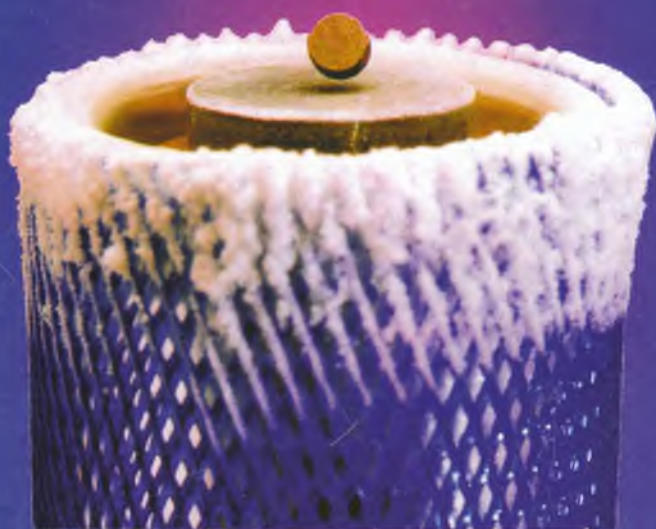


Ю.М. Ципенюк



ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Ю. М. ЦИПЕНЮК

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Учебное пособие по курсу общей физики МФТИ



МОСКВА
Издательство МФТИ
1996

ББК 22.36
Ц 67
УДК 338.945

ЦИПЕНЮК Ю. М. Физические основы сверхпроводимости. Учеб. пособие: Для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 1996. — 96 с. ISBN 5-89155-008-3

Книга является первым в отечественной литературе учебным пособием по новому направлению науки и техники. Проводится изложение теоретических основ, экспериментального материала и практических применений сверхпроводимости. Может использоваться как в курсе общей физики, так и для преподавания специальных дисциплин.

Ил. 49. Табл. 4. Библиогр. 8 назв.

Учебное издание

ЦИПЕНЮК Юрий Михайлович

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Набор и верстка выполнены в Издательстве МФТИ
Оператор DTPS А. В. Чудинов
Редактор Т. Ф. Сударкина
Корректор С. А. Холодкевич
Художник М. В. Ивановский

ИБ № 11

ЛР № 064290 от 14.11.95. Подписано в печать 26.04.96.
Формат 60×88/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 6. Тираж 1500 экз. Заказ № 4269. С-006.

Издательство Московского физико-технического института
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., д. 9

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6

Ц 1604090000-006
96 Без объявл.

ISBN 5-89155-008-3

© Ю. М. Ципенюк, 1996
© Издательство МФТИ, 1996

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Московском физико-техническом институте курс общей физики читается три первых года обучения студентов. Программа построена так, что лекции на III курсе посвящены целиком квантовой физике — физике атома, ядра и элементарных частиц в V семестре, в VI семестре системам многих частиц — излучению и твердому телу.

К изучению квантовой физики студенты III курса приступают практически впервые в своей жизни, что вызывает естественные трудности из-за появления большого числа новых понятий, необходимости отказа от привычных классических представлений. Начав изучение физики с явлений в макроскопических системах, студенты приобрели ряд «классических предрассудков», им очень хочется сохранить для микромира понятие размера, траектории, цвета, иметь дело с вращающимися шариками и т. п. Наши наглядные представления являются отражением того, с чем мы сталкиваемся в обыденной жизни, между тем как квантовые явления проявляются обычно в недоступном непосредственному восприятию микромире. «Классические предрассудки» заставляют нас ставить вопросы, на которые нельзя ожидать разумных ответов. Человеческое воображение зачастую отказывается служить в этом странном мире квантовых явлений. Но, как сказал Л. Д. Ландау, «величайшим триумфом человеческого гения является то, что человек способен понять вещи, которые он уже не в силах вообразить».

Молодому поколению пройти этот неизбежный путь отказа от классических представлений намного легче, ибо можно воспользоваться опытом предшественников. Как ни парадоксально звучат иногда утверждения квантовой механики, они неизбежны. К ним приводит неодолимая логика экспериментальных фактов. Квантовая механика возникла на базе целой цепи экспериментальных открытий, сопровождавшихся пересмотром старых представлений.

Во главу обучения общей физики на III курсе ставится качественное понимание изучаемых явлений, создание адекватных моделей. Кажущаяся нестрогость такого подхода является еще одной трудностью для студентов, привыкших к получению «точных ответов» при изучении как механики, электричества, термодинамики, оптики, так и математики. Модельность изучаемых физических явлений зачастую рассматривается ими как неполноценный и далекий от реальности подход к описанию физических процессов. Умение правильно качественно объяснять наблюдаемое явление приходит не сразу, оно приобретает лишь путем постоянной работы ума. Замечательный советский физик-теоретик Я. И. Френкель любил говорить: «Физическая модель — это карикатура. И чем талантливей ее создатель, тем больше, как это ни парадоксально, она похожа на реальность». Именно по умению студентом правильно построить

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ В ИССЛЕДОВАНИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

модель явления, что является основой научной работы, по пониманию физики процесса оцениваются знания студентов на Госэкзамене по физике. Задачи письменной контрольной работы также составляются, исходя из этих требований.

Последним пунктом программы курса общей физики является сверхпроводимость, которая сейчас представляет активное поле деятельности как с точки зрения фундаментальной науки, так и с точки зрения приложений. Конечно, на включение этого раздела в институтский цикл в значительной степени повлияло открытие высокотемпературной сверхпроводимости. Однако следует заметить, что и раньше, хотя и в меньшей степени, рассматривались вопросы сверхтекучести и сверхпроводимости. Имеется много специальной литературы по сверхпроводимости, но разобраться в ней студентам, начинающим изучение этого явления, достаточно трудно, а адекватного одного учебника нет. Это побудило автора написать данное пособие.

Круг рассматриваемых в книге вопросов шире, чем этого требует программа, что обусловлено несколькими причинами. Во-первых, любознательные (и имеющие время) студенты смогут глубже ознакомиться с этим удивительным физическим явлением. Во-вторых, они смогут использовать пособие при подготовке реферата к Госэкзамену, и, наконец, материал этой книги служит пособием для более глубокого понимания имеющихся и будущих лабораторных работ по сверхпроводимости, и рассмотрение эффекта Джозефсона служит, в частности, этой цели. В учебник включено много задач с подробными решениями, разбор которых должен способствовать усвоению материала.

Надеюсь, что эта книга будет интересна не только студентам, но и преподавателям. Включенный в нее материал даст возможность шире рассмотреть на семинарах различные аспекты явления сверхпроводимости.

Автор глубоко признателен С. П. Капице и И. А. Фомину, которые очень внимательно прочитали рукопись и сделали много полезных замечаний.

В 1911 году голландский ученый Гейке Камерлинг-Оннес, измеряя сопротивление ртути при низких температурах, обнаружил резкое его падение до нуля при абсолютной температуре 4,2 К (рис. 1.1). Последующие более аккуратные измерения показали, что температура перехода равна 4,15 К. Открытое явление Камерлинг-Оннес назвал *сверхпроводимостью*. Температуру T_c , ниже которой наблюдается переход вещества в сверхпроводящее состояние, принято называть *критической температурой*. Существенно, что сопротивление с уменьшением температуры исчезало не постепенно, а скачком. Это означало, что образец перешел в какое-то новое, до тех пор неизвестное состояние.

Открытие сверхпроводимости оказалось возможным лишь благодаря выдающемуся техническому достижению — ожижению гелия. При атмосферном давлении гелий кипит при температуре всего на 4,2 К выше абсолютного нуля. Не случайно, что именно Камерлинг-Оннес, впервые в 1908 г. получивший жидкий гелий, открыл сверхпроводимость — для этого были необходимы исключительно низкие температуры.

Камерлинг-Оннес в апреле—июне 1914 г. установил, что ток, возбужденный однажды в замкнутом сверхпроводящем контуре, практически не ослабевает со временем. Несколько позже он наглядно это продемонстрировал, перевезя сверхпроводящее кольцо с текущим по нему током из голландского города Лейдена в английский Кембридж. В настоящее время по измерению наведенного тока в колечке из сверхпроводника установлено, что в сверхпроводящем состоянии удельное сопротивление по крайней мере меньше 10^{-23} Ом·см, то есть в 10^{17} раз меньше сопротивления меди при комнатной температуре. Время, требуемое для затухания тока, наведенного в таком сверхпроводящем колечке, составляет не менее 100 000 лет. Таким образом, в случае сверхпроводящего тока мы

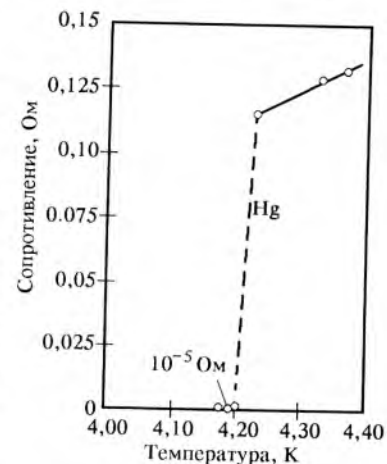


Рис. 1.1. Зависимость сопротивления ртути от температуры, полученная Камерлинг-Оннесом в 1911 г.

фактически сталкиваемся с движением без сопротивления — с бесконечной проводимостью, что и оправдывает название явления.

Очень скоро после открытия сверхпроводимости было обнаружено, что ее можно разрушить не только нагреванием образца, но и помещением его в магнитное поле с напряженностью $H > H_c$. Поле H_c называется *критическим*. Зависимость критического поля от температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_c(T) = H_c(0)[1 - (T/T_c)^2]. \quad (1.1)$$

(1.1)

На рис. 1.2 показана зависимость критического магнитного поля от температуры для некоторых сверхпроводящих металлов.

Существенным этапом в исследовании сверхпроводимости явился 1933 г., когда В. Мейсснер и Р. Оксенфельдом было впервые установлено, что при температуре

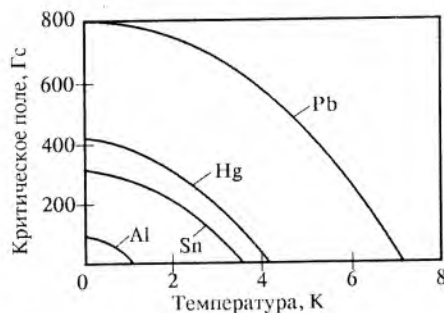


Рис. 1.2. Температурная зависимость критического магнитного поля для некоторых сверхпроводящих металлов

ниже критической магнитное поле полностью выталкивается из сверхпроводника. Это явление назвали *эффектом Мейсснера*. Выталкивание магнитного потока из сверхпроводника означает, что в нем магнитная индукция B равна нулю. Более того, это свидетельствует о том, что в сверхпроводнике равно нулю усредненное по физически достаточно малым объемам поле, т.е. индукция. Так как по определению

$$B = 4\pi M + H, \quad (1.2)$$

где M — магнитный момент единицы объема, то магнитная восприимчивость $\chi = M/H$ отрицательна и равна $\chi = -1/4\pi$. Тем самым сверхпроводник является не только идеальным проводником, но и идеальным диамагнетиком. Это явилось чрезвычайно важным открытием. Ведь если $B = 0$ независимо от предыстории, то это равенство может служить характеристикой сверхпроводящего состояния, которое возникает при $H < H_c$. Тогда переход в сверхпроводящее состояние можно рассматривать как фазовый переход в новое фазовое состояние и использовать для исследования сверхпроводимости всю мощь термодинамического подхода.

Физически эффект Мейсснера означает, что у сверхпроводника, помещенного в не очень сильное магнитное поле (критерий малости магнитного поля будет рассмотрен ниже), в поверхностном слое наводятся незатухающие круговые токи, которые в точности компенсируют внешнее приложенное поле. Может показаться, что это эк-

вивалентно привычным токам Фуко, возникающим в металле (в данном случае с идеальной проводимостью) при переменном внешнем поле. Иначе говоря, сверхпроводник — это просто металл с нулевым удельным сопротивлением. Однако Мейсснер и Оксенфельд обнаружили не только отсутствие проникновения магнитного поля в сверхпроводник, но и «выталкивание» поля из первоначально нормального образца, когда он охлаждается ниже температуры T_c .

Рассмотрим подробнее различия в поведении идеального проводника и сверхпроводника в магнитном поле (см. рис. 1.3). Предположим, что идеальный проводник охлажден до температуры ниже

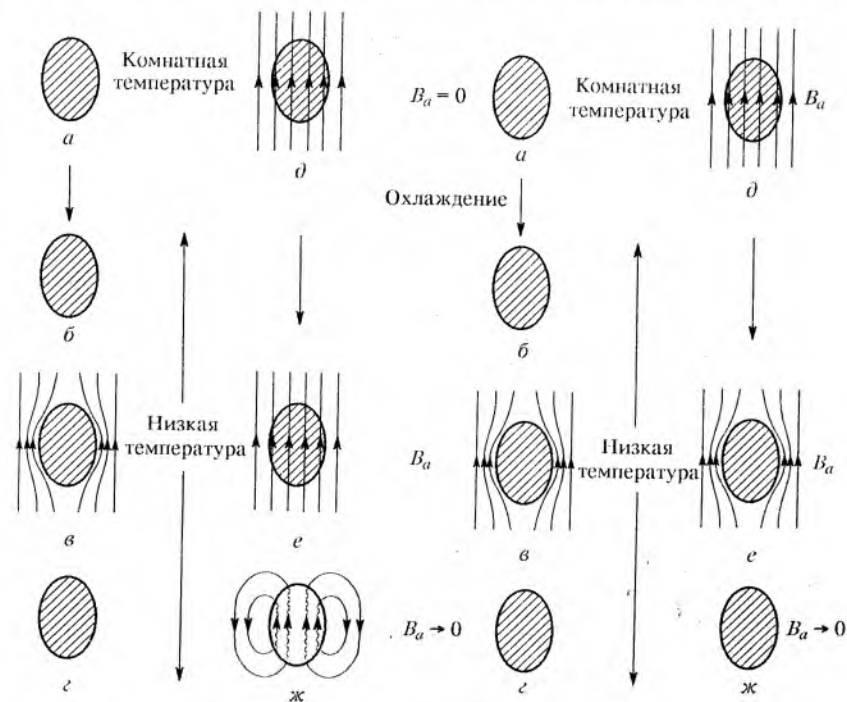


Рис. 1.3. Магнитные свойства идеального проводника (слева) и сверхпроводника (справа): а, б — сопротивление образца обращается в нуль в отсутствие магнитного поля; в — приложено магнитное поле; г — поле выключено; д, е — сопротивление образца обращается в нуль в магнитном поле; ж — поле выключено

критической, а затем включено магнитное поле. Так как при этом изменился магнитный поток Φ через образец, то по закону Фарадея в нем возникнет ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.3)$$

В идеальном проводнике электрическое поле всюду равно нулю, т. е.

$$d\Phi/dt = 0 \text{ и } \Phi = \text{const.} \quad (1.4)$$

Так как до включения магнитного поля поток был равен нулю, то и после его включения он остается равным нулю, а значит, магнитное поле отсутствует в любой точке образца. Магнитное поле «выталкивается» из идеального проводника, как это показано на рис. 1.3.

Если же магнитное поле включить при температуре $T > T_c$, а затем охладить образец, то в этом случае оно останется в образце. Таким образом, намагниченность идеального проводника не определяется однозначно внешними условиями, а зависит от последовательности появления этих условий. Как обнаружили Мейсснер и Оксенфельд, в сверхпроводнике в отличие от идеального проводника всегда $\mathbf{B} = 0$ во внешнем поле, независимо от пути прихода в сверхпроводящее состояние (см. рис. 1.3).

Таким образом, если охладить кольцо до температуры $T < T_c$ и затем поместить его во внешнее магнитное поле, то магнитная индукция будет отсутствовать как в толще кольца (эффект Мейсснера), так и внутри него, а по наружной поверхности кольца будут течь токи (рис. 1.4а).

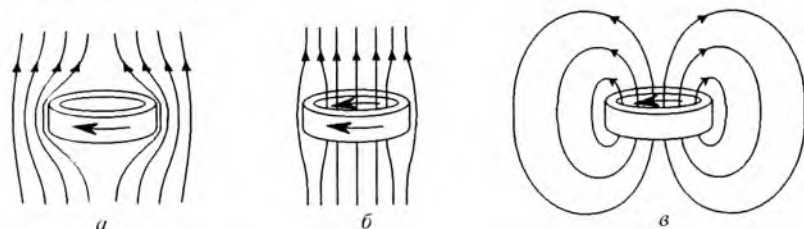


Рис. 1.4. Эффект Мейсснера в сверхпроводящем кольце: а — магнитное поле включено после охлаждения кольца в нулевом поле до $T < T_c$; б — кольцо охлаждено в магнитном поле; в — поле выключено, магнитный поток оказался «замороженным» в кольце

Иначе будет обстоять дело, если вначале включить поле, а затем понизить температуру. Магнитный поток Φ через отверстие в кольце будет сохраняться, но внутри кольца $\mathbf{B} = 0$. Поэтому возникают токи, текущие в противоположных направлениях на внешней и на внутренней поверхностях кольца, как это показано стрелками на рис. 1.4б. Такое распределение токов действительно экранирует внутренность вещества кольца от магнитного поля, но оставляет поле в полости кольца неизменным и равным приложенному полю, как это легко показать, пользуясь теоремой о циркуляции магнитного поля. Если выключить внешнее поле, то ток на внешней поверхности почти полностью исчезнет (ток будет равен нулю только

для бесконечно высокого кольца, как это имеет место в длинном соленоиде), и останется только ток, текущий по внутренней поверхности. Это означает, что останется и «замороженный», или «захваченный» магнитный поток (рис. 1.4в).

Итак, сверхпроводящее тело обладает свойствами, как бы обратными ферромагнитному: железный магнит концентрирует силовые линии магнитного поля, а сверхпроводник выталкивает их.

В 1935 г. братья Г. Лондон и Ф. Лондон теоретически установили связь плотности тока с магнитным полем в сверхпроводнике, что стало основой для дальнейшего развития электродинамики сверхпроводников. Это была феноменологическая теория, из которой следовали основные свойства сверхпроводников: абсолютный диамагнетизм и отсутствие сопротивления постоянному току. Но вопрос о микроскопическом механизме сверхпроводимости оставался открытым. Физик-теоретик Фриц Лондон первый указал, что для объяснения эффекта Мейсснера и существования постоянных сохраняющихся токов в сверхпроводящих кольцах необходимо предположить, что между электронами в сверхпроводнике имеется какая-то дальнodelствующая связь и их движение оказывается коррелированным.

Существенный шаг в понимании природы сверхпроводимости сделал А. Пиппард, который в 1950 г. ввел понятие длины когерентности — характерного расстояния, на котором могут происходить значительные изменения в степени упорядочения сверхпроводящего состояния.

Следующий большой вклад в теорию сверхпроводимости внесли в 1950 г. В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау. Это был феноменологический подход, построенный на теории фазовых переходов II рода, но учитывающий квантовость явления. В 1957 г. А. А. Абрикосов на основе теории Гинзбурга—Ландау построил теорию так называемых сверхпроводников II рода. Тем самым было объяснено обнаруженное в сверхпроводящих сплавах еще в 1937 г. Л. Б. Шубниковым явление частичного проникновения магнитного потока в образец, сопротивление которого при этом остается равным нулю (это состояние называется смешанным, или фазой Шубникова).

Механизм явления сверхпроводимости стал понятен лишь в 1957 г. после теоретических работ американских ученых Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера (теория БКШ), а также советского ученого Н. Н. Боголюбова. Теория БКШ содержит новое принципиальное утверждение: электроны в сверхпроводнике образуют за счет обмена фононами связанные пары — происходит так называемое куперовское спаривание. С этого времени начинается новый этап в изучении сверхпроводимости. Развитие теории дало возможность не только описать основные экспериментальные данные в физике сверхпроводников, но и предсказать много новых эффектов.

В 1961 г. произошло еще одно существенное событие в мире сверхпроводимости — было обнаружено новое принципиально важное явление *квантования магнитного потока* в сверхпроводящих цилиндрах. Следует отметить, что квантование магнитного потока в многосвязных сверхпроводниках (в простейшем случае это сверхпроводник с отверстием) было предсказано Ф. Лондоном в 1950 г. в шутку к одной из страниц его книги.

В 1962 г. Б. Джозефсон теоретически предсказал ряд необычных эффектов при прохождении куперовских пар через туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, что открыло новую главу в изучении сверхпроводимости — главу «слабой сверхпроводимости». Через год после этого был экспериментально открыт первый, а затем в 1965 г. и второй из предсказанных им эффектов.

Наряду с мощным прорывом в области теории к середине 60-х было создано много новых сверхпроводящих материалов, важных с практической точки зрения. Использование этих материалов позволило, в частности, получить как сверхсильные магнитные поля (к настоящему времени сверхпроводящие магниты создают поле до 20 Тл), так и разработать высокочувствительные квантовые интерферометры, способные регистрировать фантастически слабые магнитные поля (до 10^{-14} Э), возникающие, например, при работе человеческого мозга.

К 1986 г., т. е. за 75 лет, минувших после открытия сверхпроводимости, было сделано очень много. Было известно около 40 металлов, способных находиться в сверхпроводящем состоянии. Критические температуры этих металлов лежат в пределах от 0,012 К у вольфрама до 11,3 К у технеция. Помимо чистых металлов, насчитывалось несколько сотен сверхпроводящих соединений и сплавов. Часто ни одна из компонент этих соединений не является сверхпроводящей, например, CoSi_2 , CuS . Среди соединений находятся и вещества с наивысшей (до 1986 г.) критической температурой. Это Nb_3Ge , Nb_3Sn , V_3Si , которые переходят в сверхпроводящее состояние соответственно при 23,2, 18 и 17 К (у Nb_3Ge указанная температура перехода получена в пленке; в массивном образце критическая температура составляет около 15 К). Сверхпроводящие характеристики некоторых элементов и соединений приведены в табл. 1.1 и 1.2.

Таблица 1.1. Критическая температура и верхнее критическое магнитное поле наиболее распространенных технических материалов

Вещество	T_c , К	H_{c2} , кЭ при $T = 4,2$ К
Nb_3Sn	18	220
NbZr	10	88
NbTi	10	120
Nb_3Ge	15	220

Таблица 1.2. Критическая температура, температура Дебая и критическое магнитное поле некоторых элементов при нулевой температуре

Элемент	T_c , К	Θ_D , К	H_c , Э	Элемент	T_c , К	Θ_D , К	H_c , Э
Al	1,19	420	105	Pb	7,2	96	803
Be	0,026	1160		Sn	3,72	195	308
Gd	0,55	300	29,6	Ta	4,46	260	831
Ga	1,09	317	58,9	Ti	0,42	426	56
Hg	4,15	90	390	Tl	2,39	88	179
In	3,4	109	289	V	5,46	340	1167
La	4,88	140	808	W	0,015	390	1,07
Mo	0,92	460	98	Zn	0,85	310	52,5
Nb	9,3	240	1980	Zr	0,55	290	47,7

Если проанализировать развитие исследований сверхпроводимости, то отчетливо видна следующая тенденция: вначале изучалась сверхпроводимость простых металлов (Hg , Pb , Nb), затем двойных (Nb_3Sn , Nb_3Ge) и тройных ($\text{Nb}_3(\text{Al}, \text{Ge})$) интерметаллидов. В рамках такого подхода выбираемые композиции были в какой-то мере логическим продолжением исследований простых металлов. У рекордсмена (соединения Nb_3Ge) величина T_c составляла 23,2 К. Температурный интервал существования сверхпроводимости лишь приблизился к температурам кипения жидких водорода и неона, и фактически для перевода материалов в сверхпроводящее состояние использовался дорогостоящий и технически трудный в эксплуатации хладагент — жидкий гелий. Заветным пределом по T_c всегда являлась температура кипения жидкого азота (77 К) — дешевого и доступного хладагента, производимого промышленностью в больших количествах.

График на рис. 1.5 иллюстрирует временной ход максимально достигнутой температуры сверхпроводящего перехода. Как видно из рисунка, средняя скорость увеличения T_c (пунктирная прямая) составляла примерно 0,3 К/г., т. е. от 23 К до азотного барьера такими темпами пришлось бы двигаться еще примерно 150 лет. Однако такой прогноз предполагает равномерный эволюционный ход и не учитывает возможности бурного развития, что и произошло в 1986—87 гг., когда были открыты высокотемпературные сверхпроводники. В апреле 1986 г. в редакцию журнала «Zeitschrift für Physik» поступила статья И. Г. Беднорца и К. А. Мюллера — ученых, работающих в Цюрихе в исследовательской лаборатории фирмы IBM. Статья называлась весьма осторожно «Возможность высокотемпературной сверхпроводимости в системе Ba-La-Cu-O ». В ней сообщалось об обнаружении резкого падения сопротивления керамики указанного типа при температурах 30—35 К. Эта работа явилась началом «сверхпроводящего бума». Справедливости ради следует отметить, что еще за 10 лет до публикации Беднорца и Мюллера, в 1975 г., было синтезировано соединение $\text{Ba}(\text{Pb}, \text{Bi})\text{O}_3$ с относительно-

но невысокой критической температурой ≈ 13 К. Это соединение по своим характеристикам существенно отличалось от большинства известных ранее сверхпроводников, но лишь по прошествии времени стало ясно, что оно не только открывало новый класс оксидных сверхпроводников, но и являлось прототипом высокотемпературных соединений.

В исследование металлооксидных сверхпроводников и поиск новых сверхпроводящих материалов этого типа включилась вся мировая научная общественность. В 1987 г. на керамике $Y-Ba-Cu-O$

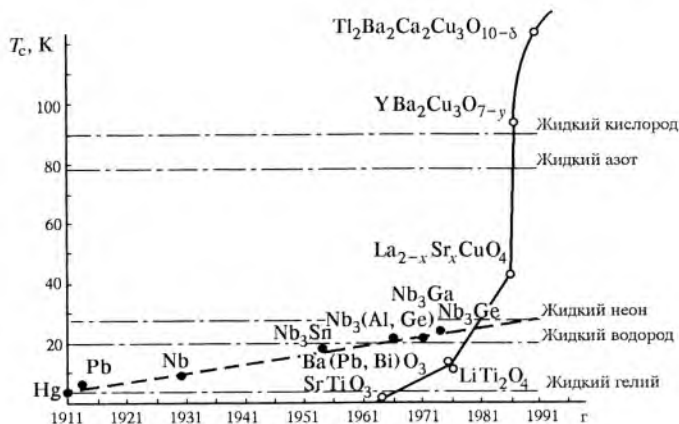


Рис. 1.5. График, иллюстрирующий временной ход критической температуры сверхпроводящего перехода в металлических, интерметаллических (пунктир) и в металлооксидных сверхпроводниках (сплошная линия). Штрих-пунктирные линии соответствуют температурам кипения жидких гелия, водорода, неона, азота и кислорода при атмосферном давлении

была достигнута температура сверхпроводящего перехода 92 К, и, тем самым, был преодолен азотный барьер, что еще сильнее подхлестнуло массовый интерес исследователей к новым высокотемпературным сверхпроводникам. Затем температура сверхпроводящего перехода была поднята до 125 К в соединениях таллия. Регулярно стали появляться сенсационные заявления о сверхпроводимости при комнатных температурах, но они быстро «закрывались». Увы, после экспоненциального роста значение T_c фактически вышло на плато в начале 90-х годов. К настоящему времени рекорд критической температуры принадлежит ртутным соединениям с $T_c \sim 140$ К. Наступил этап кропотливой, методичной работы по выяснению природы высокотемпературной сверхпроводимости и тщательному изучению ее свойств.

