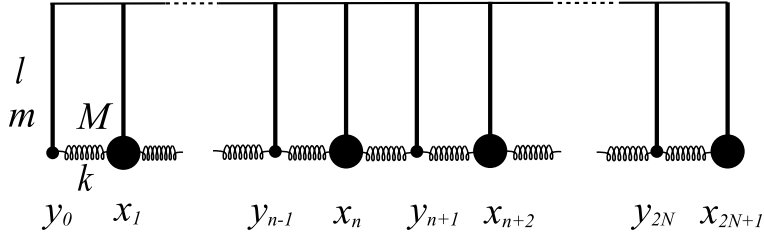


Рис. 8.13. Цепочка из чередующихся осцилляторов двух типов.

ную систему, предположив, что в цепочке последовательно чередуются осцилляторы двух типов, назовем их  $A$  и  $B$ , отличающиеся массами и собственными частотами колебаний  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . Такая система показана на рис. 8.13. Примем, вслед за Л.И. Мандельштамом [1, лекция 30], следующий способ обозначений: все осцилляторы в цепочке пронумеруем подряд от 0 до  $2N + 1$ , независимо от их типа, но координаты осциллятора типа  $A$  будет обозначать через  $X_k$ , типа  $B$  — через  $Y_n$ . Тогда  $k$  принимает нечетные значения  $k = 1, 3, \dots, 2N + 1$ , а  $n$  — четные значения  $n = 0, 2, \dots, 2N$ . Для определенности будем считать, что крайние осцилляторы закреплены, тогда можно написать (сразу используем уравнения для комплексных амплитуд)

$$Y_0 = 0, \quad (8.82a)$$

$$X_{2N+1} = 0. \quad (8.82b)$$

Для остальных осцилляторов записываем уравнения динамики в виде

$$\left(-\omega^2 + \omega_{01}^2 + \frac{2k}{M}\right) X_k = \frac{k}{M} (Y_{k+1} + Y_{k-1}), \quad k = 1, 3, \dots, 2N - 1, \quad (8.83a)$$

$$\left(-\omega^2 + \omega_{02}^2 + \frac{2k}{m}\right) Y_n = \frac{k}{m} (X_{n+1} + X_{n-1}), \quad n = 2, 4, \dots, 2N. \quad (8.83b)$$

Решение уравнений (8.82)-(8.83) ищем в виде  $X_k = A \sin \psi k$ ,  $Y_n = B \sin \psi n$ , тогда уравнение (8.82a) выполняется автоматически, а подстановка этих выражений в уравнения (8.83) после простых преобразований дает

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + n_1^2) A - \frac{2k}{M} \cos \psi B &= 0, \\ -\frac{2k}{m} \cos \psi A + (-\omega^2 + n_2^2) B &= 0, \end{aligned} \quad (8.84)$$

где  $n_1^2 = \omega_{01}^2 + 2k/M$ ,  $n_2^2 = \omega_{02}^2 + 2k/m$ . Из (8.84) следует характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2 - \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi = 0,$$

Его решения есть

$$\omega_{1,2}^2(\psi) = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi} \right]. \quad (8.85)$$

Возможные значения  $\psi$  задаются, как и в случае однородной цепочки, оставшимся уравнением (8.82b):  $\sin \psi(2N+1) = 0$ , или

$$\psi_j = \frac{\pi j}{2N+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (8.86)$$

Мы видим, что для каждого возможного значения  $\psi$  из (8.86) можно найти *две* собственные частоты, так что их общее число равно  $2N$ , по числу степеней свободы. Другие значения  $j$ , отличающиеся от  $1, 2, \dots, N$ , не приводят к новым решениям. Например, для  $j = N+1$  можно записать

$$\psi_{N+1} = \frac{\pi}{2N+1}(N+1) = \pi - \psi_N.$$

Отсюда видно, что собственные частоты, получаемые для  $j = N$  и  $j = N+1$  из уравнения (8.85), совпадают, а распределения амплитуд колебаний осцилляторов  $X_k$ ,  $Y_n$  отличаются только знаком. То же самое можно сказать о собственных колебаниях с  $j = N-1$  и  $j = N+2$ , и так далее.

Если графически представить распределение собственных чисел, подобно тому, как это было сделано на рис. 8.10, то получится картина, показанная на рис. 8.14. Собственные частоты, помеченные точками, лежат на двух кривых, задаваемых уравнением (8.85). Координаты точек вдоль оси  $\psi$  определяются соотношением (8.86), из которого следует, что возможный интервал изменения  $\psi$  ограничен значениями 0 и  $\pi/2$ . Каждая ветвь спектра лежит в своей частотной полосе, нижняя ограничена значениями  $\bar{\omega}_1$  и  $n_1$ , а верхняя — значениями  $n_2$  и  $\bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ (n_1^2 + n_2^2) \mp \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM}} \right]. \quad (8.87)$$

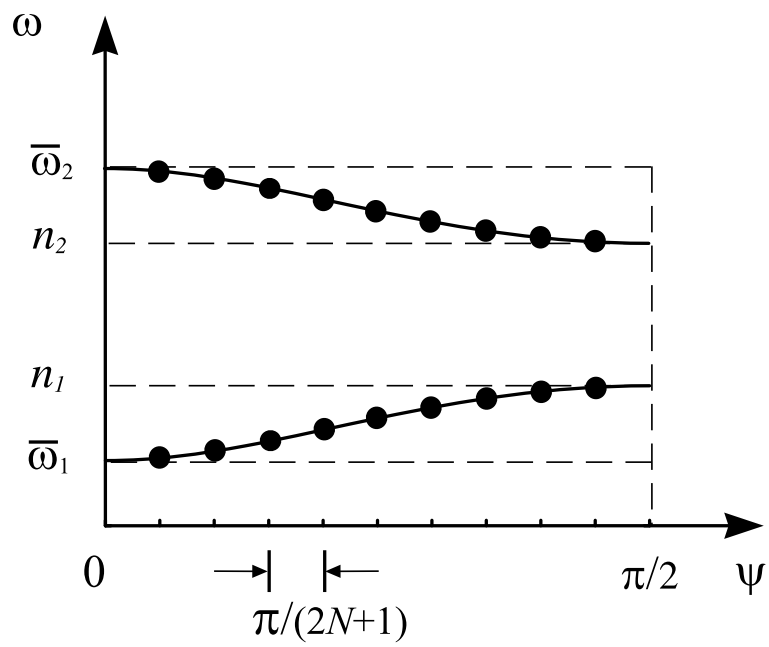


Рис. 8.14. Спектр колебаний цепочки из чередующихся осцилляторов двух типов.

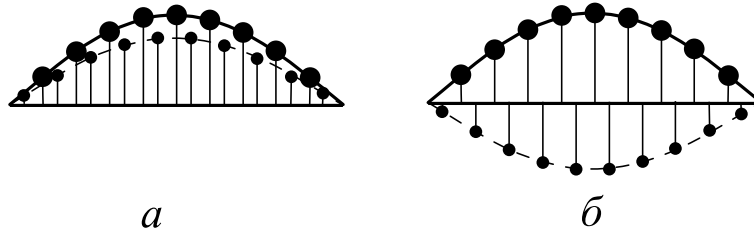


Рис. 8.15. Распределение амплитуд колебаний вдоль цепочки из чередующихся осцилляторов двух типов для первых мод низкочастотной (а) и высокочастотной (б) ветвей спектра.

Таким образом собственные частоты разбиты на две группы, лежащие, соответственно, в первой и второй полосе. Собственные моды, принадлежащие первой группе называют низкочастотными, а второй группе — высокочастотными. Они отличаются также пространственным распределением амплитуд колебаний. Из первого уравнения в (8.84) можно получить

$$A = \frac{(4k/m) \cos \psi}{\pm \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 + \frac{4k^2}{mM} \cos^2 \psi} - (n_2^2 - n_1^2)} B,$$

где знак плюс относится к низкочастотным, а минус — к высокочастотным колебаниям. В первом случае амплитуды  $A$  и  $B$  имеют одинаковые знаки, т. е. смещения соседних осцилляторов разного типа происходят в фазе, а во втором  $A$  и  $B$  имеют разные знаки, т. е. смещения соседних осцилляторов происходят в противофазе. Для основного типа колебаний картины распределения амплитуд схематически показаны на рис. 8.15. Случай (а) соответствует низкочастотной моде, при этом оба сорта осцилляторов смещаются в одном направлении и макроскопическая плотность заметно меняется в процессе колебаний. В случае (б), соответствующем высокочастотным колебаниям, смещения происходят в разные стороны, и заметного изменения плотности среды нет.

Если цепочку рассматривать как одномерную модель кристалла или полимерной молекулы, то осцилляторы представляют атомы двух сортов, расположенных в пределах одного периода кристаллической решетки. При этом следует также учесть, что один отдельный атом вне кристалла при смещении не испытывает возвращающей силы. Тогда  $\omega_{01}^2 = 0$  и

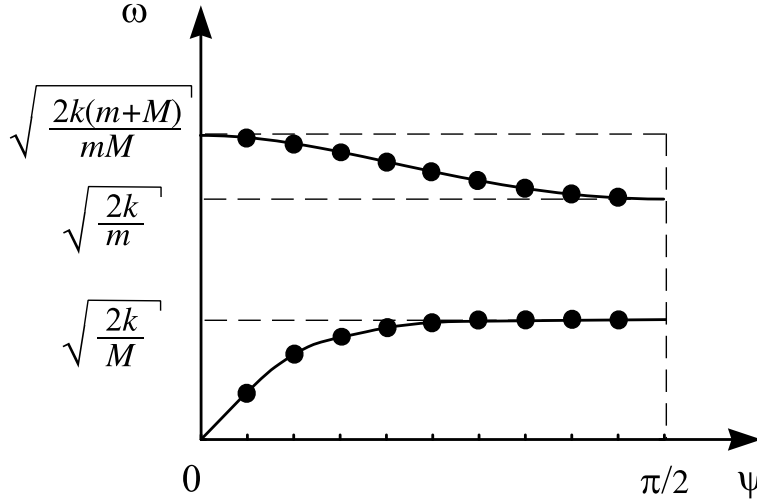


Рис. 8.16. Спектр колебаний цепочки "атомов" в одномерной модели кристалла.

$\omega_{02}^2 = 0$ , и вместо (8.85) можно записать

$$\omega_{1,2}^2(\psi) = k \left[ \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4k^2}{mM} \sin^2 \psi} \right]. \quad (8.88)$$

Эти зависимости изображены на рис. 8.16. При больших  $N$  собственные частоты плотно заполняют обе ветви спектра. Характер спектра при этом несколько изменяется. При малых  $\psi$  второе слагаемое под корнем гораздо меньше первого, и корень можно разложить в ряд. В этой части спектра, с учетом того, что  $\sin \psi \approx \psi \ll 1$  получаем

$$\omega_1(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{m+M}} \psi, \quad \omega_2(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k(m+M)}{mM}}. \quad (8.89)$$

Низкочастотная ветвь  $\omega_1(\psi)$  при малых  $\psi$  ведет себя как отрезок прямой, выходящей из начала координат. Для самой низшей моды ( $j = 1$ ) отсюда следует, что

$$\omega_1(\psi_1) = \sqrt{\frac{2k}{(m+M)}} \frac{\pi}{(2N+1)}.$$

Если число "атомов" очень велико ( $N \sim 10^{23}$ ), то эта частота отличается на много порядков от  $\omega_2$ . Для низкочастотной ветви частота колебаний

линейно увеличивается с номером моды, а для высокочастотной — остается постоянной. В первом случае часто говорят об акустических колебаниях, или *дебаевской* ветви спектра, а во втором — об оптической ветви, поскольку соответствующие частоты лежат обычно в инфракрасном диапазоне.

На другом краю спектра следует положить  $\sin \psi \approx 1$ , тогда

$$\omega_1(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{M}}, \quad \omega_2(\psi) \approx \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (8.90)$$

Между этими значениями других собственных частот системы нет.

В случае, если массы “атомов” значительно отличаются ( $M \gg m$ ), то можно считать, что оптическая ветвь идет практически параллельно горизонтальной оси, так как ширина полосы, в которой она лежит, равна

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2k(m+M)}{mM}} - \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx \frac{m}{2M} \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (8.91)$$

Для расчета плотности спектра частот  $\rho(\omega)$  проще всего воспользоваться формулой (8.81). Дифференцируя соотношение (8.88), и опуская несущественный постоянный множитель, получаем

$$\rho(\omega) \sim \frac{\omega |\omega^2 - \Omega^2|}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 - [(M-m)/(M+m)]^2 \Omega^4} \sqrt{\Omega^4 - (\omega^2 - \Omega^2)^2}}, \quad (8.92)$$

где  $\Omega^2 = k(1/m + 1/M)$ . Эта функция изображена на рис. 8.17. Видно, что плотность собственных частот отлична от нуля на двух интервалах оси  $\omega$ , совпадающих с положением акустической и оптической ветвей спектра. Вблизи граничных точек функция  $\rho(\omega)$  имеет сингулярности, однако это не относится к точке  $\omega = 0$ , т. е. к нижней границе акустической ветви, так как в этой точке  $d\omega/d\psi \neq 0$ .

Рассмотренные примеры показывают, что вид спектральной плотности  $\rho(\omega)$  в значительной степени определяется дискретной структурой среды, и зависит от количества “атомов” разных типов на одном периоде системы, а также их масс. То же самое можно сказать о реальном твердом теле. Функция  $\rho(\omega)$  допускает прямое измерение в эксперименте, например, с помощью дифракции медленных нейтронов на кристалле, и, таким образом, она служит источником информации о строении вещества.

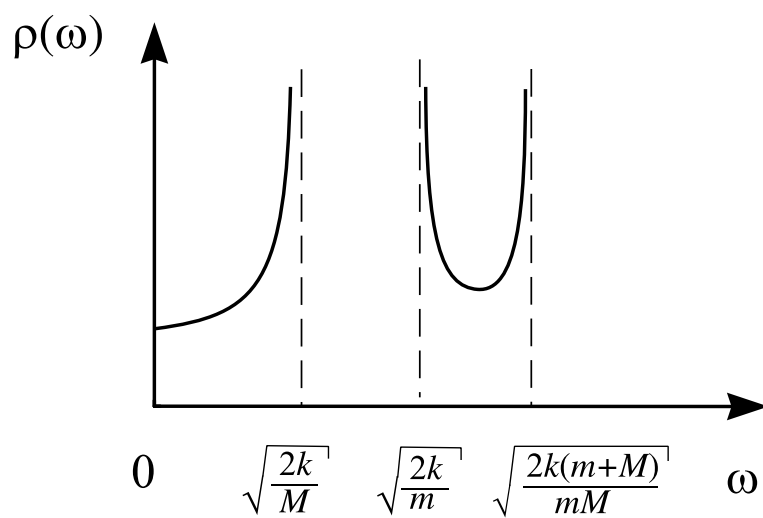


Рис. 8.17. Плотность распределения частот для одномерной модели кристалла в виде цепочки из “атомов” двух типов.

## ГЛАВА 9

### **Переход к одномерной сплошной среде в цепочке связанных осцилляторов. Волны. Дисперсия**

*Вводные замечания. Что же такое волна? Несколько определений. Об истории коронации одной русской императрицы. Еще определения. Что можно сказать о свойствах волны? Напоминание о волновой терминологии. Общее линейное уравнение. Дисперсионное соотношение. Диспергирующие волны; групповая скорость. С чем связано существование дисперсии в среде? Пространственная и временная дисперсия (существование в среде собственных пространственных и временных масштабов); нелокальная связь физических величин; зависимость диэлектрической проницаемости от частоты и волнового числа). О квазичастицах.*

#### **§ 1. Вводные замечания**

Цепочка связанных осцилляторов представляет собой простейшую упорядоченную структуру. Простыми примерами модели упорядоченной структуры, в которой тождественные осцилляторы связаны между собой не любым, а определенным образом, могут служить линейная цепочка из одинаковых частиц, расположенных вдоль прямой на равных расстояниях друг от друга (одномерная решетка из одинаковых частиц); механическая система, состоящая из набора связанных пружинами маятников; цепочка из  $LC$  — элементов; бесконечный ряд одинаковых акустических резонаторов; цепочка, образованная из магнитов, и др. В частности, система, правильно расположенных в пространстве шариков, связанных друг с другом пружинами, представляет собой грубую модель твердого тела (см., например, в [1] главу “Колебания решетки”). Показательно в этом смысле начало упомянутой главы. “Простейшее твердое тело — это, по-видимому, твердый аргон. Он состоит из правильно расположенных нейтральных атомов с крепко связанными электронными оболочками. Эти



атомы удерживаются вблизи друг друга силами Ван-дер Ваальса, которые действуют в основном между ближайшими соседями в решетке. Физические процессы в таком кристалле связаны с тепловым движением атомов вблизи своих идеализированных положений равновесия. Для простейшего описания такого движения используется модель Эйнштейна, согласно которой каждый атом колеблется подобно простому гармоническому осциллятору в потенциальной яме, образованной силами его взаимодействия с соседями”<sup>1</sup>. Если в такой одномерной решетке один шарик сместить из положения равновесия, то будут смещаться и соседние — по всей упорядоченной структуре побежит волна. Волны, бегущие в твердом теле или другой упорядоченной структуре, характеризуются длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\omega$ , которые удовлетворяют закону дисперсии

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (9.1)$$

$k = 2\pi/\lambda$ . Из соотношения ((9.1)) следует, что волна с определенным вектором  $\mathbf{k}$  имеет и определенную частоту; это позволяет рассматривать волну как осциллятор, совершающий колебания с частотой  $\omega(\mathbf{k})$ . Тогда приходим к аналогии между поведением твердого тела и “газа” осцилляторов, движущихся независимо друг от друга (см., например [2]). Правда, в движении нового элементарного осциллятора участвуют все атомы твердого тела. Волне (осциллятору) можно поставить в соответствие квазичастицу с энергией  $\mathcal{E} = \hbar\omega(\mathbf{k})$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Таким образом, анализ поведения колебаний в упорядоченных структурах приводит нас к одному из самых интересных понятий современной физики — понятию квазичастиц [3].

Вернемся к цепочке одинаковых маятников, связанных между собой пружинами (см. рис. 8.9)<sup>2</sup>. Предположим, что пространственный период волнового движения в дискретной цепочке много больше расстояния между маятниками, т.е. много больше размера ячеек. Тогда возможны

---

<sup>1</sup>Интересно, что Джон Уильям Рэлей — основоположник линейной теории колебаний и волн получил в 1904 году Нобелевскую премию за открытие в 1894 году вместе с Уильямом Рамзаем нового химического элемента — аргона, за исследование его свойств и определение места в периодической системе элементов.

<sup>2</sup>В этой главе мы будем обозначать углы отклонения маятников через  $\varphi_n$ , а жесткость связывающих их пружин через  $\gamma$ , чтобы не возникло путаницы со стандартными обозначениями, принятыми в теории волн

следующие замены:

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &\rightarrow \varphi(x, t), \\ \varphi_{n+1}(t) &\rightarrow \varphi\{(x+a), t\} = \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots, \\ \varphi_{n-1}(t) &\rightarrow \varphi\{(x-a), t\} = \varphi(x, t) - \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots.\end{aligned}$$

Переходя от дискретной координаты к непрерывной и используя введенные выше замены в уравнении, получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \varphi(x, t) = 0, \quad (9.2)$$

где  $v^2 = \gamma_1 a^2 / m$ . Это линеаризованное уравнение Клейна — Гордона, впервые появившееся в теории поля.

Если в уравнении (9.2) устремить  $\omega_0$  к нулю, то получим обычное линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (9.3)$$

Вообще говоря, любая одномерная волна малой амплитуды может быть описана решением волнового уравнения (9.3), где  $v = \text{const}$  и имеет размерность скорости.

Для любых функций  $F_1$  и  $F_2$  решениями уравнения (9.3) являются функции  $F_1(x - vt)$  и  $F_2(x + vt)$ . Очевидно, что решение

$$\varphi(x, t) = F_1(x - vt) + F_2(x + vt) \quad (9.4)$$

в виде двух волн, распространяющихся навстречу друг другу, также удовлетворяют уравнению (9.3).

Введем обозначения  $\xi = x - vt$  и  $\eta = x + vt$ . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial \xi}, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -v \frac{\partial F_1}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для  $\varphi = F_1(\xi)$  выполняется уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

**Задача 9.1.** Покажите сами, что функция  $F_2(x + vt)$  тоже является решением волнового уравнения.

Свойство решений, выражаемое формулой (9.4) известно как принцип суперпозиции и математически описывает явление интерференции волн малой амплитуды (пример: стоячая волна на струне музыкального инструмента, которая представляет собой суперпозицию волн: распространяющихся к закрепленному концу струны: и волн, отраженных от этого конца). О волновом уравнении, допускающем принцип суперпозиции (уравнение (9.3)) говорят как о линейном, а его решение (решение (9.4)) называют линейной волной. Подчеркнем, что скорость линейной волны не зависит от ее амплитуды. (Обязательно найдите время вспомнить линейные колебания, вернувшись к предыдущим главам).

М.А. Миллер в своем замечательном эссе “Волны, волны, волны ...” [4] так пишет о значении принципа суперпозиции. “Мир, в котором нас поселили, обладает хорошим универсальным свойством: описание любого процесса, любого движения, любого явления допускает приблизительную линеаризацию в малом (im Kleinen!). Следовательно, в пределах такого приближения строго соблюдается Принцип Суперпозиции (Принцип Сложения Движений!). И не просто соблюдается — он господствует! Вне этого утверждения мы не в состоянии представить себе ни арифметические, ни какие-нибудь обычные логические операции. Я считаю (и не я один), что “явление суперпозиции явлений” (!) является необходимым (!) условием (!) создания Интеллекта”.

Все сказанное выше можно суммировать определением волн, которое принадлежит американскому физiku и инженеру Джону Пирсу [5].

“Понятие волны — одно из величайших общих понятий физики. Человек сталкивается с волнами с незапамятных времен ...

Современная физика полна волн: волны землетрясений, которые изучаются сейсмологами; волнения и зыбь в океанах, озерах и прудах; волны звука, распространяющиеся в воздухе; волны механических колебаний в натянутых струнах или кристаллов кварца, используемых для стабилизации частоты радиопередатчика; электромагнитные волны, которые образуют свет и которые радиопередатчики излучают, а радиоприемники принимают, и, наконец, волны чего? — вероятности, быть может, которые используются в квантовой механике для предсказаний поведения электронов, атомов и более сложных форм вещества.

Что же такое волны? Они не земля, вода или воздух; не сталь или жила струны, или кварц; они только распространяются в этих веществах ...

Пожалуй, лучше спрашивать не что такое волны, а что можно сказать о волнах. Тогда не будет недоразумений. Мы понимаем под волнами некое состояние или некий процесс, которые могут быть описаны математически в общем виде, применимо к различным физическим системам”.

И все-таки ...

## § 2. Что же такое волна?

**Несколько определений.** Давайте заглянем в книги, посвященные волновым процессам. Начнем со школьного учебника по физике Г.Я. Мякишева и Б.Б. Буховцева [6, с. 66–67], а потом уже посмотрим в сложные книги.

“Что называется волной? Волной называется колебание, распространяющееся в пространстве с течением времени ... . При распространении волны происходит перемещение определенного состояния колеблющейся среды, но не перенос вещества. Возникшие в одном месте колебания волны, например от брошенного камня, передаются соседними участками и постепенно распространяются во все стороны, вовлекая в колебательное движение все новые и новые частицы среды. Течение же воды не возникает: перемещается лишь форма ее поверхности”<sup>3</sup>.

Эти свойства понимал еще Леонардо да Винчи, который в пятнадцатом веке очень образно писал о волнах: “Импульс гораздо быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, — наподобие волн образуемых в мае на нивах течением ветров; волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят” [7, с. 350].

В одной из лучших книг по колебаниям и волнам — книге Г.С. Горелика “Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику” [8, с. 144] — находим: “Слово “волна” возникло задолго до того, как родилась наука. Оно обозначает в своем первоначальном смысле, как всем известно, то чередование движущихся следом друг за другом горбов и впадин, которые видны почти всегда на поверхности моря или большого озера; волны легко вызвать на гладкой поверхности пруда, если бросить на нее камень или коснуться ее палкой. Проникновение слова “волна” в акустику, а затем в оптику можно считать началом создания того единого языка, о котором говорилось в главе 1”.

---

<sup>3</sup>Далее в школьном учебнике описываются свойства волн и их характеристики: поперечные или продольные волны, скорость волн, энергия волн, длина волн, связь между длиной волны, частотой и скоростью распространения волны

И там же: “В физике волнами или волной называют изменяющееся со временем пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например, плотности вещества, напряженности электрического поля, температуры.

Волной часто называют также всякое явление, при котором в пространстве происходит распространение кратковременного электрического или механического “толчка” ”.

Ф.Крауфорд [9] дает следующее определение: “... мы будем рассматривать вынужденные колебания открытых систем т.е. систем не имеющих внешних границ. Например, если кто-то играет на трубе, находясь на воздушном шаре высоко над землей, то воздух можно считать открытой системой, если пренебречь эхом, т.е. отражением от земли к трубе ...

Волны, образованные внешним воздействием, приложенным к открытой среде, называются бегущими волнами: они “бегут” от создающего их источника. Важное свойство бегущих волн заключается в том, что они переносят энергию и импульс”.

Еще одно определение: “Волна — это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью ... Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить “условие квазистационарности”: если характерные размеры системы  $L < cT$  ( $c$  — скорость распространения возмущения,  $T$  — время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В случае  $L > cT$  процесс нужно считать волновым, а систему распределенной” [10, с. 8].

Во всех определениях фигурируют слова “колебания”, “колебательный” и т.п. Но есть примеры того, когда волна есть, а колебаний нет.

**Об истории коронации одной русской царицы.** Вот одна из страниц русской истории — 25 апреля 1742 года. В этот день состоялась коронация императрицы Елизаветы, дочери Петра I, на русский престол. Будущая императрица пожелала, чтобы момент возложения патриархом короны на ее голову был отмечен в новой столице России Петербурге выстрелом пушки Петропавловской крепости. Но по тогдашним законам коронация русских царей проходила в Москве в Успенском соборе. Радио и телевидения не было ... Но способ реализации желания Елизаветы нашли. На всем примерно шестьсотпятидесятикилометровом пути от собора в Москве до крепости в Петербурге на расстоянии прямой видимости (примерно сто метров) друг от друга выстроили солдат. Понадобилось приблизи-

тельно шесть тысяч пятьсот человек; в руке у каждого был флажок. В момент, когда корона коснулась головы Елизаветы, первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его действия, затем последовательно все остальные. Минут через десять — двадцать известие о коронации дошло до артиллериста в Петропавловской крепости, поскольку время реакции человека составляет десятые доли секунды. Спрашивается, что же переместилось из Москвы в Петербург?

Любой из солдат стоял на своем месте; правда, каждый взмахнул флажком. На языке науки действие солдата (поднял и опустил руку с флажком) означает изменение его состояния или фазы. Именно это изменение состояния (фаза) и перемещалось вдоль цепи солдат.

Тогда можно считать, что перемещения в пространстве изменения состояния называется волной.

**Еще определения.** В очень серьезной в математическом смысле книге Дж. Уизема “Линейные и нелинейные волны” [10] есть раздел, начинающийся словами: “По-видимому, не существует единого строгого определения волн. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее руководствоваться интуитивным понятием о волне как о любом различимом сигнале, передающимся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью. Такой сигнал может быть возмущением любого вида, например, максимумом какой-либо величины или резким ее изменением при условии, что это возмущение четко выделено и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом должен оставаться различимым. Такое определение может показаться несколько расплывчатым, но оно оказывается вполне приемлемым, а любая попытка дать более строгое определение представляется слишком ограничительной, поскольку различным типам волн присущи различные характерные черты”.

Наконец, как всегда заглянем в “Физический энциклопедический словарь” (М.,1960). В первом томе на странице 312 приводится следующее определение: “Волны — возмущения, распространяющиеся с конечной скоростью в пространстве и несущие с собой энергию.

Основная роль волн во всех физических явлениях состоит в том, что в виде волн осуществляется перенос энергии без переноса вещества (хотя последний и может иметь место как побочное явление)”.

**Что можно сказать о свойствах волны?** Наверное, хватит определений. Их главная и общая для всех черта — подмена ответа на вопрос: “Что такое волны?” ответом на другой вопрос: “А что можно сказать о свойствах волн?”. Детальный ответ будет дан в последующих главах, а сейчас ограничимся качественным описанием.

Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию в процессе своего распространения. Величина этой энергии разная и сильно зависит от природы волн. Действительно, энергия морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы весьма велика, а у электромагнитных световых волн, идущих от Солнца и достигающих Земли — сравнительно небольшая (мощность на один квадратный метр поверхности  $\sim 1$  кВт). Подумайте сами и приведите примеры волн с разной энергией.

Подобно движущимся частицам, волны обладают импульсом, который проявляется менее заметно, чем энергия волн.

В очень интересной книге [11, с. 432] есть восьмой очерк под названием “Солнцем полны паруса”, который начинается цитатой из научно — фантастического рассказа Артура Кларка “Солнечный ветер” [12]. Воспользуемся и мы этой цитатой.

“Протяните ладони к Солнцу. Что вы чувствуете? Тепло, конечно. Но кроме него есть еще давление. Правда, такое слабое, что вы его не замечаете. На площадь ваших ладоней приходится всего около одной миллионной унции. Но в космосе даже такая малая величина играет важную роль, потому что она действует все время, час за часом, день за днем. И запас энергии в отличие от ракетного горючего неограничен. Мы можем создать паруса, которые будут улавливать солнечное излучение”.

Далее в рассказе описана гонка вокруг Земли яхт с солнечными парусами.

А возникла идея солнечных парусов значительно раньше (см., например, [5], когда в 1951 году в журнале “Astounding Science Fiction” (название журнала переводится как “Изумительная научная фантастика”) Р. Саундерс опубликовал статью “Космические парусники”. В статье было показано, что в принципе можно приводить в движение космический корабль в Солнечной системе, используя давление света на солнечные паруса.

В недавней статье [13] указано, что концепция использования светового давления солнечных лучей проскальзывала у Ф.А. Цандера еще в 20-е годы. Однако, по-настоящему, прорабатываться эта идея стала лишь в семидесятые годы в рамках программ полета к комете Галлея в США и в СССР (проект “Регата”). Ученые пытались вернуть терми-

ну “космоплавание” его изначальный смысл в рамках так называемого Колумбовского проекта, создаваемого по инициативе конгресса США и связанного с празднествами по случаю 500-летия открытия Америки. Колумбовская юбилейная комиссия, сформированная президентом США, объявила необычный конкурс на лучший космический парусник для полета к Марсу. Условия предполагаемого полета были сформулированы в декабре 1988 года и сводятся к следующим: корабли участников должны быть выведены на начальную орбиту в 1992–93 годах, оттуда, подняв паруса, двигаться по раскручивающейся спирали к Луне; после завершения маневра в поле тяготения Луны парусники должны взять курс на Марс и постараться как можно быстрее добраться до планеты. Все как в рассказе А.Кларка! Работа над проектами была столь захватывающей, что в предисловии к советскому проекту парусника, авторы не удержались по-существу от поэтических строк [13]:

“Работая над Колумбовским проектом, мы испытываем удивительное ощущение смеси приключения с деловой предприимчивостью, пронизывающей жизнь и деятельность великого мореплавателя.

Вспоминая судьбу легендарных парусников от “Санта-Марии” до “Дискавери”, “Фрама” и “Ра”, мы уверены в скором космическом продолжении этого списка”.

Нашими специалистами был спроектирован аппарат “Витязь” с парусом площадью  $120 \cdot 10^3 \text{ м}^2$  при весе 485 кг, что обеспечивает коэффициент эффективности (отношение предельной силы, развиваемой парусом на орбите, к силе притяжения к Солнцу), равный 0,37<sup>4</sup>. В Вашингтоне в апреле 1990 года во время презентации наш проект по этому показателю оказался самым лучшим (вторыми были англичане с коэффициентом 0.3). Что ж, будем ждать космических гонок!

Для распространения волны от одной точки к другой нужно определенное время. Это означает, что волны имеют конечную скорость.

Подробно понятие скорости обсудим в главе, посвященной кинематике волн, а в следующем разделе лишь коснемся этого вопроса на уровне напоминаний известного из курса общей физики.

---

<sup>4</sup>Этот коэффициент не зависит от местонахождения корабля и служит важнейшей характеристикой, определяющей его возможности как транспортного средства



**§ 3. Напоминание о волновой терминологии. Общее линейное уравнение. Дисперсионное соотношение. Диспергирующие волны; групповая скорость**

Обратимся вновь к волновому уравнению (9.3), в котором  $\varphi$  характеризует некоторую величину, связанную с волной, а  $v^2 = \text{const} > 0$ . Поскольку в самом общем случае мы определили волну как пространственно — временную эволюцию некоторого состояния, уравнение (9.3) определяет пространственно — временную эволюцию величины  $\varphi$  в изотропной консервативной среде. Как указывалось выше, общее решение уравнения (9.3) имеет вид суммы решений (9.4), где  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные функции. Решение  $F_1(x - vt)$  — распространяющаяся волна, бегущая в положительном направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , а  $F_2(x + vt)$  — распространяющаяся волна, бегущая с той же скоростью в отрицательном направлении оси  $x$ . Аргументы  $\xi_1 = x - vt$  и  $\xi_2 = x + vt$  суть фазы волн  $F_1$  и  $F_2$ , соответственно. Очевидно, что  $\frac{d\xi_1}{dt} = 0$ , когда  $\xi_1 = \text{const}$ , но тогда  $\frac{dx}{dt} = v$ . Это означает, что наблюдатель, движущийся с волной  $F_1$  со скоростью  $v$ , будет все время видеть одну и ту же фазу волны  $F_1$ , т.е. будет отмечать одно и то же состояние волнового движения, соответствующее начальному значению  $F_1$ . Если наблюдатель движется со скоростью  $\frac{dx}{dt} = -v$  вместе с волной  $F_2$ , то он будет фиксировать одну и ту же фазу  $\xi_2$ , т.е. одно и то же значение  $F_2$ , с которого началось движение.

Сказанное выше определяет физический смысл терминов фаза и скорость волны, называемой также фазовой скоростью.

Когда  $F_1$ , например, периодическая функция, а  $F_2 = 0$ , что соответствует периодической распространяющейся волне, точка, в которой  $\varphi$  имеет максимум называется гребнем, а точка, где  $\varphi$  минимальна, впадиной волны.

Волновое уравнение (9.3) относится к классу гиперболических уравнений в частных производных. Поэтому оно обладает двумя вещественными характеристиками в плоскости  $(x, t)$ :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = -v \quad (9.5)$$

Таким образом,  $F_1 = \text{const}$  вдоль первой характеристики, а  $F_2 = \text{const}$  вдоль второй.

Описываемый волновым уравнением факт распространения волн в двух противоположных направлениях следует из инвариантности уравнения (9.3) относительно преобразования  $x \rightarrow (-x)$ ,  $t \rightarrow (-t)$ . Время в

уравнении (9.3) обратимо, и поэтому можно изучать будущее волны с таким же успехом, как и прошлое.

Пусть теперь  $F_1(x - vt) = a \sin(kx - \omega t)$ ,  $v = \omega/k$ ,  $F_2(x + vt) = 0$ ,  $\omega$  и  $k$  — постоянны. Тогда  $\varphi = a \sin(kx - \omega t)$  представляет собой периодическую бегущую волну с амплитудой  $a$  и фазовой скоростью  $v$ , определяемой соотношением  $\omega = vk$  или  $v = \omega/k$ . Такая волна есть решение волнового уравнения (9.3) при начальных условиях  $\varphi(0, x) = a \sin kx$ ,  $\partial\varphi(x, 0)/\partial t = -\omega a \cos kx$ . В фиксированный момент времени  $t$  величина  $\varphi(x, t)$  изменяется по  $x$  синусоидально (см. рис. 9.1). Легко видеть, что для любого момента времени  $t$  точки  $x = (4n + 1)\pi/(2k) + vt$  ( $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) соответствуют гребням волны (т.е. максимальным значениям  $\varphi$ ), а точки  $x = (4n + 3)\pi/(2k) + vt$  — впадинам волны (т.е. минимальным значениям  $\varphi$ ). Расстояние между двумя последовательными гребнями или впадинами называется длиной волны и обозначается через  $\lambda$ :

$$\lambda = [(4n + 5)(\pi/2k) + vt] - [(4n + 1)(\pi/2k) + vt] = 2\pi/k.$$

Из последней формулы видно, что, так называемое, волновое число  $k$  определяет число волн, укладывающихся на отрезок единичной длины, где в данном случае за единицу длины принято  $2\pi$ . В фиксированной точке с абсциссой, например, равной  $x_1$ , функция  $\varphi$  колеблется во времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  — угловая частота волн. Последняя определяет число волн, прошедших через данную точку в единицу времени, за которую принято  $2\pi$ . Если теперь взять  $F_1(x - vt) = a \sin(kx - \omega t)$ ,  $F_2(x + vt) = a \sin(kx + \omega t)$ , то

$$\varphi(x, t) = 2a \cos \omega t \sin kx, \quad (9.6)$$

т. е. можно изучить поведение  $\varphi$  с изменением  $t$  и  $x$  независимо друг от друга.

Такой выбор  $F_1$  и  $F_2$  соответствует, очевидно, следующим начальным условиям для функции  $\varphi$ :

$$\varphi(x, 0) = 2a \sin kx, \quad \frac{\partial\varphi(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Точки  $x = n\pi/k$  называют узлами волны; в них  $\varphi = 0$  все время. В точках  $x = (2n + 1)\pi/(2k)$  функция  $\varphi$  максимальна; их называют пучностями волны. Решение (9.6) — результат суперпозиции двух синусоидальных бегущих волн одинаковой амплитуды, длины волны и частоты,

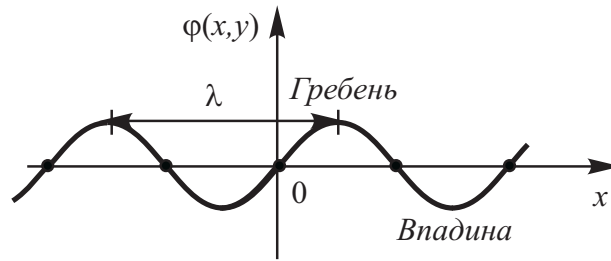


Рис. 9.1. Зависимость  $\varphi(x, t)$  от  $x$  в фиксированный момент времени  $t$ . Термины гребень и впадина отражают геометрическую форму графика функции  $\varphi$ . Все точки с разностью абсцисс, кратной  $\lambda$ , находятся в одинаковой фазе.

распространяющихся навстречу друг другу. Во всех точках  $x$  (за исключением узлов) функция  $\varphi$  колеблется с периодом  $T$ . Амплитуда функции  $\varphi$  равна  $2a$ , т.е. сумме амплитуд составляющих волновых компонент  $F_1$  и  $F_2$ . Переноса энергии и количества движения между участками волны, разделенными узлами, нет, поэтому волна, описываемая формулой (9.6) называется стоячей. Для такой волны узлы и пучности характерны.

Выше для напоминания волновых терминов использовалось уравнение частного вида — стандартное линейное волновое уравнение уравнение (9.3). Обратимся теперь к общему линейному уравнению в частных производных от двух независимых переменных  $x$  и  $t$ , которые представим в виде:

$$\mathcal{L}[\varphi] = 0, \quad (9.7)$$

где  $\mathcal{L}$  —линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами<sup>5</sup>. Если заданы начальные условия

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \dots, \quad (9.8)$$

то с помощью преобразования Лапласа по времени уравнение (9.7) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению от переменной  $x$  при допущении, что функции  $\varphi_i(x)$  достаточно гладкие. Будем искать

<sup>5</sup>Будем следовать в изложении монографии [14].

решение уравнения (9.7) в следующем виде:

$$\varphi(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (9.9)$$

предположив, что это уравнение однородное и независимые переменные  $x$  и  $t$  в него явно не входят. Такой вид решения представляется разумным, поскольку в силу линейности уравнения (9.7) его общее решение можно построить в виде суперпозиции различных Фурье — компонент. Тогда  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik$ , и все производные по  $t$  и  $x$  исключаются. В результате вместо уравнения (9.7) приходим к некоторому алгебраическому соотношению

$$\mathcal{D}(\omega, k, A_i) = 0, \quad (9.10)$$

где  $A_i$  — параметры, фигурирующие в уравнении (9.7). Соотношение (9.10) называется дисперсионным уравнением, которое формально можно переписать в виде:

$$\omega = \omega(k, A_i). \quad (9.11)$$

В такой записи оно определяет частоту волны  $\omega$  в зависимости от волнового числа и параметров  $A_i$ . Число корней уравнения (9.11) зависит от степени  $n$  этого алгебраического уравнения относительно  $\omega$ . Заметим, что в дисперсионном уравнении не известны ни  $k$ , ни  $\omega$ , а известна лишь их связь<sup>6</sup>. Если  $k$  задано, то не известна только  $\omega$ , и уравнение (9.11) называют характеристическим (оно определяет собственные колебания системы). Опуская зависимость  $\omega$  от  $A_i$ , рассмотрим произвольный корень уравнения (9.11)

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (9.12)$$

Тогда соответствующая Фурье — компонента выражается в виде

$$\varphi(x, t) \sim e^{i[kx - \omega(\mathbf{k})t]},$$

так что временная эволюция  $\varphi(x, t)$  полностью определяется свойствами величины  $\omega(\mathbf{k})$ .

Проанализируем три следующих случая.

- 1) Если  $\omega(\mathbf{k})$  вещественная величина, то  $\varphi(x, t)$  есть гармоническая бегущая волна.

---

<sup>6</sup>Частота может быть задана, и тогда (9.11) превращается в дисперсионное уравнение относительно  $k$ . В этом случае речь идет о нормальных (собственных) волнах системы.

2) Если  $\omega(\mathbf{k}) = i\omega_2(k)$  чисто мнимая величина, то

$$\varphi(x, t) \sim e^{ikx} e^{\omega_2(k)t},$$

что соответствует нераспространяющейся стоячей волне.

В случае, когда  $\text{Im}[\omega(\mathbf{k})] > 0$ , функция  $\varphi$  с ростом  $t$  экспоненциально возрастает, когда  $\text{Im}[\omega(\mathbf{k})] < 0$  эта функция экспоненциально затухает с ростом  $t$ . Первый случай соответствует неограниченному росту начального возмущения в системе (говорят, что волна в системе нарастающая или усиливающаяся). Такую систему называют нестабильной относительно данной собственной волны. Во втором случае система стабильна; волна называется спадающей или затухающей.

3) Если  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_1(k) + i\omega_2(k)$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вещественны, то

$$\varphi(x, t) \sim e^{i[kx - \omega_1 t]} e^{\omega_2(k)t},$$

При  $\omega_2 = \text{Im}(\omega) < 0$  приходим к гармонической волне с экспоненциально убывающей со временем амплитудой (система стабильна). Если  $\omega_2 = \text{Im}(\omega) > 0$ , то получаем гармоническую волну с нарастающей во времени амплитудой (система нестабильна относительно рассматриваемой собственной волны).

Легко понять, что дисперсионное уравнение важно при рассмотрении отклика системы на возмущение, которое в начальный момент предполагается бесконечно малым.

Дисперсионное уравнение позволяет по-другому классифицировать волны (см., например [14]).

Пусть уравнение (9.12) определяет вещественные  $\omega$  для каждого  $k$  ( $0 \leq k < \infty$ ). Тогда, если  $d^2\omega/dk^2 \neq 0$ , то говорят, что волна диспергирующая; если  $d^2\omega/dk^2 = 0$ , то говорят, что такая волна не диспергирующая. Данная классификация позволяет ввести новую характеристику волнового движения, называемую групповой скоростью, как

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (9.13)$$

При наличии в системе механизма диссипации амплитуда волны будет затухать со временем, как было показано выше ( $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ ,  $\omega_2 = \text{Im}(\omega) < 0$ ). Такие волны иногда называют диссипирующими. Если  $\omega$  — действительная величина, то волны называют недиссипирующими.

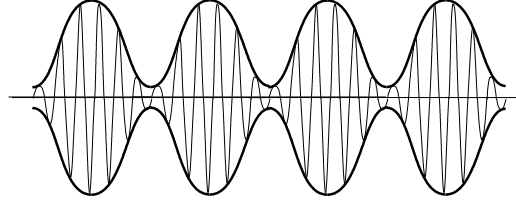


Рис. 9.2. Графическая интерпретация возникновения групп (биений) при сложении двух гармонических бегущих волн.

Каков физический смысл понятия групповой скорости? Для предварительного ответа на этот вопрос рассмотрим суперпозицию двух гармонических бегущих волн, немного отличающихся по частоте и волновым числам, но имеющих одинаковые амплитуды:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, t) &= a \cos(kx - \omega t), \\ \varphi_2(x, t) &= a \cos\{(k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t\},\end{aligned}$$

где  $\delta k$  и  $\delta \omega$  малы. Сложив  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получим известное выражение для биений двух волн, которое имеет вид:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = [2a \cos\{\frac{1}{2}(x\delta k - t\delta \omega)\}] \cos\{(k + \delta k/2)x - (\omega + \delta \omega/2)t\}.$$

Выражение в квадратных скобках есть суммарная амплитуда волны биений, которая медленно меняется с периодом  $4\pi/\delta \omega$  и характеризуется длиной волны  $4\pi/\delta k$ , определяемой как пространственный интервал между смежными пучностями. Величина  $\varphi$  теперь колеблется во времени с частотой  $(\omega + \delta \omega/2)$ , немного отличающейся от  $\omega$  и имеет длину волны, незначительно отличающуюся от  $\lambda = 2\pi/k$ .

Напомним, что  $\delta \omega$  и  $\delta k$  малы, поэтому период и длина волны биений велики. Результатом такого интерференционного процесса при сложении двух волн появляется ряд периодически повторяющихся групп, представленных на рис. 9.2 (такое повторение имеет место как по времени, так и по пространственным осям). Каждая группа состоит из нескольких волн. Поверхность, на которой амплитуда группы остается постоянной, определяется уравнением

$$x\delta k - t\delta \omega = \text{const},$$

откуда следует, что сами группы распространяются со скоростью  $dx/dt = \delta \omega/\delta k = d\omega/dk$  при  $\delta k \rightarrow 0$ . Таким образом

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Приращение частоты волны в группе}}{\text{Приращение волнового числа в группе}}.$$

Напомним, что по определению фазовая скорость  $v_\phi = \omega/k$ . Поскольку и  $v_\phi$ , и  $v_{gr}$  зависят от  $k$ , то понятно, что в случае, когда  $d^2\omega/dk^2 \neq 0$ , групповая скорость отличается от фазовой. При этом волны различной длины распространяются с различными групповыми скоростями. Как влияет дисперсия в системе на распространение возмущения, возникающего вблизи  $x = 0$  в момент  $t = 0$  и представляющего собой суперпозицию ряда гармонических волн различной длины?

Поскольку компоненты возмущения с различными волновыми числами распространяются с различными скоростями, начальное возмущение через некоторое время растянется на некоторый пространственный интервал, который будет расти со временем. В этом случае имеем дело с диспергирующей волной. Если  $d^2\omega/dk^2 = 0$ , то волна не диспергирующая и  $v_\phi = v_{gr}$ .

**§ 4. С чем связано существование дисперсии в среде? Постранственная и временная дисперсия (существование в среде собственных пространственных и временных масштабов; нелокальная связь физических величин; зависимость диэлектрической проницаемости от частоты и волнового числа)**

Обсудим подробнее смысл допущений, сделанных при выводе уравнения (9.2). Во-первых, функция  $\varphi_n(t)$  была определена в дискретных точках оси  $x$ , мы же заменили ее непрерывной. Во-вторых, мы разложили функцию  $\varphi(x, t)$  в ряд и отбросили высшие члены разложения (в этом неточность уравнения (9.2)). Кроме того, проделывая эти операции, мы не определили точно, по сравнению с чем  $a$  мало. Когда же справедливы сделанные допущения? Получим дисперсионное уравнение для (9.2). Подставляя  $\varphi(x, t) \sim \exp(i\omega t - ikx)$  в уравнение (9.2), имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2, \quad (9.14)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma_1}{m}(ka)^2. \quad (9.15)$$

Легко видеть, что уравнение (9.15) получается из, если  $\sin^2(ka/2) \approx (ka)^2/4$ , т.е. при  $ka \ll 1$ . Итак, когда мы говорим о малости  $a$  по сравнению с характерным пространственным периодом волнового движения, мы говорим о малости  $ka$ , и, следовательно, о малости  $a$  по сравнению с длиной волны, поскольку  $k = 2\pi/\lambda$  ( $ka \ll 1$  или  $a \ll \lambda$ ). Для достаточно длинных волн наши допущения справедливы, и цепочку маятников

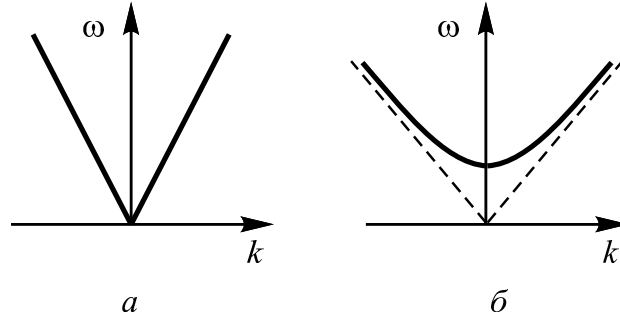


Рис. 9.3. Дисперсионные кривые для сред с линейной дисперсией (а), и с дисперсией, описываемой уравнением (9.15) (б)

можно рассматривать как среду, описываемую уравнением Клейна — Гордона. Однако все допущения нарушаются, когда  $\lambda \approx a$ , т.е. длина волны в структуре соизмерима с ее периодом. Таким образом, преобразования дисперсионных уравнений главы 8 для цепочек из одинаковых частиц при условии  $ka \ll 1$  означают переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде.

Напомним, что уравнение (9.3) получается из (9.2), если устремить  $\omega_0$  к нулю. Тогда дисперсионное уравнение, соответствующее (9.3), имеет вид

$$\omega = \pm vk, \quad (9.16)$$

где  $v$  — фазовая скорость волны. Для анализируемой модели фазовая скорость волны  $v = \sqrt{\gamma_1/m}$ , откуда

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} ka. \quad (9.17)$$

Это уравнение совпадает с (8.89) для цепочки из равноудаленных частиц при  $ka \ll 1$ , если положить в последнем  $m = M$ , а сдвиг фазы колебаний между маятниками приравнять  $ka$ . Физически это ясно, так как при  $\omega_0 = \sqrt{g/l} \rightarrow 0$  для маятника необходимо, чтобы  $l \rightarrow \infty$ , это значит, что длина маятника становится такой большой, что уже не влияет на его колебание, а это и есть цепочка шариков, соединенных пружинками (но  $ka \ll 1$ !).

Если в дисперсионном уравнении между  $\omega$  и  $k$  зависимость линейная, т.е. справедливо (9.16), то говорят, что в данном случае среда без



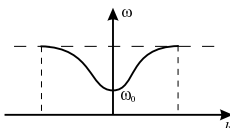
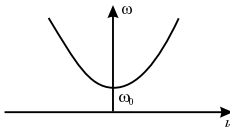
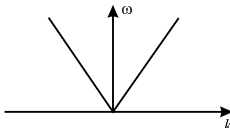
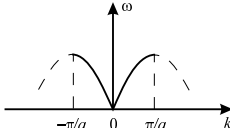
дисперсии. В этом случае фазовая скорость, определяемая как  $\omega/k$ , будет постоянной и не зависящей от частоты (рис. 9.3,а). В частности, при  $ka \ll 1$  цепочка атомов — шариков в одномерной решетке ведет себя как струна, описываемая волновым уравнением. В этом случае речь идет о распространении упругих волн в сплошной среде со скоростью  $v$ , равной скорости звука. Из уравнения (9.15) при  $\omega$ , немного больших  $\omega_0$ , следует, что дисперсионная кривая имеет вид параболы:

$$\omega \approx \omega_0 + AK^2, \quad \text{если} \quad A = \gamma_1 a^2 / (2m\omega_0) \ll 1, \quad (9.18)$$

т. е. вблизи  $\omega_0$  дисперсия проявляется. В то же время интересно, что при достаточно больших  $\omega$  дисперсии не будет (линейная зависимость  $\omega(\mathbf{k})$ ). Попробуем систематизировать полученные нами результаты, чтобы понять, с чем связано существование дисперсии в среде.

Вернемся к уравнению Клейна — Гордона, которое описывает распространение одномерных волн в среде с дисперсией, в частности в цепочке маятников с собственными частотами  $\omega_0$ , расположенных на расстояниях  $a \ll \lambda$  (дисперсионная кривая — сплошная кривая на рис. 9.3,б). Мы уже говорили, что при  $\omega_0 \rightarrow 0$  дисперсия исчезает: длина нитей маятников так велика, что у них нет собственного периода колебаний, цепочка превращается в данном случае в упругую струну. Дисперсия исчезла, когда исчез собственный временной масштаб, характеризующий среду. Когда каждый маятник имеет собственный период  $T = 2\pi/\omega_0$ , “среда” из маятников не будет воспринимать частоту меньше собственной. На этой критической частоте все маятники будут колебаться синфазно: волн нет, существуют только колебания. Если теперь обратиться к уравнению (8.71), в котором соотношение между  $a$  и  $\lambda$  может быть любым (напомним, что в этом уравнении  $\psi = 2\pi\lambda/a$ ), то нетрудно видеть, что дисперсия в системе сохраняется даже при  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Действительно, в этом случае мы приходим к цепочке из шариков, связанных пружинками. В этой среде дисперсия существенна, пока  $a$  не мало по сравнению с  $\lambda$ . Таким образом, в “решетке” из шариков дисперсия определяется собственным пространственным масштабом — периодом “решетки”. Что касается цепочки из связанных маятников, когда  $\omega_0 \neq 0$  и расстояние  $a$  сравнимо с  $\lambda$ , то дисперсия определяется и временным и пространственным масштабами. Аналогично характеризуется дисперсия и, например, для цепочки из магнитных стрелок, где наряду с периодом  $a$  фигурирует частота  $\omega_H$ , связанная с существованием внешнего магнитного поля. Таким образом можно сказать, что существование дисперсии в среде связано с наличием в ней собственных, независимых от параметров волны пространственных или

Таблица 9.1.

Дисперсионное уравнение	$\omega$ - $k$ диаграмма	Существует ли дисперсия?
$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4\gamma_1}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ Система связанных маятников		Дисперсия есть, поскольку существуют и временной и пространственный собственные масштабы ( $2\pi/\omega_0$ и $a$ )
$ka \ll 1, \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma_1}{m}(ka)^2$ Сплошная среда, описываемая уравнением Клейна-Гордона		Дисперсия есть, так как существует собственный временной масштаб $2\pi/\omega_0$
$ka \ll 1, \omega_0 \rightarrow 0,$ $\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} ka$ Сплошная среда, описываемая волновым уравнением		Дисперсии нет, поскольку исчезли собственные временной и пространственной масштабы
$\omega_0 \rightarrow 0, \omega^2 = \frac{4\gamma_1}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ Система связанных одинаковых шариков		Дисперсия есть, так как существует собственный пространственный масштаб $a$

временных масштабов. Описанные выше результаты для цепочки связанных маятников сведены в таблицу § 4.

Если в среде нет никаких характерных пространственных или временных масштабов (как, например, при распространении звука в воде или электромагнитных волн в вакууме), т.е. нет характерных частот или периодов, то распространяющаяся несинусоидальная волна искажаться не будет. Дисперсия в этом случае отсутствует.

Если, например, в воду “напустить” пузырьков, т.е. ввести некий пространственный масштаб  $a$  — расстояние между пузырьками или размер пузырьков, то для волны  $\lambda \gg a$ , искажений при распространении не будет, если же  $\lambda \sim a$ , то волна искажается, в системе есть дисперсия. В кристалле, скажем, волна низкой частоты (длина волны много больше расстояния между ионами) распространяется без искажений, а для высоких частот уже имеет значение расстояние между ионами — дискретность “среды”.

Дисперсия, связанная с наличием в среде временных масштабов, обычно называется временной, а с наличием пространственных масштабов — пространственной. Заметим, что такая классификация удобна лишь в электродинамике, где можно говорить отдельно об уравнениях среды и поля. На формальном языке уравнений дисперсия — это нелокальная за-

висимость между различными физическими переменными во времени и пространстве. Так, в электродинамике сплошных сред пространственная дисперсия связана с тем, что электрическая индукция  $\mathbf{D}$  в данной точке пространства определяется значением напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности, т.е.  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  связаны нелокально в пространстве:

$$\mathbf{D}_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}),$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор комплексной диэлектрической проницаемости [15].

Формально можно ввести следующие определения: в электродинамике сплошных сред среда имеет пространственную дисперсию, если ее диэлектрическая проницаемость зависит от волнового вектора; если же проницаемость зависит от частоты, то мы имеем дело с частотной, или временной дисперсией.

Последняя связана также с нелокальностью связи  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  во времени, причем временная дисперсия обычно велика, поскольку собственные частоты среды попадают в рассматриваемый интервал частот [15]. Пространственную дисперсию следует принимать во внимание, например, в физике изотропной плазмы, когда длина волны соизмерима с радиусом Дебая, в теории проводящих сред при учете соударений, когда длина свободного пробега порядка длины волны.

В кристаллооптике пространственная дисперсия приводит к качественно новым эффектам таким, как естественная оптическая активность (гиротропия), оптическая анизотропия кубических кристаллов [15, 16]. Укажем еще, что в плазме, например, групповая скорость продольных волн становится отличной от нуля также из-за пространственной дисперсии (мы вернемся к этому вопросу в дальнейшем).

Следует также подчеркнуть, что, хотя пространственная дисперсия — результат существования собственного пространственного масштаба в среде, т.е. результат дискретности “среды”, ее учет можно провести и в рамках модели сплошной среды, если феноменологически найти соотношения между физическими переменными, учитывающие нелокальность их связи в пространстве. Таким образом, чтобы учесть пространственную дисперсию, нужно правильно построить модель среды.

Рассмотрим в качестве примера распространение электромагнитной волны в длинной линии, изображенной на рис. 9.4 (см. задачу 4.23 в [17]).

Если связь между ячейками отсутствует, то справедливы телеграфные уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L \frac{\partial I}{\partial t},$$

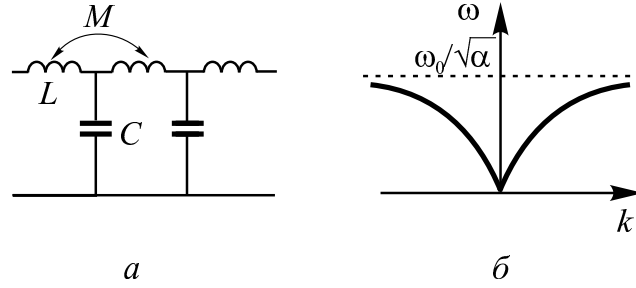


Рис. 9.4. Длинная линия с индуктивной связью  $M$  между ячейками и соответствующая дисперсионная характеристика

которые легко преобразуются в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0,$$

так что в анализируемой модели цепочки дисперсии нет. Однако при наличии индуктивной связи между ячейками зависимость между магнитным потоком  $\Phi$  и током  $I$  выражается материальным уравнением  $\Phi = LI - M \partial^2 I / \partial x^2$ , из которого следует нелокальная связь между этими величинами (наличие пространственной производной от тока). Тогда

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = M \frac{\partial^4 I}{\partial t^2 \partial x^2},$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 k^2 / (1 + \alpha k^2), \quad (9.19)$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $\alpha = M/L$ . (Обратите внимание, что  $k$  в формуле (9.19) — безразмерная величина, так как в цепочке мы всё считаем не на единицу длины, а на ячейку; величины  $L$  и  $C$  измеряются соответственно в генри и фарадах на ячейку; чтобы перейти к размерной величине, надо умножить  $k$  на размер ячейки  $a$  в соответствующих единицах длины). Если  $\alpha \ll 1$ , то, сохраняя члены первого порядка малости по  $\alpha$ , из (9.19) получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 k^2 (1 - \alpha k^2). \quad (9.20)$$

Сопоставим полученный результат с соответствующим для одномерной цепочки из одинаковых шариков, т.е. с дисперсионным уравнением  $\omega^2 = 4\gamma_1/m \sin^2(ka/2)$ . Положим  $ka$  малым и разложим  $\sin^2(ka/2)$  в ряд,

ограничиваясь членами порядка  $(ka)^4$ ; тогда

$$\omega^2 = \frac{\gamma_1}{m}(ka)^2 \left[ 1 - \frac{(ka)^2}{12} \right]. \quad (9.21)$$

Так как в уравнении (9.20)  $k$  — величина безразмерная, то обозначая  $ka$  через  $k$  и полагая  $\omega_0 = \gamma_1/m$ ,  $\alpha = 1/12$ , приходим от уравнения (9.21) к уравнению (9.20).

Таким образом, оба подхода — и дискретный, и феноменологический учет нелокальности связи между физическими величинами — приводят к правильному описанию пространственной дисперсии. Пространственная дисперсия проявляется и вблизи частоты  $\omega_0$  (см. рис. 9.3,б и формулу (9.18)). В уравнении (9.19) знак  $\alpha$  быть любым. Тогда если  $\omega^2 = \omega_0^2 k^2 / (1 - \alpha k^2)$ , то при  $\alpha \sim k^{-2}$  фазовая скорость волны  $v_\phi = \omega/k \rightarrow \infty$  и групповая скорость (скорость переноса энергии в среде без потерь)  $v_{gr} = d\omega/dk \rightarrow \infty$ . Следовательно информация от одной точки к другой передается мгновенно. Подумайте, с какими идеализациями модели связан возникший парадокс.

## § 5. О квазичастицах

Основываясь на дуализме волн и частиц, можно ввести кванты энергии полей в макроскопических телах — квазичастицы. Поясним эту аналогию на примере цепочки из одинаковых шариков, связанных пружинами, для которой  $\omega = 2\sqrt{\gamma_1/m} \sin(ka/2)$ . Исходя из квантовых представлений, гамильтониан для такой цепочки имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum \hbar \omega_k (a_k^+ a_k + 1/2), \quad (9.22)$$

где  $a_k^+ a_k = N_k$  — оператор числа бозонов в состоянии  $k$ , а сумма берется по всем допустимым значениям вектора  $\mathbf{k}$ . Эти значения  $k$  обычно определяются из периодических условий  $q_{i+M} = q_i$  для координаты (условие замкнутости цепочки;  $M$  — число частиц в цепочке). Тогда допустимые значения вектора суть  $k = 2\pi n/(Ma)$ , где  $n$  — любое целое число между  $-M/2 + 1$  и  $M/2$ . В выражении (9.22)

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} \sin(\pi n/M), \quad (9.23)$$

т. е. полученная из квантовых соображений формула в точности совпадает с соответствующей формулой классической теории.

Собственные значения энергии равны

$$\mathcal{E} = \sum_k \hbar \omega_k (n_k + 1/2), \quad (9.24)$$

где  $k$  пробегает все значения из  $M$  положительных чисел.

Итак, поведение одномерной цепочки из одинаковых частиц можно представить набором нормальных колебаний, каждое из которых соответствует своему гармоническому осциллятору. Таким образом, каждому нормальному колебанию соответствует определенное волновое число  $k$  и определенная собственная частота  $\omega_k$ , а энергетическое состояние осциллятора задается квантовым числом его нормального колебания. Уже одно то, что энергия нормального колебания с частотой  $\omega_k$  принимает значения, выражающиеся целыми числами, умноженными на  $\hbar \omega_k$  (если отсчитывать не от нуля, а от основного уровня энергии  $\hbar \omega_k/2$ ), наводит на мысль о квантовой структуре процесса. Получающиеся кванты и называют квазичастицами. Одновременно могут возбуждаться и несколько нормальных колебаний, что соответствует присутствию в системе нескольких квазичастиц.

В рассматриваемом нами случае простейшей модели твердого тела (в одномерной цепочке из одинаковых частиц) происходят упругие колебания атомов в кристаллической цепочке.

В кристалле существуют различные типы упругих волн, которые в первую очередь различаются законом дисперсии. Простейшие из них — акустические волны. Им соответствует при малых  $ka$  ( $a \ll L$ ) дисперсионное уравнение (9.17), которое удобно переписать в виде  $\omega_k = vk$ , где  $v = \sqrt{\gamma_1 a^2/m}$  имеет смысл скорости звука. С квантовой точки зрения, как мы видели, энергия и импульс, связанные с каждой нормальной волной, принимают только дискретные значения, пропорциональные  $\varepsilon = \hbar \omega_k$  и  $p = \hbar k$ . Каждую такую волну можно рассматривать как квазичастицу с импульсом  $p$  (при столкновении в квазичастиц кристаллах квазиимпульс не сохраняется) и энергией  $\varepsilon$ . Эти квазичастицы называют фононами — квантами звука. Из сказанного следует закон дисперсии для длинноволновых фононов:  $\varepsilon = vp$ . В квантовой теории поля, решая классические уравнения движения системы, находят нормальные колебания, а потом называют каждое из них квантовым осциллятором с собственными значениями энергии  $\mathcal{E} = \hbar \omega(n + 1/2)$  [18, 19]. Квантовые нормальные колебания (квазичастицы) имеют разные названия.

Мы уже говорили о фононах, но, пожалуй, самая известная квазичастица — фотон: квант в теории электромагнитного поля с энергией  $\varepsilon = \hbar \omega$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Волны в системе электронных

спинов, связанных между собой обменными силами, называются спинowymi, а соответствующие им квазичастицы называют магнонами. Коллективные плазменные колебания электронного газа в металлах, связанные с кулоновскими силами, часто называют плазмонами. В полупроводниках существуют нейтральные квазичастицы — экситоны. Об упомянутых квазичастицах и многих других (поляронах, флуктуонах и т.п.) можно прочесть в книге [20].

В заключение этого раздела кратко напомним основные отличия бозонов и фермионов (в формуле (9.22)  $N_k$  — оператор числа бозонов в состоянии  $k$ ).

Бозон — частица, обладающая внутренним угловым моментом, или спином, который характеризуется целочисленными значениями спинового квантового числа, включая нуль. Примерами бозонов могут служить  $\alpha$  — частица, атом гелия, фотон. Бозоны не подчиняются принципу запрета Паули, и в одном квантовом состоянии может находиться любое число бозонов. Они подчиняются общему принципу Паули (принцип неразличимости одинаковых частиц), который требует, чтобы волновая функция была симметричной по отношению к перестановке любой пары одинаковых бозонов. Поскольку одно состояние могут занимать много бозонов, при низких температурах возникают такие специфические явления, как сверхтекучесть и сверхпроводимость (когда пары электронов ведут себя как бозоны). Работа лазеров возможна именно потому, что фотон является бозоном, так как интенсивный монохроматический пучок света состоит из большого числа фотонов в одном и том же состоянии.

Фермион — частица, обладающая собственным спиновым угловым моментом, характеризуемым полуцелым спиновым квантовым числом. Примерами фермионов являются электрон, протон, нейтрон, нейтрино. Фермионы подчиняются принципу запрета Паули: в одном квантовом состоянии может находиться не более одного фермиона.

## ГЛАВА 10

### Волны в распределенных системах с границами

*Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров. Струна с закрепленными концами. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем.*

#### § 1. Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров

До сих пор мы рассматривали безграничные среды. Обратимся теперь к распределенным системам с границами. Начнем с рассмотрения поведения продольной волны на границе двух сред. Пусть плоскость  $x = 0$  (рис. 10.1) — граница раздела двух сред, обладающих различными свойствами. Если речь идет, например, о различии упругих свойств, то это жидкость и металл, жидкость и газ (в этом случае плоскость раздела на рисунке должна быть горизонтальной) и т.п. Пусть слева к границе приходит бегущая волна

$$\varphi = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (10.1)$$

где  $k = \omega/v_1$ ,  $v_1$  — фазовая скорость волны слева от границы. Далее будем отмечать индексом 1 величины, относящиеся к среде, расположенной слева от границы, а индексом 2 — справа от границы. Что же происходит на границе? Ответ можно получить, исходя из физических условий на границе, которые будут отличаться для волн разной природы. Однако, поскольку волновые процессы описываются уравнением (9.3) — уравнением в частных производных второго порядка — граничные условия должны быть наложены на величины  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial x$ . Если граница не одна (например, струна, закрепленная на концах), то условия на функцию  $\varphi(x, t)$  следует задать на обоих концах. Для струны длины  $l$ , закрепленной на концах  $\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = 0$ . Очевидно, что в общем случае на границе возникают отраженная и проходящая волны.

Для определенности рассмотрим явления отражения и прохождения волны на границе раздела двух упругих сред с разными характеристиками. С этой целью рассмотрим бегущую вдоль натянутой струны волну



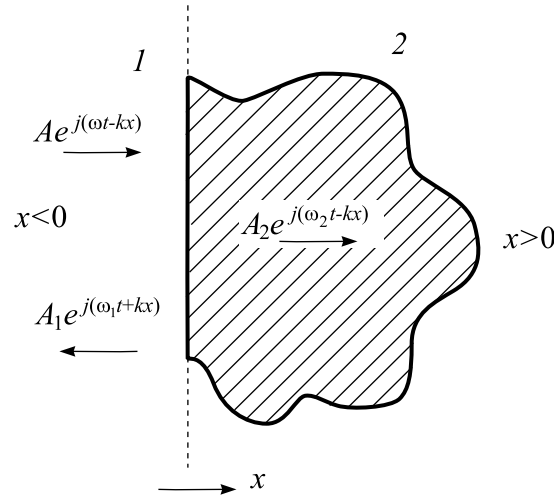


Рис. 10.1. Схематическое изображение границы двух сред и направлений распространения падающей, отраженной и преломленной волны ( $k_1 = \omega_1/v_1$ ;  $k_2 = \omega_2/v_2$ ).

