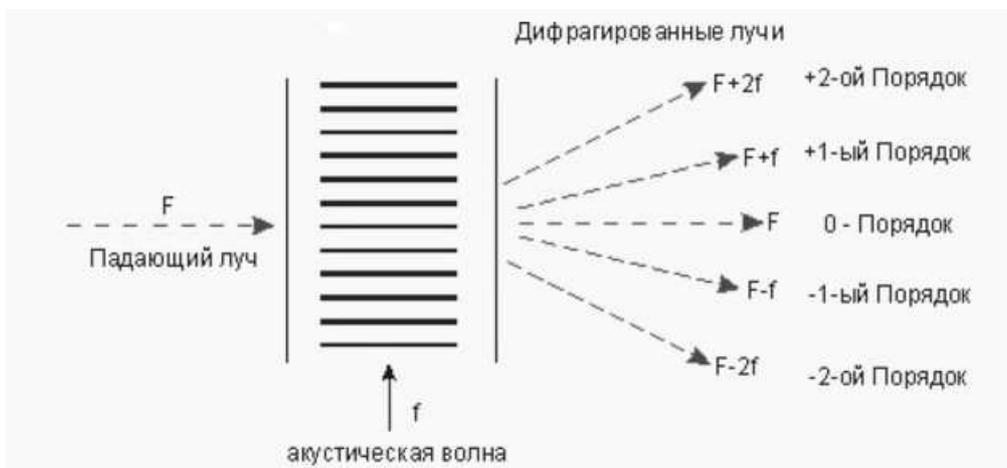


С.М. Коломиец

# ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОНКОЙ ФАЗОВОЙ РЕШЕТКЕ



Обнинск, 2015

УДК 534.222+533.043+532.22  
ББК 22.3:26.23

К 61

**Коломиец С.М. Дифракция света на движущейся тонкой фазовой решетке: Монография. – Обнинск, 2015. – 141 с.: ил.**

Для света в качестве тонкой фазовой решетки могут рассматриваться различные объекты. Это акустические объемные волны в различных прозрачных средах (при определенных условиях); капиллярные (капиллярно-гравитационные) волны на свободной поверхности жидкости; поверхностные волны (волны Релея) на свободной поверхности твердого тела. Для СВЧ-волн как тонкая фазовая решетка могут рассматриваться морские волны на свободной поверхности водоема.

Дифракция света на тонкой фазовой решетке достаточно подробно исследована для предельных случаев, когда диаметр светового пучка много больше или же много меньше длины волны - акустической или же поверхностной.

В данной работе рассматривается, главным образом, промежуточный случай, когда диаметр светового пучка сравним с длиной волны. Именно этот случай может быть основой для развития известных и создания новых подходов к измерению некоторых параметров среды методами акустооптики, поскольку оптическая схема соответствующего устройства может быть предельно простой.

Монография предназначена для специалистов по оптике, акустике, по физике океана, а также для студентов старших курсов соответствующих специальностей вузов.

УДК 534.222+533.043+532.22

ББК 22.3:26.23

© Коломиец С.М., 2015

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>Введение</b> .....	5
<b>1. Акустооптика движущихся сред</b> .....	9
1.1. Тонкая фазовая решетка .....	9
1.2. Дифракция Фраунгофера .....	15
1.2.1. Общие соотношения .....	15
1.2.2. Соотношения для второй гармоники .....	20
1.2.3. Дифракция на двух встречных акустических волнах .....	25
1.3. Дифракция Френеля .....	33
1.3.1. Общие соотношения .....	33
1.3.2. Соотношения для первой гармоники .....	37
<b>2. Применения акустооптики к технике измерений</b> .....	44
2.1. Акустические волны в движущейся среде .....	44
2.2. Некоторые общие вопросы техники измерений .....	52
2.3. Измерение смещений объекта .....	56
2.4. Измерение скорости жидкости и скорости звука в ней .....	70
<b>3. Дифракция электромагнитных волн на поверхностных волнах</b> .....	82
3.1. Эффект Доплера для капиллярно-гравитационных волн .....	82
3.2. Дифракция света на капиллярных волнах .....	96
3.2.1. Определение коэффициента поверхностного натяжения .....	97
3.2.2. Определение вязкости жидкости .....	105
3.2.3. Измерения при движении поверхностного слоя жидкости .....	109
3.3. Дифракция СВЧ-волн на гравитационных волнах. Определение параметров волнения поверхности моря .....	117
3.3.1. Общие соображения .....	117
3.3.2. Возможная реализация измерений .....	119
3.3.3. Ограничения, принятые по умолчанию .....	123
3.4. Дифракция света на поверхностных акустических волнах .....	126
<b>Заключение</b> .....	129
<b>Литература</b> .....	137

## Предисловие

Основой акустооптики, как одного из направлений исследований в физике и технике, является дифракция света на ультразвуке, который рассматривается как фазовая решетка. Однако практика достаточно часто имеет дело с иными объектами, которые также могут рассматриваться как фазовая решетка. Это, например, периодические неоднородности свободной поверхности жидкости, наведенные капиллярно-гравитационной волной, или же периодические неоднородности свободной поверхности твердого тела, наведенные поверхностной акустической волной Релея. Для СВЧ-волн как тонкая фазовая решетка при определенных условиях могут рассматриваться морские волны на свободной поверхности водоема.

В данной работе рассмотрена дифракция лазерного пучка с гауссовым профилем интенсивности на тонкой фазовой решетке, движущейся относительно пучка. Получены общие соотношения, описывающие интенсивность (не амплитуду!) светового пучка в зависимости от некоторых параметров, в частности, от отношения длины ультразвуковой волны к диаметру исходного светового пучка.

Особое внимание уделено приложениям рассматриваемых методов к задачам техники измерений. Эти задачи могут быть связаны с контролем скорости и перемещения исследуемой среды; с контролем характеристик поверхностного слоя жидкости (определением коэффициента поверхностного натяжения и вязкости), с контролем скорости звука, с определением параметров волнения поверхности моря, с детектированием поверхностных акустических волн Релея.

Рассмотрены особенности дифракции света (СВЧ-волн) на различных «типах» фазовой решетки. С точки зрения практической реализации важно, что оптическая схема соответствующего акустооптического устройства во многих случаях может быть предельно простой: лазер - акустооптическая ячейка – фотоприемник.

## Введение

Методы акустооптики, основой которых является дифракция света на ультразвуке, широко используются для обработки информации [32, 38, 40], для управления параметрами световых пучков [3, 10, 38].

Акустооптические устройства условно можно разделить на две большие группы. Для одной из них полная фаза световой волны  $\omega t + \phi$  не представляет интереса для исследователя. Это, в частности, разного рода дефлекторы, модуляторы, управляемые фильтры световых пучков. Сюда же относятся и устройства, использующие измерение углов дифракции для определения скорости звука – одной из важных характеристик любого вещества.

Другая группа, по сути, представляет акустооптические интерферометры [1], предназначенные для выделения информации о составляющих полной фазы световой волны при интерференции пучков различных порядков дифракции.

Следует отметить, что на современном уровне развития техники инерционность фотоприемников слишком велика для непосредственной регистрации светового поля – амплитуды волны, поэтому измеряемой величиной является интенсивность (квадрат амплитуды). Однако при непосредственном детектировании световой волны теряется информация о соответствующей фазе. Именно поэтому приходится прибегать к фотосмещению нескольких световых волн. В акустооптике обычно используются УЗ-волны, длина которых много меньше диаметра исходного светового пучка [1, 6, 51]. При этом из исходного пучка формируется набор пучков различных порядков дифракции, причем интенсивности этих пучков от времени не зависят.

Таковы, в частности, акустооптические методы контроля смещений (вибраций) разного рода объектов, основанные на дифракции света на ультразвуковых (УЗ) волнах в акустооптической ячейке, жестко связанной с контролируемым объектом. В этом случае за счет эффекта Доплера на движущейся УЗ-волне частота или фаза пучков ненулевых порядков дифракции

зависит, соответственно, от скорости или положения ячейки относительно исходного светового пучка [1, 6, 51].

Выделить эту частоту или фазу можно при интерференции пучков различных порядков. Но поскольку угловое расстояние между пучками соседних порядков намного превосходит их расходимость, то пучки различных порядков дифракции разделяются в пространстве уже на сравнительно небольшом расстоянии от акустооптической ячейки. Для уверенного выделения сигнала, обусловленного их интерференцией, необходимы дополнительные оптические элементы с соответствующими высокоточными юстировками, что заметно усложняет конструкцию прибора.

Если длина УЗ-волн много больше диаметра светового пучка, то говорят обычно не о дифракции, а о рефракции. Этот случай используется для сканирования световых пучков в рефракционных дефлекторах [38, 44].

Если же длина УЗ-волны сравнима с диаметром исходного пучка, то пучки различных порядков дифракции перекрываются в пространстве практически на любом расстоянии от акустооптической ячейки. Соответственно, при этом можно надеяться на заметное упрощение соответствующих приборов.

Дифракция света на ультразвуке (на акустической волне) при некоторых ограничениях может рассматриваться как дифракция света на движущейся тонкой фазовой решетке. При этом ультразвук обычно понимается как объемная акустическая волна. В то же время, тонкой фазовой решеткой для света могут являться поверхностные акустические волны и капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности жидкости. Для электромагнитных волн СВЧ-диапазона тонкой фазовой решеткой могут являться гравитационные волны на поверхности различных водоемов, в том числе, морей и океанов.

В связи с этим, представляется, что исследование дифракции светового пучка или СВЧ-пучка на движущейся тонкой фазовой решетке при произвольном соотношении между диаметром пучка и периодом решетки

позволит получить результаты, позволяющие заметно упростить конструкции соответствующих приборов. При этом особый интерес представляют соотношения для интенсивности электромагнитного поля – квадрата амплитуды.

Широкий круг задач физики и техники сводится к определению параметров акустических волн, распространяющихся в исследуемой среде. С другой стороны, эти же волны могут использоваться как инструмент для определения каких-то параметров среды, например, для упомянутого выше определения смещений объекта [1, 6, 51]. Для определения скорости движения жидкости широко используются различные «времяпролетные» акустические анемометры [4, 7, 11, 13, 33, 49]. Однако времяпролетные анемометры имеют сравнительно большой нижний предел измерений по скорости –  $V_{\min} = 10^0$  см/с, что препятствует их использованию в ряде практических задач. Кроме того, в этих анемометрах исследуемая область (формирующая световой сигнал) имеет сравнительно большие размеры ( $1 \times 1 \times 10$  см<sup>3</sup>) и соответственно, большой объем ( $10^1$  см<sup>3</sup>), по которому производится усреднение скорости. Это обстоятельство может ограничивать возможные применения таких приборов.

Известны доплеровские анемометры, как акустические [4, 13, 33, 49], так и лазерные [35, 45]. Эти приборы обеспечивают измерение значительно меньших скоростей, особенно лазерные анемометры ( $V_{\min} = 10^1$  мм/с). Однако устойчивая работа этих приборов возможна только при наличии в исследуемой жидкости неких центров, рассеивающих ультразвук или свет. Для «чистых» жидкостей доплеровские анемометры неприменимы.

Скорость звука является важной характеристикой любой среды, поэтому измерение этой скорости является важным для многих практических задач [1, 5, 27, 30, 39, 46]. Известно, что скорость звука существенно зависит от физико-химических свойств жидкости. В частности, для морской воды она зависит от солености последней [41, 52]; для нефтепродуктов – от их химического состава [47, 54]. Это обстоятельство дает широкие возможности

для оперативного контроля свойств жидкостей (влияющих на скорость звука), поскольку соответствующий измеритель мог бы легко «встраиваться» в различные технологические процессы. Помимо этого, скорость звука представляет и самостоятельный интерес для многих задач молекулярной физики, гидроакустики, нелинейной акустики.

Широко используемые методы радиолокационного определения параметров волнения преимущественно используют анализ статистических характеристик эхо-сигнала [15, 43]. При этом обычно исходят из двухмасштабной модели волнения (крупная волна и «рябь»), причем диаметр облучаемого пятна на морской поверхности полагается меньшим, чем длина крупной волны.

Однако обработка статистических характеристик эхо-сигнала является достаточно сложной и предполагает наличие определенной априорной информации.

В то же время, подобие между дифракцией электромагнитных волн СВЧ-диапазона на гравитационных волнах и дифракцией электромагнитных волн светового диапазона на движущейся тонкой фазовой решетке дает возможность дальнейшее развитие методов радиолокационного определения параметров волнения - методов определения регулярной составляющей эхо-сигнала.

Таким образом, данная работа имеет не только фундаментальные, но и прикладные аспекты. Полученные результаты могут явиться основой для разработки оптико-электронных измерительных приборов нового поколения, обеспечивающих высокие метрологические характеристики при весьма простой оптической схеме.

Возможные области применения полученных результатов: гидродинамика, машиностроение, приборостроение, строительство, океанология, гидрология, экология, химические технологии, металлургия и т.д.

# 1. Акустооптика движущихся сред

## 1.1. Тонкая фазовая решетка

Положим, что в прозрачной среде (акустооптической ячейке) возбуждена акустическая (ультразвуковая) волна частоты  $\Omega$ , бегущая в направлении  $OX$ . Тогда поле показателя преломления  $n(x, t)$  в ячейке можно представить в виде:

$$n(x, t) = n_0 + \Delta n \cos(\Omega t + \varphi).$$

Здесь  $n_0$ ,  $\Delta n$  – показатель преломления «невозмущенной» среды и максимальное изменение показателя преломления, обусловленное ультразвуковой волной (УЗ-волной), соответственно;  $\varphi$  – фаза акустической волны. При этом  $\varphi = fx$ , где  $f$  – волновое число акустической волны,  $f = 2\pi/\Lambda = \Omega/C$ ;  $\Lambda$  – длина акустической волны;  $C$  – скорость звука;  $x$  – расстояние в момент времени  $t$  от некоторой выделенной области среды до плоскости  $X = 0$ . Распространению волны в направлении «справа налево» соответствует знак «плюс»  $(+\varphi)$ , а в направлении «слева направо» соответствует знак «минус»  $(-\varphi)$ .

Итак, бесконечная фазовая решетка с пространственным периодом  $\Lambda$  «бежит» в направлении  $OX$  с некоторой скоростью  $C$ . Такого рода фазовой решеткой для света может быть не только продольная акустическая волна, но и поверхностная акустическая волна с вертикальной поляризацией (волна Релея), а также капиллярная волна на свободной поверхности жидкости.