Задача 1.1. Из сверхпроводящей проволоки радиусом $r = 1$ мм было свернуто кольцо диаметром $D = 5$ см, а концы проволоки соединены с помощью точечной сварки. Измерения показали, что контакт оказался не очень хорошим, ибо за один час ток в кольце уменьшался на 1%. Каково сопротивление кольца?

Решение. Учитывая, что $r \ll D$, индуктивность проволочного кольца можно считать равной индуктивности прямого провода длиной πD . Для одиночного провода длиной l индуктивность единицы длины легко оценить: поле от тока I по теореме о циркуляции на расстоянии R равно $H = 2I/cR$, а поток через площадку единичной длины и ширины l (считаем, что поле спадает на расстоянии порядка l) равен $\Phi = (2I/c) \ln(l/R) = (1/c)LI$. Таким образом, $L \approx 2 \ln(l/R)$, а для большого кольца

$$L = 2\pi D \ln(\pi D/r).$$

Изменение запасенной магнитной энергии равно омическим потерям

$$-\frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2c^2} = RI^2 \quad \text{или} \quad -\frac{dI}{dt} = \frac{Rc^2}{L} I.$$

Откуда

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{Rc^2}{L} t\right) \quad \text{и} \quad R = \frac{\ln 0,99 \cdot 1,3 \cdot 10^{-7}}{3,6 \cdot 10^3} \approx 3,6 \cdot 10^{-13} \text{ Ом}.$$

МАГНИТНЫЕ И ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

§ 2.1. Идеальный диамагнетизм

Все сверхпроводники разделяются на два класса — I или II рода в зависимости от того, положительная или отрицательная у них поверхностная энергия, связанная с наличием границ раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами (см. § 4.2). Рассмотрим вначале сверхпроводники первого рода, к которым относятся все чистые металлы, за исключением ниобия, ванадия и технеция. Отличительной чертой сверхпроводников I рода является то, что полное экранирование их внутреннего объема от внешнего магнитного поля (эффект Мейсснера) происходит во всей области существования сверхпроводимости.

Рассмотрим поведение сверхпроводника I рода в магнитном поле. Пусть образец представляет собой длинный цилиндр, помещенный в продольное внешнее магнитное поле H_0 . С увеличением поля H_0 индукция B внутри сверхпроводника не будет изменяться и останется нулевой. Поэтому кривая намагничивания $B = B(H_0)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.1. Когда внешнее поле H_0 станет равным

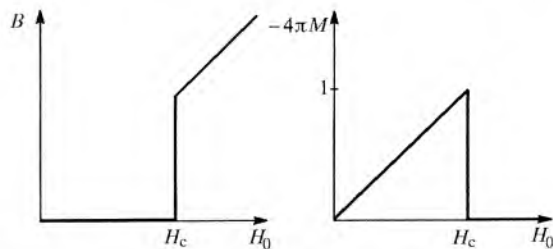


Рис. 2.1. Индукция B и магнитный момент сверхпроводника I рода в зависимости от приложенного поля

критическому H_c , сверхпроводимость разрушится, поле проникнет в сверхпроводник, и B станет равным H_c . Магнитная индукция B и напряженность поля H_0 связаны известным соотношением

$$B = H_0 + 4\pi M, \quad (2.1)$$

где M — магнитный момент единицы объема образца. Часто кривую намагничивания строят в виде зависимости $-4\pi M$ от H_0 , как это сделано на рис. 2.1.

Перечислим основные магнитные свойства сверхпроводников первого рода.

1) Магнитные силовые линии вне поверхности сверхпроводника всегда касательны к его поверхности. Действительно, из электродинамики известно, что магнитные силовые линии, т.е. линии вектора индукции B , непрерывны и замкнуты. Это соответствует уравнению

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что нормальные составляющие вектора B к поверхности любого материала внутри и снаружи должны быть равны. Но внутри сверхпроводника $B^{(i)} = 0$, а значит, и нормальная компонента $B_n^{(i)} = 0$. Следовательно, нормальная компонента $B_n^{(i)}$ вне сверхпроводника на его поверхности тоже равна нулю. Но равенство $B_n^{(i)} = 0$ как раз и означает, что магнитные силовые линии касательны к поверхности сверхпроводника.

2) Следствием предыдущего свойства является то, что по поверхности сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле, всегда течет электрический ток. Из уравнения Максвелла непосредственно следует связь между поверхностным током и магнитным полем на границе

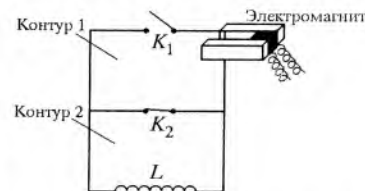
$$j_{\text{пов}} = \frac{c}{4\pi} [n, H_0], \quad (2.3)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к поверхности сверхпроводника.

Итак, поверхностный ток полностью задан магнитным полем на границе сверхпроводника. Иными словами, он автоматически становится таким, чтобы его собственное магнитное поле внутри сверхпроводника полностью компенсировало внешнее поле, что обеспечивает отсутствие результирующего поля внутри сверхпроводника.

3) Еще одним достаточно очевидным свойством обладают односвязные сверхпроводники (под односвязным понимают такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом нигде границ тела): токи по его поверхности текут лишь в том случае, когда он находится во внешнем магнитном поле. Действительно, если поверхностные токи сохраняются и после отключения внешнего поля, то они создают свое поле в сверхпроводнике, что невозможно.

Задача 2.1. На рисунке изображена схема магнитного насоса для «накачки» потока в соленоид. Насос представляет собой два сверхпроводящих контура с ключами K_1 и K_2 . Контур 2 включает в себя соленоид с большой самоиндукцией L , в то время как контур 1 обладает малой самоиндукцией $l \ll L$.



Работа насоса заключается в том, что при закрытом ключе K_2 и открытом ключе K_1 в контуре 1 с помощью электромагнита создается магнитное поле. Ключ K_1 замыкается, магнит удаляется и после этого размыкается ключ K_2 . Эта операция повторяется много раз. Какого увеличения потока можно достичь в такой системе?

Решение. В контуре 1 выполняется закон сохранения потока, и поэтому при удалении магнита в контуре возникает такой ток, что $\Phi = li/c$. При размыкании ключа K_2 ток перераспределяется по двум контурам, и опять же в силу сохранения потока ток I в контуре 2 определяется из условия

$$I_1(L + l) = li.$$

При замыкании ключа K_2 магнитный поток $\Phi_1 = I_1 L/c$ замораживается в контуре 2. При открытом ключе K_1 можно снова в контуре 1 создать магнитный поток, а затем при замыкании ключа заморозить его. Тогда при размыкании ключа K_2 получаем

$$I_2(L + l) = li + LI_1.$$

Отсюда ясно, что после n повторений такой процедуры ток I будет определяться уравнением

$$I_n(L + l) = li + LI_{n-1}.$$

Максимально возможное увеличение потока, таким образом, равно

$$\left(\frac{\Phi_n}{\Phi_1} \right)_{n \rightarrow \infty} = \frac{L}{l}.$$

§ 2.2. Уравнение Лондонов

Как уже упоминалось в первой главе, в 1935 г. братья Лондоны рассмотрели электродинамические свойства сверхпроводников, не вникая в микроскопические причины явления. Полученное ими уравнение (уравнение Лондонов) дает, в частности, возможность ответить на вопрос о проникновении магнитного поля в сверхпроводник.

Уравнения Максвелла для полей имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Как и в случае металлов, вторым членом во втором уравнении можно пренебречь, т. е. пренебречь токами смещения по сравнению с обычными. К этим уравнениям нужно добавить материальные уравнения. В нормальных металлах связь между током и полем записывается в виде закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, но в сверхпроводнике сопро-

тивление отсутствует. Если электрон не испытывает рассеяния, то под действием приложенного электрического поля он ускоряется и

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Определив плотность тока $\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}$ через заряд электрона e , плотность сверхпроводящих электронов n_s и их скорость \mathbf{v} , получим следующее выражение для напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

которое подставим в первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot} \left(\frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{n_s e^2} \text{rot } \mathbf{j} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{n_s e^2} \text{rot } \mathbf{j} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Это означает, что величина в скобках сохраняется. С другой стороны, магнитное поле в толще сверхпроводника всегда равно нулю, и токи отсутствуют. Следовательно, величина в скобках не только сохраняется, а тождественно равна нулю, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B}. \quad (2.9)$$

Отметим, что полученное уравнение можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал поля. Это приводит к следующей зависимости тока в сверхпроводнике:

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{A}. \quad (2.11)$$

Таким образом, сверхпроводящий ток пропорционален не напряженности поля, как это имеет место в нормальном металле, а векторному потенциалу магнитного поля в той же точке. Именно такая связь постулировалась Лондонами. Из закона сохранения заряда $\text{div } \mathbf{j} = 0$ следует, что векторный потенциал должен также удовлетворять соотношению $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

К полученной связи между сверхпроводящим током и вектор-потенциалом можно сделать еще одно замечание. Влияние магнитного поля вводится с помощью теоремы из классической механики, утверждающей, что действие силы Лоренца $(q\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ на движение

заряженной частицы в магнитном поле \mathbf{B} можно полностью учесть при замене импульса \mathbf{p} (когда он появляется в выражении для кинетической энергии) на выражение $\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}$, где вектор-потенциал \mathbf{A} определяется из выражения $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Предположим, что частица с зарядом q движется в свободной от поля области со скоростью \mathbf{v}_1 и что магнитное поле прикладывается в момент времени $t = 0$. Поле может возрасти только с конечной скоростью, и при его изменении индуцируется электрическое поле, удовлетворяющее уравнению Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) d\mathbf{B}/dt$. Если \mathbf{A} — вектор-потенциал, то $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \text{rot } d\mathbf{A}/dt$, а интегрирование по пространственным координатам дает $\mathbf{E} = -(1/c) d\mathbf{A}/dt$ без учета постоянной интегрирования, которая нас не интересует. Импульс в момент времени t равен

$$m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_1 + \int_0^t \frac{q}{c} \mathbf{E} dt = m\mathbf{v}_1 - \frac{q}{c} \int_0^t \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt = m\mathbf{v}_1 - \frac{q}{c} \mathbf{A}. \quad (2.12)$$

Таким образом, $m\mathbf{v}_2 + (q/c)\mathbf{A} = m\mathbf{v}_1$. Следовательно, вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}$ не изменяется в присутствии магнитного поля, и его можно рассматривать как эффективный импульс. Однако кинетическая энергия ϵ зависит только от $m\mathbf{v}$, и если до приложения поля $\epsilon = f(m\mathbf{v})$, то в поле $\epsilon = f(\mathbf{p} - q\mathbf{A}/c)$.

Итак, среднее локальное значение обобщенного импульса электрона в присутствии магнитного поля равно

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (2.13)$$

что может быть переписано в виде

$$\mathbf{p} = \frac{e}{c} \left(\frac{mc}{ne^2} \mathbf{j} + \mathbf{A} \right). \quad (2.13a)$$

Применяя снова калибровку $\text{div } \mathbf{A} = 0$, для односвязного сверхпроводника получаем с использованием соотношения (2.11)

$$\mathbf{p}_s \equiv 0. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{v}_s = -\frac{e}{mc} \mathbf{A}. \quad (2.15)$$

Таким образом, для односвязного сверхпроводника электронный поток полностью определяется приложенным внешним полем и существует только в присутствии этого поля.

Взяв ротор от второго из уравнений (2.4), получим

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{ne^2}{mc} \mathbf{B} \right) \quad (2.16)$$

или

$$(\text{grad div} - \nabla^2) \mathbf{B} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

Поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$, получим следующее уравнение:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = 0, \quad (2.18)$$

где $\lambda = \sqrt{mc^2/(4\pi n_s e^2)}$ — так называемая лондоновская длина.

Пусть сверхпроводник занимает полупространство $z > 0$, и поле приложено параллельно его поверхности. Из уравнения (2.18) следует, что внутри сверхпроводника поле экспоненциально убывает:

$$B(z) = B_0 e^{-z/\lambda}. \quad (2.19)$$

Магнитное поле имеется лишь в приповерхностном слое толщиной порядка лондоновской длины, а внутри сверхпроводящего материала магнитное поле равно нулю.

Чтобы представить себе, каков порядок величины лондоновской длины, подсчитаем ее значение для свинца, у которого $n_s = 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{4 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{22} \cdot 25 \cdot 10^{-20}} \right)^{1/2} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ см},$$

что соответствует экспериментальным данным. Как правило, значение лондоновской длины лежит в диапазоне $(10^{-5} - 10^{-6}) \text{ см}$ (см. табл. 4.1).

Выражение для лондоновской длины очень похоже на формулу для длины волны продольных плазменных (ленгмюровских) колебаний электронов $\lambda_p = \sqrt{\pi mc^2/ne^2}$, где n — плотность электронов. Когда частота падающего излучения меньше плазменной, показатель преломления вещества оказывается чисто мнимым, и электромагнитное поле существует лишь в тонком приповерхностном слое. Однако в отличие от сверхпроводника в этом случае эффективная глубина проникновения поля определяется дебаевским радиусом экранирования $D = \sqrt{kT/(4\pi ne^2)}$. С другой стороны, хорошо известно, что электромагнитные волны частоты ω проникают в металл лишь на глубину скин-слоя, также определяемого похожей формулой $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega} = (mc^2/2\pi ne^2\omega\tau)^{1/2}$, но зависящей от частоты и проводимости металла σ (времени релаксации τ).

В приведенном выводе предполагалось, что все электроны участвуют в сверхпроводящем токе. На самом деле глубина проникновения зависит от температуры, обращаясь в бесконечность в точке фазового перехода. Это свидетельствует об изменении состояния электронов с температурой. Можно несколько «подправить»

теорию, введя вместо полного числа электронов некоторое число «сверхпроводящих электронов» $n_s(T)$, которое уменьшается с температурой и обращается в нуль при T_c . Поэтому лондоновской длиной обычно называют длину проникновения магнитного поля

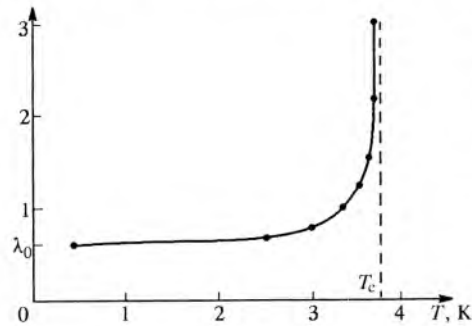


Рис. 2.2. Зависимость глубины проникновения в олове от температуры

вблизи температуры перехода T_c она резко увеличивается, стремясь к бесконечности, как это видно из рис. 2.2.

Задача 2.2. Найти распределение поля и тока в бесконечной пластине толщиной d , помещенной в однородное параллельное пластине магнитное поле H_0 .

Решение. Пусть плоскость $x = 0$ проходит по центру пластины, поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено по оси z . Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению (2.17). Учитывая, что по соображениям симметрии индукция B внутри пластины должна быть направлена вдоль оси z и зависеть только от x , это уравнение можно записать в виде

$$d^2 B / dx^2 - \lambda^{-2} B = 0$$

с граничными условиями $B(\pm d/2) = B_0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$B = B_1 \operatorname{ch}(x/\lambda) + B_2 \operatorname{sh}(x/\lambda),$$

где B_1, B_2 — постоянные интегрирования. Подставляя граничные условия, получим и решим два алгебраических уравнения с двумя неизвестными B_1 и B_2 . В результате имеем окончательно

$$B(x) = B_0 \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)}.$$

при абсолютном нуле и обозначают λ_L , а во всем температурном диапазоне говорят о длине проникновения. Довольно хорошим приближением для температурной зависимости λ является эмпирическая формула

$$\lambda^2(T) = \frac{\lambda_L^2}{1 - (T/T_c)^4}. \quad (2.20)$$

Из формулы (2.20) следует, что практически во всем температурном диапазоне глубина проникновения равна лондоновской и лишь

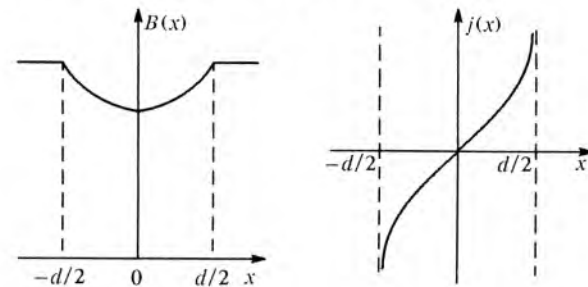
использовавшись этим уравнением и уравнением Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$, можно найти плотность сверхпроводящего тока (часто его называют сверхтоком) в пластине

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx} = -\frac{cB_0}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)}.$$

Из полученного решения следует, что и магнитное поле, и ток проникают в пластину только на глубину порядка λ , если ее толщина достаточно велика ($d \gg \lambda$). Для тонкой пленки ($d \ll \lambda$) разложим гиперболические функции по степеням малых параметров x/λ и $d/2\lambda$ и получим в линейном приближении

$$B = B_0, \quad j_s = cB_0 x / (4\pi\lambda^2).$$

Это означает, что магнитное поле полностью проникает в пленку, а плотность сверхтока — линейная функция координаты. Токи текут по краям пластины так, чтобы созданное ими магнитное поле компенсировало внешнее поле B_0 в глубине пластины. Распределение поля и тока в пластине при $d \sim \lambda$ показано на рисунке.



Задача 2.3. Какой максимальный ток течет по поверхности сверхпроводника I рода, если $H_c = 400$ А/см, а $\lambda_L = 0,5 \cdot 10^{-5}$ см?

Решение. Из уравнения Лондонов следует, что поле в сверхпроводнике проникает по закону

$$B(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L).$$

Согласно уравнению Максвелла

$$j_{\max} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{dB}{dx} \right)_{\max} = -\frac{cH_c}{4\pi\lambda_L} = 8 \cdot 10^7 \text{ А/см}^2.$$

§ 2.3. Квантование потока

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, по которому циркулирует сверхпроводящий ток I . Пусть электроны движутся по окружности

радиусом r со скоростью v , создавая магнитный поток Φ через рассматриваемую окружность. Энергия этого тока \mathcal{E} определяется через Φ и I выражением

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c} I\Phi. \quad (2.21)$$

Если полное число электронов в кольце N , а период их обращения T , то $I = Ne/T = Nev/2\pi r$, и, таким образом,

$$\mathcal{E} = \frac{Nev}{4\pi rc} \Phi. \quad (2.22)$$

С другой стороны, энергия этих электронов равна $\mathcal{E} = Nmv^2/2$, т.е.

$$\Phi = \frac{2\pi cmvr}{e} = \frac{2\pi cr}{e}. \quad (2.23)$$

Но по правилу квантования Бора момент импульса $pr = n\hbar = nh/2\pi$, где n — целое число. Это означает, что магнитный поток может принимать только дискретные значения. Кроме того, как будет показано ниже, сверхпроводящий ток — это движение не отдельных электронов, а куперовских пар с зарядом $2e$, а потому

$$\Phi = \frac{hc}{2e} n. \quad (2.24)$$

Эта формула выражает квантование магнитного потока в сверхпроводниках, причем квант магнитного потока есть

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \quad (2.25)$$

Экспериментально квантование магнитного потока было обнаружено практически одновременно в США (Б. Дивер и В. Фербенк) и в ФРГ (Р. Долл и М. Небауэр). Следует отметить, что экспериментальное наблюдение квантования магнитного потока является сложной экспериментальной задачей. Для того чтобы одному кванту потока соответствовало легко измеримое магнитное поле (скажем, ~ 1 Э), диаметр сверхпроводящего контура должен составлять примерно 10^{-3} см. Реально это осуществлялось путем напыления металла (свинца) на кварцевую тонкую палочку диаметром 10 мкм. Образцы переводили из нормального в сверхпроводящее состояние в различных магнитных полях и измеряли захваченный магнитный поток. В опытах Долла и Небауэра, результаты которых показаны на рис. 2.3, магнитный момент, связанный с захваченным магнитным потоком, измеряли по величине вращающего момента, возникающего при воздействии на цилиндр вспомогательного магнитного поля.

Интересно отметить, что Ф. Лондон, предсказывая квантование магнитного потока, считал, что квант потока будет равен hc/e , т.е. в два раза больше, чем Φ_0 . Это и понятно, ибо он считал, что элементарный заряд носителя сверхтока равен заряду электро-

на e . Опыт подтвердил правильность формулы (2.25). Таким образом, результаты экспериментов по изучению квантования магнитного потока явились прямым доказательством того, что сверхток переносится парами электронов. Следует особо подчеркнуть, что в подобных экспериментах квантование проявляется в макроскопических масштабах.

К полученному нами результату о квантовании магнитного потока добавим два нетривиальных вывода. Во-первых, формулу (2.24) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = \pi \frac{\hbar c}{e^2} e = \frac{\pi}{\alpha} e, \quad (2.26)$$

где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Из выражения (2.26) видно, что квантование потока и дискретность электрического заряда однозначно связаны между собой.

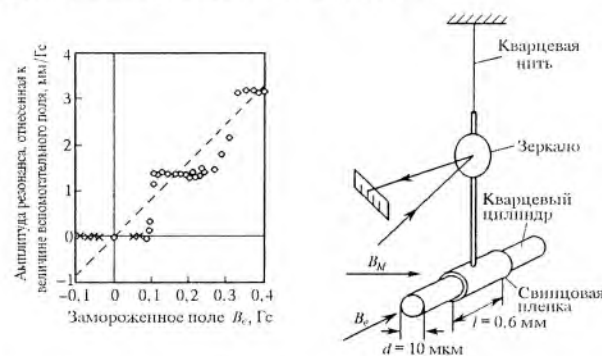


Рис. 2.3. В опытах Р. Долла и М. Небауэра измерение величины магнитного момента проводилось по амплитуде резонанса торсионных колебаний кварцевой нити, на которой подвешивался кварцевый цилиндр со свинцовой пленкой. Если бы поток в сверхпроводящем цилиндре мог изменяться непрерывно, то наблюдаемая амплитуда резонанса была бы пропорциональна замораживаемому полю (штриховая прямая)

Во-вторых, мы можем получить величину магнитного монополя. Магнитный монополю — это гипотетическая частица, обладающая положительным или отрицательным «магнитным зарядом» — точечным источником радиального магнитного поля. Магнитный монополю можно представить себе как отдельно взятый полюс длинного и тонкого постоянного магнита. Если магнитный монополю существует, то для него должна быть справедлива теорема, аналогичная теореме Гаусса в электростатике:

$$\oint B dS = n\Phi_0 = 4\pi \sum q_m, \quad (2.27)$$

где q_m — заряд монополя, а $\tilde{\Phi}_0 = 2\Phi_0$ — квант магнитного потока, обусловленный одним электроном, а не сверхпроводящей парой. Отсюда получаем, что элементарный магнитный заряд должен быть равен

$$q_m = \frac{\tilde{\Phi}_0}{4\pi} = \frac{\hbar c}{2e^2} e = \frac{1}{2\alpha} e \approx \frac{137}{2} e. \quad (2.28)$$

В используемой системе единиц (СГС) электрический и магнитный заряды имеют одинаковую размерность. Неоднократные попытки экспериментально обнаружить магнитный монополь пока не увенчались успехом.

Задача 2.4. Подлежащий измерению ток I течет по ниобиевой проволоке диаметром $2r_{Nb} = 0,1$ мм, образующей точечные контакты A и B в капле припоя из сверхпроводящего металла



Pb + Sn. Из-за присутствия на поверхности ниобия окисной пленки капля смачивает проволоку не полностью, а касается ниобия только в отдельных точках. Пусть таких точек лишь две — A и B с расстоянием между ними $l_{AB} = 5$ мм. Толщину изолирующей пленки на поверхности ниобия можно считать малой по сравнению с глубиной проникновения. Оценить силу тока, при котором через поверхность капли пройдет один квант магнитного потока. Лондоновские длины для ниобия и припоя соответственно равны $\lambda_{Nb} = 5 \cdot 10^{-6}$ см, $\lambda_{NbSn} = 10^{-5}$ см.

Решение. Магнитное поле проходит между двумя точечными контактами через поверхность, площадь которой практически равна произведению расстояния между контактами l_{AB} на сумму глубин проникновения в ниобий λ_{Nb} и припой λ_{PbSn} .

$$B = \frac{2I}{cr_{Nb}}, \quad \Phi = BS = \frac{2I}{cr_{Nb}} l_{AB} [\lambda_{Nb} + \lambda_{PbSn}],$$

$$I_{\Phi_0} = \Phi_0 \frac{cr_{Nb}}{l_{AB} [\lambda_{Nb} + \lambda_{PbSn}]}.$$

При подстановке числовых данных получаем, что $I_{\Phi_0} = 7 \cdot 10^{-4}$ А = 0,7 мА.

Задача 2.5. Рассматривается тонкая сверхпроводящая пленка толщиной $d \ll \lambda_L$, нанесенная на поверхности диэлектрической нити. Радиус сечения нити равен R . Нить внесена в продольное магнитное поле при комнатной температуре, а затем температу

ра нити понижена до T_c . После этого внешнее магнитное поле выключается. Как квантуется магнитный поток, захваченный нитью с пленкой?

Решение. Поскольку $d \ll \lambda$, ток будет распределен по пленке однородно (см. задачу 2.2). Поэтому интегрирование выражения для плотности сверхпроводящего тока, формулу для которого получили в задаче 2.4, по замкнутому контуру радиуса R даст

$$\Phi = n\Phi_0 - \frac{2\pi mcR}{n e^2} j_s.$$

С другой стороны, магнитное поле внутри цилиндра и ток по поверхности цилиндра связаны соотношением

$$B = \frac{4\pi}{c} j_s d.$$

Поэтому поток внутри цилиндра

$$\Phi = \pi R^2 B = (4\pi^2/c) R^2 j_s d.$$

Выражая j_s и подставляя в предыдущее соотношение, получаем

$$\Phi = n\Phi_0 \frac{1}{1 + 2\lambda^2/(Rd)}.$$

Видим, что «квант потока» всегда оказывается несколько меньше Φ_0 .

§ 2.4. Термодинамика перехода в сверхпроводящее состояние

Пусть длинный цилиндр из сверхпроводника первого рода помещен в однородное продольное поле H_0 . Найдем значение этого поля H_c , при котором произойдет разрушение сверхпроводимости.

При $H_0 < H_c$ существует эффект Мейсснера, т. е. $\mathbf{B} = 0$, и магнитный момент единицы объема цилиндра \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}_0/4\pi. \quad (2.29)$$

При изменении внешнего поля \mathbf{H}_0 на $d\mathbf{H}_0$ источник магнитного поля совершит работу над единицей объема сверхпроводника, равную

$$-\mathbf{M} d\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 d\mathbf{H}_0/4\pi. \quad (2.30)$$

Следовательно, при изменении поля от 0 до H_0 источник поля совершает работу

$$-\int_0^{H_0} \mathbf{M} d\mathbf{H}_0 = H_0^2/8\pi. \quad (2.31)$$

Эта работа запасена в свободной энергии сверхпроводника, находящегося в магнитном поле H_0 . Таким образом, если плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля равна

F_{s0} , то плотность свободной энергии сверхпроводника в магнитном поле:

$$F_{sH} = F_{s0} + H_{cm}^2/8\pi. \quad (2.32)$$

Переход в нормальное состояние произойдет, если свободная энергия F_{sH} превысит уровень плотности свободной энергии нормального металла: $F_{sH} = F_n$ при $H_0 = H_c$. Это означает, что

$$F_n - F_{s0} = H_c^2/8\pi. \quad (2.33)$$

Из этой формулы следует, что критическое поле массивного материала является мерой того, насколько сверхпроводящее состояние является энергетически более выгодным, чем нормальное, т.е. в какой мере свободная энергия сверхпроводящего состояния меньше свободной энергии нормального состояния. Поле H_c часто называют *термодинамическим магнитным полем* и обозначают H_{cm} .