вида (10.1), которая наталкивается на скачкообразное изменение плотности струны (рис. 10.1 соответствует этой ситуации).

Рассмотрим вертикальное смещение  $y$  малого отрезка однородной струны (рис. 10.2,а). Понятно, что это смещение изменяется со временем  $t$  и зависит от положения той точки струны, за которой мы следим, т. е.  $y = y(x, t)$ . Будем анализировать колебания только в плоскости рис. 10.2,а, и предположим, что вдоль струны существует постоянное напряжение (на самом деле она обладает небольшой растяжимостью), а действие силы тяжести не учитывается. Длина смещенного элемента равна

$$ds = \sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2} dx \quad (10.2)$$

Будем рассматривать отрезок струны малой протяженности и колебания малой амплитуды, т. е. величина  $\partial y / \partial x$  столь мала, что ее квадратом под корнем в формуле (10.2) можно пренебречь по сравнению с единицей. Таким образом  $ds \approx dx$ , а масса элемента струны равна  $\rho ds \approx \rho dx$ , где  $\rho$  — линейная плотность струны. Уравнение движения элемента струны следует из второго закона Ньютона. Какая же сила действует на элемент струны? Из рис. 10.2,а видно, что сила, действующая на элемент  $ds \approx dx$  в положительном направлении оси  $y$  равна  $N \sin(\theta + d\theta) - N \sin \theta$ . Именно эта сила равна произведению массы на  $\rho dx$  на ускорение  $\partial^2 y / \partial t^2$ . Угол  $\theta$

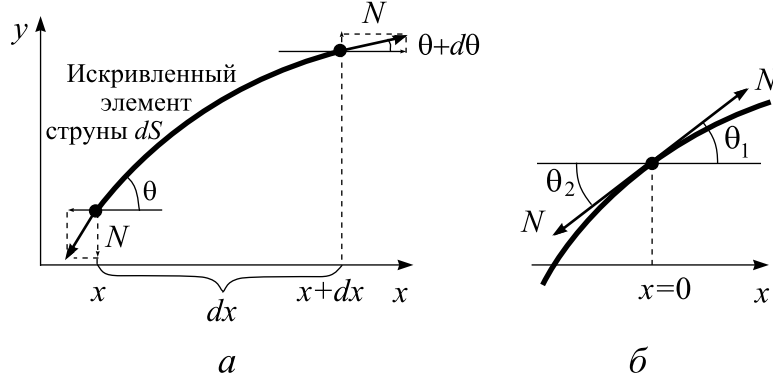


Рис. 10.2. а) Увеличенное изображение смещенного элемента  $ds$  струны. Сила натяжения  $N$  действует в точке  $x$  под углом  $\theta$ , а в точке  $x + dx$  — под углом  $\theta + d\theta$  к оси  $x$ . б) К объяснению второго граничного условия.

по предположению мал, поэтому  $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta = \partial y / \partial x$  и искомая сила

$$N_y = N \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right],$$

где индексы относятся к точке вычисления производной.

Понятно, что в наших приближениях

$$N_y = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Теперь второй закон Ньютона для малого элемента струны имеет вид

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{N}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (10.3)$$

Поскольку  $N/\rho$  имеет размерность квадрата скорости, мы вновь пришли к волновому уравнению (9.3), в котором  $\varphi = y$ , а  $\sqrt{N/\rho} = v$ . Для струны со скачкообразным изменением плотности математическая модель должна включать волновое уравнение для областей  $x < 0$  и  $x > 0$  и условия согласования их решений при  $x = 0$  и то, что слева  $x < 0$  на границу раздела приходит бегущая волна вида (10.1) с волновым числом  $k = \omega/v_1$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>При изложении решения этой задачи будем следовать книге [1]

В соответствии со сказанным, введем  $\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t)$ , при  $x < 0$  и  $\varphi(x, t) = \varphi_2(x, t)$  при  $x > 0$ . Для функций  $\varphi_1(x, t)$  и  $\varphi_2(x, t)$  справедливы уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x < 0), \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(x, t)}{\partial t^2} - v_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x > 0), \quad (10.5)$$

которые следует дополнить условиями на границе. Очевидно, что несмотря на различие плотности при  $x < 0$  и  $x > 0$  в точке  $x = 0$  струна не разрывается, т. е.

$$\varphi_1(x, t)|_{x=0} = \varphi_2(x, t)|_{x=0}. \quad (10.6)$$

В терминологии книги [2] это условие отражает сплошность и непроницаемость среды. Для получения второго условия для первых производных обратимся к рис. 10.2, *b*. На точку  $x = 0$  стыковки частей струны с разной плотностью слева перпендикулярно оси  $x$  действует сила  $(-N \sin \theta_1)$ , а справа — сила  $(+N \sin \theta_2)$ . Обозначения углов и амплитуд волн ясны из рисунка. Точка струны, соответствующая  $x = 0$ , имеет нулевую массу, поэтому силы  $(-N \sin \theta_1)$  и  $(+N \sin \theta_2)$  уравниваются друг друга, т. е.  $\theta_1 = \theta_2$  (в терминологии книги [2] имеет место равенство действия и противодействия). Таким образом, касательные к частям струны слева и справа в точке  $x = 0$  совпадают, что означает выполнения равенства

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (10.7)$$

Мы уже указывали, что из общих физических соображений на границе должна возникнуть отраженная и проходящая волны, поэтому решение можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= A e^{i(\omega t - kx)} + A_1 e^{i(\omega_1 t + k_1 x)}, \\ \varphi_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Подставим соотношения (10.8) в условия на границе (10.6) и (10.7). Тогда

$$\begin{aligned} A e^{i\omega t} + A_1 e^{i\omega_1 t} &= A_2 e^{i\omega_2 t}, \\ -i \frac{\omega}{v_1} e^{i\omega t} + i \frac{\omega_1}{v_1} A_1 e^{i\omega_1 t} &= -i \frac{\omega_2}{v_2} A_2 e^{i\omega_2 t}, \end{aligned}$$

где оба соотношения выполняются при любом  $t$ . Из полученных соотношений следует, что  $\omega = \omega_1 = \omega_2$  (впрочем, это равенство частот очевидно, поскольку условия (10.6) и (10.7) должны выполняться при любом  $t$ ). Учитывая, что  $\omega = \omega_1 = \omega_2$ , получим

$$\begin{aligned} A + A_1 &= A_2, \\ -\frac{\omega}{v_1}A + \frac{\omega}{v_1}A_1 &= -\frac{\omega}{v_2}A_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 - v_1/v_2}{1 + v_1/v_2}A, \\ A_2 &= \frac{2}{1 + v_1/v_2}A, \end{aligned} \tag{10.9}$$

и решения  $\varphi_1(x, t)$  и  $\varphi_2(x, t)$  найдены. На рис. 10.3 представлены зависимости амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  отраженной и прошедшей волн от отношения  $v_1/v_2$ . Из рисунка видно, что для однородной струны, когда  $v_1 = v_2$ , отраженной волны нет, а прошедшая — продолжение падающей. Поскольку  $v = \sqrt{N/\rho}$ , при очень большой плотности  $\rho_2 \rightarrow \infty$  струны во второй ее части ( $x > 0$ )  $v_2 \rightarrow 0$  и  $v_1/v_2 \rightarrow \infty$ . Напротив, при очень малой плотности ( $\rho_2 \rightarrow 0$ )  $v_2 \rightarrow \infty$  и  $v_1/v_2 \rightarrow 0$ . В последнем случае волна отражается с той же амплитудой и фазой, что и падающая, в первом — с той же амплитудой, но противоположной фазой. Амплитуда прошедшей волны, соответственно, либо удваивается, либо равна нулю. Заметим, что этих два предельных случая можно рассматривать как отражения от свободно и закрепленного конца  $x = 0$  струны в области  $x < 0$ : в первом случае падающая волна отражается, лишь изменив направление распространения, во втором еще меняет фазу на противоположную.

## § 2. Струна с закрепленными концами<sup>2</sup>

Если струна закреплена на концах, то в ней можно возбудить стоячие волны. В главе 9 мы рассматривали стоячие волны, которые возникали как суперпозиция двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн одинаковой амплитуды  $Ae^{i(\omega t - kx)}$  и  $Ae^{i(\omega t + kx)}$ . Результат сложения таков:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Ae^{i(\omega t + kx)} = 2Ae^{i\omega t} \cos kx. \tag{10.10}$$

---

<sup>2</sup>Эта задача обсуждается во всех учебниках по уравнениям математической физики. Мы при изложении ориентируемся на книгу [1].

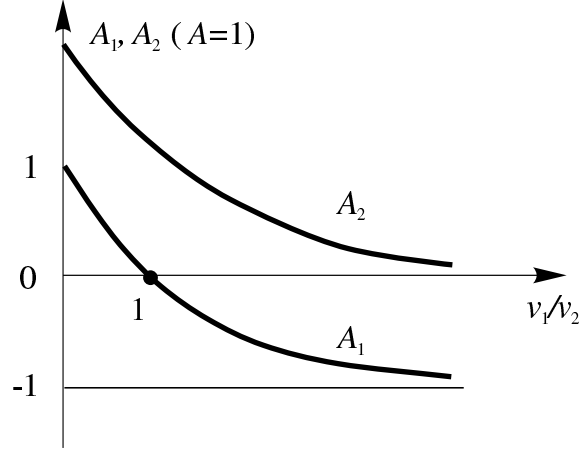


Рис. 10.3. Зависимость амплитуд отраженной ( $A_1$ ) и прошедшей ( $A_2$ ) волн от отношения скоростей  $v_1/v_2$  волн в разных средах [1]

Как видно из формулы (10.10), у получившийся волны колебания в каждой точке  $x$  совершаются с одной и той же частотой  $\omega$ , но с разной амплитудой, зависящей от  $x$  по закону  $2A \cos kx$ . Формула (10.10) наталкивает на мысль, что в общем случае для стоячей волны разумно написать выражение вида:

$$\varphi(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (10.11)$$

где  $X(x)$  — функция только  $x$ ,  $T(t)$  — только  $t$ .

Общая математическая модель поведения струны длины  $l$  с закрепленными концами следующая.

Задано волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (10.12)$$

и начальные и граничные условия на функцию  $\varphi(x, t)$ . Начальные условия имеют вид:

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad (10.13)$$

граничные —

$$\varphi(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \varphi(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (10.14)$$

Задача далее решается методом Фурье разделения переменных. Напомним суть метода. Сначала ищутся решения вида (10.11) уравнения (10.12) при граничном условии (10.14). После этого решение задачи (10.12) – (10.14) ищется в виде суперпозиций полученных решений вида (10.11). Оказывается, что суперпозиция всегда может быть подобрана так, чтобы удовлетворялись начальные условия (10.13). Граничные условия и само волновое уравнение удовлетворяются автоматически, поскольку каждое слагаемое суперпозиции им удовлетворяет.

Подставив соотношение (10.11) в уравнение (10.12), находим, что

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Так как левая часть равенства не зависит от  $x$ , а правая — от  $t$ , то они равны постоянной, которую обозначим  $\alpha$ . Тогда получим пару уравнений

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \alpha T = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{v^2} X = 0. \quad (10.15)$$

Функция  $\varphi(x, t)$ , определяемая соотношением (10.11) должна удовлетворять краевым условиям (10.14), что возможно только при  $\alpha > 0$  в уравнениях (10.15). При  $\alpha > 0$  общее решение уравнений (10.15) имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= A \sin(\sqrt{\alpha} t) + B \cos(\sqrt{\alpha} t), \\ X &= C \sin(\sqrt{\alpha} x / v) + D \cos(\sqrt{\alpha} x / v). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = X(x) \cdot T(t) &= [A \sin(\sqrt{\alpha} t) + B \cos(\sqrt{\alpha} t)] \cdot \\ &\cdot [C \sin(\sqrt{\alpha} x / v) + D \cos(\sqrt{\alpha} x / v)]. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Поскольку решение (10.16) должно удовлетворять краевым условиям (10.14), находим:

$$D = 0, \quad C \sin(\sqrt{\alpha} l / v) = 0 \quad (10.17)$$

Очевидно, что  $C \neq 0$ , так как в противном случае придем к тривиальному нулевому решению, поэтому из соотношений (10.17) получаем, что

$$\sqrt{\alpha} = \frac{\pi n v}{l}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.18)$$

Тогда, окончательно,

$$\varphi_n(x, t) = \left( A_n \sin \frac{\pi n v}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n v}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (10.19)$$

Будем далее искать решение исходной задачи (10.12)-(10.14) в виде бесконечной суммы всех стоячих волн (10.19), что дает:

$$\varphi(x, t) = \sum_n \left( A_n \sin \frac{\pi n v}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n v}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (10.20)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  пока произвольны. Подставляя соотношение (10.20) в начальные условия (10.14), находим:

$$\sum_n B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \Phi(x), \quad \sum_n \frac{\pi n v}{l} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \Psi(x) \quad (10.21)$$

Соотношения (10.21) можно рассматривать как разложения в ряд Фурье функций  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ .

Очевидно, что при  $n \neq m$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = 0,$$

а при  $n = m$  этот интеграл равен  $l/2$ . Учитывая это, умножим каждое из равенств (10.21) на  $\sin(\pi m x/l)$  и проинтегрируем полученное по  $x$  от 0 до  $l$ . Тогда

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x, t) \sin \frac{\pi m}{l} x dx, \\ A_m &= \frac{2}{\pi m v} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Мы получили набор стоячих волн с дискретным спектром длин волн  $\lambda_n = 2l/n$  и соответствующим спектром частот  $\omega_n = \pi n v/l$ . Все точки каждой такой стоячей волны синхронно колеблются с частотой  $\omega_n = \pi n v/l$ , а ее амплитуда гармонически изменяется с координатой  $x$  как  $\sin(\pi n x/l)$ . Частоты  $\omega_n$  — собственные частоты струны, закрепленной на концах, а функции  $\sin(\pi n x/l)$  — собственные формы струны. Наименьшая частота  $\omega_1$  соответствует основному тону, частота  $\omega_2$  — первой гармонике,  $\omega_3$  — второй и т.д. (см. рис 10.4). Таким образом, колебания струны определяются спектром собственных частот и соответствующими им амплитудами (10.22).

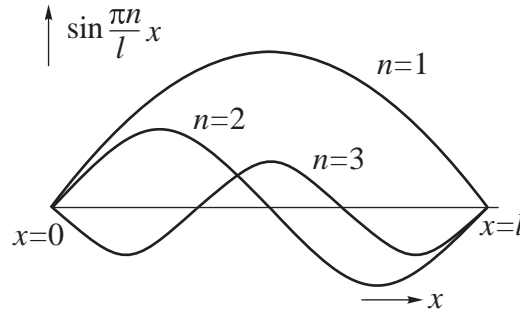


Рис. 10.4. Первые три собственные формы струны, закрепленной на концах.

Рассмотрим, следуя книге [1], колебания рояльной струны, спектр частот которой определяет основной тон звука и его окраску, зависящую от гармоник. При одинаковом основном тоне окраска звука может быть совершенно разной: основной тон определяется длиной, натяжением и плотностью струны, а спектр зависит от того, как возбудили колебания (в частности, для рояля от того, где молоточек ударил по струне)<sup>3</sup>. Попробуем понять, как зависит спектр колебания струны от места ее удара  $x = \xi$ . Это важно, поскольку разница звучаний рояля Бехштейна и Стенвея объясняется прежде всего различием мест удара молоточка по струне.

Для математического описания колебаний в первоначально неподвижной струне, получившей сосредоточенный на очень малой длине удар, передавший ее импульс  $p$ , будем исходить из уравнений и условий (10.12) — (10.14). Следует лишь конкретизировать вид функций  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ .

Если считать удар мгновенным и точечным, то  $\Phi(x) = 0$ , так как при этих условиях за время удара струна не сумеет переместиться. Струне при ударе передается импульс, поэтому

$$\int_0^l \rho \Psi(x) dx = p, \quad (10.23)$$

где  $\rho$  — постоянная плотность струны, а  $\Psi(x)$  — скорость струны после удара в точке  $\xi$ . Будем считать, что удар сосредоточен в исчезающе малой

<sup>3</sup>Заметим, что дело не только в том, каков спектр, но и в том, как колебания превращаются в звук. Этот вопрос здесь не рассматривается.



окрестности  $\varepsilon$ , вне которой скорость  $\Psi(x)$  сразу после удара равна 0. Поэтому условие (10.23) можно записать в виде:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \Psi(x) dx = \frac{p}{\rho} \quad (\varepsilon > 0) \quad (10.24)$$

и  $\Psi(x) = 0$  при  $x \notin [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ .

При неограниченном уменьшении длины отрезка, по которому ударяет молоточек, на нем функция  $\Psi(x)$  неограниченно растет, но все время выполняется условие (10.23).

Итак, функция  $\Phi(x) = 0$ , а функция  $\Psi(x)$  всюду равна нулю, за исключением исчезающе малой окрестности точки  $x = \xi$  и для нее имеет место условие (10.23). С учетом сказанного вычислим по формулам (10.22) амплитуды  $A_m$  и  $B_m$ . Очевидно, что  $B_m = 0$ , а

$$A_m = \frac{2}{\pi m v} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \Psi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx \approx \frac{2p}{\pi m \rho v} \sin \frac{\pi m}{l} \xi, \quad (10.25)$$

где формула тем точнее, чем меньше  $\varepsilon$ .

**Задача 10.1.** Задача. Считая, что  $\Psi(x) = p/\rho \delta(x - \xi)$ , где  $\delta$  — обобщенная  $\delta$  — функция ( $\delta$  — функция Дирака), найдите решение задачи о струне рояля.

Из соотношения (10.25) следует, что максимальная амплитуда колебаний не основной частоте  $\pi v/l$  и на частотах гармоник  $2\pi v/l, 3\pi v/l \dots$  равны, соответственно,  $2p/(\pi \rho v) \sin(\pi \xi/l), p/(\pi \rho v) \sin(2\pi \xi/l), 2p/(3\pi \rho v) \sin(3\pi \xi/l) \dots$ . Распределения стоячих волн вдоль струны для основного тона  $n = 1$  и первых трех гармоник  $n = 2, n = 3$  и  $n = 4$  представлены на рис. 10.5. Как из него следует, основной тон преобладает при ударе по центру струны, но при этом не возбуждаются вторая и четвертая гармоники. Для того, чтобы эффективно возбудились несколько первых гармоник, следует ударить недалеко от концов струны. Более того, чем меньше удаление от точки закрепления 1 струны, тем больше гармоник возбудится. Именно так делается в рояле, и именно этим различаются разные инструменты. Прочитируем по этому поводу книгу [1]. “У Стенвея это расстояние меньше, чем у Бехштейна, и поэтому его “звонче”, но зато звук Бехштейна “бархатнее” и “мягче”. Звук скрипичной струны и фортепианной одного и того же основного тона сильно различаются и это отличие также объясняется различностью представительности гармоник.

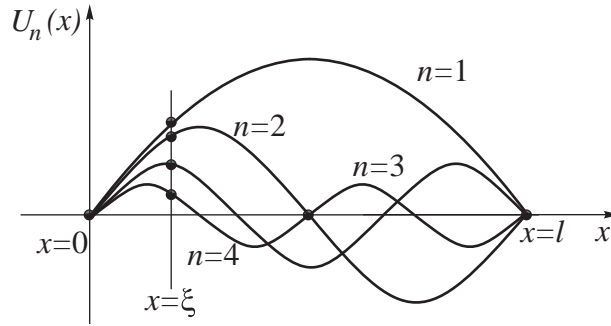


Рис. 10.5. Распределение вдоль струны стоячих волн на частоте основного тона  $n = 1$  и на частотах первых трех гармоник  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4$ .

Наше ухо устроено так, что звук воспринимает его как спектр. Музыкальные звуки до, ре, ми, ... имеют спектр, состоящий из основного тона и гармоник. Музыкальные аккорды имеют спектр, составленный из спектров, входящих в него музыкальных звуков ...

Почему определенные последовательности звуков вызывают у нас такие сильные эмоции, пожалуй, одна из величайших загадок природы. Хотя некоторые необходимые для этого требования известны и составляют предмет теории музыки".

### § 3. Волны в одномерном резонаторе.

#### Резонанс волновых систем

В главе 9 мы обсуждали некоторые свойства общего линейного уравнения в частных производных  $L[\varphi] = 0$ , где  $L$  — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Конкретизируем вид  $L$ , сохранив, однако, определенную общность.

Пусть уравнение, описывающее распространение волн в среде, можно записать следующим образом:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0, \quad (10.26)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — матрицы, а  $u$  — вектор. Будем искать решение (10.26) в виде

$$u = \Psi e^{i(\omega t - kx)}, \quad (10.27)$$

$\Psi(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$  — комплексный вектор (поляризационный вектор), компоненты которого  $\Psi_i$  есть коэффициенты распределения, характеризующие соотношение амплитуд различных физических переменных в гармонической волне.

Подставляя (10.27) в (10.26) приходим к алгебраической системе уравнений для  $\Psi_i$ . Условие существования нетривиального решения этой системы и будет искомым дисперсионным уравнением

$$\det(A\omega - Bk - iC) = D(\omega, k) = 0. \quad (10.28)$$

Пусть уравнение (10.28) имеет решения  $\omega = \omega_s(k)$  и  $k = k_s(\omega)$  где  $s = 1, 2, \dots, n$ . Это означает, что в среде существует  $n$  типов волн, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^n \Psi_s e^{i[\omega_s t - k_s(\omega) x]} + \text{к.с.};$$

к. с. означает комплексно-сопряженную величину. Как и в случае сосредоточенных систем (см. главы 3 и 7), можно перейти к нормальным волнам:

$$a_s(x, t) = \Psi_s e^{i(\omega_s t - k_s x)}.$$

Ввиду отсутствия связи между нормальными волнами они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial a_s}{\partial x} + ik_s a_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (10.29)$$

Такая запись удобна и тогда, когда между волнами появляется слабая связь: в уравнение (10.29) в этом случае необходимо добавить слагаемое  $a$ , с соответствующим коэффициентом связи (связанным волнам мы посвятим далее отдельную главу).

Мы уже указывали, что для распределенных систем дисперсионное уравнение — это уравнение, связывающее две комплексные величины  $\omega$  и  $k$ . Для сосредоточенных же систем имеется характеристическое уравнение, которое дает более полную информацию о системе — спектр ее комплексных собственных частот.

Есть ли аналог подобного уравнения для распределенной системы? На примере струны уже можно положительно ответить на этот вопрос. Попробуем получить ответ в более общем случае, для чего обратимся к системам, в которых предполагается наличие обратной связи (будем называть их резонаторами). В простейшем случае такая обратная связь

осуществляется в кольцевом резонаторе. В кольцевом резонаторе может реализоваться как режим чисто бегущей волны, так и режим суперпозиции встречных волн, частным случаем которого является стоячая волна. Для установления в кольце стоячей волны необходимо подобрать начальные условия. В более общем случае обратная связь, превращающая волновод в резонатор, обязана своим происхождением различного рода неоднородностям — стенкам, зеркалам, на которых бегущая волна достаточно сильно или полностью отражается, передавая энергию встречной волне. Примером могут служить оптический резонатор Фабри — Перо и линия передачи, закороченная или разомкнутая на концах. Решение при этом представляется в виде суперпозиции встречных волн:

$$u(x, t) = \Psi_1 e^{i(\omega t - kx)} + \Psi_2 e^{i(\omega t + kx)}, \quad (10.30)$$

амплитуды которых в простейшем случае идеального отражения концах резонатора должны равняться друг другу по модулю. Например, в случае рассмотренной выше струны, закрепленной на концах,  $u(0, t) = 0$  и  $u(l, t) = 0$  ( $l$  — длина струны). Из (10.30) получаем условие для амплитуд встречных волн  $\Psi_1 = -\Psi_2$  и ограничение на спектр волновых чисел  $\sin kl = 0$ , откуда

$$k_n = \pi n / l, \quad (n — \text{целое}). \quad (10.31)$$

Нетрудно проверить, что в любом одномерном резонаторе с предельным отражением на концах могут реализоваться лишь элементарные решения, удовлетворяющие (10.31), т. е. в резонаторе укладывается целое число полуволн. В кольцевом резонаторе граничными условиями служат условия периодичности для всех переменных. Например, для замкнутой в кольцо линии передачи это  $U, I(x, t) = U, I(x + l, t)$ , откуда следует условие  $\exp(ikl) = 1$ , т. е. спектр

$$k_n = 2\pi n / l. \quad (10.32)$$

Физически это условие совершенно очевидно — в кольцевом резонаторе могут существовать лишь периодические в пространстве волны, которые укладываются в нем целое число раз. Зная дисперсионное уравнение среды, заполняющей резонатор:  $D = (\omega, k) = 0$ , и спектр волновых чисел (10.31) или (10.32), мы можем получить уравнение относительно одной переменной:  $\Delta(\omega) = D(\omega, k_n) = 0$ , определяющее спектр нормальных частот резонатора. Именно это уравнение и есть аналог характеристического уравнения для сосредоточенных систем. Например, в случае среды

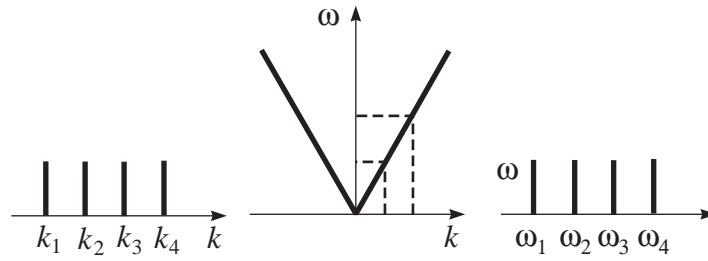


Рис. 10.6. Эквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде без дисперсии.

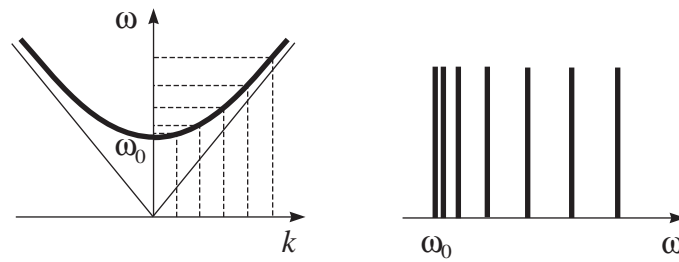


Рис. 10.7. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области низких частот.

без дисперсии при идеальных отражениях на концах  $k_n = \pi n/l$  и  $\omega_n = \pi n/(l\sqrt{LC}) = k_n/\sqrt{LC}$  рис. 10.6. Каким при эквидистантном спектре  $k$  будет спектр  $\omega$ , если среда обладает дисперсией? Качественное поведение спектра, зная дисперсионные характеристики, можно получить с помощью элементарного графического построения, которое ясно из рис. 10.7 и 10.8.

В среде с дисперсией в области низких частот спектр собственных частот начинается с частоты  $\omega_0$  (рис. 10.8,а), сгущается вблизи этой критической частоты; далеко от  $\omega_0$  спектр почти эквидистантный. При стремлении  $\omega$  к  $\omega_0$  спектр становится непрерывный. В среде с дисперсией в области высоких частот картина такая же, но спектр становится редким при приближении к нулевой частоте (рис. 10.8,а). Если имеются две критические частоты, то имеются и две области сгущения спектра.

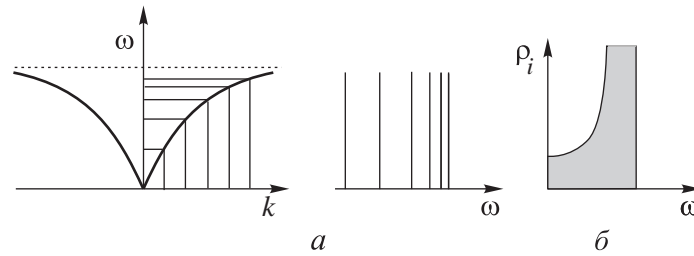


Рис. 10.8. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области высоких частот (а) и плотность числа осцилляторов для низкочастотной ветви (б)

Заметим, что когда речь идет о нахождении собственных частот длинных линий, представленных эквивалентными схемами, с произвольными граничными условиями на концах, то спектр волнового числа  $k_n$  находится из известного характеристического уравнения  $\operatorname{tg} kl = iY(Z_0 + Z_l)/(1 + Z_0 Z_l Y^2)$ , где  $Y$  — характеристическая проводимость длинной линии,  $Z_0$  и  $Z_l$  — нагрузки при  $x = 0$  и  $x = l$  соответственно [3, 4]. Кроме рассмотренных случаев отметим еще один: линия короткозамкнута на одном и разомкнута на другом конце, т. е.  $Z_0 = 0$ ,  $Z_l = \infty$  (или  $Z_0 = \infty$ ,  $Z_l = 0$ ), тогда  $k_n = \pi(2n - 1)/(2l)$ .

Таким образом, если среда, заполняющая резонатор, обладает дисперсией, то даже при эквидистантном спектре  $k$  плотность  $\rho(\omega)$  нормальных мод в различных участках спектра будет различной. Это дает один из способов измерения дисперсионных свойств одномерных сред, особенно ценный, например, при исследовании цепочек линейных полимеров. Допустим, мы смогли равномерно возбудить все степени свободы цепочки, тогда снятый экспериментально спектр ее колебаний будет просто суперпозицией плотностей спектральных распределений, соответствующих различным дисперсионным ветвям. Для каждой ветви плотность спектрального распределения (плотность числа осцилляторов) вводится формулой

$$\rho(\omega)d\omega = \text{const} \cdot dk. \quad (10.33)$$

Здесь учтено, что число мод в интервале  $(k, k + dk)$  для одномерной цепочки не зависит от  $k$ . Для продольных колебаний цепочки из тождественных молекул с точностью до нормирующего множителя из (10.33)

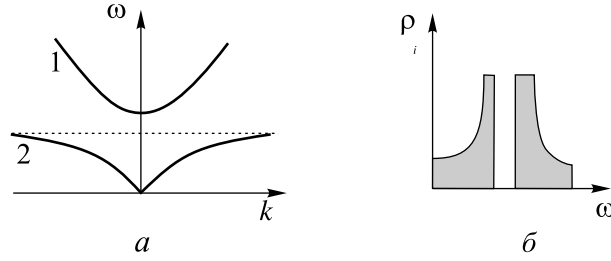


Рис. 10.9. Дисперсия (а) и плотность спектрального распределения (б) в среде с двумя ветвями дисперсионной характеристики: 1 — оптическая ветвь; 2 — акустическая ветвь

мы имеем

$$\rho(\omega) = \text{const} \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} = (2C/a)(\omega_{\text{max}}^2 - \omega^2)^{-1/2}. \quad (10.34)$$

Этот спектр представлен на рис. 10.8. Аналогично нетрудно построить плотность спектрального распределения  $\rho_l(\omega)$  цепочки из чередующихся легких и тяжелых молекул (см. главу 8). Если возбуждены и продольные, и поперечные колебания цепочки, то к спектру  $\rho_l(\omega)$  (см. (10.34)) следует добавить спектр поперечных колебаний, определяемый из дисперсионного уравнения  $\omega(k) = B \sin^2(ka/2)$ . Плотность спектрального распределения частот полного спектра приведена на рис. 10.9 [5].

Упомянем о прямой пространственно — временной аналогии. Рассмотрим распространение бегущей волны

$$\frac{1}{v_\phi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в одномерной среде ( $v_\phi$  — постоянная фазовая скорость волны в среде), на которую воздействует внешняя распределенная сила  $G(x, t) = G(x) \exp(i\omega t)$ . Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} u(x) = G(x) \quad \text{если } u(x, t) = u(x) \exp(i\omega t).$$

Это уравнение удобно переписать в интегральной форме (при условии  $u(0) = 0$ ):

$$u(x) = e^{-i\omega x/v_\phi} \int_0^x G(\zeta) e^{i\omega \zeta/v_\phi} d\zeta, \quad (10.35)$$

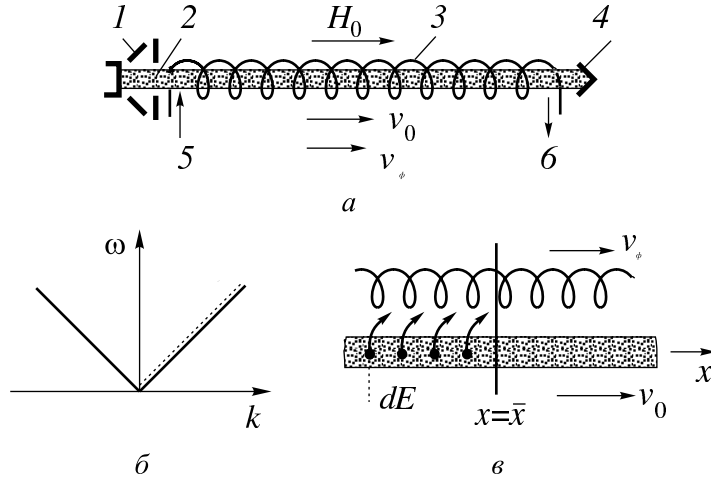


Рис. 10.10. Схема лампы бегущей волны: 1 — электронная пушка; 2 — электронный пучок; 3 — спираль; 4 — коллектор; 5 и 6 — входное и выходное устройства;  $H_0$  — фокусирующее магнитное поле (а); дисперсионные характеристики волны (сплошная линия) и пучка (штриховая линия) для модели  $v_0 \approx v_\phi$  (б) и иллюстрация пространственного резонанса (в сечении  $x = \bar{x}$  поле есть суперпозиция полей, создаваемых каждым элементом возмущенного пучка, расположенным при  $x < \bar{x}$ ; поля складываются в фазе, если  $v_0 \approx v_\phi$  (в)).

где  $\zeta$  — текущая переменная интегрирования.

Полагая, что  $G(x, t) = G(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_{вн})]$ , т. е. внешнее возмущение — волна постоянной амплитуды с частотой  $\omega$ , бегущая с фазовой скоростью  $v_{вн}$ , и интегрируя (10.35), находим

$$u(x, t) = G(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_\phi)] \frac{\exp[i(\omega/v_\phi - \omega/v_{вн})x] - 1}{i(\omega/v_\phi - \omega/v_{вн})}.$$

При  $\omega/v_\phi \approx \omega/v_{вн}$  получаем секулярный рост  $u(x, t)$  вдоль координаты  $x$ :

$$u(x, t) = G(0) x e^{i(\omega t - \omega x/v_\phi)}.$$

В этом, в частности, и проявляется пространственно-временная аналогия — для нарастания гармонической волны в пространстве под действием внешнего поля необходимо совпадение их пространственных периодов,



т. е. резонанс волновых чисел. В действительности здесь есть резонанс и частот, и волновых чисел, что выражается в равенстве фазовой скорости собственной волны в среде фазовой скорости внешней волны. Это условие обычно называют условием синхронизма волн. Если  $v_\phi$  и  $v_{вн}$  различаются сильно, то в системе возникнут пространственные биения (длину волны биений легко определить). В случае, когда в среде может распространяться много волн, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u^{(n)} e^{i(\omega_n t - k_n x)},$$

и внешнее воздействие тоже многоволновое, условий синхронизма будет  $n$ , т. е. будет  $n$  равенств фазовой скорости собственной волны на частоте  $\omega_i$  фазовой скорости внешней волны на той же частоте. Осознание сформулированных нами условий синхронизма позволило в свое время создавать электронные СВЧ — приборы с длительным взаимодействием электронов и волны (наиболее известный из них — лампа с бегущей волной — ЛБВ [6]). Для этих приборов время пролета электронов через пространство взаимодействия много больше периода высокочастотных колебаний поля в отличие от резонансных СВЧ — приборов типа клистронов приборов с кратковременным взаимодействием, о которых мы писали в гл. 5.

Если считать, что  $u(x, t)$  — продольная составляющая электрического поля  $E$  волны в волноведущей системе, а  $G(x, t)$  — волна переменного тока  $I$  в электронном пучке (с точностью до размерного постоянного коэффициента), то уравнение для  $u(x, t)$  есть уравнение возбуждения волновода заданным током [7, 8]:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 K I(x),$$

где  $K$  имеет размерность сопротивления и называется сопротивлением связи. Если прямолинейный электронный пучок с малой плотностью тока представить как поток невзаимодействующих частиц, движущихся со скоростью  $v_0$ , то высокочастотные возмущения имеют вид волны тока  $I(x, t) = I(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_0)]$  с фазовой скоростью  $v_0$  ( $v_{вн} = v_0$ ). Таким образом, простейшее условие синхронизма — это равенство конвективной скорости электронов фазовой скорости волны. Кстати, из этого условия следует необходимость при нерелятивистских скоростях электронов замедлять электромагнитную волну (в большинстве ЛБВ используются

спиральные замедляющие системы; рис. 10.10). В случае, когда кулоновы силы в пучке существенны, возмущения в нем распространяются в виде волн пространственного заряда, скорости которых не равны  $v_0$ . Для пространственного резонанса в этом случае необходимо, чтобы был синхронизм между одной из волн пространственного заряда и волной в замедляющей системе. Следует заметить, что в своих рассуждениях мы рассматривали лишь влияние внешней волны на собственную. В большинстве случаев это не так: при условии синхронизма есть и обратное влияние. В ЛБВ, например, поле волноведущей системы модулирует пучок по скорости и группирует электроны в сгустки. Такое взаимодействие имеет место в случае связанных волн, которые мы рассмотрим в главе. 16.

## ГЛАВА 11

### Линейные волны в жидкости

*Вывод основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости — уравнения Эйлера и уравнения непрерывности. Дисперсионное уравнение для звуковых волн в жидкости. Акустический эффект Допплера. Основные уравнения линейной теории стратифицированной жидкости. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Дисперсионные уравнения для “мелкой” и “глубокой” воды (анализ размерностей и точное решение). Круговые волны на воде. Корабельные волны (волны за движущимся источником). О связи капиллярных волн с моделью атомного ядра. Внутренние волны малой амплитуды в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.*

#### § 1. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Звуковые волны. Акустический эффект Допплера

При гидродинамическом описании жидкость рассматривается как сплошная среда (см., например, [1, 2]), т. е. при анализе смещения некоторой частицы жидкости речь идет не об отдельной молекуле, а об элементе объема жидкости, включающем много молекул. В гидродинамике такой элемент, малый по сравнению с пространственными масштабами интересующих нас процессов, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями, считается точкой. Для полного описания поведения движущейся жидкости достаточно, чтобы в такой точке были заданы следующие независимые переменные: скорость жидкости  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , термодинамические величины, например энтропия  $S(x, y, z, t)$ , отнесенная к единице массы жидкости [3], и плотность массы  $\rho(x, y, z, t)$  ( $x, y, z$  — координаты рассматриваемого элемента объема в момент времени  $t$ ). При таком, эйлеровом, описании скорость  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  не связана с определенными частицами жидкости, которые перемещаются со временем в пространстве, а относится к определенным точкам пространства в момент времени  $t$ . Также надо понимать и величины  $S$  и  $\rho$ .

Существование волн в жидкости, находившейся первоначально в стационарном состоянии, обусловлено возмущением жидкости и конкурен-

цией между силой, стремящейся возвратить жидкость в исходное состояние, и силами инерции, которые заставляют жидкость проскочить его. Например, для волн на воде возвращающими являются сила тяжести и сила поверхностного натяжения, для вращающейся жидкости — сила Кориолиса, для проводящей жидкости — сила действия магнитного поля.

Ограничимся рассмотрением идеальной жидкости. Идеальной называется жидкость, при движении которой вектор напряжения в жидкости перпендикулярен любому элементу поверхности независимо от того, как он ориентирован в пространстве (т. е. выполняется закон Паскаля). Математически это означает, что давление в жидкости есть скаляр, а не тензор [4]. В этом случае в жидкости отсутствуют сдвиговые силы, в частности силы вязкости.

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения элемента объема  $dV$  жидкости плотности  $\rho$  можно записать в виде  $\rho(d\mathbf{v}/dt)dV = d\mathbf{F}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость рассматриваемого элемента,  $d\mathbf{F}$  — сила, действующая на каждый элемент объема  $dV$ . На любой выделенный объем  $V$  жидкости со стороны окружающей жидкости действует сила, равная интегралу от давления, который берется по поверхности выделенного объема, т. е.  $-\oint p d\mathbf{S}$ . (Предполагается, что вектор  $d\mathbf{S}$  равен площади элемента поверхности по абсолютному значению и направлен по внешней нормали к ней; отсюда знак минус перед силой). Но по интегральной теореме о градиенте  $-\oint p d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p dV$ . Кроме того, на выделенный элемент может действовать внешняя заданная сила с плотностью  $\rho \mathbf{a}_{\text{вн}}$ . Таким образом,  $d\mathbf{F} = -\nabla p dV + \rho \mathbf{a}_{\text{вн}} dV$ , и уравнение движения становится таким:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{a}_{\text{вн}}. \quad (11.1)$$

Учитывая в (11.1), что  $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , приходим к основному уравнению гидродинамики — уравнению Эйлера:

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{a}_{\text{вн}}. \quad (11.2)$$

Очевидно, что имеет место закон сохранения массы  $\int_V \rho dV$  рассматриваемого объема: изменение во времени массы в данном объеме  $-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$  равно взятому с обратным знаком потоку массы  $-\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{S}$  через поверхность, ограничивающую этот объем, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} = 0, \quad (11.3)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (11.4)$$

Это — уравнение непрерывности. Вектор  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  называют плотностью потока жидкости.

В уравнениях (11.2) и (11.3) пять неизвестных: плотность, три составляющие скорости и давление, т. е. одного уравнения не хватает. Таким уравнением является уравнение термодинамического состояния.

Будем считать, что теплообмен между отдельными элементами жидкости отсутствует (жидкость течет с такой скоростью, что отдельные ее участки не успевают обмениваться теплом друг с другом) и что она не обменивается теплом с окружающими телами, с которыми соприкасается. Таков допущение означает, что движение происходит адиабатически в каждом элементе жидкости, т. е. энтропия  $S$ , отнесенная к единице массы жидкости, остается постоянной при перемещении этого элемента в пространстве. Таким образом

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S = 0. \quad (11.5)$$

Умножим (11.4) на  $S$ , (11.5) на  $\rho$  и, сложив полученные соотношения, получим  $S \partial \rho / \partial t + \rho \partial S / \partial t + S \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \nabla S = 0$ . Используя в последнем соотношении формулу  $\operatorname{div}(a \mathbf{f}) = a \operatorname{div} \mathbf{f} + \mathbf{f} \nabla a$ , приходим к уравнению непрерывности для энтропии

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho S \mathbf{v}) = 0, \quad (11.6)$$

где  $(\rho S \mathbf{v})$  — плотность потока энтропии. Если в начальный момент времени распределение энтропии жидкости пространственно однородно, то

$$S = \text{const} \quad (11.7)$$

в любой момент времени. Такой адиабатический процесс, происходящий при постоянной энтропии, называется изэнтропийным. В этом случае уравнение состояния есть просто функциональная зависимость между плотностью и давлением:  $p = p(\rho)$  (или  $\rho = \rho(p)$ ), откуда

$$\frac{dp}{dt} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_S \frac{d\rho}{dt}. \quad (11.8)$$

Линеаризуя уравнения (11.2), (11.4) относительно малых возмущений  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}'$  и  $p'$  плотности, скорости и давления соответственно на фоне их равновесных значений  $\rho_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  и  $p_0$ , получаем (считаем  $\mathbf{a}_{\text{вн}} = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_S [\text{div}(\mathbf{v}_0 \rho') + \rho_0 \text{div} \mathbf{v}'] &= 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

В случае неподвижной среды ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ), вводя потенциал скорости  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ , получаем для возмущения давления  $p' = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$ . В результате из второго уравнения (11.9) следует волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (11.10)$$

где  $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$  — скорость звука. Очевидно, что в декартовых координатах волновому уравнению удовлетворяет и каждая из трех компонент скорости (чтобы убедиться в этом, надо применить к волновому уравнению операцию grad), и давление.

Если все переменные в волне зависят лишь от одной из декартовых координат (плоская волна), то уравнение (11.10) переходит в уже обсуждавшееся в гл. 9 одномерное уравнение  $\partial^2 \varphi / \partial t^2 - c^2 \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ , которое имеет общее решение в виде суперпозиции двух встречных плоских волн:

$$\varphi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Поскольку в рассматриваемом приближении дисперсии у звуковых волн нет, то закон дисперсии выглядит так:

$$\omega = \pm ck. \quad (11.11)$$

Бегущие звуковые волны произвольной формы оказываются стационарными, т. е. их профиль в процессе распространения не меняется. Это легко пояснить на спектральном языке. Из-за отсутствия дисперсии все спектральные составляющие, образующие волну, движутся с одинаковыми скоростями и фазовые соотношения между ними сохраняются.

В плоской акустической волне отлична от нуля только  $x$ -компонента скорости  $v_x = \partial \varphi / \partial x$ , т. е. частицы в волне движутся только по (или только против) направлению распространения волны. Именно поэтому акустические волны в жидкостях являются продольными.

Если скорость среды, в которой распространяется звуковая волна, отлична от нуля, то закон дисперсии (11.11) уже будет нарушен. Например, если плоская волна распространяется в однородном движущемся вдоль  $x$  с постоянной скоростью  $v_0$  потоке, то из (11.9) следует закон дисперсии:

$$\omega = \pm ck + v_0 k. \quad (11.12)$$

Можно получить соотношение более общего вида, чем (11.12) для случая однородного потока жидкости движущегося со скоростью  $\mathbf{u}$ . Следуя [1, § 68], введем неподвижную систему координат  $x, y, z$ , и назовем ее системой  $K$ , а также систему  $K'$  координат  $x', y', z'$ , движущуюся относительно системы  $K$  со скоростью  $\mathbf{u}$ . В системе  $K'$  жидкость неподвижна и монохроматическая волна в ней имеет вид

$$\varphi = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - kct)},$$

где  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор в системе  $K'$  связан с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  в системе  $K$  формулой  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$ . Поэтому в неподвижной системе координат волна запишется так:

$$\varphi = \text{const} \cdot e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - (kc + \mathbf{k}\vec{n})]t},$$

$\vec{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Коэффициент при  $t$  в показателе экспоненты есть частота  $\omega$  волны. Следовательно, в движущейся среде частота связана с волновым вектором  $\mathbf{k}$  соотношением

$$\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k}. \quad (11.13)$$

Групповая скорость распространения волн равна

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u},$$

т.е.  $\vec{v}_{\text{гр}}$  есть векторная сумма скорости  $c$  в направлении  $\mathbf{k}$  и “сносовой” скорости  $\mathbf{u}$  звука движущейся жидкости. С помощью формулы (11.13) можно описать акустический эффект Допплера, состоящий в том, что частота звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника, не совпадает с частотой колебаний последнего.

Предположим, что звук, испускаемый неподвижным относительно среды источником, воспринимается наблюдателем, движущимся со скоростью  $\mathbf{u}$ . В системе  $K'$ , покоящейся относительно среды, имеем  $k = \omega_0/c$ , где  $\omega_0$  — частота колебаний источника. В то же время в системе  $K$ , движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью  $(-\mathbf{u})$  и частота звука будет в соответствии с соотношением (11.13)  $\omega = ck - \mathbf{u}\mathbf{k}$ .

Введем угол  $\theta$  между направлением скорости  $\mathbf{u}$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Тогда воспринимаемая движущимся наблюдателем частота звука будет равна

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right). \quad (11.14)$$

Рассмотрим теперь распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть  $\mathbf{u}$  обозначает скорость движения источника. Перейдем от неподвижной системы координат к системе  $K'$ , движущейся вместе с источником. В этой системе среда движется со скоростью  $(-\mathbf{u})$ , источник покоится, а частота, излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте  $\omega_0$  колебаний, совершаемых источником. Тогда из формулы (11.13), заменяя знак перед  $\mathbf{u}$ , и вводя угол  $\theta$  между направлениями  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{k}$ , получим:

$$\omega_0 = ck \left( 1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right).$$

Вспомним, что в исходной неподвижной системе  $K$  частота связана с волновым вектором равенством  $\omega = ck$ . Тогда

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}. \quad (11.15)$$

Это соотношение устанавливает связь между частотой  $\omega_0$  колебаний движущегося источника звука и частотой  $\omega$  звука, который слышит неподвижный наблюдатель. Когда источник удаляется от наблюдателя, угол  $\theta$  между его вектором скорости и направлением приходящей в точку наблюдения волной меняется в пределах  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ , поэтому  $\cos \theta < 0$ , и, следовательно, частота, слышимого наблюдателем звука уменьшается по сравнению с  $\omega_0$  (см. формулу (11.15)).

Если источник приближается к наблюдателю, то  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,  $\cos \theta > 0$ , и частота  $\omega > \omega_0$  увеличивается с увеличением скорости  $u$ . Интересен случай, когда  $u \cos \theta > c$ , согласно формуле (11.15)  $\omega$  становится отрицательной. Это означает, что слышимый наблюдателем звук будет доходить до него в обратном порядке: звук, излученный источником в более поздние моменты времени, дойдет до наблюдателя раньше, чем звук, излученный в более ранние моменты времени.

## § 2. Основные уравнения линейной теории волн в стратифицированной жидкости

Для описания волн в океане или атмосфере уравнения гидродинамики следует обобщить таким образом, чтобы учесть вращение Земли и



стратификацию жидкости, т. е. зависимость плотности жидкости от вертикальной координаты. В частности, плотность морской воды зависит от давления, температуры и относительного содержания массы растворенных солей, которые меняются с глубиной [5–7]. Соответствующее обобщение приводит к тому, что уравнение Эйлера вместо (11.2) примет вид

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - 2\rho[\Omega \mathbf{v}] - \rho g \nabla z. \quad (11.16)$$

Здесь  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\nabla z$  — единичный вектор вертикальной оси координат;  $\mathbf{a}_{\text{вн}}$  заменено на  $\mathbf{g}$ , поскольку жидкость находится в поле тяжести.

Предположим теперь, что длины интересующих нас волн много меньше радиуса Земли, и будем решать (11.16) и (11.4) на плоскости, соприкасающейся со сферической Землей в данной точке, Оси соответствующей прямоугольной системы координат направлены следующим образом: ось  $z$  — вертикально вверх, ось  $x$  — по параллели, с запада на восток, ось  $y$  — по меридиану с юга на север. Линеаризуем уравнения относительно некоторого состояния покоя, в котором плотность и давление суть функции только  $z$ . Пусть  $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$ ,  $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$ , где  $p', \rho' \ll p_0, \rho_0$ . Заметим, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'(x, y, z, t)$ , так же как и  $p'$  и  $\rho'$ , есть величина первого порядка малости. Тогда из уравнений (11.16) и (11.4) получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -2[\Omega \mathbf{v}'] - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla z, \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \nabla \rho. \quad (11.18)$$

Уравнение состояния (11.8) в линейном приближении имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 + \rho') = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(p_0 + p'),$$

или

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \right).$$

где  $c(z) = 1/\sqrt{(\partial p/\partial \rho)_S}$  — адиабатическая скорость звука. Учитывая, что  $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 g v_z \right). \quad (11.19)$$

У горизонтального дна нормальная составляющая скорости должна исчезать, поэтому при  $z = -H$

$$v_z = 0. \quad (11.20)$$

где  $H$  — глубина жидкости. На поверхности жидкости давление составляет  $p_0 + p' = \text{const}$ , поэтому  $d(p_0 + p')/dt = 0$ , что с учетом правой части (11.19) дает при  $z = 0$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_z = 0. \quad (11.21)$$

Воспользуемся в уравнениях (11.17)-(11.19) так называемым приближением Буссинеска: всюду, где  $\rho_0(z)$  не стоит под знаком дифференциала, будем считать  $\rho_0 = \text{const}$ , причем пусть  $\rho_0(0) = \rho_{00}$ . Решение уравнений (11.17)-(11.19) будем искать в виде (см. [8])

$$\begin{aligned} v_x &= (\mathcal{P}(z)/\rho_{00})V_x(x, y)e^{i\omega t}, & v_y &= (\mathcal{P}(z)/\rho_{00})V_y(x, y)e^{i\omega t}, \\ v_z &= -i\omega\mathcal{V}(z)V_z(x, y)e^{i\omega t}, \\ p &= \mathcal{P}(z)V_z(x, y)e^{i\omega t}, & \rho' &= \rho'(x, y, z)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

где  $\omega$  — частота интересующих нас волн.

Подставляя (11.22) в (11.17)-(11.19), после простых преобразований получаем из (11.17)

$$V_x + iqV_y - s\omega\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)}V_z = \frac{i}{\omega}\frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad (11.23)$$

$$V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega}\frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (11.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\mathcal{P}(z) + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) - s\omega\mathcal{P}(z)\frac{V_x}{V_z} = 0; \quad (11.25)$$

из (11.19) имеем

$$\frac{1}{c^2} + \frac{\rho_{00}g}{c^2}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - \rho_{00}\frac{1}{\mathcal{P}(z)}\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\frac{1}{V_z}. \quad (11.26)$$

При выводе (11.23)-(11.26) использовано полученное из (11.18) выражение

$$\rho' = \left[ \frac{\mathcal{P}(z)}{c^2} - \frac{\rho_{00}}{g}N^2(z)\mathcal{V}(z) \right] V_z \quad (11.27)$$

и определение частоты свободных вертикальных колебаний частиц жидкости, так называемой частоты Вайсяля:

$$N(z) = \left[ -\frac{g}{\rho_{00}} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_{00} g}{c^2(z)} \right) \right]^{1/2}. \quad (11.28)$$

В уравнениях (11.23) и (11.24) введены следующие безразмерные величины:

$$q = (2\Omega_z/\omega) = (2\Omega/\omega) \sin \varphi, \quad q = (2\Omega_y/\omega) = (2\Omega/\omega) \cos \varphi, \quad (11.29)$$

где  $\varphi$  — географическая широта места. С учетом (11.22) граничные условия (11.20) и (11.21) переписутся так:

$$z = -H, \quad \mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.30)$$

$$z = 0, \quad \mathcal{P}(z) + \rho_{00} g \mathcal{V}(z) = 0. \quad (11.31)$$

Как показано в [8], уравнения (11.23)-(11.26) допускают разделение переменных в двух случаях: 1)  $s$  и  $q$ , взятые при  $\varphi$ , равном широте места, являются постоянными; это приближение справедливо для волн, на длине которых  $q$  и  $s$  меняются мало, — для звуковых, поверхностных, внутренних и инерционных волн; 2) можно пренебречь слагаемыми, содержащими лишь  $\Omega_y$ , т. е.  $s$ , поскольку  $s \sim \Omega_y$ . Итак, пусть

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{Bmatrix} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (11.32)$$

$V_{0x}$ ,  $V_{0y}$  — постоянные,  $V_{0z} = 1$ , что не ограничивает общности решения. Тогда уравнения (11.23) и (11.24) принимают вид

$$V_{0x} + iqV_{0y} = \frac{k_z}{\omega} + s\omega\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)}, \quad V_{0y} - iqV_{0x} = \frac{k_y}{\omega}.$$

Из этой системы уравнений находим, что

$$V_{0x} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_x + s\omega^2\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - iqk_y \right\}, \quad (11.33)$$

$$V_{0y} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_y + iq s\omega^2\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} + iqk_x \right\}. \quad (11.34)$$

Наконец, из уравнения (11.25 и (11.26), используя (11.32)-(11.34), получаем два уравнения для  $\mathcal{V}(z)$  и  $\mathcal{P}(z)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \left( \frac{g}{c^2} - \frac{sk_x - iqs k_y}{1 - q^2} \right) \mathcal{P}(z) + \rho_{00} \left( \frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1 - q^2} - N^2 \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \left( -\frac{g}{c^2} + \frac{sk_x + iqs k_y}{1 - q^2} \right) \mathcal{V}(z) + \frac{1}{\rho_{00}} \left( -\frac{1}{c^2} + \frac{\xi^2}{\omega^2(1 - q^2)} \right) \mathcal{P}(z) = 0, \quad (11.36)$$

где  $\xi^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Учтем теперь, что частота  $\omega$  звуковых волн намного превосходит  $\Omega$  и  $N$ ; сила тяжести для этих волн в океане тоже не играет роли. Поэтому в (11.35) и (11.36) можно пренебречь слагаемыми, содержащими  $s$ ,  $q \sim Q$ ,  $N$  и  $g$ . Такое пренебрежение дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00} \omega^2 \mathcal{V}(z) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho_{00}} \mathcal{P}(z) + \frac{\xi^2}{\rho_{00} \omega^2} \mathcal{P}(z) &= 0. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Исключая  $\mathcal{V}(z)$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(z)}{\partial z^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right] \mathcal{P}(z) = 0, \quad (11.38)$$

которое является основным в акустике океана.

Хотя  $c(z)$  изменяется мало с глубиной, наличие, например, минимума  $c(z)$  на какой-то глубине приводит к образованию подводного акустического волновода, по которому звук низкой частоты от источников (для низких частот поглощение в воде мало) может распространяться на расстояния до нескольких десятков тысяч километров [8, 9].

Заметим сразу, что в предположении несжимаемости  $c^2 = dp/d\rho \rightarrow \infty$  уравнения (11.35), (11.36) могут быть упрощены и приведены к виду

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} - \frac{sk_x - iqs k_y}{1 - q^2} \mathcal{P}(z) + \rho_{00} \left( \frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1 - q^2} - N^2 \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \frac{sk_x + iqs k_y}{1 - q^2} \mathcal{V}(z) + \left( \frac{\xi^2}{\omega^2 \rho_{00} (1 - q^2)} \right) \mathcal{P}(z) = 0. \quad (11.40)$$

Исключив  $\mathcal{P}(z)$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} + 2i \frac{q s k_y}{1 - q^2} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} - \left[ \frac{k_x^2 s^2 + q^2 k_y^2 + \xi^2 - (q^2 + s^2) \xi^2}{(1 - q^2)^2} - \frac{N^2 \xi^2}{\omega^2 (1 - q^2)} \right] \mathcal{V}(z) = 0. \quad (11.41)$$

Для анализа гравитационных волн на поверхности жидкости, как мы сейчас убедимся, не существенны ни стратификация жидкости, ни вращение Земли, т. е. в (11.41) можно отбросить слагаемые, содержащие  $N$ ,  $q$  и  $s$ , и мы придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} + \xi^2 \mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.42)$$

с граничными условиями (11.30) и (11.31), которые при сделанных предположениях записываются в виде

$$\mathcal{V}(z)|_{x=-H} = \left[ g \mathcal{V}(z) - \frac{\omega^2}{\xi^2} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} \right]_{x=0} = 0. \quad (11.43)$$

Здесь учтено, что  $\partial \mathcal{V}(z)/\partial z + (\xi^2/\omega^2 \rho_{00}) \mathcal{P}(z) = 0$  (см. 11.40).

### § 3. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости

Справедливость использованных приближений (по крайней мере для гравитационных волн) мы покажем с помощью соображений размерности, следуя блестящей статье [10]. Автор этой статьи использует для размышлений о волнах картину Николая Рериха "Заморские гости". "А при чем тут картина" — вопрошает он. И отвечает [10, с. 10]: "Просто, чтоб было веселее. В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля ... (рис. 11.1)". Об этих и других волнах пойдет разговор в следующих параграфах этой главы.,

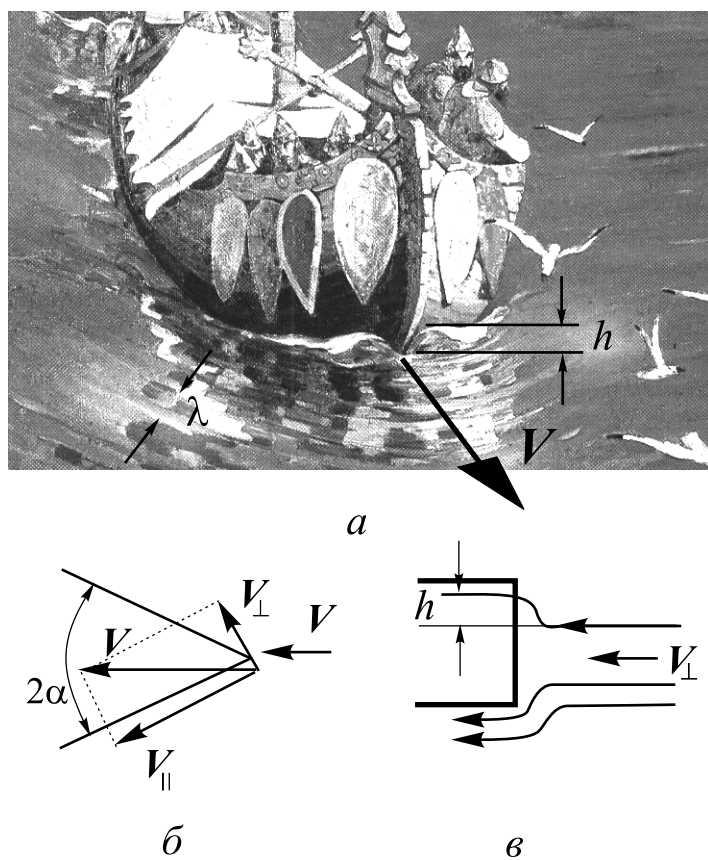


Рис. 11.1. Нужный нам для анализа фрагмент картины Н. Рериха “Заморские гости” (а) и картинка, поясняющие образование носовой волны (б)

**Задача 11.1.** [10, с. 11]. Пусть вода набегаёт симметрично со скоростью  $V$  на нос корабля, изображённый в виде клина на рис. 11.1,б. Клин имеет вертикальные грани и угол при вершине, равный  $2\alpha$ . Скорость  $V$  — скорость корабля относительно воды. Разложим у самого носика клина вектор скорости  $V$  на две компоненты:  $V_{\parallel}$  — компонента, параллельная одному из бортов корабля (одной из граней клина), и  $V_{\perp}$  — перпендикулярная ей. Тогда можно считать, что вода около этого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью  $V_{\parallel} = V \cos \alpha$  и набегаёт на него перпендикулярно со скоростью  $V_{\perp} = V \sin \alpha$ . При таком “набеге” нижние слои воды уходят под днище корабля, а верхний слой поднимается вертикально на некоторую высоту  $h$ , как на рис. 11.1,в. Оцените  $V$ . Не получится, загляните в статью [10].

**Ответ:**  $V_{\perp}^2 \geq 2gh/\sin^2 \alpha$ .

Мы займемся поверхностными волнами (круги на картинке), исходя из соображений размерности. Предположим, что в состоянии равновесия поверхность жидкости горизонтальная. Если ее вывести из этого состояния, то для возникновения поверхностных волн необходима “борьба” двух сил: возвращающей возмущенную жидкость в положение равновесия и силы инерции, из-за которой жидкость “проскакивает” положение равновесия. Какая сила может заставить исчезнуть появившийся на поверхности жидкости “горб”, заставить поверхность снова стать горизонтальной? Такой силой может быть, например, сила тяжести  $F_g \sim g$  ( $g$  — ускорение свободного падения) или сила поверхностного натяжения  $F_{\sigma}$  ( $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения). Обсудим отдельно действие обеих сил.

Падая вниз под действием силы тяжести, горб по инерции проваливается ниже положения равновесия; рядом с ним будет вытеснен другой “горб” и т.д. На поверхности жидкости начнет распространяться волна, которая называется гравитационной. Анализ размерностей позволяет найти зависимости фазовой скорости распространения волны  $v_{\phi}$  от ее длины  $\lambda$ . Величина  $v_{\phi}$  для гравитационных волн может зависеть длины волны  $\lambda$ , от  $F_g \sim g$ , от инерции колеблющейся жидкости, мерой которой является ее плотность  $\rho$ , и от глубины жидкости  $H$ . Конечно, скорость распространения волн может зависеть и от многих других факторов, например, от плотности воздуха и даже притяжения Луны. Не будем их учитывать, считая влияние этих факторов несущественным. Таким образом,

$$v_{\phi} = f(\lambda, g, \rho, H).$$

Сразу видно из соображений размерности, что плотность  $\rho$  не будет входить в окончательную формулу, поскольку только в  $\rho$  входит размерность

массы. Физически это объясняется тем, что и вес “горба”, возвращающий его к положению равновесия, и масса “горба”, характеризующая его инерционность, пропорциональны  $\rho$ . Размерности  $\lambda$  и  $H$  одинаковы, размерность времени содержится только в  $g$ , поэтому для скорости распространения волны можно написать две равноправных формулы:

$$v_\phi = \sqrt{gH} f_1(\lambda/H) \quad \text{или} \quad v_\phi = \sqrt{gH} f_2(H/\lambda). \quad (11.44)$$

Пусть  $\lambda \ll H$ ; в этом случае говорят о волнах на глубокой воде или коротких волнах, которые движутся лишь в поверхностном слое жидкости (толщина слоя  $\sim \lambda$ )<sup>1</sup>. Скорость распространения волны в этом случае не должна зависеть от глубины жидкости, следовательно,

$$f_1(\lambda/H) = C_1(\lambda/H)^{1/2},$$

где  $C_1 = \text{const}$ , и тогда

$$v_\phi = C_1 \sqrt{g\lambda}. \quad (11.45)$$

Если сразу считать, что  $v_\phi = f(\lambda, g, \rho)$  и не зависит от  $H$ , то в системе  $LMT$  имеем следующее уравнение размерностей<sup>2</sup>:

$$LT^{-1} = L^\alpha (LT^{-2})^\beta (ML^{-3})^\gamma,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 3\gamma &= 1, \\ \gamma &= 0, \quad \beta = 1/2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1/2, \end{aligned}$$

т. е. приходим к формуле (11.45).

В случае длинных волн или волн в мелкой воде, когда  $\lambda \gg H$ , скорость распространения волны не должна зависеть от  $\lambda$ , поскольку движение всех частиц в тонком слое жидкости практически одинаково<sup>3</sup>. В этом случае во втором соотношении из (11.44)

$$f_2(H/\lambda) = C_2(H/\lambda)^{1/2},$$

<sup>1</sup>Очень понятный пример коротких волн — волны, возникающие на поверхности пруда, когда в него брошен камень. Длина таких волн имеет порядок размера камня, а он мал по сравнению с глубиной пруда. К волнам на глубокой воде относятся и рябь на глубоких лужах и штормовые волны в море.

<sup>2</sup>Напомним, что размерностью называется выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные (например,  $LMT$  — длины, массы, времени). Размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степень размерностей величин, принятых за основные.

<sup>3</sup>Длина приливных волн, например, размера земного шара, так что для них самое глубокое место в океане — тонкий слой жидкости.



и

$$v_{zp} = C_2 \sqrt{gh}. \quad (11.46)$$

Поскольку  $k = \omega/c$ , из (11.45) и (11.46) получаем следующие законы дисперсии для гравитационных волн в двух предельных случаях:

$$kH \gg 1, \quad \omega(k) = C_1 \sqrt{2\pi gk} \quad \text{— глубокая вода,} \quad (11.47)$$

$$kH \ll 1, \quad \omega(k) = C_2 k \sqrt{gH} \quad \text{— мелкая вода.} \quad (11.48)$$

Проведенный анализ не строг. Мы не можем найти в его рамках  $C_1$  и  $C_2$ . Для их определения воспользуемся уравнениями (11.42) и (11.43). Если решение уравнения (11.42)  $\mathcal{V}(z) = A_1 \exp(\xi z) + A_2 \exp(-\xi z)$  подставить в граничные условия (11.43), то из условия совместности получившейся алгебраической системы уравнений с неизвестными  $A_1$  и  $A_2$ , находим дисперсионное уравнение для поверхностных волн в жидкости конечной глубины:

$$\begin{vmatrix} e^{-\xi H} & e^{\xi H} \\ g - \omega^2/\xi & g + \omega^2/\xi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 = \xi g \operatorname{th}(\xi H). \quad (11.49)$$

Легко видеть, что

$$\omega = \sqrt{\xi g} \quad \text{при} \quad \xi H \gg 1, \quad (11.50)$$

$$\omega = \xi \sqrt{gH} [1 - (\xi H)^2/6 + \dots] \quad \text{при} \quad \xi H \ll 1. \quad (11.51)$$

Таким образом, в случае, когда, например  $\xi = k_x = k$ , в (11.47) и (11.48)  $C_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ ,  $C_2 = 1$ . Из формул (11.45)-(11.46) при  $\xi = k_x = k$  следует, что при  $kH \rightarrow 0$  (мелкая жидкость) фазовая скорость  $v_\phi$  стремится к постоянному пределу  $\sqrt{gH}$  — дисперсия слабая. На глубокой воде дисперсия всегда есть  $\omega \sim \sqrt{k}$ ; она связана с нелокальной зависимостью между давлением и глубиной жидкости.

Гравитационные волны обладают отрицательной дисперсией, поскольку  $v_\phi = [(g/k) \operatorname{th}(kH)]^{1/2}$  уменьшается с ростом частоты. Групповая скорость  $v_{gp} = d\omega/dk$  тоже уменьшается с ростом частоты, поэтому, скажем, в море или океане к берегу из области возникновения приходят сначала длинные волны, а уже потом короткие. Этот факт можно использовать для определения расстояния до шторма (читателю, по-видимому, доставит удовольствие придумать способ обнаружения шторма и оценить максимальную дальность обнаружения).