Положим также, что в направлении  $OZ$  распространяется световой пучок, поле  $E$  (амплитуда) которого в плоскости  $Z = 0$  имеет вид:

$$E(Z = 0) = E(x_0, y_0, 0) \exp\{i(\omega t + \varphi)\}, \quad (1.1)$$

Здесь  $E(x_0, y_0, 0) = E_{00} \exp\{-(x_0^2 + y_0^2)/(2\sigma_0^2)\}$ ;  $E_{00}$  – поле на оси пучка;  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – начальная фаза светового пучка;  $2\sigma_0$  – диаметр пучка по уровню интенсивности  $e^{-1}$ ;  $x_0, y_0$  – координаты в плоскости  $XOY$ . То есть, профиль интенсивности является гауссовым, а фазовый фронт – плоским при  $Z = 0$ .

Фаза  $\varphi$  не представляет для нас интереса, поэтому в дальнейшем положим  $\varphi = 0$ .

Положим, что решетка является «тонкой», причем соответствующий критерий «тонкости» будет указан ниже.

Для светового пучка решетка представляет собой плоский фазовый транспарант (решетку) с коэффициентом пропускания  $T$ :

$$T = \exp\{iA \cos(\Omega t + fx)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{in(\Omega t - \frac{\pi}{2})\} J_n(A) \exp\{infx\}, \quad (1.2)$$

где  $A = k\Delta(nL)$ ,  $\Delta(nL)$  – максимальное изменение оптического пути, обусловленное решеткой;  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны света;  $J_n(A)$  – функция Бесселя порядка  $n$ . Для продольной акустической волны  $\Delta(nL) = L\Delta n$ ,  $\Delta n$  – максимальное изменение показателя преломления среды, «наведенное» волной,  $L$  – длина пути светового пучка, проходящего через волну (длина ячейки в направлении  $OZ$ ). Для капиллярной волны или поверхностной акустической волны Релея (в случае отраженного светового пучка)  $\Delta(nL) = 2\Delta L = 2h_0$ , где  $h_0$  – амплитуда волны.

Поле  $E_L$  (амплитуда) светового пучка на выходе из решетки имеет вид:

$$E_L = E_L(x_0, y_0, L) = E(x_0, y_0, 0) \exp\{i\omega t\} T. \quad (1.3)$$

На практике всегда выполняется условие:  $C \ll C_s$ , где  $C_s$  – скорость света в ячейке. То есть, за время прохождения светом акустооптической ячейки акустическая волна практически не изменит своих характеристик. Далее, в акустооптике обычно пренебрегают воздействием светового пучка на акустическую волну.

При анализе дифракции света на ультразвуке обычно выделяют два предельных случая: дифракцию Рамана-Ната и дифракцию Брэгга.

Дифракция Рамана-Ната имеет место при выполнении условия:  $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$ .

По сути, это означает, что длина  $\Lambda$  акустической волны сравнительно велика – много больше размера  $\sqrt{\lambda L}$  первой зоны Френеля (для длины  $L$  акустооптической ячейки). А поскольку  $\Lambda \sim 1/\Omega$ , то часто говорят, что для дифракции Рамана-Ната характерны сравнительно низкие частоты ультразвука.

Из условия  $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \ll 1$  следует, что  $\frac{\lambda}{\Lambda} \ll \frac{\Lambda}{L}$ . Для дифракции Рамана-Ната обычно  $\lambda \ll \Lambda$ . Тогда угол  $\theta_1$ , характеризующий направление на первый дифракционный максимум, определяется соотношением:  $\sin \theta_1 = \lambda/\Lambda$ .

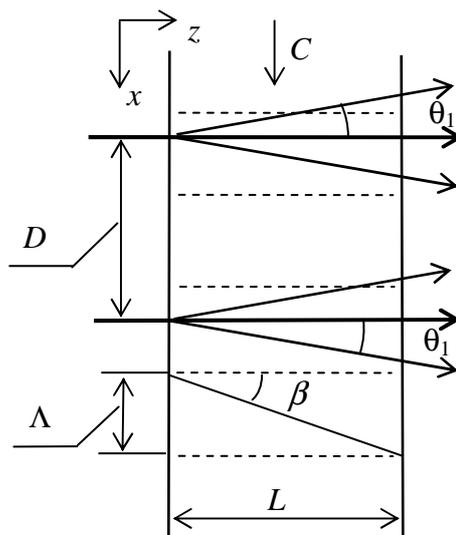
Рассмотрим теперь отношение  $\Lambda/L$ . Введем некий угол  $\beta$  в плоскости  $XOZ$ , такой, что  $\operatorname{tg} \beta = \Lambda/L$ . Нетрудно видеть, что световой луч, распространяющийся под углом  $\beta$  к оси  $OZ$  через акустооптическую ячейку длиной  $L$ , пройдет расстояние  $\Lambda$  в направлении  $OX$ . То есть, условие  $\lambda/\Lambda \ll \Lambda/L$  означает, что для светового пучка, входящего в ячейку под нулевым углом к оси  $OZ$  (перпендикулярно оси  $OX$ ), лучи, распространяющиеся в направлении первого дифракционного максимума, сместятся лишь на малую часть  $\Lambda$  в направлении  $OX$ . Другими словами, уширение за счет дифракции  $\frac{\lambda}{\Lambda} L$  много меньше длины акустической волны:

$\frac{\lambda}{\Lambda} L \ll \Lambda$ . В частности, если диаметр светового пучка  $D$  близок к длине

акустической волны,  $D \approx \Lambda$ , то  $\frac{\lambda}{D} L \ll D$ . То есть, диаметр светового пучка меняется мало в пределах ячейки. При этом каждый световой луч пересекает участки ячейки с практически одинаковыми значениями показателя преломления (соответствующими значениям на входе в ячейку). Такую ячейку можно назвать тонкой фазовой решеткой. При этом геометрическая длина  $L$  ячейки определяется соотношением:  $L \ll \Lambda^2/\lambda$ .

Приведем некоторые численные оценки для  $\lambda = 0,5$  мкм, полагая, что  $L \leq 0,1 \Lambda^2/\lambda$ . Если  $\Lambda = 1$  мм, то  $L \leq 20$  см; если же  $\Lambda = 1$  см, то  $L \leq 20$  м.

Итак, решетка, «тонкая» с точки зрения акустооптики, может быть «толстой» с точки зрения обычных представлений «житейского характера».

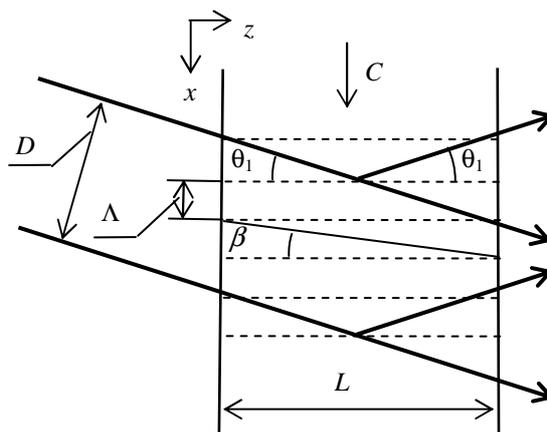


Перейдем теперь к дифракции Брэгга, которая имеет место при выполнении условия:  $\frac{\lambda L}{\Lambda^2} \geq 1$ . По сути, это означает, что длина  $\Lambda$  акустической волны не превышает размера первой зоны Френеля. При этом часто говорят, что для дифракции Брэгга характерны достаточно высокие частоты ультразвука.

В этом случае  $\frac{\lambda}{\Lambda} \geq \frac{\Lambda}{L}$ . Это условие, по аналогии с рассмотренными выше особенностями дифракции Рамана-Ната, означает следующее. Для светового пучка, входящего в ячейку под нулевым углом к оси  $OZ$  (перпендикулярно оси  $OX$ ), лучи, распространяющиеся в направлении первого дифракционного максимума, сместятся на величину, не меньшую  $\Lambda$  в направлении  $OX$ . Другими словами, уширение за счет дифракции  $\frac{\lambda}{\Lambda} L$  не меньше длины акустической волны:  $\frac{\lambda}{\Lambda} L \geq \Lambda$ . То есть, в отличие от дифракции Рамана-Ната, каждый световой луч пересекает участки ячейки с различными значениями показателя преломления – от минимального до максимального.

Если световой пучок входит в ячейку под углом, близким к нулевому углу, то на выходе ячейки формируется симметричная дифракционная картина с положительными и отрицательными порядками дифракции. Однако на практике в подавляющем

большинстве случаев световой пучок направляют на ячейку под углом  $\theta_1$ , таким, что  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{\Lambda}$ . Тогда наиболее интенсивным является -1 порядок дифракции, а всеми остальными порядками можно пренебречь, во всяком случае, при достаточной длине ячейки.



Рассматриваемая геометрия в определенном смысле сходна с геометрией интерференционного фильтра: для определенных  $\lambda$ ,  $L$  существует некоторый угол  $\theta_1$ , соответствующий максимальному суммарному «отражению» светового пучка в направлении -1 порядка дифракции. Итак, дифракция Брэгга – это в определенном смысле дифракция света на объемной (не тонкой) фазовой решетке.

Приведем некоторые численные оценки для  $\lambda = 0,5$  мкм, полагая, что  $L \geq \lambda^2/\lambda$ . Если  $L = 0,1$  мм, то  $L \geq 2$  см; если же  $L = 0,03$  мм, то  $L \geq 0,2$  см.

Таким образом, решетка, «толстая» с точки зрения акустооптики, может быть достаточно «тонкой» с точки зрения обычных представлений «житейского характера».

Выше рассматривались соотношения между длинами волн  $\lambda$ ,  $L$  и длиной ячейки  $L$  (которая, по сути, характеризует «ширину» акустического пучка). В то же время, характерный размер светового пучка остался без внимания. Рассмотрим поэтому соотношение между «диаметром»  $D$  светового пучка и длиной акустической волны  $L$ .

Положим вначале, что длина  $L$  акустической волны много больше диаметра светового пучка,  $L \gg D$ . Тогда говорят обычно не о дифракции, а о рефракции. Этот случай используется для сканирования световых пучков в так называемых рефракционных дефлекторах [32, 38, 44], когда весь пучок как целое отклоняется от первоначального направления на некоторый угол  $\zeta$ . Градиент показателя преломления, обусловленный акустической волной, имеет

вид:  $\frac{dn}{dx} = \Delta n f \sin(\Omega t - fx)$ . Тогда для угла  $\zeta$  получим:

$$\zeta \approx \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} L = \frac{1}{n} \Delta n L f \sin(\Omega t - fx).$$

Максимальное угловое смещение  $\zeta_{\max} = (\Delta n/n) L f$ .

С увеличением длины волны  $L$  (с уменьшением  $f$ ) уменьшается градиент показателя преломления, соответственно, уменьшается и  $\zeta_{\max}$ .

Другой предельный случай - длина  $\Lambda$  акустической волны много меньше диаметра светового пучка,  $\Lambda \ll D$ . Тогда можно говорить о дифракции «в чистом виде»: формируются пучки различных порядков с различными (за счет эффекта Доплера) частотами  $\omega \pm m\Omega$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$  - порядок дифракции. Эти пучки разделяются в пространстве уже на сравнительно небольшом расстоянии от акустооптической ячейки.

Случай  $\Lambda \ll D$  обычно реализуется при дифракции Брэгга.

Наконец, в промежуточном случае длина  $\Lambda$  акустической волны и диаметр  $D$  светового пучка являются величинами одного порядка,  $\Lambda \approx D$ . Тогда, в отличие от случая  $\Lambda \gg D$ , можно говорить о существовании дифракционных максимумов как таковых. С другой стороны, в отличие от случая  $\Lambda \ll D$ , соседние дифракционные максимумы могут перекрываться в пространстве практически на любом расстоянии от акустооптической ячейки.

Случай  $\Lambda \approx D$  обычно реализуется при дифракции Рамана-Ната.

Наибольшее распространения в настоящее время имеют акустооптические устройства на основе дифракции Брэгга, когда  $\Lambda \ll D$ . Соответственно, именно эта дифракция исследована достаточно подробно.

В то же время, случаю дифракции Рамана-Ната уделялось значительно меньше внимания. В связи с этим, ниже будут рассмотрены соотношения, описывающие эту дифракцию – дифракцию на тонкой фазовой решетке - для произвольного соотношения между диаметром светового пучка и длиной акустической волны.

## 1.2. Дифракция Фраунгофера

### 1.2.1. Общие соотношения

Рассмотрим, по аналогии с [20, 38, 44], количественные соотношения, описывающие дифракцию света на ультразвуке.

Исходя из (1.1) - (1.3), нетрудно найти напряженность поля  $E(x,y)$  в дальней зоне ( $z \rightarrow \infty$ ) определяемую дифракцией Фраунгофера. Запишем это преобразование в соответствии с [37]:

$$E(x,y) = \frac{k}{2\pi iz} \exp\{ikz + ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_L(x_0, y_0, L) \exp\{-i\frac{kx}{z}x_0 - i\frac{ky}{z}y_0\} dx_0 dy_0. \quad (1.4)$$

Дифракцию Фраунгофера обычно описывают в терминах углового спектра световой волны. Поэтому перейдем от координат  $(x,y)$  к углам наблюдения  $\theta, \chi$  в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ :  $\theta \approx x/z$ ;  $\chi \approx y/z$ . Введем новые переменные:  $\alpha = \sin\theta$ ,  $\psi = \sin\chi$ . Тогда (1.4) примет вид:

$$E(\alpha, \psi) = E_{00} \exp\{-(\sigma k \psi)^2/2\} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E_p, \quad (1.5)$$

$$E_p = \exp\{i[(\omega + p\Omega)t - p(\pi/2 - \varphi)]\} J_p(A) \exp\{-[\sigma^2(k\alpha - pf)^2/2]\}.$$

Соотношения, приведенные в [38, 44], отличаются от (1.5) лишь видом зависимости от «углового» параметра. В них эта зависимость описывается функцией  $\sin[h(k\alpha - pf)]/[h(k\alpha - pf)]$ , обусловленной прямоугольным профилем пучка в пределах апертуры  $2h$ . То есть, гладкость гауссова профиля сглаживает осцилляции диаграммы направленности.