Обратимся теперь к вопросу об энтропии сверхпроводника. Согласно первому началу термодинамики,

$$\delta Q = \delta A + dU, \quad (2.34)$$

где δQ — приращение тепловой энергии рассматриваемого тела, δA — работа, совершаемая единицей объема этого тела над внешними телами, dU — приращение его внутренней энергии. По определению свободная энергия

$$F = U - TS, \quad (2.35)$$

где T — температура тела, а S — энтропия. Тогда

$$dF = dU - T dS - S dT. \quad (2.36)$$

Поскольку при обратимом процессе $\delta Q = T dS$, имеем

$$dU = T dS - \delta A, \quad dF = -\delta A - S dT. \quad (2.37)$$

Отсюда следует, что

$$S = -(\partial F/\partial T)_A. \quad (2.38)$$

При помощи этой формулы вычислим разность удельных энтропий сверхпроводящего и нормального состояний. Для этого выражение для свободной энергии (2.32) подставим в формулу (2.38):

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_A. \quad (2.39)$$

Эта формула позволяет получить ряд важных физических следствий.

1) Согласно теореме Нернста энтропия всех тел при $T = 0$ равна нулю. Поэтому $(\partial H_{cm}/\partial T)_{T=0} = 0$. Это значит, что кривая зависимости $H_{cm}(T)$ при $T = 0$ имеет нулевую производную.

2) Из эксперимента видно, что зависимость $H_{cm}(T)$ — это монотонно спадающая с увеличением T кривая (см. рис. 1.2), т.е. что во всем интервале температур от 0 до T_c величина $\partial H_{cm}/\partial T < 0$. Следовательно, в этом интервале температур $S_s < S_n$.

3) Поскольку при $T = T_c$ поле $H_{cm} = 0$, то $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Схематически зависимость $S_s - S_n$ от температуры показана на рис. 2.4.

Проведенный анализ позволяет сделать ряд существенных выводов.

1) Сверхпроводящее состояние является более упорядоченным, чем нормальное, так как его энтропия меньше.

2) Переход при $T = T_c$ происходит без поглощения или выделения скрытой теплоты, так как $S_s = S_n$ при $T = T_c$. Следовательно, переход при $T = T_c$ — это переход второго рода.

3) При $T < T_c$ переход из сверхпроводящего состояния в нормальное может происходить под действием магнитного поля. Поскольку $S_s < S_n$, то такой переход сопровождается поглощением скрытой теплоты. Наоборот, при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние скрытая теплота выделяется. Следовательно, все переходы в магнитном поле при $T < T_c$ являются переходами первого рода.

Рассмотрим далее вопрос о поведении теплоемкости. Удельная теплоемкость вещества $C = T(\partial S/\partial T)$, а разность удельных теплоемкостей сверхпроводящего и нормального состояний с учетом формулы (2.39) есть

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)^2 + H_{cm} \frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2} \right]. \quad (2.40)$$

Но при $T = T_c$ критическое поле $H_{cm} = 0$, поэтому

$$C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_{T_c}^2. \quad (2.41)$$

Эта формула, известная как формула Рутгерса, показывает, что при $T = T_c$ теплоемкость испытывает скачок (рис. 2.5), как это и долж-

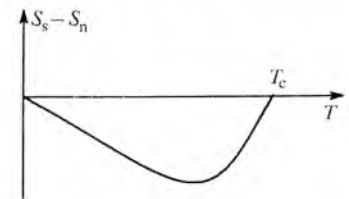


Рис. 2.4. Зависимость разности энтропии $S_n - S_s$ от температуры

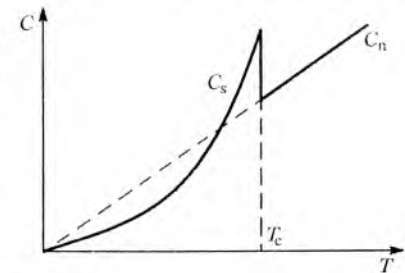


Рис. 2.5. Температурная зависимость теплоемкости сверхпроводника

но быть при фазовых переходах второго рода. При $T > T_c$ теплоемкость линейно зависит от температуры, как это бывает у нормальных металлов (электронная теплоемкость).

Перенос тепла в металле осуществляется как свободными электронами, так и колебаниями решетки. Обычно вклад электронов в теплопроводность значительно превышает вклад решетки. И электропроводность, и теплопроводность металлов обусловлены процессами рассеяния электронов. Поэтому наличие сверхпроводимости означает отсутствие обмена энергией электронов проводимости с решеткой. В сверхпроводнике по мере понижения температуры все большее число свободных электронов связывается в куперовские пары и тем самым выключается из процессов обмена энергией, а значит, вклад электронов в теплопроводность постоянно уменьшается. При достаточно низких температурах в сверхпроводнике практически не остается свободных электронов, и он ведет себя как изолятор: электронная система просто полностью выключается из теплового баланса.

Значительная (до 10^4 раз — см. рис. 3.4) разность теплопроводности металла в нормальном и сверхпроводящем состоянии используется для создания *сверхпроводящего теплового ключа* — устройства, позволяющего разрывать тепловой контакт между источником холода и охлаждаемым телом в экспериментах в области низких температур. Конструктивно сверхпроводящий ключ выполняется в виде отрезка тонкой (диаметром 0,1–0,3 мм) проволоки из тантала или свинца длиной от нескольких единиц до нескольких десятков сантиметров, соединяющего исследуемое тело с хладагентом. На такую проволоку наматывается медная катушка, по которой пропускается ток, достаточный для создания магнитного поля, больше критического значения. При пропускании тока сверхпроводимость разрушается магнитным полем, и ключ открывается.

Аналогичные «магнитные» ключи применяются для создания полей в короткозамкнутых сверхпроводящих соленоидах. В таких соленоиде также имеется участок сверхпроводника, намотанной на нем медной обмоткой. При пропускании тока через управляющую обмотку соленоид становится разомкнутым, и через него проходит ток от внешнего источника. Затем ключ замыкается, а магнитный поток оказывается замороженным в соленоиде. Сверхпроводящий ключ может разрываться при нагревании (рис. 2.6).

Рис. 2.6. Схема короткозамкнутого соленоида с тепловым ключом

Перемычка переходит из сверхпроводящего состояния в нормальное при ее нагревании до температуры выше T_c .

Так как сверхпроводящее состояние является бездиссипативным, в таком соленоиде магнитное поле чрезвычайно стабильно и су-

ществует до тех пор, пока его температура не превысит T_c . Современная техника позволяет изготавливать криостаты со столь малым тепловым притоком, что гелиевые температуры поддерживаются после заправки жидкого гелия в криостат со сверхпроводящим соленоидом примерно в течение года!

Задача 2.6. Какое количество теплоты выделится при переходе 1 см³ свинца в сверхпроводящее состояние; переход происходит в магнитном поле при температуре 4,2 К.

Решение. Выделившееся количество теплоты

$$Q = T(S_n - S_s).$$

Разность энтропий определяется термодинамическим полем и его производной по температуре. Критическая температура свинца равна 7,2 К, а термодинамическое поле при нуле температур 803 Э. В числах получаем $Q = 2^3 \cdot 10^4$ эрг. При этом сделаем следующий комментарий. Формула для разности энтропий выражается через производную $(\partial H_{cm}/\partial T)_A$, т.е. при постоянной внешней работе. В условиях данной задачи, когда фиксировано внешнее поле на бесконечности, сверхпроводник не совершает работу над внешними телами при изменении его температуры. Действительно, единственный вид работы над внешними телами для такого сверхпроводника — это излучение электромагнитной волны при изменении его внутреннего состояния. Но для этого нужно, чтобы интеграл вектора Пойнтинга $(c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ по поверхности сверхпроводника не равнялся нулю. Электрическое поле \mathbf{E} может возникнуть только при изменении индукции \mathbf{B} , но $\mathbf{B} = 0$, поэтому при изменении температуры сверхпроводника в магнитном поле излучения не происходит, значит, $(\partial H_{cm}/\partial T)_A = (\partial H_{cm}/\partial T)_H$, и можно пользоваться формулой для разности энтропий.

2.5. Разрушение сверхпроводимости током

Пусть по толстому сверхпроводящему проводу с круговым сечением радиусом r_0 течет ток. Согласно опытным данным, разрушение сверхпроводимости магнитным полем происходит всегда, когда поле достигает критического значения H_c , независимо от того, является это поле внешним либо создано проходящим по сверхпроводнику током (правило Сильсби). Рассмотрим уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}. \quad (2.42)$$

Проинтегрировав его по площади круга радиусом $r < r_0$ и пользуясь правилом преобразования ротора, получим

$$\oint \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} J(r). \quad (2.43)$$

Следовательно,

$$H(r) = 2J(r)/(cr), \quad (2.44)$$

где $H(r)$ — поле на расстоянии r от оси цилиндра, $J(r)$ — ток, текущий через круг радиусом r .

В сверхпроводящем состоянии ток течет лишь в тонком поверхностном слое. Следовательно, $H = 0$ везде, кроме этого слоя. Максимальное поле достигается на поверхности. Оно равно H_c при токе

$$J_c = cr_0 H_c / 2. \quad (2.45)$$

При $J > J_c$ сверхпроводимость в поверхностном слое начнет разрушаться. Казалось бы, образуется нормальная трубка и сверхпроводящая сердцевина. Но при этом весь ток потечет внутри сверхпроводящего цилиндра, который имеет меньший радиус. Из (2.44) следует, что при том же токе на границе поле H будет еще больше. Тем самым процесс разрушения дойдет до конца, весь образец станет нормальным, и ток распределится равномерно по сечению. В этом случае $J(r) = j\pi r^2$, где j — постоянная плотность тока. Согласно формуле (2.44) поле в окрестности цилиндра станет меньше H_c ; таким образом, как сверхпроводящее, так и нормальное состояния неустойчивы.

Поэтому при $J > J_c$ образуется так называемое *промежуточное состояние*, когда одновременно сосуществуют области нормальной

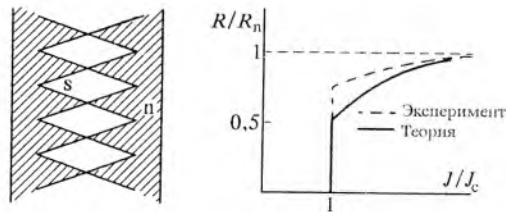


Рис. 2.7. Схематическое изображение структуры промежуточного состояния цилиндра и зависимость сопротивления провода от величины протекающего через него тока

и сверхпроводящей фаз. Структура промежуточного состояния такова, что толщина нормальных слоев увеличивается пропорционально радиусу (рис. 2.7). Конечно, «диски» сверхпроводящей фазы должны иметь скругленные края. Опытным путем было установлено, что в промежуточном состоянии образец разбивается на макроскопические области нормальной и сверхпроводящей фаз размерами порядка 0,1 мм.

Зависимость продольного сопротивления провода от величины тока показана на рис. 2.7. При критическом значении тока сопро-

тивление становится конечным, но оно составляет лишь часть (около половины) нормального сопротивления, к которому оно стремится по мере увеличения тока.

Существует несколько методов визуализации промежуточной структуры, главным образом на поверхности образца. Во всех экспериментальных методах используют неоднородность магнитного поля, возникающего за счет расслоения. Так, например, если посыпать поверхность образца тонким ферромагнитным порошком, то частицы концентрируются около выхода нормальных слоев — такой способ называется декорированием. На рис. 2.8 приведена фотография нормальных слоев в сверхпроводящей пластине из олова.

В этом эксперименте магнитное поле H было наклонено под углом 15° по отношению к поверхности пластины. Чередующиеся нормальные и сверхпроводящие слои расположены параллельно плоскости, проходящей через направление магнитного поля и нормаль к поверхности образца.

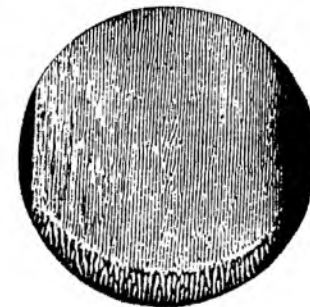


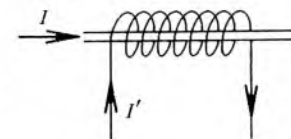
Рис. 2.8. Фотография распределения тонкого ферромагнитного порошка на поверхности пластины из олова, помещенной в наклонное магнитное поле (1957 г., Ю. В. Шарвин)

Задача 2.7. Криотрон — это управляющее устройство, изобретенное Баком в 1956 г. (см. рисунок). Управляющий ток I' создает поле в соленоиде длиной $L = 2$ мм с числом витков $N = 20$. В соленоид помещена сверхпроводящая танталовая проволока АВ диаметром $2a = 0,2$ мм, по которой пропускается ток I , критическое поле H_c для тантала при 4,2 К равно 100 Гс.

Переводя полем соленоида проволоку из сверхпроводящего в нормальное состояние, можно управлять текущим через проволоку током, и поэтому криотрон может быть использован в логических схемах в качестве активного элемента, а также в качестве запоминающего элемента в вычислительных машинах. Какого усиления по току $G = I/I'$ можно достичь в данном устройстве?

Решение. Управляющий ток, текущий через соленоид, создает поле

$$H' = \frac{4\pi NI'}{cL},$$



т.е. минимальный ток, необходимый для перевода проволоки в нормальное состояние, равен

$$I'_m = \frac{cL}{4\pi N} H_c.$$

Однако ток I через проволоку не может быть слишком сильным, так как в противном случае проволока перейдет в промежуточное состояние, и, как следует из формулы (2.45),

$$I \leq I_c = \frac{caH_c}{2}.$$

Поэтому усиление криотрона по току есть

$$G = \frac{I_c}{I'_m} = 2\pi N \frac{a}{L} \approx 6.$$

Хотя усиление пропорционально числу витков соленоида, увеличивать N нецелесообразно, поскольку это приводит к возрастанию индуктивности катушки и в конечном счете к увеличению постоянной времени криотрона. На практике удается получить в пленочном криотроне постоянную времени срабатывания порядка 10^{-9} с.

§ 2.6. Зависимость критического поля от температуры

Рассмотрим, как на основе феноменологической теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) можно найти температурную зависимость критического магнитного поля. Пусть $\Psi(\mathbf{r})$ — волновая функция сверхпроводящих электронов. Она нормирована так, что $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ — плотность электронных куперовских пар, т.е.

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2. \quad (2.46)$$

Как уже указывалось, переход в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом II рода, т.е. переходом в более упорядоченное, чем нормальное состояние. Отсюда следует, что в сверхпроводнике должен существовать какой-то параметр порядка, который отличен от нуля при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T \geq T_c$. В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау предложили рассматривать в качестве параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$.

В основе теории фазовых переходов II рода Ландау лежит разложение свободной энергии по степеням параметра порядка, который мал вблизи точки перехода. Теория ГЛ основана именно на таком разложении, и в простейшем случае однородного сверхпроводника без внешнего магнитного поля свободную энергию можно представить в виде

$$F_{s0} = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \quad (2.47)$$

Здесь F_{s0} — плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля, F_n — плотность свободной энергии тела в

нормальном состоянии, α и β — некоторые феноменологические коэффициенты разложения, характеризующие материал.

Найдем то значение $|\Psi|^2$, при котором свободная энергия однородного сверхпроводника достигает минимума. Это значение $|\Psi_0|^2$ будет решением уравнения

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.40), после элементарных вычислений получим

$$|\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.49)$$

Это значение параметра порядка можно подставить в выражение для свободной энергии (2.47) и получить выражение для разности свободных энергий в нормальной и сверхпроводящей фазах:

$$F_n - F_{s0} = \frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (2.50)$$

По согласно формуле (2.33) эта разность равна $H_{cm}^2/8\pi$, и имеем

$$H_{cm}^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}. \quad (2.51)$$

Проанализируем температурную зависимость коэффициентов α и β . Поскольку при $T = T_c$ параметр порядка должен быть равен нулю, а при $T < T_c$ — отличен от нуля, из (2.49) следует, что $\alpha = 0$ при $T = T_c$ и $\alpha < 0$ при $T < T_c$. Поэтому в первом порядке по $(T - T_c)$ можно записать

$$\alpha \sim (T - T_c). \quad (2.52)$$

Коэффициент β положителен и от температуры не зависит. Действительно, согласно (2.49) при $T < T_c$ и $\alpha < 0$ положительное значение величины $|\Psi_0|^2$ может быть получено только при $\beta > 0$. С другой стороны, если $T > T_c$ и согласно (2.43) $\alpha > 0$, то при $\beta > 0$ величина F_{s0} достигает минимума при $|\Psi_0|^2 = 0$, т.е., как и должно быть, сверхпроводящее состояние при $T > T_c$ отсутствует. Таким образом, при $T < T_c$ и $T > T_c$ параметр $\beta > 0$. Поэтому можно считать в первом приближении по $(T - T_c)$, что $\beta = \text{const}$.

Итак, вблизи T_c термодинамическое критическое поле, согласно формулам (2.51) и (2.52), пропорционально $(T - T_c)$, что согласуется с эмпирической закономерностью:

$$\begin{aligned} H_{cm}(T) &= H_{cm}(0)[1 - (T/T_c)^2] = H_{cm}(0) \frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2} = \\ &= H_{cm}(0) \frac{(T_c + T)(T_c - T)}{T_c^2} \approx 2H_{cm}(0) \frac{T_c - T}{T_c} \text{ при } T \sim T_c. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ципенюк Ю. М.

ОСНОВЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

§ 3.1. Аналогия между сверхтекучестью и сверхпроводимостью

Через 36 лет после открытия сверхпроводимости в Москве в Институте физических проблем выдающимся физиком П. Л. Капицей было обнаружено отсутствие вязкости у гелия при температуре ниже 2,2 К. При температуре 2,2 К в жидком гелии происходит фазовый переход II рода: скачком меняется теплоемкость, скорость распространения звука, коэффициент теплового расширения и другие физические свойства. Эта температура называется λ -точкой, а гелий при температурах, меньших 2,2 К, гелием-II. Для измерения вязкости жидкого гелия-II П. Л. Капица сконструировал специальный прибор, состоящий из двух тщательно отшлифованных кварцевых дисков, зазор между которыми регулировался с помощью прокладок из слюды (см. рис. 3.1). В верхнем диске имелось отверстие, в которое была вставлена кварцевая трубка-резервуар. С помощью нити прибор подвешивался в жидком гелии и мог подниматься и опускаться — так можно было, меняя количество гелия в резервуаре, регулировать давление гелия и измерять скорость, с которой он вытекал из капилляра.

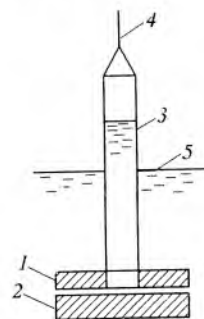


Рис. 3.1. Вискозиметр П. Л. Капицы для измерения вязкости жидкого гелия-II: 1, 2 — кварцевые диски, 3 — трубка-резервуар, 4 — подвес, 5 — уровень гелия в дьюаре

Измерения показали, что у гелия-II вязкость по крайней мере в 1500 раз меньше, чем у гелия-I (при температурах выше λ -точки), и в 10 000 раз меньше, чем у газообразного водорода при самой низкой температуре. Вязкость оказалась настолько малой, что даже при зазоре между дисками в 0,5 мкм движение могло быть вихревым и, значит, истинная вязкость могла оказаться еще во много раз меньшей. Поэтому П. Л. Капица сделал заключение, что у гелия-II вообще отсутствует вязкость, и по аналогии со сверхпроводимостью он назвал это явление *сверхтекучестью*.

Эти два явления имеют очень много общего в своей основе — оба они суть проявление квантовых свойств вещества в макроскопическом масштабе. Глубокая аналогия, существующая между сверхтекучестью и сверхпроводимостью, совершенно очевидна. Электри-

ческое сопротивление у сверхпроводников полностью отсутствует, так же, как отсутствует трение при течении сверхтекучей жидкости. Поэтому о сверхпроводимости можно говорить как о сверхтекучести заряженной электронной жидкости в металлах. Нужно лишь принять во внимание, что электронная жидкость заряжена, но в этом «лишь» кроется очень много.

При абсолютном нуле температуры жидкий гелий находится в состоянии с наименьшей энергией — основном состоянии. При температурах, близких к $T = 0$ К, жидкость переходит в одно из возбужденных состояний, которое можно представить как совокупность элементарных возбуждений — квазичастиц. Простейшими элементарными возбуждениями жидкости являются колебания ее плотности, т. е. звуковые колебания. Закон дисперсии квантов этих колебаний (фононов) линейный $\epsilon = sp$ (s — скорость звука). Следует подчеркнуть, что в законе дисперсии для жидкости всюду имеется в виду истинный импульс, а не квазиимпульс, как это было в случае кристаллической решетки. Причина в том, что жидкий гелий — однородная среда, не обладающая трансляционной симметрией.

Для объяснения сверхтекучести Ландау постулировал, что спектр элементарных возбуждений в гелии-II, кроме фононного участка, содержит еще участок с законом дисперсии $\epsilon = \epsilon_0 + (p - p_0)^2/2\mu$, который, по предложению И. Е. Тамма, он назвал ротонным, а соответствующие квазичастицы — ротонами, так что полный спектр элементарных возбуждений в He-II имеет вид, изображенный на рис. 3.2. Эта кривая дисперсии была потом полностью подтверждена в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов.

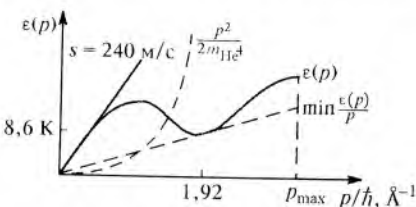


Рис. 3.2. Спектр возбуждений в He-II. Пунктиром показан закон дисперсии для невзаимодействующих атомов

Покажем, что при энергетическом спектре элементарных возбуждений, постулированном Ландау, жидкость должна обладать свойством сверхтекучести. Рассмотрим сначала гелий-II при температуре абсолютного нуля, когда никаких возбуждений в нем нет. Пусть жидкость течет в капилляре с постоянной скоростью v . Определим, при каких скоростях v не могут появляться элементарные возбуждения и, следовательно, гелий не будет испытывать трения.

Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится, а капилляр движется со скоростью $-v$. Это необходимо потому, что закон дисперсии (рис. 3.2) относится к системе отсчета, в которой жидкость неподвижна. Допустим, что в жидкости появилось элементарное возбуждение — квазичастица с энергией ϵ и импульсом p .

Из-за отдачи скорость капилляра изменится и станет равной $-v_1$. По закону сохранения энергии и импульса

$$\varepsilon + \frac{Mv_1^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \varepsilon + \frac{M}{2}(v_1^2 - v^2) = 0, \\ p + Mv_1 = Mv, \quad (3.1)$$

где M — масса капилляра. Так как она велика, то изменение скорости капилляра незначительно, а потому сумму $v + v_1$ можно заменить на $2v$ и уравнение (3.1) для энергии можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{M}{2}(v - v_1)(v + v_1) = Mv(v - v_1). \quad (3.1a)$$

Из уравнений (3.1) и (3.1a) получаем

$$\varepsilon = pv. \quad (3.2)$$

Отсюда по меньшей мере следует, что $\varepsilon \leq pv$, т. е. $v \geq \varepsilon/p$. Таким образом, для появления элементарного возбуждения необходимо, чтобы скорость жидкости v превышала минимальное значение ε/p :

$$v \geq v_{cr} = \min \left(\frac{\varepsilon}{p} \right). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) называется *критерием сверхтекучести Ландау*. Минимум отношения ε/p на кривой дисперсии соответствует точке, где производная $\frac{d}{dp}(\varepsilon/p)$ обращается в нуль, т. е.

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{\varepsilon}{p}, \quad (3.3a)$$

где прямая $\varepsilon/p = \text{const}$, проходящая через начало координат, касается дисперсионной кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$.

Этот результат не является неожиданным. Как известно, при равномерном движении тела в жидкости со скоростью, превышающей фазовую, рождаются звуковые волны Маха. Аналогично ведет себя заряд, движущийся в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света (эффект Вавилова—Черенкова). Точно так же электрон в твердом теле может рождать фононы, если его скорость превышает скорость звука. Таким образом, скорость звука играет роль критической скорости v_{cr} в том смысле, что генерация звука движущимся телом появляется, когда его скорость превышает критическую. В гелии-II критическая скорость течения — это минимальная скорость, необходимая для генерации ротонов.

Если температура гелия отлична от абсолютного нуля, даже в покоящейся жидкости появятся слабые возбуждения, которые будут вести себя как идеальный газ независимых квазичастиц. Однако формула (3.3), полученная для нулевой температуры, остается в силе, поскольку выражает условие рождения элементарных возбуждений из-за движения жидкости относительно стенок капилляра. При

ее выводе предположение о равенстве температуры жидкости абсолютному нулю не использовалось.

В случае конечной температуры при течении жидкого гелия по трубе со скоростью v возбуждения будут испытывать соударения со стенками и между собой, в результате чего возникнет вязкое (пуазейлево) течение газа возбуждений. Движение газа возбуждений увлекает за собой часть жидкости, называемую нормальной компонентой. Скорость течения нормальной компоненты, как и любой вязкой (нормальной) жидкости, определяется разностью давлений на концах капилляра. Подчеркнем, что сверхтекучая часть будет продолжать движение со скоростью v , для поддержания которого в случае $v < v_{cr}$ не требуется создания разности давлений.

Таким образом, гелий-II как бы состоит из двух компонент: нормальной и сверхтекучей. Нормальная компонента, связанная с движением газа возбуждений, переносит теплоту, и ее плотность ρ_n зависит от температуры, изменяясь от нуля при $T = 0$ до плотности жидкости при $T = T_c$. В интервале $0 < T < T_c$ полная плотность жидкости складывается из плотностей компонент $\rho = \rho_n + \rho_s$.

Критическая скорость, вычисленная по формуле (3.3) на основе экспериментально определенного спектра элементарных возбуждений, равна $v_c = 6 \cdot 10^3$ см/с. Экспериментально наблюдаемые критические скорости движения гелия по капиллярам составляют лишь 1% от этой величины, что обусловлено рождением другого типа возбуждений — квантованных вихрей. Теоретический предел для скорости получен лишь в экспериментах с ионами, инжектируемыми в гелий-II, когда вихревая критическая скорость оказывается выше, чем критическая скорость, обусловленная рождением квазичастиц. Дело в том, что вихревая критическая скорость обратно пропорциональна радиусу капилляра, по которому течет гелий, а в случае движения тела в жидком гелии — его характерному размеру.

Для сравнения на рис. 3.2 показана парабола, соответствующая закону дисперсии для невзаимодействующих атомов гелия, т. е. для идеального газа. Очевидно, что в этом случае $\min(\varepsilon/p) = 0$. Поэтому в идеальном газе сверхтекучесть невозможна, она является следствием взаимодействия между атомами.

