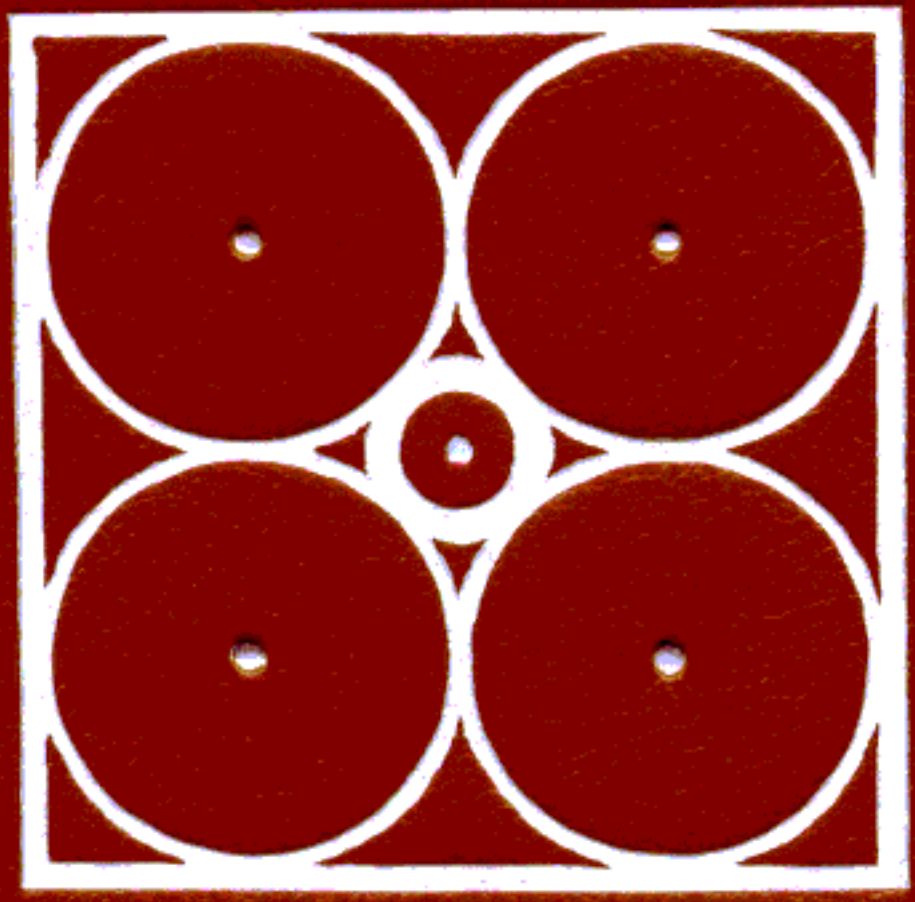
Дж. Николис

Динамика иерархических систем

Эволюционное представление



Издательство «Мир»

Динамика иерархических систем

J. S. Nicolis

Dynamics of Hierarchical Systems

An Evolutionary Approach

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York · Tokyo

Дж. Николис

Динамика иерархических систем

Эволюционное представление

Перевод с английского
Ю. А. Данилова

Москва «Мир» 1989

ББК 22.317
Н63
УДК 536

Николис Дж.
Н63 Динамика иерархических систем: Эволюционное представление: Пер. с англ./Предисл. Б. Б. Кадомцева.— М.: Мир, 1989. — 488 с., ил.
ISBN 5-03-001056-4

Книга греческого автора посвящена одному из разделов синергетики — развитию общего подхода к исследованию динамики сложных нелинейных систем. Особое внимание уделяется анализу проблемы образования и диссипации той новой информации, которая возникает в процессе развития различных физических и биологических систем. В приложении исследуется роль внешних воздействий (шума) на динамику развития различных систем.

Для специалистов — физиков, математиков, химиков и биологов, а также для студентов и аспирантов.

Н $\frac{1604030000-415}{041(01)-89}$ 41—89 **ББК 22.317**

Редакция литературы по физике и астрономии

ISBN 5-03-001056-4 (русск.)
ISBN 0-387-13323-2 (англ.)

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1986
All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
© перевод на русский язык, «Мир», 1989

Предисловие к русскому изданию

Просматривая оглавление, будущий читатель этой книги сразу увидит много знакомых терминов и понятий: элементы теории информации, элементы теории игр, хаос и странные аттракторы и даже сферические электромагнитные волны. Несколько необычно, что все они помещаются под обложкой одной и той же книги. Но это только первое впечатление: прочитав введение, читатель начнет понимать, что все эти разнородные элементы различных теорий естественно входят в соприкосновение, когда речь идет о сложноорганизованных системах, к тому же обладающих иерархической структурой. А именно такие системы, да еще рассматриваемые с точки зрения их эволюции, т. е. развития, и являются главным объектом изучения в данной книге.

Большая часть физиков давно уже привыкла к коллективным степеням свободы и к коллективным явлениям в многочастичных системах. Несколько меньшая часть физиков имеет дело с системами, в которых происходят процессы самоорганизации, т. е. процессы самопроизвольного возникновения и динамического поведения коллективных процессов или структур из-за неустойчивости однородного состояния в исходной активной, неустойчивой среде. Имеется масса примеров такого рода явлений, которые подводятся под общую «шапку» синергетики. Кстати, данная книга сама является одной из книг большой серии «Синергетика», выходящей в издательстве «Шпрингер».

В книге Дж. Николиса ставится проблема теоретического описания следующего шага в развитии сложноорганизованных систем — возникновения иерархического расслоения и динамики иерархически организованных систем. В таких системах наряду с чисто динамическими процессами большую роль играют процессы управления, связанные с получением информации, ее «обработкой» и «выработкой сигналов управления», — и все это не в искусственно созданной человеческим разумом системе, а в самоорганизованной, но сложной физической (или химической, или биологической) среде.

Вот почему наряду с понятиями, характерными для обычных динамических систем, приходится пользоваться понятиями

теории информации и теории игр. Другими словами, в сложных иерархически организованных системах происходит сложная игра между силовым, т. е. динамическим, взаимодействием и переносом информации, т. е. обменом символами.

Автор взялся за сложную проблему, и первый шаг в этом направлении безусловно следует приветствовать. Вместе с тем хотелось бы подчеркнуть, что это именно первый шаг. Не все разделы могут показаться вполне удачными, после прочтения могут остаться вопросы без ответа. Но это и хорошо. В данной практически не возделанной области остается очень широкий простор для деятельности. И пусть эти лекции профессора Николиса для молодежи побудят наших молодых ученых к живому творчеству в новой науке о сложных динамико-информационных системах.

23 января 1989 г. *Акад. Б. Б. Кадомцев*

Иисус отвечал: ты говоришь, что Я Царь; Я на то и родился и на то пришел в мир, чтобы свидетельствовать об истине; всякий, кто от истины, слушает гласа Моего.

Пилат сказал Ему: что́ есть истина?

Евангелие от Иоанна, глава 18, стихи 37—38.

Памяти моих родителей

Предисловие

Основная цель этих лекций состоит в том, чтобы стимулировать интерес *любознательного* студента физического, математического, инженерного или биологического факультета к новой увлекательной междисциплинарной области эволюции «крупномасштабных» динамических систем. Этот текст вырос в результате синтеза весьма разнородного материала, который мне неоднократно доводилось излагать по разному поводу и в различных контекстах, например из лекций, которые я читал с 1972 г. первокурсникам, выпускникам и аспирантам первого года обучения Инженерной школы при Патрасском университете, и из неформальных семинаров, которые я вел для международной группы аспирантов, стажеров и сотрудников факультета при Штутгартском университете в 1982/83 учебном году.

Тех, кто станет искать в этой книге строгое или даже формальное изложение, ожидает сильное разочарование. Я умышленно начал с «самого начала» и стремился и в дальнейшем оставаться на эвристическом уровне, придерживаясь, насколько это возможно, физической интуиции; от предполагаемого читателя требуется лишь знание основ (классической) физики (на уровне берклиевского или фейнмановского курсов), математического анализа и некоторых начал теории вероятностей. Это отнюдь не означает, будто я вознамерился написать легкую книгу. Я хотел лишь всячески облегчить работу для прилежного читателя, который, несмотря на неполноту формального образования, хотел бы познакомиться с физическими идеями и понятиями, лежащими в основе эволюции и динамики сложных систем. После того как эти лекции будут проработаны, я настоятельно рекомендую читателю сосредоточиться на более узком спектре интересов и попытаться выполнить какую-нибудь самостоятельную работу, чтобы глубже проникнуть в специфику предмета после ознакомления с ним в более широком контексте.

Эти лекции могут быть использованы как основа для двухсеместрового курса, рассчитанного на выпускников или аспирантов, специализирующихся в области системного анализа или кибернетики.

Патрас, январь 1986 *Дж. С. Николис*

Благодарности

Выражаю свою признательность профессору Хакену, побудившему меня подготовить текст этих лекций для издания в качестве отдельного тома шпрингеровской серии по синергетике. Считаю также своим долгом поблагодарить его за оказанную мне честь провести 1982/83 учебный год в качестве приглашенного профессора в Институте теоретической физики Штутгартского университета (Патрасский университет предоставил мне на это время отпуск). Профессор Хакен оказал мне щедрое и сердечное гостеприимство. Во время моего пребывания в институте я имел множество оживленных и плодотворных бесед с аспирантами и сотрудниками факультета, главным образом с проф. Г. Малером, д-ром Петром Пепловски, проф. Т. Нагасимой, Дж. Хаубзом и особенно с д-ром Г. Майер-Крессом.

Я признателен также моему брату Грегуару Николису из Свободного университета в Брюсселе за многолетние «нескончаемые» обсуждения.

Но более, чем кто-либо иной, движущей силой в моей работе на протяжении последних 27 лет была моя жена Ляля. Именно она в первую очередь побудила меня избрать научно-исследовательскую деятельность как образ жизни и терпеливо переносила все треволнения, с которыми сопряжено неукоснительное следование такому выбору.

Я благодарен также г-же И. Вёрнер, перепечатавшей первый вариант основной части рукописи, мисс Э. Эффенберг, напечатавшей приложения, и г-же У. Функе за общую административную помощь. Я хотел бы выразить свою особую благодарность г-же Ники Сарантоглу из Патрасского университета, безупречно напечатавшей окончательный вариант всей рукописи.

Наконец, я признателен за оказанную мне помощь д-ру Г. Лотшу и мисс Д. Холлис из издательства «Шпрингер».

1

Введение

1.1. О чем эта книга?

Термин «иерархия» рождает множество ассоциаций; он имеет и структурные, и функциональные оттенки. Под иерархической системой мы, вообще говоря, понимаем ансамбль взаимодействующих частей, который состоит из последовательности вложенных одна в другую взаимодействующих субъединиц (или может быть разложен или разделен на такие субъединицы).

Каждое множество взаимодействующих компонент (образующих отдельный иерархический уровень) допускает свое характерное описание на языке пространства состояний с переменными и параметрами, принадлежащими данному конкретному уровню. Взаимодействующие переменные (и/или параметры) на более высоком иерархическом уровне являются «коллективными свойствами» (статистическими моментами или свертками) динамики, происходящей на нижнем уровне. Следовательно, переход на более высокий уровень обычно сопровождается значительным уменьшением числа степеней свободы. Более высокий уровень получает «снизу» селективную информацию и в свою очередь управляет динамикой на более низком уровне с помощью упреждающей связи.

Сложность любой системы обусловлена числом ее компонент и способом их взаимосвязи. Такая сложность относится к *аппаратурной реализации* системы. С другой стороны, богатство функционального репертуара системы определяет сложность ее программного обеспечения.

Структурная иерархическая теория (известная так же, как раздел «теории сложности») изучает способы сочетания компонент системы (а) для достижения компромисса в конфликте между сложностью и устойчивостью и (б) для проектирования действующей системы с заранее заданным функциональным репертуаром из возможно меньшего числа компонент. В частности, эта теория стремится снизить до теоретического минимума ($\sim N\log(N)$) квадратично возрастающее ($\sim N^2$) число переключательных элементов как функцию числа N входов-выходов, необходимого для выполнения поставленной задачи. Приведенная оценка следует просто из того, что $N!$ — минимальное число состояний, которым должна обладать сеть соединений

при N входах-выходах. Если эти соединения осуществляются с помощью S переключательных элементов, то максимальное число состояний равно 2^S. Следовательно, $2^S \geqslant N!$ и $S \geqslant N\log(N)$.

С другой стороны, *функциональная*, или динамическая, теория занимается изучением эволюции крупномасштабной системы из стабильных субансамблей и способов, какими такие системы могут *изменяться* при обмене энергией и информацией с окружающей средой. (Системы эволюционируют вдоль интегральных кривых в пространстве состояний, но *изменяются*, только когда теряют устойчивость, претерпевая дискретную серию бифуркаций или переходя скачком из одной особой точки в другую.) Хотя две системы отнюдь не обязательно должны находиться между собой в отношении иерархической упорядоченности, для того чтобы обмениваться энергией, для *коммуникативной связи* такое упорядочение необходимо. (Один иерархический уровень требуется для установления кросс-корреляции, а другой, более высокий, для «осознания» ее.) При такой коммуникативной связи «иерархическое» *кодирование* и *декодирование* снова оказываются эффективными для понижения экспоненциально ($\sim 2^N$) возрастающего числа шагов декодирования (как функции от длины N передаваемого временно́го ряда) до алгебраической скорости роста $\sim N$.

В этой книге мы лишь бегло коснемся структурной иерархии; в действительности нас прежде всего будет интересовать *динамика образования и распознавания коллективных свойств* и в гораздо меньшей степени алгоритмы кодирования — декодирования (которые могут быть разработаны впоследствии путем реализации динамики). Мы будем заниматься в основном проблемой взаимного *моделирования* двух динамических иерархических систем и в особенности проблемой сжимаемости информации, получаемой данной системой от системы-партнера. Однако мы будем продвигаться постепенно, шаг за шагом.

Сначала мы дадим весьма пространный (хотя, боюсь, все же несколько отрывочный) исторический и концептуальный обзор тех условий sine qua non [1], при которых вообще могут возникнуть системы, наделенные способностью познавать. В частности, мы попытаемся установить совместность производства энтропии, прогрессивной дифференциации, возрастающей сложности и эффективной самоорганизации. Под самоорганизацией мы понимаем способность открытой системы *моделировать* окружающую среду или даже части (низшие иерархические уровни) самой себя. Основная цель, которую мы ставим перед собой, — достичь понимания «иерархии» (если таковая существует)

---

[1] Совершенно необходимые, непременные (лат.). — *Прим. перев.*

«стрел времени»: космологической, термодинамической, электромагнитной и связанной с обработкой информации. Задача эта, несомненно, весьма трудно достижимая, и нам почти на каждом шагу наших рассуждений придется просить читателя о снисхождении. Эволюцию, или, точнее, изменение мы рассматриваем как каскад дискретных эпизодов — «бифуркаций», каждый из которых приводит к появлению более сложного или более абстрактного иерархического уровня в данной динамической системе.

Так как предпосылкой моделирования является «сжатие» информации, получаемой от системы-партнера, мы подробно изучим *надежность* информации, передаваемой посредством электромагнитных волн, распространяющихся по «каналам связи» различного типа с шумом. Моделирование партнера обычно ссуществляется с помощью «ритуалов», которые мы называем *играми.* Мы опишем и проследим динамику нескольких таких игр на различных иерархических уровнях от генетического до психологического и оценим их «прожиточный минимум», или просто затраты на них.

Наконец, мы позволим себе затронуть новую динамическую «парадигму», а именно *диссипативный хаос*, который посредством особого устройства — «странного аттрактора» — сулит выполнить следующее: исполнить очень сложный функциональный репертуар с помощью весьма простой «аппаратурной реализации» и вести себя как гибкий (хотя и несколько неуправляемый) информационный процессор, обрабатывающий информацию. Новая парадигма возникает, если понять, что информация порождается не только каскадом бифуркаций, приводящих к нарушению симметрии, но и последовательными итерациями, приводящими к все более тонкому разрешению. За пределами некоторого интервала разрешения микроскопические флуктуации перестают расплываться; они усиливаются и переходят с более низких на более высокие иерархические уровни. Именно такие флуктуации по существу и ответственны за *новую* информацию, порождаемую эволюционирующей иерархической системой.

Короче говоря, цель этой книги состоит в том, чтобы развить эволюционный подход к основной проблеме получения, хранения и диссипации информации в физических и биологических системах с помощью динамических процессов. Эти процессы связаны с ветвлениями, или каскадом бифуркаций, порождающими нарушение симметрии, а также с хаотической диссипативной динамикой, приводящей к уменьшению и увеличению разрешения. К аттрактору, моделирующему некоторые аспекты системы, наделенной способностью к познанию (или «процессора»), предъявляются два основных требования: большая емкость

памяти и хорошая сжимаемость. Устойчивые стационарные состояния и устойчивые предельные циклы размерности, соответственно нуль и единица, являются очень плохими модулями хранения информации, но идеальны как устройства, сжимающие информацию. С другой стороны, странные аттракторы с присущим им гармоническим сочетанием расходящихся и сходящихся траекторий (с «положительными» λ_+ и «отрицательными» λ_- показателями Ляпунова) могут в принципе удовлетворить обоим требованиям: они обладают значительной информационной размерностью, что делает их удобными для хранения динамической информации, и в то же время, будучи «аттракторами» ($|\lambda_-| > \lambda_+$), они могут служить «компрессорами» информации.

Как мы увидим из дальнейшего, (диссипативная) хаотическая динамика предлагает альтернативный и, вероятно, более изящный путь к формированию иерархии: в то время как классические методы статистической механики приводят к иерархическим структурам через коллективные свойства уравнения для многочастичной функции распределения (т. е. через моменты и смешанные моменты плотности вероятности, описывающей динамику на «микроскопическом» уровне), диссипативные хаотические системы выполняют ту же задачу иначе: они решают ее, уменьшая число степеней свободы в пространстве состояний, где динамическая система, выйдя из множества начальных условий размерности N, раньше или позже попадает в некоторое компактное подмножество пространства состояний («аттрактор»), имеющее *гораздо меньшую размерность*.

1.2. Постановка задачи

Общую задачу, которую мы намереваемся рассмотреть в этой книге, можно сформулировать следующим образом. Предположим, что нам даны две системы, находящиеся в флуктуирующей среде, как на рис. 1.1. Каждая система определена как ансамбль взаимодействующих единиц, число которых не обязательно велико (трех взаимодействующих компонент может оказаться достаточно, если мы хотим создать очень сложное поведение исследуемой системы). Среда флуктуирует в следующем смысле: один из ее параметров, позволяющий воздействовать на энергетическое взаимодействие систем I и II, беспорядочно изменяется со временем. (Например, если каждая из систем I и II испускает электромагнитные волны, принимаемые другой системой, то соответствующим параметром служит показатель преломления окружающей среды.)

Каким образом мы можем на основе известных динамических законов объяснить *коммуникативную связь*, происходя-

щую между этими двумя системами, т. е. не только энергетический, но и информационный обмен между ними? Иначе говоря, какова физическая (динамическая) основа символьных взаимодействий?

Прежде всего нам необходимо пояснить, что мы имеем в виду, когда говорим об установлении *коммуникативной связи* между двумя системами. Для физика *информация* — слово почти «метафизическое». В самом деле, на языке, принятом в математической теории связи (созданной Клодом Шенноном 37 лет назад и не претерпевшей с тех пор сколько-нибудь значительных усовершенствований), решение проблемы передачи информации из точки A в точку B или из момента времени τ в момент времени $\tau + \Delta\tau$ (короче говоря, из I в II или наоборот) сводится к вариационному принципу, представляющему собой не что иное, как попытку установить компромисс между двумя противоречивыми требованиями: скоростью передачи и надежностью, или степенью безошибочного воспроизведения абстрактной последовательности сигналов, передаваемых из I и принимаемых в II. В такой формулировке вся физика (динамика) остается за бортом.

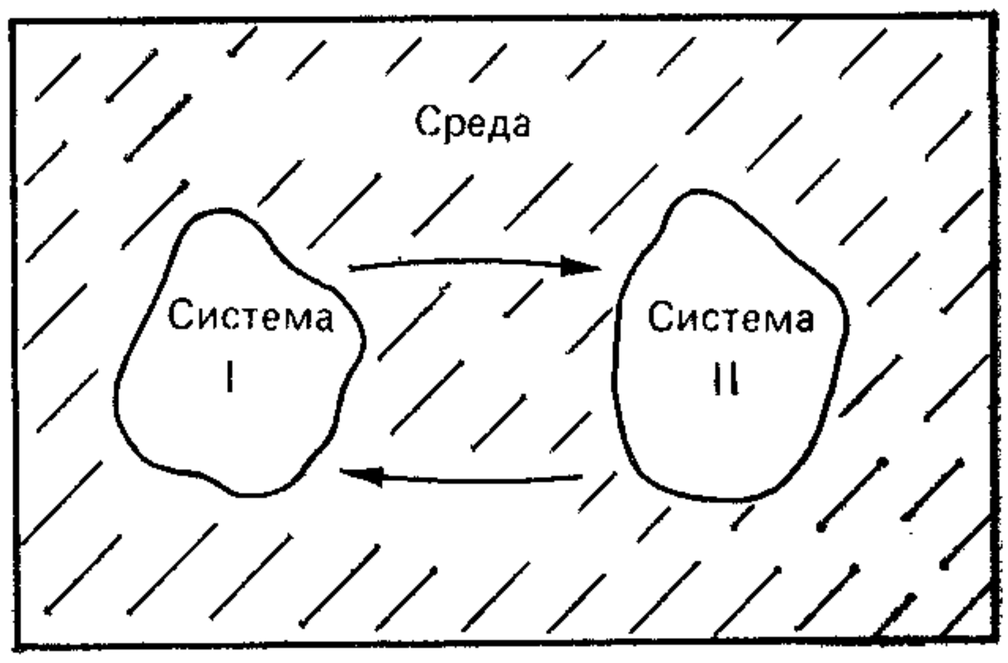


Рис. 1.1. Системы со связью в флуктуирующей среде.

Но если бы этим все исчерпывалось, т. е. если бы точное воспроизведение сообщений было единственной целью теории связи, то машина Ксерокс была бы идеальным воплощением такого процесса: Ксерокс не только воспроизводит, но и улучшает оригинал, усиливая контрастность или делая более четкими контуры, что упрощает распознавание образа. (Объясняется это тем, что в машине Ксерокс используется собственный нелинейный фильтрующий процесс электрического характера, исключающий расплывание изображения.)

Но наиболее важное предназначение процесса связи состоит не в копировании, а в *моделировании*: по существу речь идет о моделировании одной физической системы другой с очевидной целью предсказания и управления первой системой. Мы говорим, что физическая система I моделирует физическую систему II, если система I способна построить из принятого ей временного ряда конечной длины алгоритм минимальной длины *сжатых* описаний системы II. Эти алгоритмы, если ввести их в качестве входных данных (программ) в некоторую машину с конечным числом состояний, должны позволить ей выдать на

выходе поведение системы II во времени — как в прошлом, так и в будущем. Короче говоря, под моделированием мы понимаем построение сценариев «если так, то так», которые каким-то образом восполняют роль, отводившуюся в древности оракулам. Для того чтобы система I могла воспроизводить, или моделировать, систему II (или наоборот), требуется ряд существенных условий.

Прежде всего система должна быть иерархической, т. е. обладать по крайней мере уровнем (H) аппаратурной реализации (энергетически структурным) и уровнем (S) программного обеспечения — символьным (наделенным способностью к познанию, т. е. когнитивным), функциональным. Информация в форме дискретного временного ряда поступает с S-уровня системы II (S_2) на H-уровень системы I (H_1), где между принятым временным рядом и внутренней динамикой системы I на уровне H происходит ряд кросс-корреляций. В результате таких сверток возникает некоторое *коллективное свойство*, обладающее гораздо меньшим числом степеней свободы, чем S_2 или H_1. Это коллективное свойство передается на уровень S_1 и образует там одно (сложное) состояние. Рис. 1.1 при этом переходит в рис. 1.2, где условно изображены все упоминавшиеся выше процессы.

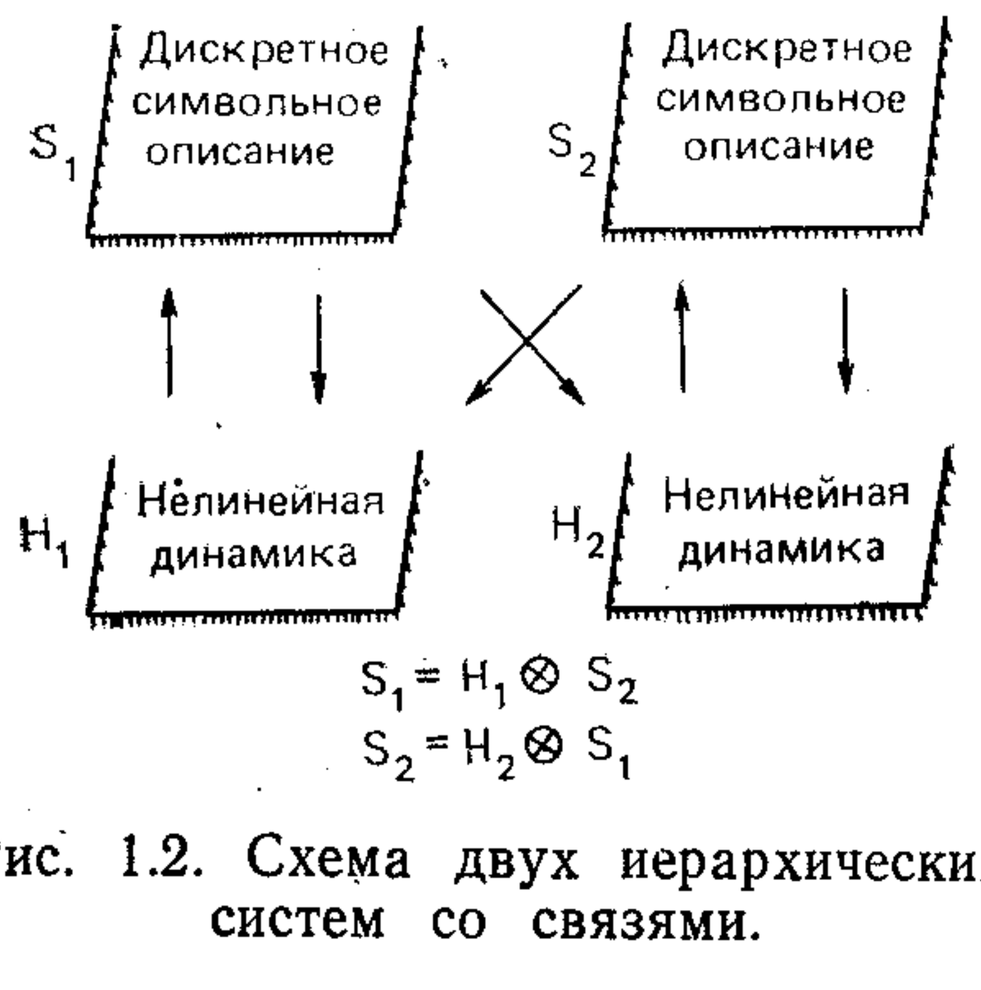


Рис. 1.2. Схема двух иерархических систем со связями.

Таким образом, связь между двумя системами I и II осуществляется как эволюция во времени системы двух связанных нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} S_1 &= H_1 \otimes S_2, \\ S_2 &= H_2 \otimes S_1, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где каждая пара соответствует одному статистическому моменту. Процесс для каждой пары уравнений (1.2.1) сводится к непрерывной итерации S_1 и S_2.

Каким образом столь абстрактную проблему можно рассматривать на количественном уровне? Прежде чем нам удастся подойти к ее решению на основе существующих законов физики, придется проделать большую «домашнюю» работу.

Мы увидим, например, что «сжимаемость» временных рядов, обнаруживаемая с помощью познающего устройства в поведении некоторых систем, предполагает существование «аттракто-

ров» как у наблюдаемой динамической системы, так и у самого наблюдателя. Такие аттракторы возникают в результате каскада неустойчивостей, приводящего к бифуркации. Мы увидим также, что степень сжимаемости аттрактора равна разности между размерностью пространства состояний аттрактора и его «фрактальной», или информационной, размерностью. Отсюда вывод: нам необходимо кое-что знать о нелинейной динамике. Кроме того, не следует забывать о том, что информация передается электромагнитными волнами. Следовательно, нам необходимо знать, как сигнал, передаваемый наблюдаемой системой, кодируется в степенях свободы такого динамического объекта, как сферическая волна; как эта волна распространяется в флуктуирующих (стохастических) средах и какое количество информации несет волна, когда она, наконец, достигает входного отверстия конечных размеров. Мы обнаружим, что восприятие принципиально неоднозначно (многие различные объекты или сигналы порождают одно и то же восприятие); следовательно, нам понадобится оценивать энтропию сферической волны, служащей носителем информации. Отсюда — необходимость знания основ статистической физики, теории информации и теории кодирования.

Наконец, нам необходимо осознать, что две системы, I и II, каждая из которых моделирует другую, в действительности ведут *игру* или вступают между собой в конфликт, и каждая система стремится разгадать «код» противника. На самом деле «конфликт» возникает в каждой реальной ситуации, так как каждый партнер пытается разгадать код противника и в то же время избежать сжатия (или моделирования) противником и для этого демонстрирует на своем собственном функциональном уровне поведение, которое кажется хаотическим, т. е. непредсказуемым. Следовательно, нам необходимо кое-что знать и из теории игр!

Чтобы разумным образом разделить подход к нашей проблеме на этапы, нам понадобится достаточно большой объем предварительной информации. С учетом этого мы при планировании наших лекций сочли уместным разделить их на следующие пять глав (указывается номер главы).

2) Предварительные сведения по (двумерной) нелинейной динамике и статистической физике.
3) Роль сферических волн как носителей информации.
4) Элементы теории информации и кодирования с приложениями.
5) Элементы теории игр с приложениями.
6) Стохастичность, обусловленная детерминистической динамикой в пространстве трех и большего числа измерений: хаос и странные аттракторы.

Внимательный читатель, возможно, заметил, что фундаментальное понятие иерархии во введении было до сих пор несколько оттеснено на второй план. Объясняется это тем, что самоорганизация иерархического типа (или способность системы сжимать временные ряды окружающей среды и строить алгоритмы минимальной длины для ее моделирования) — *спонтанно возникающее* свойство нелинейных динамических систем, эволюционирующих на фоне непрерывного взаимодействия четырех фундаментальных физических взаимодействий. Исследование такого взаимодействия позволяет понять в исторической перспективе способность к установлению коммуникативных связей как эволюционное, спонтанно возникающее свойство сложных крупномасштабных систем (т. е. прийти к выводу, несколько расходящемуся с традиционным взглядом на мир как на статическую систему, неумолимо движущуюся навстречу «тепловой смерти»). Иначе говоря, в расширяющейся Вселенной взаимодействие фундаментальных взаимодействий приводит к возникновению сопутствующих ему производству энтропии, прогрессивной дифференциации, возрастающей сложности и возрастающей организации. Все «стрелы времени» (космологическая, термодинамическая, электромагнитная и связанная с обработкой сигналов) указывают в одном и том же направлении — направлении возрастающей со временем дифференциации и возникновения познающих систем, способных моделировать не только внешнюю окружающую среду, но и воспроизводить (хотя и не полностью) части самих себя!

1.3. Некоторые предварительные определения сложности и организации

1.3.1. Сложность

Система может быть сложной либо на структурном, либо на функциональном уровне. *Структурная сложность* возрастает с увеличением числа взаимодействующих субъединиц, процента взаимосвязей между ними, попарных или более сложных, и с изменением плотности вероятности интенсивности взаимодействия между отдельными субъединицами.

На *функциональном уровне* сложность возрастает с увеличением минимальной длины (самого сжатого) алгоритма, пользуясь которым мы можем полностью восстановить поведение системы. В этом смысле, как мы убедимся в дальнейшем, функциональная сложность системы увеличивается с длиной ее «филогенетического хвоста», а именно ее эволюционной истории, отмеченной дискретной последовательностью эпизодов бифуркации. Таким образом, в указанном смысле вирус или апельсин

представляют с функциональной точки зрения более сложную систему, чем большая звезда, так как для понимания, как функционирует каждый из них, вам в качестве необходимого условия требуется существование сверхновой.

1.3.2. Организация

Познающее устройство, способное сжимать и моделировать некоторое физическое явление, обладает более или менее высокой степенью самоорганизации.

В общем случае самоорганизацию принято связывать с спонтанным возникновением дальней пространственной и/или временной когерентности среди переменных (организованной) системы. Однако сама система может быть совершенно «непричастна» к такой самоорганизации, т. е. может либо не использовать ее в дальнейшем, либо не знать, как ее использовать, либо не знать, что она знает, как ее использовать... Дело в том, что самоорганизующаяся система обретает способность к познанию, или становится когнитивной, только при достижении некоторого минимального числа (а именно двух) иерархических уровней (это означает, что взаимно однозначные отображения не порождают когнитивной способности). Непременным условием возникновения самоорганизующейся *когнитивной* системы является способность этой самоорганизующейся системы реплицировать другую систему (в том числе[1]) себя или свои части). В свою очередь такая способность к саморепликации служит верным признаком того, что система знает, как *сжимать* информацию и *моделировать*. Приведем несколько примеров. Некоторые химические реакции представляют собой самоорганизующиеся, но не когнитивные динамические системы. С другой стороны, геном любого биологического организма заведомо является (простейшей) когнитивной системой, так как через транскрипцию и трансляцию (процесс, затрагивающий два иерархических уровня — уровень нуклеиновых кислот и уровень полипептидов) он моделирует и в конце концов репродуцирует себя. Таким образом, ясно, что когнитивная активность эффективна при сжатии сложности другой системы (в том числе

---

[1]) Иногда утверждают, что самоорганизующаяся система не может полностью моделировать себя, так как это могло бы привести к нескончаемой неконвергирующей тавтологии. Для высших когнитивных функций это утверждение остается неразрешимым. Для генетической саморепликации выход из тавтологии осуществляется путем спонтанного развертывания полипептидных цепей и возникающего в результате этого образования стереоспецифических белков.

Такой процесс нарушения симметрии порождает новую информацию в системе и ликвидирует тавтологию.

и собственных подсистем) посредством образования коллективных свойств (кросс-корреляций или статистических кросс-моментов), в результате которого происходит резкое уменьшение первоначального числа степеней свободы наблюдаемой системы. Как мы увидим в дальнейшем, существует и другая альтернатива: аттрактор, действующий на любую точку области своего притяжения (множества начальных условий), фактически делает то же самое.

Резюмируя, мы можем утверждать, что *связь* играет существенную роль при запуске процесса возникновения новых пространственно-временных структур через последовательность неустойчивостей, порождающих бифуркации, которые приводят к нарушенной симметрии и в дальнейшем — к созданию и поддержанию в динамических системах сложных аттракторов, которые сжимают эти структуры. Но начнем с самого начала.

2

Предварительные сведения из нелинейной динамики и статистической физики

2.1. Симметрии и законы сохранения

Что именно мы имеем в виду, когда говорим о «законах физики»? Физика — наука эмпирическая. Люди производят большой объем наблюдений некоторого явления и затем пытаются «теоретизировать» по поводу его, а именно *сжимать* строки наблюдения в простую по существу и краткую аналитическую формулу («алгоритм»). Такое теоретизирование осуществляется в конечном счете путем свертки между наблюдаемым числовым рядом и нелинейной динамикой головного мозга.

Дополняя этот алгоритм некоторым набором внешних ограничений (начальных и граничных условий) и вводя его в качестве входных данных в машину с конечным числом состояний (например, в цифровую вычислительную машину), мы получаем различные сценарии одного и того же явления — в зависимости от конкретного выбора начальных и граничных условий. Таким образом, «физические законы» по существу означают алгоритмы, приводящие к моделированию исходов, или «модели» широких классов динамических явлений.

Но коль скоро все обстоит именно так, то сведение коммуникационного процесса к законам физики немедленно приводит к парадоксу, а именно к попытке объяснить моделирование с помощью моделирования! Однако в данный момент будет разумно спрятать парадокс «под ковер» и попытаться продвинуться дальше. Мы вернемся к нему в гл. 4—6, где понятия и примеры иерархической обработки информации помогут пояснить суть парадокса ссылки на себя.

Любому физическому закону всегда сопутствует некоторое число симметрий. Под степенью симметрии мы понимаем число эквивалентных альтернативных описаний. Например, конфигурация симметрична, если после применения к ней некоторого преобразования она выглядит так же, как до преобразования. Или, если сформулировать ту же мысль иначе, чем больше степень симметрии системы (абстрактной или конкретной), тем точнее то предсказание, которое мы можем сделать относительно эволюции такой системы. Например, как мы вскоре увидим, для замкнутой динамической системы наиболее вероятное состояние есть состояние термодинамического равновесия, которое

оказывается состоянием наиболее полной из возможных макроскопической симметрии. Независимо от того, из какого начального условия мы стартуем, независимо от того, какого рода пертурбативную операцию применяем, замкнутая динамическая система с вероятностью, равной единице, рано или поздно приходит в состояние полной однородности. Однако наш первоначальный вопрос относится к симметрии динамических законов, а не структур (которые возникают после того, как законы получают возможность действовать на протяжении заданных интервалов времени). Но это еще не все. Закон природы обладает симметрией относительно некоторого набора операторов или преобразований, если после их действия он остается таким же, каким был первоначально. Например, законы ядерного взаимодействия, связывающего частицы в атомном ядре, остаются неизменными, если мы заменим протоны нейтронами, и наоборот. Мы знаем об этом потому, что свойства ядер остаются неизменными, если проделать над ядрами такую операцию (например, свойства ядра лития-7, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, почти — с точностью до различия в электромагнитных свойствах — не отличаются от свойств ядра бериллия-7, состоящего из четырех протонов и трех нейтронов).

Другая симметрия, которой обладают почти все динамические законы (см. ниже),— это инвариантность относительно сдвига по времени. О симметриях физических законов обычно говорят как о *законах сохранения*: они всегда *неявно* содержатся в динамических законах и обнаруживаются явно (иногда неожиданно) как следствия действия этих законов. В неявном виде они используются при решении особенно трудных задач вместо самого динамического закона, избавляя ученого от необходимости выполнять множество ненужных и лишних «интегрирований». Чем консервативнее система, тем более она предсказуема. Например, гамильтоновы системы более предсказуемы, чем диссипативные системы вдали от термодинамического равновесия. Наиболее известные симметрии в динамике связаны с симметриями в пространстве и времени. Из инвариантности относительно сдвигов по времени следует сохранение энергии и наоборот. Из трансляционной инвариантности следует сохранение линейного импульса и наоборот (если сохраняется импульс, то соответствующий закон должен быть трансляционно-инвариантным).

Аналогично, из инвариантности относительно вращений (т. е. из независимости результатов наблюдений от ориентации) следует сохранение углового момента и наоборот. (Например, второй закон Кеплера, согласно которому радиус-вектор планеты, движущейся по орбите под действием центральной силы, за

одинаковые промежутки времени заметает равновеликие по площади секторы, эквивалентен сохранению углового момента.)

Теперь мы подходим к следующему решающему вопросу: какова взаимосвязь между симметриями физического закона и симметриями структур, возникающих после того, как этот физический закон обретает возможность действовать в течение некоторого интервала времени? Для большинства структур, встречающихся в природе, характерна сильная асимметрия, тем не менее законы природы выводятся на основе тщательного анализа обширных классов естественных структур. Окончательный ответ на интересующий нас вопрос пока неизвестен. Однако из общих соображений мы можем высказать предположение о том, что при образовании степеней симметрии макроскопической структуры или объекта существенную роль, по-видимому, играют какие-то внешние факторы, например асимметрия начальных и граничных условий (вводимых ad hoc в решение наших дифференциальных уравнений и определяющих численные значения постоянных интегрирования), *а также* неустойчивости, которые приводят к бифуркациям, т. е. ветвлениям решений, и тем самым к *нарушению симметрии* начального образования или структуры. К этим внешним факторам несомненно следует добавить внутренние факторы, обусловленные тем, что одно из четырех фундаментальных физических взаимодействий, а именно слабое ядерное взаимодействие, обладает подлинно *микроскопической* асимметрией, т. е. зеркальной асимметрией (обнаруженной при распаде ядер кобальта). Кроме того, в некоторых редких распадах K-мезона нарушается CP-инвариантность (заряд — четность), тем самым нарушается симметрия между материей и антиматерией. Так как существующая ныне теория предсказывает CPT-инвариантность (заряд — четность — время) (и не существует экспериментальных данных, которые свидетельствовали бы об обратном), мы приходим к выводу о том, что слабое взаимодействие не обладает инвариантностью относительно сдвигов по времени.

Наконец, существует третья разновидность идеально симметричных законов, порождающих асимметричные явления не из-за нарушения симметрии за счет вмешательства каких-то внешних факторов, а просто из-за того, что симметричное решение *неустойчиво*. Это так называемые *скрытые* симметрии, которые помимо прочего играют центральную роль в современных гипотезах о происхождении Вселенной. Согласно принятой ныне версии, в «начале» возникли две совершенно симметричные популяции «гиперчастиц» X и $\bar{X}$. Затем X начали распадаться на барионы, а $\bar{X}$ — на антибарионы. Процесс распада *мог* быть симметричным. В этом случае Вселенная и в момент рождения, и позже была бы ансамблем фотонов в состоянии

термодинамического равновесия. Однако современное состояние Вселенной свидетельствует в пользу гипотезы, согласно которой это однородное состояние было неустойчиво, и поэтому неизбежно была выбрана другая возможность, а именно асимметричный распад: на $\sim 10^9$ антибарионов образовалось $\sim 10^9 + 1$ барионов. Это согласуется с двумя наблюдательными фактами: во-первых, наблюдаемая реальная Вселенная содержит только барионы и, во-вторых, отношение числа фотонов к числу барионов ныне составляет величину $\sim 10^8$. Позднее в этой главе мы проследим в общих чертах сценарий того, как эволюционировал ансамбль барионов и фотонов с момента большого взрыва.

Другой признанный пример скрытой симметрии, заслуживающий того, чтобы упомянуть о нем, — это симметрия между электромагнитным и слабым взаимодействием. Ученые, работающие над «теориями великого объединения», считают, что вскоре у нас может остаться один тип частиц и один класс взаимодействий (вместо четырех); кажущееся разнообразие частиц и взаимодействий, наблюдаемое нами в природе, обусловлено *скрытыми* фундаментальными симметриями.

2.2. Неустойчивости как первопричина нарушенных симметрий, диссипация и необратимость в динамических системах малой размерности (не статистических)

2.2.1. Роль гравитации

Если законы природы в принципе симметричны относительно сдвигов по времени, то как вообще возможна эволюция? В чем она заключается помимо хода макроскопического времени? Если отбросить макроскопические системы с большим числом степеней свободы, для которых ответ на поставленный вопрос дают второе начало термодинамики и H-теорема Больцмана (ответ, как мы увидим, обусловленный внешней асимметрией начальных условий), то как мы можем проследить за первопричиной изменений, происходящих в простых системах, полностью игнорируя влияние начальных условий? Прежде всего необходимо выяснить, не заложены ли неустойчивости изнутри в некоторые физические законы и не приводят ли эти законы сами по себе, если не накладывать никаких ограничений, к эффекту нарастания необратимых явлений типа «снежного кома». На этот вопрос мы должны дать утвердительный ответ. Среди четырех фундаментальных взаимодействий имеется одно (гравитация), которое ведет себя именно так.

Потенциальная энергия, запасенная в гравитационной системе, всегда отрицательна и при сближении двух притягивающихся масс M_1 и M_2 только возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательной. В отличие от всех остальных систем, у ко-

торых потенциальная энергия всегда положительна и имеется точка устойчивого равновесия с минимумом потенциальной энергии, даже у простейшей гравитационной системы из двух притягивающихся масс равновесия не существует, так как, если такую систему предоставить самой себе, ее потенциальная энергия будет монотонно стремиться к $-\infty$ (рис. 2.1).

Не существует предела кинетической энергии, которую могут поглотить массы M_1 и M_2: при сближении M_1 и M_2 они поглощают все больше кинетической энергии, их гравитационный энергетический резервуар все больше исчерпывается и становится все более отрицательным. Таким образом, если бы гравитация была единственным взаимодействием в физическом мире, то Вселенная необратимо коллапсировала бы (но без тепловых потерь, так как в отсутствие электромагнитного взаимодействия вязкость равна нулю) в математическую сингулярность, из которой она, согласно гипотезе, возникла в результате большого взрыва. Сколько времени понадобилось бы однородной сфере с общей массой M и радиусом R, чтобы коллапсировать? Для простоты предположим, что сфера содержит вещество без внутреннего давления.

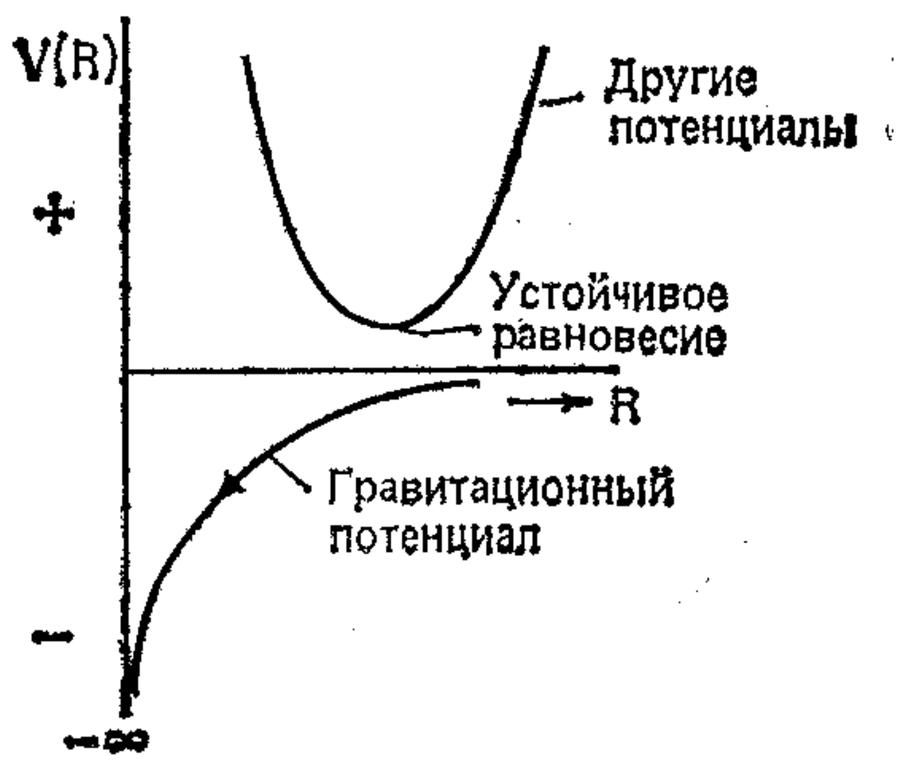


Рис. 2.1. В отличие от всех остальных потенциалов гравитационный потенциал не имеет точек равновесия.

Все частицы притягиваются друг к другу, и сфера сжимается. Если время измерять с того момента, когда вещество «предоставлено самому себе» и начало сжиматься, то через время t радиус сферы равен $r < R$. Выясним, как r изменяется в зависимости от t. Для этого заметим, что на частицу единичной массы на поверхности сферы действует сила, равная GM/r^2, поэтому уравнение движения имеет вид $d^2r/dt^2 = -GM/r^2$. Интегрируя, получаем $(dr/dt)^2 = 2GM(1/r - 1/R)$; при $r = R$ и $t = 0$ выполняется условие $dr/dt = 0$.

Решение уравнения, удовлетворяющее приведенным выше начальным условиям, дает зависимость

$$t = \left(\frac{R}{2GM}\right)^{1/2} \int_r^R \left(\frac{r}{R-r}\right)^{1/2} dr.$$

Время T, за которое сфера полностью коллапсирует, получается из этой формулы при подстановке $r = 0$; мы получаем $T = (\pi/2)(R^3/2GM)$: сфера размером с наше Солнце коллапси-

рует примерно за 30 минут! Таким образом, если бы внутреннее давление в Солнце внезапно прекратилось, то Солнце коллапсировало бы за какие-нибудь полчаса. Долговечность Солнца (~ 10 миллиардов лет) объясняется совместным действием всех четырех фундаментальных физических взаимодействий. В результате такого совместного действия большинство объектов в природе обладает достаточным внутренним давлением, чтобы противостоять или по крайней мере отсрочить катастрофические последствия гравитационной неустойчивости.

То, что гравитационные системы не обладают внутренними состояниями равновесия, делает их к тому же «нетермодинамическими» системами. Поясним, что́ это означает, на «мысленном эксперименте», предложенном астрофизиком Нарликаром [2.1]. Из повседневного опыта мы знаем, что если горячую систему привести в соприкосновение с холодной, то возникнет поток тепла от первой системы ко второй. Горячее тело остывает, а холодное нагревается до тех пор, пока температуры обоих тел не выравниваются, что свидетельствует об установлении термодинамического равновесия — наиболее симметричного состояния, так как флуктуации как в одну, так и в другую сторону от окончательной общей температуры априори равновероятны.

Представим себе теперь, что произошло бы, если бы мы поместили горячую звезду I в окрестности холодной звезды II. Тепловой поток устремится в направлении I $\rightarrow$ II. Но каждая звезда находится в равновесии под действием двух сил: самогравитации и внутреннего давления, обусловленного направленными изнутри наружу γ-излучением и потоками нейтрино, которые возникают в каскадах термоядерных реакций, происходящих в недрах каждой звезды. Гравитация стремится сжать звезду, а внутреннее давление компенсирует это сжатие. Но, по мере того как энергия уходит из звезды I, внутреннее давление падает и звезда I начинает сжиматься. Это в свою очередь приводит к сжатию газа внутри звезды и, следовательно, к повышению температуры. В звезде II происходит обратный процесс: она получает тепло от звезды I и поэтому ее внутреннее давление возрастает. Это нарушает равновесие внутри звезды II, и она расширяется. Но расширение вызывает охлаждение газов. В результате звезда I становится горячее, а звезда II охлаждается — вследствие отрицательной энергии гравитации и в явном противоречии со вторым началом термодинамики. Ясно, что такое неустойчивое поведение способствует развитию и усилению начальной асимметрии, сколь бы малой она ни была, до состояния пластической деформации или нарушения симметрии.

Приливное действие гравитации служит еще одним примером необратимого явления (а именно *гравитационного захвата*), обусловленного возникающей из-за нарушенной симметрии

диссипацией. Приливные эффекты по существу связаны с мгновенным (дальнодействие!) переносом энергии по индукции между двумя *протяженными* вязкими массами, например между Землей и Луной. Пусть два гравитирующих тела имеют идеальную сферическую форму и настолько вязки, что между ними не возникает дифференциальная сила гравитационного притяжения; тогда гравитационный захват невозможен, и два таких тела претерпевают просто упругое столкновение в полном соответствии с законом сохранения импульса, т. е. взаимодействуют обратимо. Никакой связи между их спинами не возникает. Действительно, спин не участвует во взаимодействии из-за идеальной сферической формы тел, так как сферическая форма приводит к тому, что взаимодействие не влияет на спин. Из закона сохранения углового момента следует, что расстояние между траекториями тел в конце должно быть равно расстоянию между ними в начале; это свидетельствует об обратимом характере взаимодействия. Но в действительности из-за существования ненулевой вязкости гравитационное притяжение вызывает пластическую *деформацию* двух тел. В результате этой нелинейной деформации (нарушенной симметрии) происходит диссипация (механическая энергия превращается в тепло из-за неидеальности упругой деформации вещества): деформация тел, имевших первоначально сферическую форму, будучи неупругой, необратима. Кроме того, отклонение формы тел от сферической приводит к возникновению связи между их орбитальным и спиновым угловыми моментами. Это означает, что между вращением одного тела и орбитой другого тела может происходить обмен и *энергией*, и *угловым* моментом. Хорошо известный тому пример — система Луна — Земля, в которой приливные силы действуют в океане, атмосфере и в «земной тверди». Если представить себе земную поверхность, покрытую океанами со стороны A и со стороны A' (рис. 2.2), то со стороны A притяжение со стороны Луны сильнее, чем со стороны A'. Основную массу Земли, лежащую между A и A', Луна притягивает с силой, промежуточной между той, с которой она притягивает океанские воды в A' и A. Обе части Мирового океана — в A' и A — образуют горбы выпуклостью от центра Земли (рис. 2.2). Вблизи суши это приводит соответственно к более сильным приливам и отливам. Двигаясь по поверхности дна или заливаемого берега, вода испытывает трение и теряет энергию. Эта энергия черпается из энергии вращения Земли, и поэтому вращение Земли вокруг оси замедляется (на одну тысячную секунды за столетие — величина эта столь мала, так как линии Земля — Луна требуется почти месяц, чтобы совершить оборот вокруг Земли, тогда как сама Земля совершает оборот вокруг своей оси за сутки, т. е. гораздо быстрее). Приливы, поднимаемые

Землей на Луне, гораздо больше, и приливное трение настолько замедлило вращение Луны, что теперь она всегда обращена к Земле одной и той же стороной.

Применение закона сохранения углового момента к (замкнутой) системе Земля — Луна показывает, что угловой момент вращения Луны возрастает в том же направлении, в каком вращается Земля: орбита Луны, судя по наблюдениям, увеличивается. Диссипация, порождаемая приливным трением, приводит к возникновению спин-орбитальной связи и увлекает Луну прочь от Земли (явление необратимое).

Представим себе теперь тело, летящее навстречу Земле так, что в момент наибольшего сближения оно движется в сторону,

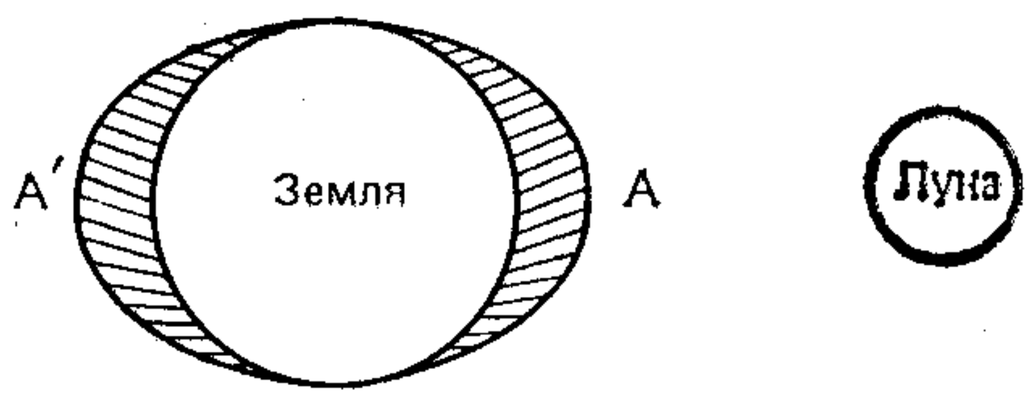


Рис. 2.2. Приливные эффекты на Земле, вызываемые Луной.

противоположную суточному вращению Земли. В отсутствие диссипативных сил такое тело должно было бы удалиться в бесконечность, но приливное трение уменьшит его угловой момент. Если убыль углового момента и связанная с ней потеря энергии достаточно велики, то они могли бы задержать тело, не дав ему уйти на бесконечность. Так, приливные явления могут, по крайней мере в принципе, приводить к гравитационному захвату — необратимому эволюционному явлению, невозможному без диссипации, т. е. без силы гравитационного притяжения, действующей на протяженный вязкий объект.

До сих пор мы занимались (причем весьма интенсивно) рассмотрением гравитационного взаимодействия самого по себе и взаимодействия гравитации и вязкости. Достигнутого нами понимания этого круга проблем пока вполне достаточно, и мы обратимся теперь к неустойчивости других типов, обусловленных связями между четырьмя различными типами фундаментальных взаимодействий, чтобы оценить в более широком плане роль гравитации как ключевого фактора, управляющего во Вселенной.

2.2.2. Комментарии о роли связи между четырьмя фундаментальными взаимодействиями в процессе эволюции

В предыдущем разделе было показано, что если гравитационную систему предоставить самой себе, то она очень быстро коллапсирует. Для Солнца время такого «свободного падения» со-

ставляет примерно полчаса, для нашей Галактики — ~ 100 млн. лет.

Возраст нашей Вселенной в целом (~ 15—20 млрд. лет), как и возраст нашей Галактики и Солнечной системы в частности (~ 5—15 млрд. лет), наводит на мысль о нескольких «задержках» (как называет их Дайсон [2.2]), т. е. внешне случайных препятствиях на пути эволюции, которые возникают при определенных сочетаниях четырех фундаментальных взаимодействий и ряда (неизвестных) начальных условий, связанных (с все еще неизвестной) динамикой большого взрыва. Эти задержки приводят к временному прекращению процесса деградации энергии, происходящему под действием одной гравитации, а значит, «несут ответственность» за долговечность Вселенной. Именно долговечность является необходимой предпосылкой возникновения все более и более сложных структур и в конечном счете форм жизни с все возрастающим числом иерархических уровней, как структурных, так и когнитивных. Объясняется это тем, что эволюция — процесс очень медленный.

Об относительной интенсивности четырех фундаментальных взаимодействий можно судить по следующим данным:

взаимодействия:	
гравитационное	10^{-39}
электромагнитное	1
сильное ядерное	10^{3}
слабое ядерное	10^{-6}

Первых два взаимодействия дальнодействующие, их интенсивность убывает в вакууме как $\sim 1/R^2$; два последних взаимодействия близкодействующие (по существу они спадают до нуля на расстоянии порядка диаметра атомного ядра, т. е. 10^{-13} см) и убывают экспоненциально. Следуя Дайсону [2.2], рассмотрим кратко природу случайных препятствий на пути эволюции, возникающих, так сказать, как deux ex machina [1], чтобы увеличить продолжительность динамической активности в физической Вселенной.

Первой задержкой служит *спин*, которым обладают многие протяженные объекты. Происхождение спина неизвестно (существование его заведомо не заложено явно в законы динамики), и его можно рассматривать как нарушение симметрии, вызванное некоторыми специальными начальными условиями. Протяженные объекты не могут коллапсировать гравитационно, если они быстро вращаются вокруг собственной оси. Вместо того чтобы коллапсировать, внешние части объекта выходят на стационарные орбиты вокруг внутренних (как это можно наблю-

---

[1] Неожиданно, внезапно. — *Прим. перев.*

дать на примере нашей Солнечной системы с ее планетами, спутниками и астероидами).

Вторая задержка связана с *термоядерным синтезом.* Речь идет о сгорании водорода при высоких температурах и давлении с образованием гелия. Термоядерное горение (синтез ядер гелия из ядер водорода) сопровождается выделением энергии в виде γ-излучения и нейтрино, противодействующих сжатию. Поэтому звезда с высоким содержанием водорода не может претерпевать гравитационный коллапс выше некоторой критической точки, пока не будет израсходован весь водород.

Важную роль здесь играет то счастливое обстоятельство, что изотоп гелия с массовым числом 2 (ядро, которое состояло бы из двух протонов и не содержало бы ни одного нейтрона) не существует. Если бы гелий-2 существовал, то в результате реакции протона с протоном получался бы гелий-2 плюс фотон. В свою очередь ядро гелия-2 спонтанно распадалось бы на дейтрон, позитрон и нейтрино. Первая реакция протекает чрезвычайно интенсивно, и поэтому весь водород очень быстро выгорел бы с образованием гелия-2. Сила ядерного притяжения двух протонов составляет около 20 млн. вольт, но и этого недостаточно для образования связанного состояния ядра гелия-2: не хватает каких-нибудь полмиллиона вольт. Если бы сильное взаимодействие было на 2,5 % сильнее, то Солнце за считанные минуты израсходовало бы свой запас водорода. В действительности происходит нечто другое: обычный водород может вступать в реакцию с самим собой, повинуясь только слабому взаимодействию. В такой реакции два протона, сливаясь, образуют дейтрон плюс позитрон и нейтрино. (Затем позитрон взаимодействует с электронами окружающей плазмы и порождает фотоны в γ-диапазоне. Из-за томпсоновского рассеяния у этих фотонов уходит примерно миллионы лет на то, чтобы достичь поверхности Солнца и оттуда распространяться уже в оптическом диапазоне.) Так как времена распада или релаксации обратно пропорциональны *интенсивностям* взаимодействий, протон-протонная реакция протекает примерно в $(10^3/10^{-6})^2 \sim 10^{18}$ раз медленнее, чем реакция, обусловленная сильным взаимодействием. Отсюда — долговечность звезд и, в частности, нашего Солнца.

Третья задержка, весьма существенная для эволюции на Земле, связана с тем, что недра Земли содержат весьма умеренные количества *радиоактивных элементов* — урана и тория, элементов, которые «приготовлены» не в недрах звезд (процесс синтеза не идет дальше самого тяжелого стабильного элемента — железа), а рождаются при взрывах сверхновых. (Такая термоядерная детонация обусловлена, по-видимому, тем, что в случае больших звезд, находящихся в последней фазе своего

развития, с массами, превышающими «предел Чандрасекара», ядро, состоящее в основном из углерода и кислорода, мгновенно выгорает, превращаясь в железо. Внутренность звезды быстро взрывается, и выделяющаяся энергия приводит к взрыву масс, образующих наружную оболочку звезды.) Ядра урана и тория вследствие конкуренции между поверхностным натяжением и электростатической энергией медленно распадаются, претерпевая β-распад, на протоны, электроны (которые испускаются) и антинейтрино. Трение испускаемых электронов об окружающую среду приводит к нагреванию недр Земли, обусловливая тем самым вулканическую деятельность и образование и обновление атмосферы, а также пополнение поверхности Земли запасами минерального сырья.

Теперь настало время обратиться к неустойчивостям и, следовательно, к эволюционным явлениям, обусловленным не физическим законом самим по себе, а комбинацией физического закона и *специфических* начальных и граничных условий. Ниже мы приводим ряд модельных и представительных примеров, относящихся как к скрытой симметрии, так и к нарушению симметрии.

2.2.3. Нелинейный осциллятор с сильным затуханием: пример спонтанного нарушения симметрии

Рассмотрим массивную частицу m, движущуюся в вязкой среде (например, испытывающую ν толчков в единицу времени) под действием пружины с коэффициентом упругости K (рис. 2.3).

По второму закону Ньютона при постоянной массе m сила, действующая на тело, равна скорости изменения импульса, т. е. $F = d\bar{P}/dt$, или $F = md^2x/dt^2$, $F = (-\nu dx(dt) - Kx$; поэтому уравнение движения имеет вид $m\ddot{x} + \nu\dot{x} + Kx = 0$ или $\ddot{x} + (\nu\dot{x}/m) + (Kx/m) = 0$, откуда $\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где ω_0 — собственная частота (затухающих) колебаний. При $|\xi| \gg 1$ в отсутствие специфических начальных или граничных условий, делающих необходимым включение инерциального члена, мы можем опустить его, и тогда уравнение движения перейдет просто в уравнение $\dot{x} = -\alpha x = F$, где $\alpha = \omega_0^2/\xi$. Можно представить себе движение частицы в потенциальной яме $V(x)$, где потенциал $V(x)$ связан с силой F соотношением $F = -\partial V/\partial x$, или

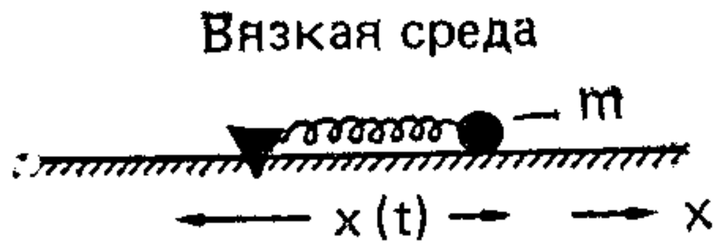


Рис. 2.3. Массивная частица под действием пружины в вязкой среде.

$$V = \frac{1}{2}\alpha x^2. \qquad (2.2.1)$$

Ясно, что в этом случае существует одно стационарное состояние $dx/dt = 0$, $x = 0$ и оно устойчиво, как показано на рис. 2.4.

Предположим теперь, что восстанавливающая сила становится слегка нелинейной либо вследствие конечного растяжения за пределы выполнимости закона Гука, либо вследствие неидеальной упругости пружины. Уравнение движения и в этом случае можно записать в виде

$$\dot{x} = -\alpha x - \beta x^3, \tag{2.2.2}$$

где $\beta > 0$. Потенциальная яма принимает вид

$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4. \tag{2.2.3}$$

Необходимо различать два случая.

а) $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае форма нового потенциала остается прежней, и единственное стационарное состояние, ко-

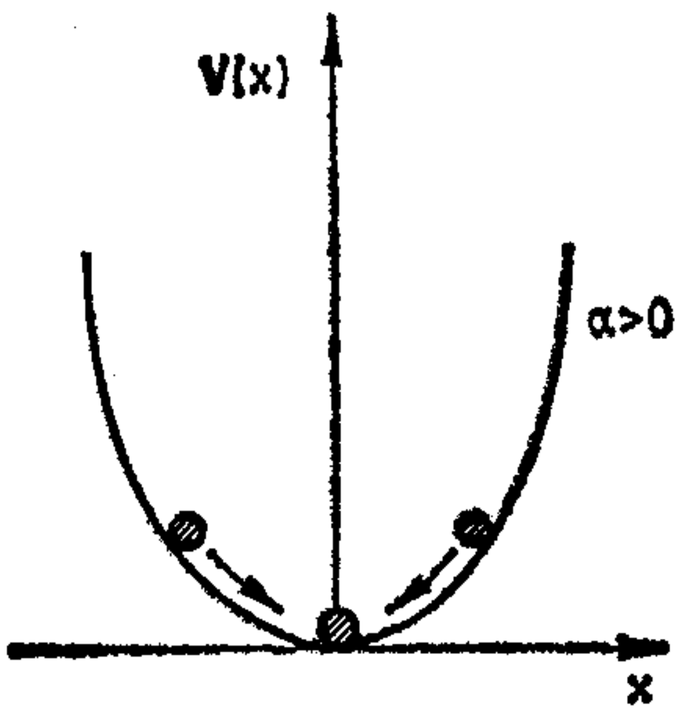


Рис. 2.4. Потенциал $V(x) = \alpha x^2/2$ при $\alpha > 0$.

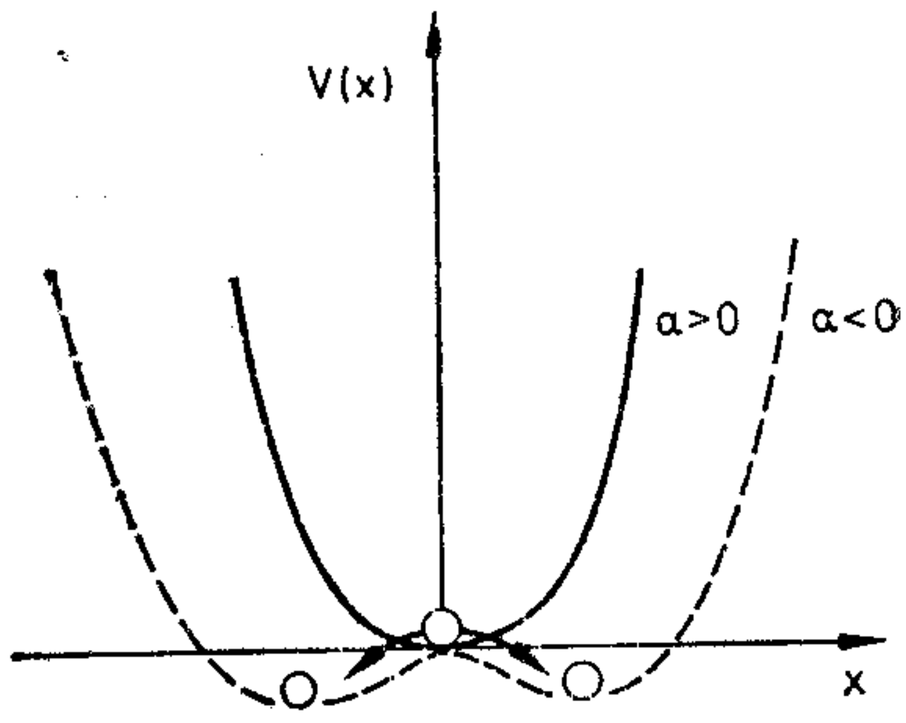


Рис. 2.5. Потенциал $V(x) = \alpha x^2/2 + 3x^4/4$ при $\alpha > 0$ (сплошная линия) и при $\alpha < 0$ (штриховая линия).

торое по-прежнему устойчиво, есть точка $x = 0$ (это также можно вывести из того, что уравнение $\alpha x + \beta x^3 = 0$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ имеет только один действительный корень $x = 0$).

б) $\alpha \leqslant 0$, $\beta > 0$. При переходе через критическое значение $\alpha_c = 0$ форма потенциала изменяется, хотя остается симметричной (рис. 2.5).

Теперь число стационарных состояний равно трем, или, иначе говоря, все три корня уравнения $\alpha x + \beta x^3 = 0$ при $\alpha < 0$, $\beta > 0$ действительны. Но прежнее симметричное устойчивое стационарное состояние $x = 0$ становится неустойчивым, и частица перемещается в одно из равновероятных состояний $x = \sqrt{|\alpha|/\beta}$ или $x = -\sqrt{|\alpha|/\beta}$. Этот пример показывает, что для возникновения неопределенности относительно следующего состояния системы отнюдь не обязательно большое число степеней

свободы: одной лишь неустойчивости вполне достаточно, чтобы порождать — через бифуркацию — непредсказуемое поведение, которое принято связывать со стохастичностью.

2.2.4. Лазер: пример нарушения симметрии

Рассмотрим прозрачное тело, заполняющее цилиндрическую полость, которая ограничена двумя полупрозрачными параллельными зеркалами, как на рис. 2.6, *а*.

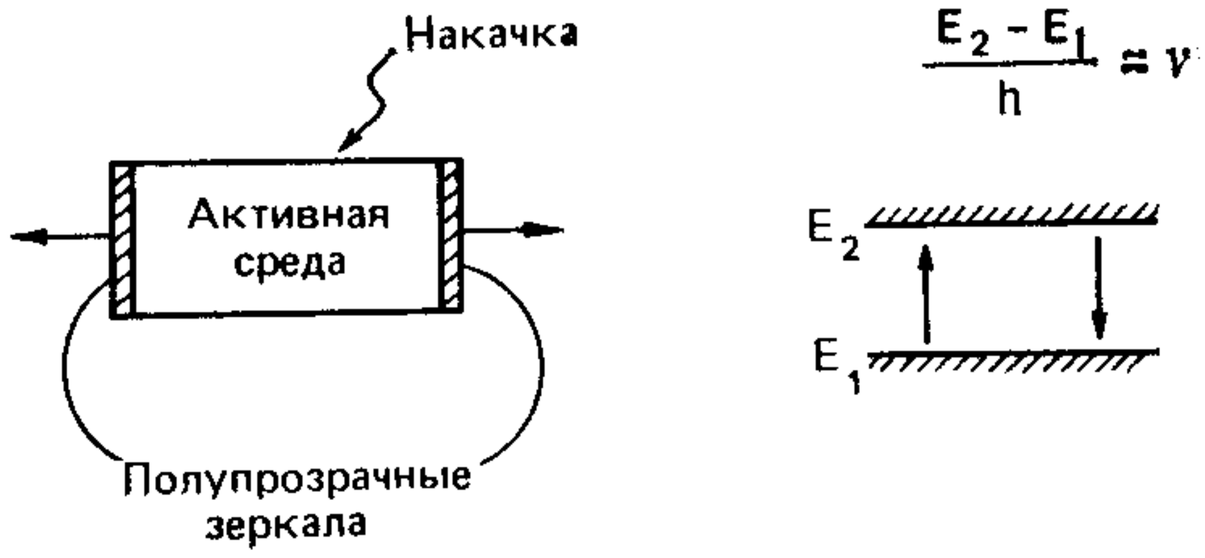


Рис. 2.6. Иллюстрация понятия «простой лазер».

Предположим, что атомы активной среды могут находиться в двух различных состояниях E_1 и E_2 с населенностями, удовлетворяющими в равновесном состоянии распределению Больцмана:

$$N_2 \sim N_1 \exp\left(\frac{-E_2 + E_1}{kT}\right).$$

Атомы активной среды мы возбуждаем с помощью внешней накачки на частоте $\nu = (E_2 - E_1)/h$ (рис. 2.6, *б*). Атомы из нижнего энергетического состояния переходят в верхнее энергетическое состояние, а оттуда спонтанно переходят в нижнее состояние, испуская один фотон (с частотой ν). Нас интересует динамическая эволюция числа $x(t)$ фотонов, рождаемых в полости.

Ясно, что скорость изменения dx/dt числа фотонов в каждый момент времени можно рассматривать как разность между *приростом* (увеличением числа фотонов в полости, испущенных в результате переходов возбужденных атомов в нижнее энергетическое состояние) и *убылью* (уменьшением числа фотонов в полости за счет утечки через полупрозрачные стенки полости).

Прирост A пропорционален числу фотонов в полости и числу атомов N, возбуждаемых в единицу времени, и, следовательно, пропорционален произведению этих величин. Таким образом, $A = GNx$, где G — коэффициент пропорциональности, характеризующий восприимчивость активной среды и интенсивность

источника накачки. Убыль B просто пропорциональна числу фотонов в полости: $B = \tau x$, где τ — коэффициент, характеризующий степень прозрачности отражающих зеркал. Таким образом,

$$dx/dt = GNx - \tau x. \tag{2.2.4}$$

Но с испусканием фотонов число возбужденных атомов убывает, поэтому мы можем записать $N = N_0 - \alpha x$, где N_0 — число возбуждаемых накачкой (в единицу времени) атомов, α — коэффициент, как и прежде связанный с восприимчивостью активной среды. Тогда из (2.2.4) получаем уравнение

$$\dot{x} = G(N_0 - \alpha x)x - \tau x,$$

или

$$\dot{x} = -K_1 x - K_2 x^2, \tag{2.2.5}$$

где $K_1 = \tau - GN_0$ и $K_2 = G\alpha$. Коэффициент K_2 всегда положителен. Мы различаем два случая:

1) $K_1 > 0$, или $GN_0 < \tau$, слабая накачка;
2) $K_1 \leqslant 0$, или $GN_0 \geqslant \tau$, сильная накачка.

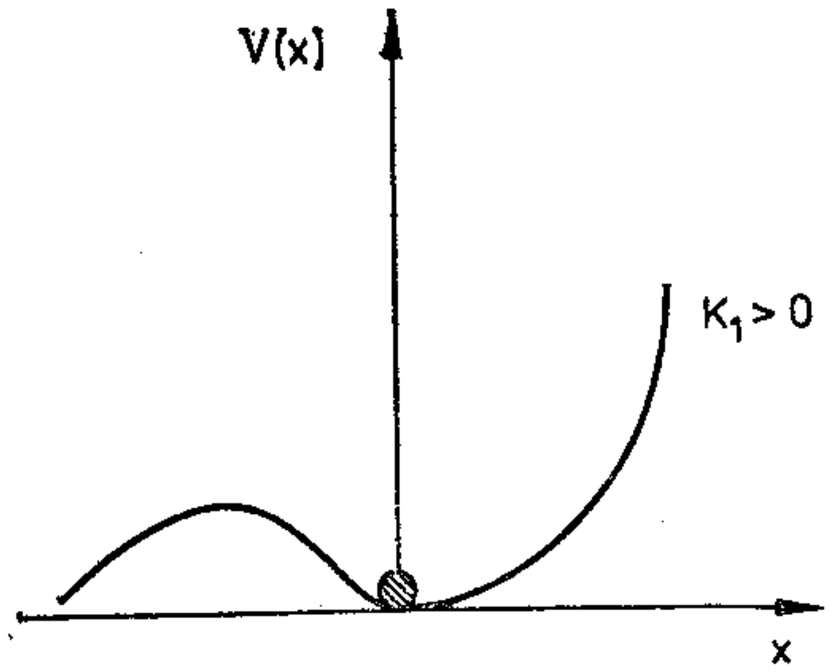
Заметим, что наше динамическое уравнение (2.2.5) очень похоже на уравнение (2.2.2) из предыдущего примера: различие состоит в том, что на нашу систему действует восстанавливающая сила с квадратичной нелинейностью вместо кубической. Следовательно, мы можем забыть на время о лазере (следя, однако, за тем, чтобы x был положительным целым числом) и предположить, что мы имеем частицу, мгновенное отклонение которой от состояния равновесия $x(t)$ определяется потенциальной ямой

$$V(x) = \frac{1}{2}K_1 x^2 + \frac{1}{2}K_2 x^3. \tag{2.2.6}$$

При $K_1 > 0$ потенциальная яма имеет форму, показанную на рис. 2.7, и единственное устойчивое стационарное состояние $x = 0$. В нашем примере это означает, что после затухания переходных процессов *стационарное* число фотонов (т. е. число когерентных фотонов, см. ниже) в полости равно нулю. (Такое устройство ведет себя как обычная осветительная лампа.) Но когда мощность накачки превосходит некоторый порог $G_c = \tau/N_0$, возникает неравенство $K_1 \leqslant 0$ и потенциальная яма принимает такой вид, как показано на рис. 2.8, поэтому существует устойчивое стационарное состояние с $x \neq 0$: $x^* = |K_1|/K_2$, где устройство ведет себя как *когерентный* источник излучения. Для полноты мы приведем ниже операционное определение когерентности, которое понадобится нам в гл. 3 и 4.

Первоначально под «когерентной волной» мы понимаем волну вида $\exp[j(\omega t - \varphi)]$, где фаза φ постоянна или остается ограниченной относительно некоторой данной системы отсчета (например, относительно фазы локального осциллятора приемника). В некогерентной волне фаза φ флуктуирует случайным образом.

Существенное различие между этими двумя типами волн определяется тем, каким образом энергия суммы нескольких



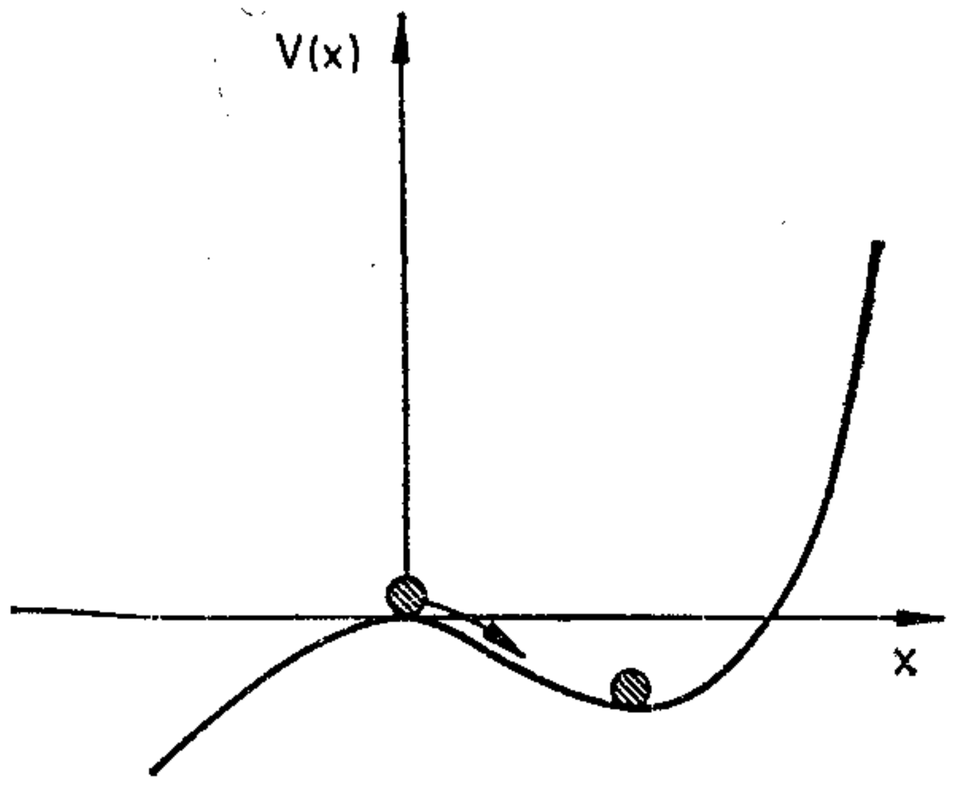


Рис. 2.7. Потенциал $(K_1x^2/2)+(K_2x^3/3)$ при $K_1 > 0$.
Рис. 2.8. Потенциал $(K_1x^2/2)+(K_2x^3/3)$ при $K_1 \leqslant 0$.

осцилляторов зависит от энергии отдельных осцилляторов — слагаемых. Например, если интерферируют две (созданные человеком) радиоволны с равными амплитудами, то суммарная плотность энергии может быть любой от нуля (если волны находятся в противофазе) до четырехкратной плотности энергии каждой волны (если обе волны находятся в фазе). Два некогерентных источника равной мощности всегда создают *удвоенную интенсивность* (квадрат амплитуды) по сравнению с каждым источником; если n независимых осцилляторов с единичной амплитудой интерферируют в некоторой точке пространства, то суммарная плотность энергии пропорциональна

$$W \sim \left|\sum_{i=1}^{n} E_i\right|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} e^{j\varphi_i}\right|^2,$$

или

$$W \sim \left(\sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i\right)^2 = n + 2\sum_{i\neq j}^{n(n-1)/2} \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

Пусть $\varphi_i - \varphi_j = \varepsilon_\sigma$, тогда

$$W \sim n + \sum_{\sigma=1}^{n(n-1)/2} \cos\varepsilon_\sigma. \qquad (2.2.7)$$

Рассмотрим два предельных случая — полной когерентности и полной некогерентности.

1) Если все φ_i равны, т. е. если все осцилляторы находятся в фазе, то $\varepsilon_\sigma = 0$ при всех σ и $W = n + (n-1)n = n^2$.

2) Пусть теперь отдельные фазы случайны, независимы и *равномерно* распределены на интервале от $-\pi$ до $+\pi$. Как распределена величина $\varepsilon_\sigma = \varphi_i - \varphi_j$? В теории вероятности доказывается, что если мы имеем переменные x_i, x_j, равномерно распределенные на интервале от a до b (рис. 2.9), то плотность

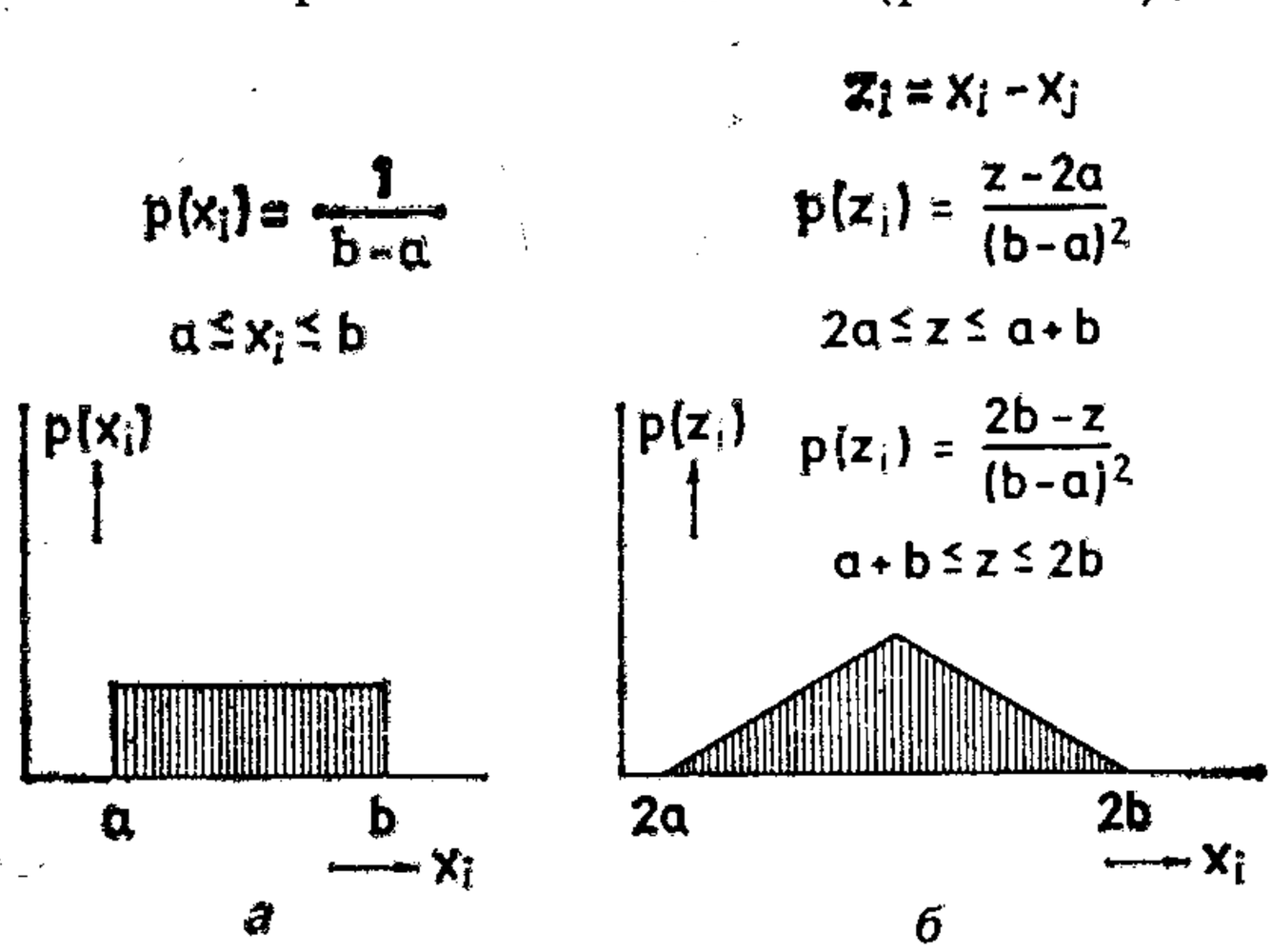


Рис. 2.9. Функции плотности вероятности (*а*) $p(x_i)$ и (*б*) $p(x_i - x_j)$.

вероятности их разности на интервале $(2a, 2b)$ имеет так называемое распределение Симпсона. Таким образом, если φ_i распределены равномерно на интервале от $-\pi$ до $+\pi$, то можно ожидать, что величина ε_σ имеет распределение Симпсона на интервале от -2π до $+2\pi$. Но в силу периодичности $\cos\varepsilon_j$ это полностью эквивалентно равномерному распределению на интервале от $-\pi$ до $+\pi$, так как плотности вероятности на любых других интервалах от $m\pi$ до $(m+2)\pi$, где m — любое целое число, добавляются к плотностям вероятности на базисном интервале $(-\pi, +\pi)$ или на любом другом выбранном базисном интервале длиной 2π. Таким образом, усредняя W в (2.2.7), получаем

$$\langle W\rangle \sim \left\langle n + \sum_{\sigma=1}^{n(n-1)} \cos\varepsilon_\sigma \right\rangle = n + \frac{n(n-1)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varepsilon\, d\varepsilon = n. \quad (2.2.8)$$

Итак, мы можем утверждать, что если фазы всех n осцилляторов равны, то суммарная плотность энергии пропорциональна квадрату числа осцилляторов n^2 (когерентность). Если же фазы осцилляторов случайны и равномерно распределены на некото-

ром интервале длиной 2π, то суммарная плотность энергии пропорциональна числу осцилляторов n (некогерентность). Таким образом, если из 100 взаимодействующих осцилляторов только 10 когерентны, то эти 10 осцилляторов «ведут» себя примерно как 100 и могут «забить» остальные осцилляторы, которые ведут себя всего лишь как 90 осцилляторов. Разумеется, в наиболее распространенном случае мы имеем дело с *частичной когерентностью*, когда либо фазы отдельных осцилляторов ограничены рекуррентным соотношением $|\varphi_i - \varphi_j| < \phi_{ij}$, где пределы ϕ_{ij} не все равны нулю, либо фазы отдельных осцилляторов случайны, но не равномерно распределены на базисном фазовом цикле длиной 2π.

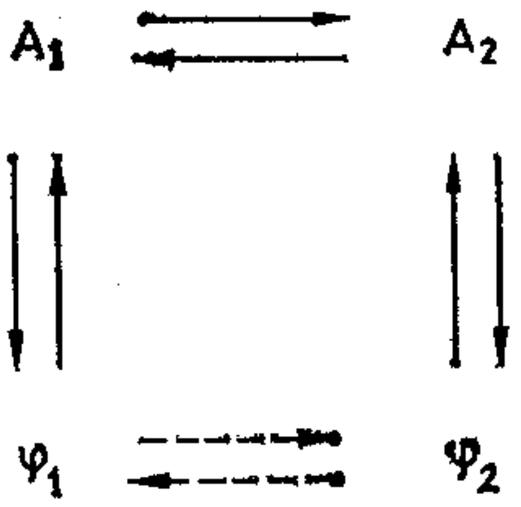


Рис. 2.10. Амплитудные взаимодействия между связанными нелинейными осцилляторами переносятся на связывание фаз.

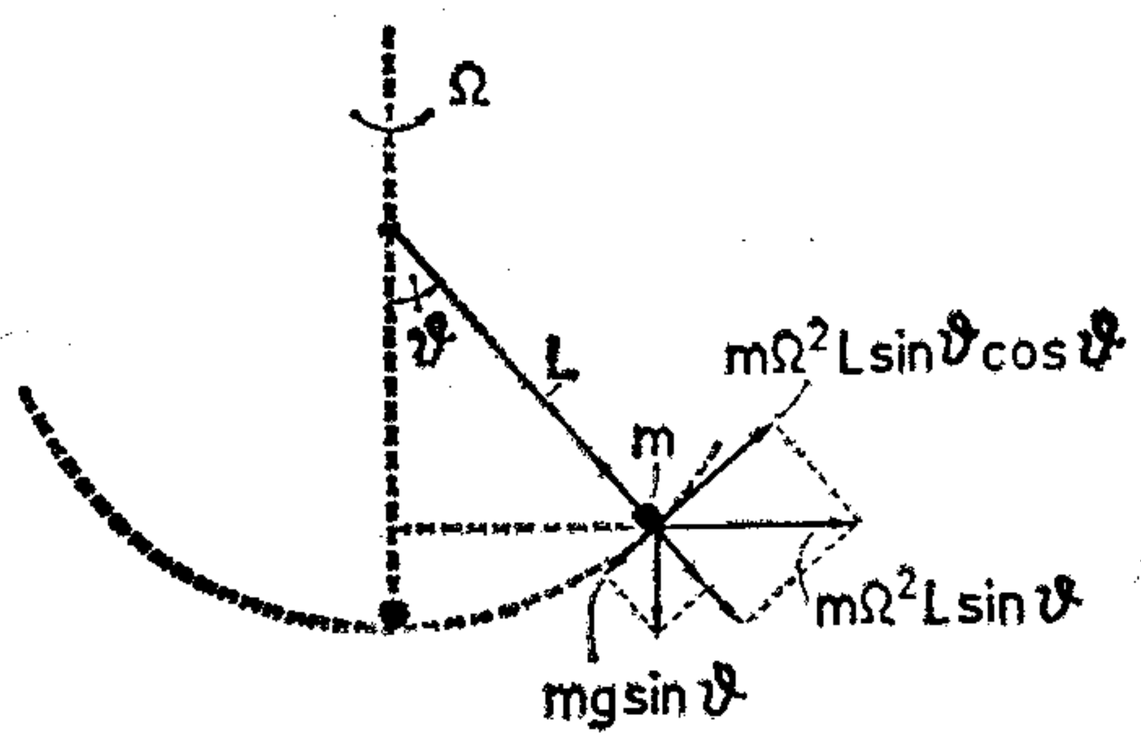


Рис. 2.11. Простой маятник ($\Omega = 0$) и вращающийся нелинейный маятниковый осциллятор.

Естественно возникает вопрос: как должны *взаимодействовать* фазы отдельных осцилляторов, чтобы мы могли управлять степенью когерентности? Обычно в случае связанных линейных осцилляторов взаимодействие приводит к обмену энергией между их амплитудами и не затрагивает фазы или частоты. В случае связанных нелинейных осцилляторов картина иная: у таких осцилляторов (см. ниже) существует *внутренняя* связь между амплитудой и фазой или между амплитудой и частотой. Следовательно, если два нелинейных осциллятора оказываются связанными, то они начинают взаимодействовать (когда амплитуда их колебаний еще мала), обмениваясь энергией между своими амплитудами A_1, A_2 (рис. 2.10). Но вскоре из-за внутренней связи $A_1 \rightleftharpoons \varphi_1$, $A_2 \rightleftharpoons \varphi_2$ энергетическое взаимодействие между амплитудами приводит к возникновению связи между фазами φ_1, φ_2 осцилляторов; следовательно, в случае линейных осцилляторов возникновение когерентности (и, значит, организации) — нечто невозможное. Наконец, прежде чем переходить к следующему примеру, рассмотрим более

подробно упомянутую выше «внутреннюю» взаимосвязь между амплитудой и, скажем, частотой нелинейного осциллятора.

Запишем уравнение маятника для конечных отклонений от состояния устойчивого равновесия, как показано на рис. 2.11. Действующая сила есть проекция на касательную веса колеблющейся массы $-mg\sin\vartheta$. Если L — длина маятника, то инерциальный член $md\vartheta/dt$, задающий скорость изменения импульса, можно записать в виде

$$m\frac{d(\omega L)}{dt}=m\frac{Ld^2\vartheta}{dt^2},$$

так как $\omega=d\vartheta/dt$. Таким образом,

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\vartheta=0,\quad\text{или}\quad\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\omega_0^2\sin\vartheta=0 \qquad (2.2.9)$$

есть уравнение маятника, где $\omega_0=\sqrt{g/L}$ — собственная частота *линеаризованной* системы, т. е. частота, с которой колебался бы линейный гармонический маятник при малых отклонениях от равновесия:

$$|x|\ll 1,\quad \sin x\sim x\to\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\omega_0^2\vartheta=0.$$

Чтобы перейти к нелинейным колебаниям, разложим $\sin\vartheta$ и удержим только первый нелинейный член. Уравнение (2.2.9) перейдет при этом в уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\omega_0^2\vartheta-\frac{\omega_0^2}{6}\vartheta^3=0. \qquad (2.2.10)$$

Попытаемся найти решение уравнения (2.2.10) вида

$$\vartheta=\vartheta_0\sin\omega t+\varepsilon\vartheta_0\sin 3\omega t, \qquad (2.2.11)$$

где $\varepsilon\ll 1$ — безразмерная постоянная, а $\vartheta_0\ll 1$ — амплитуда колебаний линеаризованного гармонического осциллятора. Мысль о включении в (2.2.11) члена с $\sin 3\omega t$ навеяна тригонометрическим тождеством

$$\sin 3x=0{,}75\sin x-0{,}25\sin 3x. \qquad (2.2.12)$$

Член с ϑ^3 в уравнении (2.2.10) порождает из куба $\sin\omega t$ член с $\sin 3\omega t$. Следовательно, если мы хотим удовлетворить уравнению (2.2.10), то нам необходимо добавить в линеаризованное решение такой член, как $\varepsilon\sin 3\omega t$, — он необходим, чтобы уничтожить член с $\sin 3\omega t$, порождаемый ϑ^3. Продолжая, мы обнаруживаем, что этот новый член $\varepsilon\sin 3\omega t$ в пробном решении (2.2.11) при возведении в куб порождает член с $\varepsilon^3\sin 9\omega t$ и т. д. Но, выбирая $\varepsilon\ll 1$, мы можем ожидать быстрой сходимости получающегося ряда, так как в высокочастотные члены в каче-

стве коэффициентов входят высокие степени ε. Необходимо теперь определить ε и ω. Но с самого начала мы знаем, что *нелинейное* уравнение (2.2.10) неизбежно приводит к *ангармоническим* (хотя и периодическим) колебаниям. Поэтому ω — основная частота в дискретном спектре Фурье, который теоретически содержит *все* 3^n высших гармоник [в нашем случае этот спектр обрывается на третьей гармонике ($n = 1$)]. Нам также хотелось бы знать, на сколько эта основная частота ω отличается от собственной частоты ω_0 линейного (гармонического) осциллятора.

Подставим наше возмущенное решение (2.2.11) в уравнение (2.2.10). Исследуя каждый член в отдельности, получаем

$$\ddot{\vartheta} = -\omega^2\vartheta_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\vartheta_0 \sin 3\omega t, \tag{2.2.13}$$

$$\vartheta^3 = \vartheta_0^3(\sin^3 \omega t + 3\varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \ldots), \tag{2.2.14}$$

где мы отбросили члены порядка ε^2 и ε^3, так как по предположению $\varepsilon \ll 1$. Используя тригонометрическое тождество (2.2.12), запишем соотношения

$$\omega_0^2\vartheta = \omega_0^2\vartheta_0 \sin \omega t + \omega_0^2\varepsilon\vartheta_0 \sin 3\omega t, \tag{2.2.15}$$

$$-\frac{1}{6}\omega_0^2\vartheta^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24}\vartheta_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\vartheta_0^3 \sin 3\omega t. \tag{2.2.16}$$

Складывая отдельно левые и правые части равенств (2.2.13), (2.2.15), (2.2.16), получаем (с учетом соотношения (2.2.10)) нуль в левой части, а правую часть — в виде $A\vartheta_0 \sin \omega t + B\omega_0 \sin 3\omega t$, где

$$A = -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\vartheta_0^2, \tag{2.2.17}$$

$$B = -9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\vartheta_0^2. \tag{2.2.18}$$

Но если соотношение $A\vartheta_0 \sin \omega t + B\omega_0 \sin 3\omega t = 0$ должно выполняться при всех t, то $A = 0$, $B = 0$. Из равенства $A = 0$ получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{8}\right);$$

используя при $|\vartheta_0| \ll 1$ приближение $\sqrt{1-x} \sim 1 - x/2$, $|x| \ll 1$, приходим окончательно к соотношению

$$\omega \sim \omega_0\left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{16}\right), \tag{2.2.19}$$

которое показывает, что основная частота нелинейного осциллятора *меньше* собственной частоты линейного приближения.

Из соотношения $B = 0$ мы получаем выражение для параметра возмущения: $\varepsilon \sim \vartheta_0^2/192$, если положить $\omega^2 \sim \omega_0^2$ $(\vartheta_0 \ll 1)$, или, точнее, $\varepsilon = \vartheta_0^2/[24(8 - 9\vartheta_0^2/8)]$. Таким образом, наше решение принимает вид

$$\vartheta \approx \vartheta_0 \sin \omega t + \frac{\vartheta_0^3}{192} \sin 3\omega t, \qquad (2.2.20)$$

и мы видим, что в нелинейном осцилляторе помимо ангармоничности существует связь между основной частотой и амплитудой колебаний; следовательно, энергетическое взаимодействие между амплитудами ангармонических осцилляторов порождает связь частот (или фаз) и тем самым открывает возможность возникновения фазовой когерентности [2.3].

Перейдем теперь к еще более общему примеру *ветвящихся решений*, в котором ветвление обусловлено неустойчивостью.

2.2.5. Вращающийся маятник: пример бифуркации, приводящей к спонтанному нарушению симметрии

Возьмем тот же маятник, что и в предыдущем разделе, но рассмотрим систему (например, колеблющийся шар с массой m), «заключенную» внутри твердого тонкостенного двумерного тора радиуса L: шар может без трения скользить внутри тора, а сам тор вращается, как показано на рис. 2.11, с постоянной угловой скоростью Ω. Когда тороидальная оболочка не вращается, система имеет два стационарных состояния: одно устойчивое $(\vartheta = 0)$, а другое неустойчивое $(\vartheta = \pm\pi)$.

Выясним, как скажется на такой системе введение новой степени свободы движения частицы, а именно вращения тороидальной оболочки. В неинерциальной системе отсчета вращающейся системы на шар действуют силы: (1) тангенциальная составляющая веса и (2) тангенциальная составляющая центробежной силы.

Уравнение движения имеет вид

$$mL\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mg\sin\vartheta + m\Omega^2 L\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

или

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \sin\vartheta\left(-\frac{g}{L} + \Omega^2\cos\vartheta\right) = \frac{g}{L}\sin\vartheta\left(\frac{\Omega^2 L}{g}\cos\vartheta - 1\right);$$

вводя сложный параметр $\Omega^2 L/g = \mu$ и полагая $g/L = \omega_0^2$, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega_0^2\sin\vartheta(\mu\cos\vartheta - 1). \qquad (2.2.21)$$

При $|\vartheta| \ll 1$ имеем $\cos\vartheta \sim 1$, $\sin\vartheta \sim \vartheta$ и (2.2.21) упрощается:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega_0^2(\mu - 1)\vartheta,$$

или

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\vartheta = 0, \qquad (2.2.22)$$

где $\omega = \omega_0\sqrt{(1-\mu)}$ — теперь собственная частота линеаризованного маятника во вращающейся системе отсчета. Итак, в качестве побочного продукта проводимого нами анализа мы установили, что собственная частота линейного маятника (вещественная при $\mu < 1$) *замедляется* во вращающейся системе отсчета по сравнению со своим значением в инерциальной системе отсчета ($\Omega = 0$). При $\mu > 1$ ($\Omega^2 > g/L$, или $\Omega > \omega_0$) линейный «осциллятор» во вращающейся системе отсчета не колеблется, а совершает затухающее непериодическое движение.

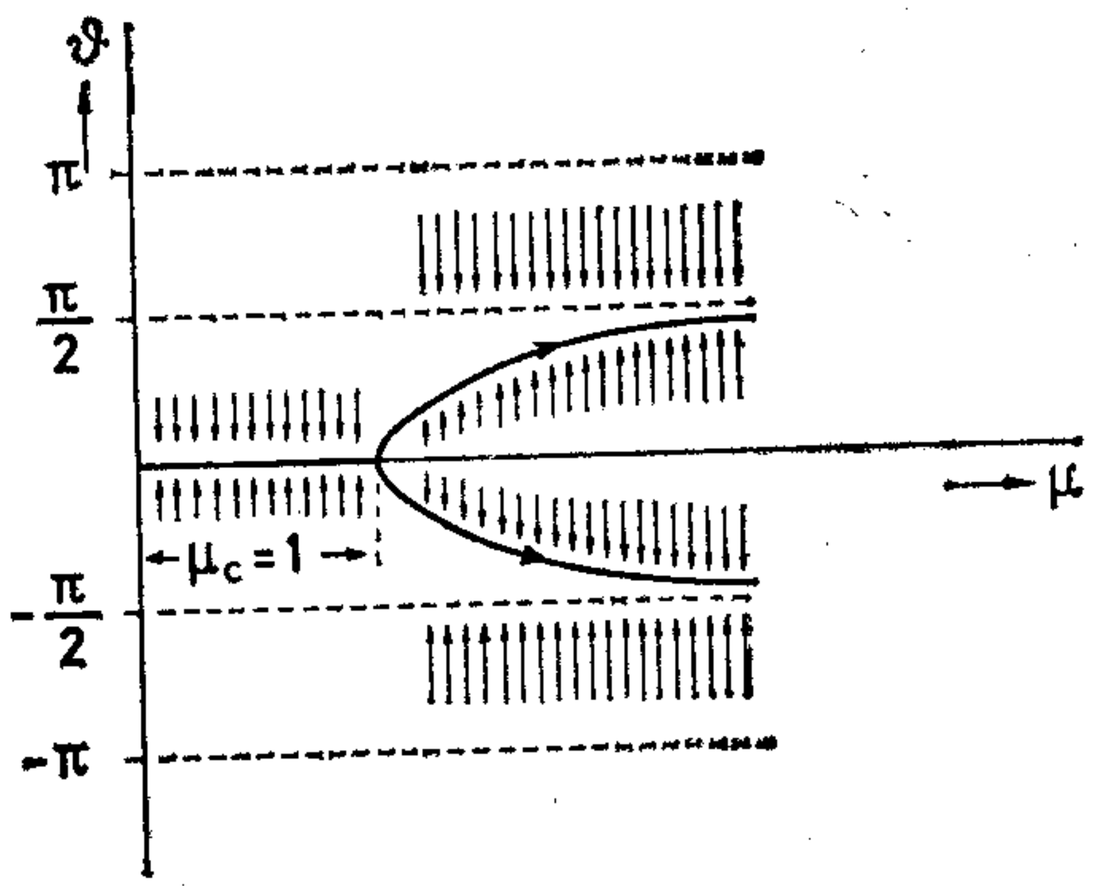


Рис. 2.12. Бифуркационная диаграмма вращающегося нелинейного маятникового осциллятора ($\mu = \Omega^2 L/g$).

Обратимся теперь к исследованию устойчивости решений уравнения (2.2.21). Стационарные состояния ($\ddot{\vartheta} = \text{const}$) требуют одновременного выполнения равенств $\vartheta = 0$ и $\dot{\vartheta} = 0$, т. е.

$$\sin\vartheta(\mu\cos\vartheta - 1) = 0. \qquad (2.2.23)$$

Уравнению (2.2.23) удовлетворяют либо $\sin\vartheta = 0$, $\vartheta = \pm K\pi$ ($K = 0, 1, 2, \ldots$), либо $\cos\vartheta = 1/\mu$, $\mu \geqslant 1$.

Первое решение ($\vartheta = \pm K\pi$) соответствует «классическим» невращающимся стационарным состояниям $\vartheta = 0$ (устойчивое состояние) и $\vartheta = \pm\pi$ (неустойчивое состояние). Второе решение ($\vartheta = \arccos\mu^{-1}$) при каждом значении $\mu > 1$ порождает *две симметричные ветви*. При $\mu = 1$ из $\vartheta = 0$ исходят три ветви, как показано на рис. 2.12, где решения уравнения (2.2.21) показаны как функции «управляющего параметра» μ. При $\mu \to \infty$, как нетрудно видеть, $1/\mu \to 0$, $\vartheta \to \pi/2$.

Мы видим таким образом, что *выше* определенного критического значения угловой скорости Ω системы отсчета традицион-

ное устойчивое стационарное состояние $\vartheta = 0$ становится неустойчивым, и новые (симметричные) устойчивые стационарные состояния задаются формулой $\vartheta = \arccos \mu^{-1}$.

Разумеется, весь предшествующий анализ мы могли бы свести к движению тяжелой частицы в потенциальной яме. Как

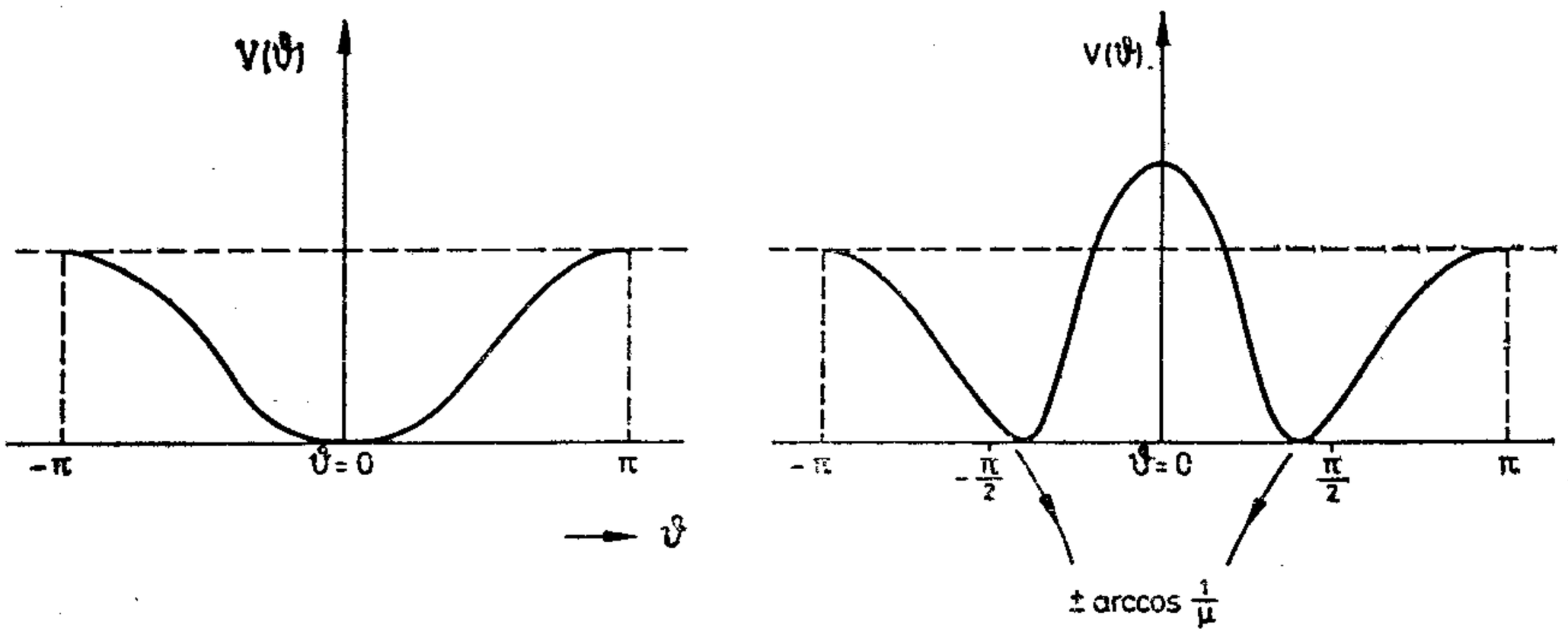


Рис. 2.13. Общий ход потенциала маятникового осциллятора при (*а*) $\mu < 1$ и (*б*) $\mu \geqslant 1$ (см. текст).

выглядит в этом случае потенциальная функция? Действующая на систему внешняя сила равна $F = \omega_0^2 \sin \vartheta (\mu \cos \vartheta - 1)$. В любой гамильтоновой системе, в частности в рассматриваемой нами, она связана с потенциалом соотношением $F = -\partial V(\vartheta)/\partial \vartheta$, из которого следует, что

$$V(\vartheta, \mu) = \omega_0^2 \left(\frac{\mu}{2} \cos \vartheta - 1 \right) \cos \vartheta \qquad (2.2.24)$$

есть *периодическая функция* с периодом 2π.

Построим график этой функции при $\mu < 1$ и $\mu \geqslant 1$. Кривая $V(\vartheta, \mu)$ представлена на рис. 2.13:

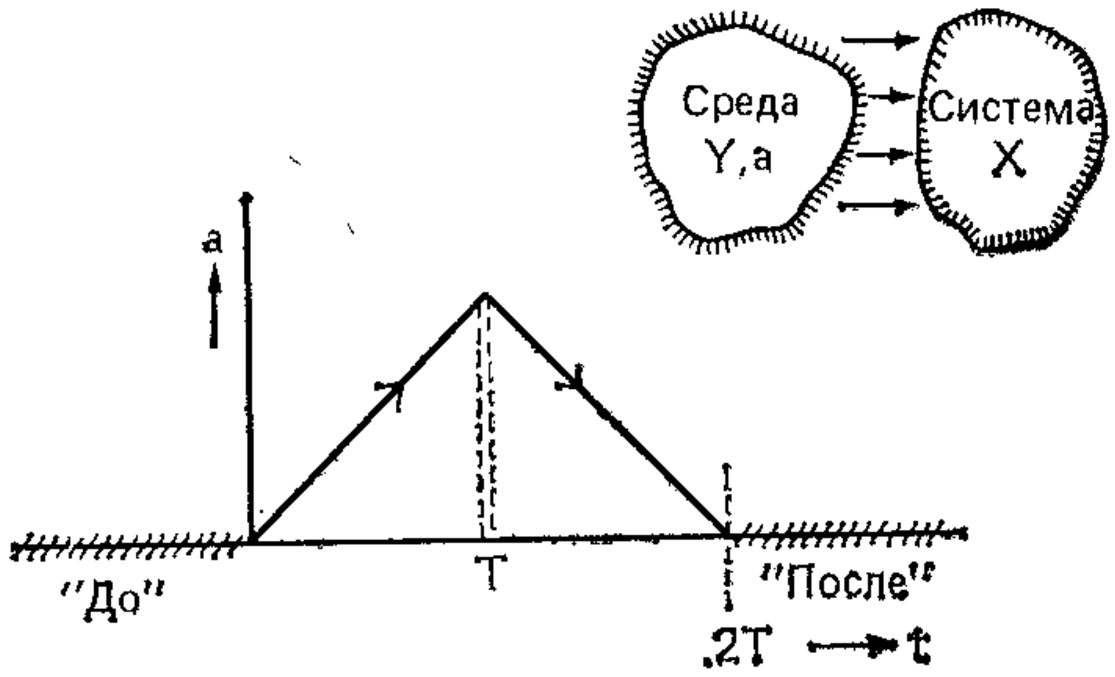
(*а*) при $\mu < 1$ и (*б*) при $\mu \geqslant 1$ (в обоих случаях показан только один период).

2.2.6. Нарушение симметрии в процессе гистерезисного типа

Наконец, приведем пример совершенно иного типа динамики перехода из состояния в состояние, обусловленного не потерей устойчивости существующего состояния, а гистерезисом, или *пластической модификацией*, в системах, обладающих единственным стационарным состоянием [2.4].

Рассмотрим одномерную систему X (например, линейный осциллятор с сильным затуханием), описываемую дифференциальным уравнением $\dot{x} = -x$. Очевидно, что эта система обладает единственным («симметричным») устойчивым стационар-

ным состоянием $x = 0$. Представим себе, что мы связали эту простую систему с «окружающей средой» Y, также одномерной, единственная переменная у которой сдвигается управляющим параметром среды a следующим образом: $dy/dt = a$, где $a(t) = \text{const}$ (или 0) при всех t, предшествующих интервалу времени длиной $2T$, на котором параметр a, так сказать, «активируется» (рис. 2.14), а затем снова спадает до нуля. Будем счи-



$$a(t) = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$a(t) = 2T - t, \quad T \leqslant t < 2T$$
$$a(t) = 0, \quad t < 0 \geqslant 2T$$

Рис. 2.14. Параметр $a(t)$ (см. текст).

тать, что система X связана с окружающей средой простейшим из возможных способов, а именно: $dx/dt = -x + y$.

а) *Интервал* $[0, T]$: $dx/dt = -x + y$, $dy/dt = t$, $da/dt = 1$, поэтому

$$dx/dt = -x + \frac{t^2}{2},$$

$$x(t) = ce^{-t} + \frac{t^2}{2} - t + 1, \qquad (2.2.25)$$

где c — константа.

При $t = T$ (середина интервала)

$$x(T) = ce^{-T} + \frac{T^2}{2} - T + 1,$$

$$y(T) = \frac{T^2}{2}.$$

б) *Интервал* $[T, 2T]$: $dx/dt = -x + y$, $dy/dt = 2T - t$, $da/dt = -1$, поэтому

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2Tt - \frac{t^2}{2} + K,$$

где K — константа, значение которой вычисляется из условия,

что величина $y = 2Tt - (t^2/2) + K$ при $t = T$ должна быть равна $T^2/2$; следовательно, $K = -T^2$ и

$$x(t) = ce^{-t} - \frac{t^2}{2} + t(2T+1) - (2T + T^2 + 1) =$$

$$= ce^{-t}\frac{t^2}{2} + t(2T+1) - (T+1)^2; \qquad (2.2.26)$$

но тогда

$$y(t) = 2Tt - \frac{t^2}{2} - T^2. \qquad (2.2.27)$$

В конце интервала $2T$: $y(2T) = T^2$. При $t > 2T$ величина $y(2T)$ остается неизменной. Таким образом, при $t > 2T$ поведение x, которое всегда задается дифференциальным уравнением $\dot{x} = -x + y$, описывается разновидностью последнего — дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -x + T^2$$

и имеет устойчивое стационарное состояние $x^* = T^2$, отличное от предыдущего стационарного состояния. Что же произошло? Как именно исчезло предыдущее стационарное состояние и уступило место новому? В данном случае мы имеем дело с примером «пластического» изменения, вызванного в системе X не потерей устойчивости, приводящей к бифуркации, а переходным процессом, происходящим с конечной «скоростью реакции». В системе X произошло следующее: стационарное состояние $x^* = 0$ было *стерто*, а количество $y = T^2$ «реагирующего вещества» y оказалось навсегда *записанным* в системе, что можно рассматривать как аналог «следа в памяти», оставленного в системе локальным отклонением внешнего управляющего параметра от исходного значения.

2.2.7. Основные понятия теории устойчивости

В нескольких предыдущих разделах мы занимались рассмотрением отдельных (хотя, как мы надеемся, представительных) примеров *эволюции*, происходящей в простых нелинейных системах вследствие тех или иных конкретных неустойчивостей. Теперь настало время набросать в общих чертах контуры общей теории устойчивости. Следует подчеркнуть, что нас всегда будет интересовать только *двумерное* пространство состояний.

а) *Общий критерий*

Пусть S — стационарное состояние некоторой двумерной динамической системы и ε — малый замкнутый контур вокруг S. Стационарное состояние S называется *устойчивым*, если для любого заданного ε всегда можно найти такую окрестность $\delta(\varepsilon)$

состояния S, что любая траектория, выходящая изнутри $\delta(\varepsilon)$, никогда не достигает границы ε (рис. 2.15). Если же такой окрестности $\delta(\varepsilon)$ не существует, то устойчивость S не гарантирована [2.5].

Рассмотрим теперь динамическую систему, описываемую двумя связанными автономными нелинейными дифференциаль-

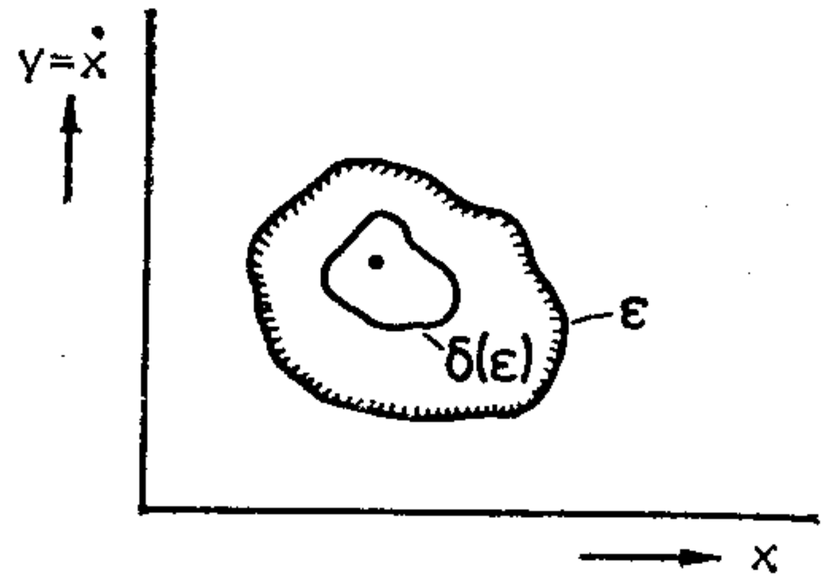


Рис. 2.15. К определению устойчивости стационарного состояния.

ными уравнениями (автономность означает, что время не входит в уравнения в качестве свободного параметра):

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1,\ X_2;\ \mu), \tag{2.2.28}$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1,\ X_2;\ \mu). \tag{2.2.29}$$

Система эволюционирует в двумерном пространстве состояний переменных X_1, X_2. В каждой точке траектории, заданной выбором конкретных начальных условий $X_1(0) = X_{1_0}$, $X_2(0) = X_{2_0}$, наклон определяется величиной

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{2.2.30}$$

Особые точки (стационарные состояния) на траектории — это точки, в которых $f_2 = 0$ и $f_1 = 0$, т. е. не определена касательная. С другой стороны, *замкнутые траектории* (см. ниже), соответствующие периодическому режиму, имеют основной период, определяемый по формуле

$$T = \oint \frac{dX_1}{f_1(X_1,\ X_2;\ \mu)}. \tag{2.2.31}$$

Предположим ненадолго, что мы рассматриваем N-мерную систему. В этом случае динамические уравнения имеют вид

$$\frac{dX_i}{dt} = f_1(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_N;\ \mu),\quad i \in (1,\ \ldots,\ N). \tag{2.2.32}$$

Стационарные состояния определяются вещественными решениями системы связанных нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i(X_1, X_2, \ldots, X_N; \mu) = 0. \tag{2.2.33}$$

Предположим, что мы каким-то образом решили эту систему и нашли стационарные состояния $(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_N^*)_\xi$, где $\xi \in (1, \ldots, K)$ — число действительных решений системы (2.2.33).

Затем мы переходим к исследованию устойчивости этих состояний (система находится в них в зависимости от начальных граничных условий). Устойчивость мы исследуем, вводя малые возмущения $x_i(t)$ от положения равновесия, а именно возмущения, удовлетворяющие ограничениям

$$x_i(t) = |X_i - X_i(t)| \ll \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число при всех i.

Для данного стационарного состояния мы разлагаем правые нелинейные части динамических уравнений в ряд Тейлора относительно стационарного значения отдельной переменной (или соответственно стационарных значений переменных, если их несколько) и, если функции f_i достаточно гладкие, удерживаем в разложении только линейные члены. Мы получаем

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} (X_j - X_j^*) \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_j}\right)_{X_j = x_j^*}. \tag{2.2.34}$$

[Свободный член разложения Тейлора равен нулю:

$$f_i(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_N^*; \mu) = 0,$$

так как $dX_j^*/dt = 0$.]

Обозначим через

$$\left(\frac{df_i}{\partial X_j}\right)_{X = x_j^*} = a_{ij} \tag{2.2.35}$$

параметр (или параметры) взаимодействия, описывающий влияние переменной X_i на переменную X_j (разумеется, в общем случае $a_{ij} \neq a_{ji}$). Помимо прочего равенство $a_{ij} = 0$ может указывать на отсутствие переменной X_j в многочлене f_i. Элементы a_{ij} образуют так называемую матрицу взаимодействия A.

Линеаризованная система дифференциальных уравнений с возмущениями $x_i(t)$ в качестве неизвестных функций имеет теперь вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j,$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \tag{2.2.36}$$

Выбирая возмущения $x_i(t)$ отдельных переменных в виде $x_i(t) \sim e^{\lambda_i t}$, получаем линейную систему

$$\lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j,$$

или в матричной форме

$$\lambda \mathbf{x} = A\mathbf{x}. \tag{2.2.37}$$

Требование нетривиальности решений $[x_i(t) \not\equiv 0]$ приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.38}$$

из которого в принципе могут быть вычислены собственные значения λ_i матрицы взаимодействия. В поисках более конкретных примеров обратимся к нашей двумерной системе. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2.39}$$

или

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0, \tag{2.2.40}$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0, \tag{2.2.41}$$

которое можно представить в виде

$$\lambda^2 - b\lambda + \gamma = 0. \tag{2.2.42}$$

Собственные значения нетрудно вычислить по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\gamma}}{2}. \tag{2.2.43}$$

В общем случае мы получим $\lambda_{1,2} = (\lambda' + j\lambda'')_{1,2}$.

Возникающее стационарное состояние устойчиво, если $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$ при $i = 1$ *и* $i = 2$. Если λ_1' или λ_2' положительны, то стационарное состояние неустойчиво. При $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$ и $\lambda'' \neq 0$ мы имеем режим на границе области устойчивости, или нейтральную устойчивость; иначе говоря, система совершает

периодическое движение с частотой λ_i'' по замкнутой траектории вокруг стационарного состояния, причем радиус траектории, разумеется, мал, но зависит от начальных и граничных условий. Вместо того чтобы проводить исчерпывающее перечисление всех возможных случаев в зависимости от параметров b и γ, приведем конкретный пример, дабы все говорило само за себя.

Рассмотрим следующий процесс, в котором возникает конфликт между двумя популяциями X_1 и X_2 или X и Y. Сырье A, смешиваясь в «реакторе» с популяцией X, увеличивает численность этой популяции (X растет на A). Популяция Y питается популяцией X и растет. Наконец, популяция Y, вступая в кон-

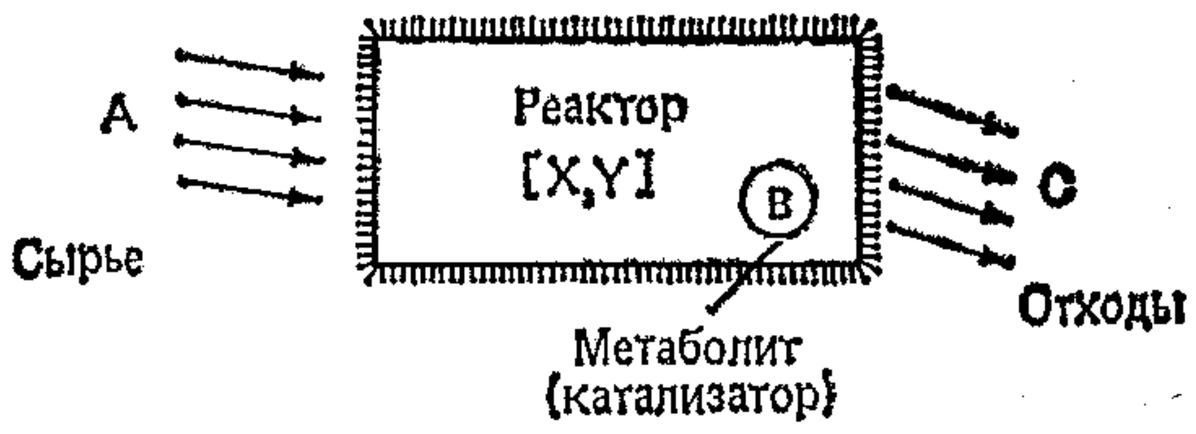


Рис. 2.16. Реактор для двух взаимодействующих веществ X, Y.

такт с катализатором, или «метаболитом», B, превращается в отходы (рис. 2.16).

Такая схема применима к процессам производства в условиях конкуренции, а также к биологическому антагонизму между двумя видами, один из которых является хищником, питающимся другим видом (такова, например, предложенная Вольтеррой — Лоткой модель двух видов — «маленьких» рыбок X и «больших» рыб Y). Реакции должны протекать следующим образом:

$$A + X \xrightarrow{K_1} 2X, \tag{2.2.44}$$

$$X + Y \xrightarrow{K_2} 2Y, \tag{2.2.45}$$

$$X + B \xrightarrow{K_3} C + B, \tag{2.2.46}$$

где K_1, K_2, K_3 — константы скоростей реакций.

Соответствующие дифференциальные уравнения относительно X и Y могут быть выведены непосредственно на основе подсчета приращений и убылей численности каждой популяции. Например, X возрастает со скоростью K_1AX и убывает со скоростью K_2XY, поэтому

$$\frac{dX}{dt} = K_1AX - K_2XY. \tag{2.2.47}$$

С другой стороны, Y возрастает со скоростью K_2XY и убывает со скоростью K_3BY, поэтому

$$\frac{dY}{dt} = K_2XY - K_3BY. \qquad (2.2.48)$$

В этом примере нелинейные правые части — многочлены — имеют вид

$$f_1 = K_1AX - K_2XY \quad \text{и} \quad f_2 = K_2XY - K_3BY.$$

Параметры K_1, K_2, K_3, A, B стоят здесь вместо управляющих параметров μ в формальных уравнениях (2.2.32).

Определим стационарные состояния. Решая систему уравнений $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, мы находим два вещественных решения

$$X_{\text{I}}^* = \frac{K_3B}{K_2}, \quad Y_{\text{I}}^* = \frac{K_1A}{K_2}, \qquad (2.2.49)$$

$$X_{\text{II}}^* = 0, \quad Y_{\text{II}}^* = 0, \qquad (2.2.50)$$

которые представлены на рис. 2.17.

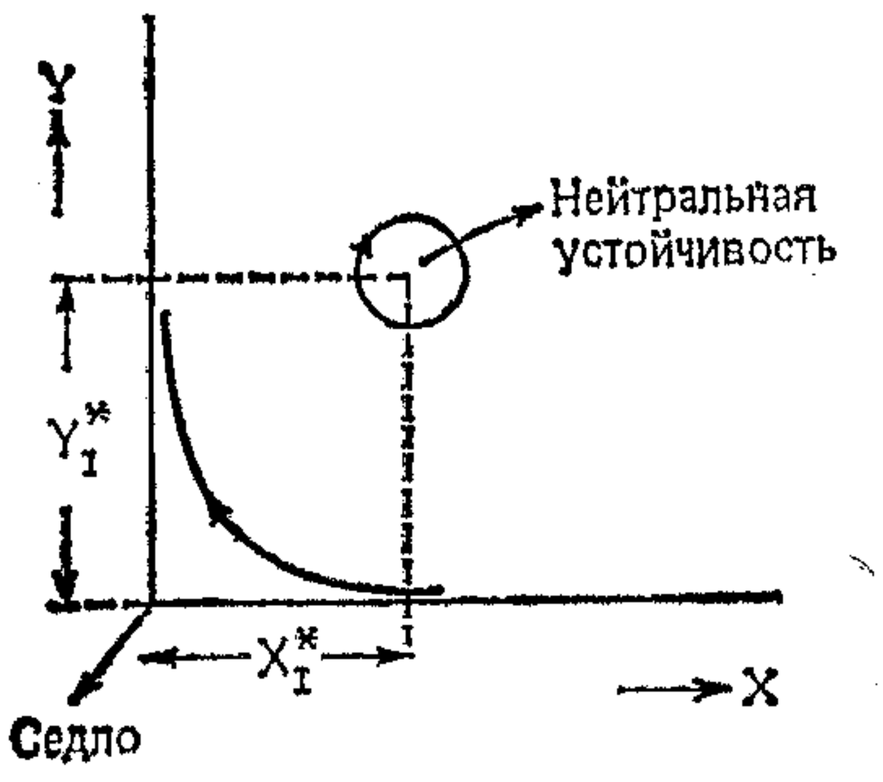


Рис. 2.17. Устойчивые режимы реакторной модели. Стационарное состояние X_{I}^*, Y_{I}^* нейтрально устойчиво, а стационарное состояние X_{II}^*, Y_{II}^* неустойчиво.

Исследуем каждое из них на устойчивость.

б) *Конкретный анализ*

Стационарное состояние I. Требуется вычислить собственные значения матрицы A линеаризованной системы, что сводится к вычислению коэффициентов a_{ij}. Получаем

$$a_{11} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X}\right)_* = 0, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y}\right)_* = K_3B, \qquad (2.2.51)$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial X}\right)_* = K_1A, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial Y}\right)_* = 0,$$

где звездочка означает, что численные значения производных следует брать при $X_{\text{I}}^* = K_3B/K_2$ и $Y_{\text{I}}^* = K_1A/K_2$.

Из характеристического уравнения (2.2.39) находим

$$\lambda = \pm\sqrt{K_1K_3AB}. \qquad (2.2.52)$$

Это означает, что стационарное состояние I нейтрально устойчиво и, когда система под действием слабого возмущения покидает это состояние, она переходит на периодическую траекторию, размеры которой определяются величиной возмущения, и описывает ее с циклической частотой, равной $\sqrt{K_1K_3AB}$ (дви-

гаясь в пространстве состояний, где значения переменных растут от начала, всегда *по часовой стрелке*).

Стационарное состояние II. Производя анализ, аналогичный проделанному выше, но вычисляя теперь значения производных в точке $X_{II}^{*}=0$, $Y_{II}^{*}=0$, получаем

$$\begin{aligned} a_{11} &= K_1 A, \quad a_{12} = 0, \\ a_{21} &= 0, \qquad a_{22} = -K_3 B. \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$(K_1 A - \lambda)(K_3 B + \lambda) = 0, \tag{2.2.54}$$

и собственные значения оказываются равными

$$\lambda_1 = K_1 A > 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -K_3 B < 0.$$

Стационарное состояние (0, 0) (к счастью для экологии!) неустойчиво (как мы увидим из дальнейшего, эта особая точка — седло).

2.2.8. Поведение двумерной динамической системы в окрестности особых точек (стационарных состояний)

Теперь нам необходимо взять, так сказать, увеличительное стекло и попытаться разглядеть (опять-таки в первом приближении), как именно ведет себя система в окрестности особой точки и, в частности, *неустойчивого состояния.* Причина такого исследования состоит в следующем. Как только данное состояние, бывшее до того устойчивым, становится неустойчивым при превращении одним из управляющих параметров μ некоторого критического значения (так что через численные значения коэффициентов взаимодействия a_{ij}, зависящих от μ, действительная часть одного из собственных значений становится положительной), возникает вопрос: в какое состояние при этом переходит система? Чтобы ответить на него, нам необходимо *снова* решить систему связанных нелинейных алгебраических уравнений $f_i(X_1, X_2, \ldots, X_N; \mu) = 0$ и тем самым найти *новую* систему действительных решений (новый набор стационарных состояний), так как параметры μ изменились. В новый набор, разумеется, входит стационарное состояние, бывшее прежде устойчивым, а теперь ставшее неустойчивым, но остальные состояния новые. На первый взгляд может показаться справедливым следующее утверждение: «стартовав» из стационарного состояния, система равновероятно «приземлится» в любом из состояний нового набора, тем самым делая невозможным любое предсказание ее поведения. Однако так происходит не всегда. Для того чтобы разобраться, как ведет себя система,

необходимо рассмотреть более подробно «картографию» пространства состояний в окрестности каждого нового состояния. Как мы убедимся, одного этого не достаточно.

В результате проведенного расследования может оказаться, что одни состояния имеют бóльшую вероятность «заполучить» систему после того, как, будучи выведенной из прежнего состояния, она вынуждена будет «приземлиться» в каком-то новом состоянии. Короче говоря, нам необходимо исследовать «линии тока» в окрестности всех имеющихся стационарных состояний в пространстве состояний в надежде, что это позволит нам оценить вероятность следующего предсказания. По существу мы именно этим и занимаемся, когда проводим сечения на потенциальных кривых, например на кривых, изображенных на рис. 2.13, перпендикулярно плоскости страницы, а затем, рассматривая линии уровней, оцениваем сеть дорог на обозреваемом ландшафте. В свою очередь это сводится к построению *интегральных кривых* $X_2 = f(X_1)$ *консервативной системы*, когда потенциальная функция известна.

Поскольку нас интересуют (гамильтоновы) системы с многими стационарными состояниями, нам следует начать с потенциальной функции, имеющей *более одного минимума* (рис. 2.13), и попытаться понять, как извлечь из нее ход интегральных кривых, т. е. «дорожную сеть», в фазовом пространстве.

В случае примера с вращающимся маятником (раздел 2.2.5) мы можем сразу же выписать уравнения для множества интегральных кривых в пространстве состояний — плоскости $(\dot{\vartheta}, \vartheta)$ — как закон сохранения энергии на единицу массы, а именно:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + V(\vartheta, \mu) = E, \qquad (2.2.55)$$

где E — полная энергия маятника.

Наша цель — определить топологию интегральных кривых в окрестности минимумов (устойчивых стационарных состояний) и максимумов (неустойчивых стационарных состояний). Для этого разложим $V(\vartheta, \mu)$ в ряд Тейлора в окрестности минимумов и максимумов, т. е. запишем разложение

$$V(\vartheta) = V_0 + \frac{c}{2}(\vartheta - \vartheta_0)^2, \qquad (2.2.56)$$

где $c = [\partial^2 V(\vartheta)/\partial\vartheta^2]_0$ — положительное число, если V_0 $[= V(\vartheta_0)]$ — минимум, и отрицательное число, если V_0 — максимум. Ясно, что в обоих случаях $[\partial V(\vartheta)/\partial\vartheta]_0 = 0$, так как мы имеем дело с экстремумами.

Воспользовавшись приведенным выше разложением, нетрудно исследовать поведение интегральных кривых в окрестности стационарных состояний, если обратиться к уравнению (2.2.55)

и заменить $V(\vartheta)$ по формуле (2.2.56). Проделав это, мы получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + c(\vartheta - \vartheta_0)^2 = 2(E - V_0), \qquad (2.2.57)$$

или

$$\frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + c(\vartheta - \vartheta_0)^2 = \text{const}. \qquad (2.2.58)$$

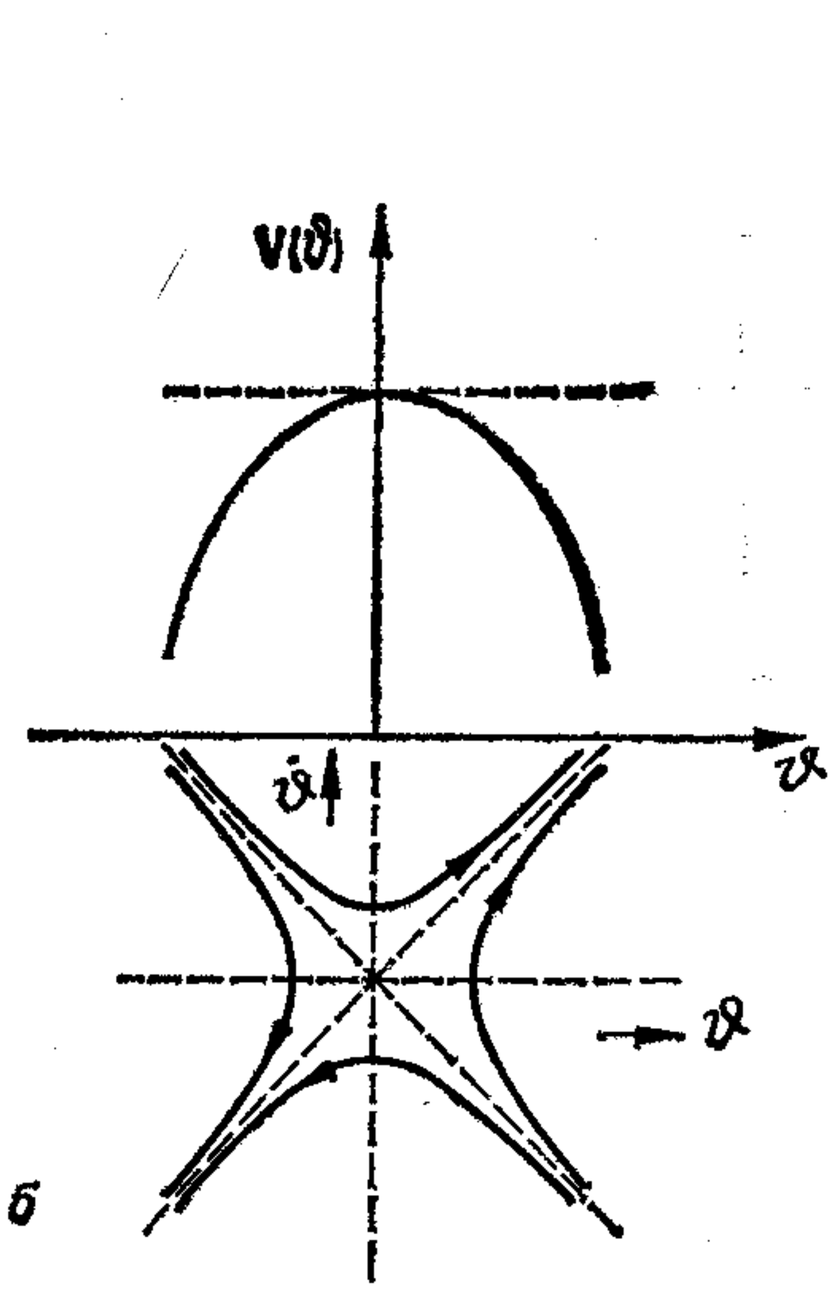
Для того чтобы решения ϑ были вещественными, необходимо потребовать неравенства $E > V_0$.

Но если стационарное состояние ϑ_0 устойчиво, т. е. соответствует минимуму функции $V(\vartheta)$, то (2.2.58) определяет семейство эллипсов с центром в $\vartheta = \vartheta_0$. С другой стороны, если стационарное состояние ϑ_0 неустойчиво, т. е. соответствует максимуму функции $V(\vartheta)$, то (2.2.58) определяет семейство гипербол также с центром в $\vartheta = \vartheta_0$. При $E = V_0$ эти гиперболы стремятся к асимптотам, задаваемым соотношением $\dot{\vartheta} = \pm\sqrt{-c(\vartheta - \vartheta_0)}$, которые называются *сепаратрисой,* так как разделяют различные группы гипербол. Соответствие между типами стационарных состояний и интегральных кривых в пространстве состояний в их окрестности представлено на рис. 2.18.

Объединяя обе ситуации, изображенные на рис. 2.18 в одну реальную ситуацию, мы получаем соответствие, которое показано на рис. 2.19. Ясно, что, после того как карта интегральных кривых составлена, не составляет особого труда в любой заданной ситуации, исходя из отправного состояния, приписать соответствующие вероятности различным последующим состояниям (разумеется, в примере с вращающимся маятником симметрия делает равновероятным каждое устойчивое стационарное состояние). Например, на рис. 2.19 показана ситуация, когда при $E < E_1$ в окрестности стационарного состояния A не существует ни одной интегральной кривой; аналогичным образом, система, обладающая энергией, *меньшей*, чем E_2, не может достичь стационарного состояния B. Для системы, имеющей в начальном состоянии энергию E, удовлетворяющую неравенству $E_3 < E < E_4$, не существует ни одного стационарного состояния. При $E = E_3$ траекторией становится вырожденная кривая Г. И в этом случае не существует ни одного стационарного состояния.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что в случае гамильтоновых систем мы не можем ответить на вопрос, с которого мы начали, а именно на вопрос о механизме последования состояний, или предпочтительной эволюции динамической системы из одного состояния в другое через иерархию неустойчивости. Гамильтоновы системы *не достигают* определенных со-

стояний в результате эволюции, если только они с самого начала не приведены в эти состояния за счет специального выбора начальных и граничных условий. Покинув под действием слабого возмущения данную траекторию, они никогда не возвращаются на нее. Вместо этого они жестко и неукоснительно следуют по



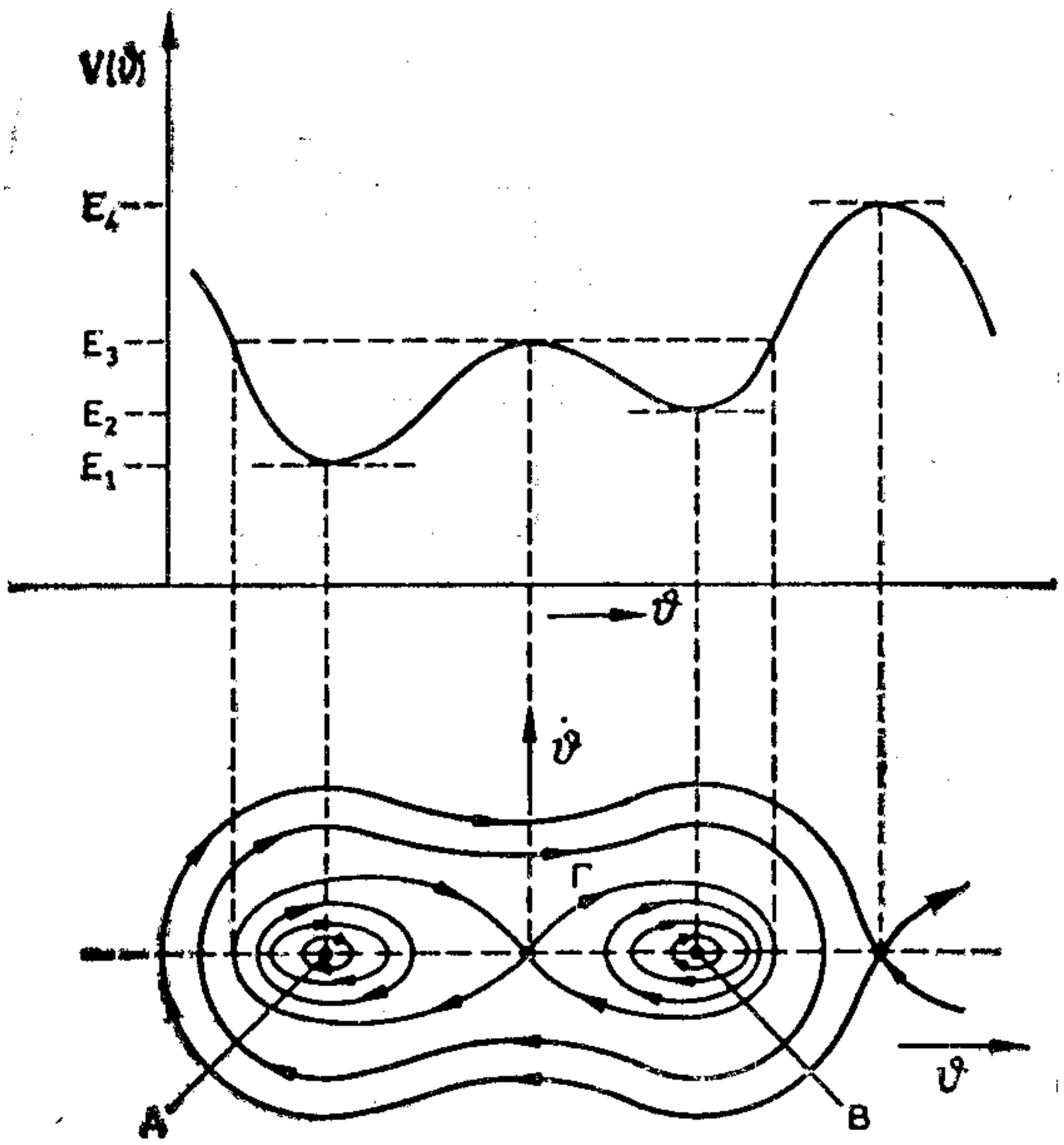


Рис. 2.18. В окрестности (*а*) минимума потенциалы особая точка — фокус; в окрестности (*б*) максимума потенциала особая точка — седло.

Рис. 2.19. Потенциальная кривая общего вида и соответствующие интегральные кривые.

новой траектории, которая полностью и однозначно задана и зависит от новых начальных и граничных условий (например, от полной энергии системы).

2.2.9. Первая встреча с нетривиальными диссипативными системами: понятие аттрактора в двумерном случае (предельный цикл)

В нашем первом конкретном примере (в разд. 2.2.3) нам встретилась простая диссипативная система (гармонический и нелинейный осциллятор с сильным затуханием), и мы узнали, что простейшая разновидность *аттрактора* есть устойчивое стационарное состояние. Но такой случай именно в силу своей симметрии и статичности является тривиальным. В этом разделе мы хотим, продолжая рассмотрение проблемы, поставленной в предыдущем разделе, привести примеры двумерных динамиче-

ских систем, обладающих способностью *притягиваться* к новому динамическому стационарному режиму, если из предыдущего стационарного режима они выведены при потере устойчивости, независимо от начальных условий. О таких системах можно сказать, что они действительно *изменяются* со временем.

Начнем с диссипативной динамической системы, в которой «вязкостный» член нелинейно зависит от самой динамической

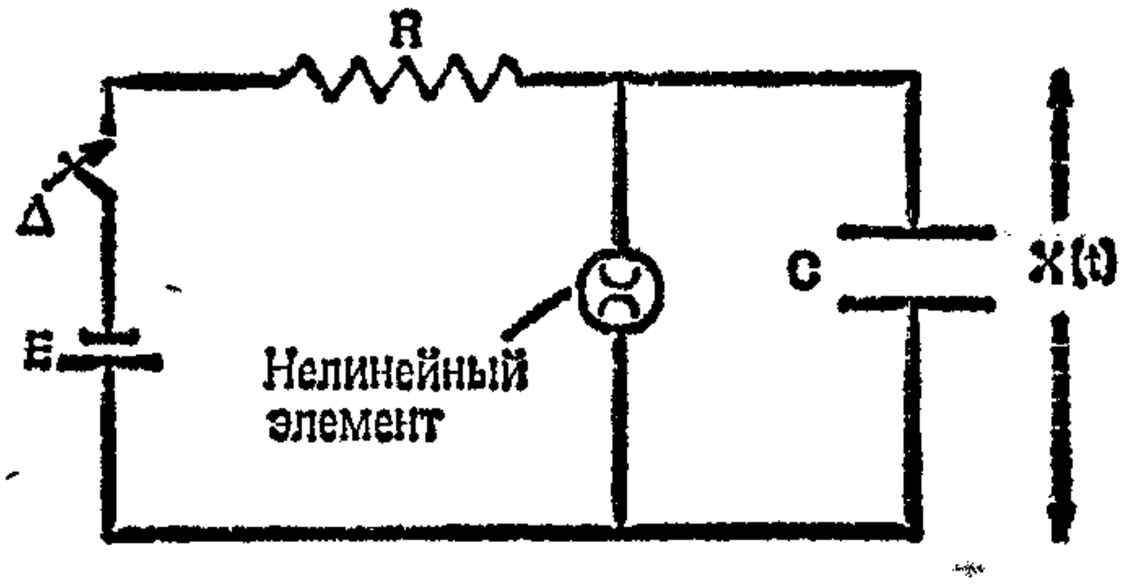


Рис. 2.20. Простая электрическая цепь, генерирующая релаксационные колебания.

переменной. В такой системе происходит периодический обмен энергией с окружающей средой, обмен, который при определенных условиях может привести к незатухающей самоподдерживающейся динамической активности (а не к монотонному процессу затухания, как в примере, приведенном в разд. 2.2.3). Рассмотрим простую электрическую цепь, изображенную на рис. 2.20. Источник постоянного тока заряжает емкость C через омическое сопротивление R. Параллельно емкости вводим переключательный элемент, который открыт, когда разность потенциалов на обкладках конденсатора падает ниже V_{C_I}, и заперт (при этом емкость оказывается закороченной), когда разность потенциалов на обкладках конденсатора поднимается выше $V_{C_{II}}$. В момент времени $t = 0$ мы включаем источник тока, который начинает заряжать емкость через сопротивление R.

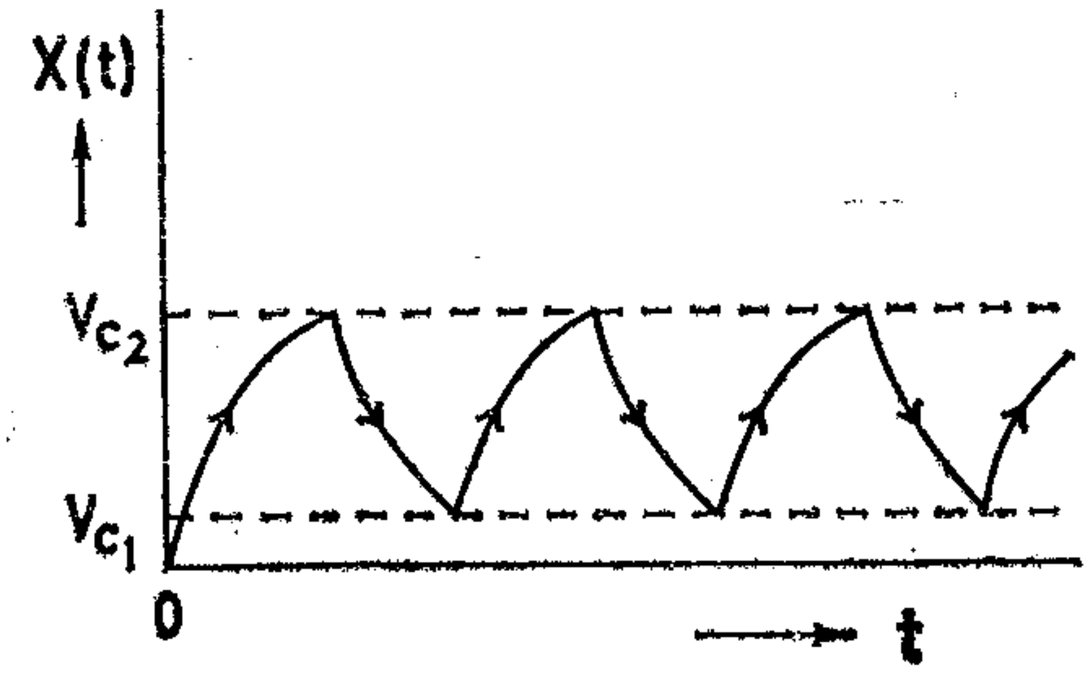


Рис. 2.21. Релаксационные колебания.

Когда разность напряжений на C становится больше V_{C_2}, переключатель переходит в состояние «заперто» и конденсатор разряжается через нелинейный элемент. Когда разность потенциалов на C падает ниже V_{C_1}, переключатель переходит в состояние «открыто» и конденсатор начинает снова заряжаться. Форма этого периодического, но сильно нелинейного процесса

схематически представлена на рис. 2.21. Ясно, что основной его период зависит от параметров R, C, V_{C_1}, V_{C_2}.

Можно сказать, что $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (2.2.59)$$

где ε — параметр, характеризующий интенсивность источника тока E и кривую отклика нелинейного переключателя. Описанный выше процесс реализуется в знаменитом осцилляторе ван дер Поля. Эта модель более или менее точно воспроизводит электронные генераторы (транзисторы и др.).

Проанализируем систему (2.2.59) с точки зрения устойчивости. Эволюция системы во времени происходит в двумерном пространстве состояний $(\dot{x}, x)$. Положим для простоты $\omega_0 = 1$ и запишем (2.2.59) в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x(t) &\sim r(t)\cos t, \\ y(t) = \dot{x}(t) &\sim -r(t)\sin t; \end{aligned} \qquad (2.2.60)$$

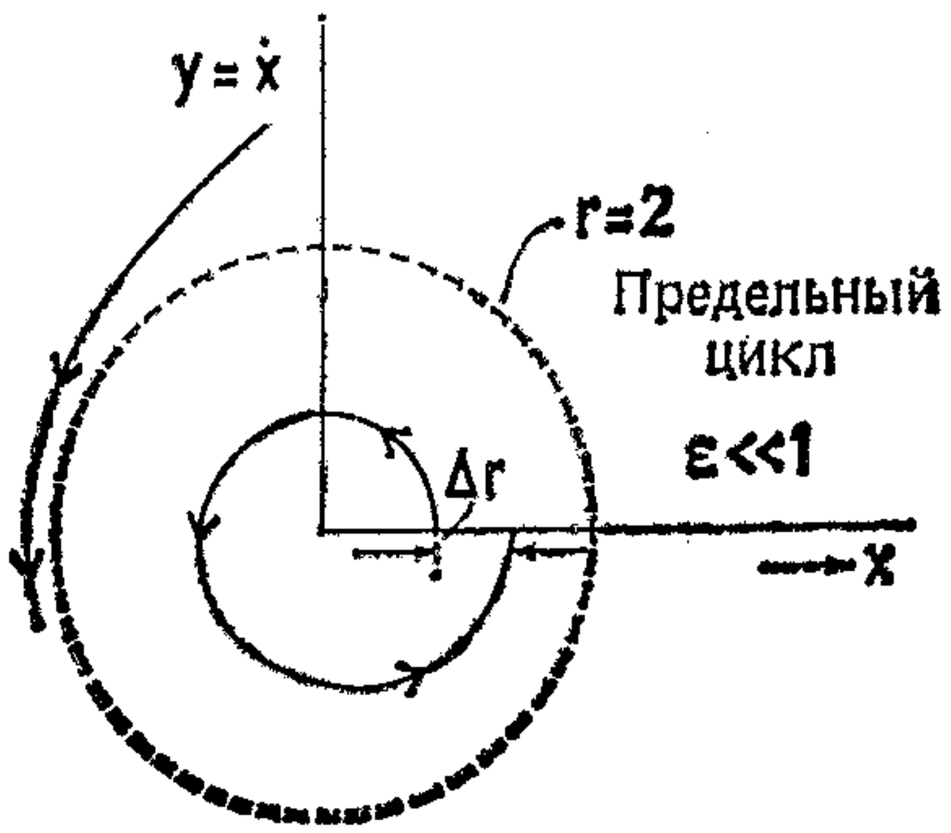


Рис. 2.22. Предельный цикл.

второе соотношение подразумевает, что $\varepsilon \ll 1$, т. е. что амплитуда $r(t)$ изменяется со временем так медленно, что за полный период $\Delta r/r \ll 1$ (рис. 2.22).

Из (2.2.60), (2.2.61) получаем $x^2 + y^2 = r^2$ и, дифференцируя обе части тождества по времени, приходим к соотношению

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}, \qquad (2.2.62)$$

или, принимая во внимание уравнение (2.2.59) и используя представления (2.2.60), (2.2.61),

$$xy + y[\varepsilon(1 - r^2\cos^2 t)\,y - x] = r\frac{dr}{dt}, \qquad (2.2.63)$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon(1 - r^2\cos^2 t)\,r\sin^2 t, \qquad (2.2.64)$$

откуда

$$dr = \varepsilon r(1 - r^2\cos^2 t)\sin^2 t\,dt. \qquad (2.2.65)$$

Но тогда изменение Δr за период равно

$$\Delta r = \int_0^{2\pi} dr = \pi\varepsilon r\left(1 - \frac{r^2}{4}\right). \qquad (2.2.66)$$

Заметим, что в приближении $\varepsilon \ll 1$

$$\Delta r < 0 \quad \text{при} \quad r > 2,$$
$$\Delta r > 0 \quad \text{при} \quad r < 2,$$
$$\Delta r = 0 \quad \text{при} \quad r = 2.$$

Из этого мы заключаем, что окружность радиуса $r = 2$ *асимптотически устойчива* и в ее окрестности нет другого цикла. Такая устойчивая траектория есть *предельный цикл* и принадлежит новой категории стационарных особенностей в пространстве состояний, отличной от стационарных особых точек.

Полученный нами результат по существу без изменений переносится на все $\varepsilon \geqslant 1$ и $\varepsilon \leqslant 1$. При возрастании ε предельный цикл слегка деформируется, напоминая по форме петлю гистерезиса. Можно показать [2.6], что при возрастании ε второе приближение дает стационарную амплитуду

$$x(t) \sim 2\cos(\omega t + \vartheta) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(\omega t + \vartheta), \quad \omega = 1 - \varepsilon^2/16. \qquad (2.2.67)$$

Еще одной (тривиальной) особенностью системы является, конечно, начало координат, которое соответствует *неустойчивому* стационарному состоянию. Переход от этого стационарного состояния известен под названием «бифуркации Хопфа» [1]. В приведенном выше примере осциллятор «само»возбуждается.

При более сильной нелинейности в вязкостном члене (с пятой степенью вместо куба) стационарное состояние $(0, 0)$ устойчиво, и уровень внешнего возбуждения или, в интересующем нас случае, значение управляющего параметра ε, должны превышать определенный порог для того, чтобы система могла совершить необратимый *переход* из начала к предельному циклу (более подробный анализ этого перехода см. в приложении А).

Рассмотрим под тем же углом зрения другой представительный пример из работ самого Пуанкаре. Дана следующая система:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right), \qquad (2.2.68)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 + \alpha x_2 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \qquad (2.2.69)$$

с тривиальным стационарным состоянием $x_1 = x_2 = 0$.

---

[1] В отечественной литературе принят термин «бифуркация Андронова — Хопфа». — *Прим. перев.*

Пусть $x_1 = r\cos\varphi$ и $x_2 = r\sin\varphi$. Подставляя x_1 и x_2 в исходные уравнения, получаем систему относительно r и φ:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r - r^3, \tag{2.2.70}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\beta. \tag{2.2.71}$$

Из уравнения (2.2.71) непосредственно следует, что $\varphi(t) = \varphi_0 - \beta t$.

Обратимся теперь к уравнению (2.2.70) и определим стационарные состояния; полагая $dr/dt = 0$, получаем $r_1 = 0$, $r_2 = \sqrt{\alpha}$ $(\alpha > 0)$. В пространстве состояний эти два решения соответствуют началу координат и предельному циклу с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{\alpha}$, по которому движение происходит с угловой частотой β.

Линеаризованная система имеет вид

$$dr/dt = \alpha r, \tag{2.2.72}$$

$$d\varphi/dt = -\beta. \tag{2.2.73}$$

Из уравнения (2.2.72) ясно, что при $\alpha < 0$ стационарное состояние $(0, 0)$ устойчиво и при $\alpha > 0$ оно становится неустойчиво (при $\alpha_c = 0$ стационарное состояние нейтрально устойчиво). Попытаемся выяснить, что произойдет в закритической области при $\alpha > \alpha_c = 0$, т. е. исследуем замкнутую траекторию $r = \sqrt{\alpha}$ на устойчивость.

Придадим траектории небольшое возмущение, полагая $r = \sqrt{\alpha} + \delta r$. Подставляя в уравнение (2.2.70), получаем

$$\delta\dot{r} = \alpha(\sqrt{\alpha} + \delta r) - (\alpha^{3/2} + \delta r^3 + 3\sqrt{\alpha}\,\delta r^2) \approx$$

$$\approx \alpha(\sqrt{\alpha} + \delta r) - (\alpha^{3/2} + 3\alpha\delta r) = -2\alpha\delta r. \tag{2.2.74}$$

Тем самым мы заключаем, что траектория $r = \sqrt{\alpha}$ асимптотически устойчива, так как радиус r убывает при положительных δr и возрастает при отрицательных δr. Таким образом, мы снова приходим к предельному циклу, т. е. к круговой асимптотически устойчивой траектории, *притягивающей все траектории в своей окрестности.* Построив график в координатах решение — управляющий параметр, мы увидим, что этот аттрактор порождает *нарушение* симметрии, причем не только потому, что радиус $\sqrt{\alpha} > 0$, но и потому, что изображающая состояние системы точка движется по предельному циклу только в одном направлении во времени (рис. 2.23). Траектория $r = \sqrt{\alpha}$ не зависит от начальных условий, и период движения по ней опре-

деляется внутренне параметром системы, а не начальными условиями, как в случае гамильтоновых осцилляторов.

Прежде чем мы завершим этот раздел, представляет некоторый интерес исследовать рекуррентные соотношения, задающие «нуль-пересечения» предельного цикла с осью x_1 (рис. 2.24) при стягивании цикла к асимптотическому значению радиуса $r_\infty = \sqrt{\alpha}$ (более подробно об этом см. в гл. 6). По существу нас интересует скорость сходимости. Из основного уравнения, записанного в полярных координатах (см. уравне-

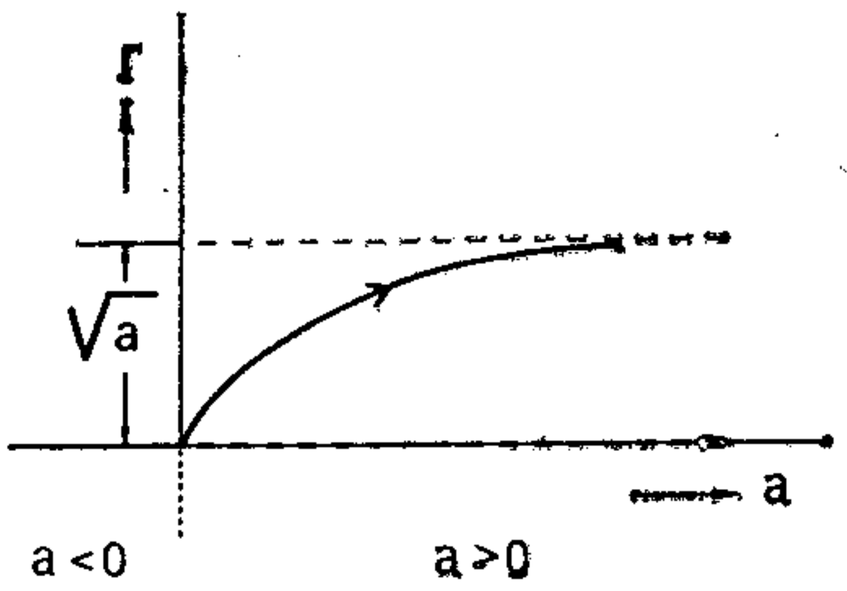


Рис. 2.23. Бифуркационная диаграмма для приведенного в тексте примера Пуанкаре.

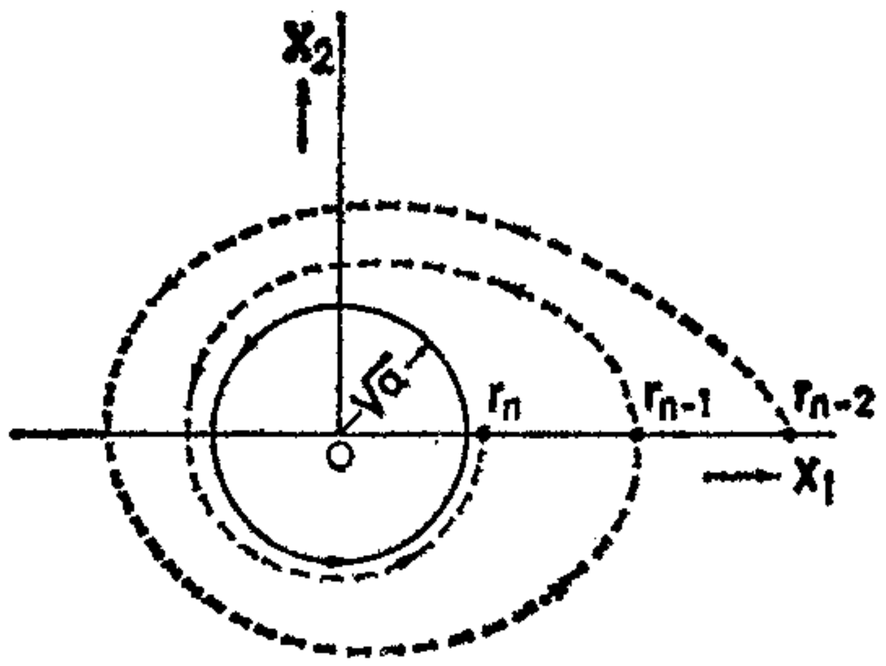


Рис. 2.24. Сходящаяся последовательность «пересечений с нулем» в примере Пуанкаре, приведенном в тексте.

ния (2.2.70), (2.2.71)), получаем, разделив отдельно левые и правые части,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{(\alpha r - r^3)}{\beta}. \tag{2.2.75}$$

Расстояние между двумя последовательными нуль-пересечениями равно

$$\int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{dr}{\alpha r - r^3} = -\frac{1}{\beta}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{|\beta|}, \tag{2.2.76}$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{r}{\sqrt{|\alpha - r^2|}}\Bigg|_{r_{n-1}}^{r_n} = \frac{2\pi}{|\beta|}, \tag{2.2.77}$$

откуда

$$r_n^2 = \frac{\alpha}{1 + \exp(-4\pi\alpha/\beta)\left[(\alpha/r_{n-1}^2) - 1\right]}. \tag{2.2.78}$$

Сходимость экспоненциально быстрая; действительно, применяя последовательно формулу (2.2.78) при $n = 1, \ldots, n$, получаем

$$r_n^2 = \frac{\alpha}{1 + \exp(-4\pi\alpha n/|\beta|)\left[\left(\alpha/r_0^2\right) - 1\right]}, \qquad (2.2.79)$$

где r_0 — произвольный радиус, с которого начался процесс, т. е. начальное условие. Заметим, что при $n \to \infty$ формула (2.2.79), как и следовало ожидать, дает $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^2 = \alpha$ *независимо* от r_0, т. е. от начальных условий.

Приведенный выше пример — последний из выбранных нами представительных классов, связанных с неустойчивостями, бифуркациями и эволюцией простых одно- и двумерных нелинейных динамических систем как гамильтоновых, так и диссипативных. Надеюсь, мы полностью оценили роль и значение нелинейности в возникновении сложного поведения структурно простых систем. Теперь уместно обратиться к явлениям, происходящим в системах с большим числом степеней свободы; к этой группе, в частности, относятся все *крупномасштабные* системы.

2.3. Элементы статистической физики и их связь с эволюционными явлениями

2.3.1. Некоторые характеристики стохастических систем

Хотя в предыдущем разделе мы познакомились с *эволюционным* (необратимым) поведением простых нелинейных диссипативных двумерных систем (претерпевающих бифуркацию Хопфа), было бы безосновательно утверждать, что наш поиск предпочтительного (более вероятного) перехода в один из многих возможных «аттракторов» за точкой потери устойчивости. Следующим логическим шагом в нашем анализе должно было бы стать исследование системы с тремя степенями свободы. Однако по причинам, которые станут ясными из дальнейшего, в частности из гл. 6, мы намереваемся приступить сейчас к рассмотрению другого предельного случая — систем со многими степенями свободы в надежде, что нам удастся подметить какие-то дополнительные особенности эволюции, не существующие в двумерном случае.

Системы со многими степенями свободы с необходимостью *стохастические*. В свою очередь стохастические системы (макроскопические системы, динамика которых определяется взаимодействием большого числа микроскопических частей) дефакто *иерархические* в том смысле, что допускают дополни-

тельное описание (по крайней мере) на двух различных уровнях: (1) на *микроскопическом* уровне, на котором очень большое число (порядка числа Авогадро) частиц вступают во взаимодействие друг с другом на основе гамильтоновой (обратимой) динамики, и (2) на *макроскопическом, феноменологическом* уровне, на котором для многих (но не для всех) практических целей система может быть описана небольшим числом макропеременных (таких, как объем, давление, температура); эти макропеременные возникают как *коллективные свойства* динамики, происходящей на микроскопическом уровне, или как *моменты* функции плотности вероятности, заменяющей микроскопическую динамику.

Здесь, как нам кажется, уместно рассмотреть в более или менее явном виде, как происходят процессы усреднения, посредством которых происходит *подъем* с более низкого (микроскопического) уровня на более высокий (макроскопический) уровень. Нашу систему в пространстве состояний мы представим в виде N-мерного вектора $\mathbf{x}$, конец которого описывает непрерывную кривую — траекторию — и в заданный момент времени t находится в заданной точке, или в заданном состоянии. Пусть $P(\mathbf{x}, t)$ — вероятность найти систему в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Требуется найти, как эта функция плотности вероятности (ф. п. в.) эволюционирует со временем. Вероятность $P(\mathbf{x}, t)$ возрастает из-за переходов из других точек $\mathbf{x}'$ и убывает из-за переходов, исходящих из точки (состояния) $\mathbf{x}$, т. е. $dP(\mathbf{x}; t)/dt =$ «скорость прихода» — «скорость ухода» $= I - I'$ [2.3].

Так как член I учитывает все переходы из начальных точек $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$, он представляет собой сумму по всем начальным точкам $\mathbf{x}'$, умноженную на вероятность совершить за единичное время переход $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$. Таким образом,

$$I = \sum_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') P(\mathbf{x}'; t), \tag{2.3.1}$$

где $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — вероятность совершить переход $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$ за единичное время.

Для «входящих» переходов (I') справедливо соотношение

$$I' = P(\mathbf{x}; t) \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} W(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \tag{2.3.2}$$

где $W(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ — вероятность совершить переход $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ (за единичное время).

Таким образом, наше уравнение, описывающее эволюцию вероятности $P(\mathbf{x}; t)$ (оно называется управляющим уравнением — master equation), имеет вид

$$\frac{dP(\mathbf{x}; t)}{dt} = \sum_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x}. \mathbf{x}') P(\mathbf{x}; t) - P(\mathbf{x}; t) \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} W(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \tag{2.3.3}$$

[разумеется, $\sum_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = 1$, если сумма распространяется и на саму точку $\mathbf{x}$].

Пока нас не интересует, как решать уравнение (2.3.3); мы хотим лишь понять, как с помощью этого уравнения перейти от микроскопического описания к макроскопическому. Умножая обе части уравнения (2.3.3) на $\mathbf{x}$ и интегрируя или суммируя по соответствующему интервалу $\mathbf{x}$, мы получаем динамическое уравнение, левая часть которого описывает скорость изменения значения *медианы* $\langle \mathbf{x} \rangle$ во времени, а именно:

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x} \rangle = f_1 \{\langle \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{x}^2 \rangle, \ldots\}, \tag{2.3.4}$$

где f_1, вообще говоря, нелинейный полином,

Описанный выше процесс усреднения приводит к появлению в правой части уравнения (2.15) не только медианы $\langle \mathbf{x} \rangle$, но и старших моментов вероятности $P(\mathbf{x}, t)$. Но почему функция f_1 нелинейна? [Если бы функция f_1 была линейна, то уравнение (2.3.4) имело бы вид $d\langle \mathbf{x} \rangle / dt = f_1(\langle \mathbf{x} \rangle)$.]

Дело в том, что в большинстве, если не во всех, реалистических случаев вероятности переходов (скорости ухода и прихода) W — нелинейные функции от x. Например, в химических реакциях эти скорости по *закону действия масс* («закону Фика») пропорциональны концентрациям «реагирующих веществ», иначе говоря, числу способов, которыми можно выбрать пару или группу «молекул реагирующих веществ» из общего числа молекул. Например, для реакции $2X \to X'$ скорость пропорциональна $0{,}5X(X-1) = W(X)$, т. е. в этом частном случае уравнение (2.3.4) для среднего значения имеет вид

$$\frac{d\langle X \rangle}{dt} = -K\langle X(X-1) \rangle. \tag{2.3.5}$$

Умножая обе части уравнения (2.3.4) на x^2 и еще раз суммируя или интегрируя, мы получаем феноменологическое уравнение, левая часть которого есть скорость изменения дисперсии $\langle \delta x^2 \rangle$ распределения $P(\mathbf{x}; t)$:

$$\frac{d}{dt}\langle \delta x^2 \rangle = f_2 \{\langle \mathbf{x} \rangle, \langle \delta x^2 \rangle, \ldots\}, \tag{2.3.6}$$

и f_2 — другой нелинейный полином.

Продолжая в том же духе, мы придем к *связанным* феноменологическим уравнениям (2.3.4), (2.3.6), ... относительно первого, второго, ... моментов сколь угодно высокого порядка. Таким образом, тот, кто склонен считать, что описанные выше процессы усреднения позволяют нам совершить переход *от микроскопического описания к макроскопическому*, отнюдь не обретает каких-либо преимуществ, так как в конце концов мы

получаем систему с большим числом степеней свободы. Тем не менее в принципе такое предположение правильно.