Видно, что полная фаза  $[(\omega + p\Omega)t - p(\pi/2 - \varphi)]$  поля  $E_p$ , описывающего порядок дифракции  $p$ , по сути, представляет собой сумму полной фазы  $\omega t$  световой волны на входе в акустооптическую ячейку и полной фазы  $p(\Omega t + \varphi)$  гармоники порядка  $p$  волны показателя преломления. При этом дополнительное слагаемое  $-p\pi/2$  может привести только к изменению начальной фазы поля  $E_p$ .

Сдвиг частоты световой волны на величину  $p\Omega$  обусловлен эффектом Доплера. Действительно, для световой волны с исходной частотой  $\omega$

акустическая волна (точнее, «наведенное» ею изменение показателя преломления) играет роль вторичного источника света, который движется со скоростью  $C$  – скоростью звука под углом  $\pi/2 - \theta_p$  к направлению распространения световой волны. Здесь  $\theta_p$  – угол, соответствующий дифракционному максимуму порядка  $p$ ,  $\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{\Lambda}$ . Тогда сдвиг частоты  $\Delta \omega$  световой волны определяется соотношением:

$$\Delta \omega = 2\pi \frac{C}{\lambda} \cos(\pi/2 - \theta_p) = 2\pi \frac{C}{\lambda} \sin \theta_p = 2\pi p \frac{C}{\Lambda} = p \Omega.$$

Отметим, что случай  $p = 0$  соответствует нулевому порядку дифракции, а поскольку поперечный эффект Доплера в рассматриваемом случае не может иметь места, то и  $\Delta \omega = 0$ .

Соотношение (1.5) описывает напряженность светового поля. Однако измеряемой величиной является  $I = EE^*$  (точнее говоря, мощность  $P$ , определяемую интегралом от интенсивности по площади угловой апертуре фотоприемника). То есть, необходимо найти произведение двух рядов  $E$  и  $E^*$  вида (1.5), с бесконечным числом слагаемых в каждом из них. При этом каждый член  $I_{pq}$  в указанном произведении характеризует интерференцию двух световых волн:  $I_{pq} = (E_p + E_q)(E_p + E_q)^* = E_p^2 + (E_p E_q^* + E_p^* E_q) + E_q^2$ . А поскольку суммирование производится по всем возможным значениям  $m, q$ , то выражение  $E_p E_q^* + E_p^* E_q$  описывает при  $p = q$  и слагаемые  $E_p^2, E_q^2$ .

Итак, найдем интенсивность некоторого слагаемого  $I_{pq} = E_p E_q^* + E_p^* E_q$ , исходя из (1.5), Введем новую переменную  $m = p - q$ . Тогда получим:

$$I_{pq} = I_{mq} = 2 \cos[m(\Omega t - \pi/2 + \varphi)] J_m J_{m+q} \exp\{-[\sigma^2(k\alpha - mf)^2/2]\} + \exp\{-[\sigma^2(k\alpha - (m+q)f)^2/2]\}.$$

Для нахождения интенсивности  $I$  пучка необходимо провести суммирование по всем возможным значениям  $m, q$ .

Пусть  $I(\alpha, \psi)/I_{00} = \gamma(\alpha)\gamma(\psi)$ ;  $I_{00} = I(\alpha = 0, \psi = 0, \Delta n = 0)$ . Тогда после соответствующих вычислений для углового распределения мощности (диаграммы направленности по мощности) получим [22, 24]:

$$\gamma(\psi) = \exp\{-(\sigma k\psi)^2\};$$

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) = & \exp\{-(\sigma k\alpha)^2\} \{J_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b^{m^2} J_m^2 \cos[2m(\Omega t + \varphi)]\} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \{J_m^2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} b^{p^2} (-1)^p J_{m+p} J_{m-p} \cos[2p(\Omega t + \varphi)]\} + \\ & + 2 \sum_{q=0}^{\infty} G_{q+1/2} \sum_{p=1}^{\infty} b^{(p-1/2)^2} (-1)^p J_{q+p} J_{q+1-p} \sin[(2p-1)(\Omega t + \varphi)]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $2\sigma$  - диаметр пучка;  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  - длина волны света;  $J_m = J_m(A)$  - функция Бесселя порядка  $m$ ;  $A = kL\Delta n$ ;  $b = \exp\{-(\sigma f)^2\}$ ;  $\varphi$  - фаза акустической волны;

$$F_m = \exp\{-\sigma^2(k\alpha - mf)^2\} + \exp\{-\sigma^2(k\alpha + mf)^2\};$$

$$G_{q+1/2} = \exp\{-\sigma^2[k\alpha - (q+1/2)f]^2\} - \exp\{-\sigma^2[k\alpha + (q+1/2)f]^2\}.$$

Как следует из (1.6), каждое слагаемое интенсивности пучка с некоторой частотой представляет собой результат интерференции двух пучков соответствующих порядков дифракции, разность частот которых дает искомую частоту.

Нетрудно видеть, что  $I_{00} = P_{00}/(\pi\theta_0^2)$ , где  $P_{00}$  - мощность пучка,  $\theta_0 = (k\sigma)^{-1}$  - его исходная расходимость. Член с  $\exp\{-(\sigma k\alpha)^2\} = \exp\{-(\alpha/\theta_0)^2\}$  описывает интенсивность пучка нулевого порядка дифракции (постоянную составляющую), а также интенсивность, обусловленную интерференцией пар пучков ненулевых порядков, симметричных относительно оси  $OZ$  (переменные составляющие). Член с  $F_m$  описывает интенсивность пучков  $\pm m$  порядков дифракции (постоянную составляющую), а также интенсивность, обусловленную интерференцией пар пучков, симметричных относительно пучка каждого  $\pm m$  порядка (переменные составляющие). Третий член постоянной составляющей не имеет и описывает интенсивность, обусловленную интерференцией пар пучков порядков различной четности:

«0» и «+1»; «-1» и «+2»; «-2» и «+3» и т.д. и формально описывает полуцелые порядки дифракции.

Следует отметить, что функции  $F_m$  представляют сумму соответствующих экспонент, в то время как функции  $G_{q+1/2}$  - разность. Это означает, что фазы пучков  $\pm m$  порядков совпадают друг с другом, тогда как фазы пучков  $\pm(q+1/2)$  порядков отличаются друг от друга на  $\pi$ . Этот результат может быть интересным для ряда измерительных задач, но его рассмотрение выходит за рамки данной работы.

Добавим, что в рассматриваемом случае существенна конечная расходимость пучка, обусловленная его конечным диаметром. Во все «угловые» функции угол наблюдения  $\alpha$  входит в комбинации с расходимостью  $\theta_0$  исходного пучка,  $\theta_0 = (k\sigma)^{-1}$ . Ясно, что интерференция может быть значимой только при угловом расстоянии между пучками, не превышающем  $\theta_0$ .

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть  $\sigma f \gg 1$ . Тогда из (1.6) получим:

$$\gamma(\alpha) \approx J_0^2 \exp\{-(\sigma k \alpha)^2\} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m J_m^2.$$

Диаграмма направленности представляет сумму пучков различных порядков дифракции. При этом соседние пучки разнесены по углу на величину, заведомо превосходящую их расходимость, так что интерференция между ними отсутствует, т.е.  $\gamma(\alpha)$  от времени не зависит.

Пусть теперь  $\sigma f \ll 1$ , т.е.  $b \approx 1 - (\sigma f)^2$ . Тогда из (1.6) получим:

$$\gamma(\alpha) \approx \exp\{-[\sigma k (\alpha - Lf\Delta n \sin(\Omega t + \varphi))]^2\}.$$

В данном случае, очевидно, имеет место «чистая» рефракция - отклонение пучка как целого на градиенте показателя преломления, обусловленном акустической волной. Если при этом  $\sigma f \rightarrow 0$ , то  $\gamma(\alpha) \rightarrow \exp\{-(\sigma k \alpha)^2\}$  и от времени не зависит.

Итак, из (1.6) следует, что в определенном диапазоне значений  $\sigma f$  модуляция акустической волной фазового фронта исходного светового пучка приводит к модуляции интенсивности (мощности) этого пучка «естественным образом», без каких либо дополнительных оптических элементов. Следовательно, оптическая схема соответствующего устройства может быть предельно простой: осветитель – акустооптическая ячейка с исследуемой жидкостью – фотоприемник.

Анализ (для случая  $\sigma f \geq 1$ ) показывает, что моментам времени, в которые минимальны градиенты показателя преломления на оси пучка (т.е.  $\Delta n$  или максимально, или минимально), соответствует максимальная интенсивность на оси пучка, а моментам времени, в которые эти градиенты максимальны, соответствует минимальная интенсивность. Амплитуды переменных составляющих уменьшаются: при увеличении  $\sigma f$  - за счет уменьшения градиентов показателя преломления, а при уменьшении  $\sigma f$  - за счет усреднения этих градиентов по поперечному сечению светового пучка.

Возможна также иная трактовка – интерференционная. Действительно, для некоторого диапазона значений  $\sigma f$ , с одной стороны, угловое расстояние между пучками соседних порядков дифракции меньше расходимости пучка, а с другой стороны – интенсивности этих пучков отличны от нуля. В результате возникает интерференция, приводящая к модуляции интенсивности пучка.

Изложенные качественные соображения никак не связаны с конкретным видом профиля интенсивности, то есть, они справедливы для любого профиля, если под  $\sigma$  понимать его (профиля) некий характерный размер. В частности, в (1.6) частоты переменных составляющих не зависят от  $\sigma$ . В то же время, параметрами профиля будут определяться амплитуды постоянной и переменных составляющих интенсивности пучка.

Рассмотрим случай произвольного значения  $\sigma f$  для удобного с практической точки зрения угла наблюдения  $\alpha = 0$ . Тогда (1.6) сводится к виду:

$$\gamma(0) = J_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b^{m^2} J_m^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b^{m^2} \cos[2m(\Omega t + \varphi)] [J_m^2 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} b^{p^2} (-1)^p J_{m+p} J_{m-p}]. \quad (1.7)$$

Видно, что в данном случае сигнал имеет постоянную составляющую и лишь четные гармоники частоты акустической волны, причем амплитуды этих гармоник убывают с увеличением  $m$ . Нечетные же гармоники отсутствуют в силу того, что в (4) все  $G_{q+1/2} = 0$ , если  $\alpha = 0$ .

Следует отметить важные для рассматриваемого случая свойства функций Бесселя [9, 42]:

$$J_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2 = 1; J_m^2 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{m+p} J_{m-p} = 0.$$

То есть, в случае  $b \rightarrow 1$  (то есть,  $\sigma f \rightarrow 0$ ) мы получаем естественный результат:  $\gamma(0) \rightarrow 1$ . При этом в (1.7) неограниченно возрастает число членов рядов, которые необходимо учитывать для получения физически значимого результата.

### 1.2.2. Соотношения для второй гармоники

Рассмотрим для определенности наиболее значимую вторую гармонику и оценим ее возможный уровень. Для задач измерительной техники интерес представляют не слишком большие значения  $A \sim I_{y3}^{1/2}$  ( $I_{y3}$  – интенсивность УЗ-волны) как с точки зрения простоты реализации, так и с точки зрения минимизации влияния волны на исследуемую жидкость. Рассмотрим поэтому практически важный случай, когда  $A \leq 10^0$ . Если при этом  $\sigma f$  – не слишком малая величина (т.е.  $b$  значительно отличается от единицы), то в (1.7) можно ограничиться лишь первыми членами соответствующих рядов:

$$\gamma(0) \approx \beta_0 + \beta_2 \cos 2(\Omega t + \varphi), \quad (1.8)$$

где  $\beta_0 = J_0^2(A) + 2[bJ_1^2(A) + b^4J_2^2(A) + b^9J_3^2(A)]$ ;

$$\beta_2 = 2b\{J_1^2(A) - 2[bJ_0(A)J_2(A) + b^4J_1(A)J_3(A) + b^9J_2(A)J_4(A)]\}.$$

Вторая гармоника обусловлена интерференцией пар пучков следующих порядков дифракции: «-1» и «+1»; «0» и «2»; «0» и «-2»; «1» и «3»; «-1» и «-3»;

«2» и «4»; «-2» и «-4». Вклады в  $\beta_2$  пар «0» и «2»; «0» и «-2» одинаковы, также как пар «1» и «3»; «-1» и «-3»; и, соответственно, пар «2» и «4»; «-2» и «-4». Именно этим обстоятельством обусловлен множитель «2» перед квадратной скобкой в выражении для  $\beta_2$ .

Вид зависимости  $\beta_2(A)$ , рассчитанный по (1.8), представлен ниже.

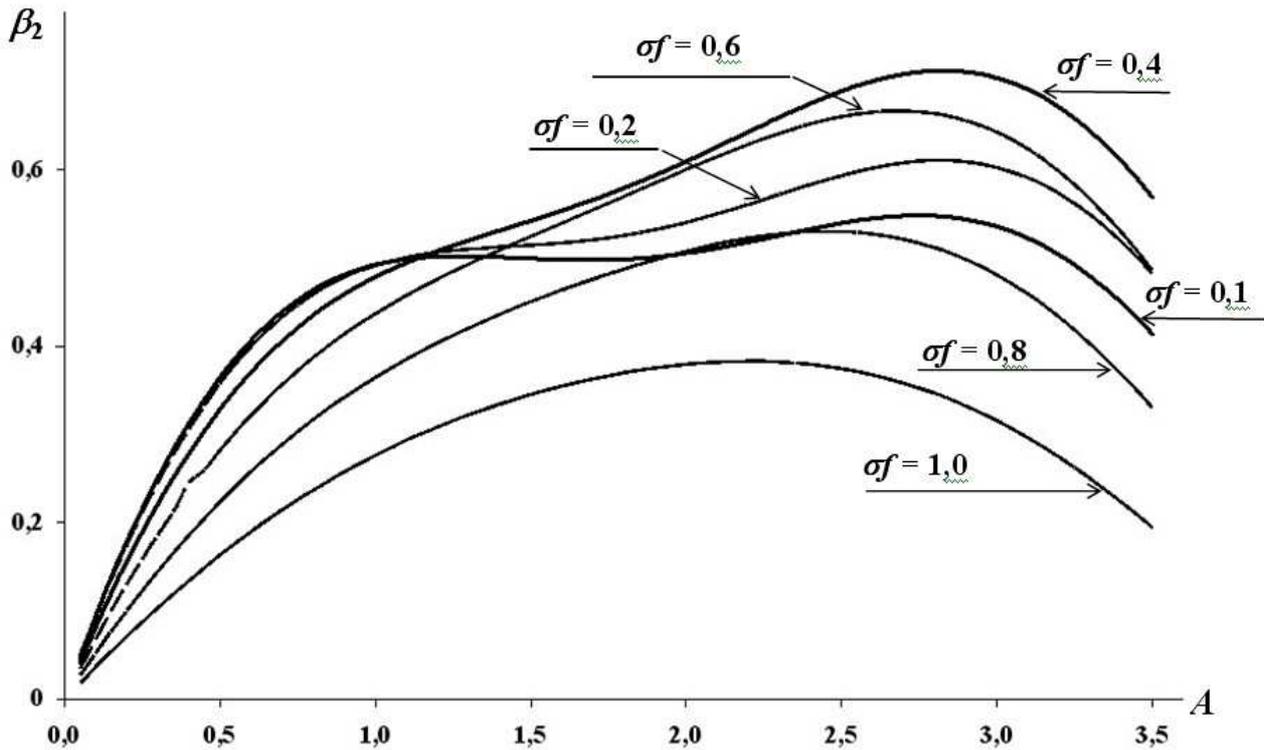


Рис. 1.1. Зависимость амплитуды второй гармоники  $\beta_2(A)$  от параметра  $A$  для различных значений  $\sigma f$

Из представленного рисунка видно, что имеет место максимум зависимости  $\beta_2(A)$ , который достигается при  $A \approx 2...3$ . Наличие этого максимума может быть объяснено следующими соображениями. При  $A = 0$ , очевидно, о фазовой решетке как таковой и о дифракции света на ней говорить не приходится. Увеличение  $A$  приводит к «расщеплению» исходного пучка на совокупность пучков различных порядков дифракции. При этом наиболее существенными являются пучки  $\pm 1$ , как низших порядков. Итак, вначале

амплитуда второй гармоники (результат интерференции упомянутых пучков  $\pm 1$  порядка) возрастает с увеличением  $A$ . Однако при этом возрастает роль пучков высших порядков дифракции, в которые за счет интерференции начинает «перекачиваться» мощность (энергия) пучков нулевого и  $\pm 1$  порядков. В результате с увеличением  $A$  амплитуда второй гармоники начинает убывать (но при этом возрастают амплитуды высших гармоник).