Для обычной квантовой картины поведения электронов в металле прямое применение критерия Ландау сразу же приводит к затруднениям. В самом деле, импульс элементарных возбуждений ферми-жидкости (возбуждение в ферми-газе суть частицы над ферми-сферой и дырки под ней) порядка p_F , тогда как их энергия, отчитанная от исходной, т. е. от энергии Ферми,

$$\varepsilon - \varepsilon_F = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_F^2}{2m} \approx v_F(p - p_F) \quad (3.4)$$

может быть сколь угодно малой. Поэтому критическая скорость сверхтекучего течения в нормальной ферми-жидкости равна нулю.

Таким образом, для появления сверхтекучести электронного ферми-газа в металлах необходима перестройка основного и слабо возбужденных состояний нормального металла, приводящая к появлению щели Δ в спектре элементарных возбуждений, чтобы могло выполняться условие $v_c = \Delta/p_F > 0$.

Из критерия Ландау и вышесказанного ясно, каким должен быть спектр, чтобы $v_{cr} \neq 0$: перевод электрона через уровень Ферми должен быть связан с затратой некоторой конечной энергии, т.е. возле энергии Ферми должна возникнуть щель — интервал запрещенных значений энергии. Схема уровней должна быть подобна полупроводнику, когда все состояния при $T = 0$ заполнены, а разрешенные состояния отделены от заполненных щелью. Но этого мало. Для подобия сверхпроводимости и сверхтекучести надо, чтобы электронная жидкость состояла не из фермионов, а из бозонов, как это имеет место в ^4He . Обеспечить это можно лишь одним способом — объединить электроны по крайней мере в пары; спин пары равен целому числу, а это значит, что электронная подсистема металла является системой бозонов. Вопрос состоит в том, как реально это может осуществиться.

§ 3.2. Энергетическая щель сверхпроводящего состояния

Как обсуждалось выше, для существования сверхтекучести в спектре уровней сверхпроводника должна существовать энергетическая щель между заполненными и разрешенными состояниями, и наличие такой щели действительно следует из целого ряда экспериментов.

Так, например, кривая поглощения инфракрасного излучения в сверхпроводниках практически идентична ситуации в полупроводниках, если отвлечься от абсолютной величины края поглощения, который в полупроводниках наблюдается на частотах, примерно на три порядка больших, чем в случае сверхпроводников (см. рис. 3.3).

Поглощение излучения в полупроводниках полностью объяснимо. В энергетическом спектре полупроводников существует «энергетическая щель», отделяющая верхнюю границу заполненной валентной зоны электронных энергетических уровней от

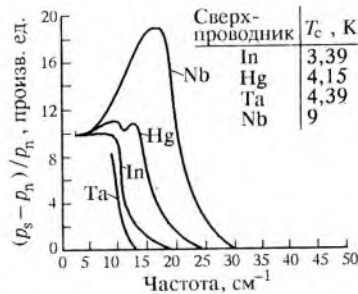


Рис. 3.3. Коэффициент отражения различных металлов в инфракрасной области при $T = 1,3$ К. Значения по оси ординат пропорциональны разности между коэффициентами отражения в сверхпроводящем и нормальном состояниях

существует «энергетическая щель», отделяющая верхнюю границу заполненной валентной зоны электронных энергетических уровней от

нижней границы незаполненной зоны проводимости. Если частота падающего излучения такова, что энергия фотонов $\hbar\omega$ превышает энергетическую щель, поглощение фотона электроном приведет к его переходу из валентной зоны в зону проводимости. Естественно предположить, что нечто подобное происходит и в случае сверхпроводника: излучение сильно поглощается, когда энергия фотона достаточно велика для переброса электронов через некоторую энергетическую щель. Поскольку в сверхпроводниках поглощение начинается на частотах, больших 10^{11} Гц, энергетическая щель должна быть порядка 10^{-4} эВ, что соответствует температуре около 1 К.

Другим доказательством в пользу существования энергетической щели в электронном спектре служат данные о теплоемкости и теплопроводности (рис. 3.4).

Как видно из рисунка, при низких температурах вклад, вносимый в теплоемкость электронами проводимости в сверхпроводящем состоянии, пропорционален $\exp(-b/kT)$, где b — некая константа. Именно такую зависимость нужно ожидать при наличии энергетической щели. Из простых соображений статистической механи-

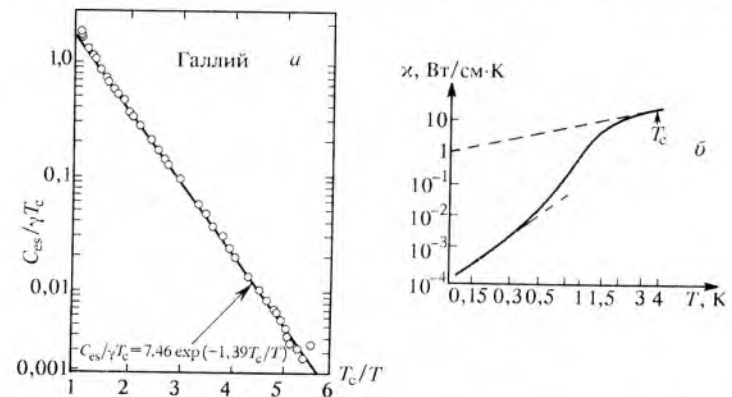


Рис. 3.4. а — электронная часть теплоемкости галлия C_{es} в сверхпроводящем состоянии (в логарифмическом масштабе) в зависимости от T_c/T ; видно, что зависимость от $1/T$ — экспоненциальная. б — зависимость теплопроводности монокристаллического цилиндра диаметром 1,4 мм из чистого олова от температуры: верхняя пунктирная кривая относится к нормальному состоянию; при $T < 0,1T_c$ теплопроводность сверхпроводника подобна теплопроводности диэлектрика

ки следует, что при температуре T число электронов на энергетических уровнях над щелью E_g пропорционально $\exp(-E_g/kT)$. Тепловая энергия, поглощаемая при возбуждении электронов проводимости, пропорциональна, таким образом, $E_g \exp(-E_g/kT)$. Теплоемкость, связанная с этим процессом, пропорциональна производной

энергии по температуре, т.е. $(1/T^2) \exp(-E_g/kT)$. Член T^{-2} изменяется с температурой намного медленнее, чем экспонента, так что зависимость теплоемкости от температуры должна быть почти экспоненциальной. Аналогично ведет себя в сверхпроводящей области и теплопроводность металлов — в эксперименте наблюдается экспоненциальная температурная зависимость, характерная для подпороговых процессов.

Самым непосредственным свидетельством наличия энергетической щели явилось изучение туннельного эффекта (рис. 3.5). Исследовался переход электронов через тонкий непроводящий слой толщиной

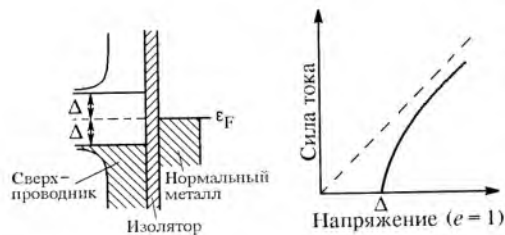


Рис. 3.5. Слева — туннельный (s-n)-контакт сверхпроводник — нормальный металл, по вертикали структура электронных зон в сверхпроводнике и нормальном металле; справа — вольт-амперная характеристика (s-n)-контакта

ной $\sim 10 \text{ \AA}$, разделяющий нормальную и сверхпроводящую пленки. Вероятность прохождения электронов через барьер отлична от нуля, если электрон попадает в разрешенное состояние, обладающее той же или меньшей, по сравнению с начальной, энергией. В нормальном металле заполнены все уровни энергии вплоть до максимальной, равной ϵ_F , в сверхпроводящем — до $(\epsilon_F - \Delta)$. Следует добавить, что туннельная характеристика не зависит от по-

лярности приложенного напряжения. При обратном напряжении заполненные и незаполненные состояния просто меняются ролями.

Туннельный эффект из сверхпроводника в нормальный металл появляется, когда разность потенциалов достигает величины, равной удвоенному значению щели.

Необходимо подчеркнуть, что на рис. 3.5 изображена плотность единичных, неспаренных электронов. При таком представлении не удастся сколько-нибудь правильно отразить существование куперовских пар, о которых пойдет речь в следующем параграфе. Однако оно позволяет легко понять существование энергетической щели в экспериментах по туннелированию и по поглощению излучения (рис. 3.3). Ниже в § 3.4 будет рассмотрена связь процесса туннелирования с представлением об объединении электронов в сверхпроводнике в куперовские пары.

Таким образом, целый ряд экспериментов свидетельствует о существовании энергетической щели в сверхпроводящем состоянии. Физическая природа этой щели будет рассмотрена ниже.

§ 3.3. Электрон-фононное взаимодействие и куперовские пары

Анализ многочисленных экспериментов по изучению свойств сверхпроводников привел к однозначному выводу, что сверхпроводимость является коллективным эффектом. То, что сверхпроводимость является не свойством определенных атомов, видно, в частности, из экспериментальных результатов: серое олово является полупроводником, а белое — металлом с температурой перехода в сверхпроводящее состояние $T_c = 3,72 \text{ K}$; разные кристаллические модификации лантана имеют разные значения критической температуры $T_c = 4,8 \text{ K}$ ($\alpha\text{-La}$), $T_c = 5,95 \text{ K}$ ($\beta\text{-La}$). Налицо зависимость свойств сверхпроводимости от кристаллической структуры материала. Очень странным казалось, что такие хорошие (по электропроводности) металлы, как Au, Ag, Cu, не сверхпроводят, в то время как сверхпроводники в нормальной фазе — это плохие металлы. Это еще раз показывает, что для возникновения сверхпроводимости необходимо сильное взаимодействие электронов с решеткой, ибо этим обусловлена плохая электропроводность, т.е. ситуация, когда электроны испытывают со стороны решетки сильное сопротивление своему движению под действием электрического поля.

Существенно прояснило природу сверхпроводимости открытие Максвеллом и Рейнольдсом *изотоп-эффекта*. Это явление заключается в том, что разные изотопы одного и того же сверхпроводящего металла имеют различные критические температуры T_c , причем выполняется зависимость

$$T_c M^{1/2} = \text{const.} \quad (3.5)$$

Таким образом, стало понятно, что ионная решетка металла активно участвует в создании сверхпроводящего состояния, ибо частота решеточных колебаний как раз пропорциональна квадратному корню из массы атомов. Другими словами, стало ясно, что существенным моментом в сверхпроводимости является взаимодействие электронов с колебаниями кристаллической решетки.

Обсудим качественно, каким образом может происходить взаимодействие электронов между собой через колебания решетки — фононы. Рассмотрим металл при $T = 0$, никаких фононов при этом нет, но как же происходит взаимодействие между электронами через фононы?

Пусть свободный электрон металла с волновым вектором \mathbf{k}_1 распространяется по кристаллу. В какой-то момент времени он возбуждает колебания решетки, т.е. испустил фонон (которого до этого не существовало) и перешел в другое состояние \mathbf{k}'_1 . Волновой вектор рожденного фонона обозначим через \mathbf{q} . При этом должен выполняться закон сохранения импульса:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{q}. \quad (3.6)$$

Испущенный фотон может поглотиться другим электроном k_2 , который в результате столкновения перейдет в состояние k'_2 . Сначала были два электрона в состояниях k_1 и k_2 , а в результате они оказались в состояниях k'_1 и k'_2 . Значит, произошло рассеяние электронов друг на друга, причем

$$k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2. \quad (3.7)$$

Но такое рассеяние двух частиц может происходить только при их взаимодействии.

Это же можно сказать другими словами: аналогично тому, как возникает ядерное взаимодействие нуклонов за счет обмена виртуальными π -мезонами, происходит и взаимодействие электронов в твердом теле за счет испускания одним электроном виртуального фотона (квантовой механикой разрешается такое изменение его энергии на время, определяемое соотношением неопределенностей) и затем его поглощения другим электроном.

Обратимся теперь к вопросу о знаке этого взаимодействия. В момент, когда электрон переходит из состояния k_1 в состояние k'_1 , возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega = (\epsilon_{k_1} - \epsilon_{k'_1})/\hbar$, где ϵ_{k_1} и $\epsilon_{k'_1}$ соответственно энергии электрона в состояниях k_1 и k'_1 . Предположим, что в результате колебания электронной плотности в каком-то месте произошло ее локальное увеличение. Ионы начнут притягиваться к нему и, обладая большой массой, даже после того, как скомпенсируют избыток электронов, будут продолжать свое первоначальное движение, т.е. произойдет перекомпенсация. Теперь тут появился уже избыточный положительный заряд, и вторая частица с импульсом k_2 начинает притягиваться к этому месту с перекомпенсированным локальным увеличением электронной плотности. Принято говорить, что под действием отрицательного заряда решетка поляризуется. Так возникает эффективное притяжение между частицами k_1 и k_2 .

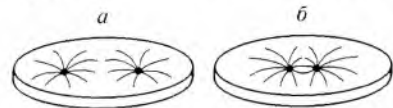


Рис. 3.6. Возникновение притяжения между двумя шариками на упругой мембране. Конфигурация a неустойчива и переходит в b

Появление притягивающего взаимодействия можно проиллюстрировать следующей механической аналогией. Упругую деформирующуюся решетку атомных остовов заменим упругой мембраной, например натянутой тонкой резиновой пленкой, на нее положим два шарика. Каждый шарик, если он достаточно удален от другого, своим весом деформирует мембрану (рис. 3.6а). Если поместить шарики поближе, то они скатываются в одну ямку (рис. 3.6б), что соответствует минимуму общей энергии. Таким образом, упругая мембрана за счет своей деформации обеспечивает взаимодействие шариков, которое

приводит к связанному состоянию. Эта модель наглядно показывает, что притягивающее взаимодействие может реализоваться благодаря упругим искажениям. Конечно, реальная ситуация с электроном в кристаллической решетке является динамической.

Чтобы электрон мог перейти из состояния k_1 в состояние k'_1 , последнее должно быть, согласно принципу Паули, свободно. Это возможно лишь вблизи поверхности Ферми. Иначе говоря, электроны, энергия которых отличается от энергии электрона на поверхности Ферми не более, чем на $\hbar\omega_D$, притягиваются друг к другу. Остальные электроны не могут поменять свой импульс. Ограничение по энергии связано с тем, что дебаевская частота — это максимально возможная частота фононов; в энергетических единицах она равна $k_B\Theta_D$, где Θ_D — температура Дебая, а k_B — постоянная Больцмана. Таким образом, в слое толщиной $k\Theta_D$ вблизи энергии Ферми обмен виртуальными фононами приводит к притяжению между электронами. Чтобы найти возможные импульсы электронов p_1 , p_2 , удовлетворяющие условию (3.7) и лежащие в узком слое, покрывающем поверхность Ферми p_F , нужно построить диаграмму (см. рис. 3.7), на которой из двух точек, распо-

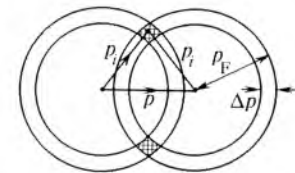


Рис. 3.7. Две оболочки радиусом p_F и толщиной $\Delta p = \hbar\omega_D/p_F$, центры которых расположены на расстоянии суммарного импульса P ; число таких пар пропорционально объему в p -пространстве кольца, поперечное сечение которого заштриховано

женных на расстоянии $P = p_1 + p_2$ друг от друга, проведены концентрические сферы радиусами $p_F - \delta p$ и $p_F + \delta p$. Все импульсы электронов, удовлетворяющие закону сохранения суммарного импульса P , начинаются или заканчиваются в кольце, поперечное сечение которого заштриховано. Число таких пар пропорционально объему этого кольца и имеет очень острый максимум при $P = 0$, когда кольцо становится полной сферической оболочкой толщиной $\Delta p \approx \hbar\omega_D/p_F$. Таким образом, наибольшее число разрешенных процессов рассеяния, приводящих к максимальному понижению энергии, возникает, когда электроны с равными и противоположно направленными импульсами образуют пары. Во время рассеяния электроны все время остаются внутри оптимального пояса шириной $k\Theta_D$.

Расчет показывает, что такое парное взаимодействие максимально, если оно не зависит от направления импульса электронов, т.е. это взаимодействие в s -состоянии — в состоянии с орбитальным моментом $l = 0$. Таким образом, координатная волновая функция взаимодействующих электронов симметрична относительно перестановки частиц. Но поскольку электроны — ферми-частицы, то их

полная волновая функция антисимметрична относительно перестановки. Следовательно, их спиновая волновая функция должна быть антисимметричной, т.е. спины взаимодействующих электронов направлены противоположно.

То же самое можно сказать иными словами. Найденное взаимодействие эквивалентно притяжению частиц при совпадении их координат. Принцип Паули запрещает двум одинаковым ферми-частицам находиться в одной точке. Следовательно, они различаются по направлениям спина. При рассмотрении пространственной симметрии волновой функции этот результат аналогичен тому, что в основном состоянии молекулы спины составляющих ее атомов также направлены противоположно.

Казалось бы, после открытия фононного притяжения можно было сразу построить теорию сверхпроводимости. Тем не менее существовала еще одна трудность, которую надо было преодолеть. Как уже отмечалось, сверхтекучесть электронной жидкости могла бы возникнуть при объединении электронов в пары, и фононное притяжение может это объяснить. Но из квантовой механики известно, что если взаимодействие недостаточно сильно или имеет слишком малый радиус действия, то связанное состояние не может возникнуть. Исключением является чисто одномерный (либо двумерный) случай, когда любое притяжение приводит к образованию связанного состояния. Но такая модель, на первый взгляд, не имеет отношения к рассматриваемому случаю, и тем не менее движение сверхпроводящих электронов действительно является квазидвумерным.

Физическая причина появления связанного состояния электронов в сверхпроводнике была указана в 1956 г. Л. Купером (часто это утверждение называют *теоремой Купера*).

Рассмотрим квантово-механическую задачу о двух электронах в нормальном металле. Будем считать, что пара электронов взаимодействует между собой посредством потенциала $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, а остальные электроны заполняют все состояния ниже уровня Ферми в соответствии с принципом Паули. Для нахождения уровней энергии и волновых функций $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ электронной пары необходимо решить уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (3.8)$$

где E — энергия электронной пары, отсчитанная от энергии двух свободных электронов, т.е. от удвоенной энергии Ферми $\hbar^2 k_F^2/m$. От координат отдельных электронов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 перейдем к координатам центра инерции $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и относительного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Так как было показано, что импульсы электронов в паре

противоположны, зависимость ψ от \mathbf{R} можно опустить, и уравнение Шредингера примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \psi(\mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Полученное уравнение проще решать, перейдя к импульсному представлению путем преобразования

$$g(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Это означает, что ψ -функция представлена в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.11)$$

При этом уравнение Шредингера (3.9) примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} + V(\mathbf{r}) \int g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \int g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.12)$$

Чтобы найти уравнение для спектральных компонент $g(\mathbf{k})$, умножим это уравнение на $e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$ и проинтегрируем по $d^3\mathbf{r}$:

$$\frac{\hbar^2}{m} \int \left(\int k^2 g(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \right) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} + \int V(\mathbf{r}) \left(\int g(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \right) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \int \left(\int g(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \right) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (3.13)$$

При этом первый член был два раза продифференцирован по \mathbf{r} . Воспользовавшись известным соотношением

$$\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.14)$$

получим

$$\frac{\hbar^2}{m} k^2 g(\mathbf{k}) + \int V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g(\mathbf{k}') \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} = \left(E + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) g(\mathbf{k}), \quad (3.15)$$

где взаимодействие

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (3.16)$$

Согласно приведенным выше аргументам, будем считать, что притягиваются только электроны, лежащие в узком сферическом слое Δk над поверхностью Ферми, относительная толщина которого

$$2\Delta k/k_F \sim \hbar\omega_D/\epsilon_F, \quad \epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m. \quad (3.17)$$

В силу обычно выполняемого в металлах условия $\hbar\omega_D \ll \epsilon_F$ величину взаимодействия можно считать постоянной, равной V_0 внутри этого слоя и нулю вне его:

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \begin{cases} -V_0, & \epsilon_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < \epsilon_F + \hbar\omega_D; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Из уравнения (3.15) получаем

$$g(\mathbf{k}) = \frac{V}{\hbar^2(k^2 - k_F^2)/m - E} \int g(\mathbf{k}) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (3.19)$$

где интегрирование распространяется на интервал, указанный в (3.18). Интегрируя левую и правую части (3.19) по $d^3 \mathbf{k}$, получим, переходя к сферическим координатам, интегральное уравнение для определения E :

$$1 = V \int \frac{1}{\hbar^2(k^2 - k_F^2)/m - E} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}. \quad (3.20)$$

Сделаем замену переменных

$$\xi = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k_F^2). \quad (3.21)$$

В соответствии с этой заменой имеем

$$\xi = \frac{p^2}{2m} - \epsilon_F, \quad p = \sqrt{2m(\xi + \epsilon_F)}, \quad d\xi = \frac{p}{m} dp, \quad dp = \frac{m}{p} d\xi. \quad (3.22)$$

При такой замене подынтегральное выражение для плотности состояний в уравнении (3.20) принимает вид

$$\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{2m(\xi + \epsilon_F)} d\xi. \quad (3.23)$$

По определению $\xi < \hbar\omega_D$, а значит, $\xi \ll \epsilon_F$, т. е. в выражении (3.23) величиной ξ можно пренебречь. Считая плотность состояний $N(\epsilon)$ на поверхности Ферми постоянной, получаем

$$\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\epsilon_F} d\xi = N_0(\epsilon_F) d\xi. \quad (3.24)$$

Итак, уравнение (3.20) может быть записано в виде

$$1 = V \int_0^{\hbar\omega_D} N_0 \frac{d\xi}{2\xi - E} = \frac{N_0 V}{2} \ln \left| \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E} \right|. \quad (3.25)$$

Предполагая взаимодействие слабым ($N_0 V \ll 1$), окончательно получаем

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N_0 V}. \quad (3.26)$$

Таким образом, при сколь угодно слабом притяжении между двумя электронами существует связанное состояние с энергией $E < 0$. Это и означает, что при наличии притяжения между электронами нормальное состояние неустойчиво по отношению к образованию электронных пар (теорема Купера). Энергия связанного состояния E равна величине энергетической щели Δ , а у пары квазичастиц энергия связи $E = 2\Delta$.

Откуда же появляется низкоразмерность движения? Дело в том, что речь идет не об изолированных частицах, а о квазичастицах при заполненной ферми-сфере. Испускание (поглощение) фонона приводит лишь к повороту импульса электронов, его положение описывается только двумя переменными (двумя углами), а величина импульса остается практически постоянной. Наличие заполненной ферми-сферы делает задачу эффективно двумерной: мы заменяем плотность состояний $N(\xi) \sim \sqrt{\xi}$ вблизи поверхности Ферми на постоянную величину $N(\xi) = N_0$.

Различные оценки константы взаимодействия V свидетельствуют, что показатель экспоненты в формуле (3.26) равен примерно 5—7, т. е. величина щели может быть в 100 и более раз меньше дебаевской энергии.

Из теории БКШ также следует вполне определенное соотношение между критической температурой и шириной щели

$$2\Delta_0 = 3,52 kT_c, \quad (3.27)$$

которое хорошо соответствует экспериментальным данным для большинства сверхпроводников. Простую оценку этого соотношения можно получить из условия, что ширина щели приблизительно совпадает с критической энергией, т. е.

$$\Delta_0 \sim kT_c. \quad (3.28)$$

Величина щели должна явно зависеть от массы иона, чтобы можно было описать изотоп-эффект (см. (3.5)). Так как в выражении для связанного состояния (3.26) справа стоит энергия Дебая, умноженная на экспоненту, много меньшую единицы, нужная зависимость получается автоматически, поскольку

$$\hbar\omega_D \propto \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (3.29)$$

§ 3.4. Основное и возбужденное состояния сверхпроводника

Состояние с минимально возможной энергией (основное состояние) возникает, когда все электроны с импульсами, лежащими в области $\Delta p = m\hbar\omega_D/p_F$ вблизи p_F , образуют куперовские пары с противоположно направленными импульсами и спинами. Это состояние часто называют *сконденсированным*, поскольку связанные вместе электроны образуют систему с наинизшей энергией аналогично тому, как

атомы газа при конденсации образуют жидкость. Важно подчеркнуть, что все спаренные электроны должны принадлежать одному и тому же квантовому состоянию и иметь одинаковую энергию, так как все они непрерывно рассеиваются между одноэлектронными состояниями с импульсами внутри области Δp . Полная энергия взаимодействующих электронных пар постоянна, несмотря на беспрепятственное изменение их импульсов.

Оказаться на самом низком энергетическом уровне (т.е. перейти в бозе-конденсат в строгом понимании этого слова) могут не все электронные пары, являющиеся бозе-частицами. Часть таких бозе-частиц из-за взаимодействия между собой должна образовать систему надконденсатных частиц. Однако и конденсатные, и надконденсатные частицы вместе образуют коллектив сверхпроводящих электронов. Надконденсатные частицы ни в коем случае нельзя рассматривать как элементарные возбуждения.

Энергетический спектр электронных пар изображен схематически на рис. 3.8. Щель Δ_0 отделяет область энергетических уровней



Рис. 3.8. Схематическое изображение энергетического спектра электронных пар

элементарных возбуждений от уровня основного состояния (уровня конденсации электронных пар). Основное состояние БКШ для многоэлектронной системы можно описывать с точки зрения заполнения одночастичных состояний, но надо помнить, что возбужденные состояния отделены щелью 2Δ от основного. Главной особенностью основного состояния является то, что одночастичные состояния заполняются попарно: если состояние с волновым вектором \mathbf{k} и спином, направленным вверх, занято, то состояние с волновым вектором $-\mathbf{k}$ и спином, направленным вниз, тоже занято. Если состояние \mathbf{k}_{\uparrow} свободно, то состояние $-\mathbf{k}_{\downarrow}$ тоже свободно. Даже при нуле температуры часть одночастичных уровней должна быть свободной, чтобы обеспечить электронам возможность рассеяния.

Иными словами, для возможного рассеяния из состояния $(\mathbf{k}_{\uparrow}, -\mathbf{k}_{\downarrow})$ в состояние $(\mathbf{k}_{\downarrow}, -\mathbf{k}_{\uparrow})$ надо, чтобы в начальном состоянии имелась пара электронов в состоянии \mathbf{k} , а в конечном состоянии — наоборот. Поэтому в сверхпроводнике при нулевой температуре минимальным является состояние с размазанной ферми-сферой (потенциальная энергия электронов в металле не учитывается, она просто равна нулю, и минимум энергии при нулевой температуре соответствует полностью заполненной ферми-сфере). В сверхпроводнике проигрыш в кинетической энергии компенсируется отрицательной потенциальной энергией притяжения. Основное состояние сверхпроводника при нулевой температуре (рис. 3.9) напоминает функцию распределения нормального состояния при $T = T_c$.

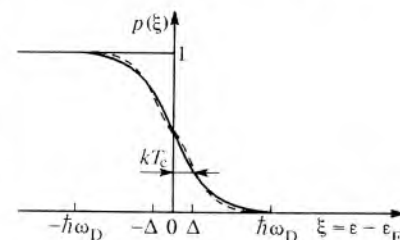
Можно вычислить разницу в энергиях сверхпроводящего и нормального состояний — это и будет энергия конденсации в сверхпроводящем состоянии, и она равна

$$W_s - W_n = -0,5N_0\Delta^2[1 - e^{-2/N_0V}] \approx -N_0\Delta^2/2, \quad (3.30)$$

где N_0 — плотность состояний на уровне Ферми, но так как она почти неизменна, то во всей области $\epsilon < \hbar\omega_D$ можно считать $N(\epsilon) \approx N_0$.