Однако в большинстве случаев рассматриваемая функция плотности вероятности $P(\mathbf{x}; t)$ вдали от особых точек, т. е. вдали от неустойчивостей, имеет один горб. Это означает, что медиана совпадает с наиболее вероятным значением; к тому же иногда все старшие моменты (дисперсия, асимметрия, ...) по порядку величины меньше среднего; в этих случаях связующие члены $\langle \delta x^2 \rangle$, ... в полиномах f_1, f_2, ... можно опустить. В результате мы приходим к так называемому режиму среднего поля, а именно, к феноменологическому уравнению, которое описывает эволюцию среднего значения

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x} \rangle = f_1 \{\langle \mathbf{x} \rangle;\ \mu\}. \tag{2.3.7}$$

Для систем, состоящих из невзаимодействующих частей, это уравнение описывает динамику на макроскопическом уровне. Таким образом, переход от микроскопического уровня на макроскопический уровень действительно сопровождается весьма заметным понижением числа степеней свободы. Но, как мы увидим в дальнейшем, в окрестности особых точек приближение среднего поля утрачивает силу, так как ф. п. в. $P(\mathrm{x}; t)$ обретает более чем один горб. Наличие нескольких горбов по существу свидетельствует о возможности появления нескольких состояний за порогом устойчивости, т. е. о появлении по крайней мере *одного* ветвления («би-фуркаций») в решении.

В ф. п. в. с двумя или бóльшим числом горбов медиана не совпадает с наиболее вероятным значением; усиливаются флуктуации, и на макроскопическом уровне из-за связей между уравнениями моментов (2.3.4), (2.3.6), ... система выглядит столь же хаотично, что и на микроскопическом уровне. Тем не менее по завершении такого периода «турбулентности» система переходит (или туннелирует) в одно из имеющихся стационарных состояний, и мы наблюдаем «сжатие» ф. п. в. вокруг нового состояния и восстановление режима среднего поля. Резюмируя, можно сказать, что преимущества изучения системы на феноменологическом, а не на микроскопическом уровне утрачиваются только в окрестности точек бифуркации.

Иерархические системы обладают еще одним неизменно сопутствующим им преимуществом. Мы имеем в виду так называемую «почти полную разложимость» — свойство, позволяющее при изучении такой системы на данном иерархическом уровне почти полностью пренебрегать всем, что происходит «выше» и «ниже».

Поясним сказанное на примере. Возьмем какой-нибудь кусок твердого материала (рис. 2.25). Внешний наблюдатель мо-

жет «изучать» его, т. е. *воздействовать на него* в зависимости от используемого «фильтра» на трех основных различных иерархических уровнях: (1) на уровне взаимодействия элементарных частиц (фундаментальный уровень, общий для всех физических систем), (2) на атомном уровне и (3) на молекулярном уровне.

Как мы теперь знаем, тип взаимодействия, характерный для уровня 1, — это сильное ядерное взаимодействие F_1, для уровня 2 характерно электромагнитное взаимодействие и для уровня 3 — взаимодействие Лондона — Ван-дер-Ваальса. Известна также и иерархия относительной интенсивности этих взаимодействий, а именно: $F_2 \sim 10^{-3} F_1$, $F_2/F_3 \sim R^{-2}/R^{-7}$, или $F_3 \sim F_2(R^{-5})$, где R — расстояние между взаимодействующими атомами. Характерные времена релаксации T_i обратно пропорциональны интенсивностям взаимодействий, поэтому динамические процессы на уровне 1 протекают в среднем примерно в 10^6 раз быстрее, чем динамические процессы на уровне 2, а на уровне 2 — на несколько порядков быстрее, чем на уровне 3.

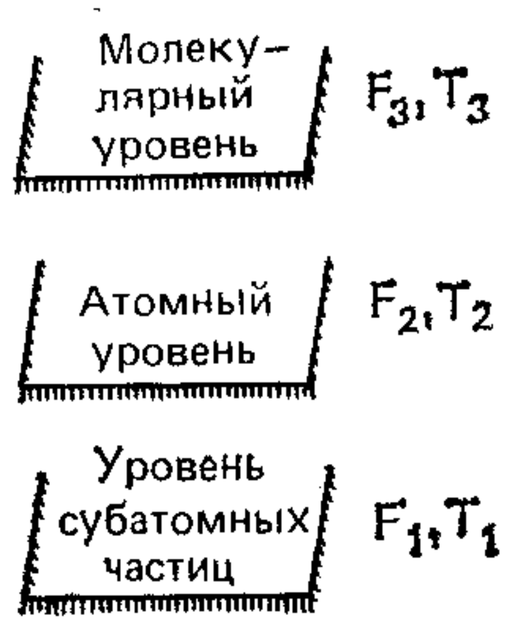


Рис. 2.25. Три иерархических уровня простого макроскопического тела.

Как известно из спектроскопии, это означает, что за один полный «цикл» на уровне 2 успевают совершиться $\sim 10^6$ «циклов» на уровне 1 и $\sim 10^{-10} - 10^{-4}$ «циклов» на уровне 3. Таким образом, для того чтобы исследовать материю на атомном уровне, необходимо знать, как ведет себя материя на уровне нуклонных взаимодействий и на макроскопическом уровне, так как, занимаясь рассмотрением на уровне 2, удобно принять происходящее ниже, на уровне 1, в качестве внешних граничных условий, а то, что происходит выше на уровне 3, считать постоянным. В дальнейшем мы увидим, что именно это важное свойство *разложимости* в более сложных случаях побуждает нас искать или устанавливать иерархию в системах, тем самым придавая им бóльшую автономность и устойчивость.

Теперь настало время ввести некоторые удобные *макропараметры*, позволяющие эффективно характеризовать коллективное поведение систем на феноменологических уровнях. Нет необходимости говорить, что самым известным из таких параметров является энтропия. Другие параметры менее известны, но, возможно, лучше отражают существо дела, когда мы пытаемся охарактеризовать поведение систем вдали от равновесия, например *сложность*, и будут приведены позже.

2.3.2. Информационная энтропия, физическая энтропия, термодинамическая энтропия

Многолетний опыт преподавания теории связи, статистической физики и термодинамики убедил меня в том, что понятие *энтропии* лучше всего вводить через понятие *информации.* (Традиционный подход начинает с определения энтропии как меры степени беспорядка, связанного с энергией, после чего следует несколько озадачивающее утверждение о том, что энергия должна всегда «течь» в таком направлении, чтобы энтропия возрастала.)

Что такое информация? Не стремясь к сколько-нибудь «строгому» определению, условимся пока вкладывать в этот термин тот смысл, в котором он используется в повседневной жизни, и попытаемся найти критерии, позволяющие отличать утверждения, несущие в себе много информации, от малоинформативных утверждений. Сравним, например, два утверждения или сообщения:

$M_1 =$ Профессор X вошел в аудиторию,

$M_2 =$ Профессор X, войдя в аудиторию, застрелил студента.

Всякий согласится, что утверждение M_1 тривиально и истинность его никого не трогает (кроме, быть может, студентов, ожидающих появления профессора), в то время как сообщение M_2 вызовет международный ажиотаж (оно будет передано по радио, телевидению, будет широко обсуждаться в прессе и т. д.); следовательно, M_2 несет в себе много информации, особенно если профессор X пользуется широкой известностью.

Но какая именно «составляющая» обусловливает различие в информативности сообщений? Трудно удержаться от искушения и не дать тот ответ, который сразу приходит в голову: сообщение M_2 более информативно, чем сообщение M_1, потому, что событие, о котором говорится в M_2, происходит (как мы надеемся) чрезвычайно редко, тогда как событие, о котором говорится в M_1, случается почти каждый день.

Однако подобная гипотеза неверна. Возьмем следующее сообщение: «завтра 20 октября». Событие, о котором говорится в нем, происходит редко (раз в году). Или возьмем даже такое сообщение: «завтра 20 октября 1982 г.». Это сообщение уникально, так как в нем говорится о событии, которое никогда не происходило в прошлом и никогда не произойдет в будущем. Тем не менее никто не извлекает из такого сообщения никакой информации. Почему? Да просто потому, что это сообщение, хотя оно и единственное в своем роде, вполне предсказуемо (возможно, на основе исключительной регулярности ньютоновской механики на коротких временных масштабах) практически с достоверностью.

Итак, мы приходим к выводу о том, что ключевым понятием, позволяющим отличать малоинформативные сообщения от сообщений с большим информационным содержанием, является не *редкость* события, а его *неожиданность*. Это означает, что сообщения о событиях, имеющих малую априорную вероятность, несут много информации в тех случаях, когда такие события происходят. Следовательно, мы можем записать следующее соотношение между информацией I и вероятностью события $P(M)$:

$$I = f\left(\frac{1}{P(M)}\right), \tag{2.3.8}$$

где f — пока неизвестная функция. Чтобы продолжить наш детективный поиск функции f, наложим на I только одно (очевидное) ограничение, а именно потребуем выполнения аддитивного правила: общая информация, поступившая от двух некогерентных источников 1, 2, должна быть равна сумме отдельных вкладов, т. е. $I = I_1 + I_2$. Действуя в том же духе, попытаемся придать функции f простейшую аналитическую форму, а именно положим $I_1 = 1/P(M_1)$; $I_2 = 1/P(M_2)$. Тогда

$$I = \frac{1}{P(M_1, M_2)} = \frac{1}{P(M_1)} + \frac{1}{P(M_2)}.$$

Но это невозможно, так как в силу статистической независимости источников 1 и 2 $P(M_1, M_2) = P(M_1)P(M_2)$. Следовательно, функция $1/P$ не подходит. Нам необходима специальная функция f, обладающая свойством

$$f\left(\frac{1}{P(M_1, M_2)}\right) = f\left(\frac{1}{P(M_1)}\frac{1}{P(M_2)}\right) = f\left(\frac{1}{P(M_1)}\right) + f\left(\frac{1}{P(M_2)}\right). \tag{2.3.9}$$

Такой функцией является логарифм (ниже при выводе выражения для физической энтропии системы мы докажем, что логарифм — единственная такая функция). Следовательно,

$$I = \log\frac{1}{P},$$

или

$$I = -\log P; \tag{2.3.10}$$

величина I всегда неотрицательна, так как $0 \leqslant P \leqslant 1$. Выбирая в качестве функции f логарифм с основанием 2, мы одновременно фиксируем единицу информации — бит.

Один бит — это количество информации, необходимой для различения двух равновероятных альтернатив. Например, информация, извлекаемая из исхода бросания симметричной мо-

неты («орел или решка»), равна

$$I = \log_2 2 = 1 \text{ бит.}$$

Предположим далее, что имеется некоторая система, ведущая себя, с точки зрения наблюдателя, как источник информации с репертуаром из Λ возможных *дискретных* стационарных состояний.

Единственно, что известно наблюдателю о системе помимо числа Λ возможных стационарных состояний, — это набор априорных вероятностей $P_1, P_2, \ldots, P_\Lambda$, с которыми система (под воздействием начальных и граничных условий) может перейти в каждое из этих состояний.

Возникает вопрос: какова неопределенность предсказаний наблюдателя (и, следовательно, какова информация, получаемая после наблюдения) относительно того, в каком состоянии система находится в данный момент? Ответ известен и равен среднему значению функции $\log 1/P_i$. Таким образом,

$$\langle I \rangle = -\sum_{i=1}^{\Lambda} P_i \log_2 P_i \quad \text{бит.} \tag{2.3.11}$$

Эта величина называется *информационной* энтропией системы.

Следующий вопрос: при каких условиях информационная энтропия системы достигает максимума? Требуется найти максимум выражения (2.3.11) при ограничении $\sum_{i=1}^{\Lambda} P_i = 1$. Пусть α — неопределенный множитель Лагранжа. Максимизируем

$$F = -\sum_{i=1}^{\Lambda} (P_i \log_2 P_i - \alpha P_i) \tag{2.3.12}$$

по каждому P_i. Запишем условие экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial P_i} = -(\log_2 P_i + 1 - \alpha) = 0; \tag{2.3.13}$$

следовательно, $\log_2 P = \alpha - 1$ при всех i. Это означает, что все P_i равны. Из условия нормировки получаем, что $P_i = 1/\Lambda$. Максимум энтропии достигается, когда все состояния (априори) равновероятны, и ее максимальное значение равно

$$S = S_{\text{макс}} = -\sum_{i=1}^{\Lambda} \left(\frac{1}{\Lambda} \log \frac{1}{\Lambda} \right) = \log_2 \Lambda, \tag{2.3.14}$$

т. е. просто логарифму числа состояний.

Перейдем теперь к *физической* энтропии системы. Предположим, что имеется система (например, физическое тело), состоящая из N взаимодействующих компонент, которые принадлежат к Λ различных категорий, разделенных по какому-

нибудь классификационному критерию (например, в соответствии с дискретным распределением скоростей). Пусть N_i — населенность i-го класса, $i \in \{1, \ldots, \Lambda\}$, $\sum_{i=1}^{\Lambda} N_i = N$.

Число макроскопических образований, или *комплексов*, ответственных за одно и то же макросостояние системы, как известно, равно

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{\Lambda} N_i!}. \qquad (2.3.15)$$

Если все комплексы равновероятны, то вероятность выбрать один из комплексов, ответственных за данное макросостояние, равна $P = W^{-1}$.

Возникает вопрос: какова неопределенность (и информация, которую необходимо извлечь) того, какой из комплексов ответствен за наблюдаемое макросостояние? Разделим мысленно рассматриваемую систему на две части — 1 и 2. Пусть W_1 и W_2 — число комплексов, ответственных за состояние первой и второй половины системы; ясно, что $W = W_1 W_2$.

Степень незнания, или энтропия S, с которой микросостояние отвечает за наблюдаемое макросостояние, равна $S(W_1)$ для первой и $S(W_2)$ для второй части системы. В силу аддитивного свойства информации для всей системы справедливо соотношение

$$S(W) = S(W_1 W_2) = S(W_1) + S(W_2). \qquad (2.3.16)$$

Дифференцируя обе части по W_2, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial W_2} - \frac{dS(W_2)}{dW_2} = 0,$$

или

$$W_1 \dot{S} - \dot{S}(W_2) = 0. \qquad (2.3.17)$$

Дифференцируя уравнение (2.3.17) по W_1, приходим к уравнению

$$W_1 \frac{\partial^2 S}{\partial W^2} \frac{dW}{dW_1} + \frac{\partial S}{\partial W} = 0,$$

или

$$W_2 W_1 \ddot{S}(W) + \dot{S}(W) = 0,$$

или, наконец,

$$W \ddot{S}(W) + \dot{S}(W) = 0. \qquad (2.3.18)$$

Планк нашел решение этого уравнения в виде

$$S = k \ln W + c, \tag{2.3.19}$$

где k — постоянная Больцмана, а c — константа, определяемая из начальных условий. Таким образом, физическая энтропия системы определяется соотношением

$$S = k \ln W \tag{2.3.20}$$

(каким образом постоянная Планка вошла в решение уравнения (2.3.18), объясняется в конце этого раздела).

Какая взаимосвязь существует между *информационной* энтропией и *физической* энтропией системы, состоящей из N взаимодействующих компонент, распределенных по Λ категориям с заданной населенностью каждой категории? Для упрощения вычислений положим $\Lambda = 2$ и начнем с выражения для физической энтропии (2.3.10), где теперь $W = N!/N_1!N_2!$ и $N_1 + N_2 = N$. Предположим, что N_1, $N_2 \gg 1$, и воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \tag{2.3.21}$$

Взяв логарифм от обеих частей этого (приближенного) равенства, получим

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + c \sim n[\ln(n) - 1] \text{ при } n \gg 1, \tag{2.3.22}$$

поэтому

$$\ln N_i! \approx N_i (\ln N_i - 1) \quad \text{для} \quad N,\ N_1,\ N_2.$$

Это позволяет нам преобразовать выражение (2.3.20) для физической энтропии к виду

$$k \ln W = k(\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2!) \approx$$

$$\approx k[N(\ln N - 1) - N_1(\ln N_1 - 1) - N_2(\ln N_2 - 1)] =$$

$$= k(N \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2) = k\left(\ln \frac{N^N}{N_1^{N_1} N_2^{N_2}}\right) =$$

$$= -k \ln\left(\frac{N_1^{N_1} N_2^{N_2}}{N^{N_1} N^{N_2}}\right) = -k\left[\ln\left(\frac{N_1}{N}\right)^{N_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{N_2}\right] =$$

$$= -k\left[N_1 \ln \frac{N_1}{N} + N_2 \ln \frac{N_2}{N}\right]; \tag{2.3.23}$$

если разделить обе части равенства на N, то мы получим выражение для физической энтропии на одну степень свободы:

$$\langle S \rangle = \frac{S}{N} = -k\left(\frac{N_1}{N} \ln \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} \ln \frac{N_2}{N}\right). \tag{2.3.24}$$

Если числа N, N_1, N_2 велики, то можно принять, что $N_1/N \sim P_1$, $N_2/N \sim P_2$, где P_1, P_2 — априорные вероятности найти систему соответственно в категории 1 и в категории 2 [строго говоря, $P_i = \lim\limits_{N\to\infty} (N_i/N)$, если этот предел существует].

Подставляя полученные выражения в (2.3.24), получаем

$$\langle S\rangle = -k\sum_{i=1}^{2} P_i \ln P_i, \tag{2.3.25}$$

или

$$\langle S\rangle = -k\ln 2\sum_{i=1}^{2} P_i \log_2 P_i = k\ln 2\,(S_{\text{inf}}). \tag{2.3.26}$$

Мы видим, что переход от физической энтропии на степень свободы к информационной энтропии системы осуществляется через «переводной коэффициент» $k\ln 2$. Постоянная Больцмана имеет численное значение $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/(К·бит). Следовательно, чтобы отдать предпочтение одной из двух равновероятных альтернатив (т. е. получить один бит информации), нам необходимо затратить по крайней мере $1{,}38\cdot\ln 2\cdot 10^{-23}$ Дж/К. На первый взгляд информация кажется дешевой, но в быстродействующих компьютерах мы уже приблизились к так называемому тепловому пределу, который жестко ограничивает возможности вычислительных устройств [2.7].

Теперь мы можем выяснить условия, при которых энтропия системы необратимо возрастает со временем, или исследовать предпосылки того, что возмущенная система, будучи предоставленной сама себе, с вероятностью единица переходит в состояние с максимальным беспорядком или идеальной симметрией. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем, это состояние, в котором все парные кросс-корреляции скоростей ведут себя, как дельта-функции, устойчиво.

Запишем для энтропии общее выражение

$$S = -\sum_{i=1}^{\Lambda} P_i \ln P_i, \tag{2.3.27}$$

где $P_i = \lim\limits_{N\to\infty} (N_i/N)$. Таким образом, при больших N справедливо эквивалентное выражение

$$S = -\sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{N_i}{N}\ln\frac{N_i}{N} = -\sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{N_i}{N}(\ln N_i - \ln N) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{N_i}{N}\ln N - \sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{N_i\ln N_i}{N} = \frac{1}{N}\left(N\ln N - \sum_{i=1}^{\Lambda} N_i\ln N_i\right). \tag{2.3.28}$$

Дифференцируя по времени и рассматривая замкнутую систему, так что полное число N «частиц», или компонент системы, постоянно, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\left(\frac{\partial N_i}{\partial t}\ln N_i + \frac{\partial N_i}{\partial t}\right) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{\partial N_i}{\partial t}\ln N_i, \quad (2.3.29)$$

так как

$$\sum_{i=1}^{\Lambda}\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} = 0. \quad (2.3.30)$$

Рассмотрим теперь член $\partial N_i/\partial t$. Он описывает скорость изменения числа частиц N_i компоненты i, $i \in (1, \ldots, \Lambda)$, убывает из-за частиц, переходящих из i-го отсека в другие отсеки, и возрастает из-за потока частиц, переходящих из всех остальных отсеков в i-й отсек.

Пусть U_{ij} — вероятность перехода одной частицы из i-го отсека в j-й отсек за единичное время, а U_{ji} — вероятность перехода из j-го отсека в i-й отсек за единичное время. Тогда число частиц, покидающих i-й отсек за единичное время, равно $\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}N_i$, а число частиц, приходящих в i-й отсек за единичное время, равно $\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ji}N_j$. Таким образом,

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}N_i + \sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ji}N_j. \quad (2.3.31)$$

Принятие в качестве начального условия *молекулярного хаоса*, а именно полного отсутствия корреляций [1] между положениями и скоростями отдельных частиц, переходящих из отсека в отсек, сводится к принятию равенства $U_{ij} = U_{ji}$. В этом случае

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}(N_j - N_i). \quad (2.3.32)$$

Подставляя это выражение вместо $\partial N_i/\partial t$ в (2.3.29), получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}(N_i - N_j)\ln N_i. \quad (2.3.33)$$

---

[1] Отсутствие корреляций обычно приписывают каскаду соударений между отдельными частицами, приводящему к забыванию любого начального условия.

Перестановка индексов i и j в силу принятых хаотических условий очевидным образом не сказывается на левой части уравнения (2.3.33) и позволяет нам записать уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ji}(N_j - N_i)\ln N_j = \\ = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}(N_i - N_j)\ln N_j. \qquad (2.3.34)$$

Наконец, складывая уравнения (2.3.33), (2.3.34), получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} U_{ij}(N_i - N_j)(\ln N_i - \ln N_j) \geqslant 0. \qquad (2.3.35)$$

Равенство выполняется в тех случаях, когда $N_i = N_j$ при всех i и j, т. е. в состоянии абсолютной однородности, или в состоянии

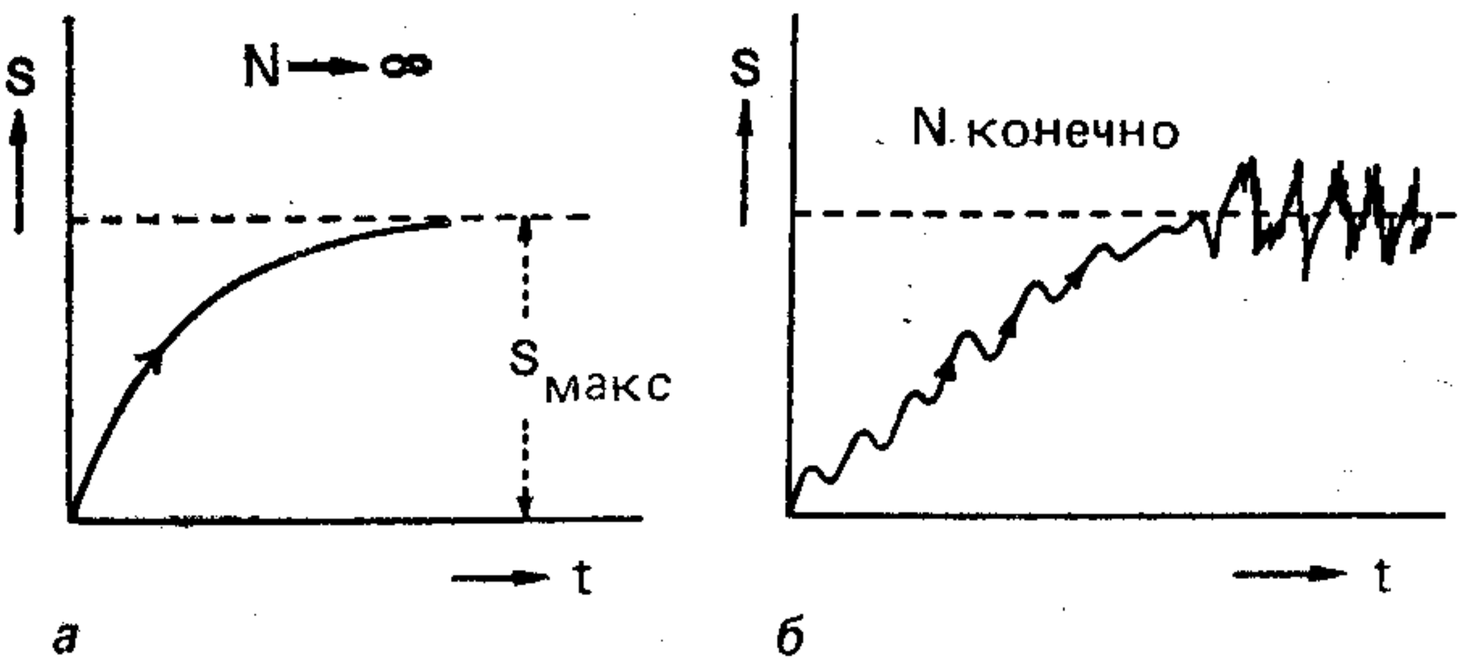


Рис. 2.26. *а* — при неограниченном увеличении числа взаимодействующих частиц энтропия идеального газа как системы монотонно возрастает; *б* — при большом, но конечном числе взаимодействующих «твердых сфер» энтропия возрастает через флуктуации. Коль скоро состояние термодинамического равновесия достигнута, флуктуации как в одну, так и в другую сторону от него равновероятны из-за идеальной симметрии в состоянии термодинамического равновесия.

идеальной симметрии, которое является состоянием «термодинамического» равновесия.

При $N_i \to \infty$ функция $S = f(t)$ монотонно, т. е. необратимо, стремится к максимальному равновесному значению и, достигнув его, остается далее неизменной (рис. 2.2.26, *а*). При конечных, хотя и больших N_i, а именно такой случай является реалистическим, ход энтропии со временем показан на рис. 2.2.26, *б*.

По достижении состояния равновесия флуктуации в обе стороны (априорно) равновероятны. Эти флуктуации обусловлены тем, что при конечных N_i (или для систем, замкнутых в конечных

объемах) отклонения от средних значений N_i весьма значительны. В тех случаях, когда флуктуации вокруг средних значений N_i (которые много больше 1) имеют дисперсию $\langle \Delta N_i^2 \rangle$, сравнимую с N_i (случаи фазовых переходов), выведенное соотношение $dS/dt \geqslant 0$ нуждается в пересмотре.

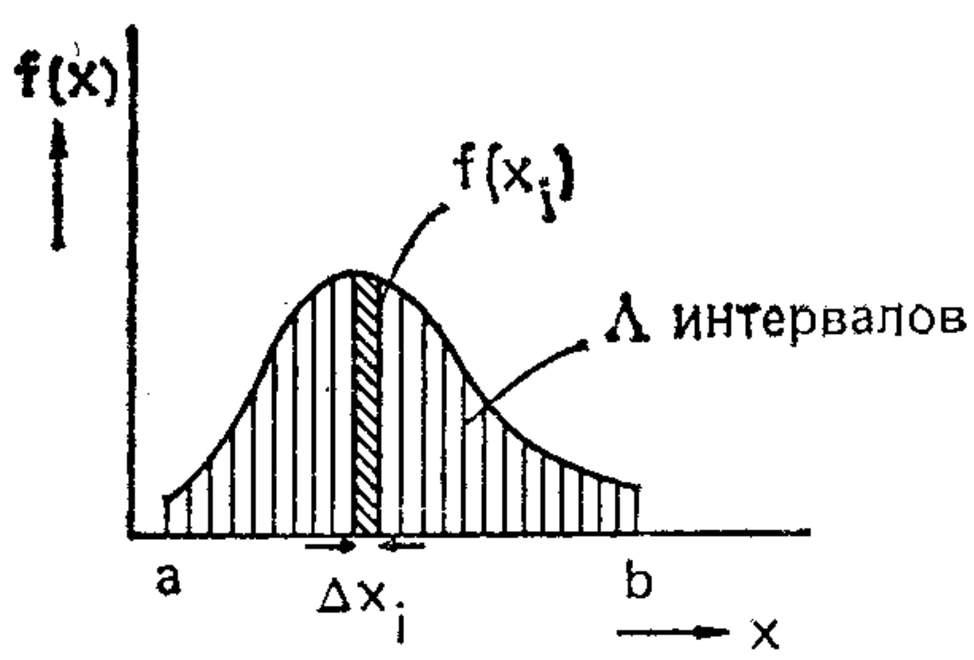


Рис. 2.27. Величины, используемые при вычислении энтропии непрерывного распределения.

Прежде чем переходить к вычислению термодинамической энтропии и исследованию ее связи с информационной и физической энтропиями, выясним, как можно выразить энтропию *непрерывного*, а не дискретного распределения априорных вероятностей (рис. 2.27). Чтобы вывести выражение для энтропии в случае, когда функция плотности вероятности $f(x)$ непрерывна, запишем $P_i = f_i(x_i)\Delta x_i$ и подставим правую часть вместо P_i в нашу формулу для энтропии (2.3.11):

$$S = -\sum_{i=1}^{\Lambda} [f(x_i)\Delta x_i]\{\log_2 [f(x_i)\Delta x_i]\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\Lambda} f(x_i)\log_2 f(x_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{\Lambda} f(x_i)\Delta x_i \log_2 \Delta x_i. \quad (2.3.36)$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta x_i \to 0$ и $\Lambda \to \infty$, получаем

$$S = \lim_{\substack{\Lambda\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \left[-\sum_{i=1}^{\Lambda} f(x_i)\log_2 f(x_i)\Delta x_i \right] +$$

$$+ \lim_{\substack{\Lambda\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \left\{ \left[-\sum_{i=1}^{\Lambda} f(x_i)\Delta x_i \right] \log_2 \Delta x_i \right\},$$

или

$$S = -\int f(x)\log_2 f(x)\,dx + \lim_{\Delta x_i \to 0} (-\log_2 \Delta x_i), \quad (2.3.37)$$

так как

$$\lim_{\substack{\Lambda\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \left[\sum_{i=1}^{\Lambda} f(x_i)\Delta x_i \right] = \int f(x)\,dx = 1. \quad (2.3.38)$$

В соотношении (2.3.37) второй член в правой части стремится к бесконечности при $\Delta x_i \to 0$, и мы заключаем, что энтропия не-

прерывного распределения бесконечно большая. В нашем заключении нет ничего парадоксального, более того, его следовало предвидеть заранее.

Вспомним, что с точки зрения теории информации энтропия системы есть не что иное, как число вопросов, на которые необходимо ответить «да» или «нет» для того, чтобы полностью определить состояние системы. В системе с бесконечным числом состояний однозначное задание одного из них очевидным образом требует бесконечного числа вопросов, и в свою очередь бесконечная серия ответов «да» или «нет» порождает бесконечное число битов. Однако, выбирая в приведенном выше выражении «шаги квантования» $\Delta x_i = 1$, мы приходим к конечному числу битов.

В этом месте мне трудно удержаться от искушения привести следующий пример, хотя я рискую при этом забежать далеко вперед и преждевременно познакомить читателя с материалом, по существу относящимся к гл. 6.

Рассмотрим внутри единичного интервала [0, 1] очень простое (кусочно-линейное) рекуррентное соотношение $X_{n+1} \equiv \equiv 2X_n (\mathrm{mod}\, 1)$. Начнем итерацию с произвольного начального значения X_0, записанного в двоичной системе, например с $X_0 = = 0{,}110101111010101 \ldots$. Каждая итерация сдвигает запятую на один знак вправо. Через ξ итераций X_0 перейдет в число $X_\xi = 2^\xi X_0$.

Начальное значение X_0 никогда не может быть известно *точно* — даже теоретически. Почему? Да потому, что для точного задания X_0 нам понадобилось бы бесконечно много раз задать вопросы (и бесконечно много раз получить ответы «да» или «нет»), т. е. выполнить бесконечно много измерений. Но, как мы только что доказали, энтропия непрерывного распределения *бесконечна*. Если учесть, что проведение каждого измерения требует конечного времени (соизмеримого с временем релаксации приемника, состоящего из частиц), то знание любого числа X_0 с бесконечной точностью потребовало бы бесконечно большого времени.

Из приведенной выше рекуррентной формулы мы получаем $(\Delta X_\xi) = 2^\xi (\Delta X_0)$. Это означает, что начальная неопределенность ΔX_0 (сколь угодно малая, но отличная от нуля) с увеличением числа итераций растет *экспоненциально*. Если X_0 известно с точностью, например $\sim 10^{-31}$, то через 100 итераций начальное условие X_0 оказывается полностью забытым, и в дальнейшем рекуррентный алгоритм функционирует как «генератор псевдослучайных чисел», порождая экспоненциально расходящуюся последовательность знаков, хотя соотношение, лежащее в основе такой последовательности, вполне детерминистично. В этом, как в капле воды, суть «хаоса»: его существование обусловлено со-

четанием конечной точности любого начального условия и экспоненциальным распространением этой (неизбежной) начальной ошибки. На этом мы завершим свой «экскурс».

Выясним теперь, при какой функции $f(x)$ из числа функций, имеющих заданную дисперсию, энтропия S достигает максимума. Запишем

$$S = -\int f(x) \ln f(x)\, dx. \tag{2.3.39}$$

Мы должны максимизировать это выражение относительно произвольных вариаций $f(x)$ в подынтегральном выражении величины

$$F(f(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x)\, dx - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx, \tag{2.3.40}$$

где α, β — множители Лагранжа при двух ограничениях, а именно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \sigma^2. \tag{2.3.41}$$

Отсюда следует, что для максимума должно выполняться равенство $-1 - \ln f(x) - \alpha - \beta x^2 = 0$, или $f(x) = \alpha e^{-\beta x^2}$.

Если мы воспользуемся связью $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, то

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = \alpha \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} = 1, \tag{2.3.42}$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}},$$

а если воспользоваться связью $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \sigma^2$, то

$$\sigma^2 = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2}\, dx = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\pi}{\beta^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\beta}. \tag{2.3.43}$$

Таким образом, энтропия максимальна, когда ф. п. в. имеет вид

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma^2), \tag{2.3.44}$$

т. е. когда она гауссовская; соответствующее максимальное значение энтропии равно

$$S = -\int f(x) \ln f(x)\, dx = -\int f(x)\, dx \left[-\frac{\ln(2\pi\sigma^2)}{2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \int x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi e\sigma^2) = \ln\left(\sqrt{2\pi e}\,\sigma\right). \quad (2.3.45)$$

Наконец, мы переходим к изучению термодинамической энтропии (как ее более столетия назад определил Клаузиус) и попытаемся связать ее с физической статистической энтропией, о которой говорилось выше. Лучше всего начать с какого-нибудь характерного примера, то есть выбрать какую-нибудь конкретную систему — в нашем случае идеальный газ во внешнем поле (а именно, в гравитационном поле, экранировка от которого невозможна даже теоретически). Идеальный (одноатомный) газ в состоянии термодинамического равновесия характеризуется только одной макропеременной, а именно полной (средней) кинетической энергией или температурой T; эти две величины связаны между собой через переходный множитель — постоянную Больцмана — следующим образом:

$$kT = \frac{1}{3} m\bar{v}^2, \quad (2.3.46)$$

где m — масса каждой молекулы газа $\bar{v}^2$ — дисперсия распределения скоростей. В формуле (2.3.46), по существу представляющей собой определение температуры, T выражается в *кельвинах*, энергия — в *джоулях*. Потенциальная энергия, т. е. энергия, ответственная за столкновения между отдельными молекулами газа, хотя она и отлична от нуля, считается пренебрежимо малой по сравнению с кинетической энергией. Три макропеременные — объем V, давление p и температура T — связаны уравнением состояния

$$pV = NkT, \quad (2.3.47)$$

где N — число молекул рассматриваемой системы. Так как гравитационные силы действуют на каждую молекулу газа, давление газа не одинаково всюду, а изменяется от точки к точке. Для простоты мы рассмотрим случай, когда полевые силы действуют в заданном направлении, которое мы выберем за ось z. Рассмотрим две единичные площадки, перпендикулярные оси z и отстоящие друг от друга на расстояние dz. Если давление газа на две площадки равно p и $p + dp$, то разность давлений dp должна быть равна равнодействующей сил, приложенных к частицам газа, заключенным в параллелепипеде с единичным

основанием и высотой dz. Если F — сила, приложенная к одной молекуле, n — число молекул в единице объема, то $dp = nFdz$. Сила F, действующая на одну молекулу, связана с потенциальной энергией $u(z)$ молекулы соотношением $F = -du/dz$, поэтому

$$dp = -n\,dz\frac{du}{dz} = -n\,du. \tag{2.3.48}$$

Из уравнения состояния (2.3.47), полагая $N/V = n$, получаем $p = nkT$. Мы будем предполагать, что газ находится в равновесии (см. пример ниже), поэтому температура T везде одна и та же. Тогда $dp = kT\,dn = -ndu$, откуда

$$\frac{dn}{n} = d(\ln n) = -\frac{du}{kT}, \tag{2.3.49}$$

$$n = n_0 \exp(-u/kT),$$

где n_0 — постоянная (плотность газа при нулевом потенциале).

Соотношение (2.3.49), связывающее вариации плотности газа с потенциальной энергией молекул газа, называется *формулой Больцмана*. Так как давление отличается от плотности постоянным множителем kT, аналогичное соотношение справедливо и для давления:

$$p = p_0 \exp(-u/kT). \tag{2.3.50}$$

Пример. В гравитационном поле вблизи поверхности Земли потенциальная энергия молекулы на высоте z равна $u = mgz$, поэтому

$$p = p_0 e^{-mgz/kT} = p_0 e^{-\mu gz/RT}, \tag{2.3.51}$$

где μ — молекулярная масса газа, R — газовая постоянная. (Для одного моля уравнение состояния имеет вид $pV = RT$, где $R = kN_0$; N_0 — число Авогадро.) Чем больше молекулярный вес газа, тем быстрее убывает давление с увеличением высоты: чем выше, тем бóльшую долю легких газов содержит атмосфера. Следует иметь в виду, однако, что применимость барометрической формулы к реальной атмосфере ограничена, так как атмосфера не находится в состоянии теплового равновесия: температура в атмосфере изменяется в зависимости от высоты. В этом нетрудно убедиться, если мы попытаемся применить формулу Больцмана ко всем расстояниям от Земли. На больших расстояниях формулу для потенциальной энергии молекулы следует изменить и вместо приближенного выражения $-mgz$ взять точное соотношение $u = -GMm/r$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли (r — расстояние от центра Земли).

Формула Больцмана при такой замене переходит в

$$n = n_\infty \exp(GMm/kTr), \tag{2.3.52}$$

где n_∞ — плотность газа при $u = 0$ (т. е. на бесконечно большом расстоянии от Земли).

Итак, $n_\infty = n_E \exp(-GMm/kTr_0)$, где n_E — плотность газа на поверхности Земли, r_0 — радиус Земли. Формула (2.3.52) говорит о том, что плотность атмосферы на бесконечно большом расстоянии от Земли должна быть отлична от нуля. Такой вывод абсурден, так как по современным представлениям атмосфера образовалась из газов, выделившихся из недр нашей планеты, а конечное количество газа не может распределиться по бесконечному объему с плотностью, всюду отличной от нуля.

Решение парадокса заключается в том, что гравитационное поле в действительности не может удерживать газ при постоянной температуре (в состоянии равновесия), и атмосфера поэтому постоянно рассеивается в космическое пространство. Для Земли утечка атмосферы сильно замедлена, но такие планеты, как Луна и Марс, утратили свои атмосферы очень быстро. Утечка все чаще и чаще происходит через столкновения, в результате которых атмосферные молекулы превышают скорости убегания от соответствующих небесных тел.

Возвращаясь к формуле Больцмана (2.3.49) и заменяя плотности вероятностями найти молекулы в определенном энергетическом состоянии u, получаем

$$P_{(\text{вероятность})} \sim e^{-u/kT},$$

$$k \ln P = -\frac{u}{T}, \qquad k \ln \frac{1}{p} = \frac{u}{T};$$

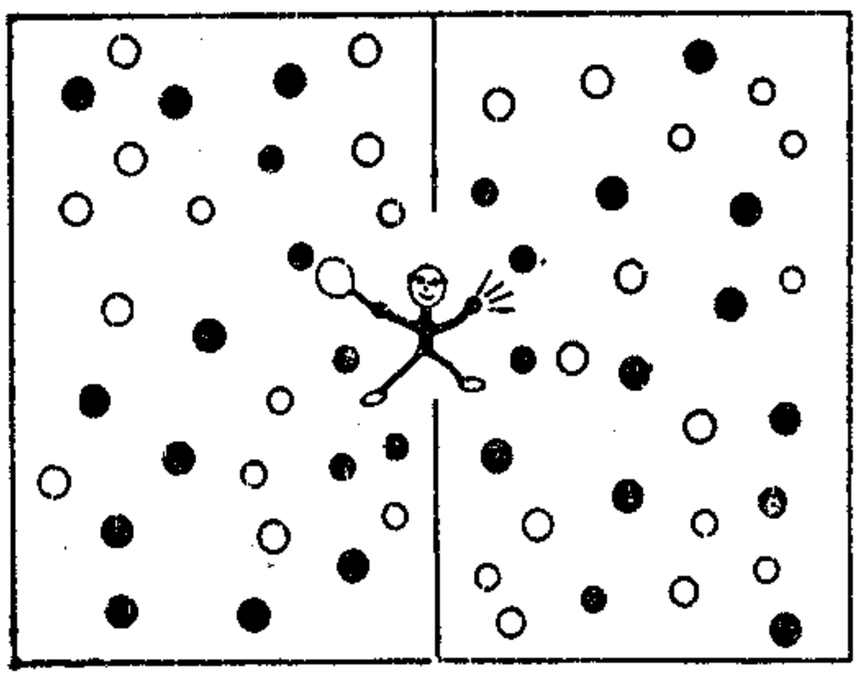
но $1/P = W$ — число равновероятных комплексов в состоянии термодинамического равновесия, поэтому $k \ln W = u/T$ — термодинамическая энтропия по Клаузиусу. Мы видим, таким образом, что физическая энтропия системы совпадает с ее термодинамической энтропией.

Это совпадение позволяет понять, почему невозможно в состоянии термодинамического равновесия получить какую-нибудь информацию из «окружающей среды», т. е. полную бесперспективность действий, напоминающих действия «демона Максвелла».

Рассмотрим (рис. 2.28) замкнутый ящик, содержащий, скажем, два сорта молекул — быстрые и медленные, и пусть «разумное» существо с теннисной ракеткой в руках стоит у «люка», отделяющего одну половину ящика от другой. Увидев *быстрый* «шарик», существо ударом ракетки направляет его в правую половину, а увидев *медленный* «шарик», отбивает его в левую половину. Первоначально быстрые и медленные шары в обеих половинах ящика идеально перемешаны, но, по мере того как действует демон, система все более дифференцируется, *не затрачивая* при этом *внешней энергии.*

Как совместить этот мысленный эксперимент с вторым началом термодинамики? Как читателю, должно быть, хорошо известно, изобретенный Максвеллом «демон», над которым

безуспешно ломали головы три поколения физиков, пока он, наконец, не был «изгнан» Сцилардом (1929) и Бриллюэном (1958), представляет собой весьма трудную проблему. Тем не менее мы начинаем с неявного допущения о том, что наша система *термодинамическая*, для которой выполняется второе начало. Затем мы предполагаем, что число молекул того и другого сорта в ящике стремится к бесконечности (в противном случае демон, наугад (случайным образом) размахивая своей ракеткой и ничего не видя, может с конечной вероятностью в моменты времени, разделенные конечным промежутком, создавать значительные отклонения от равнораспределения молекул на две половины (см. еще раз рис. 2.26, *б*). Исходя из этих условий, мы покажем, что демон не может видеть и, следовательно, сортировать отдельные молекулы, если у него нет какого-нибудь источника света, способного испускать фотоны с высокой частотой. Рассеиваясь на молекулах-мишенях, фотоны будут снабжать демона информацией, необходимой для соответствующих манипуляций с ракеткой).



"Макси" в действии

Рис. 2.28. «Демон Максвелла» за работой.

В худшем случае демон получает правильную информацию, но не использует ее. Пусть T_1 — температура используемого демоном источника энергии, $T_2 \ll T_1$ — температура ящика и E — энергия, затрачиваемая демоном на одно наблюдение. Энтропия, порождаемая производимым демоном актом наблюдения, равна $S_1 = E/T_1$. Энергия затем рассеивается при температуре T_2 окружающей среды, поэтому к концу процесса $\Delta S = S_2 - S_1 = E(1/T_1 - 1/T_2)$ — энтропия возрастает в соответствии с вторым началом термодинамики.

Предположим теперь, что демон использует информацию, почерпнутую им из наблюдения, и, отбивая ракеткой молекулу вправо, уменьшает начальное число комплексов W_0, то есть увеличивает энтропию газа в ящике. Как мы увидим, увеличение энтропии, сообщаемое демоном системе в результате акта наблюдения, значительно превосходит (небольшую) убыль энтропии, получаемую при осуществлении демоном своей функции. *Увеличение* энтропии, которое вызывает демон, включая свой источник света, равно

$$\Delta S = \frac{h\nu_1}{T_1} = k\alpha, \qquad (2.3.53)$$

где k — постоянная Больцмана и $\alpha = h\nu_1/kT_1 \gg 1$. (Чем больше величина α, тем менее четко различие между быстрыми и медленными шарами.)

Пусть $S_0 = k \ln W_0$ — начальная энтропия в ящике до возмущения и $S_1 = k \ln W_1$ — конечное значение энтропии после одного взмаха ракеткой. Энтропия S_1 чуть меньше энтропии S_0; запишем: $W_1 = W_0 - W$, где W — малая величина.

Убыль энтропии в ящике равна

$$\Delta S_2 = S_1 - S_0 = k \ln\left(\frac{W_1}{W_0}\right) = k \ln\left(1 - \frac{W}{W_0}\right) \sim -k\frac{W}{W_0}, \qquad (2.3.54)$$

где $W/W_0 \ll 1$.

Следовательно, полная вариация энтропии равна

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = k\left(\alpha - \frac{W}{W_0}\right) > 0, \qquad (2.3.55)$$

так как $\alpha \gg 1$ и $W/W_0 \ll 1$.

2.3.3. Энтропия идеального газа в состоянии термодинамического равновесия

Если тело (в нашем случае — идеальный газ) обменивается с окружающей средой количеством тепла ΔQ, то эта величина разделяется на две части, из которых одна изменяет внутреннюю (кинетическую) энергию системы на величину E, а остальная часть затрачивается на работу pV, совершаемую системой против окружающей среды или окружающей средой над системой в зависимости от знака ΔQ. (При увеличении объема энергия *уходит* из системы.) Таким образом,

$$dQ = dE + p\,dV. \qquad (2.3.56)$$

Из уравнения состояния идеального газа (2.3.46), (2.3.47), записанного для одного моля, получаем

$$pV = \frac{1}{3} Nm\overline{v^2} = \qquad (2.3.57)$$

$$= \frac{2}{3}(Nm\overline{v^2}) = \frac{2}{3} E = RT, \qquad (2.3.58)$$

где $E = (N/2)m\overline{v^2}$ — внутренняя энергия идеального газа, $\overline{v^2}$ — дисперсия распределения скоростей на одну молекулу. Следовательно,

$$dE = \frac{3}{2} R\,dT. \qquad (2.3.59)$$

Из того же уравнения $pV = RT$ следует, что

$$p = RT/V, \qquad (2.3.60)$$

$$p\,dV = RT\,dV/V. \qquad (2.3.61)$$

Подставляя (2.3.59), (2.3.61) в соотношение (2.3.56), выражающее закон сохранения энергии, получаем

$$dQ = R\left(T\frac{dV}{V} + \frac{3}{2}\frac{dT}{T}\right) \tag{2.3.62}$$

Величина dQ всегда неотрицательна. Хотя в соотношении (2.3.62) она выражена через функции состояния, сама dQ не является функцией состояния. Интеграл от правой части (2.3.62) зависит от пути интегрирования на плоскости VT. Следовательно, величина Q, вычисляемая как интеграл от правой части соотношения (2.3.62), зависит не только от текущих значений функций состояния в данный момент, но и от своей предыстории. Иначе говоря, правая часть соотношения (2.3.62) — не полный дифференциал. Эта трудность легко преодолима, если разделить правую и левую части соотношения (2.2.62) на T. Если T — положительная величина, то величина $dS = dQ/T$ всегда остается неотрицательной. (Тем самым вариационный принцип для состояния равновесия в открытой системе сводится к условию $dE - TdS \leqslant 0$, или, что то же, к минимизации свободной энергии $F = E - TS$.) В результате мы получаем

$$dS = R\left(\frac{dV}{V} + \frac{3}{2}\frac{dT}{T}\right) \tag{2.3.63}$$

и функцию состояния — энтропию газа

$$S = R\left[\ln V + (3/2)\ln T\right] + S_0, \tag{2.3.64}$$

или

$$S \approx R\ln\left(VT_m^{3/2}\right), \tag{2.3.65}$$

где индекс m у T_m означает «масса».

2.3.4. Энтропия фотонного газа в состоянии термодинамического равновесия

В предыдущем разделе нам удалось вычислить энтропию идеального газа как функцию его объема V и температуры T_m без использования функции плотности вероятности (ф. п. в.) скоростей, т. е. распределения Максвелла (этого можно было бы ожидать, исходя из формулы, задающей физическую энтропию системы). Мы же воспользовались эквивалентной формулой Клаузиуса.

В этом разделе мы хотим, используя макроскопическую термодинамику, вывести формулу для энтропии ящика, содержащего *фотоны* в состоянии термодинамического равновесия (идеальный релятивистский газ), не выводя пока распределение Планка.

Для чего нужны такие вычисления? Мы намереваемся понять, что происходит в замкнутой системе, в которой сосуществуют по крайней мере два сорта частиц (барионы и фотоны). Точнее говоря, мы хотим понять с точки зрения термодинамики, что произойдет при расширении «ящика», или при растяжении его метрики, как это происходило с нашей Вселенной в момент большого взрыва. Разумеется, мы не настолько глупы, чтобы пытаться построить математическую модель расширяющейся Вселенной. Наша цель куда скромнее: мы хотим лишь отметить несколько непременных предпосылок, по которым система должна включать в себя смесь газов для того, чтобы производство энтропии в ней совмещалось с нарастающей дифференциацией, приводящей к образованию сложных структур, т. е. к процессу, на первый взгляд противоречащему второму началу термодинамики. Именно такую конкуренцию мы наблюдаем во Вселенной на уровне многих макроскопических масштабов. Итак, прервем на время наше изложение, чтобы решить задачу об энтропии расширяющегося ящика.

Предположим, что фотоны в замкнутом ящике ведут себя, как *идеальный газ*, т. е. не будем учитывать «световую турбулентность» — реальное явление, происходящее даже в «вакууме», для которого, однако, требуется интенсивный (лазерный) пучок света. Из картины идеального фотонного газа мы попытаемся вывести некоторые термодинамические свойства черного излучения, например его энтропию. Из уравнения состояния идеального газа следует соотношение

$$p = \frac{N}{V}\frac{m\overline{v^2}}{3} = \frac{Nm}{V}\frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}, \qquad (2.3.66)$$

где ρ — плотность «жидкости».

Обозначим через $u(T)$ интегральную плотность энергии спектра черного тела, т. е. $u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T)\,d\nu$, где $u(\nu, T)$ — локальное значение планковского спектра в Дж/(м^3·Гц), ν — частота [$u(T)$ выражена в Дж/м^3]. Тогда давление равновесного излучения на стенки полости равно

$$p = u(T)/3. \qquad (2.3.67)$$

Этот результат следует непосредственно из модели идеального фотонного газа: в таком газе все фотоны имеют одинаковую скорость c, и поэтому соотношение (2.3.66) переходит в

$$p = \rho c^2/3. \qquad (2.3.68)$$

Но и из формулы Эйнштейна $E = mc^2$ мы получаем для плотности энергии

$$E/V \sim \rho c^2 \sim u(T) \tag{2.3.69}$$

и, следовательно, (2.3.67). Запишем еще раз основное термодинамическое соотношение предыдущего раздела

$$dQ = dE + p\,dV \tag{2.3.56}$$

или

$$T\,dS = dE + p\,dV, \tag{2.3.70}$$

где V — объем полости, T — температура излучения. Так как

$$E = Vu(T),$$
$$dE = V\,du(T) + u(T)\,dV,$$

получаем

$$\frac{dE}{T} = \frac{V}{T}\,du(T) + \frac{u(T)}{T}\,dV. \tag{2.3.71}$$

Кроме того, справедливо соотношение (2.3.67): $p = (1/3)$ и (T), поэтому

$$p\,dV = u(T)\,dV/3,$$
$$\frac{p\,dV}{T} = \frac{u(T)\,dV}{3T}. \tag{2.3.72}$$

Подставляя (2.3.71), (2.3.72) в основное термодинамическое соотношение (2.3.70), получаем

$$dS = \frac{4}{3}\frac{u(T)\,dV}{T} + \frac{V}{T}\frac{du(T)}{dT}\,dT. \tag{2.3.73}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4}{3}\frac{u(T)}{T}, \tag{2.3.74}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T}\frac{du(T)}{dT}. \tag{2.3.75}$$

Вторую производную $\partial^2 S/\partial V \partial T$ можно вычислить независимо из (2.3.74) и из (2.3.75). Приравнивая смешанные производные, приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4}{3}\frac{u(T)}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\frac{du(T)}{dT}\right),$$

из которого, последовательно преобразуя его, получаем

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{T}\frac{du(T)}{dT}-\frac{u(T)}{T^2}\right)=\frac{1}{T}\frac{du(T)}{dT},$$

$$\frac{4}{3}\frac{du(T)}{dT}-\frac{4}{3}\frac{u(T)}{T}=\frac{du(T)}{dT},$$

$$\frac{du(T)}{dT}=4\frac{u(T)}{T},$$

$$\frac{du(T)}{u(T)}=4\frac{dT}{T},$$

$$\ln[u(T)]=\ln T^4+\ln\alpha=\ln(\alpha T^4),$$

где α — постоянная, и наконец,

$$u(T)=\alpha T^4 \tag{2.3.76}$$

(разумеется, мы лишь повторили здесь классический вывод закона Стефана — Больцмана, предложенный Больцманом).

Подставляя соотношение (2.3.76), например, в (2.3.74), получаем после интегрирования

$$S=\frac{4}{3T}u(T)V+\text{const}. \tag{2.3.77}$$

Постоянную интегрирования в (2.3.77) можно положить равной нулю, тогда энтропия S будет пропорциональна объему, и для энтропии фотонного газа в состоянии равновесия мы получаем

$$S=\frac{4}{3}\alpha T_r^3 V, \tag{2.3.78}$$

где T_r — температура излучения.

Прежде чем рассмотреть совместно соотношения (2.3.65), (2.3.78), отвлечемся немного, чтобы рассмотреть вопрос о расширении Вселенной (на основе адекватной нашим целям элементарной ньютоновской динамики). Мы получим результат, убедительно свидетельствующий о том, что термодинамическая стрела времени, так сказать, полностью подчинена «космологической стреле».

2.3.5. Элементы ньютоновской космологии большого взрыва

Если бы Вселенная отвечала представлениям Больцмана (т. е. была замкнутой статичной Вселенной, приближающейся в целом к состоянию термодинамического равновесия), то невозможно было бы объяснить наблюдаемую усиливающуюся дифференциацию физического мира, так как рост *упорядоченности* мог бы происходить только за счет гигантских флуктуаций вокруг положения равновесия. Кроме того, вероятность

таких флуктуаций была бы чрезвычайно мала; гигантские флуктуации встречаются крайне редко — настолько, что, когда они возникают, их с полным основанием можно считать «чудом». К тому же время жизни гигантских флуктуаций очень мало.

В картину статичной Вселенной не укладываются два внешне не связанных между собой явления:

а) эпохальное открытие, совершенное в 1929 г. Э. Хабблом, который обнаружил, что величина красного смещения в свете, приходящем к нам от далеких галактик, пропорциональна расстоянию до испускающего свет объекта;

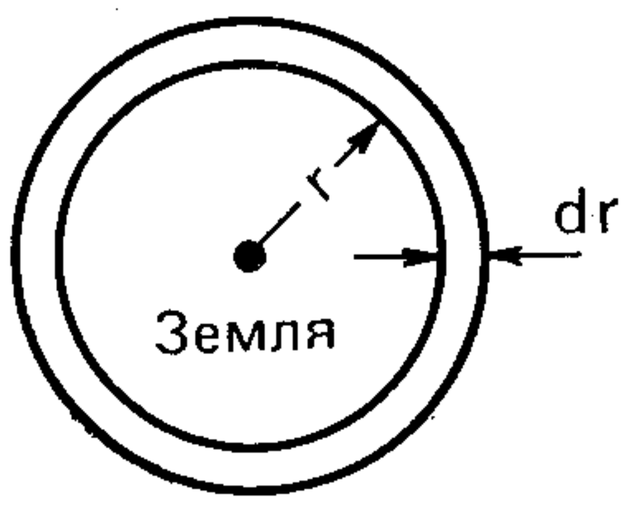


Рис. 2.29. Переменные, используемые при вычислении интенсивности падающего излучения в парадоксе Ольберса (см. текст).

б) такое ежедневно, или, точнее, «еженощно» наблюдаемое явление, как темнота ночного неба.

Начнем со второго явления, суть которого была облечена в форму парадокса Ольберсом в 1826 г. (Ранее тот же вопрос был рассмотрен Галлеем.)

Как показывают проделанные Ольберсом простые вычисления, ночное небо должно было бы быть не темным, а ослепительно ярким. Рассуждения Ольберса сводятся к следующему. Предположим, что Вселенная имеет бесконечную протяженность, статична и распределение звезд в ней однородно и изотропно. Предположим также, что на единицу объема в космическом пространстве приходятся n излучающих объектов и что все объекты обладают одинаковой светимостью I_0. Рассмотрим элемент объема dV, заключенный между двумя концентрическими сферами радиусов r и $r + dr$, $dV = 4\pi r^2 dr$ (рис. 2.29). Светимость в точке наблюдения, обусловленная источниками в объеме dV, равна

$$I = \frac{I_0 n\, dV}{r^2}, \tag{2.3.79}$$

а полная светимость, обусловленная всеми звездами, равна

$$I_t = \int_0^{r_\infty} \frac{I_0 n\, dV}{r^2} = \int_0^{r_\infty} \frac{I_0 n 4\pi r^2\, dr}{r^2} = 4\pi I_0 n \int_0^{r_\infty} dr = 4\pi I_0 n r_\infty. \tag{2.3.80}$$

Нетрудно видеть, что $I_t \to \infty$ при $r_\infty \to \infty$.

Разумеется, мы можем получить конечный ответ, предположив, что радиус r_∞ конечен, но в этом случае Вселенная была бы неустойчива, т. е. стремилась бы (как мы видели в самом

начале книги) коллапсировать к центру (неважно чего). Второй возможный выход из парадоксальной ситуации $I_t = \infty$ состоит в учете *конечных* размеров каждого излучающего объекта в бесконечной Вселенной.

Предположим, что каждый объект имеет сечение A в направлении, нормальном к лучу зрения, исходящего с Земли. Тогда объект, находящийся на расстоянии r, будет стягивать телесный угол $\Omega = A/r^2$. Следовательно, этот объект будет экранировать все излучение от объектов, лежащих позади него в том же телесном угле Ω. Полная экранировка излучения наступит, когда полный телесный угол 4π окажется заполненным. Это случится, если отойти на расстояние R, такое, что

$$\int_0^R 4\pi r^2 n \frac{A}{r^2}\, dr = 4\pi,$$

т. е. при

$$R = 1/An. \tag{2.3.81}$$

Вклад от всех источников на расстоянии, не превышающем R, равен

$$I_t = 4\pi \int_0^R nI_0\, dr = \frac{4\pi I_0}{A}, \tag{2.3.82}$$

т. е. конечен.

Тем не менее парадокс Ольберса остается в силе. Если принять вторую альтернативу, то ночное небо по яркости будет более или менее таким же, как и дневное. В модели статичной Вселенной, находящейся в состоянии равновесия, парадокс Ольберса, по-видимому, не имеет решения. Даже предположив, что излучение от удаленных объектов поглощается объектами, находящимися между источником излучения и наблюдателем, мы не придем к решению парадокса, так как поглощенное излучение нагревает поглотившую его материю и та в свою очередь испускает излучение, в силу чего в итоге картина оставалась такой же, как прежде. Ключ к решению парадокса Ольберса лежит в интерпретации открытия Хаббла: если учесть эффект Доплера, то из красного смещения следует, что галактики удаляются от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям от них до Земли. Если $\Delta\nu$ — величина красного смещения, то $\Delta\nu \sim Hr/c$, где r — расстояние до галактики, H — константа (постоянная Хаббла), c — скорость света. Величина H по оценкам составляет $\sim 3 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$.

Красное смещение, интерпретируемое как симптом расширяющейся Вселенной (скорость расширения как функция

времени убывает), позволяет решить парадокс Ольберса, интенсивность пришедшего излучения на один источник оказывается равной не $I_0/4\pi r^2$, как прежде, а $I_0/4r^2(1+Hr/c)^2$. Интеграл от этой величины при вычислении полной интенсивности сходится и дает численное значение, согласующееся с наблюдениями. Таким образом, ответ на вопрос «Почему ночью небо темное?» гласит: «Потому, что мы смотрим в сторону, противоположную Солнцу, и потому, что Вселенная расширяется».

Рассмотрим, как расширяется Вселенная, более подробно и попытаемся прежде всего вычислить скорость расширения как функцию времени. Предположим, что Вселенная по крайней мере на галактическом уровне однородна и изотропна (с точностью до нескольких процентов); не ограничивая общности, нашу Галактику можно принять за начало координат некоторой характерной галактической массы m. Любая галактика имеет относительно «нас» только радиальную скорость; эта скорость направлена от начала координат и пропорциональна r. Следовательно, такую скорость можно записать в виде

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}, \tag{2.3.83}$$

или

$$d\mathbf{r}/dt = H\mathbf{r},$$

а если подставить $\mathbf{r} = r(t)\mathbf{r}_0$, то

$$dr(t)/dt = Hr(t). \tag{2.3.84}$$

Величина $r(t)$ в такой записи называется коэффициентом расширения; $r(t)$ снова означает не радиус сферы, расширяющейся в окружающем ее предсуществующем «вакууме», а растяжение *метрики* самой системы. Объем сферы радиуса r равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{2.3.85}$$

В этой сфере содержится масса

$$M = V\rho(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)\rho(t), \tag{2.3.86}$$

где $\rho(t)$ — (изменяющаяся со временем) плотность. Если при расширении (или сжатии) материя не создается и не уничтожается, то масса сферы остается постоянной и поэтому

$$\rho(t)r^3(t) = \text{const} = \xi. \tag{2.3.87}$$

Определим $r(t)$. Для этого заметим, что «галактика» m притягивается к началу силой гравитации материи, *содержащейся* в сфере радиуса r с центром в начале координат. (Теория Ньютона доказывает, что сила, с которой гравитационная *однород-*

ная сфера действует на находящуюся *внутри* нее частицу, равна нулю. Это позволяет нам не заботиться о материи, расположенной *вне* сферы радиуса r, — лишь бы эта материя была равномерно распределена относительно начала координат.) Таким образом,

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\frac{G\xi m}{r^2} = -\frac{md^2r}{dt^2},$$

или

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}\frac{\xi G}{r^2(t)}, \tag{2.3.88}$$

что после однократного интегрирования дает

$$\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi\xi G}{3r(t)} + A, \tag{2.3.89}$$

где A — произвольная постоянная.

До сих пор наша модель была моделью Вселенной, заполненной материей. Хотя в настоящее время вклад излучения составляет менее одного процента энергии, приходящейся на единицу объема (распределение энтропии между излучением и материей — вопрос совершенно иной), излучение играет главную роль на более ранних стадиях расширения. Мы можем изучать эволюцию Вселенной, содержащей материю и излучение. Предположим, что расширение Вселенной — адиабатическое ($dQ = 0$). Первое начало термодинамики гласит, что изменение внутренней энергии расширяющейся системы равно работе, совершаемой давлением, т. е.

$$dE = -p\,dV. \tag{2.3.90}$$

Используя формулу Эйнштейна $E = Mc^2$, где M включает в себя вклады и материи, и излучения, получаем

$$E = (\rho_m + \rho_r)\,Vc^2 = \rho Vc^2, \tag{2.3.91}$$

где ρ_m — плотность материи, ρ_r — плотность излучения. Так как объем V рассматриваемого элемента пропорционален $\sim r^3(t)$, из (2.3.90) получаем

$$\frac{d}{dt}(\rho r^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(r^3) = 0. \tag{2.3.92}$$

Для Вселенной, содержащей материю только в ее современной разреженной форме, давлением можно пренебречь, и мы приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}(\rho_m r^3) = 0, \tag{2.3.93}$$

или

$$\rho_m r^3 = \text{const}$$

(это соотношение уже было выведено нами раньше), т. е.

$$\rho_m \sim r^{-3}. \tag{2.3.94}$$

В современную эпоху излучение свободно проходит сквозь Вселенную с малой вероятностью рассеяться на газе или пыли; фотон с высокой вероятностью проходит несколько радиусов Хаббла прежде, чем рассеяться или поглотиться. Можно сказать, что Вселенная в современную эпоху прозрачна или оптически тонка. Так было не всегда. Характерный размер галактики ~ 10 ксв. лет, среднее расстояние между галактиками ~ 1 Мсв. лет (1 св. год — расстояние, проходимое светом за один год).

Обращая развитие Вселенной «вспять», мы дойдем до такого периода, когда все галактики «соприкасались». Прокручивая назад картину, мы «увидим» пыль, падающую на звезды, из которых она была выброшена, когда те взрывались как сверхновые, на наших глазах звезды будут бесследно исчезать в облаках несветящегося газа, из которых они некогда образовались. Сложные атомы будут распадаться на водород с примесью гелия. Мы увидим равномерно распределенный газ — водород — с нерегулярными вкраплениями гелия (там, где впоследствии образовывались галактики). При дальнейшем продвижении в глубь времен плотность энергии и температура начнут повышаться; газовые звезды будут разогреваться фотонами. Критический момент настанет, когда температура материи достигнет ~ 3000 К — порога, выше которого водород ионизуется. За этим порогом мы вступим в эру *связи* материи и излучения, обусловленной томсоновским рассеянием фотонов на свободных электронах: Вселенная становится «непрозрачной» для излучения и, насколько мы можем судить, заполняется однородной горячей плазмой; миновав эту эру, мы попадаем в период безраздельного господства излучения.

Остановим здесь наш «фильм» и применим первое начало термодинамики к последней эре — эре энергетического превосходства излучения. Из (2.3.68) мы знаем, что

$$p_r = \frac{\rho_r c^2}{3}, \tag{2.3.95}$$

поэтому мы получаем соотношение (2.3.92):

$$\frac{d}{dt}(\rho_r r^3) + \frac{1}{3}\rho_r \frac{d}{dt}(r^3) = 0, \tag{2.3.96}$$

$$3\rho_r r^2 \dot{r} + \dot{\rho}_r r^3 + \rho_r r^2 \dot{r} = 0,$$

$$4\rho_r r^3 \dot{r} + \dot{\rho}_r r^4 = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\rho_r r^4) = 0, \tag{2.3.97}$$

откуда

$$\rho_r \sim r^{-4}. \tag{2.3.98}$$

Соотношение (2.3.98) выполняется на очень ранней стадии развития Вселенной, «вскоре» после большого взрыва — т. е. в первые сотни тысяч лет!

Вернувшись к соотношению (2.3.89)

$$\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi\xi G r(t)}{3r^2(t)} \tag{2.3.99}$$

(положив $A = 0$) и применив его к эре доминирования излучения, мы, с учетом того что

$$r(t)\,\xi = \rho_r r^4 = \xi' = \text{const}, \tag{2.3.100}$$

получим

$$\dot{r}^2 r^2 = \text{const}. \tag{2.3.101}$$

Следовательно, на ранней стадии адиабатического расширения радиус Вселенной, в которой преобладающую роль играет излучение, увеличивается по закону

$$r(t) \sim t^{1/2}. \tag{2.3.102}$$

2.3.6. Расширение смеси материи и излучения. Дифференциальное охлаждение и производство энтропии

Рассмотрим теперь, как изменяется энтропия (идеальной) расширяющейся системы, состоящей лишь из двух компонент — идеального классического нерелятивистского газа и фотонов [2.8].

Начнем с системы (если угодно с вселенной), содержащей только материю, а если говорить более точно, идеальный (одноатомный) газ в состоянии термодинамического равновесия. Предположим, что метрика в ящике начинает изменяться по закону $\sim r(t)$. Как сказывается такое расширение на энтропии газа? Прежде всего заметим, что расширение не изменяет распределение скоростей газа (каким бы ни было это распределение, в интересующем нас случае речь идет о распределении Максвелла), так как преобразование подобия длин порождает точно такое же преобразование подобия скоростей. Для нерелятивистского газа распределение скоростей и распределение импульсов совпадают, поэтому, если газ находится в тепловом равновесии, имея распределение скоростей Максвелла, он останется в состоянии равновесия и энтропия не изменится. В этом можно убедиться следующим образом. За время dt атом газа, движущийся со скоростью v относительно расширяющегося субстрата, проходит расстояние $v\,dt$. В этой новой точке субстрат движется вследствие расширения со скоростью $\dot{r}(v\,dt)/r$.

поэтому скорость, измеренная наблюдателем, движущимся вместе с субстратом в этой точке, будет на $dr = -\dot{r}(v\,dt)/r$ меньше, и мы получаем

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r}, \tag{2.3.103}$$

или

$$v \sim \frac{1}{r}. \tag{2.3.104}$$

Так как температура T_m идеального газа пропорциональна его средней кинетической энергии, т. е. $T_m \sim v^2 \sim 1/r^2$, мы заключаем, что

$$T_m \sim \frac{1}{r^2}, \tag{2.3.105}$$

$$T_m^{3/2} \sim r^{-3} \sim V^{-1}, \tag{2.3.106}$$

где V — объем расширяющегося газа. Итак, мы видим, что энтропия системы

$$S_m \sim R \ln\left(VT_m^{3/2}\right) \tag{2.3.65}$$

остается *инвариантной* при расширении или (сжатии): вселенная, состоящая только из идеального газа, навсегда останется в состоянии равновесия, если в начальный момент времени она находилась в состоянии равновесия.

Предположим теперь, что наша вселенная первоначально содержит только фотоны (в действительности такой случай представился бы, если бы при большом взрыве барионы и антибарионы были порождены в равных количествах). Наблюдательное открытие Хаббла свидетельствует о том, что при расширении Вселенной длина волны каждого фотона претерпевает преобразование подобия вместе с $r(t)$; т. е. частота ν удовлетворяет соотношению

$$\nu \sim \frac{1}{r(t)}, \tag{2.3.107}$$

или если учесть распределение Планка, то, поскольку $E_r \sim h\nu$,

$$E \sim \frac{1}{r(t)}, \tag{2.3.108}$$

где E — энергия, соответствующая данной частоте фотона. Ясно, что расширение Вселенной не изменяет распределения фотонов по различным частотам спектра черного тела, так как все длины волн претерпевают преобразование подобия с одним и тем же коэффициентом. Таким образом, распределение Планка в спектре сохраняется при расширении Вселенной, хотя темпе-

ратура $T_r \sim E_r$ убывает пропорционально средней энергии фотонов

$$T_r \sim \frac{1}{r(t)}, \tag{2.3.109}$$

или

$$T_r^3 \sim r(t)^{-3} \sim V^{-1}, \tag{2.3.110}$$

где V — объем газа.

Таким образом, энтропия расширяющегося фотонного газа

$$S_r \sim \frac{4}{3} \alpha V T_r^3 \tag{2.3.78}$$

(α — постоянная Стефана с численным значением $5{,}67 \times \times 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)) остается инвариантной при расширении: расширяющаяся (или сжимающаяся) система, содержащая *только* фотоны, навсегда останется в состоянии термодинамического равновесия, если первоначально она находилась в состоянии термодинамического равновесия.

Рассмотрим теперь случай вселенной, равномерно заполненной нерелятивистской материей и электромагнитным излучением. Расширение (или сжатие) приводит к охлаждению материи по закону $T_m \sim 1/r^2(t)$, тогда как излучение охлаждается по закону $T_r \sim 1/r(t)$. Материя охлаждается быстрее, чем излучение. Следовательно, по мере того как расширяется вселенная, между материей и излучением возникает разность температур: энергия будет перетекать *от поля излучения к материи*, стремясь выровнять температуры. Если скорость расширения меньше, чем скорость выравнивания температуры смеси, то тепловой поток эволюционирует в равновесных условиях, и энтропия смеси остается постоянной.

Но если вселенная расширяется быстрее, чем выравнивается температура, то тепловой поток от излучения к материи развивается в неравновесных условиях, и энтропия возрастает: вселенная при таких обстоятельствах оказалась бы «запертой» вдали от термодинамического равновесия, и, если бы за фазой расширения последовала фаза сжатия, ничто не изменилось бы.

История вселенной конспективно представлена на рис. 2.30. На ранних стадиях расширения вселенной скорость расширения велика, но смесь материи и излучения не настолько горяча, чтобы градиент выравнивания температуры превышал градиент расширения. Поэтому вселенная, если она первоначально находится в состоянии термодинамического равновесия, навсегда остается в этом состоянии. Со временем скорость расширения убывает из-за гравитационных сил, но по мере охлаждения системы скорость выравнивания температуры убывает еще быстрее. Затем вселенная достигает критического возраста T_c, когда

обе кривые — расширения и выравнивания температуры — пересекаются. Система выходит из состояния термодинамического равновесия (и в дальнейшем остается неравновесной), характеризуемого прежде всего скоростью производства энтропии

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_r}\right)\frac{dQ}{dt}, \qquad (2.3.111)$$

где dQ/dt — скорость теплового потока от излучения к материи. *Производству энтропии* сопутствует явление все более усиливающейся *дифференциации* вселенной — от однородного шара

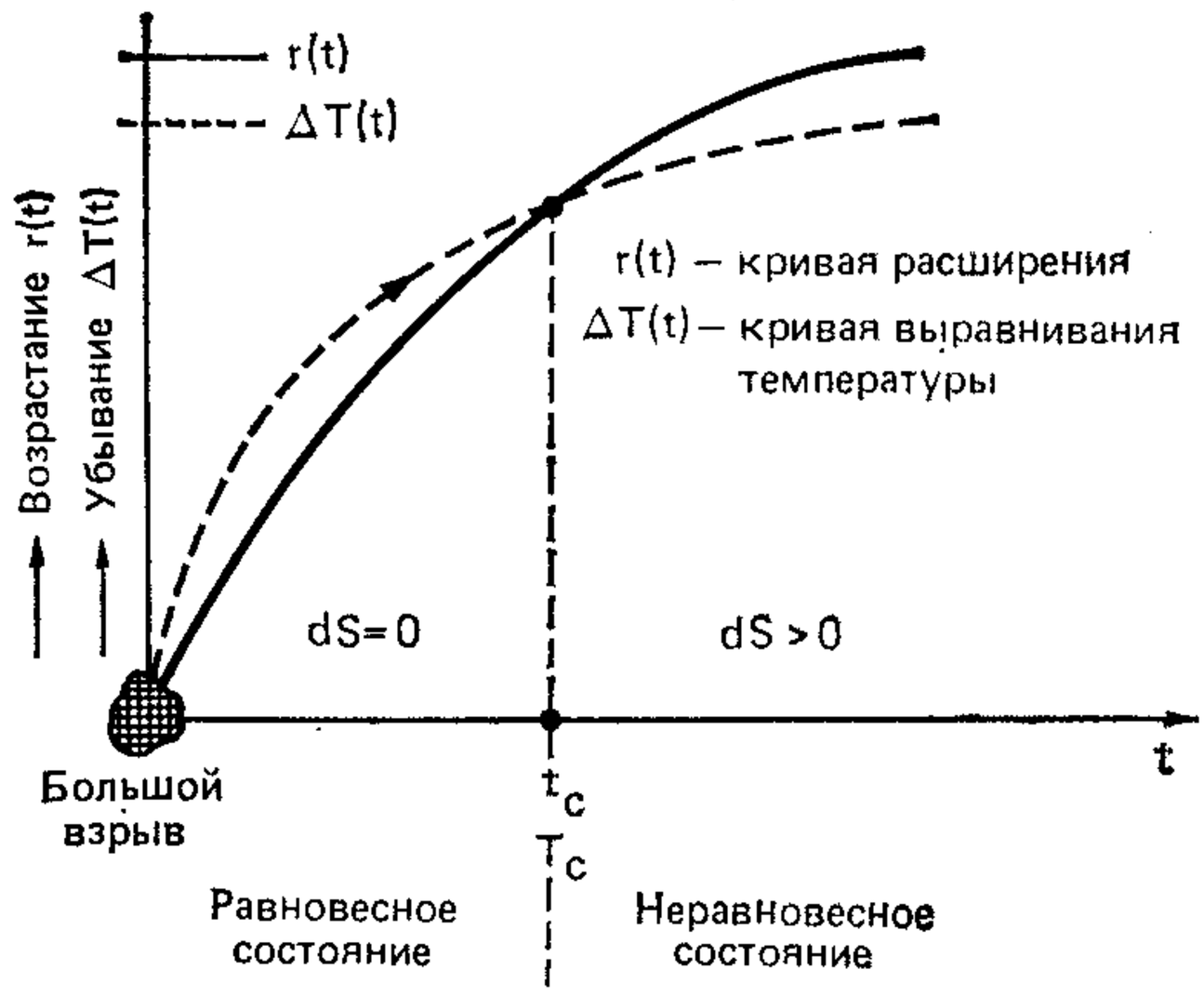


Рис. 2.30. Пока скорость выравнивания температуры превышает скорость расширения, система находится в равновесном состоянии. По истечении некоторого критического времени T_c скорость выравнивания температуры падает ниже скорости расширения: с этого момента система движется и остается вдали от равновесия.

ионизованной материи и фотонов (плазмы) до сгустков материи (галактик), разбегающихся друг от друга (так как в малых масштабах доминируют гравитационные силы, каждый такой сгусток материи в отдельности сжимается) в «море» излучения, проникающего на большие расстояния.

Сжатие галактик приводит к тому, что материя начинает светиться. В недрах более мелких сгустков материи (звезд), входящих в состав галактик, когда гравитационное сжатие прорывается сквозь «кулоновский барьер», возгораются термоядерные реакции, в ходе которых водород превращается в гелий и т. д.

Таким образом, обозревая «с птичьего полета» эволюцию вселенной, мы становимся свидетелями смены этапов, или «эпох», на каждом из которых доминирует одно из четырех фундаментальных взаимодействий. В ходе эволюции большой

звезды взаимодействия уступают друг другу главенствующую роль в такой последовательности: гравитация → электромагнитное взаимодействие → сильное (с примесью слабого) взаимодействие → электромагнитное взаимодействие → сильное (с примесью слабого) взаимодействие → гравитация (полный коллапс, приводящий к рождению нейтронных звезд или черных дыр, а ниже предела Чандрасекара — неполный коллапс, останавливающийся на стадии белых карликов).

В процессе непрерывной дифференциации сложность материи возрастает — в недрах звезд образуются стабильные элементы, более тяжелые, чем первичный водород и гелий, образуются последовательно, шаг за шагом, вплоть до железа; кроме того, целая серия более тяжелых радиоактивных ядер образуется в результате еще не известных процессов при взрывах сверхновых. Затем наступает черед образования молекул из электромагнитного взаимодействия между атомами, которые не обязательно обладают постоянным дипольным моментом, но идеально симметричны,— атомы типа гелия, неона и аргона. Новые силы ($F \sim r^{-7}$ — взаимодействие Лондона — Ван-дер-Ваальса) возникают из взаимодействия между мгновенными дипольными моментами, т. е. между нелинейными связанными осцилляторами, собственные частоты которых зависят помимо прочего от интенсивности связи и продолжают существовать и при нулевой температуре. Таким образом, даже в «неживом», предбиологическом мире мы обнаруживаем тенденцию к *производству энтропии* наряду с *углубляющейся дифференциацией и возрастанием сложности.*

Рассмотрим кратко энергетический (и энтропийный) обмен между обычной звездой (нашим Солнцем) и «биопланетой» (типа нашей Земли). Нейтрино и солнечный ветер мы исключаем, имея в виду только спектр электромагнитного излучения. Солнце отстоит от Земли на расстоянии, равном 214 солнечных радиусов. Это означает, что приходящая на Землю электромагнитная (ЭМ) энергия составляет $1/(214)^2 \sim 1/46\,000$ от ЭМ энергии, испускаемой поверхностью Солнца. Испускаемая Солнцем ЭМ энергия находится в термодинамическом равновесии при температуре $T_1 \approx 6000$ K; поверхности Земли достигает лишь 1/46 000 от нее, поэтому распределение Планка для ЭМ энергии, приходящей энергии, соответствует кривой, ограничивающей на рис. 2.31 заштрихованную область. Этот спектр не находится в термодинамическом равновесии, так как он «сдвинут» вправо относительно соответствующей равновесной кривой при эквивалентной температуре (температуре поверхности Земли $T_3 \sim 310$ K). Следовательно, электромагнитная энергия, поступающая на Землю от Солнца, обладает меньшей энтропией или большей упорядоченностью, чем можно было бы ожидать,

исходя из распределения Планка при соответствующей температуре; она обладает, как принято говорить, некоторым количеством «негэнтропии», которое в принципе может быть передано надлежаще сконструированному чувствительному «приемнику» и тем самым увеличит его упорядоченность. Общее количество ЭМ энергии, приходящей от Солнца на Землю, составляет $\sim 3{,}2 \cdot 10^{22}$ Дж/К в год или в информационных единицах $\sim 10^{38}$ бит/с.

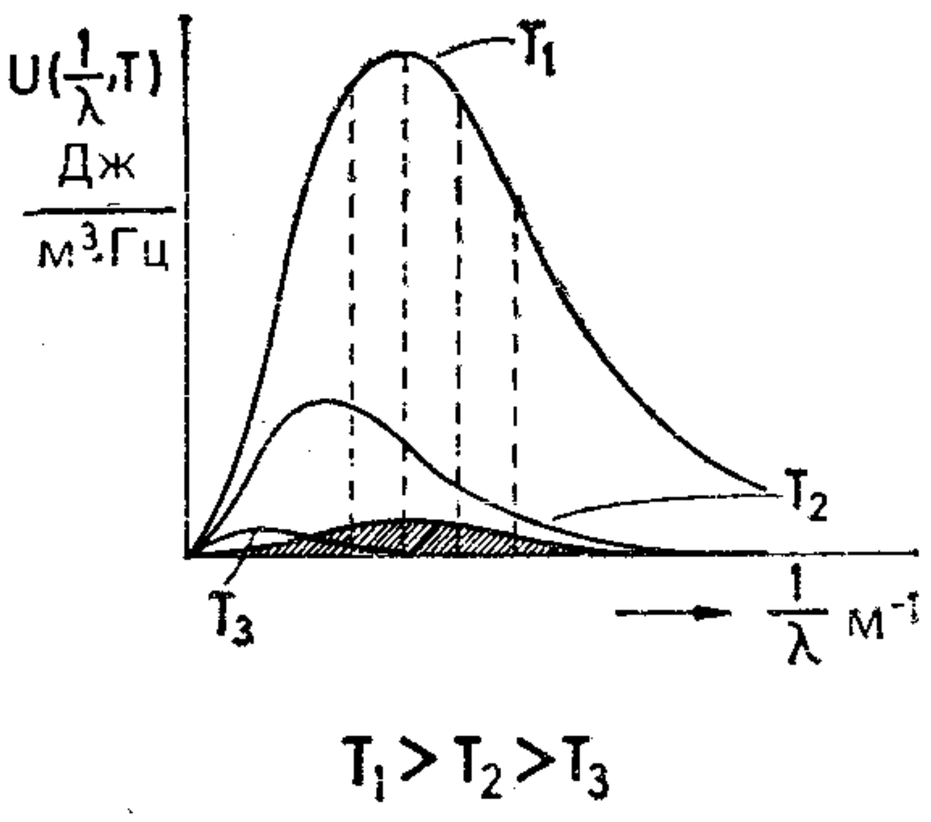


Рис. 2.31. Распределение Планка в спектре энергии излучения черного тела при трех температурах T_1, T_2, T_3.

Столь внушительное количество «информации» поступает ежесекундно от Солнца, но оценка и использование этой информации существенно зависит от остроумия и находчивости «приемника». Например, кусок железа вообще «не понимает» солнечную информацию; он отражает часть ее (причем в менее упорядоченном виде, чем информация дошла до него), а остальная информация идет на нагревание куска железа, т. е. на увеличение его энтропии.

Иначе обстоит дело в случае молекул хлорофилла: они весьма эффективно используют энтропийно-дефицитный солнечный свет. Молекулы хлорофилла не дают испущенным Солнцем фотонам израсходовать себя в тепловом рассеянии (как это было в случае куска железа), а *используют* энергию фотонов для отщепления H_2 от O и присоединения к C, т. е. для осуществления реакции

$$(H_2O)_n + (CO_2)_m + \text{Солнечный свет} \rightarrow C_mH_{2n}O_n + (O_2)_m. \quad (2.3.112)$$

Получающиеся в результате реакции молекулы, например глюкозы $C_6H_{12}O_6$, отличаются большей сложностью, чем молекулы воды и двуокиси углерода. Кроме того, в приведенной выше реакции фотосинтеза увеличение сложности сопровождается *производством энтропии*, которое превышает недостаток энтропии в солнечном свете, инициировавшем реакцию.

На этом иерархическом уровне биологической сложности впервые проявляется новый побочный продукт эволюции — *самоорганизация*. Речь идет о том, что исследуемая система, преодолев некоторый порог сложности, обретает способность к автономному самовоспроизведению, т. е. свойство, из которого следует, что система использует «самомоделирующие алгоритмы». Обсуждение не до конца понятной динамики самовоспроизведе-

ния мы отложим до гл. 6, но уже теперь настала пора познакомиться с понятием сложности — как на структурном, так и на операционном (алгоритмическом) уровне.

2.3.7. Понятие сложности

а) *Структурная сложность и ее связь с устойчивостью системы.*

Интуитивно ясно, что структурная сложность системы должна возрастать с увеличением числа взаимодействующих переменных N. При данном (большом) числе переменных сложность системы зависит от того, насколько они *взаимосвязаны*. Полная взаимосвязанность означает, что все элементы a_{ij} в матрице взаимодействия A линеаризованной системы (разд. 2.2.7) отличны от нуля. Обычно степень взаимосвязанности переменных мы измеряем числом $0 \leqslant C \leqslant 1$ — долей отличных от нуля элементов a_{ij} матрицы A от общего числа элементов. При данном $N > 1$ и $C \sim 1$ элементы a_{ij} по существу являются случайными числами; сложность возрастает с увеличением дисперсии σ^2 (гауссовской) функции плотности вероятности (рис. 2.32), из которой мы можем производить выборку отдельных чисел a_{ij}. В качестве компактного «суперпараметра» сложности большой сети с случайными связями между элементами Макмертри [2.8] и другие авторы предложили выбрать нелинейную комбинацию $\eta = \sigma \sqrt{NC}$. При нулевом среднем (математическом ожидании) ф.п.в.

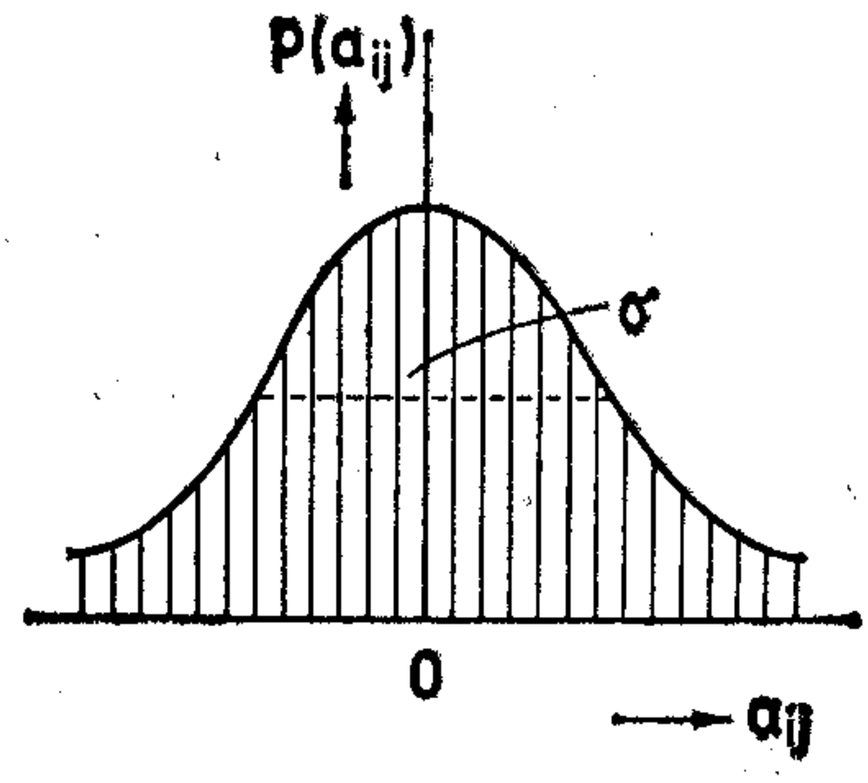


Рис. 2.32. Гауссово распределение плотности вероятности коэффициентов взаимодействия a_{ij}, значения которых выбраны так, чтобы система оказалась разделенной на иерархически упорядоченные части.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2. \qquad (2.3.113)$$

Значение σ характеризует интенсивность взаимодействия внутри системы. С какой стороны можно было бы подойти к проблеме устойчивости большой системы? Из того что мы уже знаем, решение этой задачи сводится «просто» к вычислению собственных значений матрицы A.

Но теперь необходимо соблюдать осторожность. Матрица A — случайная, и задача состоит в том, как вычислить собственные значения *случайной* матрицы с действительными элементами.

Мы не можем вычислять эти собственные значения, решая характеристическое уравнение

$$\det|A-\lambda E|=0. \qquad (2.3.114)$$

Предпринимались попытки определить в общем случае теоретическое распределение собственных значений случайной вещественной матрицы, но все они оказались безуспешными. Более того, провал их был предопределен тем, что поле вещественных чисел алгебраически не замкнуто. В частных случаях распределение $P(\mathrm{Re}\{\lambda_i\})$ удалось получить с помощью численного моделирования. Но и тогда мы получаем в действительности не набор определенных чисел $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}$, а *вероятности* того, что величины $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}$ положительны, равны нулю или отрицательны.

Обширные численные эксперименты, проведенные в основном Эшби [2.9], показали, что, когда параметр $\sigma\sqrt{NC}<1$,

$$P(\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0)\sim 1 \quad \text{при всех} \quad i. \qquad (2.3.115)$$

Это означает, что если сложность системы с случайными связями ниже определенного значения, то система по существу устойчива. Но, как показали те же численные эксперименты, выше критического порога $\sigma\sqrt{NC}=1$, т. е. при $\sigma\sqrt{NC}\geqslant 1$, всегда существует по крайней мере одно i, при котором $P(\mathrm{Re}\{\lambda_i\})\sim 1$. Система с большой вероятностью становится неустойчивой. Мы видим, что *устойчивость вступает в конфликт со сложностью*. Если бы так происходило в реальных системах, то можно было бы ожидать, что почти все сколько-нибудь значительные макроскопические структуры должны быть внутренне устойчивыми. Между тем нам известны необычайно сложные, например биологические, системы, а также множество созданных человеком систем, которые, несмотря на чудовищную сложность, обладают высокой устойчивостью. (Один из предлагаемых ответов на вопрос о причине устойчивости всех этих крупномасштабных систем состоит в том, что связи между их элементами не случайны. Правда, во многих случаях такое предположение не подкрепляется существующими эволюционными теориями: характерным примером может служить система связей в головном мозге крупных млекопитающих.) Как такое возможно? Какого рода компромисс может быть достигнут между, казалось бы, несовместимыми тенденциями устойчивости и сложности? Ответом на этот вопрос, по-видимому, может служить «секционирование», или «иерархическое разбиение».

Последнее утверждение означает, что существование любой организационно-структурной перестройки, способствующей увеличению устойчивости при данном уровне сложности, может стать путеводной нитью: суть подхода состоит в исследовании

относительной вероятности устойчивости матриц при одних и тех же N, C, σ, но при такой перестановке строк и столбцов, при которой все ненулевые элементы a_{ij} входят блоками.

Рассмотрим в качестве примера связи между четырьмя переменными x_1, x_2, x_3, x_4 очень простой матрицы, изображенной

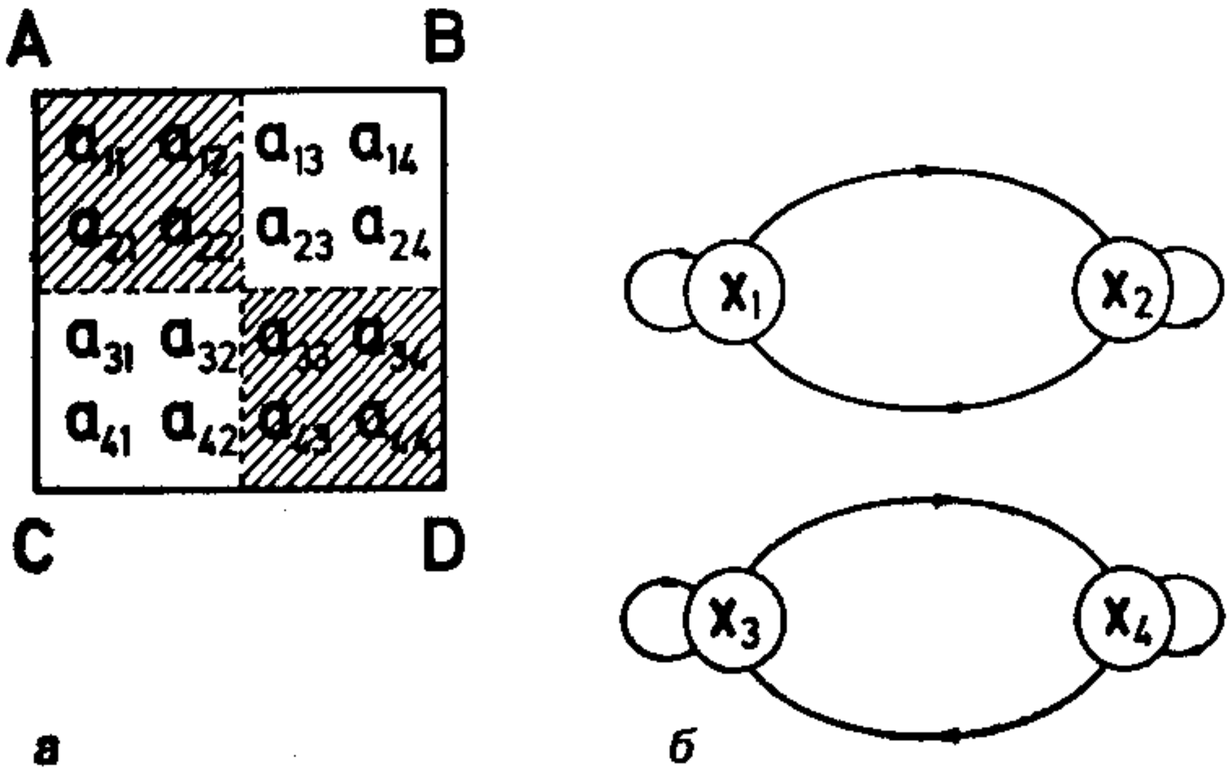


Рис. 2.33. *а* — разбиение случайной матрицы взаимодействия, приводящее к разделению системы на две независимые половины. Коэффициенты a_{ij} в незаштрихованных блоках очень малы; *б* — диаграмма, показывающая связи между компонентами системы, описываемой матрицей *а*.

на рис. 2.33. Если из той же функции плотности вероятности, из которой взяты элементы a_{ij}, произвести повторную выборку с таким расчетом, чтобы сделать вероятности элементов, стоящих на диагонали BC, очень малыми, то матрица, диагонализо-

Рис. 2.34. *а* — разбиение случайной матрицы взаимодействия, допускающее (слабое) взаимодействие между частями системы. Коэффициенты a_{ij} в незаштрихованных блоках очень малы; *б* — диаграмма, показывающая связи между компонентами системы, описываемой матрицей *а*.

ванная вдоль главной диагонали AD, даст нам систему, распавшуюся на две независимые половины.

Но если произвести выборку из нашей ф.п.в. так, чтобы матрица диагонализовалась вдоль побочной диагонали BC (сделав очень малыми вероятности элементов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44}), то мы получим матрицу, условно изображенную на рис. 2.34. Если изменить расположение ненулевых элементов

так, чтобы усилить элементы a_{13}, a_{31}, a_{24}, a_{42} [т. е. сделать их $P(a_{ij}) \sim 1$], а элементы a_{14}, a_{41}, a_{32}, a_{23} ослабить [т. е. сделать их $P(a_{ij}) \sim 0$], в результате исходная система распадется на два блока, таких, чтобы элементы внутри каждого блока сильно взаимодействовали между собой, а взаимодействие между блоками было слабым. Вычислительный эксперимент в этом случае показывает, что при одном и том же уровне сложности разложимость усиливает устойчивость [2.9].

б) *Алгоритмическая сложность*

Под алгоритмической сложностью мы понимаем минимальное число битов (наименьшее число инструкций), необходимых внешнему наблюдателю для того, чтобы полностью воспроизвести данную систему. Оставляя до гл. 6 динамику, лежащую в основе того, что порождает сложность в системе, мы ограничимся в этом разделе лишь самыми необходимыми пояснениями к определению алгоритмической сложности, предложенному в основном Хаитиным [2.10]. Суть дела сводится к следующему. Мы получаем временной ряд, состоящий из нулей и единиц. Этот ряд порожден исходами бросаний нефальшивой (идеально симметричной) монеты, поэтому никаких связей между отдельными членами ряда не существует. Сколько альтернативных временных рядов длины N мы можем получить? Ответ зависит от того, какой временной ряд нам нужен. Если мы не устанавливаем заранее число нулей и единиц в ряде, то общее число рядов длины N равно 2^N. Если же нас интересуют временные ряды с определенным числом нулей и единиц, то общее число таких рядов равно $N!/N_1!N_2!$, где N_1 — число нулей, N_2 — число единиц ($N_1 + N_2 = N$). Нас интересует, какую долю от 2^N рядов длины N (априори равновероятных (с вероятностью 2^{-N}) для внешнего наблюдателя) составляют ряды, сжимаемые до K битов? Иначе говоря, скольким рядам можно сопоставить алгоритм длиной $N - K$, который, если подать его на вход автомата с конечным числом состояний, порождает на выходе весь ряд длиной N?

Из двух символов 0 и 1 мы можем построить 2^1 «слов» длиной 1 бит, 2^2 слов длиной 2 бит, 2^3 слов длиной 3 бит и т. д. Общее число рядов, сжимаемых до K бит, равно

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{N-K-1} = 2^{N-K} - 2, \qquad (2.3.116)$$

а их доля от общего числа рядов —

$$\xi = \frac{2^{N-K} - 2}{2^N} \sim 2^{-K} \quad \text{при} \quad N \gg 1. \qquad (2.3.117)$$

Не без некоторой «меланхолии» мы обнаруживаем, что эта доля быстро убывает с увеличением K: например, при $K = 10$ лишь один временной ряд из тысячи сжимается до 10 бит.

В общем случае соотношение между длиной алгоритма на входе и длиной временного ряда на выходе имеет вид

$$N' \approx N_0 + NS(0, 1), \qquad (2.3.118)$$

где H_0 включает в себя количество инструкций, входящих во внутреннее программное обеспечение данной конкретной ма-

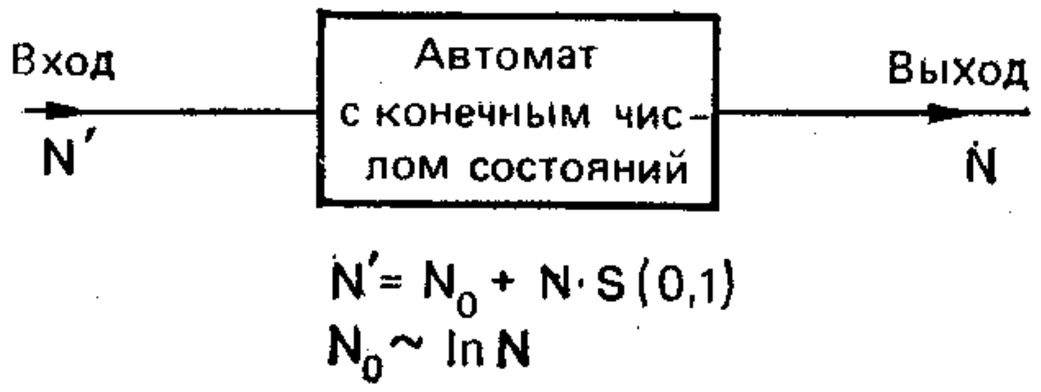


Рис. 2.35. «Минимальная» программа N' выполняется в автомате с конечным числом состояний и порождает временной ряд длины N.

шины, и по порядку величины сравнимо с $\ln N$, а

$$S(0, 1) = -P(0)\log_2 P(0) - P(1)\log_2 P(1) \qquad (2.3.119)$$

есть энтропия ряда (рис. 2.35) с $P(0) + P(1) = 1$. Таким образом, при $P = 1/2$

$$S(0, 1) = 1$$

и N', вообще говоря, *больше*, чем N. Если вероятность P отлична от $1/2$, то $S(0, 1)$ падает, и при $P = 1$ или $P = 0$

$$S(0, 1) = 0,$$

поэтому

$$N' \ll N.$$

Экстремальными примерами из 2^N временных рядов длины являются частные реализации

$$\underbrace{000\ldots0}_{N} \quad \text{или} \quad \underbrace{111\ldots1}_{N},$$

где $N' \sim \ln N!$ Доля ξ включает при произвольном K все реализации, в которых наблюдатель может заметить какую-нибудь стохастическую взаимозависимость между нулями и единицами, т. е. в которых нули и единицы появляются с $P \neq 1/2$. Что, однако, наблюдатель не в силах доказать, так это несжимаемость, т. е. полную случайность, данной реализации. Это противоречило бы теореме Гёделя.

2.4. Заключительные замечания

В этой главе мы ограничились рассмотрением динамики нелинейных систем в случае одного, двух и многих измерений (рассмотрение трехмерного пространства состояний мы отложили

до гл. 6). По существу мы убедились, что гамильтоновы системы остаются неизменными, если говорить о предпочтительности и необратимости перехода из состояния в состояние; исключение составляют особые точки, сигнализирующие о ветвлении решений. Диссипативные системы в отличие от гамильтоновых претерпевают последовательность нарушений симметрии (приводящей в случае одного, двух и многих измерений к возникновению необратимости). Эволюция диссипативных систем в отличие от больцмановского описания характеризуется *производством энтропии*, которое сопровождается все *углубляющейся дифференциацией* и *возрастанием сложности*. Как было показано, сложность подрывает устойчивость, если не умеряется иерархической структурой. Четвертая характеристика — *самоорганизация* — возникает, когда сложность системы превосходит некий критический порог.

По существу самоорганизация связана со способностью системы моделировать (т. е. сжимать до алгоритмов минимальной длины) окружающую среду, а также части самой себя. Для дальнейшего исследования самоорганизации необходима теория информации, так как способность моделировать требует существования кода или процедуры отображения между уровнями программного и аппаратурного обеспечения. Мы хотим этим сказать, что для понимания самоорганизации необходимо одновременное рассмотрение по крайней мере на двух иерархических уровнях, поэтому взаимооднозначное отображение не порождает самоорганизации.

Для динамического «воплощения» режима самосжимаемости, а именно включения странных аттракторов в «когнитивную» систему с «информационной размерностью» меньшей, чем размерность пространства состояний, необходима хаотическая динамика. Хаос оказывается эффективным и при установлении связи между микроскопическим и макроскопическим описанием. По этим причинам аналитическое обсуждение самоорганизации требует знания материала гл. 4 и 6, но предварительно нам необходимо ознакомиться с *физикой* обработки информации в естественных системах.

Итак, нам необходимы некоторые сведения о динамике носителей информации, главным образом об излучении, распространении сферических волн и информации, передаваемой сферическими волнами конечным апертурам.

3

Роль сферических электромагнитных волн как носителей информации

3.1. Излучение заряда, ускоренно движущегося в вакууме. Понятие «самовоздействия». Термодинамика электромагнитного излучения

3.1.1. Излучение в вакууме

Рассмотрим элементарный диполь, состоящий из двух зарядов противоположного знака $-e$, e, разделенных изменяющимся в зависимости от времени расстоянием $l(t)$. Диполь «элементарен», если $l_{\text{макс}} \ll \lambda$, где λ — длина волны подводимого к диполю тока. Сначала мы вычислим энергию, излучаемую таким диполем в вакууме, а затем исследуем процесс излучения в дисперсионной среде с потерями. Для этого мы прежде всего вычислим в точке R, ϑ, φ (рис. 3.1) интенсивности создаваемого диполем электрического и магнитного поля, или, если говорить более подробно, шесть компонент E_r, E_ϑ, E_φ, H_r, H_ϑ, H_φ (в сферических координатах). Источник излучения находится в мировой точке с координатами $\mathbf{r}'(x', y', z')$, t', а наблюдатель — в точке $\mathbf{r}(x, y, z)$, t, где

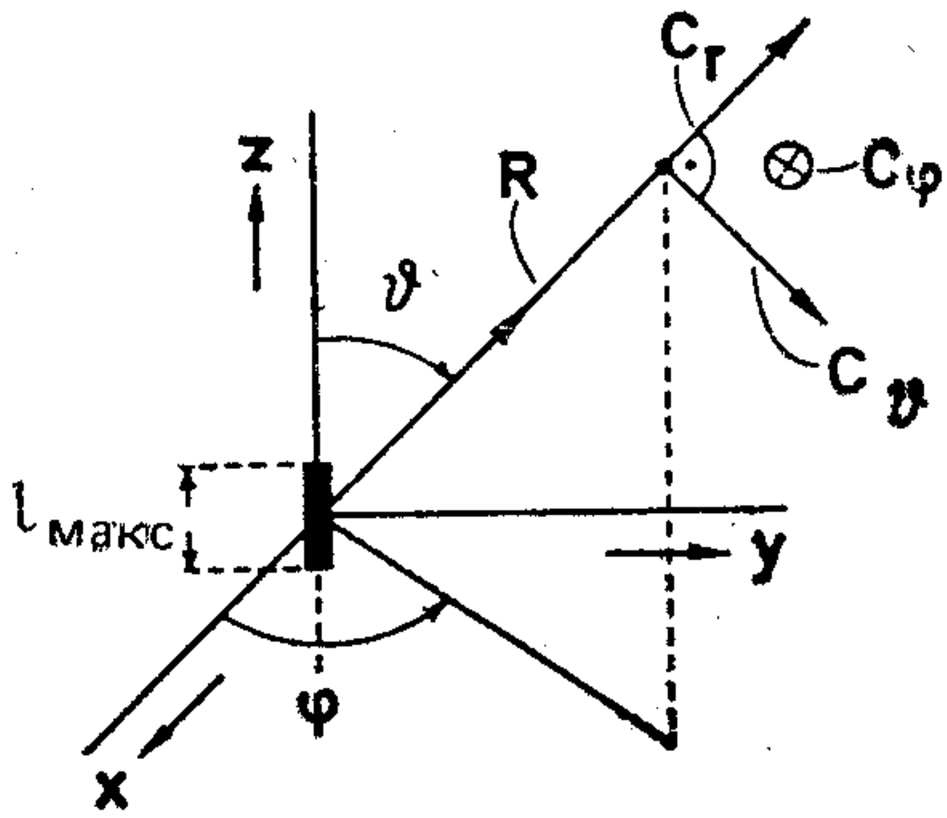


Рис. 3.1. Вычисление поля излучающего элементарного диполя.

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \tag{3.1.1}$$

$$t' = t - \frac{R}{c}, \tag{3.1.2}$$

c — скорость света. Дипольный момент равен

$$\mathbf{P}(t') = e\mathbf{l}(t') = e\mathbf{l}\left(t - \frac{R}{c}\right). \tag{3.1.3}$$

Начнем с того, что выпишем уравнения Максвелла в системе МКС:

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{3.1.4}$$

(закон Фарадея),

$$\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \tag{3.1.5}$$

(обобщенный закон Ампера для полей, изменяющихся в зависимости от времени),

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} \tag{3.1.6}$$

(закон Гаусса),

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{3.1.7}$$

(несуществование магнитных монополей),

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t} = 0 \tag{3.1.8}$$

(закон сохранения заряда),

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ измеряется в В/м, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в А/м, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ в Кл/м^2, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в Вб/м^2, $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ в А/м^2, $\rho(\mathbf{r}', t')$ в Кл/м^3,

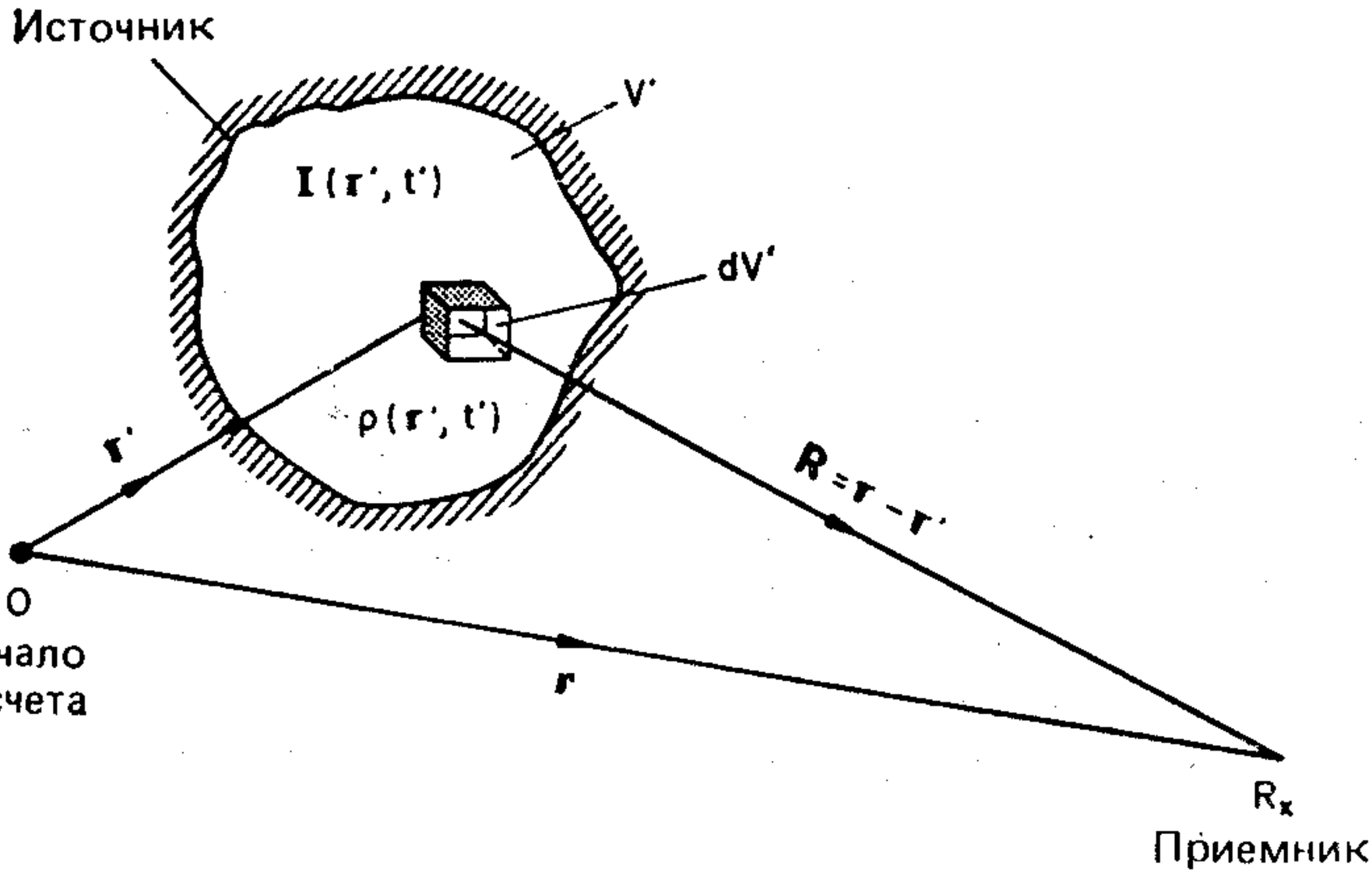


Рис. 3.2. Общая схема задачи об излучении.

μ_0 в Г/м и ε_0 в Ф/м. Общая задача, сформулированная выше, состоит в вычислении интенсивностей полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ по интенсивностям источников ($\mathbf{J}$, ρ) в среде с электрической постоянной ε_0 и магнитной постоянной μ_0 (в вакууме). Здесь

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \text{ — скорость света в вакууме,}$$

а символ

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}$$

относится к дивергенции, вычисленной в точке, где находится источник. Общая геометрия задачи для неэлементарного источника конечных размеров, занимающего объем V', показана на рис. 3.2.

Проще всего интенсивности источников можно вычислить с помощью потенциалов (скалярного и векторного). Например, уравнению (3.1.7) удовлетворяет

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.1.9}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал.

Подставляя $\mathbf{B}$ из соотношения (3.1.9) в (3.1.4), получаем

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0, \tag{3.1.10}$$

откуда

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = \pm \nabla \Phi, \tag{3.1.11}$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — любая скалярная функция (скалярный потенциал), или, если учесть, что в асимптотическом (электростатическом) случае $\partial/\partial t \to 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, то

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}. \tag{3.1.12}$$

Подставляя затем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ из (3.1.9), (3.1.12) в (3.1.5), получаем

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right). \tag{3.1.13}$$

С помощью калибровки Лоренца уравнение (3.1.13) можно разделить на два уравнения — для $\mathbf{A}$ и Φ соответственно. Запишем

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}, \tag{3.1.14}$$

тогда из уравнения (3.1.13) следует, что

$$\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 0, \tag{3.1.15}$$

или, если постоянную интегрирования положить равной нулю, то

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \tag{3.1.16}$$

Подставляя выражение для $\mathbf{E}$ из (3.1.12) в (3.1.6), получаем

$$\nabla^2\Phi + \nabla\cdot\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{3.1.17}$$

или, принимая во внимание соотношение (3.1.16),

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3.1.18}$$

Можно доказать, что калибровка Лоренца (3.1.16) совместима с уравнением (3.1.8) — законом сохранения заряда; следовательно, расщепление уравнения (3.1.13) на (3.1.15) и (3.1.16) правильно, но неоднозначность сохраняется. Но поскольку в нашей задаче $\mathbf{A}$ и Φ — «ненаблюдаемые», вспомогательные

функции, их неоднозначность несущественна. Мы всегда получим одни и те же **E** и **B**, если одновременно выполним преобразования

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \tag{3.1.19}$$

(где Ψ — *любая* скалярная функция) и

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial t}; \tag{3.1.20}$$

поэтому **E** и **B** остаются инвариантными относительно выбора потенциалов.

Общие решения уравнений (3.1.14) и (3.1.18) имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(t - R/c)}{R}\,dV', \tag{3.1.21}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(t - R/c)}{R}\,dV'. \tag{3.1.22}$$

Применим теперь эти результаты к примеру с элементарным диполем. Так как

$$\mathbf{p}(t') = e\mathbf{l}(t'), \tag{3.1.3}$$

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = \rho\frac{d\mathbf{l}}{dt}, \tag{3.1.23}$$

выражение для векторного потенциала (направленного вдоль оси z) принимает вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_{V'}\rho\frac{d\mathbf{l}}{dt}\,dV', \tag{3.1.24}$$

или, так как $d\mathbf{l}/dt$ не зависит от $\mathbf{r}'$ и $\int_{V'}\rho\,dV' = e$,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{3.1.25}$$

(заметим, что $\partial/\partial t' = \partial/\partial t$, поскольку $\partial R/\partial t = 0$).

Определим «вектор Герца» **Π** преобразованием

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi R}\mathbf{p}, \tag{3.1.26}$$

тогда

$$\mathbf{A} = \mu_0\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{3.1.27}$$

Из соотношения (3.1.27) и условия Лоренца (3.1.16) мы получаем для скалярного потенциала

$$\Phi = -\frac{\nabla\mathbf{\Pi}}{\varepsilon_0}. \tag{3.1.28}$$

Соотношения (3.1.9) и (3.1.12) позволяют непосредственно найти **E** и **B** (или **H**). Принимая во внимание, что вектор **П** направлен вдоль оси $\hat{\mathbf{z}}$, получаем следующие компоненты:

$$E_\varphi = H_r = H_\vartheta \equiv 0, \tag{3.1.29}$$

$$H_\varphi = -\frac{\sin\vartheta}{4\pi R}\left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial R} - \frac{\dot{p}}{R}\right), \tag{3.1.30}$$

$$E_r = \frac{\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} - \frac{2}{R}\frac{\partial p}{\partial R} + \frac{2p}{R^2} - \frac{\ddot{p}}{c^2}\right), \tag{3.1.31}$$

$$E_\vartheta = -\frac{\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial R} - \frac{p}{R^2} - \frac{\ddot{p}}{c^2}\right), \tag{3.1.32}$$

где p — величина дипольного момента.

Приведенное выше выражение допускает еще большее упрощение, если заметить, что

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\partial p}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial R} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\dot{p}}{c},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial R^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial t'^2}\frac{\partial t'}{\partial R} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\ddot{p}}{c^2};$$

окончательно мы приходим к формулам

$$H_\varphi = \frac{\sin\vartheta}{4\pi R}\left(\frac{\ddot{p}}{c} + \frac{\dot{p}}{R}\right), \tag{3.1.33}$$

$$E_r = \frac{\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{\dot{p}}{RC} + \frac{p}{R^2}\right), \tag{3.1.34}$$

$$E_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{\dot{p}}{Rc} + \frac{p}{R^2} + \frac{\ddot{p}}{c^2}\right), \tag{3.1.35}$$

Приведенные выше выражения точны, если $l_{\text{макс}} \ll R$, то есть справедливы для элементарного диполя вдали от источника.

Вектор Пойнтинга, задающий количество энергии, вытекающей за одну секунду через единичную площадку (Вт/м^2), равен

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}} E_r H_\varphi + \hat{\mathbf{r}} E_\vartheta H_\varphi = \mathbf{S}_\vartheta + \mathbf{S}_r, \tag{3.1.36}$$

поэтому в общем случае он имеет радиальную компоненту и компоненту, которая, если она отлична от нуля, обусловливает *перенос углового момента излучением.*

Посмотрим, как обстоит дело в случае элементарного диполя. Для большей определенности выберем гармонический осциллятор $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos\omega t$. Подставляя это соотношение (3.1.33) — (3.1.36), находим мгновенные составляющие вектора Пойнтинга. Чтобы провести различие между членами, соответствующими динамической энергии, запасенной в среде

(флуктуирующей от источника к наблюдателю и обратно с частотой ω), и членами, действительно соответствующими одностороннему переносу энергии *от источника к наблюдателю* (излучение), проинтегрируем обе части соотношения (3.1.36) по времени, взяв интеграл по целому числу периодов. Ясно, члены, соответствующие излучению, выдержат такое усреднение, т. е. дадут ненулевой результат. Оказывается, что имеется только *один* такой член, а именно часть компоненты E_ϑ

$$E_\vartheta \sim \frac{\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{\ddot{p}}{c^2}$$

и часть компоненты H_φ

$$H_\varphi \sim \frac{\sin\vartheta}{4\pi R}\frac{\ddot{p}}{c}.$$

Таким образом, в случае диполя угловой момент не переносится излучением. (Перенос углового момента излучением осуществляется в случае *мультиполюсных* источников: на этом основан принцип работы любого электрического мотора!)

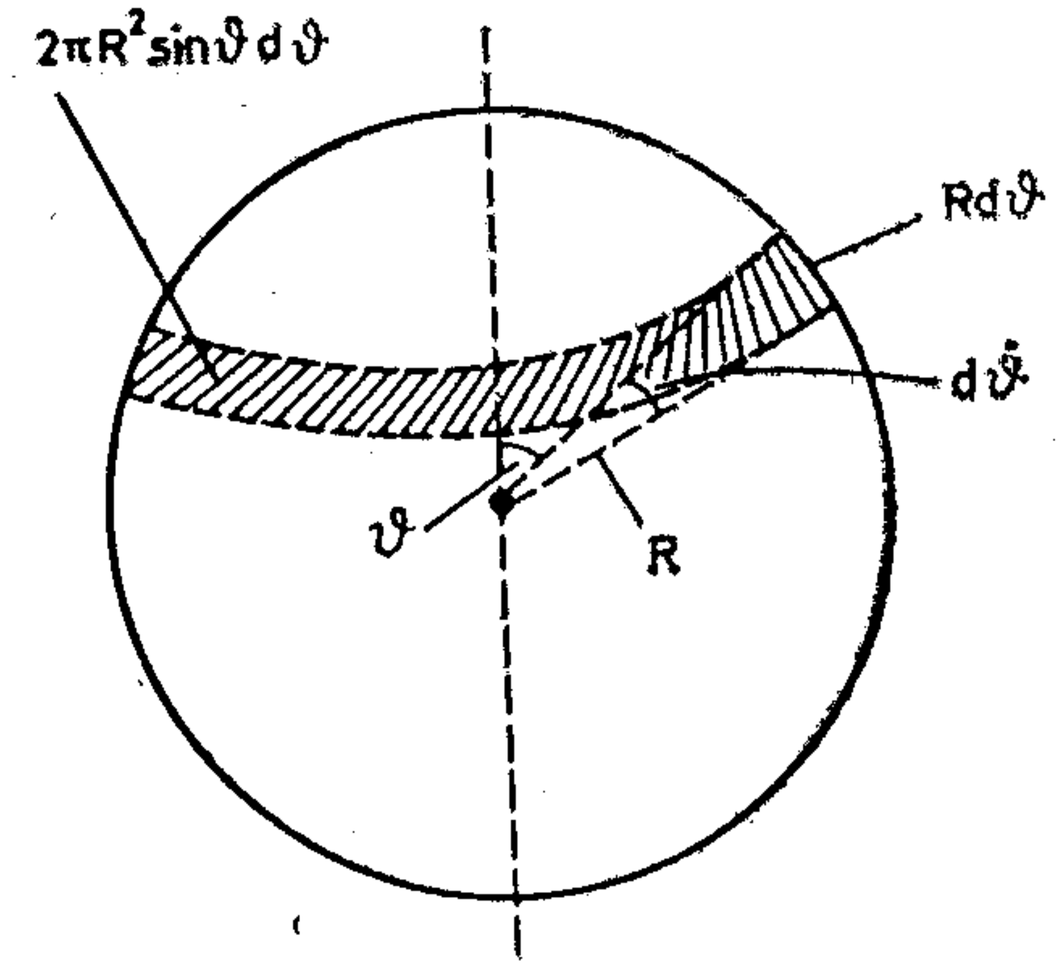


Рис. 3.3. Интегрирование по поверхности сферы радиуса R.

Плотность излученной энергии (в Вт/м^2) равна

$$S_r = \frac{\overline{\ddot{p}^2}\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 R^2 c^3} = \frac{e^2\overline{\dot{v}^2}\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 R^2 c^3}, \qquad (3.1.37)$$

а полную излученную энергию мы получим, проинтегрировав S_r по поверхности сферы радиуса R в пределах по ϑ от 0 до π (рис. 3.3):

$$S = \int_0^\pi \frac{e^2\overline{\dot{v}^2}\sin^2\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 R^2 c^3} 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (3.1.38а)$$

а так как

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3},$$

мы получаем

$$S = \frac{e^2\overline{\dot{v}^2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ \text{Вт}. \qquad (3.1.38б)$$

Такую энергию (в Дж/с) излучает электрон, двигающийся ускоренно в вакууме.

3.1.2. Понятие «самовоздействия»

Рассмотрим теперь более подробно те силы, под действием которых движется электрон. (Понятие диполя мы можем временно отбросить; положительный ион $+e$ будем считать «прибитым» в начале координат.) Потеря энергии на излучение должна компенсироваться потерей кинетической энергии движущегося электрона; следовательно, электрон замедляет свое движение, как если бы против него действовала внешняя сила $\mathbf{F}_S$, т. е. происходит затухание.

Силу $\mathbf{F}_S$ можно вычислить следующим образом: работа, производимая ею за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$, равна по абсолютной величине энергии, излученной за то же время. Поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{v}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\, \overline{\dot{v}^2}\, dt, \qquad (3.1.39а)$$

или, если воспользоваться соотношением

$$\dot{v}^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{v}\cdot\ddot{\mathbf{v}}$$

и подставить его в правую часть,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\, dt - \frac{e^2\,(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v})}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\Bigg|_{t_1}^{t_2}. \qquad (3.1.39б)$$

Не уменьшая общности, мы можем выбрать моменты времени t_1, t_2 так, чтобы (кинетическая) энергия электрона была одинаковой при $t = t_1$ и $t = t_2$. Тогда в эти моменты времени $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$, т. е. действующую силу, можно считать перпендикулярной мгновенной скорости и

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_S - \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}\right)\cdot\mathbf{v}\, dt = 0. \qquad (3.1.40)$$

Для того чтобы соотношение (3.1.40) выполнялось при любом dt, выражение в скобках должно быть равно нулю, т. е.

$$\mathbf{F}_S = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \qquad (3.1.41)$$

(при $v/c \ll 1$), или

$$\mathbf{F}_S = m\tau\dddot{\mathbf{x}}, \qquad (3.1.42)$$

где $\tau = e^2/6\pi\varepsilon_0 mc^2 \sim 6{,}3\cdot 10^{-24}$ с — характерная постоянная времени (см. ниже).

Здесь m — масса электрона, а $\mathbf{x}(t)$ — мгновенное положение частицы, поэтому движение электрона определяется уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \tau \dddot{x}, \tag{3.1.43}$$

если электрон осциллирует относительно центра с собственной частотой ω_0, или уравнением

$$\ddot{x} = \tau \dddot{x}, \tag{3.1.44}$$

если на движение электрона нет ограничений. Прежде чем мы перейдем к тонкостям силы $\mathbf{F}_S$ «самовоздействия», попытаемся найти для уравнения (3.1.43) решения вида $x \sim e^{-j\Omega t}$. Подставляя экспоненту в уравнение (3.1.43), получаем

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + j\tau\Omega^3 \sim \omega_0^2 + j\tau\omega_0^3, \tag{3.1.45}$$

так как $\Omega \sim \omega_0$ (потому, что коэффициент τ очень мал по сравнению с собственным периодом $T = 2\pi/\omega_0$, или $\omega_0\tau \ll 1$). Для большей части спектра электромагнитного излучения условие $\omega_0\tau \ll 1$ выполняется. Оно нарушается для космических и γ-лучей, которые не могут быть описаны уравнениями Максвелла. В результате мы получаем

$$\Omega \approx \pm\left(\omega_0 + \frac{1}{2} j\tau\omega_0^2\right). \tag{3.1.46}$$

$$x(t) \sim e^{-\tau\omega_0^2 t/2} e^{j\omega_0 t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{3.147}$$

$$x(t) = 0 \ \text{при} \ t < 0,$$

Спектр Фурье для $x(t)$ имеет вид

$$x(\omega) \approx \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\tau\omega_0^2 t/2} e^{j(\omega-\omega_0)t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{j(\omega_0-\omega) - (\tau\omega_0^2/2)}, \tag{3.1.48}$$

а спектр мощности

$$|x(\omega)|^2 \sim \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + (\tau^2\omega_0^4/4)}. \tag{3.1.49}$$

Этот спектр представлен на рис. 3.4. Энергия, излученная осциллирующим электроном, *никогда* не бывает монохроматической, а из-за силы самовоздействия обладает естественной шириной линии $\Delta\omega$ (на уровне половинной интенсивности).

Отношение $\Delta\omega/\omega_0^2 \sim \tau$ составляет около 10^{-24} с. Физический смысл величины τ состоит в следующем: τ — это время, за которое ЭМ волна проходит расстояние, равное радиусу электрона. (Разумеется, полученный результат применим к классическому электрону. Квантовомеханический подход незначительно

модифицирует форму спектра, нарушая его симметрию из-за учета спина электронов).

Выясним теперь подробнее природу силы самовоздействия (3.1.41). При более внимательном рассмотрении мы вынуждены признать, что перед нами самая настоящая сила. К такому выводу мы приходим прежде всего потому, что она всегда существует одновременно с ускорением частицы, которое затем затухает за счет реакции. В отличие от других сил в физике сила самовоздействия зависит от *второй* производной от скорости,

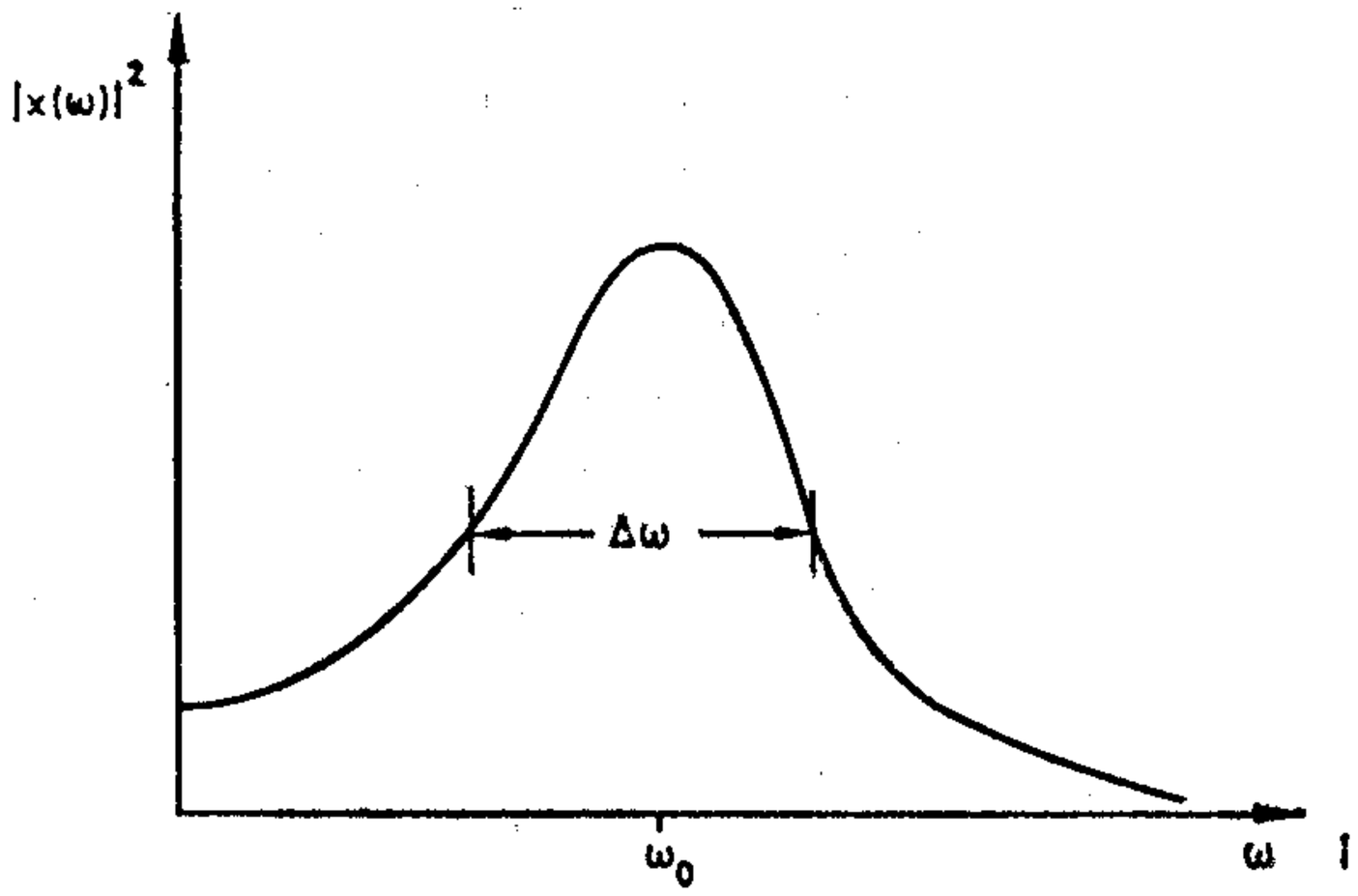


Рис. 3.4. Естественная ширина линии излучения классического диполя.

т. е. от скорости изменения ускорения. Задачи «нормальной» (ньютоновской) механики сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка (по времени), поэтому, для того чтобы получить единственное решение, достаточно задать положение и скорость частицы в любой момент времени. Но в нашем случае дифференциальное уравнение (3.1.43) — *третьего* порядка (содержит третью производную по времени), поэтому для однозначного определения траектории излучающей частицы необходимо помимо положения и скорости задать еще и *начальное ускорение.*

Итак, рассмотрим уравнение движения свободного электрона

$$\ddot{x} = \tau \dddot{x}$$

или

$$\dot{v} = \tau \ddot{v} \tag{3.1.50}$$

и попытаемся решить его, задавая *произвольное* начальное ускорение $\dot{v}_0 = \dot{v}(0)$. Уравнение (3.1.50) допускает *два* решения, а именно $\dot{v} = 0$ и $\dot{v} = \dot{v}(0)\, e^{t/\tau}$. Второе решение, известное под названием «убегающего», — постороннее, т. е. лишено

физического смысла, так как соответствует неограниченному «самоускорению», которое, если бы оно существовало, сделало бы все излучающие частицы неустойчивыми. Что можно сделать для того, чтобы избежать убегающих решений? Начнем с того, что запишем общее решение уравнения (3.1.43) в виде

$$\dot{v} = e^{t/\tau}\left[\dot{v}(0) - \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-t'/\tau} f_{\text{ext}}(t')\,dt'\right], \tag{3.1.51}$$

где f_{ext} учитывает не только восстанавливающую силу $\omega_0^2 x$, но и любую другую внешнюю силу, действующую на частицу.

Решение (3.1.51) было построено путем прибавления к общему решению однородного уравнения (3.1.50) частного решения неоднородного уравнения (3.1.43). Так как *произвольное* начальное ускорение $\dot{v}(0)$ приводит к убегающим решениям, Дирак много лет назад предложил избавляться от таких решений, выбирая *специальным образом* значение начального ускорения, а не оставляя его произвольным. Если положить

$$\dot{v}(0) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-t'/\tau} f_{\text{ext}}(t')\,dt', \tag{3.1.52}$$

то скорость v остается конечной при $t \to \infty$. При выборе начального ускорения (3.1.52) общее решение уравнений (3.1.43), (3.1.51) представимо в виде

$$\dot{v} = \int_0^\infty e^{-\rho} f_{\text{ext}}(t + \tau\rho)\,d\rho. \tag{3.1.53}$$

В этом случае движение частицы удовлетворяет интегродифференциальному уравнению; следовательно, ее поведение в любой момент времени t зависит от внешней силы, действующей во времена *более поздние*, чем t.

Если сообщить частице сосредоточенный импульс, например $f_{\text{ext}}(t) \sim A\delta(t)$, то

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= Ae^{t/\tau}, \quad t < 0, \\ \dot{v}(t) &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.1.54}$$

Таким образом, частица ускоряется до того, как к ней приложена сила, как бы в предвкушении приложения силы, в нарушение того, что мы называем понятием причинности.

Итак, подведем некоторые итоги. Убегающие решения, по-видимому, удается исключить только ценой введения режимов,

нарушающих причинность. То, что вследствие малости параметра временной масштаб такого поведения представляет более или менее «академический» интерес, не умаляет серьезности вызова, бросаемого акаузальным поведением наиболее излюбленным физическим понятиям.

3.1.3. Термодинамика электромагнитного излучения

Остроумная идея, предложенная Уилером и Фейнманом в 1945 г. [3.1], решает эту (классическую) проблему, устанавливая связь *электродинамики со статистической механикой.* В общих чертах теория Уилера — Фейнмана сводится к следующему. Уравнения Максвелла допускают симметричные, т. е. опережающие и запаздывающие, решения. Это свойство присуще не только электромагнитному, но и всем другим взаимодействиям в физике (кроме слабого взаимодействия). Тем не менее наблюдаемое электромагнитное излучение *асимметрично* зависит от времени, т. е. необратимо переносит энергию от источника излучения к наблюдателю (где излучение, переносимое когерентными сферическими волнами, рассеивается, превращаясь в тепло за счет порождаемой ими информации).

Встанем на точку зрения тех, кто никогда не наблюдал явления, связанные с излучением электромагнитных волн, и спросим, является ли вычисленная необратимость, выражаемая вектором Пойнтинга, неизбежным (и тривиальным) следствием того, что мы (умышленно) опустили в решении уравнения Максвелла опережающие члены, или она возникла бы и в том случае, если бы мы учли в своих вычислениях опережающие решения? Если бы оказалось, что она возникает и при учете опережающих решений, то нам пришлось бы связывать необратимость, выражаемую вектором Пойнтинга, не с (не существующей в действительности) асимметрией основополагающих законов динамики, а с *внешней* асимметрией, привносимой граничными условиями (как в случае статистической динамики).

В самом деле, конечная замкнутая система взаимодействующих частиц имеет много общего с конечной замкнутой системой *интерферирующих* волн. Интерференция волн аналогична столкновениям молекул газа. Переход от геометрии простых сферических волн (исходящих, например, от той точки на поверхности озера, куда упал брошенный нами камень) к сложному распределению вторичных волн, некогерентно отраженных от нерегулярной границы берега, напоминает переход газа от сильно дифференцированного распределения (с малой энтропией) к полностью однородному состоянию (с максимальной энтропией) в результате столкновений молекул газа между собой и их отражений от стенок полости — отражений, быстро

разрушающих любые начальные кросс-корреляции или когерентность скоростей отдельных молекул. Для того чтобы сделать следующий шаг в рассуждениях, воспользуемся гипотезой, высказанной в 1924 г. немецким физиком Тетроде и принятой Уилером и Фейнманом [3.1]: для того чтобы объяснить природу силы самовоздействия, возникающей одновременно с ускорением, необходимо отказаться от представления об электромагнитном излучении как об элементарном процессе. Вместо этого необходимо попытаться описать его как *коллективное свойство* большого числа взаимодействий между частицами рассматриваемого источника и частицами «поглотителя», т. е. замкнутого ящика конечных размеров, в котором заключен источник. Конкретно принятые Уилером и Фейнманом постулаты сводятся к следующему.

1. Точечный заряд, движущийся с ускорением в пространстве, свободном от других зарядов, *не излучает* электромагнитную энергию.
2. Поля, действующие на данную частицу, возникают только от других частиц.
3. Эти поля представимы в виде полусуммы опережающего и запаздывающего уравнений Максвелла.

Предположим, что источник излучения (частица) заключен в идеальный поглотитель, т. е. в ящик с абсолютно непрозрачными стенками (хотя эти стенки и состоят из частиц, аналогичных излучающей частице). В некоторый данный момент времени t излучающая частица-источник испускает волну. Через некоторое время она достигает частиц поглотителя, после чего каждая из них приходит в (нерелятивистское) движение и реагирует на это, испуская волну, представляющую собой полусумму опережающей и запаздывающей волн. Наконец, для упрощения вычислений мы будем предполагать, что частицы поглотителя расположены далеко друг от друга и поэтому каждая частица «видит» любую другую частицу как «элементарный» источник. Начнем с рассмотрения реакции характерного заряда в поглотителе на возмущение источника, который вследствие столкновения с третьей частицей или по какой-нибудь другой причине приобретает ускорение $\dot{v}$.

Пусть R_K — расстояние между источником и частицей поглотителя. Обобщенное возмущение от источника преодолевает это расстояние и вызывает реакцию с запозданием на R_K/c секунд. Электрическое поле, действующее на частицу поглотителя, есть величина порядка

$$\sim -\frac{e\dot{v}}{R_K c^2}\sin\vartheta_K, \tag{3.1.55}$$

где ϑ_K — угол между $\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{R}_K$.

Пусть e_K и m_K — заряд и масса частицы поглотителя. В поле (3.1.55) такая частица приобретает ускорение $\dot{v}_K$, равное

$$\sim \frac{e_K}{m_K}\left(-\frac{e\dot{v}}{R_K c^2}\sin\vartheta_K\right)\sim -\frac{ee_K\dot{v}}{R_K m_K c^2}\sin\vartheta_K. \qquad (3.1.56)$$

Последующее движение частицы поглотителя порождает поле, представляющее собой полусумму *опережающего* и *запаздывающего* полей. Опережающая составляющая этого поля создает силу, действующую на источник *одновременно* с первональным ускорением. Создаваемая полем вдали от источника компонента этой реактивной силы в направлении ускорения равна

$$-e\left(\frac{e_K\dot{v}_K}{2R_K c^2}\right)\sin\vartheta_K, \qquad (3.1.57)$$

или после подстановки $\dot{v}_K$ из (3.1.56)

$$\frac{\dot{v}e^2}{2c^4}\left(\frac{e_K^2}{m_K R_K^2}\right)\sin^2\vartheta_K. \qquad (3.1.58)$$

Формула (3.1.58), задающая величину реактивной силы, действующей на источник от одной частицы поглотителя, позволяет вычислить суммарный эффект, создаваемый многими частицами. Пусть N — число частиц поглотителя на единицу объема. Тогда число частиц в сферической оболочке (окружающей источник) толщины dr_K равно $4\pi N r_K^2 dr_K$. Проинтегрировав выражение (3.1.58) по объему сферы радиуса R_K с элементарным объемом $2\pi R_K^2 \sin\vartheta_K d\vartheta_K dR_K$, получим

$$\int_0^{R_K}\int_0^{\pi}\frac{\dot{v}e^2}{2c^4}\frac{e_K^2}{m_K R_K^2}\sin^2\vartheta_K N 2\pi R_K^2\sin\vartheta_K dR_K d\vartheta_K =$$

$$=\left(\frac{2\dot{v}e^2}{3c^3}\right)\left(\frac{2\pi N e_K^2}{m_K c}\right)R_K. \qquad (3.1.59)$$

В таком виде это выражение *не согласуется* с выражением для силы самовоздействия (3.1.41).

В ходе приведенных выше вычислений нам не удалось оценить *фазовые соотношения* между отдельными элементарными опережающими реакциями, действующими на источник. Действительно, существует сдвиг (отставание) по фазе между излучением, испускаемым источником, и возвращающейся к источнику реакцией, который мы в своих расчетах не принимали во внимание.

Опережающая сила, действующая на источник из-за движения частицы поглотителя, есть *элементарное* взаимодействие между *двумя* зарядами и распространяется со скоростью света в вакууме. С другой стороны, возмущение, которое исходит от источника и определяет движение рассматриваемой частицы, состоит не только из собственного поля первоначально ускоренного заряда, но и из вторичных полей, порождаемых в материале поглотителя. *Элементарные* взаимодействия распространяются, конечно, со скоростью света, но сложное — коллективное — возмущение распространяется с фазовой скоростью c/n, где n (показатель преломления) — коллективное макроскопическое свойство среды. (Вывод формулы для показателя преломления n см. в разд. 3.2, где рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн в дисперсионных средах с потерями.)

Чтобы понять, как изменяется фазовая скорость возмущения, необходимо рассмотреть отдельную компоненту Фурье ускорения. Ускорение мы с полным основанием («вполне законно») можем разложить на спектральные компоненты и, решив задачу для одной из них, восстановить соответствующие компоненты Фурье реакции излучения (связь между ускорением и излучением линейна).

Итак, первичное ускорение (т. е. ускорение источника) изменяется по закону $\dot{v} = v_0 e^{-j\omega t}$. При распространении возмущения частоты в среде с малой плотностью показатель преломления определяется выражением

$$n^2 \approx 1 - \frac{4\pi N e_K^2}{m_K \omega^2}. \tag{3.1.60}$$

Следовательно, фаза реакции излучения, достигающей источника на расстоянии R_K от поглотителя, *отстает* от фазы ускорения на величину

$$\omega\left(\frac{R_K}{c} - \frac{nR_K}{c}\right) = \frac{2\pi N e_K^2}{m_K c\omega} R_K = \Phi_K. \tag{3.1.61}$$

Подставляя эту поправку к фазе в выражение (3.1.59) для вклада поглотителя в интервале от R_K до $R_K + dR_K$ и суммируя по всем глубинам в среде, мы получаем полную силу реакции

$$\frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}\int_0^\infty \left(\frac{2\pi N e_K^2}{m_K c}\right)\exp\left[-jR_K\left(2\pi N e_K^2/m_k c\omega\right)\right] dR_K. \tag{3.1.62}$$

Если допустить существование малого, но конечного поглощения в среде, то интеграл (3.1.62) сходится при бесконечном

верхнем пределе, и в результате мы находим полную реакцию, действующую на источник со стороны опережающих полей от всех частиц поглотителя:

$$\sim \frac{2e^2}{3c^3}(-j\omega\dot{v}) = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v}. \qquad (3.1.63)$$

Именно это выражение и задает силу самовоздействия в гауссовых единицах. Таким образом, сила самовоздействия возникает не от прямого действия источника на себя, а от *коллективного свойства* — опережающего действия на источник «будущего» движения частиц поглотителя.

До сих пор мы занимались суммированием элементарных опережающих полей, создаваемых частицами поглощающей среды, в точке, где находится источник. Нам остается провести аналогичные вычисления для точек, расположенных *вне* источника. Но, поскольку эти вычисления слишком сложны, мы опустим их и приведем непосредственно лишь окончательный результат, полученный в рамках теории Фейнмана — Уилера. Оказывается, что сумма опережающих полей от всех частиц поглотителя в любой точке вне источника дает поле, в точности равное полуразности запаздывающего поля от источника и опережающего поля от источника, поэтому опережающее поле от источника *полностью* компенсируется опережающим полем от поглотителя (все опережающие поля гасят друг друга за счет ослабляющей интерференции), а запаздывающие поля в сумме дают в любой точке пространства полную *запаздывающую макроскопическую волну* — в соответствии с наблюдениями.

Резюмируя, можно сказать, что эффекты, связанные с опережающими полями, проявляются только в силе реакции излучения. Таким образом, мы приходим к выводу, что электромагнитная стрела времени имеет, по-видимому, такое же происхождение, как и термодинамическая стрела времени, а именно обусловлена *внешней* асимметрией граничных условий. Напрашивающийся вопрос о том, является ли физическая *расширяющаяся Вселенная* идеальным поглотителем, остается без ответа. А пока определенным ответом мы не располагаем, соблазнительно думать, что не следует априори исключать волны из «будущего»!

3.2. Распространение электромагнитных волн в дисперсионных средах и средах с потерями

Запишем уравнение движения заряженной частицы под действием падающей электромагнитной волны вместе с уравне-

ниями Максвелла:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \nu\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.2.1}$$

$$\mu_0\dot{\mathbf{H}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{3.2.2}$$

$$\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{p}} = \nabla \times \mathbf{H}, \tag{3.2.3}$$

где $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$ — скорость частицы, движущейся под действием силы Лоренца [правая часть уравнения (3.2.1), $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$] и испытывающей действие восстанавливающей силы $\omega_0^2\mathbf{x}$ (если среда не ионизована) и диссипативной силы $\nu\mathbf{x}$ вследствие столкновений, претерпеваемых частицей с соседними частицами. Вектор поляризации можно представить в виде $\mathbf{P} = Ne\mathbf{x}$ (модуль его равен числу дипольных моментов, индуцированных в единице объема), N — число частиц в единице объема дисперсионной среды. Среда считается однородной и изотропной. Нелинейный член $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, входящий в выражение для силы Лоренца, можно опустить, если принять во внимание, что под компонентами электромагнитного поля мы понимаем его компоненты в дальней зоне, поэтому

$$\mathbf{H}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_\vartheta,$$

$$\mathbf{B}_\varphi = \frac{1}{c}\mathbf{E}_\vartheta,$$

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\varphi| \leqslant \left|\frac{v}{c}\mathbf{E}_\vartheta\right|.$$

Ясно, что при $v/c \ll 1$ членом vE_ϑ/c можно пренебречь по сравнению с членом E_ϑ, а именно с таким случаем мы и имеем здесь дело. Запишем линейное уравнение (3.2.1) еще раз, выразив его левую часть через вектор поляризации $\mathbf{P}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu\frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2\right)\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}. \tag{3.2.4}$$

Применяя к правой и левой частям уравнения (3.2.2) оператор $\nabla\times$, а к левой и правой частям уравнения (3.2.3) — оператор $\mu_0\partial/\partial t$ и складывая их, мы исключаем $\mathbf{H}$, т. е. получаем

$$\varepsilon_0\mu_0\ddot{\mathbf{E}} + \mu_0\ddot{\mathbf{P}} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla^2\mathbf{E} \tag{3.2.5}$$

(так как в отсутствие источников в среде $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$).

Уравнение, содержащее только E, мы получим, подействовав оператором $-\mu_0\partial^2/\partial t^2$ на обе части уравнения (3.2.4), оператором $(\partial^2/\partial t^2 + \nu\partial/\partial t + \omega_0^2)$ на обе части уравнения (3.2.5) и сложив

то, что при этом получится:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nu\frac{\partial}{\partial t}+\omega_0^2\right)\left(\frac{1}{c^2}\ddot{E}-\nabla^2 E\right)+\frac{\mu_0 N e^2}{m}\ddot{E}=0. \quad (3.2.6)$$

Нас интересует гармоническое решение $E\sim A\exp[j(Kx-\omega t)]$, т. е. распространение плоских гармонических волн, например, вдоль оси x, K — волновое число.

Подставляя это выражение для E в уравнение (3.2.6), мы, наконец, получаем соотношение между ω и K, известное под названием дисперсионного соотношения:

$$(-\omega^2+\omega_0^2-j\nu\omega)\left(-\frac{\omega^2}{c^2}+K^2\right)=\frac{\mu_0 N e^2}{m}\omega^2,$$

или

$$K^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{\mu_0 c^2\,(Ne^2/m)}{\omega_0^2-\omega^2-j\nu\omega}\right); \quad (3.2.7)$$

в терминах показателя преломления $n=cK/\omega$ дисперсионное соотношение имеет вид

$$n^2=1+\frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2-\omega^2-j\nu\omega}. \quad (3.2.8)$$

Для полностью ионизованной среды (т. е. для среды, состоящей из свободных зарядов) без потерь $\omega_0=0$ и $\nu=0$, поэтому показатель преломления определяется выражением

$$n^2=1-\frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{\omega^2}=1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2}, \quad (3.2.9)$$

где ω_e — плазменная частота, т. е. частота продольных волн, возбуждаемых в ионизованной среде. Уравнение (3.2.9) — то самое, которое мы использовали (в гауссовых единицах), излагая в разд. 3.1.3 теорию Фейнмана — Уилера.

В дисперсионной среде, характеризуемой нелинейной функцией $\omega=f(K)$ (если эта функция линейна, то среда — просто вакуум), скорость распространения энергии (групповая скорость) отличается от скорости распространения фазы (фазовой скорости). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим распространяющуюся в среде полихроматическую волну (импульс)

$$\Psi=\int A(K)\,e^{jKx-j\omega t}\,dK, \quad (3.2.10)$$

где $A(K)$ — амплитуда спектра при волновом числе K. Пусть K_0 — среднее значение распределения K в спектре волнового пакета. Разложим дисперсионное соотношение $\omega=f(K)$ в

окрестности опорной точки ω_0, K_0:

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial K}\right)_{K_0} K' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial K^2}\right)_{K_0} K'^2 + \ldots, \qquad (3.2.11)$$

где $K' = K - K_0$ и $\omega_0 = f(K_0)$. Подставляя разложение (3.2.11) в правую часть формулы (3.2.10), получаем

$$\Psi = \exp[j(K_0 x - \omega_0 t)]\, M(x, t), \qquad (3.2.12)$$

где

$$M(x, t) = \int A(K) \exp\left\{ jK' \left[x - \left(\frac{\partial\omega}{\partial K}\right)_{K_0} t - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial K^2}\right)_{K_0} K' t - \ldots \right] \right\} dK. \qquad (3.2.13)$$

Если дисперсионное соотношение (как это обычно бывает) задано гладкой функцией, то старшие производные (начиная с $\partial^2\omega/\partial K^2$) можно опустить. В результате мы получаем

$$M(x, t) \approx \int A(K) \exp\left\{ jK' \left[x - \left(\frac{\partial\omega}{\partial K}\right)_{K_0} t \right] \right\} dK. \qquad (3.2.14)$$

Это означает, что амплитуда или энергия волнового пакета распространяется со скоростью

$$v_{gr} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial K}\right)_{K_0}, \qquad (3.2.15)$$

в то время как соответствующая фазовая скорость равна

$$v_{ph} = \left(\frac{\omega}{K}\right)_{K_0}. \qquad (3.2.16)$$

Из рис. 3.5 ясно, что групповая скорость v_{gr} (которая в отличие от v_{ph} не может превышать скорость света c) может изменяться в широких пределах относительно v_{ph}.

Интересен (хотя и редко встречается) случай, когда в дисперсионном соотношении вслед за горбом идет участок с отрицательным наклоном, — групповая скорость становится «отрицательной». Что это означает? То, что v_{gr} и v_{ph} направлены в противоположные стороны. Тем не менее, поскольку энергия, как мы уже знаем, *всегда* переходит *от источника к* внешнему *поглотителю,* в среде с такой дисперсионной ветвью фазовые фронты не распространяются от источника, а со временем коллапсируют к источнику. В таком поведении ничего «нефизического» нет, так как фазовая скорость является чисто геометрической характеристикой.

Приближенное выражение (3.2.15), выведенное нами для групповой скорости, нарушается не только для негладких дисперсионных соотношений, но и в случае среды с потерями, т. е.

среды с конечной проводимостью, в форме свободных зарядов (Проводящую среду следует отличать от диэлектрика с потерями: в случае диэлектрика потери обусловлены столкновениями между связанными атомами, а не столкновениями между атомами и свободными зарядами.) Форма, которую приобретает в проводящих средах групповая скорость, не представляет сейчас для нас интереса. Мы сосредоточим свое внимание на некоторых новых (и неожиданных) характеристиках волны, рас-

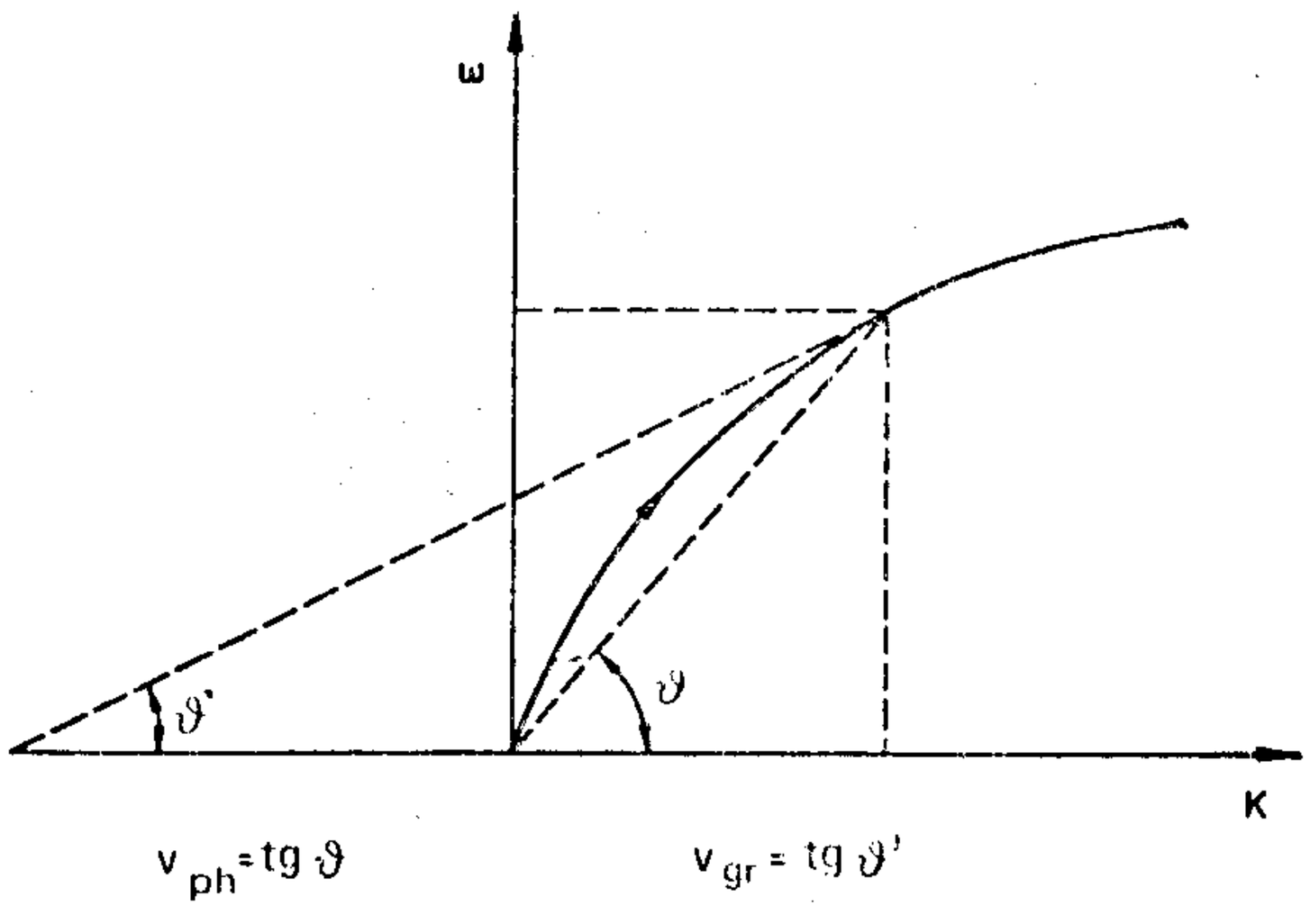


Рис. 3.5. Фазовая скорость (v_{ph}) и групповая скорость (v_{gr}), найденные по дисперсионной кривой слабо диспергирующей недиссипативной среды.

пространяющейся в (проводящей) среде с потерями; эти характеристики послужат наиболее подходящим введением в круг проблем, который мы намереваемся рассмотреть далее, а именно спектральное разложение сферической волны.

Итак, исследуем характер процесса распространения электромагнитных волн в проводящей среде, в которой распространяющееся электрическое поле **E** порождает плотность тока **J** [А/м^2], $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, σ — электропроводность среды.

Прежде всего выпишем полную систему уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.2.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{3.2.18}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{3.2.19}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{3.2.20}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3.2.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3.2.22}$$

Из уравнений (3.2.17), (3.2.18) и (3.2.19), (3.2.20) следует, что

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right), \tag{3.2.23}$$

или, с учетом того что $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon$ и $\varepsilon\mu = (1/v_{\text{ph}})^2$,

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right). \tag{3.2.24}$$

В среде, свободной от источников ($\rho = 0$), но проводящей ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$), уравнение (3.2.24) принимает вид

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; \tag{3.2.25}$$

при гармоническом линейном возбуждении $E \sim e^{-j\omega t}$, следовательно, $\mathbf{J} \sim e^{-j\omega t}$. Таким образом, уравнение (3.2.25) переходит в

$$\nabla^2\mathbf{E} + K_0^2\mathbf{E} = -j\mu\omega\mathbf{J}, \tag{3.2.26}$$

а так как $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ и $K_0 = \omega/v_{\text{ph}} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$,

$$\nabla^2\mathbf{E} + \left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\mu}\right)K_0^2\mathbf{E} = 0, \tag{3.2.27}$$

или

$$\nabla^2\mathbf{E} + K^2\mathbf{E} = 0, \tag{3.2.28}$$

где

$$K = K_0\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} = K_0\sqrt{1 + js}, \tag{3.2.29}$$

$s = \sigma/\varepsilon\omega$. Следовательно, проводящая среда *с необходимостью* является дисперсионной.

Решение уравнений (3.2.27) или (3.2.28) имеет вид

$$E(x, y, z, t) = E(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp[j(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \\ = E_0 \exp[j(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)], \tag{3.2.30}$$

где $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$.

Пусть $K_x = K_x' + jK_x''$, $K_y = K_y' + jK_y''$, $K_z = K_z' + jK_z''$ и

$$K = K' + jK'' = K_0\sqrt{1 + js}. \tag{3.2.31}$$

Из последнего соотношения мы вычисляем значения K', K'', решая систему

$$K'^2 - K''^2 = K_0^2, \tag{3.2.32}$$

$$K'K'' = \frac{K_0^2 s}{2},$$

или

$$K' = \frac{K_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{1 + s^2}\right)^{1/2}, \tag{3.2.33}$$

$$K'' = \frac{K_0}{\sqrt{2}}\left(-1 + \sqrt{1 + s^2}\right)^{1/2}. \tag{3.2.34}$$

Если кто-нибудь склонен отождествить K' и K'' соответственно с волновым числом и коэффициентом поглощения волны в среде, то мы хотели бы предупредить, что подобное предположение ошибочно по следующей причине.

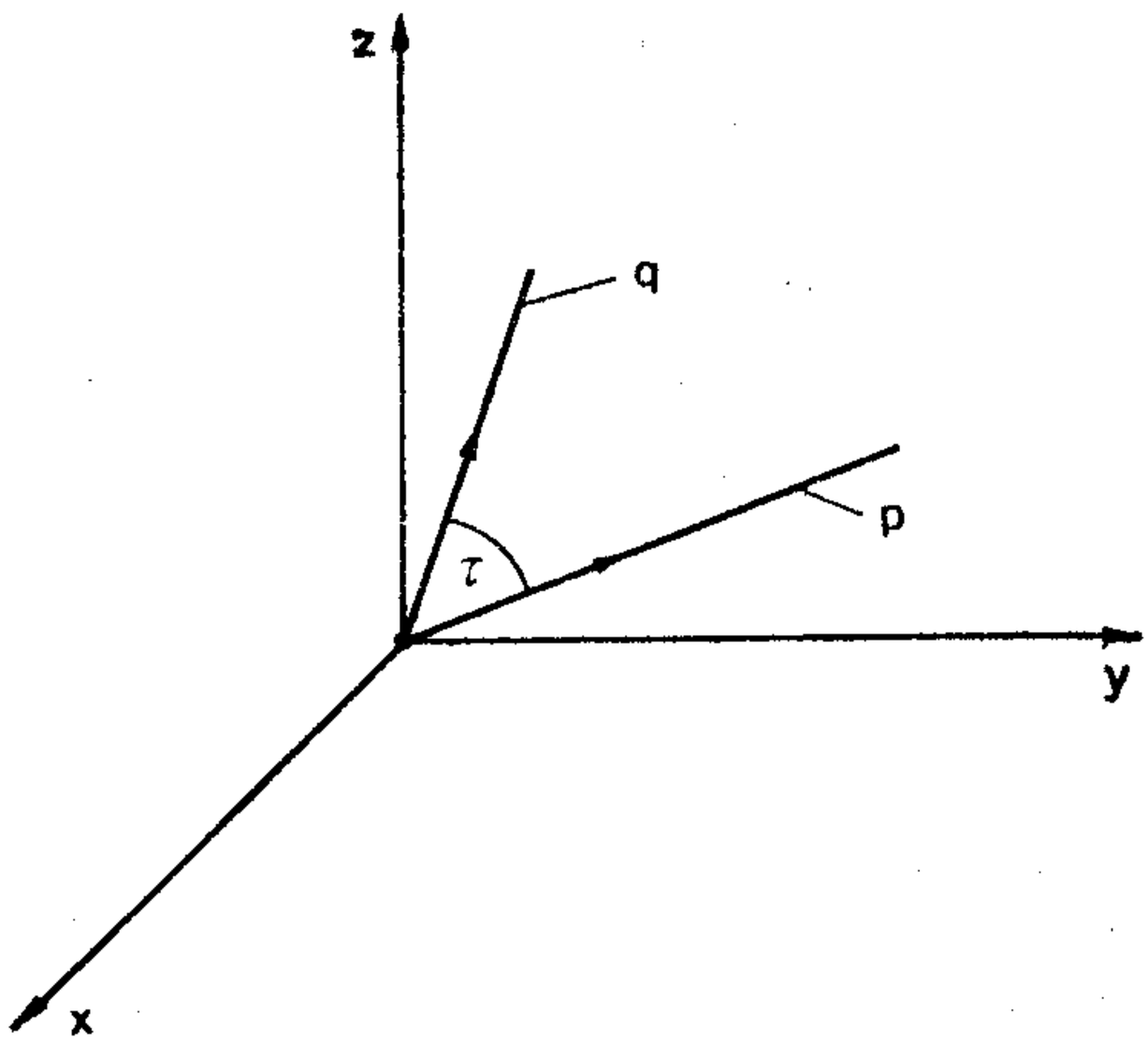


Рис. 3.6. Фазовый вектор (**q**) и вектор затухания (**p**) в диссипативной (проводящей) среде.

Определим два вектора $\mathbf{q}(K'_x, K'_y, K'_z)$ и $\mathbf{p}(K''_x, K''_y, K''_z)$, координаты которых являются соответственно вещественными и мнимыми частями координат K_x, K_y, K_z. Если α', β', γ' — направляющие косинусы вектора **q** и α'', β'', γ'' — направляющие косинусы вектора **p** (рис. 3.6), то

$$K'_x = q\alpha', \quad K''_x = p\alpha'',$$
$$K'_y = q\beta', \quad K''_y = p\beta'',$$
$$K'_z = q\gamma', \quad K''_z = p\gamma''.$$

и, следовательно,

$$K^2 = (K' + jK'')^2 = K'^2 - K''^2 + 2jK'K'' =$$
$$= K'^2_x - K''^2_x + K'^2_y - K''^2_y + K'^2_z - K''^2_z +$$
$$+ 2j\left(K'_xK''_x + K'_yK''_y + K'_zK''_z\right) =$$
$$= q^2 - p^2 + 2jpq\left(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''\right) = q^2 - p^2 + 2jpq\cos\tau, \tag{3.2.35}$$

где τ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$; из этих соотношений мы получаем

$$q^2 - p^2 = K'^2 - K''^2,$$
$$pq\cos\tau = K'K''. \tag{3.2.36}$$

При $\tau \neq \pi/2$ из соотношений (3.2.26) следует, что

$$q = \frac{K_0}{\sqrt{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{\cos^2\tau}}\right]^{1/2},$$
$$p = \frac{K_0}{\sqrt{2}}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{s^2}{\cos^2\tau}}\right]^{1/2}. \tag{3.2.37}$$

Здесь q совпадает с K', а p с K'' *только* при $\tau = 0$. Решение уравнения (3.2.28) теперь имеет вид

$$E(x, y, z, t) = E_0 \exp[j(K_x x + K_y y + K_z z) - j\omega t] =$$
$$= E_0 \exp[jq(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)] \exp[-p(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)] \exp[(-j\omega t)],$$

или

$$E(\mathbf{r}, t) = \exp[j(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)] \exp[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}]. \tag{3.2.38}$$

Смысл векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ясен: $|\mathbf{q}|$ есть волновое число, а $|\mathbf{p}|$ — коэффициент поглощения волны в проводящей среде. Необходимо, однако, подчеркнуть, что вектор $\mathbf{q}$, вдоль которого происходит быстрейшее изменение фазы, *не совпадает* с направлением вектора $\mathbf{p}$, вдоль которого происходит быстрейшее убывание амплитуды. Чему равен угол τ? Чтобы найти его, нам необходимо еще одно уравнение: из соотношения (3.2.37) и этого дополнительного уравнения значения q, p, τ должны определяться однозначно. Третье уравнение мы получаем из граничного условия, а именно из того, как плоская однолучевая волна падает из вакуума на проводящую среду и *разделяется на два луча* $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ (рис. 3.7).

Выражения для падающей, отраженной и проходящей волн имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}_i \sim \mathbf{E}_{0_i} \exp[jK_0(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z)], \quad z > 0, \tag{3.2.39}$$

$$\mathbf{E}_r \sim \mathbf{E}_{0_r} \exp[jK_0(\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z)], \quad z > 0 \tag{3.2.40}$$

и

$$\mathbf{E}_t \sim \mathbf{E}_{0_t} \exp[jq(\alpha_t' x + \beta_t' y + \gamma_t' z)] \exp[-p(\alpha_t'' x + \beta_t'' y + \gamma_t'' z)], \quad z < 0, \tag{3.2.41}$$

где $(\alpha, \beta, \gamma)_{i,\,r,\,t}$ — направляющие косинусы соответственно для падающей, отраженной и прошедшей волн; общий множитель $e^{-j\omega t}$ во всех выражениях (3.2.39)—(3.2.41) опущен.

Из условия непрерывности для фазы падающей и проходящей волны на границе $z = 0$ при любых x и y следует, что

$$K_0\alpha_i = q\alpha_t' + jp\alpha_t'', \tag{3.2.42}$$

$$K_0\beta_i = q\beta_t' + jp\beta_t'', \tag{3.2.43}$$

т. е.

$$\alpha_t'' = \beta_t'' = 0, \tag{3.2.44}$$

поэтому

$$\gamma_{tk}'' = \pm 1,$$

и мы выбираем

$$\gamma_t'' = -1, \tag{3.2.45}$$

так как $E_t \to 0$ при $z \to -\infty$.

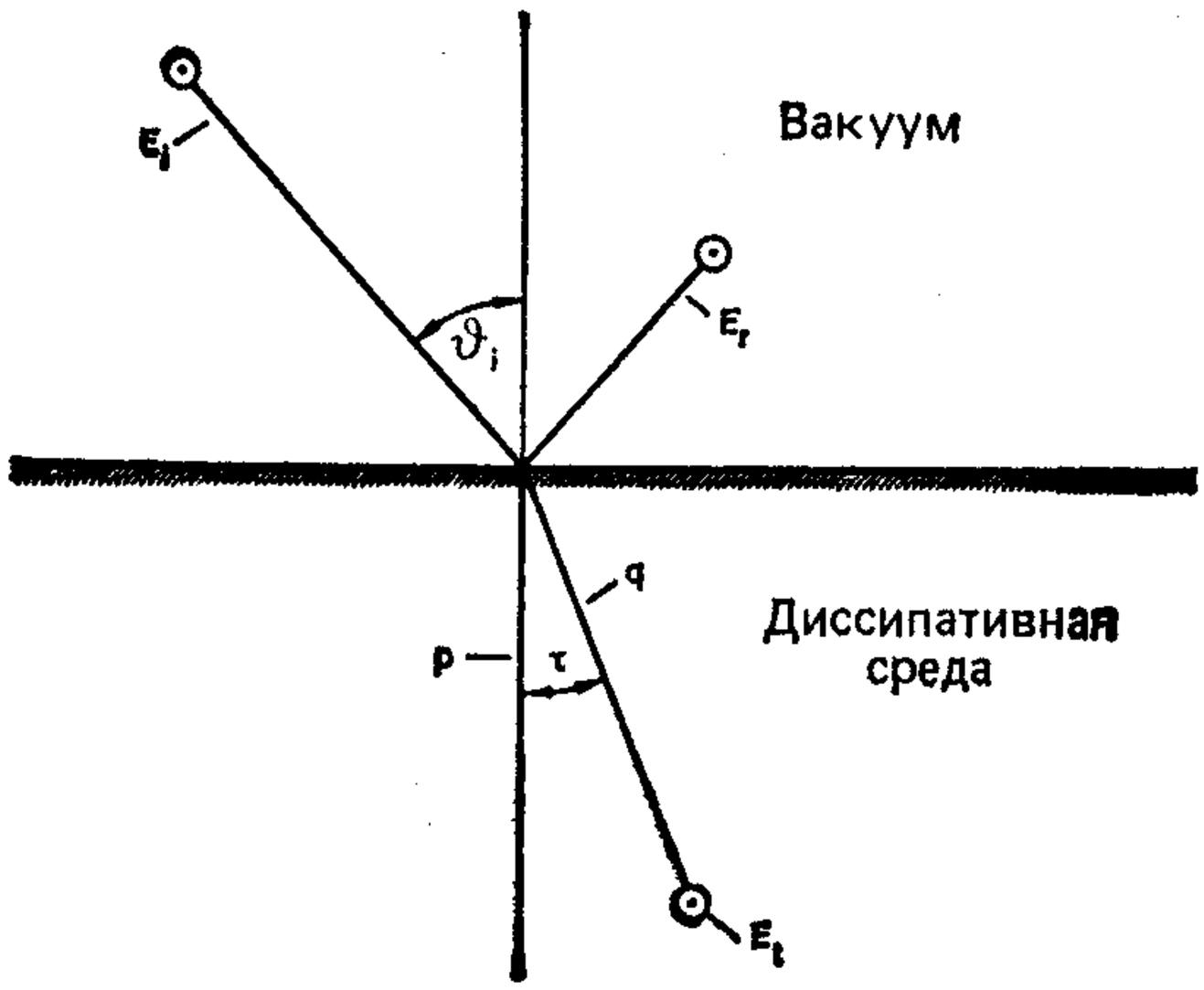


Рис. 3.7. Прохождение плоской волны из вакуума в проводящую среду.