Из рис. 1.1. видно, что зависимость  $\beta_2(b)$  также имеет максимум и по другой переменной - при  $\sigma f = 0,4 \dots 0,5$  ( $b = \exp\{-(\sigma f)^2\} = 0,78 \dots 0,85$ ).

Наличие этого максимума объясняется противоположным действием двух факторов. С увеличением  $b$  (уменьшением  $\sigma f$ ) возрастает степень перекрытия пучков, и в области их перекрытия возникает интерференция (приводящая к модуляции интенсивности пучка). Но одновременно при этом уменьшается эффективность дифракции, которая определяется максимальным изменением фазы светового пучка по его поперечному сечению. При этом уменьшаются интенсивности пучков ненулевых порядков дифракции. В результате заметная модуляция интенсивности светового пучка, обусловленная интерференцией пучков различных порядков дифракции, перекрывающихся в пространстве, имеет место лишь в определенном диапазоне значений  $\sigma f$ .

Модуляцию интенсивности в случае бегущей акустической волны можно объяснить также периодическим изменением кривизны фазового фронта светового пучка. Рассмотрим наиболее наглядный случай, описываемый (1.8) при  $\sigma f \ll 1$ , т.е.  $b \approx 1 - (\sigma f)^2$ . Максимальные значения  $\gamma(0)$  соответствуют моментам времени  $2(\Omega t + \varphi) = 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), в которые минимальны градиенты показателя преломления на оси пучка (т.е.  $\Delta n$  или максимально, или минимально). В этом случае  $\gamma(0) = 1 - A^2(1 - b)^2/2 \approx 1 - (A\sigma^2 f^2)^2/2$ .

С другой стороны, в рассматриваемом случае среда в акустооптической ячейке эквивалентна некой сферической (точнее, цилиндрической) линзе. Эта линза трансформирует плоский фазовый фронт в сферический (цилиндрический) с радиусом кривизны  $R_L$ , оценить который можно

следующим образом. Разность хода  $h$  между центральным лучом и лучами, отстоящими от оси пучка на расстояние  $\pm\sigma$ , имеет вид:  $h = \pm L\Delta n(1 - \cos\sigma f) \approx \pm L\Delta n(\sigma f)^2/2$ . Но для окружности радиуса  $R_L$  справедливо соотношение:  $(R_L - h)^2 = R_L^2 - \sigma^2$ . А поскольку  $R_L^2 \gg h^2$ , то  $R_L \approx \sigma^2/2h = \pm(L\Delta n f^2)^{-1}$ .

Ясно, что расходимость  $\theta$  пучка на выходе акустооптической ячейки будет отличаться от расходимости  $\theta_0$  исходного гауссова пучка. При этом, как следует из [17],  $\theta^2 = \theta_0^2[1 + (k\sigma^2/R_L)^2]$ . Но поскольку мощность пучка неизменна, то результат совпадает с результатом, следующим из (1.7) и от знака  $R_L$  не зависит:  $\chi(0) = \theta_0/\theta \approx 1 - (A\sigma^2 f^2)^2/2$ .

Итак, максимальная интенсивность определяется дефокусировкой пучка. В рассматриваемом приближении фазовый фронт является параболическим. Очевидно, члены более высокого порядка по  $\sigma f$  описывают абберации этого фронта.

Минимальные значения  $\gamma(0)$  соответствуют моментам времени  $2(\Omega t + \varphi) = (2k + 1)\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), в которые максимальны градиенты показателя преломления на оси пучка. В этом случае, как следует из (1.7),  $\gamma(0) = 1 - A^2(1 - b^2)/2 \approx 1 - (A\sigma f)^2$ .

С другой стороны, теперь среда эквивалентна не линзе, а оптическому клину, отклоняющему пучок как целое на некий угол  $\beta = Ldn/dx \approx L\Delta n f = Af/k$ . И в этом случае результат так же совпадает с результатом, следующим из (1.7):

$$\gamma(0) = \exp\{-(\beta/\theta_0)^2\} = \exp\{-(A\sigma f)^2\} \approx 1 - (A\sigma f)^2.$$

Таким образом, минимальная интенсивность определяется отклонением пучка как целого. Члены более высокого порядка по  $\sigma f$  описывают изменение кривизны фазового фронта пучка.

При увеличении  $\sigma f$  влияние фазы (пространственного положения) акустической волны на форму фазового фронта светового пучка, очевидно, уменьшается, поскольку локальные неоднородности показателя преломления усредняются в пределах поперечного сечения пучка. В частности, этим

влиянием можно пренебречь в «чисто» дифракционном режиме ( $\sigma f \gg 1$ ). С уменьшением же  $\sigma f$  (с переходом к рефракционному режиму) влияние фазы волны возрастает. Однако (при заданной величине  $A$ ) одновременно уменьшаются и градиенты показателя преломления, причем последний эффект сильнее влияет на изменение фазового фронта светового пучка. То есть, и с этой точки зрения заметная модуляция интенсивности светового пучка имеет место лишь в определенном диапазоне отношений  $\sigma f$ .

Определенный выше диаметр  $2\sigma$  есть диаметр по уровню интенсивности  $e^{-1}$ . В то же время, "на глаз" диаметр  $D$  пучка определяется обычно по уровню, примерно равному 0,1. Для этого уровня  $D \approx 3\sigma$ . Тогда  $\sigma f \approx 2D/\Lambda$ . Для приведенных выше значений  $\sigma f = 0,4 \dots 0,5$  отношение  $\Lambda/D$  лежит в пределах:  $\Lambda/D = 4 \dots 5$ .

Оценим теперь требуемую интенсивность  $I_{y3}$  УЗ-волны, полагая, что исследуемой средой является вода. Пусть  $\lambda = 0,63$  мкм (что соответствует длине волны гелий-неонового лазера);  $L = 1$  см. Тогда, если  $A = 1$ , то  $I_{y3} = 0,25$  Вт/см<sup>2</sup>; если же  $A = 2,4$ ; то  $I_{y3} = 1,5$  Вт/см<sup>2</sup>. Следует отметить, что в этом случае для диаметра пучка  $D \approx 0,5 - 1$  мм оптимальное значение  $\Lambda \approx 2 - 5$  мм, так что  $\Omega/2\pi \approx 0,3 - 1$  МГц.

Выше неявно предполагалось, что интенсивность пучка регистрируется в пределах угловой апертуры, близкой к нулю. Если же апертурный угол  $\varphi$  фотоприемника в плоскости  $XOZ$  в несколько раз меньше исходной расходимости пучка  $\theta_0$ , а в плоскости  $YOZ$  в несколько раз больше, то мощность  $P_2$  сигнала второй гармоники имеет вид:

$$P_2/P_{00} \approx (\varphi/\theta_0) \beta_2/\sqrt{\pi},$$

где  $P_{00}$  - мощность исходного пучка (в отсутствие акустической волны). В частности, если  $\beta_2 = 0,11$  (т.е.  $A = 1$ );  $\varphi/\theta_0 = 0,3$ ; то  $P_2/P_{00} = 0,02$ .

Анализ показывает, что имеется оптимальное значение апертуры  $\varphi_{\text{opt}}$ , при котором  $\beta_2$  максимально,  $\varphi_{\text{opt}} \approx 0,8\theta_0$ . При этом  $P_2/P_{00} = 0,06$ . Если  $P_{00} = 1$  мВт

(что соответствует мощности обычного He-Ne лазера), то  $P_2$  регистрируется обычным фотодиодом. При этом не требуется никаких дополнительных оптических элементов, поскольку пучки интерферируют «сами по себе».

### 1.2.3. Дифракция на двух встречных акустических волнах

Выше рассматривалась бегущая акустическая волна, формирующая волну показателя преломления вида:  $n(x,t) = n_0 + \Delta n \cos(\Omega t + fx)$ . В случае  $D \geq \Lambda$  диаграмма направленности представляет сумму пучков различных порядков дифракции. В частности, если  $D \gg \Lambda$ , то соседние пучки разнесены по углу на величину, заведомо превосходящую расходимость этих пучков. Тогда возможна сравнительно простая реализация различных схем гетеродинных интерферометров [1, 6, 10, 19, 49].

При этом имеет место техническое противоречие. Увеличение частоты  $\Omega$ , с одной стороны, увеличивает разнесение интерферирующих пучков, что упрощает практическую реализацию соответствующих устройств. Но с другой стороны, при этом возрастают и требования к быстродействию фотоприемника и последующего электронного тракта, что усложняет практическую реализацию.

Для разрешения этого противоречия в [35] используют две пространственно разнесенных акустооптических ячейки, частоты акустических волн в которых различаются на заданную величину. Однако в этом случае необходимо обеспечить как требуемое положение одной ячейки относительно другой, так и малость относительных вибраций этих ячеек. Последнее же является непростой технической задачей с учетом значительного расстояния между ячейками, необходимого для пространственного разделения пучков различных порядков дифракции.

В связи с этим, рассмотрим схему, позволяющую получить малый сдвиг частоты с использованием только одной ячейки [10].

Положим, что в акустооптической ячейке возбуждены две бегущих навстречу друг другу акустические волны с различными частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ,

причем  $\Delta \Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \ll \Omega_1, \Omega_2$ . При этом, очевидно, и  $|f_1 - f_2|\sigma \ll 1$ . В частности, если  $\Delta \Omega = 0$ , то УЗ - волны являются стоячими. Амплитуды волн положим одинаковыми. Тогда показатель преломления ячейки будет иметь вид:

$$n(x,t) = n_0 + \Delta n [\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)].$$

Фазы акустических волн представим в интересующем нас виде:  $\varphi_1 = f_1 x_1$ ;  $\varphi_2 = f_2 x_2$ ; где  $x_1, x_2$  - расстояния от соответствующих излучателей звука до оси светового пучка. Если  $S$  - расстояние между излучателями,  $S = x_1 + x_2$ , то  $f_2 x_2 = f_2 S - f_2 x_1$ . Постоянная составляющая  $f_2 S$  интереса не представляет, и в дальнейшем мы ее учитывать не будем (то есть, примем, что  $x_2 = -x_1$ ). Кроме того, для удобства изменим обозначение:  $x_1 \Rightarrow x_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} n(x,t) &= n_0 + \Delta n [\cos(\Omega_1 t + f_1 x_0) + \cos(\Omega_2 t - f_2 x_0)] = \\ &= n_0 + 2\Delta n \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \frac{f_1 + f_2}{2} x_0\right) \cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{f_1 - f_2}{2} x_0\right). \end{aligned}$$

Говоря языком радиотехники, в данном случае имеют место «биения» частоты.

Положим, что выполняются условия дифракции Рамана-Ната. Коэффициент пропускания  $T$  фазовой решетки (транспаранта) в данном случае, в отличие от (1.2), примет более сложный вид:

$$\begin{aligned} T &= \exp\{iA \cos(\Omega_1 t + f_1 x_0) + iA \cos(\Omega_2 t - f_2 x_0)\} = \\ &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{in\left(\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} J_n(A) \exp\{inf_1 x_0\} \right] \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{im\left(\Omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} J_m(A) \exp\{-imf_2 x_0\} \right]. \end{aligned}$$

Тогда преобразование Фраунгофера, в отличие от (1.5), дает следующее:

$$\begin{aligned} E &= E(\alpha, \psi) = E_0 \exp\{-(\sigma k \psi)^2 / 2\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{nm}, \quad (1.9) \\ E_{nm} &= \exp\left\{i\left[(\omega + n\Omega_1 + m\Omega_2)t - (n+m)\frac{\pi}{2} + (nf_1 - mf_2)x_0\right]\right\} J_n J_m W_{nm}, \end{aligned}$$

$$W_{nm} = \exp\{-\sigma^2[(k\alpha + nf_1)^2 / 2 + (k\alpha - mf_2)^2 / 2]\}.$$

В рассматриваемом случае вычисление интенсивности пучка  $I = EE^*$  оказывается значительно более сложным, чем для (1.5). Вначале надо найти некоторое слагаемое вида  $I_{nmprq} = E_{nm} E_{prq}^* + E_{nm}^* E_{prq}$ , а затем просуммировать  $I_{nmprq}$  по всем четырем индексам. То есть, необходимо найти произведение четырех рядов с бесконечным числом слагаемых в каждом из них.

В спектре сигнала присутствуют комбинационные частоты вида  $n\Omega_1 + m\Omega_2$  (в частных случаях соответствующие гармоникам основных частот  $\Omega_1, \Omega_2$ ). В то же время, для практики наибольший интерес представляет низкочастотная составляющая - сигнал разностной частоты  $\Omega_1 - \Omega_2$  (для определенности положим, что  $\Omega_1 > \Omega_2$ ).