Заметим, что при анализе гравитационных волн мы исходили из достаточно общих уравнений. Если ограничить себя с самого начала анализом

гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ), то можно исходить из уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (11.52)$$

Полагая далее, что движение потенциальное ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ), можно ввести потенциал скорости  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Воспользуемся формулой векторного анализа  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$ . Тогда для несжимаемой жидкости  $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \partial \mathbf{v} / \partial t + \nabla(v^2/2)$  и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g}.$$

Поскольку  $\mathbf{g}$  есть сила, действующая в поле тяжести на единицу массы, можно ввести  $\mathbf{g} = -\nabla U$ , где  $U$  — потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле тяжести. Тогда

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0.$$

откуда легко можно получить так называемый интеграл Коши - Лагранжа [11]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = f(t),$$

где  $f(t)$  — некоторая функция времени. В стационарном потоке жидкости ( $\partial \Phi / \partial t = 0$ ), когда движение установившееся и скорость не зависит от времени, этот интеграл переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}, \quad (11.53)$$

причем для потенциального движения константа в (11.53) одинакова во всей жидкости. Если  $\text{rot } \mathbf{v} = \omega \neq 0$  ( $\omega$  характеризует завихренность и определяет угловую скорость элементарного объема жидкости, то (11.53) справедливо вдоль данной линии тока (постоянная может быть разной вдоль разных линий тока).

Очевидно, что (11.53) выражает закон сохранения энергии. В этом состоит смысл уравнения Бернулли, связывающего скорость с давлением, поскольку  $U$  известна. Мы воспользуемся (11.53) в главе 15 чтобы объяснить нарастание неустойчивости Гельмгольца.

Обратимся теперь к очень коротким волнам, когда жидкость стремится вернуться и положение равновесия под действием силы поверхностного натяжения. Такие волны называются капиллярными и для них разумно предположить, что

$$v_\phi = f(\lambda, \sigma, \rho).$$

В системе  $LMT$  легко получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} LT^{-1} &= (MT^{-2})^\alpha L^\beta (ML^{-3})^\gamma, \\ \beta - 3\gamma &= 1, \\ \alpha + \gamma &= 0, \\ \alpha = 1/2 \rightarrow \gamma &= -1/2, \quad \beta = 1/2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_\phi = C_3 \sqrt{\sigma/(\rho\lambda)}. \quad (11.54)$$

Закон дисперсии, соответствующий (11.54), имеет вид:

$$\omega = C_3 k^{3/2} \sqrt{\sigma/(2\pi\rho)}. \quad (11.55)$$

Теперь решим задачу более строго, исходя из интеграла Коши - Лагранжа и уравнения

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0, \quad (11.56)$$

которое получено из условия несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  и определения  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Когда поверхность раздела, скажем, между воздухом и жидкостью искривлена, то разность давлений по разные стороны от нее (но вблизи поверхности раздела) можно определить по формуле Лапласа [1, 3]:

$$p_1 - p_2 = \sigma/R.$$

Эта разность называется поверхностным давлением;  $R$  — радиус кривизны поверхности, причем  $1/R = \partial^2 \zeta / \partial x^2$ , если  $\zeta = \zeta(x, t)$  — уравнение кривой, соответствующей границе раздела, а поверхность изогнута слабо. В нашем случае формула Лапласа имеет вид

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (11.57)$$

где  $p$  — давление вблизи поверхности жидкости,  $p_0 = \text{const}$  — внешнее давление. На рис. § 3 кривизна поверхности отрицательна, что учтено

знаком в (11.57). В линейном приближении интеграл Коши — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad (11.58)$$

поскольку слагаемым  $v^2/2$  в этом приближении можно пренебречь, силу тяжести мы не учитываем, чтобы рассмотреть только капиллярные волны, а  $f(t)$  можно, не нарушая общности, считать равной нулю [1]. Используя (11.57), для  $z = 0$  из (11.58) будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (11.59)$$

Будем искать решение системы (11.56) в виде  $\Phi = \varphi(z) \exp[i(\omega t - kx)]$ . Тогда  $\partial^2 \varphi / \partial z^2 - k^2 \varphi = 0$  и  $\varphi(z) = B_1 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz)$ . Но если жидкость достаточно глубокая, то  $\varphi(z) \approx B_1 \exp(kz)$ , поскольку под поверхностью  $z < 0$  (плоскость  $xy$  совпадает с невозмущенной горизонтальной поверхностью жидкости). Продифференцируем (11.59) по  $t$  учтем, что  $\partial \zeta / \partial t = v_z = \partial \Phi / \partial z$ . Будем иметь

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (11.60)$$

Поскольку  $\Phi \approx B_1 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kx)]$ , из (11.60) получаем следующее уравнение для капиллярных волн:

$$\omega^2 = (\sigma/\rho) k^3. \quad (11.61)$$

Таким образом,  $C_3$  в (11.55) равно  $\sqrt{2\pi}$ . Если одновременно учесть действие на жидкость обеих возвращающих сил — и силы тяжести, и силы поверхностного натяжения, — то в предположении, что  $\Phi = \Phi(x, z, t)$ , для жидкости, глубина которой равна  $H$ , мы получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \left( kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \text{th}(kH). \quad (11.62)$$

Это уравнение дает закон дисперсии для гравитационно-капиллярных волн (предоставляем читателям самим получить (11.62)).

Для капиллярных волн  $v_\phi = \sqrt{\sigma k / \rho}$ , т. е. фазовая скорость растет с ростом  $\omega$ , что соответствует положительной дисперсии. На рис § 3

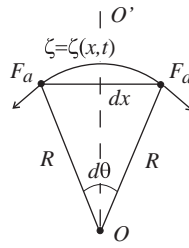


Рис. 11.2. К определению силы поверхностного натяжения для поверхности с отрицательной кривизной.

приведены зависимости  $\omega$  и  $v_\phi$  от  $k$  для поверхностных волн; кривые соответствуют (11.62).

В свое время, после открытия деления урана, теория капиллярных волн была с успехом применена к исследованию устойчивости атомного ядра по отношению к его делению на две приблизительно одинаковые по размерам части. Созданная теория основывалась на том, что между частицами в ядре действуют близкодействующие силы, которые похожи на силы поверхностного натяжения в жидкости (между молекулами тоже действуют силы близкодействия). Такому “поверхностному натяжению” в ядре противостоят далекодействующие силы — силы кулоновского расталкивания протонов. Для частоты колебаний сферического ядра получается формула, подобная (11.62)  $kH \gg 1$ , только первое слагаемое в правой части имеет электрическое, а не гравитационное происхождение, и перед ним стоит знак минус (кулонова сила направлена по внешней нормали к поверхности). Из этого соотношения можно было найти условия неустойчивости ядра при бесконечно малых искажениях его поверхности.

**Задача 11.2.** Постройте сами теорию дробления заряженных дождевых капель, считая каплю сферической, а жидкость несжимаемой (колебания следуют разлагать на стоячие сферические волны по полиномам Лежандра) [12].

Вернемся к закону дисперсии (11.62). Для воды  $\sigma = 8 \cdot 10^{-2}$  Н/м,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. С учетом этого на рис. 11.4,а построены зависимости фазовой скорости поверхностных волн на воде, определяемых формулами (11.45) с  $C_1 = 1/\sqrt{2\pi}$  и (11.54) с  $C_3 = \sqrt{2\pi}$ , от длины волны  $\lambda$ . В области  $\lambda \approx 2$  см обе кривые пересекаются, т. е. при таком значении длины волны гравитационные волны переходят в капиллярные и для расчета фазовой

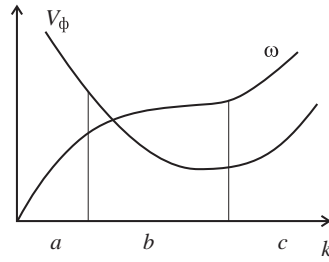


Рис. 11.3. Зависимости  $\omega$  и  $v_\phi$  от  $k$  для поверхностных волн: а — длинные гравитационные волны ( $kH \ll 1$ ,  $kg \gg \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx k\sqrt{gH}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{gH}$ ); б — короткие гравитационные волны ( $kH \gg 1$ ,  $kg \gg \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx \sqrt{gk}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{g/k}$ ); в — капиллярные волны ( $kH \gg 1$ ,  $kg \ll \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx k\sqrt{\sigma k/\rho}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{\sigma k/\rho}$ ).

скорости необходимо использовать закон дисперсии (11.62), в котором учитываются оба эффекта, положив в нем  $kH \rightarrow \infty$ . Соответствующая кривая показана на рис. 11.4,а пунктиром. Минимум зависимости  $v_\phi(\lambda)$  достигается при  $\lambda_\phi^* = 1,79$  см и составляет  $v_\phi^* = 21,4$  см.

Для объяснения картины волн, появляющейся на поверхности воды при падении маленького камешка или при движении корабля, важную роль играет также зависимость групповой скорости от  $\lambda$ . Для воды она показана на рис. 11.4,б. Видно, что групповая скорость также имеет минимум, который соответствует значениям  $\lambda_{gp}^* = 4,39$  см и  $v_{gp}^* = 17,9$  см.

**Задача 11.3.** Получите значения  $\lambda_\phi^*$ ,  $v_\phi^*$ ,  $\lambda_{gp}^*$  и  $v_{gp}^*$ , приведенные в предыдущем абзаце.

Если известна зависимость скорости от длины волны, т.е. известен закон дисперсии, можно объяснить много разных явлений. Почти во всех описаниях круговых волн приводятся слова бессмертного Козьмы Прутова: “Бросая в воду камешки, смотри на круги ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавою”. От камешка, возмущающего только очень малую область воды, начинают расходиться круги, а в центре быстро расширяющейся системы кругов образуется область спокойной воды. Капиллярные волны имеют малую амплитуду и быстро затухают при убегании от центра. Их и видно плохо. Поскольку у гравитационных волн затухание меньше, они живут дольше, и их хорошо видно. В следующих

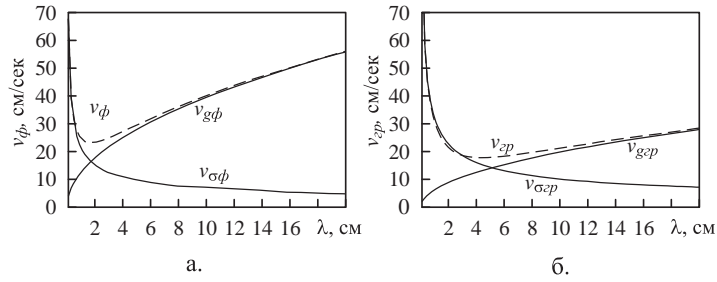


Рис. 11.4. Зависимости фазовой (а) и групповой (б) скорости от длины волны для поверхностных волн на воде. Индексами  $g$  и  $\sigma$  обозначены кривые для гравитационных и капиллярных волн соответственно; пунктиром показаны общие зависимости для гравитационно-капиллярных волн.

разделах этой главы будет изложено математическое описание круговых волн на воде и системы волн на воде за движущимся источником.

#### § 4. Круговые волны на воде

Попробуем сначала понять картину волн, которая возникает, когда на поверхность спокойной воды падает камешек или капля воды<sup>4</sup>. Наш опыт показывает, что появляющиеся волны не слишком сильно зависят от формы камешка, поэтому можно считать, что он круглый, и вся картина симметрична относительно точки падения. В первые мгновения после падения на поверхности появляется возмущения, а в слое жидкости — сложное распределение скоростей и давлений. Рассчитать их практически невозможно, да и не нужно, потому что качественная картина практически не зависит от этих деталей. Поэтому ограничимся простой моделью, считая, что в начальный момент на поверхности создано некоторое возмущение  $\eta(r, 0) = \eta_0(r)$ , а скорость жидкости в любой точке (в том числе и на поверхности) равна нулю.

Можно сделать некоторые качественные заключения о форме начального распределения. Ясно, что чем меньше поперечный размер капли или камешка, тем меньше область, где  $\eta_0(r)$  отлична от нуля. Если область на-

<sup>4</sup>Изложение этого и следующего параграфов следует [5, 13].

чального возмущения имеет конечный размер, то он совпадает по порядку величины и размером упавшего в воду тела  $l$ . Из общих свойств преобразования Фурье следует, что разложение такого возмущения в интеграл Фурье будет содержать гармонические составляющие со всевозможными по направлению в плоскости  $x, y$  волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , а амплитуды спектральных гармоник будут максимальны для возмущений с длинами волн  $\lambda \sim l$ , или волновыми числами  $k_m \sim 2\pi/l$ . Наиболее интенсивно возбуждаются волны, длина которых порядка  $l$ . Вспоминая рис. 11.4,а, приходим к выводу, что при  $d \gtrsim \lambda_\phi^*$  волны будут гравитационными, а при  $d \lesssim \lambda_\phi^*$  — капиллярными. Картины круговых волн для обоих случаев выглядят по разному, что определяется различием в законах дисперсии.

Каждая спектральная компонента побежит от места возмущения со своей фазовой скоростью  $v_\phi$ , причем из-за аксиальной симметрии они побегут сразу по всем направлениям, формируя картину расширяющихся цилиндрических волн. Это лишь немногим усложняет дело по сравнению с одномерным случаем. Нужно чуть-чуть подождать, пока волны не отойдут от центра, тогда небольшой участок волнового фронта можно будет рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в одном направлении<sup>5</sup>. Чтобы найти результат интерференции всех спектральных гармоник, воспользуемся понятием волнового пакета, введенным в главе 11. Для этого выберем какое-нибудь значение волнового числа  $k$  и рассмотрим все Фурье компоненты с волновыми числами, лежащими близи него в интервале шириной  $\Delta k \ll k$ . Это и есть волновой пакет, распространяющийся с групповой скоростью  $v_{gp}(k)$ . Совокупность пакетов, покрывающая весь диапазон волновых чисел и составляет результирующее возмущение.

Если рассматривать точки, находящиеся достаточно далеко от центра, то возмущение в них прибегает через большое время, за которое пакеты с близкими волновыми числами разойдутся далеко в пространстве друг от друга. Поэтому можно считать, что при таких условиях, в точке  $r$  в момент времени  $t$  находится только пакет, для которого

$$v_{gp}(k) = r/t. \quad (11.63)$$

Решив это уравнение относительно  $k$ , можно найти “локальное” значение волнового числа как функцию координаты и времени  $k(r, t)$ . Термин “локальное” волновое число подразумевает, что измеряя в момент времени  $t$  в точке  $r$  длину волны, мы получим примерно значение  $\lambda \approx 2\pi/k(r, t)$ . На

---

<sup>5</sup>Разумеется строгий анализ, который можно найти, например в [13], подтверждает это приближенное рассмотрение.



самом деле, для измерения длины волны необходимо померить, например, расстояние между несколькими повторяющимися гребнями или впадинами (измерение только между двумя соседними гребнями недостаточно, так как при этом не будет уверенности, что процесс близок к периодическому, то есть что действительно измеряется длина волны). Так как в случае волнового пакета эти расстояния от одного периода к другому немного меняются, мы и говорим о *примерном* значении длины волны и волнового числа в точке<sup>6</sup>. Волновому числу  $k(r, t)$ , в соответствии с дисперсионным уравнением, отвечает частота  $\omega(r, t) = \omega[k(r, t)]$ , которая также зависит от  $r$  и  $t$ .

Для построения видимой картины волн знания волнового вектора и частоты, однако, недостаточно. Вспомним, что для плоской волны вида  $\text{Re}\{Ae^{i(\omega t - kx)}\}$  гребням и впадинам соответствуют определенные значения фазы  $\Phi = \omega t - kx$ , а именно, гребни находятся в точках, где  $\Phi = 2\pi n$ , а впадины — там, где  $\Phi = \pi(2n + 1)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому в нашем случае также необходимо знание локальной фазы волны в зависимости от координаты и времени:

$$\Phi(r, t) = \omega(r, t)t - k(r, t)r.$$

Чтобы двигаться дальше, нужно задать конкретный закон дисперсии. Будет считать, что глубина жидкости достаточно велика, а размер камешка — несколько сантиметров в диаметре. Тогда можно считать, что возникающие волны — гравитационные волны на глубокой воде. Закон дисперсии (11.50) известен, поэтому можно записать  $v_{gp}(k) = \omega'(k) = \sqrt{g/k}/2$ . Тогда из (11.63) можно найти

$$k(r, t) = \frac{gt^2}{4r^2}. \quad (11.64)$$

Отсюда видно, что проходящие через фиксированную точку пространства волны сначала имеют большую длину волны (малые  $k$ ), а с течением времени она уменьшается. Напомним, что все рассмотрение, основанное на концепции волновых пакетов, базируется на предположении, что расстояние от источника волн до точки наблюдения достаточно велико, так что в формуле (11.64)  $r$  не может быть равно нулю! Подставляя это выражение в закон дисперсии, получаем локальную частоту и фазу волны:

$$\omega(r, t) = \frac{gt}{2r}, \quad \Phi(r, t) = \frac{gt^2}{4r}. \quad (11.65)$$

---

<sup>6</sup>Здесь прослеживается прямая связь с квантовой механикой, где значение импульса частицы в точке, а значит и волновое число волны Де-Бройля  $\mathbf{k} = \vec{p}/\hbar$ , можно указать лишь с конечной погрешностью, задаваемой принципом неопределенности.

Эти соотношения позволяют представить качественную картину разбегания волн практически полностью. Вспоминая вид зависимости  $v_{ep}$  от  $\lambda$ , можно сделать вывод, что любое возмущение на глубокой воде распространяется быстрее, чем  $v_{ep}^*$ , поэтому должен, во всяком случае, существовать круг спокойной воды, радиус которого  $r_1 = v_{ep}^* t$  линейно увеличивается со временем. С другой стороны, волновое движения можно ожидать в той области, где фаза волны  $\Phi$  заметно (на величину порядка  $\pi$ ) меняется в пространстве и времени. При  $r_2 \gtrsim gt^2/4$ , как следует из (11.65), фаза меньше единицы и колебаний нет. Поэтому картина волн должна лежать внутри круга радиуса  $r_2$ , который растет во времени с ускорением  $g/2$ . Все волновое возмущение сосредоточено в кольце с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , ширина которого постоянно увеличивается. Внутри кольца отдельные цуги волн появляются на заднем фронте возмущения и со временем продвигаются к переднему фронту (в сторону внешней границы кольца). Ширина отдельного “горба” при этом увеличивается, а скорость растет, так как он сдвигается в стороны меньших волновых чисел. В каждой точке скорость вершины вдвое превышает скорость, с которой переносится локальное значение волнового числа. Достигнув переднего фронта, “горб” расплывается и уменьшается по высоте настолько, что становится практически невидимым.

Строго говоря, и при  $r > r_2$  существует отличное от нуля возмущение, однако оно не носит характера колебаний в пространстве, а является “предвестником” — в этой области при увеличении  $r$  поле быстро спадает к нулю. Предвестник формируется за счет самых быстрых пакетов, которые соответствуют большим длинам волн. Если глубина жидкости не слишком большая, то может оказаться, что приближение глубокой воды для них уже неприменимо, поскольку в этой части спектра  $kH \ll 1$ . Дисперсия при этом отсутствует, все такие волны распространяются с одной и той же групповой скоростью  $\sqrt{gH}$ , которая является предельной для данной системы. Следовательно, вне круга с радиусом  $r_3 = \sqrt{gH}t$ , возмущение строго равно нулю в соответствии с принципом причинности.

Для капиллярных волн картина разбегающихся кругов на поверхности воды совершенно другая — это связано с иным законом дисперсии (11.61). Маленькие по ширине цуги волн рождаются вблизи внешней границы кольца, содержащего все возмущение, и исчезают вблизи внутренней, увеличиваясь в размерах. Все возмущение в целом опережает каждый отдельный “горб”, так как в этом случае  $v_{ep} = \frac{3}{2}v_\phi$ . К этим заключениям легко прийти, получив выражения для локальных значений волнового числа, частоты и фазы капиллярных волн. Сделайте это самостоятельно.

**Задача 11.4.** Получите выражение для локальной фазы круговой капиллярной волны на поверхности глубокой воды.

**Ответ.**  $\Phi(r, t) = -\frac{4\rho}{27\sigma} \frac{r^3}{t^3}$

## § 5. Волны за движущимся источником

Еще более красивая картина волн возникает на воде вслед за движущимся источником. Ее можно видеть, например, наблюдая за движением корабля с высокого обрыва реки или моста. Поэтому такие волны называют еще корабельными [5]. В качестве модели для теоретического анализа примем, что в каждой точке траектории источник создает возмущение, аналогичное возмущению от камешка, брошенного в воду, которое было рассмотрено в предыдущем параграфе. В линейной случае задача тогда сводится к суммированию все таких элементарных возмущений. Для полного понимания необходимо иметь представление о таком замечательном физическом эффекте, как излучение Вавилова - Черенкова. Так как подробно теория этого эффекта будет рассмотрена в главе 17, то читатель, незнакомый с ним, может при первом чтении пропустить данный параграф и изучить его позднее.

Кратко напомним суть эффекта Вавилова - Черенкова. Пусть имеется среда, в которой могут распространяться волны, вообще говоря произвольной физической природы, с фазовой скоростью  $v_\phi$ . Если в такой среде движется источник с постоянной скоростью  $V$ , то происходит излучение волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , для которых выполняется условие  $V > v_\phi$ . При этом угол  $\theta$  между направлением движения и волновым вектором определяется условием

$$\cos \theta = \frac{v_\phi}{V}. \quad (11.66)$$

Точечный источник испускает волны со всеми возможными волновыми числами, удовлетворяющими условию Черенкова, каждая из таких волн излучается под своим углом. Следует подчеркнуть, что источник сам по себе не совершает никаких колебаний и может вообще не иметь внутренних степеней свободы. На излучение тратится кинетическая энергия поступательного движения, поэтому, чтобы поддерживать скорость постоянной, надо совершать работу. Этот эффект вносит вклад в сопротивление движению тела за счет излучения волн и его учет необходим, например, при конструировании судов.

Если в среде нет дисперсии, то направление излучения для всех частот совпадают, в результате формируется конус, вершина которого совмещена с мгновенным положением источника, а угол полураскрыва равен  $\psi = \pi/2 - \theta$ . Все излучение сосредоточено вблизи поверхности конуса, а точно на нем поле теоретически обращается в бесконечность. Такова картина, например, для черенковского излучения электронов или акустической волны при сверхзвуковом движении снаряда<sup>7</sup>.

Вернемся к волнам на воде. С точки зрения теории, волны, возбуждаемые на поверхности воды за движущимся судном, есть ни что иное, как излучение Вавилова - Черенкова. Здесь, однако, эффект усложняется дисперсией среды. Тем не менее, зная картину волн от точечного источника, можно составить представление об общей картине и в этом случае. Для понимания важны следующие утверждения:

- 1) В результате эффекта Вавилова - Черенкова, излучение под углом  $\theta$  к направлению движения имеет волновое число  $\mathbf{k}$ , определяемое условием (11.66).
- 2) Вдоль этого направления излучение распространяется в виде волнового пакета с групповой скоростью.

В соответствии с условием (11.66), скорость источника должна быть больше или равна фазовой скорости волны. Так как для капиллярно-гравитационных волн зависимость  $v_\phi(\lambda)$  имеет минимум (см. рис. 11.4), отсюда следует, что при  $V < v_\phi^* = 21.4$  см возбуждения волн не будет. Чтобы появилась характерная картина “усов” за источником, он должен двигаться с достаточно большой скоростью. Этим обстоятельством объясняется, в частности, тот факт, что на поверхности быстрого ручья появляются “усы” от опущенной в воду ветки или лежащего на мели камня, в то время, как на медленной воде их нет.

Приступим к количественному построению картины волн, причем начнем со случая гравитационных волн на глубокой воды, опираясь на закон дисперсии (11.50). Докажем сначала, что вся картина волн сосредоточена в клинообразной области с углом раскрыва  $\approx 39^\circ$ , причем вершина клина совпадает с мгновенным положением источника. Этот красивый результат был впервые получен Кельвином [5]. На рис. 11.5 прямая  $AB$  представляет собой траекторию судна, причем пусть оно в некоторый момент находилось в точке  $A$ , и за время  $t$  переместилось в точку  $B$ , значит

---

<sup>7</sup>Разумеется в действительности бесконечный рост поля ограничивают эффекты, которые не были приняты во внимание. Для электрона это слабая дисперсия среды, в акустике — формирование ударной волны (конуса Маха).

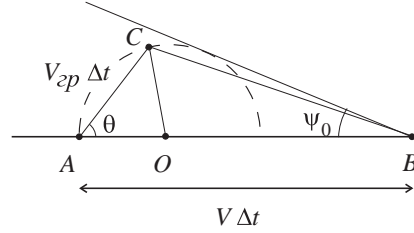


Рис. 11.5. К объяснению картины волн за движущимся источником

$|AB| = Vt$ . В точке  $A$  произошло излучение пакетов во всех направлениях, для которых выполнено условие Черенкова. Под углом  $\theta$  бежит пакет, для которого  $v_\phi = V \cos \theta$ . За время  $t$  он переместится на расстояние  $r = v_\phi t = Vt \cos \theta/2$  (так как для гравитационных волн на глубокой воде  $v_{gp} = v_\phi/2$ ) и попадет в точку  $C$ . Нетрудно убедиться, что местоположение всех таких пакетов совпадает с полуокружностью радиуса  $Vt/4$  и центром в точке  $O$ , находящимся на расстоянии  $3Vt/4$  от точки  $B$ . Действительно, введем систему координат с началом в точке  $B$  и осью  $x$ , совпадающей с направлением движения источника. В ней координаты точки  $C$  даются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= -Vt + r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Выразив  $r$  через  $t$  и  $\theta$ , получим

$$\begin{aligned} x &= -Vt + \frac{1}{2}Vt \cos^2 \theta = -\frac{3}{4}Vt + \frac{1}{4}Vt \cos 2\theta, \\ y &= \frac{1}{2}Vt \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4}Vt \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (11.68)$$

Отсюда  $(x + 3Vt/4)^2 + y^2 = (Vt/4)^2$  и утверждение доказано. Проведем касательную из точки  $B$  к окружности, показанной на рис. 11.5 пунктирной линией. Так как  $|OB| = 3Vt/4$ , угол  $\psi_0 = \arcsin(1/3) \approx 19,5^\circ$ . Замечательно, что этот угол не зависит от  $t$ , поэтому волны, испущенные в разных точках траектории будут лежать в пределах одного и того же клина! Так как картина симметрична относительно прямой  $AB$ , то мы приходим к результату Кельвина. Все волны остаются сзади судна, что неудивительно, так как  $v_{gp} < V$ .

Следующий шаг состоит в том, чтобы получить полную картину волн. Используя соотношение (11.65) для фазы волны и формулу  $r = Vt \cos \theta/2$ ,

можно выразить  $r$  и  $Vt$  через величины  $\Phi$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} r &= \frac{V^2 \Phi}{g} \cos^2 \theta, \\ Vt &= \frac{2V^2 \Phi}{g} \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Подставив эти выражения в (11.67), получаем

$$\begin{aligned} x &= -\frac{V^2 \Phi}{g} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta), \\ y &= \frac{V^2 \Phi}{g} \sin \theta \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Соотношения (11.70) представляют собой уравнения для линий постоянной фазы в параметрической форме. Решив их для заданных значений координат, можно найти фазу и направление волнового вектора в любой точке. Это можно сделать численно, однако важнее, что эти соотношения дают удобный способ нарисовать картину волн. Зафиксируем фазу  $\Phi$  и будем менять значения  $\theta$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , при этом точка с координатами  $(x, y)$  будет перемещаться вдоль линии постоянной фазы, например, вдоль одного из гребней. Задавая фазы, отличающиеся по величине на  $2\pi$ , можно получить всю видимую картину волн. Результат показан на рисунке 11.6. На рисунке 11.7 приведена фотография волн за движущимся судном, сделанная с самолета. На фотографии ясно выражены боковые волны, прижатые к границе клина Кельвина. Волны вслед за кормой судна в данном случае практически не возбуждаются, причина этого будет объяснена ниже. Турбулентный след за кормой судна объясняется причинами, которые здесь не рассматриваются. Вернемся к рис. 11.6. Вся совокупность гребней сосредоточена внутри клиновидной области, причем отчетливо наблюдаются волны двух типов с различным поведением. Во-первых, это короткие волны, прижатые к границам клина и распространяющиеся под большими углами к оси  $x$ . Во-вторых — более длинные волны, бегущие вслед за кормой, фронт их перпендикулярен вектору скорости судна. Для таких волн условие черенковского излучения  $V \approx v_\phi = \sqrt{gk}$ , поэтому их длина волны  $\lambda \approx 2\pi V^2/g$ . Гребни, соответствующие двум типам волн касаются друг друга в точках, лежащих на границе клина, в них распространение происходит под углом  $\theta_m = \arcsin(1/\sqrt{3}) = 35,3^\circ$ , фазовая скорость в этой точке  $c_m = \sqrt{2/3}V$ , а длина волн  $\lambda_m = 4\pi V^2/3g$ .

Построенная картина, вообще говоря, справедлива для излучателя бесконечно малых размеров, когда эффективно возбуждаются все воз-

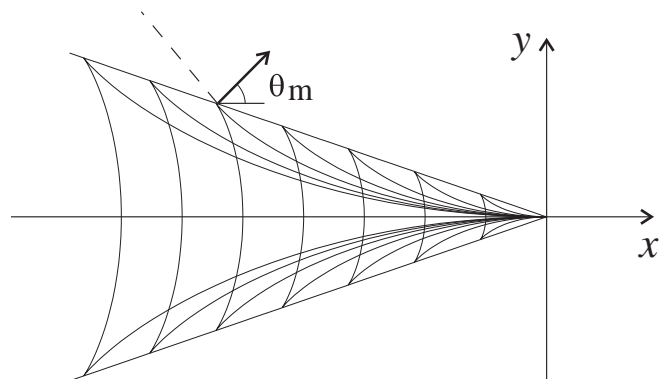


Рис. 11.6. Гравитационные волны на поверхности глубокой воды.



Рис. 11.7. Фотография гравитационных волн за движущимся судном.

возможные волновые числа. Если учитывать конечный размер судна  $l$ , то можно прийти еще к одному интересному выводу. Как уже отмечалось, при таких условиях наиболее сильно возбуждаются волны с  $k \sim 2\pi/l$ , если, разумеется, для них выполняется соотношение  $V > v_\phi$ . Отсюда следует, что характер волн определяется безразмерным параметром  $\mathbf{Fr} = V^2/gl$ , называемым в гидродинамике числом Фруда [5]. Если  $\mathbf{Fr} \ll 1$ , то волны, для которых  $\lambda \sim l$ , лежат вне пределов черенковского резонанса и интенсивность излучения в целом мала. В другом пределе  $\mathbf{Fr} \gg 1$  следует ожидать интенсивного возбуждения волн и резкого повышения сопротивления движению судна. Если число Фруда порядка единицы, то меняя эту величину, можно наблюдать относительное изменение интенсивности волн с разными  $\lambda$ . При небольших числах  $\mathbf{Fr}$  более сильно возбуждаются длинные волны, бегущие вслед за кормой (эта картина характерна для крупных судов), при больших  $\mathbf{Fr}$  (быстроходный катер) — короткие волны, прижатые к границам клина.

Аналогично можно рассмотреть возбуждение капиллярных волн на глубокой воде. В этом случае  $v_{ep} = \frac{3}{2}v_\phi$ , групповая скорость больше фазовой, поэтому, используя условие черенковского излучения (11.66), можно написать  $r = \frac{3}{2}Vt \cos \theta$ . Исключая время из формулы для фазы капиллярных волн (см. ответ к задаче 11.4), имеем  $\Phi = -\frac{\rho V^2}{3\sigma} r \cos^2 \theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} r &= -\frac{3\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{1}{\cos^2 \theta}, \\ t &= -\frac{2\sigma\Phi}{\rho V^3} \frac{1}{\cos^3 \theta}. \end{aligned} \quad (11.71)$$

Подставляя эти соотношения в (11.67), приходим к параметрическим уравнениям для линий постоянной фазы капиллярных волн от движущегося источника:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{2 \sin^2 \theta - \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta}, \\ y &= -\frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{3 \sin \theta}{\cos^3 \theta}. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Картина волн, полученная так же, как и в предыдущем случае<sup>8</sup>, показана на рисунке 11.8. Для волн, излучаемых по направлению движения  $\theta = 0$  и из (11.72) вытекает  $x = \frac{\sigma|\Phi|}{\rho V^2} > 0$ . Такие волны обгоняют источник, что не удивительно, так как групповая скорость больше фазовой. Для волн,

<sup>8</sup>Для правильного построения необходимо учесть, фаза принимает отрицательные значения. Это следует из решения задачи 11.4.



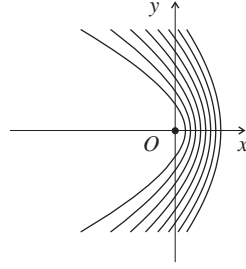


Рис. 11.8. Капиллярные волны за движущимся источником.

излучаемых поперек направления движения  $\theta = \pi/2$  при этом  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ . В этом пределе

$$y \approx \pm \frac{3}{2^{2/3}} \left( \frac{\sigma|\Phi|}{\rho V^2} \right)^{1/3} |x|^{2/3}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (11.73)$$

Форма усов стремится к полукубической параболе. Картину, показанную на рисунке 11.8, легко можно наблюдать в ванной, равномерно двигая перпендикулярно опущенную в воду тонкую спицу и наблюдая за изображением на дне, созданным за счет преломления световых лучей на возмущенной поверхности.

## § 6. Внутренние волны в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.

Простейший пример внутренних волн в стратифицированной жидкости — волны, распространяющиеся вдоль поверхности раздела двух однородных жидкостей разной плотности. Распространение волн обусловлено балансом между силами плавучести и полной силой инерции жидкости. Более сложный случай — волны в жидкости с непрерывной стратификацией. В стратифицированной жидкости любое смещение произвольного участка жидкости по высоте нарушает равновесие и возникают колебания. Как уже говорилось, плотность морской воды зависит не только от давления, но от температуры и от относительного содержания растворенных солей, которые меняются с глубиной.

Предположим сначала, что  $\omega \gg \Omega$  и вращением Земли можно пренебречь. При этом уравнение (11.41) значительно упрощается:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \xi^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \mathcal{V}(z) = 0. \quad (11.74)$$

Если среда безгранична и  $N = \text{const}$ , то  $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(0) \exp(\pm i k_z z)$ ,  $k_z^2 = -\xi^2(1 - N^2/\omega^2)$  и

$$k^2 = k_z^2 + \xi^2 = \xi^2 \frac{N^2}{\omega^2} \quad (11.75)$$

или

$$\sin \theta = \frac{\mu \omega}{N}, \quad (11.76)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $k$  и вертикалью,  $\mu = \pm 1$ . Из (11.76) следует, что волны могут существовать только при  $\omega < N$ . Если угол  $\theta$  задан, то частота  $\omega$  определяется однозначно, в то время как длина волны и фазовая скорость могут быть произвольными.

Заметим, что в несжимаемой жидкости условие  $N = \text{const}$  соответствует экспоненциальной зависимости плотности от глубины.

Рассмотрим распространение внутренних волн в волноводе, образованном поверхностью жидкости и горизонтальным дном. В этом случае решение уравнения (11.62) при сохранении предположения о постоянстве частоты Вэйсяля имеет вид

$$\mathcal{V}(z) = c_1 e^{-i k_z z} + c_2 e^{i k_z z}, \quad k_z = \xi \sqrt{N^2/\omega^2 - 1}. \quad (11.77)$$

Подставляя (11.77) в граничные условия (11.43), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 e^{-i k_z H} + c_2 e^{i k_z H} &= 0, \\ (g + i k_z \omega / \xi^2) c_1 + (g - i k_z \omega / \xi^2) c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Из условия совместности системы (11.78) — равенства нулю ее определителя — находим дисперсионное уравнение

$$g k_z \operatorname{tg}(k_z H) = N^2 - \omega^2. \quad (11.79)$$

При  $k_z H \ll 1$  можно считать, что  $\operatorname{tg}(k_z H) \approx k_z H$  и, следовательно, когда  $\omega < N$ , одно из решений (11.79) запишется так:

$$k_{z0} = \sqrt{(N^2 - \omega^2)/(gH)} \quad (11.80)$$

С учетом второго соотношения (11.77), из (11.80) имеем  $\omega = \xi_0 \sqrt{gH}$ , что совпадает с (11.52) при  $\xi H \rightarrow 0$ .

Очевидно, что найденная в этих приближениях волна — это поверхностная волна в мелкой воде, которая распространяется со скоростью  $\sqrt{gH}$ , т. е. стратификация жидкости не влияет на характер этой волны.

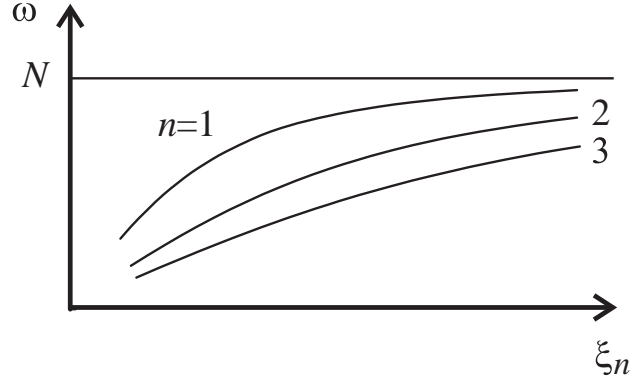


Рис. 11.9. Дисперсия внутренних волн в стратифицированной жидкости.

Мы уже говорили, что при  $N = \text{const}$  в несжимаемой жидкости плотность зависит от глубины по закону  $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-2\nu z)$ . Здесь  $\nu = N^2/(2g)$ . Поскольку  $\nu H \ll 1$  (типичные значения  $N$  для океана колеблются в пределах от 0 до  $0,01 \text{ с}^{-1}$  [5], величина  $(k_{zo}H)^{-2} = g/[H(N^2 - \omega^2)]$  при  $\omega < N$  имеет порядок величины  $(\nu H)^{-1}$ , которая много больше единицы. Переписывая (11.79) в виде

$$\text{ctg}(k_z H)/(k_z H) = g/[H(N^2 - \omega^2)] \sim (\nu H)^{-1} \gg 1,$$

находим, что корни дисперсионного уравнения достаточно близки

$$k_z H \approx n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (11.81)$$

или с учетом второго соотношения из (11.77)

$$\omega = \frac{N}{\sqrt{1 + (n\pi/(\xi_0 H))^2}} \quad (11.82)$$

Полученный для внутренних волн закон дисперсии - это типичный закон дисперсии для многомодового волновода (рис. 11.9).

Когда  $N$  зависит от  $z$ , возможны и более сложные законы дисперсии [14]. Как отмечается в [8], решения уравнения (11.74) с граничными условиями (11.43) при  $N = N(z)$  описывают волны, одна из которых близка к поверхностной, поскольку максимум  $\mathcal{V}(z)$  достигается при  $z = 0$ , и, кроме того, набор внутренних волн, у которых максимумы расположены внутри интервалов  $0 < z < H$ .

Остановимся кратко на гироскопических (инерционных) волнах, закон дисперсии для которых можно получить из уравнений (11.35) и (11.36) для однородной ( $N = 0$ ) несжимаемой ( $c \rightarrow \infty$ ) жидкости. Эти волны характерны для океана — они связаны с вращением Земли.

Для решений вида  $\mathcal{V}(z), \mathcal{P}(z) \sim \exp(\pm i k_z z)$  после простых, но громоздких преобразований получаем (см. [8])

$$\omega^2 = 4\Omega(\mathbf{k}/k) \text{ или } \omega = 2\mu\Omega \cos \theta \quad (\mu = \pm 1), \quad (11.83)$$

где  $\theta$  — угол между  $\Omega$  и  $\mathbf{k}$ ; значение  $\mu$  выбирается из условия  $\mu \cos \theta > 0$ . Из (11.83) следует, что, поскольку для данной частоты угол  $\theta$  вполне определенный, длина волны может быть любой, как и для внутренних волн.

Если  $N = \text{const}$  и  $\Omega \neq 0$ , то возникают так называемые гравитационно-гироскопические волны, закон дисперсии для которых, как показано в [8], имеет вид  $\omega^2 = N^2 \sin^2 \varkappa + 4\Omega^2 \cos^2 \varkappa$ ,  $\varkappa$  — угол между  $\mathbf{k}$  и положительным направлением оси  $z$ .

Волноводная задача для инерционных волн на мелкой воде в пренебрежении членом  $k_y \Omega_y$  (это можно сделать, если  $k_y \ll k_z$ , т. е. если масштаб изменения величин в направлении  $z$  много меньше длины волны в  $y$ -направлении) приводит к дисперсионному уравнению  $\omega^2 = \xi^2 g H + 4\Omega_z^2$ . Когда  $\Omega_z \rightarrow 0$ , получаем длинные гравитационные волны ( $\omega = \xi \sqrt{gH}$ ). Таким образом, вращение Земли приводит к появлению дисперсии у длинных гравитационных волн.

Волны Россби могут быть исследованы в рамках тех же общих уравнений (11.23)-(11.26), но в приближении, когда  $d\Omega/dy X = \beta = \text{const}$  (приближение  $\beta$ -плоскости; см. [7, с. 35]). Прежде чем обсудить свойства этих волн, заметим, что они весьма важны при изучении синоптических океанических вихрей [3, 15]. Эти вихри подобны циклонам и антициклонам в атмосфере (отсюда термин синоптические). Понимание их динамики в связи с процессами взаимодействия океана и атмосферы очень важно для построения корректной математической модели циркуляции атмосферы, а следовательно, обеспечения верного, хотя и сравнительно краткосрочного, предсказания погоды.

Линейные модели распространения волн Россби оказываются полезными при описании среднего дрейфа синоптических вихрей [15].

Традиционным приближением для получения волн Россби является допущение о том, что  $k_z \gg k_y$ . Оно и позволяет отбросить в уравнениях члены, содержащие горизонтальную составляющую вектора  $\Omega$ , т. е. слагаемые, содержащие  $s$ . Главным условием существования этих волн

является изменение вертикальной составляющей  $\Omega$ , с широтой  $\varphi$ , т. е. изменение с широтой горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Для того чтобы учесть это, разложим  $q = (2/\omega)\Omega \sin \varphi$  в ряд по степеням  $y/a$  в точке  $\varphi = \varphi_0 = \varphi_{x=0, y=0}$  и ограничимся двумя членами разложения. Очевидно, что

$$q = q(\varphi_0) + dq/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi = (2\Omega/\omega) \sin \varphi_0 + (2\Omega/\omega) \cos \varphi_0 \Delta\varphi,$$

$\Delta\varphi = y/a$ , где  $a$  — радиус Земли. Окончательно получаем

$$q = (2\Omega/\omega) \sin \varphi_0 + \beta y/\omega, \quad (11.84)$$

$$\beta = (2\Omega/a) \cos \varphi_0. \quad (11.85)$$

Учет члена  $\beta y$  в выражении (11.84) называют учетом  $\beta$ -эффекта. Предполагая еще, что  $c \rightarrow \infty$ , с учетом сделанных допущений перепишем систему уравнений (11.23)-(11.26) следующим образом

$$V_x + iqV_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (11.86)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.87)$$

$$-\rho_{00} \frac{1}{\mathcal{P}(z)} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} = \frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \frac{1}{V_z}. \quad (11.88)$$

Мы уже говорили, что в такой системе уравнений возможно разделение переменных (см. §12.2). В последнем уравнении правая часть может зависеть только от  $x$ , а левая — от  $z$ . Вводя параметр разделения  $\varepsilon$  и приравнявая ему обе части последнего уравнения системы, получим

$$V_x + iqV_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -i\omega\varepsilon V_z; \quad (11.89)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho_{00}} \mathcal{P}(z) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) = 0. \quad (11.90)$$

Продифференцируем первое уравнение в (11.89) по  $y$ , второе по  $x$  и вычтем одно из другого, учитывая, что  $dq/dy = \beta/\omega$ . Используя в получившемся уравнении третье из (11.89), находим

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} + \omega\varepsilon q V_z + i\frac{\beta}{\omega} V_y = 0. \quad (11.91)$$

Дифференцируя третье уравнение из (11.89) по  $y$  и используя второе уравнение, будем иметь

$$\frac{\partial V_y}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon V_y = -\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + iq\omega^2 \varepsilon V_x. \quad (11.92)$$

Выражение для  $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$  легко найти, взяв производную по  $y$  от (11.91). Подставив получившееся соотношение для  $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$  в (11.92) и используя первое уравнение из (11.89), удастся исключить из системы (11.89)-(11.90)  $V_x$  и  $V_y$ .

Уравнение для  $V_y$  имеет вид

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\frac{\beta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \omega^2 \varepsilon (1 - q^2) \right] V_y = 0. \quad (11.93)$$

Предположим, что  $\omega \ll \Omega$  и  $q^2 \gg 1$ , т. е.  $1 - q^2 \approx -q^2$ . Если решение уравнения (11.93) имеет вид плоских волн  $V_y = V_{y0} \exp[-i(k_x x + k_y y)]$ , то дисперсионное уравнение получается таким:

$$[k_x + \beta/(2\omega)]^2 + k_y^2 = [\beta/(2\omega)]^2 - 4\varepsilon \Omega^2 \sin^2 \varphi_0. \quad (11.94)$$

Параметр разделения  $\varepsilon$  находится как собственное значение системы уравнений (11.90 с граничными условиями (11.30) и (11.31; эти уравнения и условия легко переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \varepsilon \omega^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (11.95)$$

$$\mathcal{V}(z)|_{z=-H} = \left[ g \mathcal{V}(z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (11.96)$$

Если положить  $\varepsilon = \xi^2/\omega^2$ , то (11.95) совпадает с уравнением (11.74) для внутренних волн, а (11.96) — с граничным условием (11.43). Из соответствующих соотношений для волноводных волн (из второго из соотношений (11.77) и (11.80), а также (11.81)) имеем для моды  $n = 0$ , которая называется “баротропной”:

$$\varepsilon_0 = 1/(gH), \quad (11.97)$$

для мод более высоких порядков  $n$ , называемых “бароклинные”,

$$\varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \frac{1}{N^2 - \omega^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.98)$$

Проанализируем подробнее дисперсионное уравнение (11.94). Для того чтобы  $k_x$  и  $k_y$  были вещественными, необходима положительность правой части (11.94), т. е. должно выполняться условие  $\beta/(2\omega) > 2\sqrt{\varepsilon}\Omega \sin \varphi_0$ , которое с учетом определения (11.85) удобно переписать как

$$\operatorname{tg} \varphi_0 < (2a\omega\varepsilon^{1/2})^{-1}. \quad (11.99)$$

Если задана широта места  $\varphi_0$ , то волны Россби существуют для частот  $\omega < \omega_{\text{кр}}$ , где критическая частота определяется формулой  $\omega_{\text{кр}} = (2a\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$ . (в частности, для “баротропной” моды из (11.97)  $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{gH}(2a \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$ ). Когда  $\omega$  и  $\varphi_0$  далеки от критических значений, в дисперсионном уравнении (11.94) можно пренебречь последним слагаемым. Предполагается, что  $\omega > 0$ . В этом случае закон дисперсии волн Россби имеет вид

$$\omega = -\frac{k_x \beta}{k_x^2 + k_y^2}. \quad (11.100)$$

Из этого уравнения видно, что оно удовлетворяется лишь при  $k_x < 0$  (как и уравнение (11.94)). Это означает, что волны Россби распространяются только с востока на запад. Последнее подтверждается наблюдениями над синоптическими вихрями там, где средние течения океана слабые [15].

## ГЛАВА 12

### Линейные волны в плазме

*Общие сведения о плазме. Гидродинамическое описание плазмы (основные уравнения плазменной гидродинамики). Дисперсионное уравнение для плазменных ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев. Элементы кинетической теории плазмы плазма в продольном поле; плазменные колебания и затухания Ландау). Дисперсия волн в двухжидкостной плазменной гидродинамике, ионно звуковые волны.*

#### § 1. Общие сведения о плазме.

Как известно [1, 2] совокупность свободно движущихся разноименно заряженных частиц (ионизованный газ) называется плазмой, если дебаевский радиус мал по сравнению с размерами объема, занимаемого газом.

Напомним физический смысл радиуса Дебая. Плазму можно рассматривать как смесь трех компонентов — свободных электронов, положительных ионов и центральных атомов или молекул. Квазинейтральность плазмы, т. е. приблизительное равенство плотностей электронов и ионов, определяется электрическими силами, которые связывают отрицательные и положительные заряды в плазме. При смещении группы электронов относительно ионов, т. е. при разделении зарядов, возникают электрические поля, стремящиеся восстановить квазинейтральность.

Пусть в каком-то объеме после возмущения остались заряды одного знака, что соответствует полному разделению зарядов. Если объемная плотность заряда  $\rho = ne$  ( $n$  — концентрация частиц,  $e$  — заряд частицы), то поле в выделенной области удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ . Очевидно, что для области с линейными размерами порядка  $x$  имеем  $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim E/x \sim 4\pi ne$  и  $E \sim 4\pi nex$ , что соответствует изменению потенциала плазмы в области разделения зарядов на величину  $V \sim Ex \sim 4\pi nex^2$ . Если разность потенциалов  $V$  велика, то разделения зарядов не будет: сильное поле вытолкнет из объема, где нарушена квазинейтральность, частицы с зарядом одного знака и втянет частицы другого знака. Что будет, если выделенный в плазме объем мал настолько, что поле, созданное избытком в нем частиц одного знака, слабо и не может существенно



изменить движение частиц? В таком объеме, для которого  $x < r_D$  ( $r_D$  — характерный линейный размер), при заданных концентрации и температуре плазмы возможно нарушение квазинейтральности плазмы. Оценим  $r_D$ .

Если в области с линейным размером порядка  $r_D$  произошло полное разделение зарядов, то потенциальная энергия заряженной частицы имеет порядок тепловой энергии частиц, т. е.  $W_n = eV \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim k_B T$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура плазмы, которая пока принята одинаковой для электронного и ионного компонентов). Таким образом,

$$r_D \sim [k_B T / (4\pi n e^2)]^{1/2} \sim (T/m)^{1/2}. \quad (12.1)$$

Эту величину называют радиусом экранирования. Дело в том, что при введении в плазму пробного точечного заряда вокруг него образуется область сильного электрического поля, ограниченная сферой, радиус которой равен  $r_D$  (радиус Дебая, или дебаевская длина). Таким образом, радиус Дебая — это характерный пространственный масштаб областей декомпенсации плазмы, а рассматриваемому нами случаю соответствует условие  $x \gg r_D$ . Время  $t$ , в течение которого сохраняются области декомпенсации, пропорционально  $r_D/v_e$ , где скорость  $v_e$  электронов (наиболее быстрых частиц) определяется из соотношения  $m_e v_e^2 / 2 \sim k_B T$  ( $m_e$  — масса электрона). Тогда характерный временной масштаб декомпенсации плазмы

$$t \sim [k_B T / (4\pi n e^2)]^{1/2} (2k_B T / m_e)^{-1/2} \sim [m_e / (4\pi n e^2)]^{1/2}.$$

Замечательно, что это время от температуры уже не зависит. Соответствующая этому времени частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} \quad (12.2)$$

называется плазменной.

Сделаем еще два замечания о концентрации и температуре плазмы. Поскольку в плазме могут быть помимо однозарядных и многозарядные ионы, концентрации электронов и ионов не обязательно равны. Кроме того, так как массы электронов и ионов сильно различаются, плазма в общем случае характеризуется двумя температурами — электронной  $T_e$  и ионной  $T_i$ . Лишь когда средние кинетические энергии электронов и ионов близки, можно говорить просто о температуре  $T$  плазмы.

## § 2. Гидродинамическое описание плазмы (основные уравнения плазменной гидродинамики).

Для описания распространения волн малой амплитуды в плазме удобно использовать модель двухжидкостной гидродинамики, в рамках которой плазма представляется смесью электронной и ионной жидкостей.

Модель справедлива, когда характерный пространственный масштаб много больше длины свободного пробега и характерный временной масштаб (характерная длительность процессов)  $t_p$  много больше времени  $\tau$  между двумя столкновениями. Подобно обычной гидродинамике, для полного описания плазменной жидкости достаточно задать скорость любого компонента  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , плотность  $n(x, y, z, t)$  и температуру  $T(x, y, z, t)$ .

Движение единичного объема ионного (индекс  $i$ ) или электронного (индекс  $e$ ) компонента плазмы подчиняется второму закону Ньютона:  $n_{e,i} m_{e,i} d\mathbf{v}/dt = \sum \mathbf{F}_s$ , где  $\sum \mathbf{F}_s$  — сумма сил, действующих на этот объем. Что это за силы? Если сразу отказаться от учета силы тяжести, то для ионного компонента это прежде всего, сила, обусловленная градиентом давления и равная  $-\nabla p_i$ . Как и в обычной гидродинамике, для замыкания системы уравнений плазменной гидродинамики нужно использовать уравнение состояния, связывающее давление, плотность и температуру. Давление каждого компонента плазмы с изотропным распределением заряженных частиц выражается, как и для идеального газа, уравнением состояния  $p_{i,e} = n_{i,e} k_B T_{i,e}$ . Используя уравнение состояния, получим, что  $-\nabla p_i = -\nabla n_i k_B T_i$ . Поскольку в плазме существует электрическое поле, то вторая сила, действующая на единичный ионный объем, — сила со стороны электрического поля, которая для однозарядных ионов равна  $-n_{i,e} e_{i,e} \nabla \varphi$ . Потенциал электрического поля  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e(n_i - n_e) \quad (12.3)$$

где  $e_i = e_e = e$ . Существование электрического поля приводит к тому, что в общем случае  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_e$  поэтому между компонентами возникает сила трения  $\mathbf{F}_{ei}$ , которая определяется импульсом, передаваемым в единицу времени электронами ионам, причем  $\mathbf{F}_{ei} = -\mathbf{F}_{ie}$  [3]. Наконец, если плазма помещена в магнитное поле, то на единичный объем действует еще и сила Лоренца, равная  $-(1/c)e_{i,e}n_{i,e}[\mathbf{v}_{i,e}\mathbf{B}]$ . Расшифровывая слагаемое  $\sum \mathbf{F}_s$  в уравнении движения единичного объема ионной жидкости,

получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{\nabla n_i k_B T_i}{m_i n_i} - \frac{e_i}{m_i} \nabla \varphi + \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_i n_i} - \frac{e_i}{cm_i} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]. \quad (12.4)$$

По аналогии для электронного компонента имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{\nabla n_e k_B T_e}{m_e n_e} - \frac{e_e}{m_e} \nabla \varphi - \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_e n_e} - \frac{e_e}{cm_e} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}]. \quad (12.5)$$

Уравнения (12.4) и (12.5) — уравнения Эйлера для двух заряженных взаимопроникающих жидкостей, которые взаимодействуют между собой благодаря трению и через самосогласованное электрическое поле. Если плазма сохраняет квазинейтральность и ионы однозарядные, то  $n_i \approx n_e = n$ . В этом случае можно перейти к модели одножидкостной гидродинамики, сложив уравнения (12.4) и (12.5). Тогда, если пренебречь силой Лоренца, получим

$$m_i n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla [n k_B (T_i + T_e)], \quad (12.6)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + (m_e/m_i) \mathbf{v}_e \approx v_i$  (слагаемые, связанные с силами <<электрического трения>> и трения из-за столкновений, взаимно уничтожились).

Для электронной и ионной жидкостей должны также выполняться уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0. \quad (12.8)$$

При выводе предполагалось, что процессами ионизации и рекомбинации можно пренебречь.

### § 3. Дисперсионное уравнение для плазменных ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев.

Предположим, что все электроны в тонком слое холодной бесстолкновительной безграничной плазмы ( $T_e = T_i = 0, F_{ei} = F_{ie} = 0$ ) внезапно смещены вправо так, что между плоскостями 1 и 2 на рис. 12.1,а электронов нет. Ионы плазмы будем считать неподвижными. Справа от плоскости 2 будет избыток заряда, что приведет к возникновению возвращающей силы  $F_B = -eE_x$  обусловленной декомпенсацией зарядов. Величину  $E_x$  мы

уже оценивали: если электроны сместились на  $x$  то  $F_B \approx -4\pi n e^2 x'$ . Эта сила сообщает им ускорение  $-(4\pi n e^2/m_e)x'$ , поэтому движение группы смещенных электронов описывается уравнением гармонических колебаний с плазменной частотой  $\omega_p$ :

$$\ddot{x}' + \omega_p^2 x' = 0.$$

. Такие колебания называются плазменными или ленгмюровскими колебаниями в “холодной” бесстолкновительной неподвижной плазме. Опишем их с помощью уравнений (12.4)-(12.8). Будем полагать, что магнитное поле равно нулю; столкновениями можно пренебречь; ионы не участвуют в колебаниях и являются однородным компенсирующим неподвижным фоном ( $m_i \gg m_e$ ); плазма представляет собой одномерный поток электронов, движущийся со скоростью  $v_0 = \text{const}$  в направлении оси  $x$ . Учтем также влияние сил, связанных с перепадом давления в плазме, т. е. влияние звуковых эффектов. Допустим, что начальное возмущение имеет вид плоской волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  ( $f' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ ). Для малых возмущений давление электронной жидкости  $p_e = p_0 + p'$ , концентрация  $n = n_0 + n'$ , скорость электронной жидкости  $v = v_0 + v'$  (все возмущенные величины, много меньшие соответствующих невозмущенных). Давление электронной жидкости представим в виде  $p_e(n_0 + n') = p_0 + m_e(\partial p_e / \partial \rho_0)n'$  ( $\rho$  — плотность электронного газа) и  $\nabla p_e = m_e(\partial p_e / \partial \rho_0)(\partial n' / \partial x)$ . При сделанных допущениях из уравнений двухжидкостной плазменной гидродинамики (12.4), (12.5) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{n_0} \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} &= 4\pi e n', \quad \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n'}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения  $v', n', \varphi' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , из условия совместности получившейся алгебраической системы находим закон дисперсии ленгмюровских волн:

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 + k^2 \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0}. \quad (12.9)$$

Это уравнение при  $v_0 = 0$  соответствует дисперсионному уравнению  $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2/(LC)$  для цепочки связанных маятников (см. рис. 12.2). Подобное (12.9) уравнение было получено впервые Ленгмюром, который исходил из аналогии со звуковыми волнами в воде (11.12). Здесь осталась

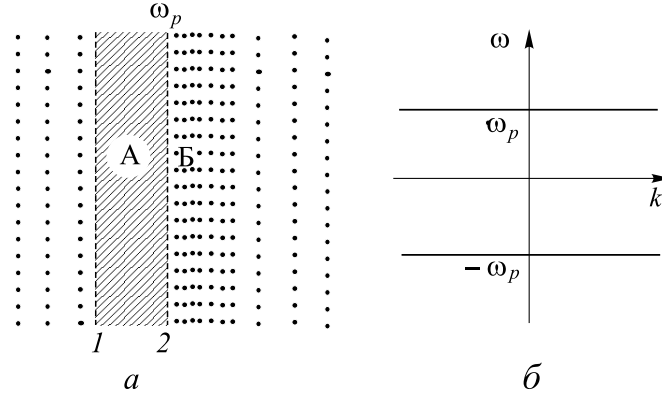


Рис. 12.1. К объяснению ленгмюровских плазменных колебаний;  
 а — все электроны в тонком слое внезапно смещены вправо (А — область, где электронов нет; Б — область с избытком электронов);  
 б — дисперсионная кривая  $\omega^2 = \omega_p^2$ .

неизвестной величина  $\partial p_e / \partial \rho$ . Чтобы замкнуть уравнения гидродинамики, будем считать давление электронной жидкости изотропным и связанным с концентрацией уравнением состояния  $p_e / n^\gamma = \text{const}$ , но  $p_e = nk_B T_e$  поэтому  $\partial p_e / \partial \rho_0 = \gamma p_e / (n m_e) (\rho_0 = m_e n)$ . Как следует из кинетической теории [2],  $\gamma = 3$  т.е.  $\partial p_e / \partial \rho_0 = 3k_B T_e / m_e$ . Уравнение  $p \sim n^3$  является уравнением состояния газа в случае одномерного адиабатического сжатия и может быть получено из термодинамики. С учетом сказанного из (12.9) окончательно имеем

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 + \frac{3k_B T_e}{m_e} k^2. \quad (12.10)$$

**Задача 12.1.** В книге [1] для модели, в которой газ находится в среде с двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми медленно изменяется, уравнение  $p \sim n^3$  получено из оценочных соображений, основанных на сохранении адиабатического инварианта  $v_\perp l = \text{const}$ , где  $v_\perp$  — компонента скорости частицы, перпендикулярная стенке,  $l$  — расстояние между стенками. Попробуйте рассмотреть эту модель самостоятельно. Формула  $v_\perp l = \text{const}$  легко доказывается, если рассмотреть отражение частиц от неподвижной стенки.

График закона дисперсии для среды из осцилляторов, соответствующий уравнению (12.10) при  $v_0 = 0$ , показан на рисунке 12.2. Остановимся более подробно на анализе (12.9) для различных частных случаев.

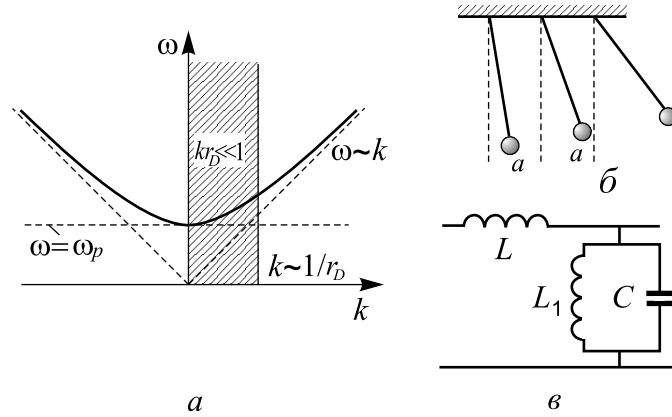


Рис. 12.2. Закон дисперсии для плазмы, представляющей собой среду с дисперсией в области низких частот; показана граница по  $k$  справедливости гидродинамической теории ( $kr_D \ll 1$ ) (а). Механический (б) и электрический (в) аналоги волн в плазме (см. 13.10)

*Плазменные колебания в “холодной” неподвижной плазме.* Дисперсионное уравнение получается из (12.9) при  $T_e = 0$  и  $v_0 = 0$  и имеет уже известный нам вид  $\omega^2 = \omega_p^2$  (см. рис 12.1,б). В “холодной” плазме ленгмюровские колебания не обладают дисперсией, и, если плазма покоится, они не распространяются, поскольку  $v_{gr} = d\omega/dk = 0$ . Следует, однако, заметить, что фазовая скорость отлична от нуля и равна  $v_\phi = \omega/k = \omega_p/k$  ( $k$  — волновое число плоской волны возмущений).

*Плазменные колебания в одномерном “холодном” потоке* ( $v_0 \neq 0, T_e = 0$ ). Из (12.9) находим, что

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 \quad (12.11)$$

Легко видеть, что решением уравнения (12.11) являются широко используемые в СВЧ — электронике [4] волны пространственного заряда: медленная с  $k = \omega/v_0 - \omega_p/v_0$  и быстрая с  $k = \omega/v_0 + \omega_p/v_0$  (рис. 12.3). Плазменные колебания в одномерном “холодном” потоке представляют собой только что рассмотренные ленгмюровские колебания, которые переносятся электронами с дрейфовой скоростью  $v_0$ . Поэтому волны пространственного заряда часто называют электрокинематическими.

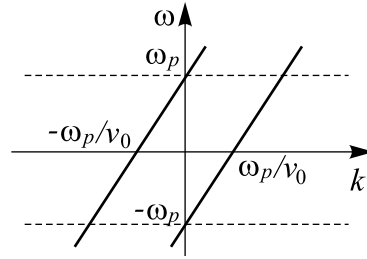


Рис. 12.3. Дисперсионные кривые для холодного одномерного электронного потока

*Плазменные колебания в неподвижной “горячей” плазме* ( $T_e \neq 0, v_0 = 0$ ). Перепишем (12.9) при  $v_0 = 0$  в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3k^2 r_D^2), \quad (12.12)$$

где  $r_D = (k_B T_e / m_e \omega_p^2)^{1/2}$  — радиус Дебая (см. (12.1)). Дисперсионное уравнение (12.12) справедливо только для длинноволновых возмущений, когда  $kr_D \ll 1$  или  $r_D \ll \lambda$ . Электроны смещаются за период  $2\pi/\omega$  на расстояние, меньшее, чем длина волны; сжатие должно быть адиабатическим. Напомним, что мы раскладывали правую часть уравнения состояния в ряд и ограничивались одним членом разложения, поэтому и дисперсионное уравнение (12.12) имеет вид аналогичного разложения по малому параметру  $kr_D$ . Учет конечной температуры электронов в этом приближении дает лишь поправку к теории “холодной” плазмы. Легко видеть, что  $v_{zp} = 3\omega_p k r_D^2 / \sqrt{1 + 3k^2 r_D^2}$ , откуда при условии применимости рассмотрения ( $kr_D \ll 1$ ) имеем

$$v_{zp} \approx 3kr_D \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}. \quad (12.13)$$

Величина  $\sqrt{k_B T_e / m_e}$  имеет порядок тепловой скорости электронов, поэтому групповая скорость волн в неподвижной “горячей” плазме, как это видно из (12.13), много меньше тепловой. Таким образом, волна переносит энергию через “горячую” плазму в отличие от предыдущего случая, где групповая скорость просто равнялась дрейфовой.

**§ 4. Элементы кинетической теории плазмы**  
**(плазма в продольном электрическом поле;**  
**плазменные колебания и затухание Ландау).**

Рассмотрим функцию  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , где  $\mathbf{x}$  — координата,  $\mathbf{v}$  — скорость частицы, так что  $f d^3x d^3v$  — число частиц в области  $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$ ,  $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$  фазового пространства. Она удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k f) + \frac{\partial}{\partial v_k}(a_k f) = 0 \quad (12.14)$$

(см., например, [5]). В уравнении (12.14) нижние индексы обозначают декартовы компоненты, а суммирование ведется по  $k = 1, 2, 3$ . Пусть  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  — ускорение частицы, имеющей в точке  $\mathbf{x}$  скорость  $\mathbf{v}$ , причем, для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$  в электрическом поле  $\mathbf{E}$  и магнитном поле  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \right\}, \quad (12.15)$$

где квадратные скобки означают векторное произведение. Для любого ускорения, выражаемого формулой (12.15),  $\partial a_k / \partial v_k = 0$ , поэтому уравнение (12.14) можно переписать в виде :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0, \quad (12.16)$$

которое в литературе (см., например, [5]) называют уравнением Больцмана — Власова.

При статистическом подходе функция  $f$  должна быть гладкой, т.е. дифференцируемой, функцией, которую будем обозначать  $\bar{f}$ <sup>1</sup>. В данном рассмотрении функция  $\bar{f}$  имеет смысл только в применении к достаточно большому объему фазового пространства  $d^3x d^3v$ , который содержит очень большое число частиц. При этом  $\bar{f} d^3x d^3v$  есть среднее (а не точное) число частиц в этом объеме. Представляется разумным и выражение для полей в формуле (12.15) заменить сглаженными функциями  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$   $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ . Тогда окончательно имеем :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} + \bar{a}_k \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_k} = 0, \quad (12.17)$$

<sup>1</sup>При точном описании функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  представляет собой совокупность  $\delta$  — функций (по одной на каждую частицу). Ускорение  $\mathbf{a}$  после учета собственного поля частицы должно определяться действием полей всех остальных частиц и полем внешнего источника, если такой есть. Иными словами, уравнение (12.16) при таком рассмотрении пригодно для решения задачи об определении траекторий частиц.



где

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} \left\{ \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)] \right\}. \quad (12.18)$$

Если заряженных частиц несколько сортов  $s$ , то нужно использовать функцию  $\bar{f}$  для каждого сорта ( $\bar{f}_s$ ). При этом уравнение (12.17) будет справедливо для каждого сорта частиц.