Из фазовых соотношений (3.2.42), (3.2.43) получаем

$$K_0\alpha_i = q\alpha_t',$$

$$K_0\beta_i = q\beta_t',$$

или

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\beta_t'}{\alpha_t'}; \tag{3.2.46}$$

вследствие симметрии падающей плоской волны должны выполняться равенства $\beta_i = \beta_t' = \beta_r = 0$, поэтому соотношения

(3.2.39) — (3.2.41) переходят в соотношения

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0_i} \exp\left[jK_0(\alpha_i x + \gamma_i z)\right], \quad z > 0, \tag{3.2.47}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0_r} \exp\left[jK_0(\alpha_i x - \gamma_i z)\right], \quad z > 0, \tag{3.2.48}$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0_t} \exp\left[jq(\alpha_t' x + \gamma_t' z)\right] \exp(pz), \quad z < 0. \tag{3.2.49}$$

Следовательно, вектор $\mathbf{p}$ всегда направлен вдоль оси $-z$ и

$$\cos\tau = \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}}{qp} = -\frac{\mathbf{q}\gamma_t' p}{qp} = -\gamma_t',$$

и, так как $\alpha_t'^2 + \gamma_t'^2 = 1$,

$$\gamma_t' = -\sqrt{1-\alpha_t'^2}$$

с учетом того, что $q\alpha_t' = K_0\alpha_i = -K_0\cos\tau$ и $\alpha_t' = -K_0\sin\theta/q$, мы получаем также соотношение

$$\cos\tau = \sqrt{1-\left(\frac{K_0\sin\vartheta}{q}\right)^2}, \tag{3.2.50}$$

где по закону преломления Снелла $\sin\vartheta = (q\sin\vartheta_t)/K_0$.

Таким образом, направление вектора $\mathbf{q}$ совпадает с направлением преломленного луча. Соотношения (3.2.37), (3.2.50) дают полное решение задачи о распространении волны в проводящей среде.

Теперь мы подходим к самому важному пункту в наших вычислениях. Пусть $\sigma \to 0$. Тогда система (3.2.36) переходит в систему

$$\begin{aligned} q^2 - p^2 &= K_0^2, \\ qp\cos\tau &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.51}$$

т. е. мы возвращаемся к вакууму и, разумеется, ожидаем найти там обычный тип волн, а именно плоские волны с $q = K_0$ и $p = 0$. Но обратите внимание: набор чисел $q = K_0$, $p = 0$ — *не единственное* решение системы уравнений (3.2.51). Существует и другой набор: $q \neq 0$, $p \neq 0$, $\tau = \pi/2$.

Новое (и неожиданное) семейство решений в вакууме относится к волнам, которые распространяются без затухания в плоскости, содержащей вектор $\mathbf{q}$, и экспоненциально затухают вдоль полуоси z (а именно той, для которой $pz < 0$).

Члены этого нового семейства называются *исчезающими* волнами, и для их описания необходимы *два* вектора. Семейство плоских волн соответствует действительным K_x, K_y, K_z. Семейство исчезающих волн соответствует, например, действительным K_x и K_y и мнимому K_z.

На первый взгляд кажется заманчивым отбросить семейство исчезающих волн и не рассматривать их как физические реальности, но, как мы сейчас увидим, исчезающие волны столь же реальны, как однолучевые плоские волны, и совершенно неоценимы при разложении сферической волны на «лучевые» компоненты.

3.3. Разложение сферической волны на элементарные «лучи». Модовая теория распространения волн. Возбуждаемые моды (степени свободы) в замкнутой полости

3.3.1. Спектральное разложение сферической волны

Волны, исходящие от электромагнитных источников всех типов, являются сферическими, т. е. имеют амплитуду, которая с точностью до некоторых постоянных и фазовых множителей изменяется в свободном пространстве, как $\sim \exp(jKR)/R$, где R — расстояние от начала координат, K — волновое число

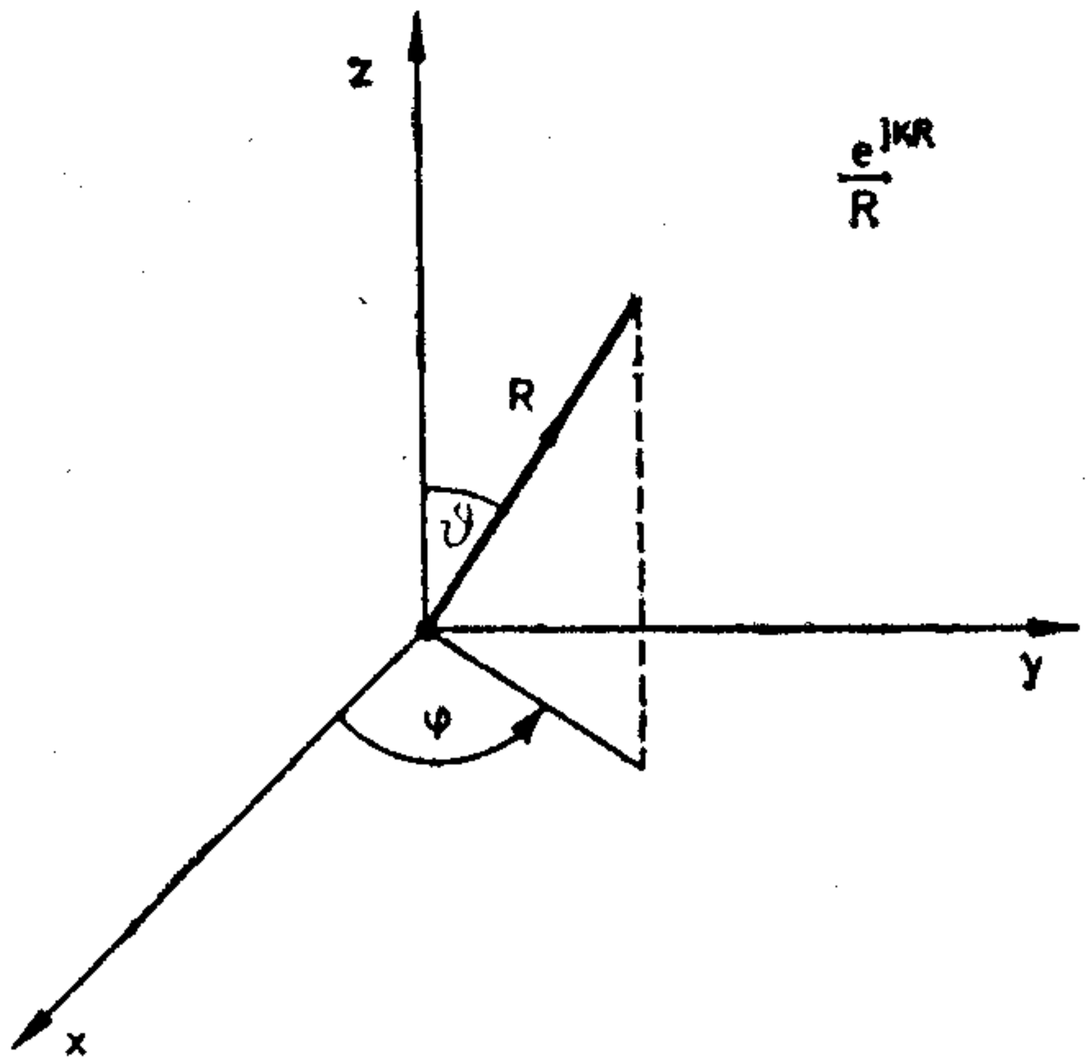


Рис. 3.8. Переменные, используемые при описании сферической волны.

(рис. 3.8). Отличительная особенность сферической волны состоит в том, что она расходится (становится бесконечной) в начале координат, — свойство, которое можно ожидать, исходя из *линейности* уравнений Максвелла.

В огромном числе задач, связанных с взаимодействием сферических волн с *плоскими* границами (приемники с конечными апертурами, отражатели, поверхности раздела двух сред и т. д.), существует асимметрия между формой падающей волны и формой границы. Именно это обстоятельство вынуждает нас разлагать сферическую волну на лучевые компоненты, для каждой

из которых выполняются элементарные формулы отражения и преломления Френеля. Из геометрических соображений напрашивается мысль о разложении сферической волны в угловой спектр плоских волн при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Однако такое разложение неэффективно, так как любая линейная комбинация плоских волн не имеет особенностей ни в одной точке пространства, включая начало координат, в то время как сферическая волна в начале координат расходится. Следовательно, в этом случае нам следует полагаться не на интуицию, а на более строгие рассуждения [3.2].

Наша сферическая волна имеет вид $\exp(jKR)/R$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (рис. 3.8). На плоскости xy ($z = 0$) эта волна имеет вид $\exp(jKr)/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Сначала мы разлагаем (круговую) волну на плоскости xy в двойной пространственный спектр Фурье

$$\frac{e^{jKr}}{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(K_x, K_y) \exp[j(K_x x + K_y y)]\, dK_x\, dK_y, \quad (3.3.1)$$

где $A(K_x, K_y)$ — амплитуда лучевых компонент, распространяющихся по плоскости xy с волновыми числами K_x, K_y.

Обратное преобразование позволяет найти

$$A(K_x, K_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jKr}}{r} \exp[-j(K_x x + K_y y)]\, dx\, dy. \quad (3.3.2)$$

Произведем замену переменных

$$\begin{gathered} K_x = q\cos\psi, \quad K_y = q\sin\psi, \\ x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \\ \left(q = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \quad dx\, dy = r\, d\varphi\, dr\right); \end{gathered} \quad (3.3.3)$$

амплитуда $A(K_x, K_y)$ перейдет при этом в выражение

$$\begin{aligned} A(K_x, K_y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \exp\{jr[K - q\cos(\psi - \varphi)]\}\, dr = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{\exp\{jr[K - q\cos(\psi - \varphi)]\}}{j[K - q\cos(\psi - \varphi)]}\Bigg|_0^{\infty}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

где K — действительное волновое число; выражение в правой части формулы (3.3.4) осциллирует и не сходится ни к какому пределу.

Но если мы учтем хотя бы слабое поглощение, то результат интегрирования по r в (3.3.4) сходится и при достижении верхнего предела, и мы получаем значение $j/[K - q\cos(\varphi - \psi)]$; следовательно,

$$A(K_x, K_y) = \frac{j}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{K - q\cos(\psi - \varphi)} = \tag{3.3.5}$$

$$= \frac{j}{(2\pi)^2 K}\int_0^{2\pi}\frac{d\delta}{1 - (q/K)\cos\delta} =$$

$$= \frac{j}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{K^2 - q^2}} = \frac{j}{2\pi\sqrt{K^2 - K_x^2 - K_y^2}}, \tag{3.3.6}$$

и, наконец, из разложения (3.3.1) мы получаем

$$\frac{e^{jKr}}{r} = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[j(K_x x + K_y y)]}{\sqrt{K^2 - K_x^2 - K_y^2}}\,dK_x\,dK_y. \tag{3.3.7}$$

Выражение (3.3.7) можно немедленно экстраполировать вдоль оси $\pm z$, если иметь в виду, что (поскольку волновое число K фиксировано) мы имеем всегда *две* независимые переменные, а именно K_x и K_y; следовательно, в приведенном выше выражении необходимо изменить только аддитивный сдвиг по фазе $\pm jK_z z$, после чего мы получаем

$$\frac{e^{jKR}}{R} = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[j(K_x x + K_y y + K_z|z|)]}{K_z}\,dK_x\,dK_y. \tag{3.3.8}$$

Учитывая сферическую симметрию, естественно ввести сферические координаты:

$$\begin{aligned} K_x &= K\sin\vartheta\cos\varphi,\\ K_y &= K\sin\vartheta\sin\varphi,\\ K_z &= K\cos\vartheta \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

и

$$\frac{dK_x\,dK_y}{K_z} = K\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Интегрирование по φ не представляет никаких трудностей. Ситуация становится более интересной, когда мы переходим к интегрированию по ϑ. Волновые числа K_x, K_y независимо принимают все значения на действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Выражение в правой части разложения (3.3.8) требует отдельного рассмотрения двух различных групп волновых чисел K_x. K_y.

Первая группа (I) содержит K_x, K_y, удовлетворяющие неравенству $K_x^2 + K_y^2 \leqslant K^2$; волновое число K_z действительно, и ϑ — действительный угол, изменяющийся от 0 (оба числа K_x, K_y равны нулю, $K_z = K$) до $\pi/2$ $(K_x^2 + K_y^2 = K^2,\ K_z = 0)$, т. е. I группа соответствует распространяющимся волнам. *Вторая группа* (II) содержит такие K_x, K_y, для которых $K_x^2 + K_y^2 > K^2$; следовательно, волновое число K_z мнимое. Кроме того, ϑ теперь — комплексный угол, изменяющийся вдоль отрицательной мнимой полуоси комплексной плоскости $\vartheta = \vartheta' + j\vartheta''$ от $\pi/2$ до $(\pi/2) - j\infty$, т. е. II группа соответствует исчезающим волнам (рис. 3.7). Соответственно интеграл в (3.3.8) преобразуется в $(\pi/2) - j\infty$

$$\frac{e^{jKR}}{R} = \frac{jK}{2\pi} \int_0^{(\pi/2)-j\infty} \int_0^{2\pi} \exp[j(K_x x + K_y y + K_z |z|)] \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (3.3.10)$$

Для семейства исчезающих волн, поскольку $\vartheta = (\pi/2) - j\infty$, $0 < \alpha < \infty$, волновые числа допускают параметризацию

$$\begin{aligned} K_x &= K \cos\varphi \operatorname{ch}\alpha, \\ K_y &= K \sin\varphi \operatorname{ch}\alpha, \\ K_z &= j \operatorname{sh}\alpha, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

так как при $\alpha \to \infty$ мы получаем $K_x \to \infty \cos\varphi$, $K_y \to \infty \sin\varphi$ и $K_z \to j\infty$, т. е. компоненты, которые распространяются, например, вдоль плоскости xy с длинами волн, стремящимися к нулю, и одновременно затухающие вдоль полуоси z с коэффициентом затухания, стремящимся к бесконечности. Выражение (3.3.10) для сферической волны можно преобразовать дальше: полагая

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi_1, \\ y &= r \sin\varphi_1 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

и выполняя интегрирование по φ, мы приходим к соотношению

$$\frac{e^{jKR}}{R} = jK \int_0^{(\pi/2)-j\infty} J_0(u)\, e^{jK|z|\cos\vartheta} \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta, \quad (3.3.13)$$

где

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \exp[jKr \sin\vartheta \cos(\varphi - \varphi_1)]\, d\varphi \quad (3.3.14)$$

— функция Бесселя нулевого порядка и $u = Kr \sin\vartheta$. Так как

$$J_0(u) = \frac{1}{2}[H_0^{(1)}(u) + H_0^{(2)}(u)], \quad (3.3.15)$$

где $H_0^{(1)}(u)$, $H_0^{(2)}(u)$ — соответственно функция Ханкеля нулевого порядка и первого и второго рода, т. е.

$$H_0^{(1)}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ju\cos\delta}\,d\delta \tag{3.3.16}$$

и

$$H_0^{(2)}(-u) = -H_0^{(1)}(u); \tag{3.3.17}$$

окончательно мы можем записать, что

$$\frac{e^{jKR}}{R} = \frac{jK}{2}\int_{(-\pi/2)+j\infty}^{(\pi/2)-j\infty} H_0^{(1)}(Kr\sin\vartheta)\,e^{jK|z|\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta, \tag{3.3.18}$$

контур интегрирования на комплексной ϑ-плоскости при этом становится симметричным (рис. 3.9). [Заметим попутно, что

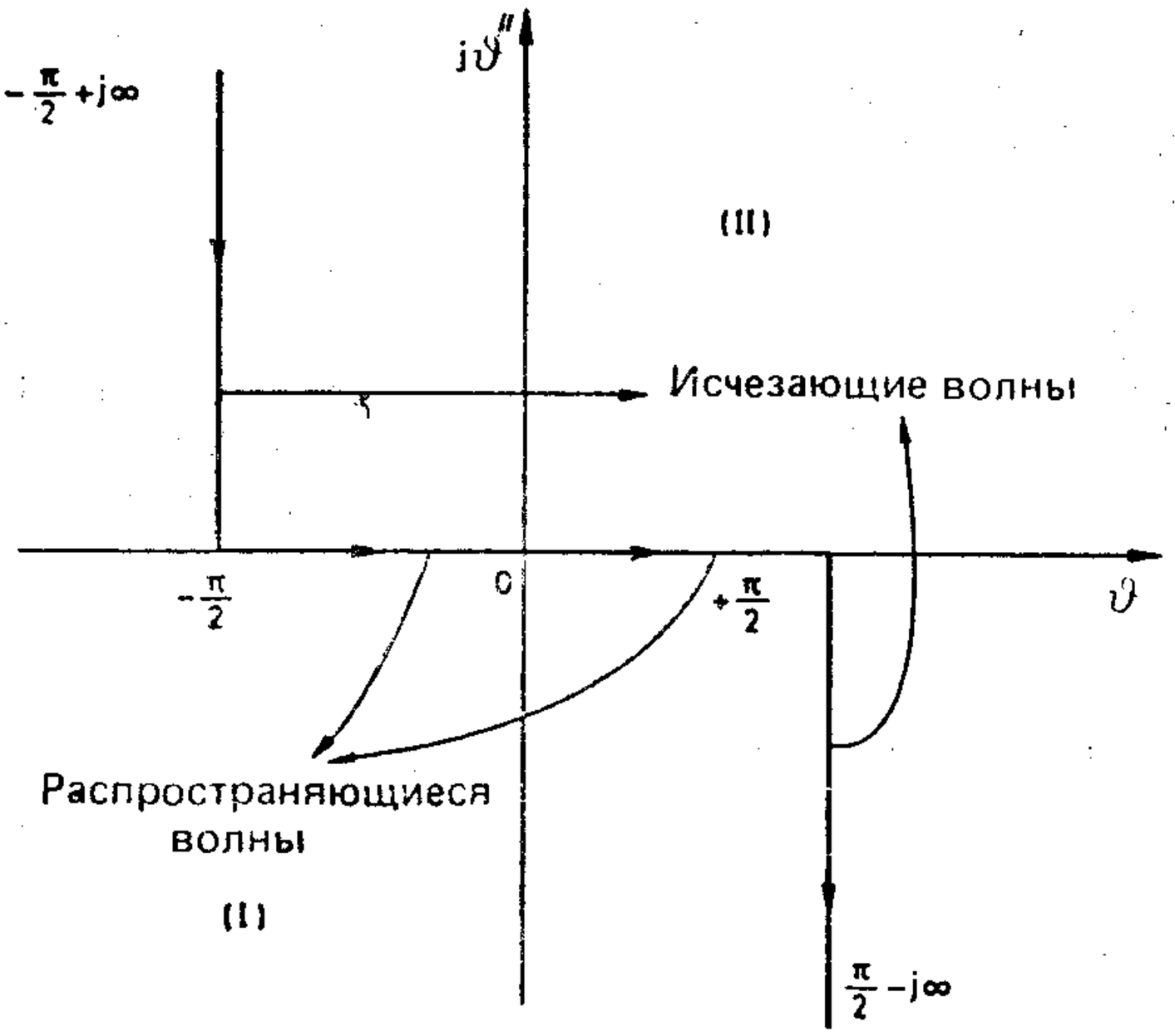


Рис. 3.9. Симметричный контур интегрирования, используемый при разложении сферической волны (см. текст).

если мы используем сферическую волну как носитель информации, то объект информации «кодирует» себя, предположительно, в лучевых компонентах носителя (подробнее об этом см. в конце настоящей главы и в гл. 4). Но исчезающие волны не распространяются, поэтому хранящаяся в них информация оказывается необратимо потерянной. Поэтому даже на этом этапе мы можем прийти к заключению о неполноте информации, передаваемой нашими носителями, и вытекающей из нее неоднозначности воспринимаемого объекта.]

Выше мы продемонстрировали эффективный математический способ разложения сферической волны на лучи — действительные и мнимые. Рассмотрим теперь сферическую волну, но не в бесконечном пространстве, а заключенную в некоторую полость, тем самым мы подготовим почву для введения распределения Планка.

Будем действовать постепенно. На первом шаге рассмотрим одномерную «*полость*», а именно сферическую волну, распространяющуюся между двумя параллельными идеально отражающими стенками, отстоящими друг от друга на расстоянии h. Как мы увидим, такой способ удержания порождает «макроскопическое (классическое) квантование» сферической волны, т. е. переход от непрерывного спектра (с бесконечным числом — континуумом — степеней свободы) к дискретному спектру (с конечным числом степеней свободы) «нормальных мод».

«Квантование», которым занимается квантовая теория, относится к *дискретности энергетических уровней* каждой из этих дискретных нормальных мод, т. е. к числу фотонов, принадлежащих каждой нормальной моде.

Эти числа фотонов подвержены флуктуациям. Неопределенность, порождаемая такими флуктуациями, и создает *энтропию* электромагнитного излучения (и отвечает за ту информацию, которая поступает при наблюдении с помощью прибора, имеющего *конечную* апертуру — площадку, на которую падает приходящее излучение). Кроме того, дополнительная неоднозначность возникает из-за флуктуаций среды, в которой распространяются волны.

3.3.2. Волноводная модовая теория распространения волн

Рассмотрим (рис. 3.10) сферическую волну $\exp(jKR)/R$, распространяющуюся из центра $(0, z_0)$ в одномерном волноводе, о котором мы говорили выше. Требуется вычислить величину энергии, поступающей в другую точку (r, z) внутри волновода.

Формально мы должны найти гармоническое поле u, удовлетворяющее волновому уравнению

$$\nabla^2 u + K^2 u = 0, \quad K = \frac{\omega}{c}, \tag{3.3.19}$$

и граничным условиям, наложенным на поле при $z = 0$ и $z = h$.

Если в качестве поля и выбрать z-компоненту вектора Герца (вертикальную поляризацию, коэффициент отражения равен единице), то граничные условия будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \begin{cases} z = 0, \\ z = h \end{cases} \tag{3.3.20}$$

(в предположении, что волновод имеет идеально отражающие стенки). Весьма полезно попытаться найти решение методом проб и ошибок, действуя следующим образом. Предположим, что прямой луч R_{0_1} *есть* решение. Но функция $\exp(jKR_{0_1})/R_{0_1}$ удовлетворяет волновому уравнению, но не удовлетворяет ни одному из граничных условий, поэтому она не может быть решением. Если мы прибавим к прямому лучу R_{0_1} луч R_{0_2}, идущий от изображения источника, отраженного относительно нижней границы, то поле $\exp(jKR_{0_1})/R_{0_1} + \exp(jKR_{0_2})/R_{0_2}$ будет удовлетворять волновому уравнению и условию на *нижней* границе, но

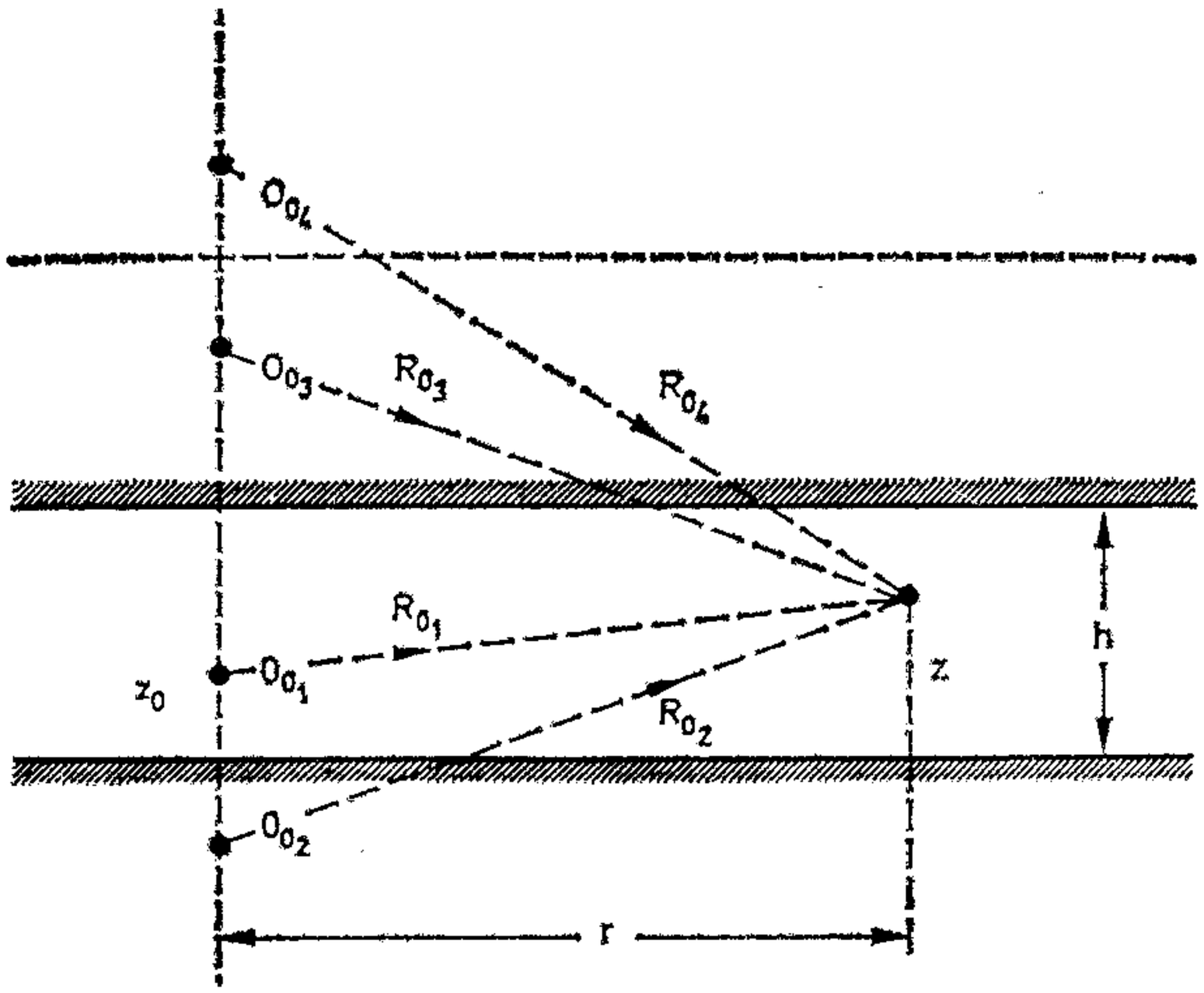


Рис. 3.10. Построение принятого поля в канале с помощью суперпозиции лучей, отраженных на двух границах.

не будет удовлетворять условию на *верхней* границе. Прибавим далее лучи, исходящие из изображений источника O_{0_1} и его изображения O_{0_2}, отраженных относительно верхней границы (мы получаем, таким образом, сумму прямого луча, луча, однократно отраженного относительно нижней границы, луча, однократно отраженного относительно верхней границы, и луча, отраженного однократно *и* от нижней, *и* от верхней границы).

В результате мы получаем поле

$$\frac{e^{jKR_{0_1}}}{R_{0_1}} + \frac{e^{jKR_{0_2}}}{R_{0_2}} + \frac{e^{jKR_{0_3}}}{R_{0_3}} + \frac{e^{jKR_{0_4}}}{R_{0_4}},$$

которое удовлетворяет волновому уравнению, удовлетворяет *верхнему* граничному условию, но не удовлетворяет *нижнему* граничному условию. Какой урок мы можем извлечь из такого алгоритма?

Последовательно прибавляя пары лучей, идущих из изображения источника, изображения изображения и т. д., отраженных относительно то одной, то другой границы, мы *попеременно* удовлетворяем условию на той границе, относительно которой симметричен весь набор уже имеющихся источников, но нарушаем условие на другой границе. После добавления *одной тетрады* цикл повторяется. Однако, по мере того как мы прибавляем тетрады лучей, состоящие из ломаных со все возрастающим числом звеньев, различие между двумя граничными условиями становится все менее ощутимым, и в пределе, когда мы прибавим бесконечно много тетрад лучей, результирующее поле

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{e^{jKR_{l_1}}}{R_{l_1}} + \frac{e^{jKR_{l_2}}}{R_{l_2}} + \frac{e^{jKR_{l_3}}}{R_{l_3}} + \frac{e^{jKR_{l_4}}}{R_{l_4}} \right], \qquad (3.3.21)$$

где

$$R_{l_1} = \sqrt{r^2 + (2lh + z - z_0)^2},$$
$$R_{l_2} = \sqrt{r^2 + (2lh + z + z_0)^2},$$
$$R_{l_3} = \sqrt{r^2 + [2(l+1)h - z - z_0]^2}$$

и

$$R_{l_4} = \sqrt{r^2 + [2(l+1)h + z_0 - z]^2},$$

удовлетворяет обоим граничным условиям. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться рядом (3.3.21) и вычислить значение производной du/dz при $z = 0$ и $z = h$; и в том и в другом случае оно оказывается равным нулю.

Для того чтобы с помощью ряда (3.3.21) вычислить поле u в принимающей точке (r, z) *аналитически*, воспользуемся интегральным разложением (3.3.18), применив его к каждому члену $\exp(jKR_{l_i})/R_{l_i}$:

$$\frac{e^{jKR_{l_i}}}{R_{l_i}} = \frac{jK}{2} \int_{(-\pi/2)+j\infty}^{(\pi/2)-j\infty} e^{jK\,|z_{l_i}|\cos\vartheta} H_0^{(1)}(Kr\sin\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (3.3.22)$$

где $R_{l_i} = \sqrt{r^2 + z_{l_i}^2}$, а z_{l_i} при $i = 1, 2, 3, 4$ определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} z_{l_1} &= 2hl + z - z_0, \\ z_{l_2} &= 2hl + z + z_0, \\ z_{l_3} &= 2(l+1)h - z - z_0, \\ z_{l_4} &= 2(l+1)h - z + z_0. \end{aligned} \qquad (3.3.23)$$

Подставляя их в ряд (3.3.21), получаем после несложных преобразований результирующее поле u в интегральной форме [3.2]:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(bz_0)\operatorname{ch}[(h-z)b]}{b\sin(bh)} H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi\,d\xi \qquad (3.3.24)$$

при $z > z_0$ и

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(bz)\operatorname{ch}[(h-z_0)b]}{b\sin(bh)} H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi\,d\xi \qquad (3.3.25)$$

при $z < z_0$, где $\xi = K\sin\vartheta$ и $b = \sqrt{\xi^2 - K^2} = jK\cos\vartheta$. Интеграл (3.3.24) и (3.3.25) можно также вывести, используя теорему Коши о вычетах.

Полюсы подынтегрального выражения являются решениями уравнения

$$\operatorname{sh}(bh) = 0,$$

и соответственно равны

$$bh = jl\pi \quad (l \text{ — целое число}),$$

или

$$\xi_1 = \pm\sqrt{K^2 - \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2}. \qquad (3.3.26)$$

При $2h/\lambda > 1$ полюсы располагаются вдоль действительной оси комплексной ξ-плоскости, а при $2h/\lambda < 1$ — вдоль ее мнимой оси.

Чтобы избежать обычных в такой ситуации расходимостей, мы предполагаем, что среда в волноводе слабо поглощающая (т. е. волновое число K имеет очень малую мнимую часть); тогда полюсы оказываются чуть сдвинутыми относительно координатных осей (рис. 3.11). (Нас интересуют только полюсы, расположенные в первом квадранте, так как полюсы в третьем квадранте соответствуют просто волне, движущейся *влево* от источника.) Наше подынтегральное выражение имеет вид $f(z)/g(z)$; если α_i — нули функции $g(z)$, т. е. решения уравнения $g(z) = 0$, то

$$\int_C \frac{f(z)}{g(z)}\,dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(\alpha_i)}{[\partial g(z)/\partial z]_{z=\alpha_i}}. \qquad (3.3.27)$$

Применяя эту общую теорему к нашему случаю, получаем

$$u = \frac{2\pi j}{h}\left[\frac{1}{2}H_0^{(1)}(Kr) + \sum_{l=1}^{\infty}\cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right)\cos\left(\frac{l\pi z_0}{h}\right)H_0^{(1)}(\xi_1 r)\right], \qquad (3.3.28)$$

где $\xi_1 = \sqrt{K^2 - (l\pi/h)^2}$.

При $|\xi_1 r| \gg 1$, т. е. на расстоянии r, большом по сравнению с длиной волны, ряд (3.3.28) переходит в асимптотическое выражение

$$u \approx \frac{2e^{j\pi/4}}{h}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\left[\frac{1}{2\sqrt{K}}e^{jKr} + \sum_{l=1}^{\infty}\cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right)\cos\left(\frac{l\pi z_0}{h}\right)\frac{1}{\sqrt{\xi_l}}e^{j\xi_l r}\right]. \tag{3.3.29}$$

Этот результат относится к вертикальной поляризации (коэффициент отражения равен $+1$). В случае горизонтальной поляризации (коэффициент отражения равен -1) результат оказывается другим.

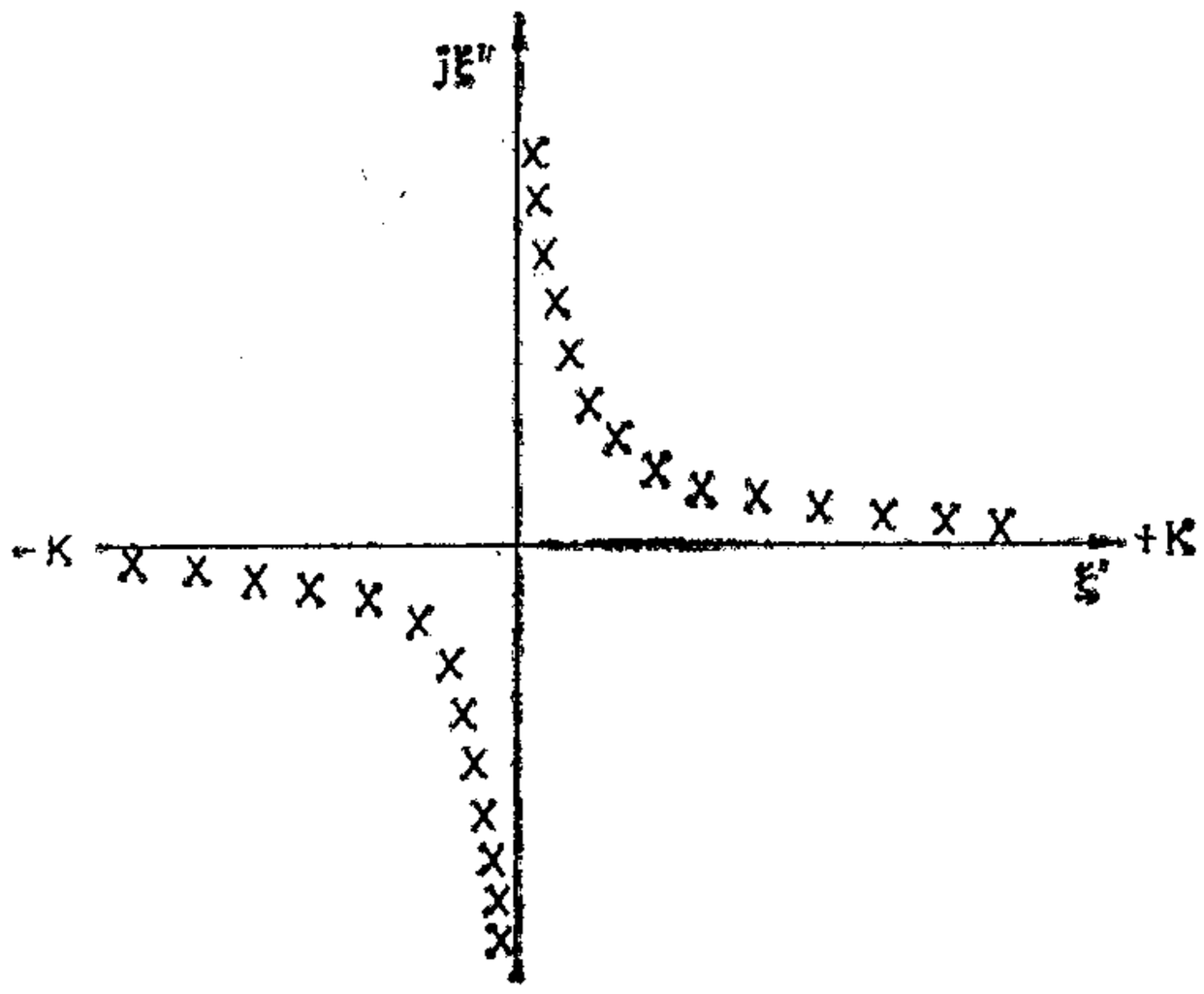


Рис. 3.11. Полюса подынтегрального выражения в (3.3.24), (3.3.25) на комплексной ξ-плоскости (см. текст).

Выясним теперь, как обстоит дело с интерпретацией окончательного результата. Асимптотическое выражение (3.3.29) задает поле в принимающей точке как сумму различных энергетических компонент — *нормальных мод*. Нетрудно видеть, что каждая нормальная мода состоит из одной тетрады лучей (3.3.21). Нулевая нормальная мода не включена в сумму вместе с остальными модами, а выделена особо. Почему? Сделано это по той простой причине, что эта мода «гандикапирована»: ее собственная «банда четырех» содержит в качестве члена луч, идущий прямо от источника к принимающей точке и с аристократическим высокомерием не обращающий внимания на обе границы.

При $2h/\lambda < 1$ соответствующие нормальные моды имеют чисто мнимые волновые числа ξ_l; следовательно, такие моды являются исчезающими волнами, экспоненциально затухающими вдоль направления r и не распространяющимися вдоль него.

При $2h/\lambda \geqslant 1$ мы имеем l дискретных распространяющихся нормальных мод, каждая из которых характеризуется своей собственной фазовой и групповой скоростью. Таким образом, даже в вакууме волновод порождает дисперсионные явления вследствие пространственного квантования (ширина h конечна).

Характерные скорости для каждой нормальной моды вычисляются непосредственно:

$$v_{\mathrm{ph}_l} = \frac{\omega}{\xi_l} \frac{c}{\sqrt{1-(l\lambda/2h)^2}} \tag{3.3.30}$$

и

$$v_{\mathrm{gr}_l} = \frac{\partial\omega}{\partial\xi_l} = c\sqrt{1-\left(\frac{l\lambda}{2h}\right)^2} = \frac{c^2}{v_{\mathrm{ph}_l}}. \tag{3.3.31}$$

Их зависимость от параметра l изображена на рис. 3.12.

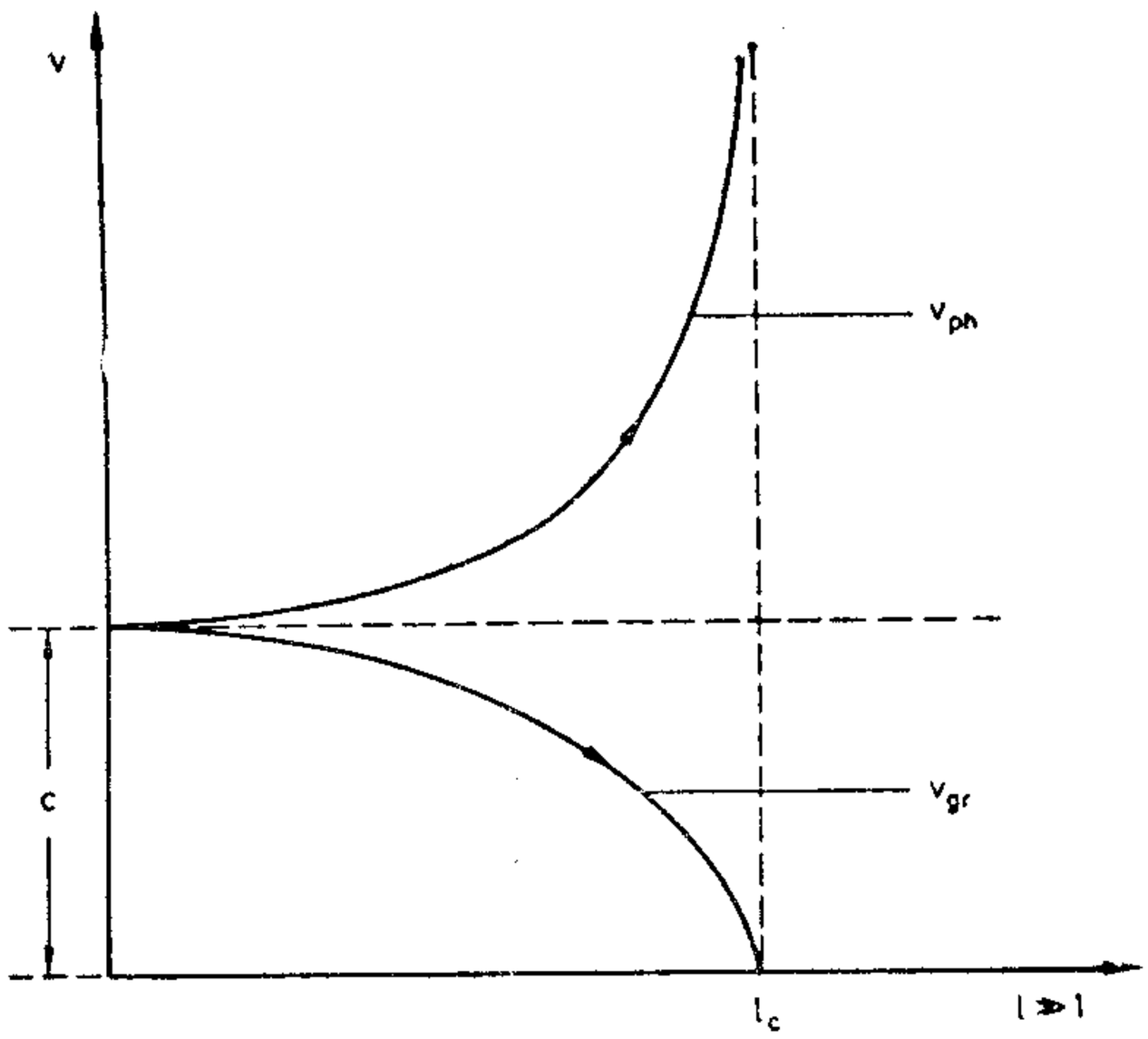


Рис. 3.12. Фазовая скорость и групповая скорость как функции числа мод.

В случае горизонтальной поляризации асимптотическое выражение (3.3.29) переходит в следующее:

$$u \sim \sum_{l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{l\pi z}{h}\right) \sin\left(\frac{l\pi z_0}{h}\right) \frac{1}{\sqrt{\xi_l}} e^{j\xi_l r}, \tag{3.3.32}$$

т. е. исчезает нулевая нормальная мода. Разложение (3.3.32) может быть выведено так же, как было выведено асимптотическое разложение (3.3.29), но исходить при этом необходимо из ряда

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{e^{jKR_{l_1}}}{R_{l_1}} - \frac{e^{jKR_{l_2}}}{R_{l_2}} - \frac{e^{jKR_{l_3}}}{R_{l_3}} + \frac{e^{jKR_{l_4}}}{R_{l_4}} \right], \tag{3.3.33}$$

так как при горизонтальной поляризации и идеально отражающих стенках $z = 0$, $z = h$ коэффициент отражения равен -1. [См. (3.3.21).]

3.3.3. Полостной резонатор

Предположим теперь, что мы «замкнули» одномерный волновод еще двумя парами идеально отражающих стенок, образовав тем самым параллелепипед (рис. 3.13). Какие энергетические состояния возможны в такой полости, если поместить в нее точечный источник с заданной поляризацией, испускающий излучение с частотой ν?

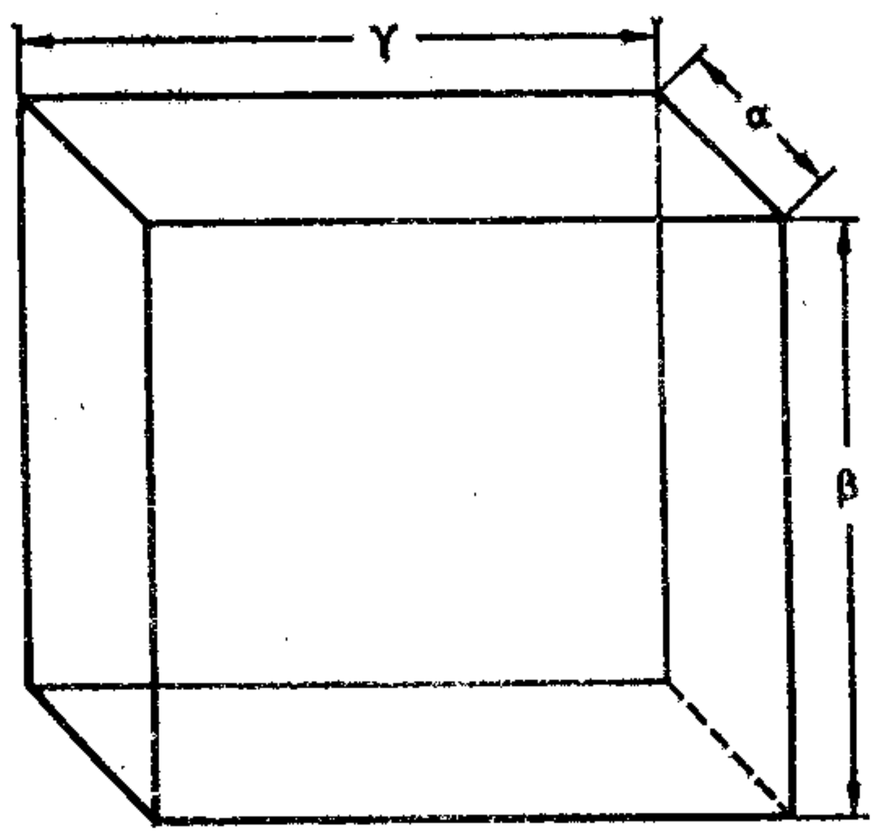


Рис. 3.13. Полость с идеально отражающими стенками.

Прежде всего заметим, что в такой полости не будет бегущих волн: в *стационарном состоянии* в полости будут существовать только стоячие волны. Естественно спросить: сколько нормальных мод (степеней свободы) могут установиться в интервале частот $\Delta\nu$ вокруг частоты возбуждения ν? Определим их число.

С математической точки зрения мы должны решить волновое уравнение $\nabla^2 u + K^2 u = 0$ с граничными условиями, налагаемыми идеально отражающими стенками полости. К счастью, так как среда в полости линейная (вакуум), мы можем записать решение в виде $u = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$, где $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ означают соответствующие компоненты поля u. Из волнового уравнения следует, что

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + K^2XYZ = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) = 0. \qquad (3.3.34)$$

Так как каждый из членов, содержащих производные, зависит только от одной из переменных x, y и z, дифференциальное уравнение (3.3.34) разделяется на следующие три уравнения:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - K_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + K_y^2 Y = 0,$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2} + K_z^2 Z = 0, \qquad (3.3.35)$$

если K_x, K_y, K_z — действительные волновые числа, то

$$X = A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x),$$
$$Y = B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y), \qquad (3.3.36)$$
$$Z = C_1 \cos(K_z z) + C_2 \sin(K_z z).$$

Для полости с идеально проводящими стенками

$$K_x = \frac{l\pi}{\alpha}, \quad K_y = \frac{m\pi}{\beta}, \quad K_z = \frac{n\pi}{\gamma}, \qquad (3.3.37)$$

где α, β, γ — размеры полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, l, m, n — целые числа (номера мод). Тогда в любой точке внутри полости x-, y- и z-компоненты интенсивности, например, электрического поля определяются выражениями

$$E_x(x, y, z) = E_1 \cos(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z),$$
$$E_y(x, y, z) = E_2 \sin(K_x x) \cos(K_y y) \sin(K_z z), \qquad (3.3.38)$$
$$E_z(x, y, z) = E_3 \sin(K_x x) \sin(K_y y) \cos(K_z z),$$

где

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2} \right). \qquad (3.3.39)$$

Такие выражения для x-, y- и z-компонент поля возникают, если принять во внимание поляризацию компонент напряженности поля: например, E_x поляризована *вертикально* относительно x, поэтому зависимость E_x от x должна содержать косинус.

В то же время компонента E_x *горизонтально* поляризована и по y, и по z, следовательно, ее зависимость от y и z должна описываться синусами. Аналогичные соображения применимы к E_y и E_z. Амплитуды E_1, E_2, E_3 поля не являются независимыми, они связаны законом Гаусса $\nabla \cdot E = 0$, который в нашем случае дает соотношение

$$K_x E_1 + K_y E_2 + K_z E_3 = 0, \qquad (3.3.40)$$

или с учетом (3.3.37)

$$\frac{l}{\alpha} E_1 + \frac{m}{\beta} E_2 + \frac{n}{\gamma} E_3 = 0. \qquad (3.3.41)$$

Для кубической полости с ребром длиной α из соотношения (3.3.41) следует

$$lE_1 + mE_2 + nE_3 = 0. \qquad (3.3.42)$$

Что касается числа нормальных мод, которые могут быть возбуждены в такой кубической полости, то рассмотрим какую-

нибудь одну данную моду, характеризуемую набором целых чисел l, m, n. Если $\cos\vartheta_1$, $\cos\vartheta_2$, $\cos\vartheta_3$ — направляющие косинусы этой моды и λ — длина волны возбуждения в полости, то с учетом идеально отражающих стенок должны выполняться соотношения

$$\alpha\cos\vartheta_1 = l\frac{\lambda}{2}, \quad \beta\cos\vartheta_2 = m\frac{\lambda}{2}, \quad \gamma\cos\vartheta_3 = n\frac{\lambda}{2}, \tag{3.3.43}$$

а так как $\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1$,

$$\frac{4\alpha^2}{\lambda^2} = l^2 + m^2 + n^2. \tag{3.3.44}$$

Каждую нормальную моду можно представить как точку в некотором трехмерном пространстве с (дискретными) координатами l, m, n ($l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$). Общее число N нормальных мод приближенно равно 1/8 объема сферы радиуса $2\alpha/\lambda$, поэтому

$$N \sim \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^3, \tag{3.3.45}$$

или, поскольку частота $\nu = c/\lambda$ и $\alpha^3 = V$,

$$N \sim \frac{4\pi}{3}\frac{V}{c^3}\nu^3; \tag{3.3.46}$$

а число нормальных мод в интервале частот $d\nu$ равно

$$dN = \frac{4\pi}{c^3}V\nu^2\,d\nu. \tag{3.3.47}$$

Таков ответ для случая, когда в полости имеется только один источник поляризации. Если же *обе* поляризации возбуждаются одновременно, то число нормальных мод в интервале частот $d\nu$ равно

$$dN = \frac{8\pi}{c^3}V\nu^2\,d\nu. \tag{3.3.48}$$

Как энергия распределена по этим модам? Если величина $dN/d\nu$ очень велика (а именно из такого допущения принято исходить при выводе формулы для $dN/d\nu$), то «разумной» является гипотеза о равнораспределении энергии, согласно которой на каждую степень свободы приходится $\sim kT$ джоулей, где T — температура в полости, k — постоянная Больцмана. Следовательно, энергия на единицу объема равна

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}\,d\nu, \tag{3.3.49}$$

а полная энергия в полости

$$u(T) = \int_0^\infty \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu = \infty. \qquad (3.3.50)$$

Но тогда бесконечно велика и удельная теплоемкость $[\partial u(T)/\partial T]_V$ полости с вакуумом, а это означает, что мы никакими средствами не можем поднять температуру полости, откачанной до глубокого вакуума! Так как расходимость интеграла (3.3.50) вызвана высокочастотными модами, лет сто назад ее называли ультрафиолетовой катастрофой.

Проблема ультрафиолетовой катастрофы была окончательно решена Максом Планком. Мы не будем вдаваться в тонкости квантовой теории, так как они несущественны для наших лекций, и упомянем лишь о конечном результате — квантовании *энергетических уровней каждой дискретной моды*, которое Планк назвал «актом отчаяния». Планк был вынужден принять гипотезу о том, что любая мода («осциллятор») может изменять свою энергию только дискретно на величину, кратную элементарному кванту ε_0. Кратко рассуждения Планка сводились к следующему. Пусть N_0 — число мод («осцилляторов») с наименьшей энергией и N — полное число мод, обладающих различными энергиями 0, ε_0, $2\varepsilon_0$, ... и т. д. Тогда, согласно выведенному нами в разд. 2.3.2 [см. формулу (2.3.49)] распределению Больцмана,

$$N = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right). \qquad (3.3.51)$$

Планк предположил также, что элементарный квант, который мода может поглощать или которым она может обмениваться с другими модами, пропорционален частоте моды ν, т. е. $\varepsilon_0 = h\nu$, где h — некоторая универсальная постоянная. Таким образом, полная энергия E нормальных мод определяется выражением

$$E = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right). \qquad (3.3.52)$$

Средняя энергия каждой моды (в превышении над нулевой энергией, см. ниже) равна соответственно

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \frac{h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left[(-n(h\nu/kT)\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-n(h\nu/kT)\right]} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \qquad (3.3.53)$$

а полная энергия, приходящаяся на единичный объем и интервал частот $d\nu$, — величине $\bar{\varepsilon}$, умноженной на число мод в этом интервале, т. е.

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu. \qquad (3.3.54)$$

Следовательно, среднее число *фотонов*, приходящихся на нормальную моду, равно

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \qquad (3.3.55)$$

Прежде чем мы перейдем к более подробному обсуждению формулы (3.3.55), выясним, что происходит при нулевой температуре. Этот вопрос существен для нас, так как в классической теории связи конечная температура есть синоним конечной величины тепловых шумов. Инженер-связист считает, что, сконструировав устройство, способное функционировать при сверхнизких температурах, он сможет избавиться практически от всех шумов. Однако это не так: при низких температурах и высоких частотах квантовый шум приходит на смену тепловому шуму и становится основным препятствием на пути к достижению безошибочной передачи информации.

Мы обнаружили, что средняя энергия, приходящаяся на нормальную моду в полости в равновесном состоянии, определяется выражением

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \qquad (3.3.53)$$

Его можно записать в виде

$$\bar{\varepsilon} = kT \frac{x}{e^x - 1} \approx kT, \qquad (3.3.56)$$

где $x = h\nu/kT \ll 1$. При достаточно высоких температурах ($e^x \sim 1 + x + x^2/2 + \ldots$) справедлива также приближенная формула

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \approx kT \frac{1}{1 + x/2} \sim kT\left(1 - \frac{x}{2}\right) = kT\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h\nu}{kT}\right) =$$

$$= kT - \frac{h\nu}{2}. \qquad (3.3.57)$$

Последнее выражение говорит нам, что при высоких температурах средняя энергия $\bar{\varepsilon}$ нормальной моды равна $kT - h\nu/2$, а не kT, как в случае равнораспределения энергии. Но мы знаем, что при высоких температурах выполняется принцип равнораспределения энергии. Для того чтобы при высоких темпе-

ратурах средняя энергия $\bar{\varepsilon}$ была равна kT, она должна определяться выражением

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \qquad (3.3.58)$$

Величина $h\nu/2$ есть нулевая энергия.

Но вернемся к формуле (3.3.55), задающей среднее число фотонов, приходящихся на единичный объем и нормальную моду («степень свободы электромагнитного поля»).

Фотоны приходят на Землю в основном от Солнца, земная атмосфера служит своего рода «мембраной», которая действует как отсекающий фильтр на *все* электромагнитное излучение (в диапазоне длин волн от 10^8 до 10^{-14} см), испускаемое Солнцем в полосе частот шириной $\sim 10^{22}$, или 2^{73}, Гц, т. е. 73 *октав*, за исключением двух небольших «окон»: микроволновой полосы шириной ~ 10 *октав* и оптической полосы шириной всего лишь в ~ 1 *октаву*. Возникает естественный вопрос: почему эволюция не использовала микроволновое окно, а предпочла развивать рецепторы всех биологических видов, способные воспринимать электромагнитное излучение в оптическом диапазоне? Разумеется, современный человек использует и микроволновое излучение, но как артефакт. Еще один вопрос: почему технология развивалась в направлении, *противоположном* направлению биологической эволюции? Иначе говоря, почему микроволновые устройства и микроволновая техника *предшествовали* появлению лазерной технологии и интегральной оптики?

3.4. Энтропия электромагнитного излучения. Информация, получаемая электромагнитной волной, падающей на конечную апертуру. Неоднозначность восприятия

Каким образом электромагнитная волна составлена из фотонов? Ответ на этот вопрос пока неизвестен. Мы знаем лишь, что электромагнитная волна — *коллективное свойство фотонов*. Испускание фотонов характеризуется тремя параметрами: интенсивностью, частотой и поляризацией. Электромагнитная волна обладает четырьмя параметрами: амплитудой, частотой, *фазой* и поляризацией. Ясно, что именно *фаза* обладает всеми отличительными особенностями *возникающего* макроскопического свойства, когда из отдельных фотонов мы синтезируем электромагнитную волну.

При ближайшем рассмотрении основной формулы (3.3.55) становится понятно, почему техника долгое время испытывала трудности в создании оптических волн, хотя устройства, работающие в микроволновом диапазоне и при еще более низких частотах, проектировались и строились легко и просто. (50 лет

назад телевизионная связь осуществлялась исключительно на *длинных* волнах $\sim 10^4$ Гц и *коротких* волнах $\sim 10^6$ Гц.)

Так как (среднее) число *заполнения* для фотонов на степень свободы $\langle n \rangle$ и фаза φ — сопряженные величины, удовлетворяющие соотношению неопределенности $(\Delta n)(\Delta\varphi) \geqslant 1/2$, для точного определения фазы должно было бы выполняться неравенство $\langle n \rangle \gg 1$. Но из формулы (3.3.55) следует, что при разумно низких (*не слишком* малых) частотах величина $\langle n \rangle$ может быть очень большой. Например [3.3], электростанция мощностью 10 000 кВт, вырабатывающая ток частотой $50 \pm 0{,}01$ Гц, создает $\langle n \rangle \sim 10^{41}$ фотонов на степень свободы. Большой магнетрон, работающий в импульсном режиме на длине волны ~ 10 см ($\sim 3 \cdot 10^9 \pm 0{,}5 \cdot 10^6$ Гц), порождает $\sim 10^{24}$ фотонов на степень свободы; мощная ртутная лампа (высокого давления), испускающая 1 Вт/см^2 в виде зеленого света ($\lambda \sim 5461 + 10$ Å), позволяет создать менее 10^{-3} фотонов на одну степень свободы. Таким образом, традиционные источники в оптическом диапазоне непригодны для использования в качестве средств связи, так как они не способны удерживать измеримую фазу, что имеет первостепенное значение для *синхронизации*. Задача поддержания измеримой фазы была выполнена с появлением источников лазерного (когерентного) излучения: рубиновый лазер с модулируемой добротностью позволяет создавать до $\sim 10^{15}$ фотонов на степень свободы.

Попытаемся теперь ответить на первый вопрос, почему эволюция предпочла оптическую полосу микроволновой? Помимо физиологических ограничений (несомненно, играющих главную роль) можно указать на следующие причины.

Для однозначного принятия (и восприятия) раздражителя отношение «сигнал/шум» должно быть достаточно большим. Если мы наблюдаем объект по тому, как он рассеивает излучение от источника света (сигнал), то желательно, чтобы число рассеянных фотонов во много раз превосходило число фотонов, спонтанно испускаемых самим объектом через излучение черного тела (шум). Из формулы (3.3.55) для частот в оптическом диапазоне следует неравенство $h\nu/kT \gg 1$, поэтому

$$\langle n \rangle \sim \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]. \tag{3.4.1}$$

Число фотонов, рассеянных на объекте, освещенном Солнцем ($T_S = 6000$ K), равно

$$\langle n \rangle_S \approx \exp\left[-\frac{h\nu}{k \cdot 6000}\right]. \tag{3.4.2}$$

Они-то и образуют сигнал.

Число фотонов, спонтанно испускаемых объектом при той же высокой частоте, равно

$$\langle n\rangle_n \approx \exp\left[-\frac{h\nu}{k\cdot 300}\right], \tag{3.4.3}$$

где $T_n = 300$ К — температура объекта. Эти фотоны образуют шум.

Таким образом, отношение сигнал/шум определяется выражением

$$\frac{\langle n\rangle_S}{\langle n\rangle_n} = \exp\left[\frac{h\nu}{k}\left(\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_S}\right)\right] = \exp\left[\frac{5700\cdot h\nu}{k\cdot 18\cdot 10^5}\right]. \tag{3.4.4}$$

Для частот из оптического диапазона оно составляет $\sim 10^{28}$. Эта очень большая величина и делает возможным однозначный прием сигнала в оптическом диапазоне. Произведем теперь те же вычисления для микроволновой области. В этом случае $h\nu/kT \ll 1$, и из формулы (3.3.55) мы получаем

$$\langle n\rangle \sim \frac{kT}{h\nu}. \tag{3.4.5}$$

Таким образом,

$$\langle n\rangle_S = \frac{k\cdot 6000}{h\nu}, \tag{3.4.6}$$

$$\langle n\rangle_n = \frac{k\cdot 300}{h\nu}, \tag{3.4.7}$$

поэтому отношение сигнал/шум теперь равно только

$$\frac{\langle n\rangle_S}{\langle n\rangle_n} \sim \frac{6000}{300} = 20, \tag{3.4.8}$$

т. е. оно слишком мало для того, чтобы обеспечить хороший прием.

Соотношение (3.3.55) задает только *среднее* число фотонов на степень свободы электромагнитного поля (на нормальную моду). Вокруг этого среднего числа неизбежно происходят флуктуации. Какова статистика этих флуктуаций? Этот вопрос имеет решающее значение, так как флуктуации в интенсивности фотонного потока являются основной (хотя и не единственной) причиной неоднозначности в формировании образа, когда несущая информацию электромагнитная волна падат на конечную апертуру.

В частности, для нас представляет интерес вычисление второго момента (дисперсии) флуктуаций фотонов относительно средней плотности $\langle n\rangle = \bar{E}$. Напомним простое соотношение между средним значением, средним квадратичным значением и

средним квадратичным флуктуаций от среднего значения:

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{(E - \bar{E})^2} = \overline{E^2 - 2E\bar{E} + \bar{E}^2} = \bar{E}^2 - 2\bar{E}^2 + \bar{E}^2 = \overline{E^2} - \bar{E}^2. \tag{3.4.9}$$

Любая система, находящаяся в контакте с термостатом при температуре T, следует распределению Больцмана. Вероятность P_r того, что система находится в r-м (квантовом) состоянии с энергией E_r, определяется каноническим выражением

$$P_r = \frac{\exp(-E_r/kT)}{\sum_s \exp(-E_s/kT)}, \tag{3.4.10}$$

где суммирование проводится по всем допустимым дискретным состояниям системы. Ясно, что

$$\bar{E} = \sum_r E_r P_r. \tag{3.4.11}$$

Подставляя в (3.4.11) выражение для P_r, получаем

$$\bar{E} \sum_s \exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right) = \sum_s E_s \exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right). \tag{3.4.12}$$

Дифференцируя обе части по T и деля на $\sum \exp(-E_s/kT)$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{kT^2}\bar{E}^2 + \frac{d\bar{E}}{dT} = \frac{1}{kT^2}\overline{E^2}, \tag{3.4.13}$$

или окончательно

$$kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = \overline{E^2} - \bar{E}^2 = \overline{\Delta E^2}. \tag{3.4.14}$$

Этот результат был впервые получен Эйнштейном. Применим его к системе, характеризуемой распределением Планка, которое следует из соотношения (3.3.55):

$$\langle n \rangle = \bar{E} = \sum_{r=0}^{\infty} E_r P_r = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \tag{3.4.15}$$

поэтому, используя формулу (3.4.14), получаем

$$\overline{\Delta E^2} = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = (h\nu)^2 \frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT) - 1]^2}. \tag{3.4.16}$$

Среднее квадратичное *дробной* флуктуации равно

$$\frac{\overline{\Delta E^2}}{\bar{E}^2} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right). \tag{3.4.17}$$

Если правую часть соотношения (3.4.17) выразить через $\bar{E}$, то оно примет вид

$$\frac{\overline{\Delta E^2}}{\bar{E}^2} = 1 + \frac{h\nu}{\bar{E}}. \tag{3.4.18}$$

При высоких температурах ($h\nu/kT \ll 1$) устанавливается равнораспределение энергии, поэтому

$$\bar{E} \sim kT, \tag{3.4.19}$$

$$\overline{\Delta E^2} = (kT)^2 \tag{3.4.20}$$

и

$$\frac{\overline{\Delta E^2}}{\bar{E}^2} = 1, \tag{3.4.21}$$

или

$$\overline{E^2} = 2\bar{E}^2, \tag{3.4.22}$$

т. е. дробная флуктуация стремится к единице, когда средняя энергия становится большой.

Мы видим, что выражение для среднего квадратичного дробных флуктуаций (3.4.18) можно разбить на два члена: «классический член», по существу соответствующий интерференции волн с случайными фазами, который приводит к соотношению (3.4.22), и «квантовый член». Этот квантовый член флуктуаций ($h\nu/kT \gg 1$)

$$\overline{\Delta E^2_{\text{qu}}} \sim h\nu\bar{E} \tag{3.4.23}$$

соответствует тому случаю, когда энергия представлена в виде энергии независимых частиц (фотонов), которые скачками переходят из одного зарешенного состояния в другое и тем самым порождают флуктуации. Рассмотрим теперь N *нормальных мод*, взаимодействующих между собой некогерентно. Пусть E_N — энергия N нормальных мод, E_0 — энергия любой из них, тогда $\bar{E}_N = N\bar{E}_0$,

$$\overline{\Delta E^2_N} = kT^2 \frac{d\bar{E}_N}{dT} = NkT^2 \frac{d\bar{E}_0}{dT} = N\overline{\Delta E^2_0} \tag{3.4.24}$$

и

$$\frac{\overline{\Delta E^2_N}}{\bar{E}^2_N} = \frac{1}{N} \frac{\overline{\Delta E^2_0}}{\bar{E}^2_0} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{h\nu}{\bar{E}_0}\right). \tag{3.4.25}$$

При больших N дробные флуктуации малы. Это соответствует требованию, согласно которому дробные флуктуации энергии макроскопической системы, находящейся в контакте с термостатом, должны быть малы — в соответствии с опытом.

Рассмотрим теперь реалистический случай, когда в процессе связи мы имеем *суперпозицию* детерминистического сигнала E_s и компоненты теплового шума E_n. Нас будет интересовать взаимодействие между циклической частотой ω_1 фурье-компоненты сигнала и циклической частотой ω_2 фурье-компоненты шума. Наше изложение следует работе Габора [3.4]. Мгновенное значение плотности энергии, возникающей вследствие интерференции, пропорционально

$$E_sE_s^* + E_nE_n^* + \{E_sE_n^* \exp[j(\omega_1 - \omega_2)t] + E_s^*E_n \exp[-j(\omega_1 - \omega_2)t],$$

где звездочками обозначены комплексно-сопряженные величины. Первые два члена соответствуют энергии сигнала и энергии шума, а члены, заключенные в фигурные скобки, возникают вследствие интерференции. Следуя Габору, запишем

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_n + \varepsilon_{sn}, \tag{3.4.26}$$

где ε_s, ε_n, ε_{sn} — плотности энергии сигнала, шума и интерференции. Среднее значение интерференции $\overline{\varepsilon_{sn}}$ равно нулю, вследствие (предполагаемого) полного отсутствия интерференции между сигналом и шумом. Среднеквадратичное значение энергии интерференции равно

$$\overline{\varepsilon_{sn}^2} = 2\overline{E_sE_s^*E_nE_n^*} = 2\varepsilon_s\bar{\varepsilon}_n, \tag{3.4.27}$$

так как ε_s — детерминистический сигнал. Среднеквадратичные флуктуации полной интенсивности представимы в виде

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \overline{[(\varepsilon_s + \varepsilon_n + \varepsilon_{sn}) - (\bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_n)]^2}, \tag{3.4.28}$$

но так как $\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_s$,

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \overline{(\varepsilon_n + \varepsilon_{sn} - \bar{\varepsilon}_n)^2} = \overline{\varepsilon_n^2} + \overline{\varepsilon_{sn}^2} + \bar{\varepsilon}_n^2 + 2\overline{\varepsilon_n\varepsilon_{sn}} - 2\overline{\varepsilon_n\varepsilon_n} - 2\overline{\varepsilon_{sn}\bar{\varepsilon}_n}. \tag{3.4.29}$$

Используя соотношения $\overline{\varepsilon_s\varepsilon_{sn}} = \overline{\bar{\varepsilon}_n\varepsilon_{sn}} = 0$ (которые выполняются из-за отсутствия корреляции между сигналом и шумом) и (3.4.27), получаем

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = \overline{\varepsilon_n^2} + 2\varepsilon_s\bar{\varepsilon}_n + \bar{\varepsilon}_n^2 - 2\overline{\varepsilon_n\bar{\varepsilon}_n} = \overline{\varepsilon_n^2} - \bar{\varepsilon}_n^2 + 2\varepsilon_s\bar{\varepsilon}_n. \tag{3.4.30}$$

Но из формулы (3.4.22) для классического члена флуктуаций следует, что

$$\overline{\varepsilon_n^2} = 2\bar{\varepsilon}_n^2,$$

поэтому

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2_{\text{class}}} = 2\varepsilon_s\bar{\varepsilon}_n + \bar{\varepsilon}_n^2, \tag{3.4.31}$$

или, так как $\varepsilon_s = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_n$ ($\bar{\varepsilon}_{sn} = 0$), окончательно

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}_{\text{class}} = 2(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_n)\bar{\varepsilon}_n + \bar{\varepsilon}_n^2 = (2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_n)\bar{\varepsilon}_n. \quad (3.4.32)$$

Квантовый член флуктуаций был уже получен нами ранее (соотношение (3.4.23)), поэтому

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}_{\text{qu}} = h\nu\bar{\varepsilon}. \quad (3.4.33)$$

Складывая соотношения (3.4.32) и (3.4.33), получаем полную интенсивность флуктуаций в системе, которая состоит из детерминистической волны, окруженной тепловым шумом,

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} = h\nu\bar{\varepsilon} + 2\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}_n - \bar{\varepsilon}_n^2. \quad (3.4.34)$$

Выражая энергии $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_n$ через число фотонов N, приходящихся на одну нормальную моду, т. е. полагая $\varepsilon = Nh\nu$ и $\bar{\varepsilon}_n = \bar{N}_n h\nu$, получаем из соотношения (3.4.34)

$$\overline{\delta N^2} = \overline{(N - \bar{N})^2} = \bar{N}(1 + 2\bar{N}_n) - N_n^2, \quad (3.4.35)$$

где $\bar{N}_n = 1/[\exp(h\nu/kT) - 1] = \langle n \rangle$.

Задача теперь состоит в том, чтобы определить число различимых способов (ступеней, энергетических уровней), которыми можно распределить dN фотонов в нормальной моде с неопределенностью $(\overline{\delta N^2})^{1/2}$ между последовательными уровнями. Ответ известен: число таких способов равно $dN/(\overline{\delta N^2})^{1/2}$. Следовательно, число способов (уровней), которыми до N_i фотонов могут быть распределены в одной (i-й) нормальной моде, равно при больших N

$$S_i = \int_{\bar{N}_n}^{N_i} \frac{dN}{(\overline{\delta N^2})^{1/2}} = \int_{\bar{N}_n}^{N_i} \frac{dN}{\left[\bar{N}(1 + 2\bar{N}_n) - \bar{N}_n^2\right]^{1/2}} = \frac{2N_i^{1/2}}{(1 + 2\bar{N}_n)^{1/2}}. \quad (3.4.36)$$

Логарифм величины S_i по основанию 2 — $\log_2 S_i$ — равен *энтропии каждой нормальной моды* (i-й), т. е. *априорной информации, переносимой каждой дискретной степенью свободы электромагнитного поля.*

Прежде чем мы получим конечный результат (т. е. найдем число единиц информации, переносимой сферической волной в шумовом окружении, которая падает на рецептор конечной площади), необходимо вычислить две величины.

Во-первых, необходимо вычислить число степеней свободы F конечной апертуры (которое совпадает с числом степеней свободы падающей волны после приема) и, *во-вторых*, вычислить число способов, которыми N фотонов могут быть распределены среди этих степеней свободы.

Спрашивается, сколько чисел необходимо для того, чтобы полностью задать (оптическое) изображение? Следуя работе ди Франциа [3.5], рассмотрим идеальный (оптический) прибор с одномерным зрачком ширины a (рис. 3.14).

Сферическая волна падает на конечную апертуру: λ — длина волны, ϑ_0 — угол падения (т. е. угол между лучом зрения и нормалью к апертуре). Интенсивность освещенности как функция углового расстояния ξ определяется выражением

$$I \sim \operatorname{sinc}^2 x = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2, \quad (3.4.37)$$

где

$$x = \frac{|\vartheta_0 - \vartheta| a}{\lambda} = \xi \frac{a}{\lambda}.$$

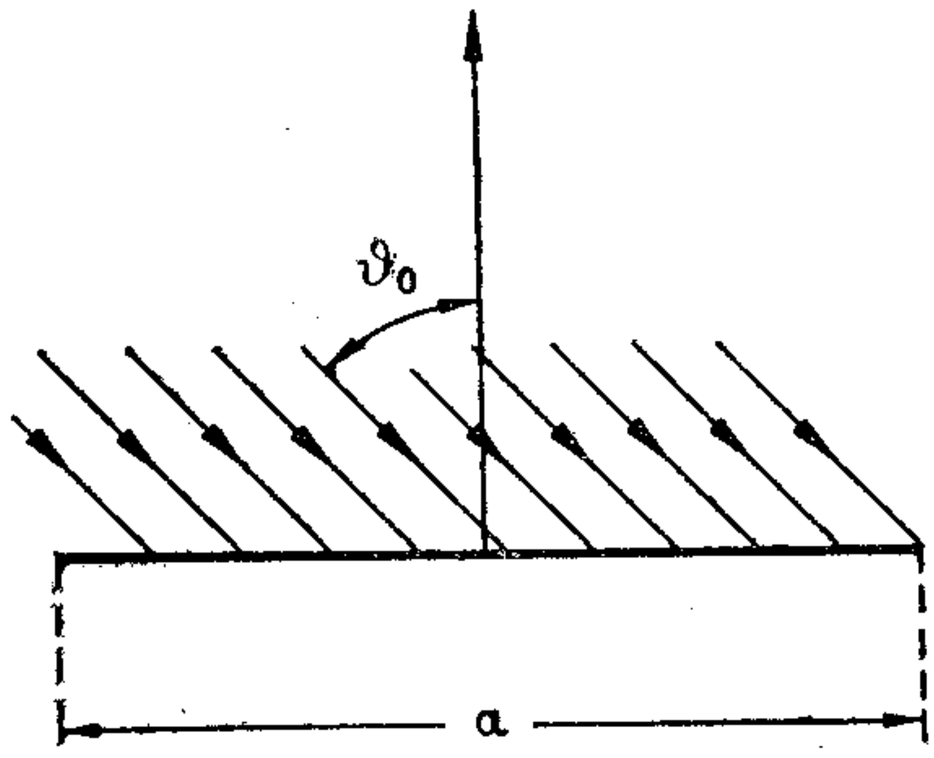


Рис. 3.14. Плоская волна, падающая на апертуру шириной a под углом падения ϑ_0.

График функции $y = \operatorname{sinc} x$ показан на рис. 3.15, *а*. Следовательно,

$$I = \operatorname{sinc}^2\left(\xi \frac{a}{\lambda}\right). \quad (3.4.38)$$

Преобразование Фурье функции $\operatorname{sinc}^2(\xi a/\lambda)$ есть функция $(\lambda/a)\operatorname{triang}(f\lambda/a)$, график которой представлен на рис. 3.15, *б*, где f — частота. Ясно, что спектр функции $\operatorname{sinc}^2(\xi a/\lambda)$ имеет критическую частоту $f_c \sim a/\lambda$. Применение теоремы Шеннона

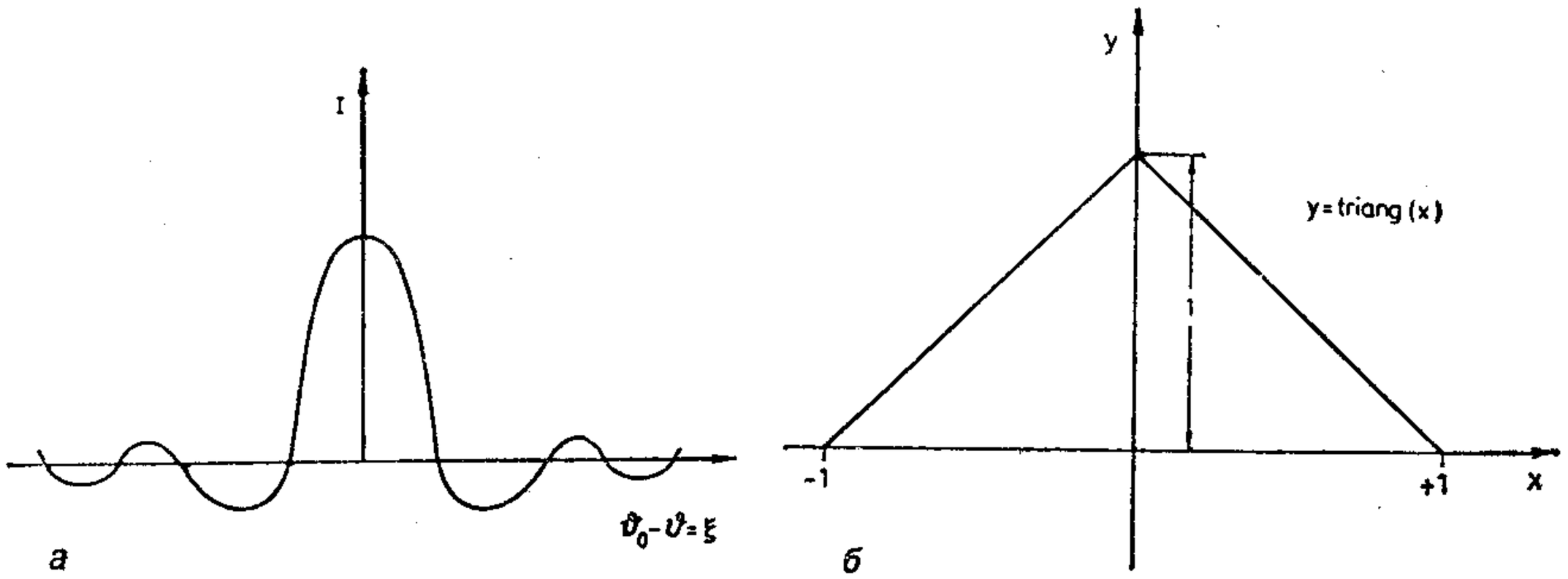


Рис. 3.15. *а* — график функции $y = \operatorname{sinc}(x)$; *б* — график функции $y = \operatorname{triang}(x)$.

(см. разд. 4.1) приводит к выводу, что освещенность апертуры полностью определяется ее значениями в дискретных точках (выборочных точках), отстоящих друг от друга на расстояние $\lambda/2a$. Если $\bar{\xi}$ — полный угол зрения оптического прибора, то полное число выборочных точек равно $2\bar{\xi}a/\lambda$.

Рассмотрим теперь двумерный зрачок, имеющий, например, форму прямоугольника со сторонами a и b. Изображение то-

чечного источника (сферической волны) представлено функцией

$$I = \operatorname{sinc}^2\left(\xi \frac{a}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\mu \frac{b}{\lambda}\right), \qquad (3.4.39)$$

где μ — угловое расстояние вдоль оси y. Применив в данном случае теорему Шеннона, мы получим число выборочных точек, необходимое для полного задания изображения; оно равно $4\bar{\xi}\bar{\mu}\,(ab/\lambda)^2$. Если Ω — полный телесный угол зрения и S — площадь входного зрачка оптического прибора, то число степеней свободы изображения равно

$$F = 4\Omega \frac{S}{\lambda^2}. \qquad (3.4.40)$$

Теперь мы подходим к заключительной части наших вычислений — ответу на вопрос о том, сколькими способами мы можем распределить N фотонов по F степеням свободы с учетом числа способов, которыми N_i фотонов распределены по каждой отдельной i-й степени свободы (3.4.36).

Представим себе, что S_i, задаваемые соотношением (3.4.36),— координаты в некотором F-мерном пространстве. Число различимых конфигураций равно числу узлов решетки с целочисленными координатами внутри гиперсферы радиуса $R = 2(1 + 2\bar{N}_n)^{-1/2} N^{1/2}$ в том секторе, где все S_i положительны. Иначе говоря, число различных конфигураций (при больших N) совпадает с объемом этого сектора гиперсферы, который (подробное изложение геометрии n-мерного евклидова пространства см. в разд. 4.1) равен

$$P = \frac{(\pi/4)^{F/2}}{\Gamma[(F/2)+1]} R^F = \frac{1}{\Gamma[(F/2)+1]} \left(\frac{\pi N}{1 + 2\bar{N}_n}\right)^{F/2}, \qquad (3.4.41)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Информационная емкость волны равна $\log_2 P$. Используя формулу Стирлинга, получаем

$$\ln \Gamma\left(\frac{F}{2} + 1\right) \sim \frac{F}{2}\left[\ln\left(\frac{F}{2}\right) - 1\right], \quad F \gg 1,$$

записав это соотношение в виде

$$\log_2 \Gamma\left(\frac{F}{2} + 1\right) \sim \frac{F}{2}\left[\log_2\left(\frac{F}{2}\right) - \log_2 e\right], \qquad (3.4.42)$$

мы получаем формулу

$$\log_2 P = \frac{F}{2} \log_2 \frac{2\pi e N}{F(1 + 2\bar{N}_n)} \quad \text{бит}, \qquad (3.4.43)$$

или

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2\pi e N}{F(1 + 2\bar{N}_n)} \quad \text{бит на степень свободы}. \qquad (3.4.44)$$

Выражение (3.4.44) задает физическую энтропию сферической электромагнитной волны, несущей N фотонов, которая в присутствии шума с средним значением $\bar{N}_n$ создает на конечной апертуре изображение с F степенями свободы. Как мы увидим, эта энтропия не имеет ничего общего с теоремой Шеннона о выборке [1].

Таким образом, мы приходим к выводу, что физический прием сигнала *неоднозначен.* Обусловлена эта неоднозначность четырьмя различными причинами.

а) Существование флуктуаций фотонов в каждой нормальной моде (степенях свободы электромагнитного поля).

б) Конечность апертуры прибора, принимающего сигнал. Конечность приводит к двум следствиям: действуя как пространственный фильтр, она искажает пропорции распространяющихся компонент падающей сферической волны и, кроме того, наделяет принятое изображение конечным числом степеней свободы. Неоднозначность изображения в этом случае обусловлена тем, что сферическая волна обладает бесконечно большим числом степеней свободы.

в) Недетектируемость фазы: во многих распространенных системах связи фаза волны не детектируется, вследствие чего переносимая фазой информация необратимо утрачивается (но в голографических системах фаза сохраняется и содержащаяся в ней информация декодируется).

г) Потеря исчезающих волн: «половина» информации, закодированной в сферической волне, необратимо теряется из-за того, что мы не можем спроектировать рецепторы, способные принимать *как* бегущие, *так* и исчезающие волны.

---

[1] *Физическая энтропия* волны связана с числом способов, которым может быть распределена по степеням свободы создаваемого изображения энергия, не превосходящая некоторого заданного предела.

С другой стороны, *селективная,* или *информационная,* энтропия связана с числом способом, которым любое заданное распределение различимых комплексов может быть реализовано при заданном числе повторений.

4

Элементы теории информации и кодирования с приложениями

4.1. Передача информации и понятие пропускной способности канала для дискретных и непрерывных сигналов без памяти

Мы уже несколько знакомы с основным понятием информации (как для дискретных, так и для непрерывных распределений) из разд. 2.3, где было введено понятие энтропии. Продолжим теперь изучение этого понятия на примере вычисления передачи информации от источника X к приемнику Y при наличии возмущений в канале, т. е. в среде между X и Y (рис. 4.1).

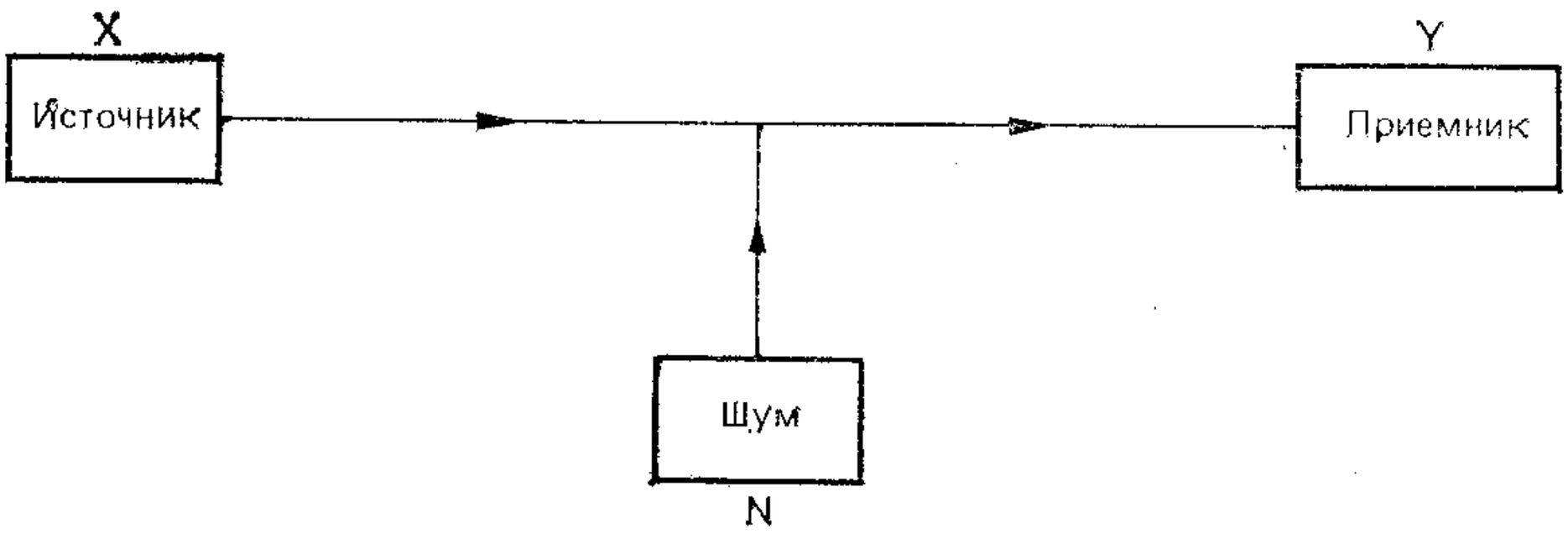


Рис. 4.1. Схема одностороннего канала связи с аддитивным шумом.

Предположим, что X имеет Λ дискретных состояний, т. е. в каждый момент времени может посылать сообщение/последовательность символов x_i с априорной (относительно приемника) вероятностью $P(x_i)$, $i \in (1, \ldots, \Lambda)$. В этом случае априорная энтропия источника равна

$$S(X) = -\sum_{i=1}^{\Lambda} P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ бит} \qquad (4.1.1)$$

и, как мы уже знаем, максимальна, когда все $P(x_i)$ равны $1/\Lambda$, т. е.

$$S_{\text{макс}}(X) = \log_2 \Lambda \text{ бит.} \qquad (4.1.2)$$

Из формулы (4.1.1) непосредственно видно, что $S(X) = 0$, когда все вероятности $P(x_i)$, кроме одной, равны нулю. Требуется доказать, что $\lim\limits_{\xi \to 0} (\xi \ln \xi) = 0$. Для этого мы запишем левую часть последнего соотношения в виде $\lim\limits_{\xi \to 0} (\ln \xi / \xi^{-1})$ и воспользуемся

правилом Лопиталя:

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1/\xi}{-1/\xi^2} = 0.$$

Таким образом, все члены в $S(X)$, в которых $P(x_i) = 0$, равны нулю, а тот единственный член, в котором $P(x_j) = 1$, также равен нулю, поскольку $\log_2 1 = 0$. Мы видим, таким образом, что информация, носителем которой является источник, передающий один сигнал/символ, *стереотипно* равна нулю.

Рассмотрим теперь, как происходит *передача* информации от X к Y. Система Y также обладает некоторым числом состояний (которое, например, может быть равно и Λ). При каждом отдельном сообщении/символе x_i, переданном источником X и поступившем на вход приемника Y, принимающая система переходит в некоторое состояние y_j. Это соответствие $x_i \to y_j$ мы называем «взаимно однозначным отображением».

Предположим, что систему Y наблюдатель видит в состоянии y_j, и пусть $P(x_i/y_j)$ — вероятность того, что приемник X при этом находится в состоянии x_i. В отсутствие шума в канале $P(x_i/y_j) = 1$ при $i = j$ и $P(x_i/y_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, матрица $\Lambda \times \Lambda$ элементов $P(x_i/y_j)$ в отсутствие шума в канале была бы диагональна.

Но при наличии шума матрица канала, как мы условимся ее называть, в принципе содержит $\Lambda \times \Lambda$ ненулевых элементов $P(x_i/y_j)$. Следовательно, информация, получаемая системой Y после того, как она перейдет в состояние y_i, равна

$$I(x_i/y_i) = -\log_2 P(x_i/y_i) \text{ бит.} \qquad (4.1.3)$$

Чтобы вычислить *условную энтропию* $S(X/Y)$, т. е. остаточную неопределенность, испытываемую системой Y после проведения всех возможных наблюдений над полным репертуаром состояний приемника X, мы усредняем величину (4.1.3) по всем возможным состояниям систем X и Y. Сначала мы усредняем по всем возможным (и неизвестным) состояниям источника X и получаем условную энтропию источника X при некотором заданном состоянии y_j приемника Y:

$$S(X/y_i) = \langle I(X/y_i) \rangle = -\sum_{i=1}^{\Lambda} P(x_i/y_i) \log_2 P(x_i/y_j). \qquad (4.1.4)$$

Затем мы усредняем по всем состояниям приемника Y:

$$S(X/Y) = \langle I(X/Y) \rangle = \sum_{j=1}^{\Lambda} P(y_j) S(X/y_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\Lambda} \sum_{j=1}^{\Lambda} P(y_j) P(x_i/y_j) \log_2 P(x_i/y_j). \qquad (4.1.5)$$

По теореме Байеса

$$P(y_j)\,P(x_i/y_j) = P(x_i,\ y_j),$$

поэтому

$$S(X/Y) = -\sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} P(x_i,\ y_j)\log_2 P(x_i/y_j), \qquad (4.1.6a)$$

где $P(x_i, y_j)$ — совместная вероятность состояний x_i (источника X) и y_j (приемника Y). Таким образом, условная энтропия $S(X/Y)$ есть мера неопределенности в состоянии источника X, когда приемник Y доступен непосредственному наблюдателю — при наличии помех.

Информация (переданная от X к Y) равна просто разности между начальной неопределенностью $S(X)$ и конечной неопределенностью $S(X/Y)$. Таким образом,

$$I(X\to Y) = S(X) - S(X/Y) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\Lambda} P(x_i)\log_2 P(x_i) + \sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} P(x_i,\ y_j)\log_2 P(x_i/y_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\Lambda}\left[\sum_{j=1}^{\Lambda} P(x_i,\ y_j)\right]\log_2 P(x_i) + \sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} P(x_i,\ y_j)\log_2 P(x_i/y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{\Lambda} P(x_i,\ y_j)\log_2\left(\frac{P(x_i)}{P(x_i/y_j)}\right) \text{ бит}. \qquad (4.1.7a)$$

Нетрудно видеть, что $I(X\to Y) \geqslant 0$.

В тех случаях, когда в канале нет шума, $P(x_i/y_j) = 1$ при $i = j$ и $P(x_i/y_j) = 0$ при $i \neq j$. Величина $S(X/Y)$, задаваемая соотношением (4.1.6а), обращается в нуль (члены с $i = j$ обращаются в нуль, так как $\log_2 1 = 0$, члены $i \neq j$ обращаются в нуль, так как по доказанному выше $\lim\limits_{\xi\to 0}(\xi \ln \xi) = 0$; в нашем случае $\xi = P(x_i/y_j)$). Таким образом,

$$I(X\to Y) = S(X) = I_{\text{макс}}. \qquad (4.1.8)$$

В противоположном случае, когда шум вносит такие возмущения, что x_i и y_j становятся полностью некоррелированными,

$$P(x_i,\ y_j) = P(x_i)\,P(y_j), \qquad (4.1.9)$$

поэтому в (4.1.6а)

$$P(x_i) = P(x_i/y_j) \qquad (4.1.10)$$

[так как по теореме Байеса при всех i и j в общем случае $P(x_i, y_j) = P(y_j)\,P(x_i/y_j)$]. Правая часть соотношения (4.1.7а)

обращается в нуль ($\log_2 1 = 0$), а это означает, что $S(X/Y) = S(X)$ и $I(X \to Y) = 0$, как и следовало ожидать.

Если источник, приемник и канал связи характеризуются непрерывными функциями плотности вероятности, соотношения (4.1.6а), (4.1.7а) переходят в соотношения

$$S(X/Y) = -\int\int P(x, y) \log_2 P(x/y)\, dx\, dy, \qquad (4.1.6б)$$

и

$$I(X \to Y) = S(X) - S(X/Y) = -\int\int P(x, y) \log_2 \frac{P(x)}{P(x/y)}\, dx\, dy. \qquad (4.1.7б)$$

Обратимся теперь к важной проблеме преобразования непрерывной волны, обладающей бесконечно большим числом степеней свободы (если такая волна представляет собой сигнал, содержащий информацию, то для приема такого сигнала потребовалось бы бесконечно большое время), в дискретную временную последовательность; иначе говоря, обратимся к теореме Шеннона о выборке.

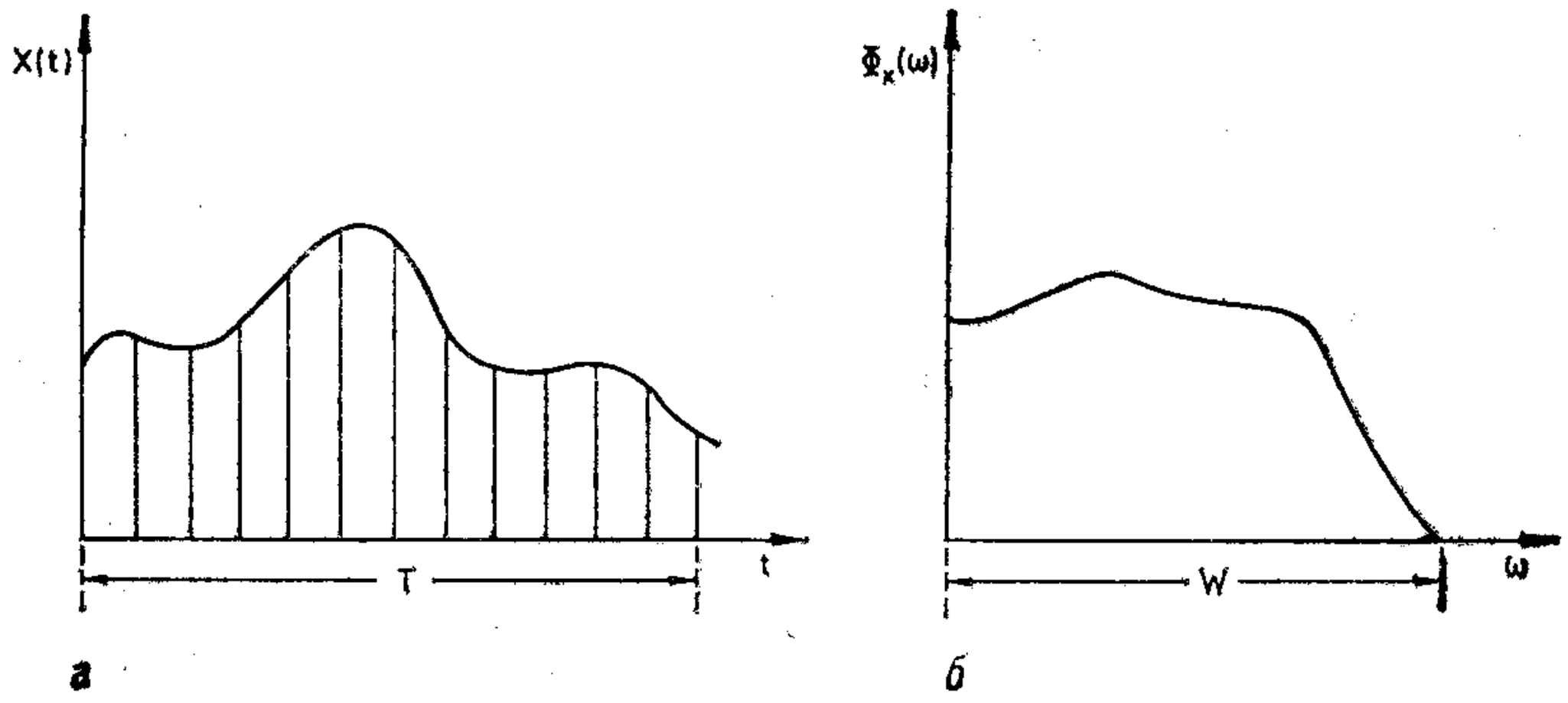


Рис. 4.2. Функция ($а$) и ее преобразование Фурье ($б$), о которых говорится в теореме о выборке.

Рассмотрим непрерывный ограниченный по времени отрезок волны $X(t)$, как на рис. 4.2, $а$, достаточно гладкий для того, чтобы его преобразование Фурье (его спектр) имело конечную ширину полосы с критической частотой W (рис. 4.2, $б$). Как следует наилучшим образом выбирать $X(t)$ вдоль оси времени, чтобы получить дискретный временной ряд с конечным числом степеней свободы? Если этот аналог цифрового преобразования осуществим, то мы можем заменить одномерную волну с бесконечным числом степеней свободы гипервектором (в некотором многомерном пространстве), компоненты которого являются выборочными координатами сигнала $X(t)$.

Из доказательства этой теоремы (которое мы не приводим, поскольку читатель может найти его в любом хорошем учебнике теории информации) следует, что объем выборки равен $2WT$ (т. е. гипервектор пополняется выборочными координатами со скоростью одна компонента каждую $1/2W$ секунды). Таким образом, впредь вместо непрерывной волны в одномерном (временном) пространстве мы можем говорить о гипервекторах в n-мерном пространстве ($n = 2WT$). Некоторые очень «хитрые» свойства, представленные в n-мерном евклидовом пространстве, во многих отношениях выходят за рамки доступного интуиции и здравому смыслу. В этой связи мы считаем уместным совершить небольшой экскурс и опишем некоторые наиболее существенные особенности *n-мерного евклидова пространства* в качестве подготовки к дальнейшему изложению (проблем передачи информации и оптимального приема непрерывных волновых сигналов). Мы будем следовать работе Хэмминга [4.1].

Термин «n-мерное пространство» означает лишь, что мы имеем n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Называя пространство евклидовым, мы понимаем под этим пифагорово расстояние $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ и определяем с помощью этого выражения сферу радиуса r. В частности, мы хотим вычислить объем n-мерной сферы. Этот объем зависит от радиуса r как r^n. Запишем пока, что $V_n(r) = C_n r^n$, где C_n — некоторая постоянная (значение которой нам предстоит вычислить), зависящая от n. (Например, $C_1 = 2\pi$, $C_2 = \pi$ и $C_3 = 4\pi/3$.)

Чтобы определить значение C_n, нам придется ввести знаменитую *гамма-функцию* $\Gamma(n)$ (приношу извинения читателям за то, что вычислить C_n иначе невозможно). По существу речь идет об исследовании некоторого определенного интеграла как функция параметра n. Рассмотрим интеграл

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx. \qquad (4.1.11)$$

При $n > 1$ мы можем, интегрируя по частям, получить

$$\Gamma(n) = x^{n-1} \frac{e^{-x}}{-1}\Big|_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{n-2} dx,$$

или

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1); \qquad (4.1.12)$$

при $n = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}\,|_0^\infty = 1; \qquad (4.1.13)$$

следовательно, при любом целом n

$$\Gamma(2)=1, \quad \Gamma(3)=2!, \quad \Gamma(4)=3! \ \ldots, \qquad \Gamma(n)=(n-1)! \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.1.14}$$

Заметим кстати, что гамма-функция служит естественным обобщением факториальной функции, так как интеграл (4.1.11) существует и при *нецелых* n.

Рассмотрим далее гамма-функцию при значении аргумента, равном 1/2. Запишем определение гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx. \tag{4.1.15}$$

Полагая $x=t^2$, получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \tag{4.1.16}$$

(это так называемый интеграл ошибок).

Рассмотрим произведение

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy. \tag{4.1.17}$$

Перейдем к полярным координатам

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\vartheta=2\pi\,\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^\infty=\pi, \tag{4.1.18}$$

поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{4.1.19}$$

Чтобы найти теперь значение нашей постоянной C_n, мы можем воспользоваться аналогичным трюком, а именно умножить интеграл, задающий гамма-функцию, на себя и перейти к полярным координатам.

Рассмотрим произведение n таких интегралов:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n=\pi^{n/2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_0^\infty e^{-r^2}\,\frac{dV_n(r)}{dr}\,dr, \tag{4.1.20}$$

где $dV_n=dx_1dx_2\ldots dx_n$ — элемент объема.

Сравним это выражение с результатом, полученным нами при $n = 2$. В этом случае мы получили выражение (4.1.18):

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = \int_0^\infty e^{-r^2} \frac{d(\pi r^2)}{dr}\, dr. \qquad (4.1.21)$$

Ясно, что можно записать

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n = \pi^{n/2} = C_n \int_0^\infty e^{-r^2} n r^{n-1}\, dr. \qquad (4.1.22)$$

Полагая $r^2 = t$, $dr = (t^{-1/2}/2)\, dt$, преобразуем соотношение (4.1.22) к виду

$$\pi^{n/2} = \frac{nC_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{(n-1)/2}}{t^{1/2}}\, dt = \frac{nC_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{(n/2)-1}\, dt =$$

$$= \frac{nC_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \qquad (4.1.23)$$

Следовательно,

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \qquad (4.1.24)$$

и

$$C_n = \frac{2\pi}{n} C_{n-2}. \qquad (4.1.25)$$

Таким образом,

$$V_n(r) = C_n r^n = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \qquad (4.1.26)$$

т. е. мы получаем формулу, которую использовали при вычислении энтропии n-мерного оптического изображения (разд. 3.4).

Интересные данные о характере зависимости объема единичной сферы ($r = 1$), т. е. коэффициента C_n, в зависимости от размерности n евклидова пространства приведены в табл. 4.1.

К своему удивлению мы обнаруживаем, что объем единичной сферы сначала возрастает с увеличением n и достигает максимума при $n = 5$, но быстро убывает до нуля при $n \to \infty$! При $n = 2K$ объем n-мерной сферы радиуса r равен

$$\frac{\pi^K}{K!} r^{2K} = \frac{(\pi r^2)^K}{K!}. \qquad (4.1.27)$$

Так как $K > \pi r^2$, увеличение K (или n) приводит *к уменьшению* объема. Более того, при любом сколь угодно большом r при увеличении размерности пространства объем сферы может

Таблица 4.1. Объем единичной сферы в евклидовых пространствах различной размерности

n	C_n
1	2
2	3,4
3	4,188
4	4,93
5	5,26
6	5,16
7	4,72
8	4,05
$2K$	$\frac{\pi^K}{K!} \to 0$ при $K \to \infty$

быть сделан сколь угодно малым. [При нечетных n объем $V_n(r)$, как видно из формулы (4.1.26), при увеличении n изменяется гладким образом.]

Рассмотрим теперь ту часть объема n-мерной сферы, которая заключена внутри слоя (или оболочки) сколь угодно малой толщины вблизи поверхности сферы. Эта часть составляет

$$\frac{\text{Объем оболочки}}{\text{Объем сферы}} = \frac{C_n r^n - C_n (r-\delta)^n}{C_n r^n} = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{r}\right)^n, \quad (4.1.28)$$

и доля ее стремится к 1, когда n возрастает при заданном δ. Так мы открываем для себя еще одну удивительную особенность n-мерной сферы: почти весь объем такой сферы, так сказать, сосредоточен сколь угодно близко от поверхности. Внутри n-мерной сферы при больших n просто не так уж много места, весь объем сосредоточен *у поверхности* сферы!

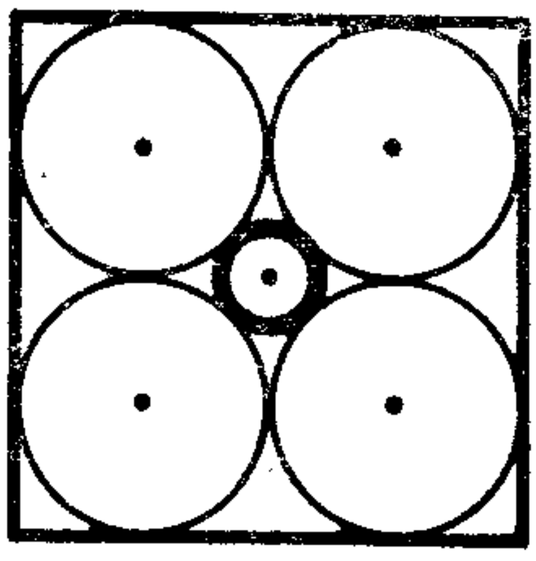


Рис. 4.3. «Парадокс» центральной сферы в n-мерном евклидовом пространстве (см. текст).

Наш экскурс в геометрию n-мерного пространства мы завершим еще более поразительным парадоксом, также связанным с n-мерными сферами (рис. 4.3). Предположим, что дан квадрат 4×4 с центром в начале координат $(0, 0)$, в который вписаны четыре единичные окружности — по одной в каждом из четырех углов. Вычислим радиус окружности с центром в начале координат, касающейся ближайших к началу координат точек четырех единичных окружностей. Этот

радиус равен

$$r_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414\ldots . \quad (4.1.29)$$

Рассмотрим далее аналогичную задачу в случае трех измерений, т. е. куб $4 \times 4 \times 4$ с *восемью* вписанными в углы единичными сферами. Внутренняя сфера с центром в начале координат имеет радиус

$$r_3 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} - 1 = \sqrt{3} - 1 = 0{,}732\ldots . \quad (4.1.30)$$

Наконец, перейдем к n-мерному пространству. Построим гиперкуб $4 \times 4 \times \ldots \times 4$ с 2^n единичными сферами в углах, каждая из которых касается всех n соседних сфер. Радиус внутренней сферы равен $r_n = \sqrt{n} - 1$; при $n = 10$ это дает

$$r_{10} = \sqrt{10} - 1 = 3{,}16 - 1 = 2{,}16 > 2. \quad (4.1.31)$$

Неравенство $r_{10} > 2$ означает, что внутренняя сфера простирается за пределы куба!

Чтобы подчеркнуть этот кажущийся парадокс еще больше, рассмотрим объем этой n-мерной внутренней сферы в сравнении с объемом всего куба как функцию от n. Предположим (для упрощения вычислений), что n четно, т. е. $n = 2K$. Тогда

$$\frac{\text{Объем внутренней сферы}}{\text{Объем куба}} = C_n \frac{(\sqrt{n}-1)^n}{4^n} = C_{2K} \frac{(\sqrt{2K}-1)^{2K}}{4^{2K}} =$$

$$= \frac{\pi^K (\sqrt{2})^{2K}}{K!} \frac{(\sqrt{K})^{2K}}{4^{2K}} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2K}}\right)^{\sqrt{2K}}\right]^{\sqrt{2K}} =$$

$$= \frac{\pi^K 2^K K^K}{4^{2K} K!} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2K}}\right)^{\sqrt{2K}}\right]^{\sqrt{2K}}. \quad (4.1.32)$$

Используя для $K!$ приближение Стирлинга, а именно $K! \approx \approx K^K e^{-K} \sqrt{2\pi K}$ и предельное соотношение $\lim\limits_{x \to \infty} [1 - (1/x)]^x = 1/e$, получаем

$$\frac{\text{Объем внутренней сферы}}{\text{Объем куба}} \approx \frac{\pi^K 2^K K^K}{4^{2K} K^K e^{-K} \sqrt{2\pi K}} e^{-\sqrt{2K}} = \left(\frac{\pi e}{8}\right)^K \frac{e^{-\sqrt{2K}}}{\sqrt{2\pi K}}. \quad (4.1.33)$$

Так как

$$\frac{\pi e}{8} \sim 1{,}0675,$$

нетрудно видеть, что при увеличении K множитель $(\pi e/8)^K$ неограниченно возрастает *быстрее*, чем два других множителя

$\exp(-\sqrt{2K})$ и $1/\sqrt{2\pi K}$ стремятся к нулю. Таким образом, мы заключаем, что при $K \to \infty$ объем центральной (внутренней) сферы становится сколь угодно большим по сравнению с объемом куба, содержащим все $2^{2K} = 2^n$ единичных сфер, вписанных в его углы. (К такому же выводу мы пришли бы и в случае нечетной размерности $n = 2K - 1$ пространства, но вычисления были бы более громоздкими.)

Наконец, выясним, что происходит при увеличении n с гипервектором, проведенным из начала координат в точку (1, 1, ..., 1). Так как все направляющие косинусы такого гипервектора равны $1/\sqrt{n}$, мы видим, что при $n \to \infty$ наш гипервектор становится «почти» перпендикулярным *ко всем* осям координат! Это обстоятельство имеет огромное значение для создания эффективных кодов, способных преодолевать шум в канале связи (разд. 4.2).

На этом мы завершим свой экскурс, посвященный различного рода тонкостям многомерного евклидова пространства, и вернемся к проблемам **передачи информации** и оптимального приема непрерывных волновых сигналов, которые мы уже успели заменить *гипервекторами в n-мерном евклидовом пространстве* ($n = 2WT$).

На языке формул это означает, что испущенный источником сигнал $X(t)$ заменен гипервектором $\mathbf{X}(t)$ с координатами x_1, x_2, ..., x_{2WT}, амплитуды которых равны амплитудам сигнала $X(t)$ в (выборочные) моменты времени 0, $1/2W$, $2/2W$, ..., $2WT/2W = T$. Мощность (детерминистического) переданного (волнового) сигнала равна

$$\langle X^2 \rangle = \sum_{i=1}^{2WT} \langle x_i^2 \rangle = 2WT \langle x_i^2 \rangle = 2WT\sigma_0^2, \qquad (4.1.34)$$

где σ_0^2 — дисперсия (средняя мощность) сигнала $\mathbf{X}(t)$. Обратимся теперь к шуму: шум в канале связи можно дискретизировать с помощью выборки так же, как и детерминистический сигнал, и получить некоторый гипервектор $\mathbf{N}(t)$ в том же $2WT$-мерном пространстве. Очевидное различие состоит в том, что выборочные значения шума n_1, n_2, ..., n_{2WT} являются не детерминистические координаты, а одномерные функции плотности вероятности (ф. п. в.) (подчеркнем, что речь идет о каждом выборочном значении шума). Гипервектор шума играет роль вектора ошибки в пространстве состояний.

Принятый сигнал $Y(t)$ также можно представить гипервектором $\mathbf{Y}(t)$. Если мощность шума относительно мала и его допустимо считать *аддитивным*, т. е. влияющим на амплитуду, а не на фазу переданного сигнала $\mathbf{X}(t)$, то на принимающем конце канала, после того как мы отфильтруем высокочастотный

электромагнитный носитель сигнала, будет получен сигнал

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t), \tag{4.1.35}$$

или, если перейти к мощности,

$$\langle \mathbf{Y}^2 \rangle = \mathbf{X}^2 + \langle \mathbf{N}^2 \rangle = \mathbf{X}^2 + \sum_{i=1}^{2WT} \langle n_i^2 \rangle = \mathbf{X}^2 + 2WT \langle n_i^2 \rangle = \mathbf{X}^2 + WT\sigma^2. \tag{4.1.36}$$

Выражение (4.1.36) получено в предположении, что сигнал и шум полностью некоррелированы и перекрестный член $2\langle X \cdot \mathbf{N} \rangle$ может быть отброшен. Для теплового шума такое предположение выполняется. Мы предполагаем также, что все ф. п. в. выборочных значений шума $p(n_i)$ имеют нулевые средние и одну и ту же дисперсию σ^2. Таким образом, действие шума на переданный сигнал приводит к тому, что конец вектора $\mathbf{X}$ в $2WT$-мерном пространстве состояний оказывается внутри сферы, или облака «неопределенности» радиуса r_N, имеющего некоторую (пока не известную) ф. п. в. $p(r_N)$ и среднеквадратичное значение $r = \sigma\sqrt{2WT}$.

Определим теперь новый параметр (и в дальнейшем вычислим его для ряда представительных случаев) — *пропускную способность* данной среды, служащей посредником при передаче информации от источника к приемнику.

Назовем *пропускной способностью* среды максимальное число единиц информации (битов), которое данная среда может пропустить через себя в единицу времени без ошибок, вызываемых термодинамическим состоянием канала (т. е. «турбулентностью» в канале). Иначе говоря, пропускная способность канала связи есть максимальная скорость безошибочной передачи сигнала в данной среде, измеряемая в битах в секунду.

Пусть, например, среда допускает передачу прямоугольных импульсов одинаковой длины ξ различных амплитуд и единичной ширины со скоростью до ν импульсов в секунду без сколько-нибудь заметных искажений. Пропускная способность такой среды равна

$$C = \nu \log_2 \xi \left(= \log_2 \xi^{\nu}\right) \text{ бит/с}, \tag{4.1.37}$$

так как эта величина равна *максимальному* количеству информации, содержащемуся в таком сигнале.

В общем случае пропускная способность канала связи определяется как

$$C = \frac{1}{T} \max I(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}), \tag{4.1.38}$$

если скорость передачи информации постоянна. Подставляя в (4.1.38) выражение (4.1.7а) для $I(\mathbf{X} \to \mathbf{Y})$, получаем

$$C = \frac{1}{T} \max \{S(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}/\mathbf{Y})\} = \frac{1}{T} \max \{S(\mathbf{Y}) - S(\mathbf{Y}/\mathbf{X})\}, \quad (4.1.39)$$

где максимум берется по всем возможным отображениям (кодированиям) сигнала $\mathbf{X}(t)$. Так как шум $\mathbf{N}$ считается здесь статистически независимым от сигнала $\mathbf{X}$, мы можем записать

$$S(\mathbf{Y}) = S(\mathbf{X}) + S(\mathbf{N}). \quad (4.1.40)$$

Для безошибочной передачи информации нам необходимо минимизировать условную энтропию сигнала, т. е. положить $S(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = 0$, откуда

$$S(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = S(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - S(\mathbf{X}) = S(\mathbf{Y}) + S(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) - S(\mathbf{X}) =$$
$$= S(\mathbf{Y}) - S(\mathbf{X}) = S(\mathbf{X}) + S(\mathbf{N}) - S(\mathbf{X}) = S(\mathbf{N}). \quad (4.1.41)$$

Соотношение (4.1.41) означает просто, что существование в канале шума $\mathbf{N}$ является единственной причиной, по которой передающий информацию не знает точно, что́ именно «увидит» принимающий информацию. Таким образом,

$$C = \frac{1}{T} \max [S(\mathbf{Y}) - S(\mathbf{N})] \text{ бит/с}. \quad (4.1.42)$$

Максимизируем разность $S(\mathbf{Y}) - S(\mathbf{N})$ в наихудшем из возможных случаев аддитивного шума, т. е. для шума с максимальной величиной $S(\mathbf{N})$; здесь $S(\mathbf{N})$ — энтропия $2WT$-мерного случайного процесса.

Мы можем записать $S(\mathbf{N}) = S(n_1, n_2, \ldots, n_{2WT})$; в общем случае справедливо неравенство

$$S(n_1, n_2, \ldots, n_{2WT}) \leqslant \sum_{i=1}^{2WT} S(n_i), \quad (4.1.43)$$

переходящее в равенство только тогда, когда случайные переменные $n_1, n_2, \ldots, n_{2WT}$ статистически независимы. Следовательно, наихудший случай реализуется, когда

$$S(\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^{2WT} S(n_i). \quad (4.1.44)$$

Теперь нам необходимо найти ф. п. в., при которой (и заданной мощности σ^2) $S(n_i)$ достигает максимума. Но эта задача уже решена нами в разд. 2.3.2: для того чтобы при всех $i \in (1, 2, \ldots, 2WT)$ величина $S(n_i)$ достигала максимума при заданной мощности σ^2, n_i должно иметь гауссово распределе-

ние. А раз так:

$$S(n_i) = \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}), \tag{4.1.45}$$

где σ — общая дисперсия всех одномерных ф. п. в. $p(n_i)$, $i \in (1, 2, \ldots, 2WT)$. Наконец,

$$S(\mathbf{N})_{\text{макс}} = \sum_{i=1}^{2WT} \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}) = WT\log_2(2\pi e\sigma^2). \tag{4.1.46}$$

Отсюда мы заключаем, что наихудшей разновидностью аддитивного многомерного шума является такая, у которой все одномерные компоненты n_i имеют гауссовское распределение и *стохастически независимы* друг от друга. В свою очередь из этой стохастической независимости следует, что автокорреляционная функция $B(\tau)$ шума $\mathbf{N}(t)$ должна обращаться в нуль только в дискретные моменты времени

$$\tau = \frac{1}{2W}, \frac{2}{2W}, \frac{3}{2W}, \ldots, T.$$

Такая автокорреляционная функция имеет вид

$$B(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(W\tau)}{W\tau}. \tag{4.1.47}$$

Кроме того, взяв преобразование Фурье от $B(\tau)$ и получив тем самым спектр шума, мы обнаружим, что спектр шума $\mathbf{N}(t)$ должен быть плоским при всех частотах W. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что наихудший из возможных аддитивный шум имеет многомерную *гауссовскую* ф. п. в. и *плоский* спектр частот («белый шум») в полосе частот W.

Для того чтобы разность $S(\mathbf{Y}) - S(\mathbf{N})$ в (4.1.42) была максимальной, гипервектор $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ должен иметь многомерное гауссово распределение и плоский спектр. В свою очередь это означает, что несущий информацию гипервектор $\mathbf{X}$ должен быть *кодирован* (разд. 4.2), т. е. отображен так, чтобы его можно было трансформировать в каноническую ф. п. в. с белым спектром [на принимающем конце канала связи должна производиться обратная операция — декодирование — для детектирования исходного сигнала $X(t)$]. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} S(\mathbf{Y})_{\text{макс}} &= WT\log_2(2\pi e\langle y^2\rangle) = WT\log_2[2\pi e(\langle x^2\rangle + \sigma^2)] = \\ &= WT\log_2[2\pi e\sigma^2(1+\Gamma)], \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

где

$$\Gamma = \frac{\langle x^2\rangle}{\sigma^2} = \text{Отношение сигнал/шум}. \tag{4.1.49}$$

Подставляя выражения (4.1.46), (4.1.48) в (4.1.42), получаем окончательное выражение для пропускной способности канала связи

$$C = W \log_2 (1 + \Gamma) \text{ бит/с.} \qquad (4.1.50)$$

При $\Gamma \gg 1$ (сильный сигнал и/или слабый шум)

$$C \sim W \log_2 \Gamma,$$

а при $\Gamma \ll 1$ (слабый сигнал, сильный шум)

$$1 + \Gamma \sim e^{\Gamma}, \quad C \sim W\Gamma \log_2 e, \quad \text{или} \quad C \sim 1{,}443 W\Gamma.$$

В формуле (4.1.50) — знаменитой *формуле Шеннона* — замечательно то, что пропускная способность канала связи *остается*

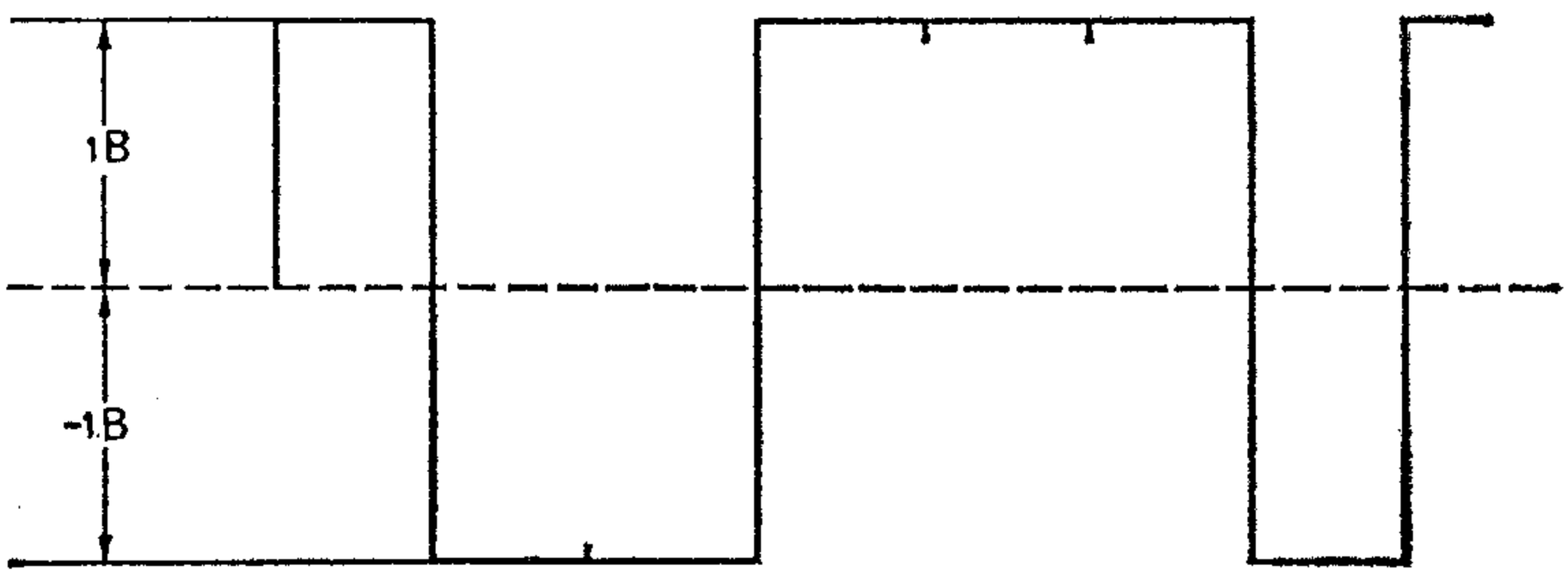


Рис. 4.4. Случайная последовательность импульсов +1 и —1.

конечной даже в тех случаях, когда амплитуда сигнала по величине на много порядков ниже амплитуды окружающего шума, и что значение C можно улучшить, увеличивая ширину полосы частот W сигнала, несущего информацию.

Прежде чем идти дальше, приведем один конкретный пример использования формулы (4.1.50). Предположим, что сигнал состоит из последовательности дискретных прямоугольных импульсов с равновероятными амплитудами +1 или —1 В (рис. 4.4). Ширина полосы канала W равна 100 Гц, передача сигнала происходит при наличии гауссовского белого шума со спектральной плотностью $\sim 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ Вт/Гц. Полная мощность шума равна $\sigma^2 = 0{,}3$ Вт (в полосе частот шириной ± 1000 Гц), одномерная ф. п. в. шума имеет вид

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0{,}3}} \exp\left(-\frac{n^2}{2 \cdot 0.3}\right). \qquad (4.1.51)$$

Принятая последовательность импульсов — более или менее искаженная шумом (действие которого сводится к замене положительных импульсов отрицательными или к замене отрицательных импульсов положительными) — интерпретируется пу-

тем рассмотрения последовательности в любой точке между двумя последовательными импульсами (рис. 4.4).

Условимся считать, что шум искажает положительный импульс, если имеет отрицательную амплитуду, превосходящую по абсолютной величине 1 В, и что шум искажает отрицательный импульс, если имеет положительную амплитуду, превосходящую 1 В.

Так как вероятности воздействия шума на положительные и отрицательные импульсы мы считаем равными, полная вероятность приема ошибочного импульса равна

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} P(n)\,dn + \frac{1}{2}\int_{+1}^{\infty} P(n)\,dn = \int_{-\infty}^{-1} P(n)\,dn =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0{,}3}}\int_{-\infty}^{-1} \exp\left(\frac{-n^2}{2 \cdot 0{,}3}\right) dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1\sqrt{0{,}3}} e^{-y^2/2}\,dy \sim 0{,}0340. \quad (4.1.52)$$

Это означает, что 3,4 % принятых импульсов в последовательности ошибочны.

Количество информации $I(X \to Y)$, переданной от источника к приемнику за один импульс, может быть вычислено по формуле

$$I(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}) = S(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X/Y}) = -\left[\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right] +$$

$$+(0{,}034\log_2 0{,}034 + 0{,}966\log_2 0{,}966) = 0{,}786 \text{ бит/импульс.} \quad (4.1.53)$$

Скорость передачи импульсов составляет, разумеется, 2000 импульсов в секунду, поэтому скорость передачи информации для рассматриваемой системы составляет всего лишь

$$\frac{I(\mathbf{X} \to \mathbf{Y})}{T} = 2000 \cdot 0{,}786 = 1572 \text{ бит/с.} \quad (4.1.54)$$

Сравним теперь эту скорость с «теоретическим максимумом», задаваемым формулой Шеннона. Отношение сигнал/шум равно

$$\Gamma = \frac{1}{0{,}3},$$

и

$$C = W\log_2(1 + \Gamma) = 1000\log_2(1 + 3{,}333) = 2115{,}5 \text{ бит/с.} \quad (4.1.55)$$

Таким образом, рассматриваемая система передает информацию со скоростью ниже оптимальной и составляющей 74,5 % от теоретического максимума, кроме того, принимаемый сигнал

на 3,4 % ошибочен. (Как мы увидим в дальнейшем, при надлежащем кодировании реальная скорость передачи информации может асимптотически стремиться к шенноновскому пределу.)

4.2. Некоторые идеи теории кодирования, могущие быть полезными при минимизации ошибок приема

Большинство традиционных односторонних линий связи устроено так, как показано на блок-схеме, изображенной на рис. 4.5. Объясним кратко функциональное назначение каждого «ящика» слева направо.

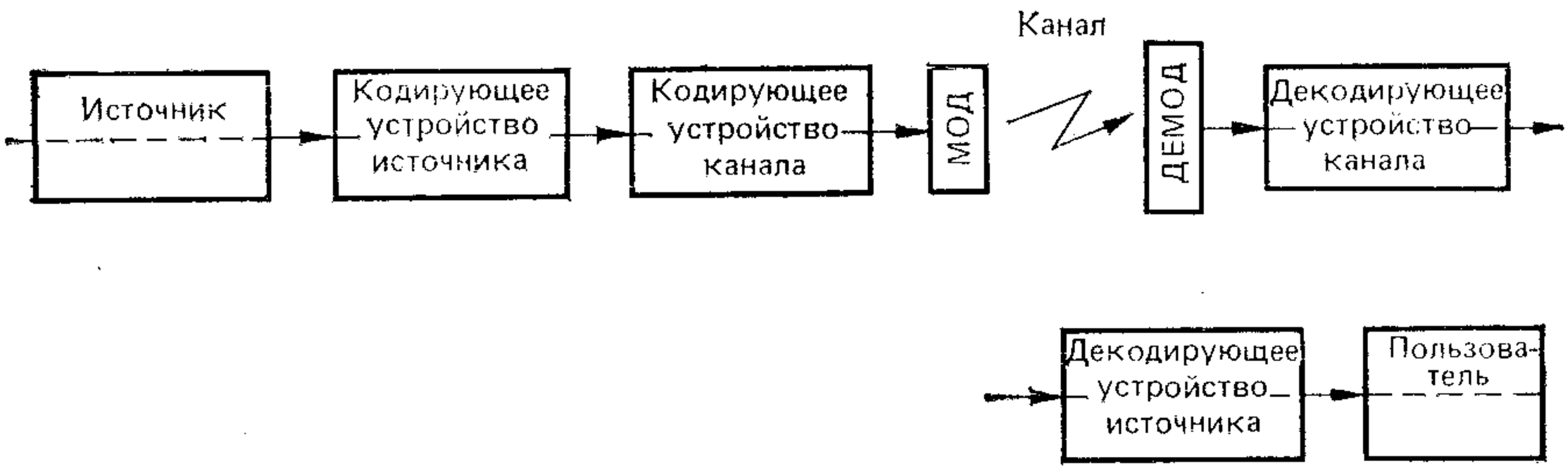


Рис. 4.5. Блок-схема линии связи.

Источник *генерирует* информацию (динамику этого процесса мы рассмотрим в гл. 6), которую передатчик должен довести до пользователя. Передатчик обладает непрерывным или дискретным набором «сигналов», общее число и априорное распределение вероятностей которых известны пользователю заранее. Канал связи представляет собой физическую среду, которая заполняет пространство между двумя партнерами/системами, между которыми установлена связь. Шум в канале связи может быть аддитивным или мультипликативным, без памяти или марковским. (Последнее свойство означает, что искажения, вносимые шумом в передаваемый сигнал, могут быть либо независимыми, либо встречаться «группами», или «всплесками», что свидетельствует о наличии между ними определенной стохастической взаимозависимости.) И в том, и в другом случае единственным параметром канала связи, имеющим строго операционное значение, является его пропускная способность.

Кодирующее устройство (кодер) источника преобразует сигнал на выходе источника в форму, пригодную для реально осуществимой передачи по каналу связи. Точно так же декодирующее устройство (декодер) источника преобразует сигнал на выходе источника в форму, пригодную для *интерпретации*

сигнала пользователем. Если говорить более точно, то функция декодера источника состоит в том, чтобы *отображать* выходной сигнал $x(t)$, порождаемый источником за некоторый временной интервал, в одно из (конечных) множеств отобранных заранее сообщений (строк импульсов, или «символов»). Таким образом, пространство возможных выходных сигналов источника разбивается на множество классов эквивалентности. Кодер источника указывает *кодеру канала связи*, какой из этих классов содержит наблюденный выходной сигнал источника. Эта операция повторяется в последовательные интервалы времени. *Кодер канала*, получив информацию о том, что выходной сигнал источника принадлежит m-му классу эквивалентности, передает волновой сигнал $\bar{x}_m(t)$ по каналу. *Декодер канала связи* изучает полученный волновой сигнал $y(t)$, искаженный шумом, на подходящем временном интервале и принимает решение относительно того, какое сообщение было передано по каналу.

Декодер канала связи передает свою оценку m' числа сигналов декодеру источника, который в свою очередь выдает пользователю сигнал $\bar{y}(t)$ как оценку, данную системой сигналу $x(t)$ за m' рассматриваемых временных интервалов. (Подробный пример процесса передачи информации см. в разд. 4.7, а также в приложении А.)

Наконец, операция МОД означает модуляцию одного из четырех возможных параметров высокочастотного электромагнитного носителя (амплитуда, частота, фаза, поляризация) мгновенным значением амплитуды волны (в аналоговой или цифровой форме), испускаемой на выходе кодера канала. ДЕМОД означает обратную операцию — отделение электромагнитного носителя и передачи демодулированного сигнала на вход декодера канала.

Возможно, читатель уже понял, что наиболее сложная операция происходит в *декодере канала.* В декодере канала по существу имеется «ящик памяти», содержащий запасные копии всего, что входит в репертуар кодера канала. Получив волновой сигнал, искаженный шумом, декодер канала кросс-коррелирует его со *всеми* элементами, содержащимися в ящике памяти, и выбирает в качестве наиболее вероятной формы сигнала тот из сигналов, имеющихся в ящике памяти, который имеет наибольшую кросс-корреляцию с поступившим сигналом. Наконец, заметим, что кодер источника и декодер канала выполняют операции *отображения многих элементов в один*, тогда как кодер канала и декодер источника выполняют лишь *взаимно однозначные отображения*, преобразующие решения, принимаемые кодером источника и декодером канала, во входные сигналы, приемлемые соответственно для канала связи и пользователя. Таким образом, кодер источника и декодер канала

связи находятся *на более высокой ступени иерархии*, чем кодер канала и декодер источника.

К проблеме кодирования и декодирования мы будем подходить постепенно. Начнем с вопроса о том, как можно формально понять (на динамическом уровне) то, что формально предсказывает формула Шеннона (4.1.50), а именно то, что *однозначная* передача информации может происходить, даже если сигнал *сколь угодно мал* по сравнению с шумом в канале? Прежде всего следует выяснить, какой тип волн мы отождествляем с «сигналом» и какой — с «шумом».

Мы называем сигналом волну, фаза которой φ_s во все моменты остается когерентной (см. разд. 2.2.4) относительно фазы φ_R некоторого *эталонного осциллятора*, имеющегося в рассматриваемом приемнике, т. е.

$$|\varphi_s(t) - \varphi_R(t)| < \Phi \ll 2\pi. \qquad (4.2.1)$$

Ясно, что такая характеристика имеет сильнейшую «привязку» к конкретным особенностям рассматриваемой системы.

Аналогичным образом, любая волна, фаза которой некогерентна относительно фазы эталонного осциллятора приемника, называется «шумом». В этом случае разность фаз

$$|\varphi_s(t) - \varphi_R(t)| \sim 2\pi \qquad (4.2.2)$$

не ограничена (в пределах от 0 до 2π).

Предположим, что мы принимаем серию импульсов, сильно искаженных шумом, при условии $\Gamma \ll 1$. Единственный известный нам параметр — период T. Каким образом мы можем детектировать (и усилить) слабый сигнал (если такой существует) в «море» гораздо более сильного шума? Предположим, что шум аддитивный и имеет следующие первых два момента: $\langle n(t)\rangle = 0$, $\langle n^2(t)\rangle = \sigma^2$. Принятая волна представима в виде $Y(t) = X(t) + n(t)$. Можно воспользоваться системой обработки информации, по существу заимствованной у биологических организмов и известной под названием процедуры хранения и интегрирования. Эта процедура позволяет хранить K-й импульс в течение T секунд и затем наложить его на поступающий $(K+1)$-й импульс — в реальном времени. Если воспользоваться таким «алгоритмом приема» m раз подряд, то полный сигнал на выходе узла хранения информации можно записать в виде

$$Z(t) = \sum_{K=1}^{m} Y(t + KT) = \sum_{K=1}^{m} X(t + KT) + \sum_{K=1}^{m} n(t + KT). \qquad (4.2.3)$$

Но наш сигнал периодический, т. е. $X(t + KT) = X(t)$, поэтому

$$Z(t) = mX(t) + N(t), \qquad (4.2.4)$$

где

$$N(t) = \sum_{K=1}^{m} n(t + KT) = \sum_{K=1}^{m} n_K. \qquad (4.2.5)$$

Здесь n_K — выборочные значения шума, которые берутся каждые T секунд. Если время корреляции шума меньше T, то дисперсия $D(N)$ шума N равна сумме дисперсий отдельных значений шума:

$$D(N) = mD(n(t)) = m\sigma^2. \qquad (4.2.6)$$

Таким образом, если сигнал и шум некоррелированы, то на выходе узла хранения информации и интегрирования мы получим

$$\langle Z^2 \rangle = m^2 X^2(t) + m\sigma^2. \qquad (4.2.7)$$

Соотношение (4.2.7) означает, что отношение сигнал/шум на выходе равно

$$\Gamma_{out} = \frac{mX^2}{\sigma^2} = m\Gamma_{in}, \qquad (4.2.8)$$

т. е. в *m раз больше* того же отношения на входе.

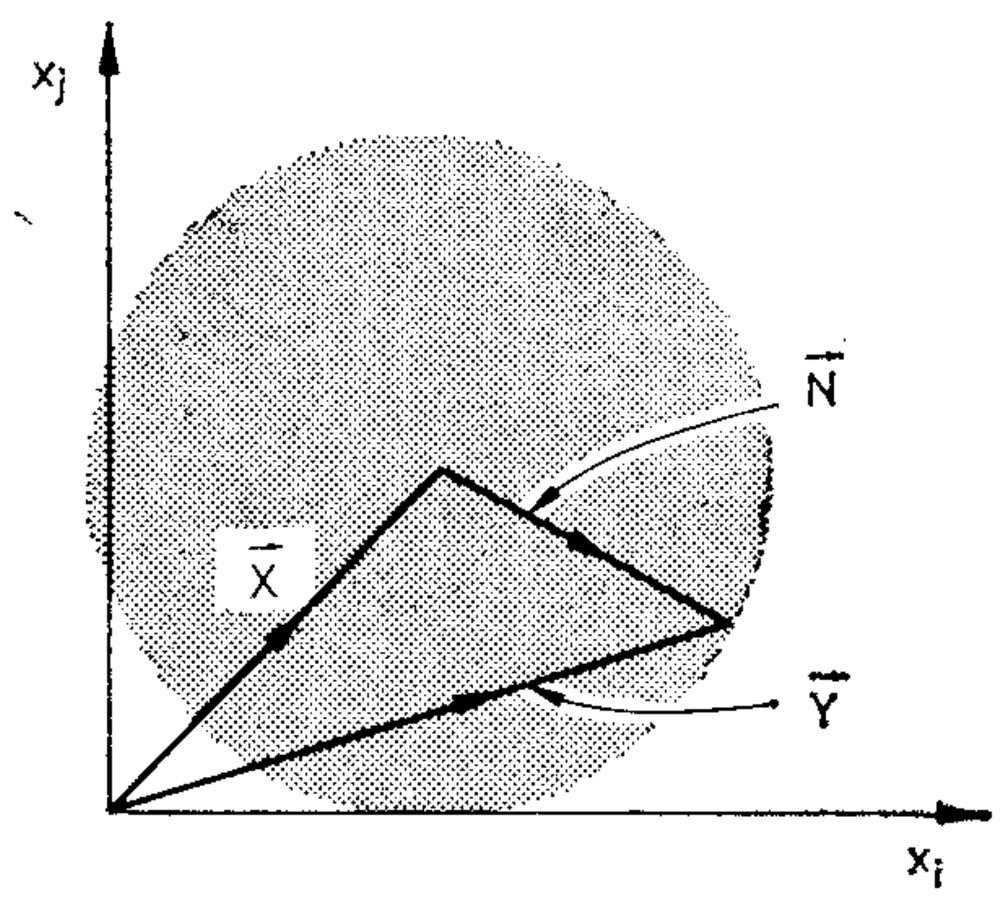


Рис. 4.6. Сфера шума (неопределенности) с центром в неизвестном сигнале в $2WT$-мерном пространстве состояний, покрытая «волосами».

Мы можем начать, например, с величины $\Gamma_{in} \sim 10^{-6}$ и при $m = 10^9$ прийти на выходе к отношению сигнал/шум порядка 30 дБ.

Второй вопрос, который возникает в связи с проблемой эффективного декодирования, состоит в следующем. Мы знаем, что принятый сигнал **Y** представляет собой вектор в $2WT$-мерном евклидовом пространстве. Чтобы принять переданный сигнал **X**, мы должны по существу проникнуть в сферическое «облако» шума, окружающее конец вектора **X** (рис. 4.6). Каким образом мы можем однозначно отличить **X** от **Y**? Процесс детектирования **X** в общих чертах сводится к следующему.

Прежде всего необходимо как можно точнее определить статистику «облака шума». Это означает, что мы должны установить функцию плотности вероятности $P(r)$ для радиуса r гиперсферы шума в $2WT$-мерном пространстве. Для этого радиуса справедливо соотношение

$$r^2 = \sum_{i=1}^{2WT} n_i^2,$$

или

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{2WT} n_i^2}, \qquad (4.2.9)$$

где n_i — отдельные выборочные значения (проекции) гипервектора шума **N**. Что же касается $2WT$-мерного распределения вероятности $P(n_1, n_2, \ldots, n_{2WT})$, то оно просто равно произведению распределений вероятности отдельных компонент $P(n_i)$, $i \in (1, 2, \ldots, 2WT)$, так как выборочные значения статистически независимы. Пусть $K = 2WT$. Тогда

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{K/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{K} n_i^2/2\sigma^2\right). \qquad (4.2.10)$$

Перейдем к сферическим координатам в K-мерном пространстве. Известно (см., например, [4.2]), что элементы объема в исходной и сферической системах координат связаны соотношением

$$dn_1\, dn_2 \ldots dn_K = \frac{\partial(n_1, n_2 \ldots, n_K)}{\partial(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{K-1})}\, dr\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{K-1} =$$

$$= r^{K-1} F(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{K-1})\, dr\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{K-1}, \qquad (4.2.11)$$

где $\partial(n_1, n_2, \ldots, n_K)/\partial(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{K-1})$ — якобиан, $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{K-1}$ — соответствующие полярные углы.

Ф. п. в. радиуса r сферы шума может быть вычислена по формуле

$$P(r) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{K/2}} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} e^{-r^2/2\sigma^2} r^{K-1} F\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{K-1} =$$

$$= C_K r^{K-1} e^{-r^2/2\sigma^2}, \qquad (4.2.12)$$

где

$$C_K = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{K/2}} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} F\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{K-1} \qquad (4.2.13)$$

— постоянная, значение которой определяется из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} P(r)\, dr = 1 = C_K \int_0^{\infty} r^{K-1} e^{-r^2/2\sigma^2}\, dr = C_K 2^{[(K/2)-1]} \sigma^K \left(\frac{K}{2} - 1\right)!,$$

или

$$C_K = 1/2^{[(K/2)-1]} \sigma^K \left(\frac{K}{2} - 1\right)! \qquad (4.2.14)$$

Таким образом,

$$P(r) = \frac{1}{2^{[(K/2)-1]}\sigma^K\left(\frac{K}{2}-1\right)!} r^{K-1}e^{-r^2/2\sigma^2}, \qquad (4.2.15)$$

т. е. мы приходим к распределению χ^2.

Нормируя r к среднеквадратичному значению σ (rms), т. е. вводя безразмерный параметр $\rho = r/r_{\text{rms}}$, где $r_{\text{rms}} = \sigma\sqrt{K}$, получаем для нашей ф. п. в.

$$P(\rho) = C_K\sigma^K K^{K/2}\rho^{K-1}e^{-\rho^2K/2} = \xi_K \exp\left[-\rho^2\frac{K}{2} + (K-1)\ln\rho\right], \qquad (4.2.16)$$

где $\xi_K = C_K\sigma^K K^{K/2}$.

Рассмотрим более подробно это (окончательное) выражение для ф. п. в. (нормированного) радиуса гиперсферы шума. Эта ф. п. в. имеет единственный максимум при

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial\rho} = 0, \qquad (4.2.17)$$

или

$$\frac{d}{d\rho}\left[-\rho^2\frac{K}{2} + (K-1)\ln\rho\right] = 0, \qquad (4.2.18)$$

откуда

$$\rho = \rho_0 = \sqrt{\frac{K-1}{K}} = \sqrt{1-\frac{1}{2WT}}\,. \qquad (4.2.19)$$

При возрастании W (или T) $\rho_0 \to 1$. Это означает, что наиболее вероятное значение для радиуса r гиперсферы шума всегда меньше, чем $\sigma\sqrt{2WT}$, но асимптотически стремится к этому среднеквадратичному значению, когда либо ширина полосы, либо продолжительность сигнала возрастает. Выясним теперь, насколько *узок* этот максимум, насколько хорошо определена, четко выражена или гладка гиперсфера шума. Для этого нам необходимо вычислить абсолютную величину второй производной от экспоненты в (4.2.16) в точке ρ_0. Производя соответствующие вычисления, получаем $2K = 4WT$. Итак, мы видим, что при $K \to \infty$ острота максимума ($\rho_0 \to 1$) становится *бесконечной*. Это означает, что в пределе при $\rho_0 \to 1$ весь объем гиперсферы сосредоточивается на поверхности «полой» сферической оболочки радиуса $\sigma\sqrt{2WT}$. Нечто подобное мы уже доказали раньше — в разд. 4.1. Однако в этом случае детектирование неизвестного сигнала $\mathbf{X}(t)$ по измерениям принятого сигнала $\mathbf{Y}(t)$ становится неоднозначным, как показывает рис. 4.7, так как гиперсфера шума в этом случае ведет себя уже не как рыхлое облако, а как «безволосая» — гладкая — детерминистическая

сферическая оболочка (четко выраженная граница) радиуса $\sigma\sqrt{2WT}$. Следовательно, при больших $K = 2WT$ мы вполне обоснованно отказываемся от вероятностной трактовки искажения и рассматриваем принятый сигнал как *корректируемый*, если сферы шума с детерминистическим радиусом $\sigma\sqrt{2WT}$, описанные вокруг точек, соответствующих сигналам, отличаются друг от друга настолько, что искаженный сигнал допускает однозначную интерпретацию как порожденный единственным сигналом, отстоящим на расстоянии $\sigma\sqrt{2WT}$ от принятого сигнала. Таким образом, увеличение ширины полосы (например, использование частотной модуляции) приводит к трем эффектам:

а) уменьшает неопределенности границы сфер шума;

б) фиксирует радиус сфер $(r \to \sigma\sqrt{2WT})$;

в) делает разностные сигналы почти *ортогональными* в пространстве состояний, тем самым минимизируя кросс-корреляции сигналов и облегчая процесс принятия решения на выходе декодера канала.

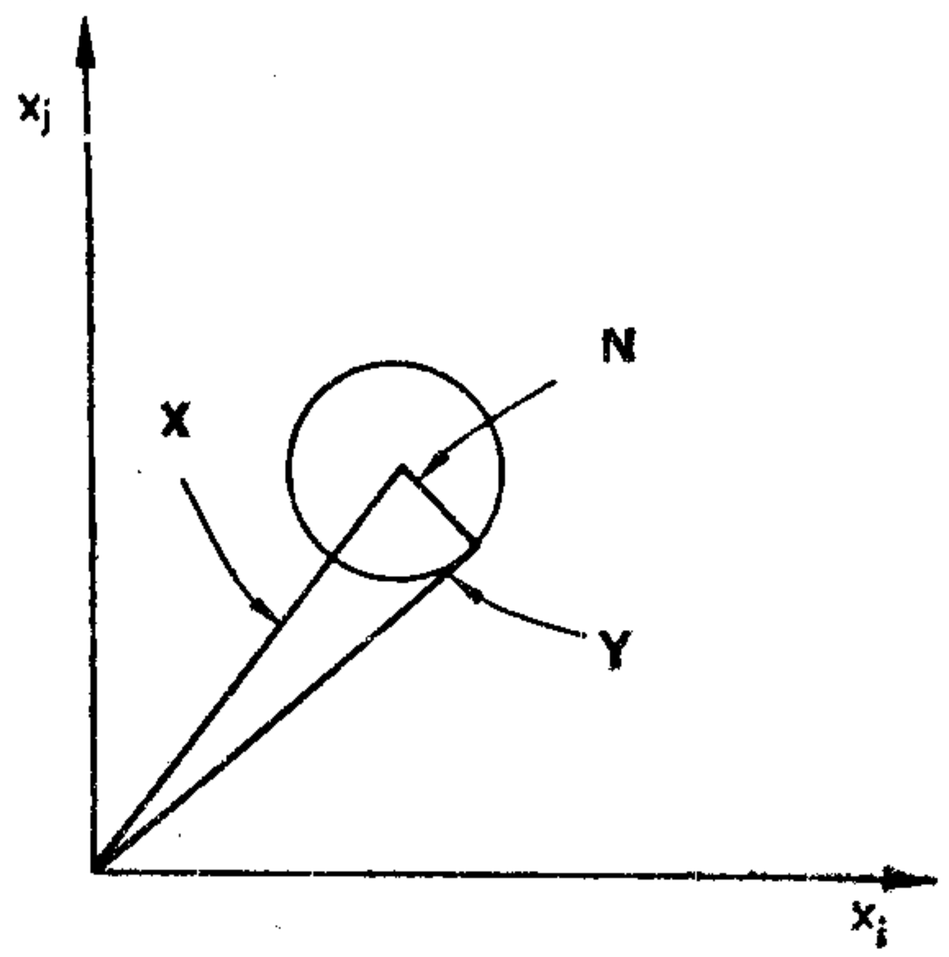


Рис. 4.7. При $2WT \to \infty$ сфера шума утрачивает «волосы» и становится «гладкой».

Увеличивая «другой» параметр в формуле Шеннона, а именно отношение сигнал/шум, мы усиливаем сигнал по сравнению с шумом и отделяем одну сферу шума от другой. Действительно, все сигналы с X^2 отображаются на поверхность сферы радиуса $X\sqrt{2WT}$, причем каждый сигнал окружен сферой шума радиуса $\sigma\sqrt{2WT}$. Если σ остается постоянной, а X возрастает, то расширяющаяся сфера сигнала разносит сферы шума друг от друга. С другой стороны, если возрастает Г, то радиус сферы сигнала укорачивается; при $\Gamma < 1$ сферы шума заведомо перекрываются, но, к счастью, это не приводит к неоднозначности и, как мы уже доказали, не мешает надежному приему при условии, что W возрастает. Даже если (четко выраженные) сферические оболочки шума перекрываются, искаженный сигнал все же может быть правильно дешифрован, если мы станем интерпретировать его, как показано выше, т. е. считать, что сигнал порожден не (обязательно) ближайшей точкой в пространстве сигналов, а точкой, отстоящей от принятого сигнала на расстоя-

ние $\sigma\sqrt{2WT}$ [1]. В заключение мы можем сказать, что весь процесс передачи и приема семейства волновых сигналов — гипервекторов — включает в себя последовательность «расширения» и «сужения» размерности пространства состояний, т. е. *увеличения* и *сокращения* числа степеней свободы переданных сигналов.

На передающем конце канала связи усилия, направленные на эффективное кодирование, требуют ортогональности «слов»— элементов репертуара передатчика. Эта цель достигается путем увеличения ширины полосы W или времени передачи T, приводящего к увеличению размерности ($2WT$) пространства состояний, в котором отдельные «слова» (в дискретизированной по теореме Шеннона о выборке формы) фигурируют в качестве гипервекторов.

На принимающем конце канала связи «сокращение» размерности, осуществляемое декодером канала, сводится к образованию серии *сверток* поступающего (зашумленного) сигнала и каждого элемента/слова репертуара передатчика. Так как в отсутствие шума отдельные «слова» взаимно ортогональны, их попарные кросс-корреляции равны нулю. Таким образом, описанные выше операции позволяют приемнику детектировать и исправлять многие ошибки (хотя число их должно быть конечным), обусловленные шумом в канале. В следующем разделе мы узнаем, как именно осуществляется такой процесс кодирования — декодирования в рамках схемы Шеннона.

4.3. Некоторые эффективные алгоритмы кодирования для установления соответствия между скоростью передачи информации от источника и пропускной способностью канала. Обнаружение и исправление одной ошибки

Кодирование преследует двоякую цель: во-первых, установление соответствия между скоростью передачи информации от

---

[1] Можно доказать, что при такой схеме декодирования (если канал связи не имеет памяти) число шагов декодирования с увеличением длины n кодового слова возрастает не экспоненциально (2^n), как в случае декодирования с заменой принятого сигнала ближайшим сигналом, а лишь как $\sim n^2$. Кроме того, можно показать, что, используя *иерархические* принципы кодирования — декодирования (см., например, [4.3]), можно еще более понизить вычислительную сложность — до $\sim n$.

В иерархической схеме кодирования — декодирования одни коды «вставляются» в другие. В частности, и кодирование, и декодирование осуществляются шаг за шагом по восходящим ступеням иерархии. Сначала на низшем уровне простые символы («алфавит») группируются в блоки («слова»). Затем на втором уровне каждый из блоков («слов») рассматривается как новый символ и многие из них снова группируются в блоки («предложения») и т. д. При декодировании происходит обратная процедура. Такой принцип «вложенных» кодов представляет собой не что иное, как попытку имитировать иерархическую структуру естественного языка.

источника и пропускной способностью канала связи и, во-вторых, преобразование передаваемого сигнала в такую последовательность нулей и единиц, при которой неоднозначность выбора правильной строки нулей и единиц или волнового сигнала в декодере канала сводилась бы к минимуму.

4.3.1. Кодирование для установления соответствия между скоростью передачи информации от источника и пропускной способностью канала

Начнем с источников, обладающих нулевой памятью, т. е. с источников со статистически независимыми символами. В «блоке кодирования» каждое состояние источника, т. е. каждый сигнал, преобразуется всегда в одну и ту же последовательность кодовых «букв», или символов, которая называется «кодовым словом». Нас интересует, как достичь *максимальной* скорости передачи информации. Ясно, что для этого код должен нести максимум информации на одну букву (или на один символ). (Имея «алфавит» из r букв, мы можем составить $n = r^{\Lambda}$ кодовых слов средней длины Λ.) Если рассматривать кодовые символы (а не кодовые слова) как состояния, принимаемые самим кодом, то для кода с алфавитом из r символов указанный выше максимум может быть достигнут при условии, если все r букв независимы и равновероятны, что дает $S_{\text{макс}} \log_2 r$ бит/букву. Пусть кодовое слово x_i состоит из последовательности, содержащей λ_i букв. Тогда средняя длина кодового слова равна величине

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) \text{ символов/слов}, \tag{4.3.1}$$

и кодовое слово несет среднее количество информации

$$\frac{S(X)}{\Lambda} \leqslant \log_2 r \text{ бит/символ}, \tag{4.3.2}$$

где

$$S(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_2 P(x_i), \tag{4.3.3}$$

где $P(x_i)$ — априорная вероятность сигнала/слова x_i.

Определим эффективность кода как

$$\eta = \frac{S(X)}{\Lambda \log_2 r} \leqslant 1. \tag{4.3.4}$$

Из этой формулы следует, что 100 %-ная эффективность соответствует коду с независимыми и равновероятными символами. Реально эффективность кода должна быть меньше 100 % по двум причинам. Во-первых, в любом естественном языке бук-

вы встречаются *не* равновероятно (вариация составляет величину $S(X) < \log_2 r^{\Lambda}$). Во-вторых, буквы взаимозависимы (надежность). Информация, переносимая одной буквой, понижается за счет того, что данная буква может быть предсказана исходя из предшествующей последовательности букв. Предсказуемость повышает априорную вероятность и, следовательно, понижает количество информации, переносимое буквой.

Пусть L — продолжительность каждого состояния/слова кода. Источник выдает сигналы, или кодовые слова, со скоростью $\sim F = 1/L$ сигналов/с, или $f = 1/l$ *б*уквв/с, если $f = F\Lambda$ и l — продолжительность передачи одной буквы. Пусть для канала без шума максимальная частота букв в секунду, которые могут быть переданы *без ошибки* составляет $f_{\text{макс}}$ букв/с.

Мы хотели бы знать, какова максимальная скорость передачи сигналов x_i источника по такому каналу без ошибок и каков оптимальный способ кодирования источника, позволяющий достигать этого максимума или приближаться к нему сколь угодно близко. Так как среднее количество информации на сигнал, выдаваемое источником, равно $S(X)$, скорость передачи информации от источника равна

$$R = FS(X) \text{ бит/с}, \tag{4.3.5}$$

поэтому

$$R = \frac{f}{\Lambda} S(X) \text{ бит/с}. \tag{4.3.6}$$

Максимальный поток информации, который может быть передан по каналу связи без ошибки, составляет величину

$$C = f_{\text{макс}} \left(\frac{S(X)}{\Lambda} \right)_{\text{макс}} = f_{\text{макс}} \log_2 r \text{ бит/с}, \tag{4.3.7}$$

так как $S(X)$ не превосходит $\Lambda \log_2 r$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что сигналы не могут быть переданы без ошибок, со скоростью, превышающей пропускную способность канала, т. е. при $F > C/S(X)$ сигналов/с. Заметим, что неравенство $S(X)/\Lambda \leqslant \log_2 r$ сохраняется, если от двоичных логарифмов перейти к логарифмам с основанием r, т. е. $S_r(X)/\Lambda \leqslant 1$, или

$$-\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_r P(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \tag{4.3.8}$$

Мы видим, что пропускная способность канала достигается при

$$\lambda_i = -\log_r P(x_i), \tag{4.3.9}$$

т. е. при

$$P(x_i) = r^{-\lambda_i} \tag{4.3.10}$$

(для источника, у которого априорные вероятности сигналов закодированы по закону (4.3.10), образование слов становится все менее вероятным по мере увеличения длины слова). Но, даже если распределение вероятности состояний источника не следует экспоненциальному закону (4.3.10), мы все же можем добиться почти 100 %-ной эффективности кода следующим образом. Запишем неравенство (4.3.9) в виде

$$-\log_r P(x_i) \leqslant \lambda_i \leqslant -\log_r P(x_i) + 1, \qquad (4.3.11)$$

где второе неравенство следует из первого потому, что λ_i мы выбрали как ближайшее к $-\log_r P(x_i)$ целое число.

Умножая соотношение (4.3.11) на $P(x_i)$ и суммируя по всем i, получаем

$$\frac{S(X)}{\log_2 r} \leqslant \Lambda \leqslant \frac{S(X)}{\log_2 r} + 1. \qquad (4.3.12)$$

Рассмотрим теперь все последовательности символов, генерируемых источником, т. е. последовательности отношений сигналы/состояние, взятых по m экземпляров за один раз; таких последовательностей всего n^m. Будем рассматривать каждую такую последовательность как *новый* сигнал/состояние, принадлежащий более высокому иерархическому уровню и источник с n^m состояниями. (Это называется m-м расширением $X^{(m)}$ исходного источника X.) Так как по предположению x_i независимы, справедливо соотношение

$$S(X^m) = mS(X), \qquad (4.3.13)$$

и средняя длина кодовых слов, кодирующих каждую последовательность, составляет $m\Lambda$ букв. Подставляя ее в неравенство (4.3.12), получаем

$$\frac{mS(X)}{\log_2 r} \leqslant m\Lambda \leqslant \frac{mS(X)}{\log_2 r} + 1,$$

или

$$\eta \leqslant 1 \leqslant \eta + \frac{1}{m\Lambda}. \qquad (4.3.14)$$

Так как при кодировании достаточно длинных последовательностей число m может быть сколь угодно велико, эффективность η нового кода может сколь угодно мало отличаться от единицы, — разумеется, ценой увеличения сложности кодирования.

Прежде чем продвигаться дальше, рассмотрим кратко, каким образом мы можем на практике реализовать оптимальное распределение (4.3.10), с тем чтобы максимизировать скорость передачи информации, т. е. сделать так, чтобы скорость передачи информации асимптотически приближалась к пропускной

способности канала. Предположим, что источник обладает репертуаром, состоящим, например, из восьми независимых сигналов A, B, C, D, E, F, G и H, которые встречаются с априорными вероятностями, приведенными в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Априорные вероятности восьми независимых сигналов от источника (подробности см. в тексте)

x_i	A	B	C	D	E	F	G	H
$P(x_i)$	0,1	0,18	0,4	0,05	0,06	0,1	0,007	0,004

Предположим, кроме того, что сигналы поступают в канал со скоростью один сигнал в секунду. Энтропия источника, вычисляемая по формуле $-\sum p_i \log_2 p_i$, составляет $\sim 2{,}55$ бит/с. Если этот набор сигналов передается по каналу, в котором сигнал может находиться на любом из восьми уровней по напряжению, то такой источник можно закодировать, считая, что каждый из таких уровней представляет собой сигнал. Максимальное количество информации, переносимое восьмиуровневым сигналом, равно $\log_2 8 = 3$ бит, и канал, в котором независимые уровни возникают каждую секунду, обладает пропускной способностью $C = 3$ бит/с. Следовательно, эффективность кодирования по такой схеме составляет $(2{,}55 \cdot 100)/3 \approx 85\,\%$. Этот показатель можно улучшить, если воспользоваться приведенным выше теоретическим анализом и упорядочить восемь сигналов заново так, *чтобы более длинные* сигналы были *менее вероятными.*

Итак, все сигналы упорядочены в порядке убывания их вероятности. Разделим всю серию сигналов на две группы так, чтобы суммы вероятностей сигналов в каждой группе отличались как можно меньше. В свою очередь каждую из этих групп разделим по тому же принципу на две подгруппы и будем повторять этот процесс до тех пор, пока не дойдем до подгрупп, состоящих только из одного сигнала. При каждом делении сигналам первой группы условимся сопоставлять символ 0, а сигналам второй группы — символ 1. Тогда кодированная двоичная форма каждого сигнала будет задаваться соответствующей последовательностью двоичных символов. Вся процедура представлена в табл. 4.3.

Пропускную способность двоичного канала, необходимую для передачи наших сигналов со скоростью один сигнал в секунду, мы получаем, вычисляя среднюю скорость появления двоичных цифр. Например, при достаточно большом T двузначные двоич-

Таблица 4.3. Кодирование восьми независимых сигналов источника, представленных в табл. 4.2

Сигнал	*C*	*B*	*A*	*F*	*G*	*E*	*D*	*H*
Вероятность	0,4	0,18	0,1	0,1	0,07	0,06	0,05	0,04
	0	1	0	1	0	1	0	1
							0	1
					0	1		
				0	1			
	0	1	0	1				
Код	00	01	100	101	1100	1101	1110	1111

ные сигналы встречаются $(0{,}4 + 0{,}18)T$, а общее число двоичных знаков равно

$$T[2(0{,}4 + 0{,}18) + 3(0{,}1 + 0{,}1) + 4(0{,}07 + 0{,}06 + 0{,}05 + 0{,}04)] = \\ = 2{,}64T \text{ двоичных знаков.}$$

Пропускная способность канала связи, передающего 2,64 двоичных символа в секунду, равна $C = 2{,}64$ бит/с, что приводит к эффективности кодирования $(2{,}55 \cdot 100)/2{,}64 = 96{,}6\,\%$. Вводя в изложенный выше алгоритм небольшие модификации, мы можем асимптотически достичь 100 %-ной эффективности (см., например, работу Хаффмана [4.4]).

4.3.2. Кодирование для обнаружения и исправления ошибки

Теперь нас будет интересовать кодирование с целью обнаружения и исправления одной ошибки или нескольких некоррелированных ошибок, обусловленных шумом в канале. Будем рассматривать строку из n нулей и единиц как точку в n-мерном пространстве. Каждый двоичный символ задает значение соответствующей координаты в n-мерном пространстве (мы предполагаем, что все закодированные сигналы имеют длину n символов). Таким образом, мы получаем куб в n-мерном пространстве; каждая вершина представляет собой строку из n нулей и единиц. Пространство состоит *только* из 2^n вершин; иногда его называют векторным пространством. Каждая вершина соответствует одному из возможных принятых сигналов, но только некоторые из вершин кодируют исходные сигналы. *Одна* ошибка в сигнале перемещает точку в пространстве сигналов вдоль одного из ребер гиперкуба в соседнюю вершину. Если потребо-

вать, чтобы каждый из возможных исходных сигналов находился на расстоянии, равном по крайней мере удвоенной длине ребра, от точки, соответствующей другому сигналу, то одиночная ошибка сдвинет изображающую точку лишь на длину одного ребра, и тем самым принятый сигнал перейдет в разряд недопустимых («незаконных»). Если минимальное расстояние между точками, соответствующими сигналам, равно утроенной длине ребра куба, то в результате одиночной ошибки принятый сигнал окажется к исходному сигналу *ближе*, чем к любому другому сигналу. Тем самым мы обретаем возможность исправления *одиночной* ошибки.

По существу нам необходимо ввести функцию расстояния, равную минимальному числу ребер куба, которое необходимо пройти, чтобы перейти из одной вершины куба в другую. В результате мы получаем число битов, на которое одно из двух слов отличается от другого. Такое расстояние можно рассматривать как *логическую* (в булевом смысле) разность или сумму двух точек. Такая метрика называется *расстоянием Хэмминга* [4.1].

Минимальное расстояние между вершинами куба в пространстве сигналов мы можем выразить через ошибки, которые можно исправить. Для *единственности* кода минимальное расстояние должно быть равно по крайней мере единице. Минимальное расстояние, равное двум, обеспечивает *возможность* обнаружения одиночной ошибки, минимальное расстояние, равное трем, — *возможность* исправления одиночной ошибки; любая одиночная ошибка приводит к тому, что изображающая принятый сигнал точка оказывается ближе к исходному сигналу, чем к любому другому. Минимальное расстояние, равное четырем, позволяет достичь двух целей — исправления одной ошибки плюс обнаружения двойной ошибки. Минимальное расстояние, равное пяти, позволило бы достичь исправления двойной ошибки.

Наоборот, если требуется достичь определенного уровня обнаружения или исправления ошибок, то необходимо выдерживать соответствующее минимальное расстояние. Например, в случае исправления одиночной ошибки с минимальным расстоянием, равным трем, мы можем окружить каждую точку в пространстве сигналов единичной сферой так, что эти сферы не будут пересекаться. Объем «сферы» единичного радиуса равен центру плюс n точек, отличающихся от центра только *одной* координатой, т. е. $n+1$. Полный объем n-мерного пространства равен 2^n — максимально возможному числу точек. Так как «сферы» не перекрываются, максимальное число K точек, соответствующих сигналам, должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\text{Полный объем}}{\text{Объем «сферы»}} \geqslant \text{Максимальное число сфер},$$

или

$$\frac{2^n}{n+1} \geqslant 2^K. \qquad (4.3.15)$$

Мы можем исследовать соответствующие ограничения на исправление большего числа ошибок. Например, для исправления двойной ошибки минимальное расстояние должно быть равно пяти. Тогда мы можем описать неперекрывающиеся сферы радиуса 2 вокруг каждой точки в пространстве сигналов. Объем сферы радиуса 2 равен центру плюс n точек, отстоящих от центра на единичное расстояние, плюс точки, отличающиеся от центра двумя координатами, — их число равно $n(n-1)/2$.

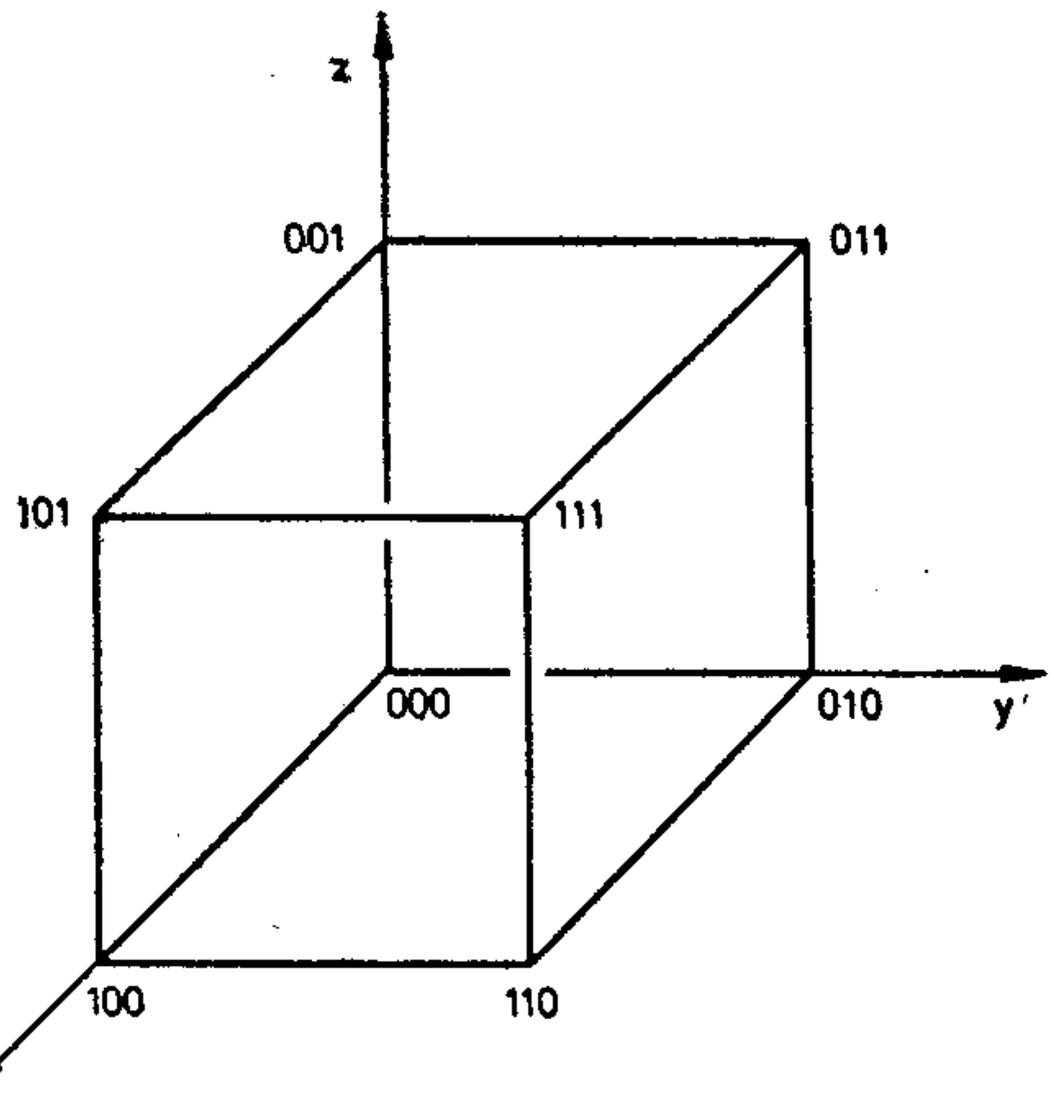


Рис. 4.8. Представление множества трехзначных двухсимвольных слов.

Деля полный объем пространства (2^n) на объем этих сфер, находим верхнюю границу числа K *возможных кодированных сигналов в пространстве*:

$$\frac{2^n}{1+n+n(n-1)/2} \geqslant 2^K. \qquad (4.3.16)$$

Аналогичные неравенства могут быть записаны и для сфер большего радиуса, если мы исследуем возможность исправления более двух ошибок.

Выясним, каким образом можно осуществить такой код (рис. 4.8). Рассмотрим следующий пример.

Пусть мы имеем источник с репертуаром из восьми слов, каждое длиной три бита, записанных в алфавите из двух символов — нуля и единицы ($2^3 = 8$). Как «раздуть» пространство состояний так, чтобы стало возможным исправление одиночной или многократной ошибки в принятом сигнале? Основная идея состоит в том, чтобы сделать наши восемь символьных слов как можно более «ортогональными». Ортогональность в данном случае означает, что парная кросс-корреляция между двумя кодовыми словами

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\xi} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\xi} x_i x_{j+\tau}, \qquad (4.3.17)$$

где x_i, x_j — строки из нулей и единиц длиной ξ, стремится к дельта-функции при $\xi \to \infty$. Рассмотрим первый этап кодирования, а именно процесс преобразования множества слов длиной в 3 бит в множество слов такой длины, при которой становится возможным исправление одиночной ошибки.

Для этого мы воспользуемся устройством, известным под названием «сдвиговый регистр» (рис. 4.9). Такой регистр состоит из последовательности (каскада) двоичных ячеек, каждая из которых может находиться лишь в одном из двух состояний, причем при прохождении импульса содержимое каждой ячейки сдвигается на одну ячейку «влево». Создавая (как на рис. 4.9)

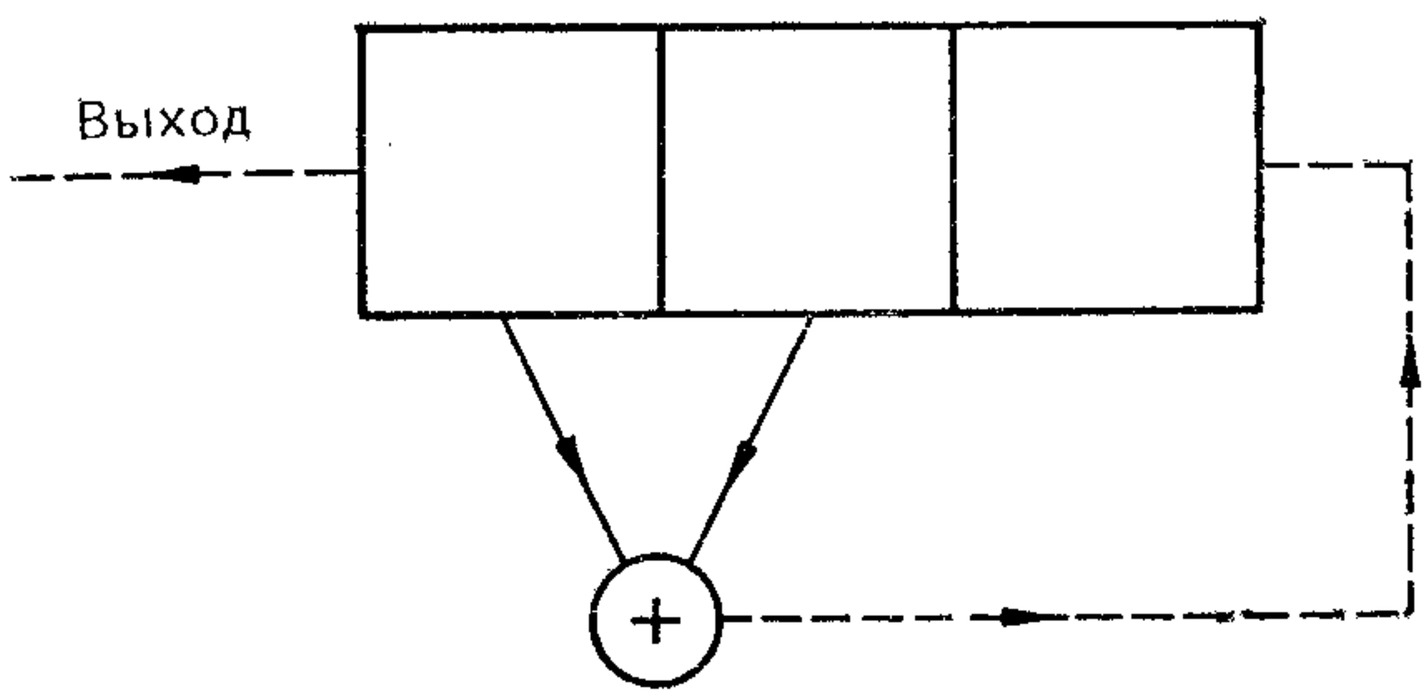


Рис. 4.9. Сдвиговый регистр с петлей обратной связи (см. текст).