Каждое слагаемое интенсивности пучка с некоторой частотой представляет собой результат интерференции двух пучков, разность частот которых дает искомую частоту. Поэтому низкочастотная составляющая сигнала формируется при условии  $m + n = 0$ ;  $m = -n$ . Тогда

$$E_{nm} = (-1)^n \exp\{i[\omega + n(\Omega_1 - \Omega_2)]t + in(f_1 + f_2)x_0\} J_n^2 \exp\{-\sigma^2[(k\alpha + nf_1)^2/2 + (k\alpha + nf_2)^2/2]\}.$$

Соотношение  $m = -n$  есть следствие того, что акустические волны с различными частотами распространяются навстречу друг другу. Если для одной волны положительный порядок дифракции (например,  $n > 0$ ) соответствует отклонению пучка в направлении движения волны, то для второй волны отклонению пучка в направлении, противоположном направлению ее движения, соответствует отрицательный порядок дифракции ( $m < 0$ ). При этом низкочастотной составляющей соответствует минимальное угловое разнесение интерферирующих волн, т.е.  $m = -n$ .

Далее, для наглядности положим, что  $\alpha = 0$ . Тогда низкочастотные составляющие диаграммы направленности пучка, в отличие от (1.7), имеют вид:

$$\begin{aligned} \gamma(0) = & J_1^2 \exp\{-\sigma^2(f_1^2 + f_2^2)\} \cos[\Delta \Omega t + (f_1 + f_2)x_0] + \\ & + J_2^2 \exp\{-4\sigma^2(f_1^2 + f_2^2)\} \cos\{2[\Delta \Omega t + (f_1 + f_2)x_0]\} + \dots \end{aligned}$$

Следует отметить, что изменением (подбором) угла  $\alpha$  можно в определенной мере увеличить глубину модуляции сигнала (увеличить амплитуду переменной составляющей при одновременном уменьшении постоянной составляющей).

Соотношения (1.9) в общем виде являются достаточно сложными. Для примера рассмотрим случай  $\alpha = 0$ , причем ограничимся рассмотрением пучков лишь  $\pm 1$  порядка дифракции. Это значит, что в (1.8) в выражении для  $\beta_2$  можно оставить только первое слагаемое.

Интересующие нас две пары световых пучков  $E_{+\Omega_1}$ ,  $E_{-\Omega_1}$  и  $E_{+\Omega_2}$ ,  $E_{-\Omega_2}$  имеют следующий вид, аналогичный (1.5):

$$E_{+\Omega_1} = J_1(A)\exp\{-\sigma f_1)^2/2\}\exp\{i[(\omega + \Omega_1)t + f_1x_0 - \pi/2]\};$$

$$E_{-\Omega_1} = J_1(A)\exp\{-\sigma f_1)^2/2\}\exp\{i[(\omega - \Omega_1)t - f_1x_0 + \pi/2]\};$$

$$E_{+\Omega_2} = J_1(A)\exp\{-\sigma f_2)^2/2\}\exp\{i[(\omega + \Omega_2)t - f_2x_0 - \pi/2]\};$$

$$E_{-\Omega_2} = J_1(A)\exp\{-\sigma f_2)^2/2\}\exp\{i[(\omega - \Omega_2)t + f_2x_0 + \pi/2]\}.$$

Здесь  $E_{+\Omega_1}$ ,  $E_{-\Omega_1}$  – поле  $+1$  и  $-1$  порядка дифракции света на акустической волне частоты  $\Omega_1$ ;  $E_{+\Omega_2}$ ,  $E_{-\Omega_2}$  – поле  $+1$  и  $-1$  порядка дифракции света на акустической волне частоты  $\Omega_2$ .

Интерференция всех четырех пучков даст результирующую интенсивность  $I$ :

$$I = (E_{+\Omega_1} + E_{-\Omega_1} + E_{+\Omega_2} + E_{-\Omega_2})(E_{+\Omega_1} + E_{-\Omega_1} + E_{+\Omega_2} + E_{-\Omega_2})^*.$$

Для диаграммы направленности по мощности, аналогично (1.6), получим для выбранного угла  $\alpha = 0$ , с учетом обозначений  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ ;  $\Delta f = f_1 - f_2$ :

$$\begin{aligned} \chi(0) = & 2J_1^2[\exp\{-(\sigma f_1)^2\} + \exp\{-\sigma f_2)^2\}] + \\ & + J_1^2[\exp\{-(\sigma f_1)^2\}\cos\{2(\Omega_1 t + f_1 x_0) - \pi\} + J_1^2[\exp\{-(\sigma f_2)^2\}\cos\{2(\Omega_2 t + f_2 x_0) - \pi\} + \\ & + 2J_1^2[\exp\{-(\sigma f_1)^2/2\} + \exp\{-\sigma f_2)^2/2\}][\cos\{\Delta\Omega t + (f_1 + f_2)x_0\} + \cos\{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \Delta f x_0 - \pi\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Итак, выходной сигнал содержит составляющую с разностной частотой (частотой биений)  $\Omega_1 - \Omega_2$ . При этом угол дифракции определяется частотами  $\Omega_1 \approx \Omega_2$  и может быть сравнительно большим. Существенно, что для этой составляющей «эффективное» волновое число  $f_{\text{эф}}$  определяется суммой, а не разностью соответствующих волновых чисел:  $f_{\text{эф}} = f_1 + f_2$ .

Для составляющей же с суммарной частотой  $\Omega_1 + \Omega_2$  соответствующее «эффективное» волновое число определяется разностью  $f_1 - f_2$ .

Рассмотрим схему гетеродинного интерферометра (рис. 1.2), реализующую рассматриваемый подход [10, 19]. Отметим, что рассматриваемый интерферометр может быть выполнен в исполнении «интегральной оптики» [8].

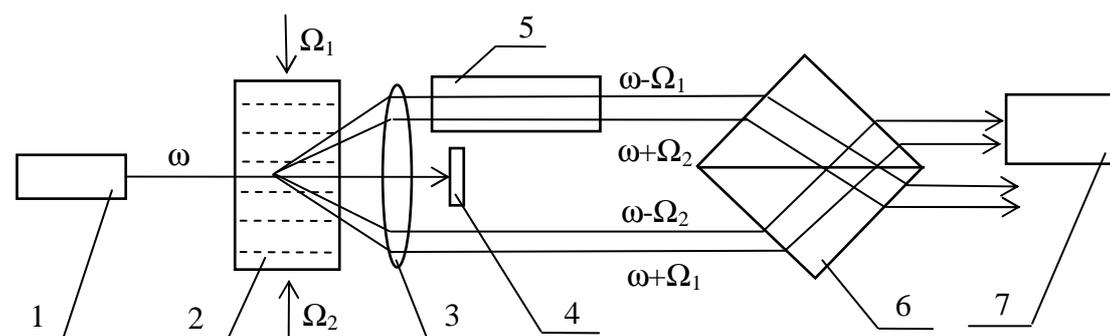


Рис. 1.2. Акустооптический гетеродинный интерферометр

1 – лазер; 2 – акустооптическая ячейка; 3 – объектив; 4 – экран;

5 – кювета с исследуемой средой; 6 – смесительная призма-куб;

7 – фотоприёмный блок

В ячейке 2 возбуждаются две бегущие навстречу друг другу акустические волны с частотами  $\Omega_1$  («сверху вниз») и  $\Omega_2$  («снизу вверх»). Световой пучок от лазера 1 проходит через ячейку, причем имеем место дифракция Рамана-Ната.

В первом порядке дифракции образуется пара световых пучков с частотами  $\omega - \Omega_1$ ,  $\omega + \Omega_1$  (обусловленных «верхней» акустической волной), и пара пучков с частотами  $\omega + \Omega_2$ ,  $\omega - \Omega_2$  (обусловленных «нижней» акустической волной). Соответствующие углы дифракции имеют вид:

$\theta_1 = \arcsin(\lambda/\Lambda_1) \approx \lambda/\Lambda_1$ ,  $\theta_2 = \arcsin(\lambda/\Lambda_2) \approx \lambda/\Lambda_2$ . Поскольку  $\Omega_1 - \Omega_2 \ll \Omega_1, \Omega_2$ , то  $\theta_1 - \theta_2 \ll \theta_1, \theta_2$ . Это значит, что углы дифракции для всех четырех световых пучков примерно одинаковы.

Для рассматриваемой задачи интерес представляют сравнительно малые сдвиги частоты,  $(\Omega_1 - \Omega_2)/2\pi < 1$  мГц (тогда как  $\Omega_1, \Omega_2 > 10$  мГц). В этом случае разность углов дифракции  $\theta_1 - \theta_2$ , как правило, не превосходит дифракционной расходимости пучка  $\lambda/D$  (для реальных значений диаметра пучка  $D \approx 1$  мм и скорости звука в акустооптической ячейке, типичной для жидкостей,  $C \approx 10^3$  м/с). Тогда пара пучков с частотами  $\omega - \Omega_1, \omega + \Omega_2$ , будет совпадать в пространстве, точно также, как и пара пучков с частотами  $\omega + \Omega_1, \omega - \Omega_2$ .

То есть, с практической точки зрения интерферометр на рис. 1.2 можно рассматривать как двухлучевой интерферометр, в одном из лучей которого размещена кювета 5 с исследуемой средой.

Смесительная призма-куб 6 обеспечивает пространственное и угловое совмещение всех четырех интерферирующих пучков на поверхности фотоприемного блока 7.

Выходной сигнал этого блока, как следует из (1.10), должен содержать следующие частоты:  $2\Omega_1, 2\Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2, \Omega_1 - \Omega_2$ . Если же постоянная времени  $t_\Phi$  фотоприемника такова, что  $(\Omega_1 - \Omega_2)^{-1} \gg t_\Phi \gg (2\Omega_1)^{-1}, (2\Omega_2)^{-1}, (\Omega_1 + \Omega_2)^{-1}$ , то реально в выходном сигнале будет представлена лишь низкочастотная составляющая разностной частоты  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ .

Таким образом, переход от одной акустической волны к встречным волнам с различными частотами позволяет разрешить отмеченное выше противоречие. Разнесение пучков различных порядков дифракции по-прежнему определяется несущими частотами акустических волн. Однако «рабочая частота» теперь определяется *разностью* несущих частот и может быть достаточно малой независимо от значений несущих частот.

При практической реализации интерферометров один из наиболее важных вопросов – обеспечение их виброустойчивости. Наиболее виброустойчивыми, как известно, являются интерферометры с оптическими элементами, общими для обеих лучей – пластинами Жамена, призмами Кестерса и аналогичными призмами [48].

Весьма высокие требования предъявляются к клиновидности пластин Жамена, поскольку эту клиновидность нельзя компенсировать юстировками пластин. Клиновидность же призмы Кестерса, призмы-куба (представленной на рис. 1.3) и аналогичных призм компенсируется их поворотом вокруг оси, перпендикулярной плоскости главного сечения [48]. Возможности же компенсации пирамидальности такого рода призм далеко не очевидны. Тем не менее, при определенных, достаточно просто реализуемых на практике условиях возможна компенсация и пирамидальности призм даже низкой группы точности [48] при их повороте вокруг оси, лежащей в плоскости главного сечения, и параллельной биссектрисе угла между интерферирующими пучками [19].

Для ряда исследовательских задач определенный интерес представляет определение фазы  $\varphi$  акустической волны. При этом нет необходимости в использовании интерферометров, так что более простым с точки зрения реализации является случай  $\Lambda \approx D$ . Тогда, в отличие от случая в отличие от случая  $\Lambda \ll D$ , соседние дифракционные максимумы могут перекрываться в пространстве практически на любом расстоянии от акустооптической ячейки.

Рассмотрим поэтому особенности определения фазы применительно к дифракции света на двух встречных акустических волнах. При этом сразу ограничимся лишь низкочастотной составляющей сигнала на разностной частоте. Тогда из (1.10) запишем, аналогично (1.8), выражение для диаграммы направленности по мощности

$$\gamma_{\Delta\Omega}(0) = \beta_2 \cos[\Delta\Omega t + (f_1 + f_2)x_0] = \beta_2 \cos(\Delta\Omega t + \varphi), \quad (1.11)$$

где  $\beta_2 = 2J_1^2[\exp\{-(\sigma f_1)^2/2\} + \exp\{-\sigma f_2\}^2/2]$ .

Рассмотрим вначале самый простой случай плоской волны:

$$s(x,t) = s_0 \cos(\Omega t + fx) = s_0 \cos[\Omega(t + fx/\Omega)] = s_0 \cos[\Omega(t + x/C)] = s_0 \cos[\Omega(t + \tau)],$$

где  $C$  - фазовая скорость волны;  $C = \Omega/f$ ;  $\tau = x/C$  - время, за которое волна со скоростью  $C$  проходит расстояние  $x$ . Для этой волны фаза  $\varphi$  имеет вид:  $\varphi = \Omega \tau = 2\pi\tau/T = 2\pi x/\Lambda$ , где  $T = 2\pi/\Omega$  - период акустической волны;  $\Lambda = 2\pi/f$  - длина акустической волны.

Тогда для (1.11) получим:

$$\gamma_{\Delta\Omega}(0) = \beta_2 \cos[\Delta\Omega t + (f_1 + f_2)x_0] = \beta_2 \cos[\Delta\Omega(t + x_0/C^*)]. \quad (1.12)$$

Здесь  $C^*$  - «эффективная» скорость волны (можно сказать, что это - скорость распространения низкочастотной составляющей),  $C^* = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{f_1 + f_2} = C \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}$ ;

$C$  - скорость звука в акустооптической ячейке. В частности, если  $\Omega_1 = \Omega_2$ , то  $C^* = 0$  - то есть, волна является стоячей.

Следует отметить, что для составляющей сигнала с суммарной частотой  $\gamma_{\Sigma\Omega}$  ситуация иная:

$$\gamma_{\Sigma\Omega}(0) = \beta_2 \cos[(\Omega_1 + \Omega_2)t + \Delta f x_0 - \pi] = \beta_2 \cos[\Delta\Omega(t + x_0/C_+^*) - \pi],$$

где  $C_+^*$  - «эффективная» скорость волны (можно сказать, скорость распространения высокочастотной составляющей),  $C_+^* = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{f_1 - f_2} = C \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$ .

В частности, если  $\Omega_1 = \Omega_2$ , то волна является стоячей. При этом  $C_+^* = \infty$ .