Очевидно, что плотность объемного заряда и плотность тока для  $s$ -го сорта заряженных частиц имеет вид:

$$\bar{\rho}_s = e_s \int \bar{f}_s d^3v, \quad (12.19)$$

$$\bar{\mathbf{j}}_s = e_s \int \mathbf{v} \bar{f}_s d^3v. \quad (12.20)$$

Систему уравнений (12.17)-(12.20) замыкают уравнения Максвелла, в которые могут входить плотности заряда  $\rho_{внеш}$  и тока  $\bar{\mathbf{j}}$ , создаваемые внешним источником (если он есть). Чтобы применять уравнения (12.17) к “сглаженным” функциям распределения и компонентам электромагнитного поля, необходимо предположить, что сила, действующая на любую частицу, является непрерывной и медленно меняющейся в пространстве функцией, описывающей влияние всех остальных частиц на данную. Это справедливо практически для всех частиц, кроме расположенных вблизи от выбранной: для них изменения поля в рассматриваемой области физического пространства могут быть достаточно быстрыми. Между такими близко расположенными частицами могут происходить столкновения. Уравнение (12.17) можно с хорошим приближением применять только в случае, когда вклад от столкновения с одной или небольшим числом близлежащих частиц пренебрежимо мал по сравнению с коллективным влиянием далеких частиц. Поэтому уравнение (12.17) называют “Бесстолкновительным уравнением Больцмана — Власова” [5]. Заметим, что использованные ранее гидродинамические уравнения могут быть получены при определенных условиях из уравнения (12.17) (см., например, [5]). В векторной форме бесстолкновительное уравнение Больцмана — Власова можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (12.21)$$

заряд выбран как  $+|e|$ , черта над всеми величинами опущена. В невозмущенном состоянии  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  ( $\mathbf{B}_0$  — однородное магнитное поле) и

для каждого сорта частиц  $f = f_0$  во всем пространстве. При этом функция  $f_0$  зависит только от  $\mathbf{v}$ , а суммарные плотность заряда и тока равны нулю. В этом случае из уравнения (12.20) находим, что

$$[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (12.22)$$

Если предположить существование малого возмущения, то

$$f = f_0 + f_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad (12.23)$$

где  $f_1$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{E}_1$  — малые возмущения. С учетом (12.23) и малости возмущений (следует пренебречь квадратами, произведениями и более высокими степенями возмущенных величин) линеаризованное уравнение (12.21) перепишем так:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{cm} \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_1] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (12.24)$$

Будем искать решения уравнения (12.24) в виде

$$f_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1 \sim e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \quad (12.25)$$

и в большинстве случаев опускать в формулах экспоненциальный множитель. Пусть далее  $\mathbf{E}_1$  параллельно  $\mathbf{k}$ , и оба вектора направлены вдоль оси  $x$ ;  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = 0^2$ . Задача в этом случае становится одномерной и уравнение (12.24) принимает вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{e}{m} E_1 \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (12.26)$$

Сначала предположим для простоты, что  $E_1$  — заданное внешнее поле, т.е. правая часть уравнения (12.26) известна. Используя в уравнении (12.26) зависимости (12.25) находим, что

$$f_1 = \frac{ieE_1}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv}. \quad (12.27)$$

---

<sup>2</sup>При этих допущениях  $y$ - и  $z$ -компоненты скорости каждой частицы остаются постоянными, и их распределение не сказывается на результатах. Можно проинтегрировать уравнение (12.21) по  $v_y, v_z$ , рассматривая распределение лишь продольной скорости. Тогда

$$f_{\text{прод}}(x, v_x, t) = \iint f dv_y dv_z.$$

Задача стала одномерной и индекс “прод.” и у  $f_0$ , и у  $f_1$  можно опустить.

Это “вынужденное” решение уравнения (12.26), которое разумно дополнить решением соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0. \quad (12.28)$$

Решение последнего можно представить в виде:

$$f_1(x, v, t) = \mathcal{F}(vt - x, v), \quad (12.29)$$

где  $\mathcal{F}$  — произвольная вещественная функция своих аргументов. Это решение соответствует потоковому переносу возмущения частицами, свободно движущимися с постоянной скоростью. Окончательно общее решение уравнения (12.26) запишем так:

$$f_1(x, v, t) = \frac{ieE_1}{m} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv} e^{i(\omega t - kx)} + \mathcal{F}(vt - x, v), \quad (12.30)$$

где  $\mathcal{F}$  определяется начальными условиями. Как правило, интерес представляет не сама функция  $f_1$ , а плотность заряда и тока

$$\rho = e \int f_1 dv, \quad J = e \int v f_1 dv. \quad (12.31)$$

Выберем в решении (12.30) функцию  $\mathcal{F}$  пропорциональной величине  $E_1$ , сохраняя в  $\rho$  и  $J$  зависимость  $e^{i(\omega t - kx)}$ . Тогда  $\rho$  и  $j$  становятся пропорциональными  $E_1$ , т.е.

$$\rho = \eta(\omega, k) E_1, \quad J = \sigma(\omega, k) E_1, \quad (12.32)$$

где функции  $\eta$  и  $\sigma$  могут быть комплексными.

Принцип причинности налагает на эти функции ряд условий, которые должны обеспечивать реакцию плазмы как следствие на вызывающий ее источник для того, чтобы гармонические решения при сложении давали реально существующее возмущение. Если источник равен нулю при всех  $t < 0$ , то нулю должна быть равна и реакция.

Пусть величина  $k$  — вещественная, а  $\omega$  — комплексная и лежит в нижней полуплоскости ( $\omega/k$ ). В этом случае величины, пропорциональные  $e^{i\omega t}$ , не только осциллируют, но и экспоненциально нарастают во времени. Это можно интерпретировать так: возмущающее поле включили в бесконечно далеком прошлом, когда плазма была невозмущенной, и оно возросло до значения, соответствующего настоящему моменту времени. Тогда функцию  $F$  для соблюдения принципа причинности нужно выбрать

равной нулю, иначе  $f_1$  не обратится тождественно в нуль при  $t \rightarrow -\infty$ . Результирующие значения  $\eta$  и  $\sigma$  должны быть аналитическими функциями  $\omega$ , и в нижней полуплоскости  $\omega$  не должно быть полюсов, потому что они приведут к неустойчивости<sup>3</sup>.

Проведем вычисления, качественно описанные выше, для соотношения (12.30). При  $\text{Im } \omega < 0$  и действительном  $k$  положим  $\mathcal{F} = 0$ . Тогда из соотношений (12.31) и (12.32) с учетом (12.30) находим:

$$\eta = \frac{ie^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{\omega - kv} dv, \quad (12.33)$$

$$\sigma = \frac{ie^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(df_0/dv)}{\omega - kv} dv. \quad (12.34)$$

В выражениях (12.33) и (12.34) подынтегральные выражения имеют особенность при  $v = \omega/k$ , но она “не страшная”, поскольку полюс находится ниже контура интегрирования, как показано на рис. 12.4,а. Величину  $k$  можно без потери общности считать положительной. Устремим теперь  $\text{Im } \omega$  к нулю. Тогда условие аналитичности  $\eta$  и  $\sigma$  требует обхода полюса сверху, как показано на рис. 12.4,б. Если  $\text{Im } \omega > 0$  и поле затухает, то контур интегрирования становится таким, как на рис. 12.4,в. Иногда выбор контура в зависимости от  $\text{Im } \omega$  называют правилом Ландау обхода полюсов. Если  $df_0/dv$  — аналитическая функция комплексной величины  $v$ , то правило обхода дает необходимое аналитическое продолжение по  $\omega$  для функций  $\eta$  и  $\sigma$ .

При вещественном значении  $\omega$  интегрирование проводится по контуру, показанному на рис. 12.4,б, и результат интегрирования можно записать в виде:

$$\int_C = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} - i\pi \text{Res}(\text{при } v = \omega/k) \quad (\omega — \text{вещественна}), \quad (12.35)$$

---

<sup>3</sup>Напомним, что функция  $f(z)$ , где  $z = \text{Re } z + i \text{Im } z = x + iy$ , называется аналитической, если существует производная  $f'(z) = df/dz$ . Если записать  $f(z)$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то для аналитической функции выполняются условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

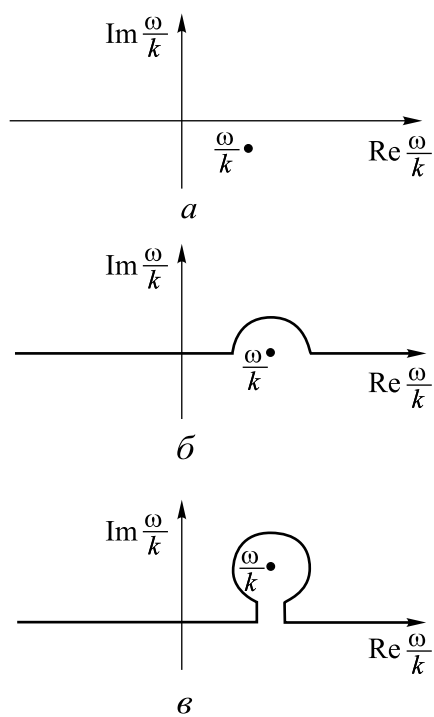


Рис. 12.4. Контуры интегрирования  $C$ , соответствующие правилу Ландау обхода полюса.

где  $\mathcal{P}$  — главная часть интеграла берется вдоль вещественной оси в точки сингулярности  $v = \omega/k^4$ . Это можно записать также в виде

$$\frac{1}{\omega - kv} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} + i\pi\delta(\omega - kv), \quad (\omega - \text{вещественна}) \quad (12.36)$$

$\delta$  — дельта функция Дирака.

Возможна следующая интерпретация соотношения (12.35): вклад от вычета — результат выбора ненулевой функции  $\mathcal{F}$  в формуле (12.30), а интеграл вдоль вещественной оси можно отождествить с частным решением (12.27). Тогда, если  $\mathcal{F} \sim e^{-ikx}$ , то ее следует записать в виде:

$$\mathcal{F}(vt - x) = e^{ik(vt-x)} F(v), \quad (12.37)$$

где  $F(v)$  — произвольная функция. Сравнение этого выражения с представлением (12.36) при вещественном значении  $\omega/k$  показывает, что функцию  $F$  нужно выбрать следующим образом:

$$F(v) = -\frac{\pi E_1 e}{m} \left[ \frac{dt_0}{dv} \right]_{v=\omega/k} \cdot \delta(\omega - kv).$$

---

<sup>4</sup>Напомним основные сведения о вычетах, необходимые для наших вычислений.

Пусть  $f(z)$  однозначная и аналитическая функция всюду на замкнутом контуре  $\mathcal{L}$  (по нему вычисляется  $\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz$ ) и всюду внутри  $\mathcal{L}$ , за исключением конечного числа точек  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , расположенных внутри  $\mathcal{L}$ , контур  $\mathcal{L}$  ориентирован против часовой стрелки (в положительном направлении). Тогда справедлива теорема Коши о вычетах:

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

В правой части суммирование распространяется на все особые точки функции  $f(z)$ , расположенные внутри  $\mathcal{L}$ , если таких нет, то интеграл равен нулю. Из теоремы Коши вытекает интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

причем,  $f(z)$  — однозначная и аналитическая всюду внутри контура  $\mathcal{L}$  и на нем, а точка  $z_0$  находится внутри  $\mathcal{L}$ .

Если подынтегральная функция  $f(z)$  представляет собой отношение двух конечных функций  $f(z) = g(z)/h(z)$ , причем, в некоторой точке  $z = z_0$  числитель отличен от нуля, а знаменатель обращается в нуль по закону  $h(z) \sim z - z_0$  (полюс первого порядка), то

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

где штрих означает производную по  $z$ .

Если  $\omega$  находится в верхней полуплоскости, то интегрирование проводится по контуру, изображенному на рис. 12.4, *в* и

$$\int_C = \int_{-\infty-i\gamma}^{\infty+i\gamma} -2\pi i \operatorname{Res}(\text{при } v = \omega/k), \quad (\operatorname{Im} \omega > 0, \gamma > 0). \quad (12.38)$$

В этом случае выбор  $F(v)$  не столь очевиден.

В теории плазмы часто используется и другое представление отклика плазмы на продольные поля. Уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 4\pi(\rho_{\text{плазм}} - \rho_{\text{внеш}}),$$

где  $\rho_{\text{плазм}} = \eta \mathbf{E}_1$  (см. формулы (12.32)), а  $\rho_{\text{внеш}}$  — плотность заряда, обусловленная каким либо сторонним источником, перепишем в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{внеш}},$$

$\mathbf{D} = (\varepsilon \mathbf{E}_1 / 4\pi)$ . Тогда с учетом того, что все величины изменяются с координатой по гармоническому закону, “диэлектрическая проницаемость”  $\varepsilon$  представляет собой безразмерную величину

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi\eta}{ik} \quad \text{или} \quad \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \quad (12.39)$$

В такой трактовке заряды плазмы рассматриваются как источники поляризации, а не токов, поэтому имеет место аналогия не с проводящей средой, а с диэлектриком.

Предположим теперь, что поле  $\mathbf{E}_1$ , которое до сих пор считали заданным, возникает за счет пространственного заряда самой плазмы. В рамках одномерной линеаризованной модели уравнение Пуассона при  $\rho_{\text{внеш}} = 0$  примет вид:

$$-ikE_1 = 4\pi\rho, \quad (12.40)$$

где  $\rho$  — полная плотность пространственного заряда, создаваемая всеми составляющими плазмы. Будем далее для простоты считать, что  $\rho$  определяется только электронной компонентой. Это означает, что тяжелые ионы неподвижны и нейтрализуют статический заряд электронов. Согласно первому соотношению (12.32) и (12.40) имеем  $\eta = -ik/4\pi$  или с учетом формулы (12.33) находим:

$$\frac{4\pi e^2}{mk} \int_C \frac{df_0/dv}{\omega - kv} dv = -1. \quad (12.41)$$

В этом уравнении контур  $C$  выбран согласно правилу обхода Ландау, т.е. вдоль вещественной оси, если  $\text{Im } \omega < 0$ , и с обходом полюса сверху, если  $\text{Im } \omega \geq 0$ . В силу первого уравнения из (12.39) уравнение (12.41) можно записать и так:

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (12.42)$$

Будем считать величину  $k$  заданной, положительной и решать дисперсионное уравнение (12.41) относительно  $\omega$ . Чаще всего это сделать непросто, но при заданной  $f_0(v)$  в принципе возможно.

Имеются ли решения с  $\omega$  в нижней полуплоскости? Если да, то имеет место неустойчивость и плазменные колебания возрастают экспоненциально. В следующей главе покажем, что такая ситуация возможна, если, например,  $f_0$  состоит из двух  $\delta$ -функций, соответствующих двум скоростям потоков. Причем, при небольшом уширении распределения скоростей при переходе к непрерывному распределению  $f_0$  решение все еще будет неустойчивым. Когда плазма с распределением скоростей  $f_0$  будет устойчивой? Без доказательства примем, что достаточным условием устойчивости является наличие у функции  $f_0(v)$  не более одного максимума, причем функция должна быть положительной и стремиться к нулю при  $v \rightarrow \pm\infty$ . Заметим, что этим требованиям удовлетворяет распределение Максвелла

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n \sqrt{\frac{m^2}{(2\pi k_B T)^3}} e^{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2k_B T}}, \quad (12.43)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $n$  — концентрация,  $\mathbf{u}$  — скорость дрейфа компонент плазмы; при этом для двухкомпонентной плазмы, состоящей из однократно заряженных ионов ( $i$ ) и электронов ( $e$ )

$$\int f_{0i} d^3v = \int f_{0e} d^3v = n, \quad (12.44)$$

$$\int v f_{0i} d^3v = \int v f_{0e} d^3v = n\mathbf{u}. \quad (12.45)$$

Далее для удобства выберем систему отсчета, в которой в среднем электроны покоятся, а  $f_0(v)$  соответствует устойчивой плазме.

Перепишем уравнение (12.41) в виде:

$$D(\omega, k) = 0, \quad (12.46)$$



где

$$D(\omega, k) = \int_C \frac{df_0/dv}{\omega/k - v} dv + \frac{mk^2}{4\pi e^2}. \quad (12.47)$$

Как показано выше в рамках гидродинамической теории (см. формулу (12.11)) для холодной неподвижной плазмы дисперсионное уравнение имеет вид:  $\omega^2 = \omega_p^2$ , а учет тепловых скоростей при  $kr_D \ll 1$  ( $r_D \ll \lambda$ ), дает малую поправку к  $\omega_p^2$ , выражаемую соотношением (12.12). Если  $kr_D \gg 1$ , многие электроны успевают пройти за период колебания расстояние в одну длину волны и больше, вследствие чего сжатие перестает быть адиабатическим. Кинетическая теория соответствует физике таких колебаний. Разумно проанализировать, что дает кинетическая теория по сравнению с гидродинамической в том же длинноволновом пределе.

Предположим, что имеет место разброс тепловых скоростей с некоторым характерным значением тепловой скорости  $v_T$ , таким, что  $|v| \gg v_T$  и при этом функция  $f_0(v)$  очень мала. В этом случае влияние теплового разброса пренебрежимо мало, если фазовая скорость волны  $\omega/k \gg v_T$ , так что практически все частицы неподвижны. В силу того, что при этом  $\omega \sim \omega_p$ , можно считать  $\omega_p/k \gg v_T$ , то  $k \ll \omega_p/v_T$ . Но радиус Дебая  $r_D = \sqrt{k_B T / m_e \omega_p^2}$ , а  $k_B T \sim m_e v_T^2$ ; иными словами  $r_D \sim v_T / \omega_p$  и  $kr_D \ll 1$  ( $r_D \ll \lambda$ ), что и соответствует длинноволновому приближению. Уже указывалось, что функция  $f_0(v)$ , будучи устойчивым распределением, монотонно спадая при  $|v| \gg v_T$ , обращается в нуль лишь при  $v \rightarrow \pm\infty$ . Пусть также ведет себя и  $df_0/dv$ . При этом решения с вещественными  $\omega$  отсутствуют, поскольку в этом случае главная часть интеграла (см. формулу (12.35)) дает вещественный вклад в (12.47), а вычет — чисто мнимый. Поэтому положим  $\omega = \omega_r + i\gamma$ , где  $(\omega_r - \omega_p)$  и  $\gamma$  — малые поправки к вещественной и мнимой частям  $\omega$ , соответственно, что позволяет вычислить их методом последовательных приближений. В большинстве интересных случаев выполняется неравенство  $\gamma \ll |\omega_r - \omega_p|$ , поэтому в первом приближении можно пренебречь вычетом и решать уравнение  $D(\omega, k) = 0$ , оставляя только главную часть интеграла. Разложим подынтегральное

выражение в (12.47) в ряд по  $kv/\omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(\omega/k - v)} dv &= \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(1 - kv/\omega)} dv = \\ &= \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{kv}{\omega} + \left( \frac{kv}{\omega} \right)^2 + \dots \right] \frac{df_0}{dv} dv. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Возьмем этот интеграл по частям, что дает

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(\omega/k - v)} dv = \frac{k^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \left[ 1 + 2\frac{kv}{\omega} + 3\left(\frac{kv}{\omega}\right)^2 + \dots \right] dv. \quad (12.49)$$

Интегрируя правую часть (12.49) почленно и учитывая, что  $n = \int f_0 dv$  и  $nk_B T = \int mv^2 f_0 dv$ , окончательно находим<sup>5</sup>:

$$D(\omega, k) = \frac{mk^2}{4\pi e^2} - \frac{nk^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k_B T}{m\omega^2} + \dots \right). \quad (12.50)$$

Как и следовало ожидать, в первом приближении уравнение  $D(\omega, k) = 0$  дает  $\omega^2 = \omega_p^2$  ( $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$ ), а в следующем приближении  $\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3k^2 r_D^2)$ , если положить  $\omega = \omega_p$  в поправочном члене. Иными словами, получили полное совпадение с гидродинамической теорией. Процесс нахождения поправок можно продолжить и дальше (на каждом шаге  $\omega$  является вещественной), но до тех пор пока можно пренебрегать вкладом от вычета. Вычислим теперь и вычет. Напомним, что было сделано предположение  $\gamma \ll |\omega_r - \omega_p|$ . Это означает, что поправка, вносимая слагаемым  $i\gamma$  в  $\omega$  меньше, чем вещественные поправки, которые вычислялись до сих пор. Величина  $\omega_r$  найдена уже с достаточной степенью точности. Вычисляя  $D(\omega, k)$  при  $\omega = \omega_r$ , получим

$$D(\omega, k) = \mathcal{P}[D(\omega, k)] + i\pi \left[ \frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k}$$

(символ  $\mathcal{P}[D(\omega, k)]$  обозначает величину  $D(\omega, k)$ , найденную без учета вклада от вычета). Очевидно тогда, что

$$D(\omega_r + i\gamma, k) = \mathcal{P}[D(\omega_r, k)] + i\pi \left[ \frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} + i\gamma \left[ \frac{\partial D}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_r}. \quad (12.51)$$

<sup>5</sup>Следует заметить, что введенная выше температура  $T$  соответствует продольному движению и отличается от полной температуры, если распределение анизотропно.

Если  $D = D_r + iD_i$ , то

$$i\gamma \left[ \frac{\partial D}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_r} = \gamma \left[ \frac{\partial D_r}{\partial \gamma} + i \frac{\partial D_i}{\partial \gamma} \right]_{\omega=\omega_r}.$$

Действительная часть этого выражения дает небольшую поправку к  $\omega_r$ , которой можно пренебречь. Мнимая часть должна сократиться с вычетом в (12.51), если при подправленной частоте по-прежнему  $D = 0$ .

В соответствии с условиями Коши-Римана (см. сноску на стр. 300)  $\partial D_i / \partial \gamma = \partial D_r / \partial \omega_r$ , так как  $D$  аналитическая функция. Тогда

$$\gamma = -\pi \left[ \frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} \left[ \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right]^{-1}. \quad (12.52)$$

Величину  $\partial D_r / \partial \omega_r$  можно вычислить, используя, что при вещественных  $\omega$  величина  $D_r = \mathcal{P}(D)$ . Пусть функция  $\omega_r(k)$  определяется уравнением  $D_r = 0$  (именно эту функцию мы определяем методом последовательных приближений (см. соотношение  $\omega^2 = \omega_p^2(1+3r^2k^2)$ ). Дифференцируя  $D_r = 0$ , получим

$$\frac{\partial D_r}{\partial k} + \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \frac{d\omega_r}{dk} = 0. \quad (12.53)$$

Из формулы (12.47) следует, что

$$\frac{\partial D_r}{\partial k} = \frac{2mk}{4\pi e^2} - \frac{\omega_r}{k} \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r}. \quad (12.54)$$

Из соотношений (12.53) и (12.54) следует

$$\left( \frac{d\omega_r}{dk} - \frac{\omega_r}{k} \right) \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} = -\frac{2mk}{4\pi e^2}. \quad (12.55)$$

Тогда с учетом (12.55) выражение (12.52) принимает вид:

$$\gamma = -\frac{2\pi^2 e^2}{mk} \left[ \frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} \left( \frac{\omega_r}{k} - \frac{d\omega_r}{dk} \right). \quad (12.56)$$

В первом приближении  $\omega_r = \omega_p$  и  $d\omega_r/dk = 0$ , и приходим к результату полученному впервые Ландау (Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1946, т.16, с.574). Поскольку  $df_0/dv < 0$ ,  $\gamma > 0$  и волна, содержащая множитель  $e^{-\gamma t}$  затухает. Этот эффект называется “затуханием Ландау”.

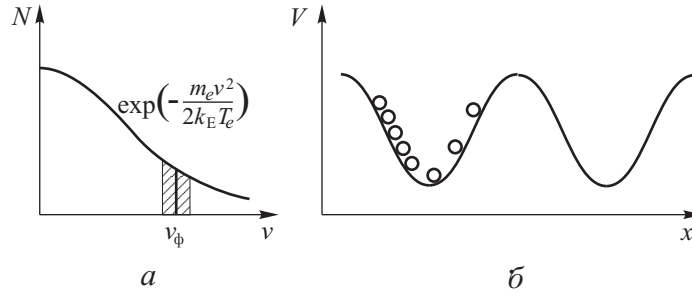


Рис. 12.5. К объяснению затухания Ландау: *a* — распределение электронов по скоростям (заштрихованная область соответствует резонансным электронам ( $v_p \sim v_\phi$ )); *б* — модель движения резонансных электронов в поле плазменной волны, если  $v_p < v_\phi$ , но одного порядка; большая часть электронов группируется на ускоряющем склоне потенциального “горба” плазменной волны.

Качественное объяснение эффекта состоит в том, что, если скорость электронов меньше фазовой скорости волны, но близка к ней, электроны забирают энергию у волны и колебания затухают. Чем больше будет таких резонансных частиц, тем больше будет затухание. Если функция распределения для плазмы монотонно спадает со скоростью  $df_0/dv < 0$ , то электронов, отстающих от волны будет больше, чем обгоняющих (отдающих энергию). Сказанное иллюстрируется на рис. 12.5.

В том случае, если скорость электронов больше фазовой скорости волны (но по — все же близка к ней) и  $df_0/dv > 0$  для этой скорости, волна будет усиливающейся, что связывают с черенковским излучением плазменных волн резонансными частицами. Затухание Ландау и эффект Черенкова, в известном смысле, — два явления, обратных друг другу, поскольку они тесно связаны условием  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ .

## § 5. Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике. Ионно — звуковые волны.

Будем исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики, считая, как и прежде, что  $T_e \gg T_i$ , магнитные поля отсутствуют, столкновениями можно пренебречь, и, кроме того, пренебрежем инерцией электронов в уравнении (12.5), т.е. пренебрегаем слагаемым  $\partial \mathbf{v}_e / \partial t + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e$ . Тогда в одномерном случае из уравнений (12.3)-(12.7) получим следующую

щую систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e k_B T_e) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_e), \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0.\end{aligned}$$

Пусть электроны имеют постоянную температуру, т.е.  $T_e = \text{const}$ . Тогда из второго уравнения в линейном приближении имеем, что

$$(k_B T_e / n_0) \partial n'_e / \partial x = e \partial \varphi / \partial x,$$

где  $n_e = n_0 + n'_e$  ( $n_0 \gg n'_e$ ), и, следовательно, первое уравнение можно переписать в виде  $\partial v'_i / \partial t = -[k_B T_e / (m_i n_e)] \partial n'_e / \partial x$ . Из третьего уравнения имеем  $n'_i = n'_e - [1 / (4\pi e)] \partial^2 \varphi / \partial x^2$ , или, используя выражение для  $\partial \varphi / \partial x$ , находим, что  $n'_i = n'_e - [1 / (4\pi n_0 e^2)] \partial^2 n'_e / \partial x^2$ . Окончательно преобразованную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \frac{k_B T_e}{n_0 m_i} \frac{\partial n'_e}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial n'_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x} &= 0, \\ n'_i &= n'_e - \frac{1}{4\pi n_0 e^2} \frac{\partial^2 n'_e}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{12.57}$$

Сравнивая систему уравнений для длинной линии, ячейка которой представлена на рис. 12.6 с системой уравнений (12.57), легко установить между ними прямое соответствие [6].

Для наглядности выпишем параметры и величины: для длинной линии

$$\begin{aligned}u, I, I', L, C_1, C, \\ 1/\sqrt{LC} = \omega_0, \quad 1/k_0^2 = c_1/c \sim (\Delta x)^2;\end{aligned}$$

для плазмы

$$\begin{aligned}v_i, n_e, n_i, 1/n_0, m_i/(4\pi e^2), m_i n_0/(k_B T_e), \\ (4\pi n_0 e^2 / m_i)^{1/2} = \omega_{pi}, \quad 1/k_0^2 = k_B T_e / (4\pi n_0 e^2) = r_D^2.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что размер ячейки длинной линии  $(\Delta x)$  соответствует радиусу Дебая для плазмы.

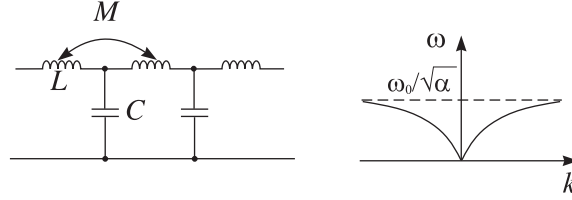


Рис. 12.6. Длинная линия с индуктивной связью  $M$ , моделирующая ионный звук в плазме.

Полагая, что все возмущения распространяются в виде плоских волн вида  $\exp[i(\omega t - kx)]$ , из (12.57) можно найти дисперсионное уравнение  $\omega^2 = \omega_{pi}^2 k^2 / (k_0^2 + k^2)$  или

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{1 + k^2 r_D^2}, \quad (12.58)$$

где  $c_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$  — скорость ионного звука. Если  $kr_D \ll 1$ , то  $\omega = c_s k$ . С ростом  $k$  частота начинает расти медленнее, чем по линейному закону, фазовая скорость волны начинает падать;  $v_\phi \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Физически дисперсия ионного звука связана с тем, что колебания ионов происходят при неподвижных в среднем электронах: давление последних компенсирует действие электрического поля, не давая электронам смещаться. Дисперсия имеет место в области высоких частот. Приведем в качестве аналогии с длинной линией результаты эксперимента [6]. Разрядная трубка, использованная в эксперименте, схематически представлена на рис. 12.7,а. Между подвижными сеткой и анодом возбуждались стоячие волны; с помощью зонда приводился анализ возникших колебаний. Были обнаружены ионные звуковые волны с частотой  $f_{\text{кол}} \sim 2\sqrt{k_B T_e / m_i} / L$  ( $L$  — характерный размер плазмы, например длина трубки или расстояние

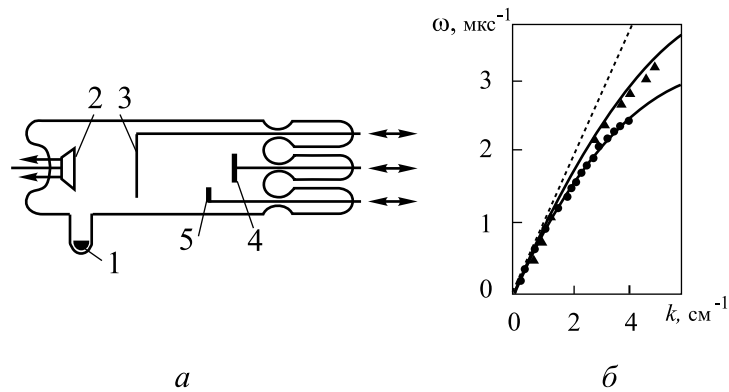


Рис. 12.7. Схема разрядной трубки (знаком  $\longleftrightarrow$  отмечен подвижной электрод: 1 — ртуть; 2 — катод; 3 — сетка; 4 — анод; 5 — зонд Ленгмюра (а) и измеренные экспериментально дисперсионные кривые для двух значений тока разряда (кружки —  $I_p = 10$  мА; треугольники —  $I_p = 16$  мА; штриховая линия — расчетная прямая по уравнению  $\omega = \omega_0 k/k_0$  (б)) [6].

между электродами). Результаты эксперимента приведены на рис. 12.7,б.

До сих пор, говоря о плазме, мы имели в виду ионизованный газ. В последние годы широко исследуется плазма твердого тела. В частности, плазма полупроводников и металлов определяется как совокупность подвижных электронов и дырок, а также ионизованных атомов, связанных с кристаллической решеткой. Коллективные колебания в твердотельной плазме имеют много общего с рассмотренными нами колебаниями газоразрядной плазмы [7–9].

## ГЛАВА 13

### Кинематика волнового движения.

*О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии. Два парадокса Л.И. Мандельштама, которые возникают, если не принимать во внимание различие понятий фазовой и групповой скорости. Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в некоторых сплошных средах.*

#### § 1. О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии.

В главе 9 было дано напоминание волновой терминологии и обсуждены понятия фазовой и групповой скорости в простых ситуациях, когда дополнительные разъяснения не нужны. Однако, в случаях активной среды или содержащей переменные параметры вопрос о скоростях распространения волн требует обсуждения (см., например, [1–4]). Будем далее в изложении в основном следовать книге [5].

Если изменение некоторой функции, характеризующей волновой процесс, можно представить в виде  $u(x, t) = u_0 \operatorname{Re}\{\exp[i(\omega t - kx)]\}$ , где  $u_0 = \operatorname{const}$ , то такая монохроматическая волна распространяется со скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (13.1)$$

Это — фазовая скорость волны, которая определяет скорость отдельного гребня, впадины или узла волны  $u(x, t)$ . Если ввести фазу  $\varphi = \omega t - kx$ , линейную по независимым переменным, то  $\varphi = \operatorname{const}$  для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v_\phi$ . Действительно,  $d\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + (dx/dt)\partial\varphi/\partial x = 0$ , когда  $dx/dt = v_\phi$ , поскольку по определению  $\partial\varphi/\partial t = \omega$ , а  $\partial\varphi/\partial x = -k$ . Однако передать сигнал с помощью монохроматической волны, очевидно, нельзя из — за ее однородности в пространстве и во времени (она должна существовать во все времена  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и на всей оси  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Таких волн в природе, конечно, нет: у всякого волнового процесса есть начало и конец, т. е.



реальный сигнал всегда имеет конечную ширину спектра частот и распространяется в общем случае со скоростью, не равной  $v_\phi$ . Пусть теперь мы каким-то образом изменяем амплитуду или фазу волны, чтобы можно было передать информацию. Рассмотрим для определенности задачу с такими начальными условиями: в начальный момент времени  $t = 0$  волна задана пространственным распределением  $u = \text{Re}[f(x)\exp(-ik_0x)]$ , причем  $f(x)$  изменяется медленно по сравнению с  $\exp(-ik_0x)$ . Можно ожидать, что волна будет распространяться как волна с постоянной амплитудой  $u = \text{Re}\{f(x)\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]\}$ , т. е. со скоростью  $v = \omega_0/k_0$  (ср. с (13.1)). Однако в средах с дисперсией это не так. Действительно, представим  $f(x)$  в виде интеграла Фурье

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-ikx} dk, \quad \text{где} \quad g(k) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx.$$

Тогда

$$u(x, 0) \sim e^{-ik_0 x} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-ikx} dk \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-i(k+k_0)x} dk.$$

Заметим, что наш интеграл — это непрерывный набор волн постоянной амплитуды, существующих на всей оси  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда для группы волн (волнового пакета)

$$u(x, t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{i[\omega t - (k+k_0)x]} dk. \quad (13.2)$$

Как мы знаем, в диспергирующей среде  $\omega = \omega(k)$ . Медленность изменения  $f(x)$  по сравнению с  $\exp(-ik_0x)$  означает, что  $g(k)$  отлично от нуля только для  $k \ll k_0$ , поэтому функцию  $\omega(k)$  можно разложить в ряд и ограничиться двумя членами разложения:

$$\omega(k_0 + k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k. \quad (13.3)$$

Подставляя (13.3) в (13.2), получаем

$$u(x, t) \sim e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{-ik[x - (d\omega/dk)_{k_0} t]} dk$$

или

$$u(x, t) = f[x - (d\omega/dk)_{k_0} t] e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}.$$

Если рассматривать  $f[x - (d\omega/dk)_{k_0} t]$  как изменяющуюся амплитуду волны, фазовая скорость которой  $v_\phi = \omega_0/k_0$ , то изменение амплитуды распространяется с групповой скоростью.

$$v_{gp} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}.$$

Долгое время считалось, что на особенности распространения группы волн первым в 1876 году обратил внимание Дж. Стокс. Правда, в конспекте Л.И. Мандельштама (см. [1], стр. 420) было упоминание о более ранних работах У.Р. Гамильтона. В небольшой заметке [6] М.Л. Левина, замечательного физика и удивительного человека, показано сколь далеко продвинулся У.Р. Гамильтон в понимании этого вопроса задолго до Стокса и Рэлея. Гамильтон анализировал “среду” в виде дискретной решетки довольно общего вида с собственными волнами типа  $u \sim \cos(kx - st + \psi)$  [7]. Он интересовался вопросом что будет через большой промежуток времени с возмущением, которое при  $t = 0$  имело вид  $u(0) \sim \cos(kx + \psi)$  и занимало ограниченную область решетки? Гамильтон получил следующий результат [7]: “... введенные выше формулы сразу имеют динамическое приложение и соответствуют распределению колебательного движения через систему взаимно притягивающихся или отталкивающихся точек; они приводят к тому замечательному результату, что скорость, с которой такое колебание распространяется в тех частях колеблющейся среды, которые ранее были невозмущенными, в общем случае отлична от скорости перехода некоторой данной фазы от данной частицы к другой внутри той части среды, которая уже полностью возбуждена:

$$\text{Скорость переноса фазы} = \frac{s}{k},$$

но

$$\text{Скорость распространения колебательного движения} = \frac{ds}{dk} \dots$$

Название статьи М.Л. Левина “Как свет побеждает тьму ...” связано с тем, что у У.Р. Гамильтон пишет о скорости, “с которой свет данного цвета завоевывает темноту ...” [7]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Здесь уместно настоятельно порекомендовать читателю прочитать книгу [8]. Почему?

Учтем в разложении функции  $\omega(k)$  в ряд еще одно слагаемое по сравнению с (13.3):

$$\omega(k_0 + k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} \frac{k^2}{2}.$$

Чтобы можно было пренебречь в показателе экспоненты в (13.2) дополнительной фазой  $(d^2\omega/dk^2)_{k_0}(k^2t/2)$ , должно выполняться неравенство  $[(d^2\omega/dk^2)(k^2t/2)] \ll 1$ , которое можно переписать в виде

$$|(\pi/v_{gp})(dv_{gp}/d\lambda)_{\lambda_0}\Delta| \ll 1.$$

Здесь введено расстояние  $\Delta = v_{gp}t$ , на которое сместилась "амплитуда" за время  $t$ , и использовано равенство  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. Расстояние  $\Delta$  — это тот характерный масштаб, на котором справедливо наше рассмотрение; он тем больше, чем меньше  $(dv_{gp}/d\lambda)_{\lambda_0}$ . Итак, групповая скорость есть характеристика движения волнового пакета в диспергирующей среде, если пакет еще сохраняет свою форму и размеры, т. е. на расстояниях порядка  $\Delta$ . В некотором смысле пакет в этом случае подобен частице в классической механике, а групповая скорость всего пакета подобна скорости частицы.

Рассмотрим еще один способ введения понятия групповой скорости, для чего проанализируем распространение сигнала с дискретным спектром частот (рис. 13.1,а)

$$u = \text{Re} \left[ u_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + u_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + u_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + \dots \right].$$

Представим такую суперпозицию монохроматических волн с частотами  $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$  в виде

$$u = \text{Re} \left[ F e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \right], \quad (13.4)$$

где

$$F = u_0 + u_1 e^{i[(\omega_1 - \omega_0)t - (k_1 - k_0)x]} + u_2 e^{i[(\omega_2 - \omega_0)t - (k_2 - k_0)x]} + \dots \quad (13.5)$$

Функция  $F(x, t)$  называется комплексной огибающей высокочастотного сигнала в пространстве и во времени [2]. Смысл этого названия легко

---

Ответ звучит в первых строках предисловия ко второму изданию книги.

“Мы предвидели притягательность этой книги, но все же не ожидали столь проникающего ее воздействия на людей разных жизненных устоев. Вероятно, все мы тянемся сопоставлять свои свойства и судьбы с какими-либо “образцами” — предпочтительно “типично необычными”. И это обогащает наши жизни новыми смыслами...”

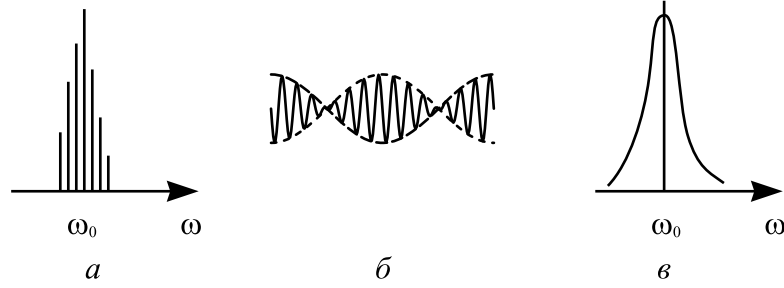


Рис. 13.1. Узкий дискретный спектр — все составляющие близки к  $\omega_0$  (а); пакеты волн, ограниченные огибающей модуляции (2), которая переносит в отличие от высокочастотного заполнения (1) всю информацию о сигнале (б) и пример непрерывного спектра сигнала (в).

понять, если ввести  $F = A \exp(i\varphi)$ . Тогда из (13.4) имеем квазигармоническую волну  $u = A \cos(\omega_0 t - k_0 x + \varphi)$  ( $A$  — огибающая,  $(\omega_0 t - k_0 x)$  — высокочастотная фаза,  $\varphi$  — медленно изменяющаяся фаза). Если спектр сигнала узкий (все спектральные составляющие сосредоточены около  $\omega_0$ ), то все разности типа  $\omega_n - \omega_0$  и  $k_n - k_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) малы. Следовательно, в (13.4) функция  $F$  изменяется медленно со сравнению с  $\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$ . Экспоненциальный множитель соответствует распространению монохроматической волны с частотой  $\omega_0$ , которая называется несущей. Перепишем формулу (13.5) в виде

$$F = u_0 + u_1 \exp \left\{ -i(k_1 - k_0) \left[ x - \frac{(\omega_1 - \omega_0)t}{k_1 - k_0} \right] \right\} + \\ + u_2 \exp \left\{ -i(k_2 - k_0) \left[ x - \frac{(\omega_2 - \omega_0)t}{k_2 - k_0} \right] \right\} + \dots \quad (13.6)$$

Для узкого спектра можно положить

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{k_1 - k_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{k_2 - k_0} = \dots = \frac{d\omega}{dk} = v_{gp}$$

(равенства выполняются тем точнее, чем уже спектр), и, следовательно,

$$F = u_0 + u_1 \exp[-i(k_1 - k_0)(x - v_{gp}t)] + \\ + u_2 \exp[-i(k_2 - k_0)(x - v_{gp}t)] + \dots = F(x - v_{gp}t). \quad (13.7)$$

Сказанное выше позволяет определить групповую скорость как скорость распространения огибающей сигнала (рис. 13.1,б). Если в дисперсионном

уравнении связь между  $\omega$  и  $k$  линейная и однородная, то  $d\omega/dk = \omega/k = v_\phi$  и волновой пакет распространяется так же, как отдельная монохроматическая волна, — это отличительный признак среды без дисперсии.

Для сигнала с непрерывным спектром, занимающим узкий интервал около некоторой фиксированной частоты  $\omega = \omega_0$  (рис. 13.1,в), соотношение (13.7) остается в силе [2]. Конечно, и при таком подходе понятие групповой скорости по-прежнему справедливо, пока пакет не исказился, т. е. для сравнительно малых промежутков времени и для сигналов с узким спектральным диапазоном.

Введем понятие групповой скорости теперь из более общих соображений для волны, которая квазигармонически плавно модулирована и по амплитуде, и по частоте, т. е. имеет вид  $u(x, t) \exp[i\Psi(x, t)]$ , где  $\Psi$  — быстро осциллирующая фаза (помимо узкого пакета можно рассмотреть широкий  $k$ -пакет, для которого изменения  $k$  имеют порядок самого  $k$ ). Мгновенные частоты и волновое число определяются производными фазы по формулам

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad k(x, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (13.8)$$

и, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (13.9)$$

Если разложить  $\Psi$  в ряд около какой-либо точки  $(x_0, t_0)$ , то  $\omega$  и  $k$  совпадут с локальными частотой и волновым числом в традиционном определении, когда характерный масштаб изменений  $\omega$  и  $k$  велик по сравнению с  $1/\omega$  и  $1/k$ . Предположим, что на пространственных интервалах, много больших периода модуляции, но меньших характерного масштаба ее изменений, локальная частота близка к частоте синусоидальной волны с данным “локальным” значением  $k$ . Тогда  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением  $\omega = \omega(k)$ . Используя его в (13.9), получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + v_{gp}(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (13.10)$$

где  $v_{gp}(k) = \partial \omega / \partial k$ . Таким образом, можно дать еще одно важное для понимания кинематики волнового движения определение: групповая скорость  $v_{gp}(k)$  есть скорость распространения возмущений волнового числа  $k$ . Уравнение (13.1) для  $k$  является гиперболическим нелинейным уравнением даже тогда, когда исходная задача линейная. Из этого уравнения следует постоянство  $k$  вдоль кривых — характеристик на плоскости  $(x, t)$ ,

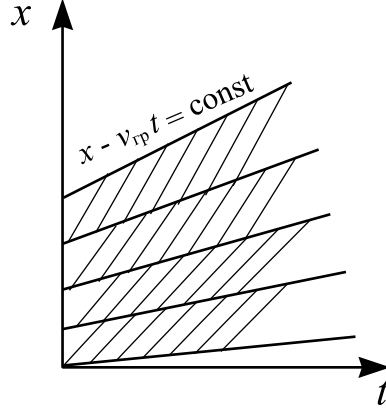


Рис. 13.2. Поведение группы волн на плоскости  $xt$ ; вдоль жирных прямых  $x - v_{gp}t = \text{const}$  ( $\lambda = 2\pi/k = \text{const}$ ); траектория гребней волн, возникающих из “ничего” и исчезающих на фронте, показаны тонкими линиями [3].

для которых  $dx/dt = v_{gp}$  откуда, в свою очередь, вытекает, что и  $v_{gp} = \text{const}$ , т. е. характеристики — это прямые, определяемые уравнением

$$x - v_{gp}t = \text{const} \quad (13.11)$$

(рис. 13.2).

Ясно, что вместо (13.10) можно пользоваться уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_{gp}(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (13.12)$$

которое также нелинейно; о дисперсии, следовательно, можно говорить как о “частотной нелинейности”. Левая часть (13.12) есть  $d\omega/dt$ , взятая вдоль линии  $dx/dt = v_{gp}$  на плоскости  $(x, t)$ , т. е. уравнение (13.12) означает, что вдоль указанной линии  $\omega = \text{const}$ . Но тогда и  $v_{gp}(\omega) = \text{const}$  вдоль характеристик  $t - x/v_{gp}(\omega) = \xi(\omega)$ , где  $\xi = \text{const}$  для данного  $\omega$ . Зависимость  $\xi(\omega)$  определяется модуляцией частоты при  $x = 0$ ; таким образом, общее решение уравнения (13.12) имеет вид

$$\omega = \Omega[t - x/v_{gp}(\omega)], \quad (13.13)$$

где  $\Omega$  — произвольная функция, обратная  $\xi(\Omega)$ . Решение (13.13) подробно обсуждается в связи с теорией простых волн, поведение которых определяется тем, что каждая точка профиля простой волны движется со

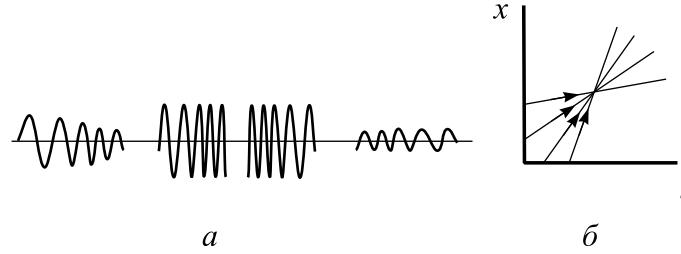


Рис. 13.3. Распространение частотно-модулированной волны. Схема сжатия и последующего расплывания пакета (а) и соответствующая пространственно временная диаграмма (б).

скоростью  $v(\omega)$  — постоянной, но разной для разных  $\omega$ . Поэтому можно представить волну как совокупность независимых групп, движущихся каждая со своей скоростью.

Очевидно, что в зависимости от модуляции частоты эти группы могут и расходиться, и сближаться, обгоняя друг друга и вновь расходясь. Если построить характеристики на плоскости  $(x, t)$ , то можно получить, например, фокус — точку, в которой сходятся две или три группы, потом эти группы опять разбегаются (рис. 13.3). При этом проявляется неоднозначность в решении (в потоке невзаимодействующих частиц). Здесь очевидна аналогия и с поведением лучей в обычной геометрической оптике (см гл. 17). В [4], например, показано, что эта аналогия не случайна, и для диспергирующей среды естественно говорить о приближении пространственно - временной геометрической оптики.

Если заменить  $\omega$  через  $v_\phi k$  и использовать  $k = 2\pi/\lambda$ , то из определения  $v_{gr} = \partial\omega/\partial k$  приходим к формуле Рэлея.

$$v_{gr} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}. \quad (13.14)$$

Из соотношения (13.14) видно, что групповая скорость может быть как положительной и нулевой, так и отрицательной, как больше фазовой, так и меньше. Простой способ определения  $v_{gr}$  по кривой  $v_\phi = v_\phi(\lambda)$  был предложен еще Эренфестом. Этот способ легко понять из рис 13.4. Примерами реальных волн, у которых  $v_{gr}$  и  $v_\phi$  противоположны по направлению, служат обратные электромагнитные волны или обратные пространственные гармоники электромагнитной волны, которые распространяются в замедляющих системах, используемых в СВЧ усилителях и генераторах типа ламп с обратной волной (ЛОВ).

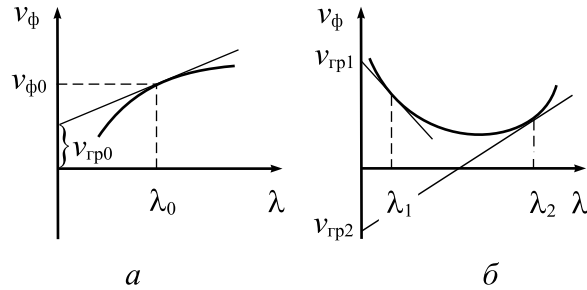


Рис. 13.4. К графическому определению  $v_{gr}$ : а —  $v_{gr} > 0$ ; б —  $v_{gr} > 0$  для  $\lambda = \lambda_1$  и  $v_{gr} < 0$  для  $\lambda = \lambda_2$ . Отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной к кривой  $v_\phi(\lambda)$ , проведенной, например, в точке  $\lambda = \lambda_0$  этой кривой, равен  $|v_{\phi 0} - \lambda(\partial v_\phi / \partial \lambda)_0|$ .

В лекциях [1], анализируя рисунки, подобные рис. 13.4, Л.И. Мандельштам приводит следующие красивые и понятные образы — примеры.

“... если кривая  $v_\phi(\lambda)$  достаточно круто поднимается, то групповая скорость может обращаться в нуль, и сделаться отрицательной... При отрицательной групповой скорости медленно меняющаяся амплитуда движется в сторону, противоположную направлению распространения волн, составляющих группу.

Как представить себе это наглядно? Флеминг приводит следующий пример: по плывущей барже вереницей бегут мальчики, прыгивают с носа в воду и взбираются затем на корму. Если мальчики будут бежать в сторону, противоположную движению баржи, то мы и получим картину отрицательной групповой скорости (скорость баржи). Примером нулевой групповой скорости может служить эскалатор: ступени (играющие роль волн) движутся, а группа в целом, т.е. весь эскалатор стоит на месте”.

Мы не касались вопроса о скорости распространения короткого импульса в диспергирующей среде. Изложение состояния можно найти, например, в обзоре [9]. Подчеркнем лишь, что для короткого импульса и импульса с широким частотным спектром понятие групповой скорости становится неопределенным: форма импульса сильно искажается по мере его распространения.

Наконец, введем понятие скорости распространения энергии в среде:

$$V = \frac{\text{Средняя плотность потока энергии}}{\text{Средняя плотность энергии}}.$$

Как показано М.А. Леонтовичем, в том случае, когда в среде отсутствует



поглощение и нет вращения плоскости поляризации,  $V$  совпадает с  $v_{gr}$ . Разумеется, по-прежнему нужно, чтобы спектр пакета был достаточно узким.

**§ 2. Два парадокса Л.И. Мандельштама, которые возникают, если не принимать во внимание различие фазовой и групповой скоростей [1, с.427-428].**

*Парадокс первый.* В двух инерциальных системах координат, относительная скорость которых есть  $V$ , отсчеты времен  $t'$  и  $t$  связаны согласно преобразованию Лоренца соотношением

$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}.$$

Пусть в нештрихованной системе сигнал в момент времени  $t$  вышел из точки  $x$  и в момент времени  $t + \Delta t$  пришел в точку  $x + \Delta x$ . Тогда между выходом и приходом сигнала по часам штрихованной системы прошел промежуток времени

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \Delta t \frac{1 - Vv/c^2}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}.$$

где  $v = \Delta x / \Delta t$  — скорость сигнала в нештрихованной системе.

Очевидно, что при  $v > c$  всегда найдутся такие  $V < c$ , для которых  $(1 - Vv/c^2) < 0$ , но тогда при  $\Delta t > 0$  получается, что в штрихованной системе  $\Delta t' < 0$ . Последнее означает, что сигнал придет раньше, чем вышел, т.е. нарушится принцип причинности. Чтобы этого не было, теория относительности утверждает: никакой сигнал (процесс, позволяющий воздействовать “отсюда — туда”) не может иметь скорости, большей скорости света. В вакууме фазовая скорость может быть больше скорости света, она не есть скорость сигнала.

*Парадокс второй.* Для гравитационных волн на глубокой воде  $\omega = \sqrt{gk}$  (см. гл. 11), т.е.  $d\omega/dk = (1/2)(g/k)^{1/2}$ , но  $v_\phi = \omega/k = (g/k)^{1/2}$ , и, следовательно

$$v_{gr} = (1/2)v_\phi. \quad (13.15)$$

Тогда из выражения (13.15) видно, что для длинных волн и фазовая и групповая скорости могут быть больше скорости света  $c$  в вакууме.

Но мы только что пришли к выводу, что сигнал не может распространяться со скоростью, большей  $c$ . В чем же дело? В этом примере

парадокс объясняется просто: закон дисперсии и, следовательно, формула для  $v_\phi$  выведены для несжимаемой жидкости. Предположение же о несжимаемости противоречит теории относительности.

### § 3. Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в некоторых сплошных средах.

Рассмотрим несколько примеров расчета фазовой и групповой скоростей волн в реальных сплошных средах. **1.** Для капиллярных волн из (11.61) следует, что  $\omega = k^{3/2}(\sigma/\rho)^{1/2}$  и  $v_{gr} = d\omega/dk = (3/2)(\omega/k) = (3/2)v_\phi$ , т. е. скорость распространения энергии  $v_{gr}$  капиллярных волн больше скорости  $v_\phi$  гребней (для данной длины волны).

**2.** В гл. 12 мы уже отмечали, что в одномерном “холодном” потоке электронов ленгмюровские колебания переносятся электронами с дрейфовой скоростью  $v_0$ , т. е.  $v_{gr} = v_0$ . Кроме того, было установлено, что в неподвижной “горячей” плазме волна переносит энергию со скоростью  $v_{gr} \approx 3kr_D \sqrt{kT_e/m_e}$ , много меньшей тепловой. Рассмотрим теперь распространение поперечной плоской волны через ионосферу, состоящую из неподвижных свободных электронов.

При этом в отличие от гл. 12 проанализируем колебания в плазме с электродинамической точки зрения. Исходя из уравнений Максвелла и уравнения непрерывности в предположении, что все переменные изменяются по закону  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$ , находим (см. [10])

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - (\omega^2/c^2)\mathbf{D} = 0. \quad (13.16)$$

Используя теперь уравнения движения заряженных частиц, вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  можно выразить через вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ , где  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости среды. Подставив это выражение для  $\mathbf{D}$  в (13.16), получим систему линейных однородных уравнений, поскольку  $D_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — матрица. Условие совместности этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (см. [10])

$$\text{Det} \|k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - (\omega^2/c^2)\varepsilon_{\alpha\beta}\| = 0, \quad (13.17)$$

$\delta$  — символ Кронекера.

В случае изотропной плазмы без магнитного поля  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$  и для продольной волны из (13.16) находим, что

$$\varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (13.18)$$

а для поперечной волны

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (13.19)$$

Заметим, что в главе 12 мы получили, исходя из кинетической теории плазмы, уравнение (12.42), аналогичное (13.18).

**Задача 13.1.** Используя уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

вывести уравнение (13.16). В выписанных уравнениях  $\rho$  — плотность заряда,  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции.

*Указание.* Ввести вектор  $\mathbf{D}$  электрической индукции соотношением  $\partial \mathbf{D} / \partial t = \partial \mathbf{E} / \partial t + 4\pi \mathbf{j}$  и показать, что  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ .

Выразим  $\varepsilon_{\perp}$  из уравнения движения электронов  $\partial v_{\perp} / \partial t = (e/m_e) \mathbf{E}_{\perp}$ . Так как мы считаем что  $v_{\perp}, \mathbf{E}_{\perp} \sim \exp i\omega t$ , то  $v_{\perp} = [e/(im_e\omega)] \mathbf{E}_{\perp}$ . Поэтому для плотности тока имеем  $\mathbf{j}_{\perp} = e\rho_0 \mathbf{v}_{\perp} = -i\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_{\perp} / (4\pi\omega)$ . По определению  $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + 4\pi \mathbf{j}_{\perp} / (i\omega)$ . Таким образом,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (13.20)$$

Приравнивая правые части соотношений (13.19) и (13.20), получаем

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (13.21)$$

Итак, в ионосфере  $v_{\phi} = c / \sqrt{1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2}$  и  $v_{zp} = c \sqrt{1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2}$  т. е.  $v_{\phi}$  всегда больше  $c$ ,  $v_{zp} < c$ , а  $v_{\phi} v_{zp} = c^2$ .

Последнее соотношение не является столь общим, как часто считают. В частности, для различных линий передачи, используемых в технике и электронике СВЧ, связь между  $v_{\phi}$  и  $v_{zp}$  имеет вид (см. [11]):

$$v_{\phi} v_{zp} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \left( 1 \mp \frac{\tau}{k} \frac{d\tau}{dk} \right)^{-1}, \quad (13.22)$$

где  $\tau^2 = k^2 - \beta^2$ ;  $k$  — волновое число в среде;  $\beta$  — фазовая постоянная в линии передачи;  $\varepsilon$ ,  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; верхний знак соответствует  $k > \beta$  (быстрые волны при  $\varepsilon = \mu = 1$ ), нижний соответствует  $k < \beta$  (медленные волны;  $\tau^2 = \beta^2 - k^2$ ). Из (13.22) следует, что  $v_\phi v_{ep} = c^2$ , только если  $\varepsilon = \mu = 1$  и  $d\tau/dk = 0$ . В частности,  $d\tau/dk = 0$  для металлического волновода без потерь с однородным диэлектрическим заполнением, т. е.  $v_\phi v_{ep} = c^2/(\varepsilon\mu)$ . Для замедляющих систем типичны значения  $v_{ep}$  и  $v_\phi$ , меньшие скорости света в среде.

**3.** Обратимся к внутренним волнам в стратифицированной жидкости (см. гл. 11). Пусть среда безгранична и частота Вайселя  $N = \text{const}$ . Тогда справедливо уравнение (11.76):  $\sin \theta = \mu(\omega/N)$ . Предположим для определенности, что волна распространяется в сторону положительных  $z$ , т. е.  $\mu = +1$ . Воспользуемся для определения групповой скорости уравнением (11.76) или, что тоже самое, (11.75):

$$\omega = N\xi/k = N(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2},$$

считая, что скорость  $\mathbf{v}_{ep} = \mathbf{x}_0 \partial\omega/\partial k_x + \mathbf{y}_0 \partial\omega/\partial k_y + \mathbf{z}_0 \partial\omega/\partial k_z$ , где  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  — соответствующие единичные векторы [3]. После выполнения дифференцирования и простых преобразований, получаем (см. [12])

$$\mathbf{v}_{ep} = (Nk_z/k^3)(k_z\xi/\xi - \xi\nabla_z). \quad (13.23)$$

Нетрудно видеть из (13.23), что  $\mathbf{v}_{ep}\mathbf{k} = 0$ , т. е.  $\mathbf{v}_{ep}$  направлен перпендикулярно  $\mathbf{k}$  (рис. 13.5). При  $q \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$  и  $\omega \gg \Omega$  из (11.40) имеем  $\partial\mathcal{V}(z)/\partial z + [\xi^2/(\omega^2\rho_{00})]\mathcal{P} = 0$ , так что при  $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_0 \exp[i(\omega t - k_z z)]$  для давления находим  $p = (tk_z\omega^2\rho_{00}/\xi^2) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$ . Следовательно, вектор  $\nabla p = -i\mathbf{k}p$  направлен по  $\mathbf{k}$ . Для внутренних волн из (11.33) и (11.34) следует, что  $V_{0x} = k_x/\omega$  и  $V_{0y} = k_y/\omega$ . С учетом (11.22) и этих соотношений для скоростей частиц получим

$$\mathbf{v} = (-k_z\xi/\xi^2 + \nabla_z)v_z, \quad v_z = -iv_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]. \quad (13.24)$$

Но из (13.24) сразу имеем, что  $\mathbf{v}\mathbf{k} = 0$ , т. е. частицы движутся по траекториям, перпендикулярным  $\mathbf{k}$  в плоскости, где лежит вектор  $\mathbf{k}$  и ось  $z$ . Используя выражение для давления  $p$  и скорости частиц  $\mathbf{v}$  из (13.24), для средней по времени плотности потока энергии  $\mathbf{P} = (1/4)(p\mathbf{v}^* + \text{к.с.})$  легко получаем соотношение

$$\mathcal{P} = (1/2)\rho_{00}v_0^2N^2\mathbf{v}_{ep}. \quad (13.25)$$

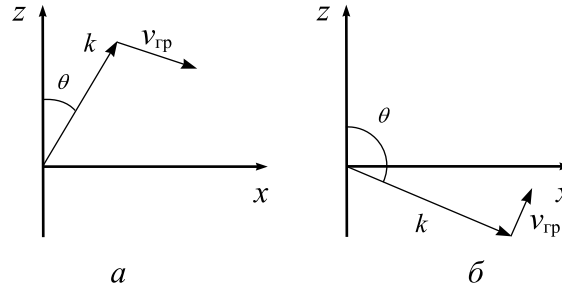


Рис. 13.5. К определению групповой скорости внутренних волн в стратифицированной жидкости [12]: а — волна бежит вверх, поток энергии направлен вниз ( $k_y = 0, \mu = 1$ ); б — волна бежит вниз, поток энергии направлен вверх ( $k_y = 0, \mu = -1$ ).

Аналогично для средней плотности энергии  $W = (1/2)\rho_{00}\mathbf{v}\mathbf{v}^*$  находим

$$W = (1/2)\rho_{00}v_0^2 N^2. \quad (13.26)$$

Из (13.25) следует, что поток энергии направлен по вектору групповой скорости (рис. 13.5), а скорость распространения энергии в среде  $\mathbf{V} = \mathbf{P}/W$  в точности равна групповой скорости.

**Задача 13.2.** Докажите, что если дно наклонное, то выполняется следующий закон отражения волн: угол падения равен углу отражения, но по отношению не к нормали, а к вертикали поверхности дна (рис. 13.6). Для того чтобы отраженная волна компенсировала перпендикулярную границе составляющую скорости частиц в падающей волне, необходимо выполнение равенства

$$k_{\text{пад}} \sin(\Theta - \Psi) = k_{\text{отр}} \sin(\Theta - \Psi),$$

когда  $k_{\text{пад}}$  и нормаль к границе лежат в плоскости рис. 13.6 (докажите это!). Отсюда следует любопытный вывод: при отражении меняется длина волны. Противоречия здесь нет: при данной частоте длина волны может быть любой (см. гл. 11).

Для волн Россби из уравнения (11.75) легко показать, что при  $k_y$  фазовая и групповая скорости волн направлены в разные стороны. В общем случае, когда  $k_y \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \partial\omega/\partial k_x &= (\beta/\xi^2)(k_x^2 - k_y^2)/(k_x^2 + k_y^2), \\ \partial\omega/\partial k_y &= (\beta/\xi^2) \cdot 2k_x k_y / (k_x^2 + k_y^2), \end{aligned}$$

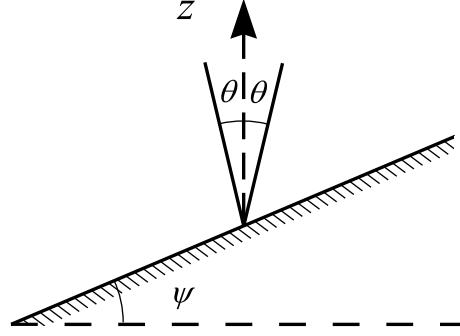


Рис. 13.6. К отражению волны от наклонного дна [12].

и для групповой скорости получаем

$$\mathbf{v}_{gp} = (\beta/\xi^2)(\mathbf{x}_0 \cos 2\gamma - \mathbf{y}_0 \sin 2\gamma),$$

т.е.  $\mathbf{v}_{gp}$  направлено от конца вектора  $\xi$  к центру круга (11.100),  $\gamma$  — угол между  $\xi$  и осью  $k_x$ .

Приведенные примеры показывают, что для сред с анизотропной дисперсией, т.е. для сред с дисперсионным соотношением  $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$ , вектор групповой скорости ведет себя довольно нестандартно. Кажется ясным, что с точки зрения кинематики волн понятие групповой скорости можно обобщить на многомерные системы. Не вдаваясь в детали работ [3, 13], выпишем основные соотношения. Пусть в модулированной волне  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp[i\Psi(\mathbf{x}, t)]$  вектор  $\mathbf{x}$  имеет координаты  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Определим

$$\partial\Psi/\partial t = \omega, \quad \partial\Psi/\partial x_i = -k_i, \quad k_i = 1, 2, 3, \quad (13.27)$$

где  $k_1, k_2$  и  $k_3$  — компоненты волнового вектора. Дисперсионное соотношение имеет вид  $\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$  или

$$\partial\Psi/\partial t = \omega(-\partial\Psi/\partial x_1, -\partial\Psi/\partial x_2, -\partial\Psi/\partial x_3). \quad (13.28)$$

Дифференцируя (13.28) по  $x_i$  с учетом определений (13.27), получаем трехмерный аналог (13.10) в следующей форме:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0, \quad (13.29)$$

где  $U_j = \partial\omega/\partial k_j$  — компоненты вектора групповой скорости. Если  $U_j = dx_i/dt$ , то компоненты  $k_j$  волнового вектора постоянны, а движение с

постоянной скоростью  $U_j$  имеет место вдоль прямой  $x_j - U_j t = \text{const}$ . В работе [3] доказано, что для синусоидальных волн групповая скорость  $U_j = \partial\omega/\partial k_j$ , совпадает в любых однородных анизотропных системах со скоростью распространения энергии (для внутренних волн мы это видели).

Более сложным является случай распространения волн в неоднородной нестационарной диспергирующей среде, когда  $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ . В этих случаях групповая скорость выступает как так называемая лучевая скорость. Мы не касаемся этого и более сложных вопросов, отсылая читателя к работам [3, 13, 14].

**Задача 13.3.** Известно, что по де - Бройлю в квантовой механике свободной частице, движущейся со скоростью  $v_0$ , соответствует  $\Psi$  — волна, фазовая скорость которой определяется энергией и импульсом частицы. Вычислите фазовую и групповую скорости  $\Psi$  — волны.

## ГЛАВА 14

### **Введение в теорию устойчивости и неустойчивости волновых систем**

*Общие замечания. Примеры неустойчивостей: неустойчивость Джинса; неустойчивость Тьюринга. Усиление в лампе с бегущей волной. Условия самовозбуждения в лампе с обратной волной. Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик). Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков. Неустойчивость Гельмгольца. Усиление и непропускание. Критерии разделения. Еще примеры неустойчивостей (акустический усилитель Ч. Белла; неустойчивость полых и ленточных электронных потоков).*

#### **§ 1. Общие замечания**

М.А. Миллер в своей лекции “Раздумья про раздумья” [1] так пишет об устойчивости и неустойчивости.

“Всякое движение или состояние может быть устойчивым или неустойчивым. Устойчивость, то есть долговременное пребывание, несмотря на разные помехи и попытки вышибания, в неизменном режиме (на свете все приблизительно и не бесконечно длительно). одно из самых необходимых свойств любого “законопослужного” мира, т.е. любой природы (выдуманной или естественной), где существуют хоть какие-нибудь “правила движения”. Не приходит ли вам в голову гипотеза, что только в таком в меру дисциплинированном мире могло возникнуть то, что мы называем жизнью... Думаю, простейшей иллюстрацией понятий устойчивости и неустойчивости является так называемая задача (взаимодействия) двух тел. Для простоты можно представлять себе Землю в качестве одного тела и притягивающийся к нему объект (от Ньютоновского яблочка до космического корабля) в качестве другого. В зависимости от приданной скорости, объект может либо плюхнуться обратно на Землю (раз) либо устойчиво начать вращаться вокруг нее в спутниковом режиме (два), либо удалиться за пределы воздействия поля притяжения (три). Три режима: слияние (раз), устойчивое раздельно - совместное существование



(два), независимость и возможность переприсоединения к другому объекту (три). Не кажется ли Вам (подумайте подотошнее!), что именно такой набор возможностей (подчинение, сосуществование и развод) обеспечивает все композиционное разнообразие любого большого сообщества объектов (полей, частиц, веществ и даже людей в конце концов). Удивительная по своей неожиданной постановке теорема (Эренфест) утверждает, что только в нашем трехмерном пространстве такой набор режимов осуществим.”

Термины “устойчивость” и “неустойчивость” сейчас имеют столь широкое хождение, что без дополнительных пояснений не всегда можно понять, о чем идет речь. Действительно, говорят об устойчивости системы вообще, об устойчивости ее вполне определенного движения (траектории или решения), об устойчивости равновесия и т. д. Да и сама устойчивость или неустойчивость может быть разной. Может быть устойчивость “в большом” — по отношению к произвольным возмущениям, “в малом” — определяемая свойствами линеаризованной задачи. Прилагательные при слове “неустойчивость” обычно характеризуют уже не столько математические ее особенности, сколько физические механизмы возникновения колебаний или волн — диссипативная неустойчивость, параметрическая, излучательная и т. д.

Будем заниматься механизмами неустойчивостей и исследованием устойчивости движения “в малом”, т.е. в рамках уравнений, полученных из исходных с помощью разложения в ряд вблизи интересующего нас решения всех нелинейных зависимостей и оставления лишь линейных членов (уже неоднократно обсуждавшаяся процедура линеаризации). Наиболее важным является исследование устойчивости, во-первых, статического положения системы, т.е. состояния равновесия линеаризованной системы с постоянными коэффициентами, во-вторых, периодических движений системы, малые отклонения от которых описываются линеаризованными уравнениями с периодическими коэффициентами.

В общем случае под неустойчивостью понимают изменение во времени величины, характеризующей процесс, такое, что эта величина со временем нарастает.

Для сосредоточенной системы с постоянными параметрами отклонение переменных от состояния равновесия удовлетворяет уравнению

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \quad (14.1)$$

где все  $a_n$  действительные и  $a_0 > 0$ . Нужно исследовать на устойчивость решение  $x = 0$  уравнения (14.1). Состояние равновесия исходной систе-

мы устойчиво, если  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Будем искать решение (14.1) в виде  $x \sim \exp(pt)$  ( $p$  — комплексный параметр). Подставляя его в (14.1), получаем характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (14.2)$$

корни которого определяют характер решения.