петлю обратной связи, используя сложение по модулю 2 выходов некоторых ячеек для определения следующего двоичного символа на входе регистра, мы получаем возможность генерировать последовательность максимальной длины. Последовательность имеет максимальную длину, если при Λ стадиях (в нашем случае $\Lambda = 3$) выходная последовательность, прежде чем повториться, принимает все возможные комбинации и расположения Λ двоичных символов (кроме комбинации, состоящей из одних лишь нулей). Таким образом, максимальная последовательность имеет длину $\xi = 2^{\Lambda} - 1$, где ξ — длина максимальной последовательности в битах, Λ — число ячеек в регистре генератора. Последовательности максимальной длины называются также *псевдослучайными* последовательностями, так как статистика их появления напоминает статистику чисто случайных двоичных событий (бросаний монеты). Таким образом, в последовательности максимальной длины единиц всегда на одну больше, чем нулей. Кроме того, периодическая автокорреляция оптимальна: она принимает значение 1 при $\tau = 0$ и $-1/\xi$ при всех остальных τ и, разумеется, периодична по ξ.

В нашем примере описанная выше схема действует следующим образом. Каждое слово длиной в 3 бит из репертуара в 8 слов мы вводим в регистр и предоставляем логической петле обратной связи действовать до тех пор, пока слово, записанное

Таблица 4.4. Преобразование слов длиной в 3 бит в слова, позволяющие исправить одиночную ошибку

Начальное множество (Λ)	Конечное множество (ξ)
111	1110010
110	1100101
100	1001011
001	0010111
010	0101110
101	1011100
011	0111001
000	0000000

нами в регистр, не появится снова. В результате мы получаем отображение, представленное в табл. 4.4. Парные корреляции могут быть заданы отношением $(A - B)/7$, где A — число совпадающих символов в двух словах, а B — число символов, которыми два слова отличаются. В нашем случае $A = 3$, $B = 4$, поэтому функция парных корреляций равна $-1/7$.

В общем случае после многих «метакодирующих» операций функция парных кросс-корреляций принимает вид

$$\rho = -\frac{1}{\xi} = \frac{1}{2^{\Lambda} - 1}, \qquad (4.3.18)$$

и $\rho \to 0$ при $\Lambda \to \infty$, т. е. достигается ортогональность.

Ясно, что новые 8 слов длиной 7 бит допускают исправление одиночной ошибки. Всего существует 128 ($=2^7$) слов длиной 7 бит, но из них только восемь «законных».

4.4. Источники информации с памятью. Цепи Маркова

В предыдущем разделе мы видели, что максимальная скорость передачи информации достигается путем устранения всей избыточности из подлежащих передаче строк слов, т. е. после того, как все передаваемые символы становятся равновероятными и статистически независимыми. Но, как мы видели, для придания нашим сигналам иммунитета к шуму в канале сигналы необходимо отобразить в пространство состояний, или *закодировать*, чтобы мы могли обнаруживать и исправлять ошибки. Иначе говоря, для обеспечения *надежности* связи нам приходится *снова* вводить избыточность — на этот раз «с черного хода».

Ясно, что требования скорости и надежности передачи информации противоречивы. Каким образом можно примирить их,

чтобы создать язык связи, который обладал бы, с одной стороны, достаточной *надежностью*, а с другой стороны, достаточной *вариабельностью*, чтобы избежать стереотипных повторений и, следовательно, застоя?

Придадим более точный смысл параметрам вариабельности и надежности и исследуем, при каких условиях взаимодействие этих параметров может привести к некоторому оптимуму [4.5].

Коэффициент вариации D_1 множества N сигналов есть величина, на которую энтропия системы отклоняется от своего максимального значения, или величина, на которую набор априорных вероятностей P_i отличается от равновероятности:

$$D_1 = S_{\text{макс}} - S_1 = \log_2 N + \sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i. \qquad (4.4.1)$$

Когда все P_i равны, коэффициент D_1 равен нулю и достигает *максимума* ($\log_2 N$) при $S_1 = 0$, т. е. когда источник информации обладает только одним состоянием с априорной вероятностью, равной единице. *Коэффициент надежности* D_2 множества N сигналов есть величина отклонения символов источника информации от полной независимости. Чтобы быть более точным, мы вводим *совместную энтропию* пары символов/состояний x_i, x_j:

$$S_2 = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i, x_j) \log_2 P(x_i, x_j), \qquad (4.4.2)$$

где $P(x_i, x_j)$ — совместная ф. п. в. пары символов (x_i, x_j). Определим коэффициент надежности как разность

$$D_2 = S_2^{\text{ind}} - S_2^{\text{dep}} \qquad (4.4.3)$$

значений совместной энтропии, когда (x_i, x_j) статистически независимы $\left(S_2^{\text{ind}}\right)$ и когда (x_i, x_j) статистически зависимы $\left(S_2^{\text{dep}}\right)$.

Вычислим сначала S_2^{ind}. В этом случае по теореме Байеса из элементарной теории вероятностей $P(x_i, x_j) = P(x_i)P(x_j)$, поэтому

$$S_2^{\text{ind}} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i) P(x_j) \log_2 [P(x_i) P(x_j)] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i) P(x_j) \log_2 P(x_i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i) P(x_j) \log_2 P(x_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \log_2 P(x_i) \left[\sum_{j=1}^{N} P(x_j)\right] -$$

$$-\sum_{j=1}^{N} P(x_j) \log_2 P(x_j) \left[\sum_{i=1}^{N} P(x_i)\right] = +2S_1. \qquad (4.4.4)$$

Вычислим теперь S_2^{dep}. По теореме Байеса в этом случае получаем

$$P(x_i,\ x_j) = P(x_i)\,P(x_j/x_i) = P(x_j)\,P(x_i/x_j),$$

поэтому

$$S_2^{\text{dep}} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i,\ x_j)\log_2[P(x_i)\,P(x_j/x_i)] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i)\,P(x_j/x_i)\log_2 P(x_i) -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i,\ x_j)\log_2 P(x_j/x_i) =$$

$$= \left[-\sum_{i=1}^{N} P(x_i)\log_2 P(x_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{N} P(x_j/x_i)\right] + S_M, \qquad (4.4.5)$$

где

$$S_M = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P(x_i,\ x_j)\log_2 P(x_j/x_i). \qquad (4.4.6)$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{N} P(x_j/x_i) = 1,$$

мы получаем окончательно

$$S_2^{\text{dep}} = S_1 + S_M \qquad (4.4.7)$$

и

$$D_2 = S_2^{\text{ind}} - S_2^{\text{dep}} = 2S_1 - S_1 - S_M = S_1 - S_M. \qquad (4.4.8)$$

Чтобы взаимодействие коэффициентов D_1 и D_2 стало более очевидным, построим следующую символическую схему (рис. 4.10). *Язык* без правил не обладает надежностью и имеет к тому же нулевую вариабельность. Для такого «языка» энтропия равна

$$S = S_{\text{макс}} = \log_2 N.$$

Порядок в такой системе мы начинаем создавать, вводя прежде всего некоторые «грамматические правила», т. е. задавая величину вариации D_1. Но коэффициенту вариации D_1 не следует давать расти выше определенного предела из-за возникающего затем стереотипа. Затем мы вводим некоторую надежность D_2, создавая «синтаксические правила», которые устанавливают статистическую взаимозависимость между различными символами/состояниями. Однако коэффициент надежности D_2 не дол-

жен *опускаться* ниже определенного предела, так как чрезмерное его уменьшение лишает нас возможности обнаруживать и исправлять ошибки из-за отсутствия «контекста». Остающаяся энтропия

$$S_M = \log_2 N - D_1 - D_2, \qquad (4.4.9)$$

если энтропия языка с коэффициентом вариации D_1 и коэффициентом надежности D_2. Избыточность такого языка определяется величиной

$$R = 1 - \frac{S_M}{S_{\text{макс}}} = \frac{D_1 + D_2}{\log_2 N} \qquad (4.4.10)$$

и изменяется от 0 (полный беспорядок) до 1 (нулевая энтропия — из-за строгого стереотипа символов, или строгой взаимозависимости).

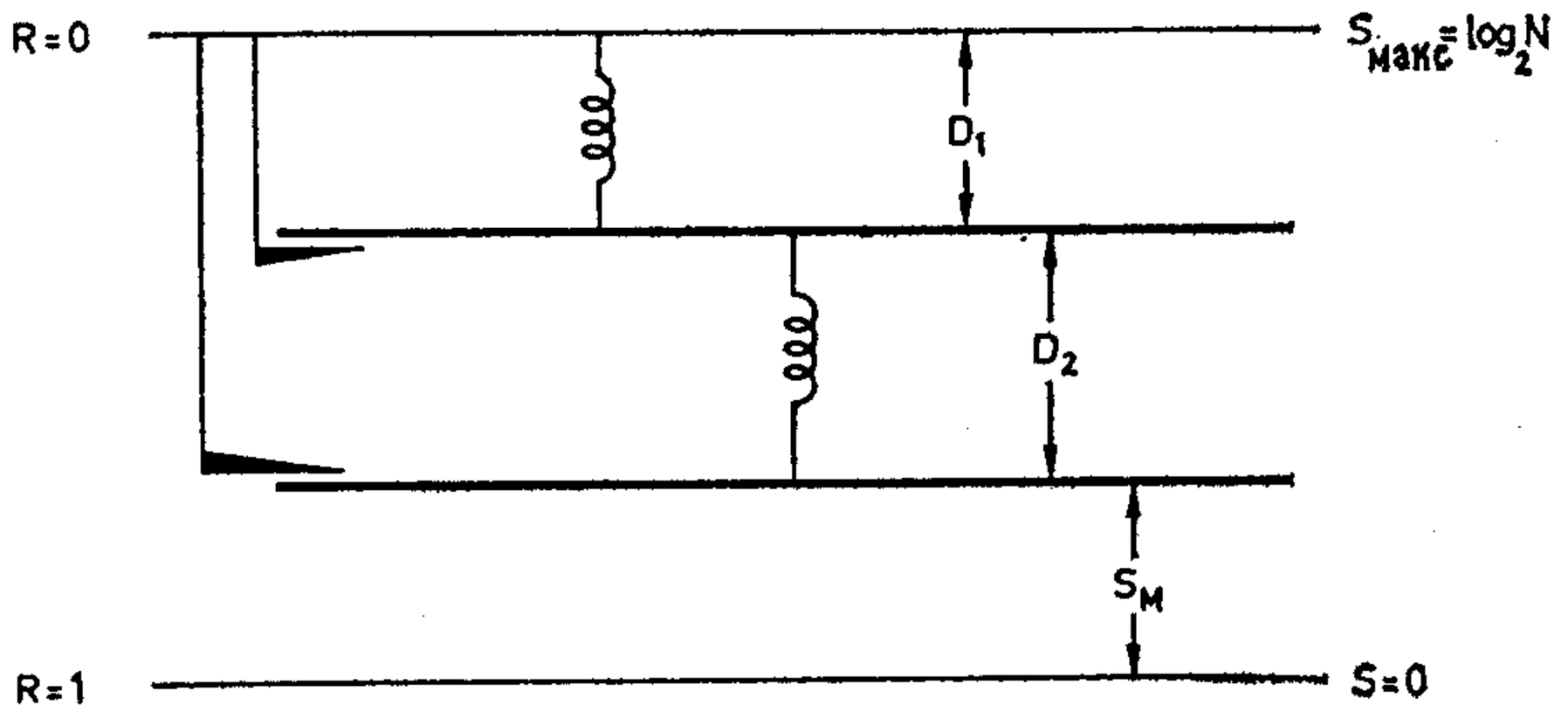


Рис. 4.10. «Конфликт» между разнообразием и надежностью.

Источник статистически независимых сигналов обладает *памятью*: мы будем рассматривать случай, когда вероятность появления символа зависит только от непосредственно предшествующего ему символа. Такой источник информации порождает последовательность сигналов, образующих цепь Маркова. Цепь Маркова n состояний однозначно определяется матрицей $n \times n$ перехода $\mathbf{P}$, элементы которой P_{ij} — вероятности перехода из состояния i в состояние j. Цепь Маркова может обладать *стационарными состояниями*; необходимое условие — существование целого числа λ, такого, что матрица $\mathbf{P}^\lambda$ имеет по крайней мере один ненулевой столбец. Кроме того, цепь Маркова *эргодична*, если из любого состояния мы можем перейти в любое другое состояние. Нас интересует вопрос: чему равна энтропия цепи Маркова? (Иначе говоря, чему равна энтропия источника информации с памятью?)

Из статистической взаимозависимости отдельных символов/состояний источника информации непосредственно следует, что не все символы, которые источник предположительно может генерировать в течение заданного интервала времени, несут одинаковое количество информации. Это позволяет нам, используя статистическую структуру конкретного источника, достичь более высокой скорости передачи информации при *данной вероятности ошибки.*

Неопределенность источника в общем случае мы определяем как неопределенность очередного символа, порождаемого источником, при условии, что мы наблюдали все предыдущие символы. Иначе говоря, если источник информации $x_1, x_2, \ldots$ задан, то неопределенность или энтропия этого источника, обозначаемая $S(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, или $S(X)$, определяется как

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n/x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{4.4.11}$$

или

$$S(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{S(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{n} =$$

$$= \frac{S(x_1) + S(x_2/x_1) + \ldots + S(x_n/x_1, \ldots, x_{n-1})}{n}. \tag{4.4.12}$$

Пусть для каждого состояния x_K цепи Маркова $x_{K(1)}, x_{K(2)}, \ldots$ $\ldots, x_K(n_K)$ — это n_K состояний, которые могут быть достигнуты из x_K за один шаг, т. е. состояния x_i, для которых $P_{Ki} \neq 0$. Неопределенность состояния x_K определим как n_K

$$S_K = -\sum_{i=1}^{n_K} P_{Ki} \log_2 P_{Ki}. \tag{4.4.13}$$

Неопределенность цепи Маркова вычисляется как среднее от S_K, а именно

$$S(X) = \sum_{K=1}^{n} P_K S_K, \tag{4.4.14}$$

где n — полное число состояний цепи, P_K — вероятность найти цепь в (стационарном) состоянии K. Значения P_K (их ровно n) мы вычисляем из первых $n-1$ уравнений линейной системы

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j P_{ij} \tag{4.4.15}$$

и условия

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \tag{4.4.16}$$

Мы видим, что в цепи Маркова вероятности перехода определяют вероятности стационарных состояний — то, что до сих пор мы называли «априорными» вероятностями.

4.5. Конкретные примеры некоторых полезных каналов и вычисление их пропускной способности

4.5.1. Пропускная способность равномерно турбулентного канала

Прежде чем мы перейдем к вычислению пропускной способности некоторых типичных и полезных линий связи, удобно проследить за тем, как изменяется под действием *медленных* случайных вариаций параметров пропускная способность при наличии аддитивного белого гауссовского шума (формула Шеннона). Точнее говоря, в выражение (4.1.50)

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right),$$

задающее пропускную способность канала связи, мы будем вводить медленные вариации мощности сигнала S и/или мощности шума N. Эти вариации обусловлены медленной эволюцией показателя преломления среды, в которой происходит передача информации, и, в частности, вариациями температуры. По сравнению с периодом несущей электромагнитной волны эти флуктуации можно считать медленными.

Следуя Сифорову [4.6], положим $\alpha = S/S_m$, где S_m — средняя мощность сигнала по достаточно большому интервалу времени, и $\beta = S_m/N$. Тогда пропускную способность канала можно записать в виде

$$C = W \log_2 (1 + \alpha\beta). \tag{4.5.1}$$

В отсутствие медленных вариаций пропускная способность канала связи равна

$$C_0 = W \log_2 (1 + \beta). \tag{4.5.2}$$

Отношение пропускных способностей есть величина

$$x = \frac{C}{C_0} = \frac{\ln (1 + \alpha\beta)}{\ln (1 + \beta)} = f(\alpha). \tag{4.5.3}$$

Пусть $p(x)$ — функция плотности вероятности отношения x, которая, как видно из (4.5.3), некоторым образом зависит от случайной переменной α.

Среднее значение отношения x равно отношению средней скорости C_m передачи информации по данному каналу с случайно изменяющимися параметрами к пропускной способности C_0 канала, имеющего не изменяющиеся параметры и такую же

среднюю мощность сигнала. Это отношение представимо в виде

$$\eta = \frac{C_m}{C_0} = \int_0^\infty xp(x)\,dx = F(\beta). \qquad (4.5.4)$$

Такой же подход остается применимым и к каналам связи, в которых передаваемый сигнал расходится по большому числу путей. Распределение вероятности амплитуды сигнала на принимающем конце может быть вычислено по функции плотности вероятности амплитуды большого числа фазовых векторов с одинаковой амплитудой и случайно флуктуирующими фазами в интервале $[-\pi, +\pi]$. Если ф. п. в. для каждой фазы постоянна и равна $1/2\pi$ в указанном интервале, то распределение вероятности амплитуды сигнала на выходе канала следует так называемому распределению Рэлея [4.2]:

$$P(\varepsilon) = \varepsilon \exp(-\varepsilon^2/2), \qquad (4.5.5)$$

где $\varepsilon = E_r/E_0$, E_r — случайная амплитуда поля сигнала, E_0 — медиана этого поля.

Но величина $\varepsilon^2/2$ равна α, отношению случайной мощности сигнала к его средней мощности. Из элементарной теории вероятности [см. также соотношение (4.5.6)] известно, что ф. п. в. для α имеет вид $q(\alpha) = e^{-\alpha}$. Задача теперь состоит в том, чтобы исследовать выражение для $p(x)$, используя ф. п. в. для α, и соотношение (4.5.3). Итак,

$$p(x) = \left[\frac{q(\alpha)}{df(\alpha)/d\alpha}\right]_{\alpha=\vartheta(x)}, \qquad (4.5.6)$$

где $\nu(x)$ — функция, обратная функции $f(\alpha)$.

Из соотношения (4.5.3) следует, что

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\beta}\left[e^{x\ln(1+\beta)} - 1\right]. \qquad (4.5.7)$$

Подставляя в (4.5.6) выражение для $q(\alpha)$, а также $f(\alpha)$ из (4.5.3), получаем

$$p(x) = \frac{\ln(1+\beta)}{\beta} e^{1/\beta}\left[(1+\beta)^x e^{-(1+\beta)^x/\beta}\right] \qquad (4.5.8)$$

и, используя соотношения (4.5.4), приходим, наконец, к

$$\eta = \frac{C_m}{C_0} = \frac{\ln(1+\beta)}{\beta} e^{1/\beta} \int_0^\infty x(1+\beta)^x e^{-(1+\beta)^x/\beta}\,dx. \qquad (4.5.9)$$

После замены переменной $y = (1+\beta)^x/\beta$ и интегрирования соотношение (4.5.9) принимает вид

$$\eta = \frac{e^{1/\beta}}{\ln(1+\beta)} \int_{1/\beta}^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy. \qquad (4.5.10)$$

Значения интеграла

$$\Lambda = \int_{1/\beta}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy \qquad (4.5.11)$$

могут быть найдены численными методами.

Окончательно мы приходим к формуле

$$\eta = \frac{C_m}{C_0} = \frac{\Lambda e^{1/\beta}}{\ln(1+\beta)}. \qquad (4.5.12)$$

Построив график функции $\eta = f(\beta)$, мы обнаружим, что эта функция имеет единственный минимум при $\beta \sim 5$, равный ~ 83. Как показывают наши вычисления, пропускная способность канала шенноновского типа никогда не убывает более чем на 17 % от того значения, которое она имеет в отсутствие медленных случайных вариаций параметров канала, если статистика сигнала при прохождении через турбулентную среду подчиняется распределению Рэлея.

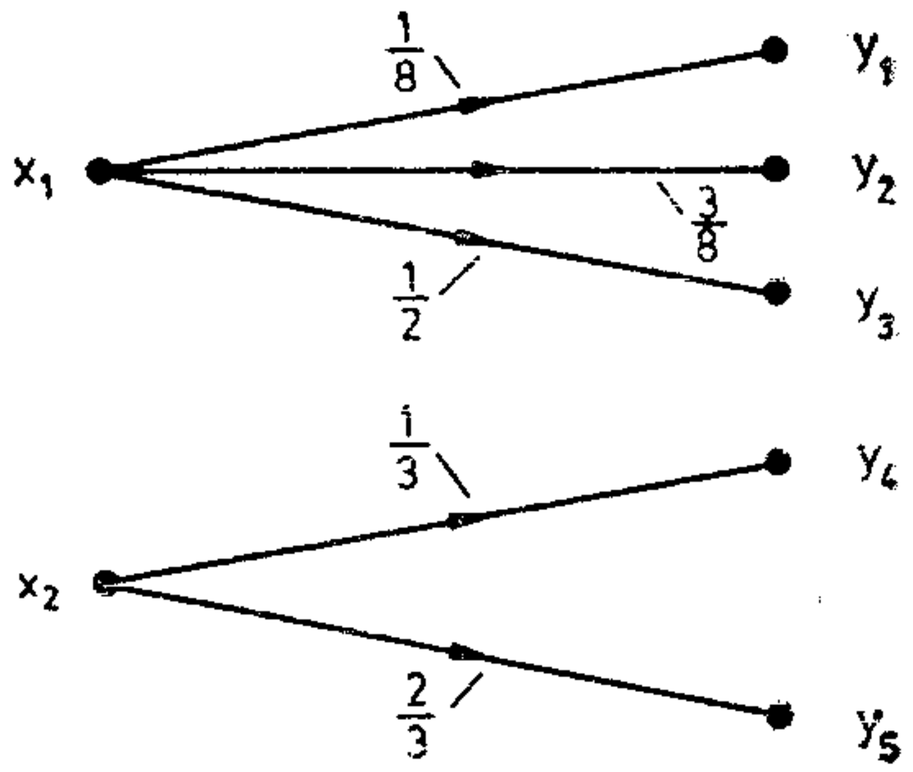


Рис. 4.11. Канал без потерь.

4.5.2. Канал без потерь

Вычислим теперь пропускную способность канала не только с шумом, но и с числом состояний y_j приемника, *превосходящим* числом состояний x_j передатчика (рис. 4.11). Такой канал называется каналом *без потерь*, и в частном случае, представленном на рис. 4.11, его матрица имеет вид

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	1/8	3/8	1/2	0	0	0
x_2	0	0	0	1/3	2/3	0
x_3	0	0	0	0	0	1

В каждом столбце имеется только один ненулевой элемент.

Остаточная неопределенность равна

$$S(X/Y) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} p(x_i, y_i)\log_2 p(x_i/y_i). \qquad (4.5.13)$$

Однако из схемы канала или из его матрицы мы видим, что при любом принятом y_j можно *вполне достоверно* восстановить, какой сигнал x_i был передан. Следовательно, условная вероятность $p(x_i/y_j)$ в каждом случае равна либо *единице*, либо *нулю*. Таким образом, для канала без шума $S(X/Y) = 0$, и поэтому передача информации $I(X \to Y)$ равна $S(X)$ — энтропии передатчика. Пропускную способность канала мы найдем, максимизируя $S(X)$ и $C = \log_2 q$, где q — число состояний передатчика (в нашем случае $C = \log_2 3$).

4.5.3. Детерминистический канал

В этой схеме число состояний передатчика x_i *больше* числа состояний приемника y_j. Матрица такого канала имеет в каждой строке только один ненулевой элемент (схему детерминистического канала см. на рис. 4.12).

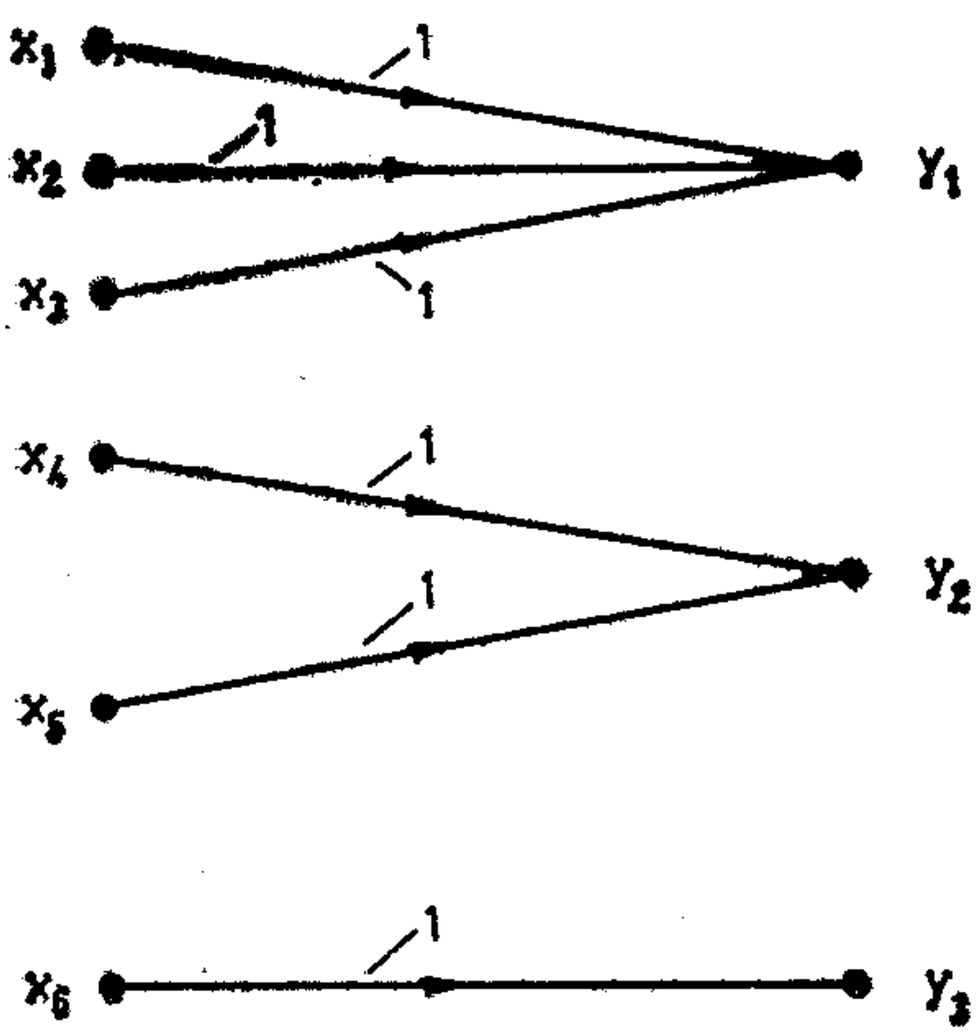


Рис. 4.12. Детерминистический канал.

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0
x_2	1	0	0
x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	0	1	0
x_6	0	0	1

Так как каждая строка содержит только один элемент, этот элемент должен быть равен единице. Передачу информации можно представить в виде

$$I(X \to Y) = S(Y) - S(Y/X) \qquad (4.5.14)$$

и

$$S(Y/X) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log_2 p(y_j/x_i). \qquad (4.5.15)$$

Так как все элементы $p(y_j/x_i)$ равны либо нулю, либо единице, $S(Y/X) = 0$ и $C = \max S(Y) = \log_2 r$, где r — число состояний приемника (следовательно, $C = \log_2 3$).

4.5.4. Равномерный канал

Равномерным мы называем такой канал, в матрице которого все строки и все столбцы одинаковы с точностью до перестановки элементов. Если матрица канала квадратная, то каждая строка и каждый столбец являются просто перестановками первой строки (рис. 4.13).

	y_1	y_2	y_3
x_1	1/2	1/4	1/4
x_2	1/4	1/4	1/2
x_3	1/4	1/2	1/4

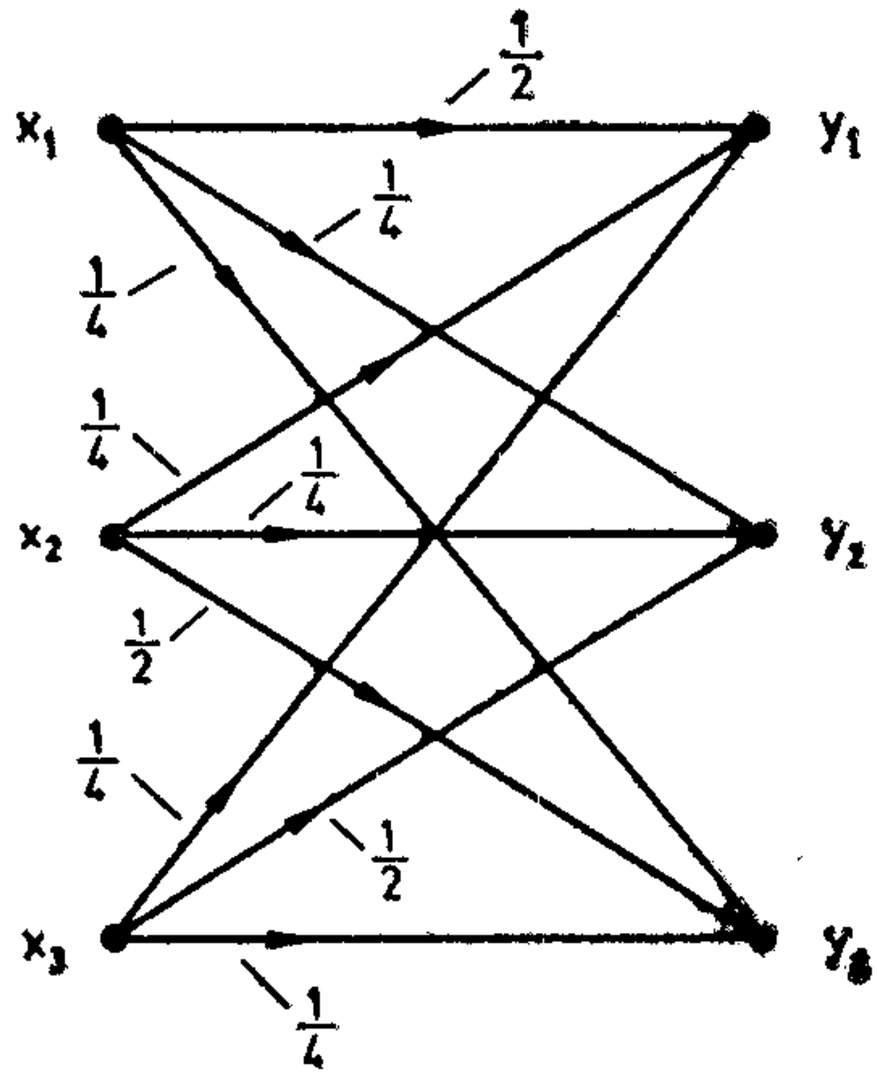


Рис. 4.13. Равномерный канал.

Энтропия равномерного канала $S(Y/X)$ не зависит от вероятностей входных сигналов. В этом нетрудно убедиться, если записать

$$S(Y/X) = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} p(x_i,\ y_j)\log_2 p(y_j/x_i) = \qquad (4.5.16)$$

$$= \left[-\sum_{i=1}^{q} p(x_i)\right]\sum_{j=1}^{r} p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{r} p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i). \qquad (4.5.17)$$

Итак,

$$I(X \to Y) = S(Y) + \sum_{j=1}^{r} p(y_j/x_i)\log_2 p'(y_j/x_i) \qquad (4.5.18)$$

и

$$C = \log_2 q + \sum_{j=1}^{r} p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i). \qquad (4.5.19)$$

В нашем примере $q = r = 3$. В приведенном выше суммировании i может принимать любые значения. Таким образом:

$$C = \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 3 - 1{,}5 \sim 0{,}08.$$

4.5.5. Двоичный симметричный канал

Это — важный частный случай равномерного канала предыдущего типа (рис. 4.14).

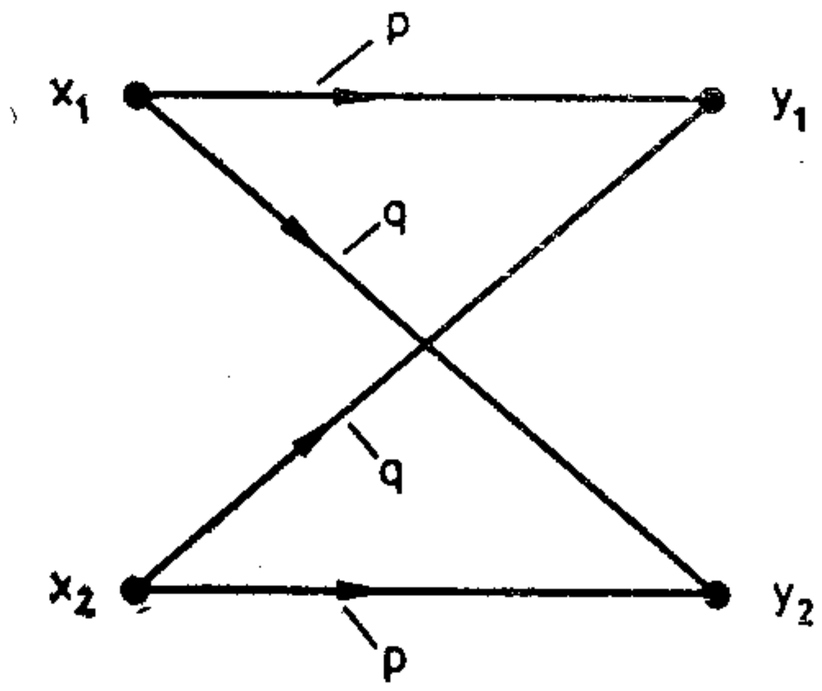


Рис. 4.14. Двоичный симметричный канал.

	y_1	y_2	
x_1	p	q	$p+q=1$
x_2	q	p	

Пропускная способность этого канала может быть выведена непосредственно из соответствующего выражения для равномерного канала (4.5.19), если положить в нем $q=2$, $r=2$, $p(y_j/x_i)=p$ при $j=1$, $i=1$ (или 2) и $p(y_j/x_i)=q$ при $j=2$, $i=1$ (или 2):

$$C=\log_2 2+p\log_2 p+q\log_2 q, \qquad (4.5.20)$$

или

$$C=1+p\log_2 p+(1-p)\log_2(1-p). \qquad (4.5.21)$$

Построив график C как функции от p, мы увидим, что C достигает минимума $C=0$ при $p=1/2$ и что $C=1$ при $p=1$ или $p=0$.

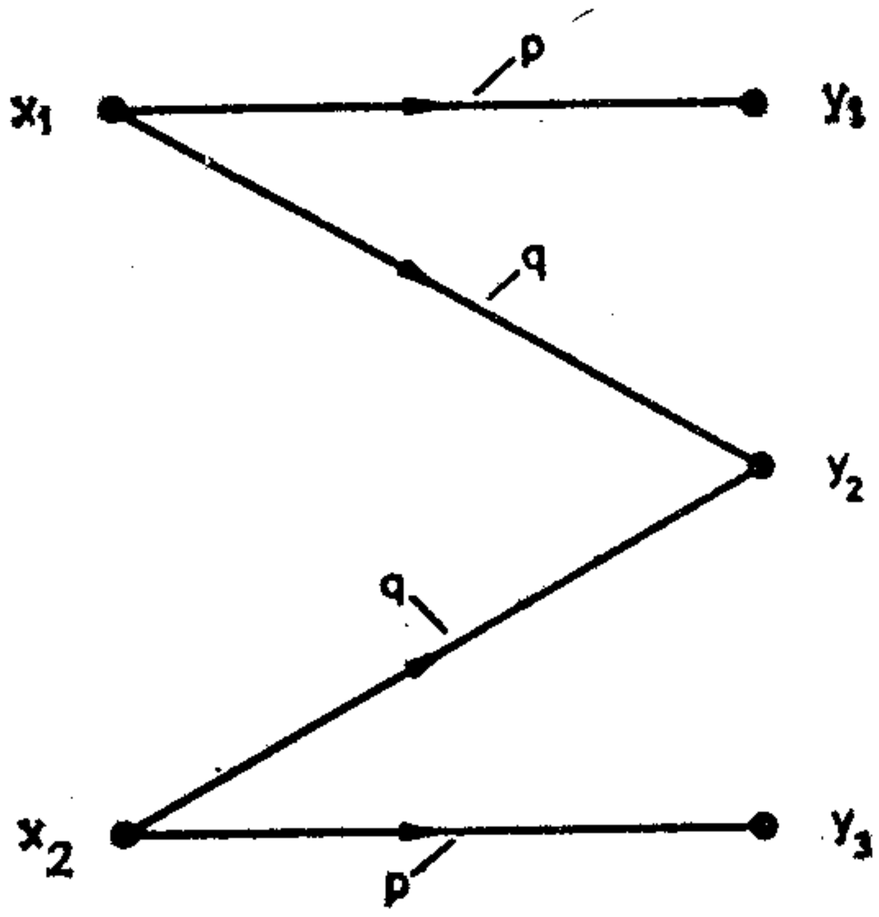


Рис. 4.15. Двоичный «стирающий» канал.

4.5.6. Двоичный «стирающий» «анал

	y_1	y_2	y_3	
x_1	p	q	0	$p+q=1$
x_2	0	q	p	

В этом канале (рис. 4.15) существует выходной символ y_2, используемый для обнаружения ошибки в передаче. Двоичный стирающий канал — это канал, обнаруживающий одиночную ошибку. Вычислим передачу информации $I(X\to Y)=S(X)-$

$-S(X/Y)$. Пусть символы источника имеют вероятности $p(x_1) = \alpha$, $p(x_2) = 1 - \alpha$. Тогда

$$S(X) = -\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha) \qquad (4.5.22)$$

и

$$S(X/Y) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i)\, p(x_i) \log_2 \left[\frac{p(y_j/x_i)\, p(x_i)}{p(y_j)} \right]. \qquad (4.5.23)$$

В суммировании необходимо принимать во внимание все шесть членов. После несложных вычислений получаем, наконец.

$$S(X/Y) = q\,[-\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)] = qS(X) \qquad (4.5.24)$$

и

$$I(X \to Y) = (1-q)\, S(X) = pS(X). \qquad (4.5.25)$$

Соответственно пропускная способность канала равна

$$C = \max I(X \to Y) = p \text{ [бит/с]}. \qquad (4.5.26)$$

4.5.7. Пропускная способность оптического канала

Нас интересует пропускная способность оптического прибора, рассматриваемого как канал связи. До сих пор мы определяли пропускную способность канала как максимальное число битов, которое канал может передать в единицу времени. Но поскольку для большинства оптических приборов время наблюдения практически неограниченно, пропускную способность оптического прибора, следуя ди Франциа [4.7], удобнее определять как число битов, которое прибор может передавать за одно изображение, или как наибольшее число битов, которое может быть получено из изображения, сформированного прибором. Из разд. 3.4 мы знаем, что число степеней свободы изображения должно быть равно (3.4.40)

$$F = 4\Omega \frac{\Sigma}{\lambda^2},$$

где Σ — площадь зрачка инструмента, λ — длина волны падающего света и Ω — полный телесный угол поля наблюдения. Освещенность I в каждой выборочной точке принимающей апертуры заключена между 0 и $I_{\text{макс}}$. Максимальная энтропия изображения достигается, когда все значения I внутри интервала $0 < I < I_{\text{макс}}$ равновероятны. Энтропия изображения в этом случае равна $\log_2 I_{\text{макс}}$.

Помимо теплового шума (который мы рассмотрим в дальнейшем) в случае оптического прибора мы имеем также источник «детерминистического», или «статического», шума, обусловленного «рассеянным» светом, т. е. светом, некогерентно рас-

сеиваемым неоднородностями и/или анизотропностью материала принимающей апертуры. Мы будем предполагать, что интенсивность рассеянного света I_d равномерно распределена по апертуре, образуя своего рода шумовой фон, поэтому «объективная» освещенность I_0 заключена в интервале $I_d < I_0 < I_{\text{макс}} + I_d$ и $I_d = pI_{\text{макс}}$. Таким образом,

$$pI_{\text{макс}} < I_0 < (1 + p) I_{\text{макс}}, \tag{4.5.27}$$

где p — численная постоянная, зависящая от степени неоднородности и/или анизотропии материала принимающей апертуры.

Энтропия изображения при условии, что освещенности в различных выборочных точках статистически независимы, определяется выражением

$$S = F \log_2 I_{\text{макс}} \text{ [бит]}. \tag{4.5.28}$$

Перейдем теперь к оцениванию случайного шума — единственного начала, ответственного за изменение энтропии изображения, так как рассеянный свет, будучи неслучайным, не оказывает влияния на S. Так как квантовый шум будет рассмотрен нами в следующем разделе, мы ограничимся здесь тем, что отождествим случайный шум с шумом рецептора. В частности, нас будет интересовать глаз. Когда на какой-то участок сетчатой оболочки падает свет, создавая *объективную* освещенность I_0, субъективная освещенность I_s, т. е. освещенность, воспринимаемая наблюдателем, вообще говоря, несколько отличается от I_0. В суждении наблюдателя существует неопределенность, связанная с так называемым дифференциальным порогом. Эта неопределенность представляет собой шум, который мы обозначим I_n. Таким образом, *субъективную* освещенность можно представить в виде

$$I_s = I_0 + I_n. \tag{4.5.29}$$

Распределение вероятности для I_n можно считать гауссовским, поэтому

$$p(I_n) = \frac{1}{I_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{I_n^2}{2I_N^2}\right), \tag{4.5.30}$$

где I_N — стандартное отклонение наблюдаемой неопределенности. Однако экспериментально установлено (психологический закон Вебера), что $I_N = \varepsilon I_0$, где коэффициент пропорциональности ε определяется из эксперимента.

Теперь мы можем найти пропускную способность оптического канала, как обычно, вычисляя максимальное значение передачи информации от объекта X к наблюдателю Y, т. е.

$$_{\text{макс}}I(X \to Y) = {}_{\text{макс}}[S(Y) - S(Y/X)], \tag{4.5.31}$$

где $_{\text{макс}}S(Y) = \log_2 I_{\text{макс}}$ бит на степень свободы. Остается вычислить неопределенность $S(Y/X)$ в том, что наблюдатель принимает за *данный* объект. Для этого заметим, что $_{\text{макс}}S(Y/X)$ есть энтропия субъективной освещенности $I_s = I_0 + I_n$, когда объективная освещенность I_0 известна. Таким образом, $_{\text{макс}}S(Y/X)$ есть просто энтропия шума I_n, т. е. гауссовского распределения.

Если учесть, что $I_N = \varepsilon I_0$, то величина $_{\text{макс}}S(Y/X)$ равна среднему значению величины $\log_2 (\sqrt{2\pi e}\, I_N)$ в интервале от $pI_{\text{макс}}$ до $(p+1)I_{\text{макс}}$, т. е.

$$_{\text{макс}}S(Y/X) = \frac{1}{I_{\text{макс}}} \int_{pI_{\text{макс}}}^{(p+1)I_{\text{макс}}} \log_2 (\sqrt{2\pi e}\, \varepsilon I_0)\, dI_0 = \quad (4.5.32)$$

$$= \log_2 \left[\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\, \varepsilon\, \frac{(1+p)^{(1+p)}}{p^p} \right] + \log_2 I_{\text{макс}}. \quad (4.5.33)$$

Подставляя это выражение в формулу, задающую $_{\text{макс}}I(X \to Y)$, получаем окончательно пропускную способность канала

$$C = \log_2 \left[\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, \frac{1}{\varepsilon}\, \frac{p^p}{(1+p)^{1+p}} \right] \text{ бит/степень свободы.} \quad (4.5.34)$$

Построив график C как функции от p, т. е. от доли (в процентах) рассеянного света при типичном значении ε, например при $\varepsilon = 0{,}1$, мы увидим, что при обычном значении p (порядка нескольких процентов) ($p \sim 2$—$3\,\%$) пропускная способность $C \sim 8{,}5$ бит/степень свободы [4.7].

Хороший оптический инструмент с зрачком диаметром ~ 100 мм и углом $\sim 1°$ в середине оптического диапазаона имеет пропускную способность $\sim 10^8$ бит.

4.5.8. Роль квантового шума в оптическом канале

В формуле Шеннона для пропускной способности канала единственным типом шума, мешающим C обратиться в бесконечность, является *тепловой* шум, который, при $h\nu/kT \ll 1$, конечно, преобладает. Но что происходит при $h\nu/kT \gg 1$, т. е. когда несущая частота высока и/или температура очень низка? Из формулы Шеннона следует, что в этом случае $C \to \infty$.

Мы покажем, что в действительности пропускная способность не возрастает неограниченно потому, что в оптическом диапазоне, хотя тепловой шум пренебрежимо мал, основной вклад вносит *квантовый* шум, и он-то и ограничивает пропускную способность канала. Следуя Лебедеву и Левитину [4.8], мы ограничимся рассмотрением диапазона $h\nu/kT \gg 1$. Более сложные вычисления пропускной способности канала C при любом

значении $h\nu/kT$ (по схеме тех же авторов) показывают, что в пределе $h\nu/kT \ll 1$ мы вновь открываем формулу Шеннона как асимптотический предел.

Опишем теперь сигнал и шум в терминах чисел заполнения фотонов на степень свободы электромагнитного поля: $\bar{m}(\nu)$ для сигнала и $\bar{n}(\nu)$ для шума;

$$\bar{l}(\nu) = \bar{m}(\nu) + \bar{n}(\nu) \tag{4.5.35}$$

означает среднее число заполнения фотонов на нормальную моду при частоте ν для принятого волнового сигнала (сигнала плюс шум).

Спектральная плотность фотонного потока (среднее число фотонов на единицу времени и частоту) равна среднему числу заполнения. Таким образом, поток энергии (мощности), переносимой сигналом и шумом в интервале частот $d\nu$, равен соответственно

$$P_S(\nu)\,d\nu = \bar{m}h\nu\,d\nu \tag{4.5.36}$$

и

$$P_N(\nu)\,d\nu = \bar{n}h\nu\,d\nu, \tag{4.5.37}$$

где

$$\bar{n}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{4.5.38}$$

Следовательно, мощность шума составляет

$$\langle P_N \rangle = \int_0^\infty \frac{h\nu\,d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6h}. \tag{4.5.39}$$

(Нулевая энергия осцилляторов поля здесь опущена, так как она никак не сказывается на вычисляемом ниже значении энтропии.)

Поток энтропии (энтропия, переносимая излучением в единицу времени) определяется величиной

$$S_N = \int_0^{\langle P_N \rangle} \frac{dP}{kT} = \int_0^T \frac{1}{kT} \frac{dP(T)}{dT}\,dT, \tag{4.5.40}$$

где $P(T)$ — мощность теплового излучения как функция температуры.

При наличии детерминистического сигнала P мощность полного излучения равна

$$P_0 = \langle P_N \rangle + P. \tag{4.5.41}$$

Тем не менее поток энтропии остается неизменным, так как сигнал и шум статистически независимы, и сигнал детермини-

стичен. Но, как мы уже видели, максимальная форма передачи информации (или максимальный поток энтропии) достигается, когда сигнал *кодируется* как случайный шум. Такм образом, если T_0 — эффективная температура для полного переданного сигнала, то в случае оптимальной передачи информации должно выполняться соотношение

$$\bar{I}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \qquad (4.5.42)$$

Соответственно полный поток энтропии излучения определяется выражением

$$S_0 = \int_0^{T_0} \frac{1}{kT} \frac{dP(T)}{dT} dT, \qquad (4.5.43)$$

а пропускная способность просто равна

$$C = S_0 - S_N = \int_T^{T_0} \frac{1}{kT} \frac{dP(T)}{dT} dT. \qquad (4.5.44)$$

Из соотношения (4.5.41) следует

$$P_0(T) = \frac{\pi^2 (kT_0)^2}{6h} = \frac{\pi^2 (kT)^2}{6h} + p. \qquad (4.5.45)$$

Подставляя T_0 из (4.5.45) в формулу (4.5.44), мы получаем окончательно

$$C = \frac{\pi^2 kT}{3h}\left[\sqrt{1 + \frac{6hP}{\pi^2 (kT)^2}} - 1\right], \qquad (4.5.46)$$

или

$$C = \frac{\pi^2 T}{3h}\left[\sqrt{1 + \frac{6hP}{\pi^2 (kT)^2}} - 1\right] \text{ бит}. \qquad (4.5.47)$$

Из формулы (4.5.47) видно, что при мощности сигнала $6hP/\pi^2(kT)^2 \gg 1$ пропускная способность канала ограничена только квантовыми эффектами, т. е.

$$C_{\text{quant}} \sim \pi \sqrt{\frac{2P}{3h}}. \qquad (4.5.48)$$

Ширина полосы, необходимая для достижения пропускной способности, задаваемой соотношением (4.5.47), приближенно определяется выражением

$$\nu_{\text{макс}} \sim \frac{kT_0}{h} \sim \frac{kT}{h} \sqrt{1 + \frac{6hP}{\pi^2 (kT)^2}}. \qquad (4.5.49)$$

4.5.9. Общие сведения о «генетическом канале» и генетическом коде

Теперь мы попытаемся воспользоваться понятиями теории информации для объяснения (или, скорее, для выяснения) основного явления, происходящего в биологических системах, а именно контроля, осуществляемого генами над синтезом белка (см. также приложение А).

Прежде чем переходить к собственно вычислениям, необходимо ввести читателя в круг основных идей.

Прежде всего нас будет интересовать природа и структура ДНК. В состав ее входят такие химические элементы, как углерод (С), водород (Н), кислород (О), фосфор (Р) и азот (N). Атомы этих элементов соединены между собой весьма сложным образом и образуют макромолекулу.

Около 20 лет назад роль ДНК как носителя генетической информации была впервые установлена и молекулы ДНК удалось сфотографировать с помощью электронного микроскопа. Фотография отдельной молекулы ДНК (извлеченной, например, из бактериофага), увеличенная в 44 000 раз, занимает примерно половину страницы этой книги.

Каждая молекула ДНК состоит из двух отдельных винтовых линий («спиралей», или «нитей»), которые завиваются вокруг друг друга, образуя двойную спираль. Каждая нить состоит из сцепленных между собой молекул *фосфорной кислоты* и одного из сахаров (*деоксирибозы*), которые чередуются. С каждой молекулой сахара в поперечном направлении соединена молекула органического (азотистого) *основания.* Таких оснований всего четыре: А (аденин), Т (тимин), Г (гуанин) и Ц (цитозин).

Аденин всегда соединяется с *тимином*, а *гуанин* — с *цитозином* (рис. 4.16). Каждая такая пара органических оснований образует ступеньку. Ступеньки могут следовать одна за другой до «бесконечности» и в любом порядке (т. е. случайным образом): АТ, ГЦ, ЦГ, АТ, АТ, ГЦ, ЦГ, ..., но А неизменно встречается в паре с Т, а Г — с Ц. Связь между органическими основаниями довольно свободная (водородная). «Шаг» винтовой линии ДНК составляет около 34 Å на каждые 10 ступеней. Диаметр винтовой линии составляет около 20 Å.

Две нити «двойной спирали» (двойной винтовой линии) завиваются в противоположном направлении, или, как говорят, они имеют противоположную киральность (или хиральность): одна нить имеет правую киральность, другая — левую. Основание А одной нити всегда располагается против основания Т другой нити, а Г — против Ц. Каждая нить необратима (не может быть «считана» в обратном направлении).

Молекула ДНК очень длинная и тонкая. Она как бы «суперсвернута», т. е. первоначальный виток имеет еще один изгиб на втором уровне. Молекулярная масса отдельной молекулы ДНК может достигать $2 \cdot 10^9$, что соответствует примерно $3/10^6$ парам оснований. Такая структура может достигать в длину приблизительно 1 мм и иметь диаметр 20 Å, т. е. сравнима по своим размерам с очень тонкой шелковой нитью длиной в одну милю.

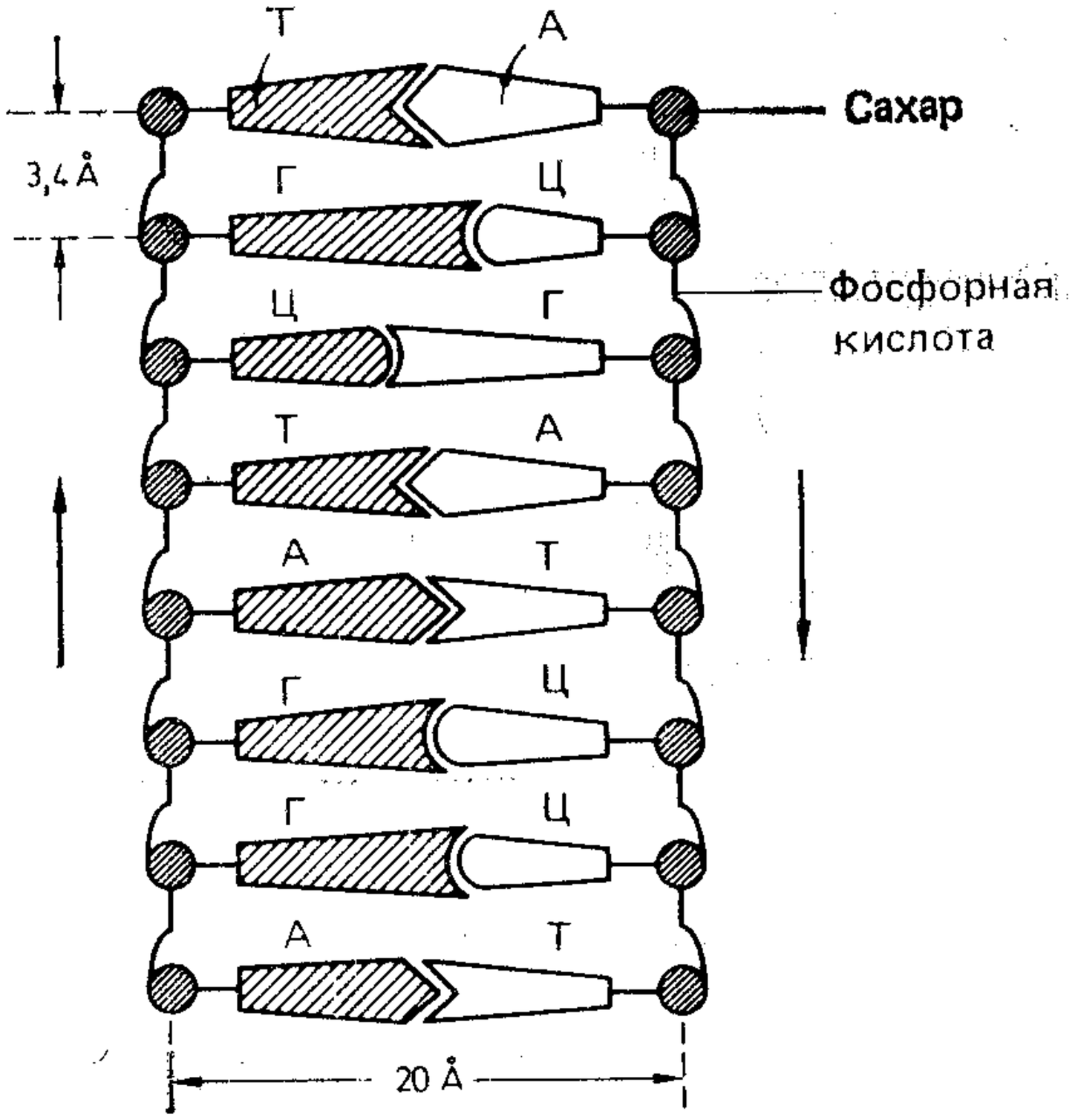


Рис. 4.16. Схема фрагмента ДНК.

Молекулы ДНК поэтому весьма хрупки и легко распадаются на более мелкие фрагменты. *Количество* ДНК в живом организме и *сложность* организма, по-видимому, взаимосвязаны. Например, в *бактерии* общая длина ДНК достигает $\sim 0{,}5$ мм, а число ступеней $\sim 7 \cdot 10^6$. В *вирусе* длина ДНК может доходить до $\sim 0{,}1$ мм, а число ступеней — до 170 000.

Каким образом наследственные детерминанты кодируются в такой молекуле? Существует только один способ кодирования: в последовательности нуклеотидных пар (А, Т) и (Г, Ц). Наиболее поразительный факт о природном процессе состоит в том, что огромные различия в наследственных характеристиках людей, животных, растений, бактерий и вирусов (а также наследственные различия между расами и отдельными особями одной и той же расы) почти целиком опираются на случайную

последовательность пар (А, Т) и (Г, Ц)[1]. Именно эта последовательность определяет также (в динамической связи с специфической окружающей средой), какие из особенностей поведения развиваются в фенотип.

Взаимосвязь между ДНК как источником информации и характеристиками зрелого организма содержит много промежуточных *иерархических уровней* (см. также разд. 4.8 и приложение А). На сегодня «биокибернетической интерпретации», или моделированию, поддается только *первая пара* этих иерархических уровней (рис. 4.17). Эта метаболическая стадия состоит из процессов, в которых ДНК управляет синтезом *белков.* В свою очередь белки через петлю обратной связи управляют синтезом ферментов, которые «включают» и «выключают» отдельные участки ДНК генов (см. ниже). Белки — не только основной строительный материал (вместе с углеводородами и жирами), из которого состоят организмы (у высших животных исключением является только твердое вещество костей — минерала, состоящего из фосфора и кальция), но и химический агент, используемый организмом, например, в ферментах — катализаторах, делающих возможным протекание всех химических реакций в организме. Белки, принадлежащие к «второму иерархическому уровню» организма, по своему строению совершенно отличны от ДНК. Они состоят из углерода (С), водорода (Н), кислорода (О), азота (N) и серы (S). Их молекулы, как и молекула ДНК, закручены «влево», но в отличие от ДНК состоят не из двух, а из одной нити. Эта нить состоит из элементов, расположенных в линейной последовательности, и число различных типов компонент уже не исчерпывается четырьмя, как в случае ДНК, а достигает двадцати одной. Эти компоненты называются *аминокислотами.*

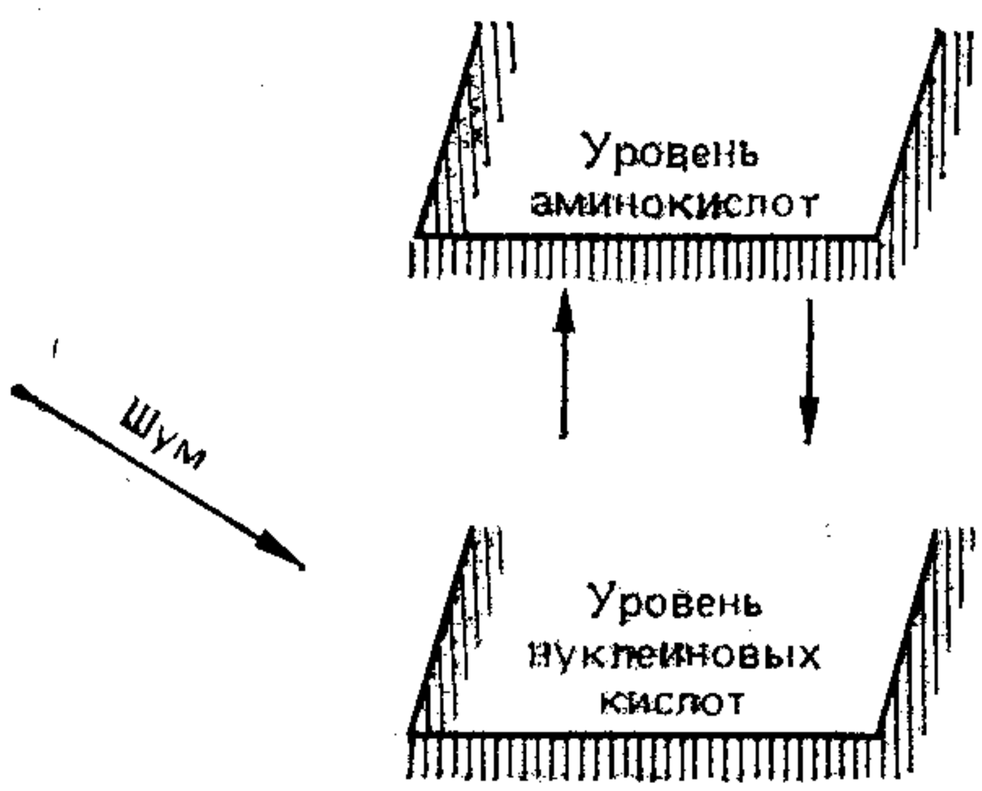


Рис. 4.17. **Иерархическая система ДНК и белков.**

---

[1] В том смысле, что «трансмутация генома», достижимая, возможно, средствами генной инженерии, в принципе должна казаться ничуть не более странной, чем «трансмутация элементов», достигаемая средствами ядерной инженерии. Разумеется, отмеченная нами аналогия в лучшем случае поверхностна, так как трансмутация генома требует *сжатия* длинных случайных рядов, что является сложной проблемой, выходящей за рамки чисто вычислительной проблемы (см. также разд. 4.6 и гл. 5 и 6).

Первый шаг в установлении информационной взаимосвязи, или отображения, между ДНК и характеристиками организма состоит в том, что порядок оснований в ДНК определяет порядок аминокислот в синтезируемой полипептидной цепи. (О роли промежуточного вещества — информационной ДНК — будет сказано ниже.)

Сколько нуклеотидов необходимо в каждом данном случае, чтобы определить включение одной молекулы специфической аминокислоты в цепь молекулы белка? Так как существует четыре различных нуклеотида, они могли бы определять образование четырех различных аминокислот. А как быть с остальными? Ясно, что отдельного нуклеотида еще недостаточно для однозначного выбора направления формирования аминокислот. Если бы формирование каждой аминокислоты происходило под влиянием двух нуклеотидов, то положение 16 ($=4^2$) различных аминокислот в молекуле белка можно было бы задать однозначно, что опять недостаточно. И только комбинации трех нуклеотидов позволяют формировать 20 различных сигналов, соответствующих 20 аминокислотам. Биохимия подтверждает этот вывод. В терминах теории информации можно сказать, что нуклеотиды несут количество информации, равное $\log_2 4 = 2$ бит. Соответственно одна аминокислота несет $\log_2 20 = 4{,}32$ бит. Если нуклеотиды должны определять аминокислоты, то на одно «слово» из них должно приходиться по крайней мере столько же информации, сколько ее приходится на отдельную аминокислоту. Комбинаций из двух нуклеотидов для этого недостаточно, так как каждая из таких комбинаций содержит по $2(\log_2 4) = 4$ бит. Что же касается комбинаций из трех нуклеотидов, то каждая такая комбинация содержит уже по $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 6$ бит $> 4{,}32$ бит.

Биохимические исследования пролили некоторый свет на ту роль, которую играют «лишние» триплеты нуклеотидов. Разумеется, их недостаточно для того, чтобы сделать генетический код «защищенным» кодом; для этого понадобилось бы гораздо больше комбинаций, чем существует триплетов. Сегодня мы знаем, что генетический код отчасти «избыточный», т. е. несколько последовательностей нуклеотидов дают сигнал для одной и той же аминокислоты. Однако, с другой стороны, известно, что некоторые триплеты нуклеотидов не участвуют в синтезе белков или не соответствуют никакой аминокислоте. Они играют совершенно другую роль: стоит им войти в цепь РНК (см. ниже), как синтез молекул белка, который зависит от РНК, прекращается. Таким образом, кодовые слова этих «запасных» триплетов, по-видимому, соответствуют символам, сигнализирующим об окончании одного предложения и о начале следующего.

Исследуем теперь, каким образом сигнал от ДНК (находящейся в ядре клетки) достигает рибосом в цитоплазме клетки, где происходит синтез белков. Иначе говоря, исследуем, как происходит передача информации с уровня нуклеотидов *X* на уровень аминокислот *Y* (рис. 4.18) в присутствии межклеточного шума.

Типичный белок содержит цепочку примерно из ~200 аминокислот. Типичный ген (часть ДНК, отвечающая за образование отдельного белка) состоит из ~600 пар оснований. Гены разделены «знаками препинания», т. е. частями ДНК, лишенными

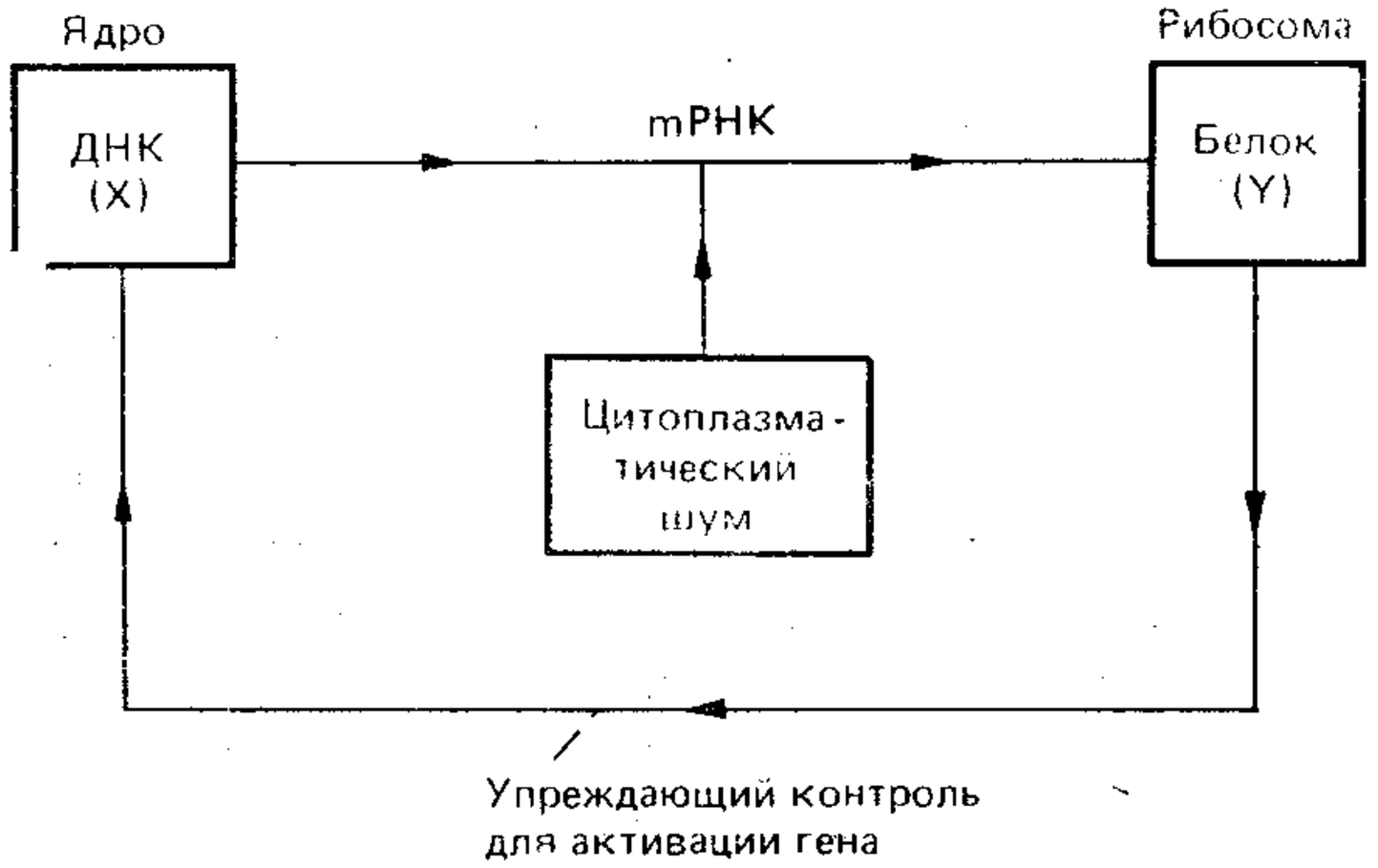


Рис. 4.18. Схема цикла синтеза белка.

способности к «самовыражению». Первой стадией проявления генетической информации, содержащейся в ДНК, является синтез молекул РНК, в которых последовательности нуклеотидов определяются последовательностью нуклеотидов в ДНК. Передача информации осуществляется так: молекула ДНК «расстегивается», как застежка-молния, образуя информационную РНК (mPHK) и транспортную РНК (tPHK). Молекула mPHK представляет собой одинарную цепь, которая может образовывать петли и складываться. Вместо оснований (А, Т) в РНК входят основания (А, У) (У — урацил). Именно mPHK играет роль сигнала, испускаемого триплетами (содержащими У, а не Т), и переносит информацию, необходимую для синтеза белков, от ядра через цитоплазму к рибосомам (диаметром 20 мкм), в которых происходит окончательный синтез полипептидов. Около 80 % всей РНК в рибосомах является рибосомной РНК. Транспортная РНК как бы «подвозит к линии сборки» аминокислоты, уже направленные в определенное место информационной РНК, и rPHK формирует окончательную полипептидную цепь, которая затем может спонтанно сложиться и образовать трехмерный структурный блок, конфигурация которого зависит от последо-

вательности аминокислот в цепи и от ограничения, налагаемого условием минимизации ее свободной энергии.

Пропускная способность рассматриваемой нами системы в принципе может быть вычислена, как обычно, по передаче информации

$$I(X \to Y) = S(X) - S(X/Y) - S(Y) - S(Y/X) \qquad (4.5.50)$$

от ядра X к рибосоме Y. Максимальное значение $S(X)$ достигается, когда все триплеты («кодоны») равновероятны, и $p(x) = 1/64$. Это означает, что нуклеотиды ДНК должны встречаться в равных количествах — условие, которое реализуется, например, в E. coli. В других случаях ситуация иная, поэтому никакой *универсальности* в передаче информации $I(X \to Y)$ не существует.

Генетический канал напоминает *детерминистический канал*, рассмотренный нами в разд. 4.5.3. Действительно, в генетическом канале число состояний X равно 64, число состояний Y равно 20 (или 23, если считать «знак препинания», метку «начало слова» и метку «конец слова», которыми могут служить дополнительные аминокислоты).

Итак, пропускную способность генетического канала можно считать равной

$$S(Y)_{\text{макс}} = \log_2 23 = 4{,}52 \text{ бит} \qquad (4.5.51)$$

на одну аминокислоту; его избыточность составляет при этом *не менее*

$$R = 1 - \frac{S(Y)_{\text{макс}}}{S(X)_{\text{макс}}} = 1 - \frac{4{,}52}{6} \sim 25\ \% \qquad (4.5.52)$$

Следует заметить, что на протяжении всей жизни клеток избыточность убывает из-за потерь информации, вызываемых случайными мутациями — источником шума, который пока еще невозможно моделировать. Поэтому, для того чтобы подтвердить или опровергнуть изложенную выше простую модель, необходимы дополнительные экспериментальные данные.

В заключение этого раздела полезно привести некоторые известные сведения о процессах передачи информации, происходящих не в отдельных клетках, а в полностью развитых органах. Хорошим тому примером может служить почка [4.9].

Мы знаем, что один бит информации о наблюдаемой системе уменьшает вдвое неопределенность числа возможных комплексов, и изменение энтропии, вызванное одним двоичным решением, равно

$$\Delta S = -k \ln 2 \sim 10^{-21} \text{ Дж/(бит} \cdot \text{К)}. \qquad (4.5.53)$$

В биологических системах существуют процессы управления, над которыми требуется произвести столь большое число наблюдений в единицу времени, что затраты энергии становятся значительными, предсказуемыми и измеримыми. По потреблению кислорода почка уступает только сердцу. Обычные термодинамические вычисления, приравнивающие выход почки работе против осмотического давления, дают для человека мощность на выходе $\sim 0{,}5$ кал/мин. Сравнение этой величины с мощностью на выходе почки (~ 100 кал/мин) дает коэффициент полезного действия менее 1 % — обескураживающе малое значение по сравнению с коэффициентами полезного действия других органов.

Но если подходить к почке не просто как к насосу, а скорее как к «кибернетическому устройству», то ситуация изменится: вследствие обмена веществ междуклеточная жидкость (кровь) стремится отклониться от своего «оптимального» состава, и почки призваны обеспечивать непрерывный контроль над ионами и молекулами в жидкости и непрерывный отбор нежелательных частиц. Для этого требуется очень большое число «наблюдений». Для направленного отбора частиц почка должна распознавать каждую частицу, которую она отбирает. Процесс такого отбора должен включать в себя установление своего рода связи между почкой и частицей — посылку сигнала-запроса.

Во сколько минимально обходится генерирование такого сигнала? Простейшее наблюдение, позволяющее распознавать одну из двух равновероятных возможностей, не может быть выполнено без затраты менее чем $kT \ln 2$ единиц свободной энергии. Умножая эту (малую) стоимость на огромное число актов отбора, производимых почкой за некоторый интервал времени, получаем необходимую для этого энергию — величину, достаточно большую для того, чтобы коэффициент полезного действия почки был сравнительно высоким (разумеется, низкая стоимость была минимумом, достижимым в отсутствие шума). Независимо от механизма распознавание частицы требует генерации своего рода «сигнала-запроса», отличимого от фонового теплового шума, имеющего при «температуре тела» амплитуду $\sim kT$, или $\sim 0{,}027$ эВ. Надежность процесса отбора зависит от отношения сигнал/шум. Состав междуклеточной жидкости поддерживается с точностью до ± 5 %.

При амплитуде сигнала, в 4 раза превосходящей амплитуду теплового фона, вероятность ошибки из-за тепловых возмущений составляет ~ 2 %. Это разумный уровень надежности для механизма гомеостаза. Упоминавшийся выше уровень ± 5 % соответствует отношению сигнал/шум, равному ~ 3.

Такой уровень надежности требует сигнала для распознавания частиц на уровне примерно $3 \cdot 0{,}027 = 0{,}08$ эВ. У человека

за одну минуту почки отбирают $\sim 10^{22}$ ионов (главным образом Na^+). Мощность, необходимая для распознавания этих ионов, составляет $0{,}08 \cdot 10^{22} = 8 \cdot 10^{20}$ эВ ~ 30 кал/мин. Мощность, потребляемая человеческой почкой, равна 100 кал/мин; приведенные выше вычисления дают коэффициент полезного действия в 30 %. Таким образом, вычисление коэффициента полезного действия органа, который функционирует как *контрольное* устройство, не может опираться только на соображения энергии на входе/выходе.

Аналогичным образом электронный элемент, например электронная лампа или транзистор, расходует почти *всю* энергию, которую он потребляет, и тем не менее может быть высокоэффективным как устройство, перерабатывающее информацию. Такое поведение характерно для всех *диссипативных структур.*

4.5.10. Петля синхронизации фазы в отсутствие и при наличии шума

Этот раздел мы закончим несколькими конкретными примерами каналов связи и оценкой их способности исправлять ошибки. Для этого мы аналитически рассмотрим очень важный случай петли синхронизации фазы (ПСФ). Это устройство используется в приемнике перед стадией демодуляции и отсечки носителя и предназначено для обеспечения и поддержания когерентности фаз между флуктуирующим сигналом от окружающей среды и опорным сигналом. Если говорить кратко, то ПСФ

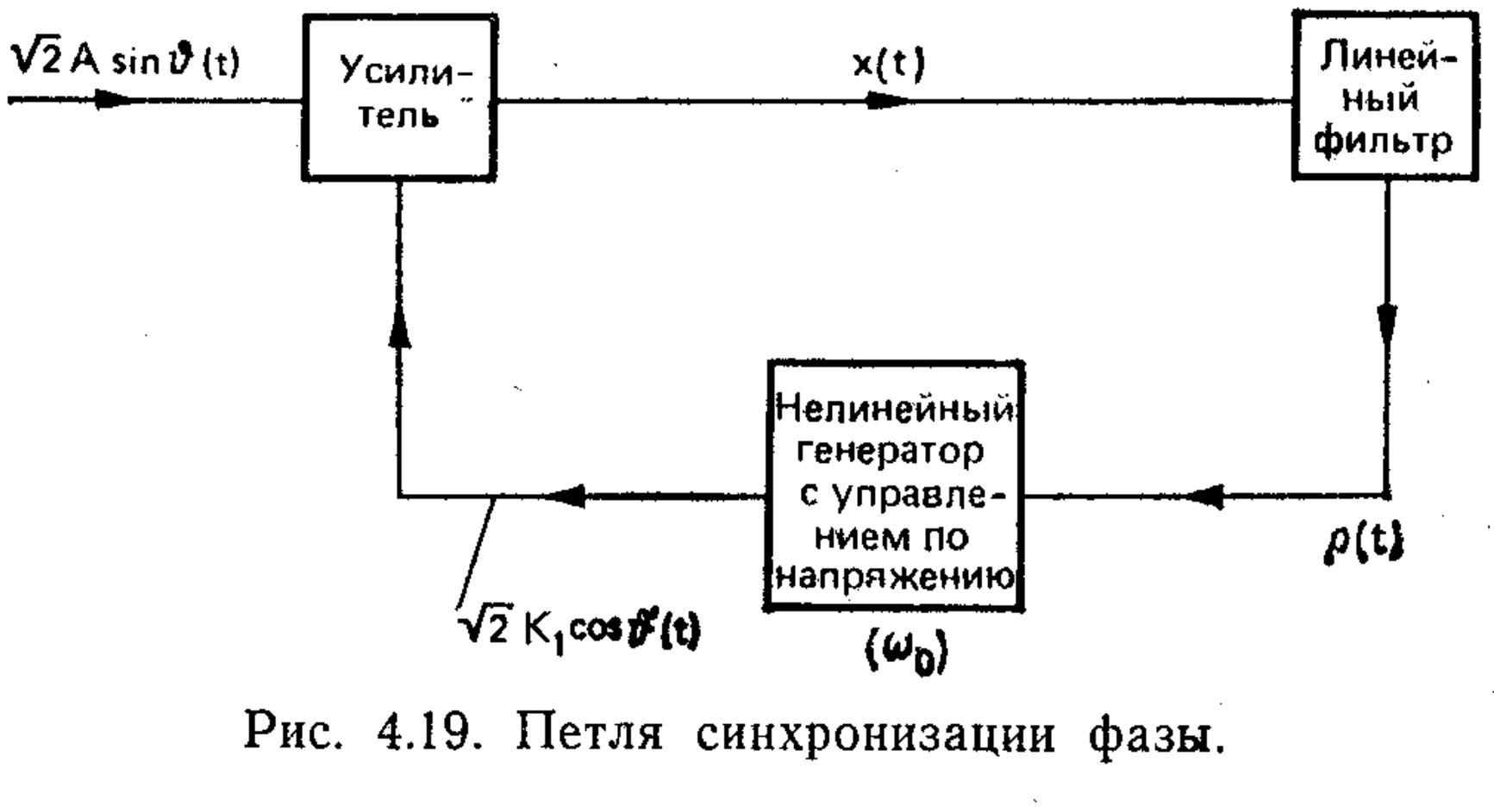


Рис. 4.19. Петля синхронизации фазы.

должна обеспечивать самоорганизацию или достижение наибольшей *сжимаемости* на случайной фазе принятого сигнала.

Любую *систему автоматического контроля фазы* обычно принято рассматривать как ПСФ (по существу как нелинейное устройство обратной связи). Такая система состоит из трех главных компонент: *усилителя, линейного фильтра, инвариантного относительно сдвига по времени, и нелинейного генератора с управлением по напряжению* (рис. 4.19).

Пусть принятый сигнал имеет мощность A^2 Вт. Тогда максимум напряжения равен $\sqrt{2}\,A$, и принятый сигнал можно записать в виде $\sqrt{2}\,A\sin\vartheta(t)$. Пусть $\sqrt{2}\,K_1\cos\vartheta'(t)$ — выходной сигнал генератора с управлением по напряжению, где K_s — среднеквадратичная амплитуда сигнала. Если выключить в генераторе управляющий сигнал $e(t)$, то на выходе генератора мы получим синусоиду с постоянной частотой ω_0 рад/с. При включении управляющего сигнала частота генератора с управлением по напряжению становится равной $\omega_0 + K_2 e(t)$, где K_2 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность рад/(В·с).

Таким образом, производная по времени фазового угла выходной фазы генератора с управлением по напряжению определяется уравнением

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = \omega_0 + K_2 e(t). \tag{4.5.54}$$

Сигнал на выходе усилителя имеет вид

$$x(t) = 2AK_1 \sin\vartheta(t)\cos\vartheta'(t) =$$
$$= AK_1\{\sin[\vartheta(t) - \vartheta'(t)] + \sin[\vartheta(t) + \vartheta'(t)]\}. \tag{4.5.55}$$

Член с суммой частот исключается комбинацией фильтров в генераторе с управлением по напряжению, и его можно опустить.

Линейный фильтр, инвариантный относительно сдвига по времени, действуя на входной сигнал $x(t)$, преобразует его в выходной сигнал

$$e(t) = e_0(t) + \int_0^t x(t-t')\,f(t')\,dt' = e_0(t) + \int_0^t x(t')\,f(t-t')\,dt' \tag{4.5.56}$$

при $t \geqslant 0$, где предполагается, что сигнал на вход поступает при $t = 0$. Здесь $e_0(t)$ — «нулевой» сигнал на входе, который зависит от начальных условий при $t = 0$. Обычно мы полагаем $e_0(t) = 0$ при всех t. Весовая функция $f(t)$ известна под названием *импульсная характеристика фильтра*. В результате мы получаем уравнение

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = \omega_0 + K_2\int_0^t f(t-t')\,AK_1\sin[\vartheta(t') - \vartheta'(t')]\,dt'. \tag{4.5.57}$$

Если ввести по определению *рассогласование по фазе* $\varphi(t) = \vartheta(t) - \vartheta'(t)$ и *коэффициент усиления петли* $K = K_1K_2$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vartheta(t)}{dt} - \omega_0 - AK\int_0^t f(t-t')\sin\varphi(t')\,dt', \tag{4.5.58}$$

или

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \underbrace{\omega - \omega_0}_{\Delta} - AK\int_0^t f(t-t')\sin\varphi(t')\,dt',$$

или, наконец,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta - AK\int_0^t f(t-t')\sin\varphi(t')\,dt'. \qquad (4.5.59)$$

При заданной входной частоте $\omega(t)$ решение $\varphi(t)$ интегродифференциального уравнения (4.5.59) дает точное описание того, как действует петля фазовой синхронизации, т. е. динамики синхронизации по фазе.

Предположим теперь, что существует широкополосный гауссовский шум с нулевым средним, который наложен на принятый сигнал. После прохождения через узкополосный фильтр, вырезающий интервал частот с центром ω_0, шум со спектральной плотностью N_0 Вт/Гц определяется стационарным процессом

$$n(t) = \sqrt{2}\,[n_1(t)\sin\omega_0 t + n_2(t)\cos\omega_0 t], \qquad (4.5.60)$$

где $n_1(t)$, $n_2(t)$ — независимые гауссовские процессы с ненулевыми средними и одинаковыми спектральными плотностями.

Чтобы выяснить, как влияет на аддитивный «белый» (гауссовский) шум ПСФ, выберем принятый сигнал в виде

$$\sqrt{2}\,A\sin\vartheta(t) + n(t) =$$

$$= \sqrt{2}\,\{A[\sin\omega_0 t + \vartheta_1(t)] + n_1(t)\sin\omega_0 t + n_2(t)\cos\omega_0 t\}, \qquad (4.5.61)$$

где $\vartheta_1(t) = \vartheta(t) - \omega_0 t$.

Сигнал на выходе генератора с управлением по напряжению имеет вид

$$\sqrt{2}\,K_1\cos\vartheta'(t) = \sqrt{2}\,K_1\cos[\omega_0 t + \vartheta_2(t)], \qquad (4.5.62)$$

где $\vartheta_2(t) = \vartheta'(t) - \omega_0 t$. Разумеется, в этом случае $\vartheta'(t)$ — функция не только модуляции сигнала $\vartheta(t)$, но и шума. Сигнал на выходе усилителя имеет вид

$$x(t) = AK_1\sin[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)] - K_1 n_1(t)\sin\vartheta_2(t) + K_1 n_2(t)\cos\vartheta_2(t) +$$
$$+ AK_1\sin[2\omega_0 t + \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t)] + K_1 n_1(t)\sin[2\omega_0 t + \vartheta_2(t)] +$$
$$+ K_1 n_2(t)\cos[2\omega_0 t + \vartheta_2(t)]. \qquad (4.5.63)$$

Всеми членами, центрированными на частоте $2\omega_0$ рад/с, можно пренебречь, так как спектр сигнала относительно узок и величинами $n_1(t)$, $n_2(t)$ при $|\omega| > \omega_0$ можно пренебречь, поскольку «частота покоя», или «автопериодическая» частота, ω_0

генератора с управлением по напряжению гораздо больше, чем диапазон частот компонент петли.

Итак, мы можем записать

$$e(t) = K_1 \int_0^t [A \sin \varphi(t') - n_1(t') \sin \vartheta_2(t_1)] + \\ + n_2(t') \cos \vartheta_2(t')] [f(t - t')] \, dt', \qquad (4.5.64)$$

где $\varphi(t) = \vartheta(t) - \vartheta'(t) = \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)$.

Вводя обозначения $K = K_1 K_2$ и $n'(t) = -n_1(t) \sin \vartheta_2(t) + n_2(t) \cos \vartheta_2(t)$, получаем

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta - K \int_0^t [A \sin \varphi(t') + n'(t')] f(t - t') \, dt'. \qquad (4.5.65)$$

Если импульсная характеристика фильтра имеет вид дельта-функции, то уравнение (4.5.65) примет вид

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta - AK \sin \varphi(t) - Kn'(t). \qquad (4.5.66)$$

Требуется теперь найти такое решение уравнения (4.5.66), из которого мы могли бы получить ф. п. в. $p(\varphi)$, описывающую диффузию вероятности при синхронизации и, разумеется, на-

начальном условии

$$p(\varphi, 0) = \delta(\varphi - \varphi_0) \qquad (4.5.67)$$

и нормировке

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi, t) \, d\varphi = 1. \qquad (4.5.68)$$

Мы предполагаем, что $\varphi(t)$ — простой марковский процесс [т. е. вероятность $p(\varphi)$ того, что фаза принимает данное значение, зависит только от непосредственно предшествующего состояния (значения)]. Иначе говоря, ф. п. в. $p(\varphi, t)$ марковского процесса $\varphi(t)$ зависит только от начального условия $\varphi(0) = \varphi_0$. Соответственно мы обозначим плотность условной вероятности через $p(\varphi/\varphi_0; t)$. Величина $p(\varphi/\varphi_0; t) d\varphi$ есть вероятность того, что значение случайного процесса заключено в интервале между φ и $\varphi + d\varphi$, если t секунд назад его значение было равно φ_0.

Рассмотрим процесс, в котором временные величины t и Δt произвольны, и пусть φ_0, φ' и φ — значения процесса в моменты времени t_0, $t_1 = t_0 + t$ и $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Если φ' и φ_0 заданы, то плотность вероятности случайной величины φ мы можем определить как $p(\varphi/\varphi'; \Delta t, \varphi_0; t + \Delta t)$.

Но так как вероятность перехода в момент времени t_1 зависит только от φ', мы заключаем, что плотность вероятности в момент времени t_2 не зависит от значения φ_0 в момент времени t_0. Таким образом,

$$p(\varphi/\varphi'; \Delta t, \varphi_0; t + \Delta t) = p(\varphi/\varphi'; \Delta t). \qquad (4.5.69)$$

Из этого определения следует основное интегральное уравнение для условной функции плотности марковского процесса. Опустим пока относительные времена. Плотность совместной вероятности трех выборочных значений процесса обозначим через $p(\varphi, \varphi', \varphi_0)$. Тогда

$$p(\varphi, \varphi', \varphi_0) = p(\varphi', \varphi_0)\, p(\varphi/\varphi', \varphi_0). \qquad (4.5.70)$$

Интегрируя правую и левую часть соотношения (4.5.70) по φ', получаем

$$p(\varphi, \varphi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi', \varphi_0)\, p(\varphi/\varphi')\, d\varphi'. \qquad (4.5.71)$$

Деля на функцию плотности $p(\varphi_0)$ с учетом равенства $p(\varphi/\varphi_0)p(\varphi_0) = p(\varphi, \varphi_0)$ и восстанавливая зависимость от относительных времен, преобразуем уравнение (4.5.71) к виду

$$p(\varphi/\varphi_0; t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi'/\varphi_0; t)\, p(\varphi/\varphi'; \Delta t)\, d\varphi'. \qquad (4.5.72)$$

Уравнение (4.5.72) представляет собой фундаментальное соотношение для плотности условной вероятности марковского процесса (уравнение Колмогорова — Чепмена).

Из уравнения (4.5.72) и начального условия $p(\varphi/\varphi_0; 0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ мы можем вывести *дифференциальное уравнение в частных производных* для $p(\varphi; t)$. Начнем с интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\varphi) \frac{\partial p(\varphi/\varphi_0; t)}{\partial t}\, d\varphi, \qquad (4.5.73)$$

где $R(\varphi)$ — произвольная аналитическая функция, на производные которой мы накладываем определенные условия, которые будут сформулированы ниже. Запишем интеграл (4.5.73) в

виде

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\varphi)\, d\varphi\, \frac{p(\varphi/\varphi_0;\ t+\Delta t) - p(\varphi/\varphi_0;\ t)}{\Delta t} = \quad (4.5.74)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(\varphi)\, d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi'/\varphi_0;\ t)\, p(\varphi/\varphi';\ t)\, d\varphi' - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} R(\varphi')\, p(\varphi'/\varphi_0;\ t)\, d\varphi' \right] \quad (4.5.75)$$

Меняя порядок интегрирования и разлагая аналитическую функцию $R(\varphi)$ в ряд Тейлора в окрестности φ', получаем

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi'/\varphi_0;\ t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{(n)}(\varphi')}{n!}\, d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi - \varphi')^n\, p(\varphi/\varphi';\ \Delta t)\, d\varphi, \quad (4.5.76)$$

где

$$R^{(n)}(\varphi') = \frac{d^n R(\varphi')}{d\varphi'^n}.$$

Обозначим предел нормированного n-го условного момента приращения $(\varphi - \varphi')$ за время Δt через

$$A_n(\varphi') = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi - \varphi')^n\, p(\varphi/\varphi';\ \Delta t)\, d\varphi \quad (n \geqslant 1). \quad (4.5.77)$$

Тогда

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} R^{(n)}(\varphi')\, A_n(\varphi')\, p(\varphi'/\varphi_0;\ t)\, d\varphi'. \quad (4.5.78)$$

В предположении, что функция $R(\varphi')$ и ее производные убывают при $\varphi' \to \pm\infty$ достаточно быстро и поэтому

$$\begin{gathered} R^{(n-1)}(\varphi')\, A_n(\varphi')\, p(\varphi'/\varphi_0;\ t)\,|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \\ R^{(n-2)}(\varphi')\, \frac{\partial}{\partial \varphi'} [A_n(\varphi')\, p(\varphi'/\varphi_0;\ t)]\,|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R(\varphi') = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \varphi'^{n-1}} [A_n(\varphi')\, p(\varphi'/\varphi_0;\ t)]\,|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \end{gathered} \quad (4.5.79)$$

проинтегрируем n-й член суммы по частям n раз. Вычитая разложение (4.5.78) из соотношения (4.5.73) и заменяя в (4.5.78)

переменную интегрирования φ' на φ, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\varphi)\, d\varphi \left\{ \left[\frac{\partial p(\varphi/\varphi_0;\ t)}{\partial t} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} [A_n(\varphi)\, p(\varphi/\varphi_0;\ t)] \right\} = 0. \tag{4.5.80}$$

Так как $R(\varphi)$ — аналитическая функция, произвольная с точностью до условий (4.5.79) на ее производные, для того чтобы интеграл в (4.5.80) был равен нулю, выражение в фигурных скобках должно быть равно нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial p(\varphi,\ t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} [A_n(\varphi)\, p(\varphi,\ t)] \tag{4.5.81}$$

с начальным условием $p(\varphi, 0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$.

Величина $A_n(\varphi')$ есть предел n-го момента приращения $\Delta\varphi'$ и может быть записана в виде

$$A_n(\varphi') = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta\varphi')^n\, p(\Delta\varphi'/\varphi')\, d(\Delta\varphi') = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle (\Delta\varphi')^n/\varphi' \rangle}{\Delta t}. \tag{4.5.82}$$

Вскоре мы покажем, что при $n \geqslant 3$ величины $A_n(\varphi')$ равны нулю. Это означает, что изменения в процессе $\varphi(t)$ происходят достаточно медленно и все моменты, начиная с третьих, убывают быстрее, чем Δt стремится к нулю. Следовательно, уравнение (4.5.82) вырождается в уравнение

$$\frac{\partial p(\varphi,\ t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [A_1(\varphi)\, p(\varphi,\ t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [A_2(\varphi)\, p(\varphi,\ t)], \tag{4.5.83}$$

где $p(\varphi, 0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$. Это уравнение известно под названием *уравнения Фоккера — Планка*. Его решение дает ф. п. в. при любом t, которая содержит полное статистическое описание рассматриваемого случайного процесса.

Чтобы теперь получить уравнение в частных производных для ф. п. в. петли синхронизации фазы $p(\varphi, t)$, необходимо определить величины $A_n(\varphi)$. Их мы находим из дифференциального уравнения (4.5.66), интегрируя правую и левую часть последнего по бесконечно малому интервалу от t до $t + \Delta t$:

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = [\Delta - AK \sin \varphi(t)]\, \Delta t - K \int_{t}^{t+\Delta t} n'(t)\, dt. \tag{4.5.84}$$

Ясно, что условная плотность приращения $\Delta\varphi$ при заданном $\varphi(t)$ имеет распределение Гаусса, если $n'(t)$ имеет распределение Гаусса. Если вспомнить, что $n'(t)$ — белый шум с нулевым

средним и односторонней спектральной плотностью N_0, то первые два нормированных момента, очевидно, равны

$$A_1(\varphi) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle \Delta\varphi \mid \varphi \rangle}{\Delta t} = \Delta - AK \sin\varphi; \qquad (4.5.85)$$

$$A_2(\varphi) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\langle (\Delta\varphi)^2 \mid \varphi \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{K^2}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle n'(t_1)\, n'(t_2) \rangle\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{K^2 N_0}{2\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t_2 - t_1)\, dt_1\, dt_2 = \frac{K^2 N_0}{2}. \qquad (4.5.86)$$

Так как квадрат первого члена в соотношении (4.5.84) имеет порядок $(\Delta t)^2$, а перекрестный член содержит среднее значение величины $n'(t)$, которое равно нулю, нетрудно показать, что $A_n(\varphi) = 0$ при $n > 2$. В результате уравнение Фоккера — Планка принимает вид

$$\frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \{[\Delta - AK \sin\varphi(t)]\, p(\varphi, t)\} + \frac{K^2 N_0}{4} \frac{\partial^2 p(\varphi, t)}{\partial \varphi^2}. \qquad (4.5.87)$$

Особый интерес представляет стационарное распределение, соответствующее $\partial p(\varphi, t)/\partial t = 0$. Такое стационарное решение существует только в пределе при $t \to \infty$, т. е.

$$p(\varphi) = \lim_{t \to \infty} p(\varphi, t).$$

Полагая $\alpha = 4A/KN_0$ и $\beta = 4\Delta/K^2 N_0$, получаем из уравнения (4.5.87)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(\alpha \sin\varphi - \beta)\, p(\varphi) + \frac{\partial p(\varphi)}{\partial \varphi}\right] = 0, \qquad (4.5.88)$$

или

$$p(\varphi) = C \exp(\alpha \cos\varphi + \beta\varphi)\left[1 + D \int_{-\pi}^{\varphi} \exp(-\alpha \cos x - \beta x)\, dx\right] \qquad (4.5.89)$$

при $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Для вычисления констант C и D воспользуемся условиями

$$p(\varphi, 0) = \delta(\varphi - \varphi_0) \quad \text{и} \quad p(\pi, t) = p(-\pi, t) \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi, t)\, d\varphi = 1 \quad \text{при всех} \quad t.$$

В пределе при $t \to \infty$ выполняются соотношения $p(\pi) = p(-\pi)$ и $\int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi)\, d\varphi = 1$, поэтому

$$D = \frac{\exp(-2\beta\pi) - 1}{\int_{-\pi}^{+\pi} \exp[-(\alpha \cos x + \beta x)]\, dx}; \qquad (4.5.90)$$

константу C мы вычисляем, используя условие $\int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi)\, d\varphi = 1$.

В частном случае $\omega = \omega_0 (\Delta = 0)$ и $D = 0$

$$C = \frac{1}{\int_{-\pi}^{+\pi} \exp(\alpha \cos \varphi)\, d\varphi} = \frac{1}{2\pi I_0(\alpha)}, \qquad (4.5.91)$$

поэтому

$$p(\varphi) = \frac{\exp(\alpha \cos \varphi)}{2\pi I_0(\alpha)}. \qquad (4.5.92)$$

Важную роль играет параметр α. Так как $\alpha = 4A/KN_0$, мы можем записать его в виде $\alpha = A^2/N_0(AK/4)$. Но A^2 — мощность принятого сигнала, в то время как $AK/4$ — просто ширина полосы частот петли B_L, и $\alpha = A^2/N_0B_0$ — отношение сигнал/шум ширины полосы петли синхронизации. Соотношение (4.5.92) напоминает гауссовское распределение при больших отношениях сигнал/шум и при стремлении α к нулю становится плоским. Действительно, при $\alpha \to \infty$ входящая в (4.5.91) функция Бесселя I_0 дает

$$I_0(\varphi) \sim \frac{e^{\alpha}}{\sqrt{2\pi\alpha}},$$

$$p(\varphi) = \frac{\exp(\alpha \cos \varphi)}{2\pi I_0(\alpha)} = \frac{\exp[\alpha(\cos \varphi - 1)]}{\sqrt{2\pi/\alpha}},$$

или, если воспользоваться разложением в ряд Тейлора,

$$p(\varphi) = \frac{\exp\{(-\alpha\varphi^2/2)[1 - (2\varphi^2/4!) + (2\varphi^4/6!) + \ldots]\}}{\sqrt{2\pi/\alpha}}, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \qquad (4.5.93)$$

При большом параметре α величина $p(\varphi)$ быстро убывает с ростом φ. Следовательно, функция $p(\varphi)$ очень мала при всех значениях φ, кроме самых малых. Члены высшего порядка в разложении $\cos \varphi$ в ряд Тейлора очень слабо влияют на средние — не очень большие и не очень малые — значения $p(\varphi)$.

Кумулятивное стационарное распределение имеет вид

$$P(|\varphi| < \varphi_1) = \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} p(\varphi)\, d\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \qquad (4.5.94)$$

и при $\omega = \omega_0$, поскольку

$$p(\varphi) = \frac{\exp(\alpha \cos \varphi)}{2\pi I_0(\alpha)} = \frac{1}{2\pi I_0(\alpha)} \left[I_0(\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\alpha) \cos n\varphi \right],$$

приводит к разложению

$$P(|\varphi| < \varphi_1) = 2 \int_0^{\varphi_1} p(\varphi)\, d\varphi = \frac{\varphi_1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\alpha) \sin(n\varphi_1)}{n I_0(\alpha)}. \qquad (4.5.95)$$

Этот ряд сходится очень быстро.

Аналогичным образом может быть вычислена дисперсия величины φ:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{2\pi I_0(\alpha)} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^2 \exp(\alpha \cos \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{n^2 I_0(\alpha)}. \qquad (4.5.96)$$

Этот ряд сходится еще быстрее, и при $\alpha \to 0$ мы получаем $\sigma_\varphi^2 \to \pi^2/3$ (это дисперсия случайной величины, равномерно распределенной на интервале от $-\pi$ до $+\pi$).

В общем случае при $\omega \neq \omega_0$ ($\Delta \neq 0$) для вычисления соответствующих интегралов необходим компьютер. В этих случаях стационарное решение может не существовать. (Относительно численного моделирования синхронизации см. приложение В.)

Наконец, необходимо рассмотреть следующий вопрос. Случайный процесс, о котором сейчас идет речь, есть не что иное, как *рассогласование по фазе*, и мы прежде всего следим за тем, чтобы абсолютная величина $|\varphi|$ при *всех значениях* t (t — время) по возможности не превосходила некоторого заданного «предельного» значения φ_1. Ценной статистикой для такой задачи служит математическое ожидание времени (среднее время), за которое рассогласование по фазе первый раз достигнет предельного уровня $+\varphi_1$ при условии, что начальное рассогласование по фазе φ_0 задано, причем $\varphi_0 < \varphi_1$. С такого рода задачей о *среднем времени первого выхода на границу* тесно связана *частота мертвых циклов*. (Механическим аналогом последней характеристики служит величина, обратная математическому ожиданию времени полного оборота маятника (в любую сторону).) В случае ПСФ частота мертвых циклов есть не что иное, как частота, с которой петля обратной связи в генераторе с управлением по напряжению *нарабатывает* или *сбрасывает*

полный цикл относительно принятого сигнала. И в том и в другом случае речь идет о том, чтобы при определении математического ожидания времени положить $\varphi_1 = 2\pi$.

Нас будет интересовать только рассмотренный выше случай петли первого порядка, когда невозмущенная частота генератора с управлением по напряжению подстраивается под частоту принятого сигнала ($\omega = \omega_0$), в силу чего равновесное положение фазовой ошибки есть $\varphi = 0$. В петле первого порядка тот же подход может быть использован и при $\omega \neq \omega_0$, но результаты выражаются интегралами, вычислимыми не аналитически, а численно. Поэтому мы для простоты предполагаем, что $\omega = \omega_0$ и петля первоначально синхронизована, т. е. $\varphi_0 = 0$.

Пока рассогласование петли по фазе (или «угол отклонения» маятника) остается в пределах $|\varphi| < \varphi_1$, функция плотности вероятности для φ, которую мы обозначим $q(\varphi, t)$, удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial q(\varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi}[(AK \sin \varphi) q(\varphi, t)] + \frac{K^2 N_0}{4} \frac{\partial^2 q(\varphi, t)}{\partial \varphi^2} \quad (4.5.97)$$

при всех $|\varphi| < \varphi_1$ и начальном условии $q(\varphi, 0) = \delta(\varphi)$. Мы обозначили функцию плотности вероятности рассогласования по фазе через $q(\varphi, t)$, чтобы отличать ее от соответствующей функции $p(\varphi, t)$ для *неограниченного* случая. Как только $|\varphi|$ впервые достигает предела φ_1, маятник мгновенно перестает действовать, поэтому $q(\varphi, t) = 0$ при всех $|\varphi| \geqslant \varphi_1$ и всех t.

Таким образом, помимо начального условия мы имеем при всех t граничные условия $q(\varphi_1, t) = q(-\varphi_1, t) = 0$. Решение уравнения Фоккера — Планка на интервале $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$, удовлетворяющее этим граничным условиям, дает нам $q(\varphi, t)$. Интеграл от $q(\varphi, t)$ по этому интервалу

$$\Psi(t) = \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} q(\varphi, t)\, d\varphi \quad (4.5.98)$$

дает вероятность того, что в момент времени t рассогласование по фазе φ *еще не достигло* предела φ_1. Заметим, что в силу условия $q(\varphi, t) = 0$ при $|\varphi| \geqslant \varphi_1$ пределы в интеграле (4.5.98) можно было бы выбрать и бесконечными, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(\varphi, t)\, d\varphi = \Psi(t) \leqslant 1. \quad (4.5.99)$$

В этом основное различие между $q(\varphi, t)$ и $p(\varphi, t)$, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi, t)\, d\varphi = 1$ при *всех* t. Следовательно, величину $q(\varphi, t)$, строго говоря, нельзя считать ф. п. в.

Функция $\Psi(t)$ — вероятность того, что в момент времени t величина $|\varphi|$ меньше φ_1 и в интервале времени от 0 до t синхронизация ни разу не нарушалась, поэтому $\Psi(t)$ должна быть монотонно невозрастающей функцией от t. Иначе говоря, ф. п. в. для времени, которое требуется $|\varphi|$, чтобы впервые достичь уровня φ_1, определяется величиной

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Psi(t)-\Psi(t+\Delta t)}{\Delta t}\right]=-\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}, \qquad (4.5.100)$$

а время ожидания первого выхода на границу φ_1 равно

$$T=\int_0^\infty -t\,\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}\,dt=-[t\Psi(t)]\,|_0^\infty-\int_0^\infty \Psi(t)\,dt. \qquad (4.5.101)$$

Если невозрастающая функция $\Psi(t)$ стремится к нулю быстрее, чем $1/t$, то первый член в правой части соотношения (4.5.101) обращается в нуль. (Именно так и должно быть, если интеграл $\int_0^\infty \Psi(t)\,dt$ существует.)

Итак,

$$T=\int_0^\infty \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} q(\varphi,\ t)\,d\varphi\,dt, \qquad (4.5.102)$$

и, интегрируя уравнение Фоккера — Планка (4.5.97) для $q(\varphi, t)$, мы получаем

$$q(\varphi,\ \infty)-q(\varphi,\ 0)=\frac{d}{d\varphi}\left[(AK\sin\varphi)\,Q(\varphi)\right]+\frac{N_0K^2}{4}\,\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2}, \qquad (4.5.103)$$

где

$$Q(\varphi)=\int_0^\infty q(\varphi,\ t)\,dt.$$

Ясно, что $q(\varphi, \infty)=0$, а так как рассогласование фаз φ по предположению в начальный момент времени равно нулю, мы заключаем, что $q(\varphi, 0)=\delta(\varphi)$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$-\delta(\varphi)=\frac{d}{d\varphi}\left[(AK\sin\varphi)\,Q(\varphi)\right]+\frac{N_0K^2}{4}\,\frac{d^2Q(\varphi)}{d\varphi^2} \qquad (4.5.104)$$

с граничными условиями

$$Q(\varphi_1) = \int_0^\infty q(\varphi_1, t)\, dt = 0,$$

$$Q(-\varphi_1) = \int_0^\infty q(-\varphi_1, t)\, dt = 0.$$

Интегрируя уравнение (4.5.104) по φ на интервале $(-\varphi_1, \varphi_1)$, мы получаем T — математическое ожидание времени первого выхода на границу. Взяв неопределенный интеграл от обеих частей уравнения (4.5.104), мы придем к уравнению

$$C - u(\varphi) = (AK \sin\varphi)\, Q(\varphi) + \frac{N_0 K^2}{4} \frac{dQ(\varphi)}{d\varphi}, \qquad (4.5.105)$$

где $u(\varphi)$ — ступенчатая функция единичной амплитуды, C — постоянная, значение которой определяется из граничных условий.

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$Q(\varphi) = D \exp(\alpha \cos\varphi) + \exp(\alpha \cos\varphi) \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{\exp(-\alpha \cos x)}{\gamma} [C - u(x)]\, dx, \qquad (4.5.106)$$

где

$$\alpha = \frac{A^2}{N_0 AK/4} = \frac{A^2}{N_0 B_L},$$

$$\gamma = \frac{N_0 K^2}{4} = \frac{AK}{\alpha} = \frac{4B_L}{\alpha}.$$

Граничные условия $Q(\varphi_1) = Q(-\varphi_1) = 0$ дают значения постоянных $D = 0$ и $C = 1/2$. Таким образом,

$$Q(\varphi) = \frac{\exp(\alpha \cos\varphi)}{\gamma} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \exp(-\alpha \cos x) \left[\frac{1}{2} - u(x)\right] dx, \qquad (4.5.107)$$

и, интегрируя по φ в интервале $(-\varphi_1, \varphi_1)$, мы получаем выражение для среднего времени первого выхода на границу:

$$T = \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} Q(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} d\varphi \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \exp[\alpha(\cos\varphi - \cos x)] \left[\frac{1}{2} - u(x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \exp[\alpha(\cos\varphi - \cos x)]\, dx. \qquad (4.5.108)$$

Разложение

$$\exp(\pm\alpha\cos\varphi) = I_0(\alpha) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(\pm 1)^m I_m(\alpha)\cos m\varphi$$

позволяет записать выражение (4.5.108) в виде

$$T = \frac{1}{\nu}\left\{\frac{I_0^2(\alpha)\,\varphi_1^2}{2} + 2I_0(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\alpha)\int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1}[\cos n\varphi + (-1)^n\cos nx]\,dx + \right.$$

$$\left. + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_m(\alpha)\,I_n(\alpha)\int_0^{\varphi_1}\cos m\varphi\,d\varphi\int_{-\varphi_1}^{\varphi_1}\cos nx\,dx\right\}. \quad (4.5.109)$$

Разумеется, наиболее важным результатом является математическое ожидание времени между мертвыми циклами, т. е. $T(2\pi)$. Поэтому при $\varphi_1 = 2\pi$ из общего выражения (4.5.109) мы получаем

$$T(2\pi) = \frac{2\pi^2}{\nu} I_0^2(\alpha) = \frac{\pi^2\alpha I_0^2(\alpha)}{2B_L} \quad (4.5.110)$$

где $B_L = AK/4$; таким образом,

$$\text{Частота мертвых циклов} = \frac{2B_L}{\pi^2\alpha I_0^2(\alpha)} = \frac{AK}{2\pi^2\alpha I_0^2(\alpha)}. \quad (4.5.111)$$

При $\alpha \gg 1$ (большом отношении сигнал/шум), так как

$$I_0(\alpha) \sim \frac{e^{\alpha}}{(2\pi\alpha)^{1/2}},$$

мы получаем «частоту перемежаемости», или

$$\text{Частота мертвых циклов} \sim \frac{AKe^{-2\alpha}}{\pi}. \quad (4.5.112)$$

4.6. Моделирование стохастических временных рядов

Рассмотрим теперь следующую задачу. Мы наблюдаем (дискретный) временной ряд из нулей и единиц, описывающий *поведение* некоторой динамической системы. Этот ряд (обладающий определенной сложностью) требуется научиться *сжимать* или *моделировать*. Каким *наименьшим* числом внутренних состояний должен обладать (конечный) детерминистический автомат для того, чтобы он мог моделировать наблюдаемый временной ряд? Как возрастает среднее *число* состояний в оптимальной модели (т. е. ожидаемая сложность) с увеличением числа наблюдений, т. е. с все возрастающей длиной принятого временного ряда? Происхождение временного ряда наблюда-

телю не известно: временной ряд может быть порожден бросанием монеты (или игральной кости) или некоторым причинным процессом.

Нас интересует здесь тот случай, когда составитель модели по тем или иным психологическим мотивам отдает предпочтение априорному предположению о том, что наблюдаемое поведение порождено некоторой *причинной* системой, и поэтому строит детерминистическую модель такого поведения. Разумеется, для любой конечной длины N найдется неограниченно много автоматов с конечным числом состояний, выдающих на выходе наблюдаемый временной ряд при определенном начальном состоянии и подаче на вход соответствующего сигнала. Некоторые из таких возможных моделей обладают тем свойством, что ни один другой автомат не имеет меньшего числа внутренних состояний. Поэтому составитель модели, действующий оптимально и считающий, что наблюдаемый временной ряд порожден *причинным* процессом, всегда выбирает в качестве модели автомат с минимальным числом внутренних состояний.

Следуя Гейнсу [4.10], выведем соотношение между длиной последовательности наблюдений и математическим ожиданием (средним) числа состояний модели, построенной оптимальным причинным составителем моделей (т. е. модели средней сложности). Иначе говоря, нас интересует поведение отношения

$$R_N = \frac{\text{Среднее число состояний модели}}{\text{Число наблюдений}}$$

как функции длины наблюдаемой последовательности. Можно было бы ожидать, что $R_N \to 0$ при $N \to \infty$. Однако в действительности $R_N \to 1$ при $N \to \infty$. Это означает, что с увеличением длины наблюдаемого временного ряда число состояний оптимальной (причинной) модели возрастает, или что сложность оптимальной причинной модели возрастает с увеличением числа наблюдений.

Мы увидим, что малейшее введение вероятностного отклонения от причинности в поведение динамической системы, моделируемое с помощью детерминистического автомата с конечным числом внутренних состояний, порождает модели, сложность которых по существу пропорциональна длине наблюдений. Предположим, что поведение моделируемой системы представимо в виде ряда нулей и единиц с равными вероятностями $P(0) = P(1) = 1/2$ [в общем случае мы получаем последовательность Бернулли с $P(0) \neq P(1)$]. От поведения стохастического автомата с двумя состояниями можно ожидать следующего.

Существуют 2^N возможных последовательностей из N наблюдений; все эти последовательности равновероятные (с вероятностью 2^{-N}). Перечислим все различные детерминистические

автоматы с S состояниями, допустимые в качестве моделей таких последовательностей. Заметим, что данный автомат, находясь в данном исходном состоянии, может действовать как модель только одной из последовательностей, и мы хотим найти верхнюю границу множества моделей, достижимых из данного состояния S.

Например, пусть $S = 6$. Тогда одной моделью будет последовательность 001010, другой — последовательность 010001 и т. д. Общий вид модели — цепочка переходов, образующих цикл, например:

Если S состояний должны быть заполнены двумя символами (0 и 1) и цикл может начинаться с любого состояния, то существуют самое большее $S2^S$ моделей (часть которых может порождать одну и ту же последовательность, что и позволяет считать приведенную величину верхней границей числа различных моделей):

$$M = S \cdot 2^S > 2^N. \tag{4.6.1}$$

(Заметим, что в эту оценку входят также модели с числом состояний меньше S.)

Нас интересует *среднее число* состояний в минимальных формах этих M моделей. Моделей с R состояниями существует не более $R2^R$; следовательно, нижняя граница среднего (математического ожидания) числа состояний в множестве моделей с максимальным числом состояний S может быть вычислена следующим образом. Пусть $M(R)$ — вероятность найти модели с числом состояний от $R = 1$ до R:

$$M(R) = \int_1^R \frac{dM(R)}{dR}\, dR, \tag{4.6.2}$$

где $dM(R)/dR$ — соответствующая ф.п.в. Но так как R — дискретная переменная, среднее значение $M(R)$ при R, заключенном в интервале от 1 до $S - 1$, равно

$$\overline{M(R)} = \frac{1}{S-1} \sum_{R=1}^{S-1} \frac{\Delta M(R)}{\Delta R} R. \tag{4.6.3}$$

Но

$$\frac{\Delta M(R)}{\Delta R} = 2^R + R \cdot 2^R = R \cdot 2^R - (R-1) \cdot 2^R + R \cdot 2^{R-1} =$$

$$= R \cdot 2^R - (R-2) \cdot 2^{R-1} - (R-1) \cdot 2^{R-1},$$

поэтому

$$\overline{M(R)} > \frac{1}{S-1} \sum_{R=1}^{S-1} R\left[R \cdot 2^R - (R-1) \cdot 2^{R-1}\right]. \qquad (4.6.4)$$

Так как среднее число μ_S состояний S порождает неравенство

$$\mu_S \cdot 2^S > \overline{M(R)} > \frac{1}{S-1} \sum_{R=1}^{S-1} R\left[R \cdot 2^R - (R-1) \cdot 2^{R-1}\right], \qquad (4.6.5)$$

получаем

$$\mu_S > \frac{1}{(S-1) \cdot 2^S} \cdot \frac{1}{2} \sum_{R=1}^{S-1} (R^2 \cdot 2^R + R \cdot 2^R), \qquad (4.6.6)$$

или после некоторых преобразований

$$\mu_S > S - 2 + \frac{2}{S-1} - \frac{2}{(S-1) \cdot 2^{S-1}} > S - 2. \qquad (4.6.7)$$

Из неравенства (4.6.1) следует также неравенство

$$S + \log_2 S > N, \qquad (4.6.8)$$

откуда

$$S > N - \log_2 S, \qquad (4.6.9)$$

но так как $S < N$, мы можем записать неравенство $S > N - \log_2 N$. Таким образом,

$$\mu_S > S - 2 > N - \log_2 N - 2, \qquad (4.6.10)$$

т. е. среднее число состояний в ансамбле моделей, необходимое для учета всех возможных поведений, больше, чем $N - \log_2 N - 2$, где N — длина принятых переменных рядов. Следовательно,

$$R_N = 1 - \frac{\log_2 N + 2}{N}; \qquad (4.6.11)$$

при $N \to \infty$ эта величина стремится к единице.

Вывод из всего сказанного такой: если составитель модели жаждет воспроизвести стохастическое поведение с помощью детерминистического автомата с конечным числом состояний, то он приходит к сверхсложному представлению об исследуемой системе. В гл. 6 мы увидим, как системы, обладающие странными аттракторами, эффективно *сжимают* поведение системы, обладающей числом степеней свободы, равным размерности пространства состояний, в которое странный аттрактор погружен в качестве компактного подмножества.

4.7. Связь между двумя иерархическими системами, моделируемыми управляемыми цепями Маркова

Рассмотрим теперь несколько подробнее один конкретный пример с взаимодействием между *двумя* самоорганизующимися системами, каждая из которых обладает двумя иерархическими уровнями. Динамика на нижних уровнях Q, Q' систем моделируется как управляемые марковские цепи с конечным числом состояний; матрицы вероятностей перехода параметризованы управляющими параметрами, связанными с вероятностями «платежей» в игре двух лиц, моделирующей коллективно все иерархические уровни, расположенные ниже уровней Q и Q'. Верхние уровни W, W' мы моделируем полумарковскими цепями. Это означает, что времена удержания обратно пропорциональны степени организации (или избыточности) соответствующих нижних уровней Q и Q'.

Верхние иерархические уровни W, W' принимают от нижних уровней Q, Q' информацию о коллективных свойствах, измеряющих (а) долю населенности (в процентах) априори выбранного состояния и (б) кросс-корреляцию между последовательностями состояний уровней (Q, W') или (Q', W). Вероятности перехода для полумарковских цепей на верхних уровнях W, W' являются функциями свойств (а) и (б), о которых мы только что упоминали.

Связь между двумя иерархическими системами осуществляется путем двусторонней передачи информации, в которой нижние уровни играют роль приемников, а верхние — передатчиков (нижний и верхний уровни соответствуют «опыту» и «поведению» или «аппаратурной реализации» и «программному обеспечению»).

Связь между системами становится адаптивной вследствие «встроенного» управления — эфферентных механизмов (упреждающей связи), действующих между системами с верхних уровней W, W' на соответствующие нижние уровни Q, Q' через управляющие параметры игр, лежащих в основе обеих систем. В нашем примере для моделирования такого адаптивного процесса связи используется обширная компьютерная программа. Эволюция во времени поведенческой моды (состояния), переключения на уровнях W и W', вычисляются по определенным правилам управления, случайным образом выбираемым из всех возможных механизмов упреждающих связей. Число таких правил экспоненциально возрастает с увеличением числа уровней квантования управляющих параметров. Что же касается выбора алгоритма управления, то критерием здесь служит максимальный «совместный коэффициент добротности», учитывающий взятое по широкому диапазону среднее надлежащим образом вы-

бранной взвешенной суммы «противоборствующих» параметров: вероятностей гомеостатических состояний и межсистемных кросс-корреляций между уровнями (W, Q') и (W', Q).

Излагаемые ниже идеи возникли под влиянием современных психофизиологических и биологических исследований. Компьютерная реализация излагаемой ниже математической модели способствует лучшему пониманию некоторых аспектов связи между организмами и наводит на мысль о планировании новых нейрофизиологических экспериментов. Знакомя читателя с нашими соображениями, мы ставим перед собой цель предложить кибернетическую модель доступного изложения широкого круга явлений, относящихся к связи между биологическими, т. е. самоорганизующимися, системами.

4.7.1. Введение. Выяснение природы иерархических систем

Под самоорганизующимися системами мы понимаем иерархические структуры [4.11], самопроизвольно переходящие в различные различимые режимы; описаниям этих режимов на индивидуальных уровнях в терминах пространства состояний соответствуют различные наборы переменных параметров. В нашем примере мы моделируем некоторые аспекты процедур связи между двумя самоорганизующимися системами, каждая из которых обладает двумя иерархическими уровнями Q, W и Q', W' (рис. 4.20). Излагаемые ниже соображения носят математико-кибернетический характер, но возникли они под влиянием психо-физиологических исследований и данных. В частности, стимулом и поддержкой для́ наших теоретических построений явилось наметившееся в последние годы влияние биохимии и нейрофизиологии на современную психиатрию [4.12], особенно некоторые данные о биологии психических заболеваний [4.13], а также современные тенденции в психосоматической медицине [4.14].

Наоборот, при подходе со стороны верхних иерархических уровней в прагматике человеческого общения [4.15] наше внимание привлекла коррелятивность «невротического» поведения, особенно затрагивающая неправильное использование иерархических кодов символического языка (хорошим примером может служить «двойная связь» в коммуникативных системах [4.16, 17]), которая оказывается весьма эффективной в тех случаях, когда возникает необходимость прервать связь и тем самым предотвратить распространение органических возмущений у данного лица (или группы лиц).

Во всех упоминавшихся выше работах следует отметить корреляцию (хотя иногда и слабую) между *физиологическими и психологическими параметрами.* В излагаемой ниже схеме эти

стохастические зависимости изоморфно включены в нашу модель, т. е. они определяют, каким образом взаимодействуют между собой последовательные иерархические уровни в отдельном организме (или в отдельных организмах). Но что именно определяет физически «иерархический уровень» и чем один иерархический уровень отличается от другого? Ответы на эти вопросы, по нашему мнению, необходимы нам, чтобы конструктивно действовать дальше. *Иерархический уровень определяется*

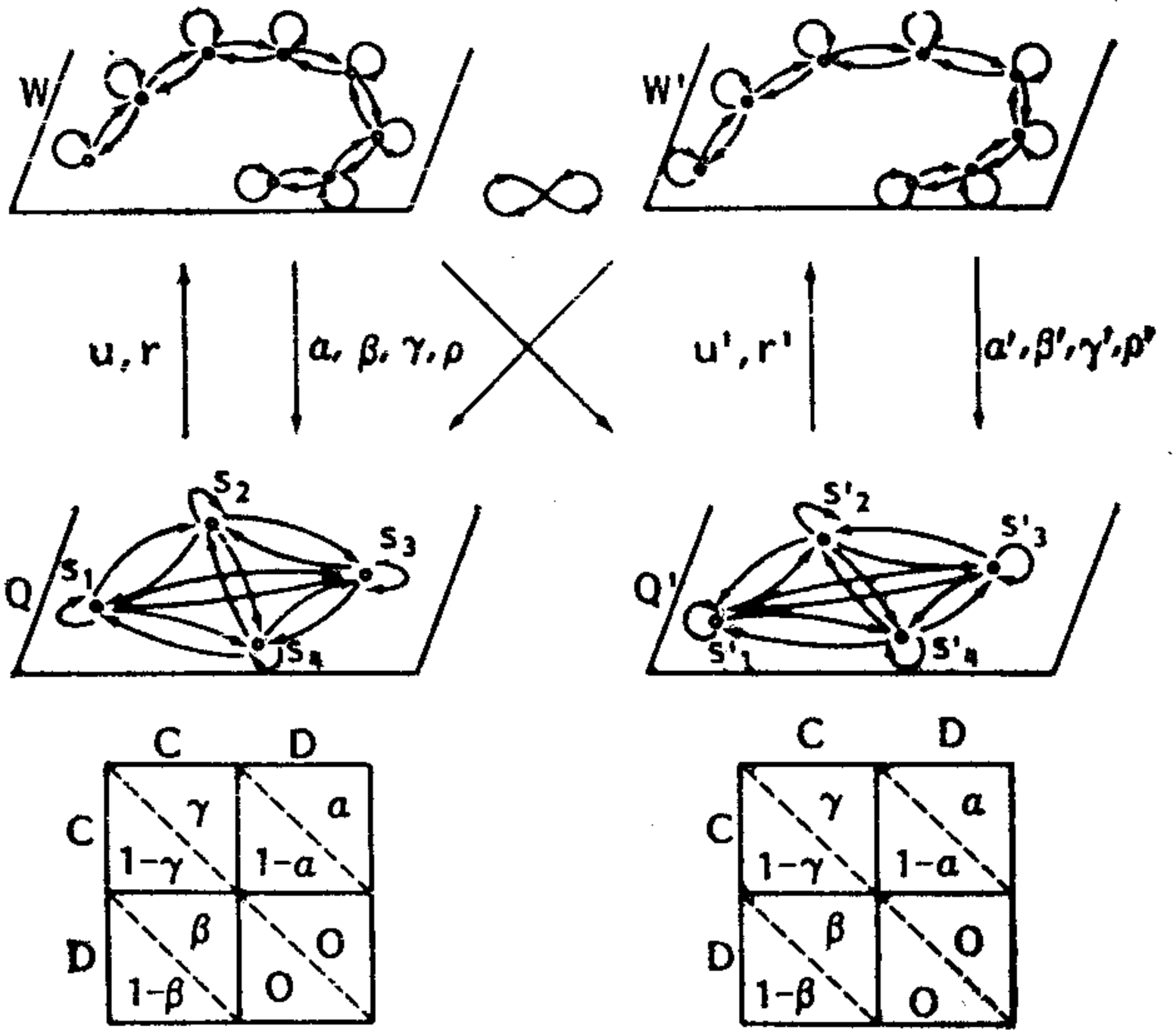


Рис. 4.20. Общая схема процесса связи между двумя иерархическими системами.

числом, расположением, природой (т. е. структурой или сложностью), а также *степенью когерентной кооперативности* среди функционально сходных, хотя, возможно, анатомически различных «модулей» системы (или «тканей» в случае биологического организма). Под функционально сходными органами мы понимаем динамический набор элементов, которые для успешного выполнения определенной задачи должны кооперироваться (т. е. установить и поддерживать между собой какое-то число гибко ограниченных упорядоченных отношений).

Например, в случае дыхания цель состоит в том, чтобы поставлять кислород в альвеолы легких, откуда он сможет диффундировать сквозь стенки в кровь. Для осуществления дыхательной деятельности необходим сложный мышечный аппарат, включающий диафрагму и межреберные мышцы, позволяющие растягивать и сокращать грудную клетку, а также сложная си-

стема нервных связей в стволе мозга и высших центрах для управления мышечным аппаратом. Ясно, что эти процессы осуществляются как *функции*, реализуемые многими компонентами, относящимися к различным разделам секреторной двигательной и нервной систем.

В головном мозге все «высшие» процессы, такие, как восприятие, речь, письмо, чтение и ощущения, не могут рассматриваться как изолированные или даже неделимые «способности», которые могут быть прямыми функциями какой-нибудь ограниченной группы клеток или локализованными в определенных участках мозга. Вместо «локализованных областей» динамической активности в действительности мы имеем дело с путями передачи информации (афферентыми путями) и процессами хранения и интеграции информации. «Интеллектуальные» функции в нашей схеме следует рассматривать как сложные функциональные иерархические системы, которые не могут быть локализованы в определенных зонах коры больших полушарий или в изолированных группах клеток, а должны быть организованы в группы когерентно действующих зон, каждая из которых играет роль (случайной) нелинейной динамической переменной и может принадлежать совершенно различным и зачастую далеко отстоящим друг от друга областям мозга. Такие группы определяют иерархический уровень, выполняющий каждый раз соответствующую функцию.

Из приведенных выше примеров ясно, что для высших организмов можно предложить следующий набор иерархических уровней в восходящем порядке: уровни (а) нуклеиновых кислот, (б) белков, (в) отдельных клеток, (г) отдельных органов и (д) групп органов (выполняющих соматические функции, такие, как пищеварение и т. д.).

Верхние характеристические уровни характеризуются все более высокой долей участия мозговых тканей более высокого ранга и возрастающей сложностью (от ствола мозга через ретикулярную формацию к коре больших полушарий). Последние уровни называются «когнитивными», и большинство из них в отличие от нижних — «соматических» — уровней образуются и разрушаются не только в ходе эволюции, но и в процессе *обучения*, происходящем на протяжении ограниченной во времени жизни отдельного организма.

Тем не менее не следует забывать о том, что материальное воплощение, или «аппаратурная реализация», всех высших когнитивных уровней одинакова: это группы нейронов. Отличаются когнитивные уровни друг от друга природой и комбинациями «соучаствующих» тканей и выполняемыми процессами статистического усреднения или достигаемой на выходе степенью абстракции (сжимаемости).

На каждом иерархическом уровне мы можем ввести описание в терминах пространства состояний, включающее некоторое число динамических переменных и набор параметров, соответствующих данному конкретному уровню. Для простоты (см. также приложение Б) мы квантуем пространство состояний на каждом иерархическом уровне и рассматриваем только конечное число состояний, играющих роль тонкой структуры данного уровня. Тем самым стохастические нелинейные дифференциальные уравнения, соответствующие описанию непрерывных состояний, заменяются на всех иерархических уровнях марковскими цепями с дискретным временем, которые характеризуются соответствующими матрицами переходов $\{P_{ij}\}$, полностью описывающими переходы между допустимыми состояниями данного уровня системы.

Нижние уровни Q, Q' моделируются цепями Маркова с четырьмя состояниями, возникающими в качестве исходов соответствующих антагонистических процессов, или «игр», происходящих между парами динамических агентов (см. гл. 5 и [4.18]); эти игры моделируют коллективно все иерархические уровни, лежащие ниже уровней Q и Q'. На уровнях Q и Q' одно из четырех допустимых состояний рассматривается как «гомеостатическое»; это те состояния, к которым в основном, но не исключительно должны эволюционировать все процессы на уровнях Q и Q', чтобы достичь оптимальной внутренней регуляции и стабильности организма на этих уровнях. С другой стороны, для обеспечения *адаптивности* через обучение организм (или организмы) на тех же уровнях Q и Q' должен установить адекватную связь, т. е. сильную кросс-корреляцию между входным набором сигналов (триггеров), индуцируемым верхними уровнями W, W' партнера, и имеющимися динамическими режимами на нижних уровнях Q, Q'.

При любом наборе сигналов, поступающих от партнера, требование сильной кросс-корреляции приводит к весьма интенсивному использованию репертуара состояний на уровнях Q, Q'. Но такое интенсивное «блуждание» по отдельным состояниям систем на уровнях Q, Q' заведомо должно ставить под угрозу требование гомеостаза. Поэтому в общем случае два основных соображения для каждого организма, а именно необходимость гомеостаза и тенденция к непрерывной адаптации к поступающим от партнера сигналам, находятся в *противоречии*.

Верхние уровни W, W' моделируются *полу*марковскими цепями, вероятности перехода которых являются функциями (а) населенности (в процентах) гомеостатического состояния нижнего уровня u и (б) корреляции r между последовательностями состояний уровней (Q, W') или (Q', W). *Времена удержания* в

состояниях уровней W, W' следуют геометрическому распределению с средним, обратно пропорциональным «степени организации» или избыточности нижних уровней (подробнее об этом см. в последующих разделах).

Получив данные u, r, u', r', верхние уровни в течение какого-то времени удерживают существующее состояние, после чего происходит переход. Новое состояние передается (в виде «режима») партнеру в виде трехбитового двоичного кода. С другой стороны, в зависимости от принятых значений r и u, r' и u' эффективные управляющие команды поступают в игру, лежащую в основе всего процесса, и игра в соответствии с некоторым алгоритмом управления (о нем см. следующий раздел) изменяет амплитуды и фазы медленно и ритмично варьирующихся параметров α, β, γ, p, α', β', γ', p'. *Новые* параметры игры влияют на вероятности переходов на уровнях Q, Q', тем самым изменяя вероятность их гомеостатического состояния и кросс-корреляции (Q', W) и (Q, W'). Эта процедура повторяется последовательными циклами, обеспечивая связь между партнерами.

Существует много режимов связи. Мы ограничимся рассмотрением кооперативного режима связи, назначение которого состоит в управлении, преследующем достижение максимальной совместной «добротности», устанавливающей определенную пропорцию между гомеостатическими вероятностями и кросс-корреляциями (W, Q'), (W', Q). Если бы кто-нибудь по наивности принял за меры качества изменяющуюся со временем степень синхронизации между переходами из одних состояний в другие на уровнях W, W', то его заведомо ожидало бы разочарование. Синхронизация может быть достаточно хороша для какого-нибуть простого устройства вроде петли синхронизации фазы, но практически ничего не говорит о таком эволюционном явлении с запаздыванием, как «диалог», представляющий по существу *хаотический процесс* (подробности см. в разд. 6.6.6 и 7.2).

В следующем разделе мы приведем описание процесса связи, включающее игры, возникающую динамику на уровнях Q, Q', а также динамику на уровнях W, W'. В разд. 4.7.3 мы рассмотрим структуру полумарковских цепей на верхних уровнях, а также статистику времен удержания. Разд. 4.7.4 мы посвятим проблеме управления и критериям оптимизации. В разд. 4.7.5 изложим результаты численного моделирования процессов связи — управления. В заключение (разд. 4.7.6) изложим некоторые замечания о соответствии предлагаемой модели некоторым проводимым в настоящее время исследованиям по коммуникативным связям в человеческом организме.

4.7.2. Динамика на нижних уровнях Q, Q' и лежащая в ее основе игра

Попытаемся описать динамическую активность на нижних уровнях Q, Q' как «отголосок» игры, лежащей в основе всей динамики. Мы всегда постулируем существование двух динамических агентов I и II, делающих ходы поочередно. Например, по отношению к первому партнеру, т. е. участнику игры с уровнями (Q, W), каждый агент делает либо ход C «в пользу» первого партнера, либо ход D «во вред» ему (рис. 4.21).

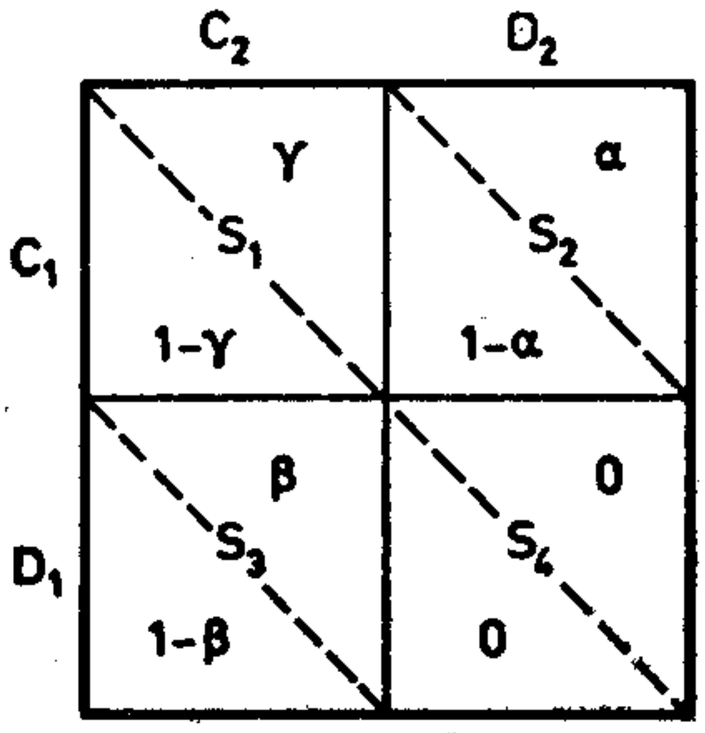


Рис. 4.21. Схема «игры» двух агентов, лежащей в основе динамической активности.

Если оба агента делают ход «во вред», то каждый из них выигрывает с вероятностью, равной нулю. Если оба агента делают ход «в пользу», то агент I выигрывает с вероятностью γ, а агент II выигрывает с вероятностью $1-\gamma$ («выигрыш» означает, что соответствующий агент доминирует при выработке поведения системы на уровне Q). Если агент I делает ход «в пользу», а агент II — «во вред», то ангент II выигрывает с вероятностью α, а агент I выигрывает с вероятностью $1-\alpha$. Наконец, если агент I играет «во вред», а агент II делает ход «в пользу», то агент I выигрывает с вероятностью β, а агент II выигрывает с вероятностью $1-\beta$.

Мы предполагаем далее, что

1) если агент делает выигрышный ход, то с вероятностью I он повторяет этот ход в следующей партии;
2) если агент делает проигрышный ход, то в следующей партии он с вероятностью p сделает выигрышный ход.

Нетрудно видеть, что при сделанных предположениях первая система на нижнем уровне Q имеет четыре состояния:

состояние S_1 (оба агента делают ход «в пользу»);
состояние S_2 (агент II делает ход «во вред», агент I делает ход «в пользу»);
состояние S_3 (агент I делает ход «во вред», агент II делает ход «в пользу»);
состояние S_4 (оба агента делают ход «во вред»).

Следует заметить, что выше мы рассматривали *несимметричную* матрицу, в которой состояния (C, D) и (D, C) различны. Те же критерии применимы и ко второму партнеру (Q', W') с параметрами α', β', γ', p'.

Какова возможная правдоподобная физиологическая интерпретация параметров α, β, γ, p? Вероятности выигрыша α, β, γ

можно рассматривать как коррелятивы к распределениям вероятности мгновенной концентрации соответствующих веществ — гормонов или нейромедиаторов, концентрации которых подвержены периодическим изменениями и коррелированы со степенью возбуждения «тканей» [1].

Параметр p можно рассматривать как аналог вероятности перехода $C \to D$ или $D \to C$ либо для агента I, либо для агента II; следовательно, значение его выводится из распределения *дифференциальной* концентрации соответствующих веществ (гормонов или нейромедиаторов), реагирующей на такой переход. В физиологии существуют великолепные примеры «игр», аналогичных описанной выше, происходящих хотя бы между двумя частями автономной нервной системы — симпатической и парасимпатической (роль медиаторов выполняют соответственно норадреналин и ацетилхолин). Существует также весьма важный и пока малопонятный антагонизм между степенью возбуждения восходящей части ретикулярной формации и таламокортикальной активности как ритмоводителя. Первый из перечисленных нами примеров — классический; в дальнейшем мы кратко прокомментируем некоторые современные, далеко не окончательные взгляды по поводу второго примера, так как лежащая в его основе «игра» имеет фундаментальное значение, поскольку уровень Q связан с «высшими» формами активности: ориентацией, мотивацией и запоминанием.

В последние 20 лет были проведены исследования электрической активности мозга, основанные на статистическом анализе сигналов, снятых одновременно несколькими внешними электродами и микроэлектродами. Такие измерения показывают, что периодическая составляющая электроэнцефалограммы (альфаритм) характеризуется высокоорганизованной *циркуляцией* активности по сетям коры и таламуса [4.19]. Так как эта циркулирующая активность распространяется вдоль *искривленных* линий, часто меняет направление на обратное и перемещается от одних групп нейронов к другим, исследователи пришли к выводу о том, что циркуляция осуществляется вдоль серии петель, которая перемещается по нейронной сети. Морфологические исследования также показали, что большие участки коры обладают двусторонними связями с ядрами таламуса [4.20]. Возникло предположение о том, что в координации таламокортикальных связей важную роль могут играть таламокортикальные петли

---

[1] Под возбуждением некоторой совокупности связанных между собой нейронов мы понимаем средний процент одновременно перешедших в возбужденное состояние элементов или средний процент одновременно деполяризованных элементов ниже порога.

обратной связи, по которым импульсы поступают к ядрам таламуса.

Исследования Верцеано и других авторов [4.21] показали, что взаимодействие между циркулирующей нейронной активностью нескольких ядер таламуса образует клеточную основу механизма ритмоводителя, функцию которого таламус осуществляет по отношению к коре, задавая и поддерживая такую периодическую активность, как альфа-ритм. Однако во всех случаях, хотя механизм ритмоводителя может быть основан на активности ядер таламуса, вполне вероятно, что его стабильность и координация существенно зависят от функционирования таламокортикальных петель обратной связи.

Из исследований, упомянутых выше, можно заключить, что в основе так называемого синхронизованного режима в мозге, характеризующегося главным образом *ослабленной фазой бодрствования*, лежит активность нейронной системы, распространенная на все ядра таламуса, связанная с корой и координируемая неспецифическими ядрами. Координирующим механизмом служит высокоорганизованная циркуляция нейронной активности по сетям коры и таламуса и кортикальным петлям обратной связи.

С другой стороны, в мозге существует также десинхронизованный, или хаотический, режим, характеризующийся главным образом *готовностью к реакции и настороженным бодрствованием*. В основе его лежит активность восходящей ретикулярной активирующей системы, действие которой на мозг осуществляется отчасти посредством «релейных» станций, расположенных в ядрах таламуса [4.22]. Когда эти релейные станции активируются стимуляцией со стороны таламуса (вызванной *возбуждением*, обусловленным передачей информации от нижних уровней к неокортикальным уровням или от окружающей среды через периферическую нервную систему), таламокортикальная нейронная активность поляризуется и прерывается на периоды, продолжительность которых возрастает с увеличением степени возбуждения, а также с увеличением возбуждения восходящей части ретикулярной формации или *скорости* передачи информации по этому каналу.

Таким образом, по мнению исследователей, в таламусе действуют *две антагонистические* нейронные системы, одна из которых отвечает за циркуляцию нейронной активности и синхронизацию, а другая — за *прерывание* циркуляции нейронной активности и десинхронизацию. Кроме того, известно, что в этих двух системах действуют различные нейромедиаторы: в синхронизующей системе *серотонин*, в десинхронизующей системе *ацетилхолин*. «Нормально» активность этих двух агентов должна протекать в некотором динамическом равновесии. Усиление влия-

ния первой системы приводит к состоянию релаксации и сонливости. Усиление влияния второй системы приводит к возбуждению и настороженному бодрствованию.

В рамках нашего обсуждения нельзя не упомянуть и о некоторых «патологических» ситуациях, когда один из двух указанных выше агентов *постоянно имеется в избытке* (например, из-за чрезмерного функционирования своего собственного нейромедиатора или исчерпания нейромедиатора другой системы), что приводит к дополнительному шуму, а в экстремальных случаях — к конвульсивным состояниям. При таких условиях связь между иерархическими уровнями прерывается.

Приведенный выше пример может помочь читателю составить некоторое представление о правдоподобности и адекватности предлагаемой модели, в том числе о различимости состояний (C, D) и (D, C) (дальнейшее обсуждение см. в разд. 4.7.4).

Далее мы намереваемся представить 16 элементов P_{ij} матрицы перехода на уровне Q как функции параметров α, β, γ, p. Это было сделано в недавней работе [4.18]. На рис. 4.22—4.25 представлены соответствующие три схемы (не нуждающиеся в дополнительных объяснениях).

Зная матрицу перехода, мы можем вычислить вероятность находиться в состоянии S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ перед $(n+1)$-м испытанием («партией игры»).

Обозначим эту вероятность через $u_{i,\,n+1}$; непосредственно видно, что

$$u_{i,\,n+1} = \sum_{j=1}^{4} u_{j,\,n} P_{ji}. \tag{4.7.1}$$

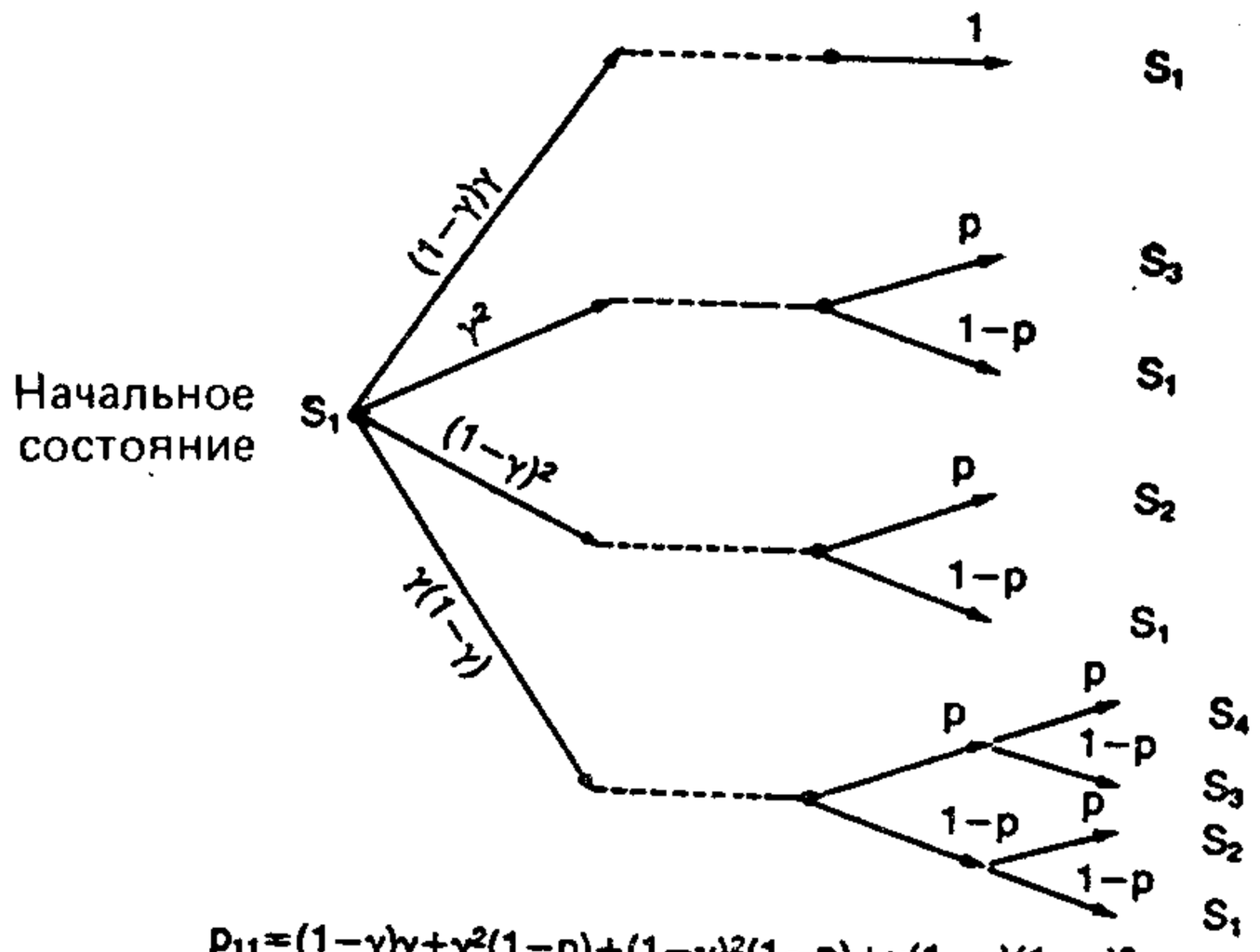
[В случае апериодической марковской цепи, как мы уже знаем, существует асимметричное распределение (стационарных) состояний u_i, не зависящее от начальных условий, т. е. $u_i = \sum_{j=1}^{4} u_j P_{ji}$.]

Мы видим, что, так или иначе, значения u_1, u_2, u_3, u_4 могут быть представлены как функции параметров α, β, γ, p. (Аналогичным образом, для второго партнера (второй системы) значения u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 могут быть получены исходя из значений α', β', γ', p'.)

$$P_{11} = (1-\gamma)\gamma + \gamma^2(1-p) + (1-\gamma)^2(1-p) + \gamma(1-\gamma)(1-p)^2 = \\ = [1-\gamma+\gamma(1-p)]\,[\gamma + (1-\gamma)(1-p)], \tag{4.7.2}$$

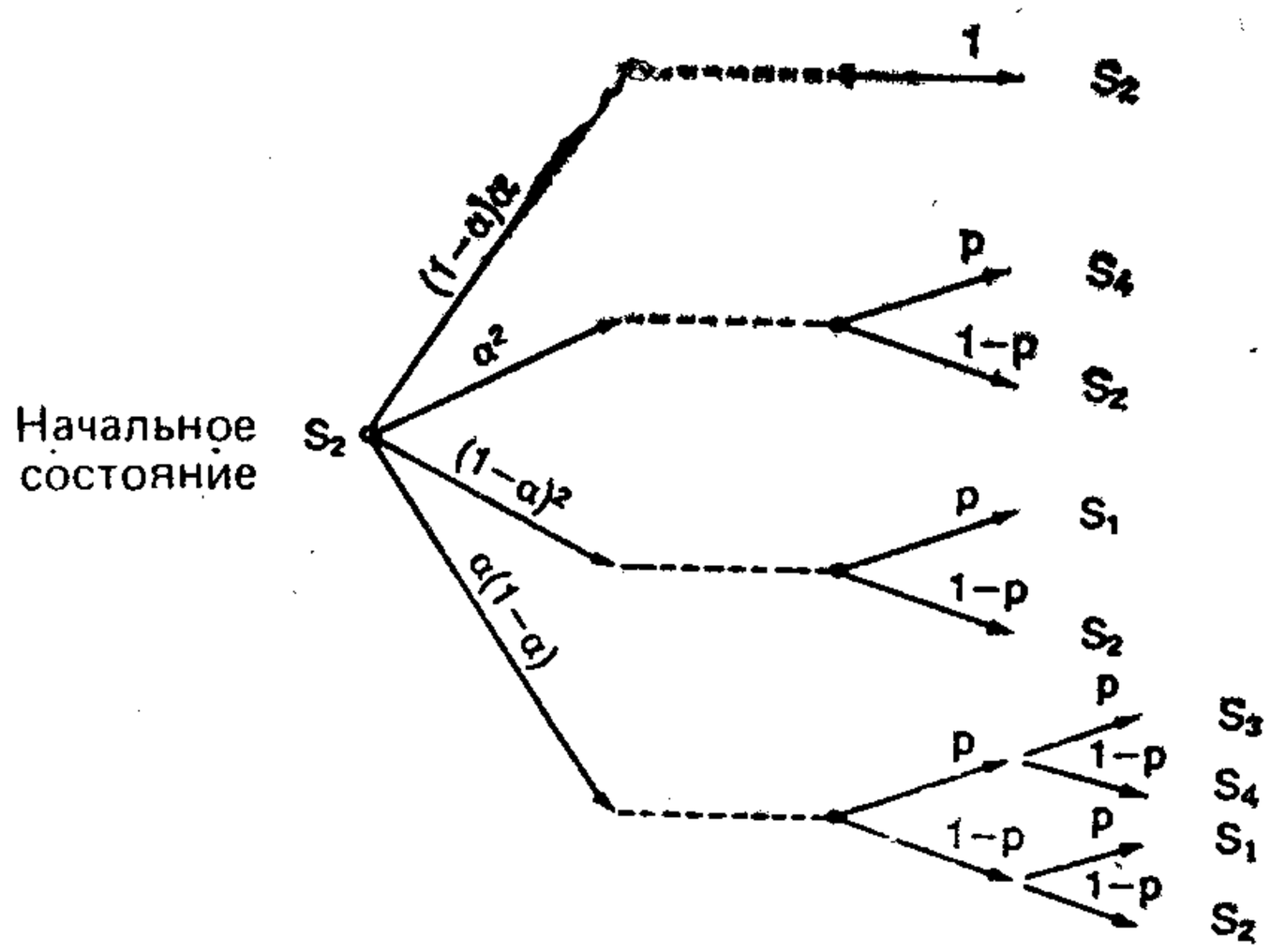
$$P_{12} = (1-\gamma)^2 p + \gamma(1-\gamma)p(1-p) = p(1-\gamma)[1-\gamma+\gamma(1-p)], \tag{4.7.3}$$

$$P_{13} = \gamma^2 p + \gamma(1-\gamma)p(1-p) = \gamma p\,[\gamma + (1-\gamma)(1-p)], \tag{4.7.4}$$



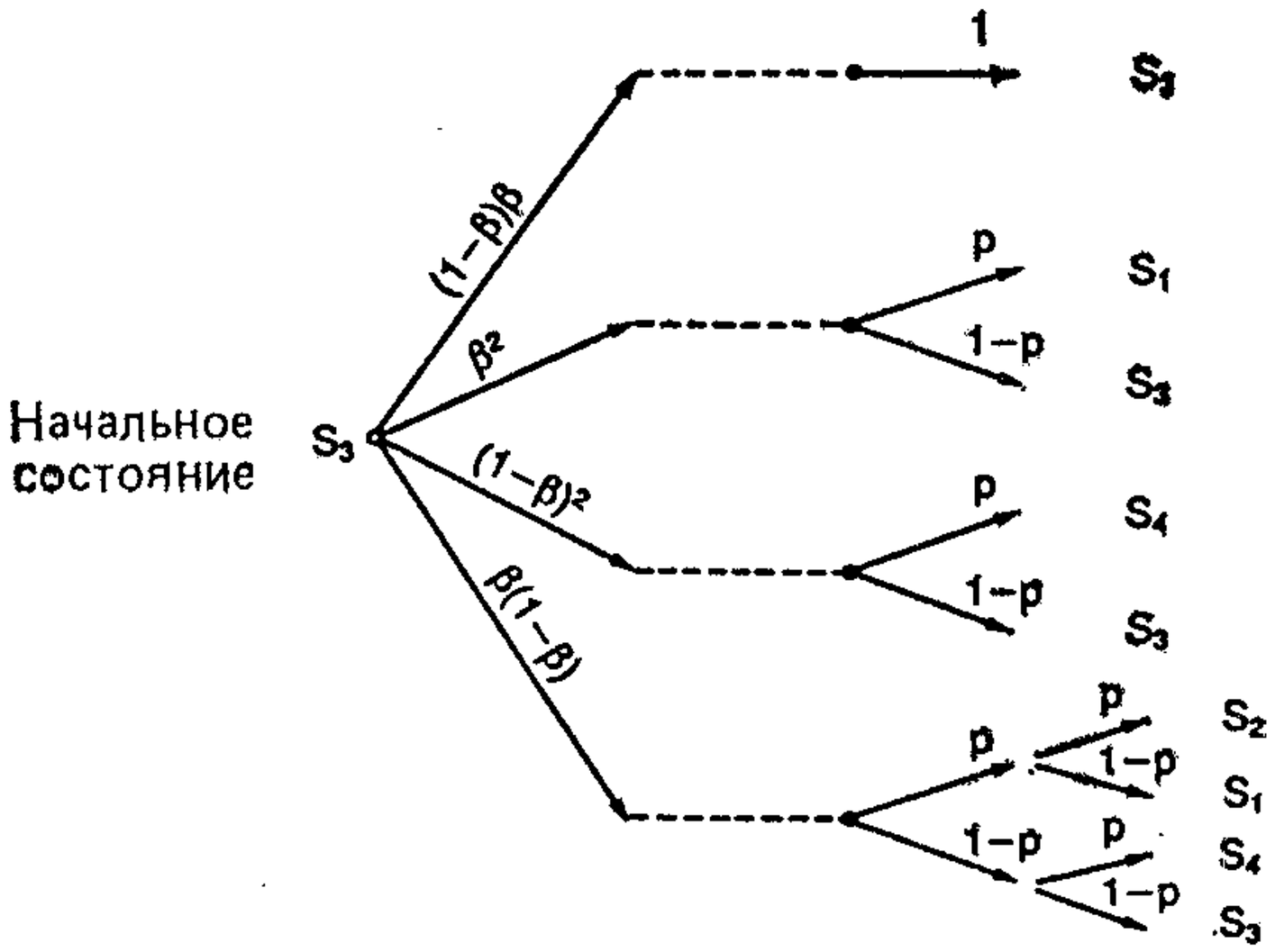
$$p_{11}=(1-\gamma)\gamma+\gamma^2(1-p)+(1-\gamma)^2(1-p)+\gamma(1-\gamma)(1-p)^2$$
$$=[1-\gamma+\gamma(1-p)][\gamma+(1-\gamma)(1-p)]$$
$$p_{12}=(1-\gamma)^2p+\gamma(1-\gamma)p(1-p)=p(1-\gamma)[1-\gamma+\gamma(1-p)]$$
$$p_{13}=\gamma^2p+\gamma(1-\gamma)p(1-p)=\gamma p[\gamma+(1-\gamma)(1-p)]$$
$$p_{14}=\gamma(1-\gamma)p^2$$
$$\sum_{j=1}^{4} p_{1j}=1$$

Рис. 4.22. Три схемы для вероятностей перехода с начальным состоянием S_1.



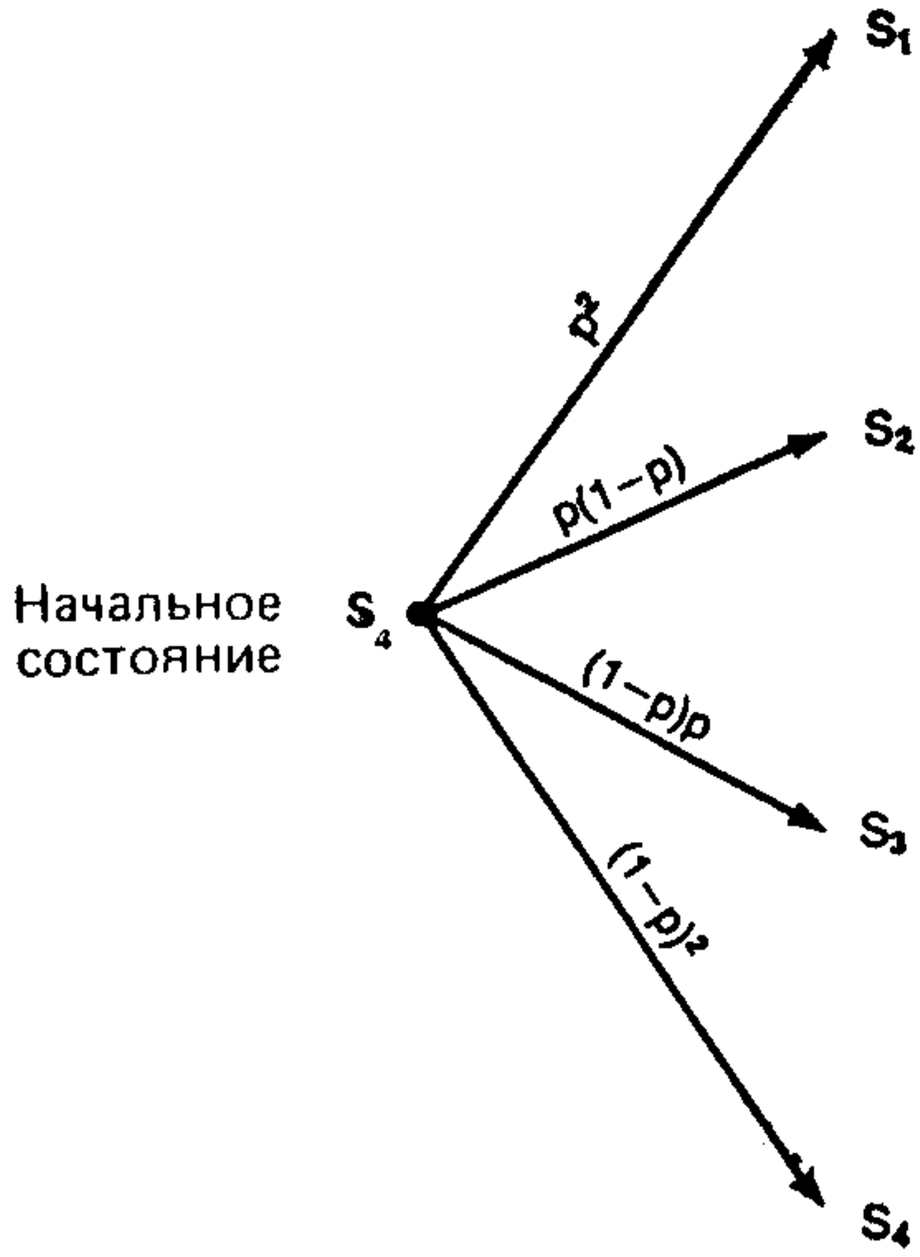
$$p_{21}=(1-\alpha)^2p+\alpha(1-\alpha)p(1-p)=p(1-\alpha)[1-\alpha+\alpha(1-p)]$$
$$p_{22}=(1-\alpha)\alpha+\alpha^2(1-p)+(1-\alpha)^2(1-p)+\alpha(1-\alpha)(1-p)^2$$
$$=[1-\alpha+\alpha(1-p)][\alpha+(1-\alpha)(1-p)]$$
$$p_{23}=\alpha(1-\alpha)p^2$$
$$p_{24}=\alpha^2p+\alpha(1-\alpha)p(1-p)=\alpha p[\alpha+(1-\alpha)(1-p)]$$
$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}=1$$

Рис. 4.23. Три схемы для вероятностей перехода с начальным состоянием S_2.



$$p_{31}=\beta^2 p+\beta(1-\beta)p(1-p)=\beta p[\beta+(1-\beta)(1-p)]$$
$$p_{32}=\beta(1-\beta)p^2$$
$$p_{33}=\beta(1-\beta)+\beta^2(1-p)+(1-\beta)^2(1-p)+\beta(1-\beta)(1-p)^2$$
$$=[1-\beta+\beta(1-p)][\beta+(1-\beta)(1-p)]$$
$$p_{34}=(1-\beta)^2 p+\beta(1-\beta)p(1-p)=p(1-\beta)[1-\beta+\beta(1-p)]$$
$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}=1$$

Рис. 4.24. Три схемы для вероятностей перехода с начальным состоянием S_3.



$$p_{41}=p^2$$
$$p_{42}=p(1-p)$$
$$p_{43}=p(1-p)$$
$$p_{44}=(1-p)^2$$
$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij}=1$$

Рис. 4.25. Три схемы для вероятностей перехода с начальным состоянием S_4.

$$P_{14} = \gamma(1-\gamma)p^2, \tag{4.7.5}$$

$$\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1,$$

$$P_{21} = (1-\alpha)^2 p + \alpha(1-\alpha)p(1-p) = p(1-\alpha)[1-\alpha+\alpha(1-p)], \tag{4.7.6}$$

$$P_{22} = (1-\alpha) + \alpha^2(1-p) + (1-\alpha)^2(1-p) + \alpha(1-\alpha)(1-p)^2 =$$
$$= [1-\alpha+\alpha(1-p)][\alpha+(1-\alpha)(1-p)], \tag{4.7.7}$$

$$P_{23} = \alpha(1-\alpha)p^2, \tag{4.7.8}$$

$$P_{24} = \alpha^2 p + \alpha(1-\alpha)p(1-p) = \alpha p[\alpha+(1-\alpha)(1-p)], \tag{4.7.9}$$

$$\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1,$$

$$P_{31} = \beta^2 p + \beta(1-\beta)p(1-p) = \beta p[\beta+(1-\beta)(1-p)], \tag{4.7.10}$$

$$P_{32} = \beta(1-\beta)p^2, \tag{4.7.11}$$

$$P_{33} = \beta(1-\beta) + \beta^2(1-p) + (1-\beta)^2(1-p) + \beta(1-\beta)(1-p)^2 =$$
$$= [1-\beta+\beta(1-p)][\beta+(1-\beta)(1-p)], \tag{4.7.12}$$

$$P_{34} = (1-\beta)^2 p + \beta(1-\beta)(1-p) = p(1-\beta)[1-\beta+\beta(1-p)], \tag{4.7.13}$$

$$\sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1.$$

Затем мы вводим вторую коллективную переменную нашей задачи, а именно *степень кросс-корреляции* между «внешними» триггерами, поступающими от партнера, на уровне Q и динамические режимы, запасенные на уровне Q. Но, прежде чем мы сможем продолжить, нам необходимо описать динамику на верхних уровнях W и W' двух партнеров.

4.7.3. Модель полумарковской цепи для иерархических уровней W и W'

Верхние иерархические уровни W, W' наделены динамикой, описываемой, например, с помощью модели цепи Маркова с восемью состояниями. Каждый из описанных в предыдущем разделе процессов, характеризующих поведение первой системы, теперь играет роль «внешних» сигналов для партнера/системы.

Каждому состоянию W_i, W'_i верхних уровней мы ставим в соответствие трехзначное «слово», т. е. одно из слов 000, 001, 011, 111, 100, 010, 110 и 101. Другое подмножество четырех из этих слов мы сопоставим четырем состояниям S_1, S_2, S_3, S_4

и S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 двух партнеров на уровнях Q и Q'. В такой дискретной форме степень «подобия» между синхронными строками индивидуальных состояний $W' \otimes Q$, $W \otimes Q'$ в каждой системе соответственно на уровнях Q и Q' задается выражением

$$r_i = 1 - \frac{1}{3} D_1 \quad \text{или} \quad r'_i = 1 - \frac{1}{3} D'_1, \tag{4.7.14}$$

где D_1 (или D'_1) — расстояние между соответствующими «словами», т. е. число знаков, которыми отличаются эти слова/состояния. Таким образом, связь между двумя системами визуализуется как последовательное формирование кросс-корреляций между трехзначными «словами», которые соответствуют состояниям, принадлежащим уровням/парам (W, Q') и (W', Q). Данные о кросс-корреляциях r_i, r'_i и вероятностях u_i, u'_i (измеряемых частотами появления) заранее отобранных гомеостатических состояний на уровнях Q и Q' сообщаются соответственно на (более высокие) уровни W и W'.

В соответствии с полученными данными уровни W и W' (играющие роль «управляющих» для своих нижних уровней Q и Q') вырабатывают и отправляют вниз (упреждающие) эфферентные управляющие команды, приводящие к изменениям значений основных параметров $(\alpha, \beta, \gamma, p)$, $(\alpha', \beta', \gamma', p')$. Таким образом, достигается максимум «совместной добротности» (среднего по достаточно большому временному интервалу от взвешенной суммы конфликтующих членов для каждой системы или вероятностей гомеостатических состояний и межсистемных кросс-корреляций между уровнями (W, Q') и (W, Q')).

Моделирующие процессы на уровнях W, W' должны иметь дело с параметризацией вероятностей перехода P_{ij}. Наглядно их можно представить следующим образом. Рассмотрим марковские цепи на уровнях W или W', связанные между собой так, как показано на рис. 4.26. Прямые связи существуют только между последовательными состояниями (перенумерованными по порядку от 1 до 8). Попытаемся ввести вероятности перехода как функции от u и $r = 1 - D/3$ так, чтобы они отвечали некоторым интуитивным постулатам относительно природы уровней W и W'.

Применительно к проблеме связи в организме человека, например в случае, когда W, W' означают «эмоционально управляемые» уровни поведения, строка состояний от 1 до 8 может моделировать шкалу эмоций от «депрессии» до «эйфории», или, если говорить в терминах поведения, от *кататонии* до *гиперактивности*. В рамках такой парадигмы представляется вполне разумным, что вероятности «восходящих» переходов $D(k, k+1)$ $(k = 1, \ldots, 7)$ (т. е. последовательных сдвигов $1 \to 8$ от катато-

нии до гиперактивности) должны быть *возрастающими* функциями кросс-корреляций r с партнером/окружающей средой и *убывающей* функцией гомеостатического уровня u. Например, можно положить

$$P(k,\ k+1) = P_{\uparrow}(r,\ u) = C_k\left[1 - e^{-\nu_k r}\right] e^{-\xi_k u} + \pi_k, \quad (4.7.15)$$

где $k = 1, 2, \ldots, 7$, $0 \leqslant \pi_k \leqslant 1$, $0 \leqslant C_k \leqslant 1 - \pi_k$ и ν_k, ξ_k — положительные числа. Здесь π_k соответствует «внутреннему» спонтанному прыжку в следующее состояние в отсутствие триггеров, поступающих от партнеров.

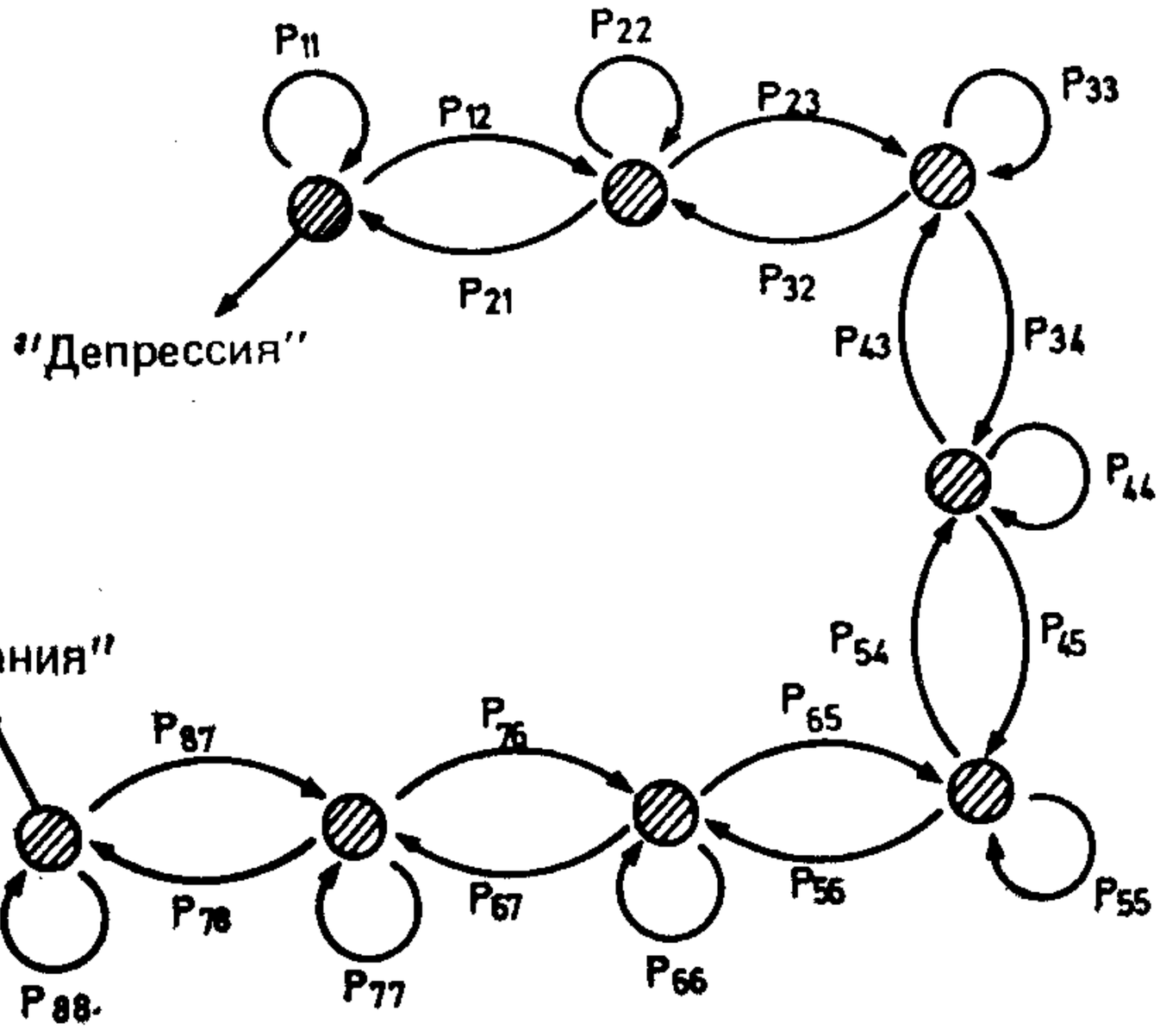


Рис. 4.26. Схема марковской цепи (марковских цепей) на верхних иерархических уровнях $W(W')$.

Аналогичным образом, мы можем принять для вероятностей «нисходящих» переходов следующую r, u-параметризацию:

$$P(k,\ k-1) = P_{\downarrow}(r,\ u) = d_k\left[1 - e^{-\mu_k u}\right] e^{-\lambda_k r} + q_k, \quad (4.7.16)$$

где q_k имеет смысл, аналогичный смыслу π_k, $k = 2, 3, \ldots, 8$, $0 \leqslant q_k \leqslant 1$, $0 \leqslant d_k \leqslant 1 - q_k$ и μ_k, λ_k — положительные числа.

Наконец, вероятности остаться в том же состоянии представимы в виде

$$\begin{aligned} P(k,\ k) &= 1 - P(k,\ k+1) - P(k,\ k-1) = \\ &= 1 - \pi_k - q_k - C_k\left[1 - e^{-\nu_k r}\right] e^{-\xi_k u} - d_k\left[1 - e^{-\mu_k u}\right] e^{-\lambda_k r} \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

при $k = 2, \ldots, 7$ и

$$P(1, 1) = 1 - P(1, 2), \tag{4.7.18}$$

$$P(8, 8) = 1 - P(8, 7). \tag{4.7.19}$$

Аналогичным образом происходит выработка управляющих команд и на уровне W'.

Введем теперь параметризацию *второго* рода вероятностей перехода P_{ij} на уровнях W и W'. Марковские цепи, которыми мы до сих пор моделировали динамическое поведение на иерархических уровнях Q или W, были неявно наделены тем свойством, что переходы совершались через правильные промежутки времени. Переход мог возвратить систему в состояние, в котором она уже находилась прежде, но тем не менее переход происходил. Теперь при моделировании динамики на верхних уровнях W, W' мы рассмотрим более общий класс процессов (*полу*марковские цепи), в которых промежутки времени между переходами могут следовать данной функции плотности вероятности и момент времени, когда происходит переход, может зависеть от самого рассматриваемого перехода. Когда процесс на уровне W вступает в состояние i, мы знаем, что он определяет следующее состояние j, в которое перейдет в соответствии с сопоставленными состоянию j условными вероятностями $P_{ij}(r, u)$, как описано выше. После того как состояние j выбрано, но, *перед* тем как совершить переход из состояния i в состояние j, процесс в течение некоторого времени τ_{ij} «задерживается», или «пребывает» в состоянии i. Времена удержания — положительные, целочисленные, переменные, подчиняющиеся функции «массы» вероятности $h_{ij}(\tau)$, которая называется «функцией плотности вероятности времени удержания».

Если последующее состояние неизвестно, то вероятность того, что система на уровне W проведет τ единиц времени в состоянии i, равна

$$\Lambda_i(\tau) = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} h_{ij}(\tau), \tag{4.7.20}$$

где N — число всех последующих состояний. Назовем τ «временем ожидания» в состоянии i, а $\Lambda_i(\tau)$ — функцией массы вероятности времени ожидания. Таким образом, время ожидания есть не что иное, как время удержания, которое становится *безусловным* по достижении состояния «назначения». Среднее время ожидания $\langle \tau_i \rangle$ связано с средним временем удержания $\langle \tau_{ij} \rangle$ соотношением

$$\langle \tau_i \rangle = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} \langle \tau_{ij} \rangle. \tag{4.7.21}$$

В изложенной выше модели процесс на уровне W *сначала* выбирает свое следующее состояние, используя вероятности перехода P_{ij}, а *затем* выбирает время перехода, исходя из функции массы вероятности времени удержания $h_{ij}(\tau)$ при условии, что выбранный переход сделан. Но точно так же мы можем *обратить* процесс и предоставить *сначала* выбирать время перехода, а *затем* выбирать новое состояние при условии, что время перехода выбрано. В нашей модели такая последовательность событий более естественна.