Итак, при дифракции света на встречных волнах появляются качественно новые особенности, полезные для многих практических задач. С одной стороны, измерения могут проводиться на низкочастотной составляющей (разностной частоте). С другой стороны, при этом «эффективная» скорость волны может быть значительно меньше, чем скорость звука в акустооптической ячейке.

### 1.3. Дифракция Френеля

#### 1.3.1. Общие соотношения

Рассмотрим, по аналогии с [20, 38, 44], количественные соотношения, описывающие дифракцию света на ультразвуке.

Поле  $E(x,y,z)$  в некоторой произвольной точке пространства  $(x,y,z)$  можно найти, используя преобразование Френеля [36]. Исходя из (1.1) - (1.3), запишем

это поле в соответствии с [37], полагая, что  $l \equiv \frac{z}{k\sigma_0^2}$ :

$$E(x,y,z) = \frac{k}{2\pi iz} \exp\{ikz\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_L(x_0,y_0) \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n,$$

$$E_n = \frac{E_{00}}{\sqrt{1+l^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2(1+l^2)} + i[\omega t - kz - \arctg l - \frac{x^2+y^2}{2\sigma_0^2(1+l^2)}]\right\} Q_n, \quad (1.13)$$

$$Q_n = J_n(A) \exp\left\{-\frac{(x+nfz/k)^2}{2\sigma_0^2(1+l^2)}\right\} \exp\left\{in(\Omega t - \pi/2 - \frac{fx}{1+l^2}) - i\frac{(nf\sigma_0)^2}{2(1+l^2)}\right\}.$$

Здесь  $k \equiv 2\pi/\lambda$  - волновое число,  $\lambda$  - длина волны света;  $2\sigma_0$  - диаметр светового пучка в «перетяжке» (при  $z=0$ ) по уровню интенсивности  $e^{-1}$ .

Однако непосредственный практический интерес представляет не поле, а интенсивность пучка,  $I = EE^*$ .

Исходя из соотношения (1.13), найдем интенсивность  $I_{nm}$  некоторого слагаемого  $I_{nm} = E_n E_m^* + E_n^* E_m$ :

$$I_{nm} = \frac{E_{00}^2}{1+l^2} \exp\left\{-\frac{y^2}{\sigma^2}\right\} J_n J_m \exp\left\{-\frac{[x+(n+m)fz/2k]^2 + [(n-m)fz/2k]^2}{\sigma^2}\right\} 2\cos[(n-m)\Phi],$$

$$\Phi \equiv \Omega t - \frac{\pi}{2} - \frac{fx}{1+l^2} - \frac{n+m}{2} \frac{\sigma_0^2 f^2 l}{1+l^2}.$$

Если  $n, m$  имеют одинаковую четность, то можно положить:  $n+m=2p$ ;  $n-m=2j$ . Если же  $n, m$  имеют различную четность, то положим, что  $n+m=2p$ ;  $n-m=2j+1$ . Для нахождения интенсивности  $I$  пучка необходимо провести суммирование по всем возможным значениям  $p, j$ . После

соответствующих вычислений, с учетом свойств функций Бесселя целого порядка, и полагая  $\sigma^2 = \sigma_0^2(1 + l^2)$ ;  $E_{00}^2 = I_0$ , получим [26, 28]:

$$I(x, y, z) = \frac{I_0}{1 + l^2} \exp\left\{-\frac{y^2}{\sigma^2}\right\} [R(x) + F(x) + G(x)], \quad (1.14)$$

$$R(x) = J_0^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2}\right\} + \sum_{p=1}^{\infty} J_p^2 \left[ \exp\left\{-\frac{(x + pfz/k)^2}{\sigma^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x - pfz/k)^2}{\sigma^2}\right\} \right];$$

$$F(x) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} J_j^2 \exp\left\{-j^2 \frac{(\sigma_0 f)^2 l^2}{1 + l^2}\right\} \exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2}\right\} \cos\left[2j\left(\Omega t - \frac{fx}{1 + l^2}\right)\right] +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-j^2 \frac{(\sigma_0 f)^2 l^2}{1 + l^2}\right\} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{j+p} J_{j-p} \left\{ \exp\left\{-\frac{(x + pfz/k)^2}{\sigma^2}\right\} \cos\left[2j\left(\Omega t - \frac{fx}{1 + l^2} - \varphi_p\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{-\frac{(x - pfz/k)^2}{\sigma^2}\right\} \cos\left[2j\left(\Omega t - \frac{fx}{1 + l^2} + \varphi_p\right)\right] \right\};$$

$$G(x) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-(j - 1/2)^2 \frac{(\sigma_0 f)^2 l^2}{1 + l^2}\right\} (-1)^j J_{p+j} J_{p+1-j} H(x);$$

$$H(x) = \exp\left\{-\frac{[(x + (p + 1/2)fz/k]^2}{\sigma^2}\right\} \sin\left\{(2j - 1)\left[\Omega t - \frac{fx}{1 + l^2} - \varphi_{p+1/2}\right]\right\} -$$

$$- \exp\left\{-\frac{[(x - (p + 1/2)fz/k]^2}{\sigma^2}\right\} \sin\left\{(2j - 1)\left[\Omega t - \frac{fx}{1 + l^2} + \varphi_{p+1/2}\right]\right\};$$

$$\varphi_p = p(\sigma_0 f)^2 \frac{l}{1 + l^2}; \quad \varphi_{p+1/2} = (p + 1/2)(\sigma_0 f)^2 \frac{l}{1 + l^2}.$$

Итак, соотношения (1.14) описывают интенсивность пучка в произвольной точке пространства. Они содержат три безразмерных параметра:  $\sigma_0 f$  определяет соотношение между периодом решетки  $\Lambda$  и диаметром пучка  $2\sigma_0$  (в общем случае, произвольное);  $A$  – аргумент всех функций Бесселя – определяет «эффективность» фазовой решетки;  $k\sigma_0$ , точнее,  $(k\sigma_0)^{-1}$  определяет расходимость исходного светового пучка.

В направлении  $OY$  профиль интенсивности является гауссовым, поэтому интерес представляют слагаемые  $R(x)$ ,  $F(x)$ ,  $G(x)$ , описывающие собственно дифракцию.

Постоянная составляющая  $R(x)$  представляет собой сумму интенсивностей пучков различных порядков дифракции (без учета их интерференции). Следует отметить, что показатели соответствующих экспонент содержат множитель  $x \pm pfz/k = x \pm p\lambda z/\Lambda = x \pm p\beta z$  ( $\beta = \lambda/\Lambda$  - угол дифракции).

Интерференция пучков различных порядков одинаковой четности описывается слагаемым  $F(x)$ . Четные гармоники частоты  $\Omega$  могут возникать при интерференции пучков одинаковых по модулю порядков дифракции ( $\pm 1, \pm 2, \dots$ ), либо различных ( $1 \pm 3, 2 \pm 4, \dots$ ). Первому случаю соответствуют члены с  $J_j^2$ , второму - члены с  $J_{j+p} J_{j-p}$ . Показатели соответствующих экспонент, как и для  $R(x)$ , содержат характерный множитель  $x \pm pfz/k$ .

Интерференция пучков порядков различной четности описывается слагаемым  $G(x)$ . В этом случае показатели соответствующих экспонент содержат множитель вида  $x \pm (p + 1/2) fz/k$ . Отметим, что  $H(x)$  представляет разность соответствующих выражений, в то время как в  $F(x)$  аналогичный член представляет сумму.

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть  $z \rightarrow \infty$  ( $l \rightarrow \infty$ ). Тогда  $x/\sigma = \sigma_0 k \alpha$  ( $\alpha = x/z$  - угол наблюдения). Из (1.14) видно, что  $I(l \rightarrow \infty) = 0$ , поскольку с увеличением расстояния неограниченно возрастает диаметр пучка. Поэтому для описания дифракции Фраунгофера (соответствующей рассматриваемому случаю) используют не интенсивность, а диаграмму направленности. Для возможности рассмотрения и дифракции Фраунгофера в дальнейшем будем рассматривать относительную интенсивность

$$\chi(x, y, z) = \frac{I(x, y, z)}{I_0(z)},$$

где  $I_0(z) = \frac{P}{\pi\sigma_0^2(1+l^2)}$  – интенсивность на оси пучка,  $P = \pi\sigma_0^2 I_0$  – мощность пучка. Тогда соотношения (1.14) переходят в соотношения (1.6), описывающие дифракцию Фраунгофера [22, 24].

Пусть теперь  $z = 0$  ( $l = 0$ ). В этом случае  $\varphi_p = \varphi_{p+1/2} = 0$ . Если принять во внимание известные соотношения для функций Бесселя [42]:

$$2 \sum_{p=1}^{\infty} J_p^2 = 1 - J_0^2; \quad 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{j+p} J_{j-p} = -J_j^2;$$

то нетрудно видеть, что  $\chi(x,y,0) = \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\sigma_0^2}\right\}$ .

Следует отметить, что приближение Френеля, строго говоря, неприменимо при  $z = 0$ . Однако для «гладкого» фазового профиля транспаранта получается вполне естественный результат, аналогично случаю чисто гауссова пучка [24].

Пусть теперь  $\sigma_0 f \ll 1$ . Тогда, как нетрудно видеть,  $\varphi_p = \varphi_{p+1/2} = 0$ . В этом случае дифракция фактически отсутствует:  $\chi(x,y,z) = \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right\}$ . Как отмечалось выше, случай  $\sigma_0 f \ll 1$ , по сути, описывает рефракцию – отклонение пучка как целого от первоначального направления.

Пусть теперь  $\sigma_0 f \gg 1$ . В этом случае пучки различных порядков дифракции разделяются в пространстве при значениях  $z$ , определяемых из условия:  $pfz/k > \sigma$ . То есть,  $z^2 \geq \sigma_0^2/(\beta_p^2 - \theta^2)$ , где  $\beta_p = pfz/k = p\lambda/\Lambda$  – угол дифракции,  $\theta = 1/(k\sigma_0)$  – расходимость исходного пучка. Итак, на больших расстояниях интенсивность пучка не содержит переменных составляющих:

$$\chi(x,y,z) = \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \left\{ J_0^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} J_p^2 \left[ \exp\left(-\frac{(x+pfz/k)^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-pfz/k)^2}{\sigma^2}\right) \right] \right\}.$$

На малых расстояниях, как отмечалось выше (при  $z \rightarrow 0$ ), интенсивность пучка также не содержит переменных составляющих. Ясно, что эти

составляющие существенны лишь в некоторой промежуточной области. В ней пучки различных порядков дифракции, с одной стороны, еще перекрываются в пространстве, а с другой стороны, уже  $\varphi_p, \varphi_{p+1/2} \neq 0$ .

### 1.3.2. Соотношения для первой гармоники

Для относительной интенсивности  $\gamma_1(x,y,z)$  первой гармоники ( $j = 1$ ) из (1.14) получим:

$$\gamma_1(x,y,z) = 2 \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\sigma_0^2(1+l^2)}\right\} \sum_{p=0}^{\infty} J_p J_{p+1} \exp\left\{-\frac{[(2p+1)^2 + 1](\sigma_0 fl)^2}{4(1+l^2)}\right\} H_1(x), \quad (1.15)$$

$$H_1(x) = \exp\left\{\frac{(2p+1)xfl}{1+l^2}\right\} \sin\left(\Omega t - \frac{fx}{1+l^2} + \varphi_{p+1/2}\right) - \exp\left\{-\frac{(2p+1)xfl}{1+l^2}\right\} \sin\left(\Omega t - \frac{fx}{1+l^2} - \varphi_{p+1/2}\right).$$

В частности, если  $x = 0$ , то  $H_1(0) = 2 \sin(\varphi_{p+1/2}) \cos(\Omega t - \frac{fx}{1+l^2})$ . То есть,  $I_1(0) = 0$  при  $\varphi_{p+1/2} = 0$ , в том числе, и при  $l \rightarrow \infty$ .

Соотношения (1.15) в общем случае достаточно сложны для анализа. Поэтому положим для простоты, что  $A^2 = [k\Delta(nL)]^2 \ll 1$ , так что  $J_0 J_1 \approx A/2 \gg J_1 J_2$  (т.е.  $p = 0$ ). Пусть также  $y = 0$ ;  $x = \sigma = \sigma_0 \sqrt{1+l^2}$ . Тогда из (1.15) получим:

$$\gamma_1(x,y,z) = 2A U_1 \sin(\Omega t - \sigma_0 f - \phi), \quad (1.16)$$

где  $U_1, \phi$  – относительная амплитуда и фаза первой гармоники, причем:

$$U_1 = \exp\left\{-1 - \frac{(\sigma_0 f)^2 l^2}{2(1+l^2)}\right\} \sqrt{\text{sh}^2 \frac{\sigma_0 fl}{\sqrt{1+l^2}} + \sin^2 \frac{(\sigma_0 f)^2 l}{2(1+l^2)}};$$

$$\text{tg} \phi = \frac{\text{tg} B}{\text{th} C}; \quad B = \frac{(\sigma_0 f)^2 l}{2(1+l^2)}; \quad C = \frac{\sigma_0 fl}{\sqrt{1+l^2}}.$$

Видно, что  $U_1 = 0$  (и, соответственно,  $I_1 = 0$ ), если  $\sigma_0 f = 0$ , или же  $l = 0$ .

Если  $l^2 \gg 1$ , то  $U_1 = \exp\{-1 - (\sigma_0 f)^2/2\} \text{sh}(\sigma_0 f)$ .

В этом случае максимальное значение  $U_1$  имеет место при условии  $(\sigma_0 f) \text{th}(\sigma_0 f) = 1$ , т.е. при  $\sigma_0 f \approx 1,2$ . При этом  $U_1(\sigma_0 f \approx 1,2) \approx 0,27$ . Если определить диаметр  $D$  исходного пучка по обычно используемому уровню интенсивности

0,1; то  $D \approx 3\sigma_0$ ;  $\sigma_0 f \approx 2 \frac{D}{\Lambda}$ . Тогда для  $\sigma_0 f \approx 1,2$  оказывается, что  $\frac{\Lambda}{D} \approx 1,67$ . В этом случае период решетки  $\Lambda$  примерно в полтора-два раза больше диаметра исходного пучка.

На рис. 1.3 представлена вычисленная по (1.16) зависимость  $U = U_1(l)$  для различных значений параметра  $\sigma_0 f$ .