Уравнение (14.2) имеет  $n$  корней  $p_m = \operatorname{Re} p_m + i \operatorname{Im} p_m$ . Задача об устойчивости сводится, таким образом, к оценке расположения корней на комплексной плоскости  $p$ . Если все корни расположены в левой полуплоскости (слева от мнимой оси), то с ростом  $t$  отклонение  $x$  будет уменьшаться как  $\exp(-\operatorname{Re} p_m t)$ , и, следовательно, состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Если имеется хоть один корень в правой полуплоскости, то равновесие неустойчиво. Важно, что оценку расположения корней можно сделать, не решая уравнения (14.2). Связь месторасположения корней с коэффициентами уравнения — это чисто алгебраическая проблема, и известно довольно много способов оценки действительной части корней характеристического уравнения по коэффициентам полинома [2, 3]. Наиболее распространенными и удобными среди них являются критерий Рауса — Гурвица и метод D-разбиений.

Критерий устойчивости Рауса — Гурвица заключается в следующем. Для того чтобы все корни уравнения (14.2) имели отрицательные действительные части  $\operatorname{Re} p_m < 0$ , т.е. все корни многочлена  $\Delta(p)$  лежали слева от мнимой оси), необходима и достаточна положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

Структура матрицы Гурвица такова: по главной диагонали расположены коэффициенты (от  $a_1$  до  $a_n$ ) уравнения (14.2); столбцы содержат поочередно коэффициенты только с нечетными или только с четными индексами (включая  $a_0$ ); все недостающие элементы (коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими  $n$ ) заменяются нулями. Главные

диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, критерий устойчивости Рауса — Гурвица сводится к следующему требованию:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (14.4)$$

Применим этот критерий к исследованию корней характеристического уравнения линейного осциллятора  $p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$ . Условия (14.4) сводятся к условию положительности коэффициентов  $\gamma > 0$  и  $\omega_0^2 > 0$ .

Для характеристического уравнения третьего порядка

$$p^2 + ap^2 + bp + c = 0 \quad (14.5)$$

одной положительности коэффициентов для устойчивости равновесия уже недостаточно. Действительно, записав определитель Гурвица, найдем главные миноры:  $\Delta_1 = a$ ,  $\Delta_2 = ab - c$ ,  $\Delta_3 = c(ab - c)$ . Все миноры будут положительными, если  $ab > c$ . При невыполнении одного из указанных условий (положительность коэффициентов, или  $ab > c$ ) состояние равновесия неустойчиво. Характер возникающей неустойчивости существенно зависит от параметров (см., например, таблицу 6.1 из книги [4]).

Число “устойчивых” (“неустойчивых”) корней определяет размерность так называемого устойчивого  $W^s$  (неустойчивого  $W^u$ ) многообразия, на котором вблизи состояния равновесия расположены приближающиеся к нему (уходящие от него) траектории. Когда эти многообразия двумерны, мы видим на них привычные нам устойчивые (неустойчивые) узлы или фокусы. Будут ли на этих многообразиях узлы или фокусы, зависит от знака дискриминанта

$$\Delta(a, b, c) = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^3.$$

При  $\Delta < 0$  будут узлы; при  $\Delta > 0$  — фокусы.

Критерий Рауса — Гурвица не всегда удобен для определения устойчивости. Так, для больших значений  $n$  приходится проделывать слишком громоздкие вычисления определителей и, следовательно, трудно записать условие устойчивости в общем виде. Кроме того, если система неустойчива, то трудно сказать, сколько имеется корней с положительной действительной частью, т.е. каков порядок неустойчивости. Хорошо бы иметь критерий, свободный от этих недостатков, который мог бы быть обобщен на распределенные системы (левая часть характеристического уравнения которых не полином, а квазиполином, т.е. полином по  $\exp[\delta p]$ ). Для построения такого критерия удобен метод D-разбиений. Он заключается в следующем.

Пусть в характеристическое уравнение входит параметр  $\lambda$ , т.е.  $\Delta(\lambda, p) = 0$ . Нам надо знать, как при изменении  $\lambda$  меняется порядок неустойчивости, т.е. что происходит с корнями уравнения, как они передвигаются по плоскости  $p$ . Если при изменении  $\lambda$  корни не попадают на мнимую ось, то с точки зрения устойчивости вообще ничего не меняется; если же хотя бы один корень попал на мнимую ось, то данное значение параметра  $\lambda$  будет критическим, так как дальнейшее малое изменение  $\lambda$  может привести к изменению порядка неустойчивости на единицу. Нам надо связать изменение параметра  $\lambda$ , с фактом пересечения корнями мнимой оси. Так как корни характеристического уравнения комплексные, то удобно считать и  $\lambda$  комплексной величиной. Пусть на комплексной плоскости  $p$  корень пересекает мнимую ось, тогда на комплексной плоскости  $\lambda$ , это соответствует переходу параметра через некую границу, разделяющую области с различным порядком неустойчивости. Перебирая все значения  $p$ , лежащие на мнимой оси, и сопоставляя им значения  $\lambda$ , мы построим в плоскости  $\lambda$  границу D-разбиения, т.е. границу, разделяющую плоскость параметров на области с разным порядком неустойчивости.

Для построения этой границы поставим в соответствие точкам плоскости  $p$  точки плоскости  $\lambda$ , т.е. найдем из характеристического уравнения связь  $\lambda = f(p)$ . Если  $p$  меняется от  $-\infty$  до  $\infty$ , то и  $\lambda$  пробегает некую кривую на плоскости  $\lambda$ , причем в определенном направлении. Если заштриховать правую сторону мнимой оси, то и на этой кривой, лежащей на плоскости  $\lambda$ , следует заштриховать правую по направлению движения сторону. Тогда можно утверждать, что переход из незаштрихованной области в заштрихованную увеличивает порядок неустойчивости на единицу. Переход с плоскости  $p$  на плоскость  $\lambda$  соответствует конформному отображению. Для построения такого конформного отображения необходимо, чтобы можно было разрешить уравнение  $\Delta(\lambda, p) = 0$  относительно  $\lambda$ , и, кроме того, необходима непрерывность и дифференцируемость  $f(p)$ ,

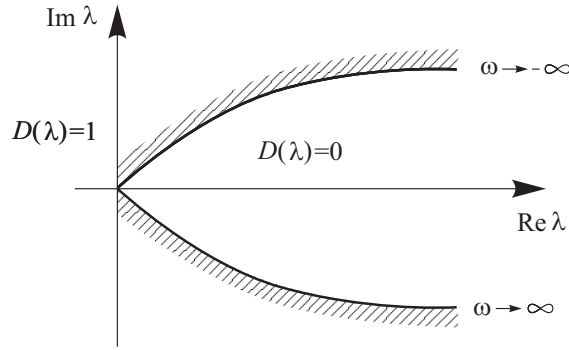


Рис. 14.1. Разбиение плоскости параметров  $\lambda$  на области с разным порядком неустойчивости для уравнения  $p^2 + p + \lambda = 0$

т.е. функция должна быть голоморфной.

Рассмотрим простейший пример:  $p^2 + p + \lambda = 0$ . Разрешая это уравнение относительно  $\lambda$ , найдем  $\lambda = -p^2 - p$ , откуда при  $p = i\omega$  находим  $\lambda = \omega^2 - i\omega$ . Следовательно,  $\text{Re } \lambda = \omega^2$ , а  $\text{Im } \lambda = -\omega$ . Таким образом,  $\text{Re } \lambda = (\text{Im } \lambda)^2$ . Граница области неустойчивости — это парабола (рис. 14.1). Внутри нее — область устойчивости. Вне — порядок неустойчивости  $D(\lambda) = 1$ .

Метод  $D$ -разбиений можно использовать и в случае, когда число корней характеристического уравнения счетно. Именно таким, как мы видели в гл. 10, оказывается спектр резонатора без излучения на границах. Если резонатор одномерный, то спектр волновых чисел всегда эквидистантный:  $k = \pi n/l$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) для резонатора с идеальным отражением на концах и  $k = 2\pi n/l$  для кольцевого резонатора. Поскольку в дисперсионном уравнении  $D(\omega, k) = 0$   $k$  — теперь фактически номер моды  $k \sim n$ , то из этого уравнения, перебирая  $n$ , нетрудно определить границу устойчивости распределенной системы с дискретным спектром.

Приведем простой пример. Будем считать, что резонатор кольцевой и рассмотрим его устойчивость только по отношению к волновым возмущениям, распространяющимся вправо. Если в среде нет дисперсии и потерь, то из волнового уравнения  $u_t + v_0 u_x = 0$  сразу получаем значения частот  $\omega_n = 2\pi n v_0 / l$ . Все частоты действительны, так как все счетное множество корней характеристического уравнения  $D(p, n) = 0$  лежит на мнимой оси плоскости  $p = i\omega$ . Таким образом, система устойчива. Если в той же среде учесть высокочастотные потери, например вязкость, то уравнение бегущей волны примет вид  $u_t + v_0 u_x - \nu u_{xx} = 0$ , а решения характери-

ческого уравнения запишутся в виде  $\omega_n = (2\pi/l)(v_0 + i\nu n 2\pi/l)n$ . Теперь все корни лежат в верхней полуплоскости  $\omega$  плоскости со (или в левой полуплоскости плоскости  $p$ ), т.е. устойчивость лишь усилилась и стала экспоненциальной.

Введем в среду отрицательную диссипацию, проявляющуюся независимо от масштабов возмущения. Для определенности будем считать, что такая неравновесная среда моделируется цепочкой, изображенной на рис. 14.2,а. Уравнение бегущей волны в такой среде запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u = 0. \quad (14.6)$$

Отыскивая решения  $u(x, t) = v \exp[i(\omega t - kx)]$  для кольцевого резонатора, получаем характеристическое уравнение:

$$\omega_n = \frac{2\pi n v_0}{l} + i\nu \left[ \left( \frac{2\pi n}{l} \right)^2 - \frac{\gamma}{\nu} \right].$$

На рис. 14.2,б приведено разбиение плоскости параметров  $\gamma/\nu, l$  на области с различным порядком неустойчивости. В коротком резонаторе  $l < l_{кр} = 2\pi/\sqrt{\gamma/\nu}$  возможна лишь статическая неустойчивость, так как в правой полуплоскости плоскости  $p$  расположен только один корень — с  $\text{Im } p = 0$  (т.е.  $\text{Re } \omega = 0$ ), соответствующий экспоненциальному росту пространственно однородного поля. При увеличении  $l > l_{кр}$  порядок неустойчивости растет, однако при любом конечном  $l$  число корней в правой полуплоскости  $p$  всегда конечно.

Итак, когда речь идет об исследовании устойчивости ограниченных распределенных систем (резонаторов), задача по сравнению с соответствующей сосредоточенной усложняется лишь тем, что спектр комплексных собственных частот оказывается счетным. При этом, перебирая все возможные пространственные возмущения, т. е. все допустимые граничными условиями значения волновых чисел  $k_n$ , мы, определив корни характеристического уравнения  $D(\omega, k)$ , полностью решаем задачу об устойчивости. Здесь, конечно, могут встретиться трудности, но трудности технические.

Если же система полуограничена или безгранична, то сама постановка задачи об устойчивости, вообще говоря, не очевидна и требует дополнительных размышлений. Действительно, теперь, рассматривая устойчивость возмущений в интересующей нас области пространства, мы должны решить задачу об эволюции пространственно-локализованного возмуще-

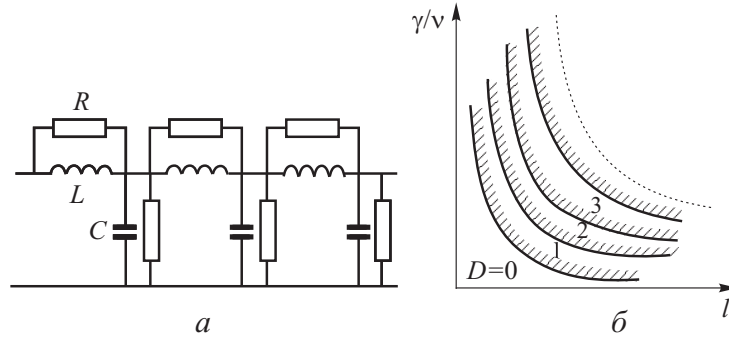


Рис. 14.2. Схема цепочки, соответствующей уравнению (14.6) (а) и разбиение плоскости параметров  $\lambda/\nu, l$  на области с различным порядком неустойчивости (б)

ния — задачу с начальными условиями

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} u_s(k, 0) e^{i[\omega_s(k)t - kx]} dk, \quad (14.7)$$

где  $u_s(k, 0)$  — пространственный спектр начального возмущения, а суммирование проводится по всем нормальным волнам. Как поведет себя возмущение в заданной точке или локализованной области? Ведь экспоненциальный рост во времени отдельных  $k$ -компонент пространственного спектра отнюдь не гарантирует временного роста возмущения в этой точке или области. Действительно, возмущение может, нарастая во времени, просто покидать рассматриваемую область, убегая из нее. Именно такая “сносовая”, или конвективная, неустойчивость наблюдается, например, в некоторых сдвиговых гидродинамических течениях (в частности, затопленных струях (см. рис. 14.3), а также в различных электронных системах — лампе бегущей волны (ЛБВ), плазме, пронизываемой электронным пучком, и т. д.

Если же среди нарастающих возмущений находятся такие, которые не покидают заданной области, т.е. в каждой точке этой области возмущение растет, то это уже истинная (см. общее определение, данное выше) неустойчивость. Такую неустойчивость называют абсолютной<sup>1</sup>).

<sup>1</sup>Впервые проблема разделения абсолютной и конвективной неустойчивостей была поставлена Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [5] в связи с анализом гидродинамической неустойчивости.

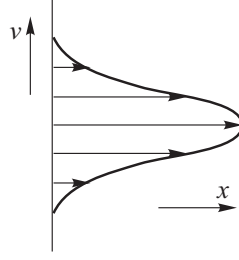


Рис. 14.3. Профиль скорости в затопленной струе

Формальные определения, следовательно, должны быть такими: если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow \infty \quad x \in (x_1, x_2), \quad (14.8)$$

где  $u(x, t)$  — возмущение ( $x_1, x_2$  — границы интересующей нас области, в которой имеется неустойчивость), то неустойчивость — абсолютная; если же

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow 0 \quad x \in (x_1, x_2), \quad (14.9)$$

то неустойчивость конвективная.

Естественно, что вид неустойчивости зависит от выбора системы координат. Если мы движемся вместе с убегающим, растущим во времени возмущением, то в новой системе координат неустойчивость будет уже не конвективной, а абсолютной. И наоборот, если в системе с абсолютной неустойчивостью перейти к новым переменным  $t' = t$ ,  $x' = x - v_0 t$ , где  $v_0$  превышает максимальную скорость распространения возмущений (такой переход, конечно, (возможен не всегда; например, не имеет смысла переходить в систему координат, движущуюся со скоростью, большей скорости света), то неустойчивость из абсолютной превратится в конвективную.

С проблемой разделения абсолютной и конвективной неустойчивости тесно связана другая, может быть, даже более важная для приложений проблема о распознавании усиления и непропускания в полуограниченных системах, возбуждаемых сосредоточенным источником. Поясним эту проблему подробнее.

Пусть на границу  $x = 0$  среды, описываемой дисперсионным уравнением  $D(\omega, k) = 0$ , подается сигнал. Для простоты будем считать его радиоимпульсом с частотой заполнения  $\omega_0$ . Предположим далее, что корни уравнения  $D(\omega_0, k) = 0$  не действительные, и пусть есть корни и с



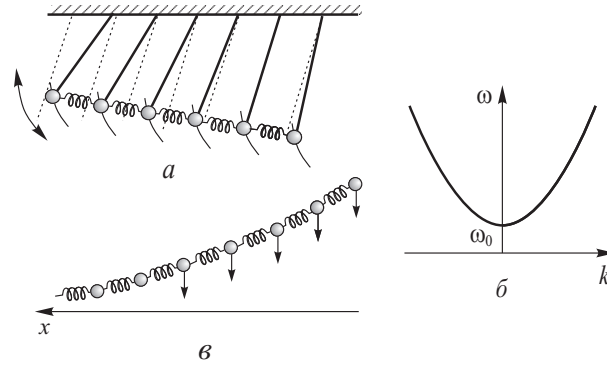


Рис. 14.4. Колебания (в плоскости, перпендикулярной рисунку) в цепочке связанных маятников (а); дисперсионная характеристики этой колебательной системы (б) и затухание колебаний вдоль направления их распространения (в) [6]

$\text{Im } k < 0$ , и с  $\text{Im } k > 0$ . Что будет происходить с сигналом по мере распространения его в среде вдоль оси  $x$ ? Казалось бы, поскольку решение имеет вид

$$e^{\text{Im } kx} e^{i\omega_0 t} e^{-i \text{Re } kx},$$

при  $\text{Im } k > 0$  сигнал должен нарастать вдоль  $x$ . Утверждение, вообще говоря, неверно. Например, когда мы пытаемся возбудить колебания на частоте  $\omega < \omega_0$  в цепочке связанных маятников (рис. 14.4,а; дисперсионная характеристика этой системы приведена на рис. 14.4,б), мы получим не усиление колебаний вдоль оси  $x$ , а экспоненциальное затухание (рис. 14.4,в). Колебание не возникает; в среде на закритической частоте имеет место непропускание, хотя и в этом случае при  $\omega < \omega_0$  имеется корень уравнения  $D(\omega, k) = 0$  с  $\text{Im } k > 0$ . В чем же дело? Ответ заключается в следующем: существование корня уравнения  $D(\omega, k) = 0$ , лежащего в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $k$ , само по себе еще не означает усиления. Волна, соответствующая этому корню, может распространяться влево ( $\text{Re } k < 0$ ), и тогда она будет затухать в направлении своего распространения (рис. 14.4,в). В отличие от аналогичной задачи о неустойчивости синусоидального решения во времени (в которой  $t$  всегда растет), здесь оба направления изменения переменной  $x$  имеют смысл.

В этой главе мы обсудим различные примеры неустойчивых а усиливающих сред и сравнительно простые критерии, позволяющие отделить

усиление от непропускания и определить, какая неустойчивость реализуется в системе — абсолютная или конвективная.

**§ 2. Примеры волновых неустойчивостей: неустойчивость Джинса; неустойчивость Тьюринга. Усиление в лампе с бегущей волной. Условия самовозбуждения в лампе с обратной волной.**

**Неустойчивость Джинса** — основная неустойчивость гравитирующих систем.

Гравифизикой называют область науки, изучающую физическую эволюцию астрономических объектов под действием гравитационных сил. Эволюция “классических” астрономических объектов<sup>2</sup> определяется Ньютоновыми силами тяготения, рассматривается в рамках нерелятивистской, или классической, гравифизики.

Джинс рассмотрел в рамках уравнений гидродинамики устойчивость самой простой, по его мнению, гравитирующей системы — бесконечно протяженного по всем направлениям покоящегося в пространстве однородного распределения гравитирующего газа (см., например, [7]). Исходя из однородности и изотропии такого равномерно заполненного Ньютоновского мира, Джинс принял, что гравитационная сила в любой точке равна нулю и стационарна.

Гидродинамические уравнения для такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho &= -\rho \nabla \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi &= 4\pi G \rho,\end{aligned}\tag{14.10}$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\Phi$  — потенциал гравитационного поля,  $G$  — гравитационная постоянная. Стационарные величины будем отмечать индексом “0”, а малые отклонения от стационарных величин — значком “~”. Будем считать, что до момента времени  $t = 0$  (т.е. при  $t < 0$ ) система стационарна, причем  $v_0 = 0$ , а при  $t \geq 0$  массовая плотность  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$ , гравитационный потенциал  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 + \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ . Используя введенные величины, запишем с учетом системы уравнений (14.10) линеаризованные уравнения непрерыв-

<sup>2</sup>К ним можно отнести планеты, звезды, звездные скопления, галактики, их группы и скопления.

ности, движения, Пуассона и состояния:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (14.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (14.12)$$

$$\Delta \tilde{\Phi} = 4\pi G \tilde{\rho}, \quad (14.13)$$

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \quad (14.14)$$

При выводе уравнения состояния (14.14) использовано баротропное уравнение состояния  $p = p(\rho)$ ;  $c_0^2 = \partial p / \partial \rho$  — квадрат изотермической скорости звука.

Действуя оператором  $\operatorname{div}$  на уравнение (14.12) и используя уравнения (14.11) (при условии  $\rho_0 = \text{const}$ ), (14.13) и (14.14), получаем следующее волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - (\omega_0^2 + c_0^2 \Delta) \tilde{\rho} = 0, \quad (14.15)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0$ . Коэффициенты уравнения (14.15) не зависят от координат и времени, поэтому общее решение можно искать в виде:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} \rho(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \mathbf{r})}. \quad (14.16)$$

Исходные уравнения (14.11)-(14.14) линейны т.е. справедлив принцип суперпозиции, и, следовательно, достаточно рассмотреть эволюцию произвольно выбранной гармоники. В результате подстановки ее в уравнение (14.15) находим дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \omega_0^2. \quad (14.17)$$

Отсюда сразу видно, что при  $k^2 < 4\pi G \rho_0 / c_0^2$  однородное распределение плотности неустойчиво:  $\omega^2 < 0$ . На нелинейной стадии процесса это приводит к возникновению гравитационных “капель” с пространственным масштабом  $\lambda > \lambda_{kp} = \sqrt{\pi c_0^2 / G \rho_0}$ . Вид дисперсионных кривых уравнения (14.17) приведен на рис. 14.5,а. Заметим, что закон дисперсии (14.17) одновременно описывает и волновые возмущения в уже упоминавшейся системе связанных маятников (в длинноволновом приближении), только в отличие от рис. 14.4, в этом случае речь идет об устойчивости стационарного состояния, в котором все маятники “стоят вверх ногами” (рис. 14.5,б).

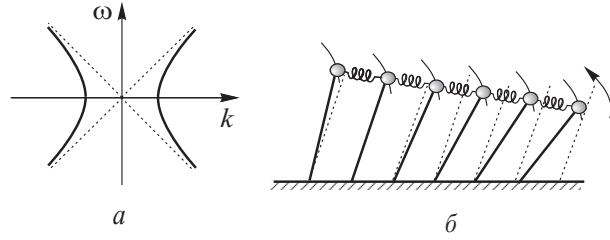


Рис. 14.5. Дисперсионные кривые уравнения (14.17) (а) и описываемые этим уравнением колебания (в плоскости перпендикулярной к рисунку) в системе связанных маятников (б)

Таким образом, в рассматриваемой системе (14.10) имеется неустойчивость. Физический смысл условия  $\lambda > \lambda_{кр}$  весьма прост: с увеличением размера области возмущения гравитационная сила растет, а градиент давления падает. При  $\lambda = \lambda_{кр}$  обе силы уравниваются друг друга, а при  $\lambda > \lambda_{кр}$  гравитационная сила оказывается преобладающей.

Сделаем еще одно замечание. Запишем стационарные уравнения:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \nabla \Phi_0 = 0, \quad (14.18)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (14.19)$$

$$p_0 = p(\rho_0). \quad (14.20)$$

Из принятого Джинсом условия  $\rho_0 = \text{const}$  и уравнения (14.20) следует, что первое слагаемое в уравнении (14.18) обращается в нуль и значит  $\Phi_0 = \text{const}$ . Подстановка последнего решения в уравнение (14.19) приводит к абсурду:  $\rho_0 = 0$ ; откуда следует вывод об исследовании Джинсом устойчивости несуществующего стационарного состояния бесконечно протяженной однородной среды. Как указано в [7], при анализе устойчивости стационарного решения с  $\Phi_0 = \varphi(\mathbf{r})$  вблизи центра ограниченной области  $\Phi_0 = \text{const}$  считается хорошим приближением.

### Неустойчивость Тьюринга — пример диффузионной неустойчивости

. В 1952 году Тьюринг рассмотрел модель кинетики химических реакций с учетом диффузии.

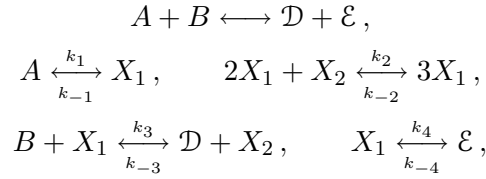
В рамках этой модели обнаружилась неустойчивость, приводящая к возникновению пространственных структур. По этой причине модель Тьюринга и сходные с ней модели вызвали чрезвычайный интерес как мо-

дели возникновения структур в биологических системах [7–11]. Мы сейчас рассмотрим устойчивость стационарного состояния в рамках простейшей модели Тьюринга, описывающей взаимодействие всего лишь двух веществ с концентрациями  $X_1$  и  $X_2$  в одномерном реакторе:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = f_1(X_1, X_2) + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t} = f_2(X_1, X_2) + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}. \quad (14.21)$$

Здесь  $D_1$  и  $D_2$  — коэффициенты одномерной диффузии, происходящей вдоль координаты  $x$ .

Свяжем систему уравнений (14.21) с конкретной системой химических уравнений:



Для простоты будем считать, что кинетические коэффициенты  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ , а  $k_{-1} = k_{-2} = k_{-3} = k_{-4} = 0$ . Тогда система соответствующих кинетических уравнений, дополненная слагаемыми, учитывающими одномерную диффузию вдоль координаты  $x$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= A + X_1^2 X_2 - B X_1 - X_1 + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= B X_1 - X_1^2 X_2 + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (14.22)$$

Модель, описываемая уравнениями (14.22), была предложена Пригожиным и Лефевром [11] и носит название тримолекулярной модели или брюсселятора. Это — основная элементарная модель, используемая для описания процессов в химической кинетике.

Однородное по пространству стационарное состояние системы уравнений (14.22) (т.е. когда  $\partial/\partial t = \partial/\partial x = 0$ ) имеет вид

$$X_1^0 = A, \quad X_2^0 = B. \quad (14.23)$$

Для исследования данного состояния на устойчивость найдем уравнение для малых отклонений  $x'_1$  и  $x'_2$  от (14.23). Полагая  $X_1 = X_1^0 + x'_1$  и  $X_2 = X_2^0 + x'_2$  и линеаризуя получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_1}{\partial t} - (B - 1) x'_1 - A^2 x'_2 &= D_1 \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial x'_2}{\partial t} + A^2 x'_2 + B x'_1 &= D_2 \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (14.24)$$

Решение системы уравнений (14.24) будем искать в виде концентрационных волн

$$x'_1, x'_2 \sim e^{i(pt-kx)}, \quad (14.25)$$

где  $p = \omega$  — неизвестная круговая частота, а  $k$  — неизвестное волновое число. Подставляя (14.25) в (14.24), находим характеристическое уравнение

$$p^2 - \theta p + \Delta = 0, \quad (14.26)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= -[A^2 + 1 - B + k^2(D_1 + D_2)], \\ \Delta &= A^2 - (B - 1)D_2k^2 + A^2D_1k^2 + D_1D_2k^4. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Пусть  $D_1 = D_2 = 0$ . Если речь идет об устойчивости стационарного состояния во времени, следует определить расположение корней уравнения  $p^2 - \theta_1 p + \Delta_1 = 0$  с  $\theta_1 = -(A^2 + 1 - B)$  и  $\Delta_1 = A^2$  на комплексной плоскости  $p$ . Система без диффузии устойчива, когда

$$\Delta_1 = A^2 > 0, \quad \theta_1 = -(A^2 + 1 - B) < 0. \quad (14.28)$$

Может ли диффузия превратить устойчивое в рамках гомогенной модели состояние (14.23) в неустойчивое?

Как следует из (14.26), система будет неустойчивой при  $\Delta < 0$ , откуда при учете (14.27), получается условие

$$\Delta = D_1D_2k^4 + [A^2 - (B - 1)D_2 + AD_1]k^2 + A^2 < 0. \quad (14.29)$$

Для выполнения этого неравенства  $k^2$  должно находиться в интервале, границы которого  $k_1^2, k_2^2$  определяются из равенства  $\Delta = 0$ ; отсюда

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 &= (2D_1D_2)^{-1} \left\{ -[A^2D_1 - (B - 1)D_2] \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[A^2D_1 - (B - 1)D_2]^2 - 4D_1D_2} \right\}. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Напомним, что  $D_1D_2 \neq 0$ .

Мы получили, следовательно, положительный ответ на наш вопрос: появление в реакторе диффузии действительно приводит к неустойчивости. Замечательно, что эта неустойчивость весьма избирательна — нарастают периодические в пространстве возмущения с пространственным периодом, лежащем в ограниченном интервале<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Здесь следует учесть ограниченность размеров системы [11].

**Усиление в лампе с бегущей волной. Условия самовозбуждения в лампе с обратной волной.** Приведем здесь еще два примера, иллюстрирующих работу распределенных СВЧ — усилителя (лампа бегущей волны — ЛБВ) и генератора (лампа обратной волны — ЛОВ). В гл. 10 мы обсудили в связи с объяснением пространственного резонанса распределенный усилитель — лампу бегущей волны (см. рис. 10.10). Там же говорилось, что для правильного описания процесса усиления к уравнению возбуждения волноведущей системы без потерь током электронного пучка

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 K I \quad (14.31)$$

(в обозначениях главы 10) нужно добавить уравнение  $\hat{M}I = \text{const} \cdot E$  ( $\hat{M}$  — оператор), учитывающее обратное влияние волноведущей системы на пучок и описывающее группирование электронов и сгустки. Уравнение (14.31) получено в предположении, что все переменные величины изменяются во времени как  $\exp(i\omega t)$ , при чем  $\omega$  — действительная величина, поскольку лампа бегущей волны — усилитель, в котором вдоль длины лампы происходит экспоненциальное нарастание сигнала вполне определенной частоты, задаваемой внешним сигналом — генератором.

Пусть электронный поток описывается гидродинамическими уравнениями. Будем считать, что этот поток заполняет все пространство, но движение его одномерно, т. е. в направлениях, перпендикулярных направлению движения, ничего не меняется (в СВЧ — электронике эта модель называется моделью бесконечно широкого пучка). Тогда для описания такой заряженной жидкости (столкновением частиц, т. е. вязкостью, пренебрегаем) достаточно уравнения Эйлера для скорости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} (E + E_{np.z}), \quad (14.32)$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (14.33)$$

и обобщенного уравнения Пуассона, связывающего градиент электрического поля объемного заряда с плотностью объемного заряда электронной жидкости:

$$\frac{\partial E_{np.z}}{\partial x} = 4\pi \rho. \quad (14.34)$$

Электронный поток предполагается ионно-скомпенсированным т.е. в целом среда из заряженных частиц электрически нейтральна.

Так как нас интересует вопрос об устойчивости, то достаточно рассмотреть линеаризованные уравнения, полагая  $v = v_0 + v'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  и плотность тока  $\rho v = j_0 + j'$  ( $j_0 = \rho_0 v_0$ ), где  $v_0, \rho_0, j_0$  — постоянные составляющие соответствующих величин, а  $v', \rho', j'$  — малые возмущения этих величин (любое возмущение много меньше соответствующей постоянной величины). Линеаризованные уравнения (14.32)–(14.34) имеют вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_{nz}), \quad \frac{\partial j'}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (14.35)$$

или, поскольку  $j' = v_0 \rho' + \rho_0 v'$ ,

$$\frac{\partial j'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial j'}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t}, \quad (14.36)$$

$$\frac{\partial E'_{nz}}{\partial x} = 4\pi \rho'. \quad (14.37)$$

Полагая, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , и вводя оператор  $\hat{\mathcal{L}} = i\omega + v_0 \partial/\partial x$ , перепишем (14.32)–(14.34) следующим образом:

$$\hat{\mathcal{L}} v' = \frac{e}{m} E + \frac{e}{m} E'_{nz}, \quad \hat{\mathcal{L}} j' = i\omega \rho_0 v', \quad E'_{nz} = -\frac{4\pi}{i\omega} j'. \quad (14.38)$$

Исключая в системе уравнений (14.38)  $v'$  и  $E'_{nz}$ , получаем

$$\hat{\mathcal{L}}^2 j' + \omega_p^2 j' = (i\omega \rho_0 e/m) E. \quad (14.39)$$

Простейший способ перехода от бесконечного широкого электронного потока к пучку с конечным поперечным геометрическим сечением  $S$  состоит во введении вместо плазменной частоты  $\omega_p = \sqrt{4\pi e \rho_0/m}$  редуцированной плазменной частоты  $\omega_q = R\omega_p$ , где  $R$  — коэффициент редукции ( $0 < R \leq 1$ ), который учитывает влияние на пучок окружающих стенок [12].

Тогда для тока  $i' = j'S$ , группированного в пучке под действием поля волноведущей системы, из (14.39) имеем

$$\frac{\partial^2 i'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial i'}{\partial x} - \left( \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{\omega_q^2}{v_0^2} \right) i' = i \frac{\omega}{v_0} \frac{I_0}{2V_0} E, \quad (14.40)$$



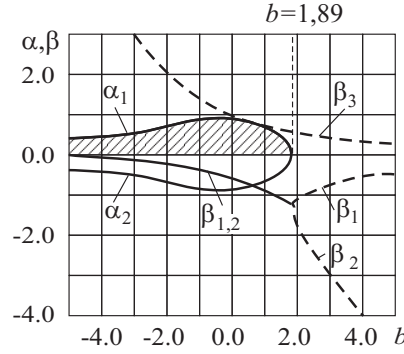


Рис. 14.6. Зависимость  $\alpha$  и  $\beta$  от параметра рассинхронизма  $b$  между пучком и “холодной” волной;  $\alpha_1$  соответствует волне, растущей с расстоянием [14]

где  $I_0 = \rho_0 v_0 S$  — постоянный ток пучка,  $V_0 = \sqrt{v_0^2 m / 2e}$  — ускоряющее напряжение пучка. Условие совместности самосогласованной системы уравнений (14.31) и (14.40) в предположении, что  $i'$  и  $E$  изменяются в пространстве, как  $\exp(-ikx)$ , где  $k$  — волновое число, приводит к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_\phi)(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = \omega^3 C^3, \quad (14.41)$$

$C^3 = (I_0 K / 4V_0)(v_0 / v_\phi)^2$ ,  $C$  — известный в теории ЛБВ параметр усиления [13]. Нетрудно видеть из уравнения (14.41), что во взаимодействии участвуют одна волна волноведущей системы  $k = \omega / v_\phi$  и две волны пучка — быстрая волна пространственного заряда ( $k = (\omega - \omega_q) / v_0$ ) и медленная волна пространственного заряда ( $k = (\omega + \omega_q) / v_0$ ). Необходимым условием усиления в пространстве является комплексность волнового числа при действительной частоте и, поскольку  $E \sim \exp(-ikx)$  для волн, бегущих вправо, то неустойчивость в пространстве будет лишь тогда, когда  $\text{Im } k > 0$ .

На рис. 14.6 решение уравнения (14.41) при  $\omega_q = 0$  показано в виде зависимостей  $\alpha = \text{Im } k / (k_e C)$  и  $\beta = (k_e - \text{Re } k) / (k_e C)$  ( $k_e = \omega / v_0$ ) от параметра рассинхронизма  $b = (k_0 - k_e) / (k_e C)$  ( $k_0 = \omega / v_\phi$ ) между пучком и “холодной” волной. Предполагается, что влиянием затухания и сил пространственного заряда на взаимодействие можно пренебречь. Легко видеть, что при  $b = 0$  ( $v_0 = v_\phi$ ) достигается максимальное значение инкремента  $(\text{Im } k)_{\max} = (\sqrt{3}/2)k_e C$  и что область неустойчивости ограничена значением  $b = 3\sqrt{2}/2 \approx 1,89$ .

Во второй половине 50 - х годов разразилась дискуссия, начатая Пиддингтоном в работе [15], в которой отвергалась существовавшая тогда теория ЛБВ и двухлучевой лампы (о ней речь в этой главе пойдет дальше). Он считал, что пространственное нарастание волны предсказано теорией неверно и что ошибка состоит в неправильном толковании дисперсионного уравнения. Пиддингтон показал, что иногда экспоненциально затухающие вдоль оси  $x$  волны можно по ошибке принять за усиливаемые, но и сам ошибся в окончательном выводе, решив, что случай комплексных  $k$  при действительных  $\omega$  всегда соответствует непропусканию.

Остановимся еще на одном примере — ЛОВ. В ЛОВ электронный пучок движется через искусственную среду, в которой могут распространяться волны с продольным электрическим полем; дисперсия этой среды такова, что фазовая скорость волны на некоторой частоте  $\Omega$  равна скорости электронов, а групповая скорость отрицательна, т. е.

$$v_\phi(\Omega) = v_0, \quad v_{gp}(\Omega) < 0. \quad (14.42)$$

В реальных приборах искусственной средой с нужными свойствами служит периодическая электродинамическая структура — замедляющая система. Благодаря условиям (14.42) при взаимодействии потока электронов с волной в системе реализуется распределенная обратная связь — малые волновые возмущения, распространяющиеся со скоростью  $v_{gp}$ , бегут навстречу потоку и тем самым связывают выход системы с ее входом. При этом возможно либо усиление (регенеративное), либо самовозбуждение лампы. В электронике ЛОВ используется, главным образом, для генерации монохроматических колебаний СВЧ-диапазона (схематическое изображение ЛОВ приведено на рис. 14.7 [16, 17]).

Легко показать, что дисперсионное уравнение системы электронный пучок — обратная электромагнитная волна имеет вид

$$(\omega - kv_\phi)(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = -\omega^3 C^3, \quad (14.43)$$

т. е. отличается от уравнения (14.41) только знаком в правой части. Если речь идет о самовозбуждении системы, то неизвестны ни  $\omega$ , ни  $k$ . Каково условие неустойчивости? Поскольку нас интересует генерация, то следует интересоваться неустойчивостью во времени. Тогда возникает вопрос: какой смысл в данном случае имеют комплексные значения  $k$ ? Обычно ответы на эти вопросы находятся совместным решением уравнений типа (14.31) (для ЛОВ в этом уравнении нужно изменить знак в правой части) и (14.40) при начальных или граничных условиях, соответствующих физике задачи.

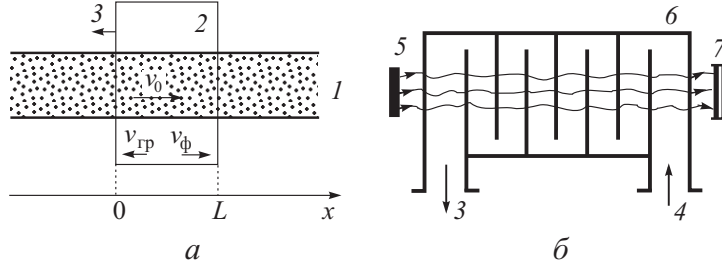


Рис. 14.7. Схематическое изображение генератора обратной волны (б) и анализируемая модель (а): 1 — электронный пучок; 2 — среда; 3 — выходное устройство; 4 — входное устройство в случае ЛОВ — усилителя; для генератора заменяется согласованной нагрузкой; 5 — электронная пушка; 6 — замедляющая система; 7 — коллектор

Так, из уравнения (14.41) следует, что поле  $E$  и сгруппированный ток  $i'$  можно описать тремя волнами:

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i(0) e^{-ik_i x}, \quad i' = \sum_{i=1}^3 i'_i(0) e^{-ik_i x}.$$

Неизвестные амплитуды  $E_i(0)$  и  $i'_i(0)$  определяются для ЛБВ из начальных условий ( $x = 0$ )

$$\sum_{i=1}^3 E_i(0) = E(0), \quad \sum_{i=1}^3 i'_i(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial i'_i(0)}{\partial x} = 0, \quad (14.44)$$

где  $E(0)$  — амплитуда входного сигнала, второе условие означает, что пучок не сгруппирован на входе, а третье условие — что пучок на входе не модулирован по скорости. Тогда можно найти распределение поля вдоль длины пространства взаимодействия. Из решения следует, что на достаточно большой длине доминирует волна с  $\text{Im } k > 0$ , которая и определяет коэффициент усиления ЛБВ. Например, при  $b = 0$  коэффициент усиления равен

$$G = \frac{E(l)}{E(0)} \sim \exp \left( \frac{\sqrt{3}}{2} 2\pi C \frac{l}{\lambda} \right) \sim \exp \left( \frac{\sqrt{3}}{2} 2\pi C N \right),$$

где  $\lambda = 2\pi/k_e$ ,  $N = l/\lambda$  — число длин волн, укладывающихся по пространству взаимодействия.

В случае ЛОВ генератора для определения условий возникновения колебаний ( $\text{Im } \omega = 0$ ) следует решать краевую задачу, полагая  $i'(0) = \partial i'(0)/\partial x = 0$  и  $E(l) = 0$  (входной сигнал отсутствует). Тогда получаются следующие значения пусковых параметров, при которых возникают колебания:  $b_n = 1,522$ ,  $(CN)_n = 0,314$ . При значении  $v_0$ , мало отличающемся от  $v_\phi$ , и  $C \ll 1$  решения (14.43) можно искать в виде  $k = (\omega/v_0)(1 + iC\delta)$ , что приводит к уравнению  $\delta^2(\delta + ib) = -i$ . При  $b = b_n$  корни этого уравнения  $\delta_1 = 0,725 + i \cdot 0,151$ ,  $\delta_2 = -0,725 + i \cdot 0,151$ ,  $\delta_3 = -i \cdot 1,822$  [17]. Очевидно, что волна с  $\text{Im } k_1 > 0$  не играет той роли, какую она играла в ЛБВ, а поле определяется суперпозицией всех трех волн, поскольку иначе не выполнить граничного условия  $E(l) = 0$ . При подобном подходе, однако, возникают очевидные трудности, связанные с необходимостью решения краевой задачи. В то же время было бы желательно не решать задачу с начальными и тем более краевыми условиями, а ограничиться рассмотрением лишь безграничных систем, т. е. анализом дисперсионного уравнения, и с его помощью отвечать на все вопросы об устойчивости.

### **§ 3. Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик). Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков.**

Определить характер поведения произвольного возмущения (сносится ли возмущение в каком-то направлении по  $x$  либо расширяется, захватывая новые области в  $+x$ - и  $-x$ -направлениях), не анализируя конкретных решений типа (14.7), а используя лишь дисперсионное уравнение системы — в общем случае задача весьма трудная. Однако для широкого класса распределенных систем, а именно систем, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа, это можно сделать сравнительно просто (заметим, что гиперболическими уравнениями описываются и колебания в системе связанных маятников (см. рис. 14.4 и 14.5, и невязкий гравитирующий газ, и многие другие очень важные системы). Для таких систем поставленная задача решается просто — нужно лишь определить на плоскости  $xt$  границы области распространения возмущения (рис. 14.8), совпадающие с характеристиками системы, которые имеют максимальный и минимальный наклоны. Простейший пример гиперболического уравнения мы уже хорошо знаем — это обычное волновое уравнение  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ . Здесь два семейства характеристик:  $x - at = C_1$  и  $x + at = C_2$ . Первое семейство соответствует возмущению

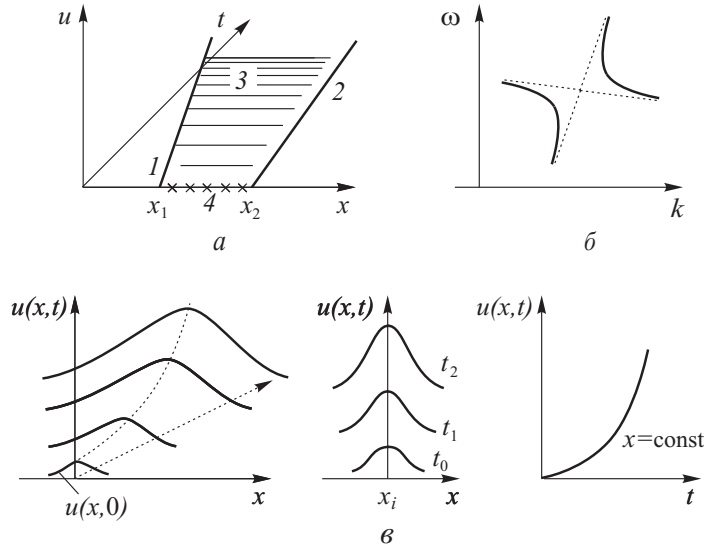


Рис. 14.8. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость  $xt$ ) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость  $\omega k$ ) в случае абсолютной неустойчивости для двухволновых систем (1,2 — характеристика различных семейств; 3 — область распространения возмущения; 4 — область начального возмущения (а,б); рисунки, поясняющие развитие в системе абсолютной неустойчивости (в))

ям, распространяющимся вправо, а второе — возмущениям,двигающимся влево. Поскольку в данном случае система линейна, произвольное возмущение (являющееся их суперпозицией) будет расширяться и в  $+x$ -, и в  $-x$ -направлениях. Таким образом, если мы "организуем" в подобной системе неустойчивость (формально это можно сделать, добавив в левую часть уравнения слагаемое  $-b^2 u_t$ ), то эта неустойчивость будет абсолютной — область распространения захватывает оба полупространства (и левее, и правее начальной области на оси  $x$  (рис. 14.8). Таким образом, неустойчивость однородного гравитирующего газа (неустойчивость Джинса) и неустойчивость в генераторе обратной волны — это абсолютные неустойчивости.

Характеристики гиперболических систем оказываются связанными с асимптотами дисперсионных кривых соответствующей линеаризованной задачи. Характеристики и асимптоты одинаково наклонены соответствен-

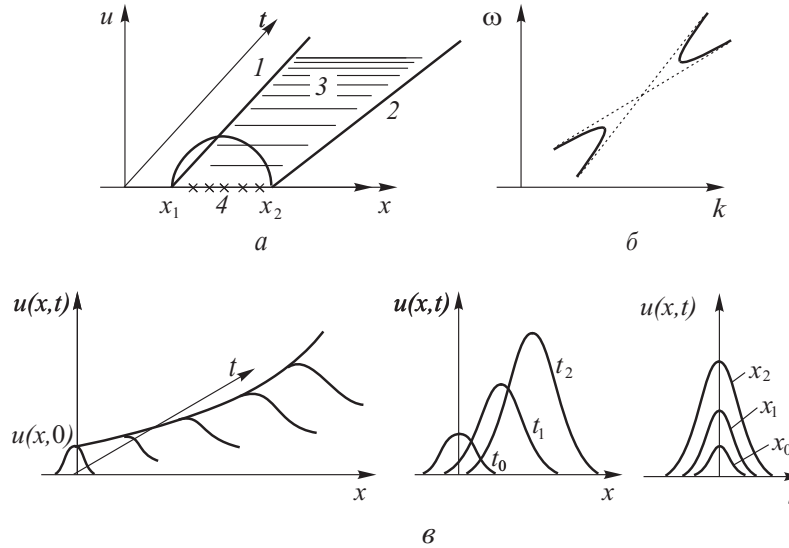


Рис. 14.9. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость  $xt$ ) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость  $\omega k$ ) в случае конвективной неустойчивости для двухволновых систем (1–4 имеют тот же смысл, что и на рис. 14.8 (а,б); рисунки, поясняющие развитие в системе конвективной неустойчивости (в)).

но на плоскостях  $xt$  и  $\omega k$ . Благодаря этому для гиперболических систем, для которых число асимптот с конечным наклоном совпадает с числом нормальных волн, можно уже по виду дисперсионных кривых сказать, будет ли неустойчивость абсолютной или конвективной. Если угловые коэффициенты асимптот дисперсионных кривых имеют противоположные знаки, то неустойчивость абсолютная (рис. 14.8), если они имеют одинаковые знаки, то неустойчивость конвективная (рис. 14.9).

В первом случае область распространения будет, как на рис. 14.8,а а во втором — как на рис. 14.9,а.

Приведем здесь элементарные сведения на теории характеристик [18, 19]. Запишем систему исходных уравнений в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(u) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (14.45)$$

где  $u_i$  — переменные, описывающие нашу систему, а  $a_{ik}$ ,  $b_i$  — нелинейные функции от  $u_1, \dots, u_n$ . Уравнения типа (14.45) обычно называют

квазилинейными. Они не содержат нелинейных функций относительно производных. Будем называть характеристиками линии на плоскости  $xt$ , ограничивающие так называемую область влияния. Если возмущение задано на некоторой дуге  $AB$  в плоскости  $xt$ , то оно влияет на решение  $u_i(x, t)$  системы (14.45) лишь в области, ограниченной характеристиками, проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Поскольку характеристика отделяет возмущенную область от невозмущенной, то, задав все величины  $u_i$  вдоль характеристик (т. е. известны лишь  $\partial u_i / \partial s$ ), невозможно с помощью уравнений (14.45) однозначно определить нормальные к характеристикам производные  $\partial u_i / \partial n$ . Исходя из этого будем искать уравнение характеристик. Обозначая тангенс угла наклона характеристик к оси  $t$  через  $V$ , выразим  $\partial u_i / \partial t$  и  $\partial u_i / \partial x$  через  $\partial u_i / \partial s$  и  $\partial u_i / \partial n$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{1}{V^2 + 1} \frac{\partial u_i}{\partial s} - \frac{V}{V^2 - 1} \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} &= \frac{V}{V^2 + 1} \frac{\partial u_i}{\partial s} + \frac{1}{V^2 - 1} \frac{\partial u_i}{\partial n}.\end{aligned}$$

После подстановки этих производных в (14.45) имеем

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} - V \delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial n} = - \sum_{k=1}^n (V a_{ik} + \delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial s} - b_i(u). \quad (14.46)$$

Это линейная неоднородная система относительно  $\partial u_k / \partial n$  с известной правой частью. Чтобы из этих уравнений нельзя было определить  $\partial u_k / \partial n$ , необходимо, чтобы определитель ее равнялся нулю:

$$\text{Det} (a_{ik} - V \delta_{ik}) = 0 \quad (14.47)$$

( $\delta_{ik}$  — символ Кронекера). Это и есть искомое уравнение для характеристик. Поскольку это многочлен  $n$ -го порядка относительно  $V$ , найдем наклон  $n$  семейств характеристик. Если система линейна и  $a_{ik}$  не зависят от  $u$ , то характеристики — это прямые линии на плоскости  $xt$ , наклон которых равен  $V_l$ , где  $V_l$ , ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) — корни уравнения (14.47).

Линеаризованная система (14.45) описывается дисперсионным уравнением

$$\text{Det} \left( a_{ik} - \frac{\omega}{k} \delta_{ik} - \frac{1}{k} b_{ik} \right) = 0, \quad b_{ik} = \left. \frac{\partial b_i}{\partial u_k} \right|_{u=u_0}. \quad (14.48)$$

Легко заметить, сравнивая (14.48) с (14.47), что в асимптотике при  $k \rightarrow \infty$  наклон дисперсионных кривых совпадает с наклоном характеристик.

Определим с помощью критерия, основанного на оценке расположения асимптот, вид неустойчивости в системе из двух взаимопроникающих двигающихся вдоль  $x$  электронных потоков.

Пусть есть две взаимопроникающие заряженные жидкости (в частности, это могут быть два электронных или ионных потока), взаимодействие которых определяется общим продольным электрическим полем пространственного заряда  $E_{пр.з.}$ . Подобно тому как мы поступили при анализе ЛБВ, будем считать среды консервативными, пренебрегая силами трения (вязкостью). Потоки, бесконечно широкие, движутся либо в одном по  $x$  направлении (попутные пучки), либо навстречу друг другу (встречные пучки) с разными по модулю постоянными скоростями  $|v_{01}|$  и  $|v_{02}|$ .

Описанная теоретическая модель соответствует довольно хорошо исследованной в СВЧ-электронике двухлучевой лампе [13, 14, 20]. В экспериментальных макетах использовались два катода, разность потенциалов между которыми обеспечивала различие в скоростях электронных потоков. Конструкция катодов выбиралась такой, чтобы обеспечить хорошее взаимопроникновение потоков (например, в одной из конструкций катод был выполнен в виде двух плоских спиралей, размещенных одна перед другой, так что электроны, эмиттируемые первым катодом, проходят между витками другого катода, чем и обеспечивается хорошее смешивание потоков).

Для введения усиливаемого сигнала в один или оба пучка обычно используется отрезок спирали, высокочастотное электрическое поле которого модулирует электроны. Скорость одного из потоков подбирается близкой к фазовой скорости волны  $v_\phi$  в спирали для того, чтобы модуляция потока входным сигналом была эффективной. В результате экспоненциального нарастания с координатой переменного тока лучей в выходной спирали возбуждается сигнал гораздо большей амплитуды, чем поданный на вход лампы (рис.14.10). Поначалу двухлучевая лампа казалась весьма перспективной, особенно в диапазоне миллиметровых длин волн, поскольку сочетала длительное взаимодействие с отсутствием замедляющих систем. Однако, как оказалось, переход к высоким частотам требует уменьшения разности скоростей потоков и увеличения плотности тока к ним. Сближение скоростей потоков ограничено разбросом электронов по скоростям, который характеризуется функцией распределения электронов по скоростям. Понятно, что при значении  $|v_{01}| - |v_{02}|$ , сравнимом с разбросом по скоростям, два луча практически неразличимы. Двухлучевой усилитель как прибор не используется в СВЧ-электронике. Тем не менее он стал стандартным примером в теории волновых неустойчиво-



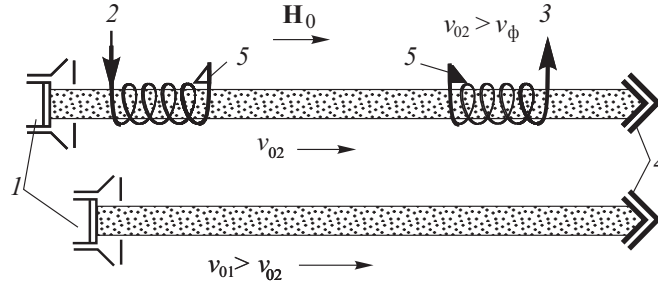


Рис. 14.10. Схема двухлучевого усилителя: 1 — электронные пушки; 2,3 — входное и выходное устройства; 4 — коллекторы; 5 — согласованные нагрузки;  $\mathbf{H}_0$  — фокусирующее магнитное поле. Пучки показаны разнесенными друг от друга

стей [6, 21–23].

Рассмотрим далее для определенности два ионно-скомпенсированных электронных потока, описываемых линеаризованными гидродинамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{np.3}, & \frac{\partial v'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{np.3}, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} + \rho_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial \rho'_2}{\partial x} + \rho_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E'_{np.3}}{\partial x} &= 4\pi(\rho'_1 + \rho'_2). \end{aligned} \quad (14.49)$$

В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , преобразуем систему (14.49) к следующему виду:

$$\begin{aligned} E_{np.3} &= -\frac{4\pi}{i\omega}(j'_1 + j'_2), \\ \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i\frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{01}}\right)^2 j'_1 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p1}^2}{v_{01}^2} E'_{np.3}, \\ \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i\frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{02}}\right)^2 j'_2 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p2}^2}{v_{02}^2} E'_{np.3}, \\ \omega_{p1}^2 &= \frac{4\pi e}{m} \rho_{01}, & \omega_{p2}^2 &= \frac{4\pi e}{m} \rho_{02}. \end{aligned} \quad (14.50)$$

Система уравнений (14.50) соответствует самосогласованной модели возбуждения электронного волновода электронными потоками. Первое уравнение системы описывает возбуждение электронного волновода заданными потоками, два других описывают группирование электронных потоков под действием их суммарного поля пространственного заряда.

Такой подход позволяет объяснить физический механизм двухлучевого усилителя с попутными потоками, основываясь на аналогии с уже известной нам ЛБВ.

Входное устройство модулирует медленный электронный поток по скорости и по плотности, что приводит к образованию в пространстве дрейфа электронной периодической структуры чередующихся уплотнений и разрежении электронов. Такая ситуация, как показано в гл. 12, соответствует распространению в пучке двух волн пространственного заряда — быстрой и медленной, фазовые скорости которых  $v_{\phi\delta,м} = v_{02}/(1 \mp \omega_q/\omega)$ . Таким образом, роль модулированного потока в двухлучевой системе аналогична роли замедляющей системы в ЛБВ. Второй быстрый поток ( $v_{02} < v_{01}$ ) взаимодействует с продольной составляющей замедленной волны в первом потоке. Тогда, как в ЛБВ, при соответствующем выборе скорости  $v_{01}$  второго потока последний будет отдавать энергию высокочастотному полю; в результате возможно усиление входного сигнала. Исключая в (14.50)  $E'_{np,3}$  окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_{01}} \right)^2 - \left( \frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 \right] j'_1 &= - \left( \frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 j'_2, \\ \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_{02}} \right)^2 - \left( \frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 \right] j'_2 &= - \left( \frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 j'_1. \end{aligned} \quad (14.51)$$

Система уравнений (14.51) допускает решение  $j'_1 = j'_2 = 0$ , когда потоки движутся, не взаимодействуя друг с другом. Будет ли такое движение устойчивым? Будем искать решение (14.51) в виде  $j'_{1,2} = \Psi_{1,2} \exp(-ikx)$ .

Подставляя его в (14.51), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов распределения  $\Psi_{1,2}$  (вектор  $\Psi(\Psi_1, \Psi_2)$  называют также поляризационным вектором). Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение задачи

$$\begin{aligned} D(\omega, k) = \omega_{p1}^2(\omega - kv_{02})^2 + \omega_{p2}^2(\omega - kv_{01})^2 - \\ - (\omega - kv_{01})^2(\omega - kv_{01})^2 = 0, \end{aligned} \quad (14.52)$$

или

$$\frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - kv_{01})^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - kv_{02})^2} = 1. \quad (14.53)$$

**Задача 14.1.** Используя представления гидродинамической теории горячей плазмы главы 12, покажите, что дисперсионное уравнение для горячей плазмы, пронизываемой холодным электронным пучком, имеет вид:

$$\frac{\omega_{\text{эл}}^2}{(\omega - kv_{\text{эл}})^2} + \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{(\omega - kv_T)^2} = 1,$$

где  $\omega_{\text{эл}}$  — ленгмюровская частота пучка,  $\omega_{\text{пл}}$  — ленгмюровская частота плазмы,  $v_{\text{эл}}$  — постоянная скорость электронного пучка,  $v_T$  — тепловая скорость электронов плазмы. Напомним, что в гидродинамическом приближении в обозначениях главы 12  $p_e = k_B T_e$ .

Заметим, что коэффициенты уравнений — действительные величины, в то время как корни его ( $\omega$  или  $k$ ) могут быть комплексными. Рассмотрим теперь детально различные частные случаи.

Пусть пучки совершенно одинаковые, но встречные, т. е.

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0, \quad \omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p, \quad v_{01} = -v_{02} = v_0. \quad (14.54)$$

С учетом (14.54) дисперсионное уравнение (14.52) принимает вид

$$D(\omega, k) = (\omega - kv_0)^2(\omega + kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega - kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega + kv_0)^2 = 0$$

или

$$\omega^2 = (k^2 v_0^2 + \omega_p^2) \pm \sqrt{4\omega_p^2 k^2 v_0^2 + \omega_p^4}. \quad (14.55)$$

Из (14.55) видно, что  $\omega$  могут быть комплексными, если  $k^2 v_0^2 + \omega_p^2 < \omega_p \sqrt{4k^2 v_0^2 + \omega_p^2}$ , т. е. при условии, когда

$$k < \sqrt{2}\omega_p/v_0. \quad (14.56)$$

Из (14.56) следует, что  $\lambda_p < \sqrt{2}\lambda$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega_p/v_0 = 2\pi/\lambda_p$ ), т.е. неустойчивы лишь длинноволновые возмущения. Подчеркнем, что  $k$  здесь действительные. Дисперсионные характеристики, определяемые формулой (14.55), приведены на рис. 14.11.

Для понимания рис. 14.11 проследим за цепочкой переходов: один пучок — два невзаимодействующих пучка — два взаимодействующих пучка

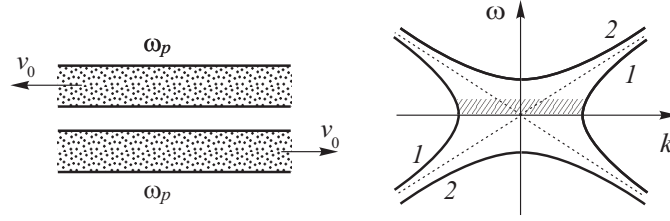


Рис. 14.11. Модель двух идентичных встречных пучков и дисперсионные характеристики, определяемые уравнением (14.55). При  $\omega = 0$  имеем  $k = \pm\sqrt{2}\omega_p/v_0$ ; если же  $k = 0$ , то  $\omega = \pm\sqrt{2}\omega_p$ ; в случае больших  $k$  и малых  $\omega_p$   $\omega \approx \pm v_0 k$ ; заштрихована полоса действительных значений  $k$ , при которых имеют место комплексные значения  $\omega$

(рис. 14.12). Как следует из (14.52) (это известно нам и из гл. 12), в одном возмущенном электронном потоке существуют две волны пространственного заряда — медленная и быстрая. Если  $v_{02} = -v_0 = 0$ ,  $\omega_{p2} = 0$ ,  $\omega_{p1} = \omega_p$ , то из (14.52) имеем  $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2$ ,  $\omega = kv_0 \pm \omega_p$ , а в случае  $v_{01} = v_0 = 0$ ,  $\omega_{p1} = 0$ ,  $\omega_{p2} = \omega_p$  имеем  $(\omega + kv_0)^2 = \omega_p^2$ ,  $\omega = -kv_0 \pm \omega_p$ . Из анализа рис. 14.12, в и его сравнения с рис. (14.12), а, б следует, что ветви 1 дисперсной характеристики взаимодействующих пучков соответствуют медленным волнам, а ветви 2 — быстрым волнам. Из рис. 14.11 видно, что для быстрых волн неустойчивости быть не может: любым действительным значениям волнового числа  $k$  для них соответствуют действительные значения частоты  $\omega$ .

Для медленных волн в области значений волновых чисел  $|k| < \sqrt{2}\omega_p/v_0$ , (на рис. 14.11 эта область выделена штриховкой) частота  $\omega$  будет комплексной величиной и при  $\text{Im } \omega < 0$  возмущения будут нарастать во времени.

Таким образом, в анализируемой консервативной системе существует неустойчивость. Это сам по себе замечательный факт. Энергия, необходимая для поддержания этой неустойчивости, черпается из “неволнового” движения равномерно движущихся по- токов.

Исследуем теперь одинаковые попутные пучки, т. е. случай, когда  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$  ( $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ ),  $v_{01}v_{02} > 0$ . При этих условиях из (14.52) получаем

$$\omega_p^2 \left[ \frac{1}{(\omega - kv_{01})^2} + \frac{1}{(\omega - kv_{02})^2} \right] = 1. \quad (14.57)$$

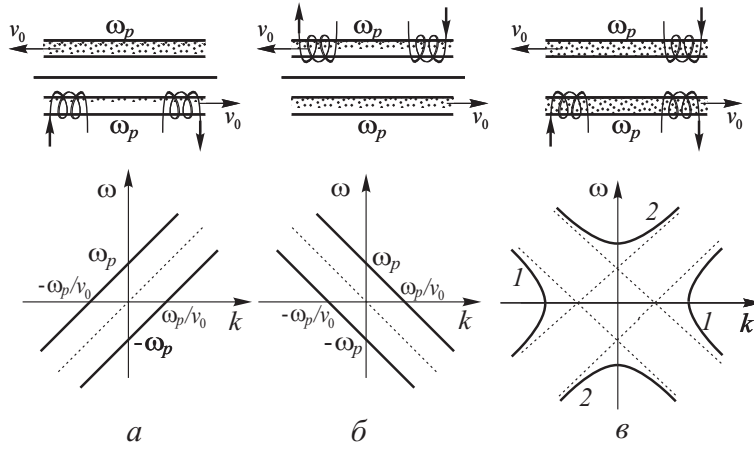


Рис. 14.12. Модели двух пучков и дисперсионные характеристики одного модулированного во входном устройстве пучка (другой отделен от него экраном А (а,б); модель двух взаимодействующих пучков и их дисперсионные характеристики (в). Штриховыми линиями показаны дисперсионные характеристики невзаимодействующих потоков.

Дисперсионная характеристика этой системы изображена на рис. 14.13,в. Качественный вид ее ветвей легко получить, переходя от случая невзаимодействующих пучков, один из которых неподвижен ( $v_{02} = 0$ ,  $v_{01} > 0$ ), к случаю их взаимодействия, а затем и к случаю взаимодействия попутных пучков, когда  $v_{01} > 0$ ,  $v_{02} > 0$ . Дисперсионное уравнение (14.57) по-прежнему имеет четыре корня, и каждое возмущение будет содержать четыре слагаемых, например  $v'_{1,2} = \sum_{k=1}^4 \Psi_{1,2m} \exp[i(\omega_m t - k_m x)]$ . Два из них (ветви 1 дисперсионной характеристики на рис. 14.13 в) не нарастают во времени, а два других (ветви 2) могут нарастать, поскольку действительным  $k$  в заштрихованной области соответствуют комплексные значения  $\omega$ . Но неустойчивость здесь другого типа, чем в задаче о встречных пучках. Поскольку пучки движутся в одну сторону, возмущение будет сноситься вместе с пучком, т. е. в данной точке пространства возмущение может затухать.

Разрешим уравнение (14.57) относительно  $k = k(\omega)$ , полагая  $\omega$  действительной величиной. Вводя величины [13] полуразности скоростей  $\delta = (v_{01} - v_{02})/2$ , средней скорости  $v_{cp} = (v_{01} + v_{02})/2$  и волнового числа

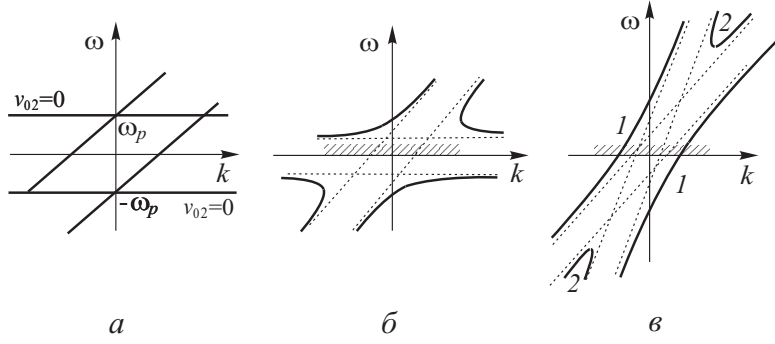


Рис. 14.13. Дисперсионные характеристики двух не взаимодействующих (а) и взаимодействующих (б) электронных пучков, один из которых неподвижен ( $v_{02} = 0$ ) и двух взаимодействующих попутных пучков (в); заштрихована область действительных значений  $k$ , при которых имеют место комплексные значения  $\omega$

$k = \omega/v_{cp} + i\gamma$ , можно переписать (14.57) в виде

$$\left(i\frac{\gamma v_{01}}{\omega_p} + \frac{\omega\delta}{v_{cp}\omega_p}\right)^{-2} + \left(i\frac{\gamma v_{02}}{\omega_p} - \frac{\omega\delta}{v_{cp}\omega_p}\right)^{-2} = 1. \quad (14.58)$$

Если  $\delta$  мало по сравнению с  $v_{01}$  и  $v_{02}$ , то можно считать, что  $\gamma v_{01}/\omega_p \approx \gamma v_{02}/\omega_p \approx \gamma v_{cp}/\omega_p$ . Тогда из (14.58) находим

$$\left(i\frac{\gamma v_{cp}}{\omega_p}\right)_{1-4} = \pm \left\{ \left(\frac{\omega\delta}{v_{cp}\omega_p}\right)^2 + 1 \pm \left[ \left(\frac{\omega\delta}{v_{cp}\omega_p}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (14.59)$$

Из анализа (14.59) следует, что максимальное значение инкремента нарастания волны составляет  $\text{Im } k = \gamma_{max} = \omega_p/(2v_{cp})$  и достигается при  $\omega\delta/\omega_p v_{cp} = \sqrt{3}/2$ ; при  $\omega\delta/\omega_p v_{cp} \geq \sqrt{2}$  значения  $\gamma v_{cp}/\omega_p$  становятся чисто мнимыми и все четыре волны имеют постоянные амплитуды. Итак, гармоническое возмущение возрастает вдоль  $x$ .

**Задача 14.2.** Пусть плотность одного из потоков мала по сравнению с плотностью другого:  $\rho_{02} \ll \rho_{01}$ . Покажите, что такая двухпотоковая система неустойчива. Для простоты предположите, что  $v_{01} = 0$ , т.е. более плотный поток неподвижен. Дисперсионное уравнение в этом случае удобно записать в виде:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\alpha\omega_p^2}{(\omega - kv_{02})^2} = 1.$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi e/m\rho_{01}$ ,  $\alpha = \rho_{02}/\rho_{01} \ll 1$ . Используйте малость параметра  $\alpha$  и рассмотрите случаи,

- 1) когда  $kv_{02}$  не близка к  $\omega_p$ ;
- 2)  $kv_{02} \approx \omega_p$ .

Определите характер неустойчивости.

**Задача 14.3.** Предположим, что электронная компонента плазмы движется относительно неподвижной ионной со скоростью  $v_{0e}$ . В этом случае дисперсионное уравнение выглядит так:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_{0e})^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 1,$$

где  $\omega_{pe}$ ,  $\omega_{pi}$  — ленгмюровские частоты электронной и ионной компонент. Докажите, что имеет место неустойчивость (неустойчивость Бунемана). Используйте, что  $m_e \ll m_i$ .

#### § 4. Неустойчивость Гельмгольца.

Проанализируем теперь неустойчивость Гельмгольца<sup>4</sup> [5]. При рассмотрении взаимодействия течений жидкости обычно приходится решать двумерную задачу: скорость потоков должна зависеть не только от продольной координаты  $x$ , но и от поперечной координаты  $y$  (рис. 14.14,а). Однако в частном случае, когда границу, через которую взаимодействуют потоки, можно считать неразмытой, задачу удастся свести к одномерной.