Распределение времени ожидания $\Lambda_i(\tau)$, уже определенное, есть не что иное, как распределение времени ожидания, безусловное относительно состояния, в которое переходит процесс. В принятом нами альтернативном описании процесса $\Lambda_i(\tau)$ должно быть определено для всех состояний. Затем мы должны указать вероятность перехода в каждое состояние, если известно время, в течение которого система удерживалась в ее текущем состоянии перед тем, как совершить переход.

Пусть $P_{ij}(\tau)$ — вероятность того, что процесс, который теперь находится в состоянии i и совершит переход из состояния i в момент времени τ, перейдет при этом в состояние j. Таким образом, $P_{ij}(\tau)$ — вероятности перехода *при условии*, что время удержания известно; мы называем их «условными» вероятностями перехода. Распределение времени ожидания $\Lambda_i(\tau)$ и совокупность условных вероятностей перехода $P_{ij}(\tau)$ дают полное альтернативное определение полумарковского процесса.

Таким образом, если процесс первоначально задан (как в нашем случае) в терминах P_{ij} и $h_{ij}(\tau)$, мы вычисляем $\Lambda_i(\tau)$ по формуле (4.7.20) и получаем затем

$$P_{ij}(\tau) = \frac{P_{ij}h_{ij}(\tau)}{\Lambda_i(\tau)} = \frac{P_{ij}h_{ij}(\tau)}{\sum_{j=1}^{N} P_{ij}h_{ij}(\tau)}. \qquad (4.7.22)$$

Почему в динамику *верхних* уровней W, W' входит эта зависимость от распределения времени удержания? С операционной точки зрения понятие «время удержания» связано с «толчками» «часового» механизма, активирующего марковские цепи, то есть механизма, ответственного за смену режимов (состояний). Мы постулируем, что этот часовой механизм (своего рода главный ритмоводитель) инактивируется в интервалы времени (времена удержания), которые увеличивают степень дезорганизации на нижних уровнях Q и Q' рассматриваемой системы. Если говорить более точно, то мы постулируем, что любое (случайное) нарушение равновесия между концентрациями ключевых веществ (гормонов, нейромедиаторов) $\sim \alpha$, β, γ, α', β', γ или различными концентрациями $\sim p$, p', индуцирован-

ное извне или изнутри, может привести к такому изменению в вероятностях перехода P_{ij} на нижних уровнях Q и Q', которое сопровождается флуктуацией избыточности или степени организации на тех же уровнях.

Избыточность на уровне Q определяется как

$$R_Q = 1 - H_Q/H_{\text{макс}}, \tag{4.7.23}$$

где

$$H_Q = \frac{1}{\tau}\sum_{\nu=1}^{\tau} H_{i\nu} \tag{4.7.24}$$

— средняя по времени энтропия, или неопределенность на состояние; на уровне Q в предыдущее вромя удержания величина

$$H_i = -\sum_{k=1}^{4} P_{ik}\log_2 P_{ik} \tag{4.7.25}$$

есть неопределенность состояния i ($i = 1, 2, 3, 4$); $H_{\text{макс}} = \log_2 4 = 2$; ν — индекс состояния в момент времени i.

То же нарушение равновесия между концентрациями ключевых веществ (или «параметров игры»), о котором мы упоминали выше, может отвечать за временну́ю десинхронизацию или инактивацию основного ритмоводителя (или сопутствовать этим явлениям), тем самым вводя времена удержания на верхних уровнях W, W', *коррелированные* с падением избыточности на нижних уровнях. В разд. 4.7.6 мы обсудим последние нейрофизиологические работы в пользу этого аргумента.

Определим теперь функцию массы вероятности времени удержания как геометрическое распределение

$$h_{ij}(\tau) = n_{ij}(1 - n_{ij})^{\tau-1}, \tag{4.7.26}$$

где $0 \leqslant n_{ij} \leqslant 1$ — условные вероятности остаться в состоянии i верхнего уровня в течение одной единицы времени перед переходом при условии, что переход происходит из состояния i в состояние j. Среднее значение приведенного выше распределения равно $1/n_{ij}$, а его дисперсия равна $(1 - n_{ij})/n_{ij}^2$.

Вычислим теперь элемент $P_{ij}(\tau)$ марковской динамики на уровне W (аналогичные результаты справедливы и для уровня W'). Мы считаем разумным постулировать (поскольку речь идет о зависимости времени удержания), что вероятность $P_{ij}(\tau)$ должна быть убывающей функцией параметра τ при движении от кататонии к гиперактивности и убывающей функцией того же параметра при движении от гиперактивности к кататонии. Это означает, что чем дольше система W пребывает в депрессивном состоянии, тем больше вероятность того, что она останется в этом режиме; и чем дольше система пребывает в эйфорическом состоянии, тем больше вероятность того, что она

перейдет в менее эйфорическое, или более депрессивное, состояние.

Запишем

$$n_{i(i+1)} = n_d \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, 7,$$
$$n_{i(i-1)} = n_\mu \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, 8 \qquad (4.7.27)$$

и

$$n_{ii} = n_0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, 8;$$

предполагается, что $n_\mu < n_0 < n_d$.

В силу этого предположения соотношение между соответствующими условными временами удержания имеет вид

$$\frac{1}{n_\mu} > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n_d}. \qquad (4.7.28)$$

Зависимость времен удержания от избыточности верхнего иерархического уровня R_Q в нашем примере вводится следующим образом:

$$n_\mu = \frac{1 + R_Q}{36}, \quad n_0 = \frac{1 + R_Q}{30}, \quad n_d = \frac{1 + R_Q}{24}. \qquad (4.7.29)$$

Из соотношений (4.7.26) с учетом соотношений (4.7.27) получаем

$$h_{i(i+1)}(\tau) = n_d (1 - n_d)^{\tau-1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, 7,$$
$$h_{i(i-1)}(\tau) = n_\mu (1 - n_\mu)^{\tau-1} \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, 8, \qquad (4.7.30)$$
$$h_{ii}(\tau) = n_0 (1 - n_0)^{\tau-1} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, 8,$$
$$h_{ij}(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad (j-1)(j-i-1)(j-i+1) \neq 0.$$

Вместе с соотношением (4.7.22) новые результаты приводят к следующим выражениям для условных вероятностей перехода времен удержания:

$$P_{i(i+1)}(\tau) = \frac{P_{i(i+1)} h_{i(i+1)}(\tau)}{P_{i(i-1)} h_{i(i-1)}(\tau) + P_{ii} h_{ii}(\tau) + P_{i(i+1)} h_{i(i+1)}(\tau)} =$$
$$= \frac{P_{i(i+1)}}{P_{i(i-1)} \frac{n_\mu}{n_d} \left[\frac{1 - n_\mu}{1 - n_d}\right]^{\tau-1} + P_{ii} \frac{n_0}{n_d} \left[\frac{1 - n_0}{1 - n_d}\right]^{\tau-1} + P_{i(i+1)}} \qquad (4.7.31)$$

при $i = 2, 3, \ldots, 7$ и $\tau = 1, 2, 3, \ldots$. Как постулировалось выше, $P_{i(i+1)}(\tau)$ — убывающая функция от τ при $n_\mu < n_0 < n_d$.

Кроме того,

$$P_{12}(\tau) = \frac{P_{12}h_{12}(\tau)}{P_{11}h_{11}(\tau) + P_{12}h_{12}(\tau)} = \frac{P_{12}}{P_{11}\frac{n_0}{n_d}\left[\frac{1-n_0}{1-n_d}\right]^{\tau-1} + P_{12}} \quad (4.7.32)$$

— убывающая функция от τ.

Для нисходящих переходов получаем

$$P_{i(i-1)}(\tau) = \frac{P_{i(i-1)}h_{i(i-1)}(\tau)}{P_{i(i-1)}h_{i(i-1)}(\tau) + P_{ii}h_{ii}(\tau) + P_{i(i+1)}h_{i(i+1)}(\tau)} =$$

$$= \frac{P_{i(i-1)}}{P_{i(i-1)} + P_{ii}\frac{n_0}{n_\mu}\left[\frac{1-n_0}{1-n_\mu}\right]^{\tau-1} + P_{i(i+1)}\frac{n_d}{n_\mu}\left[\frac{1-n_d}{1-n_\mu}\right]^{\tau-1}} \quad (4.7.33)$$

при $i = 2, 3, \ldots, 7$; $P_{i(i-1)}(\tau)$ — возрастающая функция от τ при $n_\mu < n_0 < n_d$.

Кроме того,

$$P_{87}(\tau) = \frac{P_{87}h_{87}(\tau)}{P_{87}h_{87}(\tau) + P_{88}h_{88}(\tau)} = \frac{P_{87}}{P_{87} + P_{88}\frac{n_0}{n_\mu}\left[\frac{1-n_0}{1-n_\mu}\right]^{\tau-1}}; \quad (4.7.34)$$

а также

$$P_{ii}(\tau) = \frac{P_{ii}h_{ii}(\tau)}{P_{i(i-1)}h_{i(i-1)}(\tau) + P_{ii}h_{ii}(\tau) + P_{i(i+1)}h_{i(i+1)}(\tau)} =$$

$$= \frac{P_{ii}}{P_{i(i-1)}\frac{n_\mu}{n_0}\left[\frac{1-\eta_\mu}{1-n_0}\right]^{\tau-1} + P_{ii} + P_{i(i+1)}\frac{n_d}{n_0}\left[\frac{1-n_d}{1-n_0}\right]^{\tau-1}} \quad (4.7.35)$$

при $i = 2, 3, \ldots, 7$ и $\tau = 1, 2, 3, \ldots$. Наконец,

$$P_{11}(\tau) = \frac{P_{11}h_{11}(\tau)}{P_{11}h_{11}(\tau) + P_{12}h_{12}(\tau)} = \frac{P_{11}}{P_{11} + P_{12}\frac{n_d}{n_0}\left[\frac{1-n_d}{1-n_0}\right]^{\tau-1}}, \quad (4.7.36)$$

$$P_{88}(\tau) = \frac{P_{88}h_{88}(\tau)}{P_{87}h_{87}(\tau) + P_{88}h_{88}(\tau)} = \frac{P_{88}}{P_{87}\frac{n_\mu}{n_0}\left[\frac{1-n_\mu}{1-n_0}\right]^{\tau-1} + P_{88}} \quad (4.7.37)$$

при $\tau = 1, 2, 3, \ldots$.

4.7.4. Задача управления

а) *Биологические ритмы, лежащие в основе игры*

Выберем в качестве выражений для параметров игры (циркадные) компоненты периодических функций, моделирующих

основные ритмы. Пусть это будут выражения

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_{\text{макс}} + \alpha_{\text{мин}}}{2} + \frac{\alpha_{\text{макс}} - \alpha_{\text{мин}}}{2} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\beta(t) = \frac{\beta_{\text{макс}} - \beta_{\text{мин}}}{2} - \frac{\beta_{\text{макс}} - \beta_{\text{мин}}}{2} \cos(\omega t + \varphi), \qquad (4.7.38)$$

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_{\text{макс}} + \gamma_{\text{мин}}}{2} + \frac{\gamma_{\text{макс}} - \gamma_{\text{мин}}}{2} \cos(\omega t),$$

где $p = \text{const}\ t$, $\alpha_{\text{макс}} \geqslant \alpha_{\text{мин}}$, $\beta_{\text{макс}} \geqslant \beta_{\text{мин}}$, $\gamma_{\text{макс}} \geqslant \gamma_{\text{мин}}$ — константы, заданные экстремальными значениями рассматриваемых флуктуаций.

Выберем в качестве управляющего параметра разность фаз φ между $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ и сделаем так, чтобы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ были в противофазе (т. е. чтобы разность фаз между ними была равна 180°). Такое распределение моделирует ситуацию, возникающую под действием управления в отдельных биологических ритмах. В качестве другого управляющего параметра выберем p. Пусть $\mathbf{V} = (p, \varphi)$ — вектор управляющих параметров.

Мы рассмотрим также менее жесткий управляющий механизм, состоящий в изменении p и начальной фазы φ трех ритмов, в остальном согласованных, т. е.

$$\alpha(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\beta(t) = \beta_1 + \beta_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\gamma(t) = \gamma_1 + \gamma_2 \cos(\omega t + \varphi), \qquad (4.7.39)$$

где α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2)$ — константы.

б) *Описание процессов связи и управления*

Рассмотрим наши рассуждения с точки зрения партнера $A(Q, W)$. Если вектор управляющих параметров $\mathbf{V} = (p, \varphi)$ задан, то сразу же после перехода в новое состояние на уровне W временная вариация функций α, β и γ полностью определена. Коль скоро $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ известны, все 16 элементов $P_{ij}(\tau)$ матрицы перехода на уровне Q также определены. Пусть τ — время удержания в текущем состоянии на уровне W. Последовательность состояний $S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{i\tau}$ на уровне Q $(i = 1, 2, 3$ или $4)$ в течение этого времени удержания описывается приведенными выше зависящими от времени вероятностями перехода и моделируются на компьютре с помощью описанного ниже метода Монте-Карло.

Вычислим для выбранного заранее гомеостатического состояния S_h $(h = 1, 2, 3$ или $4)$ относительную частоту его появления за время удержания τ. Вычислим также кросс-корре-

ляцию

$$r = 1 - \frac{\mathbf{D}}{3} = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau}\left[1 - \frac{D^{(i)}}{3}\right] \qquad (4.7.40)$$

между последовательностями состояний уровня Q партнера A и верхнего уровня W' партнера $B(Q', W')$ за тот же временной интервал τ. За время τ на уровне W' могут происходить несколько переходов.

К концу времени удержания пара значений (u, r) передается афферентно на уровень W. Тем самым вероятности перехода P_{ij} на этом уровне фиксируются так, как описано в разд. 4.7.3. Верхний уровень W играет двоякую роль: «передатчика» по отношению к уровню Q' партнера B и «управляющего устройства» по отношению к лежащему в основе его самого игры на уровне Q. В этой последней роли назначение его состоит в том, чтобы изменять (через эфферентные (упреждающие) управляющие параметры) вектор управляющих параметров $\mathbf{V} = (p, \varphi)$ на основе принятых сигналов (u, r).

Цель управления состоит в том, чтобы удовлетворить надлежащим образом выбранному критерию. Ситуация требует процедуры управления, преследующей две цели: с точки зрения партнера A целью могло бы быть достижение максимума взвешенной суммы средних значений $E(u)$ и $E(r)$ параметров u и r, т. е. достижение максимума «добротности»

$$F = \lambda_1 E(u) + \lambda_2 E(r), \qquad (4.7.41)$$

где λ_1 и λ_2 — неотрицательные константы с единичной суммой.

С точки зрения партнера B цель должна была бы состоять в достижении максимума другой добротности

$$F' = \lambda_i' E(u') + \lambda_2' E(r'), \qquad (4.7.42)$$

где $0 \leqslant \lambda_i' \leqslant 1$ и $\lambda_2' = 1 - \lambda_1'$.

В такой антагонистической двухцелевой задаче управления партнеры могут идти на компромисс, пытаясь найти режим *взаимной адаптации* или *сосуществования*. Такая стратегия сводится к нахождению максимума совместной добротности

$$F_j = \sigma F + \sigma' F', \qquad (4.7.43)$$

где σ, σ' — неотрицательные константы с единичной суммой.

в) *Выбор механизмов управления*

Значения управляющих параметров (p, φ) и (p', φ') выбираются иерархическими уровнями W и W' в соответствии со значениями коллективных переменных (u, r), (u', r') непосред-

ственно после соответствующих переходов, т. е.

$$p = f_1(r,\ u),\quad p' = f_1'(r',\ u'),$$
$$\varphi = f_2(r,\ u),\quad \varphi' = f_2'(r',\ u'). \tag{4.7.44}$$

Выбор таких функций [или отображений $(r, u) \to (p, \varphi)$ и $(r', u') \to (p', \varphi')$], при которых достигается максимум совместной добротности F_j, и составляет задачу управления. Мы предполагаем, что вектор управляющих параметров **V** может оканчиваться только в конечном числе точек $v_1, v_2, \ldots, v_N$ на плоскости (p, φ). Будем считать, что прямоугольная область $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ «принятого» вектора (r, u) или (D, u) разделена на M областей $R_1, R_2, \ldots, R_M$, как показано на рис. 4.27,

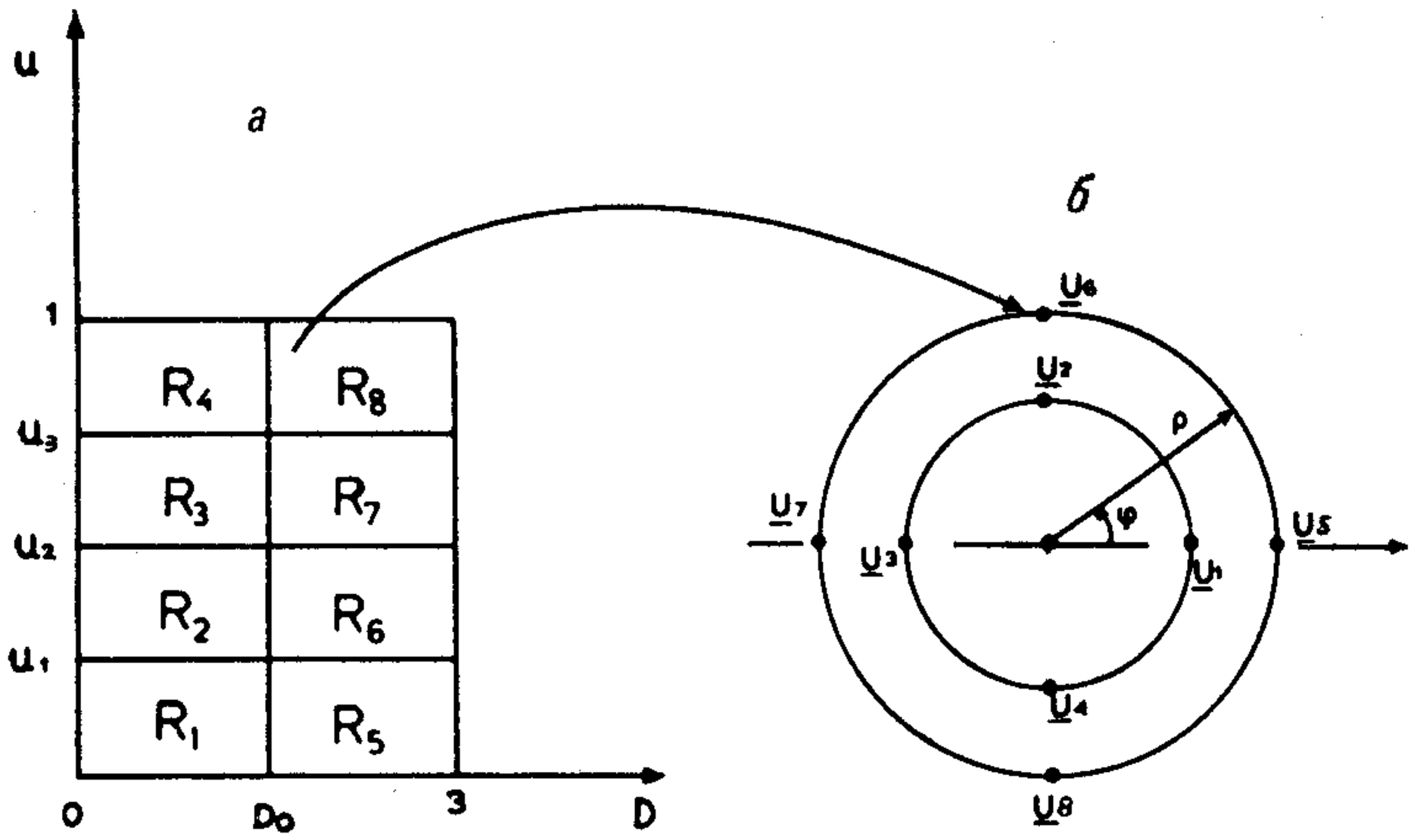


Рис. 4.27. *а* — квантование на плоскости (D, u). *б* — дискретные значения управляющего вектора $\boldsymbol{V}(\rho, \varphi)$.

где для моделирования на компьютере мы выбрали $M = N = 8$. Мы считаем, что в этом конкретном случае p принимает 2 значения, а φ — 4 значения:

$$p \in \{p_1,\ p_2\};\quad \varphi \in \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\right\}. \tag{4.7.45}$$

Области R_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ заданы так, как показано на рис. 4.27.

Если отказаться от эвристических соображений, позволяющих априори исключить несколько отображений, заведомо неоптимальных или несовместимых с характером решаемой нами задачи, то необходимо рассматривать все $(N^M)^2 = N^{2M}$ пар отображений. Ясно, что оптимизация на основе перебора всех элементов столь большого множества исключается даже при не-

большом числе ступеней квантования (например, таком, как на рис. 4.27). Поэтому мы ограничимся поиском на случайно выбранном подмножестве, содержащем $8^{16} = 2^{48}$ возможных мод, или режимов, совместного поведения.

4.7.5. Моделирование на компьютере

Выберем сначала какое-нибудь случайное отображение восьми точек плоскости (D, u) на восемь точек плоскости вектора управляющих параметров (p, φ) (рис. 4.27). Взаимно однозначное отображение характеризуется 8! перестановками чисел от 1 до 8 $(n_1, n_2, \ldots, n_8)$ в том смысле, что область R_i плоскости (D, u) отображается в точку v_{n_i} плоскости управляющих параметров $\mathbf{V} = (p, \varphi)$. Выбор отображения (т. е. случайной перестановки) производится с помощью стандартной подпрограммы SMAP. В этой подпрограмме перестановка чисел от 1 до 8 осуществляется по методу Монте-Карло следующим образом. Используя соответствующую подпрограмму, мы можем порождать случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0, 1). Одно из таких чисел мы умножаем на 8 и целую часть полученного произведения принимаем за первое число n_1 перестановки. Затем мы получаем второе случайное число и умножаем его на 7. Пусть m — целая часть произведения; тогда m-е по величине из оставшихся семи чисел есть второе число n_2 перестановки. Продолжая аналогичным образом, мы располагаем все восемь чисел в случайную последовательность, соответствующую некоторому вполне конкретному отображению.

После выбора двух случайных отображений (по одному для каждого партнера) мы вычисляем для каждого из них время удержания. Абсолютное время точек перехода на верхнем уровне W для каждого партнера определяется как сумма соответствующих последовательных времен удержания.

Для партнера, у которого переход из состояния в состояние происходит раньше (рис. 4.28), мы вычисляем (используя подпрограмму CQL) следующее состояние W и следующее время удержания. Чтобы получить эти параметры, мы сначала вычисляем расстояние D между уровнем Q одного партнера и уровнем W другого партнера. Для этого мы с помощью метода Монте-Карло определим последовательность состояний $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ цепи Маркова на иерархическом уровне Q следующим образом. Пусть $S(i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ — текущее состояние на уровне Q. Следующее состояние $S(j)$ мы устанавливаем, порождая с помощью подходящей подпрограммы случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0, 1), разделенном на четыре подынтервала в соответствии с вероят-

ностями перехода P_{ij}. Индекс j следующего состояния $S(j)$ марковской цепи на уровне Q определяется по подынтервалу, в который попадает случайное число.

Состояния для уровней Q и W представлены трехзначными двоичными числами от 000 до 111. В частности, для уровней W мы используем в качестве кода для состояния W_i (или W'_i) трехзначное двоичное представление индекса i. Для четырех состояний иерархических уровней Q и Q' двух партнеров мы используем соответственно коды $S(1) = 001$, $S(2) = 010$, $S(3) = 011$, $S(4) = 100$, $S'(1) = 0{,}11$ $S'(2) = 100$, $S'(3) = 101$, $S'(4) = 110$. Расстояние между двумя элементами α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, где α_i и β_i равны 0 или 1 ($i = 1, 2, 3$), вычисляется по формуле

$$D = |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + |\alpha_3 - \beta_3|. \quad (4.7.46)$$

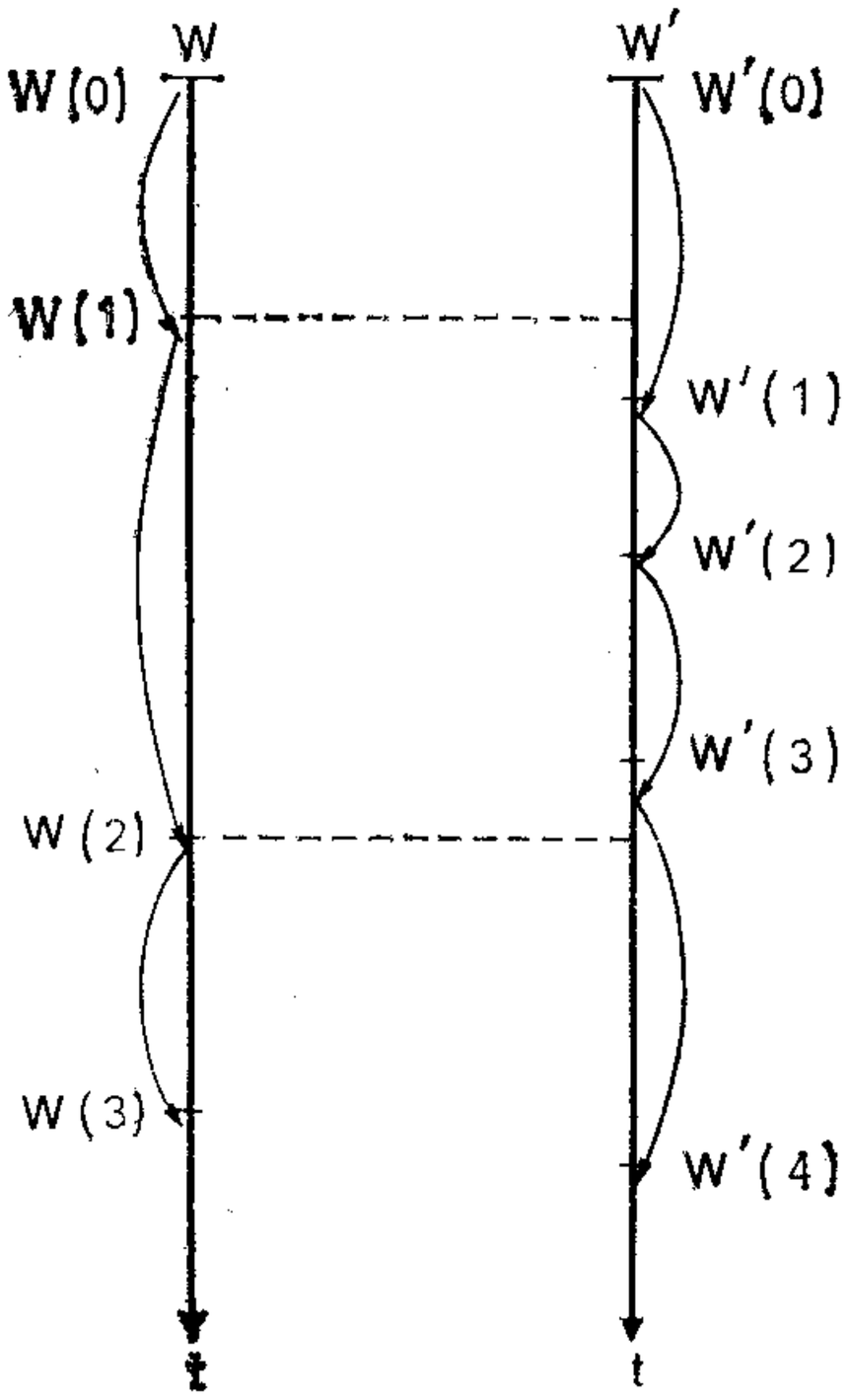


Рис. 4.28. Моделирование на компьютере: переходы между состояниями на уровнях W и W'.

Последовательность из N состояний уровня Q порождается описанным выше способом, где N — число временных интервалов в пределах каждого времени удержания. Вычисляются расстояния $D^{(i)}$ между соответствующими элементами, и среднее расстояние за время удержания на верхнем уровне (W или W') равно

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} D^{(i)}. \quad (4.7.47)$$

Значение параметра u — это доля (в процентах) появления гомеостатического состояния за время удержания. Получив значения u и D (для выбранного гомеостатического состояния), мы определим, в какую из областей R_i ($i = 1, \ldots, 8$) на рис. 4.27 попадает точка (D, u). Располагая квантованными значениями параметров D и u, мы выбираем новые значения для вектора управляющих параметров (p, φ) в зависимости от отображения, построенного нами в самом начале. Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и параметр p теперь полностью определены,

поэтому мы можем вычислить вероятности перехода для нижнего уровня.

Кроме того, вычислив значения параметров u и $r = 1 - D/3$, мы тем самым нашли вероятности перехода $P(k, k-1)$,

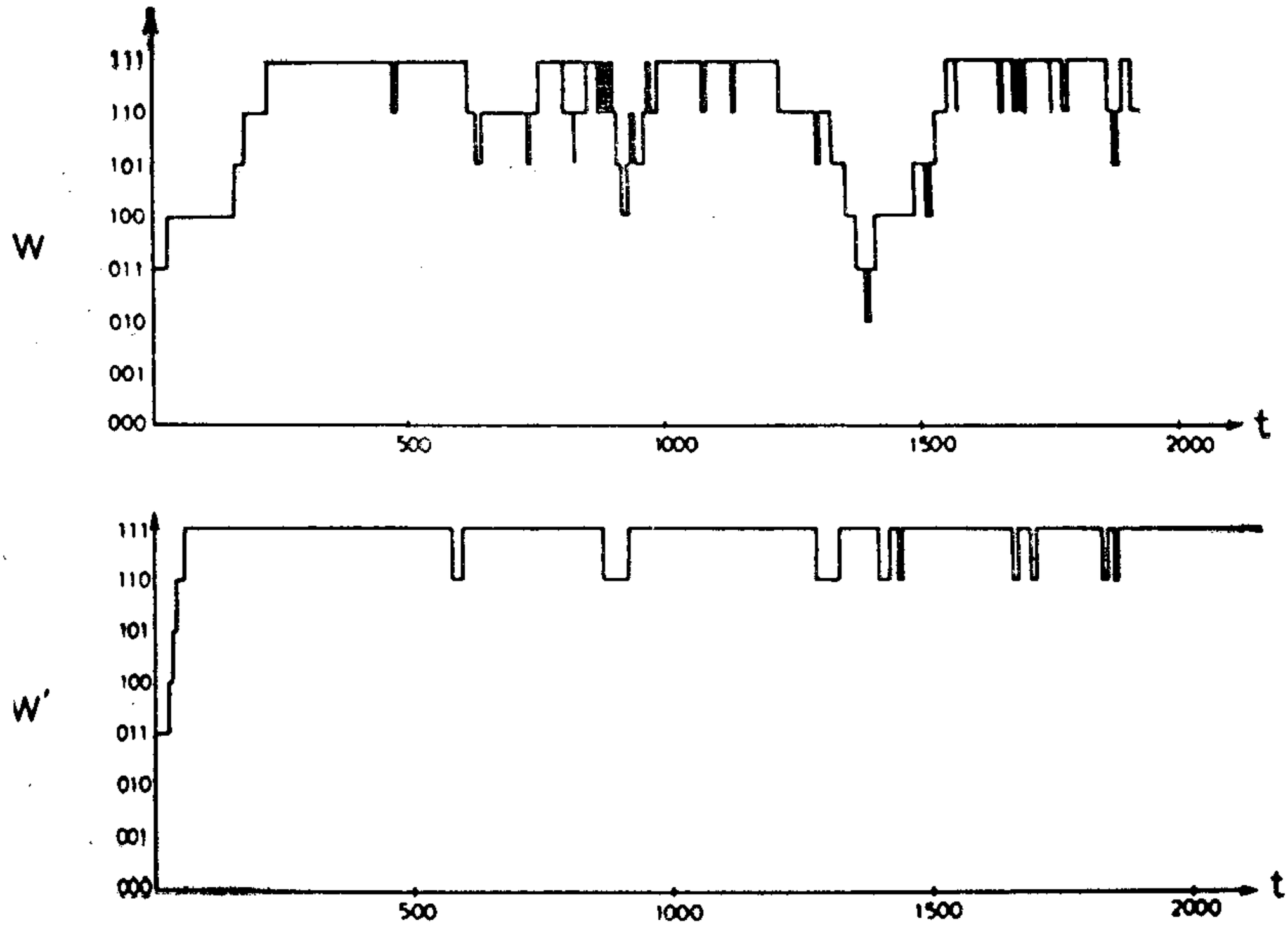


Рис. 4.29. Эволюция состояний высших уровней W и W' для случая, когда основные ритмы определяются выражениями $\alpha(t) = [(\alpha_{макс} + \alpha_{мин}) + (\alpha_{макс} - \alpha_{мин}) \cos(\omega t + \varphi)]/2$, $\beta(t) = [(\beta_{макс} + \beta_{мин}) - (\beta_{макс} - \beta_{мин}) \cos(\omega t + \varphi)]/2$ и $\gamma(t) = [(\gamma_{макс} + \gamma_{мин}) + (\gamma_{макс} - \gamma_{мин}) \cos(\omega t)]/2$. Единицы измерения t произвольны. Значения параметров при моделировании на компьютере: $\alpha_{макс} = 0{,}9$; $\alpha_{мин} = 0{,}1$; $\beta_{макс} = 0{,}8$; $\beta_{мин} = 0{,}2$; $\gamma_{макс} = 0{,}7$; $\gamma_{мин} = 0{,}3$; $\alpha'_{макс} = 0{,}7$; $\alpha'_{мин} = 0{,}3$; $\beta'_{макс} = 0{,}8$; $\beta'_{мин} = 0{,}2$; $\gamma'_{макс} = 0{,}9$; $\gamma'_{мин} = 0{,}1$; $\omega = \pi/10$. Параметры вероятностей перехода для высших уровней: $\pi_K = 0{,}1$; $q_K = 0{,}2$; $c_K = d_K = 0{,}8$; $\pi'_K = 0{,}2$; $q'_K = 0{,}1$; $c'_K = d'_K = 0{,}8$; $\lambda_K = \mu_K = \nu_K = \xi_K = \lambda'_K = \mu'_K = \nu'_K = \xi'_K = 2$ при $K = 1, 2, \ldots, 8$. Значения управляющих параметров $p \in \{0{,}2;\ 0{,}8\}$, $p' \in \{0{,}1;\ 0{,}5\}$, φ и $\varphi' \in \{0, \pi/2, 3\pi/2\}$. Кривая соответствует отображениям, представленным перестановками 4312586 для «левого» партнера и 48726153 для «правого», которые порождают суммарную кривую максимального качества ($F = 0{,}29$) из 30 прогонов компьютера с случайно выбранными отображениями.

$P(k, k)$, $P(k, k+1)$ для уровня W (или W') по приведенным выше выражениям. Следующее состояние для уровня W вычисляется по методу Монте-Карло по аналогии с тем, как это было сделано для уровня Q.

Для каждого состояния уровня Q (или Q') мы вычисляем (по формуле (4.7.25)) величину

$$H_i = \sum_{j=1}^{4} P_{ij} \log_2 P_{ij},$$

а в конце каждого времени удержания τ (включающего N временных интервалов) — величину

$$H_Q = \frac{1}{N}(H_{i1} + \ldots + H_{iN}), \quad i_k = 1, 2, 3, 4, \qquad (4.7.48)$$

и (по формуле (4.7.23)) — величину

$$R_Q = 1 - \frac{H_Q}{\log_2 4} = 1 - \frac{H_Q}{2}. \qquad (4.7.49)$$

По R_Q и следующему состоянию уровня W мы определяем па-

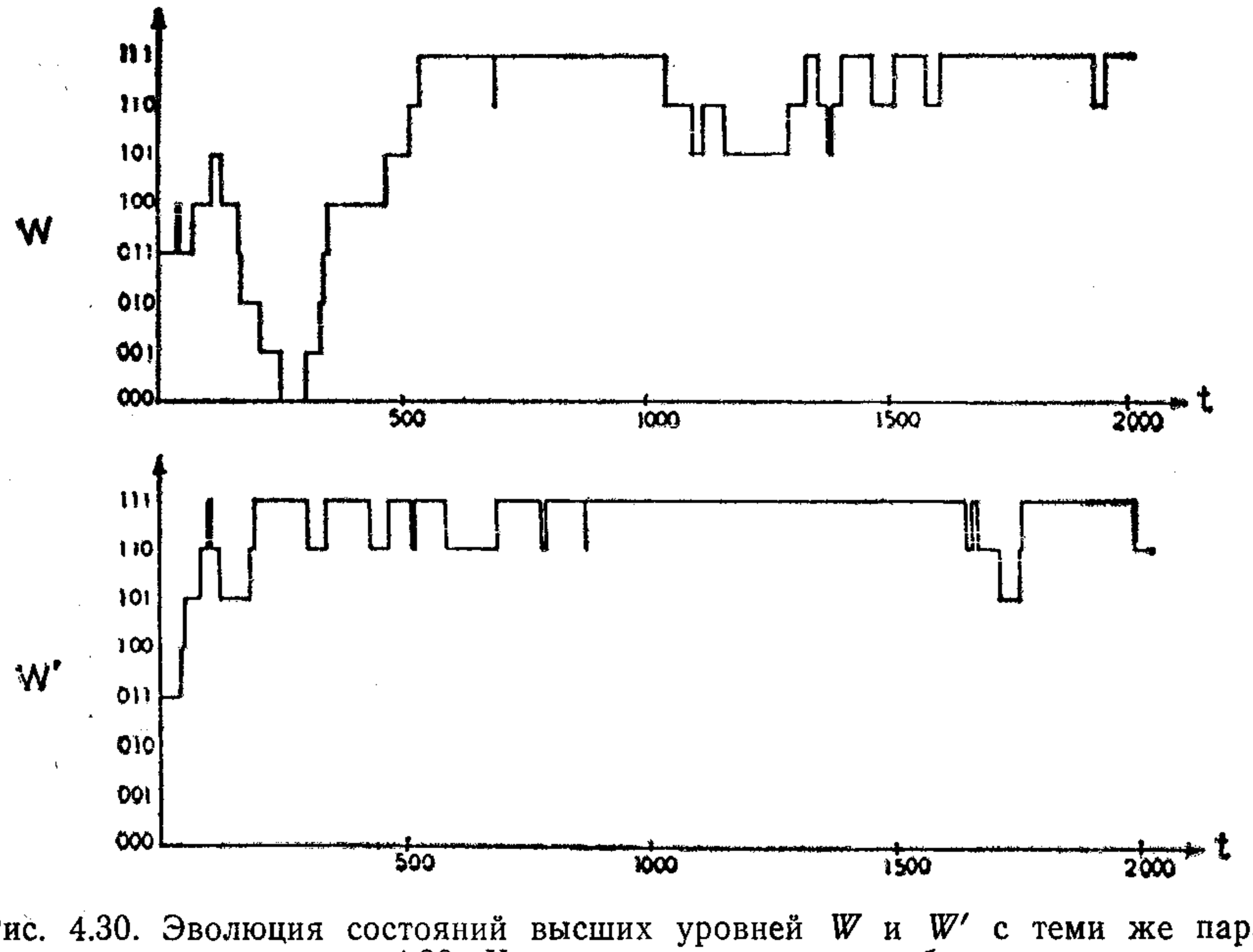


Рис. 4.30. Эволюция состояний высших уровней W и W' с теми же параметрами, что и на рис. 4.29. Кривая соответствует отображениям, представленным перестановками 74628135 для одного партнера и 87436125 для другого, которые порождают суммарную кривую минимального качества ($F = 0{,}19$) из 30 прогонов компьютера с случайно выбранными отображениями.

раметры геометрического распределения, которому подчиняются времена удержания:

1) для «восходящих» переходов $n = n_d = (1 + R_Q)/24$;
2) для «переходов» из состояния в то же самое состояние $n = n_0 = (1 + R_Q)/30$;

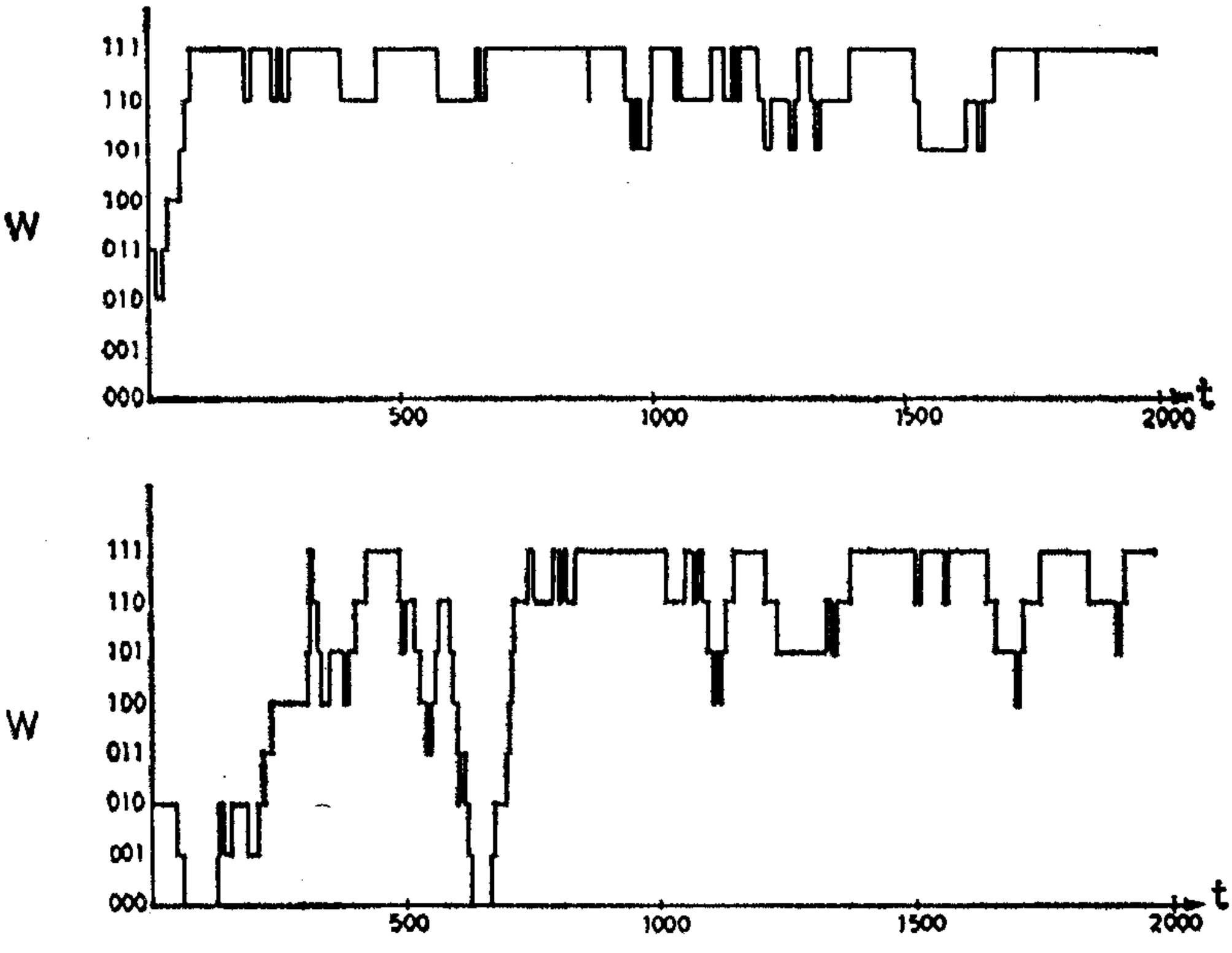


Рис. 4.31. Эволюция состояний высших уровней W и W' для случая, когда основные ритмы определяются выражениями $\alpha(t) = [(\alpha_{\text{макс}} + \alpha_{\text{мин}}) + (\alpha_{\text{макс}} - \alpha_{\text{мин}}) \cos(\omega t + \varphi)]/2$, $\beta(t) = [(\beta_{\text{макс}} + \beta_{\text{мин}}) + (\beta_{\text{макс}} - \beta_{\text{мин}}) \cos(\omega t + \varphi)]/2$ и $\gamma(t) = [(\gamma_{\text{макс}} + \gamma_{\text{мин}}) + (\gamma_{\text{макс}} - \gamma_{\text{мин}}) \cos(\omega t + \varphi)]/2$. Единицы измерения t произвольны. Значения параметров при моделировании на компьютере: $\alpha_{\text{макс}} = 0{,}9$; $\alpha_{\text{мин}} = 0{,}1$; $\beta_{\text{макс}} = 0{,}8$; $\beta_{\text{мин}} = 0{,}2$; $\gamma_{\text{макс}} = 0{,}7$; $\gamma_{\text{мин}} = 0{,}3$; $\alpha'_{\text{макс}} = 0{,}7$; $\alpha'_{\text{мин}} = 0{,}3$; $\beta'_{\text{макс}} = 0{,}8$; $\beta'_{\text{мин}} = 0{,}2$; $\gamma'_{\text{макс}} = 0{,}1$; $\omega = 50/\pi$. Параметры вероятностей перехода для высших уровней: $\pi_K = q_K = 0{,}2$; $c_K = d_K = 0{,}8$; $\pi'_K = q'_K = 0{,}3$; $c'_K = d'_K = 0{,}7$; $\lambda_K = \nu_K = \mu'_K = \nu'_K = \xi'_K = 2$ при $K = 1, 2, \ldots, 8$. Значения управляющих параметров: $\rho \in \{0{,}2;\ 0{,}8\}$, $\rho' \in \{0{,}1;\ 0{,}5\}$, φ и $\varphi' \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Кривая соответствует отображениям, представленным перестановками 86741253 для «левого» партнера и 65128374 для «правого», которые порождают суммарную кривую максимального качества ($F = 0{,}41$) из 30 прогонов компьютера с случайно выбранными отображениями.

3) для «нисходящих» переходов $n = n_\mu = (1 + R_Q)/36$.

При компьютерном воспроизведении времени удержания T, подчиняющегося геометрическому распределению с параметром n, мы выбираем

$$T = \left[-\frac{1}{n} \ln R\right] + 1, \tag{4.7.50}$$

где $[A]$ — целая часть величины A, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее A, а R — случайная величина, ряд A которой равномерно распределен на интервале $(0, 1)$.

На выходе программы получаем совместные добротности для 30 случайно выбранных отображений с соответствующими избыточностями на нижних уровнях для двух партнеров. Программа также выбирает два отображения (по одному для каждого партнера), порождающие наилучшую (субоптимальную) совместную добротность среди испробованных стратегий управления.

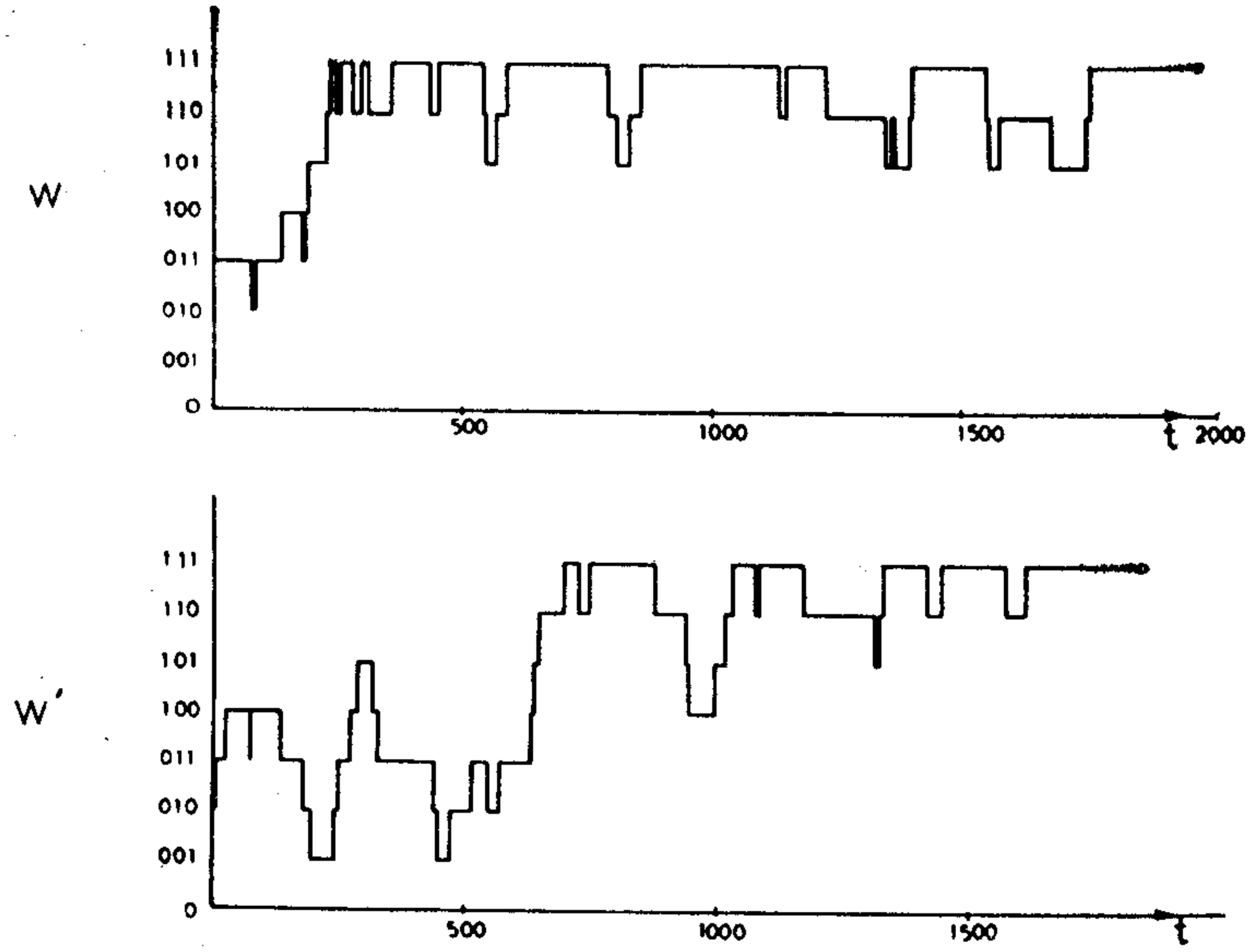


Рис. 4.32. Эволюция состояний высших уровней W и W' с теми же параметрами, что и на рис. 4.31. Кривая соответствует отображениям, представленным перестановками 12756348 для одного партнера и 51683427 для другого, которые порождают суммарную кривую минимального качества ($F = 9{,}23$) из 30 прогонов компьютера с случайно выбранными отображениями.

Для управления «наилучшей» пары гомеостатических состояний (т. е. пары состояний, для которых достигается максимум максимумов совместной добротности) мы пускали программу 16 раз, что соответствует 4×4 комбинациям выбранных гомеостатических состояний. На рис. 4.29 и 4.30 приведены для уровней W, W' переходы между состояниями как функции времени при экстремальных значениях (выбранных из $16 \times 30 = 480$ значений) совместной добротности. На рис. 4.31 и 4.32 представлены некоторые результаты для случая, когда между ритмами α, β, γ сохраняются постоянные фазовые соотношения.

4.7.6. Биологические аспекты нашей модели

Общение между людьми очень часто направлено на то, чтобы обнаружить (или скрыть) чей-то опыт [восприятие, когнитивная деятельность соответствуют уровни Q, Q'] с помощью сопутствующего поведения [сценическое действо, лицедейство соответствуют уровням W, W']. Этот процесс воплощается в временном ряде дискретных мод (состояний) на уровнях W, W'.

Таким образом, выбор оптимального *универсального* кода, устанавливающего корреляцию между опытом и поведением каждого партнера, имеет первостепенное значение: такой код позволил бы оптимизировать связь между двумя партнерами при ограничениях налагаемых особенностями конкретной ситуации. Чтобы найти такой код, необходимо либо пойти через исчерпывающий перебор всех возможных отображений $\{u, r\} \rightleftarrows \rightleftarrows \{\alpha, \beta, \gamma, p\}$, или найти эвристику [1], которая позволит априори исключить несовместимые с экспериментными данными или малообещающие отображения и сузить перебор до очень небольшого подмножества допустимых кодов.

Такая эвристика существует в настоящее время лишь в ограниченном числе случаев. Предположим (имея в виду биологические аспекты нашей модели), что уровни Q, Q' соответствуют динамике нуклеиновых кислот, в то время как уровни W, W' соответствуют динамике ферментов (белков). В этой связи уместно напомнить хорошо известное *взаимно однозначное* соответствие ген → белок и исключить все остальные отображения. Выбор такой эвристики для кодов, относящихся к верхним эвристическим уровням, позволяет в нашей задаче уменьшить число возможных отображений с 8^8 до 8! Однако последнее число все же настолько велико, что практически исключает полный перебор всех вариантов.

Один из возможных путей к нахождению эвристики, по-видимому, откроется перед нами при изучении нейрофизиологических механизмов, лежащих (у высших позвоночных) в основе смены мод (состояний) поведения. Килмер и Маккаллох [4.23] на основе психологических исследований Шайбельсов [4.24] о «чипсовой» модели ретикулярной формации выдвинули гипотезу, согласно которой ретикулярная формация у позвоночных может быть «материальным воплощением» функции выбора режима поведения и его реализации (по одной моде за один раз) из множества конкурирующих синхронных сигналов, поступающих в организм извне и изнутри. «Правила отбора», с помощью которых организм «входит» в один-единственный режим (одно

---

[1] Под «эвристикой» мы понимаем все, что позволяет исключить бесплодные варианты в процессе поиска, будь то метод, ограничение или руководящий принцип.

состояние) за один раз, по-видимому, зависит от «возбуждения» ретикулярной формации. Под возбуждением данной ткани (или «модуля») ретикулярной формации мы понимаем долю (в процентах) одновременно возбуждающихся (или деполяризованных ниже порога) нейронных элементов. Отметим, что эта степень электрической активности сопутствует метаболической активности охваченных возбуждением нейронов — в терминах производства и выделения гормонов и нейромедиаторов. (Так мы представляем себе взаимосвязь между возбуждением и параметрами игры α, β, γ, p в нашей модели.) Такая активность отчасти может быть обусловлена эндогенными причинами (т. е. перманентной имплантации кортизола и адреналина в соответствующие ткани в результате адренокортикальной или симпатической гиперактивности). Помимо спонтанных эндогенных причин возбуждение может возникать и в результате предыдущих *когнитивных оценок*, т. е. ряда кросс-корреляций между множеством поступающих в организм раздражителей и множеством («репертуаром») записанных заранее «в памяти» динамических режимов.

Каждый «модуль» ретикулярной формации представляет собой полуавтономную нейронную единицу, расположенную перпендикулярно восходящим-нисходящим линиям тока ретикулярной формации: гипотеза состоит в том, что такой модуль получает подавляющее большинство, если не все одновременно образующиеся кросс-корреляции («когнитивные оценки») между множеством действующих раздражителей (внешних и внутренних) и множеством имеющихся динамических режимов, но воспринимает их с различными весами, т. е. сопоставляет с ними различные степени возбуждения. Различные модели связаны между собой довольно слабо. Предполагается [4.23], однако, что для формирования «независимого мнения» относительно появления *нового* раздражителя каждый модуль должен на короткое время отключиться от остальных модулей до такой степени, которая позволила бы усилить значимость (т. е. кросс-корреляцию) принятого сигнала и степень, до которой нарушен предыдущий сигнал, согласовывавшийся с ранее выбранным режимом поведения.

По-видимому, с помощью свода пока еще не известных правил между различными модулями *быстро достигается согласие* относительно того, какую моду поведения надлежит выбрать и реализовать в данный момент времени. Считается, что предпочтение отдается моде, соответствующей когнитивной оценке (опыту), за которую проголосовали с «большим энтузиазмом» (т. е. выше некоторого порога) явное большинство модулей. Однако существуют определенные данные, свидетельствующие о том, что в отсутствие церебрального контекста активирующая

система ретикулярной формации не достигает согласованного решения. Например, как показывает работа Верцеано [4.19], скорость обработки информации в коре головного мозга (обычно происходящая с частотой 10 Гц — основной частотой таламокортикального ритмоводителя) можно модулировать в широком диапазоне степенью возбуждения восходящей ветви активирующей системы ретикулярной формации.

Поэтому мы можем рассматривать (см. разд. 4.7.2) эти два динамических агента (активирующую систему ретикулярной формации и таламокортикальный ритмоводитель) как вовлеченные в антагонистический процесс (игру), в которой медиаторами служат мгновенные концентрации таких ключевых веществ, как нейромедиаторов и гормонов. Исход этой игры определяет статистику мод (состояний) опыта систем [уровни Q, Q'] и коррелированным образом мод (состояний) поведения систем [уровни W, W'].

Остается неизвестным, каким из такой системы, включающей в себя в качестве *интенсивного фактора* степень возбуждения ретикулярной формации, можно вывести оптимальные коды, о существовании которых мы можем строить те или иные предположения на основе эвристики. Понадобится провести много новых экспериментов по нейрофизиологии ретикулярной формации и таламокортикальной нейродинамики прежде, чем некоторые взаимно однозначные отображения $Q \rightleftarrows W$ удастся исключить как несовместимые с экспериментальными данными.

Завершая этот пример, скажем, что мы стремились построить правдоподобную модель некоторых аспектов связи в человеческом организме. Ключевой вопрос, который так и остался без ответа, связан с эвристикой выбора правила управления между *поведением* и *опытом*, которые позволили бы достичь наилучшего компромисса во внутреннем конфликте между самосохранением («гомеостазом») и *трансценденцией* (через обучение тому, как лучше всего моделировать партнера).

4.8. Возникновение новых иерархических уровней в самоорганизующейся системе

Этот раздел можно читать независимо от предыдущего.

Наконец, мы попытаемся обрисовать в общих чертах условия, при которых развивающаяся самоорганизующаяся система может увеличить число своих иерархических уровней. После общей постановки задачи мы сосредоточим внимание на частном вопросе возникновения *нового* более высокого когнитивного уровня функционирования через когерентные взаимодействия ранее некооперативных компонент (церебральные ткани у высших организмов). В заключение мы изложим некоторые умо-

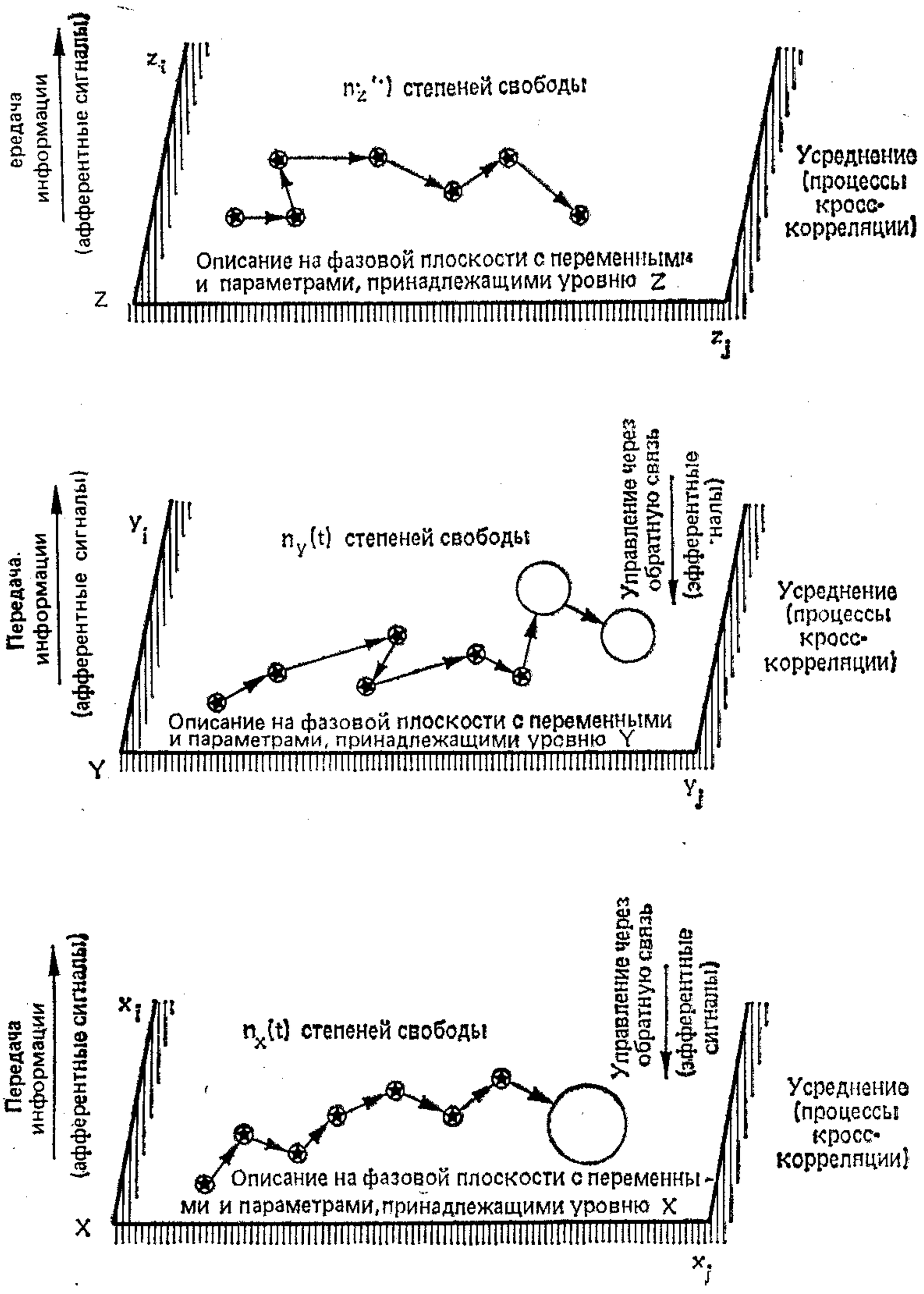


Рис. 4.33. Последовательные иерархические уровни X, Y, Z самоорганизующейся системы. Отдельные уровни коррелируют между собой. На каждом уровне z_j происходит множество процессов усреднения между сигналами, поступающими от более низкого уровня (y_j) и флуктуациями окружающей среды (w_{ij}). Перенос сигналов при «передаче информации» и «управлении через обратную связь» осуществляется на нейронном уровне, например посредством импульсов, состоящих из последовательностей потенциалов действий и/или выделений гормонов и нейротрансмиттеров, в то время как процесс «хранения и интеграции» осуществляется посредством постсинаптических подпороговых мембранных потенциалов, кросс-коррелированных с вход-

зрительные замечания относительно возможного исхода динамического *конфликта*, вызванного неадекватной связью, между двумя иерархическими уровнями организма. Последние замечания призваны проложить путь к общему анализу конфликта, который (в терминах теории игр) проводится в гл. 5.

4.8.1. Постановка задачи

Любая самоорганизующаяся система представляет собой иерархическую структуру (рис. 4.33). Графически такую систему можно изобразить в виде «перевернутого дерева» с ветвями, отходящими в стороны при спуске на каждый шаг. Для простоты мы показали на рис. 4.33 одну ветвь. Вся информация, поступающая на данный иерархический уровень по этой ветви и по другим ветвям с более чем одного нижнего «яруса», суммируется.

Система как целое одновременно проявляет самую различную активность, различные группы активности требуют различных типов описания (т. е. различных наборов переменных и параметров). На каком иерархическом уровне мы находимся, зависит от того, какой аспект поведения системы нас интересует, а это в свою очередь зависит от способа нашего взаимодействия с системой.

Но что *физически* точно определяет иерархический уровень и чем один иерархический уровень отличается от другого? Прежде чем продвигаться дальше, полезно попытаться найти ответ на эти два важных вопроса.

Иерархический уровень определяется числом, расположением и природой (т. е. структурой и сложностью), а также степенью когерентного кооперативного поведения функционально подобных (хотя анатомически, возможно, совершенно различных) «элементов» рассматриваемой системы (или «тканей» в случае живого организма). Под «функционально подобными» элементами мы понимаем совокупность элементов, которые для успешного выполнения данной задачи или успешной активности должны кооперироваться.

Например, в случае дыхания цель состоит в снабжении кислородом альвеол легких и в диффузии кислорода через стенки

ным множеством триггеров через синаптическую нейропередачу. Любой данный иерархический уровень может быть «распознан» только более высоким уровнем. Например, $z_i = z_{0_i} + \sum_j \left\langle \alpha_{ij}(t)\, w_{ij}^K(t)\, y_j^{\xi(t)}(t-\tau) \right\rangle$, где z_{0_i} означает самоподдерживающуюся активность на иерархическом уровне z, а $\alpha_{ij}(t)$ — коэффициенты связи. Большими кружками обозначены возможные периодические траектории (предельные циклы).

альвеол в кровь. Для достижения этой цели требуется сложный мышечный аппарат, включающий диафрагму и межреберные мышцы, способные расширять и сжимать грудную клетку, а также сложные системы нервных структур в стволе мозга и высших центрах. Ясно, что совокупность перечисленных выше функций охватывает многочисленные компоненты, принадлежащие к различным разделам секреторного, моторного и нервного аппарата.

В мозге все «высшие» процессы, такие, как восприятие, речь, письмо, чтение и ощущение, не могут рассматриваться как изолированные друг от друга или неделимые «способности», являющиеся прямыми функциями ограниченной группы клеток или строго локализованные в какой-то конкретной области мозга. Вместо локализованных областей мы имеем дело скорее с несколькими каналами передачи информации (афферентные пути), управлением через обратную связь (эфферентные пути) и процессами хранения информации и ее интеграции. Таким образом, «интеллектуальные» функции мы рассматриваем как сложные функциональные системы, организованные в когерентно работающие зоны, каждая из которых может принадлежать совершенно различным и часто удаленным друг от друга на достаточно большое расстояние областям мозга. Такие группы определяют иерархический уровень, выполняющий каждый раз соответствующую функцию.

В рамках макроскопического описания активность каждой работающей зоны описывается ограниченным числом динамических переменных, обычно координируемых процессами нелинейной обратной связью.

Высшие иерархические уровни характеризуются возрастающей долей участия церебральных тканей восходящего порядка и увеличивающейся сложности (от ствола мозга через ретикулярную формацию к коре головного мозга). Последние уровни получили название «когнитивных», и большинство из них в отличие от более низких, «соматических», уровней формируются и разрушаются не только в ходе эволюции, но также и в процессе обучения, происходящем за ограниченное время жизни отдельного организма. Тем не менее следует иметь в виду, что материальная «основа» всех этих высших когнитивных уровней одинакова, а именно нейроны. Один когнитивный уровень отличается от другого числом, расположением и комбинацией, или схемой связи, кооперирующих тканей.

На каждом иерархическом уровне мы вводим теперь описание в терминах пространства состояний. Это описание включает в себя тип и число динамических переменных и параметров, а также получающиеся в результате тип и число состояний, соответствующие данному уровню. Движение и поведение системы

в этом фазовом пространстве на фиксированном иерархическом уровне (например, последовательные переходы из одного стационарного состояния в другое, «время покоя» или свойства устойчивости каждого состояния, а также время пролета между последовательными стационарными состояниями) по существу зависят от возмущаемых параметров системы, которые приводят к серии переходов, связанных с ветвлением, или бифуркацией, решения эволюционного уравнения. Такие возмущения являются результатом совместного влияния (а) передачи информации (афферентных сигналов), поступающей с ближайшего уровня снизу, (б) информации, поступающей от внешней среды (через периферическую нервную систему), и (в) управление через обратную связь (эфферентные сигналы), осуществляемое с помощью сигналов, которые поступают с ближайшего уровня сверху.

Эти критические изменения приводят к тому, что устойчивое состояние сравнения (или несколько таких состояний), бывшее ранее устойчивым, становится неустойчивым. Система на рассматриваемом уровне (например, на уровне Z) должна перейти в другое стационарное состояние (или приспособиться к нему), задаваемое той же системой связанных между собой нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих систему на уровне Z с новыми граничными условиями (например, с новыми значениями управляющих параметров). При некоторых условиях новое состояние может обнаружить бóльшую или меньшую степень когерентности, чем предыдущее.

В любом случае неизменность системы на *конкретном* уровне Z при этих взаимодействиях обеспечивается «тождественностью самим себе» переменных и основных характеристик получающихся состояний: система на уровне Z переходит от одного стационарного состояния к другому, нарушая и синтезируя заново множество упорядоченных соотношений между динамическими переменными (например, нелинейными осцилляторами), природа которых не изменяется при указанных переходах.

В качестве примера рассмотрим однородную смесь n химически реагирующих веществ с концентрациями z_i. Однородная смесь может находиться во многих однородных стационарных состояниях в зависимости от числа возможных устойчивых комбинаций концентраций z_i. Все эти состояния принадлежат одному и тому же иерархическому уровню. Предположим теперь, что внешнее возмущение порождает какую-то бифуркацию, в результате которой система переходит в неоднородное, т. е. концентрации $z_i(r)$ некоторых компонент становятся функциями пространственных переменных. Новое состояние не принадлежит предыдущему иерархическому уровню Z; наша

система перешла на другой уровень, на котором ее природа существенно отличается от ее природы на уровне Z (например, в системе могут возникнуть новые дальние корреляции между рассматриваемыми корреляциями).

Такие переходы *с нарушением симметрии*, как впервые заметил Тьюринг [4.25], могут быть вызваны диффузией. Николис и Пригожин [4.26] доказали общий характер этого типа явлений в нелинейных сильно неравновесных системах и ввели для описания этих новых иерархических уровней термин *диссипативные структуры*. Биологические следствия таких переходов ныне общепризнанны. (Дополнительный подход см. в работе [4.27].)

В этом разделе мы намереваемся предложить общую формулировку возникновения новых иерархических уровней в сложной системе. С совершенно общих позиций мы будем рассматривать каждую иерархическую платформу как динамический элемент, где происходит «хранение и интегрирование» информации. Поскольку для нас основной интерес представляет активность нервной системы, мы будем описывать хранение и интегрирование информации с помощью кросс-корреляции. Это означает, что сигналы $x_\lambda(t)$, передаваемые последовательно с нижнего уровня (каждый сигнал соответствует некоторому состоянию системы на уровне, например, x; см. рис. 4.33), и сигналы $\omega_\lambda(t)$, приходящие из внешней среды, усредняются (например, по времени) после поступления на «принимающей платформе» Y (например, на определенном скоплении постсинаптических пластинок в коре головного мозга). В результате этого некоторые из переменных x_λ полностью «вымываются» на верхнем уровне, в то время как другие оказываются кросс-коррелированными, или спаренными,

$$\langle x_\lambda^\nu(t)\, \omega_\lambda^\rho(t+\tau)\rangle, \quad 0<\tau<T, \tag{4.8.1}$$

где T — временной интервал передачи либо с нижнего уровня X, либо из внешней среды. Следовательно, между событиями, происходящими одновременно на различных иерархических уровнях, имеется скорее корреляционное, чем причинное соответствие.

Необходимо особо подчеркнуть, что принятое нами здесь описание глобально в том смысле, что входящие в анализ динамические переменные x_λ, ω_λ являются величинами, усредненными по большому числу физико-химических конфигураций элементарных единиц, образующих систему. Такие глобальные описания необходимы при подходе к таким сложным системам, как центральная нервная система.

4.8.2. Рождение нового иерархического уровня

Как было отмечено в предыдущем разделе, на текущем иерархическом уровне система может эволюционировать во времени, переходя с одного стационарного состояния в другое через последовательность бифуркаций, не изменяющих природу входящих в описание динамических переменных. С другой стороны, при движении не вдоль, а *поперек* данного уровня (т. е. при переходе с одного иерархического уровня на следующий, более высокий) необходима операция кросс-корреляции типа той, которая была описана в предыдущем разделе. На первый взгляд эти две процедуры кажутся совершенно различными. Однако можно мысленно представить некую обобщенную схему бифуркаций, *заключенную в динамике систем*, которая могла бы содержать стохастический оператор, ответственный за возникновение кросс-корреляций между каким-то коллективным свойством на текущем уровне X и каким-то процессом, описывающим флуктуирующую окружающую среду. Такой оператор должен оставаться скрытым, или «замаскированным», пока система находится на уровне X, и проявляться, как только становится неизбежной бифуркация, приводящая к изменению природы переменных, подобно тому, как диффузия проявляется в бифуркации, связанной с нарушением симметрии, которая приводит к неоднородному стационарному состоянию.

При каких ограничениях, налагаемых окружающей средой, могла бы происходить такая бифуркация? В настоящем контексте при подходящих флуктуациях окружающей среды с дисперсией, превышающей некоторый порог, флуктуации могли бы внести сильные возмущения в систему на уровне X.

Оказавшись перед перспективой необратимой дезорганизации на уровне X, система может воспользоваться альтернативой, т. е. «активировать» оператор кросс-корреляции или изменить переменные и перейти на более высокий уровень Y, находясь на котором и посылая вниз эфферентные управляющие команды, она может в известной мере ограничить амплитуду флуктуаций на уровне X, не давая последней достичь опасного порога.

Коль скоро стабилизация на уровне X обеспечена, система может выйти из новых состояний, а уровень Y — перестать существовать; однако для организма предпочтительнее «сохранять» новый уровень как можно дольше, сначала как действенный фактор, предотвращающий повторение аналогичных возмущений, а затем как функциональный элемент («программного обеспечения») более сложного «я». (Последнюю фразу следует понимать только как метафору.)

Чтобы моделировать систему на «возмущенном» уровне X, мы примем описание, в рамках которого внутренняя динамика системы на этом уровне выражается подходящими нелинейными «скоростями» $f_i(x_j, t)$, заменяющими все возможные связи между соответствующими переменными. Можно предположить, что помимо явлений, возникающих под действием этих связей, коллективное поведение нового рода может устанавливаться с помощью «процедуры взвешивания», описываемой стохастическим оператором следующим образом: отдельные динамические переменные x_i берутся с весами, задаваемыми стохастической матрице флуктуаций окружающей среды $w_{ij}(t)$. Эта операция через обратную связь оказывает влияние на эволюцию переменных x_i и накладывает на динамику на уровне X ограничения, явно отражающие свойства окружающей среды. Существование многочисленных путей обратной связи между неокортикальным и лимбическим уровнями подкрепляет изложенную точку зрения [4.28], делая ее более правдоподобной.

Теперь мы можем записать систему связанных нелинейных интегродифференциальных уравнений для макроскопических динамических переменных x_i, которые в отсутствие пространственной дифференциации ($\nabla^2 x_i = 0$) имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j,\ t) + w_i(t) + \sum_{j=1}^{K} \int_0^t x_j(t')\, w_{ij}(t' + \tau)\, dt', \quad (4.8.2)$$

где $w_i(t)$ означает флуктуации, индуцированные окружающей средой, а третий член в правой части описывает влияние оператора кросс-корреляции на иерархический уровень X. Для простоты предполагается, что взвешивание, производимое этим оператором, приводит к установлению линейной зависимости между x_j, хотя в самом общем случае это отнюдь не обязательно. Ясно, что для зашумленной окружающей среды, моделируемой как случайный процесс с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением, равным σ, этот член равен нулю, когда концентрация x_i постоянна (стационарные состояния на уровне X) или колеблется со случайной фазой либо когда (при достаточно большом k) k осцилляторов некоррелированы (или совершают колебания с иррациональными частотами ω_k).

На языке динамики «оператор кросс-корреляции» можно представить себе как проявление действия некоторого «основного жесткого нелинейного осциллятора» (ОЖНО), потенциально существующего на уровне X с двумя устойчивыми состояниями: стационарным состоянием «покоя» (когда осциллятор не функционирует) и одним предельным циклом (когда осциллятор «включен»). Такой ОЖНО под действием (со стороны окружающей среды) белого шума $w(t)$ с нулевым средним

и плотностью спектральной мощности σ [Вт/Гц] можно представить, например, в виде «жесткого» релаксационного генератора Ван дер Поля

$$\ddot{x} - 2\varepsilon(1 - 4\alpha x^2 + 8\beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = w(t). \qquad (4.8.3)$$

В работе [4.11] (там же приведены остальные ссылки; см. также приложение А) было показано, что отношение (среднего) времени, в течение которого такой генератор пребывает в невозбужденном состоянии, к среднему времени, в течение которого он пребывает в возбужденном состоянии, равно величине

$$p \sim \frac{(\alpha^2 - 4\beta)^{1/4}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sqrt{\sigma}\, e^{c/\sigma}, \qquad (4.8.4)$$

где

$$c = \frac{\varepsilon}{12\beta}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})\left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{4\beta}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})\right]. \qquad (4.8.5)$$

Если α, β — величины одного порядка (сильная «жесткая» нелинейность), то либо $c > 0$, либо $c < 0$.

Как показывает полученный результат, при заданных параметрах α, β и ε справедлива оценка $p \sim \sqrt{\sigma}\exp(\pm c/\sigma)$. При $p \sim \sqrt{\sigma}\exp(c/\sigma)$ величина p сначала убывает при увеличении σ, проходит через минимум, а затем возрастает. При $p \sim \sqrt{\sigma}\exp(-|c|/\sigma)$ величина p монотонно возрастает вместе с σ. В первом случае мы всегда можем определить «благоприятный» набор параметров α, β, ε так, что $c > 0$, и при данном (умеренном) уровне флуктуаций σ в окружающей среде справедливо неравенство $p \ll 1$. Это означает, что генератор практически достоверно (т. е. с вероятностью единица) возбуждается всякий раз, когда среднеквадратичное отклонение флуктуаций окружающей среды превышает σ. Такой (вероятностно) возбуждаемый ОЖНО затем выходит на предельный цикл с основной частотой ω_0 и значительной амплитудой.

При каких условиях описанный выше жесткий генератор может влиять на поведение системы? Предположим, что первоначально некоторые переменные в уравнении (4.8.2) возбуждены и совершают почти синхронные колебания. Тогда возможно, что ОЖНО вызовет дальнейший захват частоты среди каких-то k колеблющихся компонент на уровне X, в силу чего

$$x_i \sim A_i(t)\cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)]. \qquad (4.8.6)$$

Отдельные члены группы генераторов с захваченными частотами могут затем входить в соотношение захвата частоты с спектральными компонентами случайного фазового вектора $\omega_i(t)$

окружающей среды и образовать набор упорядоченных соотношений

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i < \omega_0 \tau. \tag{4.8.7}$$

При постулированной выше динамике мы окончательно получаем набор ненулевых членов

$$\int_0^t x_j(t')\, w_{ij}(t' + \tau)\, dt' \tag{4.8.8}$$

(из-за когерентности фаз) и ненулевую сумму

$$\sum_{j=1}^{k} \int_0^t x_j(t')\, w_{ij}(t' + d\tau)\, dt' \tag{4.8.9}$$

(из-за захвата частоты).

Иначе говоря, «активация» корреляционного оператора, входящего в (4.8.2), имеет много общего с «включением» оператора диффузии в случае, когда начальное условие соответствует неоднородному распределению материи. Следовательно, по крайней мере в принципе мы легко можем составить наглядное представление о бифуркации, вызываемой последним членом в правой части уравнения (4.8.2). Величину

$$\int_0^t x_j(t')\, w_{ij}(t' + \tau)\, dt' \sim y_j \tag{4.8.10}$$

можно рассматривать как переменную, соответствующую новому иерархическому уровню Y. Член $\sum_{j=1}^{k} y_j$ выражает тогда полную величину эфферентного управления через обратную связь уровнем X со стороны уровня Y. При

$$\sum_{j=1}^{k} y_j < 0 \tag{4.8.11}$$

мы получаем отрицательную обратную связь, т. е. тенденцию к ограничению чрезмерно больших флуктуаций на уровне X.

Чтобы подтвердить эти предположения, необходимо установить по крайней мере на простых моделях существование бифуркаций в системе, описываемой стохастическим уравнением (4.8.2). Иначе говоря, необходимо оценить в таких случаях функции плотности вероятности для действительных частей $\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\}$ собственных значений оператора кросс-корреляции и установить, при каких условиях неравенство $\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\} > 0$ может выполняться хотя бы при одном i с вероятностью, заметно отлич-

ной от нуля. Мы не будем пытаться здесь решать эту чрезвычайно сложную математическую задачу.

Число когнитивных уровней, которое может построить человек, по существу равно числу абстракций, которое он способен придумать; в принципе никакого «потолка» здесь не существует. Интересно отметить, что эта символическая иерархия к тому же, по-видимому, бездонна. Можно было бы думать об априори существующем «самом низком» (де-факто не сводимом к другим) иерархическом уровне, представляющем совокупность аксиом, одновременно и полную, и непротиворечивую. Теорема Гёделя доказывает, что такой системы аксиом не существует.

Еще более пагубно сказывается на такого рода представлениях и надеждах то, что иерархическая пирамида как бы складывается и «кусает себя за хвост»: ее верхний уровень смыкается с ее нижним уровнем. Действительно, уровень так называемых «элементарных частиц» представляет собой весьма сложный концептуальный артефакт. Чтобы «вычленить» элементарную частицу, необходим человеческий разум, который в свою очередь возникает в ходе эволюции как побочный продукт взаимодействующих частиц, зависящих от первичных («пра»-)начальных и граничных условий. Такая «зигзагообразная» схема чревата множеством парадоксов типа «ссылки на себя», действительных или мнимых. Например, некий разум может мыслить себя как объект собственных размышлений. Мы приходим при этом к некоему образу, содержащему самого себя, причем «внутренний» образ в свою очередь содержит самого себя и т. д., образуя бесконечную, не сходящую последовательность. Динамический подход к затронутой проблеме намечен в гл. 6.

4.8.3. Замечание по поводу типичных случаев «психосоматических расстройств»

Два иерархических уровня в организме находятся «в конфликте», если между ними не существует адекватной связи [1]. Так происходит, когда спариваются афферентные и/или эффе-рентные пути, по которым информация поступает «наверх», а управляющие команды обратной связи «вниз». Одной из причин такого конфликта может быть сильный шум (т. е. неограниченные флуктуации), возникающие в промежутке между рассматриваемыми иерархическими уровнями.

Конфликт (отсутствие адекватной связи) между *неокортикальным* иерархическим уровнем и нижним уровнем, относящимся к *периферийной, или лимбической, системе, может*

---

[1] Интересный случай, когда такой конфликт остается в силе даже при наличии идеальной связи, будет рассмотрен в гл. 5 и 6; он имеет непосредственное отношение к парадоксальным играм и к парадоксу «ссылки на себя».

возникнуть вследствие распространения сильного эфферентного (по цепи обратной связи) возмущения, приводящего к явному расстройству какого-то органа тела или к нарушению, вообще говоря, гомеостатической соматической активности (например, вследствие дисбаланса парасимпатической — симпатической нервной системы). В ряде случаев такой конфликт обусловлен еще не сформировавшимся («незрелым») кортикальным уровнем, не способным должным образом ограничивать лимбические афферентные сигналы. Такого рода «инфантилизм» может быть исправлен, если система с помощью адекватного окружения образует новый когнитивный иерархический уровень. Столь необходимый для координированной эволюции организма динамический баланс между *разнообразием* сигналов и надежностью функционирования системы может быть достигнут с помощью отрицательных управляющих сигналов, подаваемых по каналу обратной связи с этого нового уровня.

Наконец, мы хотим предложить возможный биологический механизм создания нового иерархического уровня через обучение. Это может быть достигнуто путем активирования нейронного генома, например с помощью массированных выбросов нейромедиатора, модулирующих флуктуации потенциала постсинаптической мембраны и тем самым создающих случайные нарушения ионного равновесия, которые в свою очередь могут воздействовать на ядро и возбуждать «безмолвствующие» гены [4.11]. В результате образуются новые типы белков (и как следствие — оболочка постсинаптических дендритов), связанных с определенными точками мембраны, причем образуются одновременно у большого числа тканей мозга.

Новые постсинаптические принимающие места для отдельных разновидностей нейромедиаторов оказываются случайно распределенными. Такие «рецепторные места» высокоспециализированы для приема молекул соответствующих нейромедиаторов в совершенно определенных конфигурациях «замок — ключ». В силу этого новые взаимодействия между нейромедиаторами и рецепторами могут эффективно «запускать» систематические изменения в флуктуациях активных транспортных токов через нейронные мембраны. Эти токи возникают вследствие кросс-корреляций, создаваемых нейронными мембранами между флуктуациями потенциалов X постсинаптических мембран, соответствующих новому покрытию мембраны, и флуктуациями проницаемости мембран, соответствующих потоку W нейромедиаторов.

Так возникает связь между ранее некоррелированными или несуществовавшими динамическими переменными. Взаимодействуя между собой, новые переменные могут образовать новый иерархический уровень. (Подробнее см. также приложение 4.)

5

Элементы теории игр с приложениями

Взаимное стимулирование двух иерархических систем (в интересующем нас случае — двух биологических организмов) редко происходит непосредственно. Обычно интересы двух партнеров антагонистичны (каждый стремится успешно стимулировать другого, т. е. *предсказывать* поведение оппонента и в конечном счете *управлять* им и в то же время противопоставлять оппоненту свое случайное поведение, не позволяющее строить никаких прогнозов), что заставляет их вести *игру*.

Под игрой мы понимаем в данном случае алгоритм принятия решений в условиях *конфликта* и *неопределенности* (неопределенности относительно мотивов и ходов партнера). Каждый из двух игроков стремится при заданных ограничениях максимизировать свою «прибыль» и/или минимизировать свои «потери». В этой главе мы намереваемся (с одним исключением) описать и сформулировать на языке динамики теорию игр для *двух* лиц. Это означает, что математическое описание строится на основе двух связанных линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При переходе к описанию в терминах пространства состояний это означает, что пространство состояний должно быть двумерным. Нас будет интересовать форма интегральных кривых и характер особых точек (если такие существуют) при «реалистических» предположениях, а также, каким образом *бифуркации* могут приводить не только к *эволюции*, но и к резким *качественным изменениям* и в конечном счете к *разрешению* конфликта. Переменными в наших уравнениях будут вероятности сохранить данное направление продвижения или стратегию.

После описания абстрактных моделей мы перейдем к некоторым приложениям: *конфликтам в мире живого*, *конфликтам в производственной сфере* и аналогичным ситуациям на высоком уровне.

Весьма большой интерес представляют также некоторые примеры из эпидемиологии, где возникает антагонизм по поводу того, кто кого *первым* заразит, и весьма поучительно, как эволюционирует во времени динамика взаимодействующих групп «хозяин — паразит». Циркуляция и распространение слухов, будь

то политическая пропаганда, религиозные догмы или просто реклама, представляет собой не что иное, как весьма интересный частный случай «эпидемиологии», который мы рассмотрим в стохастических терминах, хотя и на эвристическом уровне, оставляя в стороне строгую формулировку основного уравнения для многочастичной функции распределения, описывающей вероятность распространения информации через парные взаимодействия данного числа индивидов в определенное время. Теория распространения слухов также относится к компетенции теории игр, поскольку одни индивиды сопротивляются принятию информации и отказываются передавать ее дальше, тогда как другие индивиды (конформисты) легче поддаются обработке и как бы становятся переносчиками «информации».

Ниже мы приводим классификацию и описание каждой категории абстрактных игр, начиная с игр с постоянной суммой.

5.1. Игры с постоянной суммой

В игре с постоянной суммой сумма элементов («платежей») матрицы платежей 2×2 (рис. 5.1) одна и та же для всех комбинаций стратегий. Мы предполагаем здесь, что каждый игрок имеет в своем репертуаре только два хода (A_1, B_1), (A_2, B_2) и что «платежи» — это условные числа, символически представляющие выигрыши или вознаграждения (положительным платежи), проигрыши или штрафы (отрицательные платежи).

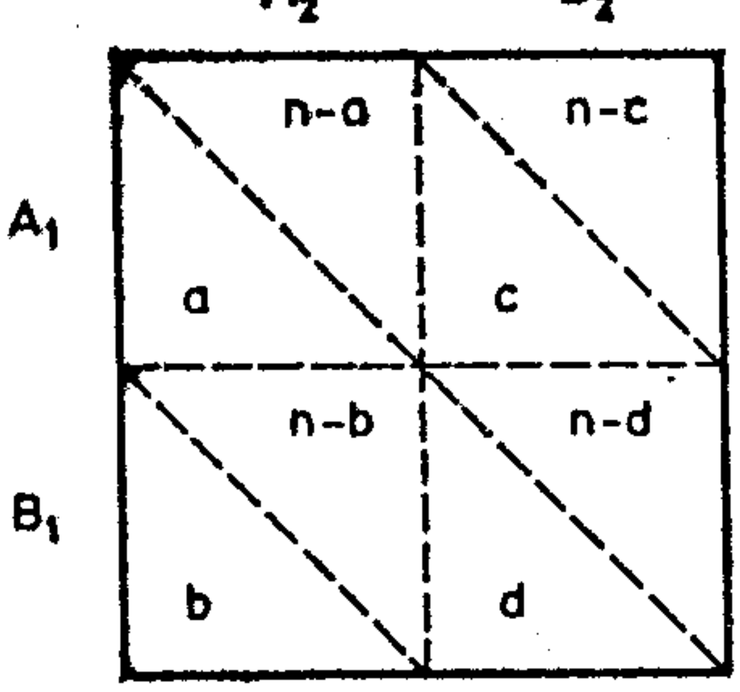


Рис. 5.1. Матрица 2×2 игры с постоянной суммой. Величины в левой нижней и правой верхней половинах каждого квадрата указывают размеры платежей I и II участников.

Под решением игры вообще и игры с постоянной суммой, в частности, мы понимаем (устойчивое) распределение платежей (или средних платежей), возникающее при «рациональном выборе» ходов участниками игры: ни один из игроков не может добиться большего выигрыша, *если* его противник придерживается рациональной стратегии. В свою очередь рациональными стратегиями мы называем такие, которые позволяют максимизировать платежи (или средние платежи) игрока, если тот знает, что его противник стремится сделать то же самое. (В интересующем нас случае платеж считается положительным или отрицательным независимо от того, достигается ли *сжимаемость* кода противника. В этом отношении каждой игре между равными присущ некоторый элемент бесцельности.)

В теории игр с постоянной суммой доказывается теорема, которая по существу означает, что для участников игры существует некая оптимальная пара стратегий. (В играх с непостоянной суммой мы этого просто не знаем: такие игры, как будет показано ниже, требуют умения вести переговоры, так как найти оптимальные стратегии, ведущие к устойчивому равновесию, оказывается невозможным.) В теории игр с постоянной суммой необходимо различать четыре случая.

5.1.1. У обоих игроков имеется доминирующая стратегия

Доминирующей называется такая стратегия, которая обеспечивает игроку максимально возможный выигрыш независимо от того, что делает его противник. В наших обозначениях это можно было бы продемонстрировать на примере игры с матрицей платежей, элементы которой удовлетворяют неравенствам $a > b$, $c > d$, $a < c$, $b < d$. Ясно, что в этих условиях рационально действующий игрок I выберет ход A_1, а рациональный игрок II — ход A_2. Соответственно выигрыш составил бы a для игрока I и $n - a$ для игрока II.

5.1.2. Доминирующая стратегия имеется только у одного игрока

Этот случай реализуется, когда $a > b$, $c > d$, $a > c$, $d > b$. Игрок I выбирает ход A_1; игрок II, *зная это*, выбирает ход B_2, так как $n - c > n - a$. Выигрыши игроков соответственно равны c и $n - c$.

5.1.3. Доминирующей стратегии нет ни у одного из игроков

Тем не менее мы можем все еще оставаться в режиме «чистых», или «детерминированных», стратегий (т. е. принять, что игра может быть решена *одним* ходом), допуская в качестве возможных состояния равновесия типа «седловых точек». Чтобы пояснить суть дела, приведем два примера. Рассмотрим сначала матрицу 2×3, изображенную на рис. 5.2, где каждый игрок имеет в своем распоряжении по три хода. (Так как $n = 0$, игра с постоянной суммой превращается в данном случае в игру с нулевой суммой.) Доминирующей стратегии нет ни у одного из игроков, т. е. ни один из игроков не может выбрать ход независимо от того, какой ход намерен сделать его противник.

В приведенном выше примере выгодная тактика для каждого игрока состоит в том, чтобы попытаться *минимизировать максимум своих проигрышей*. Например, игрок I может рассуждать следующим образом: «Если я сделаю ход A_1, то худший

для меня исход возникнет при условии, что мой противник выберет ход B_3 (мой «выигрыш» составит тогда — 20). Если же я сделаю ход A_2, то мой «выигрыш» в худшем случае составит — 1, а если я выберу ход A_3, то — 4». Поэтому игрок I делает ход A_2. Игрок II рассуждает аналогично: «Если я выберу ход B_1, то мой выигрыш будет не меньше 1. Если я сделаю ход B_2, то выиграю не меньше — 18, а если выберу ход B_3, то не меньше — 15». Из осторожности игрок I выбирает ход A_2, игрок II — ход B_1, и они «встречаются» в квадрате (—1, 1), т. е. в седловой

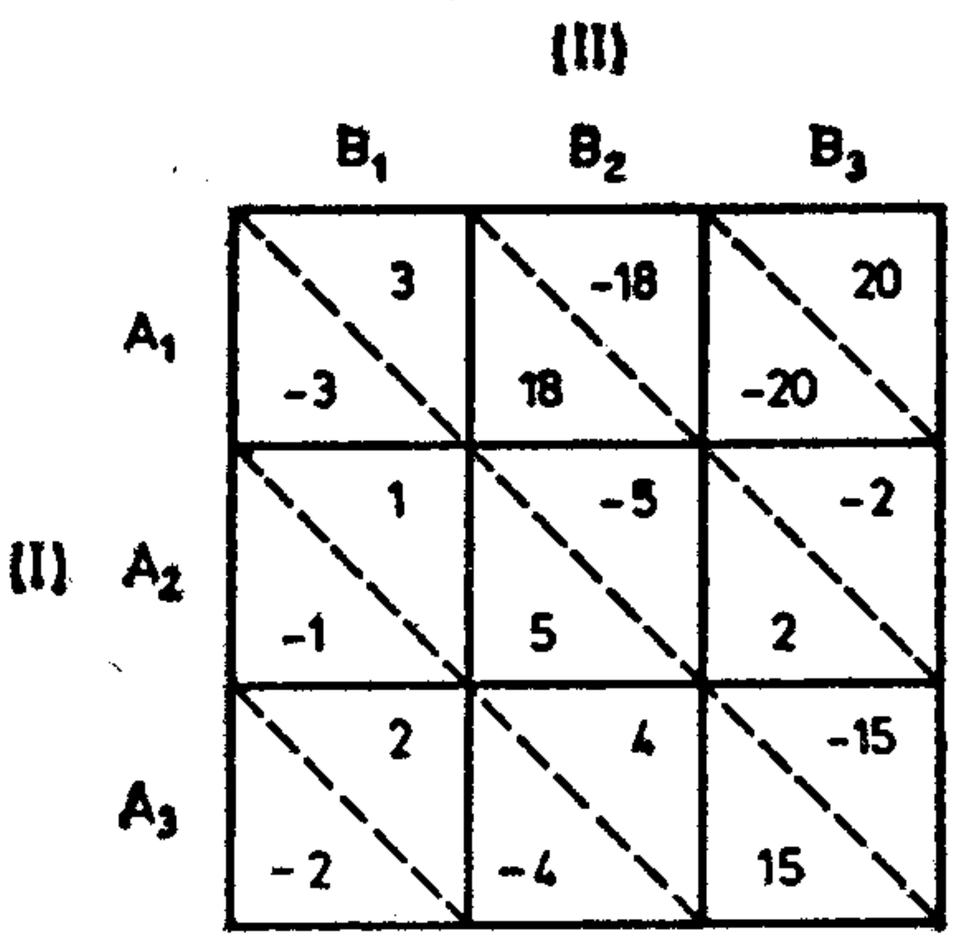


Рис. 5.2. Матрица 2 × 3 (2 игрока × × 3 хода) игры с нулевой суммой.

Рис. 5.3. Матрица «военной игры».

точке (в том смысле. что значения платежей в этой точке минимальны по строке и максимальны по столбцу для игрока I и максимальны по строке и минимальны по столбцу для игрока II. Кроме того, эта седловая точка устойчива в том смысле, что ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, отклоняясь от нее в одностороннем порядке.

Второй пример мы позаимствуем из «игры в войну» (рис. 5.3). Числа в матрице платежей означают дни между столкновениями армий противников. Нападающая сторона знает, что время работает против нее и что в ее интересах вести «блитцкриг», тем самым *минимизируя* время между столкновениями двух армий. С другой стороны, обороняющаяся сторона избирает стратегию «выжженной земли», а именно отступает, стремясь максимизировать время между столкновениями с тем, чтобы использовать передышки для организации сопротивления и изматывания нападающей стороны. [Примером такого рода могут служить события второй мировой войны, разыгравшиеся в первые месяцы после нападения Германии на Советский Союз. Другим примером, как ни странно, может послужить поведение некоторых видов животных (в том числе и человека) в брачный период.]

Какое решение примет каждый из участников игры, анализируя все возможные стратегии, представленные на рис. 5.3? Обороняющаяся сторона попытается максимизировать свои минимальные выигрыши, а нападающая сторона — минимизировать свои максимальные выигрыши.

Нападающая сторона рассуждает следующим образом: «Если я изберу стратегию A_2, то в худшем случае мне придется ждать 7 дней до столкновения. Если я выберу стратегию B_2, то в худшем случае мне придется ждать 3 дня. Если я остановлю свой выбор на стратегии C_2, то мне придется ждать не больше 5 дней, а если я предпочту воспользоваться стратегией D_2, то ждать мне придется самое большее 6 дней. Это — мои *максимальные* проигрыши. Чтобы *минимизировать* их, я выбираю стратегию B_2 (3 дня)».

Обороняющаяся сторона рассуждает следующим образом: «Моя задача состоит в том, чтобы измотать противника. Если я выберу стратегию A_1, то в худшем случае мне придется ждать 1 день. Если я предпочту выбрать стратегию B_1, то ждать придется 2 дня. Стратегия C_1 дает 3 дня и стратегия D_1 — 1 день. Это — мои *минимальные* выигрыши. Чтобы *максимизировать* их, я выбираю стратегию C_1 (3 дня)».

И участники игры выбирают квадрат (C_1, B_2), в который вписано число, минимальное среди чисел, стоящих в той же строке, и максимальное среди чисел, стоящих в том же столбце. Эта пара стратегий *устойчива*, так как при попытке со стороны каждого игрока отклониться от нее в одностороннем порядке он *увеличивает* свой *проигрыш*.

5.1.4. Смешанные стратегии

В этом случае доминирующей стратегии нет ни у одного игрока, а матрица платежей не имеет седловой точки, поэтому игра не может быть решена одним ходом. В общей матрице платежей 2×2 (рис. 5.1) это сводится к неравенствам $a > d > b > c$. При таких условиях игроки предпочитают придерживаться смешанных стратегий, т. е. делают много ходов. Пусть x — вероятность того, что игрок I выбирает ход A_1, а y — вероятность того, что игрок II выберет ход A_2. При таких условиях средние размеры (математическое ожидание) выигрыша составляют величину

$$G_x(x, y) = axy + b(1 - x)y + cx(1 - y) + d(1 - x)(1 - y) \quad (5.1.1)$$

для игрока I и

$$G_y(x, y) = n - G_x(x, y) \quad (5.1.2)$$

для игрока II.

Логика принятия стратегии A_i или $B_j (i, j \in (1, 2)]$ игроками очевидным образом связана со средними выигрышами, а именно: скорость изменения вероятности x или y (т. е. dx/dt или dy/dt) пропорциональна производной от средней прибыли, получаемой игроком, принявшим, соответственно, стратегию A_1 или A_2, B_1 или B_2. Следовательно, мы можем записать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G_x}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G_y}{\partial y}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Итак, логику участников игры мы трансформировали, или «свели» к двум связанным линейным дифференциальным уравнениям. Подставляя вместо G_x и G_y соответствующие выражения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y(a - b - c + d) + c - d, \\ \frac{dy}{dt} &= x(-a + b + c - d) - b + d, \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

откуда находим стационарное состояние

$$x^* = \frac{d - b}{a - b - c + d}, \quad y^* = \frac{d - c}{a - b - c + d}. \tag{5.1.5}$$

Исследуем его на *устойчивость*.

Для этого введем возмущения $x' = x - x^*$ и $y' = y - y^*$. В них дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= y'(a - b - c + d), \\ \frac{dy'}{dt} &= x'(-a + b + c - d), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

поэтому

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'}{y'}, \tag{5.1.7}$$

и мы получаем для возмущений круговую траекторию, задаваемую параметрическими уравнениями $x' = \cos\vartheta$, $y' = \sin\vartheta$ (центр окружности совпадает с началом координат).

Интеграл по траектории

$$\int_0^{2\pi} G(x', y')\, d\vartheta$$

равен нулю, так как $G(x', y')$ содержит только члены первой степени по x', y' и произведение $x'y'$, т. е. члены первой степени

по $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ и произведение $\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta$, а интегралы от них по траектории равны нулю. Мы заключаем, что фокус (x^*, y^*) *нейтрально устойчив* (так как наши исходные дифференциальные уравнения по существу совпадают с уравнениями гармонического осциллятора без затухания).

5.2. Игры с непостоянной суммой

Среди игр двух лиц необходимо различать игры, в которых интересы участников диаметрально противоположны (игры с постоянной или нулевой суммой), и игры, в которых интересы участников частично противоположны, а частично совпадают (игры с непостоянной суммой). В играх с постоянной суммой сумма выигрышей двух игроков всегда *одна и та же* независимо от того, как заканчивается игра: чем больше выигрыш одного игрока, тем меньше выигрыш другого. Именно в этом и заключается «диаметральная противоположность» интересов участников игры.

Решение игры двух лиц с постоянной суммой — это пара чистых или смешанных стратегий (имеющихся в распоряжении игроков), которые находятся в равновесии: ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, *если* его партнер придерживается стратегии, предписанной решением игры.

В играх с непостоянной суммой у участников в общем случае имеются общие совпадающие интересы и противоположные игры. Такие игры иногда называют играми *со смешанными мотивами*. Для игр с непостоянной суммой можно доказать существование положений равновесия, но уже невозможно предписывать «оптимальные» стратегии в терминах этих положений равновесия, так как выбор *каждым* игроком стратегий, содержащих положения равновесия, еще *не гарантирует* равновесного исхода игры. Поэтому в играх с непостоянной суммой не существует оптимальных стратегий (т. е. решений, которые гарантировали бы устойчивость выбранной пары стратегий в том смысле, что одностороннее или даже двустороннее отклонение от нее только ухудшают положение игрока). В таких играх понятие *рациональной* стратегии требует уточнения и обобщения. Оказывается, что ходы, предписываемые соображениями *индивидуальной* рациональности, могут существенно отличаться от ходов, выбираемых из соображений *коллективной* рациональности. «Парадоксы» возникают, когда понятия «рационального решения», адекватные на одном уровне конфликта, переносятся на другой уровень. Таким образом, в случае игр двух лиц с непостоянной суммой понятие рациональной стратегии как бы претерпевает бифуркацию на *индивидуальную* и *коллективную* рациональную стратегию, причем весьма часто они не совпадают,

и возникает понятие *торга* как средства достижения субоптимального решения. Игры с непостоянной суммой мы подразделяем на две подкатегории:

а) игры с непостоянной суммой и *торгом*;

б) парадоксальные игры с непостоянной суммой.

Рассмотрим каждую из этих групп отдельно.

5.2.1. Игры с непостоянной суммой и торгом

Начнем с одного характерного примера, показанного на рис. 5.4. По существу мы следуем работе Рапопорта [5.1].

Игроку I необходимо выбрать либо строку A_1, либо строку B_1. Если бы он знал, какую стратегию изберет игрок II, то принять решение для него не составило бы особого труда: если бы игрок II выбрал стратегию A_2, то игрок I выбрал бы стратегию B_1, которая обеспечивает ему выигрыш 4. Если бы игрок II выбрал стратегию B_2, то игрок I выбрал бы стратегию A_1, которая обеспечивает ему выигрыш 3. Но игрок II стоит перед такой же проблемой принятия решения. Если бы он был уверен, что игрок I постарается обеспечить себе максимальный выигрыш (выберет стратегию B_1), то игрок II не мог бы выбрать для себя лучшей стратегии, чем A_2. Но у игрока II нет уверенности в том, что игрок I не захочет рисковать и не предпочтет стратегию A_1 (в расчете на то, что игрок II будет стремиться обеспечить себе максимальный выигрыш 8). В этом случае игрок II мог бы получить максимальный выигрыш. Мы видим, что в такой игре оптимальной чистой стратегии *нет* ни для одного игрока. Посмотрим, как обстоит дело в случае *смешанных* стратегий.

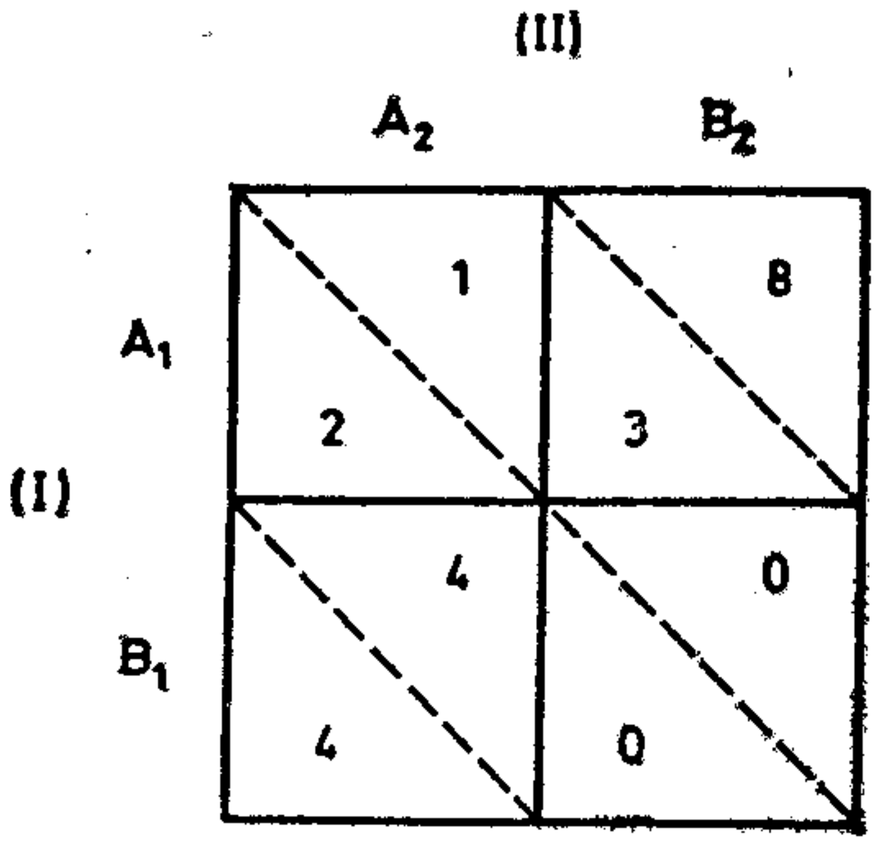


Рис. 5.4. Матрица 2×2 игры с непостоянной суммой («с переговорами»).

Оставляя (на время) в стороне вопрос о выигрыше противника, каждый игрок может выбрать смешанную стратегию, которая гарантирует ему *минимальный* выигрыш *независимо* от того, какую стратегию выберет его противник. Существует много алгоритмов, позволяющих найти такую смешанную стратегию. Но предположим, что смешанная стратегия для игрока I определяется путем вычисления разности платежей для каждой строки (для первой строки такая разность равна $3 - 2 = 1$, для

второй строки $— 4 — 0 = 4$), *обращения* полученных значений и случайного четырехкратного выбора A_1 при каждом выборе B_1. Аналогично, игрок II приписывает стратегии A_2 вероятность 8/11 и стратегии B_2 вероятность 3/11.

Игрок I, приписывая стратегии A_1 вероятность 4/5 и стратегии B_1 вероятность 1/5, гарантирует себе выигрыш

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}(2+3)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(4+0)=\frac{12}{5}$$

(в предположении о полном неведении — с вероятностями (1/2, 1/2) — относительно вероятностей выбора игроком II стратегий A_2, B_2).

Аналогично игрок II гарантирует себе выигрыш

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{11}(1+4)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}(8+0)=\frac{32}{11}.$$

На первый взгляд кажется, что эту пару смешанных стратегий (гарантирующих каждому игроку «прожиточный минимум») можно принять за «решение» игры. Однако это решение *не удовлетворительно*: оба игрока могли бы выиграть больше указанных выше гарантированных минимумов, если бы, например, игрок I выбрал стратегию B_1, а игрок II — стратегию A_2. Для того, чтобы получить более крупные выигрыши, игрокам необходимо *координировать* свои стратегии. Разумеется, проблема выработки, соглашения о выборе той или иной пары стратегий (или смешанную стратегию) остается, так как при выборе пары стратегий (B_1, A_2) преимущество получает игрок I, а при выборе пары стратегий (A_1, B_2) — игрок II. Но относительно какой бы из этих двух пар (или смешанной стратегии) игроки ни пришли к соглашению, любая из них обеспечивает каждому игроку выигрыш, превышающий гарантированный уровень, соответственно в 12/5 и 32/11.

Неспособность координировать стратегии в данном случае надлежит отнести за счет *отсутствия связи* между двумя партнерами. Предположим, что игроки каким-то образом договорились о выборе пары стратегий (A_1, B_2) [или (B_1, A_2)]. Тогда ни у одного из игроков не было бы *мотива* для нарушения соглашения, так как выбор игроком другой стратегии, в то время как его противник придерживается достигнутого соглашения, уменьшил бы выигрыш «нарушителя». Таким образом, каждая из двух приведенных выше пар стратегий представляет собой равновесие: ни один из двух игроков не может повысить свой выигрыш (и, вообще говоря, лишь уменьшит его), если отойдет от равновесия, в то время как другой игрок будет по-прежнему придерживаться соглашения (принцип *минимакса*: односторонее отклонение наказывается).

Но если в рассматриваемой игре обстоятельства позволяют установить связь между игроками и координировать стратегии, то ситуация меняется: в этом случае игроки могут путем торгов (переговоров) согласиться относительно пары стратегий, дающих преимущества каждому из них. В игре с постоянной суммой такое невозможно, так как в такой игре, чем лучше исход игры для одного игрока, тем он хуже для другого. В игре с непостоянной суммой могут существовать исходы, предпочтительные для *обоих* игроков по сравнению с другими возможными исходами.

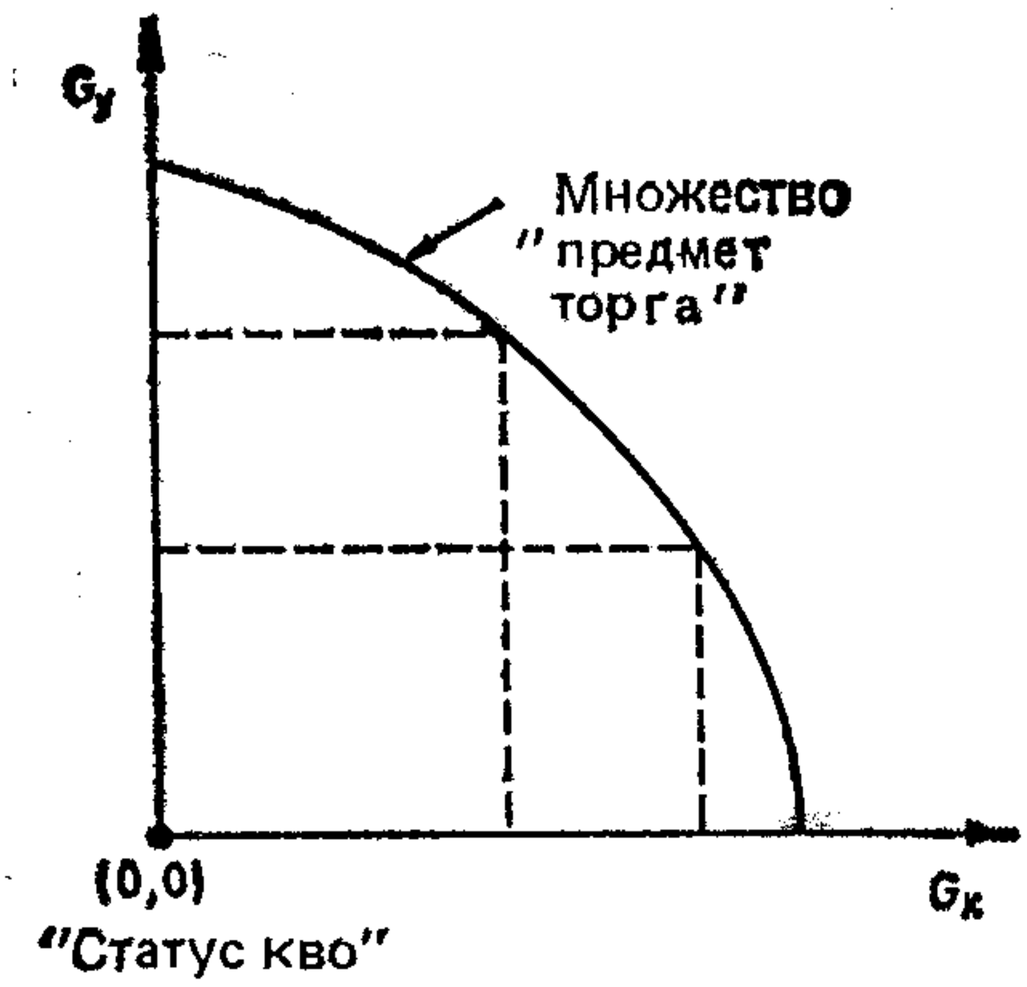


Рис. 5.5. Множество исходов переговоров.

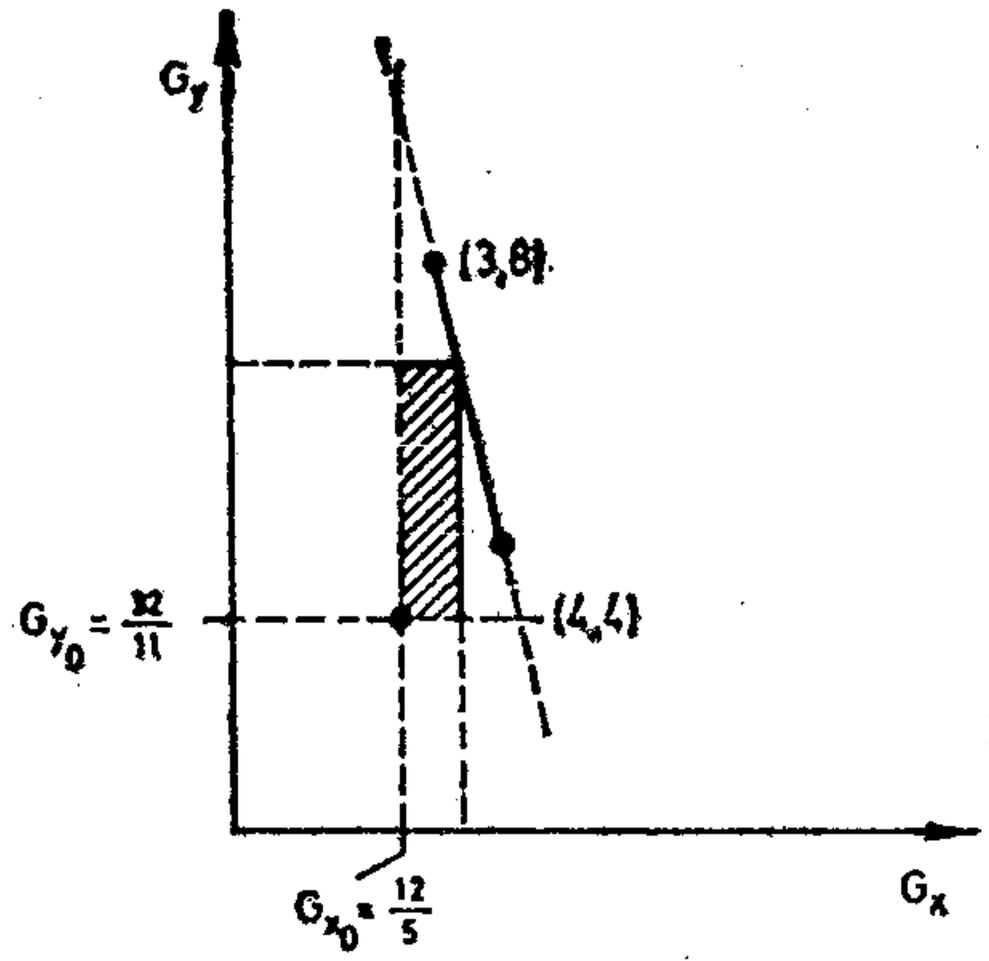


Рис. 5.6. Множество исходов переговоров для конкретной игры с матрицей, изображенной на рис. 5.4.

Итак, математическая задача состоит в том, чтобы на кривой возможных исходов переговоров (множестве «предмет торга») найти одну точку (G_x, G_y), которую можно было бы определить как *рациональное решение*, или *рациональное решение конфликта* (рис. 5.5).

Можно доказать, что точка множества «предмет торга», совпадающая с вершиной прямоугольника *наибольшей* площади, является решением задачи при двух условиях: во-первых, множество «предмет торга» заранее задано *и*, во-вторых, «противоположная» вершина прямоугольника — «статус-кво» — также заранее задана.

В общем случае отнюдь не очевидно, какой должна быть в различных играх точка «статус-кво». Например, можно было бы считать, что точка статус-кво должна указывать выигрыш, который может гарантировать себе каждый игрок (независимо от стратегии другого игрока). Мы уже знаем, что в нашей игре координаты такой точки, соответственно, равны $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$. Приняв эту точку за точку статус-кво, вычислим опти-

мальные выигрыши в предположении, что множество «предмет торга» — прямолинейный отрезок от точки (3,8) до точки (4,4) (рис. 5.6). (Игроки действительно могут выбирать размеры выигрышей в указанных пределах.)

При этих условиях оптимальную точку (G_x^*, G_y^*) можно вычислить из соотношения

$$F = (G_x^* - G_{x_0})(G_y^* - G_{y_0}) = \max; \qquad (5.2.1)$$

но из аналитического выражения для прямой, проходящей через точки (3.8) и (4,4), следует, что

$$G_y = 20 - 4G_x, \qquad (5.2.2)$$

а $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$, поэтому

$$\left(G_x^* - \frac{12}{5}\right)\left(20 - 4G_x^* - \frac{32}{11}\right) = \max,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial G_x} = 0,$$

$$20 - 4G_x^* - \frac{32}{11} - 4\left(G_x^* - \frac{12}{5}\right) = 0.$$

Из последнего уравнения получаем

$$G_x^* = \frac{1}{8}\left(20 - \frac{32}{11} + 4 \cdot \frac{12}{5}\right),$$

или

$$G_x^* = 3{,}34; \quad G_y^* = 6{,}65. \qquad (5.2.3)$$

Однако возникает вопрос относительно устойчивости выбранного статус-кво $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$.

Чтобы гарантировать себе безопасный уровень выигрыша, игрок I должен воспользоваться двумя своими стратегиями с вероятностями $x = 4/5$ и $1 - x = 1/5$. Но если это сделает он, то игрок II может выиграть значительно больше *своего* безопасного уровня: выбрав B_2 в качестве *чистой* стратегии, игрок II может получить выигрыш $8 \times 4/5 = 32/5$, превышающий его безопасный уровень 32/11. Аналогично, если игрок II выбирает смешанную стратегию (8/11, 3/11), обеспечивающую ему безопасный уровень выигрыша, то игрок I, выбрав стратегию B_1, может получить выигрыш $4 \times 8/11 = 32/11$, превышающий его безопасный уровень (равный 12/5).

Следовательно, каждый игрок *пытался бы отклониться* от своей безопасной смешанной стратегии, если бы знал, что его партнер *будет придерживаться* этой стратегии. С другой стороны, если оба игрока отклонятся от безопасной смешанной стратегии, то тем самым они определят новое статус-кво, а

именно точку (0, 0). Ясно, что такая ситуация может возникнуть в том случае, если игроки не придут к соглашению и каждый будет настаивать на стратегии, обеспечивающей ему одностороннее преимущество.

Посмотрим теперь, какие оптимальные исходы получаются при *том же* множестве «предмет торга», когда точка статус-кво совпадает с началом.

В этом случае $G_{x_0} = 0$, $G_{y_0} = 0$, поэтому условие (5.2.1) представимо в виде

$$F = (G_x^* - 0)(20 - 4G_x^* - 0) = \max,$$

откуда, полагая $\partial F / \partial G_x = 0$, получаем

$$G_x^* = \frac{1}{8} \cdot 20 \sim 3, \quad G_y^* \approx 8. \tag{5.2.4}$$

В общем случае предполагается, что для определения точки статус-кво каждый из игроков независимо от другого выбирает (чистую или смешанную) «стратегию угрозы»; имеется в виду, что, если игрокам не удается достичь согласия, пара выбранных таким образом стратегий x, y определяет точку статус-кво. Если же согласие достижимо, т. е. если точка на множестве «предмет торга» может быть определена, то она находится в согласии с решением описанной выше игры с переговорами, а пара стратегий угроз задает точку статус-кво.

Предположим, что игрок I выбирает в качестве своей стратегии угрозы смешанную стратегию, в которой стратегия A_1 представлена с вероятностью x, а стратегия B_1 с вероятностью $1 - x$. Аналогично, игрок II выбирает в качестве своей стратегии угрозы смешанную стратегию, в которой стратегия A_2 представлена с вероятностью y, а стратегия B_2 с вероятностью $1 - y$.

Если стратегии угрозы вступают в силу (т. е. если согласие *не* достигнуто), то математическое ожидание выигрыша для игрока I составляет

$$G_{x_0} = 2xy + 4(1 - x)y + 3x(1 - y). \tag{5.2.5}$$

Соответствующий выигрыш для игрока II равен

$$G_{y_0} = xy + 4(1 - x)y + 8x(1 - y). \tag{5.2.6}$$

Рассмотрим теперь игру с торгом, в которой точка (G_{x_0}, G_{y_0}), задаваемая выражениями (5.2.5), (5.2.6), *является* точкой статус-кво, а множество «предмет торга», как и прежде, лежит на прямой, проходящей через точки (3,8) и (4,4). Решение игры в этом случае есть точка $(G_{x_0}^*, G_{y_0}^*)$ на множестве «предмет торга», такая, что G_x доставляет максимум выражению

$$F = (G_x - G_{x_0})(G_y - G_{y_0}) = (G_x - G_{x_0})(20 - 4G_x - G_{y_0}). \tag{5.2.7}$$

Максимизирующее значение, вычисляемое из условия $\partial F/\partial G_x = 0$, оказывается равным

$$G_x^* = \frac{1}{8}(20 - G_{y_0} + 4G_{x_0}) = \frac{1}{8}(20 - 9xy + 4x + 12y). \quad (5.2.8)$$

Ясно, что в интересах игрока I выбрать такую стратегию угроз x, при которой его окончательный выигрыш G_x^* максимален, т. е. определяется выражением (5.2.8).

Преобразуем теперь первоначальную игру, умножив выигрыши игрока I на 4, как показано на рис. 5.7. Такое преобразование сводится к выбору игроком I других денежных единиц, что заведомо не сказывается на «стратегической структуре» игры.

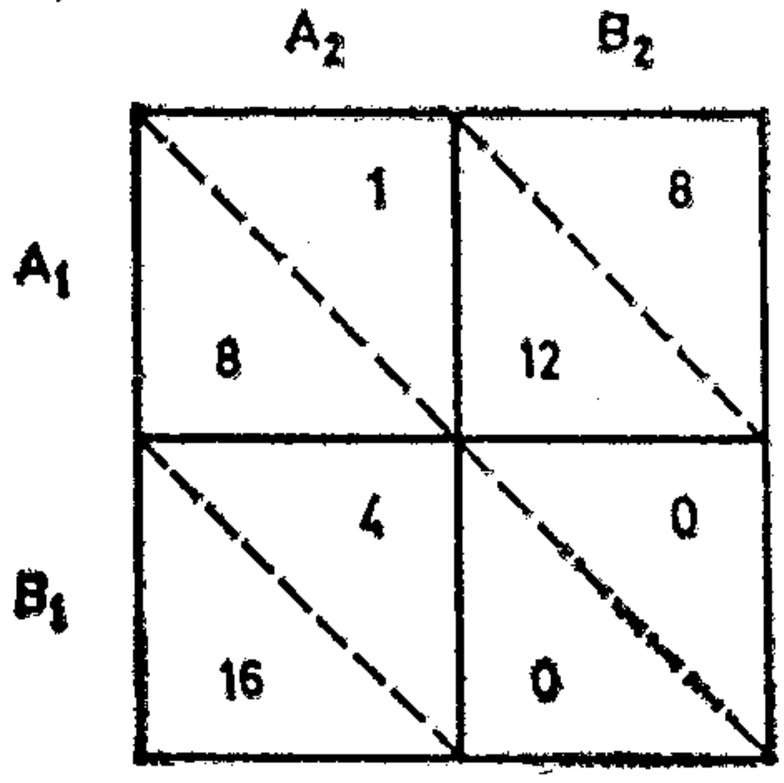


Рис. 5.7. Преобразование игры, изображенной на рис. 5.4.

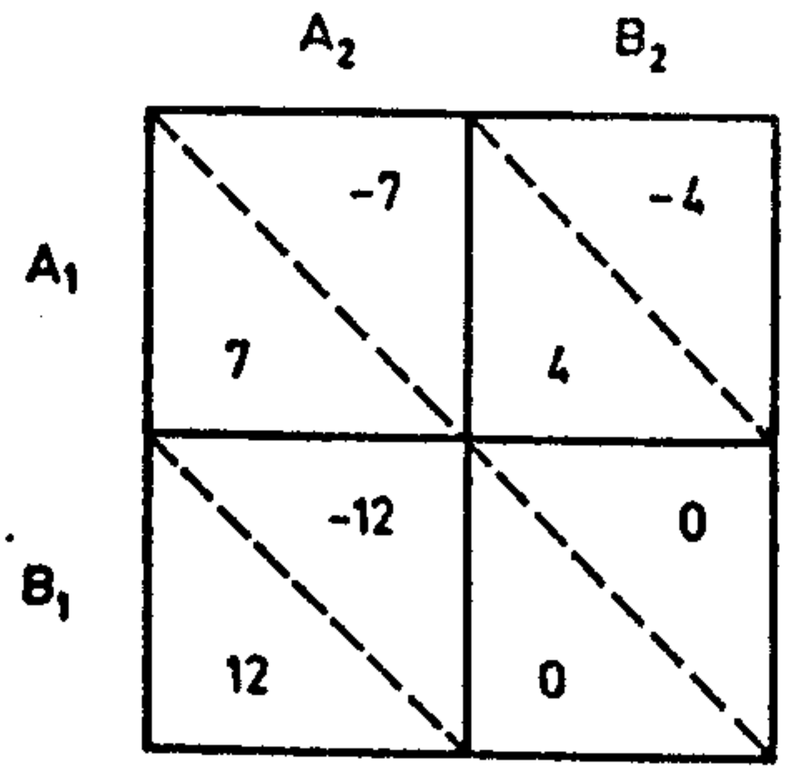


Рис. 5.8. Дальнейшее преобразование игры, изображенной на рис. 5.4, в игру с постоянной суммой, имеющую седловую точку.

В качестве второго шага построим игру *с нулевой суммой* (рис. 5.8), в которой платежи являются алгебраическими разностями платежей преобразованной выше игры.

Вычислим выигрыш игрока I в этой последней игре с постоянной суммой при условии, что он использует смешанную стратегию x, в то время как его противник — игрок II — использует смешанную стратегию y. Математическое ожидание выигрыша для игрока I составляет в этом случае величину

$$7xy + 4x(1 - y) + 12y(1 - x) = -9xy + 4x + 12y$$

— именно эта величина необходима ему, чтобы достичь максимального выигрыша в первоначальной игре [см. соотношение (5.2.8)]. Но последняя из рассмотренных нами игр (и это имеет решающее значение) — игра с нулевой суммой, имеющая *седловую точку* в (A_1, B_2). Выбирая стратегию A_1, игрок I максимизирует свои минимальные выигрыши, а выбирая стратегию B_2, игрок II минимизирует свои максимальные проигрыши.

Таким образом, в этой игре для игрока I существует *чистая наилучшая стратегия*, а именно стратегия A_1. Аналогично, для игрока II эта последняя игра стратегически эквивалентна первоначальной, поэтому лучшей стратегией для игрока II *была* и *остается чистая* стратегия B_2. Приведенных выше соображений, по-видимому, достаточно, чтобы мы убедились: множеством «предмет торга» в конечном итоге должна быть прямая $G_x + G_y = 11$ (рис. 5.9) с точкой статус-кво $G_{x_0} = 12/5$, $G_{y_0} = 32/11$.

Итак, нас интересуют размеры возможных «компенсаций», которые игрок II должен предложить игроку I, чтобы склонить того к торгам (привлечь к множеству «предмет торга», изобра-

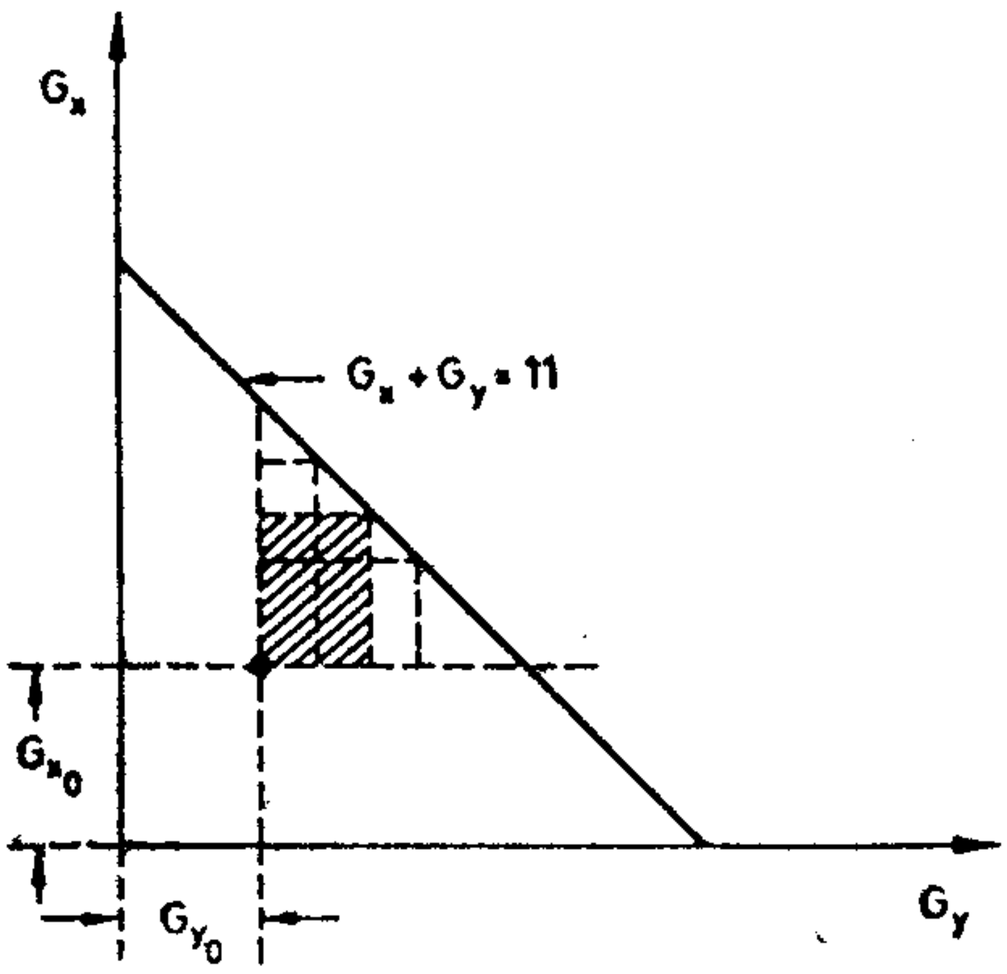


Рис. 5.9. Другое множество исходов переговоров для той же конкретной игры (см. рис. 5.4).

женному на рис. 5.9). При таком множестве «предмет торга» два игрока *совместно* получают больший выигрыш, чем при любом другом исходе, и, следовательно, больший, чем при любой смешанной стратегии.

Разве не должны два *рациональных* игрока сразу же согласиться на координацию своих стратегий с целью достижения исхода (A_1, B_2) и *лишь затем* приступить к торгу относительно того, как разделить между собой совместный выигрыш? Найдем интересующие нас величины из условия максимума величины

$$F = \left(G_x - \frac{12}{5}\right)\left(11 - G_x - \frac{32}{11}\right).$$

Полагая $\partial F/\partial G_x = 0$, получаем

$$11 - G_x^* - \frac{32}{11} - G_x^* + \frac{12}{5} = 0,$$

откуда

$$G_x^* \sim 5{,}25 \quad \text{и} \quad G_y^* \sim 5{,}75.$$

Чтобы склонить игрока I принять множество «предмет торга», игрок II должен пойти на весьма серьезные уступки. Однако существует альтернативный способ, позволяющий убедиться в том, что игрок II уступает игроку I лишь «в самый раз». Будем считать, что полный выигрыш, получаемый «*коалицией*» из двух игроков, делится между ними в соответствии с следующим принципом: каждый партнер получает столько, сколько вносит, вступая в коалицию.

Предположим, что коалиция состоит из игрока I, первым вступившего в «пустую» коалицию. В коалиции *с самим собой* игрок I получает выигрыш, равный его уровню «безопасности», т. е. 12/5. Если первым в «пустую» коалицию вступает игрок II, то коалиция, состоящая из одного человека, может получить выигрыш 32/11 (уровень «безопасности» игрока II).

Присоединяясь к коалиции, игрок I *позволяет* (буквально и фактически) коалиции из двух человек получить выигрыш, равный 11. Следовательно, он приносит коалиции, к которой присоединяется, $11 - (32/11) = 89/11$, и получает (на этой стадии) право на выигрыш в размере 89/11. Однако мы предполагаем, что порядок, в котором образуется коалиция, чисто случайный. (Каждая из двух возможных последовательностей образования коалиции имеет вероятность 1/2.) Следовательно, выигрыш, начисляемый игроку I, должен быть средним взвешенным (с одинаковыми весами 1/2) величин 12/5 и 89/11, т. е. равен $(1/2) \times (12/5) + (1/2)\ (89/11) \approx 5{,}25$. Игрок II получает остальное, т. е. $11 - 5{,}25 = 5.75$.

5.2.2. Игры с непостоянной суммой без торга («парадоксальные»)

Рассмотрим следующую игру с непостоянной суммой, широко известную под названием «дилемма узника» (ДУ) (рис. 5.10). Диагональным платежам в общем случае присваивается значение ξ, $|\xi| \gg 1$. С точки зрения каждого игрока совершенно ясно, какую стратегию избрать. Игроку I следует избрать стратегию B_1 *совершенно независимо* от того, какую стратегию выберет игрок II. Действительно, если игрок II останавливает свой выбор на стратегии A_2, то игроку I выгоднее избрать стратегию B_1, обеспечивающую ему выигрыш 10, тогда как стратегия A_1 гарантирует ему только выигрыш 1. Если игрок II избирает стратегию B_2, то игроку I тем более выгодно выбрать стратегию B_1: тогда его проигрыш составит 1, в то время как выбор стратегии A_1 приводит к проигрышу 10. По той же причине игрок II поступит «рационально», выбрав стратегию B_2. «Рациональная» пара стратегий (B_1, B_2) приводит к проигрышу 1 для *обоих* игроков. Аналогично, выбрав стратегии (A_1, A_2), игроки *выиграли* бы по 1. Заметим, что в этой игре добиться максимально возможного

выигрыша участникам мешает *не* их *неспособность координировать* стратегии. Существует только *одна* пара стратегий, которая приводит к выигрышу *обоих* игроков, а именно (A_1, A_2). Таким образом, в данном случае не существует неоднозначности относительно выбора стратегий, соответствующих *коллективному* интересу игроков (в отличие от предыдущего варианта игр с торгом).

Что же мешает игрокам выбрать стратегии (A_1, A_2)? Ясно, что к паре стратегий (B_1, B_2) вместо (A_1, A_2) их приводят «действия в соответствии с индивидуальными интересами» каждого игрока. Кроме того, рассматриваемая теперь нами игра отличается от предыдущей тем, что вместо *двух* точек равновесия, как в разд. 5.2.1, данная игра имеет только одну точку равновесия (B_1, B_2). Однако такой исход не удовлетворил бы «рациональных» игроков.

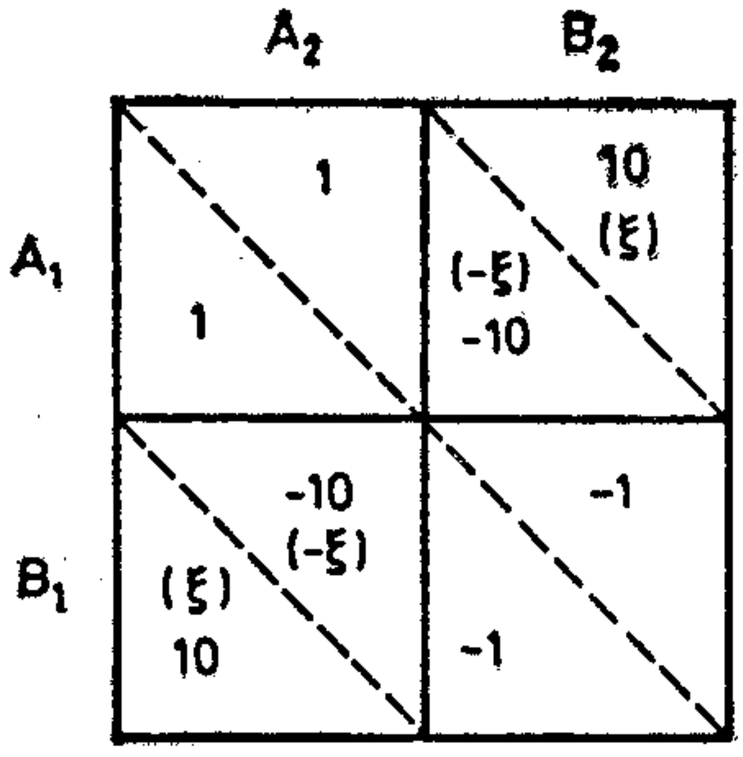


Рис. 5.10. Матрица 2×2 игры «дилемма узника».

Если рациональные игроки вообще могли бы прийти к согласованию, то они выбрали бы пару стратегий (A_1, A_2). Однако такой исход не является точкой равновесия: каждый игрок, отклоняясь от согласованной стратегии в *одностороннем порядке, увеличил бы* свой выигрыш, а если бы оба игрока нарушили достигнутое соглашение, то они оба проиграли бы.

С точки зрения «чистых» стратегий такое положение ужасно. Посмотрим, что могло бы произойти, если бы партнеры выбирали смешанные стратегии (т. е. сыграли бы число игр, которое позволяло бы наводить статистику) с вероятностью x для A_1, $1 - x$ для B_1, y для A_2, $1 - y$ для B_2.

«Уравнения движения» для x, y, как и прежде, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G_x}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G_y}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где

$$\begin{aligned} G_x &= xy - \xi x(1-y) + \xi(1-x)y - (1-x)(1-y), \\ G_y &= xy + \xi x(1-y) - \xi(1-x)y - (1-x)(1-y). \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Подставляя выражения для G_x, G_y, получаем

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \xi, \qquad \frac{dy}{dt} = 1 - \xi, \tag{5.2.10}$$

или

$$x(t) = x(0)\, e^{(1-\xi)t}, \qquad y(t) = y(0)\, e^{(1-\xi)t}, \tag{5.2.11}$$

а так как $|\xi| \gg 1$, вероятности x, y быстро выходят на стационарные значения $(0, 0)$, т. е. игра быстро заканчивается в состоянии (B_1, B_2). Таким образом, переход к смешанным стратегиям *не улучшает* ситуацию.

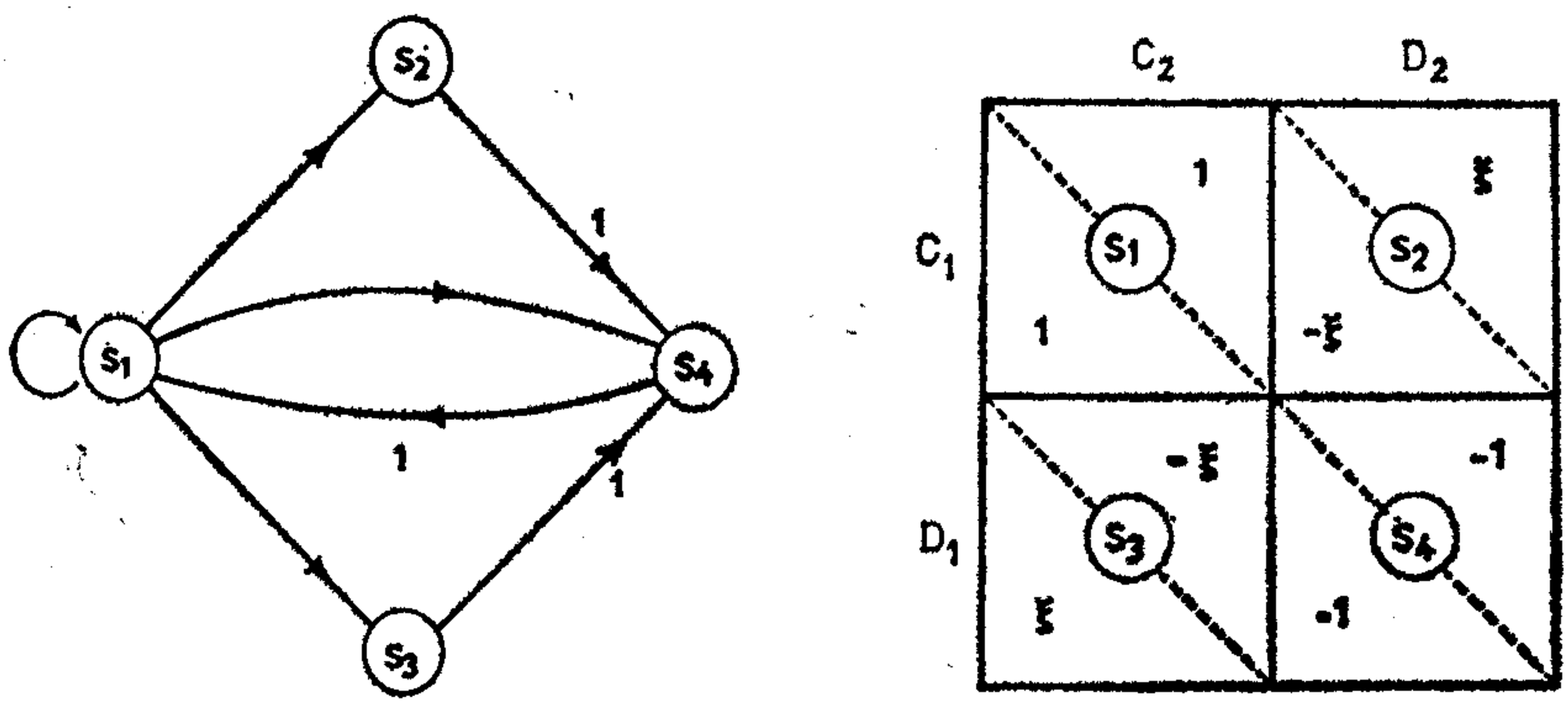


Рис. 5.11. Дилемма узника, разыгрываемая индуктивно, и возникающая при этом марковская цепь (слева).

Попытаемся теперь ввести смешанные стратегии с *памятью*. Это означает, что стратегия, выбираемая противниками при очередной партии, каким-то образом обусловлена исходом предыдущей игры. Попытаемся ввести здесь простую марковскую цепь (память глубиной в один ход) в качестве алгоритма для каждого игрока. Будем считать ходы A_1, A_2 *кооперативными* ходами C_1, C_2, а ходы B_1, B_2 — *разобщенными* ходами D_1, D_2. Наша матрица имеет четыре состояния $S_1(C_1, C_2)$, $S_2(C_1, D_2)$, $S_3(C_2, D_1)$, $S_4(D_1, D_2)$, как на рис. 5.11.

С учетом «духа», в котором действует каждый игрок (уровня его интеллектуального развития и способностью проводить «свою линию»), мы вводим для каждого игрока набор *условных* вероятностей (или «склонностей») кооперативных и разобщенных действий.

Для игрока I	*Для игрока II*
$P(C_1/S_1) = x_1,$	$P(C_2/S_1) = x_2,$
$P(C_1/S_2) = y_1 = 0,$	$P(C_2/S_2) = y_2 = 0,$
$P(C_1/S_3) = z_1 = 0,$	$P(C_2/S_3) = z_z = 0,$
$P(C_1/S_4) = \omega_1 = 1,$	$P(C_2/S_4) = \omega_2 = 1.$

Из этих наборов следует, что со стороны «преданного» партнера немедленно наступает возмездие, и после парадоксального исхода S_4 немедленно происходит возвращение в состояние S_1. Соответственно 16 вероятностей перехода, определяющих марковскую цепь, оказываются следующими:

$$P_{11} = x_1x_2, \qquad P_{21} = y_1y_2 = 0,$$
$$P_{12} = x_1(1 - x_2), \qquad P_{22} = y_1(1 - y_2) = 0,$$
$$P_{13} = x_2(1 - x_1), \qquad P_{23} = y_2(1 - y) = 0,$$
$$P_{14} = (1 - x_1)(1 - x_2), \qquad P_{24} = (1 - y_1)(1 - y_2) = 1;$$
$$P_{31} = z_1z_2 = 0, \qquad P_{41} = \omega_1\omega_2 = 1,$$
$$P_{32} = z_1(1 - z_2) = 0, \qquad P_{42} = \omega_1(1 - \omega_2) = 0,$$
$$P_{33} = z_2(1 - z_1) = 0, \qquad P_{43} = \omega_2(1 - \omega_1) = 0,$$
$$P_{34} = (1 - z_1)(1 - z_2) = 1, \quad P_{44} = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2) = 0.$$

Это — апериодическая марковская цепь с асимптотическими значениями u_i, $i \in (1, 2, 3, 4)$, вероятности находиться в состоянии S_i, вычисляемыми из соотношений

$$u_i = \sum_{j=1}^{4} u_j P_{ji} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{4} u_i = 1. \tag{5.2.12}$$

Оказывается, что

$$u_1 = \frac{1}{\Sigma}, \quad u_2 = \frac{x_1(1 - x_2)}{\Sigma}, \qquad u_3 = \frac{x_2(1 - x_1)}{\Sigma}, \quad u_4 = \frac{1 - x_1x_2}{\Sigma}, \tag{5.2.13}$$

где

$$\Sigma = 2 + x_1 + x_2 - 3x_1x_2. \tag{5.2.14}$$

Выигрыши двух игроков, соответственно, равны

$$G_1(x_1, x_2) = u_1 - u_4 + \xi(u_3 - u_2),$$
$$G_2(x_1, x_2) = u_1 - u_4 + \xi(u_2 - u_3). \tag{5.2.15}$$

Марковская кинетика развивается во времени не при фиксированных раз и навсегда «наклонностях», т. е. не при фиксированных вероятностях перехода. Так как игры итерируются,

происходит *обучение* игроков. Это означает, что эволюция наклонностей во времени задается системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка: производные наклонностей по времени пропорциональны градиенту математического ожидания выигрыша по данной наклонности. Таким образом, эволюция во времени основных наклонностей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяется связанными нелинейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial G_1}{\partial x_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial G_2}{\partial x_2}, \tag{5.2.16}$$

описывающими траекторию процесса «обучения».

Стационарные значения наклонностей x_1^*, x_2^*, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^*}{dt} &= \frac{(3\xi+1)x_2^{*2} + 2(1-\xi)x_2^* - 2\xi}{\left(2 + x_1^* + x_2^* - 3x_1^* x_2^*\right)^2} = 0, \\ \frac{dx_2^*}{dt} &= \frac{(3\xi+1)x_1^{*2} + 2(1-\xi)x_1^* - 2\xi}{\left(2 + x_1^* + x_2^* - 3x_1^* x_2^*\right)^2} = 0, \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

равны

$$x_1^* = x_2^* = x^* = \left(\xi - 1 + \sqrt{1 + 7\xi^2}\right)/(3\xi + 1);$$

они существуют только при $1 < \xi \leqslant 3$.

Значение x^* (см. рис. 5.12) представляет собой порог, выше которого происходит захват в режим CC; x^* — неустойчивое стационарное состояние (седловая точка). В этом нетрудно убедиться, исследуя условия устойчивости, которые имеют вид неравенств

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2} < 0, \tag{5.2.18}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2} > \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{5.2.19}$$

при $x_1^* = x_2^* = x^*$.

Оказывается, что в данном случае

$$\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2}\right)_{x^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2}\right)_{x^*} = 0,$$

а также

$$\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{x^*} = \frac{2\sqrt{1+7\xi^2}}{\Sigma^2} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{x^*} = \frac{2\sqrt{1+7\xi^2}}{\Sigma^2} > 0.$$

Обратимся теперь к модификации дилеммы узника (ДУ): рассмотрим ее обобщение, в котором вероятность ответных мер со стороны «преданного» партнера равна a, $0 \leqslant a < 1$, т. е.

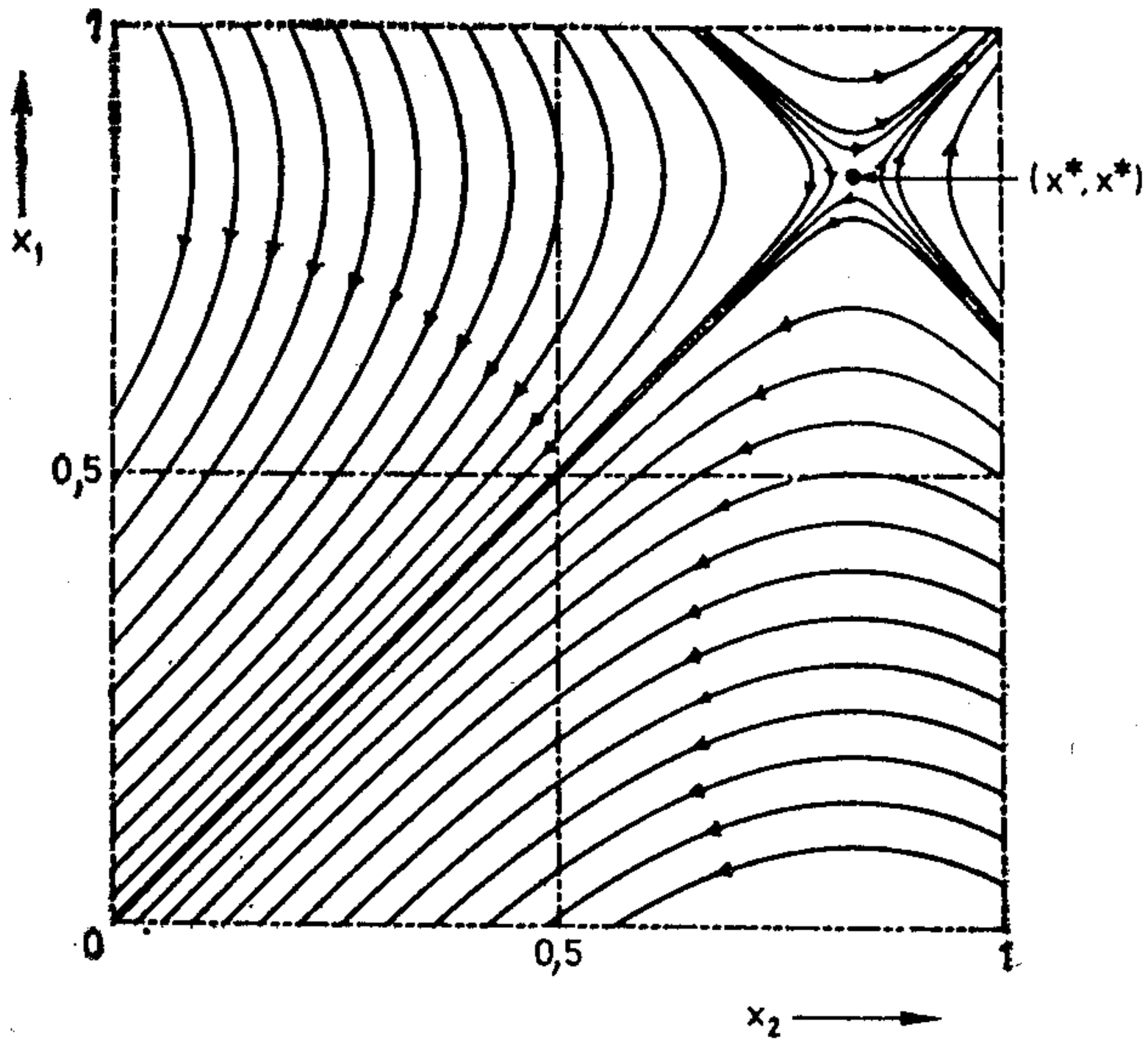


Рис. 5.12. Описание дилеммы узника в фазовом пространстве ($\xi = 1{,}5$); (x^*, x^*) — седловая точка, неустойчивое стационарное состояние.

$a \neq 1$. В этом случае

$$y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = a,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 1,$$

и для новой цепи Маркова мы получаем вероятности перехода

$$\begin{aligned}
P_{11} &= x_1 x_2, & P_{21} &= a^2,\\
P_{12} &= x_1 (1 - x_2), & P_{22} &= a(1 - a),\\
P_{13} &= x_2 (1 - x_1), & P_{23} &= a(1 - a),\\
P_{14} &= (1 - x_1)(1 - x_2), & P_{24} &= (1 - a)^4.\\
P_{31} &= a^2, & P_{41} &= 1,\\
P_{32} &= a(1 - a), & P_{42} &= 0,\\
P_{33} &= a(1 - a), & P_{43} &= 0,\\
P_{34} &= (1 - a)^2, & P_{44} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Асимптотические значения вероятности попасть в возможные состояния S_i соответственно равны

$$u_1 = \frac{2a - 2a^2 - 1}{\Sigma_0},$$
$$u_2 = \frac{(a - a^2 - 1)\, x_1 - a\,(1 - a)\, x_2 + x_1 x_2}{\Sigma_0},$$
$$u_3 = \frac{-\, a\,(1 - a)\, x_1 + (a - a^2 - 1)\, x_2 + x_1 x_2}{\Sigma_0}, \qquad (5.2.21)$$
$$u_4 = \frac{a^2 x_1 + a^2 x_2 + (1 - 2a)\, x_1 x_2 + 2a - 2a^2 - 1}{\Sigma_0},$$

где

$$\Sigma_0 = (3 - 2a)\, x_1 x_2 + (a^2 - 1)\,(x_1 + x_2) - 2\,(2a^2 - 2a + 1). \qquad (5.2.22)$$

[Полагая $a = 0$, мы получаем прежнее выражение (5.2.13) для ДУ.] Стационарные значения переменных x_1, x_2 оказываются равными

$$x_1^* = x_2^* = x^* =$$
$$= \frac{-\,(a^2 - 1)\,\xi - (1 - 2a) + \sqrt{(a^4 - 8a^3 + 18a^2 - 16a + 7)\,\xi^2 + (2a^2 - 4a + 1)}}{(3 - 2a)\,\xi + 1}. \qquad (5.2.23)$$

Это стационарное состояние, как и в предыдущем случае, неустойчиво, поскольку

$$\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2}\right)_{x^*} = \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2}\right)_{x^*} = 0, \qquad (5.2.24)$$
$$\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)_{x^*} = \left(\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)_{x^*} =$$
$$= \frac{\sqrt{(a^4 - 8a^3 + 18a^2 - 16a + 7)\,\xi^2 + (2a^2 - 4a + 1)}}{\Sigma_0^2} > 0. \qquad (5.2.25)$$

В этой задаче

$$G_1(x_1,\ x_2) = u_1 - u_4 + \xi\,(u_3 - u_2),$$
$$G_2(x_1,\ x_2) = u_1 - u_4 + \xi\,(u_2 - u_3). \qquad (5.2.15)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай $a = 1/2$; кроме того, мы модифицируем нормированную матрицу платежей, полагая оба выигрыша в состоянии S_4 равными -2ξ (рис. 5.13). В результате состояния DC и $CD(S_2,\ S_3)$ станут состояниями локального равновесия, так как состояние $S_4(DD)$ слишком дорого и «не по карману» игрокам [игра для начинающих, или «желторотых» (ИЖ)]. После несложных преобразований, ана-

логичных приведенным выше, получаем новые выражения для G_1 и $G2$:

$$G_1 = u_1 - 2\xi u_4 + \xi(u_3 - u_2),$$
$$G_2 = u_1 - 2\xi u_4 + \xi(u_2 - u_3). \tag{5.2.26}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{32\xi x_2^2 + 4(4 - 11\xi)x_2 + 12\xi - 6}{[4 - 8x_1x_2 + 3(x_1 + x_2)]^2},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{32\xi x_1^2 + 4(4 - 11\xi)x_1 + 12\xi - 6}{[4 - 8x_1x_2 + 3(x_1 + x_2)]^2}. \tag{5.2.27}$$

Для стационарных значений наклонностей x_1, x_2 получаем выражения

$$x = \frac{\left(\frac{11}{4}\xi - 1\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{5}{4}\xi\right)^2}}{4\xi} = \begin{cases} \frac{3}{8} \\ \frac{2\xi - 1}{2\xi} \end{cases}. \tag{5.2.28}$$

Стационарное состояние опять оказывается неустойчивым или нейтрально устойчивым. Точнее, состояния (3/8, 3/8) и

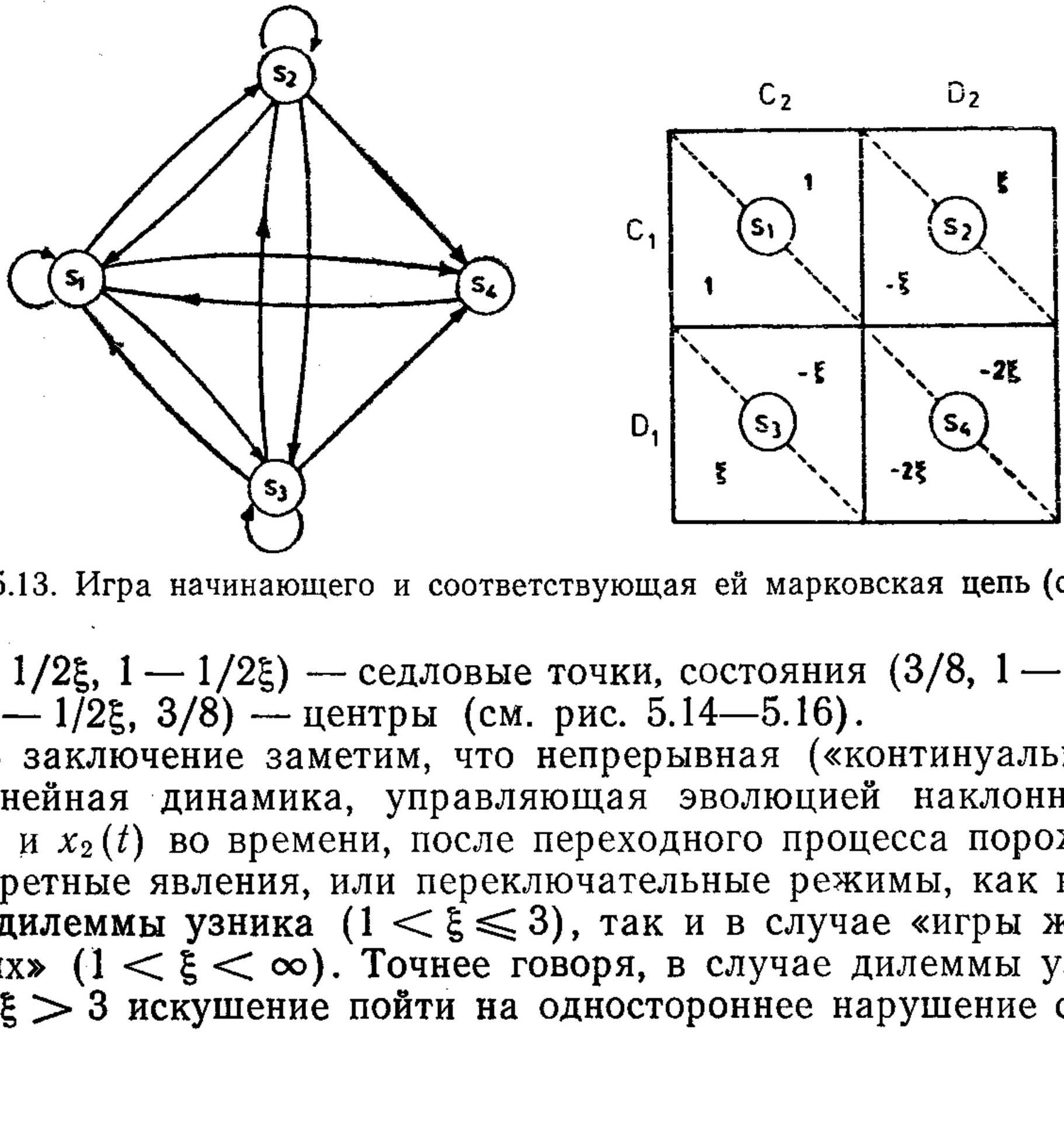


Рис. 5.13. Игра начинающего и соответствующая ей марковская цепь (слева).

$(1 - 1/2\xi, 1 - 1/2\xi)$ — седловые точки, состояния $(3/8, 1 - 1/2\xi)$ и $(1 - 1/2\xi, 3/8)$ — центры (см. рис. 5.14—5.16).

В заключение заметим, что непрерывная («континуальная») нелинейная динамика, управляющая эволюцией наклонностей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ во времени, после переходного процесса порождает дискретные явления, или переключательные режимы, как в случае дилеммы узника ($1 < \xi \leqslant 3$), так и в случае «игры желторотых» ($1 < \xi < \infty$). Точнее говоря, в случае дилеммы узника при $\xi > 3$ искушение пойти на одностороннее нарушение согла-

шения столь велико, что «порог доверия» ($x^* \leqslant 1$ или $u^* \leqslant 1$), выше которого происходит кооперация, установиться не может: при любых начальных значениях x_1 и x_2 система выходит на некооперативный режим (DD). Вероятность u захвата (кооперативный режим) в (CC) связана с пороговой вероятностью x^*, выше которой происходит бифуркация, соотношением $u = 2(1-x^*)^2$ (см. рис. 5.12). Максимальное значение (при

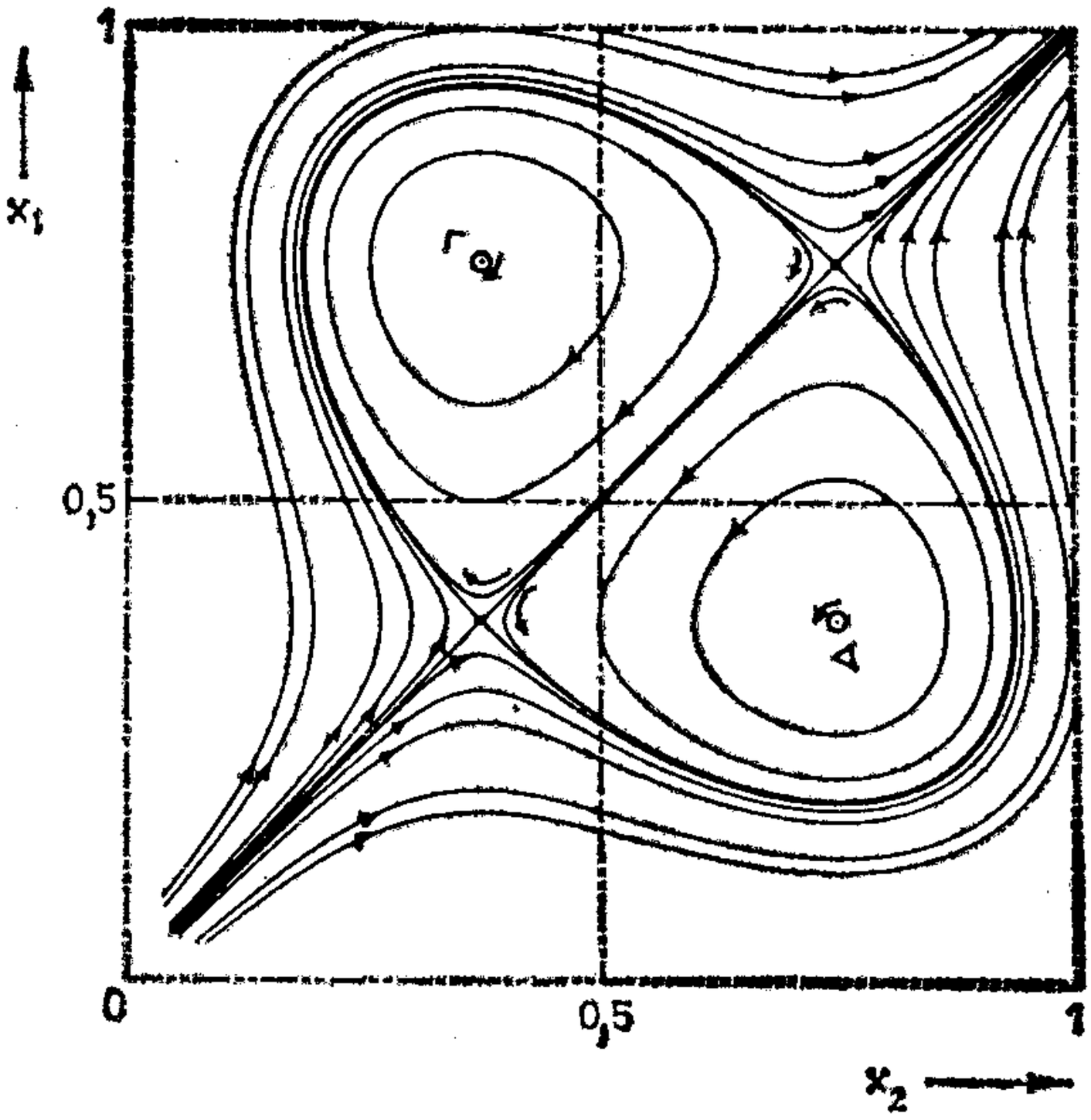


Рис. 5.14. Описание игры начинающего в пространстве состояний ($\xi = 2$); Δ и Γ — два центра.

$\xi = 1$) вероятности и составляет $\sim 17{,}2\ \%$. В случае игры желторотых соответствующая вероятность кооперативного поведения равна $1 - \pi ab$ при $\xi < 2{,}4$, где a, b — оси

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2\xi}\right), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2\xi}\right)$$

эллипса сепаратрис на рис. 5.14. При $\xi \geqslant 2{,}4$ (рис. 5.15, 5.16) пространство состояний разделяется на три области R_1, R_2 и R_3. Вероятность захвата в состояние (CC) при $\xi \to \infty$ быстро убывает до нуля, если предположить, что границы «поглощающие», так как тогда траектории, начинающиеся в «юго-западной» области, могут остановиться, натолкнувшись на границы $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ или $x_2 = 0$ и $x_1 = 1$. Но если считать границы «скользкими», то траектории, начинающиеся в «юго-западной» области, могут доходить до угла с состоянием (CC) (рис. 5.16). При

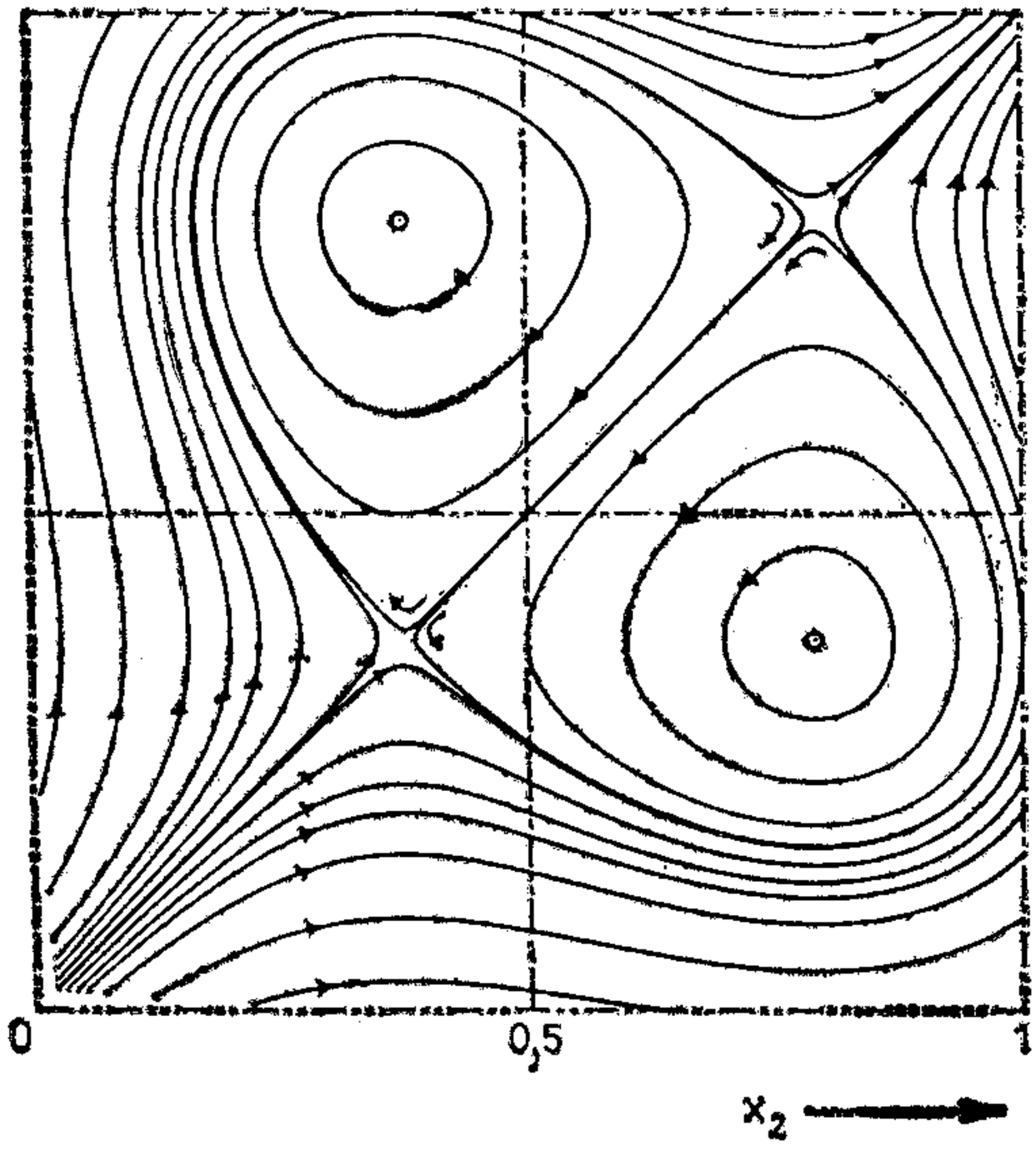


Рис. 5.15. Описание игры начинающего в пространстве состояний ($\xi = 2{,}4$).

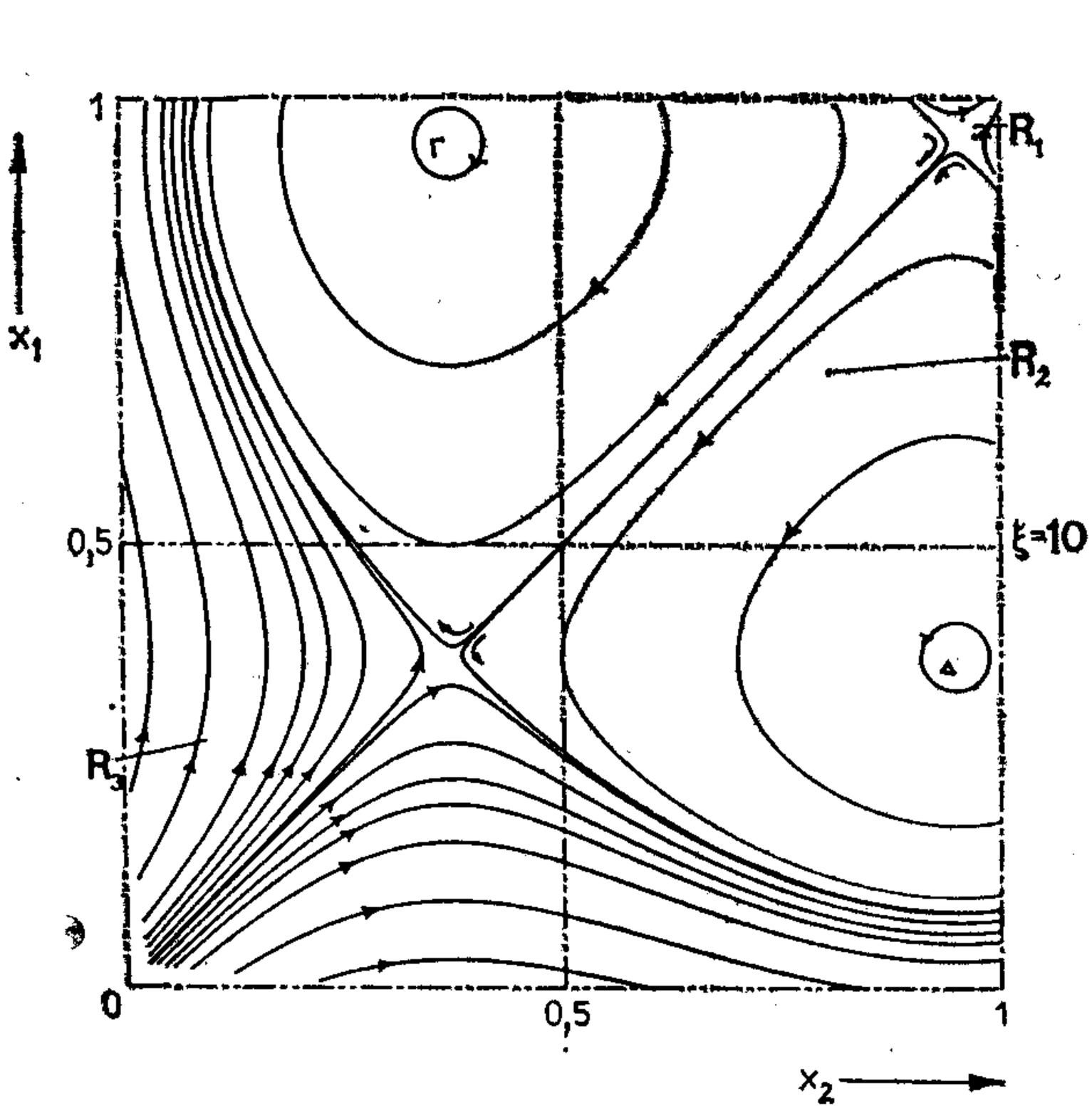


Рис. 5.16. Описание игры начинающего в пространстве состояний ($\xi = 10$); Δ и Г — два центра. R_1, R_2 и R_3 указывают три различные области в пространстве состояний.