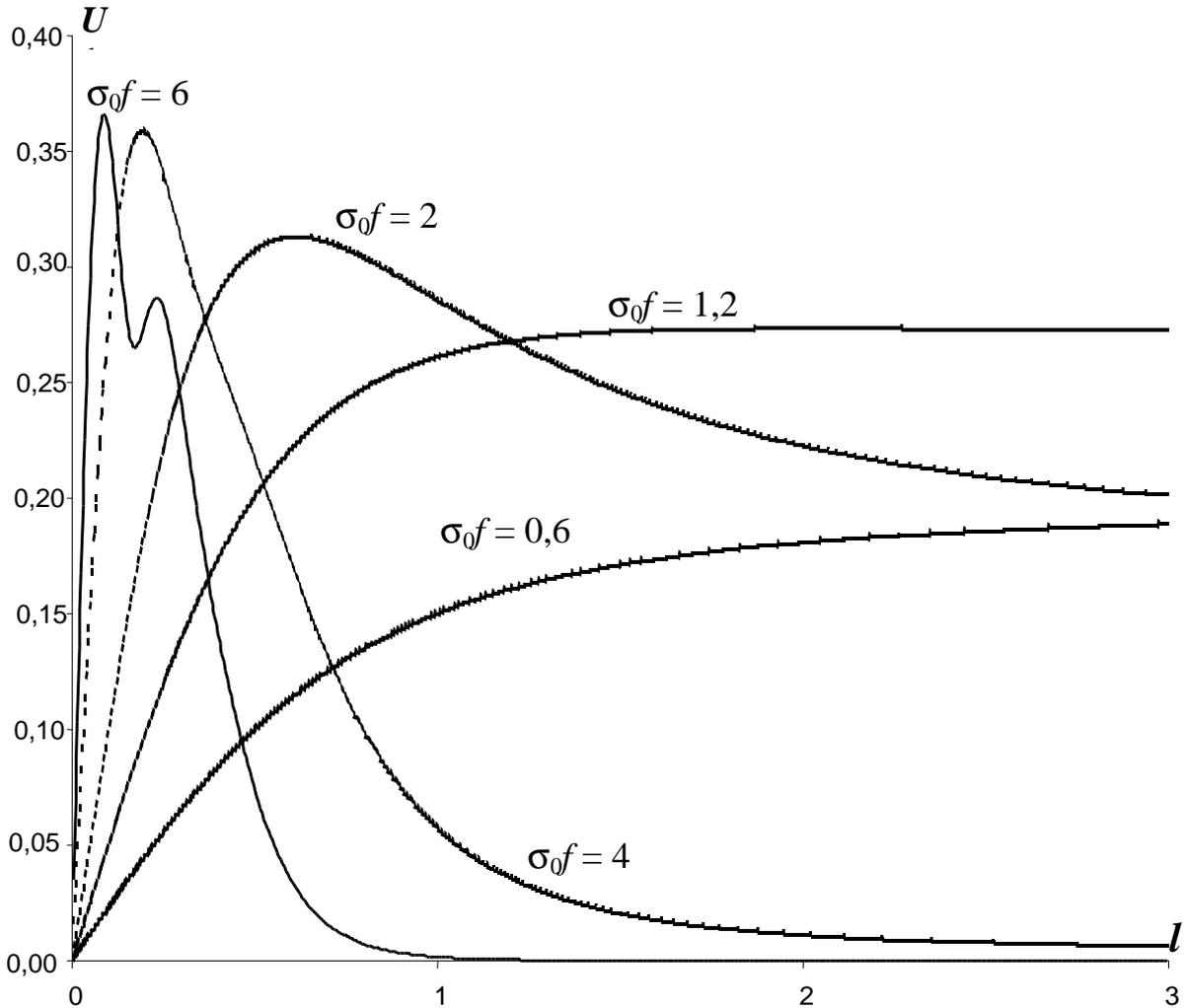


Рис. 1.3. Зависимость относительной амплитуды первой гармоники от расстояния до решетки для различных значений  $\sigma_0 f$

Видно, что при малых значениях  $\sigma_0 f$  ( $\sigma_0 f < 1,2$ )  $U_1$  монотонно возрастает с увеличением  $l$ . Значение  $\sigma_0 f = 1,2$ , как отмечалось выше, соответствует максимуму  $U_1$  при  $l \rightarrow \infty$  (т.е. в зоне дифракции Фраунгофера). Если же  $\sigma_0 f > 1,2$ ; то картина существенно образом меняется. В этом случае максимум  $U_1$  имеет место при конечных значениях  $l$ . С увеличением  $\sigma_0 f$  положение

максимума смещается в сторону меньших значений  $l$ . При этом возрастает значение  $U_1$  в максимуме (в пределе – до  $e^{-1} = 0,367$ ), а сам максимум становится более резким.

В данном случае мы фактически имеем ситуацию, при которой  $l^2 \ll 1$ . Тогда

$$U_1 = \exp\left\{-1 - \frac{(\sigma_0 f)^2 l^2}{2}\right\} \sqrt{\operatorname{sh}^2(\sigma_0 f l) + \sin^2 \frac{(\sigma_0 f)^2 l}{2}}.$$

Если при этом  $\sigma_0 f \gg 1$ , причем  $\sigma_0 f l$  – конечная величина, то  $U_1$  имеет максимальное значение при  $(\sigma_0 f)^2 l \approx \pi$ . Тогда  $U_1 = \exp\{-1 - \pi/2\} \operatorname{ch}(\sqrt{\pi l})$ . В частности,  $U_1(l=0) = e^{-1}$ .

Из рис. 1.3 видно, что при  $\sigma_0 f = 6$  формируется побочный максимум. Анализ показывает, что при увеличении  $\sigma_0 f$  (при  $\Lambda/D < 3$ ) этот побочный максимум становится все более резким, а при дальнейшем увеличении  $\sigma_0 f$  появляется второй побочный максимум.

Это обстоятельство объясняется видом (1.16) зависимости  $U_1(\sigma_0 f, l)$  – при  $\sigma_0 f \gg 1$ ,  $l^2 \ll 1$  имеет место ситуация, когда  $\operatorname{sh}^2(\sigma_0 f) < \sin^2 [(\sigma_0 f)^2/2l]$ . То есть, осциллирующий характер синусоидального слагаемого проявляется и в зависимости  $U_1(\sigma_0 f, l)$ .

С физической точки зрения, полученные результаты можно объяснить следующим образом.

Любая гармоника, как видно из (1.14), представляет собой набор слагаемых с различными амплитудами и фазами. Каждое из этих слагаемых обусловлено интерференцией двух пучков различных порядков дифракции. Так, первая гармоника формируется при интерференции пучков «0» и «+1»; «0» и «-1»; «+1» и «+2»; «-1» и «-2» и, аналогично, других порядков дифракции. Все слагаемые имеют, вообще говоря, различные амплитуды и фазы, причем соответствующие ряды, как видно из (2), являются знакопеременными (изменение знака слагаемого фактически означает изменение его фазы на  $\pi$ ).

Если  $l = 0$ , то фазы всех слагаемых одинаковы, причем  $\varphi_p = \varphi_{p + 1/2} = 0$ . Кроме того, все пучки полностью совпадают (перекрываются) в пространстве. В этом случае, с учетом свойств функций Бесселя, сумма всех слагаемых для каждой гармоники равна нулю. То есть слагаемые с одинаковыми фазами и максимальными амплитудами полностью компенсируют друг друга.

С увеличением  $l$  происходит изменение фазы каждого из слагаемых. Помимо этого, пучки различных порядков дифракции распространяются под различными углами к оси  $OX$  (в определенной степени разделяются в пространстве), так что одновременно происходит изменение амплитуд пучков в точке наблюдения (регистрации). В результате слагаемые для каждой гармоники не полностью компенсируют друг друга, так что амплитуда каждой гармоники начинает возрастать (от нуля при  $l = 0$ ). Поскольку изменение фазы пучков и разделение пучков в пространстве оказывают противоположное влияние на величину амплитуды каждой гармоники, то при некотором значении  $l$  может иметь место максимум амплитуды какой-то из гармоник (вообще говоря, для различных гармоник - при различных  $l$ ). При малых  $l$  наибольшее влияние на изменение амплитуды гармоники оказывает изменение фазы соответствующих слагаемых.

В частности, для рассмотренного выше случая первой гармоники имеет место соотношение:  $\varphi_{1/2} = (\sigma_0 f)^2 \frac{l}{2(1+l^2)}$ .

Пусть  $\sigma_0 f \gg 1$ . Тогда при увеличении  $l$  могут появиться вторичные максимумы ( $\varphi_{1/2} = 2\pi, 3\pi, \dots$ ). При дальнейшем увеличении  $l$  основную роль играет пространственное разделение пучков, так что амплитуда гармоники монотонно уменьшается.

При уменьшении  $\sigma_0 f$  уменьшается фаза гармоники  $\varphi_{1/2}$ , так что максимум  $U_1$  достигается при больших  $l$ . И, наконец, при  $\sigma_0 f < 1,2$  фаза  $\varphi_{1/2}$  столь мала, что основную роль играет пространственное разделение пучков. В этом случае  $U_1$  монотонно возрастает с увеличением  $l$ .

Как отмечалось выше, если  $l^2 \ll 1$ , то максимум  $U_1$  достигается при условии  $(\sigma_0 f)^2 l \approx \pi$ . А поскольку в этом случае  $\varphi_{1/2} = (\sigma_0 f)^2 l/2$ , то указанное условие имеет вид:  $\varphi_{1/2} \approx \pi/2$ . С другой стороны, это же условие можно записать в виде:  $f^2 z \approx k\pi$ , или же в виде:  $2\lambda z \approx \Lambda^2$ . Нетрудно видеть, что последнее выражение представляет собой соотношение для первой зоны Френеля, размер которой (в направлении  $OX$ ) по порядку величины равен периоду  $\Lambda$  фазовой решетки. То есть, максимум  $U_1$  достигается при значении  $z$ , соответствующем расстоянию до указанной первой зоны Френеля.

Итак, зависимость  $U_1(z)$  имеет сложный характер, существенно определяемый значением  $\sigma_0 f$ . При  $\sigma_0 f \gg 1$  имеются ярко выраженный максимум в этой зависимости. С уменьшением  $\sigma_0 f$  координата  $z$  максимума увеличивается, и при  $\sigma_0 f = 1,2$  эта координата соответствует бесконечности. При меньших  $\sigma_0 f$  амплитуда  $U_1(z)$  монотонно возрастает с увеличением  $z$ . С практической точки зрения амплитуда первой гармоники может быть достаточно большой лишь при условии  $\sigma_0 f > 1$ .

Нетрудно видеть, что в случае дифракции Френеля реальный диапазон значений  $\sigma_0 f$ , при которых амплитуды гармоник имеют приемлемую для практики величину, оказывается существенно (на порядок) шире, чем в случае дифракции Фраунгофера [21, 22].

Следует отметить, что при  $\sigma_0 f \ll 1$  ( $D \ll \Lambda$ ) обычно говорят о рефракции, а не о дифракции. С этой точки зрения можно сказать, что значение  $\sigma_0 f = 1,2$  разделяет дифракционный и рефракционный режимы.

Выше рассматривались лишь составляющие фазы гармоник  $\varphi_p$ ,  $\varphi_{p+1/2}$  не зависящие от  $x$ . В то же время, как следует из (1.14), каждая гармоника имеет составляющую (слагаемое) фазы вида:  $\varphi_x = 2j \frac{fx}{1+l^2}$  или же  $\varphi_x = (2j-1) \frac{fx}{1+l^2}$  для четных и нечетных гармоник соответственно. При этом  $\frac{fx}{1+l^2} = \frac{2\pi x}{\Lambda(1+l^2)}$ . То есть, если регистрировать интенсивность пучка одновременно при двух

значениях  $x$  ( $x = x_1$ ;  $x = x_2$ ) для какой-то выбранной гармоники, то по разности фаз  $\Delta\varphi_x$  соответствующих сигналов нетрудно найти и величину  $\Lambda(1 + l^2)$ . В частности, для первой гармоники  $\Delta\varphi_x = 2\pi L^*/\Lambda$ , где  $L^* = (x_1 - x_2)/(1 + l^2)$ .

Итак, если известно  $L^*$ , то по измеренному значению  $\Delta\varphi_x$  нетрудно определить и период решетки  $\Lambda$ .

Появление составляющей фазы  $\varphi_x$  можно пояснить следующим образом. Плоская волна имеет составляющую фазы вида  $(\bar{k} \bar{r}) = k_x x + k_z z$ , где  $k_x$ ,  $k_z$  – проекции волнового вектора  $k$  волны на оси  $OX$ ,  $OZ$ ;  $k_x^2 + k_z^2 = k^2$ . Если волна распространяется под углом  $\gamma$  к оси  $OZ$ ,  $\gamma \ll 1$ , то  $k_x = k \sin \gamma \approx k\gamma$ ,  $k_z = k \cos \gamma \approx k$ . То есть,  $(\bar{k} \bar{r}) \approx k\gamma x + kz$ .

Гауссов пучок [37], в отличие от плоской волны, имеет дополнительное слагаемое:  $(k/2R)x^2$ . Здесь  $R$  – радиус кривизны волнового фронта,  $R \equiv z(1 + 1/l^2)$ .

Итак, если гауссов пучок распространяется под малым углом  $\gamma$  к оси  $OZ$ , то на оси пучка выполняется соотношение:  $x \sim \gamma z$ . Тогда  $x^2 \Rightarrow (x - \gamma z)^2$ . В результате интересующие нас слагаемые фазы  $\phi_1$  имеют вид:

$$\phi_1 = (k/2R)(x - \gamma z)^2 + k\gamma x + kz \approx (k/2R)(x - \gamma z)^2 + k\gamma x.$$

Положим теперь, что вдоль оси  $OZ$  распространяется второй гауссов пучок:

$$\phi_2 = (k/2R)x^2 + kz \approx (k/2R)x^2.$$

Тогда результатом интерференции этих двух пучков будет пучок, фаза которого  $\phi_{12}$  имеет слагаемые вида:

$$\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = -(k/R) \gamma z x + k\gamma x = k\gamma x \left(1 - \frac{l^2}{1+l^2}\right) = \frac{k\gamma x}{1+l^2}.$$

Если  $\phi_{12}(x = \Lambda_n) = 2\pi$ , то  $\Lambda_n$  характеризует собой ширину (период) полос, возникающих при интерференции световых пучков. То есть,  $\Lambda_n = \frac{\lambda(1+l^2)}{\gamma}$ .