Предположим, что два слоя жидкости скользят друг относительно друга с постоянными скоростями  $\mathbf{v}_{01}$  и  $\mathbf{v}_{02}$ , участок поверхности разрыва скорости плоский, плотности жидкостей постоянны и равны  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$ , поскольку жидкости не смешиваются (рис. (14.14),а). Пусть на границе раздела возникло слабое возмущение  $y'$  самой границы, скорости  $\mathbf{v}'$  и давления  $p$  жидкости. Причем  $y'$ ,  $\mathbf{v}'$  и  $p'$  пропорциональны  $\exp[i(\omega t - kx)]$ . Для несжимаемой жидкости с одной стороны от поверхности разрыва из уравнений Эйлера и непрерывности (см. гл. 11) в линейном приближении имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{01}} \text{grad } p'_1, \quad \text{div } \mathbf{v}'_1 = 0 \quad (14.60)$$

<sup>4</sup>Неустойчивость границы раздела движущихся жидкостей при  $\rho_{01} \neq \rho_{02}$  называют иногда неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

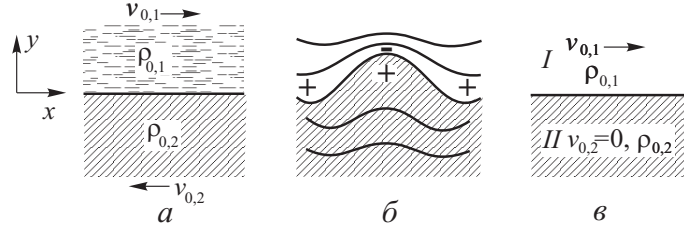


Рис. 14.14. Неустойчивость Гельмгольца [5]: *а* — возмущения границы раздела нет — два слоя жидкости скользят по границе раздела навстречу друг другу; *б* — граница раздела возмущена — схематическое изображение формы линий тока и распределение давления вблизи возмущенной поверхности тангенциального разрыва скорости; *в* — исходная модель для анализа системы поверхностный ветер (I) — неподвижная вода (II).

(в первом уравнении учтено, что постоянная скорость направлена вдоль оси  $x$ ).

Применяя к обеим частям (14.60) операцию  $\text{div}$  и используя условие несжимаемости жидкости, получаем

$$\frac{\partial^2 p'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'_1}{\partial y^2} = 0. \quad (14.61)$$

Решение (14.61) естественно искать в виде

$$p'_1 = p'_1(y)e^{i(\omega t - kx)}. \quad (14.62)$$

Тогда для жидкости, занимающей пространство над разрывом  $y > 0$ , из (14.61) и (14.62) находим

$$p'_1(y) = Ae^{-ky}e^{i(\omega t - kx)}. \quad (14.63)$$

Обозначим смещение границы через  $y' = y'(x, t)$ . Тогда для поперечной составляющей скорости  $v'_{y1}$  на самой границе справедливо соотношение

$$v'_{y1} = dy'_1/dt = i(\omega - kv_{01})y'_1. \quad (14.64)$$

Из уравнения Эйлера для  $v'_{y1}$ -компоненты скорости с учетом (14.64) находим связь между давлением  $p'_1$  и смещением границы  $y'_1$ :

$$p'_1 = -(\omega - kv_{01})^2 \rho_{01} y'_1 / k. \quad (14.65)$$



Очевидно, что давление  $p'_2$  в области по другую сторону границы разрыва, для которой  $y < 0$ , выразится соотношением, аналогичным (14.65), но с противоположным знаком:

$$p'_2 = (\omega + kv_{02})^2 \rho_{02} y'_2 / k. \quad (14.66)$$

В (14.66) учтено, что  $v_{02} < 0$ . Давления на границе раздела должны быть равны; поэтому дисперсионное уравнение задачи имеет следующий вид:

$$(\omega - kv_{01})^2 = -(\rho_{02}/\rho_{01})(\omega + kv_{02})^2, \quad (14.67)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{k}{\rho_{01} + \rho_{02}} [(\rho_{01}v_{01} - \rho_{02}v_{02}) \pm i(v_{01} + v_{02})\sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}]. \quad (14.68)$$

Из (14.68) следует, что частота оказывается комплексной величиной, причем всегда есть корень дисперсионного уравнения, для которого выполняется условие  $\text{Im } \omega < 0$  при действительных  $k$ . Это и есть неустойчивость Гельмгольца, т. е. абсолютная неустойчивость. Механизм неустойчивости объяснить довольно просто, исходя из закона Бернулли  $v^2 + 2p/\rho = \text{const}$ . Если на границе раздела возникло возмущение, скажем жидкость снизу границы приподнялась, то линии тока искажутся. В местах сгущения линий тока возникают поперечные градиенты давления, приводящие к усилению возмущений (см. рис. 14.14,б и формулы (14.65), (14.66)). Интересно, что Рэлей приводил этот механизм как объяснение полоскания парусов и флагов под действием ветра; однако в действительности в этом явлении проявляется механизм, связанный с возникновением и отрывом вихрей.

## § 5. Усиление и непропускание. Критерий разделения. Еще примеры неустойчивостей (Акустический усилитель Ч. Белла; неустойчивость полых и ленточных электронных потоков).

С физической точки зрения кажется очевидным, что систему, в которой реализуется конвективная неустойчивость, можно использовать для усиления сигналов. Таким образом, если дисперсионное уравнение  $D(\omega, k) = 0$  при действительном  $\omega$  имеет комплексные решения для  $k$  и асимптоты дисперсионных кривых имеют наклоны одного знака (см. рис. 14.8,б и 14.8,в), то в системе есть усиление. На языке характеристик это означает, что область распространения лежат по ту сторону от границы  $x = 0$ , на которую подается сигнал. Обратный случай — когда асимптоты имеют наклоны разных знаков — соответствует непропусканию.

Столь простой критерий разделения усиления и непропускания применим лишь к системам гиперболического типа. Для систем более общего вида существует несколько более сложных критериев [6, 21–28] один из которых — критерий Бриггса [23] — мы здесь приведем. При решении дисперсионного уравнения  $D(\omega, k) = 0$  будем считать  $\omega$  комплексным с  $\text{Im } \omega < 0$ . Узнать, будет ли комплексное решение для  $k$  соответствовать усилению или непропусканию, можно следующим образом: если при  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$  знак  $\text{Im } k$  изменяется, то имеет место усиление, если же знак не меняется, то — непропускание.

Иными словами, в системе будет усиление, если она чувствительна к спаду сигнала во времени, и непропускание, если система не чувствует этого спада (волна просто не проникает в среду, как, например, в случае бесстолкновительной плазмы, когда  $kc = \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \omega}$  при  $\omega < \omega_p$ ); физически данный критерий связан с принципом причинности. Если предположить, что система возбуждается источником, сигнал которого меняется во времени по закону  $\exp(i \text{Re } \omega t) \exp(-\text{Im } \omega t)$  и  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ , то все волны должны затухать с удалением от источника из-за конечной скорости распространения возмущения. Следовательно, когда волна усиливается при действительных  $\omega$ , то знак  $\text{Im } k$  должен измениться при изменении  $\text{Im } \omega$  от 0 до  $-\infty$ , т. е. при нарастании во времени волна должна затухать в том направлении, в каком усиливалась при  $\text{Im } \omega = 0$ .

Заканчивая эту главу, приведем еще два примера распределенных усилителей. Один из них (см. [29]) — это акустический усилитель, созданный Ч. Беллом. В этом усилителе тонкая струя воды направлялась на маленькую резиновую диафрагму, связанную с индикатором звука — рупором. Волны, распространяющиеся в потоке воды, вызывали колебания в диафрагме, преобразуемые в звуковые на выходе из рупора. Существование растущих с координатой волн доказывалось следующим образом. Около сопла, из которого вырывалась струя воды, размещался камертон или музыкальный ящик (см. [29]), которые на современном языке следует назвать входным устройством. Тогда на выходе из рупора снимался усиленный звуковой сигнал, достаточный для того, чтобы его было слышно в лекционном зале.

В работе [29] предложена простая теория усилителя, близкая по форме построения к теории неустойчивости Гельмгольца. Суть ее в следующем. Рассматривается односкоростной цилиндрический ламинарный поток несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_0$ , который описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера для радиальной ( $v_r$ ) и продольной ( $v_z$ ) компонент скорости. Возмущениями по азимутальной координате  $\varphi$

пренебрегают. В предположении, что под действием начального возмущения возникающие переменные величины изменяются по закону  $\exp[i(\omega t - kz)]$ , где  $\omega$  — действительная величина, линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$(\omega - kv_0)v'_z = kp'/\rho_0, \quad (14.69)$$

$$(\omega - kv_0)v'_r = -(i/\rho_0)\partial p'/\partial r, \quad (14.70)$$

где  $v_0$  — постоянная скорость жидкости в  $z$ -направлении. Из условия несжимаемости жидкости  $\text{div } \mathbf{v}' = 0$  и уравнений (14.69) и (14.70) получается дифференциальное уравнение для  $p'$ , которое имеет решение

$$p' = AI_0(kr)e^{i(\omega t - kz)}, \quad (14.71)$$

где  $A$  — постоянная,  $I_0(kr)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Под действием возмущений граница жидкости искривляется, что, как показано в [29], приводит к следующему выражению для переменного давления на границе:

$$P' = \sigma(k^2 - r^{-2})r' = \frac{[\sigma/(\rho_0 r^2)](k^2 r^2 - 1)}{(\omega - kv_0)^2} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (14.72)$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $v'_r = i(\omega - kv_0)r'$ . Используя (14.71) и (14.72), приходим к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{\sigma}{\rho_0 r^2}(k^2 r^2 - 1)k \frac{I_1(kr)}{I_0(kr)}. \quad (14.73)$$

Если считать, что  $k = \omega/v_0 + \delta$  ( $|\delta| \ll \omega/v_0$ ), и в правой части (14.73) заменить  $k$  на  $\omega/v_0$ , то

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm i \left( \frac{\sigma}{\rho_0 r^3 v_0^2} \right)^{1/2} \frac{1}{20 \lg e} F \left( \frac{\omega r}{v_0} \right) \quad (14.74)$$

Вид функции  $F(\omega r/v_0)$  показан на рис.14.15. Для нарастающей волны максимальный коэффициент усиления (в децибелах на единицу длины)

$$G_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 r^3 v_0^2}} F \left( \frac{\omega r}{v_0} \right). \quad (14.75)$$

Следуя [29], оценим величину  $G_{\max}$ , полагая, что диаметр потока равен 0,1 см, а частота, соответствующая условию  $\omega r/v_0 = 1$  (рис. 14.15), равна 5000 Гц. Из этих данных находим, что скорость потока должна быть равна

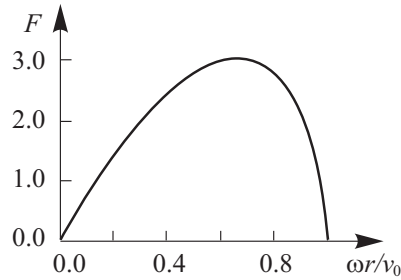


Рис. 14.15. График функции  $F(\omega r/v_0)$ . Для низких частот эта функция (а значит, и максимальный коэффициент усиления на единицу длины) пропорциональна частоте, достигает максимума при  $\omega r/v_0 = 0,7$  и обращается в нуль на частоте  $f_{\max} = v_0/(2\pi r)$  [29]

1570 см/с (это равносильно напору 1260 см вод. ст.). Тогда, используя график рис. 14.15 для частоты около 3500 Гц получаем  $G_{\max} \approx 1,43$  дБ/см ( $\sigma \approx 73$  дин/см,  $\rho_0 \approx 1$  г/см<sup>3</sup>).

В электронике подобная неустойчивость характерна для трубчатых пучков в продольном магнитном поле; последнее компенсирует кулоновы силы расталкивания в объемном заряде [30].

На рис. 14.16 приведены фотографии из работы [30], иллюстрирующие эволюцию этой неустойчивости в пространстве дрейфа. Неустойчивость полых пучков близка к неустойчивости тонких заряженных слоев в скрещенных электро- и магнитостатических полях, для которых возможно простое качественное объяснение неустойчивости [13]. Действительно, если в задаче с трубчатым пучком перейти в систему координат, движущуюся вдоль магнитного поля со статической скоростью электронного потока, то движение электронов будет таким же, как и в пучке в скрещенных полях,— перпендикулярным и электрическому, и магнитному полям. Интересно, что для электронных потоков в скрещенных полях с произвольным распределением плотности по сечению справедлив ряд известных гидродинамических теорем об устойчивости различных плоскопараллельных течений (в частности, существует аналог теоремы Рэлея о необходимости для неустойчивости электронного потока точки перегиба в профиле скорости).

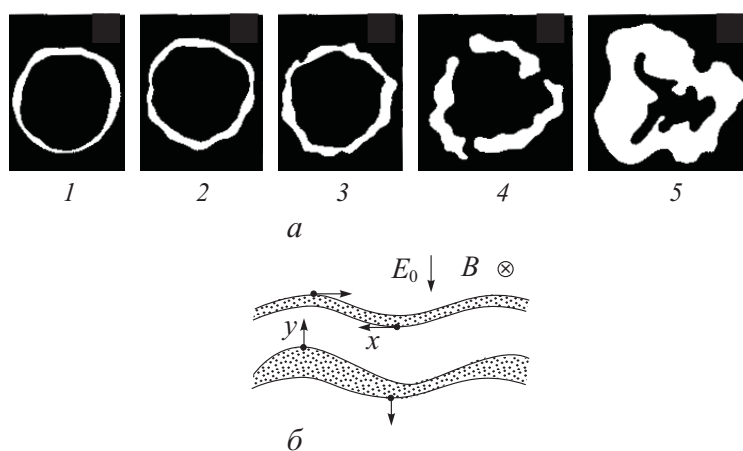


Рис. 14.16. Эволюция неустойчивости дрейфующего цилиндрического электронного потока в продольном магнитном поле; на фотографиях из работы [30] показано сечение пучка при перемещении экрана вдоль пространства дрейфа; увеличение номера кадра соответствует увеличению длины дрейфа (а); иллюстрация фотографий на примере тонкого ленточного слоя в скрещенных полях; локальное увеличение плотности заряда приводит к изгибу слоя, он становится неустойчивым и начальное возмущение растет (б) [13, гл. 5]

## ГЛАВА 15

### Энергия и импульс волн

*Уравнение переноса усредненной плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде на примере уравнения Клейна-Гордона. Вариационный принцип Уизема. О различных способах вывода выражений для плотности энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией. Что же такое волновая энергия для линейных волн? Импульс волнового пакета.*

#### § 1. Уравнение переноса плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде

Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию в процессе своего распространения. Энергия эта самая разная в зависимости от природы волн: весьма значительная - у морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы, сравнительно небольшая - у электромагнитных световых волн, доходящих до Земли от Солнца (мощность на  $1 \text{ м}^2$  поверхности около  $1 \text{ кВт}$ ) и т. п. Подобно движущимся частицам, волны обладают импульсом. Хотя существование импульса у волны не может вызвать сомнений, проявляется он менее заметно, чем энергия волны; например, световое давление потока излучения Солнца на орбите Земли составляет очень малую величину - всего  $p = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$ . [1,2] (см. также главу 9 настоящей книги).

Мы в этой главе получим уравнения, описывающие перенос энергии и импульса волн в диспергирующих средах [3–6].

При выводе уравнения переноса энергии поступим, как и при выводе уравнения эволюции волнового вектора (см. гл. 13): откажемся от использования интеграла Фурье. Будем исходить из уравнения Клейна - Гордона с постоянными коэффициентами [3]:

$$u_{tt} - V^2 u_{xx} + \beta^2 U = 0. \quad (15.1)$$

Умножая обе части (15.1) на  $u_t$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) - V^2 u_t u_{xx} = 0. \quad (15.2)$$

Прибавим к левой части получившегося уравнения (15.2) слагаемое  $V^2 u_x u_{xt} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} u_x^2)$  и отнимем в точности такое же. Легко видеть, что

$$-V^2 u_t u_{xx} - V^2 u_x u_{xt} = -V^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) .$$

С учетом сделанных преобразований получаем уравнение, выражающее закон сохранения энергии, в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-V^2 u_x u_t) = 0 . \quad (15.3)$$

где сумма  $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2$  имеет смысл плотности энергии, а  $-V^2 u_x u_t$  — потока энергии.

Рассмотрим теперь группу волн (или, как часто говорят, волновой пакет), медленно изменяющуюся в пространстве и во времени. Для такой группы волн

$$u \sim \operatorname{Re} (A e^{i\theta}) = a \cos(\theta + \eta) \quad (15.4)$$

где  $a = |A|$ ,  $\eta = \operatorname{Arg} A$ . Используя (15.4), вычисляем плотность энергии и плотность потока энергии. Очевидно, что

$$u_t \sim -i\omega a \sin(\theta + \eta) + a_t \cos(\theta + \eta) - \eta_t a \sin(\theta + \eta) .$$

тогда  $u_t^2 \sim \omega^2 a^2 \sin^2(\theta + \eta)$ , поскольку из-за медленности изменения  $a$  и  $\eta$  слагаемыми, содержащими  $a_t$  и  $\eta_t$ , можно пренебречь. В тех же приближениях легко вычислить остальные слагаемые, входящие в плотность энергии, что окончательно дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \sim \frac{1}{2} (\omega^2 + V^2 k^2) a^2 \sin^2(\theta + \eta) + \\ + \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta) , \end{aligned} \quad (15.5)$$

где учтено, что  $\partial\theta/\partial t = \omega$ , а  $\partial\theta/\partial x = -k$ . Аналогично для плотности потока энергии

$$V^2 u_x u_t \sim V^2 \omega k a^2 \sin^2(\theta + \eta) . \quad (15.6)$$

Если вместо (15.1) взять уравнение, которое содержит производные более высокого порядка, то очевидно, что при их вычислении с учетом (15.4) появятся дополнительные слагаемые, содержащие производные  $\omega$  и  $k$ .

Однако, поскольку мы рассматриваем медленно изменяющийся волновой пакет,  $\omega$  и  $k$  тоже медленно изменяются, и этими слагаемыми можно пренебречь. Рассмотрим средние за период значения выражений (15.5) и (15.6). Это оправданно: интересны заметные (средние) изменения  $\omega$ ,  $k$  и  $a$ , а не мелкие осцилляции и их детали. Итак, для средних значений плотности энергии и плотности потока энергии в рамках сделанных допущений получаем

$$\mathcal{E} = (\omega^2 + V^2 k^2) \frac{a^2}{4} + \frac{\beta^2 a^2}{4}, \quad (15.7)$$

$$S = V^2 \omega k \frac{a^2}{2}. \quad (15.8)$$

Из (15.1) следует дисперсионное уравнение задачи

$$\omega^2 = \beta^2 + V^2 k^2. \quad (15.9)$$

С учетом (15.9) соотношения (15.7) и (15.8) принимают следующий окончательный вид:

$$\mathcal{E} = (\beta^2 + V^2 k^2) \frac{a^2}{2}, \quad (15.10)$$

$$S = V^2 \omega k \frac{a^2}{2}. \quad (15.11)$$

По определению  $v_{gp} = d\omega/dk$ , поэтому из (15.9) получаем

$$v_{gp} = \frac{V^2 k}{\sqrt{V^2 k^2 + \beta^2}}. \quad (15.12)$$

Из соотношений (15.10)–(15.12), используя (15.9), находим, что

$$v_{gp} = \mathcal{E}/S. \quad (15.13)$$

Общность этого выражения уже отмечалась в гл. 13. Возвращаясь к (15.3) и основываясь на (15.13), можно предположить, что закон сохранения средней плотности энергии выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{gp} \mathcal{E}) = 0. \quad (15.14)$$

В монографии [3] показано, что это уравнение соответствует ситуации, когда полная энергия между двумя прямыми  $x - v_{gp1,2}t = \text{const}$  на плоскости  $xt$  остается постоянной. Для доказательства рассмотрим выражение



для энергии

$$\bar{\mathcal{E}}(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E} dx, \quad (15.15)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — точки, которые движутся со скоростями  $v_{ep}(k_1)$  и  $v_{ep}(k_2)$ . Очевидно, что

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}(t)}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx + v_{ep}(k_2)\mathcal{E}_2 - v_{ep}(k_1)\mathcal{E}_1, \quad (15.16)$$

причем эта величина, как следует из (15.14), равна нулю. Не менее очевидно, что (15.16) в пределе при  $x_2 - x_1 \rightarrow 0$  превращается в (15.14).

Выражение для усредненной плотности энергии можно представить в виде  $\mathcal{E} = F(k)a^2$ . Подставим это выражение в (15.14); тогда

$$F(k) \left[ \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{ep} a^2) \right] + \frac{\partial F}{\partial k} a^2 \left( \frac{\partial k}{\partial t} + v_{ep} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = 0.$$

Но, как показано в гл. 13,  $\partial k / \partial t + v_{ep} \partial k / \partial x = 0$ , поэтому

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{ep} a^2) = 0. \quad (15.17)$$

Полученные соотношения типа (15.14) и (15.17) легко распространить на многомерные задачи. Такое обобщение для уравнения Клейна-Гордона и уравнения

$$u_{tt} - V^2 \nabla^2 u = \beta^2 \nabla^2 u_{tt}$$

приведено в [3]. Уравнение, характеризующее перенос усредненной плотности энергии волновым пакетом в средах с заданной дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{ep,j} \mathcal{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{ep,j} a^2) = 0. \quad (15.18)$$

Изложенные результаты оставляют чувство неудовлетворенности оттого, что они получены для конкретного уравнения. Дж. Уизем показал [3] справедливость “усредненного вариационного принципа” непосредственно для функций  $a(\mathbf{r}, t)$  и  $\theta(\mathbf{r}, t)$ , результатом применения которого является уравнение (15.18).

## § 2. Вариационный принцип Уизема [3].

Начнем с напомним необходимых для дальнейшего изложения некоторых сведений о вариационном исчислении. Вариационный принцип

$$\delta I = \delta \iint_R L \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \varphi \right) dt d\mathbf{x} = 0 \quad (15.19)$$

утверждает, что интеграл  $I[\varphi]$  по конечной области  $R$  должен быть стационарным при малых изменения функции  $\varphi$ . Как это понимать?

Рассмотрим две близкие функции  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}, t)$ , где  $h(\mathbf{x}, t)$  мало; обе функции считаются непрерывно дифференцируемыми, поскольку в выражение (15.19) входят первые производные  $\partial \varphi / \partial t = \varphi_t$  и  $\partial \varphi / \partial \mathbf{x} = \varphi_{\mathbf{x}}$ . В монографии [3] малость функции  $h(\mathbf{x}, t)$  измеряется нормой

$$\|h\| = \max |h| + \max |h_t| + \max |h_{\mathbf{x}}|,$$

где  $\partial h / \partial t = h_t$  и  $\partial h / \partial \mathbf{x} = h_{\mathbf{x}}$ .

Обычно функция  $L$  довольно проста, и можно считать, что она имеет ограниченные вторые производные. Разложим функцию  $L$  в ряд Тэйлора. Тогда

$$I[\varphi + h] - I[\varphi] = \iint_R (L_{\varphi_t} h_t + L_{\varphi, j} h_{x_j} + L_{\varphi} h) dt d\mathbf{x} + O(\|h\|^2), \quad (15.20)$$

где  $\varphi, j$  означает  $\partial \varphi / \partial x_j$ . Вариационный принцип требует, чтобы первая вариация  $\delta I[\varphi, h]$  (линейное по  $h$  выражение) была равна нулю для всех допустимых функций  $h$ . Ограничимся функциям  $h$ , обращающимися в нуль на границе  $R$ . После интегрирования по частям и использования теоремы о дивергенции получим

$$\delta I[\varphi, h] = \iint_R \left( -\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi, j} + L_{\varphi} \right) h dt d\mathbf{x}. \quad (15.21)$$

Потребуем, чтобы выражение (15.21) обращалось в нуль для всех таких  $h$ . Из соображений непрерывности имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi, j} - L_{\varphi} = 0. \quad (15.22)$$

Когда  $L$  содержит производные функции  $\varphi$  второго или более высокого порядка, то уравнение, которое называют уравнением Эйлера имеет вид:

$$L_\varphi - \frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi,j} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} L_{\varphi_{t,j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L_{\varphi,jk} - \dots = 0. \quad (15.23)$$

Уравнение (15.23) является результатом повторного интегрирования по частям.

Уравнения (15.22) и (15.23) — уравнения в частных производных для  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , причем уравнениям такого вида можно дать эквивалентную вариационную формулировку.

В качестве типичного примера для дальнейшего построения теории вновь используем уравнение Клейна-Гордона в виде:

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi = 0. \quad (15.24)$$

Сравнивая уравнения (15.24) и (15.22), находим выражение для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2. \quad (15.25)$$

Как уже использовалось для медленно меняющихся волновых пакетов  $\varphi \sim \text{Re}[A \exp(i\theta)]$ , т.е.

$$\varphi \sim a \cos(\theta + \eta), \quad (15.26)$$

где  $a = |A|$ ,  $\eta = \text{Arg } A$ ,  $\omega = \partial\theta/\partial t$ ,  $k_j = -\partial\theta/\partial x_j$ . Подставим (15.26) в лагранжиан, пренебрежем производными от  $a$ ,  $\eta$ ,  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  и проведем усреднение по периоду, т.е. перейдем к

$$\mathcal{L}(a, \omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta.$$

Тогда для уравнения Клейна-Гордона (15.24), используя соотношения (15.25) и (15.26), получим:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2) a^2. \quad (15.27)$$

**Задача 15.1.** Докажите, что для уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi &= \beta^2 \nabla^2 \varphi_{tt}, \\ \varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} &= 0,\end{aligned}$$

с дисперсионными уравнениями  $\omega = \pm i\alpha k / \sqrt{1 + \beta^2 k^2}$ , и  $\omega = \pm \gamma k^2$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta^2 \omega^2 k^2) a^2, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{4} (\omega^2 - \gamma^2 k^4) a^2.\end{aligned}$$

Постулируем теперь *усредненный вариационный принцип*

$$\delta \iint \mathcal{L}(+\theta_t, -\theta_{\mathbf{x}}, a) dt d\mathbf{x} = 0 \quad (15.28)$$

для функций  $\theta(\mathbf{x}, t)$  и  $a(\mathbf{x}, t)$ .

Поскольку производные от  $a$  отсутствуют, уравнение Эйлера (15.23) для вариации функции  $a$  имеет вид

$$\delta a : \quad \mathcal{L}_a = 0.$$

Вариационное уравнение для функции  $\theta$  таково:

$$\delta \theta : \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{\theta_{,j}} = 0.$$

В эти соотношения входят только производные по  $\theta$ , поэтому снова удобнее вернуться к  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  и  $a$ . Тогда условия совместности, необходимые для существования фазы, выглядят так:

$$\mathcal{L}_a = 0, \quad (15.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{k_j} = 0, \quad (15.30)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (15.31)$$

Уравнение (15.29) ничем, кроме дисперсионного уравнения быть не может, поскольку является функциональным соотношением между  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  и  $a$ , что легко проверить во всех примерах задачи 15.1.

Тогда очевиден следующий важный вывод. Для любой линейной задачи лагранжиан  $L$  есть квадратичная функция от  $\varphi$  и ее производных. Как следствие этого, выражение для  $\mathcal{L}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = G(\omega, \mathbf{k}) a^2. \quad (15.32)$$

Тогда, согласно соотношению (15.29) дисперсионное уравнение должно иметь вид

$$G(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (15.33)$$

и функция  $G(\omega, \mathbf{k})$  в  $\mathcal{L}$  — не что иное, как дисперсионная функция (см. (15.27) и формулы для  $\mathcal{L}$  в задаче 15.1. Таким образом, в каждом случае не нужно даже вычислять  $\mathcal{L}$ : ее структура ясна.

Перепишем амплитудное уравнение (15.30), используя соотношение (15.32), так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_w a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j} (G_{k_j} a^2) = 0. \quad (15.34)$$

Из уравнения (15.33) следует, что  $\omega = W(\mathbf{k})$ , поэтому равенство  $G[W(\mathbf{k}), \mathbf{k}] = 0$  выполняется тождественно. Следовательно

$$G_w \frac{\partial W}{\partial k_j} + G_{k_j} = 0$$

и групповая скорость

$$v_{gpj} = \frac{\partial W}{\partial k_j} = \frac{G_{k_j}}{G_w}. \quad (15.35)$$

Пусть  $G_w(W, \mathbf{k}) = g(\mathbf{k})$ . Тогда уравнение (15.34) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} [g(\mathbf{k}) a^2] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g(\mathbf{k}) v_{gpj} a^2] = 0. \quad (15.36)$$

Из соотношений (15.31) следует, что

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + v_{gpj} \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0.$$

Используя последние соотношения, исключим из уравнения (15.36) функцию  $g(\mathbf{k})$ , что дает

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{gpj} a^2) = 0.$$

Ранее мы получили аналогичное уравнение (второе из (15.18)), где усредненная плотность энергии представлялась в виде  $\mathcal{E} = F(\mathbf{k}) a^2$ . Однако,

функции  $F(\mathbf{k})$  и  $g(\mathbf{k})$  не совпадают, поэтому нельзя считать, что соотношение (15.36) представляет собой усредненное энергетическое уравнение — первое уравнение из (15.18).

Для дальнейших рассуждений Уизем [3] привлекает теорему Нетер, которая утверждает, что каждой группе преобразований, относительно которой лагранжиан инвариантен, соответствует свое уравнение сохранения. Если лагранжиан инвариантен относительно сдвига по  $t$ , это утверждение к нему применимо, и соответствующее энергетическое уравнение оказывается таким:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\omega \mathcal{L}_{k_j}) = 0. \quad (15.37)$$

Лагранжиан в (15.28) удовлетворяет указанному требованию инвариантности. Вслед за Уиземом не будем прослеживать во всех деталях применение теоремы Нетер, а лишь укажем, что соотношение (15.37) получается из системы уравнений (15.29)-(15.31) (предоставляем читателю убедиться в этом самому).

Как показано выше, в линейном случае стационарное значение  $\mathcal{L} = 0$ , поэтому для плотности энергии имеем

$$\mathcal{E} = \omega \mathcal{L}_\omega, \quad (15.38)$$

а для плотности потока энергии

$$F_j = -\omega \mathcal{L}_{k_j}. \quad (15.39)$$

Следовательно,  $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{E}/\omega$ , и уравнения (15.30) или (15.37) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{E}}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_{pj} \mathcal{E}}{\omega} \right) = 0, \quad (15.40)$$

а из формул (15.32), (15.38) и (15.39) имеем  $\mathcal{E} = \omega G_\omega a^2$  и  $F_j = v_{pj} \mathcal{E} = -\omega G_{k_j} a^2$ . Напомним, что величина  $\mathcal{E}/\omega$  уже встречалась нам в главе 7 где она интерпретировалась как адиабатический инвариант для осциллятора с медленно изменяющимися параметрами.

**Задача 15.2.** Известно, что усредненный гамильтониан, т.е. плотность энергии волны, выражается как

$$\bar{H} = \overline{p\dot{q}} - \bar{L},$$

где  $p = L + \varphi_t$ ,  $\dot{q} = \varphi_t$ , а плотность потока энергии как

$$S = \overline{\dot{q}_{x_j} \frac{\partial L}{\partial q_{x_j}}}$$

(черта означает усреднение за период).

Полагая для простоты, что  $\varphi(x, t) = a(x, t) \cos \theta(x, t)$ , докажите следующие соотношения:

$$\bar{H} = \omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}, \quad S = -\omega \mathcal{L}_k.$$

### § 3. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией

**Метод М.Л.Левина** Начнем с примера изящного вывода выражения для средней плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде, принадлежащего М.Л. Левину, следуя книге [4].

Предположим, что вещество с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega)$  и магнитной проницаемостью  $\mu(\omega)$  заполняет плоский конденсатор с емкостью  $C = \varepsilon(\omega)C_0$  и тонкий соленоид с индуктивностью  $L = \mu(\omega)L_0$  (рис. 15.1). Конденсатор и соленоид соединены в колебательный контур, в котором при отсутствии потерь могут возникнуть свободные гармонические колебания с частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$ . Введем теперь в контур в некоторый момент времени сопротивление  $R$ . Понятно, что, начиная с этого момента, колебания начнут затухать, а первоначально запасенная электромагнитная энергия будет переходить в джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении  $R$ . Поэтому полное количество тепла, выделившееся в сопротивлении  $R$  за время, когда колебания прекратятся, будет равно электромагнитной энергии, запасенной в контуре до введения сопротивления. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к вычислению джоулева тепла.

Допустим, что при  $t < 0$  в контуре имеют место свободные колебания, так что сила тока в контуре  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , а напряжение на обкладках конденсатора  $V = V_0 e^{i\omega t}$ . Ток и напряжение связаны уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + V = 0 \quad \text{или} \quad i\omega LI + V = 0,$$

Начиная с момента  $t = 0$ , когда в контур введено сопротивление  $R$ , колебания будут описываться уравнением

$$L(\tilde{\omega}) \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

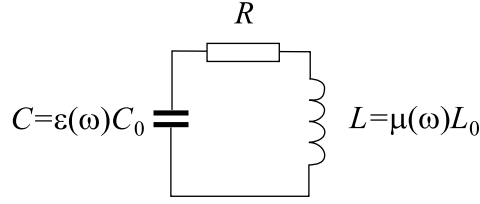


Рис. 15.1. Колебательный контур  $LRC$ .  $C_0$  и  $L_0$  — значения емкости и индуктивности, когда в пространстве между обкладками конденсатора и внутри соленоида вакуум; если  $R = 0$ , то  $\omega_0 = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$  — частота свободных гармонических колебаний.

решение которого для  $t > 0$  есть  $T = I_0 \exp(i\tilde{\omega}t)$ , где  $\tilde{\omega}$  — комплексная частота, определяемая характеристическим уравнением

$$\tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega})} = iR. \quad (15.41)$$

Если  $R \rightarrow 0$ , то  $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$ , а  $\omega$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0. \quad (15.42)$$

Вычтем из уравнения (15.41) уравнение (15.42) и после простых преобразований заменим все разности дифференциалами. Тогда

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \omega L(\omega) - \left[ \frac{1}{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega})} - \frac{1}{\omega C(\omega)} \right] = iR \longrightarrow \\ & \longrightarrow \left[ \frac{\tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \omega L(\omega)}{\tilde{\omega} - \omega} + \frac{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega}) - \omega C(\omega)}{\tilde{\omega} - \omega} \cdot \frac{1}{\tilde{\omega}\omega C(\tilde{\omega})C(\omega)} \right] = iR \longrightarrow \\ & \longrightarrow \left[ \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{d(\omega C)}{d\omega} \right] (\tilde{\omega} - \omega) = iR. \end{aligned}$$

Полагая  $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$ , находим

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C} \frac{d(\omega C)}{d\omega}. \quad (15.43)$$

Чтобы найти джоулево тепло, надо проинтегрировать выражение  $R^2 I$  по времени, учитывая, что

$$I \rightarrow \operatorname{Re} I = \frac{1}{2}(I + I^*).$$



Энергия, первоначально запасенная в колебательном контуре, равна

$$W = \int_0^{\infty} R \left( \frac{I + I^*}{2} \right)^2 dt = \frac{R|I_0|^2}{4} \left[ \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} + \frac{1}{\delta} \right] \quad (15.44)$$

или в пределе при  $\delta \rightarrow 0$

$$W = \frac{R|I_0|^2}{4} \frac{R}{\delta}. \quad (15.45)$$

**Задача 15.3.** Докажите соотношение (15.44), используя, что  $I = I_0 \exp(i\tilde{\omega}t)$  и  $V = V_0 \exp(i\tilde{\omega}t)$ .

Подставляя в формулу (15.45) выражение (15.43) и пользуясь соотношением  $\omega L|I_0| = |V_0|$ , находим

$$W = \frac{L_0|I_0|^2}{4} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0|V_0|^2}{4} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}. \quad (15.46)$$

В случае, когда между обкладками конденсатора и внутри соленоида был вакуум, для средних по времени значений магнитной и электрической энергий справедливы соотношения:

$$\frac{L_0|I_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{H}^2 \rangle v_m, \quad \frac{C_0|V_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle v_e, \quad (15.47)$$

где  $v_m$  и  $v_e$  — объемы соленоида и конденсатора, а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей, когда амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в соленоиде равны  $V_0$  и  $I_0$ , знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени.

Поскольку при заданных  $V_0$  и  $I_0$  поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от среды, заполняющей конденсатор и соленоид, соотношения (15.47) остаются справедливыми и в том случае, когда конденсатор и соленоид заполнены веществом. Используя выражения (15.46) и (15.47), получаем следующие формулы для средних по времени значений плотностей электрической и магнитной энергий:

$$\langle w_e \rangle = \frac{\langle W_e \rangle}{v_e} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (15.48)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{\langle W_m \rangle}{v_m} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle \mathbf{H}^2 \rangle. \quad (15.49)$$

Как подчеркивается в [4], недостаток приведенного выше вывода состоит в том, что дифференцирование функций  $\omega L$  и  $\omega C$  производится вдоль мнимой оси, так как  $\tilde{\omega} - \omega = i\delta$  — величина чисто мнимая, а в окончательных выражениях (15.48) и (15.49) производится подмена дифференцированием по вещественной переменной  $\omega$ . Так можно делать, если функции  $\omega L$  и  $\omega C$  аналитические. В общей теории дисперсии, впрочем, аналитичность функций  $\varepsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  доказывается.

**Задача 15.4.** Получить выражения для плотности электрической и магнитной энергии на примере газа невзаимодействующих гармонических осцилляторов — атомов, в каждом из которых всего один электрон, в электрическом поле с частотой  $\omega$  [5, гл. 3]. Вдали от собственной частоты  $\omega_0$  осциллятора затуханием можно пренебречь и для смещения  $\mathbf{r}$  осциллятора от положения равновесия пользоваться уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E},$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона.

*Указание.* В анализируемом случае энергия складывается из энергии самого электрического поля (т. е. поля в вакууме) и из энергии частиц, находящихся в поле (из кинетической и потенциальной энергии колеблющихся осцилляторов). Следует также использовать формулу Зельмейера (см., например, гл. 3 в [5]).

**Задача 15.5.** [4] Покажите, что, если  $\varepsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  положительны, то фазовая и групповая скорости в электромагнитной волне направлены в одну сторону.

**Общий способ вывода формулы для плотности энергии** Рассмотрим теперь более общий способ вывода соотношений для плотности электромагнитного поля в среде с дисперсией.

Известное выражение  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  для плотности потока электромагнитной энергии справедливо и в среде с дисперсией [6, 7]. Из уравнений Максвелла следует не менее известное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (15.50)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — напряженность и смещение электрического поля,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля.

Если дисперсии нет, т. е. проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$ , — действительные постоянные величины, то уравнение (15.50) выражает изменение плотности

электромагнитной энергии  $\mathcal{E} = (1/8\pi)(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)$  в единице объема, т. е.  $d\mathcal{E}/dt + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ . При наличии диссипации плотность энергии тепловых потерь определяется мнимыми частями  $\varepsilon$  и  $\mu$ :

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\operatorname{Im} \varepsilon \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \operatorname{Im} \mu \langle \mathbf{H}^2 \rangle), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + Q = 0.$$

Найдем  $\mathcal{E}$ , следуя [6]. Рассмотрим узкий волновой пакет, состоящий из монохроматических компонент с частотами вблизи некоторой  $\omega_0$ , т. е. узкий пакет с шириной спектра  $\Delta\omega \ll \omega_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t} \operatorname{Re} \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t} \operatorname{Re} \mathbf{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{H}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}] \end{aligned}$$

(для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  имеют место аналогичные выражения), где  $\mathbf{E}_0(t)$  и  $\mathbf{H}_0(t)$  — медленно изменяющиеся по сравнению с  $\exp(i\omega_0 t)$  функции времени. Подставим выражение для действительных частей напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , а также для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  в (15.50) после чего усредним получившееся по периоду  $2\pi/\omega_0$ . Очевидно, что быстро меняющиеся слагаемые типа  $\mathbf{E}_0(\partial \mathbf{D}_0/\partial t) \exp(2i\omega_0 t)$  и  $\mathbf{E}_0^*(\partial \mathbf{D}_0^*/\partial t) \exp(-2i\omega_0 t)$  при усреднении исчезнут, а останутся лишь слагаемые типа

$$M = \frac{1}{16\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

(мы делаем все преобразования только с первым слагаемым в правой части (15.50)). Представим производную  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  в виде  $\hat{f} \mathbf{E}$ , где оператор  $\hat{f} = (\partial/\partial t)\varepsilon$ . Что получится, если подействовать этим оператором на  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i\omega_0 t$ ? Очевидно, что если  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  (поле чисто гармоническое), то  $\hat{f} \mathbf{E} = i\omega_0 \varepsilon(\omega_0) \mathbf{E}$  или  $\hat{f} \mathbf{E} = f(\omega_0) \mathbf{E}$ , где  $f(\omega) = i\omega \varepsilon(\omega)$ . Разложим функцию  $\mathbf{E}_0(t)$  в интеграл Фурье, что соответствует представлению ее группой монохроматических составляющих  $\mathbf{E}_{0\omega} \exp[i(\omega - \omega_0)t]$  с  $\mathbf{E}_{0\omega} = \text{const}$ :

$$\mathbf{E}_0(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0).$$

Поскольку  $\mathbf{E}_0(t)$  — медленно изменяющаяся функция времени, то в интеграл войдут лишь те составляющие, для которых  $\Delta\omega = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ .

Это позволяет написать следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\hat{f}\mathbf{E}_{0\omega}e^{i(\omega_0+\Delta\omega)t} &= f(\omega_0+\Delta\omega)\mathbf{E}_{0\omega}e^{i(\omega_0+\Delta\omega)t} \approx \\ &\approx f(\omega_0)\mathbf{E}_{0\omega}e^{i(\omega_0+\Delta\omega)t} + \Delta\omega \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \mathbf{E}_{0\omega}e^{i(\omega_0+\Delta\omega)t}. \quad (15.51)\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \sim \int_{-\infty}^{\infty} i\Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega). \quad (15.52)$$

Проинтегрируем (15.51) по  $\Delta\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , что соответствует обратному преобразованию Фурье. Используя (15.52), находим

$$\begin{aligned}\hat{f}e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) &= \\ &= f(\omega_0)e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} i\Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) = \\ &= f(\omega_0)\mathbf{E}_0 e^{i\omega_0 t} - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega_0 t}.\end{aligned}$$

Опуская далее индекс 0 у  $\omega_0$ , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega t}. \quad (15.53)$$

Напомним, что  $\varepsilon(\omega) = \text{Re } \varepsilon(\omega) + i \text{Im } \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\omega''(\omega)$ . Те области частот, в которых  $\varepsilon''(\omega)$  малы по сравнению с  $\varepsilon'(\omega)$ , называются областями “прозрачности” среды (аналогично для магнитной проницаемости). В этих областях можно положить  $\varepsilon''(\omega) = 0$ , так что  $Q = 0$ . Учитывая, что теперь  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon^*(\omega)$ , имеем следующее соотношение для  $M$ :

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \left( \mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}_0) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}^* \mathbf{E}).\end{aligned}$$

Поскольку для магнитного поля все выкладки аналогичны, можем написать выражение для усредненной плотности энергии

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_\text{эл} \rangle + \langle \mathcal{E}_\text{м} \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]. \quad (15.54)$$

**Метод, основанный на дисперсионном уравнении** Укажем еще на один простой способ получения энергетических соотношений в средах с временной и пространственной дисперсией, который основан на использовании дисперсионного уравнения системы [8, 9]. Рассмотрим одномерную волну  $v' = \text{Re}\{v \exp[i(\omega t - kx)]\}$ , где  $v'$ , например, — скорость возмущения в потоке электронов. Пусть волна скорости возбуждается внешней волной  $F' = \text{Re}\{F \exp[i(\omega t - kx)]\}$  (например, продольной электрической компонентой бегущей электромагнитной волны), которая и определяет значения  $\omega$  и  $k$ . Амплитуды  $v$  и  $F$  определены так, чтобы средняя за период мощность взаимодействия возбужденной и внешней волн была пропорциональна  $(F'v'^*)$ . Если  $v$  и  $F$  связаны линейным соотношением  $D(\omega, k)v = -iF$ , где  $D(\omega, k)$  — аналитическая функция  $\omega$  и  $k$ , то имеют место формулы: для усредненной по периоду энергии на единицу длины

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{vv^*}{4} \quad (15.55)$$

и для усредненного по периоду потока энергии на единицу длины

$$\langle S \rangle = \frac{\partial D}{\partial k} \frac{vv^*}{4}. \quad (15.56)$$

В отсутствие внешнего воздействия  $D(\omega, k) = 0$  и  $v_{ep} = d\omega/dk = = (\partial D/\partial k)(\partial D/\partial \omega)^{-1} = \langle S \rangle/\langle \mathcal{E} \rangle$ , где полная производная берется вдоль всей дисперсионной характеристики.

Предоставляем читателю самому доказать весьма полезные формулы (15.55) и (15.56). В качестве примера их применения рассмотрим волны пространственного заряда в электронном потоке, исходя из уравнения для плотности сгруппированного тока  $j'$  при воздействии на поток внешней бегущей электромагнитной волны с продольной компонентой электрического поля  $E'$  (см. гл.14. В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_0} \right)^2 - \left( \frac{\omega_q}{v_0} \right)^2 \right] j' = \frac{i\omega\omega_p^2}{4\pi v_0^2} E' \quad (15.57)$$

$v_0$  — постоянная скорость пучка,  $\omega_q = R(\omega, k)\omega_q$ . Если  $E' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , то из (15.57) имеем

$$\frac{4\pi}{\omega S} \left[ (\omega - kv_0)^2 / \omega_p^2 - R^2(\omega, k) \right] j' S = -iE', \quad (15.58)$$

т. е.

$$D(\omega, k) = \left[ \frac{(\omega - kv_0)^2}{\omega_p^2} - R^2(\omega, k) \right] \frac{4\pi}{\omega S}. \quad (15.59)$$

где  $S$  — поперечное сечение пучка. Вид  $D(\omega, k)$  определяется тем, что средняя за период мощность взаимодействия электронного пучка с внешней бегущей волной равна  $(1/2) \operatorname{Re}(E' j'^* S)$ . При “снятии” внешнего воздействия  $D(\omega, k) = 0$  и  $(\omega - kv_0)^2 = R^2(\omega, k) \omega_p^2$ , т. е. имеем две волны пространственного заряда в дрейфующем пучке — быструю  $\omega - kv_0 = R(\omega, k) \omega_p$  и медленную  $\omega - kv_0 = -R(\omega, k) \omega_p$ . Из формул (15.55), (15.56) и (15.59) находим

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S}{\omega \omega_p} \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R \omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (15.60)$$

$$\langle S \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S v_0}{\omega \omega_p} \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (15.61)$$

Если пучок бесконечно широкий и  $R = 1$ , то  $v_{zp} = \langle S \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$ , и перенос энергии связан лишь с кинематическим движением пучка. Однако для пучка конечной толщины

$$v_{zp} = v_0 \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R \omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^{-1},$$

т. е. распространение энергии определяется не только кинематикой пучка, но и вторыми членами в круглых скобках, имеющими электромагнитное происхождение. Полученные выражения (15.60) и (15.61) верны и в релятивистском случае, если в определении  $\omega_p$  использовать продольную релятивистскую массу; они представляются полезными в теории шумов в электронных потоках. Интересно, что при  $\partial R / \partial \omega = \partial R / \partial k = 0$  для быстрой (индекс “б”) и медленной (индекс “м”) волн пространственного заряда (15.60) и (15.61) имеем

$$\langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle = \pm \frac{2\pi S}{\omega \omega_p} j' j'^*, \quad \langle S_{б,м} \rangle = \pm v_0 \langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle, \quad (15.62)$$

т. е. быстрая волна потока имеет положительную энергию, а медленная — отрицательную. Волнам с отрицательной энергией мы посвятим следующую главу.

#### § 4. Что же такое волновая энергия для линейных волн?

Для вычисления волновой энергии линейных волн исходят из линеаризованных уравнений анализируемой системы, умножая их на комплексно сопряженные величины и приводя к дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\lambda}{\partial t} + \operatorname{div} S_\lambda = 0.$$

Например, для звуковых волн в жидкости  $\mathcal{E}_\lambda = \rho_0 v^2/2 + p/(2\rho_0 c_{зв}^2)$ ,  $S_\lambda = pv$ , где  $\rho_0$  — постоянная составляющая плотности жидкости,  $v$  и  $p$  — малые возмущения скорости и давления,  $c_{зв}$  — скорость звука. Именно так получается равенство  $\mathcal{E} = \omega \mathcal{L}_\omega$ , поскольку в нем использовано соотношение  $\mathcal{L} = 0$ , которое выполняется лишь при учете дисперсионного уравнения  $G(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , следующего из линеаризованных уравнений задачи. В физическом отношении такой подход некорректен:  $\mathcal{E}_\lambda$  не есть вся энергия, связанная с волной.

Действительно, энергетические величины имеют второй порядок по амплитуде волны, и отброшенные при линеаризации квадратичные члены (при наличии течений или потоков) могут дать квадратичных же вклад в энергию, импульс и т.д.

Приведем элементарное пояснение сказанного на примере жидкости, в которой существует некоторое периодическое волновое движение, распространяющееся вдоль оси  $x$  в присутствии постоянного сдвигового течения  $u(z)$  ( $z$  — поперечная координата). Если амплитуда волны достаточно мала, то общее поле скоростей  $u$  можно представить в виде ряда

$$u = U(z) + A \left[ f_1(z) e^{i(\omega t - kx)} + \text{к.с.} \right] + A^2 \left[ f_0(z) + f_2(z) e^{2i(\omega t - kx)} + \text{к.с.} \right],$$

где  $A$  — амплитуда волны,  $A^2 f_0(z)$  описывает квадратичную поправку к средней скорости течения, к.с. означает комплексно сопряженную величину. По определению средняя плотность кинетической энергии, связанной с волной, может быть представлена в виде:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \left[ \overline{u^2} - U^2(z) \right] = \rho |A^2| (|f_1|^2 + u f_0),$$

черта, как обычно, означает усреднение по времени; считается, что в окрестности данной точки  $\rho = \text{const}$ .

Таким образом, плотность энергии состоит из двух слагаемых:  $\mathcal{E}_\lambda \sim f_1^2$  и  $\mathcal{E}_{нл} \sim U f_0$ , имеющих один и тот же порядок  $|A^2|$ . Очевидно, что  $\mathcal{E}_{нл}$  “не содержится” в предварительно линеаризованных уравнениях. Окончательный вывод: для вычисления “истинной” энергии нелинейной волны

необходимо знать нелинейное решение с точностью до членов второго порядка включительно.

### § 5. Импульс волнового пакета

Пусть в среде, которая движется относительно наблюдателя со скоростью  $|V| \ll c$  ( $c$  — скорость света), распространяется волновой пакет. Его энергия в системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , равна  $\mathcal{E}_V$ , в то время как в неподвижной системе координат энергия равна  $\mathcal{E}_V^0 \neq \mathcal{E}_V$ . Для дальнейших рассуждений [11] воспользуемся тем, что при  $|V| \ll c$  имеет место галилеева инвариантность физических процессов: законы изменения состояний физических систем не зависят от того, в какой из инерциальных систем отсчета они происходят (для механики это означает, что уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея). Ответим сначала на вопрос: как связаны  $\mathcal{E}_V^0$  и  $\mathcal{E}_V$ ? Для этого кроме волнового пакета рассмотрим частицу массы  $m$ , которая движется относительно наблюдателя со скоростью  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{v}$ . Величина  $\mathbf{v}$  — относительная скорость движения. Кинетическая энергия дополнительно введенной частицы

$$\mathcal{E}^0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + m\mathbf{v}\mathbf{V} + \frac{m\mathbf{v}^2}{2}. \quad (15.63)$$

Поскольку импульс частиц  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , а  $\mathcal{E} = m\mathbf{v}^2/2$  — энергия в системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , то  $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E} + \mathbf{p}\mathbf{V}$  с точностью до постоянной величины  $m\mathbf{V}^2/2$ . Предположим далее, что частица и волновой пакет обмениваются энергией и импульсом. Следствием галилеевой инвариантности является следующее соотношение, связывающее энергию и импульс в движущейся среде:

$$\mathcal{E}_V^0 = \mathcal{E}_V + \mathbf{P}\mathbf{V}. \quad (15.64)$$

Структура соотношения (15.64) определяется тем, что оно должно быть в точности совпадающим с написанным выше для частицы. Когда волна и свободная частица взаимодействуют эффективно? При выполнении условий пространственного резонанса, т. е. когда скорость частицы  $\mathbf{v}$  равна фазовой скорости волны  $\mathbf{v}_\phi$ , это условие удобно записать в виде условия черенковского излучения  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ . Из-за взаимодействия с волной имеет место изменение (уменьшение) энергии частицы  $\Delta\mathcal{E} = \Delta(m\mathbf{v}^2/2) = m\mathbf{v}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$ , связанное с изменением ее импульса. Такое же соотношение вследствие галилеевой инвариантности мы обязаны написать



для волнового пакета. Если учесть, что получающиеся изменения энергии  $\Delta\mathcal{E}_V$  и импульса  $\Delta\mathbf{P}$  волнового пакета пропорциональны квадрату амплитуды, то  $\Delta\mathcal{E}_V$  и  $\Delta\mathbf{P}$  пропорциональны друг другу, т. е. при пространственном резонансе  $\mathcal{E}_V = \mathbf{v}\mathbf{P}$ . Импульс  $\mathbf{P}$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , поскольку составляющая скорости частицы, поперечная по отношению к  $\mathbf{k}$ , может быть произвольной. Поэтому из условия  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$  следует, что  $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega)\mathcal{E}_V$ , откуда, в свою очередь, видно, что  $(\mathbf{v}_\phi\mathbf{P}) = \mathcal{E}_V$  (фазовая скорость волны есть отношение энергии волны к ее импульсу). Если ввести амплитуду волны соотношением  $\mathcal{E}_V = \omega|a^2| = \omega N$ , где  $N$  — число волн в пакете с данным волновым числом  $\mathbf{k}$  [11], то  $\mathbf{P} = \mathbf{k}N$ . Используя два последних выражения для  $\mathcal{E}_V$  и  $\mathbf{P}$  в (15.64), находим  $\mathcal{E}_V^0 = \omega N + \mathbf{k}\mathbf{V}N = \omega_0 N$ , где  $\omega_0 = \omega + \mathbf{k}\mathbf{V}$  — доплеровская частота.

Заметим, что Уизем указывает [3] на существование уравнения сохранения “волнового импульса”

$$\frac{\partial}{\partial t}(k_i \mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(-k_i \mathcal{L}_{k_j} + \mathcal{L}\delta_{ij}) = 0, \quad (15.65)$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Из уравнения (15.65) находим плотность импульса

$$k_i \mathcal{L}_\omega = \frac{k_i}{\omega} \mathcal{E}_V$$

— вектор, направленный вдоль  $\mathbf{k}$  и имеющий длину  $\mathcal{E}_V/v_\phi$ .

**Задача 15.6.** Проверьте справедливость уравнения сохранения (15.65) исходя из уравнений (15.29)-(15.31).

## ГЛАВА 16

### Волны с отрицательной энергией. Связанные волны

*Общие замечания. Волны с положительной и отрицательной энергией. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Допплера.*

#### § 1. Общие замечания

В предыдущей главе мы столкнулись с тем, что плотность энергии и плотность потока энергии медленной волны пространственного заряда в электронном потоке отрицательны (см. (15.62)). Формально это можно понять, используя соотношения (15.38) и (15.39), которые удобно записать в виде

$$\mathcal{E} = \omega \frac{\partial G(\omega, k)}{\partial \omega} a^2, \quad (16.1)$$

$$\mathcal{F} = -\omega \frac{\partial G(\omega, k)}{\partial k} a^2. \quad (16.2)$$

Рассмотрим дисперсионное уравнение (15.33) в области действительных  $k$  и  $\omega$ . Согласно формуле (16.1) знак изменится в тех точках оси  $k$ , где меняет знак либо  $\omega$  либо  $\partial G/\partial \omega$ . Что это значит? Смена знака  $\omega$  означает смену знака фазовой скорости относительно групповой: волна из “прямой” становится “обратной” и наоборот. Второе условие в общем случае соответствует обращению в бесконечность групповой скорости  $v_{gr} = d\omega/dk = -\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_\omega$  ( $\mathcal{L} \neq 0$ ). Типичный участок дисперсионной характеристики  $\omega = \omega(k)$ , соответствующий волне с отрицательной энергией отмечен на рис. 16.1 штриховкой. Имеет место смыкание двух ветвей дисперсионной характеристики, одна из которых соответствует волне с отрицательной энергией (ВОЭ), а другая — волне с положительной энергией (ВПЭ). Связь этих волн приводит к неустойчивости: за точкой ветвления частота становится комплексной.

На первый взгляд существование волн с отрицательной энергией противоречит общим принципам.

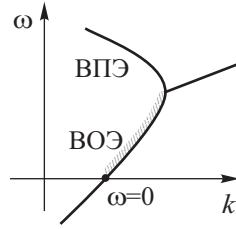


Рис. 16.1. Иллюстрация к объяснению существования ВОЭ

Действительно, например, на возбуждение электромагнитного волнового пакета в среде с дисперсией нужно затратить энергию; поэтому, когда подкачка энергии извне прекращается, существующая в диспергирующей среде диссипация (хотя бы и малая) заставит перейти всю энергию

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]$$

(см (15.54) в тепло. Поскольку согласно принципу возрастания энтропии тепло должно выделяться, а не поглощаться, получаем (см. [1])

$$\langle W(t) \rangle > 0, \quad \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \quad (16.3)$$

Однако сказанное верно лишь для равновесных сред. Для неравновесных же сред соотношения (16.3)) могут и не выполняться — в таких средах действительно возможно возбуждение и распространение волн с отрицательной энергией. Физический смысл этого будет ясен из дальнейшего.

Причины неравновесности могут быть самыми разнообразными [2], в частности нескомпенсированные направленные движения, внешние поля, градиент плотности, температуры и т. д. Примеры неравновесных сред хорошо известны: электронный пучок, взаимодействующий с полями замедляющей системы (ЛБВ, ЛОВ), плазма с многогорбой функцией распределения заряженных частиц по скоростям (частным случаем является взаимодействие электронного потока с плазмой), среды с отрицательной проводимостью или вязкостью (туннельные и ганновские полупроводники), пограничный слой и другого рода сдвиговые течения в гидродинамике. Почему в подобных средах возбуждаются волны с отрицательной энергией? Как возбудить волну с энергией определенного знака и каков результат взаимодействия связанных волн с энергиями разных знаков? Ответы на эти вопросы мы и постараемся здесь дать.

## § 2. Волны с положительной и отрицательной энергией

Понятие о волнах с отрицательной энергией, впервые появилось в СВЧ-электронике в виде известной теоремы Чу о кинетической мощности [3]. Именно Чу показал, что с медленной волной пространственного заряда в электронном пучке связан поток “отрицательной кинетической мощности”. Следующий принципиально важный шаг в понимании волн с отрицательной энергией был сделан П.А. Стэрроком [4], который, не конкретизируя природы волн, показал, что в среде, движущейся со скоростью  $u$ , энергия быстрой и медленной волн, измеряемая неподвижным наблюдателем, выражается соотношениями

$$W_0 = W_0(1 + u/v_\phi), \quad W_m = W_0(1 - u/v_\phi), \quad (16.4)$$

где  $v_\phi$  и  $-v_\phi$  — скорости воли в подвижной системе координат, а  $W_0$  — энергия в этой системе. Из (16.4) видно, что при  $v_\phi < u$  величина  $W_m$  отрицательна, в то время как групповая скорость обеих волн положительна. Более простой, но менее строгий, чем в [4], вывод формул (16.4) приведен в книге [5]. В дальнейшем волны с отрицательной энергией широко обсуждались как в периодической печати (см. обзор [6] и библиографию к нему), так и на страницах книг [7–10].

По физическому смыслу волны с отрицательной энергией — это такие волны, с ростом амплитуды которых суммарная энергия системы “среда – волна” уменьшается. Помимо волн в неравновесных средах отрицательной энергией обладают также продольные электростатические волны, спектр которых расположен в области аномальной дисперсии среды  $d\varepsilon/d\omega < 0$ ; для них средняя плотность энергии

$$\langle W_{эл} \rangle = \frac{\omega}{16\pi} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \langle E \rangle^2 < 0.$$

Поясним смысл понятия “отрицательная энергия” на уже знакомом нам примере распространения волн пространственного заряда в дрейфующем электронном потоке. Линеаризованные уравнения задачи в использованных уже ранее обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{e}{m} E_{nz} = 0, \quad (16.5)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0, \quad (16.6)$$

$$\frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = 4\pi \rho'. \quad (16.7)$$

Пусть все переменные величины изменяются по закону  $\exp[i(\omega t - kx)]$ . Тогда из условия совместности уравнений (16.5)-(16.7) следует, что  $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 = 4\pi\rho_0 e/m$  и  $\omega - kv_0 = \omega_p$  соответствует быстрой волне пространственного заряда, а  $\omega - kv_0 = -\omega_p$  относится к медленной волне. Из уравнений (16.5) и (16.7) находим  $v' = (e/m)E_{nz}/[i(\omega - kv_0)]$ ,  $E_{nz} = -4\pi\rho'/(ik)$ , откуда имеем  $v' = (4\pi e/m)\rho'/[k(\omega - kv_0)]$  или

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{\omega_p^2}{kv_0(\omega - kv_0)} \frac{\rho'}{\rho}. \quad (16.8)$$

С учетом того, что  $\omega - kv_0 = \pm\omega_p$  и  $kv_0 = \omega \mp \omega_p$ , из соотношения (16.8) получаем формулы, связывающие переменные составляющие скорости и плотности объемного заряда для медленной и быстрой волн соответственно:

$$\frac{v'_m}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega + \omega_p} \frac{\rho'_m}{\rho_0}, \quad \frac{v'_b}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega - \omega_p} \frac{\rho'_b}{\rho_0}, \quad (16.9)$$

Из соотношений (16.9) видно, что в медленной волне возмущения скорости находятся в противофазе с возмущениями плотности (знак “-” в первой из формул (16.9)), а в быстрой — в фазе (знак “+” во второй из формул (16.9)). Соотношения (16.9) можно еще более упростить, если считать  $\omega_p \ll \omega$  (что характерно, например, для вакуумной СВЧ-электроники [11]). В этом предположении

$$\frac{v'_m}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_m}{\rho_0}, \quad \frac{v'_b}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_b}{\rho_0}, \quad (16.10)$$

Полученные выражения (16.9) (или (16.10)) сразу проясняют, почему у быстрой волны энергия положительна, а у медленной отрицательна. Действительно, например, из (16.10) следует, что для быстрой волны в области, где возмущение приводит к увеличению плотности  $\rho'_b$ , скорость движения частиц больше  $v_0$ , а на участках, где плотность уменьшилась, скорость электронов меньше  $v_0$ . Поэтому при возбуждении быстрой волны в потоке преобладают ускоренные по сравнению с  $v_0$  электроны и результирующая кинетическая энергия, переносимая пучком, больше энергии невозмущенного пучка. Если же возбуждена медленная волна, то в тех областях, где образуется сгущение (увеличение  $\rho'_m$ , скорость электронов, наоборот, меньше  $v_0$  и больше  $v_0$  там, где возникает разрежение (уменьшение  $\rho'_m$ ). В результате при возбуждении в электронном потоке медленной волны в нем преобладают замедленные по сравнению с  $v_0$

электроны, и энергия, переносимая таким пучком, меньше, чем энергия пучка без волны.

Поскольку для анализируемой системы дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_p^2 / (\omega - kv_0)^2 = 0. \quad (16.11)$$

то видно, что на ветви  $\omega - kv_0 = -\omega_p$ , соответствующей медленной волне,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 2\omega_p^2 / (\omega - kv_0)^2 = -2/\omega_p < 0, \quad (16.12)$$

т. е. энергия этой волны отрицательна. В то же время для быстрой волны  $\partial \varepsilon / \partial \omega > 0$  и энергия этой волны положительна.

Очевидно, что в противоположность медленной волне волнам с положительной энергией соответствуют те, с ростом амплитуды которых полная энергия системы “среда – волна” увеличивается.

Попытаемся получить выражения для плотности потока энергии в электронном пучке, исходя непосредственно из одномерного уравнения движения пучка в продольном электрическом поле  $\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = (e/m)E_x$  выражения  $j = \rho v$  для плотности тока и одномерного уравнения непрерывности  $\partial j / \partial x + \partial \rho / \partial t = 0$ . Рассмотрим, следуя [12], произведение  $E_x j$ ; используя уравнение движения и формулу для  $j$ , находим

$$E_x j = (m/e) (\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x) \rho v. \quad (16.13)$$

Уравнение (16.13) с учетом уравнения непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{\partial S_n}{\partial x} - E_x j = 0. \quad (16.14)$$

где плотность кинетической энергии электронного пучка

$$W_n = \frac{m \rho v^2}{2e} \quad (16.15)$$

и плотность потока кинетической энергии

$$S_n = \frac{m \rho v^3}{2e}, \quad (16.16)$$

причем отношение  $S_n / W_n = v$ , т. е. полной скорости пучка.

При выводе (16.14)-(16.16) мы не делали допущения о малости возмущений. Если же предположить, что  $v = v_0 + v'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $j = j_0 + j' = j_0 + v_0\rho' + \rho_0v'$  (возмущения много меньше соответствующих постоянных величин), то, сохраняя в (16.15) члены второго порядка малости, получаем

$$W_n = \frac{m}{2e} \left[ \rho_0 (v_0^2 + 2v_0v' + v'^2) + (v_0^2 + 2v_0v') \rho' \right]. \quad (16.17)$$

Рассчитаем среднюю за период плотность кинетической энергии для дрейфующего пучка, положив, что  $E_x = E_{nz}$ , и пучок локального возмущен на входе высокочастотным сигналом частоты  $\omega$ , а далее предоставлен самому себе, т. е. в нем распространяются волны пространственного заряда, в частности волны вида

$$E_{nz} = E_{nz}^0 \exp\{i[\omega t - (k + v_0/\omega_p)x]\} + E_{nz}^0 \exp\{i[\omega t - (k - v_0/\omega_p)x]\}$$

где  $E_{nz}^0$  определяется начальным возмущением.

С учетом (16.17) имеем

$$\begin{aligned} \langle W_n \rangle = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v_0^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho_0 v_0 v' d(\omega t) + \\ & + \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v'^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho' v_0^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho' v_0 v' d(\omega t). \end{aligned} \quad (16.18)$$

Первый интеграл — плотность энергии невозмущенного пучка, которую мы обозначим  $\langle W_n^0 \rangle$ . Поскольку  $v'$  и  $\rho'$  представляют собой суперпозицию гармонических слагаемых (волн пространственного заряда), то второй и четвертый интеграл равны нулю. Таким образом, нас интересует

$$\delta \langle W_n \rangle = \langle W_n \rangle - \langle W_n^0 \rangle = \frac{m\rho_0}{4\pi e} \int_0^{2\pi} v'^2 d(\omega t) + \frac{mv_0}{2\pi e} \int_0^{2\pi} \rho' v' d(\omega t). \quad (16.19)$$

Так как  $v' = (e/m)E_{nz}/[i(\omega - kv_0)]$ , а  $v'$  и  $\rho'$  для  $\omega_p \ll \omega$  связаны соотношениями (16.10), то, вычисляя интегралы в (16.18), имеем для быстрой и медленной волн пространственного заряда

$$\delta \langle W_{np. \phi} \rangle \approx \frac{(E_{nz}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} > 0, \quad \delta \langle W_{np. m} \rangle \approx -\frac{(E_{nz}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} < 0. \quad (16.20)$$

Знак приближенного равенства появился потому, что в (16.20) мы пренебрегли слагаемым, получившимся от вычисления первого интеграла, что вполне оправдано при  $\omega_p \ll \omega$ : это слагаемое в  $\omega/\omega_p$  меньше второго.

Заметим, что если в (15.62) учесть, что  $E_{nz} = -4\pi j'/(i\omega)$ , и, следовательно,  $j'j'^* = \omega^2 E_{nz}^2/16\pi^2$ , то приходим к (16.20).

Разумеется, и формула  $\delta\langle W_{эл} \rangle = (\omega/16\pi)(d\varepsilon/d\omega)|E_{nz}|^2$  с учетом того, что  $d\varepsilon/d\omega = \pm 2/\omega_p$ , приводит к тому же результату. При  $\omega_p \ll \omega$  из общих формул (16.4) имеем

$$\frac{W_{б,м}}{W_0} = \pm \frac{\omega}{\omega_p}, \quad (16.21)$$

так как  $u = v_0$ ,  $v_\phi = \pm v_0 \omega_p/\omega$ .

Итак, отрицательной энергией обладают волны, в которых возмущения скорости и плотности противофазны. По-видимому, такое объяснение возникновения воли с отрицательной энергией является достаточно общим; оно относится не только к электронике, но и ко многим гидродинамическим задачам, в которых принципиальна сжимаемость. Для несжимаемой жидкости столь просто интерпретировать физический смысл волн с отрицательной энергией можно уже не всегда. В частности, если течение стратифицировано по плотности [13], то такое объяснение справедливо, при этом под возмущениями плотности следует понимать возмущения градиента плотности. В случаях течений без стратификации, например в пограничном слое, следует вести речь о волнах скорости и волнах давления [2, 14].