этом, когда параметр ξ становится больше 2,4, вероятность кооперативного поведения *возрастает* и при $\xi \to \infty$ стремится к 1. Этот исход, конечно, в большей мере согласуется с реальными случаями высоких ставок в конфликтах с шантажом.

В случае *асимметричной* игры желторотых сепаратриса исчезает и вероятность захвата в состояние (CC) всегда близка к 1 [5.2].

5.3. Межвидовая борьба

Начнем с рассмотрения одной популяции, эволюционирующей во времени $x(t)$ при условии, что между отдельными особями данного вида нет сколько-нибудь заметной борьбы за (ограниченные) ресурсы и что конкуренции нет также между популяцией $x(t)$ и популяцией, которая служит добычей для $x(t)$. При этих условиях применим закон Мальтуса, согласно которому скорость увеличения размеров популяции пропорциональна ее текущим размерам, т. е. $dx/dt = \alpha x$ или $x(t) = x_0 \exp(\alpha t)$, где $\alpha > 0$ — так называемый коэффициент рождаемости.

Таким образом, размеры популяции со временем возрастают экспоненциально. Однако такая тенденция длится не вечно: перенаселенность неизбежно порождает парные взаимодействия, которые пагубно сказываются на экспоненциальном росте популяции либо из-за конкуренции за пространство и пищу, либо вследствие распространения эпидемических заболеваний (см. разд. 5.8). Немаловажное значение имеет и то обстоятельство, что особи, образующие популяцию, не только рождаются, но и умирают. Если β — средний показатель смертности (вызываемой всеми тремя перечисленными выше причинами), то мы приходим к динамическому соотношению

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2, \tag{5.3.1}$$

известному под названием логистического уравнения.

Уравнение (5.3.1) может быть решено аналитически; из педагогических соображений мы воспроизведем здесь это решение.

Разделяя в уравнении (5.3.1) переменные, получаем

$$\int \frac{1}{x(\alpha - \beta x)}\, dx = \int dt. \tag{5.3.2}$$

Так как

$$\frac{1}{x(\alpha - \beta x)} = \frac{1}{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta x)},$$

записываем уравнение (5.3.2) в виде

$$\frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{x} + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{1}{\alpha - \beta x}\, dx = \int dt$$

и, интегрируя, приходим к соотношению

$$\frac{1}{\alpha}[\ln x - \ln(\alpha - \beta x)] = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{\alpha - \beta x} = t + c, \qquad (5.3.3)$$

где c — постоянная интегрирования.

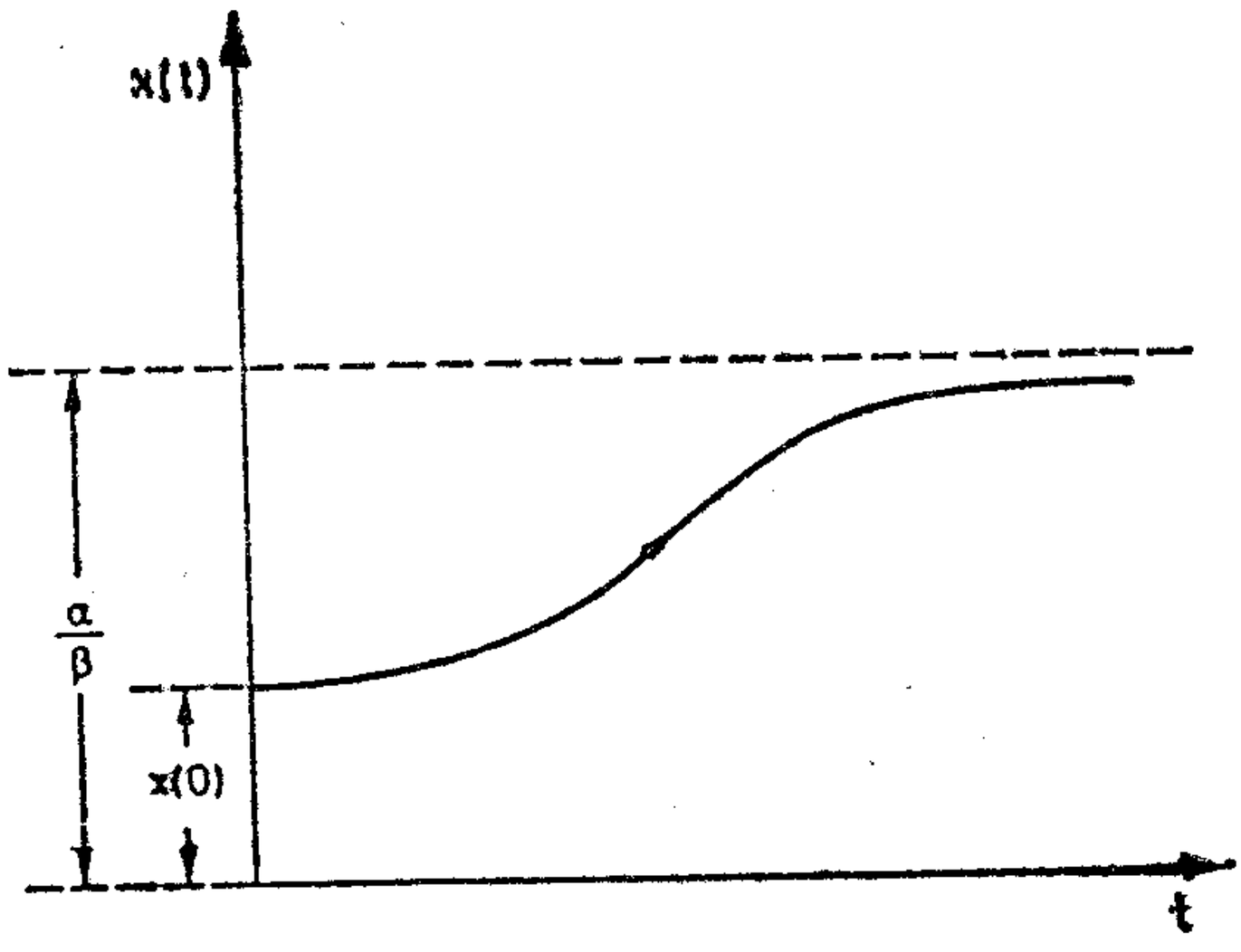


Рис. 5.17. Решение логистического уравнения.

Если $x(0)$ — начальная популяция при $t = 0$, то

$$c = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{x(0)}{\alpha - \beta x(0)}\right]. \qquad (5.3.4)$$

Таким образом, решение принимает вид

$$\ln\frac{x(t)}{\alpha - \beta x(t)} - \ln\frac{x(0)}{\alpha - \beta x(0)} = \alpha t, \qquad (5.3.5)$$

или

$$\ln\frac{x(t)[\alpha - \beta x(0)]}{x(0)[\alpha - \beta x(t)]} = \alpha t. \qquad (5.3.6)$$

Наконец, взяв экспоненты от правой и левой частей уравнения (5.3.6), получим

$$x(t) = \frac{x(0)\,\alpha e^{\alpha t}}{\alpha - \beta x(0) + \beta x(0)\,e^{\alpha t}}. \qquad (5.3.7)$$

Равновесная популяция получается из (5.3.7), если взять предел от $x(t)$ при $t \to \infty$, а именно (рис. 5.17):

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (5.3.8)$$

Следующий логический шаг в нашем анализе состоит в рассмотрении взаимосвязи двух популяций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Конкурен-

ция между этими двумя видами означает, что особи каждой из популяций *подавляют* репродукцию особей другой популяции. (В тривиальном случае — *гонке вооружений* — «взаимосвязь» между сторонами приводит к наращиванию военного потенциала, т. е. к неустойчивому равновесию.)

Можно записать следующую систему уравнений для скоростей роста, — по вполне понятным причинам она является двумерным обобщением логистического уравнения (5.3.1) для одного вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(\alpha_1 - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(\alpha_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2), \qquad (5.3.9)$$

где α_1, α_2 — коэффициенты рождаемости видов; α_{11}, α_{22} — показатели смертности видов; α_{12}, α_{21} — коэффициенты перекрестных связей (соответственно степени подавления вида I видом II и вида II видом I). В соответствии с приведенным выше описанием мы предполагаем, что *все* коэффициенты α_i и α_{ij} положительны.

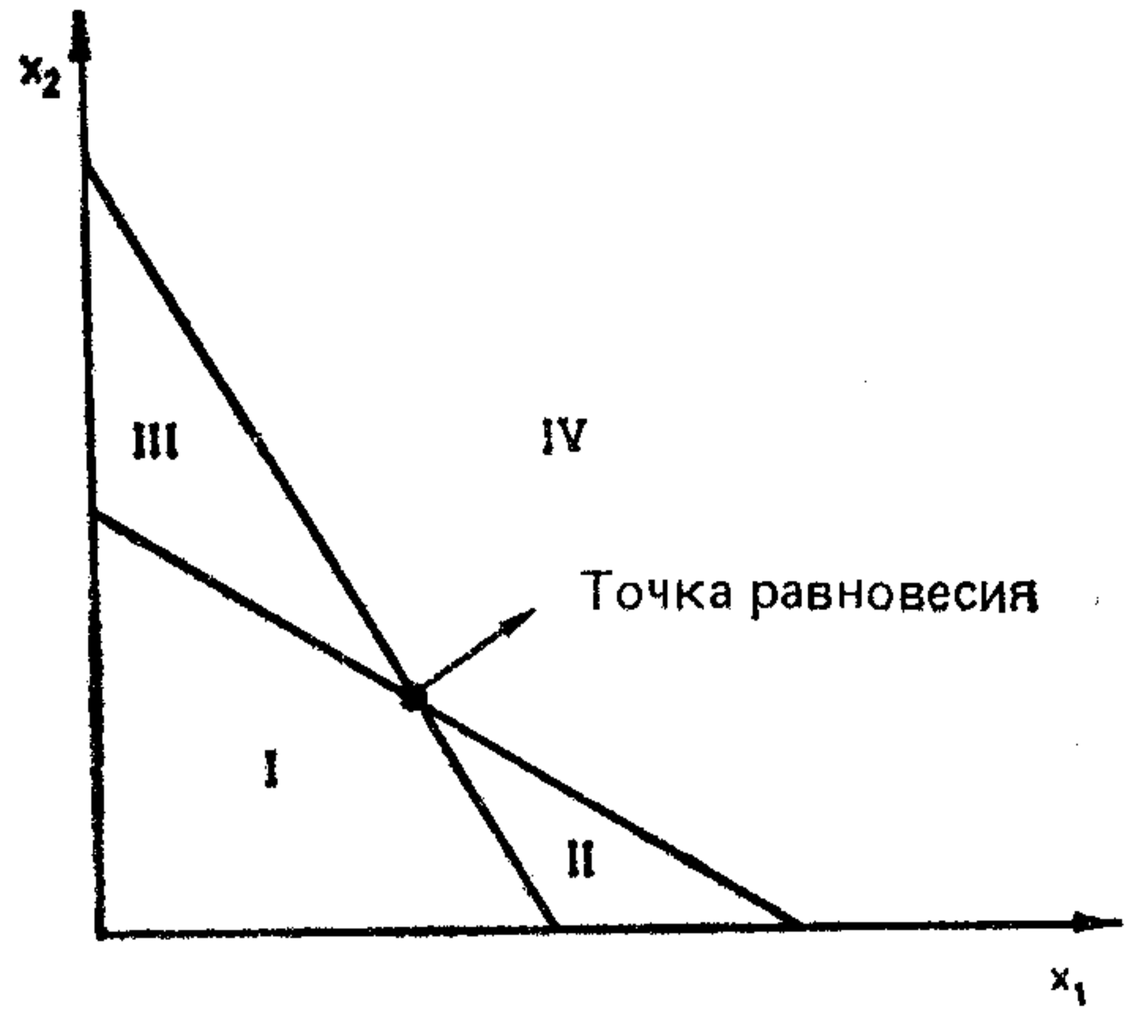


Рис. 5.18. Линии равновесия для двух конкурирующих видов.

Найдем стационарные состояния системы (5.3.9) и исследуем критерии их устойчивости. Координаты стационарных точек являются решениями системы уравнений

$$x_1(\alpha_1 - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2) = 0,$$
$$x_2(\alpha_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2) = 0. \qquad (5.3.10)$$

Следовательно, мы имеем два стационарных состояния $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha_2/\alpha_{22}$ и $x_1 = \alpha_1/\alpha_{11}$, $x_2 = 0$, соответствующих случаю, когда один из видов *вымирает*, а другой достигает своей равновесной популяции, когда он находится один в окружающей среде; *третье стационарное состояние* представляет большой интерес, так как оно может соответствовать устойчивому сосуществованию двух видов, а именно точке пересечения двух прямых

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \alpha_1,$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \alpha_2, \qquad (5.3.11)$$

изображенных на рис. 5.18.

При условии, что $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq \alpha_{21}\alpha_{12}$ координаты точки пересечения равны

$$x_1^* = \frac{\alpha_{22}\alpha_1 - \alpha_{12}\alpha_2}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}},$$

$$x_2^* = \frac{\alpha_{11}\alpha_2 - \alpha_{21}\alpha_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}.$$

Если эти величины положительны, то, округлив их до ближайшего целого числа, мы получим размеры популяций двух конкурирующих видов, которые могут сосуществовать и остаются неизменными.

На плоскости (x_1, x_2) уравнения (5.3.11) задают прямые, которые делят плоскость на четыре различные области, а именно: в области I x_1 и x_2 возрастают; в области II x_1 возрастает, x_2 убывает; в области III x_1 убывает, x_2 возрастает; в области IV x_1 и x_2 убывают. При этих условиях точка (x_1^*, x_2^*) — *устойчивая точка равновесия*, если $\alpha_{11}\alpha_2 > \alpha_{21}\alpha_1$ и $\alpha_{22}\alpha_1 > \alpha_{12}\alpha_2$. Если $\alpha_{11}\alpha_2 < \alpha_{21}\alpha_1$ и $\alpha_{22}\alpha_1 < \alpha_{12}\alpha_2$, то равновесие неустойчиво. «Победитель» в конкурентной борьбе зависит от начальных плотностей двух видов.

5.4. Выживание и вытеснение

Если популяции двух видов встречаются в одном и том же географическом регионе (занимают одну и ту же экологическую «нишу») и предъявляют одни и те же экологические требования к ресурсам, то гипотеза естественного отбора позволяет ожидать, что «наиболее приспособленный» вид полностью вытеснит своего конкурента. Это явление известно под названием принципа конкурентного исключения. Кратко суть его сводится к утверждению о том, что два взаимоисключающих конкурента не могут сосуществовать.

Чтобы построить модель процесса конкурентного исключения, рассмотрим случай двух конкурирующих видов с одинаковыми экологическими требованиями, сосуществующих в течение какого-то времени в среде, способной поддержать существование ровно N особей обоих видов. Предположим, что первоначально в среде обитают K особей вида I и $N - K$ особей вида II. Предположим, что конкуренция двух видов осуществляется в серии парных столкновений. При каждом таком столкновении число особей увеличивается на единицу с вероятностью p для вида I и с вероятностью $q = 1 - p$ для вида II. Два вида одинаково хорошо приспособлены, если $p = q = 1/2$. Вид I имеет преимущество в естественном отборе перед видом II, если $p > q$. Предполагается также, что вероятность p не зависит от размеров популяций N и $N - K$ двух видов.

Пусть p_K — вероятность того, что вид I вытеснит вид II, если первоначально популяция вида I насчитывает K особей. (Если начальная популяция насчитывает 0 особей, то $p_0 = 0$, т. е. вид I уже вытеснен. Если начальная популяция насчитывает N особей, то $p_N = 1$, так как вид I уже вытеснил вид II.) После первого парного столкновения размер популяции вида I становится равным $K+1$ или $K-1$ с вероятностью, соответственно, p и q.

Таким образом, вероятность pK есть сумма двух членов, а именно:

$$p_K = pp_{K+1} + qp_{K-1}, \tag{5.4.1}$$

где pp_{K+1} — вероятность того, что популяция вида I насчитывает $K+1$ особей после одного столкновения и затем вытесняет вид II, а qp_{K-1} — вероятность того, что популяция вида I насчитывает $K-1$ особей после первого столкновения и затем вытесняет вид II.

Будем искать решение уравнения (5.4.1) в виде $p_K = \lambda^K$. Подставляя это выражение в (5.4.1), получаем

$$\lambda^K = p\lambda^{K+1} + q\lambda^{K-1}, \tag{5.4.2}$$

или

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p},$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}. \tag{5.4.3}$$

При $p = q = 1/2$ корни (5.4.3) равны. Следовательно, общее решение уравнения (5.4.1) имеет вид

$$p_K = c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^K, \quad \text{если} \quad p \neq 1/2, \tag{5.4.4}$$

$$\text{и} \quad p_K = c_1 + c_2 K, \quad \text{если} \quad p = 1/2,$$

где c_1, c_2 — постоянные, которые еще требуется найти. Из определения вероятности p_K, как мы видели, следует, что $p_0 = 0$ и $p_N = 1$. Поэтому, если $p \neq 1/2$, то $c_1 + c_2 = 0$ и $c_1 + c_2(q/p)^N = 1$, откуда

$$c_1 = \frac{1}{1-(q/p)^N}, \quad c_2 = -\frac{1}{1-(q/p)^N}. \tag{5.4.5}$$

Если $p = 1/2$, то $c_1 = 0$ и $c_2 N = 1$, или $c_2 = 1/N$. Таким образом, решения уравнения (5.4.1) имеют вид

$$p_K = \frac{1 - (q/p)^K}{1 - (q/p)\,N}, \quad \text{если} \quad p \neq 1/2, \qquad (5.4.6)$$

$$p_K = \frac{K}{N}, \quad \text{если} \quad p = 1/2.$$

Тем самым вероятность вытеснения одного вида другим вычислена явно.

Рассмотрим в качестве примеров различные варианты развития популяции, общей численностью $N = 1000$. Если каждая из двух популяций вначале насчитывала 500 особей и если $p = q = 1/2$, то вероятность того, что вид I вытеснит вид II составляет $p_{500} = 500/1000 = 1/2$ — в этом случае ни один из видов не имеет преимущества перед другим в межвидовой борьбе. Но если $p = 2/3$ и $q = 1/3$, то

$$p_{500} = \frac{1 - (1/2)^{500}}{1 - (1/2)^{1000}} = \frac{1}{1 + (1/2)^{500}} \sim 1.$$

Мы видим, что в этом случае вид II с вероятностью, близкой к единице, будет вытеснен видом I. Тот же результат получается даже при небольших конкурентных преимуществах (вероятности p, превышающей 1/2 на *не слишком* большую величину) с теми же начальными популяциями. Заметим, что если $p = 2/3$, $q = 1/3$ и начальная популяция вида I состоит из 1 особи, а начальная популяция вида II — из 999 особей, то вероятность того, что вид I вытеснит вид II, равна

$$p_1 = \frac{1 - (1/2)^1}{1 - (1/2)^{1000}} \sim 1/2.$$

Отсюда, например, следует, что если одна особь более приспособленного вида вторгается на территорию другого вида, то с вероятностью 1/2 пришелец вытеснит коренных обитателей; если $p = q = 1/2$, то $p_1 = 1/1000$. Иначе говоря, если два вида одинаково хорошо приспособлены, то вероятность того, что интродукция одной особи приведет к вытеснению другого вида, очень мала.

Нетрудно доказать, что если, например, вид I имеет селективное преимущество $(p > q)$, то вероятность вытеснения вида I равна

$$1 - p_K = \frac{(p/q)^{N-K} - 1}{(p/q)^N - 1}, \qquad (5.4.7)$$

где K — размер начальной популяции вида I, а N — полное число особей обоих видов. Мы видим, что если N мало, то вероятность вытеснения более приспособленного вида *не мала*.

5.5. Некоторые элементарные сведения из генетики: отбор и приспособленность

Конфликты между популяциями, которые мы рассматривали до сих пор,— это конфликты между популяциями *фенотипов*, т. е. взрослых самостоятельных организмов, индивидов. Понятие *приспособленности* и *адаптации* входило в наши рассмотрения на чисто эвристической основе. Как проследить происхождение адаптивной тенденции до генотипа, т. е. до наследственного «арсенала» организма, о котором идет речь? Вопрос этот далеко не праздный, так как в конечном счете мы пытаемся понять всю область динамического взаимодействия между иерархическими системами в терминах процесса взаимного моделирования, который, как можно предполагать, начинается с *самого нижнего* биологического уровня, а именно: с генетического уровня.

Современная теория наследственности «характера», т. е. способности осуществлять определенные моды поведения на фенотипическом уровне (или на фенотипических уровнях) формируется в терминах менделевских принципов передачи генов от родителей к потомству. Каждый конкретный ген может существовать в нескольких формах, или *аллелях*. Рассмотрим простейший случай гена с двумя аллелями A и α. Гены встречаются в каждой клетке организма и группируются в хромосомы. За исключением репродуктивных клеток гены встречаются *парами*, образуя парные хромосомы.

Три возможные пары генов AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$ определяют три возможных генотипа организма относительно этого гена. Генотипы AA и $\alpha\alpha$ называются *гомозиготными*, или чистыми, генотип $A\alpha$ называется *гетерозиготным*, или гибридным. Репродуктивные клетки (т. е. сперматозоиды и яйцеклетки) имеют непарные хромосомы и поэтому несут только одну копию каждого гена. Гены потомства возникают при спаривании генов двух репродуктивных клеток — по одному гену от каждого родителя. Если оба родители гомозиготны, то генотип потомства полностью определен. Например, если у одного родителя генотип AA, а у другого $\alpha\alpha$, то у их потомства может быть *только* генотип $A\alpha$. С другой стороны, если оба родителя гетерозиготны, то генотип потомства *не определен*. Например, если оба родителя гетерозиготны, то у их потомства может быть с вероятностью 1/4 генотип AA, с вероятностью 1/2 генотип $A\alpha$ и с вероятностью 1/4 генотип $\alpha\alpha$ (предполагается, что жизнеспособность потомства во всех трех случаях одинакова). (Многие характеристики организмов, такие, как альбинизм человека, определяются одним геном. Другие особенности, например рост,

управляются кооперативными эффектами очень большого числа генов и нередко подвержены сильному воздействию различных факторов окружающей среды.)

Одна из двух аллелей данного гена, например A, называется *доминантной*, если генотипы AA и $A\alpha$ неотличимы друг от друга. В этом случае аллель α называется *рецессивной*, если существуют наблюдаемые различия между генотипом $\alpha\alpha$ и генотипами AA и $A\alpha$. Если бы особи популяции данного вида можно было классифицировать по генотипам AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$, то тем самым мы определили бы распределение двух аллелей в популяции. (В случае, когда, например, генотипы AA и $A\alpha$ неотличимы, такая классификация невозможна.) Пусть x, y, z — относительные доли (пропорции) трех генотипов в популяции. Предположим, что эти пропорции могут быть вычислены. Тогда пропорции p и q аллелей A и α в той же популяции, соответственно, равны $p = x + (y/2)$ и $q = 1 - p = (y/2) + z$. Мы воспользовались здесь тем, что аллель A составляет 100 % генотипа AA (на долю которого приходится x-я часть популяции) и 50 % генотипа $A\alpha$. Аналогичный подсчет легко может быть проведен и для аллели α. (Второе уравнение следует из первого, так как $x + y + z = 1$.)

На практике нас часто интересует обратная задача, а именно определение относительной доли генотипов по известным пропорциям аллелей. В общем случае обратная задача не имеет единственного решения, так как в уравнение $p = x + (y/2)$ входят две неизвестные x и y. Чтобы получить еще одно независимое уравнение, иногда принимают гипотезу *случайного спаривания*, согласно которой вероятность спаривания данной особи с другой особью (того же вида) не зависит от генотипа другой особи. Во многих случаях это допущение нарушается.

Предположим, что в *большой* популяции родителей аллели A и α некоторого гена представлены в пропорциях p и $q = 1 - p$. Будем считать, что эти пропорции одинаковы для самцов и самок и что спаривание происходит случайным образом. Вычислим при этих предположениях пропорции трех генотипов AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$ в первом и последующих поколениях потомства.

Как было показано выше, особь первого поколения имеет генотип AA, если оба родителя передают ей по аллели A. Так как вероятность получить аллель A от любого из родителей равна p, вероятность появления генотипа AA у потомства равна p^2. Аналогично вероятность появления у потомства генотипа $\alpha\alpha$ равна q^2. Вероятность появления генотипа $A\alpha$ равна $2pq$, так как особи с наборами аллелей $A\alpha$ и αA имеют одинаковые генотипы. Таким образом, пропорции p_1 и q_1 аллелей A и α у по-

томства первого поколения равны

$$p_1 = p^2 + \frac{1}{2}(2pq) = p(p+q) = p,$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(2pq) + q^2 = q(p+q) = q.$$

Таким образом, в предположениях случайного спаривания и одинаковой жизнеспособности всех трех генотипов пропорции двух аллелей инвариантны относительно поколений потомства. Следовательно, после начального поколения пропорции трех генотипов AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$ остаются постоянными и равны соответственно p^2, $2pq$ и q^2.

Приведенные в разд. 5.4 рассуждения о выживании и вытеснении *двух* конкурирующих видов не принимают во внимание развитие конкурирующих популяций в последующих поколениях. Кроме того, в разд. 5.4 мы не связывали вероятности p и q успеха и неудачи при каждом парном взаимодействии с генетическими параметрами и параметрами окружающей среды. Однако в некоторых случаях разумно предположить, что p зависит главным образом от окружающих условий. Например, из полевых исследований известно, что температура и влажность являются ключевыми факторами, определяющими исход конкуренции между жуками двух видов. В других случаях исход конкурентной борьбы между двумя популяциями определяется главным образом генетическими факторами.

В этой связи представляет интерес исследовать условия, при которых в популяции одного вида происходит *конкуренция между* аллелями, а именно одна аллель некоторого гена может *вытеснять* другую аллель (тем самым обеспечивая селективное преимущество своему носителю). Рассмотрим среду, способную поддерживать n размножающихся особей в каждом последующем поколении. Любой ген с двумя аллелями A и α имеет в каждом поколении $2n$ представителей. Предположим, что в m-м поколении аллель A встречается λ раз, а аллель α $(2n - \lambda)$ раз. Определим вероятность того, что в следующем поколении аллель A встречается μ раз, а аллель α $(2n - \mu)$ раз при $\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. На языке теории марковских цепей можно сказать, что система имеет $2n + 1$ состояний, соответствующих популяциям, в которых встречается, соответственно, 0, 1, 2, ..., $2n$ копий аллели A. Эволюция марковской цепи при последовательных испытаниях соответствует последовательным поколениям рассматриваемой популяции. Чтобы определить марковскую цепь, нам необходимо вычислить вероятности перехода p_{ij} из i-го состояния в j-е (или в наших обозначениях $p_{\lambda\mu}$). Состояния u_0 и u_{2n} являются *поглощающими состояниями* в том смысле, что система может переходить в них, но не может выходить

из них (это означает, что $p_{0j} = 0$ и $p_{2nj} = 0$ при любом $j \neq 0, 2n$). Поглощающие состояния u_0, u_{2n} соответствуют популяциям, в которых *все* особи обладают, соответственно, генотипами $\alpha\alpha$ и AA.

Если ничто не свидетельствует об обратном, то мы можем снова принять гипотезы о случайном спаривании и о том, что ни один из трех генотипов AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$ не имеет селективного преимущества, приводящего к большей вероятности успешной репродукции. При таких предположениях популяция в $(m+1)$-м поколении определяется $2n$ повторными испытаниями биномиального эксперимента с вероятностью $1 - (\lambda/2n)$ появления аллели α в испытании. Вероятность μ «успешных» исходов (μ копий аллели A в следующем поколении) определяется биномиальной вероятностью

$$p_{\lambda\mu} = \binom{2n}{\mu} \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right)^{2n-\mu}. \tag{5.5.1}$$

Набор вероятностей перехода $p_{\lambda\mu}$ определяет марковскую цепь. Вероятность того, что аллель A или аллель α исчезает в следующем поколении, равна соответственно

$$p_{\lambda 0} = \left(1 - \frac{\lambda}{2n}\right)^{2n} \tag{5.5.2}$$

или

$$p_{\lambda, 2n} = \left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{2n}. \tag{5.5.3}$$

До сих пор мы предполагали, что ни одна из аллелей не дает селективного преимущества, которое *увеличивает* вероятность того, что данная аллель будет представлена в следующем поколении. Однако наблюдениями установлено, что существует отличная от нуля вероятность изменения пропорции гена от одного поколения к следующему. Этот эффект известен под названием «ошибка выборки», или «случайный дрейф генов». В очень малых популяциях такая случайная флуктуация пропорций генов может привести к исчезновению одной из аллелей из генетического банка.

Для моделирования селективного преимущества одной из аллелей необходимо модифицировать формулу для биномиальной вероятности $\lambda/2n$ так, чтобы аллель A была представлена в одном из $2n$ испытаний. Предположим снова, что популяция в $(m+1)$-м поколении определяется $2n$ повторными испытаниями биномиального эксперимента. Предположим также, что вероятность встретить аллель A в данном испытании равна $(\lambda/2n)^{\xi}$, а вероятность встретить в том же испытании аллель α равна $1 - (\lambda/2n)^{\xi}$, где ξ — некоторое положительное число.

Тогда вероятность того, что в следующем поколении встретятся μ копий аллели A, равна

$$p_{\lambda\mu}=\binom{2n}{\mu}\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\xi\mu}\left[1-\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\xi}\right]^{2n-\mu}, \qquad (5.5.4)$$

если в предыдущем поколении имеется λ копий аллели A. Следовательно, в этой более общей ($\xi \neq 1$) модели вероятности исчезновения аллели A или α в следующем поколении соответственно равны

$$p_{\lambda 0}=\left[1-\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\xi}\right]^{2n}, \qquad (5.5.5)$$

$$p_{\lambda 2n}=\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{2n\xi}. \qquad (5.5.6)$$

При $\xi < 1$ селективное преимущество имеет аллель α, при $\xi < 1$ — аллель A. Параметр ξ служит примером «показателя приспособленности». В некоторых случаях ξ зависит от таких факторов окружающей среды, как температура.

Резюмируя разд. 5.4.5, можно сказать, что селективное преимущество, генетическое или зависящее от окружающей среды, приводит к такому исходу «игры», при котором партнеры *не обязательно* должны «лично» участвовать в парной борьбе. Природа, так сказать, автоматически устанавливает правила и предрешает исход в отсутствие конкретных *фенотипов* (особей). Следующий пример (заимствованный из работы (5.3)) позволяет лучше понять это утверждение, но вызывает серьезные сомнения в правильности классического положения, согласно которому половая рекомбинация в конце концов исключает полиморфизм, т. е. разнообразие аллелей. Рассмотрим конфликт между организмом *хозяина* и *паразитом* (патогеном).

Любой вид взаимодействует не только со своим физическим окружением и конкурентами, но и с паразитами и патогенами. Взаимодействие хозяин — патоген отличается от обычной динамики хищник — жертва, изучением которой мы занимались до сих пор, из-за *несравнимости* в размерах генома, времени жизни поколения и скорости адаптации хозяина и патогена. *Патогены выиграли бы конкурентную борьбу* (за счет более высоких темпов эволюции) и оставили бы хозяев беззащитными, если бы не контрстратегии хозяина. По мнению Бремермана [5.3], основной отличительной особенностью контрстратегий хозяина является их *разнообразие*. Например, утверждается, что половая рекомбинация увеличивает разнообразия, создавая все новые генотипы путем случайного сочетания аллелей. Таким образом, пол и иммунологический полиморфизм являются «логической необходимостью» оборонительных стратегий, к которым вынуж-

дены прибегать виды-хозяева с их бóльшими геномами и бóльшим временем жизни поколения. Следуя Бремерману [5.3], мы хотим показать, что между хозяином и микропатогенами существует фундаментальное различие: последние, как мы уже отмечали, могут быстрее эволюционировать и адаптироваться к любым изменениям в их хозяине. Микропатогены эволюционируют на несколько порядков быстрее, чем многоклеточный хозяин. Это позволяет микропатогенам прорывать защиту хозяина, если тот генетически однороден (клон). В рамках развитого нами выше подхода можно сказать, что микропатогены могут в принципе «разгадывать код» своего противника и затем *моделировать* динамику своего хозяина и *управлять* ею.

(Как было показано выше, типичные математические генетические модели позволяют предсказывать, что полиморфизм должен встречаться редко, поскольку отбор быстро исключает аллели, не имеющие селективного преимущества по сравнению с другими. К счастью, в реальной жизни (по причинам, до конца не понятым) дело обстоит иначе. Подробности см. в работе [5.3].)

Если хозяин («обороняющаяся сторона») может путем половой рекомбинации эволюционировать быстрее, чем патоген («нападающая сторона»), то хозяин может опережать патоген за счет, так сказать, генетического давления. Это не означает, что как только вторгающийся в организм вирус «замаскируется» (включит в свою «оболочку» часть поверхности мембраны атакуемой им клетки), хозяин может изменить свои «самоопознавательные» антигены. Если же нападающая сторона эволюционирует быстрее, то обороняющаяся сторона не может «уклониться от схватки» и оказывается, как мы увидим в следующей главе, перед «трансвычислительной проблемой».

Следуя Бремерману, покажем, что микропатогены могут эволюционировать на несколько порядков быстрее, чем их (позвоночные) хозяева. Эволюционные процессы микропатогенов и хозяев действительно развиваются *в временных масштабах, которые отличаются очень сильно.* Например, селективная пролиферация лимфоцитов в ответ на антиген происходит за несколько дней в отличие от эволюции млекопитающих, происходящей по некоторым оценкам в течение $\sim 10^8$ лет. Однако вскоре после введения пенициллина появились бактерии, способные сопротивляться действию антибиотиков (аналогично тому, как вскоре после внедрения широко известного препарата ДДТ появились мухи, нечувствительные к его действию).

Рассмотрим теперь геном бактерии или вируса, связанный с полипептидами, которые облегчают сосуществование патогена с хозяином или размножение патогена за счет хозяина. Например, рассмотрим эволюцию антигенных полипептидов, которые «ма-

скируют» патоген от иммунной системы хозяина. (Такая имитация со стороны вируса, приводящая к маскировке, сводится в конце концов к способности патогена сжимать код хозяина и моделировать эволюцию хозяина.) Правдоподобно считать, что такого рода процесс начинается с последовательности аминокислот, *случайной* относительно конечно (имитируемой) последовательности. Последовательность аминокислот кодируется последовательностью нуклеотидов (разд. 4.5.9). Для каждого нуклеотидного локуса существуют *четыре* нуклеотида; каждый нуклеотидный локус может быть представлен *двумя битами.* Предположим, что переходы (обусловленные мутациями) между различными двоичными знаками равновероятны и что вероятность всех цифр одинакова и равна p.

Аналогично, «идеальный генотип» патогена определяется требованием, чтобы его последовательность нуклеотидов была *совместима* с ферментами хозяина. Предположим, что число нуклеотидов в геноме патогена равно $n/2$ (это соответствует n битам). Некоторое число, например m, этих нуклеотидов должны мутировать, чтобы достичь «идеального генотипа». Для бактерии $n \sim 10^8$, для вирусов $n \sim 10^{10}$. Предполагается, что в случайной полипептидной цепи первоначально около половины, т. е. $\sim 10^3$, соответствующих двоичных знаков «неверны».

Вероятность исправления по крайней мере одного знака из m неправильных битов равна $1-(1-p)^m$. С другой стороны, вероятность (недегенеративного) изменения среди $n-m$ правильных битов равна $(1-p)^{n-m}$, поэтому суммарная вероятность по крайней мере одной полезной мутации и отсутствия вредной мутации равна произведению их вероятностей, т. е.

$$F=(1-p)^{n-m}\left[1-(1-p)^m\right]=(1-p)^{n-m}-(1-p)^n. \qquad (5.5.7)$$

Дифференцируя F по p и приравнивая производную нулю, мы получаем p — вероятность оптимальной мутации, порождающей наибольшее число улучшенных мутантов:

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0 \rightarrow n-m=n(1-p)^m,$$

откуда

$$p=1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{1/m}, \qquad (5.5.8)$$

или

$$p_{\text{опт}} \sim \frac{1}{n},$$

так как $m \ll n$.

Мы видим, что вероятность оптимальной мутации приближенно равна обратному числу нуклеотидов в геноме. (Малые генотипы имеют преимущество перед большими.)

Вычислим теперь среднее число поколений, за которое патоген достигает идеального генотипа, т. е. генотипа, летального для хозяина (если тот не успеет выработать какие-то контрстратегии).

Критическая скорость мутации, при которой мутации действуют на уже адаптировавшуюся часть генома *быстрее*, чем та успевает экранироваться за счет отбора, называется «катастрофой ошибок». Эта критическая скорость мутаций приближенно равна скорости оптимальной мутации. Пусть $p_c = K/n$ (K — числовая константа) — вероятность, связанная с критической скоростью мутации. Тогда доля геномов без ошибок составляет

$$\sim \left(1 - \frac{K}{n}\right)^{n-m} \sim \left(1 - \frac{K}{n}\right)^{n} \sim e^{-K}. \qquad (5.5.9)$$

(Доля улучшенных генотипов Km/n сюда не входит.) Следовательно, при $K = 1$ лишь около $1/e$ потомков не хуже своих предков. При репродукции путем *деления* величина $K = \ln 2$ задает верхнюю границу для K, поэтому $p_c = (\ln 2)/n$.

Мы исходим помимо прочего из предположения «идеального отбора», понимая под этим, что все мутанты, у которых число «ошибок» превышает текущее наибольшее число «неправильных» битов, немедленно исключаются, а все улучшенные генотипы патогена подлежат распространению. *При каждом делении* вероятность исправления равна

$$(1 - p_c)^n \left[(1 - p_c)^{-m} - 1\right] = e^{-\ln 2}\left[(1 - p_c)^{-m} - 1\right] \approx \frac{\ln 2}{2}\left(\frac{m}{n}\right). \qquad (5.5.10)$$

Таким образом, среднее число поколений, необходимое для достижения идеального генотипа, пропорционально величине

$$n\,\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) \sim \frac{2}{\ln 2}\,n \ln (m), \qquad (5.5.11)$$

т. е. пропорционально числу нуклеотидов в патогенном геноме. Следовательно, малые патогены (вирусы) развиваются, пока не достигнут своего «идеала» и не станут летальными для генотипа своего хозяина, *быстрее*, чем более крупные патогены (бактерии, грибки и т. д.).

5.6. Игры между животными, избирающими видовые моды поведения (роли). Понятие эволюционно устойчивой стратегии

Особая категория игр с непостоянной суммой относится к области так называемых внутривидовых конфликтов. Было замечено, что в поединках между представителями одного и того же вида, например у млекопитающих, особенно, если животные

обладают «оружием», способным привести к летальному исходу, соблюдаются ограничения и запреты. Обычно в такого рода схватках побежденный партнер «сдается», принимая определенную символическую позу, например, подставляя победителю горло. Победитель *не убивает* побежденного оппонента, а позволяет тому удалиться. Мы видим, что во внутривидовых поединках природа проводит принцип «ограниченного вооруженного конфликта». Интересно понять, каким образом могли бы возникнуть запреты и ограничения на летальный исход, способствующие *индивидуальному* отбору, и построить соответствующие модели.

Пионерской работой в этой области по праву считается исследование Мейнард-Смита [5.4]. В дальнейшем мы по существу излагаем его основные идеи. Тот же круг идей имеет отношение и к проблемам контроля над вооружениями. Рассмотрим две стратегии, используемые каждым из участников парного конфликта: C (безопасную), применение которой не наносит сколько-нибудь заметного ущерба партнеру и D (опасную), которая с заданной априорной вероятностью может причинить серьезный ущерб. Эти две стратегии аналогичны стратегиям C («на пользу») и D («в ущерб») в дилемме узника и «игре желторотых», о которых мы уже говорили в разд. 5.2.2.

Предполагается, что генетическая структура индивида каким-то образом полностью определяет (в случае животного) последовательность используемых животным алгоритмов $CCCDDCD$ ...

Приведем примеры (более чем двух) *ролей*, т. е. алгоритмов чередований C, D, которые может выбирать животное, попавшее в конфликт.

1) «Голубь» (или «Мышь»). Индивид, избирающий «голубиную стратегию», никогда не прибегает к ходу D. Он начинает игру с хода C и в ответ на ход противника C делает ход C. *Если же* противник делает ход D, то «голубь» покидает поле боя, оставляя его (пищу, самку) противнику.

2) «Ястреб». Этот алгоритм всегда использует ход D и продолжается до тех пор, пока либо игрок не исчерпывает свои силы, либо пока противник не отступит.

3) «Буйвол». Всегда делает ход D, *если* начинает игру. Кроме того, буйвол делает ход D в ответ на ход C и ход C в ответ на ход D. Буйвол отступает, если противник два раза подряд делает ход D.

4) «Воздаяние». Тот, кто придерживается этой стратегии, делает ход C, *если* начинает игру, и отвечает ходом C на ход C своего противника и ходом D на ход D.

5) «Проба». Тот, кто выбирает эту стратегию, делает ход C, если начинает игру. Сделав ход C, он с большой вероятностью

повторяет ход *C*, но внезапно делает ход *D* (чтобы испытать своего противника). Если противник отвечает ходом *D*, то игрок считает уместным вернуться к стратегии *C*. В противном случае (если противник делает ответный ход *C*), игрок использует свое преимущество и делает следующий ход *D*.

Мы привели здесь пять различных ролей (читатель может придумать гораздо больше), которые могут последовательно выбираться двумя конкурентами во внутривидовой борьбе.

Возникает следующий вопрос. Предположим, что мы имеем *большую* популяцию. Что можно сказать о характере полиморфизма фенотипа, который возникнет в результате достаточно продолжительной конкуренции между парами индивидов? Какие формы поведенческого полиморфизма *устойчивы* и при каких условиях? Чтобы ответить на такие вопросы, обратимся к некоторым конкретным примерам, т. е. к конкретным численным экспериментам, проделанным при заданных значениях некоторых ключевых управляющих параметров.

Следуя Мейнард-Смиту и Прайсу [5.5], предположим, что каждая конкурентная борьба, если она не завершается раньше отступлением и серьезной травмой одного из участников, заканчивается после конечного (фиксированного) числа ходов.

Управляющими параметрами в рассмотренном нами конкретном примере были выбраны следующие:

— вероятность серьезного повреждения от одного хода *D* противника (10 %),

— вероятность того, что участник, избравший стратегию «Проба», решится испробовать своего противника (5 %),

— выигрыш за победу (противник покинул поле боя или получил серьезное повреждение (60),

— выигрыш за получение серьезного повреждения (—100);

— выигрыш за неполучение серьезного повреждения при ходе *D* противника (—2),

— выигрыш от экономии времени и энергии при отсутствии серьезных повреждений варьируется от 0 (продолжительные испытания) до +20 (непродолжительные испытания).

Мы испробовали все попарные комбинации стратегий более чем в тысяче игр. В табл. 5.1 приведены средние выигрыши для каждой роли в сочетании с каждой ролью противника.

Роль называется устойчивой, если платеж в соответствующем месте на диагонали наибольший из платежей в том же столбце, которые в свою очередь являются наибольшими в своих строках. Это означает, что роль устойчива, если соответствующая стратегия — наилучшая из всех остальных. Из табл. 5.1 видно, что популяция, состоящая только из индивидов, использующих стратегию «Воздаяние», устойчива (чего нельзя сказать о популяции, состоящей, например, только из ястребов

Таблица 5.1. Средние платежи, получаемые игроком, придерживающимся различных ролей, или стратегий, в паре с каждой из стратегий противника

Стратегия игрока	Стратегия противника				
	Г	Я	Б	В	П
Голубь (Г)	29	19,5	19,5	29	17,2
Ястреб (Я)	80	—19,5	74,6	—18,1	—18,1
Буйвол (Б)	80	4,9	41,5	11,9	11,2
Воздаяние (В)	29	—22,3	57,1	29	23,1
Проба (П)	56,7	—20,1	59,4	26,9	21,9

или буйволов). Таким образом, мы видим, что стратегии «*ограниченного* конфликта» могут быть в принципе объяснены на основе *индивидуального отбора.* Разумеется, встречаются более сложные ситуации, такие, как приведенная выше, когда полиморфизм прокладывает путь «конформизму» — каждый индивид выбирает стратегию «Воздаяние».

Предположим теперь, что популяция состоит почти исключительно из ястребов и буйволов. Как видно из табл. 5.1, «Ястреб» более выгодная стратегия, чем «Буйвол» (средний выигрыш (74,6) для ястреба наибольший, если его противник действует, как буйвол). В свою очередь «Буйвол» более выгодная стратегия, чем «Ястреб» (средний выигрыш буйвола, играющего против ястреба, положителен). Следовательно, мы имеем систему зависящих от частоты отборов, приводящих к *устойчивому* полиморфизму, который в свою очередь приводит к устойчивой популяции ястребов и буйволов. Таким образом, все остальные типы, отличные от ястребов и буйволов, не имеют селективного преимущества и не распространяются. На этот результат не влияет присутствие нескольких особей, избравших стратегию «Голубь», так как «Ястреб» и «Буйвол» оказываются наилучшими стратегиями (выигрыш 80) и в том случае, если противник — голубь.

Все рассмотренные нами до сих пор стратегии (роли) являются чистыми стратегиями. А как обстоит дело со смешанными стратегиями? Предположим, что образующие популяцию особи вступают в конкуренцию, следуя описанным выше стратегиям и *случайным образом разбиваясь на пары.* Каждая особь воспроизводит себе подобных (т. е. особей, использующих ту же стратегию) пропорционально полученному ей выигрышу. Если в игре существует «эволюционно устойчивая стратегия», то популяция эволюционирует к ней. Точнее говоря, эволюционно устойчивая стратегия — это смешанная стратегия, обладающая тем свойством, что, если большинство образующих популяцию

особей принимают ее, то никакая стратегия-мутант не может проникнуть в популяцию. Иными словами, смешанная стратегия эволюционно устойчива, если не существует стратегии-мутанта, обеспечивающей бóльшую приспособленность принявшим ее особям.

В более абстрактном виде то же самое можно выразить следующим образом. Предположим, что чистые стратегии (моды поведения) для внутривидовой конкуренции перенумерованы числами 1, 2, ..., n и что α_{ij} — выигрыш, получаемый игроком от использования чистой стратегии i, когда его противник использует чистую стратегию j. Тогда $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q_j$ — выигрыш, обеспечиваемый чистой стратегией i против смешанной стратегии, задаваемой вектором вероятностей

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{n} \sum^{n} \alpha_{ij} p_i q_j = \mathbf{p} A \mathbf{q} \tag{5.6.1}$$

— выигрыш, обеспечиваемый смешанной стратегией $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ против смешанной стратегии $\mathbf{q}$.

Пусть A — матрица платежей и $\Omega_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\right)$ — симплекс всех возможных стратегий. Стратегия $\mathbf{p} \in \Omega_n$ называется эволюционно устойчивой стратегией, если при возмущении популяции, использующей эту стратегию, мутацией, вводящей небольшую популяцию с стратегией $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, стратегия $\mathbf{p}$ в новой смешанной популяции оптимальнее, чем стратегия $\mathbf{q}$. Количественно это означает: стратегия $\mathbf{p}$ эволюционно устойчива, если при всех $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ выполняется неравенство $\mathbf{p}A\mathbf{q} \geqslant \mathbf{q}A\mathbf{p}$ (причем $\mathbf{p}A\mathbf{p} > \mathbf{q}A\mathbf{q}$), или

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i \alpha_{ij} p_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_j \alpha_{ij} p_j. \tag{5.6.2}$$

Следовательно, $\mathbf{p}$ — лучший ответ против самого себя, и оптимальнее любого альтернативного наилучшего ответа $\mathbf{q}$, чем $\mathbf{q}$ против самого себя.

В популяции со смешанной стратегией $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выигрыш, обеспечиваемый стратегией i, равен $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$, в то время как средний выигрыш равен $\sum_{K=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{Kj} x_K x_j$. Естественно предположить, что скорость возрастания $\dot{x}_i / x_i$ равна разности этих двух выигрышей. Таким образом, наша игра «сво-

дится» к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j - \sum_{K=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_K\alpha_{Kj}x_j\right) \qquad (5.6.3)$$

в пространстве состояний Ω_n. Эта система уравнений намного сложнее той, которую мы рассматривали при изучении игр с постоянной суммой и парадоксальных игр с непостоянной суммой. В общем случае получить аналитические решения для стационарных режимов оказывается невозможно даже при $n = 2$. При $n > 2$ динамика развертывается в пространстве состояний трех и более измерений, и соответствующее обсуждение мы отложим до гл. 6. Но, как бы то ни было, решение для стационарного режима системы (5.6.3) позволяет оценить долю (в процентах) устойчивых режимов в полиморфной популяции.

5.7. Игра конкурентно-кооперативного производства и обмена. Понятие «паразит» на символическом уровне

Рассмотрим две крупномасштабные системы x, y (люди, организации), производящие два различных продукта x и y. Каждая система отдает другой некоторую долю q своей продукции, а остальное (составляющее долю $p = 1 - q$) оставляет себе. Проанализируем эту ситуацию, следуя работе Рапопорта [5.6].

Нас интересует динамика эволюции продуктов x и y, поэтому необходимо задать математические ожидания выигрышей для обоих партнеров. Если средние платежи равны соответственно G_x и G_y, то естественно снова обратиться к алгоритму, который по существу означает, что скорость возрастания или убывания производства x или y зависит от дифференциального выигрыша каждого партнера, оцениваемого по производству x и y. Мы придерживаемся принципа, согласно которому две рассматриваемые нами системы способны адаптироваться друг к другу по заданным «правилам обмена» (т. е. заданным p и q), чтобы максимизировать свою полезность, или «рентабельность» (выигрыш), путем контроля за выходом продукции. Предполагается, что так вел бы себя индивид, предоставленный самому себе: чем больше он работает, тем больше он производит, и тем больше получаемый им выигрыш. Но после того, как будет превзойден некоторый уровень производительности, «усталость» системы производства может все больше и больше снижать выигрыш из-за все возрастающей отрицательной «полезности». В некоторой точке суммарный выигрыш достигает максимума; именно в этой точке индивид и зафиксирует выход своей продукции.

Возникает вопрос: «в какой мере полезность зависит от вознаграждения и объема производства?» Относительно объема производства мы примем простейшее из возможных предположений: будем считать, что (отрицательная) полезность из-за усталости пропорциональна объему производства. Что касается вознаграждения, то мы будем придерживаться здесь так называемого принципа *сокращающегося дохода*: при возрастании вознаграждения полезность также возрастает, но с убывающей скоростью (прибавка в 1000 марок означает для человека, зарабатывающего 3000 марок в месяц, больше, чем для человека, зарабатывающего в месяц 20 000 марок).

Если рост полезности (u) обратно пропорционален уже полученному вознаграждению (r), то в нашем случае полная полезность равна

$$\frac{du}{dr} = \frac{K}{r}, \tag{5.7.1}$$

где K — константа. Тогда $du = Kdr/r$ и $u = K \ln r + A$. Пусть $A = 0$. И в нашем случае полная полезность равна

$$\begin{aligned} G_x &= \ln(r_x) - \beta x \quad \text{для партнера } X, \\ G_y &= \ln(r_y) - \beta y \quad \text{для партнера } Y. \end{aligned} \tag{5.7.2}$$

(Мы предполагаем, что «фактор усталости» β одинаков для обоих партнеров. Аналогичные предположения сделаны и относительно долей p, q (у обоих партнеров p и q одинаковы).) Какой вид имеют выражения для r_x, r_y?

Ясно, что вознаграждение r_x партнера X содержит член $px + py$, а вознаграждение r_y партнера Y содержит, соответственно, член $qx + py$. Из соображений нормировки мы полагаем $r_x = 1 + px + qy$ и $r_y = 1 + qx + py$ с тем, чтобы $G_x = 0$, $G_y = 0 (\ln 1 = 0)$ при $x = 0$, $y = 0$. Тогда наши динамические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\ln(1 + px + qy) - \beta x], \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\ln(1 + qx + py) - \beta x]. \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

Из уравнений (5.7.3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{1 + px + qy} - \beta, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{q}{1 + qx + py} - \beta. \end{aligned} \tag{5.7.4}$$

Исследуем природу и устойчивость стационарных состояний (если таковые существуют). Стационарные состояния опреде-

ляются уравнениями

$$y_1(x) = px + qy = (p/\beta) - 1,$$
$$y_2(x) = qx + py = (p/\beta) - 1. \qquad (5.7.5)$$

Это — две прямые («оптимальные линии»), содержащие все точки равновесия для каждого из партнеров, т. е. у каждого из партнеров имеется точка равновесия при каждом значении вы-

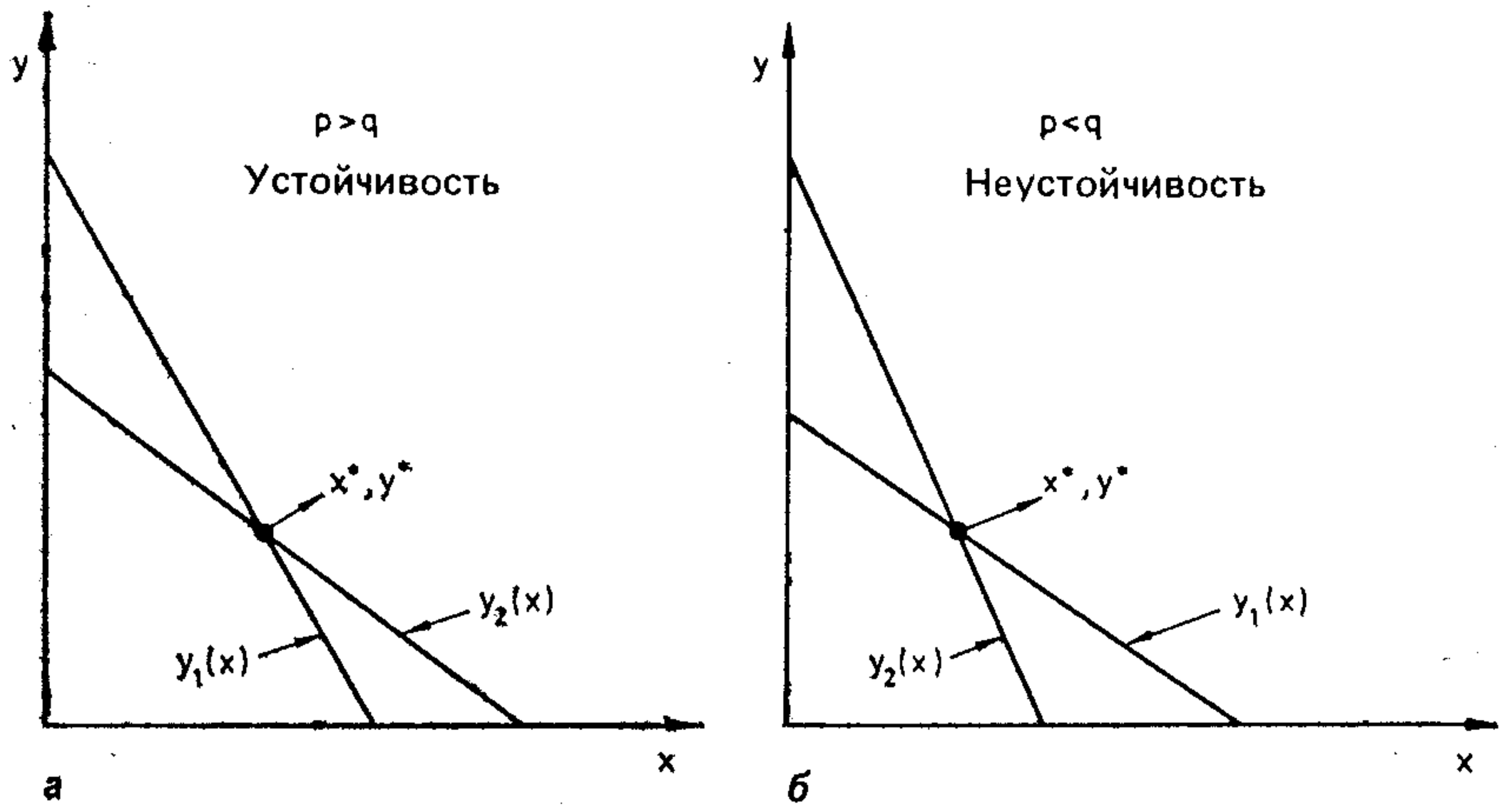


Рис. 5.19. Линии равновесия для игры «обмен продукцией».

хода другого. Поэтому каждый из игроков будет пытаться, варьируя свой выход, «посадить» общую точку на *свою* оптимальную линию. Следует иметь в виду, однако, что каждый из игроков управляет отдельной координатой: X может перемещаться только по горизонтали, Y — только по вертикали (рис. 5.19). Из уравнений (5.7.4) мы заключаем, что точка равновесия

$$x^* = y^* = (p/\beta) - 1 \qquad (5.7.6)$$

может находиться в первом квадранте ($x > 0$, $y > 0$), только если $p > \beta$. Это означает, что либо p не слишком мало, либо β не слишком велика. В свою очередь это означает, что либо доля продукции, оставляемая индивидом себе, не должна быть мала, либо «фактор усталости» не должен быть слишком велик.

Исследуем теперь устойчивость точки равновесия (5.7.6). Точка равновесия называется устойчивой, если в ее окрестности точка, определяемая усилиями игроков, стремится двигаться *к ней*, когда игроки пытаются максимизировать свои *собственные* относительные полезности G_x, G_y. Если точка, определяе-

мая усилиями игроков, движется от точки (x^*, y^*), то равновесие неустойчиво.

Предположим, что $p > q$, т. е. оптимальная линия игрока X имеет больший наклон. Движение точки (x, y) можно представить себе следующим образом. Поскольку одна координата остается стационарной, игрок, управляющий другой координатой, «загоняет» точку (x, y) на свою собственную оптимальную линию. После этого *его* координата остается стационарной, а другой игрок делает то же самое.

Пусть игрок X выбирает некоторое значение $x^{(1)}$ — возмущение относительно точки равновесия (x^*, y^*). Следуя уравнениям (5.7.4), (5.7.5), игрок Y переходит к значению $y^{(1)}$, такому, что точка $(x^{(1)}, y^{(1)})$ лежит на его кривой $y_2(x)$; иначе говоря, два первых хода приводят к точке $x^{(1)}, y_2(x^{(1)})$. Затем игрок X снова выбирает значение $x^{(2)}$ с таким расчетом, чтобы перевести точку на свою оптимальную линию $y_1(x)$. Это значение соответствует пересечению горизонтальной прямой $y = y_2(x^{(1)})$ с $y_1(x)$ и приближенно равно

$$x^{(2)} \sim \frac{y_2(x^{(1)})}{y_1'(0)} \approx \frac{y_2'(0)}{y_1'(0)} x^{(1)}, \tag{5.7.7}$$

где $y_1'(0)$, $y_2'(0)$ — значения производных двух прямых в окрестности стационарного состояния.

Тогда

$$|x^{(2)}| < |x^{(1)}|,$$

или

$$|x^{(2)}| > |x^{(1)}|$$

в зависимости от того, какое из двух неравенств выполняется:

$$|y_2'(0)| < |y_1'(0)| \quad (p > q)$$

или

$$|y_2'(0)| > |y_1'(0)| \quad (p < q).$$

Таким образом, равновесие устойчиво, только если $p > q$; при $p = q = 1/2$ мы имеем нейтральную устойчивость. Такая устойчивость возникает в тех случаях, когда каждый игрок полагается *больше* на свои силы, чем на усилия партнера, т. е. каждый оставляет себе бóльшую часть своей собственной продукции и обменивает меньшую часть.

Что происходит в случае неустойчивости, т. е. при $p < q$? В этом случае точка «производства» заканчивает свой путь либо на горизонтальной, либо на вертикальной оси. Если конечное состояние оказывается на горизонтальной оси, то Y не работает; он «паразитирует» на X. Если конечное состояние ле-

жит на вертикальной оси, то паразитирует *X. Любой* из этих случаев возможен в отсутствие устойчивости, так как малейшее возмущение нарушает равновесие. Кто именно из игроков паразитирует на партнере, зависит от направления начального возмущения. Тот, кто *первым* ослабит свои усилия, станет паразитом. Связано это с тем, что в неустойчивом случае всякое ослабление усилий со стороны одного партнера немедленно компенсируется другим партнером и тем самым способствует дальнейшему ослаблению усилий со стороны первого партнера. (Разумеется, роли игроков X и Y легко меняются; устойчивость связана с бóльшим наклоном оптимальной прямой игрока X лишь по той причине, что мы так обозначили координаты.)

Предположим теперь, что существует *устойчивое* равновесие. Какая полезность достается X и Y в этом режиме? Подставляя значения $x^* = y^* = (p/\beta) - 1$ в выражения (5.7.2, задающие размеры выигрыша, получаем

$$\begin{aligned}(G_x)^* &= \ln(p/\beta) - p + \beta,\\ (G_y)^* &= \ln(p/\beta) - p + \beta.\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

Проверим, являются ли значения (5.7.8) «оптимумами», т. е. представляют ли они (для обоих партнеров) наибольший выигрыш, который те могут получить в рассматриваемых условиях.

Прежде всего заметим, что максимальное производство определяется для каждого партнера *не* стационарными значениями x^* и y^*, а максимальными значениями этих выражений, равными $(1/\beta) - 1$. Поэтому соответствующие полезности равны $\ln(1/\beta) - 1 + \beta$. Что можно сказать об этих значениях: больше они или меньше, чем $(G_x)^* = (G_y)^*$? Вычислим их разности:

$$\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) - 1 - \ln\left(\frac{p}{\beta}\right) + p = \ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1 + p = \ln\left(\frac{1}{p}\right) - (1 - p). \tag{5.7.9}$$

Это выражение всегда *неотрицательно* (и обращается в нуль при $p = 1$). Так мы приходим к выводу о том, что *оба* партнера могли бы получить больший выигрыш, если бы производили $(1/\beta) - 1$, а не $(p/\beta) - 1$ (единственное исключение составляет случай, когда $p = 1$ и обе производительности совпадают, но $p = 1$ означает, что вся продукция остается у производителя, поэтому мы не будем рассматривать в дальнейшем этот частный случай).

Мы видим, что точка равновесия, даже если она устойчива, *не оптимальна* ни для одного из партнеров, хотя каждый из них извлекает наибольший выигрыш в стационарной точке при условии, что конкурент также извлекает наибольший выигрыш. Что действительно в данном случае, так это динамика чисто *эгои-*

стических интересов. Каждый производитель обеспокоен только своей *полезностью* (по отношению к полезности партнера).

Прежде чем предлагать (и испытывать) более «социально ориентированную» философию, вычислим в случае неустойчивости полезность «паразита» и его «хозяина». Пусть X — паразит. Тогда X ничего не производит, а хозяин Y должен строить свою деятельность с учетом этого обстоятельства. Оптимальная линия хозяина определяется уравнением $qx + py = (p/\beta) - 1$. Но так как $x = 0$, Y должен производить столько, чтобы удовлетворить уравнению $py = (p/\beta) - 1$ или $y = (1/\beta) - (1/p)$ (так как $p > \beta$, это значение y положительно). Следовательно, значения полезности для паразита (X) и хозяина (Y) равны

$$G_x = \ln\left(1 + \frac{q}{\beta} - \frac{q}{p}\right),$$
$$G_y = \ln\left(\frac{p}{\beta}\right) - 1 + \frac{\beta}{p}. \qquad (5.7.10)$$

Сравним эти выражения с $\ln(1/\beta) - 1 + \beta$ — «идеальной» полезностью, приходящейся на долю каждого игрока, если он производит не «индивидуальный оптимум» $(p/\beta) - 1$, а «социальный оптимум»: $(1/\beta) - 1$. Для хозяина Y разность составляет $\ln(1/p) + \beta[1 - (1/p)]$. Это выражение всегда положительно, если $p > \beta$, поэтому хозяин Y *всегда в выигрыше*, если он производит «социальный оптимум», а не исполняет свою роль «хозяина». Этого и следовало ожидать.

Выясним теперь, выгодно ли паразиту быть «паразитом» или полноправным участником кооперации. Разность полезностей для X между тем, что он получает, производя социальный оптимум, и в роли «паразита», составляет величину $\ln p - \ln(\beta p + pq - q\beta) - 1 + \beta$. Положительна эта величина или отрицательна зависит от отношения β/p, которое может изменяться от 0 до 1. При $\beta = p$ приведенное выше выражение дает величину $\ln(1/p) - 1 + p$, которая всегда положительна; при $\beta \ll p$ мы получаем $\sim -\ln q - 1$. Нас сейчас интересует неустойчивый случай, когда $p < q$, т. е. $q > 1/2$, поэтому величина $-\ln q - 1$ отрицательна. Но выражение $-\ln q - 1$ есть не что иное, как асимптотическое выражение для приведенной выше разности платежей, когда β стремится к нулю.

Следовательно, если величина β мала, то паразиту выгоднее быть «паразитом» (хотя при больших β это не так). Значит, если «хозяин» неутомим (не знает усталости — при малых β) и в силах содержать вас, то вам *стоит* быть паразитом!

Наконец, обратимся к вопросу о «социальном оптимуме», характеризуемом «идеальными выигрышами» $x_0 = y_0 = (1/\beta) - 1$. Как их достичь? Предположим, что два «производителя» X и Y вырабатывают некоторый тип «социального сознания», т. е. по-

лезность одного из них каким-то образом зависит от полезности другого. Будем считать, что эта зависимость линейна и определяется матрицей

$$\begin{aligned} G_{x_0} &= AG_x + BG_y, \\ G_{y_0} &= CG_x + DG_y, \end{aligned} \tag{5.7.11}$$

где A, B, C, D — весовые множители, принимающие значения от 0 до 1.

Мы исследуем предельный случай $A = B = C = D$, который означает, что каждый партнер получает от полезности своего конкурента столько же удовлетворения, сколько ему доставляет своя *собственная* полезность. Наша динамика описывается системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}(G_x + G_y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}(G_x + G_y). \end{aligned} \tag{5.7.12}$$

Стационарный режим исследуется с помощью условий

$$\begin{aligned} \frac{p}{1+px+qy} + \frac{q}{1+qx+py} - \beta &= 0, \\ \frac{q}{1+px+qy} + \frac{p}{1+qx+py} - \beta &= 0, \end{aligned} \tag{5.7.13}$$

которые, конечно, приводят к стационарному состоянию $x_0 = y_0 = (1/\beta) - 1$ с выигрышами

$$G_{x_0} = G_{y_0} = \ln\frac{1}{\beta} - 1 + \beta. \tag{5.7.14}$$

Таким образом, весьма вероятно, что столь возвышенное явление как *социальное сознание* может возникнуть в популяциях через оптимизирующие свойства выигрышей в ходе естественного отбора.

5.8. Эпидемиология слухов

Слухи составляют своего рода «внутреннее подмножество» проблем передачи информации. Эта разновидность «эпидемий» разражается в тех случаях, когда информация не может быть общедоступной либо из-за низкого уровня развития сети связи, либо из-за жестких «правовых» ограничений на свободное распространение информации, как в случае тоталитарных или «теократических» организаций (существенно подавляющих флуктуации во имя сохранения догмы, т. е. стабильности существую-

щего положения). Следуя Фрацеталю [5.7], мы намереваемся рассмотреть ниже распространение слухов среди слабо связанных между собой групп индивидов, или «сообществ». Рассмотрим систему из $N+1$ изолированных небольших «общин», которые могут сообщаться между собой с помощью какой-нибудь примитивной телекоммуникационной системы. Такая система «телефонной» связи позволяет в любой момент времени контактировать одной паре общин: одна община посылает вызов, а другая принимает сигнал.

Слухи распространяются с помощью таких парных *односторонних* телефонных «разговоров». Предполагается, что, после того как приемник установленного в коммуне телефона «декодировал» поступивший сигнал, содержание «разговора» становится известным всей коммуне.

Наши $N+1$ коммун («клеток») делятся на три категории.

Категория S («восприимчивые»): коммуны, до которых слух еще не дошел, но которые передадут его другим коммунам после того, как слух до них дойдет.

Категория I («инфекционные»): коммуны, до которых слух дошел, активно распространяющие его среди других коммун. Передав слух один раз, коммуны типа I «нейтрализуются».

Категория R («резистивные», или «неподдающиеся»): коммуны, до которых слух дошел, либо не имеющие возможности, либо не желающие передавать его другим коммунам, хотя и не оказывающие слуху активного противодействия.

Предполагается, что динамика распространения слухов протекает следующим образом.

1) Случайно выбранная коммуна звонит наугад в любую из N остальных коммун (если телефонная линия не занята).

2) Если коммуна типа I звонит коммуне типа S, то слух распространяется. Следовательно, обе коммуны становятся коммунами типа I.

3) Если коммуна типа I звонит в коммуну типа I или R, то коммуна, посылающая вызов, становится коммуной типа R. Коммуна, принимающая вызов, остается коммуной той же категории, которой она принадлежала перед телефонным разговором.

4) Вызовы, поступающие от коммун типа S или R, не влияют на распространение слухов (такие вызовы не имеют смысла).

В силу условия 4 необходимо рассматривать только вызовы, удовлетворяющие условиям 2 и 3: *все* вызовы, изменяющие состояние системы, поступают из коммун типа I.

Пусть $s(t)$, $i(t)$ и $r(t)$ — число коммун типа S, I и R в дискретные моменты времени t. Определим вектор состояния

$$\mathbf{P}(t) = (s(t),\ i(t),\ r(t)). \tag{5.8.1}$$

При $t = 0$ выполняется условие

$$\mathbf{P}(0) = (N, 1, 0). \tag{5.8.2}$$

Первый вызов, изменяющий состояние системы, поступает от одной коммуны типа I, которой слух известен и которая вызывает по телефону оду из N коммун типа S. Таким образом,

$$\mathbf{P}(1) = (N - 1, 2, 0). \tag{5.8.3}$$

Начиная с этого момента существуют *два* различных типа вызовов, которые изменяют состояние системы: (а) одна из двух коммун типа I вызывает одну из $N - 1$ коммун типа S или (б) одна из двух коммун типа I вызывает другую коммуну типа I. Поэтому, начиная с $t \geqslant 2$, состояние системы становится неопределенным.

Вместо того чтобы исследовать вероятности всех возможных различных исходов, мы изучим эволюцию их математического ожидания, т. е. заменим вычисление случайной переменной вычислением секвенциально обусловленных математических ожиданий этой переменной $\mathbf{P}$.

Такая процедура *неявно* предполагает, что математическое ожидание нашей случайной переменной $\mathbf{P}$ позволяет судить об истинном поведении системы. Здесь уместно немного отвлечься и привести контрпример, т. е. рассмотреть случай, когда среднее случайного процесса служит ошибочной оценкой его истинного поведения.

Пусть X — случайная переменная, которая может принимать только два значения:

$$P(X = N^2) = \frac{1}{N},$$

$$P(X = 0) = \frac{N - 1}{N}.$$

Математическое ожидание (среднее) этого процесса равно

$$E(X) = N^2 \frac{1}{N} + 0 \frac{N - 1}{N} = N,$$

поэтому при $N \to \infty$ математическое ожидание $E(X)$ неограниченно возрастает, хотя вероятность того, что $X = 0$, стремится к единице.

Вычислим дисперсию $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ случайного процесса X. Так как

$$E(X^2) = N^4 \frac{1}{N} + 0 \frac{N - 1}{N} = N^3,$$

дисперсия оказывается равной

$$D(X) = N^3 - N^2 = N^2(N - 1),$$

а стандартное отклонение $N\sqrt{N-1}$ при $N \to \infty$ возрастает быстрее, чем математическое ожидание. Когда так происходит, математическое ожидание *ничего* не говорит о системе. Необходимо оценивать дисперсию, а для этого требуется вычислить вероятности для случайной переменной. Следовательно, строго говоря, невозможно оценить точность нашей модели, хотя приведенный здесь метод существенно упрощает математические вычисления.

Но вернемся к нашим вычислениям. При $t = 2$

$$\mathbf{P}_2 = E(\mathbf{P}(t=2)) = (S_2,\ i_2,\ r_2), \tag{5.8.4}$$

а при $t = K (= 3, 4, \ldots)$

$$\mathbf{P}_K = E(\mathbf{P}(t=K) \mid \mathbf{P}(t=K-1) = \mathbf{P}_{K-1}) = (S_K,\ i_K,\ r_K). \tag{5.8.5}$$

Иначе говоря, мы пытаемся вычислить вектор $\mathbf{P}_K$ рекуррентно, предполагая, что нам известен истинный вектор $\mathbf{P}_{K-1}$, в то время как мы знаем его математическое ожидание $\mathbf{P}_{K-1}$. Выведем рекуррентное соотношение. Для этого будем считать известным, что при $t = K-1$

$$\mathbf{P}_{K-1} = (S_{K-1},\ i_{K-1},\ r_{K-1}). \tag{5.8.6}$$

Тогда истинное состояние $\mathbf{P}(t=K)$ есть либо

$$(S_{K-1} - 1,\ i_{K-1} + 1,\ r_{K-1}), \tag{5.8.7}$$

либо

$$(S_{K-1},\ i_{K-1} - 1,\ r_{K-1} + 1), \tag{5.8.8}$$

где первая вероятность относится к случаю, когда коммуна типа I вызывает по телефону коммуну типа S (что происходит с вероятностью S_{K-1}/N), а вторая вероятность относится к случаю, когда коммуна типа I вызывает либо коммуну типа I, либо коммуну типа R [что происходит с вероятностью $(N - S_{K-1})/N$].

Следовательно, две первые компоненты вектора $\mathbf{P}_K$ равны

$$S_K = \frac{S_{K-1}}{N}(S_{K-1} - 1) + \frac{N - S_{K-1}}{N} S_{K-1} = \frac{N-1}{N} S_{K-1}, \tag{5.8.9}$$

$$i_K = \frac{S_{K-1}}{N}(i_{K-1} + 1) + \frac{N - S_{K-1}}{N}(i_{K-1} - 1) = i_{K-1} + \frac{2}{N} S_{K-1} - 1. \tag{5.8.10}$$

Попытаемся теперь удовлетворить двум рекуррентным соотношениям (5.8.9) и (5.8.10), т. е. решить системы связанных линейных разностных уравнений.

Начнем с уравнения (5.8.9). Оно решается по индукции:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{N-1}{N} S_0, \\ S_2 &= \frac{N-1}{N} S_1 = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 S_0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{5.8.11}$$

$$S_K = \frac{N-1}{N} S_{K-1} = \ldots = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 S_0 = N\left(\frac{N-1}{N}\right)^K,$$

так как $S_0 = N$.

Рассмотрим теперь уравнение (5.8.10). Оно также решается по индукции:

$$\begin{aligned} i_1 - i_0 &= 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^0 - 1, \\ i_2 - i_1 &= 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^1 - 1, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{5.8.12}$$

$$i_K - i_{K-1} = 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^{K-1} - 1.$$

Суммируя все K уравнений, получаем

$$i_K - i_0 = 2\sum_{j=0}^{K-1}\left(\frac{N-1}{N}\right)^j - K. \tag{5.8.13}$$

Наконец, вспоминая, что $i_0 = 1$ и

$$\sum_{j=0}^{K-1} \xi^j = \frac{1-\xi^K}{1-\xi},$$

приходим к соотношению

$$i_K = 2N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^K\right] + 1 - K, \quad K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{5.8.14}$$

Из выражений для S_K и i_K, r_K следует формула

$$r_K = N + 1 - S_K - i_K. \tag{5.8.15}$$

Таким образом, при любом N мы можем оценить эволюцию слухов во времени.

Остается исследовать очень важный вопрос о том, *как далеко* распространяются слухи. Ясно, что слух перестает распространяться после того, как не останется ни одной коммуны типа I, до которой он еще не дошел. Следовательно, ответ на

наш вопрос дает число (или процентная доля) коммун типа S, которые еще не охвачены слухом после того, как не останется ни одной коммуны типа I. Его (или ее) мы узнаем, вычислив значение K, при котором $i_K = 0$.

Так как значение i_K в приведенных выше вычислениях не обязательно должно быть целым, может случиться так, что $i_\nu > 0$ и $i_{\nu+1} < 0$, где ν — целое число. Поэтому мы заменим в уравнении для i_K индекс K на λN и рассмотрим непрерывную переменную λ. Нас интересуют значения λ, при которых $i_{\lambda N} = 0$. Имеем

$$2N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\lambda N}\right] + 1 - \lambda N = 0,$$

или

$$\lambda = 2 - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\lambda N} + \frac{1}{N}. \qquad (5.8.16)$$

При очень больших $N (N \to \infty)$ мы можем считать, что $1/N \sim 0$, $[1 - (1/N)]^N \sim 1/e$. Тогда

$$\lambda_0 = 2[1 - e^{-\lambda_0}], \qquad (5.8.17)$$

т. е.

$$\lambda_0 \sim 1{,}594.$$

Следовательно, при больших N слух «вымирает» после примерно $t = \lambda_0 N = 1{,}594N$ «телефонных звонков» из коммуны типа I. Кроме того, так как

$$S_{\lambda N} = N\left(\frac{N-1}{N}\right)^{\lambda N} \sim Ne^{-\lambda_0} \sim 0{,}238N,$$

когда слух перестает циркулировать, около 23,8 % коммун могут утверждать, что они «ничего не знали об этом».

6

Стохастичность, обусловленная детерминистической динамикой в пространстве трех и более измерений: хаос и странные аттракторы

6.1. Переоценка классической статистической механики. Теорема Колмогорова—Арнольда—Мозера

В гл. 2 этой книги мы упоминали о данных, подтверждающих наблюдаемую совместимость производства энтропии, прогрессирующей дифференциации, возрастания сложности и возникновения свойств самоорганизации в крупномасштабных системах. Как мы уже говорили, эти свойства самоорганизации связаны со способностью системы моделировать не только окружающую среду, но и части самой себя. В свою очередь моделирование рассматривалось нами как акт сжатия информации, получаемой из окружающей среды, и последующего использования этой сжатой информации в качестве входа, или «программы», в «автомате с конечным числом состояний, выдающем на выходе временную эволюцию, или «сценарий», рассматриваемого явления. Исследуем теперь более подробно, каким образом могла бы осуществляться динамически (по крайней мере на теоретическом уровне) процедура самоорганизации, или сжатия информации. Вопрос этот существенно связан со свойствами аттракторов в многомерном пространстве. Чтобы исследовать эти свойства, нам придется несколько отвлечься и рассмотреть на весьма элементарном уровне некоторые из достигнутых в последнее время успехов в области классической (статистической) механики. Речь пойдет главным образом о характере «распространения» траектории многокомпонентной динамической системы в пространстве состояний.

Прежде всего напомним, что условие идеальной эргодичности *и* перемешивания [1] (или «молекулярного хаоса»), которое выполняется (пока) только для идеального консервативного газа Больцмана, который из любого начального состояния стремится к равновесию. Лет тридцать назад считалось, что и любая достаточно сложная консервативная система будет вести себя так же. В частности, предполагалось, что боль-

---

[1] Система называется системой с перемешиванием, если информация о начальных условиях полностью утрачивается. «Забывание» начальных условий может происходить либо через каскад *столкновений*, либо через каскад *итераций*. Подчеркнем параллелизм между физической системой (идеальный газ) и символической системой (алгоритм).

шая система осцилляторов с *нелинейными* взаимодействиями будет стремиться к равновесному состоянию, в котором должно наблюдаться равнораспределение энергии по степеням свободы. Кроме того, предполагалось, что движение в пространстве состояний таких сложных систем будет эргодическим. В 1957 г. А. Н. Колмогоров сообщил [6.1] (подробнее см. в этом разделе ниже) о том, что нелинейно возмущенные двухкомпонентные колебательные системы (с четырьмя степенями свободы) могут иметь в пространстве состояний инвариантные торы. Это означало, что никакой эргодичности в таких системах быть не может. Ферми и др. исследовали в 1955 г. [6.2] систему, состоящую из большого числа (до $N = 64$) связанных осцилляторов, но не обнаружили тенденции к равнораспределению энергии.

Наоборот, как мы увидим ниже, малое возмущение даже интегрируемой *двухкомпонентной* гамильтоновой системы приводит к полному перерождению характера решения, т. е. траектории (в четырехмерном) пространстве состояний системы. Невозмущенное движение регулярно. После возмущения в пространстве состояний остаются области, где движение по-прежнему регулярно, резко отделенные от областей сильно нерегулярного («хаотического») движения.

Начнем, как и прежде, с рассмотрения одного нелинейного маятника. На языке гамильтоновой механики можно сказать, что в этом случае имеется одна «обобщенная координата» q (угол, образуемый маятником с вертикалью) и одна компонента импульса p. Гамильтониан, т. е. полная энергия системы, приходящаяся на единицу массы, равна

$$H = \frac{p^2}{2} - \left(\frac{g}{l}\right)\cos q, \tag{6.1.1}$$

где l — длина маятника. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\left(\frac{g}{l}\right)\sin q. \tag{6.1.2}$$

Они решаются в эллиптических функциях. Поток в фазовом пространстве показан на рис. 6.1.

При малых отклонениях в окрестности начала координат поведение выглядит как простое гармоническое движение с частотой колебаний $\sqrt{g/l}$. Но при больших p движение переходит во *вращение* с координатой q, неограниченно возрастающей со временем. Кривая, отделяющая область *вращений* от области *колебаний*, называется *сепаратрисой*. Сепаратрисе принадлежат и X-образные, или седловые, точки, которые соответствуют *неустойчивому* равновесию маятника в верхнем вертикальном положении. Это простейший случай, когда период колебательного движения изменяется от траектории к траектории и стремится

к *бесконечности* (т. е. движение становится *апериодическим*) при приближении к сепаратрисе.

Обратимся теперь к двухкомпонентной системе, т. е. к двумерному осциллятору — простой системе с гармоническим движением. Ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right). \qquad (6.1.3)$$

Амплитуды двух осцилляторов A и B — инварианты движения и могут быть записаны в виде

$$A = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2}, \quad B = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2}. \qquad (6.1.4)$$

Траектория системы лежит на пересечении двух поверхностей $A = C_1$ и $B = C_2$ (это пересечение является двумерным тором),

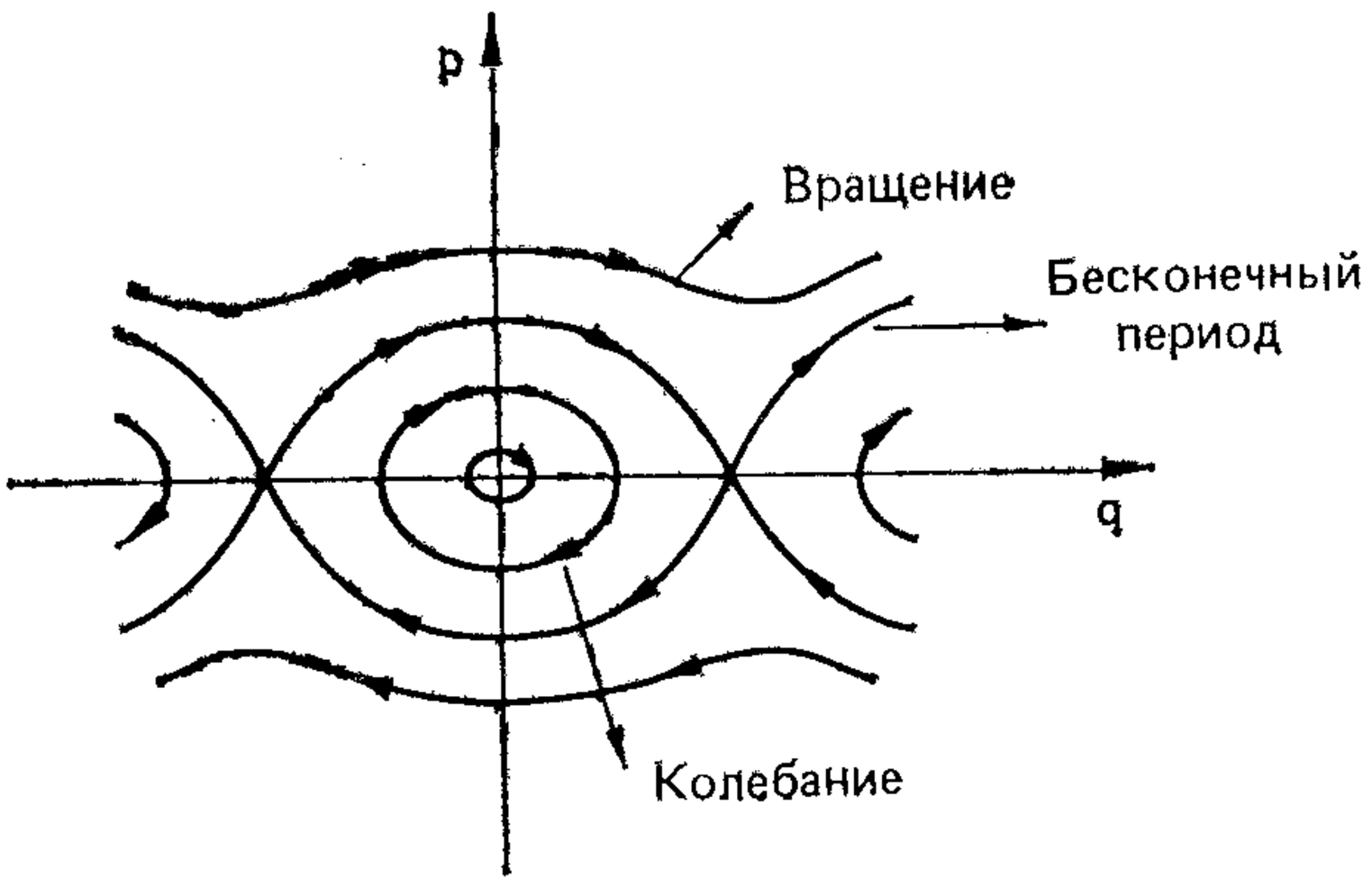


Рис. 6.1. Фазовое пространство маятникового осциллятора.

поэтому, если значения постоянных C_1 и C_2 известны, то траектория находится в ограниченной области (четырехмерного) пространства состояний. В зависимости от значений C_1, C_2 траектории располагаются на семействе 2-торов, вложенных друг в друга в фазовом пространстве. Эти торы — инвариантные поверхности нашей системы. Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то орбиты после нескольких витков на торе замыкаются (периодические).

Если отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, то траектория системы покрывает тор *эргодически*, т. е. образует не только открытое, но и *всюду плотное* множество на торе в том смысле, что, если подождать достаточно долго, то траектория на торе по крайней мере один раз пройдет сколь угодно близко от любой заданной точки.

Что произойдет, если в столь простую систему ввести слабое возмущение? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем гамильтониан нашей двумерной системы в общем виде

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2) \qquad (6.1.5)$$

и, следуя знаменитому численному примеру Хенона и Хейлеса [6.3], предположим, что нашу систему можно моделировать частицей, движущейся в потенциале

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3. \qquad (6.1.6)$$

Нетрудно видеть, что при малых значениях q_1, q_2 движение вокруг точки равновесия (0, 0) выглядит, как простое двумерное гармоническое движение.

Но при увеличении амплитуды колебаний главными становятся кубические члены, и движение на плоскости (q_1, q_2) происходит по треугольной траектории (рис. 6.2). Хенон и Хейлес провели численные расчеты траекторий движения в потенциале (6.1.6).

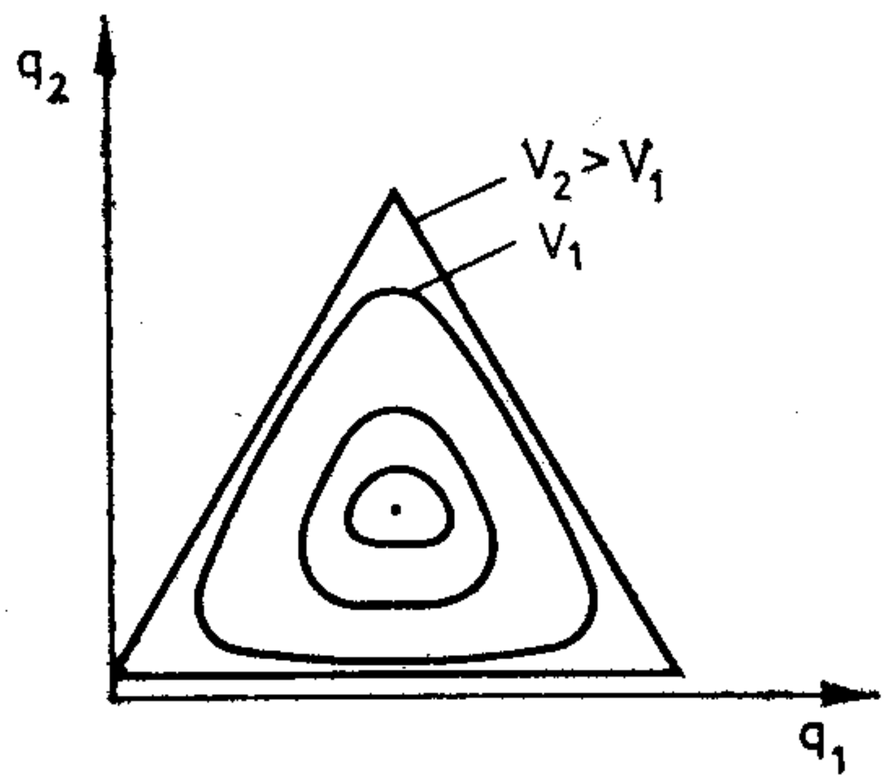


Рис. 6.2. Эквипотенциальные линии для примеров Хенона — Хейлеса возмущенной системы двух осцилляторов. Обобщенные координаты двух осцилляторов — q_1, q_2; V_1, V_2 — два значения потенциальной функции.

Трудности наглядного представления орбит в четырехмерном пространстве состояний могут быть преодолены, если выполнить следующие условия.

а) Сосредоточить внимание на траекториях, соответствующих некоторой заданной полной энергии H_0, т. е. $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_0$. Это позволяет исключить одну переменную, например p_1, и свести систему к системе с тремя степенями свободы q_1, q_2, p_2.

б) Рассматривать не трехмерную траекторию, а ее пересечение с какой-нибудь плоскостью, например с плоскостью $q_1 = 0$.

Если движение ограничено и все траектории заключены в некоторой замкнутой области, то любая траектория системы многократно «обегает» замкнутую область, пересекая плоскость $q_1 = 0$. «Протыкание» (плоской) поверхности траекторией в пространстве состояний называется «отображением Пуанкаре» и соответствует переходу от аналогового описания к цифровому описанию. На рис. 6.3, заимствованном из работы Хенона —

Хейлеса, показаны последовательные точки пересечения траектории системы с плоскостью $q_1 = 0$.

Со временем эти точки пересечения сливаются в замкнутую инвариантную кривую. Таким образом, траектории задают на плоскости $q_1 = 0$ однопараметрическое семейство замкнутых кривых — сечений инвариантных торов. Следовательно, вычисляя траектории при любом заданном значении энергии нашей

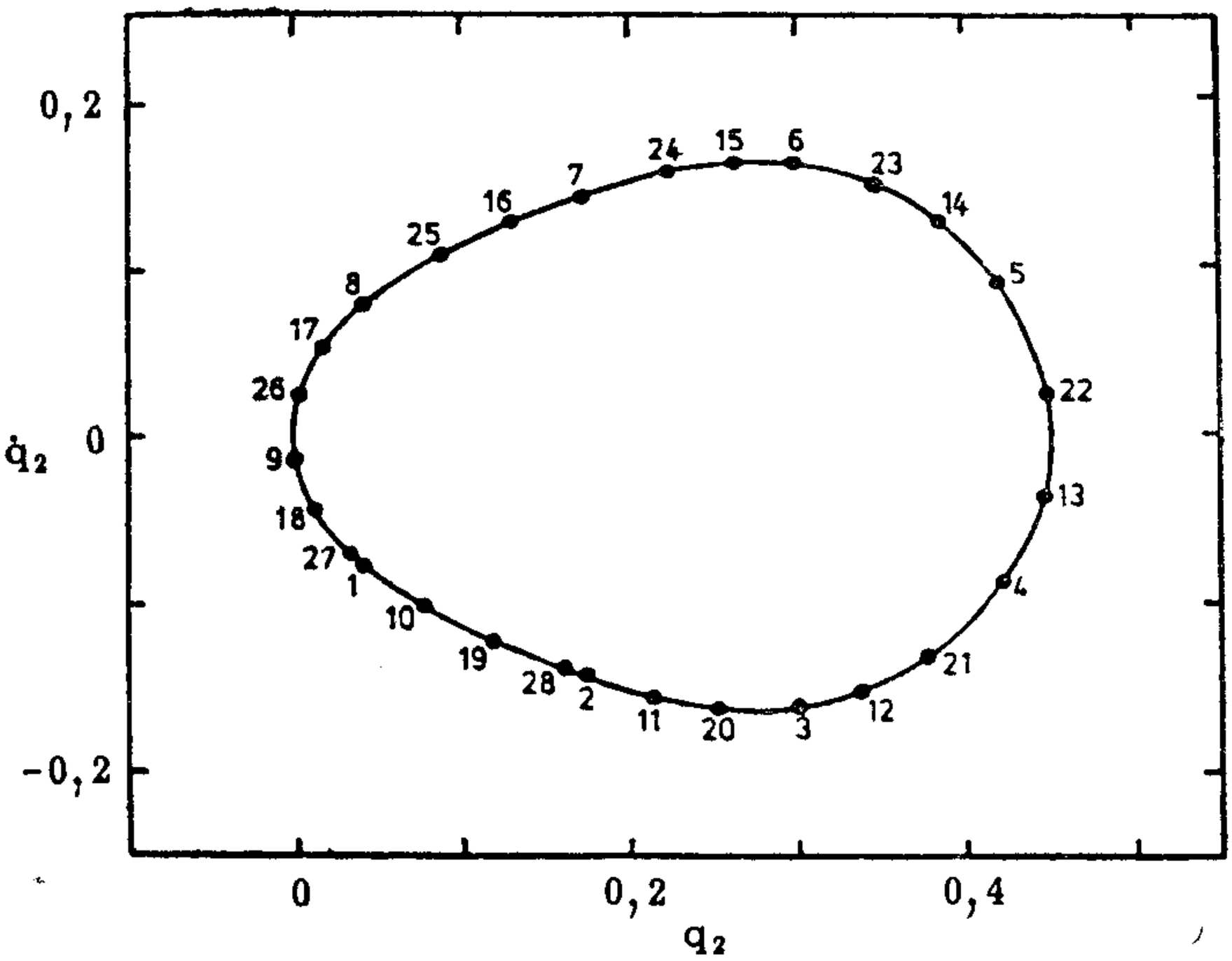


Рис. 6.3. Последовательные точки, в которых орбита системы Хенона — Хейлеса пересекает плоскость q_2, $\dot{q}_2$ (по работе [6.4]).

простой системы и вычерчивая пересечения траекторий с плоскостью $q_1 = 0$, мы получаем возможность проследить в *двумерном* пространстве поведение динамической системы с *четырехмерным* фазовым портретом. Хенон и Хейлес построили отображение Пуанкаре для своей системы в широком диапазоне значений энергии. Об удивительных и неожиданных результатах, которые они получили, и пойдет речь в этом разделе.

На рис. 6.4 снова показано отображение Пуанкаре при $H_0 = 0{,}083$ для всего семейства интегральных кривых. Вся область фазового пространства, доступная для системы с заданной энергией H_0, оказывается заполненной инвариантными кривыми весьма сложной формы. Напомним, что в отсутствие кубических членов в потенциале сечение было бы заполнено концентрическими окружностями — следами сечений вложенных друг в друга инвариантных торов. Различные особые

точки (О-образные (центры) и Х-образные (седловые точки)) соответствуют простым периодическим траекториям движения.

Необычная картина предстает перед нами, когда значение гамильтониана поднимается до $H_0 = 0{,}125$ (рис. 6.5). Некоторые инвариантные кривые *еще* окружают особые точки (периодические траектории), но такие кривые уже не заполняют всю область пространства состояний, доступную для «частиц» с

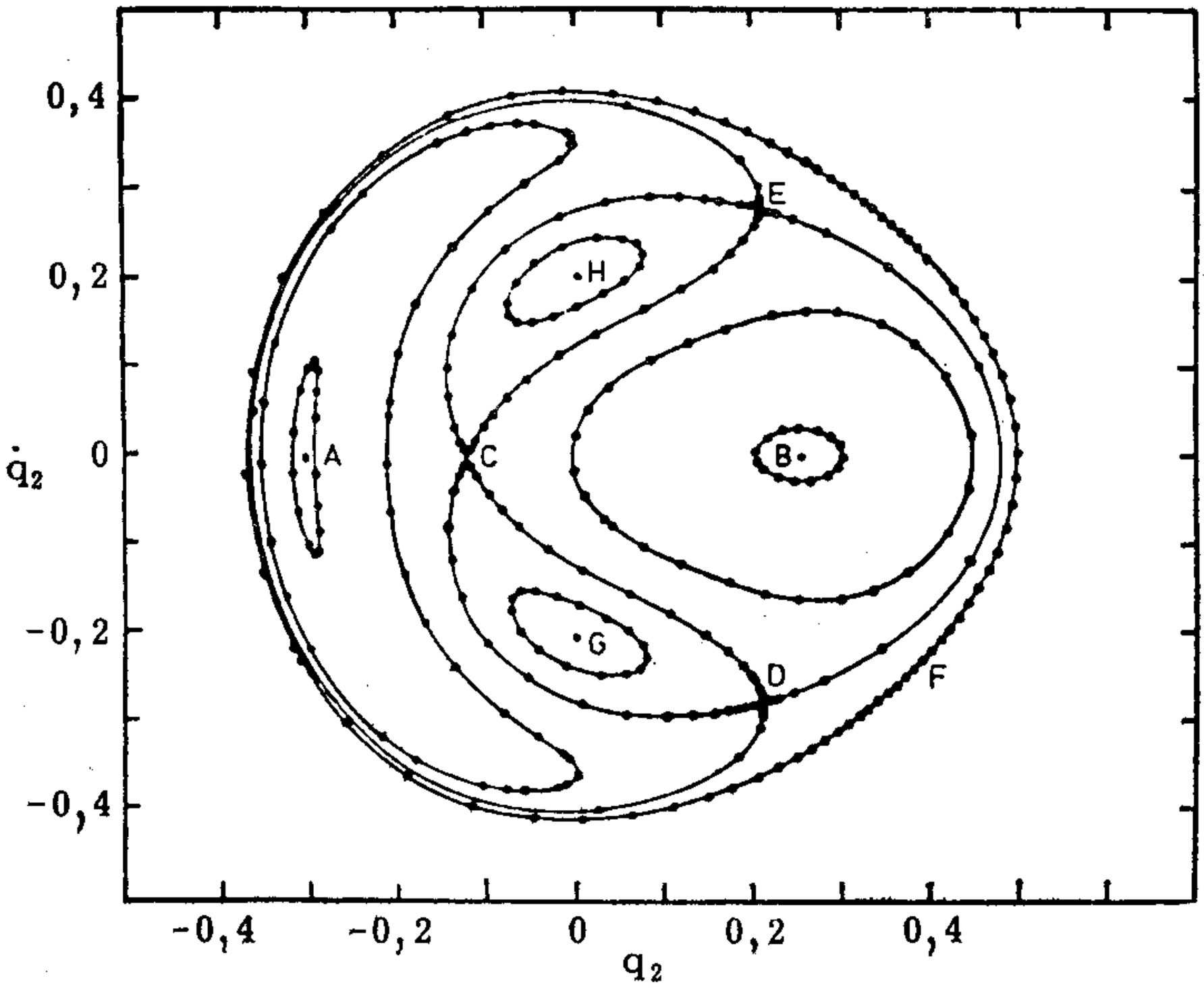


Рис. 6.4. Инвариантные кривые отображения Пуанкаре, порождаемого динамической системой Хенона — Хейлеса на плоскости q_2, $\dot{q}_2$. Различные контуры обозначены буквами от *A* до *H*. (По работе [6.4].)

$H_0 = 0{,}125$. В разрешенной области траектории блуждают самым нерегулярным образом. Рассеянные точки на рис. 6.5 соответствуют пересечениям плоскости $q_1 = 0$ одной *апериодической* траекторией. При дальнейшем увеличении энергии область заполненная инвариантными кривыми, сокращается еще больше. Создается впечатление, что инвариантные кривые преобладают при малых амплитудах движения и слабых возмущениях, но при бóльших энергиях инварианты постепенно вытесняются, уступая место полностью нерегулярному, или хаотическому, поведению, неожиданному для *простой детерминистической системы с малым числом степеней свободы.*

Как можно было бы объяснить такое поистине удивительное поведение? Ответ на этот вопрос по существу дает знаменитая теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ) —

по-видимому, величайшее достижение классической механики со времен Пуанкаре. Мы не станем приводить здесь ее доказательство, поскольку это отвлекло бы нас от нашей основной темы, а закончим вводный раздел гл. 6 несколькими замечаниями качественного характера.

Решающее значение имеет вопрос о том, что происходит с инвариантными торами в нашем четырехмерном пространстве

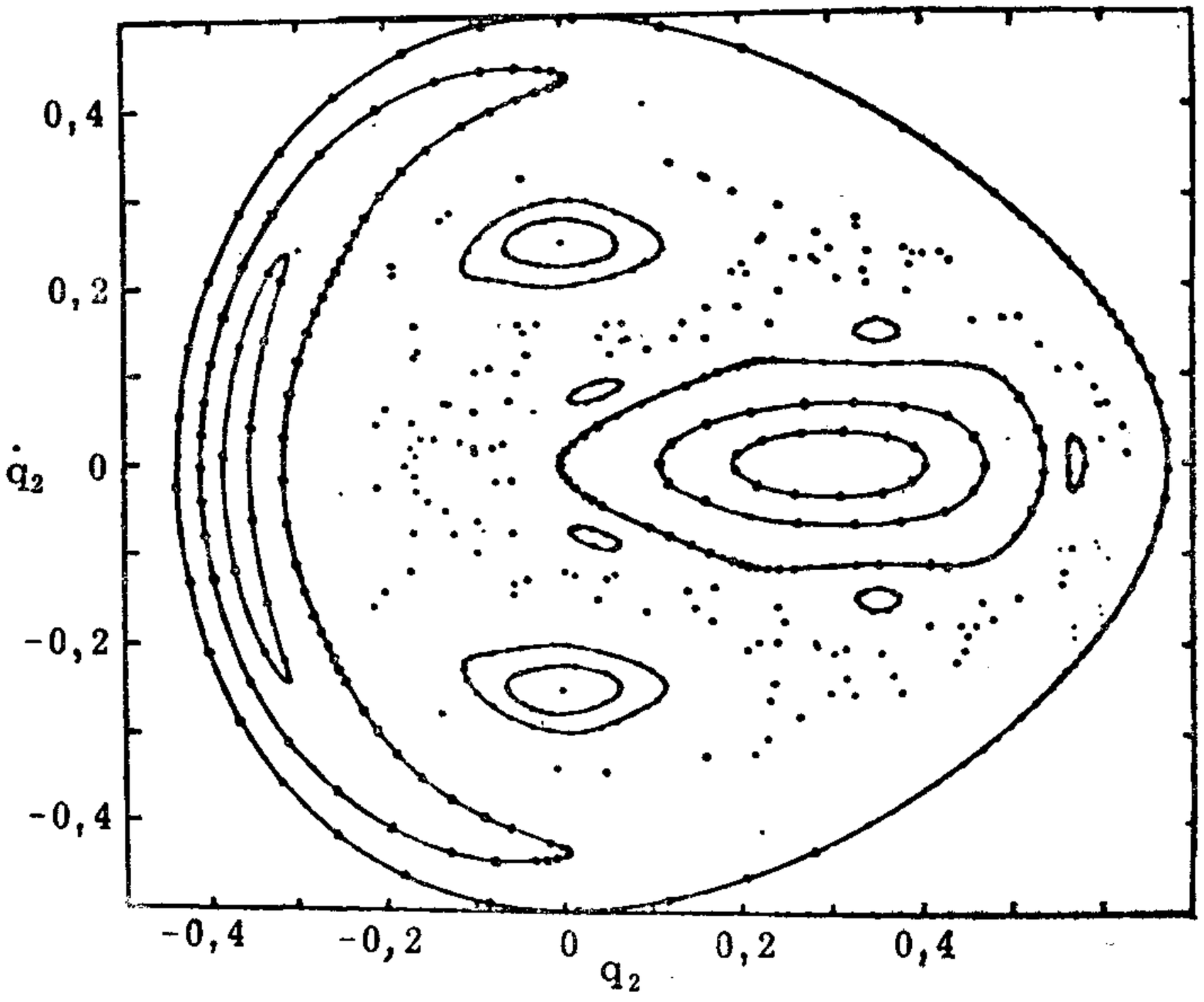


Рис. 6.5. Инвариантные кривые отображения Пуанкаре, порождаемого динамической системой Хенона — Хейлеса на плоскости q_2, $\dot{q}_2$. Видны различные области регулярного движения (траектории, лежащие на инвариантных кривых), окруженные областью хаотического поведения (распознаваемой по следам одной апериодической траектории). (По работе [6.4].)

состояний (или с семейством соответствующих торам концентрических окружностей на плоскости Пуанкаре (q_2, $\dot{q}_2$)), когда мы наложим на нашу простую систему двух осцилляторов небольшое возмущение. По мере усиления возмущения большинство «рациональных» поверхностей (торов с рациональным отношением $\omega_1/\omega_2 = n/m$) постепенно разрушаются, и на сечении Пуанкаре остается *четное* число чередующихся эллиптических (О) и седловых (Х) (гиперболических) неподвижных точек, т. е. четное число периодических траекторий (рис. 6.6).

[«Иррациональные» торы (для которых отношение ω_1/ω_2 иррационально), хотя и изменяют свою форму под действием слабого возмущения, *не разрушаются*: следы их пересечения с

сечением Пуанкаре остаются инвариантными непрерывными замкнутыми кривыми.]

Выясним, что происходит в окрестности гиперболических неподвижных точек. Эти точки должны быть соединены интегральными кривыми — сепаратрисами, которые мы уже видели в примере с двумерным фазовым портретом маятника. Заметим, что эти инвариантные кривые, пересекающиеся в седловой точке, могут быть входящими и выходящими в зависимости от того, куда движутся точки по инвариантным кривым — к седловой неподвижной точке или от нее.

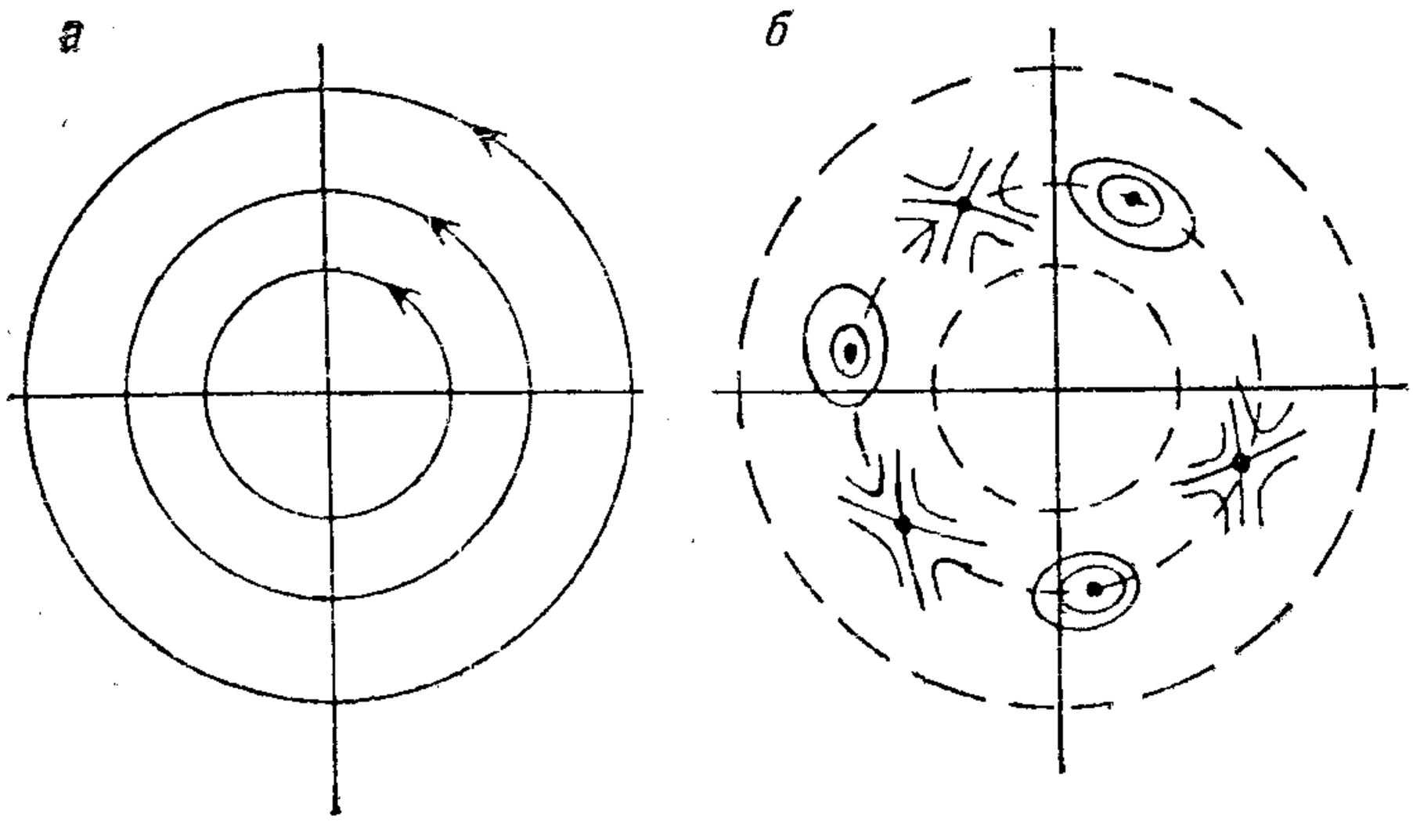


Рис. 6.6. При малых возмущениях «рациональный тор» (*а*) распадается и на его месте появляются (*б*) расположенные попеременно эллиптические (О) и седловые (Х) (гиперболические) неподвижные точки. (По работе [6.4].)

При определенных условиях кривая, выходящая из одной седловой точки, может стать входящей кривой для соседней седловой точки. Однако в общем случае этого *не происходит*: показано, что обычно инвариантная кривая, выходящая из одной седловой точки, пересекает инвариантную кривую, проходящую через соседнюю седловую точку. Смейл [6.5] доказал, что если инвариантные кривые, проходящие через соседние седловые точки, пересекаются один раз, то они пересекаются *бесконечно много* раз. Точки пересечения инвариантных кривых из соседних седловых точек называются *гомоклиническими* точками (рис. 6.7).

Окончательная картина в сечении Пуанкаре складывается следующим образом. Между оставшимися интегральными кривыми иррациональных торов располагаются области иррегулярного поведения, порождаемого хаотическими траекториями,

точки пересечения которых с сечением Пуанкаре являются гомоклиническими точками. Области хаотического поведения могут быть очень малы, если возмущение очень мало, но размеры их возрастают с увеличением параметра возмущения. В отличие от этого поведение вблизи неподвижных точек — центров, возникающее при разрушении рациональных поверхностей, мало чем отличается от первоначальной ситуации, когда периодическая орбита окружена инвариантными (рациональными) торами. Здесь так же, только в меньшем масштабе, при усилении возмущения каждая рациональная поверхность разрушается, порождая центры и седловые точки. Разглядывая картину, изображенную на рис. 6.8, в микроскоп с достаточно большим увеличением, можно было бы заметить, что она воспроизводится во все меньшем и меньшем масштабе.

Резюмируя, можно утверждать, что современная классическая механика, существенно используя численные эксперименты, получила важные новые результаты, имеющие отношение к классической статистической механике. С одной стороны, полученные данные показывают, что H-теорема Больцмана (и, следовательно, эргодичность и перемешивание) не следует считать непременным атрибутом поведения системы, состоящей из большого числа взаимодействующих компонент *любого* рода, кроме *твердых шаров*. Правда, численные эксперименты вроде того, который был выполнен Ферми и др. [6.2], проводились не с тысячами или миллионами, а всего лишь примерно с сотней взаимодействующих осцилляторов. Вместе с тем можно было бы возразить, что даже если мы рассматриваем ровно 100 взаимодействующих твердых шаров, то отнюдь не обязательно следует ожидать монотонного возрастания энтропии. Вопрос этот пока остается открытым, но, к счастью, затронутый нами аспект не существен для нашей темы.

С другой стороны, как показывают работы, связанные с теоремой КАМ, даже очень *небольшое* число взаимодействующих осцилляторов, более того, даже система с *тремя* степенями свободы (т. е. *один* нелинейный осциллятор при гармоническом внешнем возбуждении [6.6—6.8]) при заданных значениях управляющих параметров может иметь полностью хаотическую, т. е. апериодическую траекторию, неотличимую от случайного шума. Более того, в последнее время стало все более ясно, что гамильтонов «хаос» принципиально ничем не отличим от аналогичного поведения, обнаруживаемого в диссипативных системах малой размерности (за исключением одной важной особенности: гамильтоновы системы сохраняют объем в фазовом пространстве, в то время как в диссипативных системах объем в фазовом пространстве *сжимается в аттрактор*, размерность которого меньше размерности исходного пространства).

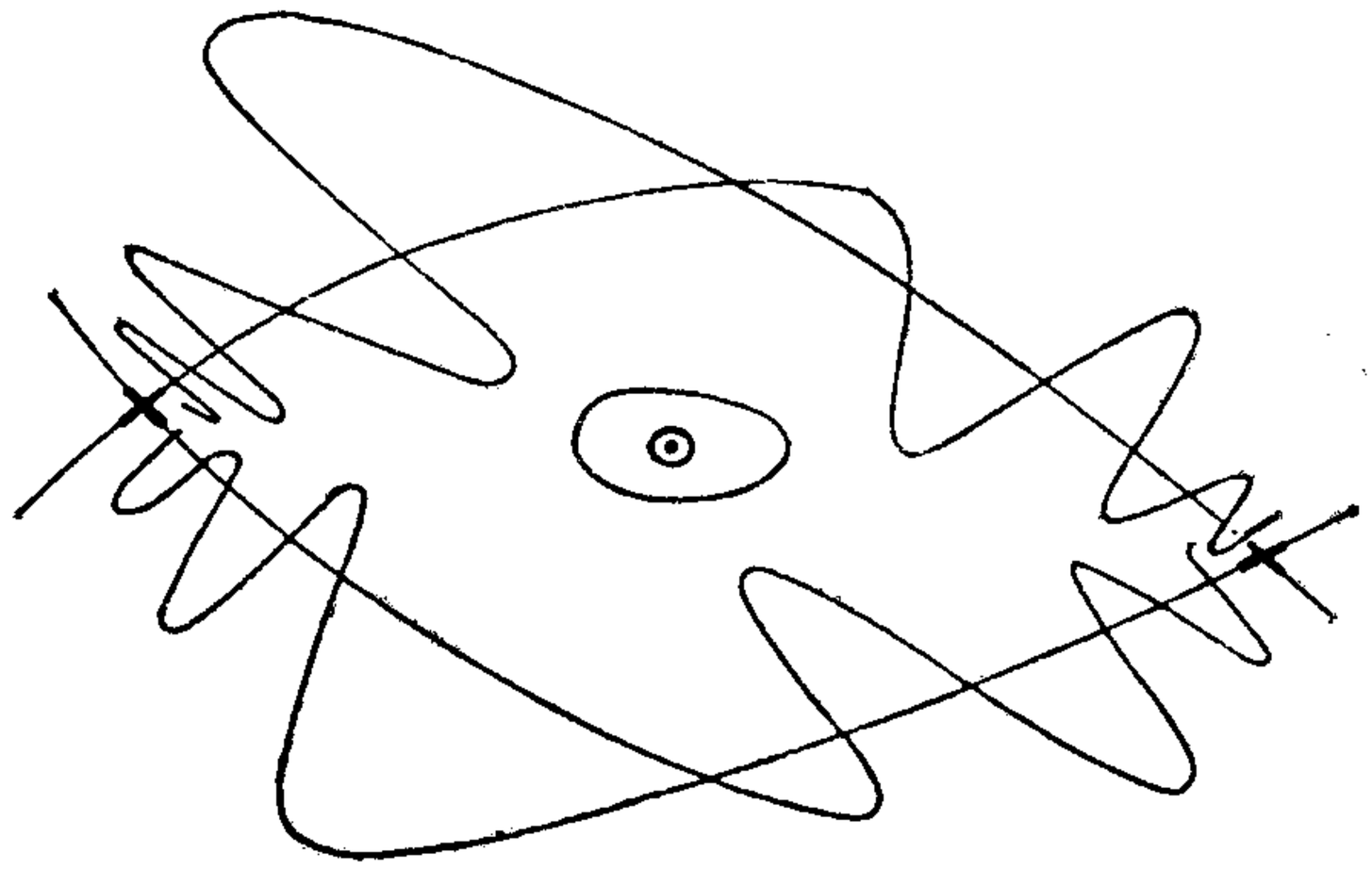


Рис. 6.7. Инвариантная кривая, идущая из одной точки (X), пересекает в *бесконечно* многих точках инвариантную кривую, идущую из другой точки (X), на отображении Пуанкаре. Эти пересечения инвариантных кривых называются «гомоклиническими точками».

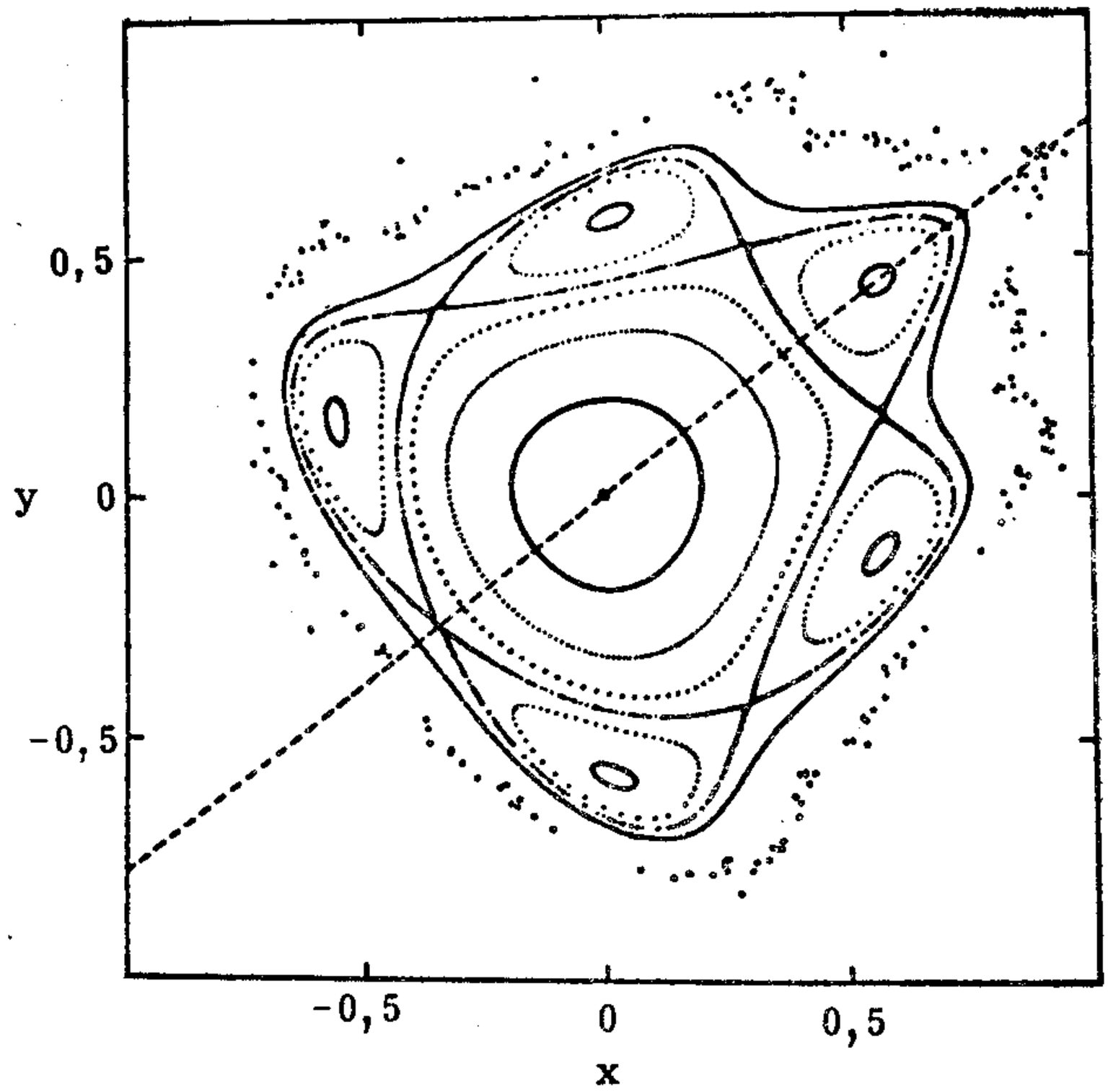


Рис. 6.8. Инвариантные кривые, окруженные областью хаотического поведения. (По работе [6.4].)

6.2. Динамика в трехмерном пространстве состояний (три степени свободы). Стационарные состояния, предельные циклы, притягивающие торы

В предыдущем разделе мы видели, что один из наиболее интересных результатов теоремы КАМ — *устойчивость* «иррациональных» торов относительно малых возмущений полной энергии гамильтоновой системы. Это означает, что иррациональные торы обладают особой «структурной устойчивостью» при малых значениях возмущающего параметра ε в выражении для гамильтониана

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{6.2.1}$$

где H_0 — энергия интегрируемой невозмущенной системы. Разумеется, такого рода устойчивость не имеет ничего общего с *асимптотической* устойчивостью аттракторов, с которой нам приходилось до сих пор сталкиваться при изучении нелинейных диссипативных систем с двумя степенями свободы, а именно с предельными циклами. Во-первых, иррациональные торы (подобно рациональным торам) образуют семейства, члены которых «вложены» друг в друга, поэтому они *не являются* аттракторами. Во-вторых, в случае асимптотической устойчивости аттракторов (характерных только для диссипативных систем) аттрактор асимптотически устойчив относительно возмущений *начальных условий*, но может оказаться чрезвычайно чувствительным к малым вариациям управляющих параметров в окрестности критических значений.

Следовательно, устойчивость иррациональных гамильтоновых торов относительно малых возмущений *управляющих параметров* системы, хотя она и производит впечатление сама по себе, не имеет отношения к асимптотической устойчивости, характерной для (устойчивых) аттракторов диссипативных систем. В этой связи возникает вопрос: какого типа аттракторы могут встретиться нам в диссипативных системах, имеющих более чем двумерное пространство состояний?

Вспомним, что в двумерном пространстве состояний единственными типами особенностей, которые нам встречались, были неподвижные *точки* (стационарные состояния) и *предельные циклы*. Из них аттракторами (для диссипативных систем) являются только стационарные состояния и устойчивые предельные циклы.

Изучение динамики *трехмерного* пространства состояний мы начнем с обобщения того, что нам уже известно в двумерном случае, — с исследования автономной системы *трех* связанных

нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1,\ X_2,\ X_3;\ \mu),$$
$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1,\ X_2,\ X_3;\ \mu), \qquad (6.2.2)$$
$$\frac{dX_3}{dt} = f_3(X_1,\ X_2,\ X_3;\ \mu),$$

действуя при этом так же, как в разд. 2.2 при рассмотрении двумерной системы.

Первый шаг в нашем анализе — исследование на устойчивость в линейном приближении стационарных состояний X_i^*, т. е. исследование собственных значений матрицы взаимодействия

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

где $\alpha_{ij} = (\partial f_i/\partial X_j)_*$.

Характеристическое уравнение в трехмерном случае будет кубическим, поэтому собственные значения матрицы A могут быть либо все три *вещественными*, либо одно *вещественным* и два *комплексно-сопряженными*. Собственный вектор, т. е. решение системы дифференциальных уравнений, можно представить в виде линейной суперпозиции

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} c_i x_i e^{\lambda_i t}, \qquad (6.2.3)$$

где λ_i — собственные значения матрицы A, т. е. решения характеристического уравнения, c_i — постоянные интегрирования, т. е. числа, зависящие от начальных условий, а x_i — решения линеаризованной системы

$$(\alpha_{11} - \lambda)\, x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 = 0,$$
$$\alpha_{21} x_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\, x_2 + \alpha_{23} x_3 = 0, \qquad (6.2.4)$$
$$\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + (\alpha_{33} - \lambda)\, x_3 = 0.$$

Попытаемся теперь классифицировать возможные категории особенностей.

Случай А. Все собственные значения вещественны и отрицательны. В этом случае мы имеем *устойчивое стационарное состояние*, которое является аттрактором в трехмерном пространстве состояний. (Если все собственные значения веще-

ственны и положительны, то мы просто получаем неустойчивое стационарное состояние — так называемый *репеллер.*)

Случай Б. Все собственные значения вещественны, два из них отрицательны (например, λ_1 и λ_2), *а третье* (λ_3) *положительно.* В этом случае мы имеем стационарное состояние, которое притягивает все траектории в плоскости (x_1, x_2) и отталкивает их вдоль оси x_3. Это — (трехмерная) *седловая точка.*

Случай В. Одно собственное значение вещественно и отрицательно (например, $\lambda_3 < 0$), *а* λ-, λ_2 — *комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями.* В этом случае в одном подпространстве (на плоскости (x_1, x_2)) особая точка ведет себя как устойчивый фокус. В направлении оси x_3 траектории спиралями *приближаются* к фокусу до уровня плоскости (x_1, x_2) по поверхности либо параболоида с осью x_3 в качестве оси симметрии (случай $0 > \mathrm{Re}\{\lambda_1, \lambda_2\} > \lambda_3$), либо «вогнутого» конуса с осью x_3 в качестве оси симметрии (случай $\mathrm{Re}\{\lambda_1, \lambda_2\} < \lambda_3 < 0$). Если вещественные части всех собственных значений *положительны*, то мы получаем неустойчивый фокус на плоскости (x_1, x_2).

Случай Г. Одно собственное значение вещественно и положительно (например, $\lambda_3 > 0$), *а* λ_1, λ_2 — *комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями.* Это более интересный случай. Как и в случае В, особая точка ведет себя на плоскости (x_1, x_2) как устойчивый фокус, но *в отличие* от предыдущего случая, так как теперь $\lambda_3 > 0$, траектория в трехмерном пространстве не «спускается» по спирали, сходящейся к фокусу, а уходит от фокуса, как показано на рис. 6.9. Такую особенность принято называть седло-фокус.

Еще более интересный случай возникает, если поменять знаки собственных значений, т. е. если $\lambda_3 < 0$ и $\mathrm{Re}\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$. В этом случае мы опять получаем условия, приводящие (в двумерном пространстве состояний (x_1, x_2)) к бифуркации Хопфа — переходу от неустойчивого фокуса к устойчивому предельному циклу.

Сказанное до сих пор просто (и прямолинейно) обобщает на трехмерное пространство состояний то, что нам уже известно из двумерной теории, изложенной в гл. 2. Попытаемся теперь исследовать возможность существования аттракторов, присущих только динамике в трехмерном пространстве состояний и не имеющих аналогов на плоскости. Первое, что приходит в голову, — исследовать возможность существования двумерных *притягивающих* торов (неизбежно «иррациональных», так как вероятность случайно выбрать две частоты ω_1 и ω_2 с иррациональным отношением гораздо больше, чем вероятность попасть

на частоты с рациональным отношением $\omega_1/\omega_2 = n/m$, где n, m — целые числа). Напомним, что в этом случае траектория на поверхности тора (гамильтонова или негамильтонова) квазипериодическая, т. е. открытая и всюду плотная, и, следова-

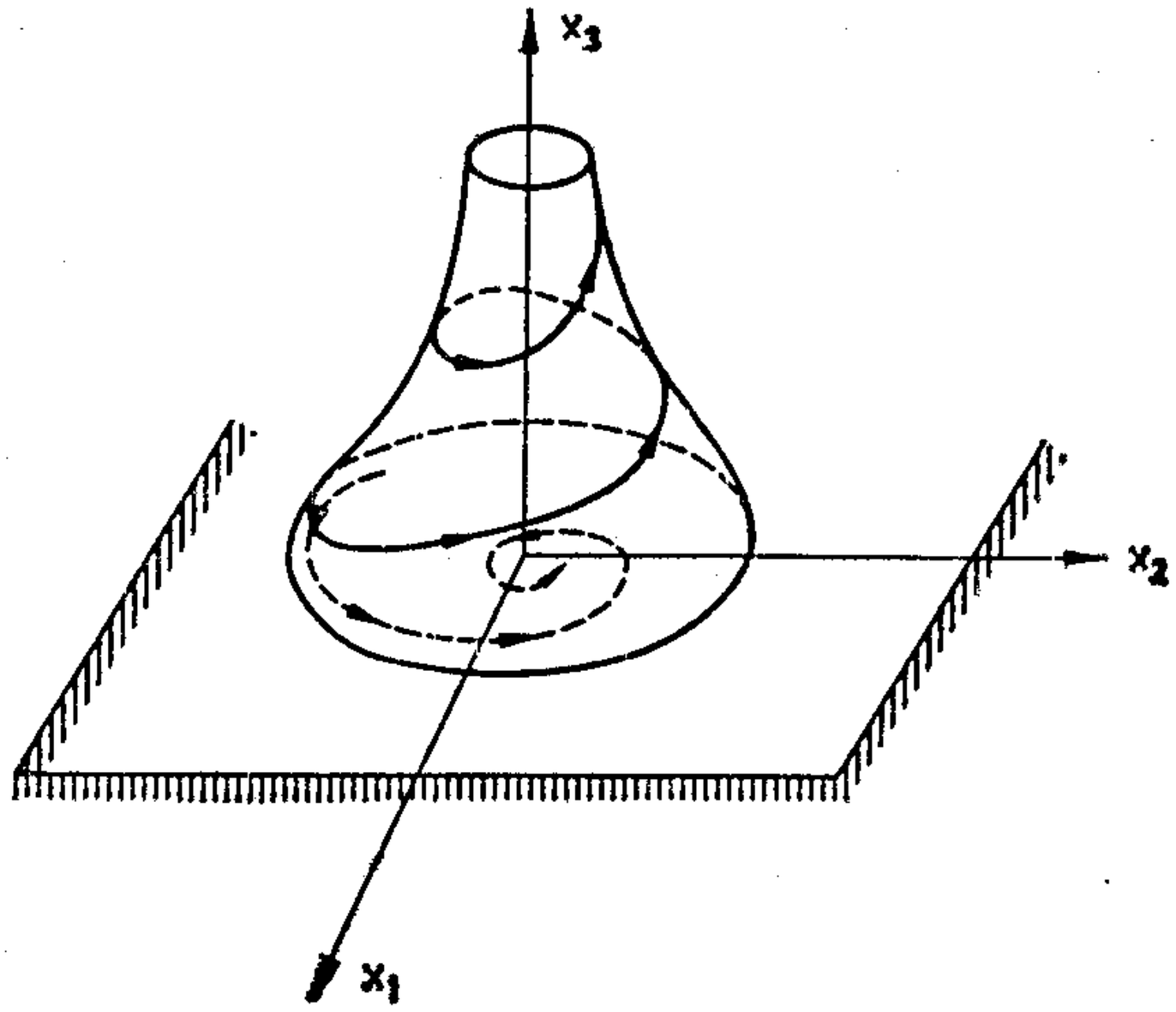


Рис. 6.9. Особая точка седло-фокус.

тельно, *эргодическая*. Диссипативный нелинейный осциллятор с основной частотой ω_1, на который действует внешняя периодическая вынуждающая сила с частотой ω_2, — пример системы с тремя степенями свободы, т. е. системы, обладающей траекторией в трехмерном пространстве состояний. Если у такого осциллятора в свободном режиме (без воздействия вынуждающей силы) имеется предельный цикл с основной частотой ω_1, то можно представить себе соответствующий 2-тор (рис. 6.10), поблизости от которого нет другого тора, ни вложенного в него, ни объемлющего его. Этот тор является *аттрактором* в трехмерном пространстве состояний. В сечении Пуанкаре этого тора мы получим предельный цикл.

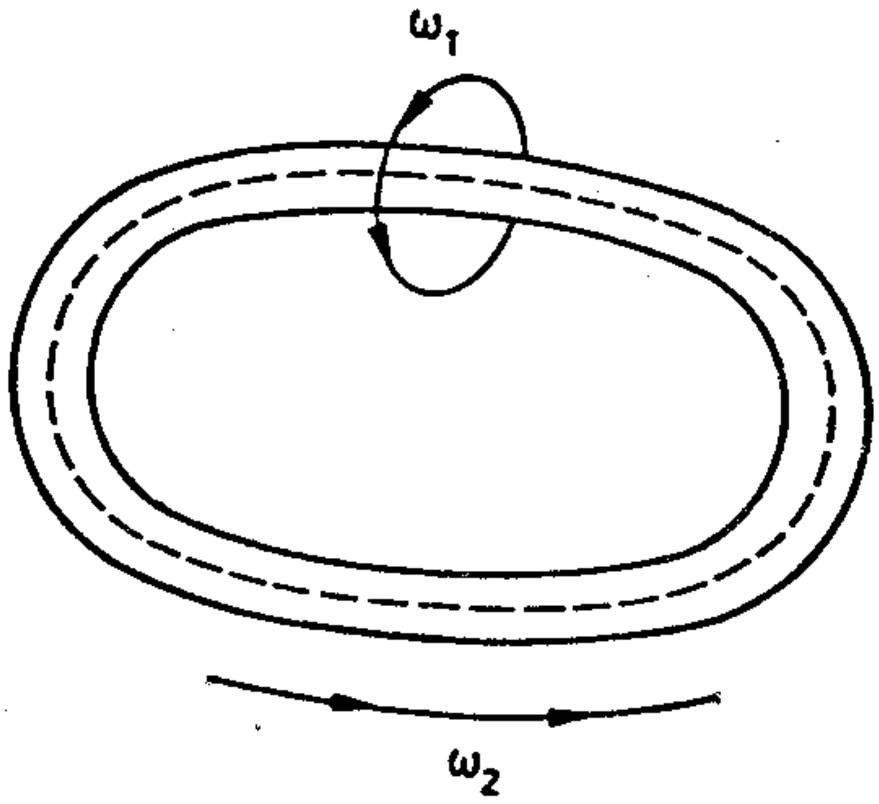


Рис. 6.10. 2-тор.

Как *возникает* такой трехмерный тор при бифуркации? Проследить за его эволюцией шаг за шагом весьма поучительно.

Запишем еще раз нашу трехмерную систему дифференциальных уравнений в таком виде, чтобы по существу все сво-

дилось к нелинейной связи линеаризованной двумерной системы x_1, x_2 с третьей переменной x_3.

Пусть x_1, x_2, x_3 — возмущения относительно некоторой особой точки (X_1^*, X_2^*, X_3^*). Предположим, что особая точка (X_1^*, X_2^*) — фокус. Двумерная система x_1, x_2 сама по себе (в канонической форме) имела бы вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1 + \alpha x_2, \tag{6.2.5}$$

и, будучи связанной с третьей переменной x_3, порождает систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_2 + x_1 x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\beta x_1 + \alpha x_2 + x_2 x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Вводя полярные координаты $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, преобразуем систему уравнений (6.2.6) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\beta, \quad \frac{dr}{dt} = \alpha r + r x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= f(r, \varphi, x_3). \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Замена переменных показывает в явном виде, что угловая скорость вращения (например, $\omega_2 = \beta$) в плоскости (x_1, x_2) *не зависит* от того, каким образом переменная x_3 связана с x_1 и x_2. Следовательно, если параметры системы уравнений относительно r и x_3 приводят к возникновению предельного цикла с основной угловой частотой, например ω_1, то в наиболее вероятном случае отношение ω_1/ω_2 иррационально. Таким образом, система (6.2.7) способна порождать эргодическое квазипериодическое поведение.

Чтобы вызвать возникновение аттрактора в виде 2-тора, достаточно связать нелинейным образом нелинейный осциллятор с третьей переменной x_3. Приведем конкретный пример, т. е. зададим в явном виде нашу функцию $f(x_1, x_2, x_3)$. Выберем

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \sigma x_3 - (r^2 + x_3^2). \tag{6.2.8}$$

Сосредоточим внимание на системе (r, x_3), а именно на системе

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r + r x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = \sigma x_3 - r^2 - x_3^2, \tag{6.2.9}$$

и определим, при каких условиях в системе может возникнуть предельный цикл. Система (6.2.9) имеет следующие стационарные состояния:

а) $r^* = 0, \quad x_3^* = 0;$

б) $r^* = 0, \quad x_3^* = \sigma;$

в) $x_3^* = -\alpha, \quad r^* = \sqrt{-\alpha^2 - \sigma\alpha}, \quad -\alpha(\alpha + \sigma) > 0.$

Исследуем каждое из этих стационарных состояний на устойчивость относительно малых возмущений, полагая $r = r^* + \rho$ и $x_3 = x_3^* + \xi$, где $\rho \ll r^*$ и $\xi \ll x_3^*$.

а) Подставляя в систему уравнений (6.2.9), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha\rho \quad \text{и} \quad \frac{d\xi}{dt} = \sigma\xi. \tag{6.2.10}$$

Если $\alpha < 0$ и $\sigma < 0$, то стационарное состояние $(0, 0)$ *устойчиво*. Оно становится *седлом*, если $\sigma > 0$, $\alpha < 0$, или $\sigma < 0$, $\alpha > 0$; наконец, оно становится *репеллером*, если $\alpha > 0$, $\sigma > 0$.

б) В этом случае мы получаем

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(\alpha + \sigma) \quad \text{и} \quad \frac{d\xi}{dt} = -\sigma\xi. \tag{6.2.11}$$

Если $(\alpha + \sigma) < 0$ и $\sigma > 0$, то стационарное состояние $(0, \sigma)$ *устойчиво*. При $\sigma < 0$, $(\sigma + \alpha) < 0$ это *седло*, при $\sigma < 0$, $(\sigma + \alpha) > 0$ — *репеллер*.

в) В этом случае линеаризованная система имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha(r^* + \rho) + (r^* + \rho)(x_3^* + \xi) =$$

$$= \underbrace{\alpha r^* + r^* x_3^*}_{0} + \alpha\rho + r^*\xi + \rho\xi_3^* + \rho\xi \approx r^*\xi, \quad (\rho\xi \ll 1), \tag{6.2.12а}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \sigma(x_3^* + \xi) - (r^* + \rho)^2 - (x_3^* + \xi)^2 =$$

$$= \underbrace{\sigma x_3^* - r^{*2} - x_3^{*2}}_{0} + \sigma\xi - 2r^*\rho - \rho^2 - 2x_3^*\xi - \xi^2 \approx$$

$$\approx -2r^*\rho + (\sigma + 2\alpha)\xi, \quad (\rho^2 + \xi^2 \ll 1). \tag{6.2.12б}$$

Запишем характеристическое уравнение этой системы:

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma + 2\alpha) + 2r^{*2} = 0, \tag{6.2.13}$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma + 2\alpha) - 2\alpha(\alpha + \sigma) = 0. \tag{6.2.14}$$

Состояние (r^*, x_3^*) — *фокус*, если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, т. е. если $(\sigma + 2\alpha)^2 < < -8\alpha(\sigma + \alpha)$. Ясно, что при $\sigma < -2\alpha$ вещественные части собственных значений отрицательны и поэтому фокус устойчив.

Вспоминая то, что уже говорилось в разд. 2.2.9 о потере устойчивости фокусом и рождении предельного цикла, мы без труда обнаружим, что в интересующем нас сейчас случае при $\sigma \geqslant -2\alpha$ фокус теряет устойчивость и возникает предельный цикл с угловой частотой

$$\omega_1 = \sqrt{2r^*} = \sqrt{-2\alpha(\alpha + \sigma)}, \qquad (6.2.15)$$

вообще говоря, несоизмеримой с ω_2. Следовательно, при $\sigma_c = = -2\alpha$ периодическое решение ω_2 становится неустойчивым, и возникает *притягивающий* 2-тор с квазипериодическим движением, если условия $\sigma + 2\alpha \geqslant 0$, $\alpha(\alpha + \sigma) < 0$ совместны.

Подведем итоги. Мы установили пока, что в трехмерном пространстве состояний диссипативная система имеет устойчивые стационарные состояния, предельные циклы [в общем случае периода K, где $K = 2, 4, 6, \ldots, 2\nu$; это означает, что в сечении Пуанкаре траектории соответствует не пара точек ($K = 2$), а скорее набор из $K \approx 2\nu$ дискретных точек, которые траектория обходит в циклическом порядке] и 2-торы с квазипериодическим движением.

Существует ли в трехмерном пространстве состояний еще что-нибудь? Да, существует. Мы покажем сейчас, что в трехмерном пространстве состояний существует еще одна наиболее важная категория аттракторов — так называемые «странные» аттракторы.

Непериодические аттракторы. Итак, возникает вопрос: существуют ли в трехмерном пространстве состояний аттракторы более «экзотические», чем стационарные состояния, предельные циклы и двумерные торы? Даже если такие аттракторы существуют, то в трехмерном пространстве они должны иметь *нулевой* объем. Одномерное сечение Пуанкаре такого аттрактора можно представить в виде бесконечного ансамбля несчетных несвязных сегментов из точек на прямой, которые аттрактор «посещает» всякий раз, когда он непериодическим («хаотическим») образом проходит через «нулевой уровень».

Существуют ли *в принципе* такие структуры, например, на нормированном интервале [0, 1]? Существуют. Хорошо известным примером таких структур может служить *канторовское множество*, представляющее собой нечто среднее между конечным множеством точек и непрерывной кривой (рис. 6.11). Рассмотрим замкнутый отрезок [0, 1], разделим его, например, на три равные части и выбросим среднюю часть, оставив концы

1/3 и 2/3. Повторим эту процедуру бесконечно много раз (на втором этапе мы выбросим отрезки [1/9, 2/9] и [7/9, 8/9], но оставим их концы). В результате мы получим нерегулярное бесконечное несчетное и несвязное множество точек *меры нуль*. В последнем нетрудно убедиться, вычисляя полную длину дополнения, т. е. длину выброшенной части отрезка [0, 1].

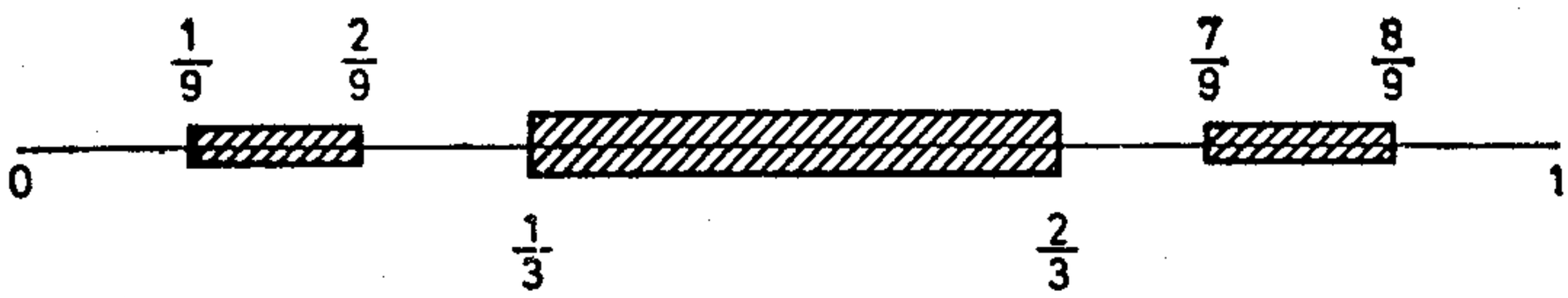


Рис. 6.11. Классическое канторовское множество («черно-белое», симметричное).

Длина выброшенной части равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}=1. \qquad (6.2.16)$$

Соответствующий (пока все еще гипотетический) аттрактор в трехмерном пространстве не является ни замкнутой кривой, ни поверхностью с определенной евклидовой размерностью. Это скорее незамкнутая несамопересекающаяся кривая, заключенная в конечной подобласти пространства состояний и образующая в этой подобласти бесконечное множество двумерных листов. Эта кривая «посещает» эти листы нерегулярно и имеет вдоль заданного направления по крайней мере на одном из листов сечение Пуанкаре, которое является канторовским множеством или напоминает его по структуре.

6.3. Странные аттракторы

6.3.1. Одномерные отображения на отрезке. «Логистическая» модель

Мы начнем на этот раз не с системы трех связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а с одного нелинейного *разностного* уравнения «логистического» типа, например,

$$X_{t+1}=aX_t(1-X_t), \quad 0\leqslant X_t\leqslant 1. \qquad (6.3.1)$$

Как мы увидим в дальнейшем, уравнения такого типа очень хорошо описывают одномерное отображение с одним максимумом («одним горбом») в сечении Пуанкаре некоторых весьма интересных трехмерных «странных» аттракторов. Однако пока мы будем предполагать, что наша динамическая система описы-

вается только разностным уравнением (6.3.1). К числу примеров физических систем, описываемых уравнением (6.3.1), относятся и модели популяций с перекрывающимися поколениями. Основной вопрос в задачах такого рода сводится к оценке n-го поколения по популяции первого поколения. Так как мы впервые встречаемся с *дискретными* динамическими системами, наше исследование (разностного уравнения (6.3.1)) естественно начать с выяснения критериев устойчивости стационарных состояний, или в общем случае стационарных решений таких систем.

В логистическом уравнении

$$F(X_n) \equiv X_{n+1} \equiv aX_n(1 - X_n) \tag{6.3.2}$$

величина $F(X_n)$ достигает максимума при $X_n \equiv 1/2$, причем

$$F_{\text{макс}} \equiv \frac{a}{4}, \quad 1 \leqslant a \leqslant 4.$$

Стационарное состояние системы (6.3.2) (т. е. значения, к которым сходятся размеры будущих популяций) определяются как точка (или точки), в которых прямая, проходящая через начало координат под углом 45° к горизонтальному направлению, пересекает параболу $F(X_n)$. Таких точек две: одна в начале координат

$$X_n^* \equiv 0, \tag{6.3.3}$$

другая — для которой

$$X_{n+1} \equiv X_n \equiv aX_n(1 - X_n),$$

или

$$X_n \equiv 1 - \frac{1}{a}. \tag{6.3.4}$$

В общем случае стационарные состояния являются решениями уравнения $X_n \equiv F(X_n)$ на интервале $[0, 1]$.

Исследуем теперь устойчивость стационарных состояний. До сих пор критерии устойчивости были установлены для систем, наблюдаемых в непрерывном времени. Для систем, наблюдаемых «стробоскопически», т. е. в дискретные моменты времени, ситуация изменяется: чтобы увидеть точно, как это происходит, запишем уравнения линеаризованной континуальной («сплошной») системы для (малых) возмущений $x_i(t)$ относительно данного стационарного состояния

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j \quad (i \in 1, \ldots, N) \tag{6.3.5}$$

в виде

$$x_i(t + \tau) - x_i(t) \equiv \tau \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j, \tag{6.3.6}$$

где N — число степеней свободы системы, $a_{ij} = (\partial f_i/\partial X_j)_*$ и τ — промежуток времени между двумя последовательными наблюдениями. Коэффициенты взаимодействия в (6.3.6) точно такие же, как в континуальной системе, т. е. являются элементами матрицы взаимодействия A континуальной системы.

Систему из N уравнений (6.3.6) можно записать более компактно в виде

$$\mathbf{x}(t+\tau) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t), \tag{6.3.7}$$

где теперь элементы b_{ij} матрицы взаимодействия $\mathbf{B}$ размером $N \times N$ определяются соотношениями

$$b_{ij} = \tau a_{ij} + \delta_{ij},$$

или

$$\mathbf{B} = \tau\mathbf{A} + \mathbf{I}, \tag{6.3.8}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_i(t) \sim (\lambda_i)^{t/\tau}$, мы получаем с учетом того, что $\mathbf{x}(t+\tau) = \lambda\mathbf{x}(t)$, вместо уравнений (6.3.7) систему уравнений

$$\lambda\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t). \tag{6.3.9}$$

Собственные значения λ мы находим, решая характеристическое уравнение

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{6.3.10}$$

Это уравнение *отличается* от характеристического уравнения континуальной системы. В случае дискретной системы для устойчивости стационарного состояния необходимо и достаточно, чтобы вещественные части *всех* собственных значений принадлежали интервалу $(-1, +1)$: $|\mathrm{Re}\{\lambda\}| < 1$. В нашем примере это означает, что стационарные состояния устойчивы, если угол наклона касательной к кривой $F(X_n)$ в соответствующей точке заключен между —45° и 45° (рис. 6.12).

Вычислим угловой коэффициент касательной. В точке X^* угловой коэффициент касательной к кривой $F(X_n) = X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$ равен

$$\lambda^{(1)}(X^*) = \left(\frac{dF}{dX}\right)_{X=X^*} = \frac{d}{dX}[aX(1-X)]_{X=X^*} = a[(1-2X)]_{X=X^*}. \tag{6.3.11}$$

Для стационарного состояния $X^* = 0$ получаем $\lambda^{(1)}(0) = a$, но так как в нетривиальных случаях $a > 1$, начало координат *все-*

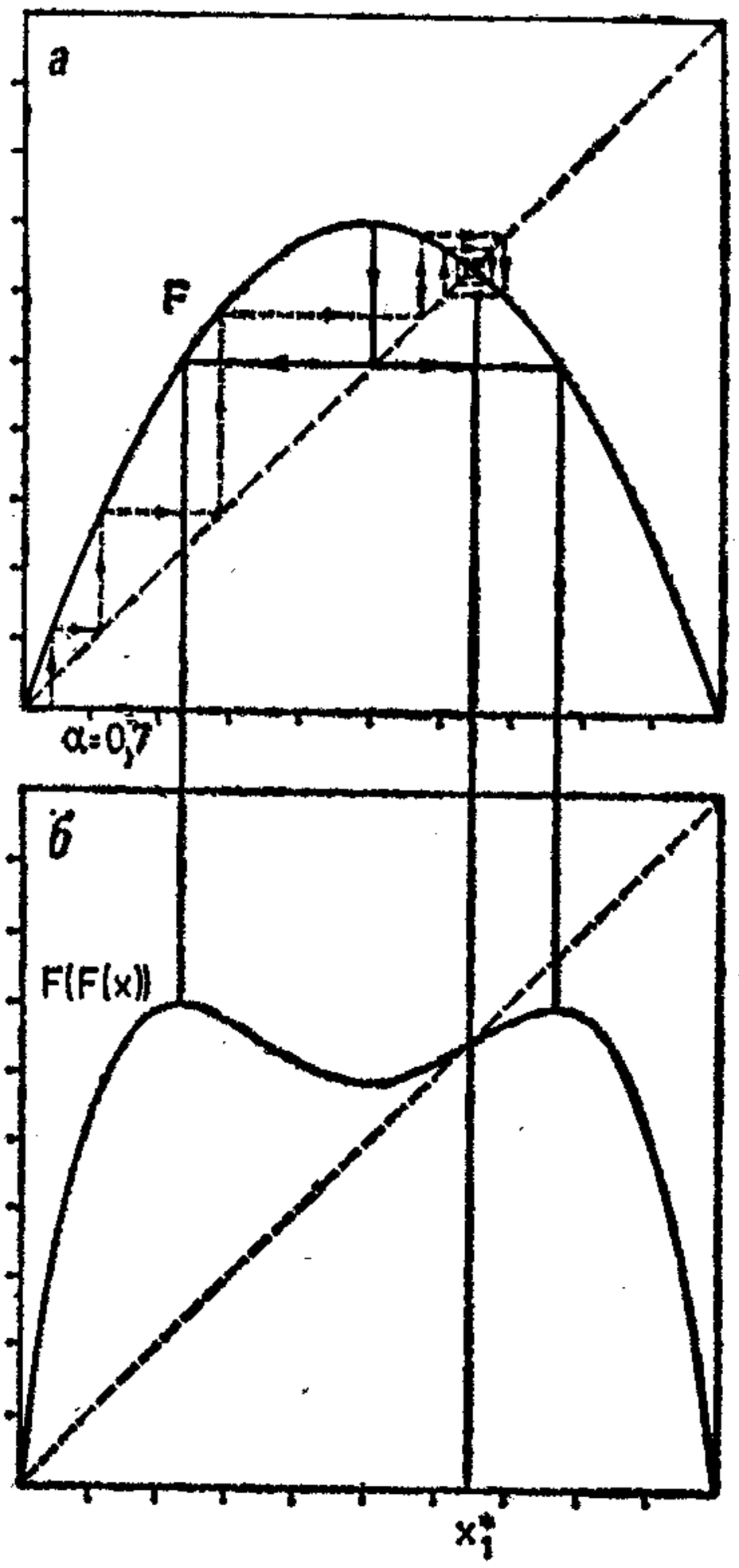


Рис. 6.12. Логистическое отображение. Одно устойчивое стационарное состояние. *а* — итерационный процесс (показан *штриховой линией*) на отображении $F(x)$, *б*— функция $F(F(x))$. Штриховая линия имеет наклон в 45° и проходит через начало координат. (По работе [6.9].)

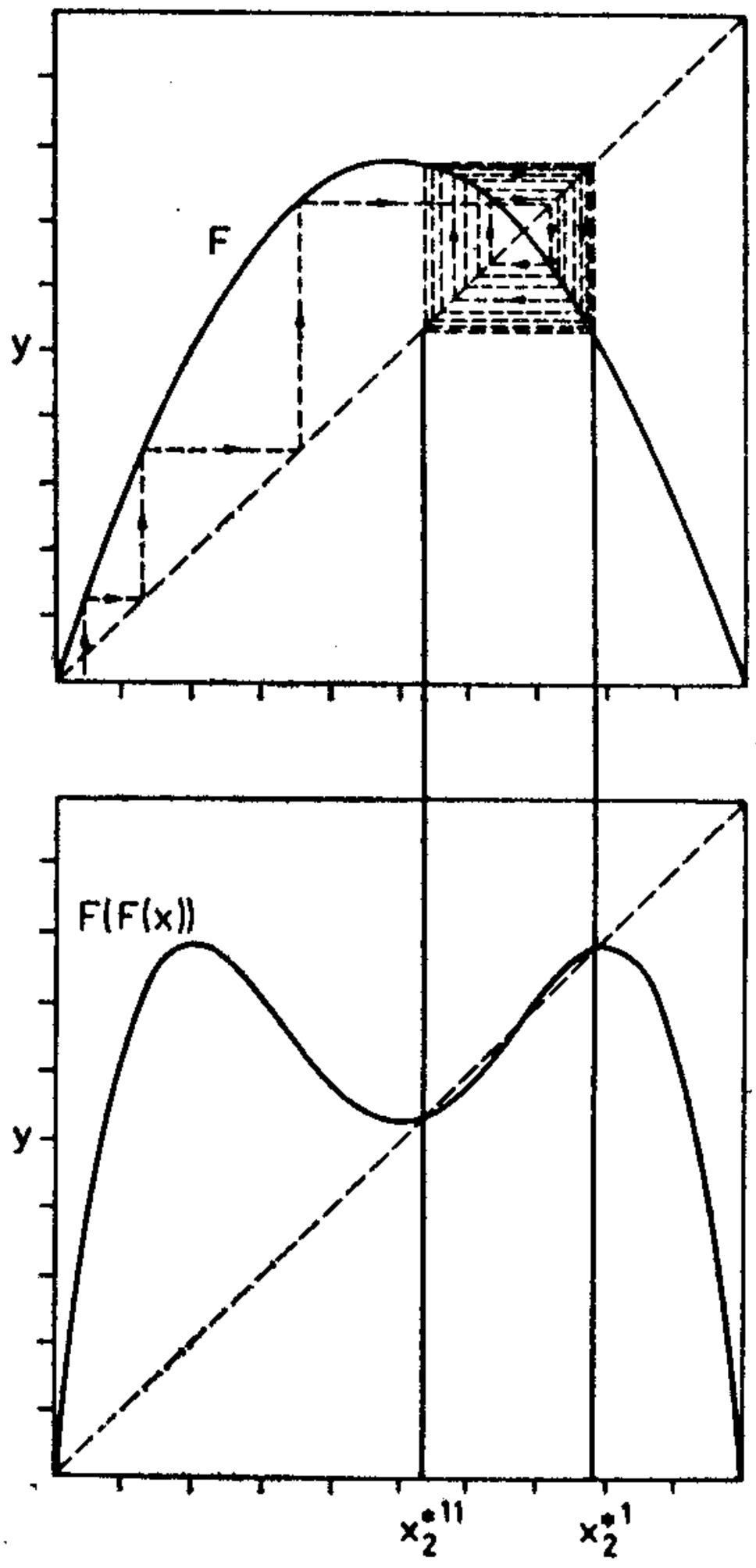


Рис. 6.13. Логистическое отображение. Предыдущее стационарное состояние становится неустойчивым и возникает устойчивый предельный цикл периода 2. (По работе [6.9].)

гда является неустойчивым стационарным состоянием. Для стационарного состояния $X_1^* = 1 - (1/a)$ получаем

$$\lambda^{(1)}(X_1^*) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a. \qquad (6.3.12)$$

Это стационарное состояние устойчиво, если $\lambda^{(1)}(X_1^*) \leqslant 1$, или при $1 < a \leqslant 3$.

Действительно, когда «горб» кривой становится все более крутым и $F(X)_{\text{макс}}$ стремится к единице, управляющий параметр достигает своего критического значения ($a_{c_1} = 3$), за которым стационарное состояние X_1^* становится неустойчивым. Понять, что происходит за критическим значением $a_{c_1} = 3$, нам поможет рассмотрение второй итерации функции $F(X)$:

$$X_{n+2} = F(F(X_n)) = F^{(2)}(X_n). \tag{6.3.13}$$

Стационарные состояния в этом случае — те значения X_2^*, которые являются вещественными решениями уравнения $X_2^* = F^{(2)}(X_2^*)$ в интервале $[0, 1]$. Как видно из рис. 6.13, в этом случае существуют четыре стационарных состояния, а именно: начало координат, предыдущая точка $X_1^* = 1 - (1/a)$ и два новых «сателлита» $X_2^{*\prime}$ и $X_2^{*\prime\prime}$ по обе стороны от X_1^* — решения уравнения

$$a^2 X^* (1 - X^*)[1 - aX^*(1 - X^*)] = X^*, \tag{6.3.14}$$

или

$$a^3 X^3 - 2a^3 X^2 + a^2(a+1)X + 1 - a^2 = 0, \tag{6.3.15}$$

которые все вещественны и положительны (заключены между 0 и 1).

Точнее говоря, один корень уравнения (6.3.15) есть старое состояние $X_1^* = 1 - (1/a)$. Два новых сателлитных состояния определяются двумя другими корнями

$$X_2^{*\prime} = \frac{1 + a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \tag{6.3.16}$$

и

$$X_2^{*\prime\prime} = \frac{1 + a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}. \tag{6.3.17}$$

Исследуем теперь, как ведет себя угловой коэффициент $\lambda(x)$ касательной в точке X_1^* к кривой 2-й итерации $F^{(2)}(X)$. Имеем:

$$\frac{\partial F^{(2)}(X)}{\partial X} = \lambda^{(2)}(X) = a^2 - 2a^2(a+1)X + 6a^3X^2 - 4a^3X^3, \tag{6.3.18}$$

$$\lambda^{(2)}(X^*) = a^2 - 4a + 4 = (2 - a)^2 = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2. \tag{6.3.19}$$

Этот результат, связывающий угловые коэффициенты касательных, проведенных в данной точке к последовательным итерациям, можно обобщить:

$$\lambda^{(K)}(X) = [\lambda^{(1)}(X)]^K. \tag{6.3.20}$$

(Из соотношения (6.3.20), в частности, следует, что, когда «материнская» точка X^* становится неустойчивой, в ее окрестности появляются устойчивые близнецы-сателлиты.)

Итак, при $a > 3$ после бифуркации (при $a_{c_1} = 3$) предыдущее стационарное состояние теряет устойчивость, и в его окрестности возникают два новых стационарных состояния. Система колеблется между этими двумя состояниями (рис. 6.13) по устойчивой асимптотической траектории — предельному циклу «периода 2». Эти колебания асимптотически устойчивы в том смысле, что при многократных итерациях отображения $F(X)$ мы выходим на них при любом начальном значении X_0.

При дальнейшем увеличении параметра a мы доходим до нового критического значения $a_{c_2} = 3{,}414$, за которым касательные в точках $X_2^{*\prime}$, $X_2^{*\prime\prime}$ (имеющие одинаковые угловые коэффициенты) образуют с горизонтальным направлением угол круче 45°. Это означает, что цикл периода 2 становится неустойчивым, вследствие чего *каждый* из сателлитов $X_2^{*\prime}$, $X_2^{*\prime\prime}$ становится неустойчивым, и по сторонам от него появляются два новых сателлита — они соответствуют возникновению асимптотически устойчивых колебаний периода 4. Такой каскад бифуркаций точек X^* приводит к серии «удвоений периода» возникающих предельных циклов и продолжается при дальнейшем увеличении параметра a: при $a > a_{c_{n-1}}$ цикл периода 2^{n-1} становится неустойчивым, и последующая бифуркация порождает устойчивый цикл периода 2^n.

Отдельные точки X^* на оси X, как видно из рис. 6.14, не порождают симметричные множества: последовательность точек X^* расположена на отрезке $[0, 1]$ весьма нерегулярно. Отрезок $[0, 1]$ разбивается на области (подмножества или полосы), в которых траектории существуют. Эти области разделены «пустыми» подмножествами, в которые орбиты не попадают.

При самом критическом значении $a_{c_\infty} \approx 3{,}5700$ (в точке накопления критических точек) *ни одна* периодическая траектория практически не устойчива, и развитая выше схема порождает также *апериодическую* траекторию бесконечного периода. Этот режим обычно принято называть «хаосом», и, несмотря на то, что нет ни одной устойчивой орбиты, ему соответствуют не дискретные точки, а *всюду плотные притягивающие подмножества* на интервале $[0, 1]$. Эти интервалы следов итерирующего «многоугольника» на оси X образуют, как говорят, канторообразное множество — асимметричное множество, о котором пойдет речь в разд. 6.4. Но прежде, чем мы пойдем дальше, необходимо исследовать более подробно, каким образом *возникает* хаос в каскаде бифуркаций удвоения периода.

Несколько лет назад Фейгенбаум [6.9], по существу с помощью одного лишь карманного микрокалькулятора, обнаружил, что путь к хаосу *рекуррентен* в следующем смысле. Последовательность критических значений a_c между 3 и $\sim 3{,}57$ подчиняется двум «универсальным» постоянным: (1) коэффициенту *подобия* $\mu = 2{,}50290787\ldots$, задающему «показатель плотности упаковки» критических точек X^* между двумя последовательными поколениями состояний (это расстояние в интервале [0, 1] на оси X между более далеким стационарным со-

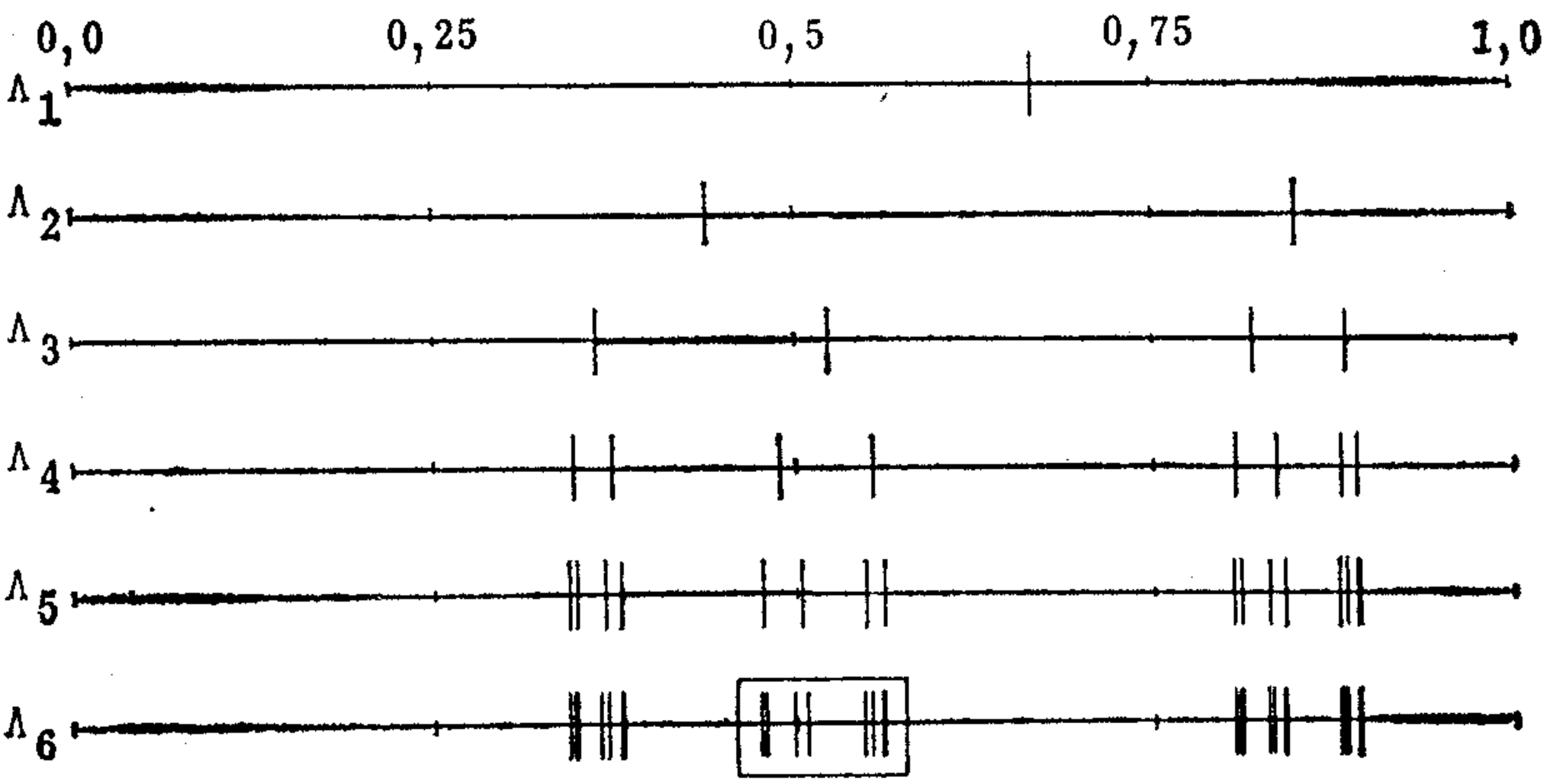


Рис. 6.14. Серия преобразований подынтервалов, внутри которых располагаются траектории, при последовательных критических значениях управляющего параметра a приводит к каскадам удвоений периода, предшествующим достижению точки накопления $a_{c_\infty} = 3{,}57$. В пределе эти интервалы образуют асимметричное «черно-белое» множество типа канторовского, характер которого определяется скейлинговой константой μ Фейгенбаума. Последовательные критические значения a_{c_i} связаны между собой константой δ Фейгенбаума. (По работе [6.10].)

стоянием, претерпевающим бифуркацию, и точкой $X = 0{,}5$ в μ раз *меньше*, чем расстояние между ее «родителями» и точкой $X = 0{,}5$); (2) коэффициенту *сходимости* $\delta = 4{,}66920\ldots$, задающему скорость сходимости критических значений a, трех поколений с помощью рекуррентной формулы

$$\frac{a_{c_n} - a_{c_{n-1}}}{a_{c_{n+1}} - a_{c_n}} = \delta. \tag{6.3.21}$$

За критической точкой $a_{c_\infty} \approx 3{,}57$ (точкой накопления критических точек) периодические траектории уступают место новому режиму, внешне выглядящему по существу как марковская цепь стохастически взаимозависящих строк из нулей и единиц (если

попадание в левую половину интервала мы условимся кодировать нулем, а попадание в правую половину — единицей). Взаимозависимость, отличающая их от исходов бросания нефальшивой монеты, обусловлена логистической кривой. (Все возможные строки нулей и единиц могут появиться только в пределе при $a = 4$, когда в отображении участвует весь интервал.)

При $a > a_{c_\infty}$ существует бесконечно много неподвижных точек с различными периодичностями и бесконечно много циклов различной длины. Существует также несчетное множество начальных точек X_0, порождающих полностью апериодические траектории.

При $a > 3{,}57$ все эти циклы сначала имеют *четные* периоды. Затем при значении управляющего параметра $a = 3{,}6786$ появляется первый цикл с *нечетным* периодом. Несколько первых нечетных циклов имеют очень большие периоды, но по мере увеличения управляющего параметра появляются циклы с все более коротким периодом, и, наконец, при $a = 3{,}8284$ возникает последний цикл с периодом 3. При $a > 3{,}8284$ существуют циклы с периодами, равными *любому* целому числу, а также несчетное множество асимптотически апериодических траекторий. «Период 3 влечет за собой хаос». Термин «хаос» означает в данном случае существование динамических траекторий, неотличимых от некоторых случайных процессов. [Дело в том, что для рассматриваемого нами логистического уравнения при любом конкретном значении параметра существует *один* цикл, который устойчив и притягивает по существу *все* начальные точки, т. е. *один* цикл, которому «принадлежат» почти все начальные точки. Остальные циклы (их бесконечно много) вместе с асимптотически апериодическими траекториями «владеют» множеством точек, которое, хотя оно и несчетно, имеет меру нуль (к этому вопросу мы вернемся в разд. 6.4.1 в связи с обсуждением размерности канторовского множества). Любой конкретный устойчивый цикл возникает в *чрезвычайно* узком «окне» (или щели) в пространстве управляющего параметра. Это обстоятельство вместе с большой продолжительностью переходных режимов делают *практически невозможным* обнаружение одного-единственного цикла в реальном или численном эксперименте и вынуждают исследователей прибегать к стохастическому описанию динамики, несмотря на детерминистический характер изучаемого процесса.]

Мы объяснили, каким образом исходное стационарное состояние X^* через каскад бифуркаций порождает гармоники с периодом 2^n ($a_{c_\infty} = 3{,}57$ — точка накопления в пространстве управляющего параметра a при $n \to \infty$). Проблема теперь

состоит в объяснении того, как появляются новые циклы с периодом $K \times 2^n$. Этот процесс изображен на рис. 6.15, где показано, как на кривой $X_{t+3} = F^{(3)}(X_t)$ возникает цикл с периодом 3.