Физически это соотношение можно интерпретировать следующим образом. Принимая во внимание, что взаимодействие с образованием пар происходит для состояний в энергетическом интервале Δ , число

Рис. 3.9. Вероятность заполнения парных состояний в сверхпроводящем основном состоянии при $T = 0$. Для сравнения в том же масштабе пунктиром изображено распределение Ферми для нормального металла при $T = T_c$. Расчет выполнен для сверхпроводника с сильной связью $N_0V = 0,43$, и использовано соотношение $\Delta_0 = 1,76kT_c$



пар примерно равно $N_0\Delta$. Пусть 2Δ — энергия связи для каждой из электронных пар. Тогда произведение числа пар на энергию связи приблизительно равняется энергии конденсации.

Становится понятным, что хотя теория БКШ основного состояния и предполагает, что электроны спарены, в энергию конденсации вносят вклад преимущественно электроны с энергией, лежащей в тонком энергетическом слое порядка Δ . Рассмотрение остальных состояний, лежащих в более глубоких слоях под поверхностью Ферми, в виде парных состояний не является ошибочным, поскольку они расположены так далеко от поверхности Ферми, что практически не участвуют в рассеянии, связанном с электрон-фононным взаимодействием, а следовательно, не приводят к уменьшению энергии системы.

Итак, при ненулевых температурах нормальную систему электронов в целом можно рассматривать как газ Ферми при $T = 0$ плюс некоторая совокупность возбуждений. Аналогично можно представить основное состояние сверхпроводника (при $T = 0$) как сумму нормальных электронов, дополняющих при $T = 0$ одночастичные состояния, описываемые фермиевским распределением, и «размазанных» по области $\Delta \sim kT_c$ спаренных электронов, участвующих в электрон-фононном рассеянии. В основном состоянии пары перемещаются в \mathbf{k} -состояния с более высокой кинетической энергией, стремясь увеличить вероятность рассеяния и тем самым понизить потенциальную энергию на большую величину, чем увеличилась кинетическая энергия. Равновесное распределение достигается, когда дальнейший рост ки-

нетической энергии перестает компенсироваться уменьшением потенциальной энергии.

По мере увеличения температуры возбужденные одиночные электроны постепенно занимают места, необходимые для заполнения парами, и вероятность образования куперовских пар уменьшается вплоть до критической температуры. Становится понятным, почему фермиевский спектр при $T = T_c$ практически совпадает со спектром сверхпроводника при $T = 0$ (см. рис. 3.9).

Основываясь на картине формирования сверхпроводящего состояния, легко оценить величину термодинамического критического поля H_{cm} , равного для сверхпроводников первого рода H_c . Сверхпроводимость разрушается, когда магнитная энергия $-\chi H^2/2 = H^2/8\pi$ сравнивается с выигрышем энергии, обусловленным образованием пар. Поскольку энергия пары равна 2Δ (причем пары образуются из электронов, расположенных в слое порядка Δ возле уровня Ферми ϵ_F), энергия конденсации W_s на единицу объема

$$W_s \approx \Delta \frac{\Delta}{\epsilon_F} n, \quad (3.31)$$

где $n \approx 1/a^3$ — концентрация электронов, a — параметр решетки. Таким образом, получаем следующую оценку для H_c :

$$\frac{H_c^2}{8\pi} \approx \frac{\Delta^2}{\epsilon_F} n. \quad (3.32)$$

Так как энергия Ферми $\epsilon_F \approx \hbar^2/(2ma^2)$, то в критическом поле энергия электрона оказывается много меньше щели

$$\mu_B H_c \approx \Delta \frac{a}{\lambda}, \quad (3.33)$$

где μ_B — магнетон Бора.

Вблизи T_c экспериментально наблюдаемую температурную зависимость параметра щели можно приблизительно описать соотношением

$$\Delta(T) \approx 3,2kT_c(1 - T/T_c)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Уменьшение энергетической щели Δ с повышением температуры легко объяснимо. Для разрыва пары и создания двух элементарных возбуждений требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника T такова, что $kT \sim 2\Delta$, ясно, что много электронных пар будет разорвано под влиянием теплового воздействия и соответственно в k -пространстве многие ячейки будут заполнены элементарными возбуждениями (можно сказать нормальными или неспаренными электронами — все это разные названия одного и того же физического объекта). Это значит, что состояния в k -пространстве уже не будут участвовать во взаимных переходах пар и соответственно в общем понижении энергии сверхпроводника, т.е. энер-

гия сверхпроводника повысится. Эти же состояния, очевидно, не будут участвовать и в формировании щели. Отсюда следует, что чем больше будет разорванных пар, тем больше элементарных возбуждений и тем меньше щель.

На рис. 3.10 приведено сравнение результатов измерения температурной зависимости ширины щели для олова, тантала и ниобия с теорией БКШ.

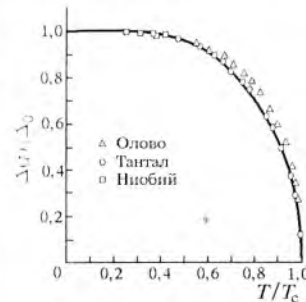


Рис. 3.10. Зависимость относительной ширины энергетической щели от относительной температуры; сплошная кривая — теория БКШ

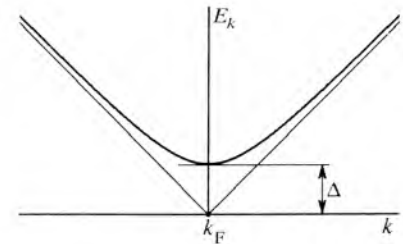


Рис. 3.11. Энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике. Тонкими сплошными линиями показан спектр нормального металла

Спектр возбужденных состояний должен быть таким, чтобы при энергии возбуждения ϵ , много большей щели, он становился спектром возбуждений нормального металла, т.е.

$$E(p)|_{\epsilon \gg \Delta} \approx \frac{1}{2m} (p^2 - p_F^2) \approx v_F(p - p_F). \quad (3.35)$$

В модели БКШ зависимость энергии E фермиевских квазичастиц (возбуждений относительно основного состояния) от импульса p имеет вид

$$E(p) = \sqrt{\Delta_0^2 + \epsilon(p)^2} = \left[\Delta_0^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.36)$$

приведенный на рис. 3.11.

Такой энергетический спектр, с одной стороны, удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау, ибо минимальное значение E/p отлично от нуля, и металл с таким электронным спектром является сверхпроводником. С другой стороны, при больших энергиях возбуждения он приближается к спектру обычного металла.

Разрыв электронной пары, требующий энергии 2Δ , приводит к образованию сразу двух возбужденных электронов, симметрично расположенных относительно k_F (правая и левая ветви спектра).

Рассмотрим с помощью модели куперовских пар случай туннельного контакта двух сверхпроводников и для простоты будем считать

$T = 0$. Выше при обсуждении туннельных экспериментов в системе металл-сверхпроводник говорилось только о неспаренных электронах. В представлении для неспаренных электронов результат взаимодействия выражался в виде изменения плотности состояния отдельных электронов. Теперь же будем считать, что каждый сверхпроводник характеризуется, с одной

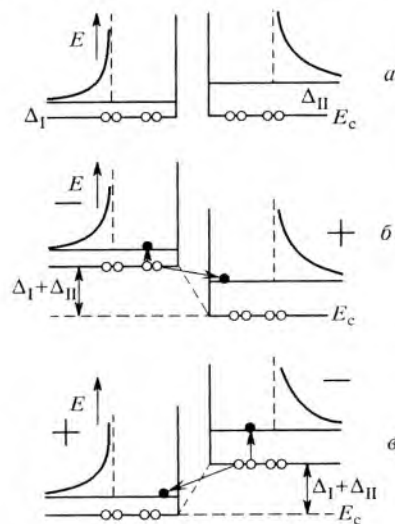


Рис. 3.12. Схематическое изображение туннельного эффекта между сверхпроводниками, имеющими различные величины щели Δ_I и Δ_{II} , с помощью куперовских пар и «возбужденных» квазичастиц: \circ — куперовские пары, \bullet — отдельные электроны (возбуждения)

напряжения $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$. Туннельный ток при этом напряжении появляется в результате разрыва куперовских пар. Отметим, что рассматривалось только туннелирование отдельных электронов, но из рис. 3.12 следует, что при достаточно тонких изолирующих слоях туннелировать могут и куперовские пары, о чем речь пойдет в главе 5.

Задача 3.1. Тантал кристаллизуется в объемно центрированную кубическую решетку с ребром $a = 3 \text{ \AA}$ и является сверхпроводником I рода с $T_c = 4,4 \text{ К}$. Считая, что каждый атом тантала отдает в зону проводимости один электрон, эффективная масса которого равна массе свободного электрона, оценить из энергетических соображений величину критического магнитного поля H_c при $T \sim 0 \text{ К}$ как поля, в котором разрушаются куперовские пары.

Решение. Плотность магнитной энергии при $H \sim H_c$ должна быть порядка энергии связи куперовских пар, т.е.

$$H_c^2/8\pi \approx 2n_s\Delta = 2 \frac{n}{2} \frac{\Delta}{\epsilon_F} \Delta = \frac{n\Delta^2}{\epsilon_F}.$$

Но

$$\Delta \approx 2kT_c, \quad n = 2/a^3, \quad \epsilon_F = \frac{1}{2m} (3\pi^2 \hbar^2 n)^{2/3},$$

откуда получаем

$$H_c \approx \sqrt{\frac{16mn^{1/3}\Delta^2}{\pi\hbar^2}} \approx 485 \text{ Гс}.$$

Отметим, что экспериментальное значение критического магнитного поля тантала составляет 830 Гс.

§ 3.5. Незатухающий сверхпроводящий ток с точки зрения микротeorии

Ответим на один из основных вопросов: каким образом при конечной температуре движение электронов в металле может оказаться бездиссипативным?

Обратимся вначале к нормальным металлам. Рассмотрим распределение электронов нормального металла в \mathbf{k} -пространстве, когда по металлу идет постоянный ток. Если тока нет, то при $E = 0$ все электроны заполняют состояния внутри сферы Ферми, которые вне этой сферы пусты. Пусть в металле присутствует электрическое поле в направлении оси x . Тогда электроны начнут ускоряться в этом направлении, а ускоренному движению электронов в x -пространстве будет отвечать равномерное движение с постоянной скоростью электронов в \mathbf{k} -пространстве. В результате вся сфера Ферми начнет с постоянной скоростью перемещаться в \mathbf{k} -пространстве в направлении оси k_x , пока можно пренебрегать процессами соударений электронов с примесями и дефектами кристаллической решетки. С учетом этих процессов рассеянные электроны, имеющие максимальное значение компоненты импульса k_x , будут перекидываться в свободные ячейки \mathbf{k} -пространства, и в конечном счете возникнет динамическое равновесие. Это значит, что, несмотря на электрическое поле и равномерное движение электронов в \mathbf{k} -пространстве в направлении оси k_x , рассеяние на дефектах приводит в целом к стационарному распределению электронов в \mathbf{k} -пространстве. Сфера Ферми оказывается несколько сдвинутой относительно начала координат, что естественно для токового состояния. Рассеяние электронов приводит к передаче энергии решетке, т.е. к разогреву проводника.

Теперь рассмотрим сверхпроводник. Ток в сверхпроводнике (в отсутствие электрического поля!) может возникнуть, если все электронные пары будут иметь один и тот же импульс $\hbar\mathbf{K}$. Пусть

ток течет вдоль оси x сверхпроводника, т.е. $\mathbf{K} = (K, 0, 0)$. Это значит, что «размазанная» сфера Ферми будет сдвинута в \mathbf{k} -пространстве на $K/2$ в направлении оси k_x . Это схематически изображено на рис. 3.13. Проследим за поведением показанной там электронной пары (1, 2), имеющей волновые вектора $(k_F \pm K/2, 0, 0)$.

Электрону 1, имеющему наибольшую кинетическую энергию, равную $(\hbar^2/2m)(k_F + K/2)^2$, было бы выгодно перейти в свободную ячейку вблизи электрона 2. При этом энергия системы понизится на величину

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_F + K/2)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} (k_F - K/2)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} k_F K. \quad (3.37)$$

Но тогда пара (1, 2) будет разрушена, и, как мы уже знаем, энергия системы повысится на 2Δ , где Δ — энергетическая щель, m — масса электрона, k_F — радиус сферы Ферми.

Отсюда ясно, что при достаточно маленьких токах (это соответствует малым K) выигрыш в энергии $\hbar^2 k_F K/m$ не может компенсировать проигрыш 2Δ и пара разрываться не будет. Такое состояние энергетически менее выгодно, чем состояние без тока ($K = 0$), но оно может оказаться метастабильным и существовать бесконечно долго. Примером тому служит замкнутое сверхпроводящее кольцо с током. Разрушение такого состояния начнется, когда разрыв пар станет энергетически оправданным, т.е. при условии

$$\hbar^2 k_F K_c / m \approx 2\Delta, \quad (3.38)$$

Рис. 3.13. Токовое состояние в сверхпроводнике

где $\hbar K_c$ — критический импульс пары. Следовательно, критический импульс пары равен

$$P_c = 2mv_c = \hbar K_c \approx 2m\Delta/p_F = 2\Delta/v_F, \quad (3.39)$$

где v_F — скорость электрона на поверхности Ферми. Отсюда легко вывести критическую энергию пары, равную энергии конденсации (3.31):

$$\mathcal{E}_c = \frac{P_c^2}{2m} = \frac{4\Delta^2}{2mv_F^2} = \frac{\Delta^2}{\epsilon_F} = \Delta \frac{\Delta}{\epsilon_F}.$$

Критическую скорость можно оценить и из критерия сверхтекучести Ландау:

$$v_c = \epsilon_{\min}/p_F = \Delta/p_F, \quad (3.40)$$

что, естественно, совпадает с формулой (3.39).

Оценим, какой плотности тока соответствует этот критический импульс. Поскольку критическая скорость пары

$$v_c = P_c/2m, \quad (3.41)$$

то критическая плотность тока будет

$$j_c = n_s e v_c = n_s e \frac{\Delta}{mv_F}, \quad (3.42)$$

где n_s — плотность сверхпроводящих электронов, которая при $T = 0$ равна электронной плотности металла.

Оценим порядок величины критической плотности тока, подставив в полученное выражение типичные значения параметров $n_s \sim 10^{22}$, $\Delta \sim 10^{-4}$ эВ, $v_F \sim 10^8$ см/с:

$$j_c \approx 10^{22} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \frac{10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}{10^{-27} \cdot 10^8} \frac{1}{3 \cdot 10^9} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2. \quad (3.43)$$

СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА

§ 4.1. Длина когерентности

Кроме лондоновской глубины проникновения λ_L , которая является мерой затухания магнитного поля внутри сверхпроводника, имеется еще один параметр длины, характеризующий сверхпроводник, — *длина когерентности*, введенная в 1953 г. А. Пиппардом. Степень упорядочения сверхпроводящей фазы идентична плотности сверхпроводящих электронов n_s . Рассматривая различные аспекты поведения сверхпроводников, Пиппард пришел к выводу, что n_s не может резко зависеть от координаты, а может изменяться заметным образом лишь на расстоянии, которое он и назвал *длиной когерентности*. Смысл длины когерентности ξ состоит в том, что любые возмущения, возникшие в какой-либо точке сверхпроводника, обязательно сказываются на свойствах сверхтекучих электронов, находящихся на расстоянии порядка или меньше ξ от этой точки.

Фактически длина когерентности определяет «характерный» размер куперовской пары, ибо ее средняя протяженность есть мера расстояния, на котором эффективно притяжение между электронами с образованием куперовской пары — электронов с противоположными импульсами и спинами. Возникновение связанного состояния двух электронов за счет обмена фононами (энергия связи порядка величины щели Δ) приводит к неопределенности в кинетической энергии пары

$$\Delta \approx \left(\frac{p_F^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \right) \approx \frac{2p_F}{2m} (p_F - p) \approx v_F \delta p. \quad (4.1)$$

Но по соотношению неопределенностей

$$\delta x \delta p \approx \hbar, \quad (4.2)$$

т. е. квантовая неопределенность в расстоянии между электронами в паре равна

$$\xi = \delta x \approx \frac{\hbar v_F}{\Delta}. \quad (4.3)$$

Обычно в качестве величины, характеризующей размер пары при нулевой температуре, выбирают немного отличающееся значение

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}. \quad (4.3a)$$

Конечно, нельзя буквально понимать, что ξ — это размер куперовской пары. Длина когерентности означает, что на расстояни-

ях порядка ξ движение электронов скоррелировано, и это отражает возникновение связанного состояния электронов, т. е. образование куперовских пар. Состояние электронов в металле непрерывно меняется, и поэтому постоянно меняются наборы пар. В то же время, если состояние одного из электронов, входящих в пару, изменится под действием какой-либо силы (например, под влиянием магнитного поля), то это сразу же скажется на поведении другого электрона.

Используя выражение для длины когерентности (4.3), легко показать, что в энергию конденсации преимущественно вносит вклад лишь небольшая часть электронов. Действительно, так как пара электронов ограничена размером $\xi = \hbar v_F / \Delta$, то импульс пары не может быть точно равен нулю, а в соответствии с принципом неопределенностей он порядка $\Delta p \approx \hbar / \xi$. Следовательно, кинетическая энергия пары порядка

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m \xi^2} = \frac{\Delta^2}{\epsilon_F} = \Delta \frac{\Delta}{\epsilon_F}. \quad (4.4)$$

Из этого выражения следует, что в среднем каждый сверхпроводящий электрон вносит в энергию конденсации лишь Δ / ϵ_F часть от энергии щели. Естественно, этот результат, подтверждающий, что ширина «размытия» фермиевского распределения сверхпроводящих электронов при нулевой температуре порядка Δ / ϵ_F , совпадает с полученным ранее выражением (3.30).

§ 4.2. Энергия границы между фазами

При анализе поведения любой физической системы необходимо помнить, что все системы стремятся перейти в состояние с наименьшей энергией. В случае сверхпроводящих металлов существует взаимодействие электронов и решетки, которое делает энергию сверхпроводящего состояния более низкой, чем энергия нормального состояния, если температура достаточно низка. Поскольку система всегда стремится перейти в состояние с наименьшей энергией, металл становится сверхпроводящим при достижении некоторой температуры перехода. При дальнейшем понижении температуры разница между энергиями нормального и сверхпроводящего состояний увеличивается. Если при некоторой температуре ниже температуры перехода включить внешнее магнитное поле, то сверхпроводник его вытолкнет. На это потребуется энергия, которую должен дать сам сверхпроводник. Она здесь выступает в форме кинетической энергии движения электронов, образующих, согласно эффекту Мейсснера, поверхностные токи. При увеличении напряженности поля энергия, требуемая сверхпроводнику для его выталкивания, также увеличивается, так что при критическом значении поля H_c она

оказывается уже выше, чем для нормального состояния. В этом случае сверхпроводник вынужден вернуться в нормальное состояние.

До сих пор нами совершенно не был рассмотрен вопрос о том, какое влияние может оказать наличие границы между сверхпроводящей и нормальной фазами. Оказывается, что при этом существенную роль играет соотношение между длиной когерентности и лондоновской длиной. Рассмотрим сверхпроводящую область, прилегающую к нормальной. Такая ситуация, например, имеет место в присутствии магнитного поля напряженностью H_c , когда в образце образуется чередование нормальных и сверхпроводящих участков (промежуточное состояние). На границе нет резкого перехода от полностью нормального состояния к полностью сверхпроводящему. Магнитный поток проникает на расстояние λ вглубь сверхпроводящей области, и в соответствии с концепцией когерентности в ней количество сверхпроводящих электронов n_s на единицу объема медленно увеличивается на расстоянии, примерно равном длине когерентности ξ .

Теперь рассмотрим свободную энергию на границе. Если граница стабильна, то сверхпроводящие и нормальные электроны должны находиться в равновесии, т.е. их свободные энергии на единицу объема должны быть одинаковы. Соотношение между свободной энергией сверхпроводящей и нормальной областей может измениться вследствие двух обстоятельств. Благодаря наличию упорядоченных сверхпроводящих электронов плотность свободной энергии сверхпроводящего состояния понижается на величину $F_n - F_s$. Кроме того, поскольку сверхпроводящая область обладает намагниченностью, уничтожающей внутренний магнитный поток, существует положительный «магнитный» вклад в плотность ее свободной энергии, равный $H_c^2/8\pi$. При равновесии $H_c^2/8\pi = F_n - F_s$, т.е. внутри сверхпроводящей области оба вклада уничтожаются, и плотность свободной энергии такая же, как в прилегающей нормальной области. Однако на самой границе степень упорядочения (количество n_s сверхпроводящих электронов) повышается постепенно на расстоянии, определяемом длиной когерентности ξ . Спад свободной энергии, связанный с увеличением упорядоченных электронов, происходит на том же расстоянии. С другой стороны, «магнитный» вклад в свободную энергию возрастает на длине порядка глубины проникновения λ . Вообще говоря, ξ не равно λ , так что оба вклада не обращаются в нуль вблизи границы. Если длина когерентности больше глубины проникновения (как на рис. 4.1а), полная плотность свободной энергии вблизи границы возрастает; это значит, что существует положительная поверхностная энергия. Как легко видеть из рис. 4.1, значение этой энергии равно приблизительно $[(1/8\pi)H_c^2](\xi - \lambda)$ на единицу площади. Это становится очевидным, если заменить две кривые на рис. 4.1а прямоугольниками, в которых плотность магнитного потока и плотность

сверхпроводящих электронов резко изменяются на расстояниях соответственно λ и ξ от края нормальной области.

Именно такое соотношение между длиной когерентности и лондоновской длиной ($\xi \gg \lambda_L$) имеет место в сверхпроводниках I рода, которые рассматривались выше. Однако, если имеет место обратное соотношение между λ и ξ , то поверхностная энергия будет отрицательна, как это показано на рис. 4.1б. В этом случае сверхпроводник будет

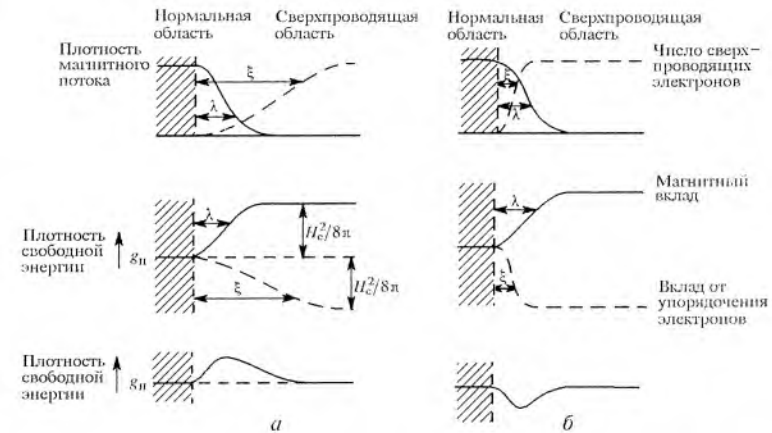


Рис. 4.1. Происхождение положительной (а) и отрицательной (б) поверхностной энергии. Сверху вниз: глубина проникновения и длина когерентности на границе; вклад, вносимый в свободную энергию; полная свободная энергия

принадлежать к сверхпроводникам II рода. К ним относятся сплавы обычных сверхпроводников (таких как свинец, олово, ртуть), очень тонкие сверхпроводящие пленки и сверхпроводники типа ниобия, высокотемпературные сверхпроводники.

В табл. 4.1 приведены значения лондоновской длины и длины когерентности для ряда сверхпроводников. Микроскопические параметры высокотемпературных сверхпроводников приведены в гл. 6 (табл. 6.1).

Следует иметь в виду, что практически любой сверхпроводник I рода можно превратить в сверхпроводник II рода введением примесей, дислокаций или каких-либо иных дефектов решетки. Если эти дефекты распределены однородно, так что в сверхпроводнике не образуется макроскопических участков с различающимися свойствами, то вся их роль сводится к нарушению пространственной корреляции электронов. Это же замечание относится и к сверхпроводникам II рода, сверхпроводящие характеристики которых сильно зависят от чистоты материала, степени и характера обработки.

Количественный анализ поверхностной энергии границы раздела (нормальной и сверхпроводящей фаз приводит к немного другим ус-

ловиям: эта энергия положительна при $\xi_0 > \lambda_L \sqrt{2}$ (сверхпроводники I рода) и отрицательна, если $\xi_0 < \lambda_L \sqrt{2}$ (сверхпроводники II рода).

Отчетливо видно (см. рис. 4.1), что образование фазовой границы между нормальной и сверхпроводящей областями при $\xi < \lambda_L$ сопровождается выигрышем энергии. Сверхпроводник, обладающий таким свойством, должен иметь минимум свободной энергии, когда в нем содержится максимальное количество межфазных границ.

Таблица 4.1. Сверхпроводящие характеристики некоторых элементов и соединений

Вещество	T_c , К	λ_L , нм	ξ_0 , нм	Δ_0 , мэВ	$H_c(0)$ или $H_{c2}(0)$, кЭ
Al	1,18	50	1600	0,18	0,105
Cd	0,55	110	760	—	0,03
Hg	4,15	40	—	—	0,39
In	3,41	51	230	0,54	0,29
Nb	9,25	44	38	1,5	1,98
Pb	7,20	40	87	1,35	0,803
Sn	3,72	51	230	0,59	0,305
Tl	2,39	92	420	—	0,179
Nb ₃ Sn	18	65	3	3,4	230
Nb ₃ Ge	23,20	—	3	3,7	380
NbTi	9,50	300	4	1,5	130
V ₃ Si	16,30	60	3	2,3	200

Иными словами, конфигурация нормальных областей, проходящих через сверхпроводящий материал, должна быть такой, чтобы отношение поверхности нормального материала к его объему было максимально. В этом случае получится совершенно новое, так называемое *смешанное состояние*, характерное для сверхпроводников II рода.

Задача 4.1. В примесном сверхпроводнике электрон упруго рассеивается на примесных атомах без потери фазы. Если среднее расстояние между примесными атомами много меньше длины когерентности ξ , то электрон движется подобно броуновской частице. Исходя из этих соображений, оценить эффективную длину когерентности ξ в сверхпроводнике с постоянной решеткой $a = 1$ Å, средним расстоянием между примесями $b = 10$ Å и критической температурой $T_c = 25$ К.