Какие условия должны быть выполнены, чтобы в среде возникла волна отрицательной энергии? Очевидно, для этого нужно, чтобы медленная волна имела возможность отдавать некоторую часть своей энергии среде или другим волнам.

Обратимся вновь к дисперсионному уравнению (15.33) в одномерном случае. Если ввести потери в среде, то в дисперсионном уравнении возникает малая мнимая часть, т. е. имеем

$$G(\omega, k) + i\nu(\omega, k) = 0$$

или

$$G(\omega', k) - i\omega'' G_\omega(\omega', k) + i\nu(\omega', k) = 0,$$

где  $\omega = \omega' - i\omega''$ . Из последнего уравнения сразу находим малую мнимую добавку к невозмущенной частоте:

$$\omega'' = \frac{\nu(\omega', k)}{G_\omega} = \frac{\omega' \nu a^2}{\varepsilon}. \quad (16.22)$$



Очевидно, что знак энергии волны зависит от системы отсчета. При преобразовании Галилея энергия волны преобразуется одновременно с доплеровским сдвигом ее частоты. Величина  $\mathcal{L}_\omega = G_\omega a^2$  инвариантна относительно преобразования Галилея, поэтому сдвигается лишь одна граница волновых чисел, соответствующих ВОЭ, где  $\omega = 0$ , а граница  $G_\omega = 0$  остается неизменной.

Сам факт устойчивости или неустойчивости остается неизменным, а соответствующий декремент или инкремент инвариантны. В соответствии с формулой (16.22) функция  $\omega' \nu a^2$  меняет знак вместе с частотой волны.

Для неустойчивости ВОЭ нужна “истинная” диссипация, т. е. положительные потери в лабораторной для ВОЭ системе отсчета. При движении системы отсчета знаки энергии и потерь изменяются одновременно. Различие знаков энергии двух связанных волн также сохраняется в любой системе отсчета.

Заметим, что при иной постановке задачи гармонический источник, неподвижный относительно данной системы отсчета, возбуждает в среде волну с частотой  $\omega$ , и, следовательно, речь должна идти о пространственном усилении волны. Воспользуемся очевидным соотношением

$$G_\omega \omega'' + G_k k'' = 0,$$

из которого следует, что

$$k'' = -\omega'' \frac{G_\omega}{G_k} = \frac{\omega''}{v_{gr}},$$

т. е. пространственный инкремент  $k''$  связан с временным  $\omega''$  через групповую скорость  $v_{gr}$ . Изменение знака  $k''$  в области  $\omega'' < 0$  не приводит к усилению, поскольку при этом одновременно с  $k''$  меняется знак  $v_{gr}$ , т. е. направление потока энергии волны. Волна затухает в направлении распространения энергии. Пространственной неустойчивости соответствует изменение знака  $k''$  одновременно с изменением знака  $\omega''$  при неизменном знаке  $v_{gr}$ . В окрестности точки, где  $\mathcal{L}_k = 0$ , нужно учесть следующий член разложения  $G(\omega, k)$  по  $k$ . Тогда

$$G_\omega \omega'' + \frac{(k'')^2}{2} G_{kk} = 0$$

и

$$k'' = \left( -\frac{2G_\omega \omega''}{G_{kk}} \right)^{1/2}.$$

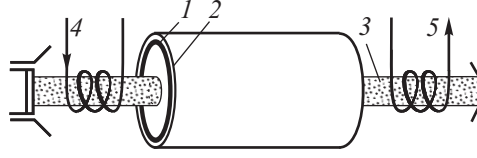


Рис. 16.2. Схема резистивного усилителя: 1 — резистивный слой; 2 — диэлектрическая трубка; 3 — электронный поток; 4 — входное и выходное устройства.

Таким образом,  $k'' \sim (\omega'')^{1/2}$ . Проиллюстрируем сказанное о пространственном усилении ВОЭ в среде с потерями на примере резистивного усилителя [11] (рис. 16.2). Предварительно модулированный во входном устройстве электронный пучок проходит через диэлектрическую трубку, внутренняя поверхность которой покрыта поглощающим слоем, и наводит в нем переменный заряд. Поля, создаваемые наведенными зарядами, в свою очередь, воздействуют на электронный пучок и изменяют переменную составляющую тока пучка. После прохождения трубки поток попадает в выходное устройство.

Входное воздействие возбуждает в пучке две волны пространственного заряда, поля которых вызывают в резистивных стенках движущиеся заряды; это в свою очередь приводит к джоулевым потерям энергии волн. Но такие потери действуют по-разному на быструю и медленную волны. Быстрая волна затухает (волна с положительной энергией), а медленная нарастает; отдавая энергию среде, последняя увеличивает свою амплитуду. Экспериментальное доказательство нарастания медленной волны пространственного заряда в резистивном усилителе иллюстрирует рис. 16.3.

Сказанное легко подтвердить простой теорией, в основе которой лежат линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left( \frac{\omega}{v_0} \right)^2 j' = \frac{i\omega\rho_0}{2V_0} E, \quad (16.23)$$

$$E = -\frac{4\pi(j' + j_{cm})}{i\omega} = -\frac{4\pi j'}{i\omega} - \frac{4\pi\sigma E}{i\omega}, \quad (16.24)$$

где  $j_{cm}$  - плотность стороннего тока в поглощающем покрытии,  $\sigma$  - проводимость покрытия. Предполагая волновой характер процессов ( $j', E \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ ), из условия совместности уравнений (16.23) и (16.24) при-

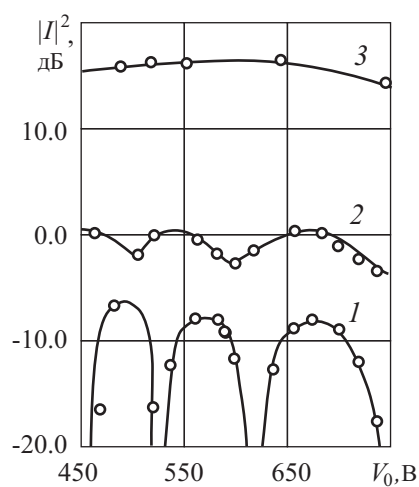


Рис. 16.3. Зависимость квадрата относительного группированного тока от ускоряющего напряжения [15]: 1 — диэлектрическая среда заменена металлической поверхностью (возбуждены две волны пространственного заряда с постоянными амплитудами); 2 — пучок движется в резистивной среде, но ток пучка мал (возбуждены нарастающая и затухающая волны); 3 — ток большой (преобладает нарастающая медленная волна).

ходим к дисперсионному уравнению

$$\frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{i4\pi\sigma}{\omega} = 1. \quad (16.25)$$

Перепишем (16.25) в виде

$$(\omega - kv_0 - \omega_p)(\omega - kv_0 + \omega_p) = i \frac{4\pi\sigma(\omega - kv_0)^2}{\omega}. \quad (16.26)$$

Предположим далее, что  $\omega - kv_0 \approx -\omega_p$ . Это соответствует возбуждению медленной волны пространственного заряда. Тогда  $\omega - kv_0 - \omega_p \approx -2\omega_p$  и уравнение (16.26) становится таким:  $\omega - kv_0 \approx -\omega_p - i2\pi\sigma\omega/\omega_p$ . Поэтому

$$k \approx \frac{\omega + \omega_p}{v_0} + i \frac{2\pi\sigma\omega}{\omega_p v_0}, \quad (16.27)$$

т. е.  $\text{Re } k$  равняется фазовой постоянной распространения медленной волны, а  $\text{Im } k = 2\pi\sigma\omega/(\omega_p v_0) > 0$ , и поэтому волна нарастает по мере распространения:

$$j', E \sim \exp \left[ -i \frac{\omega + \omega_p}{v_0} x + \frac{2\pi\sigma\omega}{\omega_p v_0} x \right].$$

Аналогичные выкладки показывают, что быстрая волна пространственного заряда будет затухать (проделайте эти расчеты самостоятельно).

Для поперечных электромагнитных волн энергия может быть отрицательна, например, в среде из двухуровневых частиц. Действительно, в этом случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2 N_{12}}{\omega^2 - \omega_{12}^2 + 2i\gamma\omega_{12}}, \quad (16.28)$$

где  $\omega_{12}$  — частота перехода,  $\omega_0^2 = 4\pi Nd/m$  ( $d$  характеризует связь частицы с полем,  $N$  — концентрация частиц),  $N_{12} = (n_1 - n_2)/n_2$ ,  $n_{1,2}$  — заселенности нижнего и верхнего уровней [16]. Энергия волны на частоте  $\omega$  где  $\omega - \omega_{12} \gg \gamma$ , приближенно пропорциональна

$$\frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\partial \omega} = 2\omega \left( 1 + \omega_{12}^2 N_{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (16.29)$$

и может быть отрицательной, если среда инвертирована — верхний уровень заселен больше, чем нижний. Согласно (16.29) отрицательной будет энергия волны при  $\omega - \omega_{12} < \omega_0 \sqrt{n_1 - n_2}/2$ . Ясно, что взаимодействие волн с отрицательной энергией и волн с положительной энергией должно сопровождаться неустойчивостью — обе волны будут расти по амплитуде.

### § 3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера

Ограничимся случаем слабой связи, когда феноменологический вывод уравнений связанных волн элементарен. В отсутствие связи

$$\frac{da_1}{dx} = -ik_1 a_1, \quad \frac{da_2}{dx} = -ik_2 a_2, \quad (16.30)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  нормированы так, что  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$  — потоки мощности, переносимые волнами,  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные распространения волн. Если теперь связать волны, но считать связь слабой ( $k_1$  и  $k_2$  остаются такими же, как и в отсутствие связи), то

$$\frac{da_1}{dx} = -ik_1 a_1 + c_{12} a_2, \quad \frac{da_2}{dx} = -ik_2 a_2 + c_{21} a_1, \quad (16.31)$$

где  $c_{12}$  и  $c_{21}$  — коэффициенты связи волн ( $c_{12}$  и  $c_{21}$  малы по сравнению с  $k_1$  и  $k_2$ ). Предположим далее, что затуханием волн можно пренебречь, т. е. в отсутствие связи  $k_{1,2} = \omega/v_{1,2}$  — действительные величины,  $v_{1,2}$  — фазовые скорости несвязанных волн. В случае слабой связи общая средняя мощность приближенно равна сумме мощностей в несвязанных системах:

$$P = 2(\pm|a_1|^2 \pm |a_2|^2) \approx \text{const}, \quad \frac{dP}{dx} = 0. \quad (16.32)$$

Знаки “+” и “−” соответствуют волнам с положительной и отрицательной энергией.

В том случае, когда одна из волн — волна пространственного заряда в электронном потоке, а другая — электромагнитная волна в замедляющей системе, (16.32) как раз и есть математическое выражение теоремы Чу в теории электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием в так называемом двухволновом приближении [17, 18]. В частности, для дрейфующего электронного пучка теорема Чу о кинетической мощности имеет вид  $P = 2(|a_0|^2 - |a_m|^2) = \text{const}$ .

Поскольку  $|a|^2 = aa^*$ , из второй формулы в (16.32) следует, что

$$\frac{dP}{dx} = \pm \left( a_1 \frac{da_1^*}{dx} + a_1^* \frac{da_1}{dx} \right) \pm \left( a_2 \frac{da_2^*}{dx} + a_2^* \frac{da_2}{dx} \right) = 0. \quad (16.33)$$

Подставляя (16.31) и комплексно-сопряженные им уравнения в (16.33) находим

$$(\pm c_{12}^* \pm c_{21}) a_1 a_2^* + (\pm c_{12} \pm c_{21}^*) a_1^* a_2 = 0. \quad (16.34)$$

Соотношения (16.34) справедливы для любых  $a_1$  и  $a_2$ , поэтому

$$c_{12} = \pm c_{12}^* \quad \text{при} \quad P = \pm |a_1|^2 + |a_2|^2, \quad (16.35)$$

$$c_{12} = \mp c_{12}^* \quad \text{при} \quad P = \pm |a_1|^2 - |a_2|^2, \quad (16.36)$$

$$(16.37)$$

Считая, что  $a_1, a_2 \sim \exp[i(\omega t - kx)]$  и принимая во внимание формулы (16.35) и (16.36), из условия совместности уравнений (16.31) получаем следующие дисперсионные уравнения:

- 1) для одинаково направленных потоков мощности (одинаковые знаки перед  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$  в первой из формул (16.32)):

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = |c_{12}|^2. \quad (16.38)$$

- 2) для противоположно направленных потоков мощности (разные знаки перед  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$ ):

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = -|c_{12}|^2. \quad (16.39)$$

В системе без потерь возможны четыре варианта связи взаимодействующих волн (табл. 16.1, взятая из [19]). Дисперсионные характеристики несвязанных волн представлены штриховыми линиями, а сплошные линии соответствуют возможным вариантам связи.

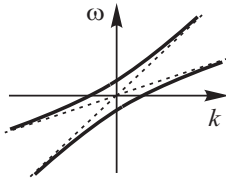
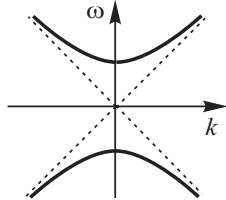
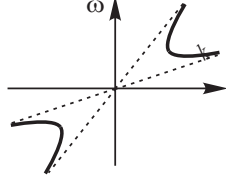
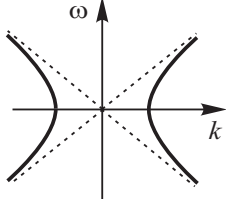
Проиллюстрируем таблицу конкретными примерами из высокочастотной электроники, основываясь на теории взаимодействия прямолинейного электронного потока с бегущей электромагнитной волной (см. гл. 14). Обратимся к уравнению возбуждения волноведущей системы током электронного пучка:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 K I \quad (16.40)$$

и к уравнению для тока, сгруппированного в пучке под действием поля волноведущей системы:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\omega^2 - \omega_q^2}{v_0^2} I = i \frac{\omega}{v_0} \frac{I_0}{2V_0} E. \quad (16.41)$$

Таблица 16.1.

$\omega - k$ диаграмма	Свойства системы связанных волн	Примеры систем связанных волн
	$k$ — действительная величина для всех $\omega$ и наоборот; неустойчивости нет	Связь двух волн с положительной энергией или двух волн с отрицательной энергией
	$\omega$ — действительная величина для всех $k$ ; $k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ ; волны, затухающие в пространстве; неустойчивости нет	то же
	$k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ и наоборот; $k$ имеет значение, соответствующее усилению, для действительных $\omega$ ; конвективная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн имеют одно направление
	$k$ — действительная величина для всех действительных $\omega$ ; $\omega$ — комплексная величина для действительных $k$ ; абсолютная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн противоположны по направлению

Если  $I(0) = 0$  и  $(\partial I / \partial x)_{x=0}$ , то (16.41) можно переписать в виде

$$I(x) = \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e - k_q)(x - \zeta)] d\zeta - \\ - \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e + k_q)(x - \zeta)] d\zeta = I_m(x) + I_b(x), \quad (16.42)$$

где  $k_e = \omega/v_0$ ,  $k_q = \omega_q/v_0$ , индексы “м” и “б” соответствуют интегралам, связанным с возбуждением медленной и быстрой волн пространственного заряда. Тогда вместо (16.41) или (16.42) можно написать два уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial I_m}{\partial x} + i(k_e + k_q)I_m = -\frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E(x), \quad (16.43)$$

$$\frac{\partial I_b}{\partial x} + i(k_e - k_q)I_b = \frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E(x). \quad (16.44)$$

Условия для резонансного взаимодействия

$$k_e + k_q = k_0 = \omega/v_\phi \quad \text{или} \quad v_\phi = \frac{v_0}{1 + \omega_q/\omega} \quad (16.45)$$

соответствуют условиям синхронизма электромагнитной волны в замедляющей системе и быстрой волны пространственного заряда в пучке, а условия

$$k_e - k_q = k_0 = \omega/v_\phi \quad \text{или} \quad v_\phi = \frac{v_0}{1 - \omega_q/\omega}, \quad (16.46)$$

соответствуют условиям синхронизма волны в замедляющей системе и медленной волны пространственного заряда. При выполнении условий (16.45) или (16.46) в системе уравнений (16.40), (16.43) и (16.44) можно вместо трех уравнений оставить только два. В этом случае возможны следующие взаимодействия (см. табл. 16.1) и соответствующие им приборы:

- 1) Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с прямой волной в волноведущей структуре (обе волны с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ-подавитель; при определенных значениях постоянного тока пучка и ускоряющего напряжения для данной частоты имеет место полное подавление входного сигнала.



- 2) Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с обратной волной в волноведущей системе (обе волны с положительной энергией, но с противоположно направленными групповыми скоростями); ЛОВ-подавитель; полное подавление возможно лишь на бесконечной длине пространства взаимодействия.
- 3) Взаимодействие медленной волны пространственного заряда (волна с отрицательной энергией) с прямой волной в системе (волна с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ-усилитель.
- 4) Взаимодействие медленной волны пространственного заряда с обратной волной в системе; групповые скорости противоположны; ЛОВ-генератор.

Рассмотрим в качестве примера случай 1, которому соответствует система уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x} + ik_0 E = -\frac{1}{2}k_0^2 K I_0, \quad \frac{\partial I_0}{\partial x} + i(k_e - k_q)I_0 = \frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E$$

с дисперсионным уравнением

$$(k - k_0)(k - k_e + k_q) = (k_q C)^3 / (2k_q), \quad (16.47)$$

Из условия точного синхронизма волн ( $k_0 = k_e - k_q$ , находим

$$k_{1,2} = k_0 \pm k_e C / [2(QC)^{1/4}], \quad \text{где} \quad 2(QC)^{1/2} = k_q / (k_e C). \quad (16.48)$$

Начальные условия  $E(0) = E_{0x}$ ,  $I_0(0) = 0$  с учетом того, что  $I_0 \sim E / (k - k_e + k_q)$  (см. (16.44)) и  $E(x) = \sum_{m=1}^2 E_m(0) \exp(-ik_m x)$ , можно записать так:

$$E_1(0) + E_2(0) = E_{0x}, \quad \frac{E_1(0)}{k_1 - k_0} + \frac{E_2(0)}{k_2 - k_0} = 0. \quad (16.49)$$

Отсюда с учетом (16.48) получаем

$$E(x) = E_{0x} e^{-i(k_e - k_q)x} \cos \frac{k_e C x}{2(QC)^{1/4}},$$

т. е. имеет место периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами, и условие полного подавления входного сигнала есть

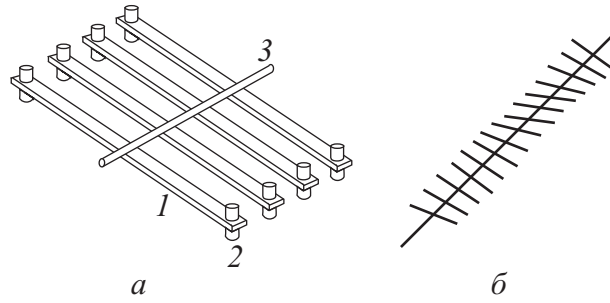


Рис. 16.4. Линия передачи, состоящая из набора тяжелых поперечных пластин 1 с небольшими стержневыми магнитами 2, прикрепленными к проволоке 3 [20] (а) и схема распространения крутильной волны вдоль линии передачи [5] (б).

$CN_{\text{под}} = (2n + 1)(QC)^{1/4}/2$ . Если ввести  $a_1 = E/(k_0\sqrt{2K})$  и  $a_2 = I_6/\sqrt{2Y_n}$ , где  $Y_n = I_0k_e/(2V_0k_q)$  — волновая проводимость пучка, то в (16.38)  $|c_{12}|^2 = k_e^2 C^2/[4(QC)^{1/2}]$ , и поскольку  $\omega/v_1 = \omega/v_2 = k_0 = k_e - k_q$ , то уравнения (16.47) и (16.38) совпадают [18]. Заметим, что рассмотренные выше двухволновые взаимодействия соответствуют в СВЧ-электронике так называемому случаю больших пространственных зарядов ( $4QC \approx 1$ ), когда волна в линии передачи не может одновременно быть близка по скорости к обеим волнам пространственного заряда. Отметим также, что в рамках используемых приближений найденные условия полного подавления входного сигнала в ЛБВ совпадают с условиями возникновения колебаний в ЛОВ (случай 4).

**Задача 16.1.** Используя уравнение (16.44) и уравнение возбуждения обратной волны в волноведущей системе

$$\frac{\partial E}{\partial x} + ik_0 E = \frac{1}{2} k_0^2 K I_6$$

постройте теорию ЛОВ-подавителя (случай 2) с начальными условиями  $E = E(0)$ ,  $I_6 = 0$  при  $x = 0$  ( $E(0)$  — неизвестное значение поля на выходе устройства).

**Задача 16.2.** Используя уравнения (16.43) и (16.40) постройте теорию ЛБВ-усилителя (случай 3) с начальными условиями  $E = E^0$ ,  $I_m = 0$  при  $x = 0$ .

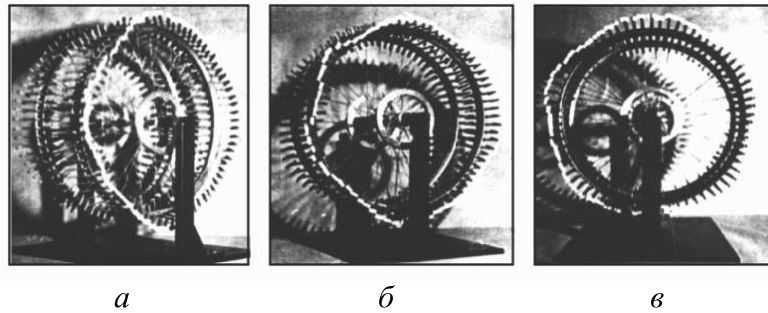


Рис. 16.5. Фотографии, демонстрирующие работу механического генератора бегущей волны [20]: скорости колес таковы, что на обод укладывается четыре длины волн (*а*), пять длина волн (*б*) и шесть, семь длин волн (*в*).

Красивый эксперимент, демонстрирующий нарастающие колебания в двух связанных волновых системах, был поставлен К. Катлером [20], который сконструировал механический генератор с бегущей волной. Передающая линия была сделана из набора поперечных тяжелых пластин, расположенных вдоль стальной проволоки (рис. 16.4). Когда одна из пластин повернута на небольшой угол, а потом отпущена, из-за скручивания проволоки вдоль линии распространяется медленная крутильная волна (ее скорость определяется сопротивлением проволоки к скручиванию и вращательной инерцией тяжелых поперечных пластин). Для того, чтобы волновые системы могли двигаться относительно друг друга (их было две), каждая передающая линия была натянута на обод велосипедного колеса и замкнута в кольцо (колеса могли вращаться на общей оси независимо одно от другого). На концах поперечных пластин были укреплены маленькие цилиндрические магниты (рис. 16.4,*а*). Они намагничивались так, чтобы вызвать притяжение между поперечными пластинами линий. Взаимодействие волн в системе лучше всего видно, когда колеса вращаются в разные стороны. Сначала они вращаются независимо, но при определенном значении скорости небольшое случайное возмущение приводит к возникновению колебаний и их нарастанию. Сначала по ободу укладывается две волны; при замедлении вращения эти колебания исчезают, но одновременно возникают колебания, имеющие на длине окружности обода три волны; характер колебаний меняется непрерывно с частотой (рис. 16.5). В эксперименте Катлера взаимодействие прекращалось, когда по окружности колеса укладывалось семь волн.

До сих пор при рассмотрении примеров мы касались главным образом волн пространственного заряда и их резонансного взаимодействия с электромагнитными волнами в волноведущих структурах. Имеется и другой класс собственных волн в электронных потоках, движущихся в продольном фокусирующем магнитном поле и скрещенных электро- и магнитостатических полях — циклотронные волн [17, 18]. Эти волны распространяются в электронном потоке в виде высокочастотных возмущений поперечной скорости потока с фазовыми скоростями

$$v_{\phi_{м,б}} = \frac{v_0}{1 \pm \omega_c/\omega}, \quad (16.50)$$

где  $\omega_c = eB/m$  — циклотронная частота ( $B$  — индукция магнитного поля),  $v_0$  — постоянная составляющая скорости продольного движения электронов, индексы “м” и “б” (знаки “+” “—” в (16.50)) соответствуют медленной и быстрой циклотронным волнам электронного потока. Циклотронные волны поляризованы в плоскости, перпендикулярной направлению постоянного магнитного поля; быстрая циклотронная волна — волна с положительной энергией, медленная циклотронная волна — волна с отрицательной энергией [17, 18]. При синхронном взаимодействии волны в линии передачи с одной из циклотронных волн в пучке в СВЧ-приборах реализуется так называемый режим циклотронного резонанса [18].

Как мы видели на примере волн в линиях передачи и электронных потоках, энергообмен определяется свойствами взаимодействующих волн. Можно ли предугадать результат взаимодействия и выяснить характер энергообмена, скажем, не определяя знака энергии волн? Оказывается, что можно, если привлечь представления теории излучения при сверхсветовом движении в среде [21–23]<sup>1</sup>.

Если излучатель (заряженная частица, электрический диполь и т.п.) движется в среде с показателем преломления  $n$ , то вследствие эффекта Доплера в системе координат, связанной с неподвижной средой, излучение имеет частоту (см. [21, 22])

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \beta n \cos \theta}, \quad (16.51)$$

где  $\omega_0$  — частота излучения в системе координат, в которой излучатель покоится;  $\beta = v_0/c$  ( $v_0$  — скорость излучателя,  $c$  — скорость света),  $\theta$  — угол между скоростью и направлением наблюдения. При  $\beta n < 1$  эффект

---

<sup>1</sup>Применительно к режимам циклотронного резонанса в СВЧ-приборах со скрещенными полями эти вопросы обсуждены в [18, с.486-489], более широкий круг вопросов этого плана рассмотрен в [6, с.489-494] и [10].

Доплера называют нормальным, а при  $\beta n > 1$  — аномальным [23] (эффект Доплера в преломляющей среде детально обсуждается в статье [24]). Особенно важным является то обстоятельство, что характер аномального эффекта Доплера не меняется и тогда, когда поле заключено в узких каналах или щелях в среде или сосредоточено вблизи границ [21–23]. Излучение, связанное с нормальным эффектом Доплера, приводит к затуханию поля, а с аномальным — к его усилению. В случае взаимодействия замедленной электромагнитной волны ( $v_\phi = c/n$ ) с прямолинейно движущимся со скоростью  $v_0$  потоком электронов-осцилляторов, которые колеблются с редуцированной плазменной частотой  $\omega_0$ , формула (16.51) принимает вид

$$\omega(\theta)|_{\theta=0} = \omega(0) = \omega = \frac{\omega_q}{|1 - v_0/v_\phi|}. \quad (16.52)$$

При  $\beta n < 1$  (нормальный эффект Доплера,  $v_0 < v_\phi$  из (16.52) имеем  $\omega = \omega_q/(1 - v_0/v_\phi)$  или  $v_\phi = v_0/(1 - \omega_q/\omega)$ , что совпадает с условием (16.46) синхронизма волны в волноведущей системе с быстрой волной пространственного заряда. Имеет место затухание колебаний, что на языке электроники означает: электроны при выполнении условий синхронизма (16.46) группируются в ускоряющей фазе высокочастотного поля и забирают энергию у волны.

При  $\beta n > 1$  ( $v_0 > v_\phi$  имеем  $v_\phi = v_0/(1 + \omega_q/\omega)$ , что совпадает с (16.45) и соответствует синхронизму волны в линии передачи с медленной волной пространственного заряда. В этом случае электроны группируются в тормозящей фазе поля (излучение, связанное с аномальным эффектом Доплера, раскачивает колебания) и при выполнении (16.45) можно ожидать усиления или генерирования колебаний. Таким образом, существует физическая аналогия между индуцированным нормальным эффектом Доплера и синхронным взаимодействием электромагнитной волны и волны с отрицательной энергией (медленная волна). Следует подчеркнуть, что применительно к СВЧ-приборам аналогия справедлива лишь в двухволновом приближении (условия (16.45) или (16.46) — приближения больших пространственных зарядов; условие (16.50) — режимы циклотронного резонанса), когда электромагнитная волна взаимодействует с электронами-осцилляторами, собственная частота которых равна  $\omega_q$  или  $\omega_c$  (причем осцилляторные свойства проявляются при наличии высокочастотного поля). В синхронных режимах, типичных для электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием, когда  $v_0 \approx v_\phi$  “работают” обе электронные волны и имеет место так называемое индуцированное черенковское излучение.

## ГЛАВА 17

### Волны в неоднородных средах

*Приближение геометрической оптики. Уравнения эйконала и переноса энергии. Связь с ВКБ-приближением. Оптико-механическая аналогия. Образование каустик и рефракция. Распространение звука в атмосфере при наличии градиента температуры. Тропосферная рефракция радиоволн. Градиентный диэлектрический волновод. Условие поперечного резонанса. Электромагнитные волны в слоисто-неоднородной среде. Поведение поля вблизи каустики. Функция Эйри. Взаимодействие линейных волн в неоднородных средах. Отражение от переходного слоя. Взаимодействие винтовых волн в скрученном волоконном световоде.*

#### § 1. Приближение геометрической оптики

Довольно редко можно считать выполненными условие, что волны распространяются в однородной безграничной среде. В большинстве случаев свойства среды меняются в пространстве и это приводит к существенному изменению характера распространения волн. С математической точки зрения волны в неоднородных средах описываются уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами, точное решение которых можно получить лишь в ограниченном числе случаев. С другой стороны, очень часто в конкретной задаче оказывается, что параметры среды меняются мало на расстояниях порядка длины волны, это позволяет применить чрезвычайно мощный метод приближенного решения волнового уравнения, называемый методом *геометрической оптики*.

Метод геометрической оптики отличается большой физической наглядностью и позволяет получать количественные результаты для описания волн самой разной физической природы: электромагнитных волн, упругих и акустических волн, волн в неоднородной плазме, квантовой механики, а также многих других систем. Процитируем введение одной из лучших на русском языке книг для физиков по геометрической оптике [1]: “Число прикладных исследований, опирающихся на метод геометрической оптики, огромно. Даже их краткий обзор занял бы слишком много места. Особенно широко этот метод применяется в оптике и радиофизике,

в физике плазмы, в теории распространения радиоволн через атмосферу Земли, солнечную корону и космическое пространство, а также в радиолокации, радионавигации и дистанционной диагностике. Круг приложений метода на самом деле еще шире, если учесть наличие “двойников” геометрической оптики в акустике (геометрическая акустика), в сейсмологии (геометрическая сейсмика) в квантовой механике (метод ВКБ или квазиклассическое приближение), в гидродинамике и др.”

Мы кратко остановимся на основах метода геометрической оптики в наиболее простом случае, когда рассматривается распространение волны с заданной частотой в неоднородной среде, для которой можно пренебречь пространственной дисперсией.

Рассмотрим, например, акустические волны, описываемые в линейном случае волновым уравнением (11.10) для потенциала скоростей  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , которое остается справедливым и для случая неоднородной среды, только теперь скорость звука  $c(\mathbf{r})$  является функцией пространственных координат. Если частота волны задана, то, подставляя в (11.10) потенциал в виде  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[u(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$ , получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0, \quad (17.1)$$

где  $k = \omega/c_0$ ,  $n(\mathbf{r}) = c_0/c(\mathbf{r})$ ,  $c_0$  — некоторая характерная для данной среды скорость. Величина  $n(\mathbf{r})$  аналогична показателю преломления для электромагнитных волн в диэлектрике, поэтому так и будем называть ее в дальнейшем.

В качестве второго примера рассмотрим нерелятивистское стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальном поле  $U(\mathbf{r})$  [2]:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\mathbf{r})] \Psi = 0, \quad (17.2)$$

где  $m$  — масса частицы,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $E$  — энергия частицы. Положив  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  и  $n^2(\mathbf{r}) = 1 - U(\mathbf{r})/E$ , снова приходим к уравнению (17.1).

Распространение электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{r})$  описывается уравнениями Максвелла, которые для процессов с заданной частотой  $\omega$  и в отсутствие источников имеют вид [3]

$$\text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad (17.3a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \quad (17.3b)$$

$$\text{div } \varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad (17.3c)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (17.3d)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме. Выразим  $\mathbf{H}$  из уравнения (17.3a), подставим в (17.3b), и используем векторное тождество  $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \vec{\nabla}^2 \mathbf{E}$ . В результате этих преобразований получаем уравнение

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k^2 \varepsilon \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E}.$$

Представим  $\text{div } \mathbf{E}$  в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \mathbf{E} \right) = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \text{grad } \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \text{div } \varepsilon \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \text{grad } \ln \varepsilon.$$

Вводя показатель преломления  $n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})$ , приходим к уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} = -\text{grad} [\mathbf{E} \cdot \text{grad} (\ln n^2)] . \quad (17.4)$$

Если  $L$  — характерный масштаб изменения показателя преломления, а поле  $\mathbf{E}$  имеет вид квазиплоской волны с волновым числом  $nk$ , то порядок слагаемого в правой части (17.4) оценивается как  $k|E|/L$ , и оно в  $kL \gg 1$  раз меньше, чем каждое из слагаемых слева. Кроме того, в декартовой системе координат векторный оператор  $\vec{\nabla}^2$  совпадает со скалярным оператором  $\nabla^2$ , поэтому, пренебрегая членом в правой части уравнения (17.4), можно записать

$$\nabla^2 E + k^2 n^2 E = 0. \quad (17.5)$$

Здесь  $E$  — любая из декартовых компонент вектора электрического поля. Мы приходим к выводу, что в условиях плавно неоднородной среды и высоких частот распространение электромагнитных волн можно описывать скалярным уравнением точно такого же вида, что и уравнение акустики (17.1). В таком приближении связь между компонентами поля отсутствует, следовательно при этом не учитываются поляризационные эффекты<sup>1</sup>.

Приближение геометрической оптики, или коротковолновая асимптотика для уравнения (17.1) справедливо, если выполняется условие  $kL \gg 1$ . Физически это значит, что свойства среды мало меняются на расстояниях порядка длины волны, так что можно считать, что в небольшой окрестности каждой точки возмущение приблизительно можно считать плоской волной, которая распространяется почти также, как в однородной среде. В частности, локальная скорость распространения волны равна

---

<sup>1</sup>Более строгое рассмотрение позволяет в рамках геометрической оптики учесть и вращение плоскости поляризации [1].



$c(\mathbf{r})$  и направление вектора переноса энергии нормально поверхности постоянной фазы<sup>2</sup>.

Решение уравнения (17.1) будем искать в виде разложения по обратным степеням волнового числа  $k$ . Представим функцию  $u(\mathbf{r})$  в виде

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(-ik)^m} e^{-ik\psi(\mathbf{r})}, \quad (17.6)$$

где  $A_m$  и  $\psi$  — действительные функции. Такой вид разложения был впервые предложен П.Дебаем, поэтому формула (17.6) также часто называется *дебаевским разложением*. Функция  $\psi(\mathbf{r})$  называется *эйконалом*, она с точностью до множителя  $k$  совпадает с фазой волны в нулевом приближении геометрической оптики. Большой множитель  $k$  в показателе экспоненты отвечает тому, что фаза волны быстро меняется в пространстве.

Подставив разложение (17.6) в уравнение (17.1) и приравняв суммы слагаемых при последовательно уменьшающихся степенях  $k$  нулю, получим следующую цепочку уравнений:

$$k^2 : \quad (\nabla\psi)^2 = n^2, \quad (17.7)$$

$$k^1 : \quad A_0 \nabla^2 \psi + 2 \nabla \psi \nabla A_0 = 0, \quad (17.8)$$

$$k^0 : \quad 2 \nabla \psi \nabla A_1 + A_1 \nabla \psi + \nabla^2 A_0 = 0, \quad (17.9)$$

.....

Уравнение (17.7) называется уравнением эйконала, а уравнение (17.8) — уравнением переноса, и они являются основными уравнениями геометрической оптики. Обычно при решении конкретных задач ограничиваются только этими двумя уравнениями.

Прежде чем исследовать общий случай, рассмотрим одномерную систему, в которой показатель преломления зависит только от одной координаты, например  $z$ , и распространение волны происходит также вдоль оси  $z$ . Тогда уравнения (17.7)–(17.8) принимают вид

$$\left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 = n^2, \\ 2 \frac{A_0}{dz} \frac{d\psi}{dz} + A_0 \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0.$$

---

<sup>2</sup>Напомним, что рассматривается случай изотропной среды. Для электромагнитных волн в анизотропной среде последнее утверждение не выполняется.

Из первого уравнения получаем

$$\psi(z) = \psi(z_0) \pm \int_{z_0}^z n(z') dz',$$

а второе позволяет записать

$$\frac{1}{A_0} \frac{dA_0}{dz} = -\frac{d^2\psi/dz^2}{2d\psi/dz} = -\frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} = -\frac{d}{dz} \ln \sqrt{n(z)}.$$

Отсюда  $A_0 = \text{const}/\sqrt{n(z)}$ . Следовательно, в таком приближении решение равно

$$u(z) = \frac{C_{\pm}}{\sqrt{n(z)}} \exp \left[ \mp ik \int_{z_0}^z n(z') dz' \right], \quad (17.10)$$

где два знака соответствуют волнам, бегущим в противоположных направлениях оси  $z$ .

В одномерном случае исходное уравнение (17.1) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 n^2(z) u = 0. \quad (17.11)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением (7.8) гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой, если сделать в нем замену  $t \rightarrow z$  и  $\omega(t) \rightarrow kn(z)$ . Сделав эти же замены в ВКБ-решении (7.65), мы получим формулу (17.10). Таким образом оказывается, что метод геометрической оптики и ВКБ-приближение — это одно и то же. По традиции первый термин чаще используют в задачах теории волн, в то время, как термин ВКБ-, или квазиклассическое приближение принят в задачах квантовой механики<sup>3</sup>.

Следует заметить, что к уравнению типа (17.11) приводят многие задачи СВЧ электроники.

При анализе неустойчивости электронного потока, дрейфующего в скрещенных электростатическом и магнитостатическом полях, обычно используется модель, в которой электроны без высокочастотных возмущений при любой плотности потока движутся прямолинейно с поперечным

---

<sup>3</sup>Второе название объясняется тем, что в условиях, когда длина волны де-Бройля значительно меньше, чем характерный масштаб изменения потенциала, закон движения квантовой частицы близок к законам классической механики.

градиентом скорости  $dv_e/dy = \omega_p^2/\omega_c = \omega_c r^2$ ,  $\omega_p$  и  $\omega_c$  — плазменная и циклотронная частоты.

Для анализа высокочастотных волновых процессов в такой модели предполагается, что все переменные изменяются во времени и в направлении распространения волны (вдоль координаты  $x$ ) по закону  $\exp[i(\omega t - kx)]$ . Тогда для зависимой переменной  $F$ , связанной с  $y$ -компонентой скорости формулой  $F(y) = (v_y/v_e(y))\sqrt{1 - s^2(y)}$ , уравнение имеет вид  $d^2F/ds^2 - r^4Q(s)F = 0$ , где  $Q(s) = 1 + 2r^2/(s^2 - 1) + 3r^4/(s^2 - 1)^2$ ,  $s = -(\omega - kv_e(y))/\omega_c$  — аналог безразмерной координаты. Решение этой задачи и нахождение поправок к приближению ВКБ обсуждаются, например, в [4, 5].

В СВЧ электронике решения (17.10) используются также в теории распространения волн пространственного заряда в ускоренном электронном потоке [6] и в двухволновой теории лампы обратной волны с медленно изменяющейся вдоль направления движения электронов фазовой скоростью электромагнитной волны [7]. (взаимодействуют только медленная волна пространственного заряда и “синхронная” обратная пространственная гармоника замедляющей системы).

Вернемся к общему случаю трехмерной неоднородной среды и рассмотрим более подробно уравнение эйконала. Введем векторное поле  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  с помощью формулы

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \nabla\psi. \quad (17.12)$$

В каждой точке пространства вектор  $\mathbf{p}$  перпендикулярен поверхности постоянного значения эйконала (а значит и поверхности постоянной фазы), а его длина  $p = |\mathbf{p}|$ , согласно уравнению (17.7), равна  $p = n(\mathbf{r})$ . Предположим сначала, что функция  $\psi(\mathbf{r})$  известна, тогда известно и векторное поле  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  во всем пространстве. Выберем произвольную точку  $\mathbf{r}_0$  и проведем через нее кривую, касательную в каждой точке к направлению вектора  $\mathbf{p}$ . Такая кривая называется *лучом*. Как следует из определения, луч в каждой точке перпендикулярен поверхности постоянной фазы. Понятие луча является центральным в геометрической оптике. Если построить семейство лучей, покрывающее некоторую область пространства, то можно получить решение уравнения эйконала. Покажем, как это сделать.

Прежде всего, получим дифференциальные уравнения для функции  $\mathbf{r}(s)$ , задающей луч в параметрической форме. Здесь  $s$  — длина вдоль луча от фиксированной точки  $\mathbf{r}_0$  до точки наблюдения  $\mathbf{r}$ . Касательный к лучу единичный вектор  $\mathbf{l}$  согласно дифференциальной геометрии равен  $d\mathbf{r}/ds$ , и он по определению направлен вдоль вектора  $\mathbf{p}$ . Поэтому можно

записать

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{p} = \mathbf{l}. \quad (17.13)$$

Рассмотрим функцию  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = [\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{r})]/2$ . В соответствии с уравнением (17.12), она принимает одно и тоже нулевое значение во всех точках пространства, поэтому ее дифференциал равен нулю:  $dH = 0$ . Представим это соотношение в виде

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} - \frac{1}{2} \nabla n^2 \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

и поделим его на  $ds$ ; кроме того, используем уравнение (17.13). В результате получаем

$$\mathbf{p} \cdot \left[ \frac{d\mathbf{p}}{ds} - \frac{1}{2p} \nabla n^2 \right] = 0,$$

Это уравнение будет выполняться, если положить

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{2p} \nabla n^2. \quad (17.14)$$

Учитывая, что  $p = n$ , и  $\mathbf{p} = p\mathbf{l}$ , приходим к дифференциальным уравнениям для луча:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{l}, \quad (17.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{\nabla n}{n} - \left( \frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{l} \right) \mathbf{l}. \quad (17.15b)$$

Для интегрирования уравнений (17.15) необходимо определить начальные условия. Предположим, что известна гладкая поверхность постоянной фазы волнового поля, на которой значение эйконала равно  $\psi_0$ . В этом случае для любой точки, принадлежащей поверхности, известно направление нормального к ней вектора  $\mathbf{l}_0$ . Для луча, проходящего через эту точку, начальные условия выглядят следующим образом:  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{l}(0) = \pm \mathbf{l}_0$ . Разный выбор знаков соответствует двум волнам, распространяющимся через точку  $\mathbf{r}_0$  в противоположные стороны. В более общем случае в пространстве задана произвольная поверхность (не обязательно с постоянной фазой), вдоль которой определена функция эйконала. Тогда вектор  $\nabla\psi$  не будет перпендикулярным поверхности и для восстановления начальных условий необходимы дополнительные соображения. Мы

не будем останавливаться на этом подробно, соответствующие формулы можно найти, например, в [1].

После того, как форма луча найдена путем интегрирования уравнений (17.15), можно найти закон изменения эйконала вдоль луча. Для этого вычислим производную  $d\psi/ds$ :

$$\frac{d\psi}{ds} = \nabla\psi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = n(\mathbf{r}).$$

Отсюда получаем

$$\psi = \psi_0 + \int_0^s n(\mathbf{r}) ds. \quad (17.16)$$

Уравнениям для лучевой траектории можно придать другую форму, которая делает их физически наглядными и допускающими простую механическую интерпретацию. Вместо параметра  $s$  введем параметр  $\tau$  с помощью соотношения  $ds = p d\tau$ . Тогда уравнения (17.13) и (17.14) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p}, \quad (17.17a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla n^2. \quad (17.17b)$$

Их можно трактовать как уравнения движения частицы единичной массы в потенциальном поле  $U(\mathbf{r}) = -n^2(\mathbf{r})/2$ . Тогда введенная функция  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = p^2/2 + U(\mathbf{r})$  является функцией Гамильтона механической системы, а уравнения (17.17) сразу получаются как соответствующие уравнения Гамильтона [8]

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (17.18)$$

Параметр  $\tau$  выступает как время движения частицы по траектории, так как масса частицы равна единице и справедлива формула  $\tau = \int_0^{\mathbf{r}} p^{-1} d\tau$ .

Лучи совпадают с траекториями частиц, а для эйконала вдоль траектории выполняется соотношение

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^\tau n^2(\mathbf{r}) d\tau. \quad (17.19)$$

Подобная оптико-механическая аналогия дважды сыграла огромную роль в развитии физики. Сначала она была использована У.Гамильтоном для вывода уравнений механики в гамильтоновской формулировке, а затем Шредингер применил эту же аналогию для получения кванто-механического уравнения, носящего теперь его имя.

Уравнения лучей в форме (17.15) или (17.17) решают либо аналитически, что возможно лишь в небольшом числе случаев, либо численно, что при современном уровне развития численных методов не представляет особых трудностей.

Обратимся теперь к уравнению переноса (17.8), определяющему закон изменения амплитуды волны в пространстве. Используя соотношение (17.12), запишем его в виде  $A_0 \operatorname{div} \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \operatorname{grad} A_0 = 0$ , или

$$\operatorname{div}(\mathbf{p}A_0^2) = 0. \quad (17.20)$$

Вектор  $\mathbf{I} = \mathbf{p}A_0^2$  в нулевом приближении геометрической оптики пропорционален вектору потока плотности энергии волны. Покажем это на примере акустических волн. Плотность потока звуковой энергии равна  $\mathbf{q} = P'\mathbf{v}$  [9], где  $P'$  — возмущение давления,  $\mathbf{v}$  — скорость среды. Используя соотношения из главы 11  $P' = -\rho_0\dot{\varphi}$  и  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ , получаем  $\mathbf{q} = -\rho_0\dot{\varphi}\nabla\varphi$ . Принимая во внимание гармоническую зависимость всех переменных от времени, переходя от потенциала скоростей  $\varphi$  к его комплексной амплитуде  $u$  и усредняя выражение для  $\mathbf{q}$  по периоду колебаний, получаем

$$\mathbf{q} = -\frac{i\omega\rho_0}{4} (u\nabla u^* - u^*\nabla u). \quad (17.21)$$

В нулевом приближении  $u = A_0 \exp(-ik\psi)$ . При дифференцировании этого выражения амплитудный множитель  $A_0$  следует рассматривать как постоянную величину, иначе будет получено превышение точности, так как слагаемое, пропорциональное  $\nabla A_0$ , имеет тот же порядок, что и слагаемое в дебаевском разложении, пропорциональное  $A_1$ . Проводя вычисления с учетом этого правила, приходим к следующей формуле для потока мощности акустической волны:

$$\mathbf{q} = \frac{\omega k \rho_0}{2} \nabla \psi A_0^2 = \frac{\omega k \rho_0}{2} \mathbf{p} A_0^2.$$

Итак, уравнение переноса, записанное в форме (17.20), представляет собой закон сохранения потока энергии.

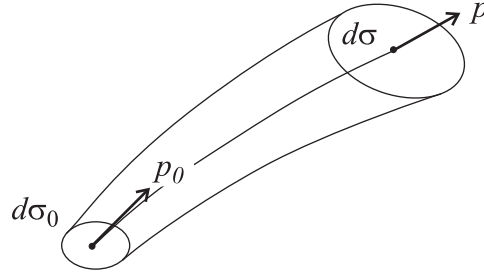


Рис. 17.1. Лучевая трубка

Рассмотрим все лучи, проходящие через маленькую площадку  $d\sigma_0$ , перпендикулярную некоторой лучевой траектории (рис. 17.1). Такая совокупность лучей называется лучевой трубкой. Проинтегрируем уравнение (17.20) по объему лучевой трубки. Используя теорему Гаусса, записываем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{I} dV = \oint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Интеграл по боковым поверхностям трубки обращается в нуль, а интеграл по ее основаниям дает

$$I_0 d\sigma_0 = I d\sigma. \quad (17.22)$$

Так как  $I = pA_0^2 = nA_0^2$ , отсюда получаем формулу для амплитуды  $A_0(\mathbf{r})$ :

$$A_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \frac{d\sigma_0}{d\sigma}}, \quad (17.23)$$

где  $A_0(\mathbf{r}_0)$  — значение амплитуды, заданное на исходной поверхности. Таким образом, интегрирование уравнений (17.15) или (17.17) позволяет построить семейство лучей, а использование формул (17.16) и (17.23) — найти распределение амплитуды и фазы поля вдоль каждого луча.

## § 2. Образование каустик и рефракция

Картина распространения возмущений вдоль лучей, задаваемая геометрической оптикой, оказывается существенно более богатой, чем это кажется на первый взгляд, благодаря образованию *каустик*, являющихся огибающими семейств лучевых траекторий.

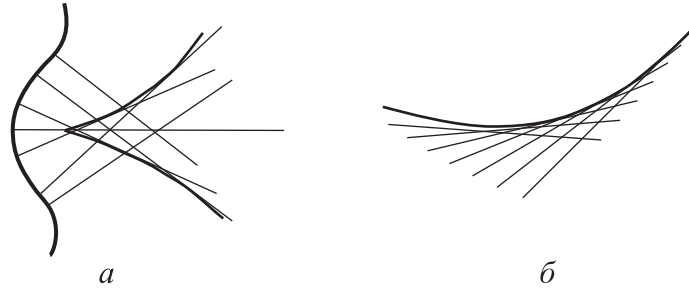


Рис. 17.2. Образование каустики в однородной среде вблизи вогнутого участка волнового фронта (а) и поведение лучей вблизи каустики (б).

Существует две причины появления каустик. Первая имеет чисто геометрическую природу. Предположим, что начальный волновой фронт имеет вогнутый участок, как это показано на рис. 17.2,а, а среда однородная. Тогда лучи являются отрезками прямых и непосредственное построение показывает, что вблизи вогнутого участка волнового фронта образуется область, через каждую точку которой проходят три луча. Граница области является огибающей семейства лучей — это и есть каустика. На рис. 17.2,б в увеличенном масштабе показан участок каустики и поведение лучей вблизи него. Из рисунка видно, что в точке касания сечение лучевой трубки обращается в нуль и в соответствии с формулой (17.23) это означает, что на каустике амплитуда поля стремится к бесконечности.

На самом деле в точном решении уравнения (17.1) бесконечности появиться не может. Противоречие объясняется тем, что вблизи каустики нарушается условие применимости геометрической оптики, и в этой области необходимо учитывать дифракционные явления, описывающие просачивание поля за каустику [1, 10]

Хотя близи каустики решение в форме  $u = A_0 \exp(-ik\psi)$  оказывается неприменимым, после ее прохождения им снова можно пользоваться. При этом, однако, следует учитывать так называемое “правило сдвига фазы”, состоящее в том, что после касания каустики поле вдоль луча приобретает дополнительный сдвиг фазы, равный  $-\pi/2$ . Полное выражение для поля с учетом этого правила имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \left| \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right|} \exp(-ik\psi - i\pi m/2), \quad (17.24)$$



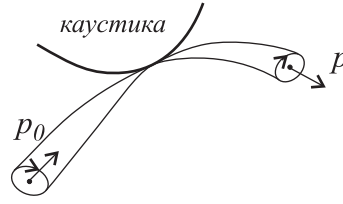


Рис. 17.3. Изменение ориентации сечения лучевой трубки при касании каустики

где  $m$  — число касания каустик при прохождении луча от точки  $\mathbf{r}_0$  до точки наблюдения  $\mathbf{r}$ . Происхождение фазового сдвига связано с эффектами дифракции и его величина может быть найдена при анализе точного решения волнового уравнения вблизи каустики. Для случая слоисто-неоднородной среды это будет сделано в параграфе § 4. Качественно происхождение фазового множителя можно понять, обратившись к рис. 17.3. Из него видно, что после касания каустики элемент  $d\sigma$  сечения лучевой трубки меняет ориентацию, поэтому вместо соотношения (17.22) формально следует записать  $I_0 d\sigma_0 = -I d\sigma$ . При извлечении корня из этого соотношения в формуле (17.23) появляется дополнительный множитель  $\exp(-i\pi/2)$  перед амплитудой.

Если среда неоднородная, каустика может появиться и в случае плоского или выпуклого начального фронта волны. Рассмотрим в качестве важного примера слоисто-неоднородную среду, в которой показатель преломления зависит только от одной из координат, например от  $z$ , т.е. положим  $n = n(z)$ . Лучи в этом случае целиком лежат в одной плоскости, которую выберем в качестве плоскости  $xz$ . Форму лучей получим, используя второе из уравнений (17.17). Расписанное по координатам, оно приводит к соотношениям

$$\frac{dp_x}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = n(z)n'(z). \quad (17.25)$$

Интегрируя первое уравнение, имеем

$$p_x = n(z) \cos \theta(z) = n(0) \cos \theta_0 = \text{const}, \quad (17.26)$$

где  $n(z)$  и  $\theta(z)$  — значение показателя преломления и угол наклона луча к оси  $x$  в точке с вертикальной координатой  $z$ . Уравнение (17.26) является обобщением закона Снеллиуса для слоисто-неоднородной среды.

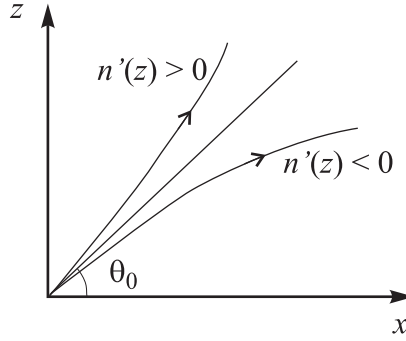


Рис. 17.4. Искривление луча в слоисто-неоднородной среде.

При своем распространении, луч поворачивается таким образом, чтобы величина  $n(z) \cos \theta(z)$  оставалась постоянной.

Вместо интегрирования второго уравнения в (17.25), воспользуемся соотношением  $p_x^2 + p_z^2 = n^2(z)$ , тогда  $p_z(z) = \pm \sqrt{n^2(z) - n^2(0) \cos^2 \theta_0}$ . Знак плюс соответствует восходящему, а знак минус — нисходящему участку луча. Используя эти выражения в первом уравнении системы (17.17), расписанном по координатам, получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = n(0) \cos \theta_0, \quad \frac{dz}{d\tau} = \pm \sqrt{n^2(z) - n^2(0) \cos^2 \theta_0}. \quad (17.27)$$

Легко видеть, что уравнения (17.25) и (17.27) идентичны уравнениям движения частицы единичной массы, брошенной под углом  $\theta_0$  к горизонту с начальной скоростью  $n(0)$  в вертикально направленном потенциальном поле  $U(z) = -n^2(z)/2$ . Исходя из этой механической аналогии сразу можно утверждать, что если показатель преломления увеличивается с высотой, то луч изгибается вверх и, напротив, если показатель преломления уменьшается с высотой, луч изгибается вниз, как это показано на рис. 17.4. В любом случае луч поворачивается в сторону увеличения показателя преломления.

Предположим, что  $n'(z) < 0$  для всех  $z > 0$  и уравнение  $n(z) = n(0) \cos \theta_0$  имеет действительный корень  $z_c$ . Тогда из формулы (17.26) следует, что в плоскости  $z = z_c$  угол наклона луча равен нулю, то есть он параллелен оси  $x$ . После прохождения этой точки начинается нисходящий участок луча. Плоскость  $z = z_c$ , которой касаются все лучи, имеющие одинаковый наклон  $\theta_0$  в начальной плоскости, является каустикой (см. рис. 17.5,а). В неоднородной среде каустика может образоваться и в том случае, если начальный волновой фронт является выпуклым

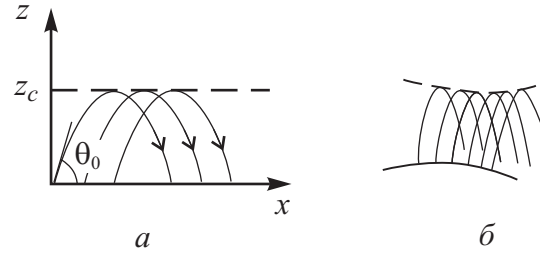


Рис. 17.5. Образование каустики в плоско-слоистой среде в случае плоского (а) и выпуклого (б) начального фронта волны.

(рис. 17.5,б).

Искривление лучей из-за неоднородности среды носит название *рефракции*. Явление рефракции играет большую роль при распространении радиоволн, акустических волн в океане, волн в плазме и во многих других приложениях. Приведем несколько примеров.

Рассмотрим распространение звуковых волн в атмосфере при наличии градиента температуры [11]. Пусть температура воздуха меняется с высотой по закону  $T(z)$ . Тогда скорость звука  $c(z)$  меняется в соответствии с формулой

$$c(z) = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T(z)},$$

где  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma = c_p/c_v$ . Показатель преломления в зависимости от высоты равен  $n(z) = c_0/c = \sqrt{T_0/T}$ . По закону Снеллиуса

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (17.28)$$

Если, как это обычно бывает при нормальных условиях, температура уменьшается с высотой, т.е.  $T'(z) < 0$ , угол наклона звукового луча к горизонтали увеличивается — он отклоняется вверх. Иногда может возникнуть противоположная ситуация, когда температура увеличивается с высотой. Такое наблюдается, например, вечером в тихую погоду над поверхностью реки. В этом случае звуковые лучи отклоняются вниз, обеспечивая усиление волны в горизонтальном направлении. Именно рефракцией объясняется тот факт, что вечером даже тихий разговор в лодке можно услышать на большом расстоянии.

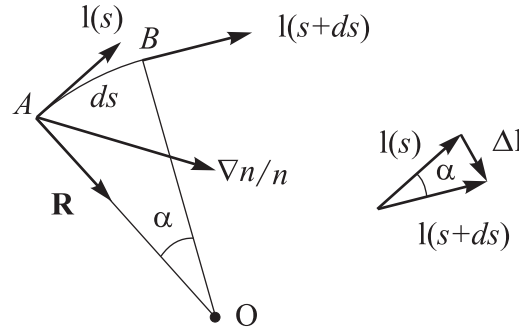


Рис. 17.6. К определению радиуса кривизны луча в неоднородной среде.

В качестве второго примера упомянем *тропосферную рефракцию*, которая возникает при распространении ультракоротких волн в тропосфере Земли [12]. Тропосфера — это нижняя часть атмосферы Земли, она простирается до высот 10–12 километров и вмещает в себя примерно 80 % массы воздуха. Диэлектрическая проницаемость воздуха атмосферы очень близка к единице. Вблизи земной поверхности в среднем  $n - 1 \approx 3,25 \cdot 10^{-4}$  и с увеличением высоты она постепенно уменьшается со средней скоростью  $dn/dz \approx -4 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$ .

Несмотря на столь малые отклонения показателя преломления от единицы, рефракция в тропосфере оказывается заметной благодаря тому, что радиус кривизны радиолуча сравним с радиусом Земли. Рассмотрим участок луча, показанный на рис. 17.6. Радиус кривизны можно определить, используя формулу (17.15b). Прежде всего отметим, что вектор  $d\mathbf{l}/ds$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{l}$ , так как  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1$ . Из (17.15b) следует, что векторы  $\nabla n/n$ ,  $\mathbf{l}$  и  $d\mathbf{l}/ds$  принадлежат одной плоскости, также, как и вписанная в точке A в траекторию луча окружность, радиус которой равен  $R$ . При смещении точки наблюдения из A в B, параметр  $s$  увеличивается на  $dS = R\alpha$ , а конец вектора  $\mathbf{l}$  перемещается на величину  $\Delta \mathbf{l} = |\mathbf{l}|\alpha = \alpha$ . Поэтому  $|d\mathbf{l}/\alpha| = R^{-1}$ . Используя формулу векторного анализа  $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , уравнение (17.15b) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \left[ \mathbf{l}, \left[ \frac{\nabla n}{n}, \mathbf{l} \right] \right]. \quad (17.29)$$

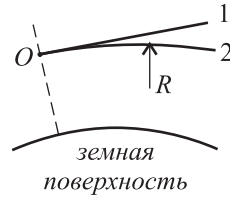


Рис. 17.7. Тропосферная рефракция радиоволн.  $O$  — источник, 1 — траектория луча в отсутствии рефракции, 2 — искривление луча за счет отрицательного градиента показателя преломления с высотой.

Кривизна луча<sup>4</sup> равна, таким образом, модулю правой части формулы (17.29). В случае плоско-слоистой среды следует подставить сюда  $n = n(z)$ ,  $\mathbf{l} = \cos \theta \mathbf{x}^0 + \sin \theta \mathbf{z}^0$ ,  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{z}^0$  — единичные орты вдоль осей координат. Вычисляя правую часть (17.29), получаем

$$R = \left| \frac{n(z)}{n'(z) \cos \theta} \right|, \quad (17.30)$$

причем центр вписанной окружности лежит с той стороны луча, куда направлен вектор  $\nabla n$ . Используя приведенные выше данные о градиенте показателя преломления атмосферы, можно найти, что радиус кривизны луча, испущенного в горизонтальном направлении ( $\theta = 0$ ) равен  $R \sim 25000$  км, что всего в 4 раза превышает радиус Земли. В отсутствии рефракции радиоволна распространялась бы по прямой, так что его высота над поверхностью Земли все время бы увеличивалась, как это показано на рис. 17.7. В нормальных условиях рефракция приводит к тому, что луч частично изгибается в сторону Земли, что приводит к увеличению расстояния прямой видимости.

В принципе, при определенном состоянии атмосферы можно наблюдать столь большой градиент показателя преломления, при котором луч на горизонтальном участке будет иметь радиус кривизны меньший, чем радиус Земли. В этом случае имеет место сверхрефракция, при которой первоначально горизонтальный луч изгибается к Земле, отражается от ее поверхности, вновь поворачивается параллельно горизонту, и такой процесс может повторяться многократно, приводя к существенному увеличению дальности радиосвязи. Из формулы (17.30) следует, что сверх-

<sup>4</sup>Напомним, что кривизной кривой называется величина, обратная радиусу вписанной окружности

рефракция возможна при условии  $|n'/n| > R_z \approx 1,57 \cdot 10^{-4}$  км. Следует подчеркнуть, что сверхрефракция в тропосфере наблюдается сравнительно редко и размеры области вдоль земной поверхности, в которых реализуются благоприятные для ее возникновения условия, не очень велики, что не позволяет использовать явление сверхрефракции для устойчивой дальней радиосвязи.

### § 3. Градиентный диэлектрический волновод

Если профиль показателя преломления в слоистой среде будет иметь локальный максимум, это может привести к образованию волноводного канала. Благоприятные профили  $n(z)$  реализуются, в частности, в океане, когда распределение температуры, давления и процентного содержания солей по глубине приводит к образованию акустических волноводов, по которым звук распространяется без заметного затухания на многие тысячи километров [13].

Другим примером, важным для оптики, является градиентный диэлектрический волновод, или, в аксиально-симметричном случае, световод [14, 15]. Простейший диэлектрический волновод представляет собой плоскую диэлектрическую пластину с поперечно неоднородным распределением показателя преломления (рис. 17.8,а). Распространение электромагнитной волны происходит вдоль оси  $x$ , причем энергия в основном сосредоточена в центральном слое или сердцевине волновода. Верхний и нижний слои с постоянным показателем преломления  $n_0$  служат оболочкой, принимающей участие в формировании собственных волн волновода, а также защищающей сердцевину от воздействия внешних факторов. В волоконной оптике чаще всего используют диэлектрические волноводы прямоугольной, круглой или эллиптической формы. Поперечное сечение круглого волновода показано на рис. 17.8,б.

Градиент показателя преломления в поперечном сечении возникает в процессе изготовления волноводов, при применении техники диффузии или ионной имплантации, которые позволяют контролировать необходимое распределение  $n(z)$  с высокой точностью и создавать устройства интегральной оптики с заданными свойствами.

Мы подробно рассмотрим трехслойный градиентный волновод, изображенный на рис. 17.8,а, считая, что  $n(z)$  — симметричная функция своего аргумента. Сначала качественно обсудим принцип действия волновода. На рис. 17.9 показаны распределение показателя преломления в попе-

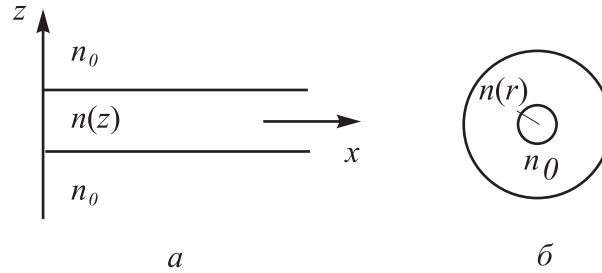


Рис. 17.8. Градиентные диэлектрические волноводы: плоская пластина (а) и волоконно-оптический световод (б).

речном сечении волновода и характер лучей от точечного источника<sup>5</sup>, расположенного на оси  $x$ .

Лучи, испущенные под малым углом наклона  $\theta_0$  к оси  $x$ , будут испытывать рефракцию, отклоняясь в сторону больших значений показателя преломления. Те лучи, для которых максимальное отклонение от оси волновода меньше, чем  $a$  — полуширина сердцевины, будут совершать периодические колебания около плоскости симметрии, такие лучи называются направляемыми. Остальные лучи достигают однородную область оболочки и навсегда покидают волновод. Они называются вытекающими лучами. Количественное описание легко провести, используя оптико-механическую аналогию. В соответствии с ней, форма луча совпадает с траекторией движения частицы единичной массы в потенциальной яме, форма которой показана на рис. 17.10,а. Ясно, что вдоль оси  $x$  скорость движения частицы остается постоянной и равной  $p_x = n_m \cos \theta_0$ ,

<sup>5</sup>Так как рассматривается двумерная структура, под точечным источником подразумевается бесконечная нить, протяженная вдоль оси  $y$ .

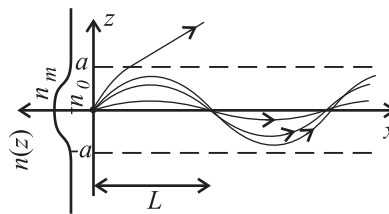


Рис. 17.9. Характер лучей от точечного источника на оси плоского градиентного волновода.

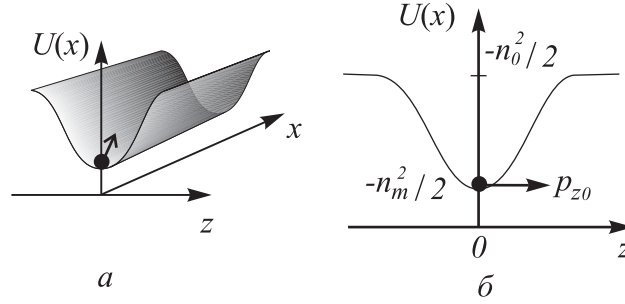


Рис. 17.10. Оптико-механическая аналогия для градиентного волновода: эквивалентный двумерный потенциал (а) и потенциал для поперечного движения частицы единичной массы (б)

где  $n_m = n(0)$  — значение показателя преломления на оси волновода. В проекции на плоскость  $x = 0$  движение происходит в поле потенциала  $U(z) = -n^2(z)/2$  и компонента начальной скорости в этой плоскости равна  $p_{z0} = n_m \sin \theta_0$  (рис. 17.10, б). Частица покинет потенциальную яму, если  $p_{z0}^2/2 > (n_m^2 - n_0^2)/2$ , или

$$\cos \theta_0 < n_0/n_m.$$

Это условие разделяет направляемые и вытекающие лучи. “Период колебаний” в потенциальной яме равен (см. формулу (1.42))

$$T = 4 \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}, \quad (17.31)$$

где  $z_m$  — точка поворота траектории, которая определяется из решения уравнения  $n(z) = n_m \cos \theta_0$ . За время  $T/2$  луч проходит вдоль оси  $x$  расстояние  $L = (p_x/2)T$ , или

$$L = 2n_m \cos \theta_0 \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}, \quad (17.32)$$

и вновь пересекает ось  $x$ .

Для произвольного профиля  $n(z)$  величина  $L$  зависит от начального угла  $\theta_0$ , поэтому разные лучи вновь пересекают плоскость симметрии



волновода чуть чуть на разных расстояниях — изображение точечного источника размывается.

В случае градиентного волновода возможно важное упрощение, основанное на том, что на практике относительная разность величин  $n_m$  и  $n_0$  составляет десятые и сотые доли процента [14]. Количественной мерой этой разности служит безразмерный параметр  $\Delta = (n_m^2 - n_0^2)/(2n_m^2) \approx (n_m - n_0)/n_0 \ll 1$ , называемый высотой профиля показателя преломления. Условие для направляемых лучей, выраженное через параметр  $\Delta$  принимает вид

$$\sin \theta_0 < \sqrt{2\Delta}, \quad (17.33)$$

или, при малых  $\Delta$ ,  $\theta_0 < \sqrt{2\Delta}$ . Таким образом, все направляемые лучи распространяются по малыми углами к оси  $x$  т. е. являются параксиальными.

Ограничимся случаем параболического распределения показателя преломления<sup>6</sup>

$$n^2(z) = n_m^2 \left( 1 - 2\Delta \frac{z^2}{a^2} \right). \quad (17.34)$$

В этом случае максимальное отклонение луча равно  $z_m = a \sin \theta_0 / \sqrt{2\Delta}$ , интеграл в (17.32) легко вычисляется, что дает

$$L = \frac{\pi a \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}. \quad (17.35)$$

Из этой формулы следует, что для параболического распределения  $n^2(z)$  направляемые лучи имеют примерно один и тот же пространственный период, так как для них  $\cos \theta_0 \approx 1$ . Лучи от точечного источника на оси волновода вновь концентрируются в точку на расстоянии  $L = \pi a / \sqrt{2\Delta} \gg a$  от него, причем этот процесс периодически повторяется при смещении вдоль оси  $x$ .