Если «горб» на графике функции $F(X)$ достаточно крутой (т. е. достаточно высокий), то трехкратная итерация порождает функцию $F^{(3)}(X)$ с четырьмя максимумами («горбами»), как на рис. 6.15. Сначала (при $a < 3{,}8284$) прямая, проведенная под

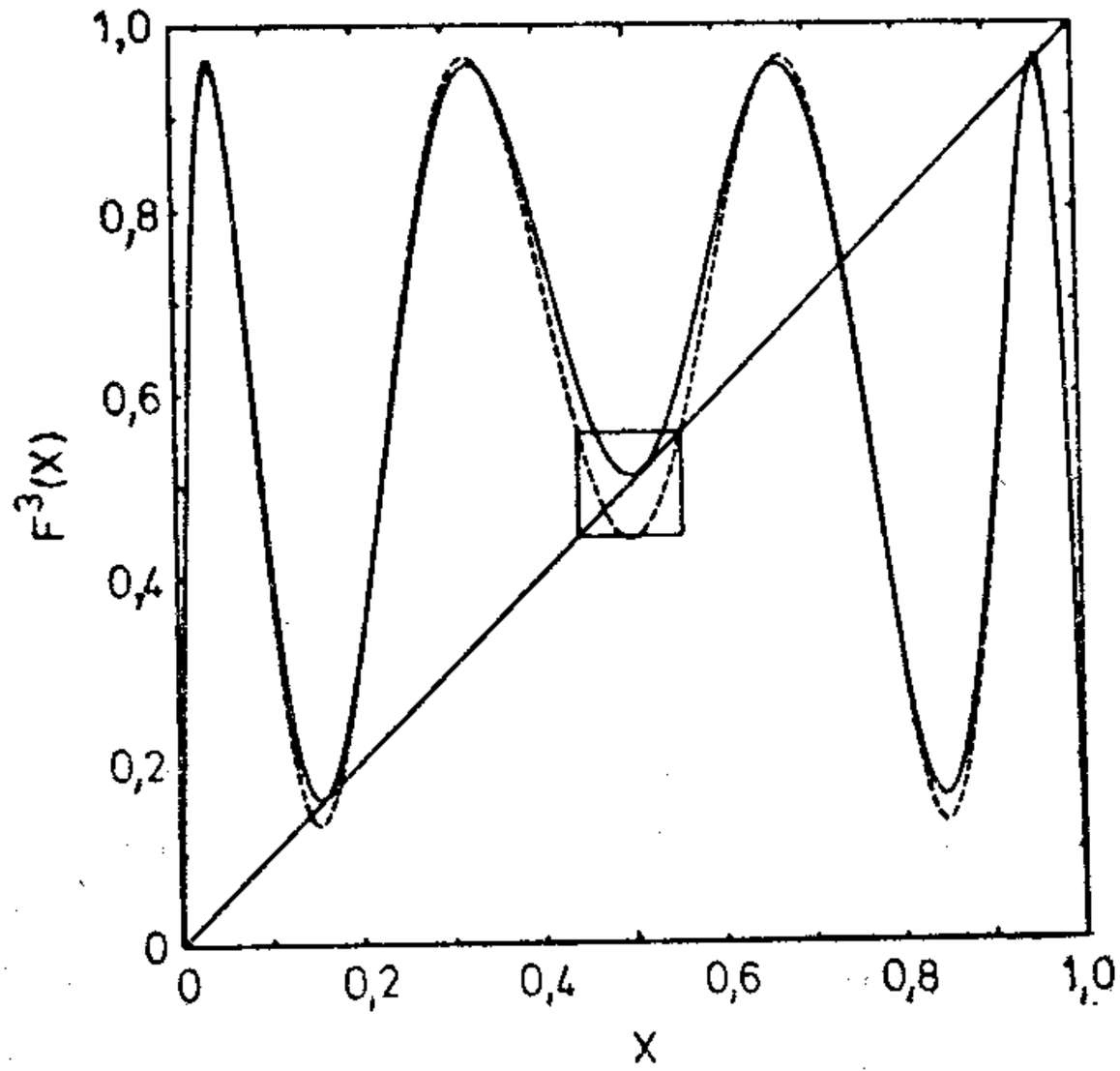


Рис. 6.15. Начало процесса тангенциальной бифуркации (см. текст).

углом 45° к горизонтали, пересекает кривую $F^{(3)}(X)$ только в одной точке (и, разумеется, в начале координат). По мере того, как «горб» на графике функции $F(X)$ становится более крутым, «холмы» и «долины» на графике функции $F^{(3)}(X)$ вырисовываются все более отчетливо, пока, наконец, две первые долины слева и последний холм справа не касаются *одновременно* диагонали и затем не пересекают ее в шести *новых* точках, как показано на рис. 6.15, при $a > 3{,}8284$. Эти шесть точек делятся на два различных трехточечных цикла.

Действительно, определяющий устойчивость угловой коэффициент касательных к $F^{(3)}(X)$ в трех точках, образующих цикл, имеет одинаковое значение, равное $X^{(3)} = +1$ при «рождении» точек, а затем касательные пересекают диагональ под более крутым углом, поэтому такой 3-цикл всегда неустойчив. Угловой коэффициент касательных к $F^{(3)}(X)$ в трех остальных точках имеет начальное значение $\lambda^{(3)} = -1$, а затем возрастает до нуля, порождая устойчивый цикл периода 3. При дальнейшем «укручении» $F(X)$ угловой коэффициент $\lambda^{(3)}$ касательных в точках первоначально устойчивого трехточечного цикла убывает и

становится меньше -1, после чего цикл становится неустойчивым, и порождает с помощью уже известного каскада бифуркаций удвоения периода устойчивые циклы периода 6, 12, 24, ..., или, в общем случае, 3×2^n. Рождение пары устойчивого и неустойчивого циклов периода 3 и последующих гармоник, возникающих, когда первоначально устойчивый цикл становится неустойчивым, также имеет свою «точку накопления» при $a = 3{,}8495$. Между $a \cong 3{,}57$ и $a \cong 3{,}8284$ ни один цикл не устойчив так же, как при $a > 3{,}8495$.

Мы видим, что существуют бифуркации двух различных типов.

1) Истинно *новые* циклы периода K возникают парами (один устойчивый цикл и один неустойчивый), когда холмы и долины старших итераций отображения $F(X)$, поднимаясь (холмы) и опускаясь (долины), не пересекаются с диагональю, образующей угол 45° с горизонталью. Такие циклы рождаются в тот момент, когда холмы и долины касаются диагонали, и начальный угловой коэффициент касательных к кривой $F^{(3)}(X)$ в этих точках равен $\lambda^{(K)} = +1$. Этот тип бифуркаций называется *касательной* бифуркацией.

2) При укручении $F(X)$ первоначально устойчивый цикл с периодом K может стать неустойчивым. Потеря устойчивости происходит, когда наклон касательных к $F^{(K)}(X)$ в точках, образующих период K, становится круче, чем $\lambda^{(K)} = -1$, после чего рождается новый первоначально устойчивый цикл с периодом $2K$. Этот тип бифуркации называется *бифуркацией двузубой вилки* (*камертона*).

Итак, мы заключаем, что при изменении управляющего параметра в $F(X)$ *фундаментальными* устойчивыми динамическими режимами являются циклы с основным периодом K, возникающие при касательных бифуркациях, и связанные с ними каскады гармоник с периодом $K \times 2^n$, возникающих при бифуркациях двузубой вилки. Весь диапазон изменения управляющего параметра $1 < a < 4$ можно рассматривать как состоящий из бесконечно многих «окон» в пространстве параметра, то широких, то узких, каждое из которых соответствует единственному значению K, т. е. одной группе перечисленных выше основных динамических режимов.

«Окна» отделены друг от друга точками накопления гармоник периода $K \times 2^n$, *в которых* система действительно хаотична и не содержит притягивающих циклов. Хотя таких значений параметра бесконечно много, на интервале [1, 4] они имеют меру нуль. При $a = 4$ весь интервал отображается на себя. Наиболее важный из полученных до сих пор результат анализа логистического уравнения состоит в утверждении о том, что даже в простейшей одномерной нелинейной дискретной системе

(например, системе, физически или численно моделирующей эволюцию некоторой популяции с неперекрывающимися поколениями) предсказание практически невозможно. Следовательно, начав с некоторой заданной популяции в текущем поколении, мы при достаточно больших значениях управляющего параметра приходим к выводу о том, что из-за необычайной чувствительности динамического поведения к малейшим флуктуациям в начальных условиях или в управляющем параметре a поведение популяции даже в следующем поколении может оказаться существенно стохастическим, т. е. система может совершать апериодические колебания, сходящиеся к любому отличному от нуля устойчивому значению. Иначе говоря, две соседние точки X_1 и X_2 на интервале [0, 1], выбранные в качестве начальных условий, могут даже через небольшое число итераций порождать совершенно различные траектории; со временем эти траектории экспоненциально расходятся.

6.3.2. Фрактальная размерность. Канторовское множество

Коэффициент «сжатия» (или подобия) μ Фейгенбаума придает распределению точек/состояний на интервале [0, 1] *характер самоподобия* [1]. Прежде чем мы приступим к изучению других характерных параметров, необходимо основательно изучить то, что принято называть «фрактальными» свойствами и «фрактальной» размерностью обширного класса кривых или процессов.

Предположим, что дан очень нерегулярный отрезок кривой (недифференцируемой в бесконечно большом числе точек — такого рода траектории описывает частица, совершающая броуновское движение в жидкости) и требуется вычислить длину некоторой его части, заключенной между точками A и B, и размерность отрезка. [Вопрос имеет смысл с нашей точки зрения, так как мы хотим узнать на *более формальном* уровне какие-то характеристики структуры множества состояний, остающихся в интервале [0, 1] за первой точкой накопления $a_c \approx 3{,}57$, в особенности «полную длину» множества, занятого состояниями, и размерность этого множества. Трудно удержаться от искушения и не высказать предположение о том, что размерность этого множества равна 1. Как мы увидим ниже, такое предположение, вообще говоря, неверно.]

---

[1] Под самоподобием мы понимаем свойство объекта, структура которого наблюдается в одном масштабе, повторяться в последовательно уменьшающихся масштабах.

Итак, дана сильно нерегулярная кривая, и требуется вычислить ее длину. Прежде всего мы выберем длину мерного стержня, равную, например, G. Затем мы попытаемся сосчитать число сторон (одинаковой длины G) открытого многоугольника, вершины которого расположены на кривой. Если G — достаточно малая величина, то несущественно, с какого конца — A или B — мы начнем. В результате мы получим некоторую оценку длины $L(G)$. Решающее значение имеет то, что в отличие от регулярной, бесконечно дифференцируемой кривой с радиусом кривизны $R_i \geqslant G$ в нашем случае оценка длины $L(G)$ сильно зависит от G. Следовательно, оценку $L(G)$ необходимо знать при нескольких значениях G; еще лучше было бы знать аналитическую формулу для функции $L(G)$, например, вида $L(G) \sim \sim AG^{1-D}$, где A — (положительная) константа, D — константа, которая больше или равна единице. Постоянная D называется «фрактальной» размерностью исследуемой кривой; D может быть *нецелым* числом.

Попытаемся понять природу фрактальной размерности. Начнем с прямой в евклидовом пространстве, имеющей размерность 1. Следовательно, для любого положительного целого N отрезок $0 \leqslant x < X$ может быть разложен на N неперекрывающихся отрезков вида

$$\frac{(n-1)\,X}{N} < x < \frac{nX}{N}, \tag{6.3.22}$$

где n принимает значения от 1 до N. Каждый из этих отрезков получается из целого преобразованием подобия с коэффициентом подобия $r(N) = 1/N$.

Аналогично, плоскость имеет размерность 2. Следовательно, для любого точного квадрата (числа) N прямоугольник $0 \leqslant \leqslant x < X$, $0 \leqslant y < Y$ может быть разложен ровно на N неперекрывающихся прямоугольников вида

$$\begin{aligned} \frac{(K-1)\,X}{\sqrt{N}} &\leqslant x < \frac{KX}{\sqrt{N}}, \\ \frac{(\xi-1)\,Y}{\sqrt{N}} &\leqslant y < \frac{\xi Y}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

где K и ξ принимают значения от 1 до $\sqrt{N}$. Каждая из этих частей получается из целого преобразованием подобия с коэффициентом подобия $r(N) = 1/\sqrt{N}$. В общем случае, если $N^{1/D}$ — положительное целое число, то D-мерный прямоугольный параллелепипед может быть разложен на N параллелепипедов, каждый из которых получается из исходного параллелепипеда преобразованием подобия с коэффициентом подобия $r(N) = 1/N^{1/D}$.

Таким образом, размерность D характеризуется соотношением

$$D = -\frac{\ln N}{\ln r(N)} = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r(N)}}. \qquad (6.3.24)$$

Пример

Рассмотрим кривую (ломаную), построенную на интервале $[0, 1]$ (рис. 6.16). Она состоит из $N = 8$ «звеньев». Заменим каждое из N звеньев ломаной, которая получается из всей кривой преобразованием подобия с коэффициентом $r(N) = 1/4$. Мы

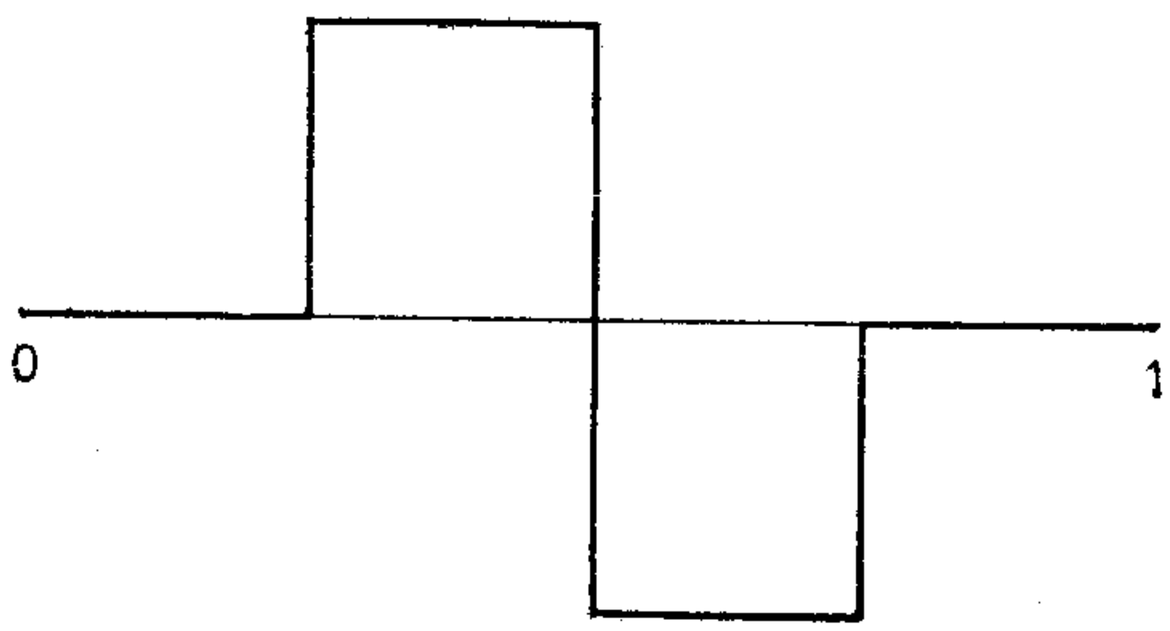


Рис. 6.16. Первый шаг в формировании фрактальной кривой при самоподобном скейлинге (см. текст).

получим ломаную из N^2 звеньев длиной $(1/4)^2$. Заменим далее каждое звено новой ломаной кривой, которая получается из исходной ломаной преобразованием подобия с коэффициентом $(1/4)^3$, и т. д. Самоподобная кривая, которую мы хотим построить, получается, или, лучше сказать, аппроксимируется, *бесконечной* последовательностью таких шагов. Ясно, что полная длина такой кривой на единичном интервале стремится к *бесконечности*, а ее фрактальная размерность равна

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 4} \approx 1{,}5.$$

Попытаемся теперь вычислить фрактальную размерность *канторовского множества*. Она определяется (для любого компактного множества точек) через число N «шаров» диаметра ε, которое необходимо, чтобы покрыть данное множество. Если при $\varepsilon \to 0$ это число возрастает как $N(\varepsilon) = \text{const} \cdot \varepsilon^{-D}$, то D — «фрактальная», или хаусдорфова, размерность множества.

И в этом случае мы вычисляем D по формуле

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}. \qquad (6.3.25)$$

Если мы хотим знать расположение множества с точностью до ε, то для указания его нам необходимо знать положения $N(\varepsilon)$

«сфер», покрывающих множество. Следовательно, размерность Хаусдорфа можно интерпретировать как характеристику множества, говорящую нам, *сколько информации необходимо для того, чтобы определить расположение множества с заданной точностью.* Для канторовского множества $\varepsilon = 1/3$ и $N = 2$ при первом разбиении, $\varepsilon = 1/9$ и $N = 4$ при втором разбиении, ..., $\varepsilon = (1/3)^{\rho}$ и $N = 2^{\rho}$ при ρ-м разбиении, поэтому

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}630.$$

Следовательно, фрактальная размерность канторовского множества *меньше*, чем его геометрическая размерность, — условие, необходимое (но не достаточное) для распознавания аттрактора как *компрессора* информации. Наконец, следует заметить, что построенное выше канторовское множество обладает свойством *масштабной инвариантности*, т. е. все множество, заключенное между 0 и 1, выглядит точно так же, как, например, его часть, заключенная между 0 и 1/3, если последнюю рассматривать под трехкратным увеличением.

Нам остается выяснить, будет ли канторовским множество состояний, остающееся на единичном отрезке в точке накопления $a_c = 3{,}57$ логистической кривой.

Коэффициент подобия μ Фейгенбаума показывает, что на интервале 0, 1 в критической точке накопления $a_c = 3{,}57$ мы имеем множество непересекающихся интервалов с самоподобными характеристиками. В этом отношении наше множество похоже на канторовское, и, как показывают вычисления, его фрактальная размерность равна $\sim 0{,}538$ (см. разд. 6.4). Однако сам по себе тот факт, что фрактальная размерность множества меньше единицы еще не свидетельствует о его принадлежности к аттракторам. Для этого нам необходимо исследовать еще один параметр, который служит мерой степени случайности, порождаемой детерминистическим уравнением, — параметр, связанный с *орбитальной устойчивостью.*

Орбитальная устойчивость данного цикла зависит от поведения соседних с ним траекторий. Если точки вблизи орбиты сходятся к ней, то такая орбита устойчива относительно малых возмущений и называется локально устойчивой. Орбита притягивающая, т. е. *асимптотически* устойчивая, если в среднем она локально устойчива. В случае одномерных отображений эти критерии устойчивости оцениваются *непосредственно* по наклону кривой, задающей отображение, в точках, посещаемых траекторией. В частности, если угловой коэффициент касательной к кривой в точке по абсолютной величине меньше единицы, то соседние точки при следующей итерации отображения приблизятся к данной точке. Таким образом, асимптотически устойчивая

траектория требует, чтобы *среднее* угловых коэффициентов касательных вдоль траектории было *меньше* единицы. Если среднее больше единицы, то траектория неустойчива; следовательно, малые начальные отклонения от траектории будут возрастать при итерации отображения. Иначе говоря, если средний угловой коэффициент касательных больше единицы, то это свидетельствует о том, что поток порождает *разнообразие* (потенциальную информацию); если же средний угловой коэффициент касательных меньше единицы, то это свидетельствует о *сжатии* информации и диссипации порожденного разнообразия, т. е. об убыли информации.

6.3.3. Понятие показателей Ляпунова для удвоения периода и хаотических режимов

Чувствительность к малым флуктуациям, т. е. некоторая исходная неопределенность в начальных условиях (в задании или измерении состояния) имеет решающее значение для характеристики поведения динамической системы. В таких случаях начальная неопределенность экспоненциально возрастает со временем до тех пор, пока следующее состояние системы не становится непредсказуемым. Информация о начальном состоянии утрачивается за конечное время, и по истечении этого времени (вычисляемого в приводимых ниже конкретных примерах) система становится практически непредсказуемой. Чувствительность к начальным данным может считаться одной из основных характерных особенностей хаоса. (Вспомним хотя бы наш «предварительный» пример в разд. 2.3.2.)

Параметром, позволяющим судить о средней локальной устойчивости или о скорости, с которой новая информация порождается потоком, либо, наоборот, о скорости, с которой утрачивается информация о начальном состоянии, является показатель Ляпунова λ. Изменение информации за одну итерацию при отображении, задаваемом функцией $F(x)$, вычисляется по производной dF/dx по формуле

$$I = \log_2 \left| \frac{dF}{dx} \right| \quad \text{бит.} \tag{6.3.26}$$

Если $|dF/dx| < 1$, то отображение в данной точке действует как сток информации, если $|dF/dx| > 1$, — как источник информации.

Если $P(x)$ — асимптотическое распределение вероятности траектории при заданном значении параметра a, то среднее изменение количества информации $\langle I \rangle$ есть характеристический показатель Ляпунова при данном значении управляющего па-

раметра:

$$\langle I\rangle = \lambda(a) = \int_0^1 P(x)\log\left|\frac{dF}{dx}\right| dx. \qquad (6.3.27)$$

Если поведение траектории внутри аттрактора предполагается эргодическим, то существует альтернативная форма показателя Ляпунова $\lambda(a)$, а именно

$$\lambda(a) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log_2\left|\frac{dF(x,\ a)}{dx}\right|_{x_i}, \qquad (6.3.28)$$

где N — число итераций, претерпеваемых траекторией при отображении.

Вычисление асимптотического распределения вероятности для данной траектории производится следующим образом. Мы произвольно выбираем некоторую начальную плотность вероятности $P_1(x)$ (например, предполагаем, что вероятность всюду равна единице) на интервале. Значение ее первой итерации $P_2(x)$ соответствует первоначальной $P_1(x)$, преобразованной под действием отображения. Плотность числа траекторий, попадающих в некоторый малый интервал при $F_1(x)$, равна плотностям в прообразах точек при отображении, взятых с весами, равными значениям производной $|dF/dx|$ в этих точках. Это утверждение выражает закон сохранения вероятности, или закон сохранения траекторий. Если $x_i = F^{-1}(x)$ — функция, обратная функции $F(x)$, то

$$P_2(x) = \sum_{i=1}^{2}\frac{P_1(x_i)}{|\,dF/dx\,|_{x_i}}. \qquad (6.3.29)$$

В общем случае, если $x_i^{(n)} = \left[F^{-1}(x)\right]^n$ — функция, обратная функции $F^{(n)}(x)$, то

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}}\frac{P_1(x_i)^{(n-1)}}{|\,dF^{(n-1)}(x)/dx\,|_{x_i^{(n-1)}}}. \qquad (6.3.30)$$

Последовательные итерации этой процедуры дают все более точную аппроксимацию правильного равновесного значения $P(x)$. [Если отображение имеет устойчивое периодическое решение, то $P(x)$ сходится к острым выступам на периодических траекториях, т. е. в этом случае $P(x)$ состоит из δ-образных функций. В хаотическом режиме, где покрыта только часть интервала, функция $P(x)$ может быть разрывной, но отличной от нуля на конечном интервале значений x.]

Итак, приняв приведенное выше определение показателя Ляпунова, мы видим, что

при $\lambda(a) < 0$	траектория устойчивая и периодическая (итеративный процесс действует как сток информации);
при $\lambda(a) = 0$	траектория нейтрально устойчива (информация не производится и не утрачивается);
при $\lambda(a) > 0$	траектория локально неустойчивая и хаотическая (итеративный процесс действует как источник информации).

Стационарное состояние в трехмерном пространстве имеет три показателя Ляпунова, все они отрицательны (—, —, —); *предельный цикл* в трехмерном пространстве имеет три показателя Ляпунова, два из них отрицательны, один (вдоль потока) равен нулю (—, —, 0); *странный аттрактор* характеризуется тремя показателями Ляпунова (+, 0, —), т. е. одним положительным показателем Ляпунова λ_+, одним нулевым λ_0 и одним отрицательным λ_-. Иначе говоря, *странный* аттрактор порождает информацию в одном направлении и сжимает информацию в другом направлении. Вдоль потока показатель Ляпунова равен нулю.

Но для того, чтобы быть аттрактором, система должна иметь $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i < 0$, т. е. отрицательный показатель Ляпунова по абсолютной величине должен быть больше положительного показателя Ляпунова. Сумма показателей Ляпунова задает среднюю скорость сжатия объема в пространстве состояний.

Исследуем теперь для логистического отображения поведение показателя Ляпунова как функции управляющего параметра a. Производная от функции, задающей логистическое отображение, в данной точке x_i равна

$$\left[\frac{dF(x, a)}{dx}\right]_{x-x_i} = a(1 - 2x_i). \tag{6.3.31}$$

Для траектории $\{x_i\}$ с периодом K плотность вероятности $P(x)$ есть набор из K функций $\delta(x - x_i)$, поэтому

$$\lambda(a) = \sum_{i=1}^{K} \ln \left| \frac{dF(x, a)}{dx} \right|_{x_i}. \tag{6.3.32}$$

(Основание логарифма несущественно; если результат дается в «битах», то основание логарифма равно 2.)

Для траектории с периодом 1 ($1 < a < 3$) показатель Ляпунова равен

$$\lambda(a) = \ln|2 - a|.$$

Ясно, что для такой периодической траектории $\lambda(a) < 0$. Но при $a = 1$ и $a = 3$ показатель Ляпунова обращается в нуль: $\lambda(1) = 0$ и $\lambda(3) = 0$, а при $a \to 2$ он неограниченно возрастает: $\lambda(a) \to \infty$. Что это значит? Когда $\lambda(a)$ обращается в нуль, происходят «касательные» бифуркации удвоения периода. Иначе говоря, прежде чем образовывать качественно различные структуры, траектория должна пройти через нейтрально устойчивый аттрактор. Между этими бифуркациями $\lambda \to -\infty$, так как точка

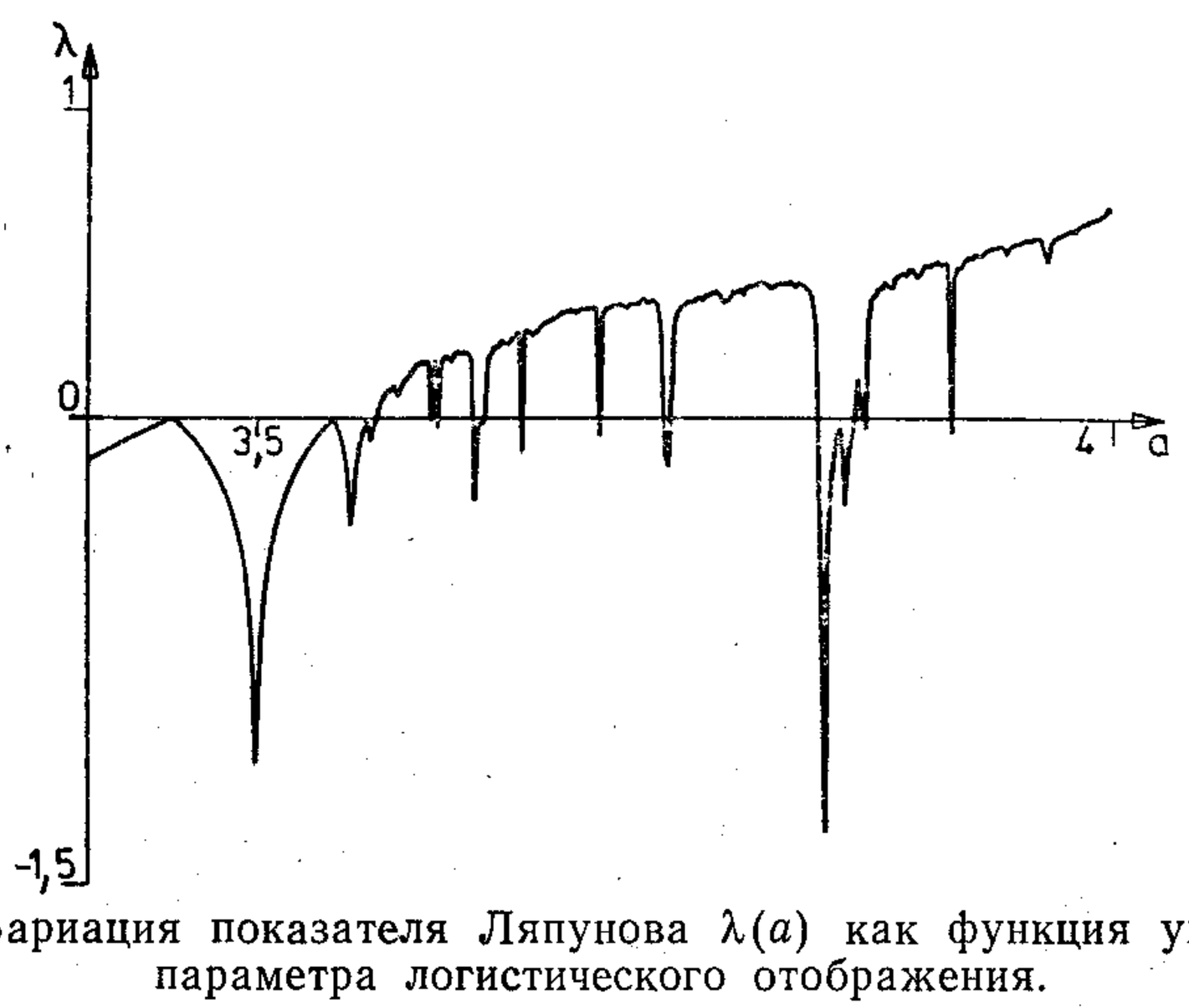


Рис. 6.17. Вариация показателя Ляпунова $\lambda(a)$ как функция управляющего параметра логистического отображения.

$x_c = 0{,}5$, в которой $F(x_c)$ достигает максимума, становится точкой на периодической траектории, поскольку в этой точке производная обращается в бесконечность. Для траектории с периодом 1 это происходит при $a = 2$. Для траектории с периодом 2 ($a > 3$) получаем

$$\lambda(a) = \ln|a^2 - 2a - 4|.$$

В этом случае показатель Ляпунова всюду неположителен ($\lambda(a) \leqslant 0$). Он обращается в нуль при $a = 1 + \sqrt{6}$ и стремится к $-\infty$, когда критическая точка x_c становится частью траектории с периодом 2; это происходит при $a = 1 + \sqrt{5} = 3{,}236068$. Для траекторий более высокого порядка вплоть до точки накопления $a_c = 3{,}57$ эта история повторяется (см. рис. 6.17), т. е. показатель Ляпунова остается *неположительным* (система ведет себя, как сток информации) и обращается в $-\infty$ на траекториях, для которых текущая точка x_i приближается к критической точке $x_c = 0{,}5$, в которой производная обращается в нуль.

Наконец, выясним, что происходит, когда управляющий па-

раметр a достигает точки накопления $a_c \approx 3{,}57$ и превосходит ее. В самой точке накопления $(a = a_c)$ $\lambda(a_c) = 0$, а при $a > a_c$ показатель Ляпунова положителен $(\lambda(a) > 0)$, т. е. система действует как источник информации. Можно показать, что огибающая значений $\lambda(a)$ в окрестности a_c изменяется по некоторому универсальному закону (это напоминает поведение параметра порядка вблизи критической точки фазового перехода). Иначе говоря, мы можем записать

$$\lambda(a) = \lambda_0 (a - a_c)^{\tau}, \qquad (6.3.33)$$

где $\tau \sim 0{,}4498$, λ_0 — некоторая постоянная. В общем случае при $a > a_c$ кривая $\lambda(a)$ гладко возрастает с увеличением параметра a и, наконец, достигает уровня один бит за итерацию, когда отображение становится строго «два-к-одному»-значным, т. е. когда $a \to 4$. Каскадам периодических режимов с более длинными периодами соответствуют окна с отрицательными λ.

Настало время, прежде чем мы займемся исследованием возможных соотношений между характеристическим показателем Ляпунова и фрактальной размерностью отображения, изучить «нечто реальное» — трехмерный странный аттрактор и попытаться найти дополнительные подходящие параметры для характеристики его динамического поведения, в особенности его *сжимающих* свойств. Напомним, что такие динамические системы интересуют нас сейчас только как системы *обработки информации*. Поэтому наша цель состоит в том, чтобы понять, каким образом такие «устройства», как странные аттракторы, порождают и рассеивают, т. е. *обрабатывают* информацию. Мы предполагаем, что в общем случае информация порождается каскадом бифуркаций, приводящих к *нарушению симметрии*, или каскадом *итераций*, приводящих к *более высокому разрешению*. При большем разрешении те типы внутренних микроскопических шумов, которые были размыты, когда интегрирование производилось по достаточно широким «окнам» в пространстве и времени, начинают заметно флуктуировать, и завершается это «проявление» шумов переходом (микрофлуктуаций) с микроскопического на макроскопический иерархический уровень. Именно такой переход порождает *новые* характеристики (наряду с потоком в фазовом пространстве) динамической системы, обладающей странным аттрактором, — информацию и энтропию.

6.3.4. Типичный трехмерный странный аттрактор. Модель Лоренца

Комбинация чувствительной зависимости от начальных условий с приближенным значением этих начальных условий приводит к невозможности точных долговременных прогнозов относительно эволюции системы, состоящей даже из *трех* нели-

нейно связанных переменных. С практической точки зрения одной из наиболее чувствительных систем следует считать атмосферу. Лоренц в 1963 г. высказал предположение [6.11] о том, что динамика атмосферы весьма чувствительно зависит от начальных условий. Из этой гипотезы вытекают самые серьезные следствия для предсказания погоды, даже если бы нам удалось существенно усовершенствовать метеорологические модели и сбор данных.

Лоренц обнаружил, что, сильно обрезав уравнения Навье—Стокса (описывающие систему с бесконечным числом степеней свободы), можно получить нелинейную систему всего лишь с *тремя* переменными, сохраняющую много характерных особенностей исходной системы. Эту «сжатую» модель мы намереваемся теперь рассмотреть более подробно, так как она оказалась представительным примером трехмерных систем, обладающих странными аттракторами и невероятно богатым репертуаром поведения.

Итак, рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = \sigma Y - \sigma X, \quad \frac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ,$$
$$\frac{dZ}{dt} = -bZ + XY, \tag{6.3.34}$$

где σ, r и b — управляющие параметры, физический смысл переменных X, Y и Z для нас сейчас не имеет значения. Зафиксируем параметр b (такой случай встречается в ряде гидродинамических приложений) и исследуем динамику модели Лоренца (6.3.34), изменяя (вещественные и положительные) значения параметров σ и r.

Как обычно, мы начинаем с исследования простейших сингулярностей, т. е. стационарных состояний, и анализа их устойчивости (по линейному приближению). Система (6.3.34) имеет стационарные состояния

а) $X_1^* = Y_1^* = Z_1^* = 0$,

б) $X_2^* = Y_2^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $Z_2^* = r - 1$.

Линеаризуем систему Лоренца относительно каждого из этих двух стационарных состояний, т. е. положим $X = X^* + x(t)$, $Y = Y^* + y(t)$, $Z = Z^* + z(t)$.

Для стационарного состояния (а) мы получаем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y,$$
$$\frac{dz}{dt} = -bz. \tag{6.3.35}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(b+\lambda)\left[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)\right]=0, \qquad (6.3.36)$$

где λ — собственные значения матрицы взаимодействия.

При $r>0$ характеристическое уравнение имеет три вещественных корня. При $r<1$ все три собственных значения отрицательны, поэтому стационарное состояние (а) устойчиво. При $r>r_c=1$ одно собственное значение становится положительным, происходит бифуркация, и состояние (а) становится седловой точкой в трехмерном пространстве; тем не менее это состояние ведет себя в двумерном пространстве как устойчивое стационарное состояние.

Для стационарного состояния (б) линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = x-y-\sqrt{b(r-1)}\,z, \\ \frac{dz}{dt} &= \sqrt{b(r-1)}(x+y)-bz. \end{aligned} \qquad (6.3.37)$$

Ей соответствует характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3+(\sigma+b+1)\lambda^2+b(\sigma+r)\lambda+2b\sigma(r-1)=0. \qquad (6.3.38)$$

При $r>1$ произведение корней уравнения (6.3.38) есть *отрицательное* вещественное число, а это означает, что по крайней мере один корень, например λ_1, *вещественный и отрицательный*, а два других (λ_2, λ_3) либо вещественные и оба одного и того же знака, либо комплексно сопряженные. В окрестности $r \geqslant r_c \sim 1$ вещественные части собственных значений (λ_2, λ_3) отрицательны.

Что происходит с рассмотренным нами стационарным состоянием при дальнейшем увеличении параметра r? Необходимое условие неустойчивости — комплексная сопряженность корней λ_2 и λ_3, так как $2\sigma b(r-1)>0$. Попытаемся найти крити-

ческое значение r'_c, при котором $\lambda_{2,3} = \pm j\Lambda$. При таких условиях характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^3 - \lambda_1\lambda^2 + \Lambda^2\lambda - \lambda_1\Lambda^2 = 0. \qquad (6.3.39)$$

Сравнивая характеристические уравнения (6.3.39) и (6.3.38), получаем

$$r'_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1},$$

$$\Lambda = \pm\sqrt{b(r'_c + \sigma)}, \qquad (6.3.40)$$

$$\lambda_1 = -(\sigma + b + 1).$$

При $\sigma < b + 1$ положительные значения r'_c не существуют.

Решающее значение теперь имеет вопрос о том, что происходит при $r \gg r'_c$. Поведение системы (6.3.34) было впервые численно исследовано Лоренцом [6.11] в 1963 г. при $r = 28$, $\sigma = 10$ и $b = 8/3$. Лоренц обнаружил, что система начинает описывать вокруг одного из (неустойчивых) фокусов витки с амплитудой, возрастающей со временем, описывая раскручивающуюся спираль. После нескольких таких витков система *внезапно* оставляет этот режим, монотонно устремляется к второму фокусу и начинает описывать вокруг него витки по раскручивающейся спирали. Затем, совершив несколько витков, система перепрыгивает в окрестность первого фокуса и начинает описывать вокруг него витки по раскручивающейся спирали и т. д. Интересно отметить, что времена, в течение которых система находится в окрестности каждого фокуса прежде, чем перепрыгнуть в окрестность другого, распределены стохастически, и в описываемом нами процессе нет никакой закономерности, хотя он порожден развертывающейся во времени детерминистической (нелинейной) системой. Число витков, описываемых системой вокруг каждого из двух фокусов, кажется случайным и потому совершенно непредсказуемым.

На рис. 6.18 показаны проекции на плоскости XY и XZ траекторий системы Лоренца для приведенных выше значений управляющих параметров в пространстве состояний.

Представленное на рис. 6.18 «хаотическое» поведение — лишь одно из многих в богатом репертуаре различных мод хаоса, на которые «способна» система Лоренца. При больших значениях управляющего параметра r появляется целая серия новых динамических режимов (все исследования проводились с помощью численного моделирования на компьютерах). Обсуждение системы Лоренца мы закончим кратким описанием двух наиболее интересных явлений — «перемежаемости» и «метастабильного» хаоса.

Рассмотрим еще раз более точно репертуар поведения системы Лоренца (мы пока не знаем, существует ли у нее аттрактор!) по данным численного моделирования в очень широком диапазоне значений управляющего параметра r. При $r < 1$ начало координат (0, 0, 0) является единственным устойчивым стационарным состоянием.

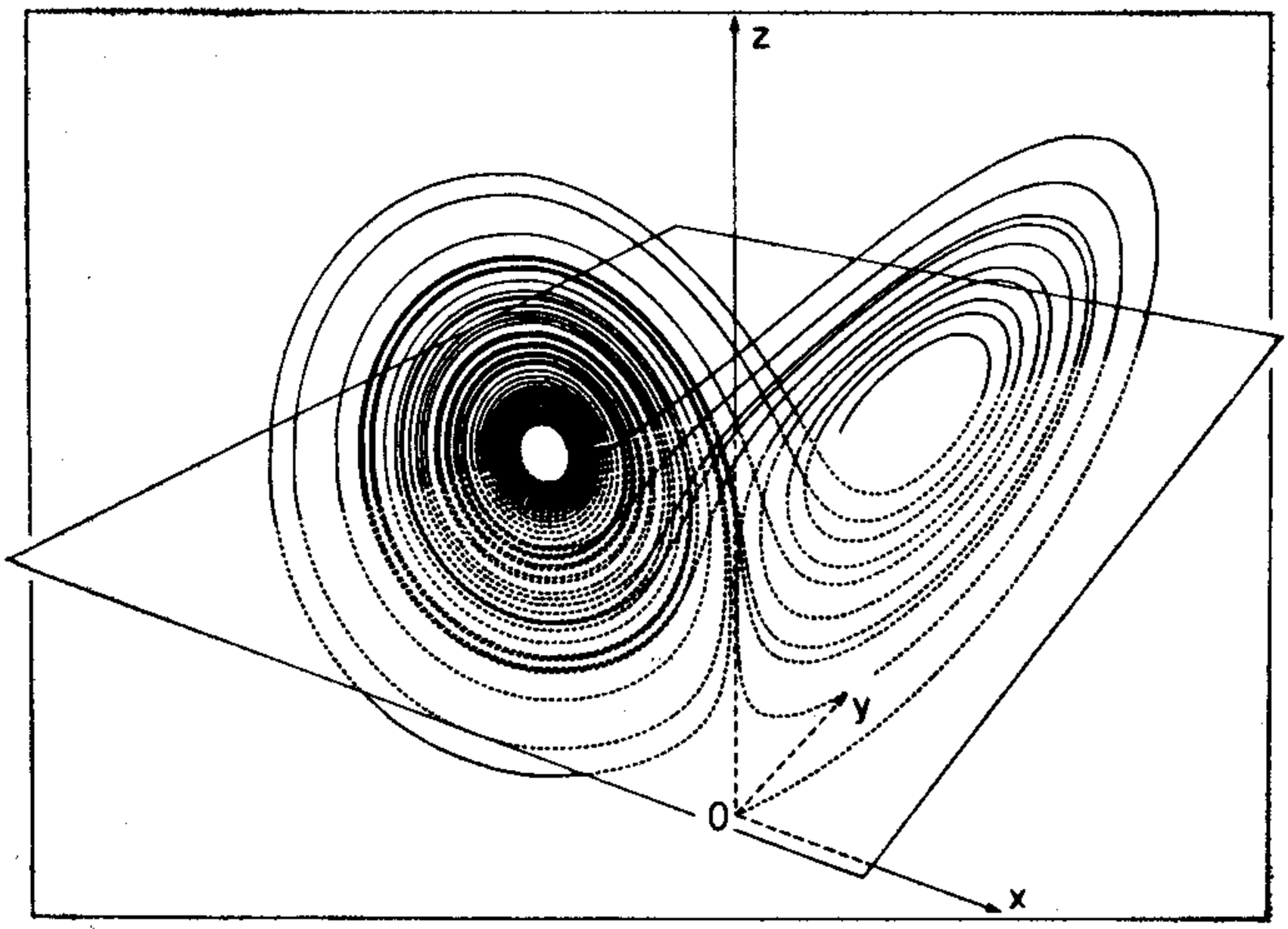


Рис. 6.18. Траектория аттрактора Лоренца на плоскостях XY и XZ при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ в обоих случаях.

При $r = 1$ мы наблюдаем непрерывную надкритическую бифуркацию с возникновением нового режима, представленного двумя *новыми* стационарными состояниями $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, (r-1)$. Эти два состояния остаются устойчивыми до тех пор, пока параметр r не достигнет значения

$$r'_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)};$$

при $b = 8/3$, $\sigma = 10$ этот параметр равен $\sigma'_c = 24{,}74$.

При $r = r'_c = 24{,}74$, когда комплексные собственные значения пересекают мнимую ось, происходит бифуркация Хопфа, и стационарные состояния, бывшие до того устойчивыми, утрачивают свою устойчивость. (Бифуркация называется «надкритической», если каждое состояние теряет устойчивость, «испуская» при этом устойчивую периодическую орбиту, и «подкритической», если потеря устойчивости сопровождается «поглощением» неустойчивой периодической орбиты. Показано, что

в рассматриваемом нами случае бифуркация подкритическая.) При $r > 24{,}74$ оба стационарных состояния становятся неустойчивыми. Поток, линеаризованный вокруг каждого из этих состояний, имеет *отрицательное вещественное собственное значение* и пару комплексном сопряженных собственных значений с *положительными* вещественными частями. Следовательно, при $r = 24{,}74$ происходит обратная или «подкритическая», бифуркация, отделяющая стационарные состояния от зависящего от

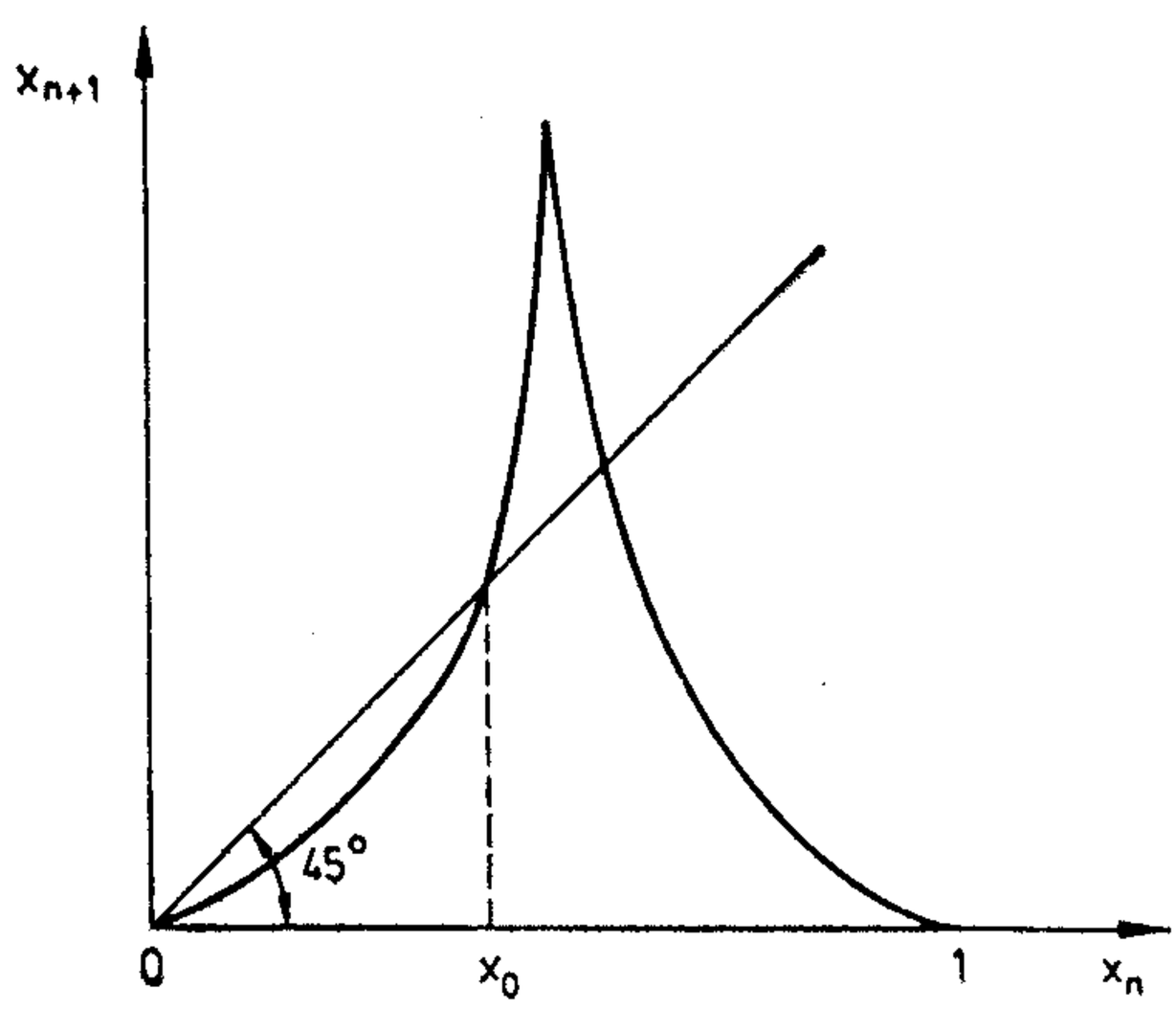


Рис. 6.19. Примерный вид одномерного отображения (с точкой возврата) аттрактора Лоренца на плоскости YZ, поясняющий условия существования метастабильного хаоса

времени непериодического состояния. Ниже $r_c = 24{,}74$ наблюдается сложная ситуация: там существует несколько значений управляющего параметра r, при которых поведение обретает новые качественные особенности: появляются неустойчивые периодические и апериодические траектории, но не существует притягивающего предельного цикла, соответствующего устойчивому периодическому движению. Этот режим проявляется в «метастабильном» хаосе и гистерезисном поведении.

Поясним сказанное. Для этого построим одномерное отображение Пуанкаре, индуцированное на плоскости YZ аттрактора (рис. 6.19). Часть этого отображения имеет производную меньше единицы, и в начале координат расположена устойчивая неподвижная точка. Любая траектория, попадающая в точки с $x < x_0$, притягивается к началу координат. Но траектории, выходящие из точек с $x > x_0$, могут в течение некоторого времени совершать хаотические блуждания прежде, чем они окажутся затянутыми в область между 0 и x_0. Параметр r можно подобрать так, чтобы область-«ловушка» $(0, x_0)$ была сколь

угодно мала (а «половина времени жизни» сколь угодно велика).

Таким образом, метастабильный хаос можно описать как странный аттрактор с ненулевой вероятностью перехода в неподвижную точку или предельный цикл; он подразумевает существование переходного режима, времена затухания которого имеют экспоненциальное распределение. Почти каждая траектория после нерегулярных колебаний в течение начального периода устремляется к какой-нибудь периодической траектории. Средняя продолжительность хаотического режима обычно не очень велика и, как правило, составляет около 50 итераций, но «методом проб и ошибок» можно найти такие начальные условия на отображении, что продолжительность «хаотической фазы» окажется существенно большей. В других ситуациях метастабильный хаос может завершиться переходом в стационарное состояние или в состояние, которое также хаотично, но отличается существенно другим характером поведения системы, т. е. имеет другую функцию плотности вероятности и занимает другой подынтервал всего аттрактора. Возможна и такая ситуация, когда новый режим в свою очередь оказывается метастабильным и по истечении какого-то времени (через некоторое число итераций) переходит в какой-нибудь третий режим или возвращается к первоначальному.

Собственно странный апериодический аттрактор появляется при $r > 24{,}74$ и затем медленно эволюционирует вплоть до $r \sim 145$. Начиная с этой точки, в топологии аттрактора происходит последовательность сложных изменений, которая продолжается до $r = 148{,}4$, где возникает устойчивый предельный цикл [6.12].

При $r > r_c = 166{,}07$ предельный цикл, в который вырождается странный аттрактор, становится неустойчивым, и в системе возникает новый динамический режим, который называется «перемежаемость». Если не требовать строгих определений, то можно сказать, что перемежаемость (реализующаяся в некоторых окнах пространства управляющего параметра r в системе Лоренца) по существу представляет собой физическую неспособность установления синхронизации, или устойчивого жесткого захвата, между фазой диссипативного нелинейного осциллятора и фазой внешнего периодического возбуждения. В тот самый момент, когда предельный цикл в пространстве состояний почти смыкается, начинается своего рода «тряска», или «дрожание», которая вмешивается и разрушает регулярную траекторию. На протяжении небольшого интервала времени такая тряска порождает хаотическое движение, представляющее собой широкополосный шум или уширение пиков в спектре мощности, а затем снова в системе начинает возни-

кать предельный цикл, и все повторяется сначала. Некоторое время спустя, происходит новая «вспышка» турбулентного режима, или хаоса, вслед за которой снова возникает предельный цикл и т. д. Длины временных интервалов — продолжительность хаотических и регулярных фаз движения — распределены по существу случайно.

Более точно суть перемежаемости можно понять, если обратиться к отображению Пуанкаре, порождаемому аттрактором Лоренца в окрестности значения $r \sim 167$ управляющего параметра, как и прежде, на плоскости YZ (рис. 6.20).

На рис. 6.21, *а* достаточно подробно показано, что при первом пересечении кривой отображения с биссектрисой мы имеем *устойчивую* неподвижную точку в отображении, которая соответствует устойчивому периодическому движению, но при сдвиге кривой, две неподвижные точки (одна устойчивая, другая неустойчивая) сначала сливаются, а затем исчезают.

Непосредственно после исчезновения неподвижных точек, когда кривая еще находится вблизи биссектрисы, система сохраняет память о бывшей устойчивой неподвижной точке, и мы наблюдаем почти устойчивый предельный цикл с отклонениями от почти периодического режима в самом начале и в самом конце. На достаточно большом расстоянии от бывшей неподвижной точки, когда итерационный процесс начинается слева, представляющая точка входит в своего рода «канал» между кривой отображения и биссектрисой, замедляет свое движение, проходит сквозь канал, затем ускоряет свое движение и выходит из канала справа (рис. 6.21, *б*). Еще дальше от бывшей неподвижной точки система входит в «турбулентный» режим, при котором корреляции, возникающие при синхронизации фаз, нарушаются, и система совершает случайные блуждания в обширной области пространства состояний. Рано или поздно этот период хаотических фаз завершается, когда движущаяся точка, «обследуя» пространство состояний, вплотную приближается к бывшему устойчивому предельному циклу и тем самым снова «инжектирует» траекторию в окрестность старой неподвижной точки.

Из-за некоторых случайных сбоев в процессе инжектирования в окрестность бывшей неподвижной точки канал не всегда оказывается покрытым на всем своем протяжении, и могут возникнуть некоторые расхождения в продолжительности «ламинарных» интервалов. Резюмируя, мы можем утверждать, что перемежающийся режим есть следствие сдвига параболической части отображения Пуанкаре (при увеличении управляющего параметра), в процессе этого сдвига она сначала пересекается с биссектрисой, затем касается биссектрисы и, наконец, проходит вне ее, не имея с биссектрисой точек пересечения.

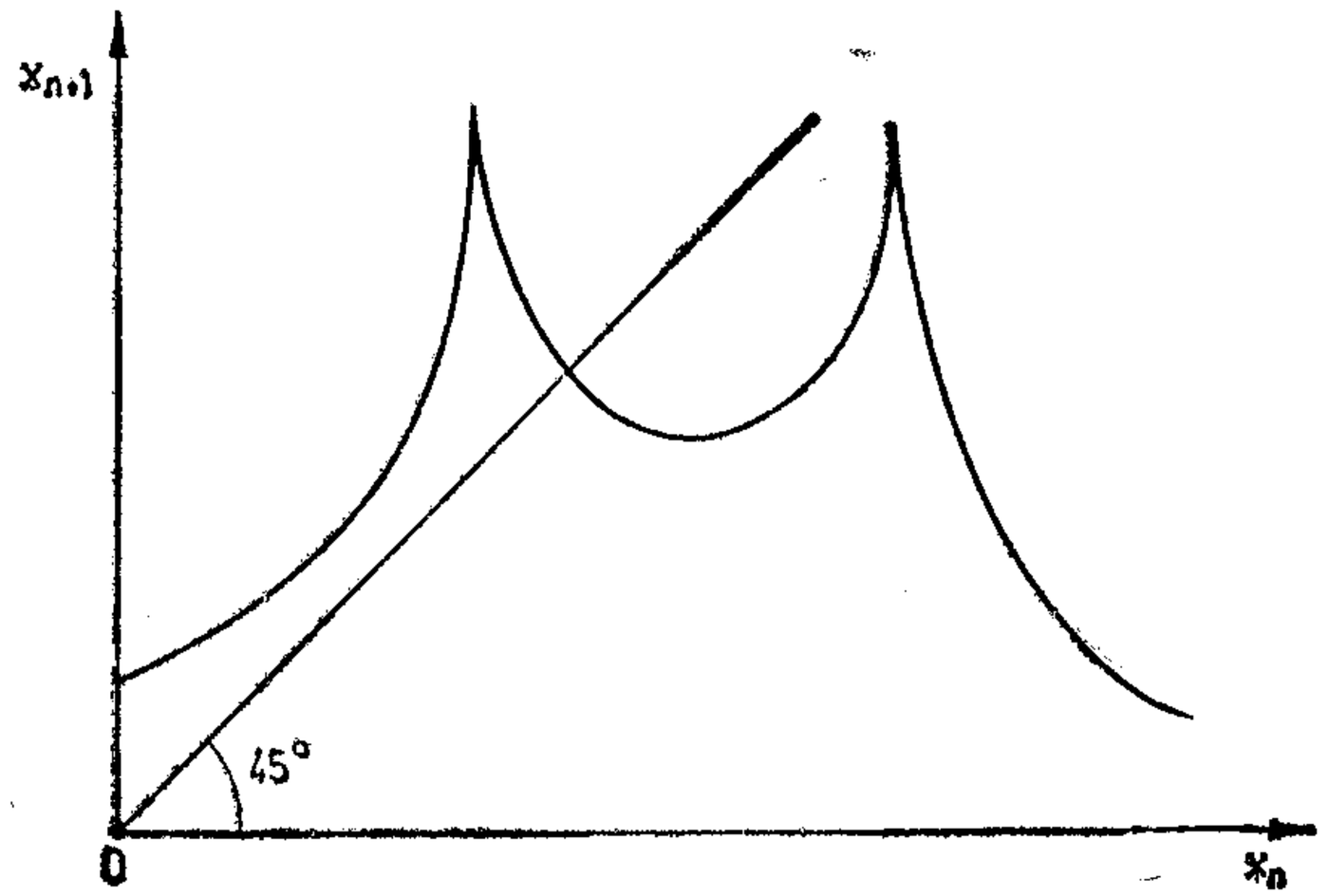
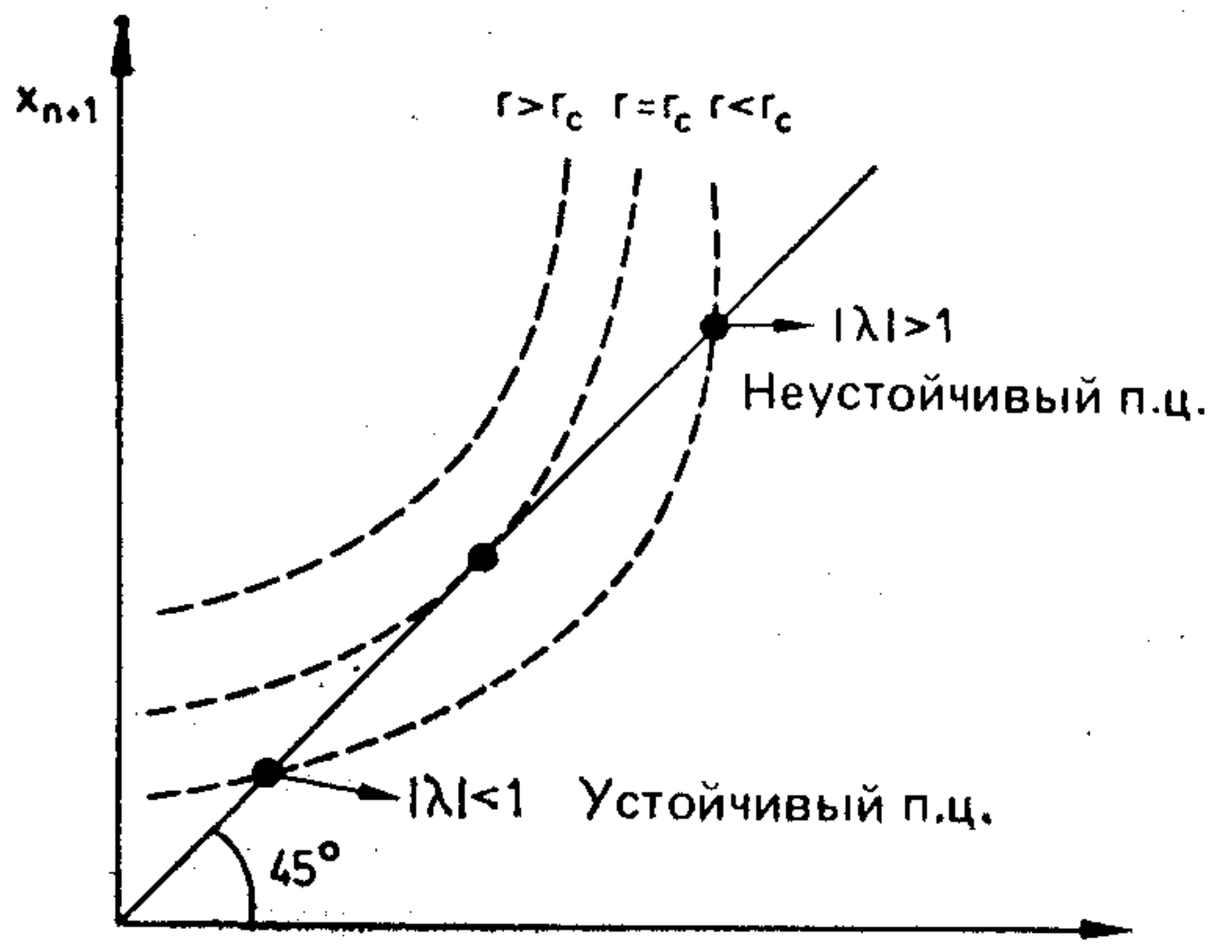


Рис. 6.20. Примерный вид одномерного отображения аттрактора Лоренца на плоскости YZ, поясняющий условие возникновения режима перемежаемости.



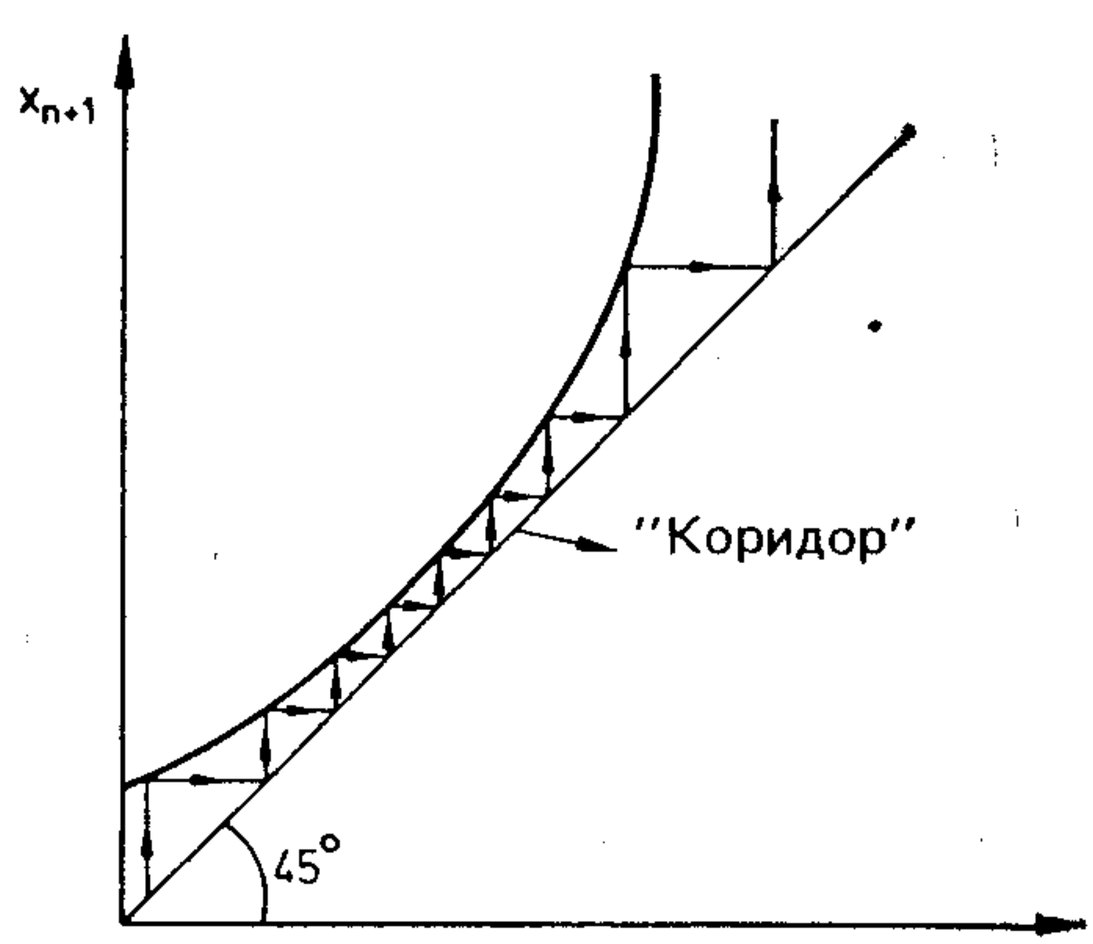


Рис. 6.21. Подробные условия возникновения режима перемежаемости. П. ц. на рис. 6.21, *а* означает «предельный цикл».

6.3.5. Скорость производства информации аттрактором Лоренца

Чтобы вычислить количество информации, порождаемой аттрактором Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, построим сначала отображение Пуанкаре на проекции этого аттрактора на плоскость ZX. Для этого проведем сечение, трансверсальное потоку, и отметим последовательные прохождения через максимум, например, в направлении оси Z. Так как аттрактор Лоренца симметричен относительно преобразования $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$, сечение одного «крыла» порождает такое же отображение, как и симметричное сечение другого «крыла».

Зафиксируем промежуток времени $t(x)$ между двумя последовательными прохождениями траектории через сечение Пуанкаре [6.13]. Располагая отображением последования $F(x)$ и функцией $t(x)$, вычисляем плотность вероятности $P(x)$ с помощью метода итераций, который мы использовали при рассмотрении логистического отображения (разд. 6.3.1). Зная $P(x)$, мы вычисляем производство информации по формуле

$$\langle I \rangle = \int_0^1 P(x) \log \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx \sim 0{,}98 \text{ бит за итерацию.} \quad (6.3.41)$$

Эту величину можно сравнить с соответствующим значением $\langle I \rangle$ для логистического отображения при $a = 4$, которое вычисляется следующим образом. Производя преобразование $x' = (2/\pi) \arcsin \sqrt{x}$ над логистическим отображением $F(x) = 4x \times (1 - x)$, мы получаем симметричную «крышу домика»:

$$F'(x') = \begin{cases} 2x' & \text{при} \quad 0 < x' < \frac{1}{2}, \\ 2(1 - x') & \text{при} \quad \frac{1}{2} < x' < 1. \end{cases}$$

Ясно, что для этого отображения $P'(x') = 1$. Из сохранения вероятности $P'(x')\,dx' = P(x)\,dx$ мы получаем

$$P(x) = \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}},$$

и, следовательно,

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\log_2 [4(1 - 2x)]}{\sqrt{x(1 - x)}}\, dx = 1 \text{ за итерацию.} \quad (6.3.42)$$

Этого результата следовало ожидать заранее, так как при $r = 4$ логистическое отображение порождает двукратное покрытие интервала [0, 1] оси Y (отображение «два в одно»). При значениях управляющих параметров $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$

порождаемое аттрактором Лоренца отображение Пуанкаре почти симметрично и степень покрытия равна почти 2 — почти, но не совсем.

Чтобы описать характеристики производства информации, вычислим

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = \int_0^1 \frac{P(x)}{t(x)} \log_2 \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx \text{ [бит/с]}, \qquad (6.3.43)$$

или, если функция $P(x)$ неизвестна,

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\log_2 |dF(x)/dx|}{t_n}, \qquad (6.3.44)$$

где t_n — длина интервала времени, занимаемого n-м переходом. Скорость производства информации для аттрактора Лоренца, как показано в работе [6.13], составляет $\sim 1{,}19$ бит/с.

Предположим, наконец, что начальная точка в интервале [0, 1], из которой мы начинаем итерации отображения в любом практическом приложении, известна *не точно*, а с некоторой заданной неопределенностью, выражаемой распределением $P_0(x)$ на интервале. Априорная неопределенность в положении начальной точки просто равна асимптотической функции плотности вероятности $P(x)$ при заданном значении управляющего параметра, поэтому «информационная ценность» начального условия задается величиной

$$S = \int_0^1 P_0(x) \log_2 \left(\frac{P_0(x)}{P(x)} \right) dx \quad \text{(бит)}. \qquad (6.3.45)$$

Следовательно, «память» системы, измеряемая интервалом времени, в течение которого аттрактор полностью «забывает» начальные условия (перестает зависеть от них), определяется как величина

$$T = \frac{S}{\langle dI/dt \rangle} = \frac{\int_0^1 P_0(x) \log_2 \left(\frac{P_0(x)}{P(x)} \right) dx}{\int_0^1 \frac{P(x)}{t(x)} \log_2 \left(\left| \frac{dF}{dx} \right| \right) dx} \text{ с}. \qquad (6.3.46)$$

По истечении времени T динамическая эволюция системы перестает перерабатывать «скрытую» информацию, хранившуюся в начальных условиях, в явную, и порождает *новую* информацию, производимую самим потоком (см. также разд. 6.5).

Обратимся теперь к исследованию параметров, позволяющих рассматривать странный аттрактор как некое «устройство» по переработке информации. Ясно, что мы ожидаем увидеть следующую картину: при значениях управляющих параметров ниже порога, после которого начинается хаос (а до которого существуют только стационарные состояния и периодические траектории), траектории в пространстве состояний только притягивают, и соответствующие итерации отображения Пуанкаре на отрезке монотонно сходятся, порождая плотности вероятности, представляющие собой набор δ-образных функций. При таких подкритических условиях $\langle I \rangle < 0$ (система асимптотически ведет себя как сток информации, т. е. как начало, ограничивающее разнообразие, а следовательно, и возникающую информацию, — как источник «негэнтропии»).

При значениях управляющих параметров, превышающих критические, когда в системе устанавливается сплошной хаос (почти все траектории неустойчивые), вдоль некоторых направлений в пространстве состояний $\langle I \rangle > 0$, т. е. создается разнообразие, и энтропия возрастает (источники). Кроме того, неравенство $\langle I \rangle < 0$ и вдоль некоторых других направлений в пространстве состояний, вследствие чего разнообразие уменьшается и появляется информация (стоки). Именно из такого взаимодействия производства и потери информации мы ожидаем вывести характерные особенности, позволяющие судить о динамической системе как о более или менее эффективном устройстве, занимающемся обработкой информации.

Помимо изложенной выше достаточно подробно модели Лоренца существуют модели, во многом аналогичные ей, например нелинейный осциллятор Дуффинга или осциллятор ван дер Поля, в которых при гармоническом внешнем воздействии ($\ddot{x} + \nu x + \omega_0^2 x^3 = A \cos \omega t$ в первом случае и $\ddot{x} - \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$ — во втором) помимо предельного цикла, возникающего при синхронизации и захвате частоты, наблюдаются также хаотические режимы, обладающие всеми описанными выше характеристиками, в различных окнах пространства управляющих параметров. Интересующегося читателя мы отсылаем за подробностями, например к работам [6.6—6.8], а также к приложению В.

6.4. Параметры, характеризующие среднее поведение странных аттракторов: размерности, энтропии и показатели Ляпунова

Три основных понятия имеют решающее значение (и требуют поэтому количественной меры) для характеристики динамических свойств странных аттракторов.

а) Степень «сжатия», которую способна обеспечить система (действующая как своего рода «пылесос» в функциональном пространстве).
б) Точный способ производства энтропии при переходе (и усилении) внутренних флуктуаций системы с микроскопического на макроскопический иерархический уровень при увеличении разрешения, обусловленном каскадом флуктуаций.
в) Свойства устойчивости аттрактора или скорости *производства разнообразия* по одним и *утраты информации* по другим направлениям в пространстве состояний.

В этом разделе мы намереваемся заняться поиском соответствующих параметров, позволяющих придать количественный характер перечисленным нами средним характеристикам странных аттракторов, и возможных соотношений между такими параметрами.

В этой главе мы рассматриваем динамические системы с дискретным временем n, такие как отображения $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n)$, или с непрерывными потоками, такие как обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка $d\mathbf{x}(t)/dt = f(\mathbf{x}(t); \mu)$, где $\mathbf{x}$ в обоих случаях вектор, вообще говоря, в многомерном пространстве состояний. При заданном начальном условии (начальном значении вектора $\mathbf{x}$ при $n = 0$ в случае отображения или при $t = 0$ в случае непрерывной системы) порождается *орбита* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ в случае отображения или траектория $\mathbf{x}(t)$ в случае системы дифференциальных уравнений.

Нас интересуют аттракторы, возникающие в таких системах. Аттрактор представляет собой компактное подмножество C пространства состояний, обладающее свойством притягивать начальные состояния из некоторой своей окрестности (после того, как «улягутся» переходные режимы). Под притяжением мы понимаем, что при каждом начальном условии предельное множество траектории или орбиты при n или t, стремящихся к ∞, есть компактное множество C. Таким образом, каждая траектория из области притяжения множества C проходит сколь угодно близко от каждой его точки. Размерность аттрактора — первый параметр, необходимый для того, чтобы охарактеризовать его свойства сжимать информацию. *Размерность* указывает, какое количество информации необходимо для того, чтобы задать с определенной точностью положение точки на аттракторе [1]. Высказывалось предположение о том, что надлежащим образом определенная размерность аттрактора, вообще говоря, *меньше* размерности пространства состояний, в котором лежит аттрак-

[1] Существует альтернативное определение информационной размерности как число битов, которые может динамически *хранить* аттрактор.

тор. Для траекторий на аттракторе такое понижение размерности сопровождается попутным уменьшением количества информации, необходимого для задания начального условия. Знание информационной размерности аттрактора позволяет наблюдателю оценить приращение информации от выполнения отдельного измерения на данном уровне точности.

При рассмотрении *диссипативной* динамической системы мы исходим из евклидова пространства начальных состояний большой или даже бесконечной размерности. Однако спустя некоторое время переходные процессы вымирают, и точка в пространстве состояний, описывающая состояние системы, приближается к аттрактору. Число степеней свободы понижается в том смысле, что число независимых переменных, присущих движению, становится гораздо меньше числа независимых переменных, необходимых для задания произвольного начального условия. Разность между евклидовой размерностью пространства состояний, в которое погружена интересующая нас динамическая система, и информационная размерность аттрактора, характеризует, грубо говоря, среднюю степень создаваемого аттрактором сжатия.

Для простых аттракторов определение и исследование информационной размерности тривиально. Например, стационарное, не зависящее от времени состояние равновесия (стационарное состояние) имеет размерность *0*, устойчивые периодические колебания (предельный цикл) — размерность *1*, 2-тор — размерность *2*. В этих простых случаях размерность принимает целочисленные значения. В случае странных аттракторов это не так.

Чтобы по достоинству оценить свойства странного аттрактора, нам необходимо принять во внимание не только само множество, но и *распределение* или *плотность* точек на аттракторе. (Дело в том, что на любом заданном уровне точности бóльшая часть информации о начальных условиях утрачивается за конечное время T, которое мы вычислили в разд. 6.3.5. При временах, больших T, знание будущего ограничено информацией, содержащейся в распределении вероятности точек на аттракторе.)

6.4.1. Понятие информационной размерности

Понятие информационной размерности тесно связано с процессом измерения. Рассмотрим измерительный прибор с равномерной шкалой и ценой деления ε (разрешающей способностью). Измерение любой из N переменных таким прибором дает одно из $1/\varepsilon$ возможных чисел. Если по одному такому измерительному прибору использовать для измерения каждой из N переменных нашей динамической системы, то квантованность шкал всех N приборов приведет к *разбиению* пространства состояний, т.е. к некоторому набору непустых непересекающихся

измеримых «гиперкубов» (двумерную проекцию такого набора см. на рис. 6.22). Область пространства состояний, содержащая аттрактор, оказывается разделенной на ε^{-N} клеток, или ячеек, каждая из которых имеет размер N. Совокупность этих ячеек образует разбиение, и каждое измеримое состояние соответствует какой-то ячейке. Пусть $n(\varepsilon)$ — число ячеек, покрывающих аттрактор с ненулевой вероятностью (т. е. содержащих по крайней мере одну точку аттрактора). Некоторые ячейки будут содержать больше точек, чем другие, так как в некоторых областях пространства состояний поток бывает чаще, чем в других.

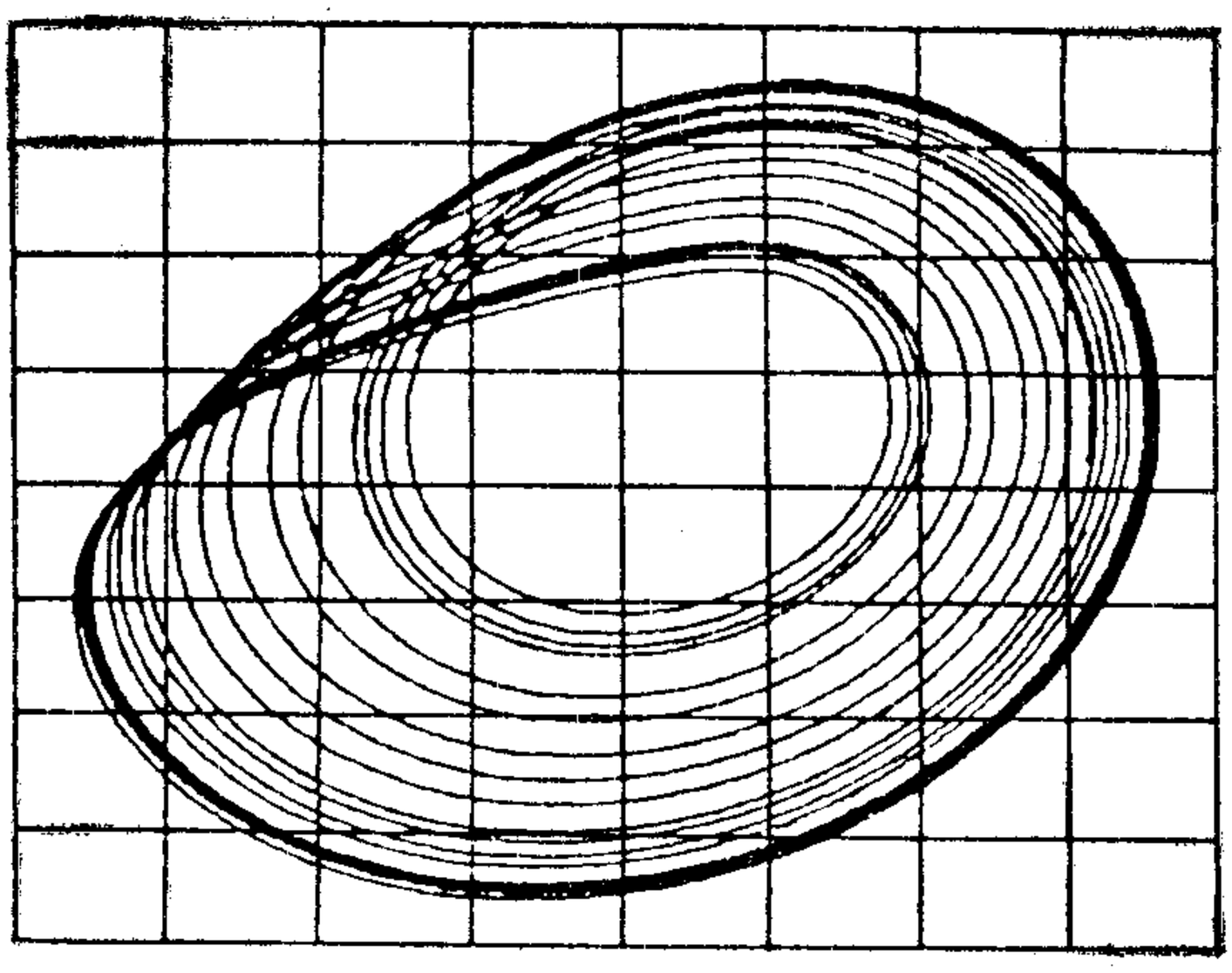


Рис. 6.22. Примерный вид двумерного разбиения аттрактора на «ящики» (квадраты) в пространстве состояний.

«Естественная мера» данной области пропорциональна частоте, с которой попадает в нее поток. Следуя Фармеру [6.14], определим $P_i(\varepsilon)$ как «плотность вероятности» того, что аттрактор окажется в i-й ячейке [1]. Совокупность вероятностей $\{P_i(\varepsilon)\}$ называется «грубым», или «крупнозернистым» распределением вероятности при разрешающей способности ε. Среднее количе-

---

[1] В случае детерминистических систем использование слова «вероятность» требует известной осторожности [6.14]. Для каждого куба C на аттракторе и начального условия x определим величину $\mu(x, C)$ как долю времени, которую траектория, выходящая из x, проводит в C. Если каждое начальное условие x приводит к одной и той же величине $\mu(x, C)$, то мы называем это общее значение $\mu(C)$ естественной «мерой» аттрактора. Она дает относительную вероятность попадания в различные области аттрактора как средние по времени. Мера множества C есть интеграл от плотности на C, т. е.

$$\mu(C) = \int_C P(x)\, dx.$$

ство информации, содержащееся в отдельном измерении, производимом с разрешающей способностью ε, равно

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \log_2 P_i(\varepsilon) \text{ [бит]}. \qquad (6.4.1)$$

При уменьшении ε (повышении разрешающей способности) число ячеек возрастает, и мы получаем последовательность все более тонких, все более «мелкозернистых» распределений вероятности. Информационная размерность D_I есть скорость увеличения количества информации при увеличении точности измерения:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{I(\varepsilon)}{|\log_2 \varepsilon|} \right]. \qquad (6.4.2)$$

Из формулы (6.4.2) видно, что D_I определяется асимптотическим значением углового коэффициента графика $I(\varepsilon)$ в зависимости от $\log_2(1/\varepsilon)$.

Таким образом, если информационная размерность аттрактора известна, то количество информации $I(\varepsilon)$, содержащееся в одном измерении состояния, производимом с разрешающей способностью ε, оценивается величиной

$$I(\varepsilon) = D_I |\log_2 \varepsilon|. \qquad (6.4.3)$$

Если вероятность всех ячеек в разбиении равна, то

$$I(\varepsilon) = \log_2 n(\varepsilon), \qquad (6.4.4)$$

и информационная размерность достигает своего максимума, когда совпадает с *фрактальной* размерностью

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log_2 [n(\varepsilon)]}{\log_2 (1/\varepsilon)}. \qquad (6.4.5)$$

Таким образом, фрактальная размерность есть *верхняя граница* информационной размерности.

Разумеется, на практике разрешающую способность ε ограничивает уровень внутренних флуктуаций в системе *и* в измерительном приборе, объединяемый под собирательным названием «наблюдательного шума». Этот шум проявляется только в процессе измерения и не влияет на феноменологическую динамику системы. В приведенные выше определения размерностей D_I и D_F внешний шум не входит.

Прежде чем мы перейдем к некоторым приложениям, остановимся и спросим себя: а почему так необходимо, чтобы разрешающая способность ε стремилась к нулю? На практике этого никогда не бывает. Кроме того, почему мы уверены, что максимум емкости динамической «памяти» аттрактора D_I достигается при $\varepsilon \to 0$? Ведь в продолжительной борьбе за выживание

биологические организмы стремились максимизировать емкость своей динамической памяти, не нанося при этом ущерба своей способности сжимать информацию. Вполне возможно, что более высокие шансы на выживание у организма, который станет «мастером на все руки», т. е. получит «неточную» информацию о широком секторе своего окружения, а не сосредоточит все усилия на узком диапазоне раздражителей из окружающей среды, распознаваемых им с идеальным разрешением. Не лучше ли нам заняться вычислением «оптимальной ненулевой разрешающей способности» ε^*, при которой достигает максимума $D_I(\varepsilon^*)$, т. е. $\partial D_I/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0$?

Чтобы оценить величину ε^*, мы поступим следующим образом [6.15]. Рассмотрим выражение $C_I = N - D_I$, характеризующую степень *среднего* сжатия, реализуемого интересующим нас аттрактором, и попытаемся вычислить критическую степень разрешения ε^*, при которой D_I достигает максимума, или $\partial C_I/\partial\varepsilon = 0$. Чтобы не упустить из виду оптимальный случай, произведем намеченные выше вычисления для максимального значения информационной размерности

$$D_I = \frac{-\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i(\varepsilon)\log_2 P_i(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}, \quad \varepsilon \neq 0. \tag{6.4.6}$$

Как известно, максимальная информационная размерность D_I при заданной ненулевой разрешающей способности ε есть фрактальная размерность аттрактора, которая достигается при $P_i(\varepsilon) = \text{const} = 1/n(\varepsilon)$. Следовательно,

$$D_I = \frac{\ln[n(\varepsilon)]}{\ln\varepsilon}, \tag{6.4.7}$$

$$C_I = N + \frac{\ln[n(\varepsilon)]}{\ln\varepsilon} = \frac{N\ln\varepsilon + \ln[n(\varepsilon)]}{\ln\varepsilon} = \frac{\ln[\varepsilon^N n(\varepsilon)]}{\ln\varepsilon}. \tag{6.4.8}$$

Мы хотим теперь выразить $n(\varepsilon)$ через показатели Ляпунова нашего аттрактора и разрешающую способность ε. Пусть M — число точек на (одномерном) периодическом отображении Пуанкаре, порождаемом нашим аттрактором. Это означает, что мы определяем орбиту как строку длиной в M символов. Число ячеек, представляющих аттрактор, равно $n(\varepsilon)$, где ε — диаметр ячейки («размер зерна»). Для того чтобы разрешающая способность ε имела смысл, необходимо следующее условие: каждый возможный исход орбиты длиной в M символов должен быть определен точно. Так как мы имеем здесь дело с системами, динамика которых на каждом шаге может быть однозначно представлена двумя состояниями (например, 0 и 1), то число исхо-

дов, очевидно, равно 2^M. Следовательно, ε нужно выбирать так, чтобы

$$\varepsilon \sim \frac{1}{2^M}. \tag{6.4.9}$$

Пусть t_C — продолжительность выборки, или, если каждый элемент выборки выбирается с интервалом $\Delta t = 1$, число проб (итераций), произведенных для диагносцирования нашего аттрактора. Так как аттрактор представлен M точками, имеет смысл выбрать

$$\frac{n(\varepsilon)}{M} \sim t_C. \tag{6.4.10}$$

В силу хаотического характера динамики через t_C итераций отображения система полностью «забывает» о начальных условиях. Это означает, что величина t_C допускает оценивание из соотношения

$$\varepsilon \exp(\lambda_+ t_C) \sim 1, \tag{6.4.11}$$

где λ_+ — положительный показатель Ляпунова. Следовательно,

$$t_C \sim \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\lambda_+} \tag{6.4.12}$$

и, наконец,

$$n(\varepsilon) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\lambda_+ \ln 2}. \tag{6.4.13}$$

Подставляя полученное выражение для $n(\varepsilon)$ в формулу (6.4.8) для C_I, получаем

$$C_I = N + \frac{2\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) + \ln\left(\frac{1}{\lambda_+ \ln 2}\right)}{\ln \varepsilon} \tag{6.4.14}$$

или

$$C_I = N + \frac{\gamma + 2\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln \varepsilon}, \tag{6.4.15}$$

где $\gamma = \ln[1/(\lambda_+ \ln 2)]$.

Требование максимума информационной размерности (равного фрактальной размерности аттрактора), т. е. $\partial C_I/\partial\varepsilon = 0$, дает следующую величину для оптимального разрешения:

$$\varepsilon^* = \exp[-e^{(2-\gamma)/2}], \tag{6.4.16}$$

или для оптимальной длины кода

$$M^* = \frac{\ln(1/\varepsilon^*)}{\ln 2}, \tag{6.4.17}$$

откуда

$$C_I(\varepsilon^*) = N - 2e^{-(2-\gamma)/2} \quad [\text{бит}]. \tag{6.4.18}$$

Это — наши окончательные формулы для минимального среднего сжатия, т. е. максимальной (совпадающей с фрактальной) размерности рассматриваемого аттрактора и соответствующей оптимальной длины кода M^*.

Нам остается убедиться в том, что экстремум функции

$$f(\varepsilon) = -D_I(\varepsilon) = \frac{\gamma + 2\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0, \tag{6.4.19}$$

— действительно максимум, или что информационная размерность $D_I(\varepsilon)$ минимальна.

Вычисляем первую и вторую производные от $f(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \frac{2 - \left[\gamma + 2\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{\varepsilon(\ln\varepsilon)^2}, \tag{6.4.20}$$

$$\frac{\partial^2 f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2} = \frac{-6 + 2\gamma + 4\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) + (\ln\varepsilon)\left[\gamma - 2 + 2\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{\varepsilon^2(\ln\varepsilon)^3}. \tag{6.4.21}$$

При $\varepsilon = \varepsilon^* = \exp\{-\exp[(2-\gamma)/2]\}$ получаем

$$\left(\frac{\partial^2 f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} = \frac{2}{\exp\left[-2\exp\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)\right]\exp\left[\frac{3}{2}(2-\gamma)\right]}. \tag{6.4.22}$$

Эта величина всегда положительна. Следовательно, функция $f(\varepsilon)$ имеет в точке ε^* минимум, а $D_I(\varepsilon) = -f(\varepsilon)$ достигает максимума.

Информационная размерность $D_I(\varepsilon)$ обращается в нуль при $\varepsilon_0 = \exp[-\exp(-\gamma/2)]$. Разумеется, отрицательные значения $D_I(\varepsilon^*)$ не имеют физического смысла. Заметим, что $D_I(\varepsilon^*)$ гораздо меньше фрактальной размерности D_I, вычисленной в пределе при $\varepsilon \to 0$. Дело в том, что величина $D_I(\varepsilon^*)$ не относится более к какому-нибудь геометрическому объекту. Она служит для нас удобной мерой эффективности аттрактора как устройства, производящего информацию.

Применим теперь формулы (6.4.17) и (6.4.18) к нескольким простым случаям.

а) *Аттрактор Лоренца*: $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = -y + rx - xz$, $\dot{z} = xy - bz$ (при $b = 4$, $\sigma = 16$ и $r \approx 45{,}92$). С помощью компьютера мы вычислили $\lambda_+ \sim 1{,}5$; $\gamma \sim -0{,}03895$; $C_I(\varepsilon^*) \sim 3 - 0{,}72157 \sim 2{,}28$; $\varepsilon^* \sim 0{,}062$ и $M^* \sim 4$. Иначе говоря, оптимальный код, который максимизирует емкость «памяти» аттрактора

Лоренца, имеет в длину ~ 4 бит. Тем не менее сжатие информации достаточно велико — гораздо больше, чем следует из оценки, вычисляемой из информационной размерности при $\varepsilon \to 0$, $C(0) = 3 - 2{,}06 = 0{,}94$.

б) *Отображение Бернулли*: $x' \equiv 2x \pmod 1$. В этом случае одномерного отображения (по предположению однородного) число отрезков, покрывающих единичный отрезок при разрешающей способности ε, равно

$$n(\varepsilon) \sim \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Big/ \lambda_+, \tag{6.4.23}$$

откуда мы получаем

$$C_I \sim \frac{N + \left[\ln\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) - \ln\lambda_+\right]}{\ln\varepsilon}. \tag{6.4.24}$$

Условие $\partial C_I/\partial\varepsilon = 0$ дает для оптимального разрешения величину

$$\varepsilon^* \sim \exp\left[-\exp\left(1 + \ln\lambda_+\right)\right],$$

откуда

$$C_I(\varepsilon^*) = N - \exp\left[-\left(1 + \ln\lambda_+\right)\right]. \tag{6.4.26}$$

Численные методы дают в этом случае при $\lambda_+ = 2$ следующие оценки: $C_I(\varepsilon^*) = 0{,}81606$; $\varepsilon^* = 0{,}004354$ и M^* — от 7 до 8 бит.

После этого небольшого отступления приведем в качестве первого примера информационную размерность симметричного канторовского множества «в серых тонах». Последнее означает, что вместо выбрасывания средней трети каждого фрагмента, как мы делали в разд. 6.3.2 при вычислении фрактальной размерности канторовского множества в связи с логистическим уравнением, средние трети лишь частично стираются, или, иначе говоря, делаются *более* или *менее* вероятными, чем окружающие их трети фрагментов. Таким образом, мы пытаемся трактовать канторовское множество как плотность вероятности. [Такой подход позволяет нам более отчетливо понять, *почему* в случае логистического отображения интервал [0, 1] становится множеством типа канторовского с первой точкой накопления $a = 3{,}57$, указывающей конец каскада бифуркаций типа двузубой вилки, сопровождающихся удвоением периода.]

При переходе от первой итерации ко второй отображения $F(x)$ орбиты (т. е. первый предельный цикл с периодом 2) с вероятностью единица занимают интервал между первыми двумя сателлитами $x_1^{*\prime}$ и $x_2^{*\prime}$, а подотрезки $[0, x_1^{*\prime}]$ и $[x_2^{*\prime}, 1]$, примыкающие к сателлитам соответственно слева и справа, оказываются пустыми (не содержат ни одной орбиты). Однако при

каждой последующей бифуркации типа двузубой вилки, приводящей к удвоению периода, т. е. к очередной итерации, в *среднюю треть возникающих новых интервалов* устойчивые орбиты не заходят (средние трети остаются пустыми), в то время как в двух примыкающих к середине подынтервалах орбиты по-прежнему имеются и т. д. (рис. 6.23). В точке накопления $a = 3{,}57$ мы имеем множество канторовского типа (черно-белое), которое, однако, асимметрично (подробнее о нем см. в этом разделе ниже). Тем не менее мы можем указать другие значения управляющего параметра (например, $a = 4$), при которых орбиты занимают *весь* интервал с *непрерывной* плотностью вероятности $P(x)$. В этом случае и фрактальная, и информационная размерности логистического отображения равны единице.

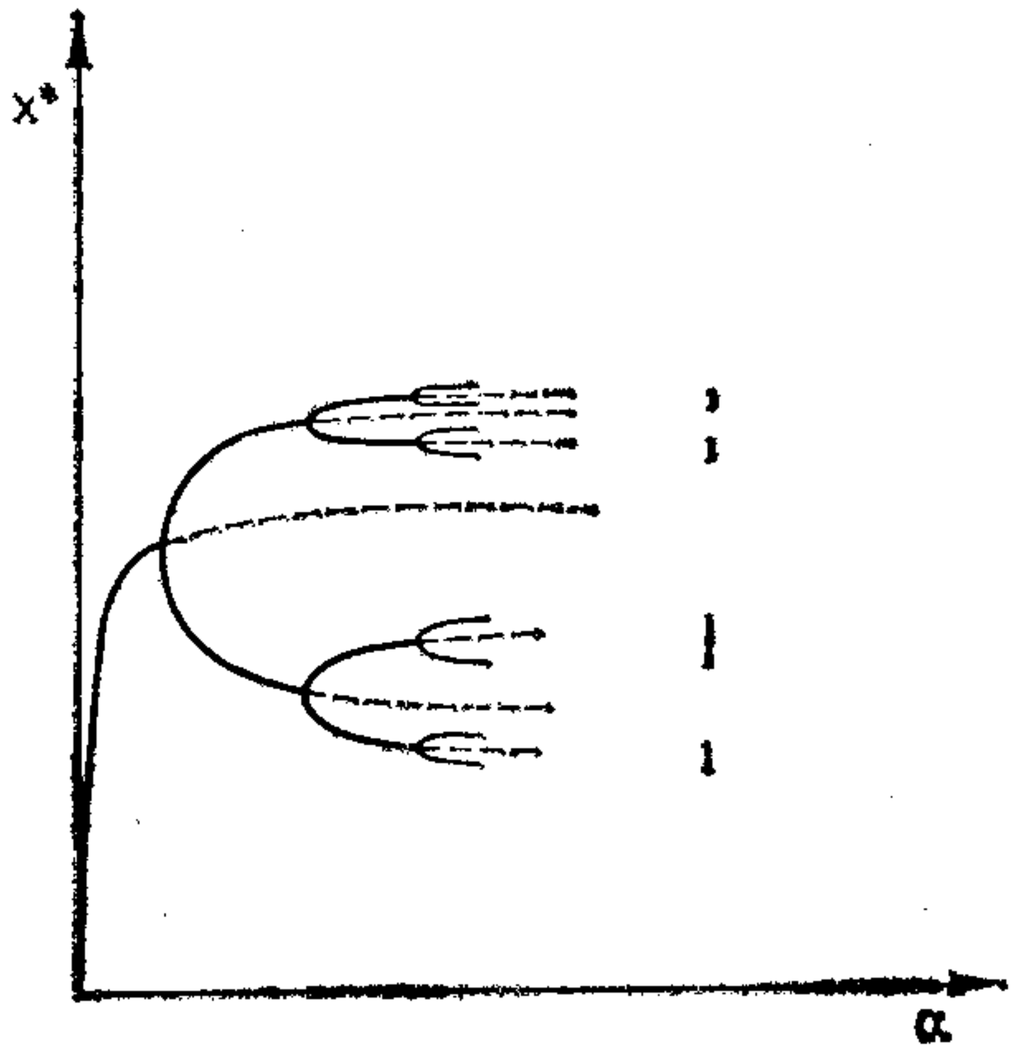


Рис. 6.23. Разбиение единичного интервала при последовательных бифуркациях раздвоения приводит (в пределе каскадов удвоения периодов) к асимметричному канторовскому множеству с фрактальной размерностью $\sim 0{,}530$.

Начнем с частичного стирания наружных частей и оставления средних частей, как на рис. 6.24. Пусть вероятность каждой из двух наружных подынтервалов равна P_0, а вероятность средней части равна P_m. Тогда в первом приближении имеем

$$P_1(x) = \{3P_0,\ 3P_m,\ 3P_0\}, \tag{6.4.27}$$

$$\int_0^1 P_1(x)\,dx = 1, \tag{6.4.28}$$

$$P_0 = \frac{1 - P_m}{2}. \tag{6.4.29}$$

Построим второе приближение $P_2(x)$. Для этого снова разделим каждый отрезок на три равные части и *перераспределим* вероятность в каждом из девяти подынтервалов так, чтобы отношения вероятностей в каждой трети оставались такими же, как в первом приближении $P_1(x)$ (иначе говоря, мы пытаемся построить самоподобную функцию плотности вероятности, или повторяем структуру плотности вероятности при все более высоком разрешении). Эту процедуру мы повторяем неограниченное число раз.

Информационная размерность получающегося в результате канторовского множества равна

$$D_I = \frac{-P_m \log_2 P_m - 2P_0 \log_2 P_0}{\log_2 3}, \qquad (6.4.30)$$

но фрактальная размерность $D_F = 1$ бит, так как функция плотности вероятности отлична от нуля на всем интервале.

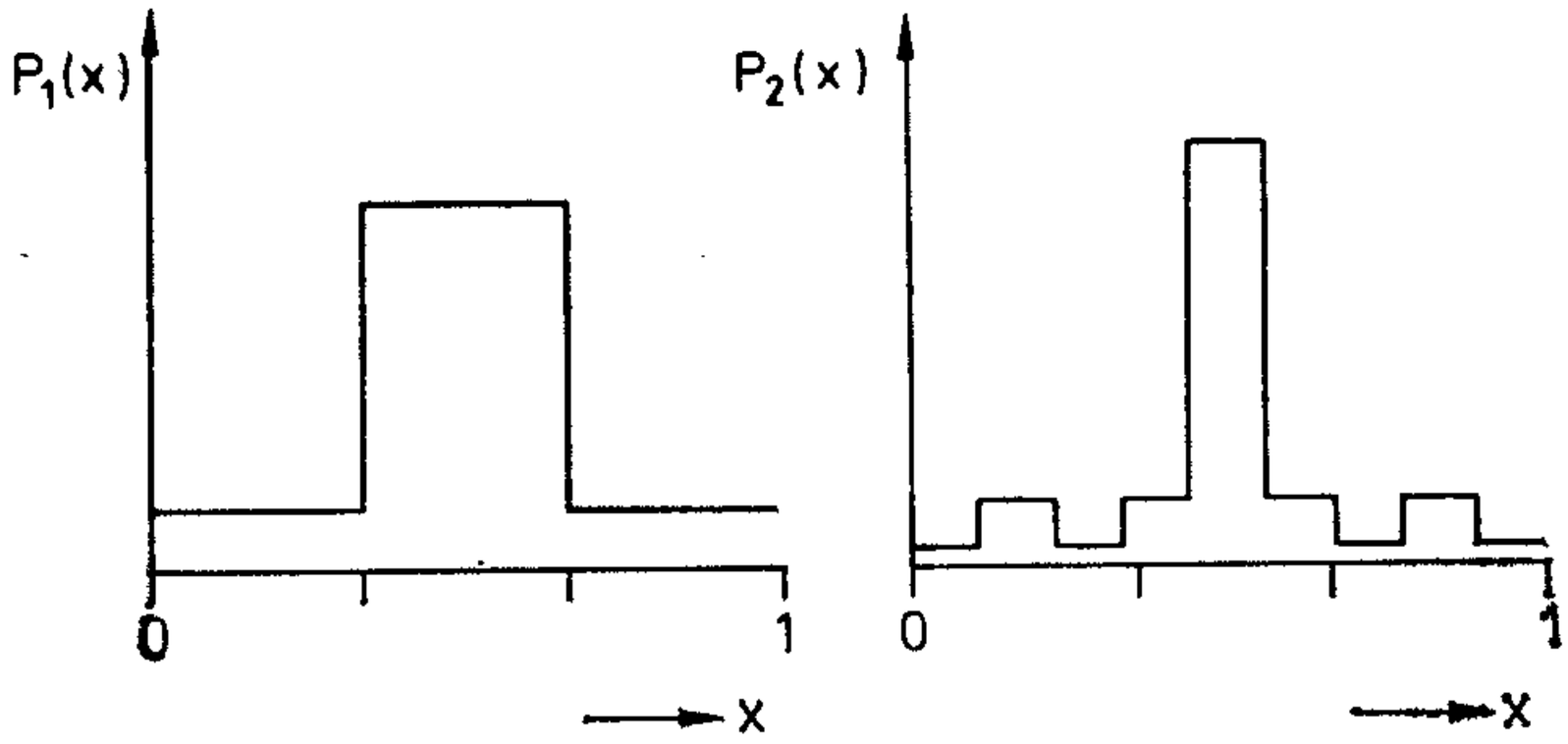


Рис. 6.24. Первые два шага каскада преобразований подобия плотности вероятности при построении симметричного «серого» канторовского множества.

В случае *черно-белого* симметричного канторовского множества обе размерности D_I и D_F были бы равны $\log_2 2/\log_2 3$. Если мы перейдем к асимметричному канторовскому множеству (чтобы приблизиться к более реалистическим случаям, например к

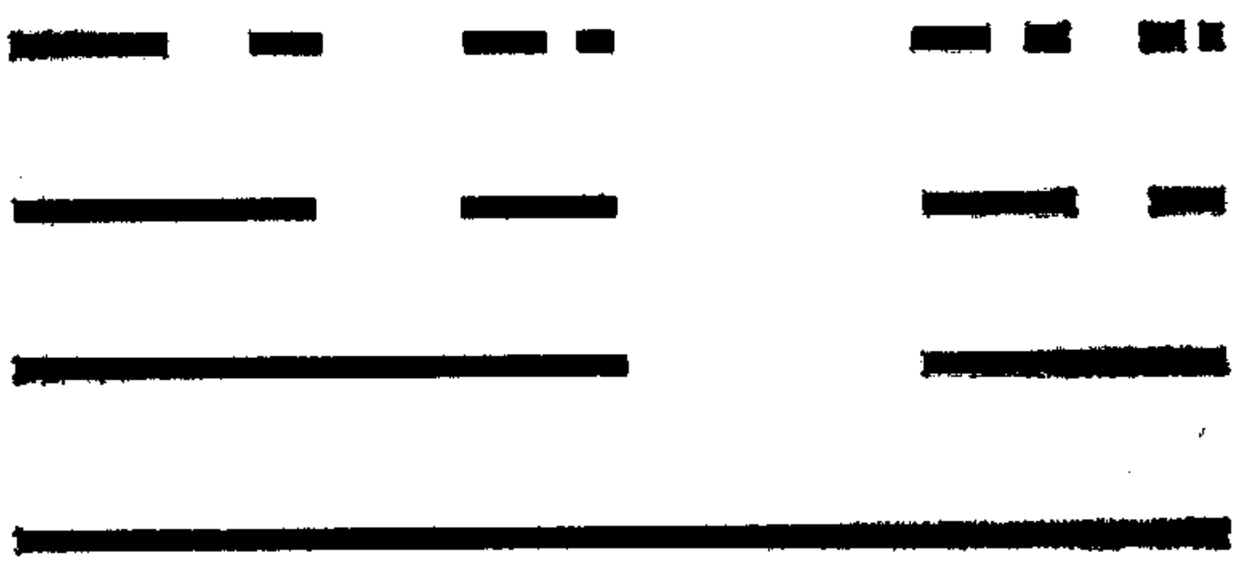


Рис. 6.25. Последовательные приближения к асимметричному канторовскому множеству, образующиеся при выбрасывании третьей четверти каждого куска. (По работе [6.14].)

логистическому отображению), то вычисления становятся более сложными [6.14].

Идея состоит в том, чтобы оценить, как симметрия в расположении элементов множества может влиять на информационнную и (фрактальную) размерность. Начав, как обычно, с интервала [0, 1], мы выбросим на этот раз интервал [1/2, 3/4], т. е. третью четверть (рис. 6.25). На следующем шаге мы выбросим третью четверть каждого из оставшихся интервалов

и т. д. В пределе мы получим асимметричное канторовское множество с фрактальной размерностью

$$D_F = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \approx 0{,}792. \qquad (6.4.31)$$

Но для того, чтобы оценить информационную размерность, метрических свойств множества, использованного выше при вычислении D_F, недостаточно: необходимо также задать на элементах этого множества некоторое априорное распределение плотности вероятности. Зададим на точках множества, изображенного на рис. 6.26, кусочно-постоянную плотность вероятности, тем самым сделав его не только асимметричным, но и серым.

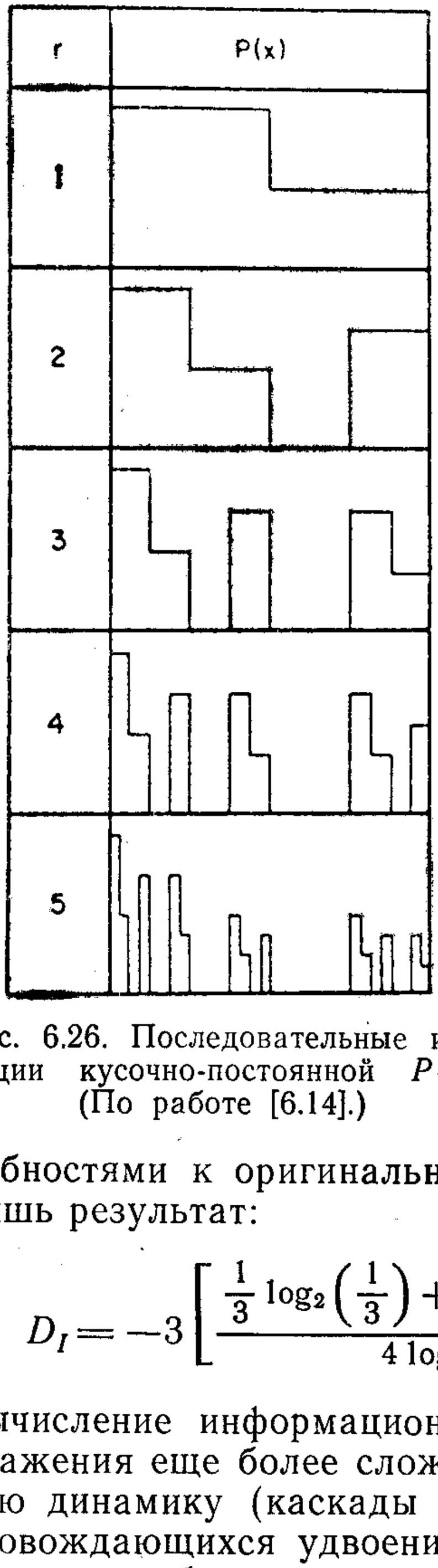


Рис. 6.26. Последовательные итерации кусочно-постоянной $P(x)$. (По работе [6.14].)

Чтобы вычислить информационную размерность, разобьем интервал [0, 1] последовательно на 2^n частей. С каждым разбиением наша разрешающая способность удваивается (ε заменяется $\varepsilon/2$), а асимметрия множества приводит к тому, что соседним участкам соответствуют различные вероятности. Вычисления оказываются довольно сложными, так как трудно найти закон, по которому подобно преобразуется функция плотности вероятности при все большем разрешении, и мы отсылаем читателя за подробностями к оригинальной работе Фармера [6.14]. Приведем лишь результат:

$$D_I = -3\left[\frac{\frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{2}{3}\right)}{4\log_2 2}\right] \sim 0{,}6887 \quad \text{[бит]}. \qquad (6.4.32)$$

Вычисление информационной размерности логистического отображения еще более сложно, если мы примем во внимание тонкую динамику (каскады бифуркаций типа двузубой вилки, сопровождающихся удвоением периода), через которую осуществляется разбиение множества. Результаты вычислений при каж-

дом значении управляющего параметра a оказываются различными и используют коэффициент подобия Фейгенбаума.

При $a \approx 3{,}57$ (первая точка накопления) *фрактальная размерность* была вычислена Грассбергером [6.16] и оказалась равной $D_F \sim 0{,}530$ битов. Вычисления информационной размерности никем не производились.

При $a = 3{,}7$ информационную размерность вычислил Фармер [6.14]: $D_I = 1$ бит. И в этом случае вычисления очень сложны, так как функцию плотности вероятности приходится вычислять при каждой итерации с помощью весьма непростого рекуррентного соотношения, приведенного в [6.14]. Подробности вычислений мы не приводим, так как они увели бы нас в сторону от основной темы.

6.4.2. Понятие характеристического показателя Ляпунова и его связь с информационной размерностью

Мы уже отметили, что основная трудность при вычислении информационной размерности связана с функцией плотности вероятности и, в частности, с законом, по которому она преобразуется, когда разрешение неограниченно возрастает. Например, для логистического отображения плотность вероятности вычисляется из рекуррентного соотношения

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{P_1(x_i)}{\left| \dfrac{dF^{(n-1)}}{dx} \right|_{x_i}}, \qquad (6.4.33)$$

где x_i — прообраз точки x при $(n-1)$-й итерации отображения F.

Итак, трудность вычислений по существу проистекает из того, что якобиан или определитель отображения (или аттрактор в целом) не постоянен, т. е. изменяется в зависимости от номера итерации. Именно это обстоятельство является основной причиной, по которой информационная и фрактальная размерность не совпадают.

В свою очередь матрица Якоби связана с *свойствами устойчивости* аттрактора, поэтому напрашивается предположение о том, что размерности странных аттракторов могут быть определены непосредственно из динамики системы, или в терминах «спектра показателей Ляпунова» аттрактора. (Два примера, подтверждающих такое предположение, мы привели в разд. 6.4.1.)

Спектр характеристических показателей Ляпунова позволяет качественно оценить свойства локальной устойчивости аттрактора. Для любой системы свойства ее локальной устойчивости определяются по ее отклику на малые возмущения. Динамическая

система может быть устойчива относительно возмущений по одним направлениям и неустойчива относительно возмущений по другим направлениям. Все возможные возмущения можно исследовать одновременно, прослеживая эволюцию ансамбля точек, которые первоначально находились в малой N-мерной сфере, где N — размерность пространства состояний, подмножеством которого является аттрактор.

Итак, представим себе в момент времени $t = 0$ бесконечно малый шар радиуса $\delta(0)$. Поскольку во времени шар изменяется под действием неоднородного потока, он в конце концов деформируется. Так как по предположению мы рассматриваем бесконечно малый элемент пространства состояний, изменение формы шара определяется только линейной частью потока, и в процессе эволюции во времени он сохраняет форму эллипсоида.

Пусть $\delta_i(t)$ — i-й элемент множества главных осей эллипсоида в момент времени t. Спектр показателей Ляпунова λ_i при заданной исходной позиции определяется соотношением

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \lim_{\delta(0) \to 0} \frac{1}{t} \log_2 \left(\frac{\delta_i(t)}{\delta(0)} \right). \qquad (6.4.34)$$

В спектре аттрактора N-мерной динамической системы существуют N показателей Ляпунова. Положительные показатели Ляпунова служат мерой *среднего* экспоненциального разбегания соседних траекторий, а отрицательные показатели Ляпунова — мерой средней экспоненциальной сходимости траекторий к аттрактору. Сумма показателей Ляпунова есть средняя дивергенция потока, которая для диссипативной системы (обладающей *аттрактором*) всегда должна быть отрицательной. (Для гамильтоновых систем дивергенция равна нулю.) Как показывают численные примеры, у некоторых диссипативных систем показатели Ляпунова инвариантны относительно всех перепробованных начальных условий. Если это так, то спектр показателей Ляпунова можно считать свойством аттрактора.

Обычно показатели Ляпунова принято располагать в порядке убывания. Например, символы (+, 0, —) означают, что у некоторого аттрактора в трехмерном пространстве состояний (в среднем) вдоль одного направления (назовем его направлением $\hat{\mathbf{x}}$) происходит экспоненциальное растяжение, вдоль другого направления (назовем его направлением $\hat{\mathbf{y}}$) поток обладает нейтральной устойчивостью и вдоль третьего направления $\hat{\mathbf{z}}$ траектории претерпевают экспоненциальное сжатие. Важно отметить, что у аттракторов, отличных от устойчивых стационарных состояний, *всегда* имеется по крайней мере один показатель Ляпунова, равный нулю, так как в среднем точки на траектории

ограничены компактным множеством и не могут ни расходиться особенно далеко, ни скапливаться. Таким образом, в диссипативной системе выполняется неравенство $|\lambda_-| > |\lambda_+|$.

Рассмотрим теперь отображение $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n)$ в аттракторе, где $\mathbf{x}$ — p-мерный вектор. Из приведенного выше определения следует, что показатели Ляпунова дискретной системы связаны с собственными числами матрицы Якоби отображения (в случае устойчивого стационарного состояния показатели Ляпунова являются вещественными частями матрицы взаимодействия).

Придадим этому утверждению точный смысл. Пусть

$$J_n = J(x_n) \cdot J(x_{n-1}) \ldots J(x_1), \tag{6.4.35}$$

где

$$J(x_1) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1},$$

. . . . . .

$$J(x_{n-1}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_{n-1}},$$

$$J(x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_n}.$$

Тогда

$$J_n = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_n} = \left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x}\right)_{x=x_0}, \tag{6.4.36}$$

где $x_i = F^{(i)}(x_0)$. Мы воспользовались здесь тем известным фактом, что производная n-й итерации отображения в некоторой точке x_0 равна произведению производных исходного отображения в образах точки x_0 под действием итераций: $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Пусть $\sigma_1(n) \geqslant \sigma_2(n) \geqslant \ldots \geqslant \sigma_p(n)$ — величины собственных значений матрицы J_n. Тогда «числа Ляпунова» равны

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} [\sigma_i(n)]^{1/n}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{6.4.37}$$

где под $[\ldots]^{1/n}$ следует понимать вещественный положительный корень n-й степени. Показатели Ляпунова мы получим, взяв log от λ_i. В одномерном случае такое определение совпадает с результатом, полученным в разд. 6.3.3, если воспользоваться предложенным выше алгоритмом, а именно определением показателя Ляпунова

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_i}. \tag{6.4.38}$$

Приведем теперь пример *двумерного отображения* и попытаемся вывести из него на эвристическом уровне строгости

соотношение между спектром показателей Ляпунова и информационной размерностью. Пусть для двумерного отображения λ_1, λ_2 — средние коэффициенты деформации бесконечно малого кругового диска радиуса δ (рис. 6.27).

Так как система дискретна, пусть показатель Ляпунова, при котором происходит разбегание точек, соответствует $\lambda_1 > 1$, а показатель Ляпунова, при котором точки стягиваются вместе,

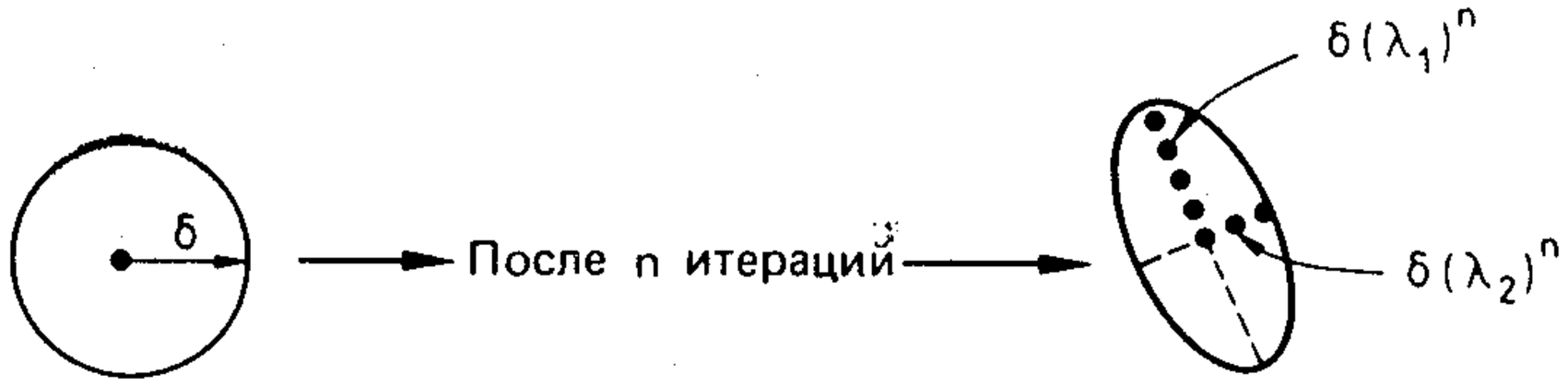


Рис. 6.27. Пояснение действия ляпуновских показателей на двумерную систему.

соответствует $\lambda_2 < 1$. После n итераций двумерного отображения начальный небольшой круг радиуса δ трансформируется в эллипс с большой полуосью $\delta(\lambda_1)^n$ и малой полуосью $\delta(\lambda_2)^n$. Попытаемся, следуя [6.17], связать этот спектр показателей Ляпунова с информационной размерностью отображения. Начнем, как обычно, с покрытия двумерного аттрактора квадратами со стороной ε (их $n(\varepsilon)$). Проитерируем наше отображение ξ раз. При достаточно малом ε (высокое разрешение) действие отображения практически линейно на каждом квадрате, поэтому каждый элемент разбиения вытягивается в параллелограмм. Средние размеры таких параллелограммов $\lambda_1^{\xi}\varepsilon$ в длину и $\lambda_2^{\xi}\varepsilon$ в ширину ($\lambda_1 > \lambda_2$). Предположим, что мы увеличиваем разрешение (делая разбиение более мелким), покрывая аттрактор квадратами со стороной $\lambda_2^{\xi}\varepsilon$. Чтобы покрыть каждый параллелограмм, нам понадобится $(\lambda_1/\lambda_2)^{\xi}$ меньших квадратов, т. е. в новом разбиении число элементов равно

$$n(\lambda_2^{\xi}\varepsilon) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\xi} n(\varepsilon). \tag{6.4.39}$$

Пусть $n(\varepsilon) \approx (1/\varepsilon)^{d_L}$. Подставляя это выражение для $n(\varepsilon)$ в соотношение (6.4.39), получаем

$$\left(\frac{1}{\lambda_2^{\xi}\varepsilon}\right)^{d_L} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\xi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d_L}, \tag{6.4.40}$$

или после логарифмирования

$$d_L = 1 + \frac{\log_2 \lambda_1}{\log_2 \dfrac{1}{\lambda_2}}. \tag{6.4.41}$$

Формула (6.4.41) справедлива для двумерных отображений, однако она допускает обобщение на более высокие размерности. Величину d_L можно назвать размерностью Ляпунова. Возникает вопрос: как d_L связана с информационной размерностью?

Ясно, что размерность Ляпунова совпадает с фрактальной размерностью. В приведенном выше выводе формулы (6.4.41) мы предполагали, что все квадраты в разбиении равновероятны. Заметим, что числа Ляпунова — *средние* величины, а для того, чтобы вычислить среднее, каждый элемент разбиения надлежит взять с весом, соответствующим вероятности данного элемента, т. е. его измерений. Для того, чтобы мы могли продвинуться дальше, нам необходимо рассмотреть какой-нибудь конкретный (но, как мы надеемся, представительный) пример двумерного отображения. Следуя опять Фармеру и др. [6.17], выберем в качестве такого примера преобразование пекаря [1], которое определяется следующим образом:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n & \text{при} \quad y_n < a, \\ \frac{1}{2} + \lambda_b x_n & \text{при} \quad y_n > a, \end{cases} \tag{6.4.42}$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{a} y_n & \text{при} \quad y_n < a, \\ \frac{1}{1-a}(y_n - a) & \text{при} \quad y_n > a, \end{cases}$$

где $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $0 \leqslant y_n \leqslant 1$. При выводе информационной размерности из показателей Ляпунова отображения пекаря мы заранее знаем о возможном самоподобии, проявляющемся все более отчетливо с увеличением числа итераций отображения. Поэтому представляет интерес выяснить, какой алгоритм содержат неявно соотношения (6.4.42).

Начнем с единичного квадрата. Выберем $\lambda_b > \lambda_a$ и a, λ_a, $\lambda_b \leqslant 1/2$. Отображение пекаря делит единичный квадрат на две горизонтальные полосы высотой a и $1 - a$ (рис. 6.28). Затем оно сжимает эти полосы в горизонтальном направлении до тех пор, пока ширина нижней полосы не станет равной λ_a, а ширина верхней — λ_b, после чего растягивает обе полосы в вертикальном направлении до тех пор, пока высота каждой полосы не-

[1] В литературе неоднократно высказывалось мнение о том, что диссипативное преобразование пекаря можно при некоторых условиях рассматривать как двумерное отображение Пуанкаре, порождаемое аттрактором Лоренца. (Гиперболические отображения с точкой возврата («острием») являются одномерными отображениями Пуанкаре того же аттрактора.) Выражаю свою признательность д-ру Г. Майер-Крессу, обратившему на это мое внимание.

станет равной единице. Наконец, преобразование пекаря оставляет нижнюю полосу на месте, а верхнюю ставит на ось x

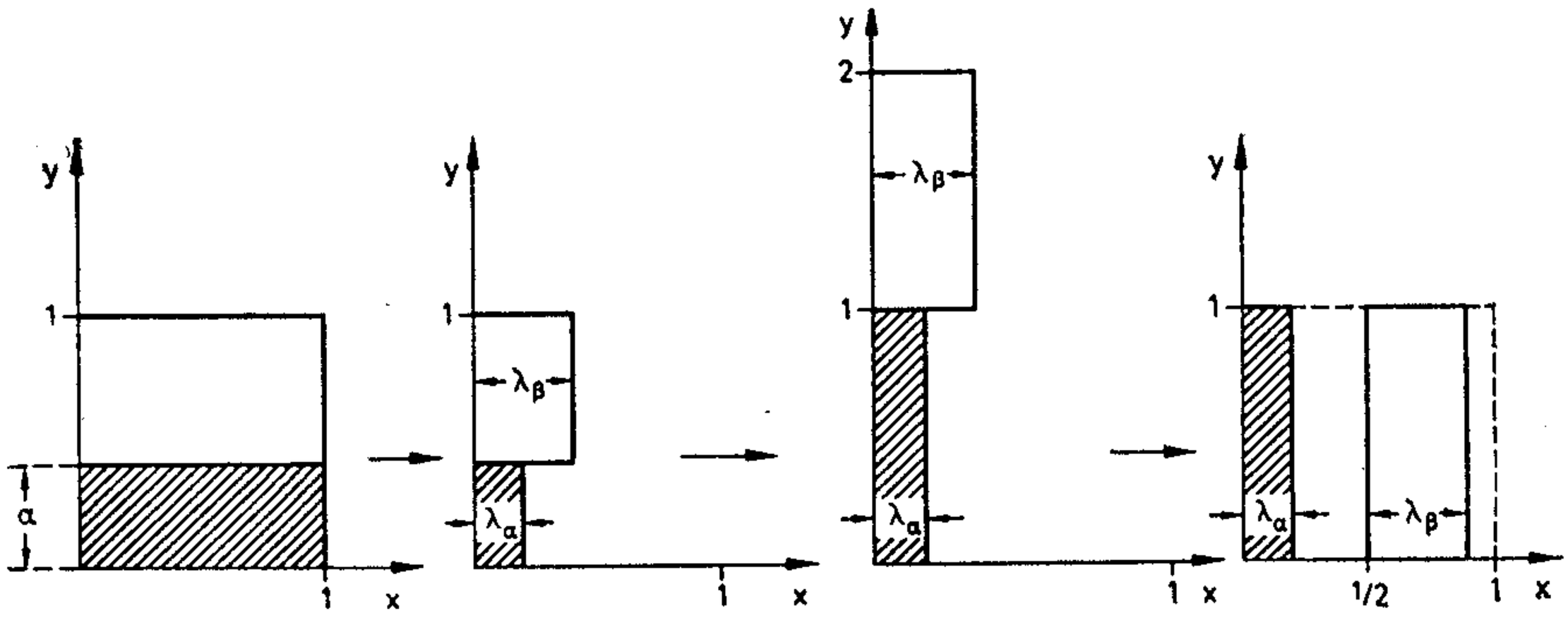


Рис. 6.28. Пример первой итерации асимметричного преобразования пекаря. (По работе [6.17].)

так, что основание полосы занимает отрезок от $x = 1/2$ до $x = (1/2) + \lambda_b$.

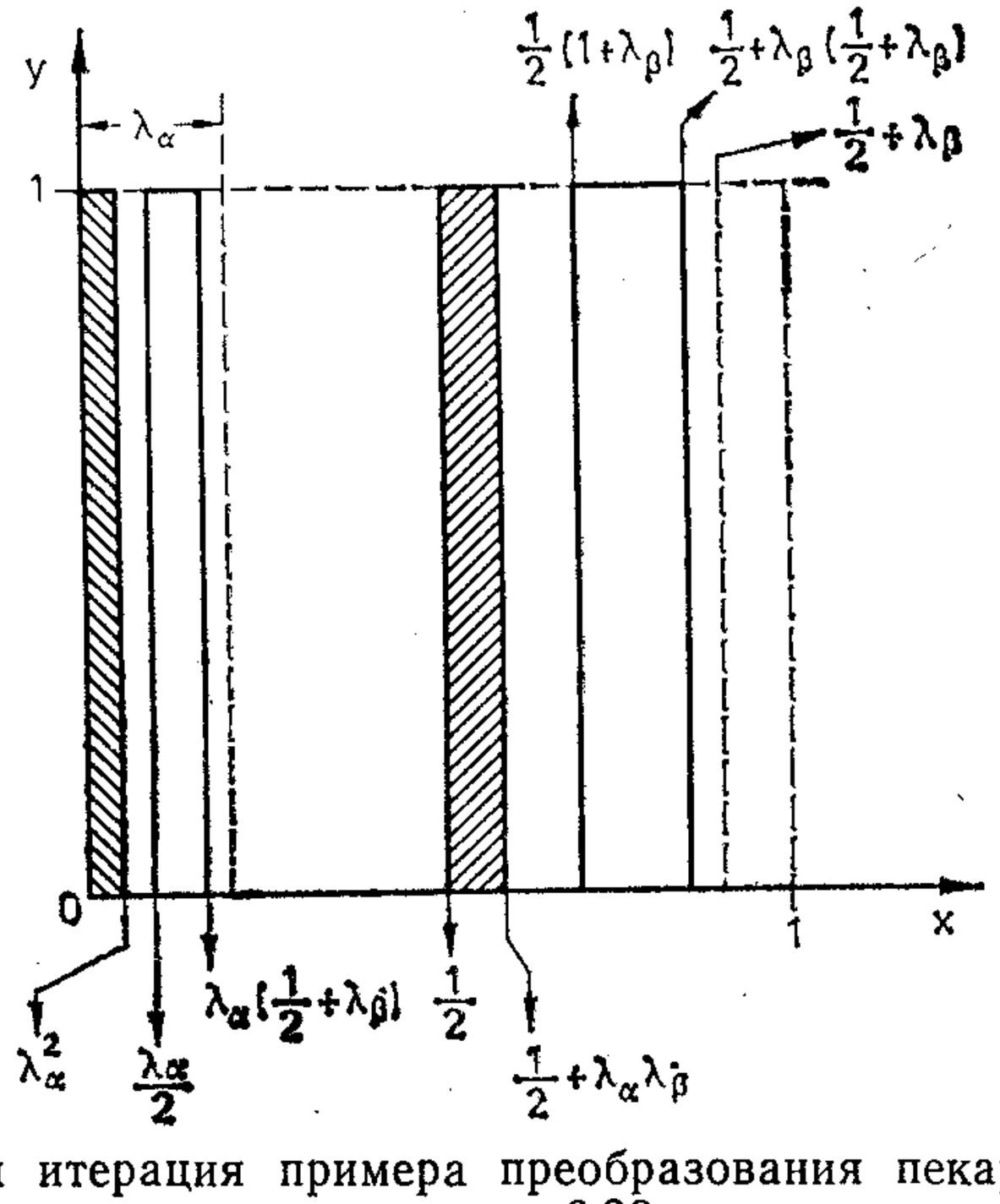


Рис. 6.29. Вторая итерация примера преобразования пекаря, изображенного на рис. 6.28.

Применяя отображение пекаря к единичному квадрату *дважды*, мы получаем конфигурацию, изображенную на рис. 6.29.

Отчетливо видно, что если интервал $[0, \lambda_a]$ на оси x увеличить в $1/\lambda_a$ раз, то мы получим копию предыдущей (первой)

итерации. Аналогично, если интервал $[1/2, (1/2)+\lambda_b]$ на оси x увеличить в $1/\lambda_b$ раз, то мы также получим копию предыдущей итерации. Следовательно, отображение пекаря обладает свойством самоподобия.

Из структуры соотношений, задающих преобразование пекаря, видно, что покрытие вдоль оси y *эргодично* в интервале $[0, 1]$. Якобиан системы диагонален и зависит только от y, т. е.

$$J = \begin{pmatrix} I_2(y) & 0 \\ 0 & I_1(y) \end{pmatrix}, \tag{6.4.43}$$

где

$$I_2 = \begin{cases} \lambda_a & \text{при} \quad y < a, \\ \lambda_b & \text{при} \quad y > a, \end{cases}$$

$$I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{при} \quad y < a, \\ \dfrac{1}{1-a} & \text{при} \quad y > a. \end{cases}$$

Следовательно, числа Ляпунова определяются соотношениями

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} [I_1(y_n)\, I_1(y_{n-1}) \ldots I_1(y_1)]^{1/n} \tag{6.4.44}$$

и

$$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} [I_2(y_n)\, I_2(y_{n-1}) \ldots I_2(y_1)]^{1/n}. \tag{6.4.45}$$

Элементы I_1 принимают только два значения: $1/a$ при $y < a$ и $1/(1-a)$ при $y > a$; аналогично, элементы I_2 принимают только два значения: λ_a при $y < a$, y_b при $y > a$.

Таким образом, показатели Ляпунова для отображения пекаря равны

$$\log_2 \lambda_2 = a \log_2 \lambda_a + (1-a) \log_2 \lambda_b \tag{6.4.46}$$

и

$$\log_2 \lambda_1 = a \log_2 \lambda_a + (1-a) \log_2 \left(\frac{1}{1-a}\right), \tag{6.4.47}$$

где при выводе формул мы учли, что вероятность, или асимптотическое значение доли времени, которую система проводит в части $y < a$, равна просто a, а вероятность пребывания системы в части $y > a$ равна $1-a$ (из-за эргодического характера орбиты в направлении оси y).

Полагая

$$S(a) = a \log_2 \left(\frac{1}{a}\right) + (1-a) \log_2 \left(\frac{1}{1-a}\right) \tag{6.4.48}$$

и учитывая выведенное выше выражение

$$d_L = 1 + \frac{\log_2 \lambda_1}{\log_2 (1/\lambda_2)}, \qquad (6.4.41)$$

мы, наконец, получаем размерность Ляпунова для двумерного отображения пекаря:

$$d_L = 1 + \frac{S(a)}{a \log_2 \left(\frac{1}{\lambda_a}\right) + (1-a) \log_2 \left(\frac{1}{\lambda_b}\right)}. \qquad (6.4.49)$$

Здесь уместно напомнить, что в двумерном пространстве наш аттрактор представляет собой прямое произведение множества канторовского типа вдоль оси x и интервала [0, 1] вдоль оси y. Поэтому информационная размерность в этом случае равна

$$D_I = 1 + D_I', \qquad (6.4.50)$$

где D_I' — информационная размерность вдоль оси x. Для дальнейшего исследования соотношения между полученным выше результатом и информационной размерностью преобразования пекаря Фармер и др. [6.17] поступили следующим образом. Информация $I(\varepsilon)$ вдоль оси x возникает по существу как сумма вкладов *двух* полос высоты 1 вдоль оси y и ширины, соответственно, λ_a и λ_b вдоль оси x. Обозначим эти вклады через $I_a(\varepsilon)$ и $I_b(\varepsilon)$. Полная вероятность того, что система окажется в первой полосе, равна a, полная вероятность того, что система окажется во второй полосе, равна $1 - a$. Пусть $n(\varepsilon)$, как обычно,— число полос шириной ε (разрешающая способность), покрывающих весь аттрактор. Из свойств подобия системы следует, что для покрытия, например, первой полосы в интервале [0, λ_a] при разрешающей способности $\varepsilon\lambda_a$ также требуется $n(\varepsilon)$ «ячеек».

Напомним определение информационной размерности:

$$D_I' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \qquad (6.4.51)$$

где

$$I(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} P_i \log_2 \left(\frac{1}{P_i}\right) \qquad (6.4.52)$$

и P_i — вероятность того, что i-й и N-мерный «куб» содержит точки аттрактора. Таким образом, для полосы [0, λ_a] преобра-

зования пекаря мы получаем

$$I_a(\varepsilon\lambda_a) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} aP_i \log_2\left(\frac{1}{aP_i}\right) = a\left[\log_2\left(\frac{1}{a}\right) + I(\varepsilon)\right]. \quad (6.4.53)$$

Заменяя в соотношении (6.4.53) $\varepsilon\lambda_a$ на ε, запишем его в виде

$$I_a(\varepsilon) = a\log_2\left(\frac{1}{a}\right) + aI\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_a}\right). \quad (6.4.54)$$

Аналогичное соотношение

$$I_b(\varepsilon) = (1-a)\log_2\left(\frac{1}{1-a}\right) + (1-a)I\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_b}\right) \quad (6.4.55)$$

справедливо для второй полосы $[1/2, (1/2)+\lambda_b]$. В результате, так как $I(\varepsilon) = I_a(\varepsilon) + I_b(\varepsilon)$, мы приходим к соотношению

$$I(\varepsilon) = aI\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_a}\right) + (1-a)I\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_b}\right) + S(a), \quad (6.4.56)$$

где величина $S(a)$, вычисляемая по формуле (6.4.48), была введена в разд. (2.3.2) как «бинарная функция энтропии» и представляет собой информацию, содержащуюся в бросании монеты («орел» — «решка»), когда выпадение «орла» (или «решки») имеет априорную вероятность a.

Подставляя выражение (6.4.56) в определении $D_I' = I(\varepsilon)/\log_2(1/\varepsilon)$ и используя известные теперь выражения для $I(\varepsilon)$, $I(\varepsilon/\lambda_a)$ и $I(\varepsilon/\lambda_b)$, получаем после несложных преобразований

$$D_I' = \frac{S(a)}{a\log_2\left(\frac{1}{\lambda_a}\right) + (1-a)\log_2\left(\frac{1}{\lambda_b}\right)} = d_L - 1 \quad (6.4.57)$$

и, наконец,

$$D_I = d_L. \quad (6.4.58)$$

Для симметричного отображения, т. е. при $a = 1/2$ и $\lambda_a = \lambda_b = 1/3$, это дает

$$D_I = \frac{1}{\log_2 3} + 1,$$

для $a = 1/2$, $\lambda_a = \lambda_b = 1/2$

$$D_I = 2.$$

Последний результат можно было бы ожидать заранее, так как единичный квадрат покрывается отображением эргодически и в направлении оси x, и в направлении оси y.

Таким образом, вычисляя показатели Ляпунова для нашего дискретного отображения или для аттрактора непрерывной

системы, мы получаем выражение для информационной размерности аттрактора, задающее в действительности степень *сжатия* информации, достигаемую рассматриваемой динамической системой.

6.4.3. Понятие метрической энтропии (Колмогорова — Синая) и ее связь с информационной размерностью

До сих пор мы занимались исследованием количества информации, получаемой наблюдателем при одном изолированном измерении, производимом над динамической системой со странным аттрактором, или количества информации, необходимого наблюдателю для однозначного задания одной точки на аттракторе. Обратимся теперь к «динамической» задаче. Предположим, что обладающая аттрактором система «развертывается» перед наблюдателем. Спрашивается, сколько новой информации получает наблюдатель, производя последовательные измерения во времени, т. е. получая от системы сведения о репертуаре ее режимов в виде серии дискретных «импульсов» во времени. Ясно, что если аттрактор — устойчивое стационарное состояние, то, коль скоро процесс измерения фиксирует это состояние, дальнейшие измерения излишни: статичный объект не дает никакой новой информации.

Аналогичным образом, если аттрактор — предельный цикл, то коль скоро переходные режимы, связанные с замыканием одного периода, завершаются, дальнейшие наблюдения порождают лишь избыточную информацию. То же самое происходит и с любым другим периодическим аттрактором, например с (рациональным) 2-тором. Однако ситуация резко изменяется, если мы имеем дело с апериодическим (странным) аттрактором. В этом случае система непредсказуема, и метрическая энтропия, к обсуждению которой мы сейчас переходим, дает верхнюю границу скорости *получения информации* от эволюционирующей во времени динамической системы. Можно ожидать заранее, что, пока управляющий параметр динамической системы, обладающей аттрактором (репертуар которой состоит только из устойчивых периодических траекторий), достигнет первой точки накопления, метрическая энтропия должна быть равна нулю и должна начать свой «взлет» сразу же после появления первой апериодической траектории.

Предположим, что наблюдатель принимает дискретный временной ряд, представляющий собой эргодическую марковскую цепь с n состояниями σ_i (например, в форме n целых чисел), обнаруживаемых при последовательных измерениях. Измерения производятся на каждом из n элементов разбиения пространства состояний, в котором находится аттрактор. Появление

очередного символа/состояния стохастически зависит от m предыдущих символов/состояний — процесс m-го порядка. Наш первый вопрос состоит в следующем: каково среднее количество информации на один символ, производимое таким марковским источником? Ясно, что ответ на него должен дать наблюдатель, знающий предысторию источника и меру непредсказуемости порождаемых источником последовательностей символов/состояний.

Почерпнутые из гл. 4 элементарные сведения по теории информации (о марковских цепях порядка 1) позволяют нам вычислить энтропию эргодического марковского источника порядка m, обладающего n дискретными состояниями. Полное число последовательностей длины m состояний, которые можно построить из n состояний, равно n^m. [Иначе говоря, если мы будем рассматривать каждую последовательность $S_m(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ как m-значную дробь в системе счисления с основанием n и расположим все такие последовательности как точки на интервале [0, 1], то две соседние точки будут разделены расстоянием n и таких точек будет $1 - n^{-m}$.]

Каждая m-значная последовательность из n символов/состояний задает «состояние» S_m нашей марковской цепи m-го порядка. Количество информации, получаемое наблюдателем, когда следующее состояние есть σ_{m+1} при условии, что сейчас цепь находится в состоянии S_m определяется величиной

$$I = -\log_2 P\left(\frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m}\right) = -\log_2 P(\sigma_{m+1}/S_m), \quad (6.4.59)$$

где $P(\sigma_{m+1}/S_m)$ — условная вероятность того, что при *данном* «состоянии» S_m следующим $(m+1)$-м символом будет σ_{m+1}.

Чтобы вычислить энтропию нашего источника, мы должны усреднить выражение (6.4 59) по всем возможным переходам из S_m в σ_{m+1} и по всем возможным n^m «состояниям» S_m. Пусть $P(S_m)$ — вероятность того, что мы имеем некую определенную последовательность из m символов $\left[\sum_{m=1}^{n^m} P(S_m) = 1\right]$. Тогда среднее количество информации на символ σ, получаемое наблюдателем, равно

$$\Delta I_m = -\sum_{S_m=0}^{n^m} P(S_m) \sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(\sigma_{m+1}/S_m) \log_2 P(\sigma_{m+1}/S_m). \quad (6.4.60)$$

Но по теореме Байеса

$$P(S_m, \sigma_{m+1}) = P(S_m) P(\sigma_{m+1}/S_m), \quad (6.4.61)$$

где $P(S_m, \sigma_{m+1})$ — совместная вероятность *последовательного* появления S_m и σ_{m+1}, поэтому

$$\log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) = \log_2 P(S_m) + \log_2 P(\sigma_{m+1}/S_m)$$

и

$$\log_2 P(\sigma_{m+1}/S_m) = \log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) - \log_2 P(S_m). \quad (6.4.62)$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (6.4.60), получаем

$$\Delta I_m = -\sum_{S_m=0}^{n^m} \sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) [\log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) - \log_2 P(S_m)] =$$

$$= -\sum_{S_m=0}^{n^m} \left\{ \left[\sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) \log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) \right] \log_2 P(S_m) \right\}. \quad (6.4.63)$$

Но так как

$$\sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) = P(S_m), \quad (6.4.64)$$

мы приходим к соотношению

$$\Delta I_m = -\sum_{S_m=0}^{n^m} \left\{ \left[\sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) \log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) \right] - \right.$$

$$\left. - P(S_m) \log_2 P(S_m) \right\}. \quad (6.4.65)$$

Ясно, что

$$\sum_{\sigma_{m+1}=0}^{n-1} P(S_m, \sigma_{m+1}) \log_2 P(S_m, \sigma_{m+1}) = P(S_{m+1}) \log_2 P(S_{m+1}), \quad (6.4.66)$$

поэтому

$$\Delta I_m = I_{m+1} - I_m, \quad (6.4.67)$$

где

$$I_m = -\sum_{S_m=0}^{n^m} P(S_m) \log_2 P(S_m). \quad (6.4.68)$$

Таким образом, для странного аттрактора ΔI_m есть среднее количество новой информации, получаемое наблюдателем, когда траектория аттрактора движется из «ячейки» в «ячейку» в пространстве состояний, в котором произведено разбиение. Существенно, что (экспоненциальная) скорость локального разбега-

ния соседних траекторий «ответственна» за новую информацию, порождаемую при каждом следующем измерении (см. также разд. 6.5).

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем выражение

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{I_m}{m \, \Delta t} \right) \text{ [бит/с]} \qquad (6.4.69)$$

для скорости [бит/с], с которой развертывающийся аттрактор порождает информацию. Метрическая энтропия определяется выражением (6.4.69), если взять максимум по всем возможным разбиениям β пространства состояний, т. е.

$$\text{Метрическая энтропия} = h_\mu = \sup_{\beta} \left(\lim_{\substack{m \to \infty \\ \Delta t \to 0}} \frac{I_m}{m \, \Delta t} \right). \qquad (6.4.70)$$

Таким образом, метрическая энтропия есть верхний предел (предполагающий идеального наблюдателя) количества информации, получаемой за одну секунду от динамической эволюции странного аттрактора. С увеличением номера итерации разрешающая способность повышается, и скорость получения информации (6.4.70) возрастает, так как мелкомасштабные случайные (тепловые) флуктуации, неизбежно присутствующие в любой крупномасштабной системе, теперь не замазываются и начинают сказываться на макроскопическом уровне. Как установить соотношение между *метрической энтропией*, с одной стороны, и *информационной размерностью* (и спектром показателей Ляпунова) — с другой?

Как уже говорилось выше (см. также соотношение (6.14)), мы можем считать, что n^m возможных последовательностей, порождаемых потоком аттрактора, равномерно распределены на единичном интервале как множество m-значных дробей (символов x_i) в системе счисления с основанием n. Так как расстояние между точками единичного интервала, соответствующими этим дробям, составляет n^{-m}, дроби можно перенумеровать числами от 0 до $1 - n^{-m}$.

Рассмотрим теперь функцию плотности вероятности $P_m(x)$. Для этого построим график, откладывая $P(S_m)$ как ординату над точкой единичного интервала, соответствующей дроби x. Ясно, что

$$P_m(x) = P(S_m) \, n^m, \qquad (6.4.71)$$

где $S_m \leqslant x < S_m + n^{-m}$, $S_m = 0, \; n^{-m}, \; \ldots, \; 1 - n^{-m}$, и, кроме того, $P_m(x)$ удовлетворяет соотношениям нормировки

$$\int_0^1 P_m(x) \, dx = 1, \quad \text{или} \quad \int_0^1 P(S_m) \, dx = n^{-m}. \qquad (6.4.72)$$

В пределе при $m \to \infty$, когда марковская цепь обретает бесконечную память, функция плотности вероятности $P_m(x)$ «выходит» на свое асимптотическое значение

$$P_\infty(x) = \lim_{m \to \infty} P_m(x). \tag{6.4.73}$$

Тогда $P(S_m)$ — вероятность появления последовательности S_m — становится равной

$$P(S_m) = \int_{S_m}^{S_{m+n-m}} P_\infty(x)\, dx. \tag{6.4.74}$$

Это соотношение означает, что рассмотрение последовательностей из m символов сводится к рассмотрению плотности вероятности $P_\infty(x)$ последовательностей символов с разрешением масштаба $\varepsilon = n^{-m}$. Отображение множества вероятностей $P(S_m)$ на единичный интервал позволяет выразить метрическую энтропию через информационную размерность. Действительно,

$$h_\mu = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{I_m}{m} \right) \tag{6.4.75}$$

при $\Delta t \sim 1$ единице времени, или

$$h_\mu = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{I_m}{m \log_2 n} \right) \log_2 n. \tag{6.4.76}$$

Так как $\varepsilon = n^{-m}$, $\log_2 \varepsilon = -m \log_2 n$, мы получаем

$$h_\mu = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{I_m}{|\log_2 \varepsilon|} \right) \log_2 n = D_I(P_\infty) \log_2 n, \tag{6.4.77}$$

где $D_I(P_\infty)$ — информационная размерность для асимптотического значения, принимаемого функцией плотности вероятности. Следовательно,

$$h_\mu = D_I \log_2 n, \tag{6.4.78}$$

где n — число *дискретных* состояний/ячеек, на которые разбиение делит пространство состояний (или число дискретных состояний, которые мы измеряем на аттракторе).

Практический способ вычисления грубой оценки энтропии Колмогорова — Синая состоит в установлении соответствия между дискретным отображением, итерируемым за порогом наступления хаоса, и марковской цепью.

Возьмем в качестве примера [6.18] знакомое отображение

$$X_{t+1} = 4X_t \left(1 - \frac{X_t}{\xi} \right), \tag{6.4.79}$$

где ξ — целое число, обозначающее разбиение интервала. При $\xi = 2$ мы имеем разбиение двух символов, например A и B, в интервале 2, а при $\xi = 4$ — разбиение из четырех символов, например A, B, C, D в интервале 4 (при $\xi > 4$ разбиение перестает быть марковским, см. [6.18]).

Элементы матрицы вероятностей переходов, или марковской цепи, легко вычислить из геометрических соображений. Например, при $\xi = 2$ часть от $A = 1$ на горизонтальной оси, которая проектируется как A на вертикальную ось, равна $P_{AA} = 1 - (1/\sqrt{2})$; следовательно, $P_{AB} = 1/\sqrt{2}$ и аналогично $P_{BA} = 1 - (1/\sqrt{2})$ и $P_{BB} = 1/\sqrt{2}$. В случае $\xi = 4$ матрица перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} P(\sigma_{t+1}/\sigma_t) & A & B & C & D \\ A & \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ B & \beta & 0 & 0 & \beta \\ C & \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = 2 - \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ и $\gamma = \sqrt{2} - 1$.

Зная элементы матрицы перехода, мы можем найти вероятности $P(A)$, $P(B)$ или $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ из $n - 1$ линейных соотношений

$$u_K = \sum_{j=1}^{n} u_j P_{jK} \tag{6.4.80}$$

и условия нормировки

$$\sum_{K=1}^{n} u_K = 1, \tag{6.4.81}$$

где $n = 2$ или 4.

Таким образом, энтропия рассматриваемой нами марковской цепи равна

$$S = \sum_{K=1}^{n} u_K S_K = -\sum_{K=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_K} u_K P_{Ki} \log_2 P_{Ki} \text{ [бит]}, \tag{6.4.82}$$

где (в каждом случае) n_K — число состояний, достигаемых в один скачок из состояния K.

Этим замечанием мы завершаем раздел о параметрах, характеризующих странный аттрактор. Мы исследовали характеристики достаточно подробно, так как все они (информационная размерность D_I, спектр показателей Ляпунова $\{\lambda_i\}$ и метрическая энтропия h_μ) взаимосвязаны и опираются на два основных понятия.

а) Обнаруженное при исследовании странного аттрактора *сжатие* описания, т. е. уменьшение числа степеней свободы, обусловленное тем, что поток отображается на себя, тем самым образуя компактное эргодическое множество в пространстве состояний, имеющем гораздо более высокую размерность.

б) *Производство информации*, приводящее к тому, что система (за конечное время) становится независимой от начальных условий.

Проведенный выше анализ имеет решающее значение для главной темы нашей книги — поиска механизмов, обеспечивающих формирование коллективных свойств и тем самым приводящих к образованию иерархических систем и появлению возможности их взаимного моделирования. Сжатие описания является необходимой предпосылкой формирования таких коллективных свойств через организацию дальнодействующих кросс-корреляций между соответствующими переменными. Существует предположение, что биологические системы, обладающие «ритмами» с хаотическими свойствами, т. е. странными аттракторами, могут обеспечить некую «экономную» надежную обработку информации. Этот вопрос мы подробно рассмотрим в следующем разделе.

6.5. Возможная роль хаоса в надежной обработке информации

Этот раздел можно читать независимо от разд. 6.4.

При проектировании «самоорганизующихся» систем первостепенное значение приобретает определение «теоретического минимума» сложности «аппаратурной реализации» системы (C_H), необходимого для обеспечения заданного функционального репертуара (сложности «программного обеспечения» системы C_S). В общем случае предполагается, что кривая $C_H = f(C_S)$ монотонно возрастает, причем крутизна роста определяется конкретным «механизмом межэлементарных связей», или архитектурой данной системы. Это убеждение традиционно берет начало в практике техники связи, в которой акт обработки информации включает в себя последовательность «расширения» и «сжатия» размерности пространства состояний, т. е. увеличения и последующего сокращения числа степеней свободы передаваемого сигнала.

Действительно, с передающей стороны усилия, направленные на эффективное кодирование, требуют *ортогональности* «слов» (членов) репертуара передатчика. Это достигается путем увеличения ширины полосы W или времени передачи T, вследствие чего возрастает и размерность $2WT$ пространства

состояний, в котором отдельные слова (волновые сигналы, представленные в дискретном цифровом виде с помощью теоремы о выборке) фигурируют в качестве гипервекторов.

На принимающем конце происходит «сжатие», сводящееся к серии сверток приходящего (зашумленного) сигнала и каждого члена/слова из репертуара передатчика. Так как отдельные слова взаимно ортогональны, перечисленные выше операции позволяют приемнику обнаруживать и исправлять многократные (хотя и конечной кратности) ошибки, которые встречаются в принятом сигнале из-за шума в канале.

Обращаясь к биологическим системам, мы сталкиваемся с весьма запутанной ситуацией. Простые параметры, такие, как вес или объем мозга, очень мало говорят о биологической системе (яркий тому пример — голубой кит). Не помогает и сравнительная анатомия, так как по ее данным мозг дельфина по своему сравнению во многом аналогичен мозгу человека. На более изощренном уровне мы рассматриваем сложность как характеристику, зависящую от смеси разнородных параметров, таких как число взаимодействующих компонент, связность и функция распределения интенсивности взаимодействия.

Однако во многих случаях мы видим, что биологические организмы с весьма простой нервной системой («аппаратурной реализацией»), такие, как пиявка или таракан, обладают весьма внушительным и сложным репертуаром режимов поведения. Мы начинаем подозревать, что существуют системы, которые обрабатывают информацию по алгоритмам, построенным на других принципах, чем созданные человеком артефакты, т. е. не на повышении сложности «аппаратурной реализации» во имя достижения большей сложности поведения.

В этом разделе мы хотим воспользоваться новым альтернативным теоретическим принципом, удовлетворяющим требованию сочетания широкого функционального репертуара с очень простой «аппаратурной реализацией». Этот принцип основан на том, что информацию порождает не только утрата системой степеней свободы, но и увеличение разрешающей способности в системах с малым числом степеней свободы.

Некоторые нелинейные диссипативные системы всего лишь с тремя степенями свободы могут обладать случайным поведением, аналогичным тому, которое описывается заведомо стохастическими уравнениями. Вместо создания *новых* степеней свободы, т. е. вместо увеличения ширины полосы или размерности пространства состояний, такие системы порождают итеративные самоподобные процессы (обладающие свойствами масштабной инвариантности), и эти процессы приводят к уменьшению разрешающей способности или распространению динамики траектории

на более широкое подпространство в пространстве состояний малой размерности [1)].

Такое поведение является результатом процесса, в ходе которого траектории в пространстве состояний нелинейной системы входят в область малой размерности этого пространства, обладающую тем свойством, что траектории, достаточно близкие к этой области, должны непременно войти в нее, а оказавшись внутри, соседние траектории разбегаются друг от друга. Чувствительность к малым изменениям в начальных условиях обусловливает вероятностный характер поведения такой в остальном простой детерминистической системы.

6.5.1. Теоретические соображения и общие замечания

Надежная обработка информации опирается на существование «хорошего» кода или языка: набор рекуррентных правил, *порождающих информацию* (например, апериодические строки символов) на данном иерархическом уровне и затем *сжимающих* ее на более высоком когнитивном уровне (рис. 6.30). Чтобы удовлетворить этим требованиям, язык (как хорошая музыка) должен в любой момент находить оптимальное соотношение между стохастичностью (разнообразием) и способностью обнаруживать и исправлять ошибки (память). Существует ли какая-нибудь динамика из известных ныне, которая могла бы промоделировать эту двоякую цель в пространстве состояний? На этот вопрос мы можем ответить утвердительно: такая динамика в принципе существует.

В предыдущих разделах мы занимались исследованием динамических систем, описываемых по крайней мере тремя связанными нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка с репертуаром режимов, включающим (при различных наборах значений управляющих параметров) множественные стационарные состояния, устойчивые периодические траектории (предельные циклы), торы и странные аттракторы (хаос). Превосходный обзор см. в работе Шоу [6.13].

Можно считать (разделяя общее убеждение всех физиков, согласно которому о явлении мы судим только по результатам наблюдений и измерений), что производство энтропии происходит, когда объем в пространстве состояний *расширяется* в ходе динамической эволюции нашей системы (тем самым разрешение ухудшается) и *сжимается* (что сопровождается диссипацией и, следовательно, появлением новой информации), когда объем,

---

[1)] Точнее говоря, в направлении с положительным показателем Ляпунова траектории системы разбегаются и тем самым порождают разнообразие; в направлении с отрицательным показателем Ляпунова система ограничивает разнообразие, тем самым порождая информацию.

занимаемый потоком в фазовом пространстве, *стягивается* к «компактному» эргодическому потоку — *аттрактору*. Точнее говоря, при значениях управляющих параметров, не связанных с возникновением хаоса, информация порождается физической системой через каскад *бифуркаций*, приводящих к нарушению

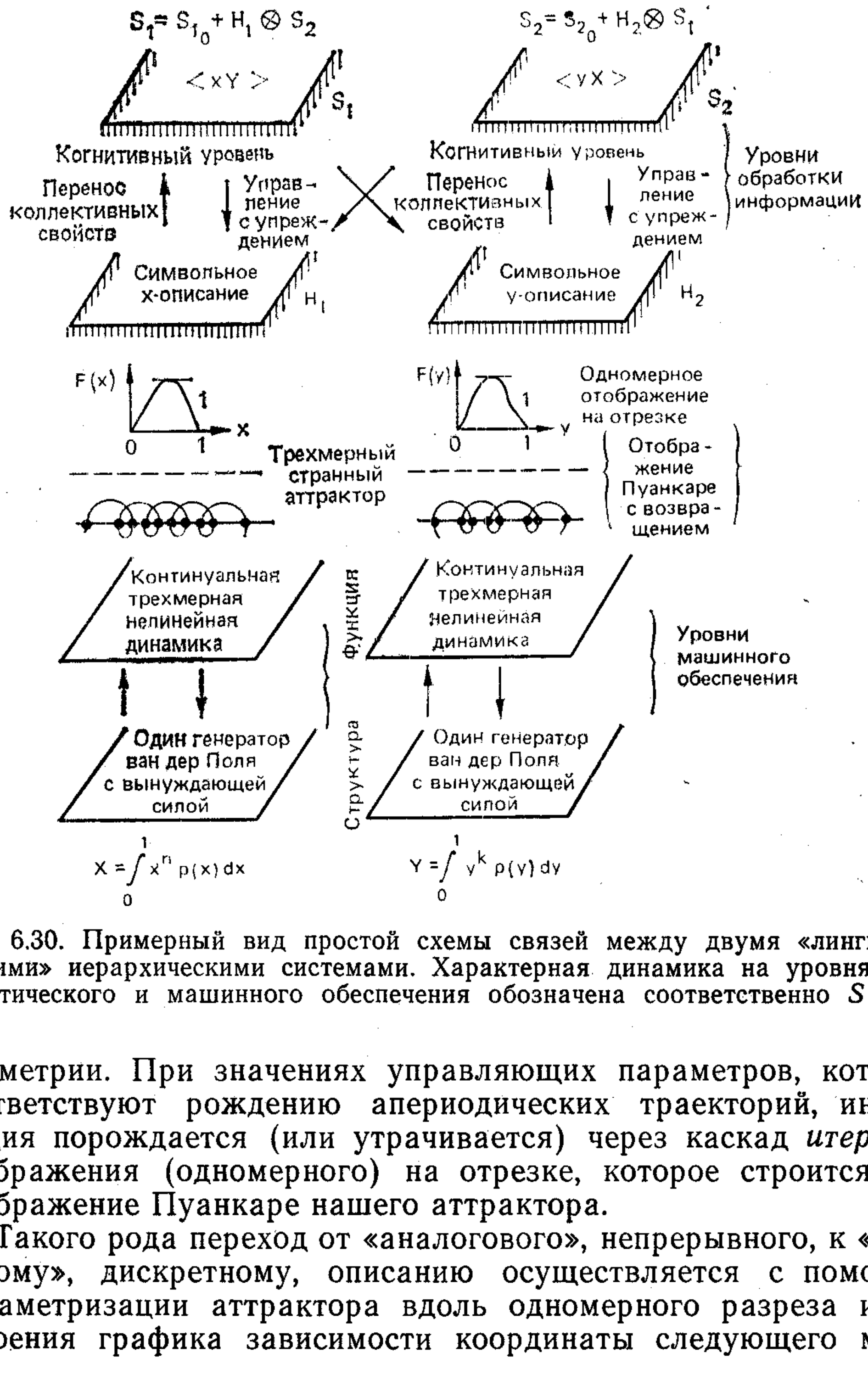


Рис. 6.30. Примерный вид простой схемы связей между двумя «лингвистическими» иерархическими системами. Характерная динамика на уровнях математического и машинного обеспечения обозначена соответственно S и H.

симметрии. При значениях управляющих параметров, которые соответствуют рождению апериодических траекторий, информация порождается (или утрачивается) через каскад *итераций* отображения (одномерного) на отрезке, которое строится как отображение Пуанкаре нашего аттрактора.

Такого рода переход от «аналогового», непрерывного, к «цифровому», дискретному, описанию осуществляется с помощью параметризации аттрактора вдоль одномерного разреза и построения графика зависимости координаты следующего места

пересечения траектории с разрезом от координаты места предыдущего пересечения. Мы получаем как бы «стробоскопическую» картину пересечений траектории плоскости сечения потока в (трехмерном) пространстве состояний. Возникает марковская цепь с числом состояний, зависящим от разбиения интервала [0, 1] (рис. 6.31, 6.32).

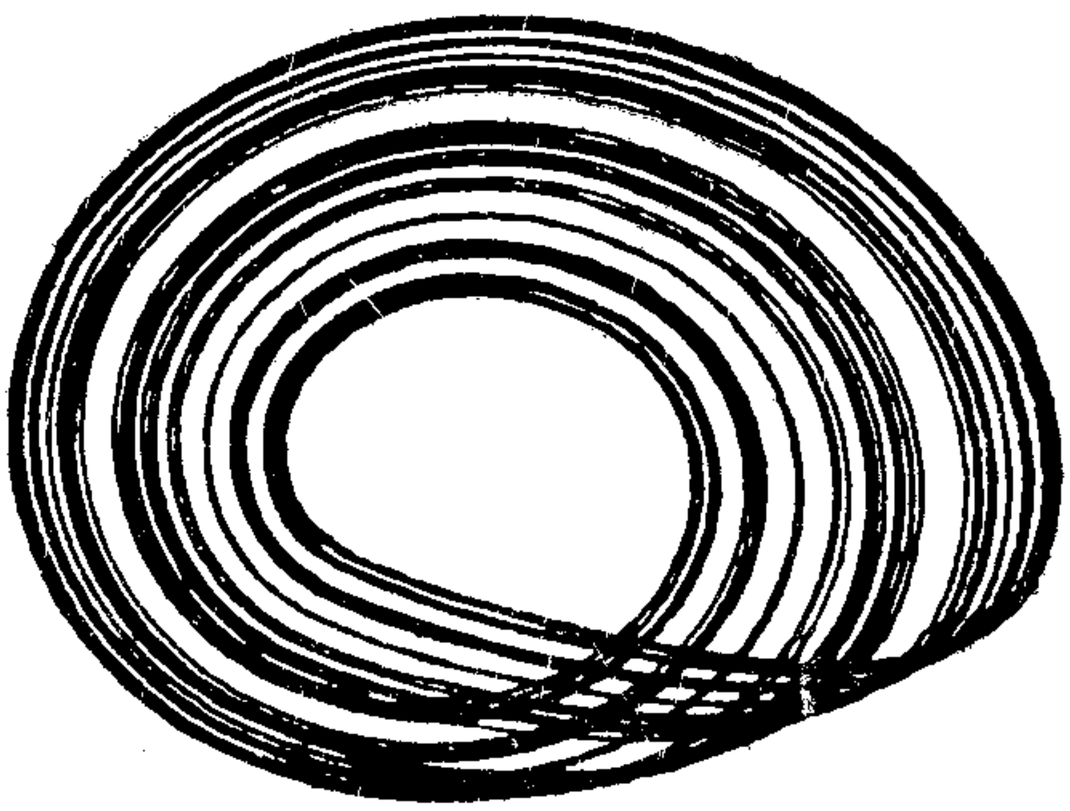


Рис. 6.31. Проекция трехмерного странного аттрактора на плоскость.

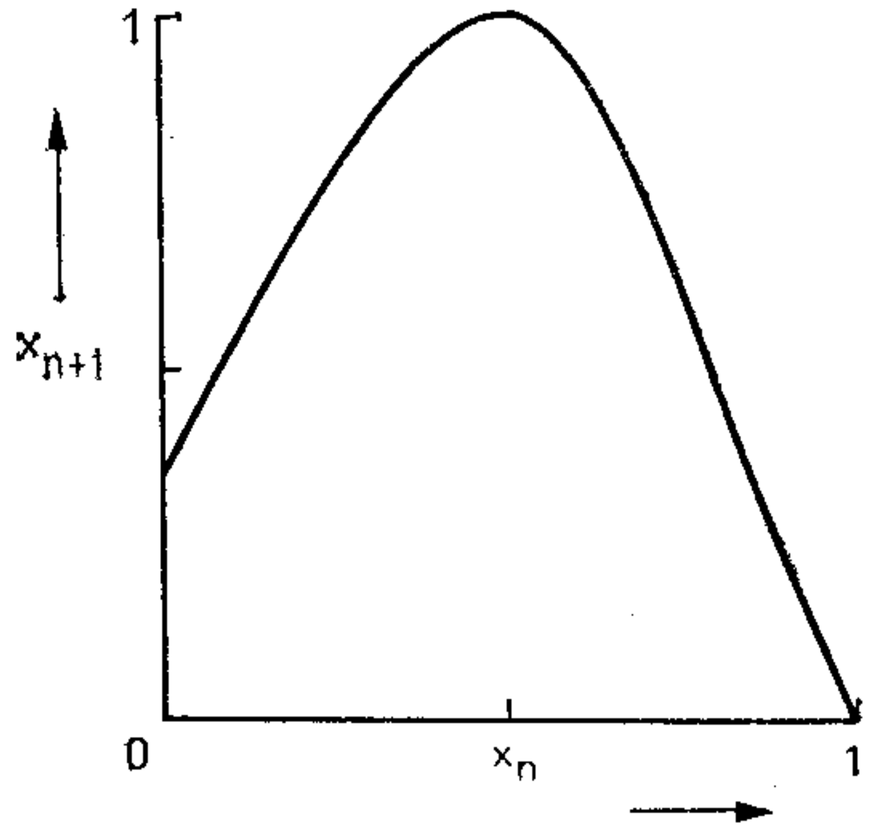


Рис. 6.32. Одномерное отображение Пуанкаре для трехмерного странного аттрактора.

Приращение наблюдаемой информации обычно определяется логарифмом по основанию 2 отношения числа состояний Σ, различимых до и после некоторого временного интервала:

$$\Delta I = \log_2 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_i} \sim \log_2 \frac{V_f}{V_i}, \tag{6.5.1}$$

где V_f и V_i — конечный и начальный объемы в пространстве состояний. Соответственно скорость производства (или утраты) информации задается соотношением

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{V}\frac{dV}{dt} \sim \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dt}. \tag{6.5.2}$$

Число различимых состояний $\Sigma(t)$, возникающих из некоторого начального объема в пространстве состояний, разумеется, *не обязательно* должно быть прямо пропорционально изменению объема, вызванному потоком.

Предположим, что число состояний, в которых может находиться система, растет со временем (а) полиномиально и (б) экспоненциально.

В первом случае

$$\Sigma(t) \sim t^n \tag{6.5.3}$$

и

$$\frac{dI}{dt} \sim \frac{n}{t}; \tag{6.5.4}$$

скорость производства информации в такой системе со временем стремится к нулю, поэтому поведение системы предсказуемо (сжимаемо) на протяжении бесконечно большого временно́го интервала в будущем.

Во втором случае

$$\Sigma(t) \sim e^{nt} \tag{6.5.5}$$

и

$$\frac{dI}{dt} \sim n;$$

такая система является непрерывным источником информации. Однако эта информация не содержится неявно в начальных условиях, какими бы они не были, а порождается самим потоком в пространстве состояний. Информация такого типа несжимаема, и обработка ее может выходить за рамки возможностей современных компьютеров [1]. Нас интересуют здесь неконсервативные компактные потоки, в которых может наблюдаться притяжение (стационарные состояния, предельные циклы или странные аттракторы).

Если размерность пространства состояний не меньше трех, то даже очень простые физические системы, например генератор с отрицательным сопротивлением и вынуждающей силой (исследованный недавно Уэдой и Акамацу [6.12] и моделируемый осциллятором ван дер Поля с периодическим возбуждением) могут порождать потоки, которые в компактной области пространства состояний непрерывно расширяют объемы по одним направлениям и сжимают их по другим направлениям. Это означает, что такие системы порождают информацию по одним переменным и сжимают или утрачивают ее по другим переменным.

Для любого данного одномерного отображения $y = F(x)$ на интервале плотность вероятности $P(x)$ найти орбиту в точке x можно оценить через последовательные итерации из рекуррентного соотношения

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{P_i(x_i)}{\left| \dfrac{dF^{(n-1)}}{dx} \right|_{x_i}}, \tag{6.5.7}$$

где $x_i = [F^{(n-1)}]^{-1}(y)$.

---

[1] Если систему (6.5.5) наблюдает другая когнитивная система со скоростью выборки меньше n, то система (6.5.5) непредсказуема. См. также разд. 6.5.6 относительно происхождения «конфликта» между двумя «наблюдающими» друг за другом когнитивными системами. Стратегия, позволяющая превзойти высокую скорость производства энтропии «противником», состоит в формировании «коллективных свойств» наблюдаемой системы. Когда и этот прием не приводит к успеху, между системами возникает *«междоусобный»* конфликт.

Здесь первая функция плотности вероятности $P(x)$ произвольна, например, $P_1(x) = \delta(x)$, а возникающая функция $P_2(y)$ соответствует исходной $P_1(x)$, преобразованной под действием отображения, и является функцией плотности вероятности первого приближения. Последующие итерации отображения дают все более точные приближения к «правильному» равновесному значению $P(x)$. Если отображение имеет устойчивое стационарное состояние или устойчивую периодическую орбиту, то $P(x)$ сходится к острому дельта-образному пику или к серии дельта-образных функций, сосредоточенных на точках, образующих периодическую орбиту.

Приращение информации ΔI за одну итерацию в данной точке x отображения определяется величиной

$$\Delta I = \log_2 \left| \frac{dF}{dx} \right| \tag{6.5.8}$$

и совпадает с производством энтропии при $|dF/dx| > 1$ и с производством или утратой энтропии при $|dF/dx| < 1$. Среднее изменение информации на всем интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ равно

$$\langle I \rangle = \int_0^1 P(x) \log_2 \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx \text{ [бит]}, \tag{6.5.9}$$

или, если $t(x)$ — промежуток времени между двумя последовательными пересечениями траектории с сечением Пуанкаре, то средняя скорость производства (или утраты) информации по времени равна

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = \int_0^1 \frac{P(x)}{t(x)} \log_2 \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx \text{ [бит/с]}. \tag{6.5.10}$$

Наконец, если начальные данные (отправная точка процесса) известны не точно, т. е. определены с некоторым априорным распределением плотности вероятности $P_0(x)$ из-за наблюдательных или внутренних флуктуаций, то мы получаем для информационного значения начального условия выражение

$$s_i = \int_0^1 P_0(x) \log_2 \left(\frac{P_0(x)}{P(x)} \right) dx \text{ [бит]}. \tag{6.5.11}$$

Таким образом, «память» процессора, измеряемая как время, в течение которого система перестает быть причинно зависимой

от начальных условий, определяется как

$$T = \frac{s_i}{\langle dI/dt \rangle} = \frac{\int_0^1 P_0(x) \log_2 \left(\frac{P_0(x)}{P(x)} \right) dx}{\int_0^1 \frac{P(x)}{t(x)} \log_2 \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx} \text{ [c]}. \qquad (6.5.12)$$

По истечении времени T система усиливает внутренний микроскопический шум, который из-за сильного разрешения, создаваемого итеративным процессом, не может более оставаться «размазанным» (см. также разд. 6.5.6).

Ясно, что при значениях управляющих параметров ниже порога наступления хаоса (в области, где существуют только стационарные состояния и периодические циклы) траектории в пространстве состояний только притягиваются, и соответствующие итерации отображения последования в сечении Пуанкаре на отрезке монотонно сходятся. При таких условиях $\langle I \rangle < 0$, т. е. система асимптотически ведет себя как сток информации.

При значениях управляющих параметров выше критического порога, где устанавливается сплошной устойчивый хаос, $\langle I \rangle > 0$ по одним переменным (источник информации) и $\langle I \rangle < 0$ по другим переменным (сжатие или утрата информации). Но довольно о взаимодействии производства и диссипации информации.

Динамическая модель живого языка должна воспроизвести и объяснить несколько ключевых «идиом» типа следующих: (а) способность языка к образованию абстракций (коллективных свойств), например кросс-корреляций между хранящимися в памяти прообразами (архетипами) и сигналами, поступающими из окружающей среды, и (б) извечный парадокс «ссылки на себя».

На первый взгляд могло бы показаться, будто синдром ссылки на себя имеет непосредственное отношение к «зацикливанию» в рассуждениях. Однако динамическим аналогом зацикливания является отображение множества на себя. В такого рода отображениях существуют только стационарные состояния и периодические орбиты, порождающие диссипацию информации. Поэтому сходство между зацикливанием и ссылкой на себя весьма поверхностно и основано на том, что зацикливание означает «останов» в обработке информации, а парадокс — своего рода «тупик» в работе когнитивной машины.

В действительности парадокс ссылки на себя уходит гораздо глубже; он связан с неспособностью языка дискриминировать высказывания, принадлежащие иерархически различным когни-

тивным уровням (смешение множества с множеством сигналов его элементов приводит к парадоксу Расселла). Опуская все подробности, кратко можно сказать, что парадокс ссылки на себя связан с «бедствием», вызванным нашей неспособностью сжать иррациональное число; суть его можно продемонстрировать на следующем лингвистическом примере: «Это предложение означает то, что это предложение означает».

В любом когнитивном процессе приемник предназначен для «разгадывания» кода приходящего сигнала, т. е. «сжатия» или максимально возможного абстрагирования, содержащегося в сигнале описания и достижения за счет этого более высокой степени предсказуемости. Достижение сжатия сводится к формированию коллективных свойств из переменных анализируемого сигнала. В области описания, удовлетворяющего уравнению для многочастичной функции распределения («основному уравнению»), это сводится к сжатию функции плотности вероятности $P(x)$ и переходу к приближению «среднего поля». Эта операция включает в себя «развязывание» моментов и в пренебрежении старшими моментами (дисперсией и т. д.) функции плотности вероятности по сравнению с ее первыми моментами. Интересно отметить, что функция плотности вероятности $P(x)$, например, логистического отображения, выведенная нами в разд. 6.3.5, при $a = 4$ имеет *гиперболическую* форму, при которой *медиана — наименее вероятное значение*. В таких случаях любое предсказание, основанное на «законе средних», неминуемо оказывается ложным.