Решение. Известны следующие оценки: $\Delta \approx 2kT_c$, $v_F \approx \hbar/ma$, $\xi \approx \hbar^2/2ma kT_c$. В силу броуновского движения электрона его эффективная длина когерентности равна $\bar{\xi} = \sqrt{D t_{\text{ког}}}$ (заметим, что здесь используется не среднеквадратичное смещение \bar{x}^2 , а средняя длина смещения). Время движения электрона до того момента, пока не происходит сбой фазы, $t_{\text{ког}} = \xi/v_F$, а коэффициент диффузии, как

обычно, $D = \lambda v_F/3 = \hbar v_F/3$, где λ — длина свободного пробега. Таким образом, окончательно имеем

$$\bar{\xi} = \sqrt{\frac{a v_F \xi}{3 v_F}} = \sqrt{\frac{a \xi}{3}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 b}{6 m k T_c a}} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

§ 4.3. Вихревая структура сверхпроводников II рода

В гл. I уже упоминалось, что явление частичного проникновения магнитного потока в сверхпроводник было обнаружено Л. Б. Шубниковым еще в 1937 г. Теперь понятно, почему возможно такое поведение сверхпроводника в магнитном поле. Сверхпроводнику с отрицательной поверхностной энергией выгодно в определенном интервале полей перейти в смешанное состояние, частично «пропуская» через себя магнитный поток. Сверхпроводник проигрывает в энергии конденсации, но больше выигрывает в уменьшении энергии, необходимой для выталкивания поля из объема, и тем самым сверхпроводящее состояние может существовать при более высоких значениях магнитных полей.

Поскольку любое отличное от нуля магнитное поле обуславливает протекание в сверхпроводнике незатухающего сверхпроводящего тока, то в смешанном состоянии токи текут и в толще сверхпроводника. Разумеется, они должны быть замкнутыми, так как только тогда состояние будет стационарным. Сверхпроводящие токи со своей стороны сами изменяют распределение магнитного поля. Таким образом, в смешанном состоянии следует ожидать пространственных вариаций как напряженности магнитного поля, так и плотности сверхпроводящего тока. Вследствие жесткой корреляции куперовских пар возможны оказываются только вполне определенные конфигурации тока и магнитного поля.

А. А. Абрикосов показал, что в сверхпроводниках второго рода в присутствии сильного магнитного поля состоянием с наименьшей энергией является состояние с электронными вихрями. Согласно теории Абрикосова, в самом простом случае вихрь — это цилиндрическая трубка нормального металла очень малого радиуса (порядка одной стотысячной сантиметра), через которую магнитный поток может проникать внутрь сверхпроводника. Магнитное поле поддерживается в вихре электрическими токами, которые текут вокруг сердцевинки трубки.

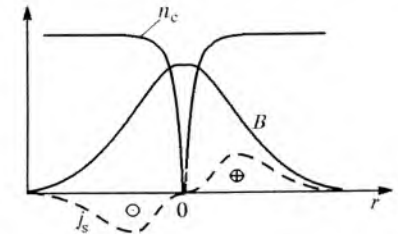


Рис. 4.2. Распределение плотности куперовских пар n_c , магнитного поля B и плотности сверхпроводящего тока j_s по поперечному сечению вихревой нити

На рис. 4.2 схематично показано распределение плотности куперовских пар, магнитного поля и плотности сверхпроводящего тока для одного вихря.

Поскольку такой вихрь представляет собой по существу цилиндрическое отверстие в сверхпроводнике, магнитный поток через такое отверстие должен квантоваться, как поток через кольцо или полый цилиндр. Каждому вихрю энергетически выгодно содержать только один квант магнитного потока, ибо при этом обеспечивается максимальное отношение поверхности к объему.

Согласно полученному Абрикосовым решению, вихри образуют регулярную решетку. Наименьшей свободной энергией обладает распределение квантов потока по углам равносторонних треугольников. Эта структура схематично изображена на рис. 4.3.

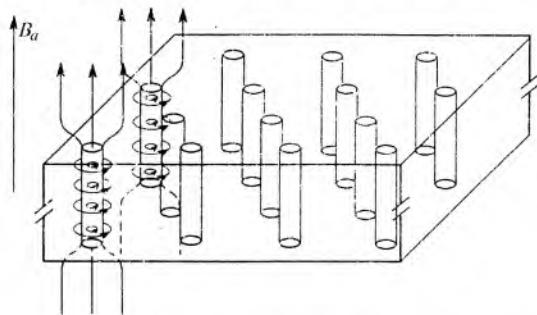


Рис. 4.3. Схематическое изображение смешанного состояния (шубниковской фазы). Магнитное поле и сверхпроводящие круговые токи показаны только для двух вихревых нитей

Предсказанная А. А. Абрикосовым структура смешанного состояния была впоследствии подтверждена в экспериментах по упругому рассеянию нейтронов и непосредственно техникой декорирования с помощью мельчайших частичек ферромагнитного порошка, концентрирующихся вблизи вихрей (рис. 4.4).

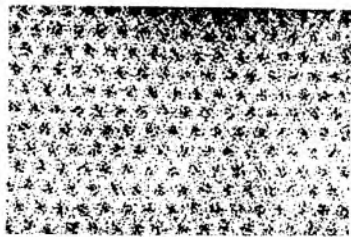


Рис. 4.4. Треугольная решетка вихревых нитей, выходящих на поверхность сверхпроводящей фольги из $Pb_{0.98}In_{0.02}$, помещенной в поле 80 Гс, направленное перпендикулярно поверхности. Расстояние между соседними вихрями составляет примерно 0,5 мкм

Задача 4.2. Найти поле одиночного вихря в пределе $\lambda \gg \xi$.

Решение. Внутри вихревой нити существуют вихревые токи, которые являются источниками поля, однако, размер нормальной

сердцевины вихря мал (порядка ξ), и поэтому имеющуюся особенность можно заменить двумерной δ -функцией $\delta_2(\mathbf{r})$ и написать уравнение Лондонов в виде

$$\mathbf{B} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = \Phi_0 \delta_2(\mathbf{r}),$$

где Φ_0 — некоторый вектор вдоль направления вихря, характеризующий силу источника поля. Покажем, что Φ_0 не что иное, как полный поток, переносимый нитью. Проинтегрируем обе стороны уравнения по площади кругового контура S радиусом r , центр которого лежит на оси нити:

$$\int \mathbf{B} d\sigma + \lambda^2 \int \text{rot rot } \mathbf{B} d\sigma = \Phi_0.$$

По теореме Стокса интеграл от ротора по поверхности можно перевести в интеграл по ограничивающему ее контуру, и получим

$$\int \mathbf{B} d\sigma + \lambda^2 \oint \text{rot } \mathbf{B} dl = \Phi_0.$$

Будем считать, что $r \gg \lambda$, тогда токами $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{B}$, а следовательно, и контурным интегралом можно пренебречь, а значит, полный поток, связанный с вихрем, равен Φ_0 .

К уравнению Лондонов с источником добавим уравнение Максвелла $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Поле \mathbf{B} направлено по оси z , линии тока являются окружностями в плоскости xy . Найдем поле вблизи нормальной нити в области $\xi \ll r \ll \lambda$. Для этого вычислим величину $\text{rot } \mathbf{B}$, т. е. ток. Рассмотрим вышеприведенное уравнение с интегралом по контуру S , который лежит в рассматриваемой области. Первым членом, описывающим поток, можно пренебречь, поскольку через контур S проходит относительно малая часть ($\sim r^2/\lambda^2$) полного потока Φ_0 . Таким образом,

$$\lambda^2 2\pi r \text{rot } |\mathbf{B}| = \Phi_0 \quad \text{или} \quad |\text{rot } \mathbf{B}| = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{1}{r}, \quad \xi < r \ll \lambda.$$

Полагая $|\text{rot } \mathbf{B}| = -(dB/dr)$ и интегрируя, находим

$$B = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda}{r} + \text{const} \right), \quad \xi < r \ll \lambda.$$

Как показывает точное решение, константа в этом выражении мала, и ее можно считать равной нулю. Таким образом, вблизи сердцевинного поля падает очень медленно по логарифмическому закону. В центре вихря магнитное поле стремится к бесконечности, но это не так, поскольку формулы не справедливы вблизи нормальной сердцевинного вихря радиусом ξ . Поэтому поле вихря в его центре можно получить с логарифмической точностью, обрезав логарифмическую расходимость на радиусе $r = \xi$:

$$B(0) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$

На больших расстояниях $r \gg \lambda$ поле спадает экспоненциально как $\exp(-r/\lambda)$, так как практически это уже решенная нами задача о проникновении поля вглубь сверхпроводника (см. § 2.2).

§ 4.4. Первое и второе критические поля

Оценим величины первого и второго критических полей, т. е. внешнее поле H_{c1} , при котором впервые становится энергетически выгодным существование вихря внутри сверхпроводника второго рода, и поле H_{c2} , при котором у него полностью исчезает сверхпроводимость.

Первое критическое поле означает, что магнитный поток через вихрь достигает величины кванта потока. Так как характерный размер, занимаемый магнитным полем, определяется лондоновской длиной, то получается следующее условие:

$$H_{c1} \pi \lambda^2 \approx \Phi_0, \quad (4.5)$$

откуда

$$H_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \lambda^2}. \quad (4.6)$$

Оценим энергию электрона в первом критическом поле. Используя определения кванта потока (2.25) и длины когерентности (4.3а), можем следующим образом преобразовать выражение (4.6):

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{\pi \lambda^2} = \frac{\hbar c}{e \lambda^2} = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta} \frac{\pi \Delta c}{e v_F \lambda^2} = \frac{a \xi_0}{\lambda^2} \Delta \frac{mc}{\hbar}. \quad (4.7)$$

При этом учитывалось, что $v_F = \pi \hbar / ma$, где a — межатомное расстояние. Итак,

$$\mu_B H_{c1} \approx \Delta \frac{a \xi_0}{\lambda^2}. \quad (4.8)$$

Как было показано в гл. 2, критическое поле сверхпроводника I рода определяется разностью свободных энергий нормального и сверхпроводящего состояний в отсутствие приложенного магнитного поля. Таким образом, можно ввести определение критического поля для всех сверхпроводников, которое в равной степени применимо к сверхпроводникам I и II рода, поскольку для любого сверхпроводника должна существовать при вышеуказанных условиях характеристическая разность свободных энергий ($F_n - F_s$) между полностью сверхпроводящим и нормальным состояниями. Такое поле H_{cm} , как уже известно, называется термодинамическим критическим полем.

Сравнивая (4.8) с аналогичным выражением для термодинамического поля (3.33), видим, что первое критическое поле в (ξ_0/λ) раз меньше равновесного поля

$$\frac{H_{c1}}{H_c} = \frac{\xi_0}{\lambda}. \quad (4.9)$$

Полное разрушение сверхпроводимости произойдет при перекрытии нормальной части вихрей, т. е. когда

$$H_{c2} \pi \xi^2 \approx \Phi_0 \quad (4.10)$$

или

$$H_{c2} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2}. \quad (4.11)$$

Аналогично выводу формулы для первого критического поля получаем

$$\mu_B H_{c2} \approx \Delta \frac{a}{\xi}. \quad (4.12)$$

Сравнение выражений (4.9) и (4.12) приводит к следующему соотношению между характерными магнитными полями:

$$H_{cm} = \sqrt{H_{c1} H_{c2}}. \quad (4.13)$$

Температурная зависимость H_{c1} и H_{c2} такая же, как и у H_c — см. (2.53). Это означает, что температурные зависимости λ и ξ одинаковы и, как следует из (4.6) и (4.11), они имеют следующий вид вблизи T_c :

$$\lambda \sim (T_c - T)^{-1/2}, \quad \xi \sim (T_c - T)^{-1/2}, \quad (4.14)$$

а во всем температурном диапазоне глубина проникновения, как уже указывалось, хорошо аппроксимируется выражением

$$\lambda^2(T) = \lambda_0^2 \frac{1}{1 - (T/T_c)^4}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим подробно магнитные свойства сверхпроводников II рода. В приложенном магнитном поле с напряженностью $H_a < H_{c1}$ сверхпроводник II рода ведет себя так же, как сверхпроводник I рода, обнаруживая идеальный диамагнетизм и намагниченность, равную $(-4\pi M)$ (рис. 4.5). Когда напряженность приложенного поля достигнет H_{c1} , на поверхности возникнут нормальные сердцевинки с окружающими их вихрями, распространяющимися по всему материалу. Пронизывающий вихри магнитный поток по направлению совпадает с потоком, создаваемым внешним магнитным полем. В результате поток в материале уже не равен нулю, и величины намагниченности возрастают.

В диапазоне полей от H_{c1} до H_{c2} с увеличением напряженности приложенного поля повышается плотность нормальных сердцевин, поэтому средняя плотность потока в материале возрастает, а вели-

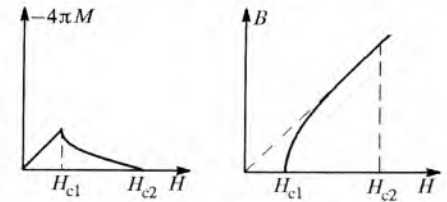


Рис. 4.5. Намагничивание сверхпроводников II рода

чина намагниченности плавно падает с увеличением H_a . При $H_a > H_{c2}$ сверхпроводящий материал находится в нормальном состоянии с нулевой намагниченностью.

Величину термодинамического критического поля можно определить из экспериментально измеренной кривой намагничивания. Дело в том, что полная площадь, ограниченная кривой намагничивания, равна разности между F_n и F_s , т. е. $H_c^2 V / 8\pi$. Это остается справедливым для сверхпроводников II рода. Рис. 4.6 иллюстрирует связь между полями H_{c1} , H_{c2} и H_c . Отношение H_{c2} и H_c должно

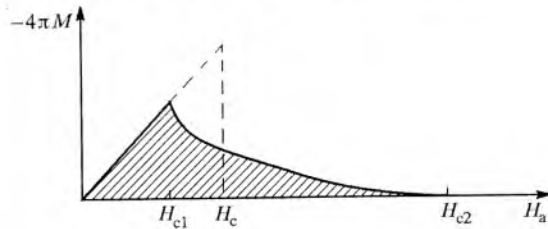


Рис. 4.6. Термодинамическое критическое поле H_c сверхпроводника II рода

быть таким, чтобы площадь, ограниченная пунктирной кривой, равнялась площади, ограниченной кривой намагничивания.

Задача 4.3. Воспользовавшись результатами вычисления поля вихря в задаче 4.2, найти величину первого критического поля.

Решение. Если n_L — число вихрей на единицу площади, то величина индукции $B = n_L \Phi_0$, так как каждый вихрь переносит один квант потока, а средняя индукция в одном вихре $B = \Phi_0$. При малой плотности вихрей их взаимодействием можно пренебречь и считать, что минимум энергии во внешнем поле H_0 достигается, когда свободная энергия единицы длины вихря ϵ будет равна энергии поля $BH_0/4\pi$, т. е.

$$\epsilon = \frac{BH_0}{4\pi} = \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi}.$$

С этого поля образование вихрей становится энергетически выгодным, это и есть первое критическое поле, определяемое как

$$H_{c1} = \frac{4\pi\epsilon}{\Phi_0}.$$

Энергия вихря — это сумма магнитной $W_m = B^2/8\pi$ и кинетической $W_k = \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2 / 8\pi$ энергий сверхпроводящих электронов. Выражение для W_m вполне понятно, а приведенное выражение для кинетической энергии следует из соотношений

$$W_k = \frac{n_s m v_s^2}{2} = \frac{m j_s}{2 n_s e^2}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Итак,

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int [B^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2] dV.$$

Воспользовавшись формулой

$$(\text{rot } \mathbf{B})^2 = \mathbf{B} \text{ rot rot } \mathbf{B} = \text{div} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}],$$

имеем

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{B} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B}) dV - \frac{\lambda^2}{8\pi} \int \text{div} [\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] dV.$$

Второй интеграл легко преобразуется в интеграл по поверхности, равный нулю, так как поле на бесконечности обращается в нуль, а в плоскостях $z = 0$ и $z = 1$ нет перпендикулярной им составляющей вектора $[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]$. Таким образом,

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}(\mathbf{B} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B}) dV,$$

а этот интеграл, согласно задаче 4.2, равен

$$\epsilon = \frac{\Phi_0}{8\pi} B(0).$$

Окончательно имеем

$$H_{c1} = \frac{4\pi\epsilon}{\Phi_0} = \frac{4\pi}{\Phi_0} \frac{\Phi_0}{8\pi} B(0) = \frac{1}{2} B(0).$$

Итак, поле в центре вихря примерно вдвое больше первого критического поля H_{c1} .

Задача 4.4. Длинный цилиндр из сверхпроводника II рода, у которого нижнее критическое поле $H_{c1} = 400$ Э, помещен в магнитное поле $H = 500$ Э, параллельное его образующей. Его намагниченность составила половину того значения, которое было при $H = H_{c1}$. Оценить среднее расстояние между вихрями магнитного потока в этом поле.

Решение. При $H = H_{c1}$, $B_1 = H_1 + 4\pi M = 0 \rightarrow 4\pi M = -H_{c1}$.

При $H = 1,25 H_{c1}$, $B_2 = H + \frac{1}{2} (4\pi M) = 300$ Гс.

Плотность вихрей $n = B_2/\Phi_0$, а среднее расстояние между вихрями

$$d \approx 1/\sqrt{n} = \sqrt{\Phi_0/B_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-7}}{300}} \sim 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Задача 4.5. В сверхпроводниках II рода с большим количеством примесей эффективная длина пространственной когерентности электронов ξ равна среднему геометрическому между ξ и средним расстоянием между примесными атомами. Оценка полей, до которых сохраняется сверхпроводимость в таких веществах, может

3*

быть получена из условия: ларморовский радиус закручивания пары в магнитном поле не должен быть меньше ее размеров. Оценить на основе этих соображений величину H_{c2} при $T = 0$ для сверхпроводника с $T_c = 10$ K, периодом решетки $a = 1 \text{ \AA}$ и с количеством примесей $N = 10^{21} \text{ см}^{-3}$.

Решение. Согласно условию задачи должно выполняться следующее неравенство:

$$\bar{\xi} = \sqrt{l\bar{\xi}} > R \approx \frac{c\rho_{\text{пары}}}{eH}.$$

Так как куперовская пара ограничена в пространстве на расстоянии порядка $\bar{\xi}$, то ее импульс не точно равен нулю, а по соотношению неопределенности его максимальное значение $p_{\text{пред}} \approx \hbar/\bar{\xi}$. Используя известные соотношения

$$\bar{\xi} \approx \frac{\hbar v_F}{\Delta}, \quad \Delta \approx 2kT_c, \quad v_F \approx \frac{\hbar}{ma}, \quad l \approx N^{-1/3},$$

получаем

$$H_{c2} \approx \frac{2kmaT_c}{e\hbar N^{-1/3}} \approx 0,6 \cdot 10^4 \text{ Э.}$$

§ 4.5. Резистивное состояние сверхпроводников II рода

Вихревая структура смешанного состояния неустойчива по отношению к току, протекающему перпендикулярно приложенному магнитному полю. Этот транспортный ток (течет ли он по поверхности или по всему сечению сверхпроводника) взаимодействует с квантованными нитями магнитного потока, приводя к появлению силы Лоренца на единицу объема:

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_s \times \mathbf{B}], \quad (4.16)$$

что в расчете на единицу длины отдельной линии потока (считая $B = n\Phi_0$) составляет

$$f_L = \frac{\Phi_0}{c} j_s, \quad (4.17)$$

где j_s — плотность транспортного сверхпроводящего тока, n — плотность вихрей. В свободном от дефектов идеальном сверхпроводнике II рода сколь угодно малая сила Лоренца приведет к движению квантованных линий магнитного потока. Это движение будет вязким, диссипативным (например, из-за образования при движении магнитного потока в проводящей среде нормальных индукционных токов). Следовательно, часть подводимой мощности должна идти на поддержание этого движения. В сверхпроводнике появится падение напряжения, он перейдет в так называемое резистивное состояние,

в котором будет иметь конечное сопротивление и рассеивать мощность.

Упрощенно, но очень наглядно, причину перемещения вихря можно представить следующим образом. На границе нормального ядра вихря циркулирующий сверхпроводящий ток близок к критическому. Когда течет сверхпроводящий транспортный ток, он складывается с одной и вычитается с другой стороны вихря с циркулирующим сверхпроводящим током. Появляющаяся надкритичность приводит к перемещению ядра нормальной фазы в сверхпроводящей матрице.

Возникает любопытная ситуация. В полях, параллельных току, сверхпроводимость (и нулевое сопротивление) сохраняется в объеме образца до второго критического поля H_{c2} , которое может быть очень велико. В полях, перпендикулярных току, сверхпроводник второго рода ни при каких токах не обладает нулевым сопротивлением, хотя практически весь объем его состоит из сверхпроводящей фазы.

В реальных сверхпроводниках II рода тем не менее существует конечный сверхпроводящий критический ток даже в последнем случае. Сопротивление в них появляется выше некоторого критического тока, достаточного для создания силы Лоренца, способной сорвать вихри с центров пиннинга и привести их в состояние вязкого течения. (По английски pin — булавка, и буквально слово пиннинг означает «пришпиливание», т.е. центры пиннинга — это места, где вихри прикреплены. Ими являются структурные и примесные дефекты, структурные дефекты, образующиеся после пластической деформации и термической обработки.)

Задача 4.6. Пусть в безграничном сверхпроводнике имеется дефект в виде цилиндрической полости размером d . Как взаимодействует с такой полостью параллельный ей одиночный вихрь?

Решение. Пусть диаметр полости d удовлетворяет неравенству $d > \xi(T)$. В этом случае оценка энергии взаимодействия проводится совсем просто. Если вихрь находится далеко от полости, то в его сердцевине диаметром $\sim 2\xi$ сосредоточена положительная энергия (относительно сверхпроводника без вихря), так как сердцевина вихря нормальна, а свободная энергия нормального состояния больше энергии сверхпроводящего состояния на $H_{cm}^2/8\pi$ на каждую единицу объема. Значит, в сердцевине вихря на каждую единицу его длины сосредоточена энергия \mathcal{E} , по порядку величины равная

$$\mathcal{E} \approx \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \pi \xi^2.$$

Если же вихрь проходит через полость, т.е. просто захвачен ею, то у него нет нормальной сердцевины, и соответственно энергия всей системы меньше на эту величину. Отсюда следует, что вихрь притягивается к полости. Силу взаимодействия на единицу длины f_p

легко найти, если учесть, что энергия меняется на величину \mathcal{E} при смещении вихря около края полости на расстояние $\sim \xi$:

$$f_p \approx H_{cm}^2 \xi d / 8.$$

Если в сверхпроводнике имеется не цилиндрическая полость, а пора в виде почти шаровой полости размером d , то сила закрепления вихря на полости f_{pd} будет равна произведению силы f_p на расстояние d :

$$f_{pd} \approx H_{cm}^2 \xi d / 8.$$

Чтобы оценить, насколько эта сила велика, найдем, какой ток нужно пропустить перпендикулярно вихрю, чтобы он создал силу Лоренца, преодолевающую эту силу f_{pd} .

Сила Лоренца, приходящаяся на единицу длины вихря, равна $j\Phi_0/c$. Следовательно, на часть длины вихря, которая взаимодействует с дефектом, придется сила $j\Phi_0 d/c$. Приравнявая ее силе f_{pd} , получим

$$j = \frac{c H_{cm}^2}{8 \Phi_0} \xi.$$

Величина этого тока порядка критического тока распаривания, а это значит, что для отрыва вихря от поры нужно пропустить максимально возможный для сверхпроводника ток.

§ 4.6. Кажущиеся парадоксы электромагнетизма

Вопрос о происхождении «сопротивления», возникающего в сверхпроводнике при движении в нем квантованных линий магнитного потока, вызвал длительную дискуссию.

Чисто феноменологически «сопротивление» может быть введено в предположении о вязком движении квантованных линий потока следующим образом. Если сила Лоренца, действующая на единичный вихрь, равна $f_L = j\Phi_0/c = \eta v_L$, то мощность, необходимая для движения n вихрей в единице объема со скоростью v_L , будет (считая $H \approx B = n\Phi_0$)

$$P = n f_L v_L = \frac{n f_L^2}{\eta} = \frac{\Phi_0}{\eta c^2} H j^2 = E j = \rho_f j^2, \quad (4.18)$$

где η — коэффициент вязкости, E — падение напряжения на единице длины сверхпроводника, ρ_f — динамическое «сопротивление» сверхпроводника в резистивном состоянии.

Отсюда

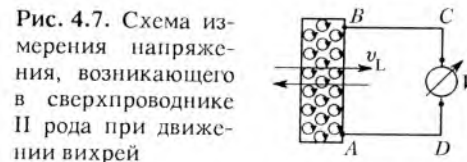
$$\rho_f = \frac{\Phi_0}{\eta c^2} H \quad \text{и} \quad E = \frac{v_L}{c} H. \quad (4.19)$$

Конечно, диссипируемая мощность Ej берется из внешней цепи, но каково происхождение ρ_f и E ? Ясно, что это не может быть результатом прямых омических потерь (хотя в конечном итоге все должно сводиться именно к ним), поскольку рассматривается образец, практически весь объем которого (вблизи H_{c1}) состоит из сверхпроводящей фазы. Механизм диссипации заложен в коэффициенте η , который в этих формулах остается свободным параметром. Наличие транспортного тока также усложняет ситуацию. Является ли E следствием протекания тока или, как утверждает формула (4.19), для его появления необходимо лишь магнитное поле и движение вихрей?

Были предложены различные механизмы диссипации. Бардин и Стефен, например, рассматривали вклад в диссипацию, связанный с протеканием транспортного тока через нормальные ядра движущихся вихрей и обычными омическими потерями на этих ядрах. Такая интерпретация в определенном интервале температур согласуется с экспериментальными данными, но оставляет открытым вопрос о появлении внутри сверхпроводника электрического поля вопреки хорошо известным фактам.

Если, как предполагалось, это поле является следствием движения вихрей, то непонятен механизм, с помощью которого непрерывное движение квантованных линий магнитного потока может индуцировать неизменное во времени напряжение. Утверждалось, что это противоречит фундаментальным законам классического электромагнетизма, а именно, закону индукции Фарадея, согласно которому ЭДС индукции в любом замкнутом контуре возникает, когда магнитный поток через этот контур меняется, и пропорциональна скорости его изменения.

Экспериментально было показано, что именно движение квантованных линий магнитного потока, чем бы оно ни было вызвано, приводит к появлению напряжения на сверхпроводнике. Две длинные тонкие ($d < \lambda_L$) оловянные пленки были разделены слоем изолятора толщиной около 100 Å. Перпендикулярно к ним включили



слабое магнитное поле, обеспечившее образование в обеих пленках квантованных вихрей, а затем пустили ток по нижней пленке, достаточный для движения вихрей. Из-за магнитной связи вихри в верхней пленке пришли в движение. Обнаружилось, что на ее концах появилось напряжение.

Чтобы понять, почему такое напряжение подозревалось в неиндукционном, нефарадеевском происхождении, рассмотрим измерительную схему (см. рис. 4.7), отвлекаясь от причины движения вихрей. Образец, его часть или даже вся цепь находятся в области однородного магнитного поля, постоянного во времени и направ-

ленного перпендикулярно плоскости рисунка. Вихри, образованные магнитным полем в сверхпроводящем образце, движутся либо внутрь, либо наружу контура $ABCD$, содержащего вольтметр. При этом эксперимент свидетельствует о появлении постоянной ЭДС в цепи вольтметра. Но для этого поток в контуре должен непрерывно изменяться с постоянной скоростью. Ясно, что в установившемся состоянии это невозможно.

Ошибочным также является предположение о том, что квантованные вихри могут переносить полный магнитный поток, т.е. являться при своем движении его своеобразной помпой. На самом деле квантованный вихрь (неподвижный или движущийся) является лишь областью пропускания внутрь сверхпроводника однородного внешнего поля или, что то же, областью экранирования от этого поля соседних с вихрем участков. При этом электроны внутри сверхпроводника (скажем, нормальные электроны в сердцевине вихря) воспринимают перемещение вихря как движущееся магнитное поле.