Можно показать, что слой длиной  $D$  с таким законом  $n(z)$  является настоящей линзой. Входящая в него система параллельных лучей после выхода из слоя фокусируется в точку на некотором расстоянии  $f$  от выходной плоскости. Величину  $f$  естественно назвать фокусным расстоянием.

---

<sup>6</sup>Точнее говорить, что параболическому закону подчиняется распределение диэлектрической проницаемости среды, но в случае малых  $\Delta$  можно записать  $n(z) \approx n_m(1 - \Delta z^2/a^2)$ , т.е. по параболе меняется и сам показатель преломления.

**Задача 17.1.** Вычислите фокусное расстояние линзы, образованной слоем среды с параболическим распределением показателя преломления (17.34). Толщина слоя  $D$ .

Ответ.  $f = \frac{n_0 a}{n_m \sqrt{\Delta}} \operatorname{ctg}(\sqrt{2\Delta} D/a)$ .

Самое важное свойство градиентного диэлектрического волновода (как и диэлектрических волноводов других типов) состоит в том, что он способен поддерживать направленное распространение электромагнитных волн вдоль своей оси без потерь энергии на излучение. Это означает, что уравнения электродинамики допускают решения с заданной частотой  $\omega$ , у которых пространственная зависимость всех компонент полей вдоль направления распространения определяется множителем  $\exp(-i\beta x)$ , где  $\beta$  — продольное волновое число, зависящее от частоты. Функция  $\beta(\omega)$  называется дисперсионной характеристикой диэлектрического волновода.

Воспользуемся методом геометрической оптики для вычисления дисперсии плоского диэлектрического волновода. Рассмотрим плоскость  $z = 0$  и зададим на ней начальное распределение эйконала  $\psi_0(x)$ . Функциональная зависимость поля от  $x$  определяется множителем  $\exp(-i\beta x)$ , поэтому эйконал в этой плоскости задается формулой

$$k\psi(x, z)|_{z=0} = \beta x. \quad (17.36)$$

Угол  $\theta_0$ , под которым траектория пересекает плоскость  $z = 0$  определим из следующих соображений. Воспользуемся вновь оптико-механической аналогией. Благодаря независимости показателя преломления от  $x$ , компонента вектора  $\mathbf{p}$  вдоль этой оси является интегралом движения, поэтому  $\partial\psi/\partial x = p_x = n_m \cos \theta_0$ . Это соотношение согласуется с формулой (17.36), если выполняется равенство

$$\beta = kn_m \cos \theta_0. \quad (17.37)$$

Следовательно, поле собственной моды волновода с заданным  $\beta$  формируют лучи с одним и тем же углом наклона, определяемым уравнением (17.37). Выберем один из этих лучей, выходящий из точки с координатами  $(x_0, 0)$  в верхнюю полуплоскость и вычислим изменение эйконала при движении вдоль луча по одному пространственному периоду колебаний. Полный эйконал представим в виде  $k\psi(x, z) = \beta x + k\bar{\psi}(z)$ , тогда из уравнения (17.7) для функции  $\bar{\psi}(z)$  получаем

$$\left[ \frac{d\bar{\psi}(z)}{dz} \right]^2 = n^2(z) - \beta^2/k^2,$$

откуда

$$d\bar{\psi}(z) = \sqrt{n^2(z) - \beta^2/k^2} dz.$$

Знак плюс перед корнем соответствует лучу, выходящему в верхнюю полуплоскость.

За один период колебания луча он проходит вдоль оси  $x$  расстояние  $2L$ , поэтому полное изменение эйконала равно

$$k\Delta\psi = 2L\beta + \oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' - \pi. \quad (17.38)$$

Слагаемое  $-\pi$  появилось из-за того, что луч при своем движении дважды касается каустики в плоскостях  $z = \pm z_m$ , и при каждом касании необходимо учитывать дополнительный сдвиг фазы на  $-\pi/2$ . Знак интегрирования по замкнутому контуру означает, что оно ведется по полному периоду луча. Так как луч в результате возвращается в первоначальную плоскость, для восстановления структуры поля собственной волны волновода, необходимо выполнение условия согласования фаз: набег фазы вдоль луча должен совпадать с точностью до  $2\pi N$  ( $N$  — целое число) с набегом фазы поля за счет множителя  $\exp(-i\beta x)$  при смещении вдоль оси  $x$  на расстояние  $2L$ . Учитывая это требование, из (17.38) получаем

$$\oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' = \pi(2N + 1), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (17.39)$$

Это уравнение называется условием поперечного резонанса [14]. Для заданного распределения  $n(z)$  оно позволяет найти возможные значения  $\beta(k)$ , то есть дисперсию волновода. Каждому значению  $N$  соответствует дисперсионная характеристика  $N$ -ой собственной моды волновода.

Задача расчета дисперсии плоского градиентного волновода в математическом смысле полностью эквивалентна квантомеханической задаче о колебаниях в одномерной потенциальной яме. Поперечное распределение поля собственной волны волновода совпадает с волновой функцией дискретного уровня энергии, а получаемые из (17.37) значения  $\beta_N^2(k)$  аналогичны собственным значениям энергии. Таким образом, условие поперечного резонанса является аналогом правила квантования Бора-Зоммерфельда [2] в квантовой механике.

Обсудим условия, при которых формула (17.39) была получена. В первых, мы предполагали, что электромагнитное поле удовлетворяет скалярному волновому уравнению (17.5), пренебрегая эффектами поляризации поля. Ниже будет показано, что для слоисто-неоднородного диэлектрика, если  $\Delta \ll 1$ , такое предположение выполняется с большим

запасом. Более того, можно показать, что для диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения, у которых максимальное и минимальное значения показателя преломления отличаются мало, собственные моды оказываются вырожденными по поляризации независимо от конкретного закона изменения показателя преломления по сечению [14,15]. Распределение вектора электрического поля таково, что продольные (вдоль оси  $x$ ) компоненты поля оказываются гораздо меньше, чем поперечные, а в поперечном сечении электрическое поле поляризовано преимущественно вдоль одной из двух взаимно-перпендикулярных осей, которые называются оптическими осями волновода. В случае симметрии поперечного сечения оптические оси совпадают с осями симметрии. Таким образом, для каждого возможного значения  $\beta$  существует две собственных волны, линейно поляризованных в двух перпендикулярных оси волновода и друг другу направлениях. Эти моды имеют одинаковый закон распределения поля в поперечном сечении  $E(y, z)$  и отличаются только направлением поляризации. Эти свойства выполняются только приближенно, если параметр  $\Delta = (n_{max}^2 - n_{min}^2) / (2n_{min}^2) \ll 1$ . Как указывалось выше, в реальных волноводах, используемых в оптическом и инфракрасном диапазоне параметр  $\Delta$  очень мал. Такие волноводы называются *слабонаправляющими*, а соответствующие собственные моды получили название *LP-мод слабонаправляющих диэлектрических волноводов*.

На самом деле, продольная постоянная распространения двух линейно поляризованных *LP-мод* немного зависит от направления поляризации, т.е. величина  $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y \neq 0$ . Например, для волноводов прямоугольного или эллиптического сечения, эта разница объясняется разным размером волновода в  $y$  и  $z$  направлениях. Даже если сечение волновода идеально круглое, ненулевое  $\Delta\beta$  может появиться как следствие остаточной анизотропии в материале, из которого изготовлен световод. В таких волноводах распространяющийся сигнал сохраняет свою поляризацию на очень больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях.

Картина меняется, если вдоль оси волновода показатель преломления также слабо изменяется. В этом случае *LP-моды* оказываются связанным, так что энергия, первоначально находившаяся в одной из таких мод начинает периодически перекачиваться в другую и обратно — возникают биения. При линейной поляризации сигнала на входе в оптический световод, на его выходе поляризация оказывается эллиптической. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в последнем параграфе этой главы.

Второе замечание связано с существованием в волноводе наряду с направляемыми, также и вытекающих лучей. При заданном  $\beta$  угол наклона

луча  $\theta_0$  можно найти из формулы (17.37). С другой стороны, направляемые лучи должны удовлетворять условию (17.33), откуда получаем, что вся теория работает, если  $\sqrt{1 - \beta^2/(n_m^2 k^2)} < \sqrt{2\Delta}$ , или

$$kn_m\sqrt{1 - 2\Delta} = n_0k < \beta < n_mk. \quad (17.40)$$

Для действительных  $\beta$  правое неравенство всегда выполняется, иначе под корнем в (17.39) будет стоять отрицательная при всех  $z$  величина, и уравнение (17.39) не будет иметь действительных решений. Нарушение левого неравенства означает, что  $z_m > a$ , то есть каустика находится в области однородной оболочки, чего быть не может, так как все лучи в однородной среде строго прямолинейны и при заданном  $\beta$  выходят из сердцевинки волновода под одинаковыми углами. Волновое поле отвечает в этом случае убегающей от волновода под некоторым конечным углом плоской волне. Таким образом, в этой области частот направляемой собственной волны не существует, вся энергия излучается из волновода и амплитуда волны вдоль оси  $x$  экспоненциально уменьшается. Собственные моды диэлектрических волноводов, обладающие такими свойствами, называются *вытекающими*.

Благодаря дифракционным эффектам поле в действительности частично проникает в область за каустикой, поэтому просачивание поля из сердцевинки в оболочку наступает чуть раньше, чем каустика совпадает с границей между сердцевиной и оболочкой. Следовательно рассматриваемое приближение должно давать заметную погрешность вблизи тех частот, при которых направляемая волна превращается в вытекающую.

В качестве конкретного примера вновь рассмотрим параболическое распределение показателя преломления. Подставляя формулу (17.34) в (17.39) и вычисляя интеграл, получаем

$$\oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' = \pi n_m \frac{ka}{\sqrt{2\Delta}} \sin \theta_0^2 = \frac{\pi(k^2 n_m^2 - \beta^2)a^2}{\sqrt{2\Delta}kan_m} = \pi(2N + 1).$$

Введем, вслед за [14], безразмерные переменные  $v = \sqrt{2\Delta}n_mka$  и  $u = \sqrt{k^2 n_m^2 - \beta^2}a$ . В этих переменных дисперсионное уравнение записывается следующим образом:

$$u^2 = (2N + 1)v. \quad (17.41)$$

Введем, наконец, нормированную постоянную распространения  $b = 1 - u^2/v^2$ , которая меняется в пределах от 0 до 1. В переменных  $(v, b)$  дисперсионная характеристика определяется простым соотношением

$$b = 1 - \frac{2N + 1}{v}. \quad (17.42)$$

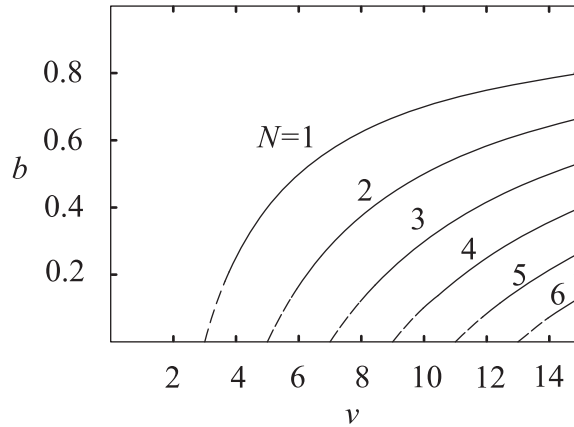


Рис. 17.11. Дисперсия плоского диэлектрического волновода с параболическим профилем показателя преломления в сердцевине. Пунктиром показаны участки дисперсионных кривых, которые определяются методом с большой погрешностью.

Дисперсионные кривые, соответствующие этому уравнению для нескольких первых мод, приведены на рис. 17.11. Для каждой моды точка  $b = 0$  отвечает такому значению частоты, при котором каустика совпадает с границей сердцевины волновода и направляемые лучи для превращаются в вытекающие. Критические значения безразмерного параметра  $v$  равны  $v_N = 2N+1$ , для более низкой частоты направляемой моды с данным  $N$  не существует. На самом деле, как указывалось выше, данный метод вблизи критических частот дает заметную погрешность, поэтому дисперсия и сами критические значения  $v_N$  определяются здесь только приближенно. Соответствующие участки дисперсионных кривых показаны на рис. 17.11 пунктиром. В частности, более точные методы показывают, что направляемая мода основного типа ( $N = 1$ ) существует в волноводе на любой положительной частоте, так что для нее критическое значение безразмерной частоты равно  $v = 0$ , а не  $v = 1$ , как это следует из уравнения (17.42).

Распределение поля в волноводе найдем, используя формулу (17.24), учитывая в ней, что для двумерной задачи площадь сечения лучевой трубки следует заменить на ее ширину. В качестве границ трубки выберем два луча, сдвинутых относительно друг друга на малую величину  $dx_0$  (см. рис. 17.12). Ширина трубки в плоскости  $z = 0$  равна  $d\sigma_0 = dx_0 \sin \theta_0$ ,

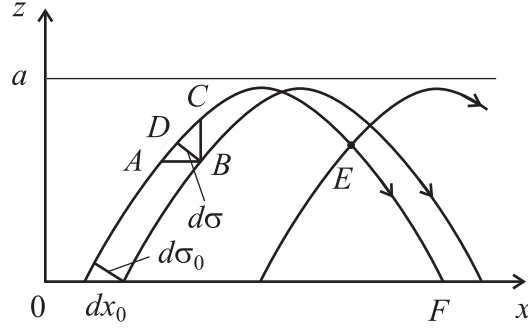


Рис. 17.12. К определению поля собственной моды методом геометрической оптики

а при произвольных  $x$  и  $z$  из треугольника  $ABC$  можно записать  $|AB| = dx_0$ ,  $|BC| = dz = z(x + dx_0) - z(x) = \frac{dz}{dx} dx_0$ ,  $|DB| = d\sigma$ . Отсюда получаем

$$d\sigma = dz \cos \theta \approx \frac{dz}{dx} dx_0 \cos \theta = \frac{dz}{dx} \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} d\sigma_0.$$

Кроме этого, из уравнений (17.27) вытекает

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}{n(z) \cos \theta}.$$

Собирая вместе все эти результаты, приходим к соотношению

$$\left| \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right| = \frac{n(z) \sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}, \quad (17.43)$$

Следует также учесть, что через каждую точку в сердцевине волновода проходит два луча — восходящий и нисходящий, уже коснувшийся каустики. Для первого луча часть фазы, зависящая от координаты  $z$ , равна

$$k\bar{\psi}_1(z) = \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz'$$

Для нисходящего луча эту величину проще всего найти из соображений симметрии. В точке  $F$  на рис.17.12 набег фазы вдоль луча равен половине

набега на период, т.е.  $\pi(N + 1/2)$ . Двигаясь вдоль луча от этой точки в обратном направлении, получаем, что в точке  $E$  пересечения двух лучей фаза второго выражается соотношением

$$k\bar{\psi}_2(z) = \pi(N + 1/2) - \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz'$$

Для обоих лучей слагаемое в фазе, пропорциональное  $x$ , равно  $\beta x$ . Учитывая это и подставляя формулы (17.37) и (17.43) в (17.24), получаем для поля следующее выражение:

$$E(x, z) = \frac{C e^{-i\beta x}}{\sqrt[4]{k^2 n^2(z) - \beta^2}} \cdot \begin{cases} \cos \left( \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' \right), & \text{если } N \text{ четное;} \\ \sin \left( \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' \right), & \text{если } N \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (17.44)$$

где  $C$  — амплитудный множитель, конкретный вид которого несуществен из-за линейности системы. Выражение (17.44) справедливо в области между каустиками, положение которых определяется корнями уравнения

$$n^2(z) = \beta^2/k^2. \quad (17.45)$$

Точно на каустике поле обращается в бесконечность, при этом условия применимости приближения геометрической оптики оказываются нарушенными. Таким образом использованный метод не позволяет получить решение, адекватно описывающее поле вблизи каустики и за ней. Для получения такого решения исследуем более подробно распространение электромагнитной волны в слоисто-неоднородной среде.

#### § 4. Электромагнитные волны в слоисто-неоднородной среде

Задачи о распространении волн в слоисто-неоднородной среде возникают при изучении электромагнитных волн в плазме, радиоволн в ионосфере Земли, звуковых волн в жидкости, волн нерегулярных волноводах, в квантовой механике, а также во многих других задачах. Некоторые примеры были уже рассмотрены в предыдущих параграфах этой главы. Сейчас наша основная цель состоит в том, чтобы получить более точное описание поля вблизи каустики, чем дает метод геометрической оптики.



Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит только от координаты  $z$ :  $\varepsilon = \varepsilon(z)$ . Будем считать, что волновой вектор лежит в плоскости  $xz$ , поэтому все компоненты поля не зависят от координаты  $y$ . Кроме того, поскольку в направлении  $x$  среда однородная, то можно рассматривать только решения, зависящие от  $x$  по гармоническому закону  $\exp(-i\beta x)$ , где  $\beta$  —  $x$ -компонента волнового вектора. Таким образом в уравнениях Максвелла (17.3a) и (17.3b) можно положить  $\partial/\partial x = -i\beta$  и  $\partial/\partial y = 0$ .

Вид уравнения для поля зависит от поляризации волны. Возможны два случая. Если вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения  $xz$ , то компоненты поля  $E_x$ ,  $E_z$ , и  $H_y$  строго равны нулю. В теории плоских диэлектрических волноводов собственные моды, обладающие такой поляризацией, называются  $TE$ -модами. Расписывая уравнения (17.3a) и (17.3b) по координатам, получаем

$$H_x = \frac{1}{-ik} \frac{dE_y}{dz}, \quad H_z = -\frac{\beta}{k} E_y, \\ \frac{dH_x}{dz} + i\beta H_z = -ik\varepsilon E_y,$$

Подставляя первые два соотношения в третье, приходим к уравнению для  $y$ -компоненты электрического поля:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + [k^2 \varepsilon(z) - \beta^2] E_y = 0. \quad (17.46)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (17.5) из § 1, которое было выведено для произвольной неоднородной среды в пренебрежении эффектами поляризации, если положить в (17.5)  $E(x, z) = E_y(z) \exp(-i\beta x)$ . Мы получили, что для  $TE$ -моды в плоско-слоистой среде уравнение (17.46) является точным.

Аналогично, когда вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения, выполняются соотношения  $H_x = H_z = E_y = 0$ . Моды с такой поляризацией называются  $TM$ -волнами. В этом случае из уравнений Максвелла следует

$$E_x = \frac{1}{i\varepsilon k} \frac{dH_y}{dz}, \quad E_z = \frac{\beta}{k\varepsilon} H_y, \\ \frac{dE_z}{dz} + i\beta E_z = ikH_y,$$

Все компоненты поля выражаются через одну скалярную функцию  $H_y(z)$ ,

для которой получаем уравнение

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dH_y}{dz} \right) + \left( k^2 - \frac{\beta^2}{\varepsilon(z)} \right) H_y = 0. \quad (17.47)$$

Положим  $H_y(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} F(z)$ , тогда уравнение для функции  $F(z)$  приобретает вид

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[ k^2 \varepsilon(z) + \frac{\varepsilon''(z)}{2\varepsilon(z)} - \frac{3\varepsilon'^2(z)}{4\varepsilon^2(z)} - \beta^2 \right] F(z) = 0. \quad (17.48)$$

Видно, что оно совпадает с уравнением (17.46), если ввести эффективную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{эфф}$  соотношением

$$k^2 \varepsilon_{эфф} = k^2 \varepsilon + \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon} - \frac{3\varepsilon'^2}{4\varepsilon^2}.$$

Если  $L$  — характерный масштаб изменения  $\varepsilon(z)$  то второе и третье слагаемые имеют порядок  $\Delta/(kL)^2$  и  $\Delta^2/(kL)^2$  по сравнению с первым. Здесь  $2\Delta = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min})/\varepsilon_{max}$  — относительное изменение диэлектрической проницаемости в среде, введенное по аналогии с высотой профиля показателя преломления для диэлектрических волноводов. Если  $kL \gg 1$ , они пренебрежимо малы, и можно считать  $\varepsilon_{эфф} = \varepsilon$ . Для слабонаправляющих диэлектрических волноводов, кроме того, высота профиля показателя преломления мала:  $\Delta \ll 1$ , поэтому уравнение для поля не зависит от поляризации собственной моды с еще большей точностью. В результате  $TM$ - и  $TE$ -моды слабонаправляющих волноводов оказываются вырожденными. Будет рассматривать, для определенности, уравнение (17.46), используя для искомой компоненты поля обозначение  $F(z)$ .

Пусть зависимость диэлектрической проницаемости среды от  $z$  имеет вид, показанный на рис. 17.13. Предполагается, что волна распространяется со стороны отрицательных значений  $z$ . Точка поворота  $z_0$ , найденная из уравнения (17.45), где  $n^2 = \varepsilon$ , разграничивает области с различным поведением решения. Слева от этой точки функция  $q^2(z) = k^2 n^2(z) - \beta^2 > 0$ , поэтому ВКБ-приближение для уравнения (17.46) равно

$$F(z) = \frac{A_+}{\sqrt{q(z)}} \exp \left[ -i \int_{z_0}^z q(z') dz' \right] + \frac{A_-}{\sqrt{q(z)}} \exp \left[ i \int_{z_0}^z q(z') dz' \right], \quad (17.49)$$

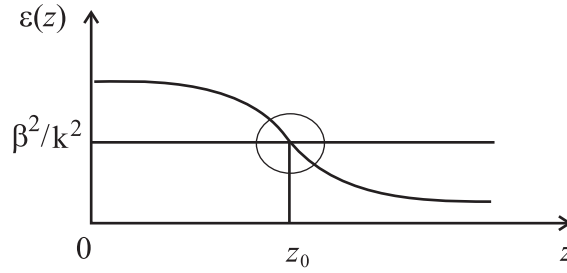


Рис. 17.13. Зависимость диэлектрической проницаемости от координаты вблизи точки поворота

где  $A_+$  и  $A_-$  — амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$ . Будем называть эти волны соответственно прямой и встречной. При  $z > z_0$  имеем  $q^2(z) < 0$ , в этом случае ВКБ-решение равно

$$F(z) = \frac{B_+}{\sqrt{|q(z)|}} \exp \left[ - \int_{z_0}^z |q(z')| dz' \right]. \quad (17.50)$$

Это решение соответствует экспоненциально затухающей вглубь запрещенной области волне. Амплитуду второго линейно независимого решения, нарастающего вглубь запрещенной области, при заданных граничных условиях следует положить равной нулю. Действительно, если волна падает слева, то в запрещенной области может существовать только затухающая волна, иначе будет нарушен закон сохранения энергии. В геометрической оптике точка  $z_0$  является точкой положения каустики, в квантовой механике она называется точкой поворота, так как ограничивает классическое движение частицы в потенциальном поле.

В непосредственной окрестности точки поворота решениями (17.49) и (17.50) пользоваться нельзя, так как здесь нарушаются условия применимости ВКБ-приближения. Для построения решения в этой области воспользуемся методом эталонных функций, суть которого можно выразить словами: похожие дифференциальные уравнения имеют похожие решения<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Для квантомеханической задачи об отражении частицы от потенциального барьера этот метод излагается во многих учебниках по квантовой механике (см., например, [16, 17].)

Разложим вблизи точки поворота функцию  $q^2(z)$  в ряд Тейлора:  $q^2(z) = q^2(z_0) + (dq^2/dz)_{z=z_0}(z - z_0) + \dots \approx k^2 \varepsilon'(z_0)(z - z_0)$  и введем безразмерную координату  $\xi = k^{2/3} |\varepsilon'(z_0)|^{1/3} (z - z_0)$ . Тогда вблизи точки поворота вместо уравнения (17.46) можно записать

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} - \xi F = 0. \quad (17.51)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйри*, а его линейно независимые решения называются функциями Эйри. Одна из этих функций обозначается  $\text{Ai}(\xi)$  и ее можно представить в виде [2, 18]<sup>8</sup>

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + \xi t\right) dt. \quad (17.52)$$

Функция Эйри хорошо изучена и протабулирована, а в современных компьютерных пакетах математического обеспечения, таких как *Mathematica*, она включена как стандартная функция. Нам потребуются асимптотические разложения функции Эйри при больших значениях аргумента [19]:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\xi) &\sim \frac{1}{2\xi^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right), \quad \xi > 0 \\ \text{Ai}(\xi) &\sim \frac{1}{|\xi|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \xi < 0 \end{aligned} \quad (17.53)$$

Как видно из этих формул, функция Эйри  $\text{Ai}(\xi)$  при больших положительных значениях аргумента экспоненциально убывает. Можно показать, что любое другое линейно независимое решение уравнения Эйри в этом пределе будет экспоненциально возрастать, поэтому необходимое нам решение выражается только через функцию  $\text{Ai}(\xi)$ :

$$F(\xi) = C \text{Ai}(\xi). \quad (17.54)$$

Здесь  $C$  — амплитудный множитель.

Предположим, что квазиклассическое приближение для уравнение (17.46) становится применимым на таких расстояниях от точки поворота, на которых функцию  $q^2(z)$  все еще можно считать линейной. При таких

<sup>8</sup>В широко распространенном справочнике [19] определение функции Эйри отличается от приведенного здесь постоянным множителем. Вместо коэффициента  $1/\sqrt{\pi}$  в [19] перед интегралом стоит  $1/\pi$

значениях координаты можно сшить приближенные ВКБ-решения (17.49) и (17.50) с решением (17.54). Определим условия, при которых процедура сшивки возможна. Квадратичное слагаемое в разложении  $q^2(z)$  в ряд Тейлора мало по сравнению с линейным, если  $|\varepsilon'(z_0)||z-z_0| \gg |\varepsilon''(z_0)||z-z_0|^2$ , откуда, используя оценки  $\varepsilon' \sim \varepsilon/L$  и  $\varepsilon'' \sim \varepsilon/L^2$ , находим  $|z-z_0| \ll L$ . Условие применимости ВКБ-приближения можно получить из формулы (7.59), если заменить  $t$  на  $z$  и  $\omega(t)$  на  $q(z)$ :  $|q'(z)| \ll |q^2(z)|$ . В этом неравенстве можно использовать  $q^2(z) \approx k^2 \varepsilon'(z_0)(z-z_0)$ , в результате чего оно приводится к виду  $|z-z_0| \gg L/(\sqrt{\varepsilon}kL)^{2/3}$ . Таким образом, если выполняется условие  $\sqrt{\varepsilon}kL \gg 1$ , всегда существует такое  $z_1$ , для которого одновременно выполняются неравенства

$$\frac{L}{(\sqrt{\varepsilon}kL)^{2/3}} \ll |z_1 - z_0| \ll L. \quad (17.55)$$

На расстояниях порядка  $z_1$  от точки поворота, с одной стороны, уже работает ВКБ-приближение, а с другой — еще можно использовать уравнение Эйри.

Предположим, что условие (17.55) выполнено. В этом случае ВКБ-решения (17.49) и (17.50) должны совпадать с первым членом асимптотического разложения решения (17.54). Вычислим интегралы в формулах (17.49) и (17.50):

$$\int_{z_0}^z q(z') dz' \approx \sqrt{|\varepsilon'(z_0)|k} \int_{z_0}^z \sqrt{z_0 - z'} dz' = \int_0^{|\xi|} \sqrt{\xi'} d\xi' = \frac{2}{3} |\xi|^{3/2},$$

если  $z < z_0$ , и

$$\int_{z_0}^z |q(z')| dz' \approx \sqrt{|\varepsilon'(z_0)|k} \int_{z_0}^z \sqrt{z' - z_0} dz' = \int_0^\xi \sqrt{\xi'} d\xi' = \frac{2}{3} \xi^{3/2},$$

если  $z > z_0$ . Подставляя эти выражения в (17.49) и (17.50) и сравнивая полученные формулы с асимптотикой функции Эйри (17.53), получаем, что коэффициенты  $A_+$ ,  $A_-$ ,  $B_+$  и  $C$  связаны соотношениями

$$A_+ = \frac{e^{i\pi/4}C}{2}, \quad A_- = \frac{e^{-i\pi/4}C}{2}, \quad B_+ = \frac{C}{2}. \quad (17.56)$$

Эти формулы определяют связь между амплитудами падающей  $A_+$ , отраженной  $A_-$  и прошедшей в запрещенную область волны  $B_+$ . Видно, что коэффициент отражения от каустики равен  $A_-/A_+ = \exp(-i\pi/2)$ , то есть по модулю амплитуды падающей и отраженной волн равны, а их фаза отличается на  $-\pi/2$ . Это тот самый сдвиг фазы на каустике, о котором шла речь в § 1.

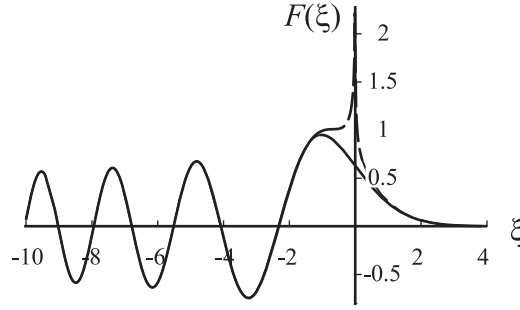


Рис. 17.14. Поле в плоско-слоистой среде вблизи каустики. Пунктиром показаны ВКБ-решения (17.53).

Подставляя формулы (17.56) в (17.49) и (17.50), получаем, что искомое решение имеет асимптотическое разложение

$$F(z) = \frac{C}{\sqrt{q(z)}} \cos \left[ \int_{z_0}^z q(z') dz' - \pi/4 \right], \quad z < z_0, \quad (17.57a)$$

$$F(z) = \frac{C}{2\sqrt{|q(z)|}} \exp \left[ - \int_{z_0}^z |q(z')| dz' \right], \quad z > z_0. \quad (17.57b)$$

В непосредственной окрестности точки поворота следует пользоваться формулой (17.54). Подчеркнем, что найденное решение, и, следовательно, связь между амплитудами падающей, отраженной и проникающей за каустику волн, соответствует только заданным в физической постановке задачи граничным условиям, когда из  $-\infty$  падает волна заданной амплитуды, а справа от точки поворота есть только затухающая вглубь запрещенной области волна. При других граничных условиях вид решения и соотношения между амплитудами будут другими. Более подробно этот вопрос обсуждается в [2].

Найденное решение показано на рис. 17.14. В области  $z < z_0$  оно имеет вид стоячей волны, амплитуда которой увеличивается при приближении к каустике, а расстояние между максимумами (локальная длина волны) немного уменьшается. В области за каустикой ( $z > z_0$ ) поле экспоненциально быстро спадает до нуля. В отличие от решения, полученного методом геометрической оптики в предыдущем разделе, а также в отличие от асимптотических выражений (17.57), поле остается конечным на каустике. Главным максимум смещен в разрешенную область на величину,

определяемую формулой

$$z_m - z_0 = -1,02 k^{-2/3} |\varepsilon'(z_0)|^{-1/3}. \quad (17.58)$$

На рис. 17.14 также показаны пунктиром ВКБ-решения (17.57). Видно, что они являются очень хорошим приближением к точному решению при всех  $z$ , кроме области шириной порядка  $|z_m - z_0|$ , непосредственно примыкающей к каустике.

Можно считать, что в точке  $z_0$  происходит полное отражение волны, за каустикой она практически не проникает. Положение точки отражения определяется уравнением (17.45). Если угол падения волны на слоисто-неоднородную среду равен нулю, то  $\beta = 0$ , и положение точки отражения совпадает с нулем коэффициента преломления. Это условие выполняется, например, в ионосферной плазме [20]. Если пренебречь затуханием и магнитным полем Земли, то для диэлектрической проницаемости плазмы можно записать

$$\varepsilon(z) = n^2(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{\omega^2 m}, \quad (17.59)$$

где  $N(z)$  — концентрация электронов в плазме,  $\omega$  — частота. При вертикальном распространении волны в точке отражения получаем:

$$N(z) = \frac{\omega^2 m}{4\pi e^2} = 1,24 \cdot 10^{-8} f^2. \quad (17.60)$$

Здесь частота должна быть выражена в гигагерцах, а концентрация в  $\text{см}^{-3}$ . Эта формула является основной для интерпретации данных по радиозондированию ионосферы Земли и плазмы солнечной короны [20].

## § 5. Взаимодействие линейных волн в неоднородной среде

В приближении геометрической оптики различные волны не обмениваются энергией. Чтобы показать это, рассмотрим, например, случай акустической волны. Для прямой волны, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , комплексная амплитуда потенциала скорости равна

$$u(z) = \frac{A_+}{\sqrt{kn(z)}} \exp \left[ -ik \int^z n(z') dz' \right].$$

Подставляя это выражение в формулу (17.21) и дифференцируя, как это следует делать в ВКБ-решениях, только экспоненциальный множитель,

для усредненного за период потока мощности волны получаем выражение  $q = \omega \rho_0 |A_+|^2 / 2$ . Поскольку  $A_+$  — константа, то поток мощности постоянен вдоль оси  $z$ . Аналогично для потока мощности встречной волны, бегущей в отрицательном направлении можно получить  $q = -\omega \rho_0 |A_-|^2 / 2$ , т.е. также постоянную величину.

Чтобы учесть взаимодействие между волнами, необходимо выйти за рамки ВКБ-приближения, учитывая следующие члены асимптотического разложения. Однако, если функция  $n^2(z)$  аналитическая, то можно показать, что взаимодействие прямой и встречной волны будет отсутствовать в любом порядке асимптотического разложения — амплитуда отраженной волны экспоненциально мала.

Можно поступить иначе, воспользовавшись другим методом, например методом Ван-дер-Поля. Сделаем это на примере конкретной задачи о переходном слое. Поставим задачу так: пусть есть слой ширины  $l$ , в котором свойства среды плавно меняются. На границу  $z = 0$  слоя падает волна с амплитудой  $A_+(0) = A_0$ ; амплитуда встречной (отраженной) волны на границе  $x = l$  равна нулю. Надо найти амплитуду  $A_-(x)$  волны, возникающей из-за отражения от плавных неоднородностей, т.е. найти амплитуду волны, распространяющейся справа налево. Введем новую переменную  $V = dF/dx$  и запишем для удобства (17.46) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dF}{dz} = V, \quad \frac{dV}{dz} = -k^2 \varepsilon(z) F. \quad (17.61)$$

Рассматривается одномерный случай, поэтому  $\beta = 0$ . Решение (17.61) будем искать в виде (17.49), считая  $A_+$  и  $A_-$  функциями координаты, т.е.

$$F(z) = \frac{A_+(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{-i\varphi} + \frac{A_-(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi(z) = k \int_0^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz'.$$

Так как вместо одной переменной  $F(z)$  мы ввели две новых  $A_+(z)$  и  $A_-(z)$ , то одно соотношение, связывающее эти новые переменные, можно выбрать произвольно. Потребуем, чтобы

$$\frac{A'_+(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{-i\varphi} - \frac{A_+(z) \varepsilon'(z)}{4 \sqrt[5]{\varepsilon^5(z)}} e^{-i\varphi} + \frac{A'_-(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{i\varphi} - \frac{A_-(z) \varepsilon'(z)}{4 \sqrt[5]{\varepsilon^5(z)}} e^{i\varphi} = 0. \quad (17.62)$$



Тогда  $V = -ik\sqrt[4]{\varepsilon}[A_+ \exp(-i\varphi) - A_- \exp(i\varphi)]$ . Подставляя это выражение во второе уравнение системы (17.61), найдем

$$A'_+ e^{-i\varphi} + \frac{\varepsilon' A_+ e^{-i\varphi}}{4\varepsilon} - A'_- e^{i\varphi} - \frac{\varepsilon' A_- e^{i\varphi}}{4\varepsilon} = 0.$$

Объединение этого уравнения с условием (17.62) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (4\varepsilon A'_+ - \varepsilon' A_+) e^{-i\varphi} + (4\varepsilon A'_- - \varepsilon' A_-) e^{i\varphi} &= 0, \\ (4\varepsilon A'_+ + \varepsilon' A_+) e^{-i\varphi} - (4\varepsilon A'_- + \varepsilon' A_-) e^{i\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно производных  $A'_+$  и  $A'_-$ , получим

$$A'_+ = \frac{\varepsilon'(z) A_-}{4\varepsilon} e^{2i\varphi}, \quad A'_- = \frac{\varepsilon'(z) A_+}{4\varepsilon} e^{-2i\varphi}. \quad (17.63)$$

Уравнения (17.63) — точные: пока сделана всего лишь замена переменных — от  $F$  и  $V$  мы перешли к  $A_+$  и  $A_-$ . Но, поскольку неоднородность слабая,  $\varepsilon'$  мала по сравнению с  $\varepsilon$ , и, следовательно,  $A_+$  и  $A_-$  меняются медленно. Поэтому для решения (17.63) можно применить метод последовательных приближений, полагая в нулевом приближении  $\varepsilon' = 0$  и  $A_+(z) = A_0$ .

Подставляя  $A_+(z) = A_0$  во второе уравнение из (17.63), получим

$$A_- = A_0 \int_0^z \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} \exp \left[ -2ik \int_0^{z'} \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz.$$

Учет поправки первого приближения дает

$$A_- = A_0 + \int_0^z \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} A_-(z) \exp \left[ 2ik \int_0^{z'} \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz.$$

Это уже выход за рамки геометрической оптики: волны взаимодействуют друг с другом: их амплитуды их связаны.

Если за пределами слоя среда однородна, то интегрирование в этих выражениях можно формально расширить на всю ось  $z$ . Тогда для коэффициента отражения от неоднородного слоя  $R = A_-/A_+$  получаем

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} \exp \left[ -2ik \int_{-\infty}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz. \quad (17.64)$$

Это соотношение эквивалентно борновскому приближению для коэффициента рассеяния на малом по сравнению с энергией частицы потенциале в квантовой механике [2, 17].

Отметим, что рассмотренная в предыдущем параграфе задача об отражении волны от каустики также может трактоваться как задача о взаимодействии двух волн — прямой и встречной. В этом случае эффективное взаимодействие происходит в области, где их фазовые скорости, имеющие разные знаки, малы, и, следовательно, близки друг к другу. Взаимодействие при этом настолько сильное, что происходит полное преобразование падающей волны в отраженную.

Примеры взаимодействия волн в неоднородных средах можно существенно увеличить. Подобные задачи встречаются в самых различных областях физики, таких, как гидродинамика, физика плазмы, электродинамика, акустика, а в последние годы сюда добавились физика жидких кристаллов, ферромагнетиков, оптических волноводов. В фундаментальном обзоре [23] задача линейного взаимодействия волн в неоднородных средах рассматривается как одна из важнейших современных проблем теории колебаний и волн вообще<sup>9</sup>.

Исследования в этой области начались в 50-х годах с изучения распространения волн в ионосферной плазме [20–22], нерегулярных волноводах СВЧ диапазона [24, 25], акустических волн в слоистых средах [13].

Вообще говоря, эффект линейного взаимодействия волн (линейной трансформации мод) возникает в том случае, если при распространении через отрезок неоднородной среды, амплитуды волн меняются неадиабатически, т.е. их изменения отклоняются от предсказания геометрической оптики. Другими словами, взаимодействие волн наблюдается при нарушении законов геометрической оптики. Это значит, что отношения амплитуд и разности фаз волн, образующих полное волновое поле, отличаются от того, что предсказывает ВКБ-приближение, когда волны считаются независимыми.

Характер и масштаб неоднородности среды определяет трансформацию волн, поэтому изучение этого явления может случить источником сведений о структуре неоднородности. Более того, изменяя закон неоднородности среды, можно контролировать эффективность преобразования волн, и, следовательно, управлять интенсивностью и поляризацией прямых и встречных волн.

---

<sup>9</sup>В последующем изложении в этом параграфе мы следуем обзору [23], в котором рассмотрены вопросы взаимодействия электромагнитных волн в анизотропных, плавно неоднородных средах.

Следуя обзору [23], рассмотрим линейное взаимодействие волн в довольно общей физической ситуации распространения электромагнитной волны в произвольной анизотропной неоднородной среде.

Пусть монохроматическая волна распространяется в среде без источников и свойства среды не зависят от времени. Ограничимся рассмотрением одномерного случая и будем опускать множитель  $\exp(i\omega t)$ . Волновое уравнение для  $N$ -компонентного поля  $X_\alpha$  можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d[e]}{d\xi} = -i [T] [e] , \quad (17.65)$$

Здесь использованы следующие обозначения.  $[e]$  есть  $N$ -компонентный вектор столбец, содержащий комплексные амплитуды полевых переменных  $X_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ );  $[T]$  — квадратная матрица, определяемая локальными свойствами среды ( $[T]$  не содержит дифференциальных операторов и зависит от продольной координаты как от параметра, она имеет одинаковую форму в однородных и неоднородных средах);  $\xi = kx$  — безразмерная координата вдоль направления распространения волны;  $k = \omega/c$  — волновое число,  $c$  — характерная скорость волнового движения (в электродинамике это скорость света в вакууме). Частотная дисперсия содержится в элементах матрицы  $[T]$ .

Представим вектор-столбец  $[e]$  в виде:

$$[e] = \sum_{i=1}^N f_i(\xi) [\mathcal{E}]_i , \quad [\mathcal{E}]_i = \Phi_i [e]_i , \quad (17.66)$$

где  $[e]_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) — нормальные волны, определенные как полная система собственных векторов матрицы  $[T]$ :

$$[T] [e]_i = n_i [e]_i . \quad (17.67)$$

Подчеркнем, что поскольку матрица  $[T]$  зависит от  $\xi$  как от параметра, то такая же зависимость присуща величинам  $[e]_i$  и  $n_i$ . Собственные числа алгебраической проблемы (17.67) являются показателями преломления нормальных волн. Мы будем предполагать, что матрица  $[T]$  имеет полный набор собственных векторов  $[e]_i$ , которые нормированы условием  $[e^*]_i^T \cdot [e]_j = \delta_{ij}$ , где  $[e^*]_i$  — собственные векторы транспо-

нированной матрицы<sup>10</sup>, удовлетворяющие уравнению

$$[T]^T [e^*]_i = n_i [e^*]_i .$$

Подставляя разложение (17.66) в (17.65), приходим к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн:

$$\frac{df_i}{d\xi} + in_i(\xi) f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N a_{ij} f_j , \quad a_{ij} = - [\mathcal{E}]_i^T \cdot \frac{d [\mathcal{E}]_j}{d\xi} . \quad (17.68)$$

Уравнения (17.68) определяют линейную связь между волнами в неоднородной среде, поскольку  $a_{ij} \neq 0$ . Множители  $\Phi_i(\xi)$  находят из условия  $a_{ii} = 0$ , или, что тоже самое, из уравнения

$$\frac{1}{\Phi_i} \frac{d\Phi_i}{d\xi} + [\mathcal{E}]_i^T \cdot \frac{d [\mathcal{E}]_i}{d\xi} = 0 . \quad (17.69)$$

Условие  $a_{ii} = 0$  означает, что локальное значение показателя преломления не зависит от неоднородности среды.

Можно показать, что в приближении геометрической оптики, уравнения (17.65) имеют  $N$  решений вида  $\Phi_i e_i \exp[-i \int^\xi n_i(\xi') d\xi']$ , в которых множители  $\Phi_i(\xi)$  определяются из уравнения (17.69). Точно такое же решение получается из уравнений (17.68), если в них не учитывать взаимодействие волн  $f_i$ , положив все  $a_{ij} = 0$ . Следовательно, учет взаимодействия нормальных мод неоднородной среды является выходом за пределы геометрической оптики. В процессе взаимодействия различные компоненты поля меняются несогласованно, нарушая локальную структуру данной нормальной волны, что ведет к появлению других волн.

Наиболее часто в теории волн рассматривается взаимодействие между двумя волнами (попутными или встречными), которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\xi} + in_1 f_1 &= a_{12} f_2 , \\ \frac{df_2}{d\xi} + in_2 f_2 &= a_{21} f_1 . \end{aligned} \quad (17.70)$$

Двухволновое приближение справедливо в случаях, если:

---

<sup>10</sup>В математике векторы  $[e]_i$  называются *правыми*, а векторы  $[e^*]_i$  — *левыми* собственными векторами матрицы  $[T]$ .

- волны распространяются в одном направлении, и дисперсионные характеристики  $n_{1,2}(\xi)$  обеих волн сближаются настолько, что оказывается выполнимым условие  $|n_1 - n_2| \sim \sqrt{|a_{12}a_{21}^*|}$ ;
- волны являются встречными, и обе дисперсионные кривые подходят близко к нулю.

Количественный анализ линейного взаимодействия волн, описываемого уравнениями (17.70), проведен в [23], и его результаты позволяют установить критерии, в каком случае можно ожидать эффективного преобразования взаимодействующих волн.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на математической стороне вопроса, отсылая читателя к работе [23]. Отметим лишь, что взаимодействие может возникать не только за счет неоднородности среды, но и из-за нерегулярности ее границ. Такой эффект характерен, в частности, в неоднородных длинных линиях [26], плавно нерегулярных волноводах СВЧ диапазона [24], волоконных оптических световодах [15]. Уравнения, описывающие взаимодействие волн в таких системах, совпадают с уравнениями (17.68), однако в этом случае коэффициенты связи  $a_{ij}$  определяются локальными свойствами границ, а не неоднородностью среды. Эффект взаимодействия волн возникает из-за изменения коэффициентов связи вдоль волновода и его нельзя исключить простым переходом к новым собственным модам системы связанных волн, как это можно сделать для взаимодействующих волн с независимыми от координаты постоянными распространения и коэффициентами связи.

В качестве конкретного примера, рассмотрим взаимодействие мод в скрученном волоконном световоде. Благодаря совершенствованию технологии изготовления оптических волокон, стало возможным получение одномодовых световодов, сохраняющих поляризацию излучения на длинах в несколько сотен метров и более. В то же время, изучение эффектов сохранения, или, наоборот, необходимого преобразования поляризации, связано с перспективой применения таких волокон в системах оптической связи, гироскопах, оптических датчиках, сенсорах и т.д.

Регулярный двулучепреломляющий одномодовый световод аналогичен по своим свойствам анизотропной среде. В нем распространяются две практически линейно поляризованные собственные моды (называемые LP-модами), имеющие разные фазовые скорости. Направления поляризации мод перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости поперечного сечения волновода, они называются оптическими осями волокна. Систему координат в поперечном сечении удобно выбрать так, чтобы она совпадала с направлением оптических осей, соответственно амплитуды LP-мод

обозначают как  $E_x$  и  $E_y$ , считая, что ось  $z$  направлена вдоль оси световода.

В идеально круглом оптическом волокне  $LP$  - моды вырождены, т.е. имеют совпадающие фазовые скорости, однако в реальном световоде это вырождение снимается из-за отклонения формы поперечного сечения от круга, остаточной анизотропии материала световода, механических напряжений, а также из-за ряда других факторов. Уравнения взаимодействующих  $LP$ -мод в слабонаправляемом и слабоанизотропном волноводе имеют вид [15, 23]

$$\begin{aligned}\frac{dE_x}{d\xi} + in_x E_x &= \alpha E_y, \\ \frac{dE_y}{d\xi} + in_y E_y &= -\alpha E_x.\end{aligned}\tag{17.71}$$

Здесь  $\alpha$  — действительный коэффициент связи, который определяется деформацией формы световода, воздействием внешних полей, анизотропией материала, и, в скрученных волокнах, азимутальным вращением оптических осей. В последнем случае коэффициент связи приблизительно равен скорости вращения осей:  $\alpha \approx \psi'$ , где  $\psi$  — угол между выбранным фиксированным направлением в пространстве и локальным направлением одной из оптических осей, штрих означает производную по безразмерной продольной координате. Абсолютное значение скорости вращения может достигать по порядку величины  $|n_x - n_y|$ , что приводит к эффективной связи  $LP$ -мод. Свойства нормальных волн оптического волокна в таком случае кардинально меняются. Наиболее существенно то, что моды становятся эллиптически поляризованными, что следует из выражений для показателей преломления  $\tilde{n}_{1,2}$  и коэффициентов поляризации  $\tilde{K}_{1,2}$  ( $\tilde{K}_i = -iE_{i,y}/E_{i,x}$ ,  $i = 1, 2$ ) нормальных мод однородно скрученного световода. Если  $n_{x,y} = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , то из (17.71) легко получить:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{1,2} &= \frac{1}{2} (n_x + n_y) \pm \psi' \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \\ \tilde{K}_{1,2} &= \tilde{q} \mp \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = \frac{n_x - n_y}{2\psi'},.\end{aligned}\tag{17.72}$$

Такие моды называют *винтовыми*. Если волокно неоднородное, то  $n_{x,y}$  и  $\alpha$  не являются постоянными величинами, следовательно винтовые моды могут взаимодействовать, такое взаимодействие описывается уравнениями (17.70). Количественный анализ этой системы [23] приводит к выводу, что эффективное взаимодействие винтовых мод между собой возможно только в том случае, если существует участок волокна, на котором

оно переходит из состояния сильно скрученного, в состояние слабоскрученного, или наоборот<sup>11</sup>.

Во многих приложениях (в частности в системах оптической связи) такая трансформация является нежелательным эффектом, поэтому следует избегать появления подобных нерегулярных участков. В других случаях, например в целях измерения локальных оптических параметров волокна, такая трансформация мод является полезным эффектом. В этом случае необходим детальный анализ амплитудного и фазового эффектов преобразования мод, который можно осуществить, обращаясь к количественным результатам решения уравнений (17.70).

В заключение отметим, что теория взаимодействия волн в неоднородных средах в настоящее время продолжает интенсивно развиваться. Подробную библиографию, относящуюся к этой области теории волн можно найти в [23, 27].

---

<sup>11</sup>Интересно отметить, что в неоднородных жидких холестерических кристаллах эффективное взаимодействие винтовых волн происходит в областях, где спираль, описываемая в пространстве концом *директора*, переходит из сильно закрученной в слабозакрученную или наоборот [23]. Напомним, что директором в жидких кристаллах называется единичный вектор, показывающий преимущественное направление длинных осей молекул, составляющих кристалл.

## Литература

### Литература к главе 1

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
3. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
4. Сборник задач по общему курсу физики. Механика / Под. ред. И.А.Яковлева. 4-е изд. М.:Наука, 1977.
5. *Lotka A.J.* Elements of physical biology. — Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
6. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Что такое математическая биофизика: Кинетические модели в биофизике. — М.: Просвещение, 1971, гл. 1, § 1, гл. 4, §2.
7. *Белоусов В.П.* Колебательная реакция и ее механизмы. — Сб. рефератов по радиац. медицине за 1958 г. — М.: Медгиз, с. 145.  
См. также: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. научн. трудов. Горький: ИФП АН СССР, 1981, С.176-186.  
Изв. вузов. Нелинейная прикладная динамика. 1999, т. 7, № 4, С. 89-95
8. *Жаботинский А.М.* Концентрационные колебания. — М.: Наука, 1974.
9. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М. Наука, 1976.



10. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. — Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 1995. 129 с.
11. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
12. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 3-е изд. М.: Наука, 1974. § 112.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. ч. 1. — 3-е изд. М.: Наука, 1976. § 59.
15. *Клитцинг К. фон.* Квантовый эффект Холла: Нобелевская лекция 1985 г. // УФН, 1986. Т. 150, № 1. С. 107–126.
16. *Бормонтов Е.Н.* Квантовый эффект Холла // Соросовский образовательный журнал. 1999, № 9. С. 81–88.
17. *Петелин М.И., Юлпатов В.К.* Мазеры на циклотронном резонансе / Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Под. ред. В.Н.Шевчика. Кн. IV, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. лекция 1, § 4.
18. *Вайнштейн Л.А., Исаев В.А., Трубецков Д.И.* Электронный генератор с открытым резонатором (обзор теоретических и экспериментальных исследований) // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 7, С. 1233–1249.
19. *Фейнман Р., Лейтон, Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. вып. 8. Квантовая механика. М.: Мир, 1966. Гл. 1, § 4.
20. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. 4-е изд. — М.: Наука, 1988.

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1981.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1987.
3. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во Краснояр. унт-та, 1995.
4. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. Полное собрание трудов, т.4. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
5. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
6. *Афраймович В.С.* Краткий очерк качественной теории динамических систем / Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (6-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 2, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983, С. 75-89.
7. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141. С.343-374.
8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

#### Литература к главе 3

1. *Сивухин Д.В.* Курс общей физики. Механика. 2-е изд. М.: Наука, 1979.
2. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. т. 2, М.: Наука, 1974, § 155.
4. *Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
5. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
6. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.

7. *Елютин П.В., Кривченков В.Д.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1976, с. 54
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1981.

#### Литература к главе 4

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1981
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. гл. 14.
3. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. гл. 13.
4. Кайдановский Н.Л., Хайкин С.Э. Механические релаксационные колебания // ЖТФ, 1933, Т. 3, вып. 1, с.91-109.
5. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. Красноярск: Изд-во Краснояр. унт-та, 1995. Гл. 2.

#### Литература к главе 5

1. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
2. *Мандельштам Л.И.* Вступительная лекция к курсу физики в Одесском политехническом институте / Академик Л.И.Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. М.:Наука, 1979.
3. *Шевчик В.Н.* Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959, Гл. 5.
4. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. Гл. 2.
5. *Таунс Ч., Шавлов О.* Радиоспектроскопия. М.: ИЛ, 1959.
6. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. Пространство. Время. Движение. М.: Мир, 1965. С.135-136.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988.

## Литература к главе 6

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. т. 2, М.: Наука, 1974.
2. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Гостехиздат, 1950. § 24.

## Литература к главе 7

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
2. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
3. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
5. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
6. *Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А.* Параметрические генераторы и делители частоты. — М.: Сов. радио. 1966.
7. *Лопухин В.М., Магалинский В.Г., Мартынов В.П., Рошаль А.С.* Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. — М.: Наука. 1966.
8. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Советское радио, 1977.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука. 1982.
10. *Эрдейи А.* Асимптотические ряды. — М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1962.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.
12. *Фрёман Н., Фрёман П.У.* ВКБ - приближение. — М.: Мир, 1967.

13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988.
14. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
15. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. // ЖЭТФ, 1951, т.21, с.588-601.
16. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом. // УФН, 1951, т. 44, с.7-20.
17. *Миллер М.А.* Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях. // Изв. вузов. Радиофизика, 1959, т.1, с.110-123.
18. *Миллер М.А.* Об одном принципе генерации высокочастотных колебаний. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959, т.1, с.166-167.
19. Релятивистская высокочастотная электроника / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова. — Горький: изд-во ИПФ АН СССР, 1979.
20. *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках. // ЖЭТФ, 1979, т.76, с.930-943.
21. *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* Энергетические возможности релятивистского комптоновского лазера. // Письма в ЖЭТФ, 1978, т.28, с.207-211.

#### Литература к главе 8

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. Полное собрание трудов, т.4. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988.
3. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980.
4. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Гостехиздат, 1950.
5. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
6. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1982.

7. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. — М: Мир, 1986.
8. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1981
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966.
10. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М.: Мир, 1983.
11. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
12. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Советское радио, 1977.
13. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. — М.: Мир, 1986.
14. *Тараненко З.И., Трохименко Я.К.* Замедляющие системы. — Киев: Изд-во Техніка", 1965.
15. *Булгакова Л.В., Трубецков Д.И., Фишер В.Л., Шевчик В.Н.* Лекции по электронике СВЧ приборов типа О. —Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1974.
16. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. — М.: Мир, 1966.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. ч. 1 — М.: Наука, 1976.
18. *Вундерлих Б., Баур Г.* Теплоемкость линейных полимеров. — М.: Мир, 1972.

#### Литература к главе 9

1. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. — М.: Мир, 1966.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984, с.46 – 48
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1964, ч.1. § 65. *Лившиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика — М.: Наука, 1978, ч.2.

4. *Миллер М.А.* Волны, волны, волны ... Нижний Новгород, ИПФ РАН, препринт 332, 1993.
5. *Пирс Дж.* Почти все о волнах. — М.: Мир, 1976, с.176.
6. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б.* Физика; Учебник для 11 класса средней школы. — М.: Просвещение, 1991, с.66-67.
7. *Да Винчи Леонардо.* Избранные естественно — научные произведения. — М.: 1955, с.350.
8. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — М.: Гос.Издат. ф. — м. лит — ры, 1959, с. 144.
9. *Крауфорд Ф.* Волны. Берклевский курс физики. т.3. — М.: Наука, 1974, с.149.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977, с.8.
11. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, 1977, с.432.
12. *Кларк А.* Солнечный ветер. Библиотека современной фантастики. т.6. — М.: Мол. Гвардия, 1966.
13. *Резников А.Е., Шварцбург А.А.* Парусники эпохи гелиографических открытий. // Природа, 1991, 5, с.82 – 87.
14. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах — М.: Мир, 1983, с.136.
15. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975, гл.10.
16. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов. 2 изд. — М.: Наука, 1979.
17. Сборник задач по теории колебаний / Под редакцией Л.В. Постникова и В.И. Королева. — М.: Наука, 1978.
18. *Киттель Ч.* Квантовая теория твердых тел. — М.: Наука, 1967.
19. *Хэнли Э., Тирринг.* Элементарная квантовая теория поля. —М.: ИЛ., 1963.

20. *Каганов М.И.* Электроны, фононы, магноны. — М.: Наука, 1979.

#### Литература к главе 10

1. *Неймарк Ю.И.* Математические методы естествознания и техники. Выпуск 3. — Нижний Новгород: Издат. Нижегородского университета, 1997, гл. 8.
2. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: Гос. издат. физ. — мат. лит., 1959, с. 209.
3. Сборник задач по теории колебаний/ под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева — М.: Наука, 1978.
4. *Калинин В.И., Герштейн Г.М.* Введение в радиофизику. — М.: Гостехиздат, 1957, §9.1.
5. *Вундерлих Б., Баур Г.* Теплостойкость линейных полимеров. — М.: Мир, 1972.
6. *Kompfner R.* The invention of the travelling — wave tube. — San Francisco Press, 1964.
7. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. — М.: Сов. радио, 1970, гл. 1.
8. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов. радио, 1973, лекция 6.

#### Литература к главе 11

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
2. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982, часть вторая.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1975, §40.
4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970, т. 1, гл. 4, §1.
5. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.



6. *Филлипс О.* Динамика верхнего слоя океана. — М.: Мир, 1969.
7. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. — М.: Мир, 1981.
8. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Наугольных К.А. Рыбак С.А.* Волны в океане // Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т.19, с.842-852.
9. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
10. *Стаценко А.Л.* Волны на воде и “Заморские гости” Рериха // Квант, 1972, №9, с.10-15 (статья повторно напечатана в журнале “Квант”, 1990, №1, с. 24-29,62)
11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973.
12. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. — М.: Мир, 1974, т.1,2, с.292-300.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
14. *Митропольский З.С.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане, — Л.: Гидрометеиздат, 1981.
15. *Монин А.С., Кошляков М.Н.* Синоптические вихри или волны Россби в океане: Эксперимент и основы теории. — В кн.: Нелинейные волны /под ред. А.В. Гапонова. — М.: Наука, 1979, С. 281–287.

#### Литература к главе 12

1. *Арцимович Л.А.* Избранные труды: Атомная физика и физика плазмы. В кн.: Лекции по физике плазмы. — М. Наука, 1978, С. 164–245.
2. *Кролл Н., Трайвелпис С.* Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975, гл.4.
3. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979, §1.10
4. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963, гл. 2,3.
5. *Clemmow P.C., Dougherty J.P.* Electrodynamics of particles plasmas. — Addison — Wesly publishing Co., Inc., 1990.

6. *Lonngren K.E., Hsuan H.C.S., Landt D.L. et al.* — Propeties of plasma waves defined by dispersionrelation // IEEE Trans. Plasma/Sci., 1074, V. PS-2, p. 93–108.
7. *Стил М., Вюраль Б.* Взаимодействия волн в плазме твердого тела. — М., Атомиздат, 1973.
8. *Пожела Ю.К.* Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. — М. Наука. 1977.
9. *Владимиров В.В., Волков А.Ф., Мейлихов Е.З.* Плазма полупроводников. — М.: Атомиздат, 1979.

#### Литература к главе 13

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по некоторым вопросам теории колебаний. (1944 г.) // Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука, 1972 — с.410 — 437.
2. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. — М.: Сов.радио, 1957. — Гл.8 (первое издание), 1988 — Гл.8 (Издание второе, переработанное и дополненное).
3. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981. — с.293 — 319, 375 — 409.
4. *Островский Л.А. Рабинович М.И.* Нелинейные и нестационарные волны (4 - ая Всесоюзная школа — семинар по дифракции и распространению волн). — Рязань: Изд - во Рязанск. радиотехн. ин - та, 1975. — Лекция 1.
5. *Рабинович М.И. Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984, гл.8.
6. *Левин М.Л.* Как свет побеждает тьму: У.Р. Гамильтон и понятие групповой скорости. // УФН — 1978 — т.125. — с.565 — 567.
7. *Гамильтон У.Р.* Исследования о колебании, связанном с теорией света. В книге "Уильям Роуэн Гамильтон. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы". — М.: Наука, 1994, с.177 — 183. (Перевод Л.С. Полака статьи "Researches respecting vibration connected with the theory of light"(June 24, 1839) // roc. Roy. Irish. Acad. 1841, v.1, p.341 — 349 [H.2. p.578 — 582].)

8. *Левин М.Л.* Жизнь. Воспоминания. Творчество. — Нижний Новгород, 1995, (первое издание), 1998 (издание второе, дополненное).
9. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // УФН, 1976, т.118, вып.2, с.339 — 367.
10. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988. — Гл.2 §4.
11. *Лошаков Л.Н., Пчельников Ю.Н.* О соотношении фазовой и групповой скоростей в линиях передачи электромагнитной энергии // Радиотехника. — 1981. — т.36. — №6. — с.71 — 72.
12. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Волны в океане. // Изв. Вузов. Радиофизика. — 1976. — т.19. — с.843 — 852.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М. Мир, 1977.
14. *Полевой В.Г., Рытов С.М.* О четырехмерной групповой скорости. // УФН. — 1978. — т.125. — с.549 — 565.

#### Литература к главе 14

1. *Миллер М.А.* Раздумья про раздумья. Лекция 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994, Т. 2, № 5 С. 101–108.
2. Сборник задач по теории колебаний / Под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева. — М.: Наука, 1978.
3. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И.* Операционное исчисление. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1964. — Гл. 2.
4. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука. 1982, С. 107–108.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1952. §30.
6. *Стэррок П.А.* Кинематика нарастающих волн. В кн.: Колебания сверхвысоких частот в плазме / Под ред. Г.А.Бернашевского и З.С. Чернова. — М.: Изд-во иностранной литературы. 1961, С. 71.
7. *Рольфс К.* Лекции по теории волн плотности. — М.: Мир, 1980.

8. *Волькенштейн М.В.* Общая биофизика. — М.: Наука, 1978. — Гл. 8, §8.4.
9. *Жаботинский А.М.* Концентрационные колебания. — М.: Наука, 1974. С. 164–167.
10. *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980. — С. 342–358.
11. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
12. *Шевчик В.В., Шведов Г.В., Соболева А.В.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1962. — Гл. 1.
13. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, — М.: Сов. радио, 1970.
14. *Пирс Дж.Р.* Лампа с бегущей волной. — М.: Сов. радио, 1952.
15. *Пиддингтон Дж.* Растущие электромагнитные волны. Растущие электрические волны пространственного заряда и двухлучевая лампа // Вопросы радиолокационной техники. — М.: ИЛ, 1956. — № 6(36). — С. 53–66.
16. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика и Д.И. Трубецкова. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975.
17. *Алътшулер Ю.Г., Татаренко А.С.* Лампы малой мощности с обратной волной — М.: Сов. радио, 1963. Табл. 1.1. С. 35.
18. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
19. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — Гл. 5, §1.
20. *Лопухин В.М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. — М.: Гостехиздат, 1953. — Гл.8.
21. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — Т. 10. — Гл. 6.
22. *Briggs P.J.* Electron-stream interaction with plasmas. — Cambridge, Mass.: Mass. Techn. Int. Press, 1964.

23. *Бриггс П.* Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы. — М.: Мир, 1974. — С. 132–171.
24. *Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. — М.: Наука, 1981.
25. *Ахиезер А.И., Половин Р.В.* Критерии нарастания волн // УФН. — 1971. Т. 104. С. 185.
26. *Пожела Ю.К.* Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. — М.: Наука. 1977. — Гл. 3.
27. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика, — М.: Наука, 1967.
28. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // УФН. — 1976. — Т. 118. — С. 339–367.
29. *Pierce J.R.* An interesting wave amplifier // IRE Trans. — 1960. — V. ED-7 — P. 73–74.
30. *Kuhl R.L., Websfer H.R.* Breakup of hollow cylindrical electron beams // IRE Trans. — 1956. — V. ED-3 — P. 172–183.

#### Литература к главе 15

1. *Пирс Дж.* Почти все о волнах. — М.: Мир, 1976.
2. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977..
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны — М.: Мир, 1977 — Гл. 11.
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. — М.: Наука, 1980, §88.
5. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.Л.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. § 80.
7. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.: Наука, 1990. — Гл. 2.

8. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Энергоиздат, 1981. — Гл. 4.
9. Аскен Дж., Нильсен О. Электрические соотношения для волн в системах с временной и пространственной дисперсией // ТИИЭР.- 1968. — Т. 57 §8 — С. 83-84.
10. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969, С.177.
11. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.

#### Литература к главе 17

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд. — М.: Наука, 1982.
2. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Нелинейные волны в неравновесных средах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1976. — Т. 19. — С. 721–766.
3. Chu L.J. The kinetic power theorem // IRE Electron Devices Conference. — University of New Hampshire, June, 1951.
4. Sturrock P.A. In what sence do show waves carry negative energy // J. Appl. Phys. — 1960. — V. 31. — P. 2052–2056.
5. Пирс Дж. Почти все о волнах. — М.: Мир, 1976. — Гл. 10,11.
6. Незлин М.В. Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект Доплера // УФН. — 1976. -Т. 120. — С. 481–495.
7. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976. — С. 88–90.
8. Вильгельмсон Х., Вейландр Л. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Энергоиздат, 1981. — Гл. 8.
9. Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы. — М.: Мир, 1974. — С. 132–171.
10. Незлин М.В. Динамика пучков в плазме. — М.: Энергоиздат, 1982.
11. Шевчик В.Н. Основы электроники сверхвысоких частот. — М.: Сов. радио. — 1959. — С. 87–92.

12. *Louisell W.H., Pierce J.R.* Power flow in electron beam devices // *Proc.IRE.* —1955. V. 43. — P. 425–427.
13. *Островский Л.А., Степанянц Ю.А., Цимринг Л.Ш.* Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане // *Нелинейные волны. Самоорганизация.* — М.: Наука, 1983.
14. *Benjamin T.B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // *J. Fluid Mech.* — 1963. — Pt. 3. — V. 16. — P. 463–450.
15. *Birdsall Ch.K., Brever G.R., Haeff A.V.* The resistive wall amplifier // *Proc. IRE.* —1953. — V. 41. — P. 865–874.
16. *Цытович В.Н.* Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.
17. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.
18. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. — М.: Сов. радио, 1970.
19. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971.
20. *Cutler K.K.* Mechanical travelling-wave oscillator. — *Bell Lab. Record*, 1954, P. 134–138.
21. *Гинзбург В.Л.* Об излучении электрона, движущегося вблизи диэлектрика // *ДАН СССР.* — 1947. — Т.6. — С. 145.
22. *Гинзбург В.Л.* Об излучении микроволн и их поглощении в воздухе // *Изв. АН СССР. Физ.* — 1947. — Т. 11. — С. 165.
23. *Гинзбург В.Л.* Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде // *УФН.* — 1959. — Т. 69/ — С. 537.
24. *Франк И.М.* Эйнштейн и оптика // *УФН.* — 1979. — Т. 129. — С. 694–703.

#### Литература к главе 17

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Наука, 1989.
3. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Buneman O., Levy R.H., Linson L.M.* Stability of crossed-field electron beams // J.Appl.Phys. 1966, V.37, p.3203.
5. *Гаврилов М.В., Трубецков Д.И.* Волновые явления в электронном потоке малой плотности в скрещенных полях при распаде однопоточного состояния // Вопросы электроники СВЧ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. № 10. С.156-181.
6. *Лопухин В.М., Магалинский В.Г., Мартынов В.П., Рошаль А.С.* Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. — М.: Наука. 1966.
7. *Haddad G.I., Bevensee R.M.* Start-oscillations of tapered backward-wave oscillator // IRE Trans. 1963. V.ED10, № 6, p.389-393.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988.
9. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
10. *Боровиков В.А., Кинбер В.Е.* Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978.
11. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. — М. Наука, 1981.
12. *Виноградова М.Б., Семенов А.А.* Основы теории распространения ультракоротких радиоволн в тропосфере. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
13. *Брезовских Л.М.* Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
14. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир. 1984.
15. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь. 1987.
16. *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: Ин. лит-ра, 1957.
17. *Мигдал А.Б.* Качественные методы в квантовой теории. — М.: Наука, 1975.



18. *Фок В.А.* Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. — М. Сов. радио. 1970.
19. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
20. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука. 1967.
21. *Budden K.G.* Radio Waves in the Ionosphere. — Cambridge: Univ. Press, 1961.
22. *Железняков В.В.* Радиоизлучение Солнца и планет. — М.: Наука. 1964.
23. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах // УФН, 1983, Т. 141, вып. 2. С.257-310.
24. *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — М.: Изд-во АН СССР. 1961.
25. *Шевченко В.В.* Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука. 1969.
26. *Литвиненко О.Н., Сошников В.И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М.: Сов. радио. 1964.
27. *Заславский Г.М., Мейтлис В.П., Филоненко Н.Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. — Новосибирск: Наука. 1982.