Напомним (см. [6.19]), что *вблизи точек бифуркаций* начинаются переходы либо между стационарными состояниями, стационарными состояниями и предельными циклами, либо периодическими орбитами и хаосом, особенно между циклом периода 3 и хаосом; у функции плотности вероятности $P(x)$ появляются два или несколько «горбов» или она приобретает гиперболическую форму (и тогда медиана перестает быть наиболее вероятным значением). Все моменты функции плотности вероятности могут оказаться сравнимыми по величине и связанными (по существу, через нелинейность вероятностей перехода «*основного уравнения*»). Более высокий уровень возникает из этого уравнения при взятии последующих моментов. Мы видим, таким образом, что «макроописание» на уровне, где протекает когнитивная деятельность, требует столько же степеней свободы (моментов), сколько их необходимо при «микроописании» на более низком иерархическом уровне. Именно это обстоятельство имеют в виду, когда говорят, что динамика на двух последовательных иерархических уровнях перемешивается: описания, принадлежащие двум различным иерархическим уровням (вблизи точек бифуркации) становятся неотличимыми.

Наконец, в том случае, когда управляющие параметры допускают существование только стационарных состояний и периодических орбит, вдали от бифуркаций, режим среднего поля обеспечивает хорошее приближение, т. е. описания на различных иерархических уровнях — «микроуровне» переменных и «макроуровне» моментов — различны. Это обусловлено малым расплыванием функции плотности вероятности относительно среднего.

Тем не менее в подобных случаях возникает застой, так как в близкой окрестности аттракторов указанных выше двух типов информация не производится и не утрачивается. «Машина» просто останавливается, как это происходит, например, при вычислении цифр (знаков) рационального числа. Продолжение такого процесса привело бы (в буквальном смысле) к зацикливанию. С другой стороны, когда управляющие параметры допускают возникновение непрерывного самоподдерживающегося хаоса, функция плотности вероятности расплывается (и покрывает узкие, близкорасположенные полосы или весь интервал) и в зависимости от отображения может выглядеть совершенно иррегулярно. Такое поведение функции плотности вероятности может также свидетельствовать о нарушении режима среднего поля. Таким образом, несмотря на то, что странный аттрактор одновременно производит и сжимает информацию для различных переменных, непрерывный хаос, по-видимому, не является идеальной моделью лингвистической системы.

Предпочтение скорее следовало бы отдать «перемежающемуся» режиму, при котором хаос, так сказать, неустойчив, вследствие чего открываются возможности спонтанного чередования растяжения и сжатия функции плотности вероятности. К счастью, репертуар упоминавшихся выше простых динамических систем включает в себя те два различных типа поведения, о которых мы только что говорили, а именно: (а) метастабильный хаос и (б) перемежаемость.

Под *метастабильным хаосом* (реализующимся в некоторых окнах пространства управляющих параметров) мы понимаем переходный режим, время затухания которого имеет экспоненциальное распределение. После начального периода иррегулярных колебаний почти каждая траектория выходит на периодическую орбиту. В общем случае средняя продолжительность хаотического режима не велика и составляет обычно около 50 итераций, но «методом проб и ошибок» можно найти такие начальные точки, для которых хаотический период длится гораздо дольше.

В других ситуациях режим метастабильного хаоса может переходить в стационарное состояние или в другой режим, также хаотический, но обладающий существенно другими свой-

ствами и, следовательно, другой функцией плотности вероятности и занимающий другой подынтервал всего аттрактора. Возьмем и такой случай, когда новый режим в свою очередь оказывается метастабильным и переходит в конце концов в третий режим или возвращается к исходному режиму.

Под *перемежаемостью* (реализующейся в каких-то других окнах пространства управляющих параметров той же динамической системы) мы понимаем в основном физическую неспособность системы достичь идеального захвата или устойчивой точной синхронизации, например, фазы диссипативного нелинейного релаксационного осциллятора и фазы внешнего периодического возбуждения.

В тот момент, когда предельный цикл в пространстве состояний должен замкнуться, вмешивается конкурирующий процесс и разрушает регулярную траекторию; на временном интервале, вероятнее всего либо слишком коротком, либо слишком длинном, хаотическое движение сводится к широкополосному шуму. Затем возникает (другой) предельный цикл, и все начинается сначала. Через некоторое время происходит новая «вспышка» — переходит к «турбулентному хаосу», после чего снова образуется другой предельный цикл и т. д. Временная последовательность смены хаотических и регулярных режимов носит случайный характер. Соответствующая функция плотности вероятности относительных времен, которые система проводит в этих двух режимах, оказывается гиперболической [6.20].

Резюмируя, мы можем утверждать, что в окрестности стационарных состояний и периодических орбит «когнитивная машина» останавливается. Возникает зацикливание, но функция плотности вероятности — узкая, и режим среднего поля дает вполне удовлетворительное приближение: абстракции формируются безупречно.

В окрестности бифуркаций «стационарные состояния $\rightleftharpoons$ предельные циклы $\rightleftharpoons$ хаос» когнитивная машина заходит в тупик: функция плотности вероятности «взрывается», режим среднего поля перестает действовать, и абстракции (т. е. кросс-корреляции) не могут формироваться однозначно. Система на уровне коллективных свойств турбулентна в том смысле, что требует для своего описания столько же степеней свободы, сколько их было на уровне индивидуальных (неколлективных) переменных.

В самоподдерживающемся устойчивом хаосе ситуация не обязательно такая же, ибо информация производится по одним направлениям и сжимается по другим. Тем не менее перспектива широкой функции распределения вероятности с многими пиками в какой-то мере оправдывает нежелание принять предлагаемую модель в качестве надежного процессора. Нам ка-

жется, что наилучшей моделью такого процессора был бы режим перемежаемости и метастабильного хаоса.

Ниже мы намереваемся обсудить эту модель на частном примере — электроэнцефалограммы (ЭЭГ). Если теория, изложенная в разд. 6.5.2, имеет смысл, то мы можем пойти дальше и предложить серию экспериментов. При весьма ограничительных условиях по записи временного ряда ЭЭГ можно построить грубую картину предполагаемой структуры аттрактора в фазовом пространстве (при малой размерности — см. [6.21]).

Начнем с временного ряда, получаемого при выборке одной координаты $x(t)$ (из фрагмента записи ЭЭГ), и вычисления запаздывающих значений $x_1(t-\tau)$ и $x_2(t-2\tau)$, или при $\tau \to 0$ производных по времени $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$, если они независимы (их зависимость или независимость мы устанавливаем, вычисляя условные вероятности $P(x/x_1, x_2; t)$). Используя полученные значения переменной и переменных с запаздыванием как независимые координаты x, y, y, мы можем затем восстановить картину в трехмерном пространстве состояний эволюции во времени той системы, из которой производилась выборка [1)].

Проделав все это, мы можем затем построить множество одномерных отображений последования. По этим отображениям мы определим информационные размерности аттрактора в терминах вычисленных значений множества положительных показателей Ляпунова, т. е. производство информации $\langle I \rangle$, определяемое по формуле (6.5.9), по различным направлениям [6.22].

Таким образом, в физиологической лаборатории с весьма богатыми клиническими возможностями группа экспериментов может попытаться исследовать и установить соотношения между *поведенческими состояниями* (различными формами ЭЭГ) и *формой и размерностью* соответствующего режима «когнитивного процессора», ответственного за эти состояния.

6.5.2. Приложение. Электрическая активность головного мозга — должна ли она быть хаотической?

> «Музыка — это попытка, которую мы предпринимаем, чтобы объяснить себе, как работает наш мозг».
>
> *Льюис Томас.* «Медуза и улитка».

Такие структуры, как головной мозг, возникли в процессе обработки сигналов, первоначально — минимизации «ошибки слежения», на конкурентной основе. Эти системы отличаются

[1)] В том случае, если информация о размерности пространства состояний отсутствует, мы используем все возрастающее число переменных x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, ... до тех пор, пока непрерывная динамика не достигнет насыщения.

большой сложностью и в то же время сильно «неупорядочены». Хорошим тому примером может служить запись функционирования коры больших полушарий (человеческого) мозга.

На энцефалограмме (ЭЭГ) отчетливо видны участки, соответствующие умственной деятельности или повторяющимся эпизодам быстрого сна (быстрое движение глаз). С другой стороны, стохастически регулярные ЭЭГ характерны для дремлющего (релаксирующего) человека, сильно синхронизованные — для эпилептика и в обоих случаях свидетельствуют о том, что мозг выступает в роли процессора, плохо справляющегося с обработкой информации.

Согласно предложенной нами модели, смены поведения порождаются бифуркациями, запускающими таламокортикальный нелинейный ритмоводитель (осциллятор), который переключает режим с неустойчивого предельного цикла на странный аттрактор, или, точнее, с *перемежаемости* на *метастабильный хаос* и наоборот. Мы намереваемся показать, что характеристики ЭЭГ не случайны, а неизбежны и даже необходимы и поэтому функционально значимы.

Информационный процессор (аналоговый или цифровой) представляет собой когнитивное устройство, которое выявляет и отождествляет параметры неизвестного сигнала, или «образа», обычно искаженного тепловым (равновесным) шумом (белым или цветным, аддитивным или мультипликативным). Для выполнения этой задачи процессор должен выполнить три различные операции в такой последовательности.

а) Произвести «изнутри» самого себя широкий набор разнообразных (пространственно-временных) образов («шаблонов»).

б) Установить кросс-корреляцию (т. е. «сжать») каждый из этих образов с поступающим сигналом (см. также разд. 7.2.4).

в) На основе заранее установленных критериев «проверки гипотез» или «консенсуса» выбрать или отфильтровать образ, дающий наибольшую кросс-корреляцию с неизвестным сигналом, или триггером. (Фильтрация обычно нелинейна, чтобы создать и усилить контраст, который делает более четкими контуры и тем упрощает распознавание. Селектирующая группа церебральных нейронов (и машина «Ксерокс») действует именно так.

При слежении за сигналом существенное значение имеет измерение времени живым организмом — так называемый «тайминг». [Простейшая следящая система, используемая в технике связи, — это петля синхронизации по фазе.] Это означает, что существование самоподдерживающихся нелинейных диссипативных осцилляторов (т. е. элементов с притягивающим поведе-

нием) на уровне «аппаратурной реализации» процессора является предпосылкой когнитивной операции.

Функционально устойчивые осцилляторы в противоположность статичным устройствам (типа переключателей с двумя состояниями «включено» — «выключено») обладают рядом эволюционных преимуществ, а именно могут служить (а) датчиками времени, (б) динамическим хранилищем информации (динамической памятью) и при запуске с помощью очень простых раздражителей выдавать (в) необычно широкий спектр сложных схем поведения.

Наконец, осцилляторы, о которых идет речь, должны обладать асимптотической устойчивостью: задачи восприятия и когнитивной деятельности (сопряженные в силу синхронизации или сжатия с диссипативными, т. е. необратимыми, процессами) не могут быть выполнены гамильтоновыми (обратимыми) исполнительными подсистемами, хотя гамильтоновы осцилляторы Дуффинга оказываются весьма эффективными при переключении с одной схемы поведения на другую (этим и объясняется универсальность так называемых генераторов ван дер Поля в технике связи).

Экономичность, несомненно играющая важную роль в борьбе за выживание, требует, чтобы локально порождаемые динамические структуры/аттракторы нашего процессора не существовали в «готовом виде», а возникали после запроса (запуска поступающими извне стимулами) из некоторого «запаса» динамических элементов в соответствии с некоторыми основополагающими весьма простыми рекуррентными *правилами* (алгоритмами или «схемами») комбинирования этих элементов.

Ниже мы приводим в общих чертах динамическую модель процессора, действующего в нашем мозгу. Отдельные нейронные осцилляторы в коре головного мозга образуют упомянутый выше запас динамических элементов. С другой стороны, таламокортикальный осциллятор является адаптивным элементом, выполняющим две различные операции.

а) Он выполняет функцию ритмоводителя, приводящую к образованию внутренних синхронизованных, или когерентных (пространственно-временных), нейронных структур. Обеспечивая когерентность таких нейронных групп, ритмоводитель помогает им подниматься над уровнем окружающего теплового шума и выделиться среди сосуществующих соседних нейронных образований за короткие интервалы времени.

б) Он создает *рекуррентные правила*, управляющие последовательностью появления этих когерентных структур в соответствии с некоторой мультиплексной схемой с разделением времени.

6.5.3. Экспериментальные данные из исследований ЭЭГ

В последние годы очень большое число исследований (см. [6.23—6.26], там же приведены ссылки на другие работы) было посвящено электрической активности (человеческого) мозга, активности, как спонтанной, так и стимулированной. Были выдвинуты гипотезы о механизмах и функциональной значимости (если таковая существует) ЭЭГ. Следует особо подчеркнуть с самого начала, что мозг не является обычным процессором, занимающимся обработкой сигналов: из-за чудовищной избыточности мозга различные отделы всей системы пронизаны «шумами» различного рода, выполняющими функции своего рода триггеров, настроенных на различное время [6.27] и принимающих различное «долевое участие» в катализе тех или иных метаболических процессов.

Мнения различных экспериментаторов в настоящее время сходятся по некоторым основным вопросам. Перечислим те пункты, по которым достигнуто согласие.

а) ЭЭГ есть суммарный эффект носящих характер незатухающих колебаний элементарных «медленных» активностей (плавных субпороговых потенциалов постсинаптических мембран), сосредоточенных в весьма малых объемах ткани коры (головного мозга) непосредственно под регистрирующим электродом (отведение с волосистой части головы).

б) Для образования и формы ЭЭГ несущественны всплески, распространяющиеся вдоль осей отдельных нейронов. Эти всплески создают лишь нелинейную связь между элементарными генераторами (через пресинаптическое возбуждение и выбор гормона-нейромедиатора в синаптическую щель).

в) Между элементарными нейронными осцилляторами и ЭЭГ в целом не существует устойчивых фазовых соотношений. Амплитуда внутриклеточных осцилляторов составляет ~ 50 мВ, амплитуда ЭЭГ в целом ~ 100 мкВ. Спектральные характеристики нейронных осцилляторов и ЭЭГ более или менее тождественны (узкополосный шум в диапазоне $\sim 0{,}3$—45 Гц). С точки зрения *статистических характеристик* амплитуда функции плотности вероятности каждого элементарного осциллятора имеет *негауссовское* распределение [6.23], в то время как амплитуда функции плотности распределения ЭЭГ имеет гауссовское распределение в «праздном» режиме, но оно становится более или менее асимметричным на стадии быстрого сна (быстрое движение глаз) и при выполнении (контролируемых) интеллектуальных заданий.

Таковы «твердо» установленные факты. Приводимые ниже данные по существу являются следствиями из приведенных выше фактов и дальнейших экспериментальных результатов, которые не являются общепризнанными.

Фундаментальный вопрос состоит в следующем: что представляет собой ЭЭГ? Активность синхронизованных (взаимно синхронизованных) групп нейронных осцилляторов или результат суммирования сигналов со статистически независимыми фазами? Обе эти альтернативы были подвергнуты интенсивной экспериментальной проверке. Большинство современных исследователей разделяют компромиссную точку зрения [6.24] и склонны считать, что ЭЭГ может быть порождена посредством последовательной и перемежающейся синхронизации отдельных сравнительно небольших групп кортикальных нейронов (не обязательно из одного и того же участка коры мозга), каждая из которых образует небольшое (1—10 %) подмножество всей популяции нейронов. Кроме того, мы можем регистрировать активность только той конкретной подгруппы нейронов, которая оказывается синхронизованной в данный момент и, следовательно, достигает уровней напряжения, доступных экспериментальному обнаружению (выше ~5 мкВ).

Некоторые данные свидетельствуют о том, что такая последовательная синхронизация, или, более общо, установление дальнодействующей пространственно-временной когерентности среди элементов отдельных подгрупп нейронов [6.25], осуществляется посредством специфических групп нейронов в таламусе, выполняющих функцию ритмоводителя (передающих сенсорные сигналы в кору). Таламокортикальные и кортикоталамические петли обратной и упреждающей связи (последняя заканчивается в неспецифических таламических ядрах, функциональное назначение которых пока остается невыясненным) были подробно исследованы экспериментально и нанесены на карты [6.26]. Помимо сказанного принято считать, что эти ритмоводительные петли ответственны за процесс сканирования и выборки тех или иных значений из непрерывных сигналов, что позволяет последовательно формировать и разрушать соотношения, упорядочивающие фазы между нейронами, образующими отдельные подгруппы.

Такой механизм позволяет на неокортикальном уровне мультиплицировать подлежащую обработке информацию с разделением времени. Поэтому, несмотря на то, что ЭЭГ кажется непрерывным случайным процессом, в действительности ее можно рассматривать как временную последовательность дискретно индуцированных потенциалов, каждый из которых имеет среднюю продолжительность 100—300 мс. Синхронизация должна усиливать (по одной за один раз) структуры специфических групп кортикальных нейронов, обретающих после этого способность к обработке и хранению на коллективной основе специфические сенсорные модальности через каскады нейронных петель пре/постсинаптическая мембрана $\rightleftarrows$ цитоплазма $\rightleftarrows$ ядро.

6.5.4. Модель

Построим теперь модель «таламокортикального ритмоводителя» как диссипативного незатухающего (релаксационного) осциллятора с большой амплитудой, который в отсутствие входного сигнала из окружающей среды время от времени совершает «свободный пробег» по неустойчивому предельному циклу с основной («эталонной») частотой ~ 10 Гц («альфа-ритм»). Это означает, что наш осциллятор имеет какое-то внутреннее смещение, которое и вызывает неустойчивость его автоколебаний.

Насколько сильно такой осциллятор может синхронизовать группы «меньших» осцилляторов, мы в общих чертах показали в разд. 4.8.2. Если наша гипотеза верна, то соответствующая ЭЭГ должна обладать и некоторой псевдопериодичностью, и некоторой стохастичностью в том смысле, что амплитуды смежных сегментов такой активности (каждый сегмент соответствует некоторому данному стационарному состоянию/структуре на кортикальном уровне, образованному векторной суммой амплитуд синхронизованных нейронных осцилляторов соответствующего подмножества коры мозга) статистически не коррелированы. (Оптимальная выборка из случайного процесса производится через случайные интервалы времени: статистическая независимость означает, что выбранные модальности, «воплощенные» в подмножествах синхронизованных нейронов, не должны перекрываться.)

Насколько можно судить, в нашей модели все так и есть: амплитуды функции плотности вероятности получаемой ЭЭГ подчиняются нормальному распределению, как и следует ожидать, исходя из центральной предельной теоремы (или «закона средних»)[1)].

Рассмотрим теперь, что может произойти в режиме быстрого сна (быстрое движение глаз) или выполнения интеллектуального задания: информация поступает по восходящей ветви системы ретикулярной формации или по другим каналам периферической нервной системы, переносящим приходящие извне или изнутри сенсорные входные сигналы, распознаваемые затем корой мозга. На наш таламокортикальный осциллятор воздей-

---

[1)] Кто-нибудь из читателей может усмотреть здесь противоречие: действительно, если постулируемый механизм есть перемежаемость I, то амплитуды функции плотности вероятности должны иметь не гауссовское, а гиперболическое распределение. Не следует забывать, однако, что процессор разделяет время не между *одним* предельным циклом и иррегулярным движением, а между *многими* неотличимыми модальностями, связанными с предельным циклом. Именно поэтому экспериментально полученная функция плотности вероятности представляет собой среднее по ансамблю от отдельных гиперболических распределений и вполне может быть гауссовской.

ствует флуктуирующий входной сигнал, и при значениях управляющего параметра, превышающего некий порог, возникает каскад бифуркаций. Предельный цикл, на который выходит в режиме перемежаемости осциллятор, исчезает, и траектория осциллятора переходит на странный аттрактор. Иначе говоря, устанавливается режим метастабильного хаоса; при сканировании кортикальных нейронных подгрупп он проявляется в «спазматических» и непериодических колебаниях.

Наша гипотеза подтверждается давно установленными экспериментальными данными [6.28]. Возрастающее возбуждение восходящей ветви ретикулярной формации приводит к поляризации специфически «ритмоводительных» ядер таламуса, тем самым прерывая их выборочную функцию на временны́е интервалы, продолжительность которых согласуется со степенью возбуждения, т. е. интенсивностью стимулирования и, следовательно, *скоростью* передачи информации от окружающей среды. Таким образом, при возбуждении производимая корой мозга выборка ритмоводительных таламических ядер переключается с режима перемежаемости на последовательный, или *секвенциальный*, режим. Мы наблюдаем установление марковской цепи с различными вероятностями u_i на стационарное синхронизованное состояние i (внутренняя структура) — цепи, порождаемой матрицей вероятностей перехода P_{ij} между последовательными состояниями/структурами. Следовательно (и этот момент является решающим), время «удержания», в течение которого кортикальный процессор находится в модальности i, зависит от времени «прерывания», на которое настраивает сканирующий ритмоводитель в i-й модальности информация, поступающая на его вход. Это время обычно (но не всегда) возрастает с увеличением скорости, или частоты, поступления входных сигналов.

Данные, подтверждающие эту точку зрения, взяты из анализа распределения вероятности амплитуд на ЭЭГ, указывающего на смещение от гауссовского распределения к асимметричным формам при выполнении пациентом интеллектуальных заданий [6.23]. Однако мы опасаемся, что выдвинутая в работе [6.23] интерпретация, согласно которой асимметрия функции плотности вероятности отражает «возрастающую степень кооперативности среди нейронных генераторов», ошибочна: изменения связей между нейронными осцилляторами, которые и определяют структуру, могут быть обусловлены различными структурами; они приводят *только* к изменению (усилению или ослаблению) степени когерентности той структуры, которой принадлежат, но, разумеется, не имеют отношения к алгоритму мультиплицирования входных сигналов с разделением времени или стратегией переключения *с одной структуры на другую*.

Наблюдаемую асимметрию мы интерпретируем как признак статистической линейной корреляции ($P_{ij} \neq 0$), или марковости, *между* последовательными выборочными значениями амплитуд ЭЭГ, т. е. между последовательными синхронизованными нейронными состояниями, каждое из которых кодирует одну сенсорную модальность. При такой линейной взаимозависимости центральная предельная теорема не выполняется.

Предположим, наконец, что степень возбуждения восходящей ветви ретикулярной формации или средняя скорость подачи информации возрастает еще больше. Мы предполагаем, что в таких случаях процесс сканирования кортикальных групп либо прекращается (осциллятор «гаснет»), либо скорость сканирования возрастает в соответствии со степенью возбуждения. В пределе мы можем считать, что *все* подгруппы кортикальных нейронов синхронизованы одновременно, как это происходит при эпилептических припадках. Мы не располагаем надежными экспериментальными данными, и у нас заведомо нет надлежащей теории. Тем не менее последние численные эксперименты [6.29] свидетельствует о том, что, когда *связь* между окружающей средой и осциллятором с предельным циклом уже в хаотическом режиме становится «надкритической», может произойти *обратный переход* от хаотического режима к автоколебательному (с предельным циклом). (Такой же обратный переход может происходить и под действием внешнего шума, см. разд. 6.5.5.)

Все эти указания имеют непосредственное отношение к возможному поведению нашего таламокортикального ритмоводителя, который при интенсивном (световом или акустическом) входном воздействии на основной частоте или *на частоте одной из гармоник* может перейти из хаотического в строго синхронизованный режим с такой большой амплитудой колебаний, что позволяет распространить синхронизацию одновременно на большое число кортикальных нейронов.

В заключение мы попытаемся оценить, почему когнитивная система *может* находиться в хаотическом режиме, чтобы выполнить обработку сигналов более эффективно. Ответ на наш вопрос лежит в двух областях: (а) времени и (б) частоты.

а) Создавая марковское мультиплицирование с разделением времени, система получает возможность разделять сенсорные модальности/аттракторы и сопоставлять каждой из этих модальностей интервал времени при обработке, соизмеримый с скоростью подачи сенсорных сигналов на вход.

б) «Турбулентный хаос» (неравновесный шум малой размерности) как способ действия таламокортикального ритмоводителя при слабом возбуждении содержит широкий спектр временных (и пространственных) частот. Он может ограничивать

«пятна» постсинаптических функциональных областей в коре и создавать когерентные структуры, которые могут соответствовать широкому репертуару поступающих пространственно-временных структур.

Если говорить конкретно, то *когнитивная деятельность* проявляется в коре мозга как результат процесса установления соответствия между *парами* пространственно-временных структур, каждая из которых содержит большое число элементарных единиц (нейронов). В каждой паре одна структура (общая для всех пар) есть та информация, которая неизвестна; она содержится в приходящих входных сигналах и закодирована в них в виде последовательности импульсов, идущих от периферической нервной системы, либо (если информация поступает из других участков центральной нервной системы) закодирована в последовательностях макромолекулярных (нейромедиаторно-гормональных) выбросов из пресинаптических окончаний. Вторая структура в паре — это одна из структур/аттракторов, порождаемых процессором; она является заранее хранимой пространственно-временной «мозаикой», запечатленной в множестве частично синхронизованных потенциалов постсинаптических мембран или пространственно-временной структуры рецепторов постсинаптических мембран.

Связь, или кросс-корреляция, между двумя структурами в каждой паре осуществляется динамически за счет обмена энергией между парами равных или близких частот (ω_i, ω_j) обоих спектров и оценивается количественно функцией когерентности

$$\mathrm{coh}_{ij}(\omega) = \frac{\varphi_{ij}(\omega)}{\sqrt{\varphi_i(\omega)\,\varphi_j(\omega)}}, \qquad (6.5.13)$$

где $\varphi_{ij}(\omega)$ — кросс-спектр, а $\varphi_i(\omega)$, $\varphi_j(\omega)$ — автоспектры структур, образующих пару.

Результат кросс-корреляции по фазе и амплитуде определяет «степень совпадения» («узнавания») между поступающей структурой и структурой, хранимой заранее, или между неизвестной и ожидаемой структурами. Какой механизм в человеческом мозге решает, какая из функций когерентности доминирует над остальными? По-видимому, таким механизмом снова является ретикулярная формация: некоторые правдоподобные способы нелинейной фильтрации были обсуждены в разд. 4.7.6.

В нашей модели мы приписали синхронизацию между индивидуальными нейронными осцилляторами (и тем самым образованием аттракторов в коре мозга) только таламокортикальной ритмоводительской активности. Несомненно, существуют и другие, возможно, не менее важные, очень сложные механизмы распространения *дальней* пространственно-временной когерентности

между кортикальными нейронами — механизмы, которые до сих пор (за редкими исключениями [6.30]) привлекали очень мало внимания. Мы упомянем лишь в этой связи возможную роль кортикального межклеточного электролита.

По-видимому, межклеточная жидкость содержит большие по объему гидратированные цепи сложных молекул, связанных с мембраной (мукополисахаридов и мукопротеинов). Удаление кальция приводит к гидратации этих молекул и сопровождается развертыванием их в рыхлую гидратированную цепь. Восстановление кальция обращает этот процесс, происходит дегидратация молекул и свертывание молекулярной цепи с уменьшением объема примерно на пять порядков.

Существование слабых электромагнитных полей, по-видимому, сильно влияет на движение ионов Ca^{+2} в межклеточном электролите, а также на импеданс жидкости. Тем самым перед нами открываются новые возможности понимания способов установления и управления дальней когерентностью в головном мозге и тем самым воздействия на образование аттракторов в коре, а именно с помощью случайных внешних электромагнитных полей.

6.5.5. Двойственная роль перемежаемости в обработке информации

«Перемежаемость» моделирует способ действия сканирующего устройства в головном мозге в отсутствие внешнего возбуждения. В основе перемежаемости лежит физическая неспособность системы достичь (в определенных интервалах управляющих параметров) идеальной когерентности или устойчивой, полной синхронизации по фазе (см. также приложение В) между диссипативным нелинейным (релаксационным) осциллятором и гармонической вынуждающей силой.

Когда предельный цикл в пространстве состояний [разность фаз $\varphi(t)$ — мгновенная частота $\dot{\varphi}(t)$] почти смыкается, в игру вступает конкурирующий процесс, который вмешивается и разрушает цикл; на короткое время он создает в пространстве состояний хаотическое движение — широкополосный шум, после чего вновь возникает предельный цикл, и все повторяется. Через некоторое время регулярный режим снова «взрывается», уступая место «турбулентному хаосу», на смену которому приходит другой предельный цикл и т. д. [6.9]. Моменты времени, когда происходит смена режимов, распределены случайно.

Предположим, что при определенных значениях управляющих параметров происходит идеальная синхронизация. В этом случае описанная выше последовательность — *поглощающая:* сканирующее устройство достигает состояния/модальности, из которого не может более выйти. Процесс сканирования обры-

вается, и процессор оказывается запертым в *одной* сенсорной модальности, или, иначе говоря, выдает *стереотипно* один и тот же символ. Через некоторое время наступает привыкание, и обработка информации прекращается, сводя пропускную способность канала к нулю. Кроме того, пропускная способность такого «мозга» ухудшается также и тогда, когда взаимодействие между отдельными модулями (из-за перекрытия, вызываемого ошибками в функционировании сканирующего механизма) достигает критического уровня (экспериментальное обоснование см. в работе [6.31]).

Таким образом, механизм перемежаемости, т. е. срыва с предельного цикла вблизи порога синхронизации, действует действительно, как «бог из машины», и позволяет сканирующему элементу продолжать функционировать, поскольку система получает возможность обрабатывать *по одной структуре за один раз*, избегая динамического застопоривания на какой-то одной модальности.

Но есть у перемежаемости и «слабая сторона», о которой мы до сих пор не подозревали. Не исключено, что именно эта слабая сторона имеет более фундаментальное значение, чем те «сильные стороны», на которых было сосредоточено наше внимание. Речь идет о так называемой проблеме сжимаемости, а именно о нахождении «минимальной программы», минимального числа битов или степеней свободы, которые позволяют однозначно восстановить данную последовательность символов или структуру.

Безграничная сжимаемость теоретически означает уменьшение числа степеней свободы структуры с $N \gg 1$ до 1. Предположим, что носителем данной модальности являются N взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Мы можем сократить описание и рассматривать взаимодействующие фазы этих осцилляторов как степени свободы. Идеальная сжимаемость (полная когерентность) означала бы установление между этими фазами ограничивающих рекуррентных отношений типа

$$|\varphi_\varkappa - \varphi_\lambda| < \Phi_{\varkappa\lambda} \ll 2\pi \quad (\mathrm{K},\ \lambda \in 1, \ldots, N), \qquad (6.5.14)$$

где все ограничительные пределы $\Phi_{\varkappa\lambda} \to 0$. Однако из-за явления перемежаемости равенства $\Phi_{\varkappa\lambda} = 0$ могут выполняться *не* для всех пар $\varkappa$, λ, поэтому мы заключаем, что реально предел сжимаемости устанавливается динамикой перемежаемости. Вопрос о том, будет ли такой предел универсальной постоянной, требует дополнительного математического анализа, равно как и вопрос о том, можно ли говорить о соотношении неопределенности для пропускной способности канала процессора и степени сжимаемости одной (сенсорной) модальности как сопряженных параметров.

6.5.6. Первопричина конфликта в сообщающихся иерархических системах

Мы постулируем, что между двумя сообщающимися (символическими) динамическими системами (рис. 6.28) конфликт (побочный продукт связи) возникает как дилемма взаимно согласованного избыточного производства энтропии. Каждая система стремится к «самоорганизации» за счет своего партнера.

Рассматриваемые нами иерархические системы обладают *сложностью* и *организацией*. Мы определили сложность как минимальное число битов, необходимое для восстановления данной системы. Организацию мы определили как способность *сжимать* информацию — способность, в свою очередь порождаемую каскадом бифуркаций, приводящих к нарушению симметрии, или (после наступления хаоса) каскадом итераций, повышающих разрешающую способность отображения на интервале. Под «самоорганизацией» мы понимаем здесь функцию «языка» когнитивного устройства, сжимающую сложность «противника» (окружающей среды), тем самым давая минимальные алгоритмы, редуцирующие и предсказывающие поведение других систем.

В любой «игре» такого рода каждый участник стремится «разгадать» код своего противника, «сжимая» как можно больше описание партнера. Таким образом, достижение сжимаемости (или выход на когнитивный уровень) эквивалентно формированию *коллективных свойств* из переменных исследуемой системы или (в области макроописания в терминах иерархии моментов «основного» уравнения (для многочастичной функции распределения)) сжатию функции плотности распределения для достижения режима среднего поля (см. ниже в этом разделе).

Большинство систем, встречающихся в науках, так или иначе связанных с информацией (например, в лингвистике), содержат многочисленные иерархические петли обратной связи, что неизбежно делает их содержащими «ссылку на себя». Если такие системы не обладают «замкнутостью» или логической непротиворечивостью, то они парадоксальны. «Истинность» таких систем (если она существует) ассоциируется с их самосогласованностью, а эта характеристика влечет за собой существование устойчивых аттракторов в той итеративной и рекуррентной системе, которую мы называем суждением с ссылкой на себя. Напрашивается вывод о том, что логика (бывшая до сих пор статическим понятием) может быть реализована динамически с эволюционной устойчивостью. Несовместность *полноты* и *самосогласованности* любой замкнутой аксиоматической (логической) системы проявляется как ее неспособность дискриминировать предложения (строки, или последовательности символов), принадлежащие *различным* иерархическим уровням.

Когда парадоксы возникают в системе, обладающей языком, конфликт обостряется; конфликт *между* системами, о котором мы уже говорили, дополняется иерархически подчиненным конфликтом *внутри* системы. Разрешение внутрисистемного конфликта зависит от параметров, определяющих межсистемный конфликт. Последний, в свою очередь, использует внутрисистемную связь как расходуемое средство разрешения самого себя. Взаимосвязь и динамическая эволюция двух конфликтов — меж- и внутрисистемного — недавно были подробно рассмотрены в работе [6.32].

С динамической точки зрения первопричина конфликта сводится к несовместимости *сжимаемости* и *перемежаемости:* когда функция плотности вероятности не может быть сжата после некоторого порога и спонтанно «взрывается» (переходя из дельтаобразной в гиперболическую функцию — «перемежаемость»), подход среднего поля утрачивает силу и процессор системы на уровне моментов переходит в «турбулентное состояние» в том смысле, что для описания его требуется столько же степеней свободы, сколько их необходимо для описания системы на уровне индивидуальных переменных (на том иерархическом уровне, на котором происходит перемежаемость).

Именно это мы имеем в виду, когда говорим, что за гёделевским пределом динамика двух соседних иерархических уровней «перемешивается»: с точки зрения временных рядов микроскопическое и макроскопическое описания становятся неразличимыми в том смысле, что *случайный шум* и *хаос* статистически подобны.

Во многих случаях иерархические системы «почти разложимы», т. е. динамическую активность можно исследовать на некотором данном уровне, принимая происходящее на нижних уровнях за *граничные условия*, а происходящее на верхних уровнях — за *константу*. Такой подход допустим, когда константы скоростей различных уровней отличаются по величине на несколько порядков (нижний уровень характеризуется большей константой скорости или меньшим временем релаксации).

В лингвистических системах такая развязка уровней невозможна из-за существования эволюционных петель упреждающей связи, выполняющих роль переносчиков динамики между соседними уровнями. В частности, в лингвистических системах возможно одновременное использование двух иерархических уровней — в этом случае предложения языка и метаязыка взаимосвязаны. («Чикаго» — трехсложное слово и город.)

Здесь уместно повторить еще раз то, о чем мы упоминали в разд. 2.3.1, говоря о тех условиях, когда приближение среднего поля становится неприменимым. Рассмотрим физическую динамическую систему, сведенную к одномерному отображению.

Вероятность найти эту систему в точке x в момент времени t возрастает из-за переходов из других точек x' интервала и убывает из-за переходов из точки x в другие точки, т. е.

$$\frac{d}{dt}P(x;\ t) = \text{скорость прихода} - \text{скорость ухода} = (I) - (O). \tag{6.5.15}$$

Так как член (I) включает в себя все переходы из начальных точек x' в точку x, он представим в виде суммы по всем начальным точкам.

Каждое слагаемое этой суммы есть вероятность найти систему в точке x', умноженная на вероятность перехода в единицу времени из точки x' в x, т. е.

$$(I) = \sum_{x'} w(x,\ x')\,P(x';\ t), \tag{6.5.16}$$

где $w(x, x')$ — вероятность перехода $x' \to x$.

Для переходов из точки x — члена (O) — получаем

$$(O) = P(x;\ t) \sum_{x' \neq x} w(x',\ x), \tag{6.5.17}$$

где $w(x', x)$ — вероятность перехода $x \to x'$. (Вероятности перехода, о которых здесь идет речь, являются функциями значений, принимаемых производной отображения в точках x, x'.)

«Основное» уравнение принимает вид

$$\frac{dP(x;\ t)}{dt} = \sum_{x'} w(x,\ x')\,P(x';\ t) - P(x;\ t) \sum_{x' \neq x} w(x',\ x). \tag{6.5.18}$$

«Стационарные состояния» или «стационарные» асимптотические решения этого уравнения мы исследовали в (6.5.7). Решающее значение имеет то обстоятельство, что вероятности перехода (обычно неизвестные) в большинстве случаев являются *нелинейными* функциями от x, так как зависимость производной (углового коэффициента касательной) отображения от точки может быть сильно нелинейной. [Например, в химических реакциях скорости, по закону действия масс, пропорциональны концентрациям «реагирующих веществ», иначе говоря, числу способов, которыми пара или группа «взаимодействующих молекул» может быть выбрана из общей популяции. Например, для реакции $2X \to X'$ скорость пропорциональна $(x/2)(x-1)$, т. е. уравнение для «средних» имеет вид $d\langle x\rangle/dt = -K\langle x(x-1)\rangle$.]

Умножая обе части уравнения (6.5.18) на x, x^2, ... и интегрируя или суммируя по отрезку оси x, мы получаем серию «феноменологических» макроскопических уравнений для различных

моментов $\langle x\rangle$, $\langle \delta x^2\rangle$, ... функции плотности вероятности $P(x, t)$, а именно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle x\rangle &= f_1\{\langle x\rangle, \langle \delta x^2\rangle, \ldots\}, \\ \frac{d}{dt}\langle \delta x^2\rangle &= f_2\{\langle x\rangle, \langle \delta x^2\rangle, \ldots\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

Из-за нелинейности операторов f_i (обусловленной нелинейностью вероятностей перехода) мы получаем очень большое (бесконечно большое) число связанных нелинейных дифференциальных уравнений относительно моментов и кросс-моментов (кросс-корреляций). Кроме того, в окрестности бифуркаций или незатухающего хаоса, заполняющего целый интервал, эти моменты могут стать сравнимыми по величине.

Таким образом, мы весьма ясно видим, при каких условиях последовательные иерархические уровни становятся неразличимыми, т. е. выполняется необходимая предпосылка возникновения парадокса ссылки на себя и «тупика» в работе лингвистического процессора.

6.6. Комментарии по поводу влияния внутренних флуктуаций и внешнего шума на свойства устойчивости динамических систем

До сих пор мы рассматривали детерминистические нелинейные динамические системы. Стохастичность, обнаруживаемую в поведении некоторых из них, мы относили за счет *внутреннего шума*, усиленного каскадом бифуркаций и итераций странного аттрактора. В тех случаях, когда *внутренними* флуктуациями нельзя пренебречь и невозможно исключить их из среднего поведения (см. предыдущий раздел), т. е. когда возникает необходимость учета внутренних флуктуаций, динамическую систему невозможно моделировать системой связанных нелинейных дифференциальных уравнений с детерминистическими значениями переменных и/или параметров.

В этом случае необходимо обратиться к формализму «основного» уравнения или уравнения Фоккера — Планка и выразить решение (функцию плотности вероятности) в терминах «стохастического» потенциала — в отличие от «детерминистического» потенциала, который мы использовали при рассмотрении простых примеров в гл. 2 (разд. 2.2.3 и далее). Если проделать сказанное и исследовать стохастический аналог, например, простого нелинейного осциллятора с сильным затуханием (подробности см. в работах [6.33, 6.34]), то результат будет весьма интересным: оказывается, что стохастический потенциал *не*

совпадает с детерминистическим потенциалом, который содержит квадратичную форму

$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4, \tag{6.5.20}$$

но помимо нее содержит также *нечетный* кубический член, делающих потенциал асимметричным после бифуркации: две его впадины имеют неодинаковую глубину. Вследствие этой асимметрии система после бифуркации получает свободу *выбора* из двух различных и *неравновероятных* альтернатив.

Возможность *предпочтительного* перехода в одно из многих последующих состояний, обусловленная бифуркацией,— проблема, которую мы не в силах разрешить, если речь идет о явном вычислении вероятностей перехода. Примером может служить также двугорбая форма, которую приобретает функция плотности вероятности как решение «основного» уравнения за критической точкой,— с горбами (максимумами) *неравной* высоты.

Прокомментируем кратко роль *внешнего* шума, наложенного на систему, описываемую детерминистическими нелинейными уравнениями. Так как уравнения нелинейны, внешний шум производит аддитивный *и* мультипликативный эффект, а именно воздействует на амплитуду и фазу переменных, описывающих систему. Хорстхемке и др. [6.35] показали, что внешний шум может либо подавлять бифуркации, существующие в детерминистической динамической системе, либо (что более важно) порождать новые бифуркации, не входящие в репертуар детерминистической системы. Тем самым внешний шум может *вынудить* систему к дифференциации и «самоорганизации» не столько в силу ее потенциальных возможностей, сколько за счет дестабилизации особенностей, которые либо вообще не существовали в отсутствие внешнего шума, либо не поддавались дестабилизации под действием одних лишь внутренних флуктуаций системы.

Влияние внешнего шума на хаос впервые исследовали Майер-Кресс и Хакен [6.36], а также Кратчфилд и др. [6.37]. Основные результаты воздействия внешнего гауссовского шума на логистическое отображение можно сформулировать следующим образом.

а) Внешние флуктуации подавляют тонкую структуру, размазывая острые пики функции плотности вероятности отображения.

б) Периодические орбиты расплываются в полосы, аналогичные странным аттракторам.

в) Флуктуации повышают степень случайности хаоса, но разрушают окна периодических движений, встречающиеся в хаотическом режиме. Они влияют на свойства локальной устойчивости аттракторов, подавляя существующие и добавляя новые

бифуркации, и в то же время оставляют сравнительно неизменной глобальную устойчивость аттракторов. Однако в некоторых случаях флуктуации полностью разрушают *хаотический* режим и вынуждают систему вернуться к предельному циклу [6.38].

г) Под действием внешнего шума бифуркационная диаграмма отображения «размывается», перенормируется и претерпевает масштабное преобразование в том смысле, что получается как бы свертка детерминистической бифуркационной диаграммы с гауссовым распределением вероятности по управляющему параметру отображения.

Приложения

А. Взгляд на роль внешнего шума на нейронном иерархическом уровне

А.1. Введение в проблему

В этом приложении мы хотели бы обсудить более подробно наш взгляд на то, каким образом нейронный геном мог бы взаимодействовать с постсинаптическим мембранным агрегатом, обновляя множество структурных белков, покрывающих это место. Прежде всего заметим, что любая самоорганизующаяся система представляет собой иерархическую структуру [1]. Она одновременно проявляет множество различимых активностей, для которых требуются различные описания (т. е. различные наборы переменных и параметров). Какой иерархический уровень мы рассматриваем, зависит от того, какой *аспект* (или какие *аспекты*) поведения системы нас интересует, т. е. от способа нашего взаимодействия с системой. На каждом иерархическом уровне мы вводим описание в терминах пространства состояний. Это описание включает в себя тип и число переменных, параметров и число состояний, соответствующих данному уровню.

Прогрессирующая организация *может* происходить на данном иерархическом уровне: система под воздействием *множества пусковых сигналов* (которое мы определим более точно) переходит в стационарные состояния, в которых число (гибко ограниченных) упорядоченных соотношений между переменными возрастает со временем.

Движение и различные события, происходящие с системой в фазовом пространстве на данном иерархическом уровне (речь идет о таких характеристиках системы, как последовательность переходов из одного стационарного состояния в другое, «время покоя» или степень устойчивости в каждом стационарном со-

---

[1] Графически иерархическую структуру можно изобразить в виде перевернутого дерева с ветвями, отходящими в стороны. Для простоты мы будем рассматривать одну ветвь. Поэтому вместо многих независимых «платформ» одинаковой высоты на данном иерархическом уровне с каналами связи, сходящимися *в группы* (с многочисленными кросс-корреляциями) на более высоких платформах, мы изобразим и рассмотрим одну последовательность (ветвь). «Боковые» вклады — информацию, поступающую на данный иерархический уровень не с предшествующего, а с более низкого уровня, — мы будем называть «полным окружением» (окружающей средой).

стоянии, а также продолжительность перехода между двумя последовательными стационарными состояниями), зависят от (а) передачи информации (афферентные сигналы), поступающей от ближайшего снизу уровня; (б) информации, поступающей из окружающей среды (т. е. через периферическую нервную систему); (в) управление по каналам обратной связи (эфферентные сигналы) с ближайшего сверху уровня.

Каждую иерархическую платформу можно при этом рассматривать в очень упрощенном виде как динамическую *связь* (ограничение), в которой непрерывно происходит «хранение и интегрирование» информации, или процедура установления кросс-корреляции. Это означает, что сигналы $x_\lambda(t)$, последовательно передаваемые «снизу» (каждый сигнал соответствует другому состоянию системы на ближайшем уровне снизу), *и* сигналы $w_\lambda(t)$, поступающие из окружающей среды, усредняются по времени после того, как они достигнут принимающей платформы. В результате такого усреднения некоторые из переменных $x_\lambda(t)$ на более высоком уровне оказываются полностью исключенными, или «вымытыми», а другие — нелинейно коррелированными (попарно):

$$\langle x_\lambda^\nu(t)\, w_\lambda^k(t+\tau)\rangle,$$

где $0 < \tau < T$ и T — время передачи сигнала с ближайшего уровня снизу или из внешней среды. Между событиями, происходящими одновременно на различных иерархических уровнях, существует, таким образом, *корреляционное*, а не *причинное* соответствие. Отображение, возникающее на границе между последовательными уровнями, *не является* взаимно однозначным.

Переменные y_i на рассматриваемом «принимающем» уровне Y (описывающие автономное врожденное поведение на этом уровне) ограничены («абстрагированы») в гораздо большей степени, чем переменные на «передающем» нижнем уровне X. Следовательно, более высокие иерархические уровни более высоко организованы или избыточны и в «описательном» смысле проще, чем прежние уровни. В этом приложении мы рассмотрим эволюцию во времени и самоорганизацию сложных биологических систем на одном или двух высших иерархических уровнях.

Относительно шума в системе мы примем следующие предположения: хотя (сильный) шум вызывает («дергающуюся») модуляцию и амплитуды, и фазы, мы будем рассматривать ниже слабый (квазистационарный) аддитивный шум, действующий только на амплитуды соответствующих переменных.

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к главному. Рассмотрим открытую неконсервативную систему Σ_i (описываемую на некотором иерархическом уровне Z),

состоящую из нелинейных взаимодействующих компонент («реагирующих веществ»), число которых равно $n_z(t)$. Эти компоненты (переменные) можно представлять в виде незатухающих осцилляторов (гамильтонова или неконсервативного типа), сосредоточенных или распределенных (нормальные моды). Каждая активная компонента системы представлена случайной фазой (т. е. негармоническим колебанием с примесью слабого аддитивного шума):

$$z_k(t) = A_k(t)\, e^{j\Phi'_k(t)}, \tag{A.1.1}$$

где $\varphi'_k(t) = \omega_k t + \omega_k(t)$ характеризуется непрерывной функцией распределения совместной плотности вероятности $\rho_k(A_k, \varphi_k; t)$.

Динамически система Σ на уровне Z моделируется системой, состоящей из $n_z(t)$ связанных нелинейных дифференциальных уравнений (для «скоростей реакций»), которые в отсутствие изменяющейся со временем дифференциации ($\nabla^2 z_i = 0$) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{dt} = f_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_{n_z(t)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dz_k}{dt} = f_k\left(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_{n_z(t)}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dz_{n_z(t)}}{dt} = f_{n_z(t)}\left(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_{n_z(t)}\right),
\end{aligned} \tag{A.1.2}$$

и, если противное явно не оговорено, то предполагается, что

$$\left|\frac{dn_z(t)}{dt}\right| \ll \left|\frac{\partial A_k}{\partial t}\right|, \quad \left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\right|.$$

Описывая динамическое поведение системы на уровне Z уравнениями (A.1.2), мы по существу имеем в виду, что активность в системе началась как шум, более или менее *ограниченный* на весьма ранней стадии развития организма взаимодействием между окружающей средой и динамической активностью на иерархических уровнях, лежащих ниже Z. Однако шум не полностью подавлен наложенными связями: часть шума (мы будем называть ее здесь аддитивным шумом) и порождает элемент производительности, гибкости или даже «оригинальности» (в зависимости от того, как мы на это смотрим) в поведении системы на уровне Z.

Чтобы проследить за поведением уровня Z во времени, важно вывести не аналитические выражения для связанных случайных процессов z_k, а их совместное распределение плотности

вероятности

$$\rho(z_1, z_2, \ldots, z_{n(t)}; t).$$

В принципе это совместное распределение может быть получено из уравнений (А.1.2) и последующего решения при заданных начальных и граничных условиях соответствующего $(n(t)+1)$-мерного уравнения Фоккера — Планка [П.1], которое (в пределе слабого аддитивного шума в окрестности стационарного состояния) описывает диффузию во времени совместной функции плотности вероятности $\rho(z_1, z_2, \ldots, z_{n(t)}; t)$.

Зная это распределение, мы можем вычислить мгновенное значение (условной) энтропии системы

$$S(t) = c_1 + c_2 \int_{\nu} \rho(z_1, z_2, \ldots, z_{n(t)}; t) \log_2 \rho(z_1, z_2, \ldots, z_{n(t)}; t)\, d\nu, \tag{А.1.3}$$

где $d\nu = dz_1 dz_2 \ldots dz_{n(t)}$; интегрирование проводится по объему ν в фазовом пространстве; Z, z_1, z_2, ..., $z_{n(t)}$ в результате происходящего процесса организации становятся статистически коррелированными; c_1 и c_2 — константы.

Сразу же необходимо отметить, что в биологических системах переменные и параметры на данном иерархическом уровне, вообще говоря, неизвестны; поэтому в зависимости от адекватности переменных, выбранных для модели, вычисленная энтропия (характеризующая состояние, т. е. распределение плотности вероятности относительно данного разбиения) может представлять, а может и не представлять, степень дезорганизации «реального» уровня Z. Об адекватности предлагаемой модели мы можем судить только по доступному наблюдению поведения организма на уровне более высоком, чем Z.

Сформулируем нашу задачу следующим образом. Наша открытая система Σ на уровне Z энергетически взаимодействует с окружающей средой Σ' (внутренней и внешней). Следовательно, дифференциал $dS(t)$ энтропии системы Z можно представить в виде [П.2]

$$dS(t) = dS_i + dS_e, \tag{А.1.4}$$

где dS_i — производство энтропии, связанное с необратимыми процессами внутри Z (всегда $dS_i > 0$), dS_e — поток энтропии, связанный с энергетическими обменами в «полной» окружающей среде Σ'! Знак члена dS_e не определен. В тривиальном случае $dS_e > 0$, т. е. беспорядка, или «атаксии», проникающего в систему Z извне, мы видим, что ускорение процесса разупорядочения быстрее сдвигает систему к состоянию (термодинамического) равновесия. В случае $dS_e < 0$ в систему из окру-

жающей среды поступает порядок, или «негэнтропия». Ясно, что знак члена dS_e «выбирает» сама система на уровне Z. Иначе говоря, происходит перенос информации между серией событий в Σ' и другой серией событий в Σ на уровне Z, если между сериями имеется некоторое корреляционное соответствие. Существуют две возможности: либо $|dS_e| < dS_i$ (в результате деградация системы со временем замедляется и уровень ее понижается), либо $|dS_e| > dS_i$. В последнем случае $dS(t) < 0$, т. е. энтропия системы на уровне Z убывает за счет окружающей среды и/или других иерархических уровней системы.

Мы исходим сейчас из *данного* частично организованного иерархического уровня Z организма Σ и исследуем условие, при котором уровню Z можно придать *бóльшую когерентность* (т. е. увеличить число упорядоченных соотношений между соответствующими динамическими переменными, например, φ_k) путем поглощения информации из окружающей среды и уровней, лежащих ниже Z, в присутствии аддитивных флуктуаций, существующих между компонентами системы на уровне Z.

В этих условиях при фиксированном числе активных компонент n_z шум производит возмущающее действие, т. е. в конце концов подавляет любой организующий процесс, непрерывно действующий на фазы осцилляторов. Следовательно, условие $|dS_e| > dS_i$ не может выполняться в таком случае, о котором говорилось выше: ведь уравнение Фоккера — Планка (или любое уравнение для многочастичной функции распределения, используемое для той же цели) есть уравнение *диффузии* и как таковое предсказывает расплывание, а не «сокращение» функции плотности вероятности $\rho(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; t)$ со временем. Следовательно, энтропия $S(t)$ системы на уровне Z возрастает при любом (малом) отклонении от стационарного состояния. Тем не менее организация на уровне Z, которая может быть надлежащим образом определена в терминах *избыточности* R [выражающей межкомпонентную корреляцию $(\varphi_k, \varphi_\lambda)$], *может* возрастать, даже если энтропия $S(t)$ возрастает при условии, что максимум энтропии увеличивается со временем быстрее, чем $S(t)$. Так как

$$R = 1 - \frac{S(t)}{S_{\text{макс}}} \tag{A.1.5}$$

и

$$S_{\text{макс}} = c_3 + c_4 \log_2 \lambda(t), \tag{A.1.6}$$

где λ — число комплексов в состоянии равновесия:

$$\lambda = \frac{n}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}$$

(мы рассматриваем бистабильные элементы типа «включено — выключено»), ясно, что

$$\frac{\partial R}{\partial t} > 0,$$

если

$$\frac{d}{dt}(\ln S_{\text{макс}}) \geqslant \frac{d}{dt}[\ln S(t)],$$

или

$$\frac{d}{dt}[\ln S(t)] \leqslant \frac{\dot{\lambda}(t)/\lambda(t)}{\log_2 \lambda(t)},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(\ln S) \leqslant \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \quad \text{при} \quad \lambda(t) \gg 1. \qquad \text{(A.1.7)}$$

Разумеется, $\lambda = \text{const}$ при инвариантном числе компонент $n = \text{const}$ на уровне Z, и система никогда не может удовлетворить приведенным выше требованиям. Единственная возможность организации состоит в вовлечении *новых* степеней свободы при условии, что мгновенная общая энтропия возрастает медленнее, чем $\log_2 \lambda(t)$. Заметим, что λ — возрастающая функция от n.

Какой механизм мог бы реализовать такую ситуацию? Мы рассмотрели такой механизм на конкретных примерах в разд. 2.2.3—2.2.6; обсудим теперь два возможных случая, в которых *мог бы* происходить процесс, о котором идет речь.

1) На стадии эмбриогенеза биологического организма избыточность, как было показано выше, *должна* возрастать, хотя известно, что именно в этот период развития производство энтропии внутри системы ΔS_i возрастает очень быстро. Это было показано Тринчером [П.3], который привел экспериментальные данные, подтверждающие, что производство энтропии dS_i/dt на единицу массы и в единицу времени (в кал/ч) на протяжении первого эмбриогенетического периода дифференциации организма возрастает, достигает максимума, после чего убывает и выходит на стационарный режим по достижении организмом состояния взрослой особи.

В этом случае, как мы считаем, возрастание избыточности достигается за счет «быстрого» увеличения $n(t)$, т. е. деления и размножения клеток. С другой стороны, на протяжении жизни взрослого организма клетки продолжают делиться, но обычно не размножаются. Значение производной $\partial R/\partial t$ слегка флуктуирует в окрестности «плюс-минус нуля», пока система пребывает в динамическом стационарном состоянии, например в состоянии гомеостаза. (В тех случаях, когда $\partial R/\partial t > 0$, $R \to 1$, возникает аномально жесткая организация «окаменения» и

система утрачивает способность к адаптивному поведению; при $\partial R/\partial t < 0$, $R \to 0$ начинается «умирание».)

2) Второй, наиболее поразительный случай относится к электрической активности мозга как явлению, связанному с изменяющимися физиологическими состояниями: внутриклеточные датчики позволили обнаружить спонтанную волнообразную активность с амплитудами в диапазоне 5—20 мВ во многих мозговых структурах [П.4—П.6]. Эти внутриклеточные данные показывают, что даже в отсутствие распространяющихся нервных импульсов происходят ритмические шумообразные изменения потенциала из-за (подпороговых) флуктуаций клеточного мембранного потенциала.

Распределения плотности мощности в этих данных имеют много общего со спектрами, получаемыми при аналогичном анализе интегральных электроэнцефалограмм (ЭЭГ), снимаемых с тех же областей: это означает, что ЭЭГ можно рассматривать как (скалярную) проекцию векторной суммы $n(t)$ единичных векторов с различными фазами и частотами ω_λ в окрестности ~ 10 Гц, каждый из которых флуктуирующий потенциал постсинаптической мембраны индивидуального (дендритного) нейрона. Как уже неоднократно отмечалось исследователями, работающими в этой области [П.5], спонтанная электрическая активность мозга все еще остается одним из неподдающихся разгадке аспектов церебральных функций. Она представляет собой (нестационарную по истечении временных интервалов порядка нескольких секунд) непрерывную волновую активность с переменной частотой и фазой и непостоянными соотношениями между фазами (разность $\varphi_\lambda - \varphi_k$ не ограничена) составляющих единичных векторов z_λ, z_k; в целом ЭЭГ напоминает по своему характеру случайный шум [хотя возрастающая асимметрия функции плотности вероятности составляющих ЭЭГ единичных векторов с различными фазами при выполнении интеллектуальных заданий [П.4, П.5] указывает на усиливающуюся (линейную) статистическую связь между отдельными группами нейронов]. Однако когнитивные и поведенческие уровни иерархии (лежащие непосредственно над нейронным уровнем) при таких условиях высокоупорядочены, поэтому, если только электрическая активность мозга не связана с поведением, существует возможность, что в отличие от искусственных систем связи, в которых шум выступает как досадная помеха, человеческий мозг может использовать шум как неизбежный и «благоприятный» фактор.

Известно, что нейронные клетки делятся в мозгу только в очень раннем возрасте организма, поэтому повышение организации мозга невозможно объяснить на основе деления нейронов. Однако существует другая возможность (и в этом и со-

стоит наша гипотеза): число единичных векторов-носителей фазы на уровне Z «аппаратурной реализации» системы постоянно (находится в состоянии «спячки») в определенные периоды времени, но «пробуждается», когда выполнение условия $\partial R/\partial t > 0$ на данном или *на более высоком уровне* требует действий. По-видимому, необходимость «пробуждения» оценивается нейронным уровнем Z после того, как соответствующие эфферентные сигналы обратной связи поступают на данный уровень с когнитивного уровня, лежащего непосредственно над ним. Еще раз подчеркнем, что одной лишь активации надпороговых, «спавших» (или «дремавших») нелинейных осцилляторов недостаточно; процедура должна происходить на фоне более медленного возрастания энтропии $S(t)$, т. е. заново активируемые степени свободы должны затем подвергнуться «процессу синхронизации», аналогичному тому, который уже действует на «более старые» переменные системы на уровне Z. В следующем разделе мы подробно исследуем возможность улучшения избыточности в системе Σ на иерархическом уровне Z, которая открывается, если мы разрешим числу незатухающих осцилляторов зависеть от времени ($n_z(t)$) в результате переключений, вызываемых каталитическим действием (слабого шума). С помощью такой модели мы можем достичь понимания того, как (слабая) шумовая активность на данном нейронном уровне в биологическом организме может породить регулярное поведение на более высоком (когнитивном) уровне.

A.2. Организация через слабый стационарный по амплитуде шум

Рассмотрим систему Z, состоящую из $n(t)$ случайных «фазовых» векторов z_λ с фиксированными частотами ω_λ, мало отличающимися друг от друга, и амплитудами $A_\lambda(t)$ и случайными фазами $\varphi_\lambda(t)$. Рассмотрим сначала кратко, что может произойти с точки зрения динамики при $n = \text{const}$ в отсутствие шума, т. е. в случае, когда z_λ — детерминистические нелинейно связанные осцилляторы с независимо изменяющимися амплитудами и фазами. Так как частоты ω_λ мало отличаются друг от друга, система находится либо (а) в режиме захвата частот [П.7], в котором все осцилляторы совершают синхронные колебания и система функционально однородна, или (б) в режиме (гибко ограниченного) захвата фаз $|\varphi_{\lambda+1} - \varphi_\lambda| < \Phi_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$, соответствующем последовательному, или секвенциальному, процессу и дифференциации функций (последовательные фазовые соотношения могут использоваться для динамического хранения информации).

В общем случае, когда z_λ — случайные векторы, перед нами встает проблема оценивания избыточности системы на уровне Z как функции времени. Предполагая, что амплитуды $A_\lambda(t)$ векторов z_λ статистически независимы от фаз $\varphi_\lambda(t)$ и очень медленно изменяются со временем, мы можем записать мгновенную энтропию системы в виде

$$S(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda, \ldots, \varphi_{n(t)}; t) \times$$
$$\times \log_2 \rho(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda, \ldots, \varphi_{n(t)}; t)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n(t)}, \quad \text{(A.2.1)}$$

где $\rho(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n(t)}; t)$ — совместная функция плотности вероятности фаз системы. В общем случае выражение (A.2.1) представляет лишь чисто академический интерес из-за невозможности вычислить совместную функцию плотности вероятности. Однако в тех случаях, когда плотность распределения вероятности для результирующего вектора $\rho(R, \vartheta)$ может быть вычислена в явном виде — на временных интервалах квазистационарного поведения, мы можем на эвристическом уровне строгости заменить $S(t)$ интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vartheta) \log_2 \rho(\vartheta)\, d\vartheta, \quad \text{(A.2.2)}$$

и получить для избыточности системы выражение

$$R(t) = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vartheta) \log_2 \rho(\vartheta)\, d\vartheta}{\log_2 \lambda(t)}, \quad \text{(A.2.3)}$$

где

$$\rho(\vartheta) = \int_0^\infty \rho(R, \vartheta)\, dR. \quad \text{(A.2.4)}$$

Предположим теперь, что каждый случайный вектор z из n независимых «модулей» системы представляет собой *жесткий* нелинейный осциллятор, «плавающий» в бассейне окружающего шума и описываемый динамическим уравнением вида

$$\ddot{z} - 2\varepsilon(1 - 4\alpha z^2 + 8\beta z^4)\dot{z} + \omega_0^2 z = \xi(t), \quad \text{(A.2.5)}$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью мощности N (Вт/Гц).

Нас интересуют вероятности временно́го возбуждения и гашения (прерывания) незатухающих осцилляторов того типа, ко-

торые содержатся в нашей системе, под действием окружающего шума $\xi(t)$. Исследование системы (А.2.5) было проведено Стратоновичем [П.8], который показал, что под воздействием шума первоначально невозбужденный, или «спящий», осциллятор может быть асинхронно возбужден, несмотря на *устойчивое* стационарное состояние в равновесии (т. е. в покое). Наоборот, шум может производить противоположный эффект асинхронного гашения существующих устойчивых колебаний, тем самым сдвигая «бодрствующий» осциллятор в его устойчивое невозбужденное состояние. Если (среднее) время пребывания отдельного осциллятора, принадлежащего ансамблю Z, в (устойчивом) *возбужденном* состоянии больше, чем (среднее) время пребывания того же осциллятора в «*спящем*» (устойчивом) состоянии, то $n(t)$ возрастает, и поэтому существует возможность увеличить избыточность системы на исследуемом уровне только «за счет шума».

Скорости возбуждения, или «рождаемость», K и скорость гашения, или «смертность», K_1 были вычислены Стратоновичем [П.8] и оказались равными

$$K = 2\varepsilon R \sqrt{\frac{\varepsilon u}{2\pi N}}\, e^{-f(R)/N}, \tag{А.2.6}$$

$$K_1 = \frac{\varepsilon R}{\pi R_1} \sqrt{u u_1}\, e^{[-f(R)+f(R_1)]/N}, \tag{А.2.7}$$

где

$$R = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\right)^{1/2}, \tag{А.2.8}$$

$$R_1 = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\right)^{1/2}, \tag{А.2.9}$$

$$u = -(1 - 3\alpha R^2 + 5\beta R^4), \tag{А.2.10}$$

$$u_1 = (1 - 3\alpha R_1^2 + 5\beta R_1^4), \tag{А.2.11}$$

$$f(R) = \varepsilon\left(\frac{R^2}{2} - \frac{\alpha R^4}{4} + \beta\frac{R^6}{6}\right), \tag{А.2.12}$$

$$f(R_1) = \varepsilon\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{\alpha R_1^4}{4} + \beta\frac{R_1^6}{6}\right) \tag{А.2.13}$$

и N — спектральная плотность окружающего шума (в Вт/Гц). Следовательно, отношение (средних) времен, проводимых осциллятором в невозбужденном и возбужденном состояниях определяется выражением

$$\frac{K_1}{K} = \frac{e^{f(R_1)/N}}{\sqrt{2\pi}\, R_1} \sqrt{\frac{u_1 N}{\varepsilon}}\,. \tag{А.2.14}$$

Подставляя вместо параметров приведенные выше выражения, получаем

$$\frac{K_1}{K} = \frac{(\alpha^2 - 4\beta)^{1/4}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \sqrt{N}\, e^{c/N}, \tag{A.2.15}$$

где

$$c = \frac{\varepsilon}{12\beta}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})\left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{4\beta}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})\right]. \tag{A.2.16}$$

При α и β одного порядка (сильная, жесткая нелинейность) параметр c может быть либо положительным ($c > 0$), либо отрицательным ($c < 0$); в частном случае, при $\alpha > \beta\sqrt{2}$, параметр c удовлетворяет соотношению $c \sim \alpha\varepsilon/12\beta$. Таким образом, приведенные выше результаты показывают, что при данных параметрах α, β, ε отношение средних времен пребывания осцилляторов в невозбужденном и возбужденном («бодрствующем») состояниях составляет величину $\sqrt{N}\, e^{1/N}$. Параметры α, β, ε всегда можно выбрать так, чтобы при данном (умеренном) уровне шума N выполнялось неравенство $K_1/K < 1$, т. е. отношение «рождаемость»/«смертность» было больше единицы. Следовательно, осциллятор (или осцилляторы) проводят в возбужденном состоянии *больше* времени, чем в невозбужденном; и, следовательно, число возбужденных осцилляторов в данном временном интервале Δt возрастает. Обозначим через $n(t)$ число «включенных» осцилляторов в данный момент времени, и пусть $n_1(t)$ — число невозбужденных осцилляторов в момент времени $n(t)$. Общее число осцилляторов в системе мы считаем постоянным, т. е. $n + n_1 = n_0 = \text{const}$. Каждый осциллятор «вида» n, «умирая», становится осциллятором «вида» n_1, и наоборот. Скорости изменения популяций осцилляторов обоих видов удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= K_1 n_1 - Kn, \\ \frac{dn_1}{dt} &= Kn - K_1 n_1, \end{aligned} \tag{A.2.17}$$

из которых условие замыкания следует в виде равенства $n_1 + n = \text{const}$. Стационарные состояния системы (A.2.17) — это точки, в которых dn/dt и dn_1/dt одновременно обращаются в нуль. Этим свойством обладают все точки, принадлежащие прямой $K_1 n_1 - Kn = 0$ на плоскости (n, n_1), поэтому при заданном общем числе осцилляторов n_0 стационарная точка находится на пересечении прямых $n + n_1 = n_0$ и $K_1 n_1 - Kn = 0$.

Так как $K_1 + K > 0$, это стационарное состояние устойчиво. Если n_{eq} и $n_{1_{eq}}$ — число возбужденных и невозбужденных осцилляторов в состоянии равновесия, то

$$n_{eq} + n_{1_{eq}} = n_0, \tag{A.2.18}$$

$$Kn_{eq} - K_1 n_{1_{eq}} = 0; \tag{A.2.19}$$

обозначив

$$\mu = \frac{K}{K_1}, \tag{A.2.20}$$

получим

$$n_{eq} = \frac{\mu n_0}{\mu + 1}, \tag{A.2.21}$$

$$n_{1_{eq}} = \frac{n_0}{\mu + 1}. \tag{A.2.22}$$

В случаях, представляющих интерес, когда $\mu > 1$, $n_{eq} > n_{1_{eq}}$, отношение числа возбужденных осцилляторов к числу «спящих» в стационарном состоянии зависит не от индивидуальных констант скоростей этих двух популяций осцилляторов, а только от отношения этих констант μ. Заметим также, что эти популяции в стационарном состоянии зависят от общего числа осцилляторов в системе. Максимальная энтропия системы в стационарном состоянии имеет порядок

$$S_{макс} \sim \log_2 \lambda_{eq}, \tag{A.2.23}$$

где

$$\lambda_{eq} = \frac{n_{eq}!}{\left(\frac{n_{eq}}{2}\right)!\left(\frac{n_{eq}}{2}\right)!}. \tag{A.2.24}$$

Итак, мы видим, что окружающая среда с «слабым» шумом (аддитивным стационарным шумом) может оказывать «благоприятное» воздействие на систему (т. е. действовать более или менее как «питательная среда» — осцилляторы как бы «питаются шумом»), увеличивая избыточность при условии

$$\frac{d}{dt}[\ln S(t)] \leqslant \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}. \tag{A.2.25}$$

Остается сказать кое-что о происхождении необходимого организующего процесса (или ритмоводителя, который использует избыточные степени свободы и приводит систему к условию (A.2.25)). Мы ссылались на вполне конкретный пример — организацию человеческого мозга. В настоящее время мы считаем, что такой ритмоводитель (таламокортикальный ритмоводитель) действительно обнаружен в человеческом мозге (см. разд. 6.5.2).

А.3. Адекватность нашей модели нейронной и когнитивной организации

В разд. А.2 мы предложили модель, осуществляющую двухпозиционное переключение («включено — выключено») в ансамбле жестких нелинейных осцилляторов, асинхронно активируемых и подавляемых аддитивным шумом (и в дальнейшем ограничиваемых таламокортикальным ритмоводителем). Обсудим теперь адекватность нашей модели динамическим процессом, происходящим на нейронном уровне. Существуют ли переключательные процессы типа «включено — выключено» (синаптические и/или генетические) в кортикальных или таламических центрах как адаптивные отклики на изменяющиеся физиологические условия и условия окружающей среды? Прежде всего попытаемся изоморфно отождествить флуктуации, происходящие на уровне одного нейрона с жесткими нелинейными осцилляторами модели или по крайней мере установить между ними какие-то аналогии. Имеющиеся экспериментальные данные [П.10] свидетельствуют в пользу схемы, согласно которой отдельные синапсы действуют как унифицированные генераторы волновой активности, и апериодические колебания, видные на сигналах от межклеточных датчиков, уже представляют собой сумму вкладов отдельных синапсов. По своей природе возбудимые участки постсинаптических нейронных мембран неустойчивы, и при определенных условиях могут возникнуть незатухающие колебания.

Действие синаптических токов изменяет потенциал покоя. На основе оценок потенциала покоя в длинном ответвлении дендритного нейрона было высказано предположение [П.10] о том, что эти ответвления с их высоким аксиальным сопротивлением и большой площадью поверхности могут иметь существенно меньший потенциал покоя, чем тело клетки того же нейрона. Возможно, что более низкий потенциал покоя предрасполагает эти элементы к колебательному режиму, и синапсы, расположенные на этих ответвлениях, могут как индуцировать, так и гасить колебания. Таким образом, в нашей модели синапсы могут не быть основным источником волновой активности, но они играют регуляторную роль, поскольку синаптическое действие необходимо либо для возбуждения, либо для гашения волн потенциала в дендрите.

Несмотря на эти соображения, мы по-прежнему не склонны отождествлять жесткие нелинейные осцилляторы (в нашей модели), возбуждаемые или подавляемые шумом («каталитическим» действием) с флуктуациями постсинаптического мембранного потенциала отдельного нейрона. Мы считаем более приемлемым рассматривать эти колебания потенциала как более или

менее соответствующие аддитивному шуму в нашей модели и искать аналог «бистабильному жесткому нелинейному осциллятору» *внутри нейрона* в чем-то другом.

Кумулятивные эксперименты, многочисленные данные о которых опубликованы Хайденом [П.11], по-видимому, указывают следующий путь [П.12]. Хайден и его сотрудники обнаружили, что эксперименты по обучению крыс неизменно сопровождались увеличением выделения mPHK на нейрон в отделах коры, ведающих процессами обучения (в 60—100 % подопытных животных). Это указывает на стимуляцию генома нейрона, т. е. отклик mPHK можно интерпретировать как отображение активации «молчавшего» до того участка гена в клетках мозга. Ниже

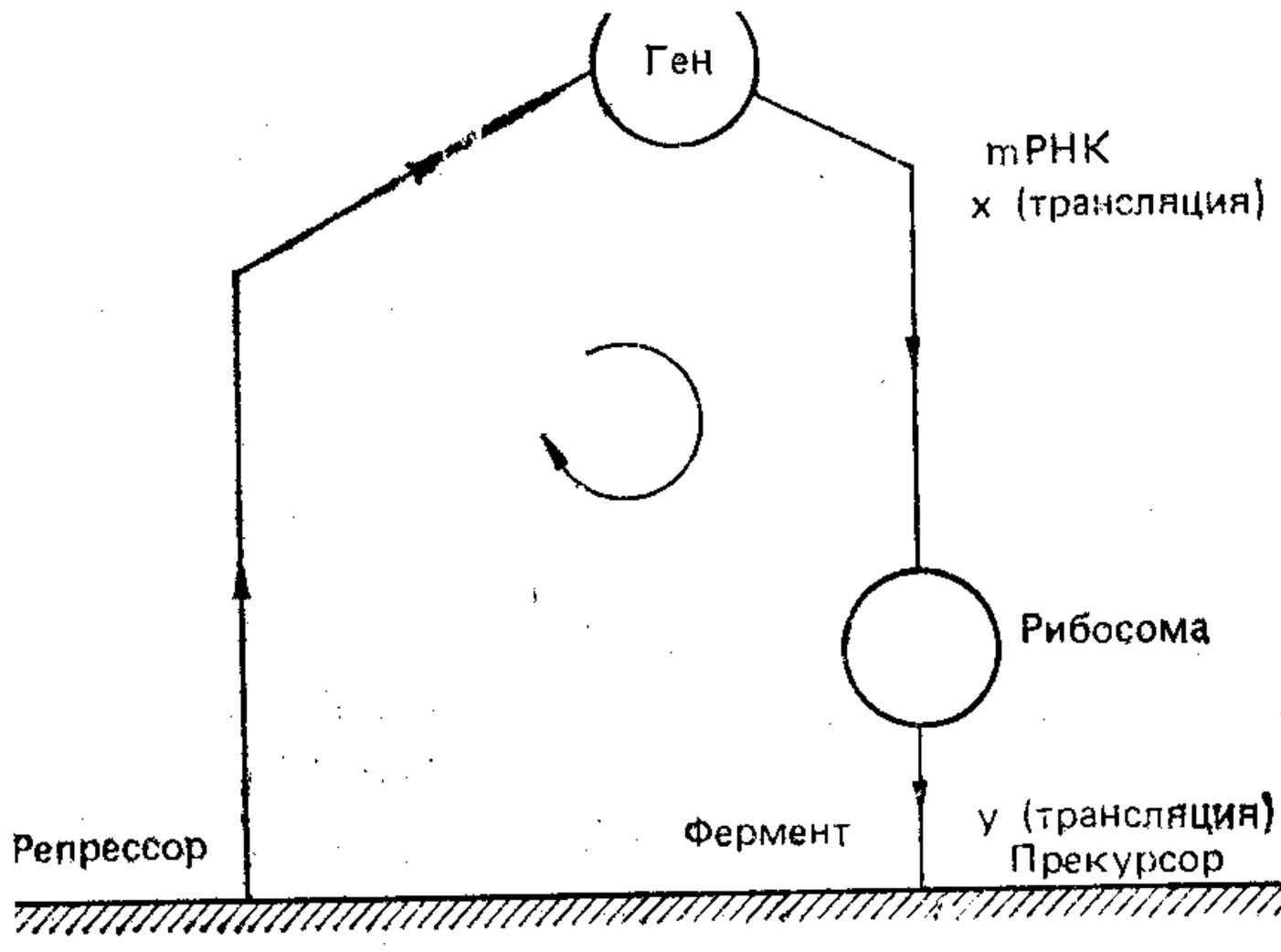


Рис. А.1. Петля генетической обратной связи x, y. Уровень нуклеиновых кислот и уровень белков следует рассматривать как два последовательных иерархических уровня.

мы предлагаем гипотезу, что такая активация (обычно подавленных) генных петель (переключателей) может быть обусловлена ионными флуктуациями, проникающими в геном нейронов, и вызываться либо прямым стимулированием извне (например, микроволновым излучением [П.13]), либо связью с непрерывной шумовой электроволновой активностью постсинаптических мембранных потенциалов (запускаемых гормонами или нейромедиаторами).

Рассмотрим кратко одну отдельную генетическую «петлю Жакоба — Моно», или «генетический переключатель» (рис. А.1). На этой упрощенной схеме сигнал РНК испускает ядро. Мгновенную концентрацию РНК обозначим через $x(t)$. В рибосоме сигнал транслируется, и синтезируются молекулы гормонов с соответствующей мгновенной концентрацией $y(t)$. Выделивший-

ся фермент катализирует реакцию превращения из неактивного прекурсора в молекулу репрессора. В свою очередь молекула репрессора (белок) реагирует с геном так, что когда репрессор прикрепляется к гену, mPHK больше не производится, и активность прекращается.

Гудвин [П.14] предпринял попытку показать, что при некоторых условиях описанная выше петля обратной связи может быть колебательной системой с мгновенными концентрациями x и y, нелинейно флуктуирующими относительно своих стационарных значений. Особо ограничительным было принятое Гудвином предположение о том, что концентрация фермента y убывает с постоянной скоростью (независимо от концентрации). Предложенная Гудвином схема первоначально не учитывала также запаздывание между x и y. Впоследствии [П.15] Гудвин модифицировал свою модель, включив в уравнения члены, учитывающие запаздывание и распад веществ и зависящие от концентраций x и y, а после экспериментов на аналоговых компьютерах Гудвин пришел к заключению, что система способна совершать незатухающие колебания в ограниченном диапазоне значений параметров. Позднее Гриффитс, критически проанализировав модель Гудвина [П.16], пришел к выводу, что незатухающие колебания концентраций x и y не могут возникать *при реалистических* значениях параметров. В результате оказывается, что простая генетическая петля, изображенная на рис. А.1, в рамках детерминистического подхода может вести себя только как переключатель, который большую часть времени подавлен, т. е. находится в положении «выключено».

Недавно Тивари и др. [П.16] выполнили на компьютере численное моделирование системы Жакоба — Моно с учетом стохастических вариаций в переменных x и y. Исследователи обнаружили, что под действием стохастических флуктуаций (шума) в системе возникают незатухающие колебания. «Одна петля обратной связи, осуществляющая репрессию, еще не является «часовой» системой, а несколько таких петель, действующих независимо, могли бы быть очень точными часами», — таков был вывод Тивари и его сотрудников. Нам представляется, что инду-

цируемые извне стохастические элементы в цепях генетического контроля являются необходимыми предпосылками возбуждения и производства непрерывных незатухающих колебаний в жестком переключательном элементе, который в противном случае пребывает в состоянии покоя («спит»). В нашей теории такие стохастические элементы могут быть отождествлены с ионными флуктуациями, идущими от непрерывной активности постсинаптических мембран, проникающих в геном и массированно возбуждающих бывшие до того подавленными гены. Будучи возбужденными, эти гены затем совершают регулярные колебания в

течение временного интервала Δt, пока стохастическое воздействие сохраняет надлежащие характеристики.

Как показывает компьютерный анализ ЭЭГ, снятых во время обучения [П.18], распределение частот и интегральной мощности в спектре сразу же после первого предъявления связано с качеством его последующего запоминания. В этих экспериментах более интенсивная быстрая и длительная активация ЭЭГ после предъявления учебного материала систематически ассоциировалась с лучшим качеством последующего запоминания, и, наоборот, очень низкие уровни активации соответствовали отказу памяти — низкие уровни были несовместимы с запоминанием информации, допускающим последующую обработку.

В соответствии с нашей моделью мы предполагаем, что ЭЭГ должна быть особенно активна в период закрепления памяти, чтобы создать как можно больше петель в отдельных нейронах (одновременно во многих областях мозга), ведущих от подавленных к возбужденным состояниям незатухающих колебаний. Достичь эффективного закрепления памяти можно только через массированное увеличение количества мРНК и коррелированное производство новых специфических белков. Наличие новых белков и соответствующие конформационные изменения в постсинаптических позициях в свою очередь изменяют степень возбуждения или торможения синаптических участков («сайтов»). Это происходит путем воздействия электрокинетического потенциала мембраны (или нулевого потенциала) и, следовательно, скорости электрофореза на отдельных синаптических щелях [П.19].

Таким образом, между постсинаптическими шумовыми мембранными потенциалами и «скрытой» генотической активностью в геноме нейронов может существовать непрерывная обратная связь. Правда, остается пока неизвестным, какого типа геномы активируются за данные интервалы времени Δt_i. Эти интервалы должны быть достаточно длинными (по крайней мере ~ 100 мин), чтобы успели произойти синтез белков и закрепление памяти.

Мы считаем, что непрерывность когнитивной деятельности требует весьма сильного сходства между типами белков, последовательно покрывающих дендритные и соматические постсинаптические участки, иначе могут произойти «провалы» и «отказы». Действительно, когнитивная деятельность проявляется на иерархических уровнях, лежащих выше нейронного уровня, как процесс установления соответствия между по крайней мере двумя пространственно-временными случайными процессами: одним, связанным с множеством поступающих сигналов (последовательностью импульсов от периферической нервной системы или какой другой части центральной нервной системы, например, в

форме выделения нейромедиатора), и другим, записанным заранее «в памяти» пространственно-временным процессом, коррелирующим с множеством постсинаптических мембранных потенциалов или с пространственно-временной структурой постсинаптических рецепторов.

Связь, или кросс-корреляция, между этими двумя случайными процессами происходит путем обмена энергией между парами гомологических частот (ω_i, ω_j), общих для спектров обоих процессов, и оценивается функцией когерентности

$$\mathrm{coh}\,(\omega) = \frac{\Phi_{ij}\,(\omega)}{\sqrt{\Phi_i\,(\omega)\,\Phi_j\,(\omega)}}, \qquad \text{(A.3.1)}$$

где $\Phi_{ij}(\omega)$ — кросс-спектр, а Φ_i, Φ_j — автоспектры соответствующих процессов. Результат кросс-корреляции по фазе и амплитуде определяет «степень узнавания» между *поступающим* сигналом и *хранящимся* праобразом (архетипом), или между «неизвестной» и «ожидаемой» структурой.

Типичный случай когнитивного отказа наблюдается при шизофрении, когда предварительный анализ ЭЭГ [П.20) не обнаруживает четкой дифференциации типов активности на ЭЭГ между нормальными и больными лицами. В этой связи мы хотели бы выдвинуть гипотезу, согласно которой когнитивный отказ может быть обусловлен возбуждением таких типов генов, которые никогда не были активированы в нейронном геноме или в «инфантильных» генах, т. е. генах, некогда закодированных для синтеза компонент плода, но с тех пор непрестанно находившихся в подавленном состоянии. Активация таких типов генов, в остальном нормальных, но функционирующих по аномальной схеме, приводит к производству «архаических» типов белков и покрытию ими дендритных нейронных поверхностей.

Эти типы белков, работающих «несогласованно» со временем, могут блокировать и тормозить нормальное продолжение когнитивного процесса. Недавно было высказано предположение [П.21] о том, что неправильная активация (например, через действие гормонов) генов плода в взрослых организмах может вызывать эпигенетический рак в делящихся клетках. Разумеется, эпигенетический рак можно считать сопутствующим явлением при когнитивном отказе на некоторых органических иерархических уровнях. Перспективы такой аналогии между механизмами эпигенетического рака и шизофренней заслуживают дальнейшего изучения.

Наконец, нельзя не отметить, что наша гипотеза о природе шизофрении отнюдь не противоречит результатам экспериментов по изучению успокоительного действия фенотиазинов, бутирофенона и других «антишизофренических» препаратов. Эти ве-

щества, по-видимому, блокируют постсинаптические «сайты» рецепторов допамина (нейромедиатора, который поглощается первоначально выделившим его пресинаптическим окончанием или попадает в синаптическую щель). Чисто умозрительно можно было бы высказать гипотезу о том, что антишизофреническое действие названных выше препаратов осуществляется через блокаду «сайтов» рецепторов допамина в мозге. Однако эти «сайты», блокированные, как описано выше, могут быть не связанными непосредственно с шизофренической аномалией, а представлять лишь косвенный эффект, «который отстоит на несколько шагов от истинной причины этого заболевания» [П.21]. Этот вывод следует из того, что перечисленные выше медикаменты не излечивают шизофрению, а лишь способствуют ремиссии этой болезни. Понижая активность соответствующего нейромедиатора (допамина) и тем самым нарушая связь между чувственными восприятиями и «внутренним» множеством постсинаптических мембранных рецепторов, эти лекарства, по нашему мнению, просто блокируют образование «деформированных» когнитивных структур, т. е. образования соответствующих кросс-корреляций. Первичной же причиной искажения этих структур согласно нашей модели является существование генетически производимых «неправильных» белков, покрывающих постсинаптические «сайты» рецепторов.

Выяснение деталей нарисованной нами общей картины — дело экспериментаторов, которые должны доказать или опровергнуть существование гипотетических «инфантильных» белков, например, в сыворотке шизофреника и оценить их количество.

Б. О трудности описания связи между двумя иерархическими уровнями с помощью непрерывной нелинейной динамики

В разд. 4.7 мы (на конкретном примере) подробно рассмотрели процесс связи между *двумя* иерархическими системами, моделируемыми управляемыми марковскими цепями. В этом приложении мы хотим обосновать *разбиение* пространства состояний каждого иерархического уровня на дискретные элементы, указав на внутренние трудности, возникающие при описании на основе непрерывной динамики. Итак, примем непрерывное описание в терминах пространства-времени. Это описание включает в себя несколько динамических переменных и набор параметров, соответствующих данному иерархическому уровню.

Б.1. Уровень Q партнера I

Динамика на уровне Q описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$d\mathbf{q}_1 = \varphi_1(\mathbf{q}_1;\ \mathbf{v}_1;\ t)\,dt + \Gamma_1(\mathbf{q}_1;\ \mathbf{v}_1;\ t)\,d\mu_1, \qquad \text{(Б.1.1)}$$

где

$\mathbf{q}_1$ — вектор состояния для уровня Q,

t — время,

$\mathbf{v}_1$ — вектор управляющих параметров, который будет определен ниже,

μ_1 — процесс Винера — Леви с автокорреляцией

$$E\left[\mu_1^T(t_1)\,\mu_1(t_2)\right] = M\min(t_1,\ t_2),$$

где $\mathbf{M}$ — положительно определенная ковариационная матрица,

$\varphi_1(\mathbf{q}_1;\ \mathbf{v}_1;\ t)$ — вектор-функция, определяющая динамическую структуру уровня Q, параметризованного вектором $\mathbf{v}_1$, который включает в себя все параметры «игры»,

$\Gamma_1(\mathbf{q}_1;\ \mathbf{v}_1;\ t)$ — матричная функция, параметризованная так же, как φ_1.

Временная эволюция совместной функции плотности вероятности компонент вектора состояния описывается уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова.

Аналогично, на Q'-уровне партнера II мы имеем стохастическое уравнение Ито

$$d\mathbf{q}_2 = \varphi_2(\mathbf{q}_2;\ v_2;\ t)\,dt + \Gamma_2(\mathbf{q}_2;\ \mathbf{v}_2;\ t)\,d\mu_2, \qquad \text{(Б.1.2)}$$

где $\mathbf{q}_2$ — вектор состояния для уровня Q'.

Б.2. Гомеостаз и кросс-корреляции

В фазовом пространстве на уровне Q (или Q') мы выделяем область H_1 (или H_2), которая характеризуется как гомеостатическая: эта область, в которой активность должна быть сосредоточена предпочтительно (но не исключительно) на уровне Q (или Q'), чтобы достичь внутренней регуляции системы на данном уровне. Но для обеспечения адаптируемости к партнеру организм должен установить сильные кросс-корреляции между сигналами $\mathbf{s}_2(t)$, индуцируемыми верхним уровнем W' партнера и вектором состояния $\mathbf{q}_1(t)$. Для любого данного множества сигналов, испускаемых партнером, из требования сильной кросс-корреляции следует весьма интенсивное использование траектории на уровне Q (или Q'). Однако столь интенсивное «блуждание» в пространстве состояний нарушает требование гомеостаза.

Следовательно, в общем случае две основные тенденции для каждого партнера, именно необходимость поддержания гомеостаза и тенденция к непрерывной адаптации к особенностям поведения партнера, вступают между собой в конфликт. Верхние уровни W (или W') действуют как стохастические контроллеры, призванные смягчить этот конфликт путем компромисса.

Пусть $u_1(t)$ — вероятность того, что во время t состояние $\mathbf{q}_1(t)$ находится в гомеостатической области H_1, т. е.

$$u_1(t) = P(\mathbf{q}_1(t) \in H_1) = \int_{H_1} P(\mathbf{q}_1;\ t)\, d\mathbf{q}_1, \qquad \text{(Б.2.1)}$$

где $P(\mathbf{q}_1;\ t)$ — совместная функция плотности вероятности компонент вектора состояния $\mathbf{q}_1(t)$.

Кросс-корреляция между сигналами с уровня W' и состоянием уровня Q определяется соотношением

$$r(t,\ \tau) = E\left[\mathbf{s}_2^T(t+\tau)\,\mathbf{q}_1(t)\right], \qquad \text{(Б.2.2)}$$

где T — транспонирование вектора, τ — время запаздывания, фиксированное для взаимодействия двух данных систем, например, $\tau = 0$. Заметим, что векторы $\mathbf{s}_2$ и $\mathbf{q}_1$ имеют одинаковую размерность. Данные, афферентно передаваемые с уровня Q на уровень W, — это средние по времени, аппроксимирующие величину $r(t, \tau)$. Иначе говоря, пусть T — продолжительность интервала времени

$$I = \{t' : t - T \leqslant t' < t\}.$$

Тогда

$u(t)$ — доля времени, в течение которого $q_1(t') \in H_2$ (области гомеостаза) при $t' \in I$.

Кросс-корреляция равна

$$r(t,\ \tau) = \int_{t-\tau-T}^{t-\tau} \mathbf{s}_2^T(\lambda+\tau)\,\mathbf{q}_1(\lambda)\, d\lambda,$$

где мы выбираем либо $\tau = 0$, либо такое τ, чтобы величина $E[r(t, \tau)]$ была максимальной.

Б.3. Уровень W партнера I

Динамика на уровне W описывается следующими стохастическими дифференциальными уравнениями

$$d\mathbf{w}_1 = \mathbf{f}_1(w_1;\ u,\ r)\, dt + \mathbf{G}_1(\mathbf{w}_1;\ u,\ r)\, d\xi_1, \qquad \text{(Б.3.1)}$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{h}_1(\mathbf{w}_1;\ u,\ r), \qquad \text{(Б.3.2)}$$

где

$\mathbf{w}_1$ — вектор состояния на уровне W,

$\zeta_1(t)$ — процесс Винера — Леви, учитывающий внутреннюю спонтанность системы на уровне W,
$s_1(t)$ — наблюдаемое поведение, действующее как пусковой сигнал на партнера.

Б.4. Контроллер

Механизм упреждающего управления для каждой системы имеет в качестве входных сигналов афферентные сигналы — вероятность пребывания в области гомеостаза u и корреляцию r,

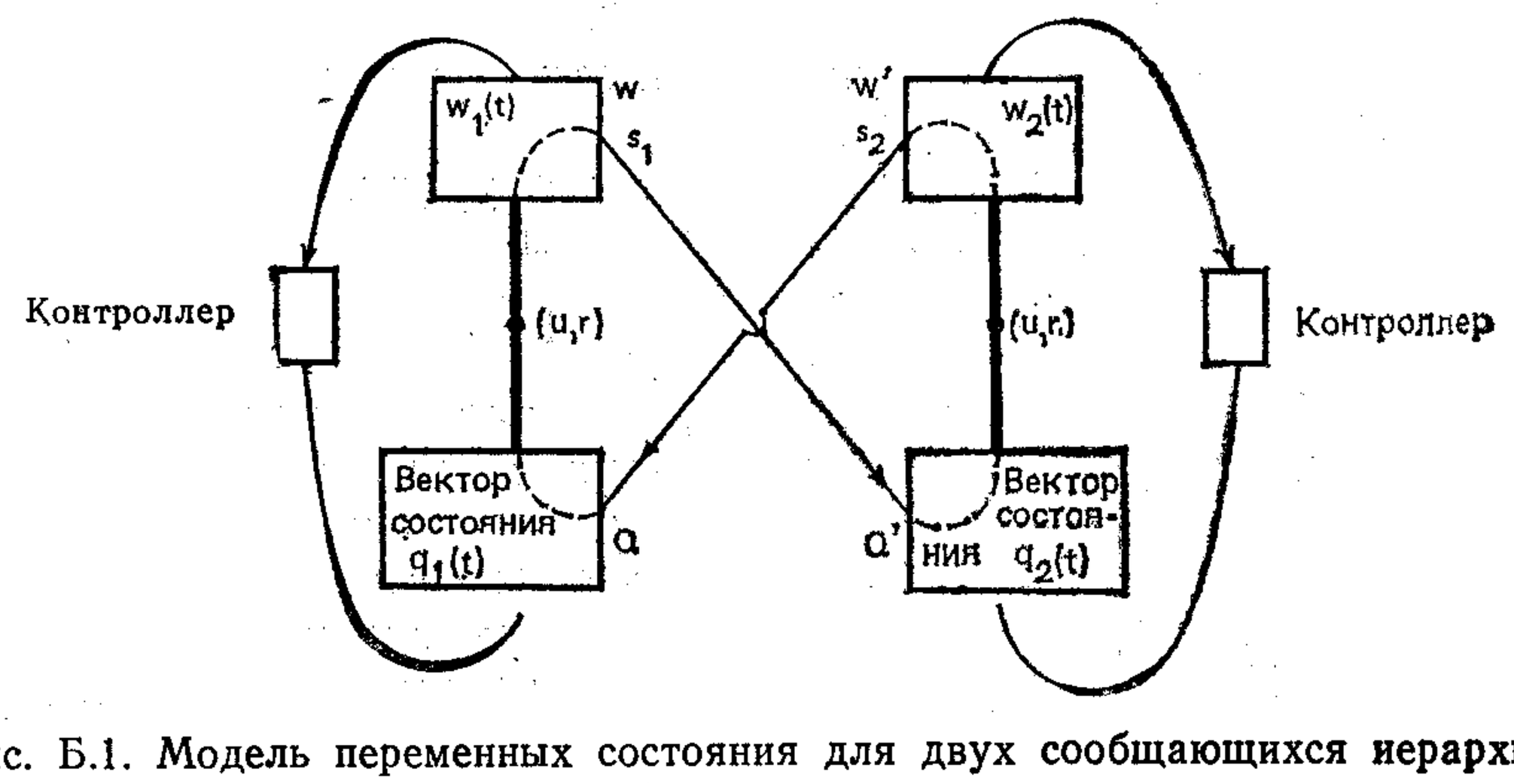


Рис. Б.1. Модель переменных состояния для двух сообщающихся иерархических систем.

а также вектор состояния $\mathbf{w}_1$ верхнего уровня W. Таким образом, уравнения состояния для контроллера имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{q}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, u, r),$$

где $\mathbf{g}_1$ — вектор-функция, которую требуется определить так, чтобы целевая функция (совместная добротность) F была максимальной. Функция F определяется следующим образом:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 \text{ (мультипликативный критерий)},$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \lambda_1 E[u_1] + (1 - \lambda_1) E[r_1],$$
$$\mathcal{F}_2 = \lambda_2 E[u_2] + (1 - \lambda_2) E[r_2]$$

при $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$,
или

$$\mathcal{F} = \sigma_1\mathcal{F}_1 + \sigma_2\mathcal{F}_2 \text{ (аддитивный критерий)}.$$

Для мультипликативной добротности характерно сильное предпочтение *паритета* между партнерами, в то время как ад-

дитивный критерий «уравнивает в правах» и паритет между партнерами, и полное господство опорного партнера над другим.

Для простоты в работе, о которой сообщалось в разд. 4.7, мы квантовали пространство состояний на каждом иерархическом уровне и рассматривали только конечное число состояний, соответствовавших наиболее характерным чертам данного уровня. Так, стохастические нелинейные дифференциальные уравнения, соответствующие непрерывному описанию состояния, при таком подходе заменяются на всех иерархических уровнях марковскими цепями с дискретным временем, задаваемыми матрицами перехода P_{ij}, полностью описывающими переходы между возможными состояниями систем на уровнях $W(W')$ и $Q(Q')$ (рис. Б.1).

В. Шумовая синхронизация слабо нелинейного релаксационного осциллятора под действием внешнего гармонического возбуждения

В.1. Общее описание модели

Наиболее характерным параметром незатухающих (нелинейных) диссипативных колебаний является количество энергии, которой обменивается совершающая колебания система с окружающей средой. Если взаимодействие между осциллятором и внешним возбуждением мало (как в «маятникообразном» осцилляторе), то в каждый период колебаний запас энергии может измениться лишь на малую величину, и полное изменение занимает много периодов. С другой стороны, если взаимодействие велико (как в релаксационных колебаниях), то полное изменение запаса энергии происходит всего лишь за несколько периодов.

В этом приложении мы примем модель незатухающих колебаний (например, модель биологических ритмов) простого генератора ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0\varepsilon(1-\beta x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E\cos\omega t, \qquad \text{(В.1.1)}$$

на который воздействует гармонический ритмоводитель с (постоянной) амплитудой E и частотой $\omega \neq 0$ $(\Delta\omega = \omega - \omega_0)$. Коэффициент ε указывает на интенсивность обмена энергией. При $\varepsilon \ll 1$ генератор принадлежит к числу «маятникообразных», при $\varepsilon \gg 1$ мы имеем релаксационные колебания.

В чисто маятниковых колебаниях частота ω_0 не зависит от всех внешних влияний, но амплитуда колебаний изменяется в

зависимости от изменяющихся условий окружающей среды. С другой стороны, в чисто релаксационных колебаниях амплитуда колебаний не зависит от всех внешних воздействий, тогда как частота изменяется в значительной степени в зависимости от изменяющихся внешних условий. Из известных свойств биологических ритмов можно заключить, что «самозаводящиеся» биологические часы должны занимать промежуточное положение между двумя предельными типами — «маятника» и «релаксационными колебаниями».

Ниже мы будем считать, что $\varepsilon = 0{,}1$ и $\beta = 0{,}1$.

B.2. Метод исследования синхронизации

Для изучения процессов синхронизации в нелинейных осцилляторах с внешним гармоническим возбуждением мы воспользуемся здесь методом, основанным на исследовании траекторий на плоскости $(d\varphi/dt, \varphi)$, где φ — мгновенная разность фаз между ритмоводителем и осциллятором. Этот метод довольно абстрактен и сосредотачивает внимание на основных, наиболее важных особенностях интересующей нас задачи.

Одного лишь взгляда на траектории в плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$ достаточно, чтобы определить наступление синхронизации (жесткой или «свободной») или ее отсутствие. Из множества различных траекторий мы можем выделить в общем случае четыре характерных типа.

B.2.1. Жесткая синхронизация

Внешне она проявляется как подавление автопериодического колебания (рис. B.1а). В этом случае при любых начальных условиях $\dot{\varphi}(0), \varphi(0)$ осциллятор в конце концов синхронизируется с внешним возбуждением, и устанавливается постоянная разность фаз Φ. В нелинейной диссипативной системе такая вынужденная «гармонизация» ангармонических колебаний сводится к их подавлению и может быть достигнута при весьма больших значениях E; этот случай не представляет для нас физического интереса.

B.2.2. Свободная, или «дергающаяся», синхронизация

В этом случае при любом начальном условии разность фаз становится зависящей от времени, но остается ограниченной, и траектория в плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$ выходит на предельный цикл (рис. B.1, *б*). Этот предельный цикл соответствует свободной синхронизации: осциллятор, хотя и затянут на частоту ω, ста-

новится модулированным по фазе, или «дергающимся». Этот эффект систематически наблюдался во многих биологических

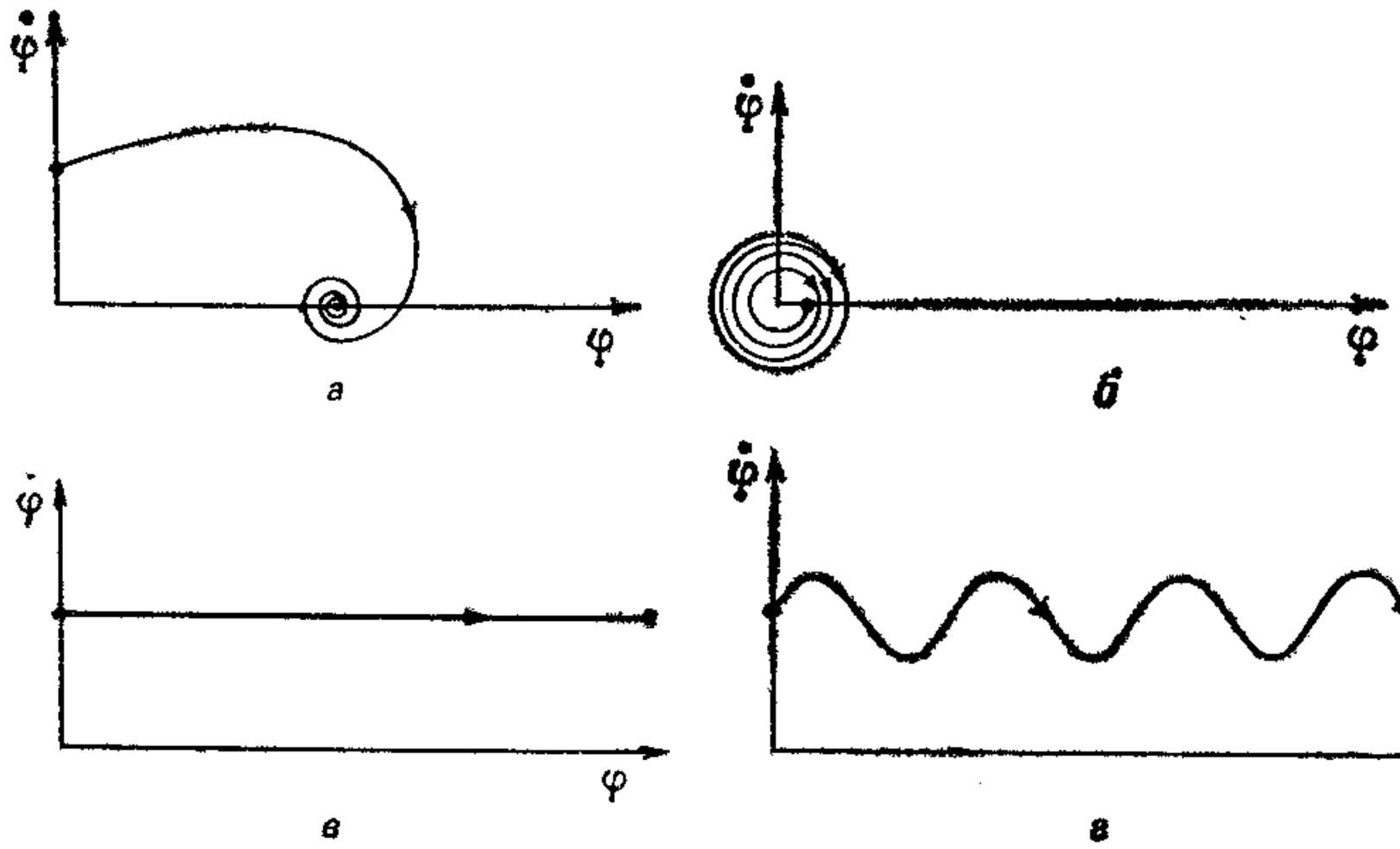


Рис. В.1. Типичные траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$: *а* — жесткая синхронизация; *б* — мягкая синхронизация; *в* — чистые свободные колебания; *г* — модулированные свободные колебания.

ритмах (в том числе циркадных часах) под воздействием естественной окружающей среды.

В.2.3. Чистые «свободно бегущие» колебания

В этих случаях осциллятор колеблется с собственной частотой. Захвата частоты не происходит, и разность фаз со временем изменяется линейно (рис. В.1, *в*).

В.2.4. Свободно бегущие колебания

В этом случае синхронизация никогда не наступает, разность фаз со временем изменяется по непериодическому закону, а мгновенная частота совершает колебания относительно постоянного среднего значения (рис. В.1, *г*).

В.3. Аналитические вычисления и моделирование на компьютере

Преобразуем уравнение (В.1.1), чтобы вывести дифференциальные уравнения движения в плоскости $(\dot{\varphi}, \varphi)$. Запишем решение уравнения (В.1.1) в виде

$$x(t) = A(t) \sin [\omega t - \varphi(t)] = A(t) \sin \psi(t), \qquad \text{(В.3.1)}$$

где $\psi(t) = \omega t - \varphi(t)$. Перед нами волновое движение с модуляцией по амплитуде и фазе. Здесь $\varphi(t)$ — мгновенная разность

фаз между ритмоводителем и осциллятором, $A(t)$ — изменяющаяся в зависимости от времени амплитуда колебаний. Дифференцируя решение (В.3.1) по t, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}\sin\psi + A\left(\omega - \frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\psi \qquad \text{(В.3.2)}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2A}{dt^2} + 2\omega A\frac{d\varphi}{dt} - A\omega^2 - A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\sin\varphi + \left(2\omega\frac{dA}{dt} - 2\frac{dA}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - A\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\cos\psi. \qquad \text{(В.3.3)}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (В.1.1), получаем

$$M(t)\sin\psi + N(t)\cos\psi = 0, \qquad \text{(В.3.4)}$$

где

$$M(t) = \frac{d^2A}{dt} - \varepsilon f\frac{dA}{dt} + (\omega_0^2 - \omega)A + 2\omega A\frac{d\varphi}{dt} - A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 E\sin\varphi, \qquad \text{(В.3.5)}$$

$$N(t) = -A\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\frac{dA}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon f A\frac{d\varphi}{dt} + 2\omega\frac{dA}{dt} - \varepsilon f\omega A - \omega_0^2 E\cos\varphi \qquad \text{(В.3.6)}$$

и

$$f = (1 - \beta x^2)\omega_0 = \omega_0\{1 - \beta A^2\sin^2[\omega t - \varphi(t)]\}. \qquad \text{(В.3.7)}$$

Определим $A(t)$ и $\varphi(t)$ так, чтобы квадратичные члены одновременно обратились в нуль, т. е. $M(t) = 0$ и $N(t) = 0$ (в этом случае условие (В.3.4) выполняется).

Таким образом, связанные нелинейные дифференциальные уравнения для $A(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид

$$\frac{d^2A}{dt^2} - \varepsilon f\frac{dA}{dt} + (\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\omega A\frac{d\varphi}{dt} - A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\omega_0^2 E\sin\varphi, \qquad \text{(В.3.8)}$$

$$-A\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\frac{dA}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon f A\frac{d\varphi}{dt} + 2\omega\frac{dA}{dt} - \varepsilon f\omega A = \omega_0^2 E\cos\varphi. \qquad \text{(В.3.9)}$$

Это — четырехмерная система, зависящая от времени, которую можно моделировать на аналоговом или цифровом компьютере. Прежде чем переходить к моделированию, запишем нашу систему уравнений в каноническом виде. Выберем следую-

щие переменные состояния:

$$q_1(t) = \varphi(t) \quad \text{— ошибка в фазе;}$$

$$q_2(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t) \quad \text{— мгновенное приращение угловой скорости;}$$

$$q_3(t) = A(t) \quad \text{— амплитуда;}$$

$$q_4(t) = \frac{dA(t)}{dt} \quad \text{— скорость изменения амплитуды.}$$

Можно показать, что в канонической форме наши уравнения имеют вид

$$\frac{dq_1}{dt} = q_2, \tag{B.3.10}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \left(\frac{2q_4}{q_3} - \varepsilon f\right)(\omega - q_2) - \omega_0^2 \frac{E \cos q_1}{q_3}, \tag{B.3.11}$$

$$\frac{dq_3}{dt} = q_4, \tag{B.3.12}$$

$$\frac{dq_4}{dt} = \varepsilon f q_4 + q_3\left[(\omega - q_2)^2 - \omega_0^2\right] - \omega_0^2 E \sin q_1, \tag{B.3.13}$$

где

$$f = \omega_0\left[1 - \beta q_3^2 \sin^2(\omega t - q_1)\right]. \tag{B.3.14}$$

Единственный член в системе, зависящий явно от времени, это f. Функция f изменяется с угловой частотой 2ω, если происходит затягивание фазы, т. е. величина $q_1(t)$ ограничена. В явном виде f записывается так:

$$f = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\beta q_3^2\right) + \frac{1}{2}\omega_0 \beta q_3^2 \cos(2\omega t - 2q_1). \tag{B.3.15}$$

Таким образом, мы получаем неавтономную систему уравнений

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}(\mathbf{q};\ t), \tag{B.3.16}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор состояния:

$$\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)^T, \tag{B.3.17}$$

$\mathbf{y}$ — нелинейная вектор-функция:

$$\mathbf{y}(\mathbf{q};\ t) = [Y_1(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4;\ t),\quad Y_2(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4;\ t),$$
$$Y_3(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4;\ t),\quad Y_4(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4;\ t)]^T. \tag{B.3.18}$$

Если неавтономная система (B.3.16) исходит из некоторого начального состояния $\mathbf{q}(0)$, то ее эволюция определяется траекторией в четырехмерном пространстве состояний. Нас сейчас интересует только проекция этой траектории на плоскость (q_1, q_2), т. е. ($\dot{\varphi}$, φ). Это связано с тем, что самый прямой метод

изучения синхронизации по частоте состоит в исследовании *ошибки*, или *рассогласования, по фазе*. Вариации амплитуды имеют второстепенное значение. Исключить аналитически переменные состояния $q_3 = A$ и $q_4 = A$ из дифференциальных уравнений (В.3.10)—(В.3.13), чтобы получить непосредственно дифференциальные уравнения движения в проекции на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ не представляется возможным. Уравнения (В.3.10)—(В.3.13) можно было бы рассматривать как параметрическое представление этого движения. При моделировании системы на цифровом компьютере мы, задав начальное состояние $\mathbf{g}(0)$, сосредотачиваем внимание на значениях $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при одном и том же t. Для численного интегрирования системы (В.3.10)—(В.3.13) на цифровом компьютере мы использовали метод Рунге — Кутта.

В.4. Поведение осциллятора под действием приложенного извне гармонического возбуждения (затягивание частоты)

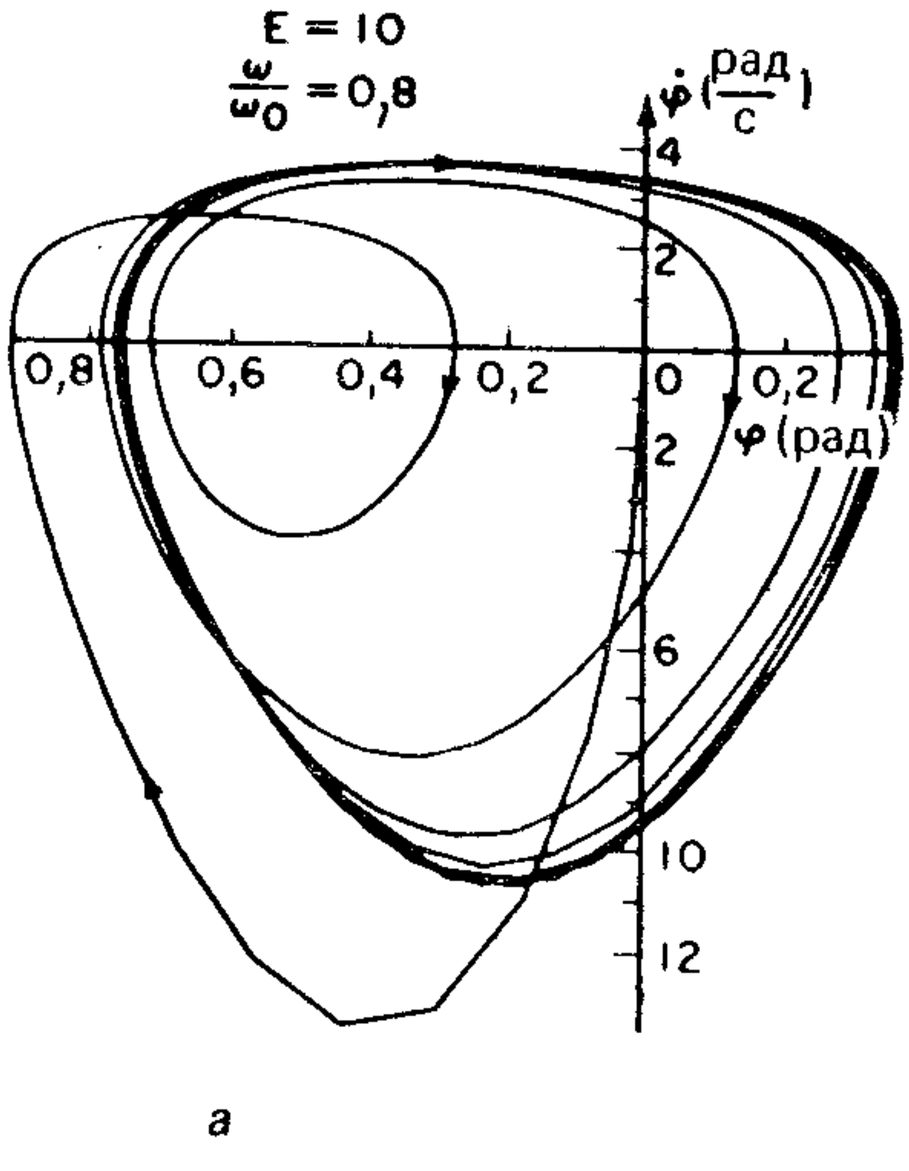
Предположим, что при $t = 0$ к осциллятору ван дер Поля приложено внешнее электромагнитное поле. Нормированная величина напряженности поля равна E, его угловая частота ω отлична от собственной угловой частоты ω_0 осциллятора. Таким образом, мы имеем внезапно приложенную расстройку по частоте $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ или нормированную расстройку на входе $\gamma = (\omega/\omega_0) - 1$.

При моделировании на компьютере мы выбрали два различных значения амплитуды нормированного поля $E = 10$ и $E = 1$ и 23 значения угловой частоты ω для каждой E, т. е. ω/ω_0 от 0,1 до 2 с шагом 0,1 и затем 2,5; 3 и 10, или нормированную расстройку на входе $\gamma = 0; \pm 0{,}1; \pm 0{,}2; \ldots, \pm 0{,}9; 1; 1{,}5; 2{,}9$. Таким образом, всего мы прогнали нашу программу 46 раз. На графопостроителе нашего компьютера мы получили соответствующие траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ и построили кривые $x(t)$. Приведем здесь лишь одну группу построенных кривых.

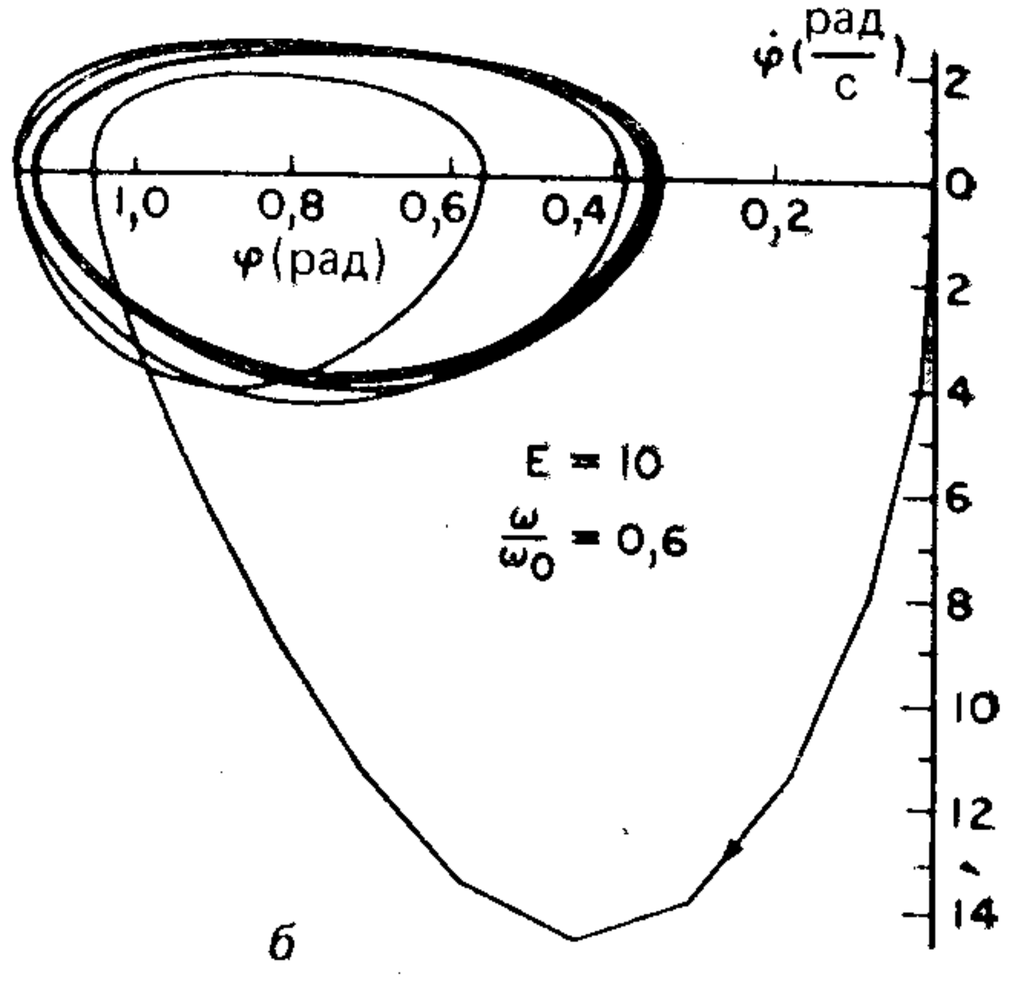
На рис. В.2—В.4 кривые соответствуют $E = 10$ [1]. На рис. В.2 показаны траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при отрицательной расстройке на входе, т. е. при $\omega/\omega_0 < 1$. Заметим, что при $0{,}4 < \omega/\omega_0 < 1$ происходит захват частоты, так как траектории стремятся к предельным циклам. Это — свободная синхронизация, т. е. частота захвачена, но имеется фазовая модуляция (дергающаяся фаза). Рассогласование по фазе φ остается огра-

---

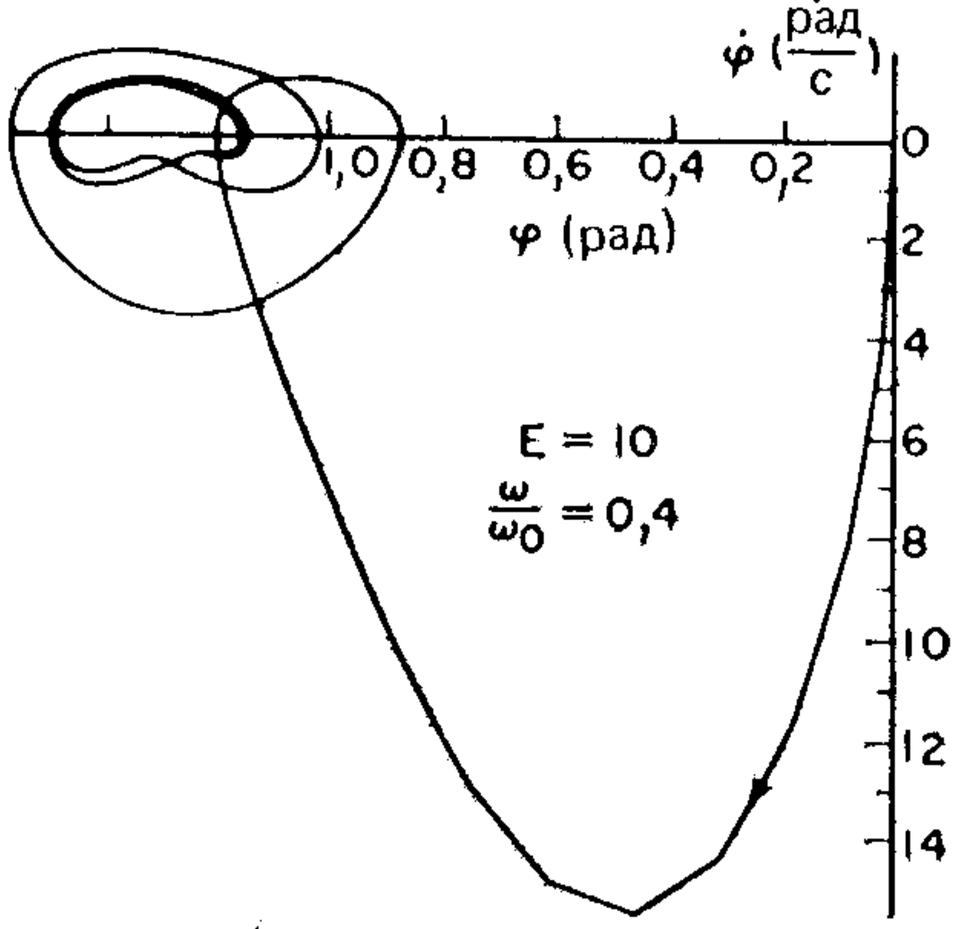
[1] Аналогичные результаты получаются и при $E = 1$. Различие состоит лишь в том, что с уменьшением E растяжение траекторий становится менее заметным.



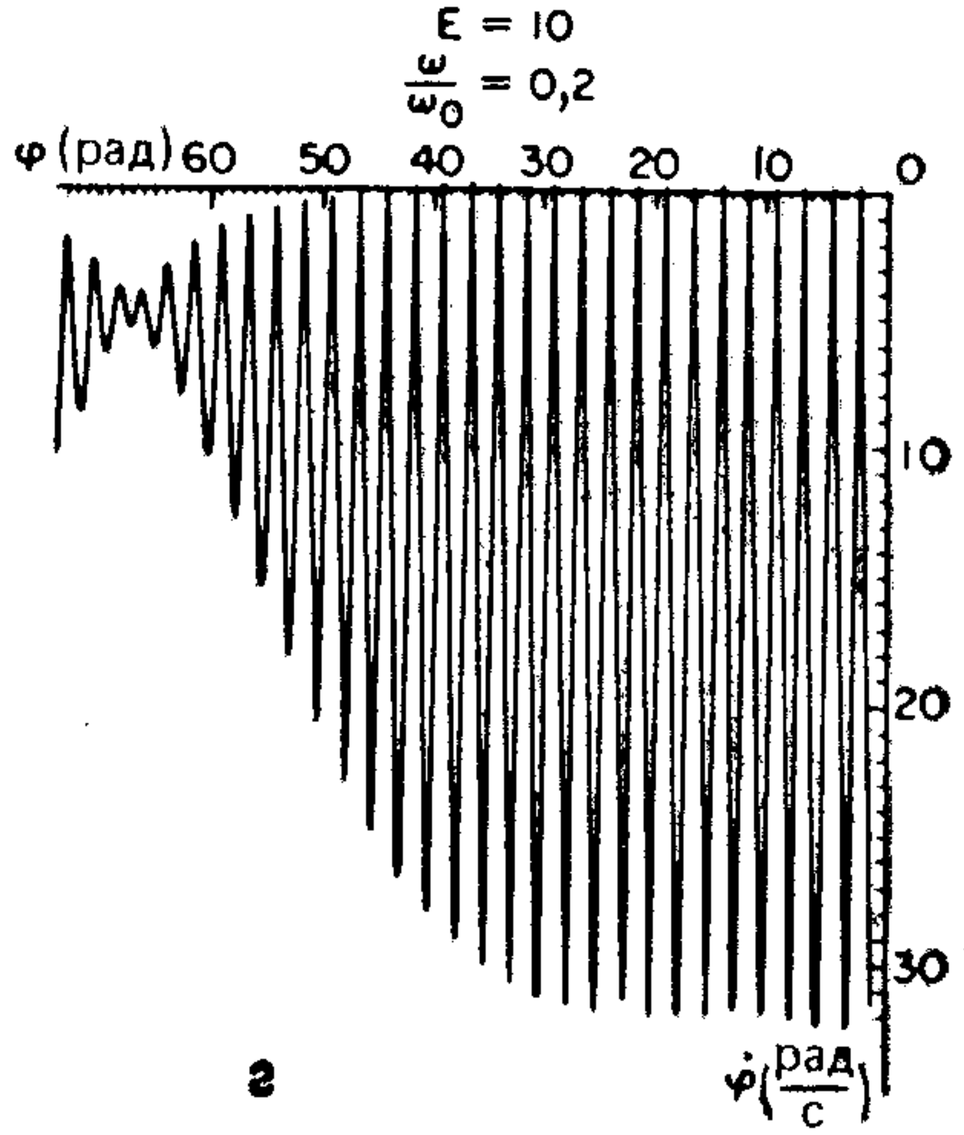
а



б



в



г

Рис. В.2. Траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $E = 10$, $\omega/\omega_0 < 1$. Отношение ω/ω_0 равно: *а*) 0,8; *б*) 0,6; *в*) 0,4 и *г*) 0,2.

ниченным; например, при $\omega/\omega_0 = 0{,}6$ рассогласование по фазе заключено в пределах $-1{,}2 < \varphi < -0{,}35$. При $\omega/\omega_0 < 2$ мы наблюдаем свободно бегущие колебания, т. е. синхронизация нарушается.

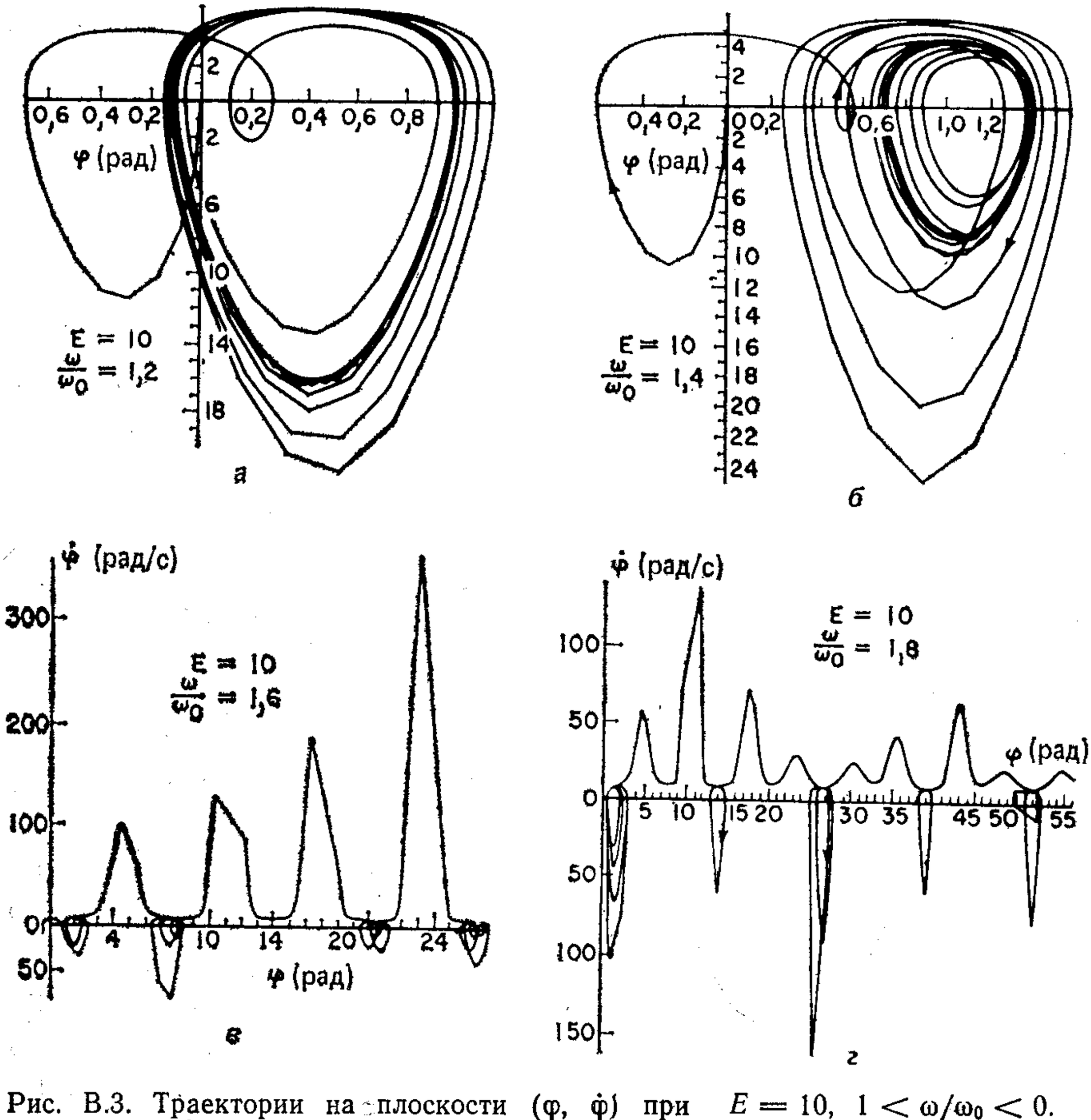


Рис. В.3. Траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $E = 10$, $1 < \omega/\omega_0 < 0$. Отношение ω/ω_0 равно: *а*) 1,2; *б*) 1,4; *в*) 1,6; *г*) 1,8.

Мы видим, что в нашем случае, когда $\varepsilon \ll 1$ («маятникоподобные» колебания) существует максимальное значение $0 < \gamma_e < 1$ (γ_e зависит от E, β и ω_0), такое, что при $-\gamma_e < \gamma < 0$, или $(1-\gamma_e)\omega_0 < \omega < \omega_0$, происходит синхронизация, а при $\gamma < -\gamma_e$, т. е. $\omega < (1-\gamma_e)\omega_0$ возникают свободно бегущие колебания. [Отметим, однако, что при значениях $\varepsilon \gg 1$ (переход

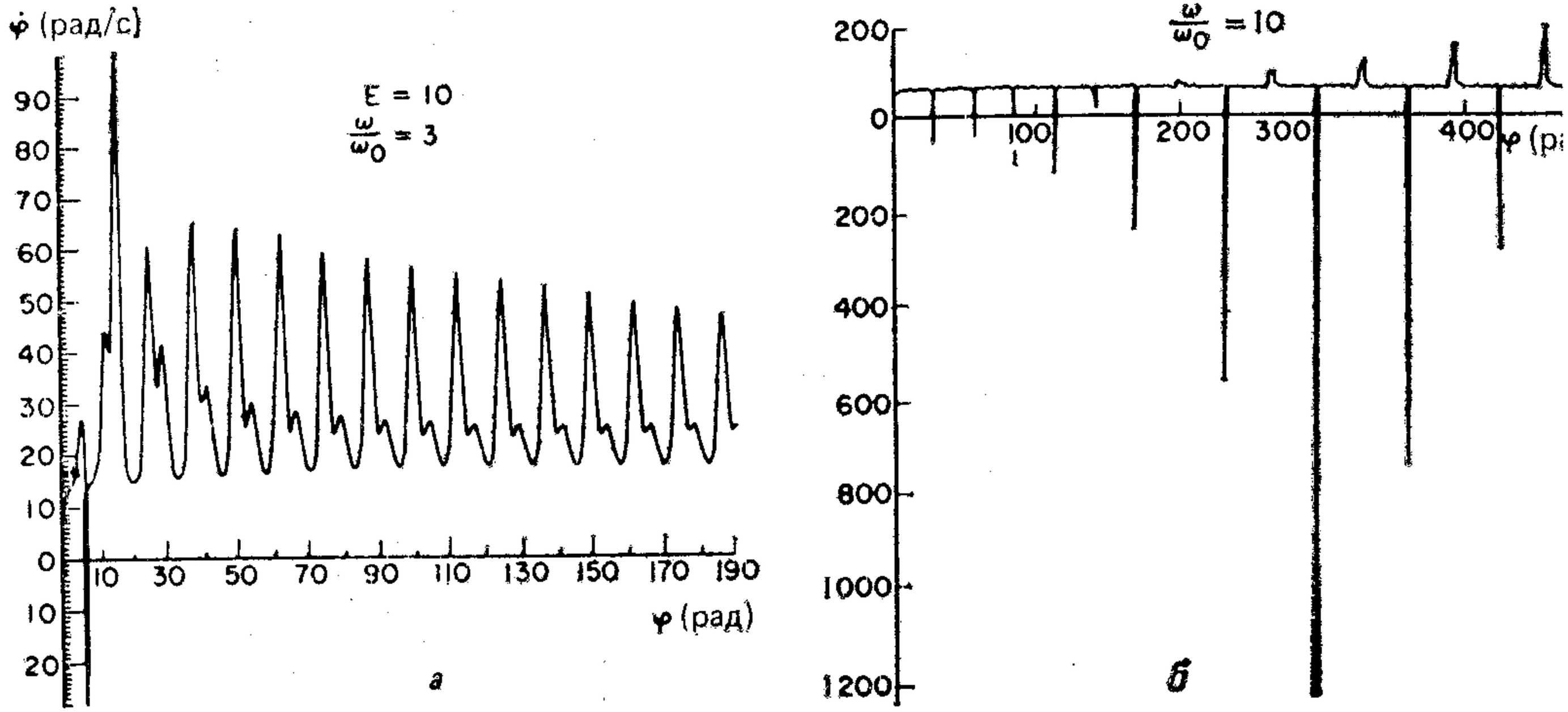


Рис. В.4. Траектории на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ при $E = 10$, $\omega/\omega_0 \geqslant 3$. Отношение ω/ω_0 равно: *а*) 3; *б*) 10.

от маятника к релаксационным колебаниям) может наблюдаться и субгармонический захват частоты.]

На рис. В.3, В.4 показаны фазовые диаграммы при $1 < \omega/\omega_0 < 2$ и $\omega/\omega_0 \geqslant 3$. При $1 = \omega/\omega_0 \leqslant 1{,}4$ происходит синхронизация (рис. В.3, *а*, *б*), в то время как при $\omega/\omega_0 < 1{,}6$ устанавливаются свободно бегущие колебания. Существует верхний предел γ_u, такой, что при $0 < \gamma < \gamma_u$ синхронизация происходит, а при $\gamma > \gamma_u$ устанавливаются свободно бегущие колебания.

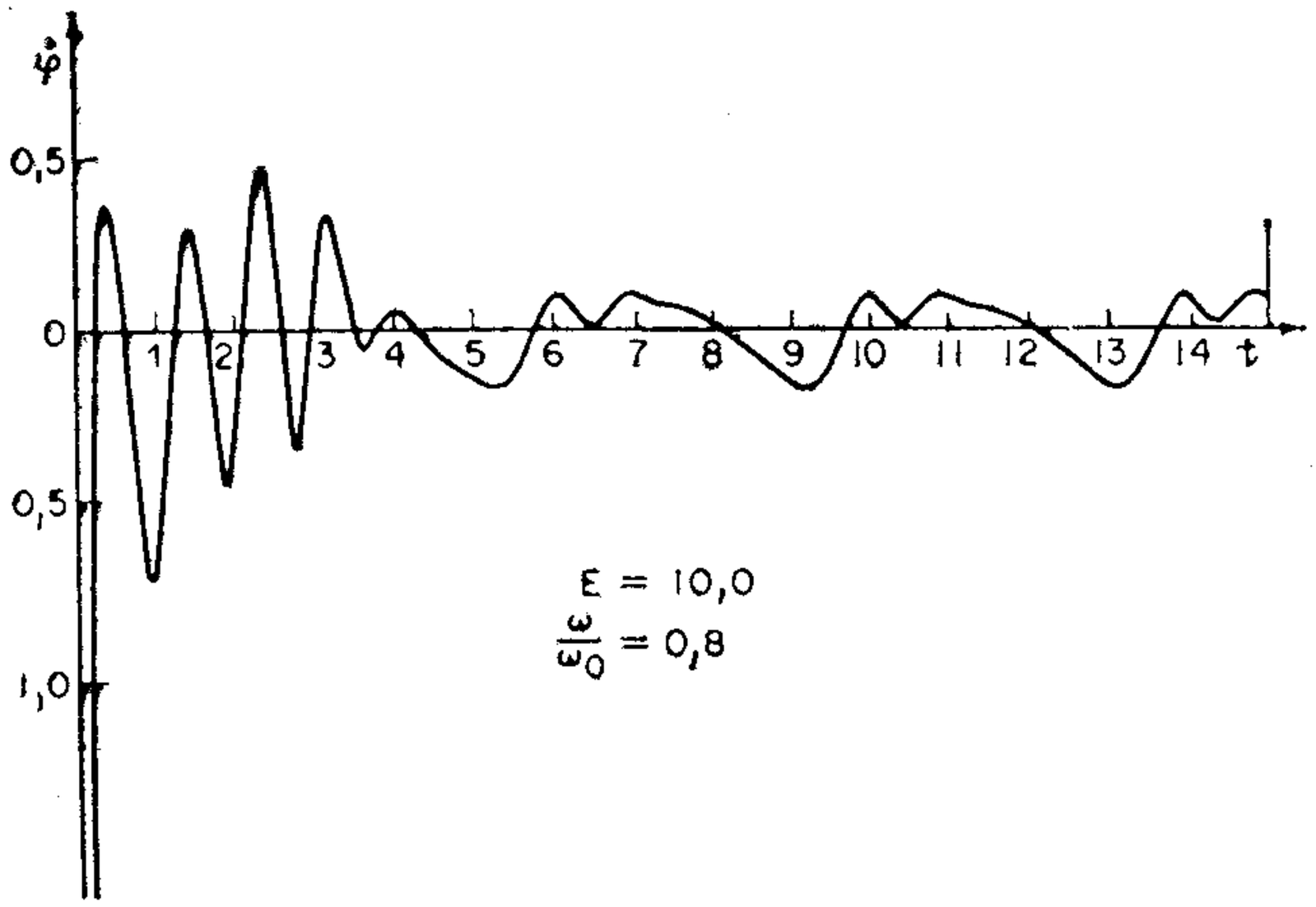


Рис. В.5. Кривая ($\dot{\varphi}$, t) при $E = 10$, $\omega/\omega_0 = 0{,}8$.

Сравнивая рис. В.2 и В.3 для противоположных значений γ, мы замечаем асимметрию в форме, размерах и расположении предельных циклов. Область синхронизации $-\gamma_e < \gamma < \gamma_u$ несимметрична относительно нуля ($\gamma_e > \gamma_u$). Почти в чистом виде свободно бегущие колебания наблюдаются при увеличении расстройки ω/ω_0 (рис. В.4).

Наконец, зависимость $\dot{\varphi} = f(t)$ была вычислена, чтобы оценить время установления синхронизации. На рис. В.5 видно, что «время синхронизации» равно нескольким собственным периодам $T_0 = 2\pi/\omega_0$ при $E = 10$ и $\omega/\omega_0 = 0{,}8$.

Литература[1)]

Глава 2

2.1. *Narlikar J.*, The Structure of the Universe, Oxford University Press, Oxford, 1977.
2.2. *Dyson J.*, Sci. Am., **226**, 184 (September 1971). [Имеется перевод: *Дайсон Ф.* Математика в физических науках. — В кн.: Математика в современном мире. — М.: Мир, 1967, с. 111—127.]
2.3. *Haken H.*, Synergetics: An Introduction, 3rd ed., Springer Ser. Synergetics, Vol. 1, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983. [Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.]
2.4. *Rosen R.*, Bull. Math. Biol., **38**, 87 (1976).
2.5. *Hahn W.*, Theory and Application of Lyapounov's Direct Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
2.6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, испр. и доп. — М.: Наука, 1974.
2.7. *Bennet C.*, Int. J. Theor. Phys., **21**, 905 (1982).
2.8 *Davies P. C. W.*, The Physics of Time Asymmetry, University of California Press, Berkeley, CA, 1977.
2.9. *McMurtrie R. E.*, J. Theor. Biol., **50**, 1 (1975).
2.10. *Chaitin G.*, Sci. Am., **230**, 47 (May 1975).

Глава 3

3.1. *Wheeler L. A., Feynman R.*, Rev. Mod. Phys., **17**, 157 (1945).
3.2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Изд. 2-е, доп. и перераб. — М.: Наука, 1973.
3.3. *Gabor D.*, Light and Information. — In: Progress in Optics, **1**, 503 (North-Holland, Amsterdam, 1961).
3.4. *Gabor D.*, Philos. Mag., **41**, 1161 (1950).
3.5. *di Francia G. T.*, Opt. Acta, **2**, 5 (1955).

Глава 4

4.1. *Hamming R. W.*, Coding and Information Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y., 1980.
4.2. *Beckmann P.*, Probability in Communication Engineering, Harcourt Brace and World, New York, 1967.
4.3. *Forney G. D.*, Concatenated Codes, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.
4.4. *Huffman D. A.*, Proc., IRE, **40**, 1098 (1952).
4.5. *Gatlin L.*, Information Theory and the Living System, Columbia University Press, New York, 1972.

[1)] Мы приводим здесь (с извинениями за возможный пропуск важных работ) лишь те ссылки, которые наиболее полно отвечают замыслу автора настоящих лекций.

4.6. *Siforov V. I.*, On the Theory of Radio Communication Channels with Randomly Varying Parameters. — In: Proc. 13th Int. URSI Conf., ed. S. Silver, North-Nolland, Amsterdam, 1963, p. 164—194.
4.7. *di Francia G. T.*, Opt. Acta, **2**, 5 (1955).
4.8. *Lebedev D. S., Levitin L. B.*, Inf. Control, **9**, 1 (1966).
4.9. *Johnson H. A., Knudsen K. D.*, Nature (London), **206**, 930 (1965).
4.10. *Gaines B. R.*, On the Complexity of Causal Models, IEEE Trans., SMC-**6**, 56 (1976).
4.11. *Nicolis J. S., Benrubi M.*, J. Theor. Biol., **59**, 76 (1976).
4.12. *Gershon E. S., Belmaker R. H., Kety S. S., Rosenbaum M.*, The Impact of Biology in Modern Psychiatry, Plenum, New York, 1977.
4.13. *Wolf S., Berle B. B.*, The Biology of the Schizophrenic Process, Plenum, New York, 1976.
4.14. *Hill O. W.*, Modern Trends in Psychosomatic Medicine, Vol. 3, Butterworth, London, 1976.
4.15. *Watzlawick P., Beavin J. H., Jackson D. D.*, Pragmatics of Human Communication, Norton, New York, 1967.
4.16. *Bateson G., Jackson D. D., Haley J., Weakland J.*, Behav. Sci., **1**, 196 (1956).
4.17. *Sluzki C. E., Ransom D. C.*, Double Bind, The Foundation of Communicational Approach to the Family, Grune & Stratton, New York, 1976.
4.18. *Nicolis J. S., Protonotarios E. N., Voulodemou I.*, Control Markov Chain Models for Biological Hierarchies. — In: Applied General Systems Research. Recent Developments and Trends, Plenum, New York, 1977; J. Theor. Biol., **68**, 563 (1977).
4.19. *Verzeano M.*, Pacemakers, Synchronization, and Epilepsy. — In: Synchronization of EEG Activity in Epilepsies, eds. H. Petsche, M. A. B. Brazier, Springer, Berlin, Heidelberg, p. 154.
4.20. *Scheibel M. E., Scheibel D. B.*, Patterns of Organization in Specific and Non-Specific Thalamic Fields. — In: The Thalamus, eds. D. P. Purpura, M. D. Yahr, Academic, New York, 1966.
4.21. *Verzeano M. et al.*, Evoked Responses and Network Dynamics. — In: The Natural Control of Behavior, eds. R. E. Whalen, R. F. Thoson, M. Verzano, S. Weinberger, Academic, New York, 1970.
4.22. *Moruzzi G., Magoun H. W.*, Clin. Neurophysiol, **1**, 455—458 (1949).
4.23. *Kilmer W., McCulloch W. S.*, The Reticular Formation Command and Control System. — In: Information Processing in the Nervous System. ed. G. Leibovic, Springer, Berlin, Heidelberg, 1972.
4.24. *Scheibel M. E., Scheibel D. B.*, Anatomic Basis of Attention Mechanism in Vertebrate Brains. — In: The Neurosciences, A Study Program, ed. G. Quatron et al., Rockefeller University Press, New York, 1967.
4.25. *Turing A.*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. **B237**, 37 (1952).
4.26. *Nicolis G., Prigogine I.*, Self-Organization in Non-Equilibrium Systems, Wiley, New York, 1977. [Имеется перевод: *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. — М.: Мир, 1979.]
4.27. *Haken H.*, Synergetics: An Introduction, 3rd ed., Springer Ser. Synergetics, Vol. 1, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983. [Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.]
4.28. *Nicolis J. S.*, Protonotarios, Int. J. Bio-Med. Comput., **10**, 417 (1979).

Глава 5

5.1. *Rapoport A.*, Two-Person Theory, The Essential Ideas, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1966.
5.2. *Nicolis J. S., Argitis J. M., Carabalis D.*, Kybernetes, **12**, 9—20 (1983).
5.3. *Bremermann H.*, J. Theor. Biol., **87**, 672 (1980).

5.4. *Maynard-Smith J.*, J. Theor. Biol., **47**, 209 (1974).
5.5. *Maynard-Smith J.*, *Price G. R.*, Nature (London), **246**, 15 (1973).
5.6. *Rapoport A.*, General Systems Yearbook, **20**, 49 (1975).
5.7. *Frauenthal J. C.*, Mathematical Modeling in Epidemiology, Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.

Глава 6

6.1. *Kolmogorov A. N.*, General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanisms. — In: Proc. 1954 Intern. Cong. Mathematics, North — Holland, Amsterdam, 1957, p. 315—333. [Имеется перевод: *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика. — В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме. — М.: Физматгиз, 1961, с. 185—208.]
6.2. *Fermi E.*, *Pasta I. R.*, *Ulam S. M.*, Los Alamos National Laboratory Report No. LA-1940, 1955. [Имеется перевод: *Ферми Э.*, *Паста Дж.*, *Улам С.* Исследование нелинейных задач. — В кн.: *Ферми Э.* Научные труды. В 2-х томах. Т. 2. — М.: Наука, 1972, с. 645—656.]
6.3. *Henon M.*, *Heiles C.*, *Astron J.*, **69**, 73 (1964).
6.4. *Whiteman K. J.*, Rep. Prog. Phys., **40**, 1033 (1977).
6.5. *Smale S.*, Bull. Am. Math. Soc., **73**, 747 (1967).
6.6. *Ueda Y.*, *J.* Stat. Phys., **20**, 181 (1979).
6.7. *Ueda Y.*, *Akamatsu N.*, IEEE Trans., CS-28, 217 (1981).
6.8. *Nicolis J. S.*, *Galanos G.*, *Protonotarios E. N.*, Int. J. Control, **18**, 1009 (1973).
6.9. *Feigenbaum M. J.*, Los Alamos Science (Summer 1980), p. 4. [Имеется перевод: *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем. — УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343—374.]
6.10. *Hofstadter D. R.*, Sci. Am., **236**, 16 (Nov. 1981).
6.11. *Lorenz E. N.*, Tellus, **16**, 1 (1964).
6.12. *Manneville P.*, *Pomeau Y.*, Physica, **1D**, 219 (1980).
6.13. *Shaw R.*, *Z.* Naturforsch., **36a**, 80 (1980).
6.14. *Farmer J. D.*, *Z.* Naturforsch., **37a**, 1304 (1982).
6.15. *Nicolis J. S.*, *Protonotarios E. N.*, Int. J. Bio-Med. Comput., **10**, 417 (1979).
6.16. *Grassberger P.*, On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors, Preprint WVB 80-33 (Oct. 1980).
6.17. *Farmer J. D.*, *Ott E.*, *Yorke J. A.*, Physica, 7D, 153 (1983).
6.18. *Nicolis G.*, *Lefever R.*, Phys. Lett., **62A**, 469 (1977).
6.19. *Nicolis G.*, *Prigogine I.*, Self-Organization in Non-Equilibrium Systems, Wiley, New York, 1977. [Имеется перевод: *Николис Г.*, *Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.— М.: Мир, 1979.]
6.20. *Hirsch J. E.*, *Huberman B. A.*, *Scalapino D. J.*, Phys. Rev., **A25**, 519 (1982).
6.21. *Packard N. H.*, *Crutchfield J. P.*, *Farmer J. D.*, *Shaw R. S.*, Phys. Rev. Lett., **45**, 712 (1980).
6.22. *Mori H.*, Prog. Theor. Phys., **63**, 1044 (1980).
6.23. *Elul R.*, Science, **164**, 328 (1969).
6.24. *Elul R.*, Randomness and Synchrony in the Generation of EEG. — In: Synchronization of EEG Activity in Epilepsies, ed. H. Petsche, M. A. B. Brazier, Springer, Berlin, Heidelberg, 1972, p. 59—77.
6.25. *Adey W. R.*, Int. J. Neurosci., **3**, 271 (1972).
6.26. *Verzeano M.*, Pacemakers, Synchronization, and Epilepsy. — In: Synchronization of EEG Activity in Epilepsies, ed. H. Petsche, M. A. B. Brazier, Springer, Berlin, Heidelberg, 1972, p. 154.
6.27. *Nicolis J. S.*, *Benrubi M.*, J. Theor. Biol., **59**, 76 (1976).

6.28. *Moruzzi G., Magoun H. W.*, Clin. Neurophysiol., **1**, 455 (1949).
6.29. *May R. M.*, Intern. Conf. on Non-Linear Dynamics, New York, 1979; Ann. N. Y. Ac., **357**, 267—281 (1981).
6.30. *Adey W. R.* — In: The Neurosciences: A Study Program, ed. F. O. Schmitt, Rockefeller University Press, New York, 1970, p. 181.
6.31. *Hutt S. J., Fairweather H.*, Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., **39**, 43 (1975).
6.32. *Nicolis J. S.*, Protonotarios E. N., Int. J. Bio-Med. Comput., **10**, 417 (1979).
6.33. *Nicolis G., Lefever R.*, Phys. Lett., **62A**, 469 (1977).
6.34. *Nicolis G., Turner J. N.*, Ann. N. Y. Ac. Sci., **316**, 251 (1979).
6.35. *Horsthemke W., Mansour M. M.*, Z. Phys., **24**, 307 (1976). *Horsthemke W., Mansour M. M., Brenig L.*, Z. Phys., **28**, 135 (1977). *Arnold L., Horsthemke W., Lefever R.*, Z. Phys., **29**, 367 (1978).
6.36. *Mayer-Kress G., Haken H.*, J. Stat. Phys., **26**, 149 (1981).
6.37. *Crutchfield J. P., Farmer J. D., Huberman B. A.*, Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics. — In: Phys. Rep., **92**, 45 (1982).
6.38. *Matsumoto K., Tsuda I.*, Noise Induced Periodicity. — In: J. Stat. Phys., **31**, 87 (1983).

Глава 7

7.1. *Mori H.*, Prog. Theor. Phys., **63**, 1044 (1980).
7.2. *Bremermann H. J.*, Int. J. Theor. Phys., **21**, 203 (1982).
7.3. *Anderson P. W.*, Science, **177**, 393 (1972).
7.4. *Nicolis G., Prigogine I.*, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **78**, 659 (1981).
7.5. *Papentin F.*, Naturwissenschaften, **67**, 174 (1980).
7.6. *Bremermann H. J.*, Quantitative Aspects of Goal-Seeking Self-Organizing Systems. — In: Progress in Theoretical Biology, Vol. 1, ed. R. Rosen, F. Smell, Academic, New York, 1967, p. 59—77.
7.7. *Haken H.*, Synergetics: An Introduction, 3rd. ed., Springer Ser. Synergetics, Vol. 1, Springer, Berlin, Heidelberg, 1983. [Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.]
7.8. *Scott A. C.*, IEEE Trans., CT-17, 55 (1970); IEEE Trans., SMC-1, 267 (1971).
7.9. *Parmentier R. D.*, IEEE Trans., CT-19, 142 (1972). *Endo T., Ohta T.*, IEEE Trans., CS-27, 277 (1980). *Endo T., Mori S.*, IEEE Trans., CS-23, 100 (1976).
7.10. *Grebogi C., Ott E., Yorle J.*, Phys. Rev. Lett, **50**, 935 (1983).
7.11. *Rapoport A.*, Behav. Sci., **1**, 303 (1956).
7.12. *McLean P.*, Psychother, **28**, 27 (1977).

Приложения

П.1. *Lindsey W. C.*, Synchronization Systems in Communication and Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
П.2. *Glansdorff P., Prigogine I.*, Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, Wiley, New York, 1971. [Имеется перевод: *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973.]
П.3. *Trincher K. S.*, Biology and Information, Consultants Bureau, New York, 1965.
П.4. *Elul R.*, Statistical Mechanism in Generation of the EEG. — In: Progress in Biomedical Engineering, ed. L. Fogel, Spartan Books, Washington, DC, 1966, p. 131—150.
П.5. *Elul R.*, Brain Waves: Intracellular Recording and Statistical Analysis Help Clarify Their Physiological Significance. — In: Data Acquisition

and Processing in Biology and Medicine, ed. O. Enstein, Pergamon, Oxford, 1968, p. 93—114.
П.6. *Adey W. R.* — In: The Mind: Biological Approaches to Its Function, eds. W. Corning, J. Balaban, Wiley, New York, 1968, p. 69—99.
П.7. *Nicolis J. S., Galanos G., Protonotarios E. N.*, Int. J. Control, **18**, 1009, 1973.
П.8. *Stratonovich R. L.* — In: Non-Linear Transformation of Stochastic Processes, eds. P. I. Kuznetsov, R. L. Stratonovich, V. I. Tikhonov, Pergamon, London, 1965. [См. также: *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961; *Стратонович Р. Л.* Неравновесная нелинейная термодинамика. — М.: Наука, 1985.]
П.9. *Minorski N.*, Non-Linear Oscilations, Van Nostrand, Princeton, 1962.
П.10. *Elul R.*, Scanning of Cortical Neurons in the EEG: A Possible Mechanism of Attention and Consciousness. — In: Information Processing in Dendrites, eds. A. Scheibel, M. Scheibel, Brain Information Service, University of California, Los Angeles, 1969.
П.11. *Hydén.* — In: Beyond Reductionism, ed. A. Koestler, W. Smythies, Hutchinson, London, 1969.
П.12. *Nicolis J. S., Protonotarios E. N., Lianos E.*, Biol. Cybern., **17**, 183 (1975).
П.13. *Spiedel R. J., Jones W. T.*, Bull. Math. Biol., **35**, 591 (1973).
П.14. *Goodwin B. C.*, Temporal Organisation in Cells, Academic, London, 1963.
П.15. *Goodwin B. C.*, Adv. Enzyme Regul., **3**, 425 (1965).
П.16. *Griffith J. S.*, J. Theor. Biol., **20**, 202 (1968).
П.17. *Tiwari J., Fraser A., Beckman R.*, J. Theor. Biol., **45**, 311 (1974).
П.18. *Lehman D., Koukkou M.*, Elektroencephalogr. Clin. Neurophysiol., **37**, 73 (1974).
П.19. *Elul R.*, Nature London, **210**, 1127 (1966).
П.20. *Giannitrapani D., Dayton L.*, Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., **36**, 377 (1974).
П.21. *Maugh T. H.*, Science, **184**, 147 (1974).
П.22. *Snyder H.*, Madness and the Brain. McGraw-Hill, New York, 1974.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабатическое расширение Вселенной 85
Алгоритмы кодирования 171
Аттрактор 51, 55
— *Лоренца* 357, 361—363, 370, 418
— странный типичный трехмерный 352—360
Аттракторы непериодические 333
— странные 334, 363—390, 394

Барионы 79
Белок 198
Бифуркационная диаграмма *Пуанкаре* для примера 56
Бифуркация 343
— тангенциальная 342
— *Хопфа* 54, 57, 329, 356
Блок-схема линии связи 164

Вектор *Герца* 102, 128
— затухания 119
— *Пойнтинга* 103, 109
— фазовый 119
Взаимодействие *Лондона—Ван-дер-Ваальса* 91
Волны плоские 146
— сферические 125—127, 146
— — электромагнитные 99, 113, 139
Время корреляции шума 167

Гамильтониан 318
Генератор *ван дер Поля* 393, 465
Гипервекторы 158
Гомеостаз 462
Гравитация 22

Давление равновесного излучения 79
Диаграмма бифуркационная вращающегося нелинейного маятникового осциллятора 39
Дивергенция 376
Диполь 107
Дипольный момент 99

Закон *Ампера* 99
— *Гука* 30
— *Ньютона* 29
— *Стефана — Больцмана* 81
— *Фарадея* 99
Захват полный 430
— частотный 431

Идеальный газ 79
Излучение в вакууме 99
— заряда 99
— электромагнитное 99

Калибровка *Лоренца* 101
Канал без потерь 187
— генетический 196, 201
— двоичный симметричный 190, 191
— — «стирающий» 190
— детерминистический 188, 201
— оптический 191, 193
— равномерный 189
— турбулентный 185
Каскад бифуркаций 341
Код генетический 196
Колебания релаксационные 52
Константа скейлинговая 340
Космология ньютоновская большого взрыва 81
Коэффициент вариации 181
— надежности 181
— подобия *Фейгенбаума* 344, 347, 375
— расширения 84
Кривая потенциальная 51
Кривые интегральные 51
Кросс-корреляция 462

Лазер 31

Матрица «военной игры» 266
— 2 × 2 игры «дилемма узника» 278
— 2 × 3 игры с нулевой суммой 266
— случайная 45

— с непостоянной суммой 270
— *Якоби* 375, 377
Метод Монте-Карло 240, 243, 245
— *Рунге — Кутта* 470
Множество канторовское 333—348, 373
Множитель *Лагранжа* 64, 72
Моделирование на компьютере 243
— стохастических временных рядов 216—219
Модель «больших» рыбок 46
— логическая 334
— *Лоренца* 352—360
— «маленьких» рыбок 46
— полумарковской цепи 232
— реакторная 47
Моды видовые 300
— возбуждаемые 123
Молекулы ДНК 196—199
Мощность теплового излучения 194
— шума 194

Нейромедиаторы 228
Нейроны 223

Основной жесткий нелинейный осциллятор (ОЖНО) 258, 259
Осциллятор *Дуффинга* 363
— линеаризованный гармонический 36
— маятниковый 35, 319
— нелинейный 29
— — релаксационный 465
Отображение логистическое 337
— одномерное аттрактора *Лоренца* 360
— *Пуанкаре* 321, 323, 326, 359, 362, 363, 371, 374, 393
Охлаждение дифференциальное 87

Парадокс *Ольберса* 83
— *Рассела* 398
Петля генетическая *Жакоба — Моно* 457
— генетической обратной связи 457
— синхронизации фазы (ПСФ) 203, 212
Плотность материи 85
— энергии излучения 104
— — интегральная 79
Показатели *Ляпунова* 348—352, 363—390
Постоянная *Больцмана* 67
— *Стефана* 89
Потенциал гравитационный 23
— маятникового осциллятора 40
Правило *Лопиталя* 150
Предел *Бремермана* 418
— *Чандрасекара* 29, 91
Преобразование *Фурье* 146, 152, 161
Пример *Пуанкаре* 56
Пространство евклидово 156, 158
Процесс гистерезисного типа 40
— итерационный 337
Процессы кросс-корреляции 252

Радиоактивные элементы 28
Радиус *Хаббла* 86
Размерность информационная 356, 384
— *Ляпунова* 379, 382
— фрактальная 345, 367
— *Хаусдорфа* 347
Распределение *Больцмана* 137
— вероятности асимптотическое 348
— *Гаусса* 209, 210, 213, 214
— *Планка* 88, 91, 92, 128, 142
— скоростей *Максвелла* 87
— *Симпсона* 34
Реактор для двух взаимодействующих веществ 46
Регистр сдвиговый 179
Резонатор полостной 134—139
Репеллер 332
Ряд *Тейлора* 44, 208

Сепаратриса 50
Сечение *Пуанкаре* 333, 334, 396, 397
Синхронизация жесткая 466
Система *Жакоба — Моно* 458
— Земля — Луна 25, 26
— иерархическая белков 198
— линеаризованная 36
— *Хенона — Хейлеса* 321, 322
Системы динамические 48, 415
— — дискретные 335
— диссипативные 51, 376
— иерархические 57, 220—222, 412—417, 433
— нейронные антагонистические 228
— стохастические 57
Скейлинг самоподобный 346
Скорость групповая 117, 133
— света в вакууме 100
— фазовая 117, 133
Состояния дискретные стационарные 64
— сателлитные 338
Спектральное разложение сферических волн 123
Спектр показателей *Ляпунова* 376, 389
— *Фурье* 37, 106, 124
— энергии излучения черного тела 92

Спин 27
Среда дисперсионная 118
— диссипативная 119, 121
Структура ДНК 196
Сумма показателей *Ляпунова* 376
Сфера шума 169, 170
Схема марковской цепи 234
— цикла синтеза белка 200

Температура идеального газа 88
— излучения 80
Теорема *Байеса* 151, 181
— *Гёделя* 97
— *Колмогорова — Арнольда—Мозера* (КАМ) 317—327
— *Коши* 131
— *Шеннона* 147, 152, 171, 185
Теория *Бремермана* 418
— *Гёделя* 261
— модовая распространения волн 123, 128
— *Ньютона* 84
— *Уилера — Фейнмана* 109, 115
Термоядерный синтез 28
Траектория аттрактора *Лоренца* 356

Уравнение состояния идеального газа 79
— *Фоккера — Планка* 209, 415, 448
— характеристическое 332, 336
— *Максвелла* 99, 109, 110, 117, 123
— *Навье — Стокса* 353
Уровень аминокислот 198
— атомный 61
— белков 457
— когнитивный 393
— молекулярный 61
— нуклеиновых кислот 198, 457
— субатомных частиц 61
— *Q* 462
— *W* 463
Уровни иерархические 61, 232, 251, 257, 261, 437, 457, 461
— — нейронные 444
— — структурные 423
— — функциональные 423
Условия *Лоренца* 102
Устойчивость стационарного состояния 43

Фокус 333
Формула *Больцмана* 74, 75
— *Стирлинга* 147
— *Шеннона* 162, 166, 193
— *Эйнштейна* 80, 85
Формулы *Френеля* 124
Фотоны 32, 78, 138, 140, 141, 194
Функции плотности вероятности 34
Функция *Бесселя* 126

Хаос метастабильный 399
H-теорема *Больцмана* 22

Цепи *Маркова* 180, 183, 184 220, 224, 235, 243, 279, 280, 282, 284
Цепь РНК 199
Цикл предельный 53

Частота плазменная 115
Числа *Ляпунова* 381
Чувствительность к малым флуктуациям 348

Ширина линии излучения классического диполя 107
Шум аддитивный 149
— внешний 415, 444
— квантовый 193
— ПСФ 205

Электропроводность среды 117
Электроэнцефалограмма (ЭЭГ) 227, 401, 404—407, 425, 433, 450, 459
Энергия осцилляторов 33
— фотонов 92
Энтропия идеального газа 77
— информационная 62
— *Колмогорова — Синая* 388
— метрическая 384, 387
— термодинамическая 62
— физическая 62
— фотонного газа 78, 89
— электромагнитного излучения 139
Эффекты приливные на Земле 26

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5
Предисловие 7

1. Введение 9

1.1. О чем эта книга 9
1.2. Постановка задачи 12
1.3. Некоторые предварительные определения сложности и организации 16
1.3.1. Сложность 16
1.3.2. Организация 17

2. Предварительные сведения из нелинейной динамики и статистической физики 19

2.1. Симметрии и законы сохранения 19
2.2. Неустойчивости как первопричина нарушенных симметрий, диссипация и необратимость в динамических системах малой размерности (не статистических) 22
2.2.1. Роль гравитации 22
2.2.2. Комментарии о роли связи между четырьмя фундаментальными взаимодействиями в процессе эволюции 26
2.2.3. Нелинейный осциллятор с сильным затуханием: пример спонтанного нарушения симметрии 29
2.2.4. Лазер: пример нарушения симметрии 31
2.2.5. Вращающийся маятник: пример бифуркации, приводящей к спонтанному нарушению симметрии 38
2.2.6. Нарушение симметрии в процессе гистерезисного типа . . 40
2.2.7. Основные понятия теории устойчивости 42
2.2.8. Поведение двумерной динамической системы в окрестности особых точек (стационарных состояний) 48
2.2.9. Первая встреча с нетривиальными диссипативными системами: понятие аттрактора в двумерном случае (предельный цикл) 51
2.3. Элементы статистической физики и их связь с эволюционными явлениями 57
2.3.1. Некоторые характеристики стохастических систем 57
2.3.2. Информационная энтропия, физическая энтропия, термодинамическая энтропия 62
2.3.3. Энтропия идеального газа в состоянии термодинамического равновесия 77
2.3.4. Энтропия фотонного газа в состоянии термодинамического равновесия 78
2.3.5. Элементы ньютоновской космологии большого взрыва . . 81
2.3.6. Расширение смеси материи и излучения. Дифференциальное охлаждение и производство энтропии 87
2.3.7. Понятие сложности 93
2.4. Заключительные замечания 97

3. Роль сферических электромагнитных волн как носителей информации 99

3.1. Излучение заряда, ускоренно движущегося в вакууме. Понятие «самовоздействия». Термодинамика электромагнитного излучения 99
3.1.1. Излучение в вакууме 99
3.1.2. Понятие «самовоздействия» 105
3.1.3. Термодинамика электромагнитного излучения 109
3.2. Распространение электромагнитных волн в дисперсионных средах и средах с потерями 113
3.3. Разложение сферической волны на элементарные «лучи». Модовая теория распространения волн. Возбуждаемые моды (степени свободы) в замкнутой полости 123
3.3.1. Спектральное разложение сферической волны 123
3.3.2. Волноводная модовая теория распространения волн . . . 128
3.3.3. Полостной резонатор 134
3.4. Энтропия электромагнитного излучения. Информация, получаемая электромагнитной волной, падающей на конечную апертуру. Неоднозначность восприятия 139

4. Элементы теории информации и кодирования с приложениями 149

4.1. Передача информации и понятие пропускной способности канала для дискретных и непрерывных сигналов без памяти 149
4.2. Некоторые идеи теории кодирования, могущие быть полезными при минимизации ошибок приема 164
4.3. Некоторые эффективные алгоритмы кодирования для установления соответствия между скоростью передачи информации от источника и пропускной способностью канала. Обнаружение и исправление одной ошибки 171
4.3.1. Кодирование для установления соответствия между скоростью передачи информации от источника и пропускной способностью канала 172
4.3.2. Кодирование для обнаружения и исправления ошибки . . . 176
4.4. Источники информации с памятью. Цепи Маркова 180
4.5. Конкретные примеры некоторых полезных каналов и вычисление их пропускной способности 185
4.5.1. Пропускная способность равномерно турбулентного канала 185
4.5.2. Канал без потерь 187
4.5.3. Детерминистический канал 188
4.5.4. Равномерный канал 189
4.5.5. Двоичный симметричный канал 190
4.5.6. Двоичный «стирающий» канал 190
4.5.7. Пропускная способность оптического канала 191
4.5.8. Роль квантового шума в оптическом канале 193
4.5.9. Общие сведения о «генетическом канале» и генетическом коде 196
4.5.10. Петля синхронизации фазы в отсутствие и при наличии шума 203
4.6. Моделирование стохастических временных рядов 216
4.7. Связь между двумя иерархическими системами, моделируемыми управляемыми цепями Маркова 220
4.7.1. Введение. Выяснение природы иерархических систем . . . 221
4.7.2. Динамика на нижних уровнях Q, Q' и лежащая в ее основе игра 226
4.7.3. Модель полумарковской цепи для иерархических уровней W и W' 232
4.7.4. Задача управления 239
4.7.5. Моделирование на компьютере 243

4.7.6. Биологические аспекты нашей модели 249
4.8. Возникновение новых иерархических уровней в самоорганизующейся системе 251
4.8.1. Постановка задачи 253
4.8.2. Рождение нового иерархического уровня 257
4.8.3. Замечание по поводу типичных случаев 261

5. Элементы теории игр с приложениями 263
5.1. Игры с постоянной суммой 264
5.1.1. У обоих игроков имеется доминирующая стратегия 265
5.1.2. Доминирующая стратегия имеется только у одного игрока 265
5.1.3. Доминирующей стратегии нет ни у одного из игроков . . . 265
5.1.4. Смешанные стратегии 267
5.2. Игры с непостоянной суммой 269
5.2.1. Игры с непостоянной суммой и торгом 270
5.2.2. Игры с непостоянной суммой без торга («парадоксальные») 277
5.3. Межвидовая борьба 287
5.4. Выживание и вытеснение 290
5.5. Некоторые элементарные сведения из генетики; отбор и приспособленность 293
5.6. Игры между животными, избирающими видовые моды поведения (роли). Понятие эволюционно устойчивой стратегии 300
5.7. Игра конкурентно-кооперативного производства и обмена. Понятие «паразит» на символическом уровне 305
5.8. Эпидемиология слухов 311

6. Стохастичность, обусловленная детерминистической динамикой в пространстве трех и более измерений: хаос и странные аттракторы 317
6.1. Переоценка классической статистической механики. Теорема Колмогорова — Арнольда — Мозера 317
6.2. Динамика в трехмерном пространстве состояний (три степени свободы). Стационарные состояния, предельные циклы, притягивающие торы 327
6.3. Странные аттракторы 334
6.3.1. Одномерные отображения на отрезке. «Логистическая» модель 334
6.3.2. Фрактальная размерность. Канторовское множество . . . 344
6.3.3. Понятие показателей Ляпунова для удвоения периода и хаотических режимов 348
6.3.4. Типичный трехмерный странный аттрактор. Модель Лоренца 352
6.3.5. Скорость производства информации аттрактором Лоренца . 361
6.4. Параметры, характеризующие среднее поведение странных аттракторов: размерности, энтропии и показатели Ляпунова . . . 363
6.4.1. Понятие информационной размерности 365
6.4.2. Понятие характеристического показателя Ляпунова и его связь с информационной размерностью 375
6.4.3. Понятие метрической энтропии (Колмогорова — Синая) и ее связь с информационной размерностью 384
6.5. Возможная роль хаоса в надежной обработке информации . . . 390
6.5.1. Теоретические соображения и общие замечания 392
6.5.2. Приложение. Электрическая активность головного мозга — должна ли она быть хаотической? 401
6.5.3. Экспериментальные данные из исследований ЭЭГ 404
6.5.4. Модель 406
6.5.5. Двойственная роль перемежаемости в обработке информации 410

6.5.6. Первопричина конфликта в сообщающихся иерархических системах 412
6.6. Комментарии по поводу влияния внутренних флуктуаций и внешнего шума на свойства устойчивости динамических систем . . . 415

7. Эпилог: роль хаоса в биологии и других областях знания 418

7.1. Вычислительная сложность 418
7.2. К динамической теории языка 421
7.2.1. Природа проблемы 421
7.2.2. Структурные и функциональные иерархические уровни . . 423
7.2.3. Эволюционная лингвистическая модель: символы и структуры 426
7.2.4. Нерешенные проблемы: связь между двумя иерархическими системами 433
7.3. Заключительные замечания 440

Приложения 444

А. Взгляд на роль внешнего шума на нейронном иерархическом уровне 444
А.1. Введение в проблему 444
А.2. Организация через слабый стационарный по амплитуде шум . . 451
А.3. Адекватность нашей модели нейронной и когнитивной организации 456
Б. О трудности описания связи между двумя иерархическими уровнями с помощью непрерывной нелинейной динамики 461
Б.1. Уровень Q партнера I 462
Б.2. Гомеостаз и кросс-корреляции 462
Б.3. Уровень W партнера I 463
Б.4. Контроллер 464
В. Шумовая синхронизация слабо нелинейного релаксационного осциллятора под действием внешнего гармонического возбуждения . . . 465
В.1. Общее описание модели 465
В.2. Метод исследования синхронизации 466
В.2.1. Жесткая синхронизация 466
В.2.2. Свободная, или «дергающаяся», синхронизация 466
В.2.3. Чистые «свободно бегущие» колебания 467
В.2.4. Свободно бегущие колебания 467
В.3. Аналитические вычисления и моделирование на компьютере . . 467
В.4. Поведение осциллятора под действием приложенного извне гармонического возбуждения (затягивание частоты) 470

Литература 475

Предметный указатель 480

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Научное издание

Джон С. Николис

ДИНАМИКА ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ЭВОЛЮЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Заведующий редакцией проф. А. Н. Матвеев
Зам. зав. редакцией С. М. Жебровский
Научный редактор Л. И. Третьякова
Мл. научные редакторы: Р. Х. Зацепина, Г. Г. Сорокина, В. Н. Цлаф, В. И. Аксенова, И. А. Зиновьева

Художник А. Шахов
Художественный редактор К. Радченко
Технический редактор А. Л. Гулина

ИБ № 6979

Сдано в набор 23.02.89. Подписано к печати 16.08.89. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага кн. журнальная. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 15,25 бум. л. Усл. печ. л. 30,5. Усл. кр.-отт. 30,5. Уч. изд. л. 28,28. Изд. № 2/6501. Тираж 5500 экз. Зак. 90. Цена 4 р. 60 к.

Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер. 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.
Отпечатано в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.