Это проясняет происхождение электрического поля \mathbf{E} , как следствие релятивистского преобразования движущихся полей. Магнитное поле \mathbf{H} , движущееся относительно выбранной системы координат (в нашем случае — образец и цепь вольтметра) со скоростью \mathbf{v}_L , создает в ней электрическое поле

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_L \times \mathbf{H}], \quad (4.20)$$

которое действует на электроны внутри сверхпроводника.

Точно такой же природы оказывается и напряжение на «простейшем» электрическом генераторе — классическом униполярном генераторе Фарадея, являющемся, как и рассмотренный нами случай, своеобразным исключением из «правила потока». Принцип действия униполярного генератора иллюстрируется на рис. 4.8.

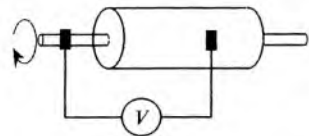


Рис. 4.8. Схема униполярного генератора

К вращающемуся продольно намагниченному цилиндрическому магниту при помощи скользящих контактов подведены концы проводника около оси и к его поверхности. ЭДС униполярной индукции на-

правлена перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы индукции \mathbf{B} и скорости \mathbf{v} магнита.

В рассматриваемом случае ЭДС направлена от оси цилиндра к его поверхности (или наоборот, в зависимости от направления вращения).

Своеобразие явления униполярной индукции заключается в том, что магнитный поток все время пересекает границу контура, но при этом полный поток через контур не меняется. Этот «бег на месте» имеет своим следствием в классических терминах силу Лоренца

$\mathbf{f} = -(e/c)[\mathbf{v}_L \times \mathbf{H}]$, эквивалентную появлению электрического поля индукции

$$\mathbf{E}' = \mathbf{f}/e = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_L \times \mathbf{H}]. \quad (4.21)$$

Итак, поскольку в сверхпроводнике (точнее в нормальных сердцевинах вихрей) появляется электрическое поле, постольку возникает движение нормальных электронов и связанные с ним омические потери, воспринимаемые как диссипация мощности на сверхпроводнике.

Задача 4.7. Найти эффективную проводимость сверхпроводника II рода.

Решение. Вихри движутся под действием тока $j_{\text{тр}}$. Сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\text{тр}} \times \Phi_0], \quad \Phi_0 = \frac{hc}{2e}.$$

Вихрь приобретает скорость v_L , и в образце индуцируется макроскопическое электрическое поле:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{B} \times \mathbf{v}_L], \quad B = n_L \Phi_0,$$

где n_L — плотность вихревых нитей. Реально течение вязкое, холловский угол $\tan \alpha = v_{\parallel}/v_{\perp}$ мал и эффективная проводимость $\sigma_f = \sigma_n H_{c2}/B$. ЭДС в сердцевине вихря \mathcal{E} и напряженность поля E следующие:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \approx \frac{1}{c} \frac{\Phi_0}{\xi/v_L}, \quad E = \frac{\mathcal{E}}{\xi} = \frac{h v_L}{2e \xi^2}.$$

Мощность, выделяемая в единицу объема,

$$W = \sigma_n E^2 n_L \pi \xi^2 = \sigma_n \frac{h^2 v_L^2}{4 \xi^2 e^2} \pi \frac{B}{\Phi_0} = \sigma_n \frac{v_L^2}{c^2} \frac{\pi}{\xi^2} \Phi_0 B \approx \sigma_n \frac{v_L^2 B^2}{c^2} \frac{H_{c2}}{B}.$$

Если ввести среднее поле $\bar{E} = v_L B/c$, то получим для эффективной проводимости $W = \sigma_f \bar{E}^2$, т.е.

$$\sigma_f = \sigma_n \frac{H_{c2}}{B}.$$

СЛАБАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Термин *слабая сверхпроводимость* появился сравнительно недавно. Под ним понимаются сверхпроводящие явления в системах со слабосвязанными сверхпроводниками, т. е. когда в сверхпроводящей цепи имеется участок, в котором тем или иным способом сверхпроводимость подавлена (имеется «слабое звено»). Начало исследования слабой сверхпроводимости относится к 1962 г., когда в лаборатории Монда Кембриджского университета дипломник Пиппарда Брайан Джозефсон проанализировал, казалось бы, малоинтересную ситуацию: что будет при контакте двух сверхпроводников, разделенных очень тонким слоем изолятора. Теперь это называется *переходом Джозефсона*. Фактически речь идет о том, как туннелируют куперовские пары. Результат проведенных Джозефсоном вычислений оказался неожиданным — вольт-амперная характеристика такого перехода не должна была быть похожа на обычный туннельный ток. Джозефсон сам пытался проверить свои выводы экспериментально, но у него ничего не получилось. В своей Нобелевской лекции он сказал, что даже хотел включить в диплом главу «Два неудачных эксперимента». Как уже указывалось в гл. 1, через несколько лет эксперимент был успешно осуществлен другими исследователями. С тех пор во всем мире слабая сверхпроводимость является не только одним из самых интенсивных направлений фундаментальных исследований, но и нашла широкое применение в различных прикладных областях.

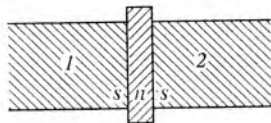


Рис. 5.1. Схематическое изображение (s-n-s)-контакта

Итак, рассмотрим два сверхпроводника, разделенных слоем нормального металла (рис. 5.1).

Пусть E_1 , E_2 — наименьшие энергии электронов в сверхпроводниках, K — константа связи между сверхпроводниками: если $K = 0$, то это единый сверхпроводник и $E_1 = E_2$. Переход электронов из одного сверхпроводника в другой может быть обусловлен только квантовомеханическим туннелированием через разделяющий их слой нормального металла. Чтобы найти закономерности этого процесса, надо решить нестационарные уравнения Шредингера. Если ψ_1 — волновая функция электронной пары на одной стороне перехода, а ψ_2 — на другой, то уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_1 \psi_1 + K \psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= E_2 \psi_2 + K \psi_1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Будем для простоты считать, что слой нормального металла разделяет одинаковые сверхпроводники. Так как $\psi\psi^*$ пропорциональна плотности электронов ρ , равной нормальной плотности в сверхпроводящем материале, то ψ_1 и ψ_2 можно записать в виде

$$\psi_1 = \sqrt{\rho} e^{i\phi_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{\rho} e^{i\phi_2}, \quad (5.2)$$

где ρ , ϕ — действительные функции r и t .

Приложим к переходу разность потенциалов V . Каждая электронная пара с зарядом $q = 2e$, пересекая переход, приобретает потенциальную энергию qV . Можно считать, что пара на одной стороне имеет потенциальную энергию $-qV/2$, а на другой $+qV/2$. С учетом приложенной разности потенциалов уравнения (5.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \frac{qV}{2} \psi_1 + K \psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{qV}{2} \psi_2 + K \psi_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подставив в первое из уравнений (5.3) выражения для ψ -функций (5.2), получим

$$i\hbar \left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} e^{i\phi_1} + i\sqrt{\rho} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} e^{i\phi_1} \right) = \frac{qV}{2} \sqrt{\rho} e^{i\phi_1} + K\sqrt{\rho} e^{i\phi_2}. \quad (5.4)$$

Введем обозначение

$$\delta = \phi_2 - \phi_1, \quad (5.5)$$

и тогда уравнение (5.4) можно переписать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\hbar \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = qV\rho + 2K\rho(\cos \delta + i \sin \delta). \quad (5.6)$$

Аналогичным образом второе уравнение (5.3) преобразуется к виду

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} - 2\hbar \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -qV\rho + 2K\rho(\cos \delta - i \sin \delta). \quad (5.7)$$

Приравнявая мнимые части обеих частей уравнения (5.6), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2K\rho}{\hbar} \sin \delta. \quad (5.8)$$

В этом выражении стоит фактически величина тока через переход, и ее можно переписать в виде

$$J = J_0 \sin \delta. \quad (5.9)$$

Полученная формула называется формулой Джозефсона (или *стационарным эффектом Джозефсона*) и определяет ток сверхпроводящих электронных пар через туннельный переход. Заметим, что

в формулу не входит величина приложенного на переход напряжения. Это означает, что сверхпроводящий ток определяется лишь градиентом фаз волновой функции. Можно представить, что в области, разделяющей пленки, интерферируют когерентные токи (волны), испускаемые обоими сверхпроводниками, и суммарный ток пропорционален синусу разности фаз. Кроме того, видно, что джозефсоновский ток не может быть больше некоторого критического тока $J_c = J_0$, соответствующего $\delta = \pi/2$, его величина определяется как свойствами перехода, так и свойствами сверхпроводников. Чем выше температура, тем меньше энергетическая щель и тем меньше критический ток.

Важные применения стационарного эффекта Джозефсона основаны на включении контакта в сверхпроводящий контур, и поэтому рассмотрим физические явления, происходящие в такой системе. Магнитный поток через площадь полностью сверхпроводящего контура (не содержащего слабой связи) строго постоянен. Напомним, откуда это следует. В сверхпроводнике не может возникнуть ЭДС индукции, так как падение напряжения на нем равно нулю. Поскольку $\mathcal{E}_{\text{инд}} = c^{-1}(d\Phi/dt)$, то $d\Phi/dt = 0$ и $\Phi = \text{const}$. Это постоянное значение магнитного потока квантуется. Оно равно целому числу квантов потока Φ_0 , и изменить его, не переводя контур в нормальное состояние, нельзя — магнитный поток в контуре заморожен. Если же сверхпроводящий контур содержит слабую связь, то магнитный поток через площадь контура может меняться — кванты магнитного потока проникают в контур через слабую связь.

Проследим, как с ростом внешнего магнитного поля меняются магнитный поток внутри сверхпроводящего кольца со слабой связью и величина тока в нем (см. рис. 5.2).

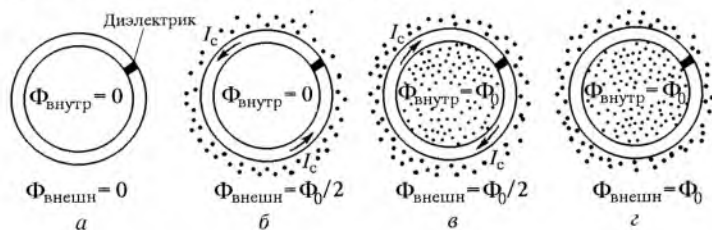


Рис. 5.2. Сверхпроводящий контур с джозефсоновским элементом во внешнем магнитном поле

Пусть вначале внешнее поле и ток в контуре равны нулю (см. рис. 5.2а). Тогда поток внутри контура тоже равен нулю. Будем увеличивать внешнее поле, в результате чего в контуре появится сверхпроводящий ток, магнитное поле которого точно компенсирует внешний поток. Так будет продолжаться до тех пор, пока ток в контуре не станет равным критическому току контакта J_c (см. рис. 5.2б). Пред-

положим для определенности, что в этот момент внешнее поле создает поток, в точности равный половине кванта $\Phi_{\text{внешн}} = \Phi_0/2$ (варьируя, например, толщину слоя диэлектрика, величину критического тока всегда можно сделать такой, чтобы выполнялось условие $c^{-1}LJ_c = \Phi_0/2$, где L — индуктивность кольца; это упрощает рассмотрение, но не меняет существа дела).

Как только ток превысит критическое значение J_c , сверхпроводимость в месте слабой связи разрушится, и в контур войдет квант потока Φ_0 (см. рис. 5.2в). При этом отношение $\Phi_{\text{внешн}}/\Phi_0$ скачком увеличится на единицу (сверхпроводящий контур перейдет в новое квантовое состояние). Величина же сверхпроводящего тока не изменится, но направление его станет противоположным. Действительно, если до проникновения кванта потока Φ_0 ток J_c полностью экранировал внешний поток $\Phi_0/2$, то после вхождения он должен усиливать внешний поток $\Phi_0/2$ до значения Φ_0 . Поэтому в момент проникновения вихря направление тока скачком меняется на противоположное.

При дальнейшем увеличении внешнего поля ток в кольце будет уменьшаться, и поток внутри кольца будет оставаться равным Φ_0 . Ток в контуре обратится в нуль, когда внешний поток также станет равным Φ_0 (см. рис. 5.2г), а затем он начнет течь в обратном направлении (экранировка). При значении внешнего потока $3\Phi_0/2$ величина тока опять равна J_c , сверхпроводимость разрушается, входит еще один квант потока и т.д.

Графики зависимости магнитного потока внутри кольца $\Phi_{\text{внутр}}$ и тока J в нем от внешнего потока $\Phi_{\text{внешн}}$ показаны на рис. 5.3. Оба

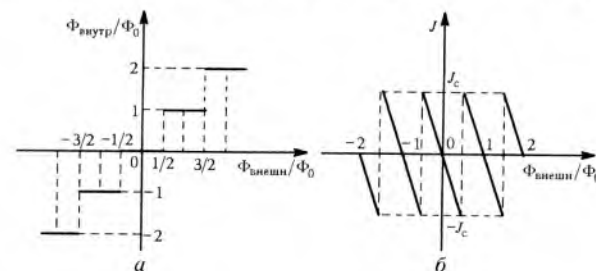


Рис. 5.3. Зависимость магнитного потока внутри контура (а) и тока в контуре (б) от внешнего потока

потока измеряются в естественных единицах — квантах потока Φ_0 . Ступенчатый характер зависимости позволяет чувствовать отдельные кванты потока, а ведь это величина всего $\sim 10^{-7}$ Гс·см².

Еще раз подчеркнем, что явления, происходящие в сверхпроводящем контуре со слабой связью во внешнем магнитном поле, обусловлены когерентными свойствами сверхпроводящего состояния.

Это особенно ясно видно при включении в контур двух джозефсоновских контактов (рис. 5.4).

Полный ток J в кольце с двумя контактами определяется интерференцией токов, проходящих через контакты:

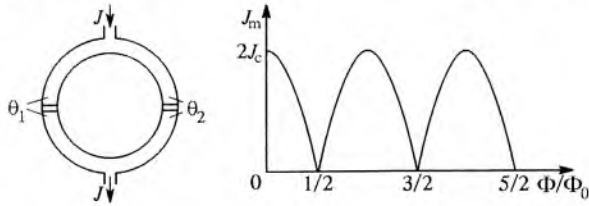


Рис. 5.4. Слева — схема двухконтактного интерферометра, справа — зависимость критического тока от величины магнитного потока

ференцией токов, проходящих через контакты:

$$J = J_c \sin \Theta_1 + J_c \sin \Theta_2, \quad (5.10)$$

где Θ_1, Θ_2 — скачки фаз волновых функций на переходах, а критические токи обоих контактов для простоты предполагаются одинаковыми. В результате критический ток J_m периодически зависит от внешнего магнитного поля и обращается в нуль всякий раз, когда поток равен полному числу квантов.

Описанные устройства лежат в основе целого семейства очень точных измерительных приборов — сквидов, название которых произошло от английского названия этих устройств Superconducting Quantum Interference Devices.

Вернемся к анализу уравнений (5.3), описывающих поведение сверхпроводящих пар в $(s-n-s)$ -контакте. Приравнявая действительные части уравнений (5.6) и (5.7), получаем другую пару уравнений:

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{K\rho}{\hbar} \cos \delta + \frac{qV}{2\hbar}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\frac{K\rho}{\hbar} \cos \delta + \frac{qV}{2\hbar}, \quad (5.12)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{qV}{\hbar}. \quad (5.13)$$

Заметим, что заряд носителей тока равен заряду куперовской пары, т.е. $q = 2e$.

Проанализируем полученные результаты. Из уравнения (5.13) следует, что разность фаз волновых функций по обе стороны от контакта

$$\delta = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt. \quad (5.14)$$

Если приложить постоянное напряжение V_0 , то выражение для тока примет вид

$$J = J_c \sin \left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right). \quad (5.15)$$

Величина q/\hbar чрезвычайно велика ($\approx 10^{17}$), и, например, напряжению величиной 1 мкВ соответствует частота 483,6 МГц. Таким образом, при приложении разности потенциалов получаем очень быстро осциллирующий ток, и фактически ток через переход не пойдет. Это так называемый *нестационарный эффект Джозефсона*. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода приведена на рис. 5.5.

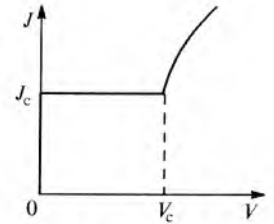


Рис. 5.5. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода

Если напряжение на переход не подается, то ток может быть любой, но не выше критического значения; это — стационарный эффект Джозефсона. Но стоит только подать напряжение, как ток, согласно приведенным выше рассуждениям, становится равным нулю. При подаче на контакт внешнего напряжения, превышающего критическое V_c , переход приобретает конечное электросопротивление, но ток имеет осциллирующую составляющую с частотой $\omega = 2eV/\hbar$. Это — *нестационарный эффект Джозефсона*.

Рассмотрим теперь другую ситуацию. Пусть к переходу, кроме постоянного напряжения, приложено также слабое переменное поле:

$$V = V_0 + v \cos \omega t \quad (v \ll V_0). \quad (5.16)$$

В этом случае разность фаз волновых функций по обе стороны от контакта

$$\delta(t) = \int (V_0 + v \cos \omega t) dt = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t + \frac{qv}{\hbar \omega} \sin \omega t. \quad (5.17)$$

Если учесть малость v , то приближенно

$$\sin(x + \delta x) \approx \sin x + \delta x \cos x, \quad (5.18)$$

и ток через переход примет вид

$$J = J_c \sin \delta(t) = J_c \left[\sin \left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) + \frac{qv}{\hbar \omega} \sin \omega t \cos \left(\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) \right]. \quad (5.19)$$

Из сказанного выше первый член в квадратных скобках равен нулю, а второй оказывается резонансным: если $qV_0/\hbar = \omega$, то через контакт пойдет ток. Видно, что $(s-n-s)$ -переход ведет себя под действием переменного поля как двухуровневая квантовая система,

в которой переход в возбужденное состояние происходит при условии равенства энергии падающего кванта разности энергий уровней. Учитывая, что $q = 2e$, получаем условие резонанса

$$\hbar\omega = 2eV_0. \quad (5.20)$$

Принципиальным моментом всех наших рассуждений является тот факт, что когда речь идет о туннелировании сверхпроводящих электронных пар, не взаимодействующих с колебаниями решетки,

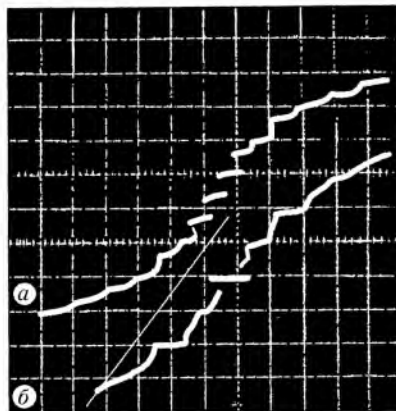


Рис. 5.6. Осциллограммы вольт-амперных характеристик ($s-n-s$)-перехода в высокочастотном поле 9,3 ГГц (а) и 24,85 ГГц (б), полученные впервые С. Шапиро

единственным механизмом отдачи или поглощения энергии извне (эти энергии, естественно, меньше щели) является испускание или поглощение кванта электромагнитной энергии — фотона. В случае стационарного эффекта Джозефсона разность потенциалов на переходе равна нулю, и пары туннелируют без изменения энергии из одного сверхпроводника в другой. Когда же на переходе появляется разность потенциалов, то туннелирующая пара с зарядом $2e$ может перейти на другую сторону барьера лишь с поглощением (переход вверх) или испусканием (переход вниз) фотона.

Это означает, что если, скажем, облучать переход СВЧ-волной (~ 10 ГГц, что соответствует длине волны порядка 1–3 см), то

получим на вольт-амперной характеристике ($s-n-s$)-перехода при $V_n = n\hbar\omega/2e$ так называемые ступеньки Шапиро (рис. 5.6).

Естественно, может происходить и обратный эффект — излучение таких же резонансных частот, что впервые экспериментально наблюдалось в 1965 г. в Харькове И. М. Дмитренко, В. М. Свистуновым и И. К. Янсоном. Это явилось не только окончательным подтверждением предсказаний Джозефсона, но и примером высочайшего экспериментального мастерства, ибо в указанных опытах была зарегистрирована мощность излучения на уровне 10^{-14} Вт.

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВЕРХПРОВОДНИКИ

Как указывалось в гл. 1, в настоящее время к высокотемпературным сверхпроводникам (ВТСП) относятся соединения, основанные на оксидах меди и имеющие температуру сверхпроводящего перехода в области азотных температур. Учитывая такой состав ВТСП, их называют часто металлооксидами или купратами. Сейчас известно более двух десятков высокотемпературных сверхпроводников, которые являются купратами различных металлов. По основному металлу они соответственно называются иттриевыми (например, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, $T_c \approx 90$ К), висмутовыми ($\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, $T_c \approx 95$ К), таллиевыми ($\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, $T_c \approx 110$ К), ртутными ($\text{HgBa}_2\text{CaCu}_2\text{O}_6$, $T_c \approx 125$ К) ВТСП.

В состав оксидных сверхпроводников входит обычно 4–5 различных сортов атомов, а в элементарную кристаллографическую ячейку до 20 атомов. Практически все ВТСП обладают слоистой

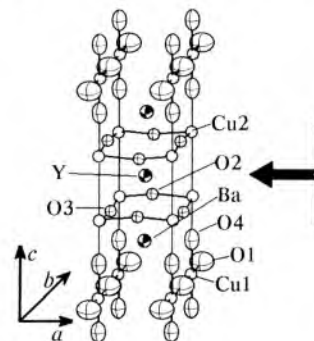


Рис. 6.1. Кристаллографическая структура $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$; стрелкой показано положение проводящих плоскостей $\text{Cu}-\text{O}$

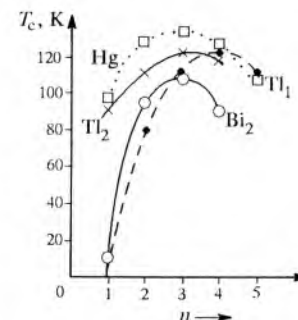


Рис. 6.2. Зависимость критической температуры от количества промежуточных слоев $\text{Cu}-\text{O}$

структурой типа перовскита с плоскостями из атомов Cu и O . На рис. 6.1 показана структура типичного широко распространенного высокотемпературного сверхпроводника — иттриевого соединения $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$.

Число промежуточных медных слоев может быть различным, и в настоящее время синтезированы соединения, в которых число CuO_2 слоев достигает пяти. Зависимость критической температуры T_c от количества слоев n для различных соединений показана на рис. 6.2. Видимо, наличие этих слоев является определяющим в воз-

никновении высокотемпературной сверхпроводимости. На ранней стадии изучения ВТСП казалось, что, увеличивая n , можно повышать температуру сверхпроводящего перехода. Однако, как видно из рис. 6.2, при этом наблюдается явное насыщение T_c . Для достижения высокого значения T_c бывает достаточно и одной купратной плоскости, как это имеет место в ВТСП состава $Tl_2Ba_2CuO_5$ с $T_c \approx 80$ К. Тем самым стало ясно, что корреляция T_c с n имеется, но не количество слоев является определяющим в появлении сверхпроводимости.



Рис. 6.3. Зависимость T_c от содержания кислорода x в иттриевых купратах $YBa_2Cu_3O_{7-x}$

Существенную роль в сверхпроводимости играет наличие кислорода. Атомы кислорода могут занимать две различные позиции: в плоскостях CuO_2 (обозначаются O3) и цепочках CuO (O1) (рис. 6.1). Химическая связь атомов кислорода в цепочках невелика, и при термической обработке они могут выходить из кристалла, а в цепочках образуются вакансии (дырки), что сопровождается структурными превращениями. Так, полному заполнению кислородом медных цепочек в иттриевом купрате ($x = 7$) соответствует орторомбическая структура, а в случае отсутствия атомов O1 решетка имеет тетрагональную структуру ($x = 6$). На рис. 6.3 показано изменение T_c этого

соединения в зависимости от содержания кислорода x .

Результаты многочисленных экспериментов подтверждают предположение, что плоскости с кислородом являются основным объектом в кристаллографической решетке, они ответственны как за проводимость этих оксидных соединений, так и за возникновение в них сверхпроводимости при высоких температурах.

Высокотемпературные сверхпроводники являются типичными представителями сверхпроводников II рода с очень большим отношением лондоновской длины к длине когерентности — порядка нескольких сотен. Поэтому второе критическое магнитное поле H_{c2} имеет очень высокое значение. В частности, у Bi 2212 оно составляет примерно 400 Тл, а H_{c1} равно нескольким сотням эрстед (в зависимости от ориентации поля относительно кристалла). В табл. 6.1 приведены параметры некоторых типичных представителей купратных семейств.

В монокристаллах высокотемпературных сверхпроводников в магнитных полях, больших H_{c1} , наблюдается регулярная вихревая структура, подобная ранее обнаруженной в традиционных сверхпроводниках II рода.

Таблица 6.1. Параметры ВТСП-материалов.

Соединения	T_c , К	Число CuO-слоев	$\lambda_{a,b}$, нм	λ_c , нм	$\xi_{a,b}$, нм	ξ_c , нм
$La_{1.85}Sr_{0.15}CuO_4$	40	1	80	430	3,7	0,7
$YBa_2Cu_3O_7$	95	2	27	180	3,1	0,4
$Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$	95	2	25	500	3,8–1,8	0,2
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	115	3	< 25	> 500	3,0	< 0,2

Для большинства ВТСП характерна сильная анизотропия, что приводит, в частности, к весьма необычному характеру зависимости магнитного момента этих веществ от величины поля в случае, если оно наклонено к основным кристаллографическим осям. Суть эффекта состоит в том, что вследствие значительной анизотропии вихревыми линиями вначале энергетически более выгодно располагаться между слоями CuO_2 в плоскости (ab) (в плоскости слоев) и лишь затем, после превышения некоторого поля, начинать пронизывать ab -плоскости.

Из-за малой длины когерентности $\xi \approx (1-30)$ Å вихри слабо закреплены на дефектах образца и могут легко двигаться по нему как при пропускании тока через образец, так и при наличии градиента температуры. Рисунок 6.4 служит качественной иллюстрацией механизма движения вихрей. Потенциальный рельеф для вихрей в образце определяет силу пиннинга (рис. 6.4а).

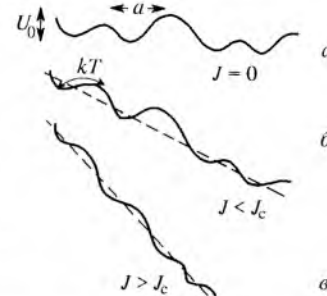


Рис. 6.4. Схематическое изображение потенциального рельефа, приводящего к закреплению вихрей (пиннингу), и изменение его при протекании тока через образец

Если через образец пропускать ток, то из-за силы Лоренца $[J \times B]$, действующей на вихри, потенциальный рельеф изменится (рис. 6.4б и в). При критическом токе J_c все вихри начинают свободно двигаться по образцу, т.е. пиннинг в этом случае отсутствует. Однако при конечной температуре существует вероятность движения вихрей и при $J < J_c$. Действительно, вероятность проникновения вихрей через барьер высотой U

$$W = W_0 \exp(-U/kT). \quad (6.1)$$

При наличии тока

$$U = U_0(1 - J/J_c), \quad (6.2)$$

и поэтому

$$W = W_0 \exp \frac{U_0(1-J/J_c)}{kT}. \quad (6.3)$$

Разрешая это выражение относительно J , получаем

$$J = J_c \left(1 - \frac{kT}{U_0} \ln \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (6.4)$$

Таким образом, если в сверхпроводнике II рода с пиннингом возможен сверхпроводящий ток, то он будет затухать со временем. В традиционных сверхпроводниках U_0/kT велико, и этот эффект практически отсутствует. В ВТСП величина $U_0/kT \sim 0,1$, и движение вихрей становится легко наблюдаемым.

Этот эффект легко наблюдается путем измерения временной зависимости установления равновесного магнитного момента после резкого изменения внешнего магнитного поля или температуры. Скорость релаксации намагниченности в ВТСП может колебаться от нескольких секунд до десятков часов в зависимости от температуры.

В заключение остановимся на вопросе о микроскопической природе высокотемпературной сверхпроводимости. К сожалению, при наличии достаточно полной картины физических свойств ВТСП общепринятого представления о природе возникновения сверхпроводимости в оксидных соединениях в настоящее время нет.

С одной стороны, результаты многочисленных измерений величины энергетической щели показывают, что значение $2\Delta_0/kT_c$ для всех ВТСП находится в пределах $5 \div 7$. Это значительно превосходит полученную в теории БКШ величину $2\Delta_0/kT_c = 3,52$, но существенно не отличается от значений, ранее обнаруженных у некоторых традиционных сверхпроводников с сильной связью (у свинца оно равно $4,2 \div 4,6$, у аморфных пленок $4,5 \div 4,9$). Квант магнитного потока у этих веществ $\Phi_0 = hc/2e$, напряжение ступенек Шапиро равно $\hbar\omega_n/2e$ с точностью до $3 \cdot 10^{-4}$. Это свидетельствует о том, что перенос заряда осуществляется парами. На основе данных о фононном спектре ВТСП в рамках теории БКШ удастся получить высокое значение температуры сверхпроводящего перехода.

С другой стороны, в рамках простейшей схемы БКШ целый ряд наблюдаемых физических особенностей новых материалов не находит своего объяснения. Поэтому для понимания явления высокотемпературной сверхпроводимости привлекаются различные новые подходы. В частности, в некоторых моделях связывают наличие высокотемпературной сверхпроводимости не с электрон-фононным взаимодействием, а с электрон-электронным. Обычно в этих моделях рассматривается взаимодействие между электронами через возбуждения электронной системы (например, экситоны).

То, что в высокотемпературных сверхпроводниках происходит спаривание электронов с противоположными спинами, сейчас не

вызывает сомнений, однако вопрос о том, каким угловым моментом обладает эта пара, широко обсуждается уже несколько лет. Имеются достаточно веские аргументы в пользу того, что сверхпроводящее состояние купратов, подобно обычным сверхпроводникам, состоит из электронных пар с четным угловым моментом. Дело в том, что за проводимость в этих соединениях ответственны $(\text{Cu}-\text{O})$ -плоскости, в которых ионы меди образуют квадратную решетку. Для квадратной решетки, в силу ее симметрии, разрешенными являются четные значения углового момента — 0 (s -волна) и 2 (d -волна).

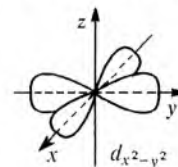
Как проявляет себя угловой момент сверхпроводящей пары? Он определяет зависимость сверхпроводящей щели у поверхности Ферми от волнового вектора квазичастиц. Если электроны спариваются в s -состоянии, то энергетическая щель имеет одну и ту же величину во всех точках сферы Ферми. Однако, если электронные пары соответствуют d -спариванию, обозначаемому как $d_{x^2-y^2}$, форма щели в k -пространстве подобна клеверному листку (рис. 6.5), и она описы-

вается функцией $\cos(k_x a) - \cos(k_y a)$ (в реальном пространстве функцией $x^2 - y^2$ для точек (x, y) на окружности).

При $d_{x^2-y^2}$ -спаривании сверхпроводящая щель положительна в одних направлениях в k -пространстве и отрицательна в других, а значит, она проходит через нуль. Эксперименты отчетливо показывают, что по крайней мере спаривание анизотропно. Кроме того, последние эксперименты (1995 г.) по измерению закона квантования потока в маленьких трехкристаллических (состоящих из трех монокристаллов с разной кристаллической ориентацией) колечках свидетельствуют, что квант потока в них составляет $\Phi_0/2$, что может быть лишь при d -волновой симметрии пары.

Выше были рассмотрены физические свойства монокристаллических ВТСП. Первые ВТСП были получены спеканием соответствующих химических компонентов с последующим отжигом в атмосфере кислорода. В результате получается керамический сплав, состоящий из спекшихся сверхпроводящих гранул. Поэтому такие ВТСП называют керамическими или гранулярными. Характерный размер гранул обычно составляет около 10 мкм. Первые эксперименты проводились именно на таких керамических образцах, и лишь потом научились выращивать монокристаллические образцы, что до сих пор является довольно трудной технологической задачей. Следует отметить, что гранулярные сверхпроводники обладают новыми интересными физическими свойствами, в принципе невозможными в классических негранулярных низкотемпературных сверхпроводниках. Гранулярные сверхпроводники представляют собой случайную

Рис. 6.5. Схематический вид угловой зависимости волновой функции сверхпроводящей пары, соответствующей $d_{x^2-y^2}$ -симметрии ($\Delta(k) \sim k_x^2 - k_y^2 \cos 2\theta$)



среду со слабыми джозефсоновскими связями, определяющими, в частности, крайне необычные ее электродинамические свойства. Практически все прикладные исследования, о которых пойдет речь в следующей главе, проводятся именно на основе керамических образцов.

ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Вопросы различных применений сверхпроводимости стали обсуждаться практически сразу же после открытия этого поразительного явления. Еще Камерлинг-Оннес считал, что с помощью сверхпроводников можно создавать экономичные установки для получения сильных магнитных полей. Однако реальное использование сверхпроводимости началось лишь в конце 50-х—начале 60-х годов. В настоящее время уже работают сверхпроводящие магниты различных размеров и формы. Их применение вышло за рамки чисто научных исследований, и сегодня они широко используются в лабораторной практике, в ускорительной технике, томографах, установках для управляемой термоядерной реакции. С помощью сверхпроводимости стало возможным многократно повысить чувствительность многих измерительных приборов. Особо следует подчеркнуть внедрение сквидов в технику, в том числе и в современную медицину. Сверхпроводимость стала большой отдельной отраслью промышленности. Открытие высокотемпературной сверхпроводимости создало предпосылки к более широкому внедрению в повседневную практику различных сверхпроводящих устройств. Ниже мы приведем для иллюстрации лишь несколько примеров.

Наибольшее применение сверхпроводники нашли в настоящее время в области создания сильных магнитных полей. Современная промышленность производит из сверхпроводников II рода разнообразные провода и кабели, используемые для изготовления обмоток магнитов. Преимущества сверхпроводящих магнитов очевидны. С помощью сверхпроводников получают значительно более сильные магнитные поля (как уже указывалось, в чисто сверхпроводящих системах достигнуты поля более 20 Тл), чем при использовании железных магнитов. Сверхпроводящие магниты являются и более экономичными. Так, например, для поддержания в медном соленоиде с внутренним диаметром 4 см и длиной 10 см поля в 100 кГс необходима электрическая мощность не менее 5100 кВт, которую нужно полностью отвести водой, охлаждающей магнит. Это означает, что через магнит надо прокачивать не менее 1 м³ воды в минуту, а затем ее еще охлаждать в специальном устройстве (градирне). В сверхпроводящем варианте такой объем магнитного поля создается достаточно просто, необходимо лишь соорудить гелиевого криостата для охлаждения обмоток, что является несложной технической задачей.

Следует отметить, что максимально возможное магнитное поле, создаваемое сверхпроводящими магнитами, ограничено верхним пределом для плотности тока (критическими токами — см. § 3.5). Критический ток определяется, как правило, технологией приготовления проводников, а не верхним критическим полем материала.

Изготовить соленоид, создающий в объеме в несколько кубических сантиметров магнитное поле до 10 Тл, сейчас под силу любой лаборатории. Конечно, конструирование магнитов с большим объемом магнитного поля является серьезной инженерной задачей, ибо необходимо грамотно учитывать как всевозможные теплопритоки в криогенную систему, так и механические напряжения, возникающие в обмотке и конструктивных деталях. Так, например, радиальное усилие, возникающее в цилиндрическом соленоиде с внутренним диаметром 50 см при поле 50 кГс, составляет около 300 кг/см². Конструкция соленоида должна выдерживать такую нагрузку и в то же время не влиять на магнитное поле.

Сверхпроводящие магниты обладают еще одним преимуществом по сравнению с обычными. Они могут работать в короткозамкнутом режиме, когда поле «заморожено» в объеме, что обеспечивает практически не зависящую от времени стабильность поля. Это свойство чрезвычайно важно при измерениях в веществе ядерного магнитного и электронного парамагнитного резонансов, в томографах и т. п.

В сверхпроводящих соленоидах с большим объемом поля запасенная энергия достаточно велика. В случае перехода катушки в нормальное состояние (например, из-за проникновения газа в откачанный объем криостата либо при превышении критического поля) эта энергия превратится в тепло. Например, при поле 50 кГс в объеме 1 м³ запасенная энергия составляет примерно 10⁷ Дж (около 2,8 кВт·ч). Если при переходе в нормальное состояние вся энергия бесконтрольно превратится в тепло, то это может привести (из-за мгновенного превращения жидкого гелия в газ и резкого повышения давления в системе) к полному разрушению магнита. Во избежание таких катастрофических последствий самопроизвольного перехода катушки в нормальное состояние соленоиды, в особенности большие, снабжаются специальными защитными устройствами, предназначенными для быстрого вывода запасенной энергии.

Очень заманчиво попытаться использовать сверхпроводники в электротехнике и энергетике. Ведь в настоящее время потери на джоулево тепло в подводящих проводах оцениваются величиной 30–40 %, т. е. более трети всей производимой энергии тратится даром — на «отопление» Вселенной. Если же передавать электроэнергию по сверхпроводящим проводам с нулевым сопротивлением, то таких потерь не будет вообще. Это равносильно увеличению выработки электроэнергии более чем на треть. На основе сверхпроводников можно создавать электродвигатели и генераторы с высоким КПД и другими улучшенными рабочими характеристиками.

Если над металлическим кольцом с током поместить сверхпроводящую сферу, то на ее поверхности в силу эффекта Мейсснера индуцируется сверхпроводящий ток, что приводит к появлению сил отталкивания между кольцом и сферой, и сфера висит над кольцом. Подобный эффект механического отталкивания наблюдается и в том случае, когда над сверхпроводящим кольцом помещается постоян-

ный магнит. Этот эффект, часто используемый для демонстраций явления сверхпроводимости, получил название «гроб Магомета», ибо, по преданию, гроб Магомета висел в пространстве без всякой поддержки. Фотография диска из ВТСП, парящего над магнитом, приведена на обложке.

Явление механического отталкивания применяется, в частности, для создания подшипников и опор без трения. Заманчива перспектива использования левитации сверхпроводника в транспорте. Речь идет о создании поезда на магнитной подушке, в котором будут полностью отсутствовать потери на трение о колею дороги. Модель такой сверхпроводящей дороги длиной 400 м была создана в Японии еще в 70-х годах. Вагон массой 2 т и размером 4 × 1,5 × 0,8 м двигался над путепроводом со скоростью 50 км/ч. Расчеты показывают, что поезд на магнитной подушке сможет развивать скорость до 500 км/ч. Такой поезд будет «зависать» над рельсами на расстоянии 2–3 см, что и даст ему возможность разогнаться до указанных скоростей.

Широко используются в настоящее время сверхпроводящие объемные резонаторы, добротность которых может достигать 5 · 10¹¹. С одной стороны, такие сверхпроводящие резонаторы позволяют получить высокую частотную избирательность. С другой стороны, сверхпроводящие резонаторы широко используются в сверхпроводящих ускорителях, позволяя существенно уменьшить мощность, требуемую для создания ускоряющего электрического поля. Как правило, сверхпроводящие резонаторы изготавливаются из свинца либо ниобия.

В задаче 2.7 был рассмотрен принцип работы криотрона — простейшего переключающего сверхпроводящего элемента, который легко сочетается со сверхпроводящими запоминающими элементами. Важным преимуществом криотронов перед обычными полупроводниковыми устройствами является отсутствие потребности в энергии в стационарном состоянии. После создания переходов Джозефсона было предложено заменить ими криотроны, и оказалось, что время переключения такой системы равно ~ 10⁻¹² с. Это открывает в принципе широкие перспективы для создания мощных вычислительных машин, но пока все эти разработки являются лишь лабораторными образцами.

Одно из самых распространенных направлений прикладной сверхпроводимости — использование скивдов (см. гл. 5) как в научных исследованиях, так и в различных технических областях. Градиометры на основе скивдов регистрируют чрезвычайно слабые магнитные поля — до 10⁻¹⁴ Э, поэтому их уже сегодня эффективно используют в медицине и биологии для исследования полей живых организмов и человека. В геологии скивды применяются для определения изменения силы гравитации в различных точках Земли. Такая информация нужна для поиска полезных ископаемых.

Наиболее перспективными направлениями широкого использования высокотемпературных сверхпроводников считаются криоэнергетика и криоэлектроника. В криоэнергетике уже разработана мето-

дика приготовления достаточно длинных (до 1000 метров) проводов и кабелей на основе висмутовых ВТСП-материалов. Этого уже хватает для изготовления небольших двигателей со сверхпроводящей обмоткой, сверхпроводящих трансформаторов, индуктивностей и т.п. На основе этих материалов уже созданы сверхпроводящие соленоиды, обеспечивающие при температуре жидкого азота (77 К) магнитные поля порядка 10 000 Гс.

В криоэлектронике разработана методика приготовления пленочных скивдов, которые по своим характеристикам ненамного уступают гелиевым аналогам. Освоена методика изготовления совершенных магнитных экранов из ВТСП, в частности, для исследования биоманнитных полей. Из ВТСП созданы антенны, передающие линии, резонаторы, фильтры, смесители частоты и т.д.

Темп технологических и прикладных исследований очень высок, так что, возможно, промышленность освоит выпуск изделий из высокотемпературных сверхпроводников раньше, чем будет достоверно выяснена природа сверхпроводимости в металлооксидных соединениях. Для технологии в первую очередь важен сам факт существования материалов, сверхпроводящих при температуре жидкого азота. Однако целенаправленное и осмысленное движение вперед, в том числе в технологической сфере, невозможно без всестороннего исследования уже известных ВТСП, без понимания всех тонкостей высокотемпературной сверхпроводимости как интереснейшего физического явления. Тем более это относится к поиску новых сверхпроводников.

Мы привели лишь несколько примеров практического использования сверхпроводимости. Не меньшее значение, конечно, имеют проблемы передачи электроэнергии на большие расстояния без потерь, создания накопителей энергии, защиты космических аппаратов от космического излучения, создания различных измерительных сверхпроводящих устройств, в том числе болометров, приемников излучения и т.д. Примеров научного и технического применения сверхпроводимости множество, но подробное изучение этих вопросов выходит за рамки данной книги.

Послесловие

В 1974 г. Л. Купер в своей Нобелевской лекции привел следующее высказывание выдающегося французского математика Анри Пуанкаре: «Ученый должен систематизировать факты. Наука состоит из них подобно тому, как здание состоит из кирпичей. Однако простое нагромождение фактов похоже на науку не более, чем груда камней на дом». От себя Купер добавил: «Из обычных камней можно построить и скромный дом, и великолепный замок. С утилитарной точки зрения и то, и другое служит для ограничения некоторой части пространства с целью предохранить ее от дождя и холода. Разница состоит в претензиях и средствах строителей и в искусстве, с которым они воплощают свой замысел. Теория, оперирующая стандартными понятиями, также может быть полезна при решении многих скромных задач. Однако когда мы вступаем в сферу общих концепций и идей, перед нашим взором открывается нечто подобное архитектурным шедеврам с колоннами умопомрачительной высоты и арками дерзкой и почти невероятной ширины. Они сводят восдино данные о магнитном моменте электрона и о явлениях на стыке двух различных металлов при абсолютном нуле, они покрывают расстояние от свойств вещества при экстремально низких температурах до его поведения в недрах звезд, от четности операторов относительно отражения времени до особенностей коэффициентов затухания вблизи критической температуры. Говоря об этом, я хотел бы убедить моих коллег-теоретиков, а также и самого себя в том, что в конечном счете наша «голубая мечта» должна состоять в построении не только практически полезного, но и эстетически прекрасного здания науки».

От себя я могу только добавить, что все мы живем в этом городе науки, где есть дворцы, есть и хижинки. Кто приносит на строительство этих сооружений маленький кирпич, кто стесывает резкие углы глыб, внесенных гигантами. Я хочу пожелать будущим жителям этого города любить его. В нем не только необычайной красоты проспекты и улицы, но и прекрасные закоулки, надо только учиться видеть неповторимую красоту результатов деятельности человеческого разума.

Список литературы

1. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.
2. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
3. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
4. Роуз-Инс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. М.: Мир, 1972.
5. Заварицкий Н. В. Сверхпроводимость: Учебное пособие. М.: МФТИ, 1985.
6. Вайскопф В. Образование куперовских пар и природа сверхпроводящих токов// УФН. 1983. Т. 140. Вып. 1. С. 117.
7. Раиба Э. И. Введение в физику конденсированного состояния. Сверхтекучесть гелия и сверхпроводимость: Учебное пособие. М.: МФТИ, 1971.
8. Дмитренко И. М. Квантовые эффекты в сверхпроводимости. М.: Знание, 1968.

Предметный указатель

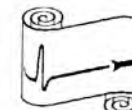
- Бозе-конденсат 48
Вихрь 61
Второе критическое поле 64
Глубина проникновения 19, 20
Гранулярные ВТСП 85
Гроб Магмета 89
Двухконтактный интерферометр 78
Декорирование 62
Длина когерентности 56
Замороженный поток 8
Заряд монополя 23
Идеальная проводимость 7
Идеальный диамагнетизм 14
Изотоп-эффект 41, 47
Импульс пары 57
Квантование потока 10, 22
Криотрон 31
Криоэлектроника 90
Криоэнергетика 89
Кристаллографическая структура ВТСП 82
Критерий сверхтекучести Ландау 36
Критическая плотность тока 55
Критическая скорость 36
Критическая температура 5, 10, 11
Критический импульс пары 63
Критическое поле 6, 10, 11
Левитация 89
Лондоновская длина 19
Магнит сверхпроводящий 87
Магнитное поле вихря 62
Магнитный ключ 28
Магнитный монополь 23
Магнитный насос 15
Намагничивание сверхпроводников
— — I рода 14
— — II рода 65
Незатухающий ток 53
Нестационарный эффект Джозефсона 79
Односвязные сверхпроводники 15
Основное состояние 47, 48
Параметр порядка 32
Параметры ВТСП 82
Первое критическое поле 64
Переход Джозефсона 74
Пиннинг 69
Поверхностная энергия 58
Поверхностный ток 15
Поле в центре вихря 67
Полость в сверхпроводнике 69
Правило Сильсби 29
Промежуточное состояние 30, 58
Разрушение сверхпроводимости током 29
Резистивное состояние 68
Релаксация намагниченности в ВТСП 84
Ротоны 55
Сверхпроводники I рода 14
Сверхпроводящий тепловой ключ 28
Сверхтекучесть 34
Сверхток 20
Свободная энергия 25
Сквид 78
Сконденсированное состояние 47
Слабая сверхпроводимость 74
Слабое звено 74
Смешанное состояние 60
d-спаривание в ВТСП 85
Стационарный эффект Джозефсона 75
Ступеньки Шапиро 80
Теорема Купера 44, 46
Теплоемкость 27
Термодинамическое критическое поле 26, 50, 64, 66
Токи Фуко 7
Транспортный ток 68
Треугольная решетка 62
Туннелирование куперовских пар 74
Туннельный эффект 40, 52
Униполярный генератор 72
Уравнение Лондонов 16
Фононное притяжение 44
Формула Рутгерса 297
Электронные вихри 61
Энергетическая щель 38–40, 46
Энергетический спектр квазичастиц 51
Энергия конденсации 48, 55
Энтропия 26
Эффект Мейсснера 6
Эффективная проводимость 73

Содержание

Предисловие	3
Глава 1. Основные этапы в исследовании сверхпроводимости	5
Глава 2. Магнитные и тепловые свойства сверхпроводников	14
§ 2.1. Идеальный диамагнетизм	14
§ 2.2. Уравнение Лондонов	16
§ 2.3. Квантование потока	21
§ 2.4. Термодинамика перехода в сверхпроводящее состояние	25
§ 2.5. Разрушение сверхпроводимости током	29
§ 2.6. Зависимость критического поля от температуры	32
Глава 3. Основы микроскопического описания сверхпроводимости	34
§ 3.1. Аналогия между сверхтекучестью и сверхпроводимостью	34
§ 3.2. Энергетическая щель сверхпроводящего состояния	38
§ 3.3. Электрон-фононное взаимодействие и куперовские пары	41
§ 3.4. Основное и возбужденное состояния сверхпроводника	47
§ 3.5. Незатухающий сверхпроводящий ток с точки зрения микротeorии	53
Глава 4. Сверхпроводники второго рода	56
§ 4.1. Длина когерентности	56
§ 4.2. Энергия границы между фазами	57
§ 4.3. Вихревая структура сверхпроводников II рода	61
§ 4.4. Первое и второе критические поля	64
§ 4.5. Резистивное состояние сверхпроводников II рода	68
§ 4.6. Кажущиеся парадоксы электромагнетизма	70
Глава 5. Слабая сверхпроводимость	74
Глава 6. Высокотемпературные сверхпроводники	81
Глава 7. Применения сверхпроводимости	87
Послесловие	91
Список литературы	92
Предметный указатель	93

Издательство МФТИ

141700, Долгопрудный Московской обл.,
Институтский пер., 9.
Тел./факс 408-76-81
E-mail publ@za_nauku.mipt.ru



Вышли в свет

ФЕДОРЕНКО Р. П. Введение в вычислительную физику. 1994. — 528 с.

Книга посвящена описанию методов приближенного решения задач математической физики, возникающих в различных областях. Изложение основных понятий и средств численного анализа доводится до описания специальных алгоритмов решения важных прикладных задач, разработка которых продолжается в настоящее время. Приближенные решения сложных задач получаются как общими средствами вычислительной математики, так и специфическими для данного узкого класса задач приемами, которые позволяют обходить существенные трудности в современной вычислительной работе и делают расчеты посильными для ЭВМ.

Для студентов и аспирантов факультетов прикладной математики и физико-технических специальностей вузов, а также для научных работников, специализирующихся в области применения численных методов.

РАЙЗЕР Ю. П., ШНЕЙДЕР М. Н., ЯЦЕНКО Н. А. Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. 1995. — 320 с.

Дано исчерпывающее изложение современного состояния знаний о высокочастотном разряде емкостного типа. Рассмотрена физика разрядных процессов, техника и практические методы эксперимента, диагностики, измерений при работе с высокочастотными разрядами, теория и численное моделирование разрядного процесса. Приведены важнейшие практические приложения: для создания активной среды лазеров (разряды среднего давления), плазменной и ионной обработки полупроводниковых материалов, используемых в электронике (разряды низкого давления).

КОРЕНЕВ Г. В. Тензорное исчисление. 1996. — 240 с.

В книге, написанной на основе лекций, читавшихся на протяжении многих лет студентам МФТИ, обобщен опыт автора по использованию аппарата тензорного исчисления при решении различных задач механики и теоретической физики. В доступной форме введены основные понятия двумерного риманова и трехмерного евклидова пространства в индексных обозначениях, а также четырехмерные тензоры теории относительности. Книга не перегружена строгим изложением теорем тензорного анализа, основное внимание уделено практическим советам и рекомендациям. Каждый тематический раздел снабжен примерами и упражнениями. Материал будет понятен людям с минимальным уровнем предварительной подготовки и облегчит изучение различных спецкурсов теоретической физики.

КОСАРЕВ В. И. 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс). 1996. — 176 с.

Учебник содержит необходимые начальные представления о средствах, терминологии и возможностях вычислительной математики. В книге освещены следующие темы: методы вычисления решений нелинейных уравнений и систем уравнений; прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений; интерполяция и среднеквадратичное приближение для функций, задаваемых таблицей своих значений; численное дифференцирование и численное интегрирование; численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений; элементы теории разностных схем; разностные схемы для модельных уравнений математической физики.

Книга адресована студентам различных технических специальностей, для которых вычислительные методы не являются профилирующим предметом.

Готовятся к выпуску во второй половине 1996 года

АНИСИМОВ С. И., ДЕМЬЯНОВ А. Ю., ИНОГАМОВ Н. А., СОН Э. Е. Динамика турбулентного перемешивания.

Монография посвящена систематическому изложению проблемы гидродинамических неустойчивостей (типа Рэлея-Тейлора и Рихтмайера-Мешкова) и их влиянию на развитие многих классов течений гидро-газодинамики. Основное внимание уделено исследованию нелинейной и турбулентной стадиям рассматриваемых неустойчивостей. В книге дается построение адекватных расчетно-теоретических моделей, применяемых на практике, снабженных большим иллюстративным материалом.

ВОЛОСЕВИЧ П. П., ЛЕВАНОВ Е. И. Автомодельные задачи газовой динамики.

Дается единый подход к постановке и исследованию автомодельных задач, описывающих нелинейные процессы в механике сплошных сред. Возможности автомодельных решений иллюстрируются на примерах различных задач газовой динамики с учетом теплопроводности.

КАЛИТКИН Н. Н. Численные методы. Издание 2-е, переработанное.

Предлагаемая книга предназначена для широкого круга специалистов физико-технического профиля — студентов, аспирантов, инженеров и научных сотрудников — в отличие от большинства книг по численным методам, ориентированных на математиков.

Книга освещает методы, которые наиболее часто требуются при решении разнообразных прикладных задач — от интерполяции до решения уравнений в частных производных. Материал изложен четко и сжато, большое внимание уделено рекомендациям по практическому применению алгоритмов; изложение пояснено рядом примеров. Для обоснования алгоритмов использован не сложный математический аппарат, знакомый студентам физических и инженерных специальностей. Все описываемые методы пригодны как для расчетов на ЭВМ, так и для «ручных» инженерных расчетов с использованием простейших калькуляторов. Во 2-м издании ряд разделов существенно упущен с учетом развития за последние годы теории и практики вычислительной математики и ее приложений в различных областях знания.

КИНГСЕП А. С. Введение в нелинейную физику плазмы.

Книга посвящена нелинейным эффектам в физике горячей плазмы. Первоначальный уровень познаний в физике плазмы предполагается минимальным. Книга адресована студентам старших курсов, аспирантам, научным работникам, специализирующимся по физике плазмы, радиофизике и физической электронике, астрофизике.

Сборник задач по физике /Под ред. В. А. Овчинкина. Том I (механика, термодинамика).

Включает задачи, используемые в учебном процессе на кафедре общей физики в Московском физико-техническом институте. Для студентов физических специальностей вузов, а также преподавателей физики высшей и средней школ.

ТЕР-КРИКОВ А. М., ШАБУНИН М. И. Курс математического анализа. Издание 2-е, переработанное.

Учебник адресован студентам физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике. Изложенный теоретический материал иллюстрируется примерами, позволяющими читателю глубже проникнуть в суть предмета. Книга может быть использована при самостоятельном изучении курса.