В частности, если  $l = 0$ , то получим известное соотношение:  $\Lambda_n = \frac{\lambda}{\gamma}$ .

Учтем теперь, что  $\gamma$  есть угол дифракции света на акустической волне:

$$\gamma \approx \frac{\lambda}{L} = \frac{f}{k}.$$

Тогда  $\phi_{12} = \frac{fx}{1+l^2} = \phi_x$ . Таким образом, имеем:

$$L_{\text{и}} = \Lambda(1 + l^2).$$

То есть, ширина интерференционных полос возрастает с увеличением расстояния  $z$  до перетяжки (с увеличением диаметра пучка  $2\sigma$ ).

Итак, появление составляющей фазы  $\phi_x$  можно объяснить следующим. Для расходящихся волновых пучков, например, гауссовых пучков, увеличение диаметра с увеличением  $z$  в определенном смысле приводит к уменьшению угла  $\gamma$  между интерферирующими лучами, то есть, приводит к увеличению  $L_{\text{и}}$ .

В частности, для гауссовых пучков  $(\sigma/\sigma_0)^2 = 1 + l^2$ . Гауссовы пучки имеют плоский фазовый фронт ( $R = \infty$ ) при  $z = 0$  ( $l = 0$ ). Тогда  $\phi_x = fx$ . В этом случае ширина интерференционных полос равна длине акустической волны:  $L_{\text{и}} = \Lambda$ .

Выше отмечалось, что тонкой фазовой решеткой для света может быть, в частности, продольная акустическая волна, поверхностная акустическая волна Релея, капиллярная волна на свободной поверхности жидкости. При этом период решетки равен длине соответствующей волны. Для определенности далее будем говорить об акустической волне. Если одновременно измерить частоту волны  $\Omega$  и ее длину  $\Lambda$ , то нетрудно вычислить и скорость звука  $C$  – одну из важных характеристик любой среды [34, 50],  $C = \Omega\Lambda/2\pi = \Omega L^*/\Delta\phi_x$ .

## 2. Применения акустооптики к технике измерений

Рассмотрим возможности применения полученных результатов к измерительной технике. С одной стороны, для некоторых задач интерес представляет определение параметров акустических волн. С другой стороны, эти же волны, возбужденные в исследуемой среде, могут использоваться как инструмент для определения каких-то параметров среды.

Известно, что скорость звука существенно зависит от физико-химических свойств жидкости. В частности, для морской воды она зависит от солёности последней; для нефтепродуктов – от их химического состава. Это обстоятельство дает широкие возможности для оперативного контроля свойств жидкостей (влияющих на скорость звука), поскольку соответствующий измеритель мог бы легко «встраиваться» в различные технологические процессы.

Помимо этого, скорость звука представляет и самостоятельный интерес для многих задач молекулярной физики, гидроакустики, нелинейной акустики.

### 2.1. Акустические волны в движущейся среде

Выше рассматривались акустические волны в неподвижной среде. Перейдем теперь к некоторым особенностям акустооптики в движущихся средах.

Один из основных элементов рассматриваемых измерений – акустооптическая ячейка. Если она является твердотельной, то ее максимальное смещение  $x_0(t)$  относительно пучка определяется соответствующим габаритным размером, при этом обычно источник акустических волн неподвижен относительно материала ячейки – среды, в которой распространяются эти волны. В данном случае имеет смысл говорить об измерении смещения пучка  $\Delta x_0 = x_0(t_2) - x_0(t_1)$  за время  $t_2 - t_1$ . Если в ячейке возбуждена только одна

акустическая волна частоты  $\Omega$ , то должно выполняться условие:  $t_2 - t_1 \gg 1/\Omega$ . Тогда интересующая нас разность фаз  $\Delta\varphi$  акустической волны имеет вид:

$$\Delta\varphi = f\Delta x_0 = \Omega \tau, \text{ где } \tau = [x_0(t_2) - x_0(t_1)]/C. \quad (2.1)$$

Если же в ячейке возбуждены две встречные волны с частотами  $\Omega_1, \Omega_2$ , то

$$\Delta\varphi = (f_1 + f_1)\Delta x_0 = (\Omega_1 - \Omega_2) \tau, \text{ где } \tau = [x_0(t_2) - x_0(t_1)]/C^*. \quad (2.2)$$

Здесь  $C$  – скорость звука,  $C^* = C \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}$  – «эффективная» скорость волны в

соответствии с (1.12). При этом, очевидно, должно выполняться условие:

$$t_2 - t_1 \gg 1/(\Omega_1 - \Omega_2).$$

Разность фаз  $\Delta\varphi$  проще всего измерять по параметрам светового пучка, в частности, можно использовать соотношение (1.8) или аналогичное ему. При этом особый интерес представляет случай, когда  $L \approx D$ . Тогда соседние дифракционные максимумы могут перекрываться в пространстве практически на любом расстоянии от акустооптической ячейки, интерферируя «сами собой», без специальных приемов пространственного и углового совмещения пучков.

Положим теперь, что акустооптическая ячейка заполнена некоторой жидкостью, которая может перемещаться относительно пучка (неподвижного относительно излучателя), то  $x_0(t)$  есть координата некоторой выделенной зоны этой среды. При этом  $x_0$  может принимать, в принципе, любые значения. То есть, движение среды модулирует полную фазу  $\Phi$  переменной составляющей оптического сигнала. Для основной частоты (первой гармоники) фаза имеет вид:  $\Phi = \Omega t + \varphi = \Omega t + f x_0(t)$ . Для гармоники порядка, очевидно,  $\Phi \Rightarrow m \Phi$ .

Эта модуляция обусловлена эффектом Доплера [36], причем следует отметить следующее. При движении излучателя (источника волны) со скоростью  $V$  относительно среды акустооптической ячейки изменяется длина  $L$  акустической волны:  $L \Rightarrow L(1 - V/C)t$ , где  $C$  – скорость звука относительно

среды. Мы рассматриваем одномерную задачу: направление скорости  $V$  совпадает с направлением распространения волны ( $V > 0$ ) или же противоположно последнему ( $V < 0$ ).

В соответствии с этим, поскольку  $\Omega = fC$ , то вследствие изменения  $\lambda$  изменяется и частота волны:  $\Omega \Rightarrow \Omega/(1 - V/C)$ .

Движение приемника со скоростью  $V$  относительно среды акустооптической ячейки можно рассматривать как изменение фазы  $\varphi$  сигнала. Пусть  $x_0(t) = -Vt$ , тогда  $\Omega t + fx_0(t) = (\Omega - fV)t = \Omega(1 - V/C)t$ . Итак, в данном случае изменение частоты имеет вид:  $\Omega \Rightarrow \Omega(1 - V/C)$ . При этом точно также  $V > 0$ , если направление скорости  $V$  совпадает с направлением распространения волны, и  $V < 0$  в противном случае. Отметим, что для задач акустооптики в подавляющем большинстве случаев в качестве приемника может рассматриваться световой пучок.

Выше движение источника и приемника рассматривалось независимо друг от друга. Если же источник движется относительно среды со скоростью  $V_{и}$ , а приемник со скоростью  $V_{п}$  (относительно той же среды), то частота  $\Omega_{п}$ , регистрируемая приемником, имеет вид:

$$\Omega_{п} = \Omega \frac{1 - V_{п} / C}{1 - V_{и} / C}.$$

Очевидно, если  $V_{и} = V_{п}$ , то сдвиг частоты отсутствует,  $\Omega_{п} = \Omega$ .

Пусть теперь источник и приемник неподвижны относительно друг друга, а среда (жидкость) в акустооптической ячейке движется относительно них с некоторой скоростью  $V$  (или, что то же самое, источник и приемник движутся с одинаковой скоростью в одном и том же направлении относительно неподвижной среды). Тогда  $V_{и} = V_{п} = V$ , причем в данном случае направление скорости движения жидкости противоположно направлению формального движения источника и приемника. По-прежнему положим  $V > 0$ , если направление скорости  $V$  жидкости совпадает с направлением распространения волны, и  $V < 0$  в противном случае. При этом, однако, изменится знак в выражениях для длины волны, излучаемой источником и частоты волны,

воспринимаемой приемником:  $\Lambda \Rightarrow \Lambda(1 + V/C)$ ;  $\Omega \Rightarrow \Omega(1 + V/C)$ . В этом случае источник и приемник неподвижны относительно друг друга, соответственно, сдвиг частоты за счет эффекта Доплера отсутствует, так что  $\Omega_{\Pi} = \Omega$ .

В полной фазе  $\Phi$  переменной составляющей оптического сигнала вида  $\Phi = \Omega t + \varphi = \Omega t + f x_0(t)$  примем далее, что  $x_0(t) = Vt$ , где  $V$  – скорость движения среды (жидкости) акустооптической ячейки относительно неподвижных излучателя волны и светового пучка. Кроме того, учтем и начальное положение  $x_0(0) = x_{00}$ , определяющее положение светового пучка относительно излучателя акустической волны. Положим поэтому, что  $x_0(t) = x_{00} + Vt$ . Тогда

$$\Phi = \Omega t + f x_0(t) = [(\Omega + f V) t + f x_{00}] = \Omega t + \frac{f x_{00}}{1 + V/C} = \Omega \left( t + \frac{x_{00}}{C + V} \right). \quad (2.3)$$

Здесь  $x_{00}/(C + V) = \tau$  есть время, за которое акустическая волна проходит расстояние  $x_{00}$  со скоростью  $C + V$  относительно светового пучка.

Видно, что собственно фаза  $\varphi = \Omega \tau$  зависит от суммы скоростей  $C + V$ . Положим теперь, что в ячейке поочередно меняется направление распространения акустической волны на противоположное, то есть, по сути, при этом меняется знак  $V$ . Примем для соответствующих случаев обозначения:

$$\varphi_+ = \Omega \frac{x_{00}}{C + V}, \quad \varphi_- = \Omega \frac{x_{00}}{C - V}.$$

Тогда, как легко видеть, можно найти как  $C$ , так  $V$ :

$$C = (\Omega x_{00}/2)(1/\varphi_+ + 1/\varphi_-);$$

$$V = (\Omega x_{00}/2)(1/\varphi_+ - 1/\varphi_-).$$

Именно подобные зависимости используют широко известные способы определения расхода жидкостей и газов [4, 7, 11, 13, 33, 49]. Отметим, что в указанных способах обычно измеряются не фазы  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$ , а соответствующие времена  $\tau_+ = \varphi_+/\Omega$ ;  $\tau_- = \varphi_-/\Omega$ .

С практической точки зрения удобнее использовать два световых пучка, разнесенных в направлении распространения акустической волны на некоторое

расстояние  $L$ . Пусть для первого пучка расстояние от излучателя акустических волн есть  $x_{01}$ , а для второго пучка -  $x_{02}$ , причем  $x_{01} - x_{02} = L$ . Измеряемыми величинами являются разности фаз  $\Delta\varphi_+$ ,  $\Delta\varphi_-$  этих пучков:

$$\Delta\varphi_+ = \frac{\Omega L}{C+V} = \frac{2\pi L}{\Lambda(1+V/C)}, \Delta\varphi_- = \frac{\Omega L}{C-V} = \frac{2\pi L}{\Lambda(1-V/C)}.$$

Тогда скорость  $C$  звука и скорость  $V$  жидкости определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} C &= (\Omega L/2) (1/\Delta\varphi_+ + 1/\Delta\varphi_-); \\ V &= (\Omega L/2) (1/\Delta\varphi_+ - 1/\Delta\varphi_-). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, методы акустооптики позволяют измерять смещение объекта, а также скорость движения прозрачной жидкости и скорость звука в ней.

Отметим, что для корректности измерений желательно выполнение условия  $\Delta\varphi_+, \Delta\varphi_- < 2\pi$ . С практической точки зрения это означает выполнение условия  $\Lambda > L$ .

Рассмотрим теперь встречные акустические волны в движущейся среде, исходя из вида сигнала (1.12) с учетом (2.3):

$$\begin{aligned} \cos[\Delta\Omega t + (f_1+f_2)x_0] &= \cos\left[\left(\frac{\Omega_1}{1+V/C} - \frac{\Omega_2}{1-V/C}\right)t + \left(\frac{f_1}{1+V/C} + \frac{f_2}{1-V/C}\right)x_0\right] = \\ &= \cos\left[\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2 - (\Omega_1 + \Omega_2)V/C}{1-(V/C)^2}\right)t + \left(\frac{f_1 + f_2 - (f_1 - f_2)V/C}{1-(V/C)^2}\right)x_0\right] = \\ &= \cos\left[\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2 - (\Omega_1 + \Omega_2)V/C}{1-(V/C)^2}\right)t + \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2 - (\Omega_1 - \Omega_2)V/C}{1-(V/C)^2}\right)x_0/C\right]. \end{aligned}$$

Положим теперь, что  $x_0 = x_0(t) = x_{00} + Vt$ . Тогда

$$\cos[\Delta\Omega t + (f_1+f_2)x_0] = \cos\left[\Delta\Omega t + \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2 - (\Omega_1 - \Omega_2)V/C}{1-(V/C)^2}\right)x_{00}/C\right] = \cos[\Delta\Omega (t+x_{00}/C^{**})]$$

Здесь  $C^*_+ = C^* \frac{1-V^2/C^2}{1-(V/C)(C^*/C)}$ , где  $C^* = C \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \approx C \frac{\Delta\Omega}{2\Omega}$  - введенная в

(1.12) «эффективная» скорость акустической волны. Аналогичным образом определим  $C^*_-$ :

$$C^*_- = C^* \frac{1-V^2/C^2}{1+(V/C)(C^*/C)}.$$

Очевидно, «эффективные» скорости  $C^*_+$ ,  $C^*_-$  акустической волны отличаются друг от друга направлением распространения волны разностной частоты относительно направления распространения жидкости - «по ходу» и «против хода».

Для большинства практических задач  $V \ll C$ , поэтому можно упростить выражение для  $C^*_+$ ;  $C^*_-$ :

$$C^*_+ \approx C^* \left[ 1 + \frac{V}{C} \left( \frac{C^*}{C} - \frac{V}{C} \right) \right] = C^* \left[ 1 + \frac{V}{C} \frac{C^* - V}{C} \right] \approx C^* \left( 1 + \frac{V}{C} \frac{C^*}{C} \right);$$

$$C^*_- \approx C^* \left( 1 - \frac{V}{C} \frac{C^*}{C} \right).$$

Далее, учтем, что  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \ll \Omega_1, \Omega_2$ , то есть,  $C^* \ll C$ . Тогда, пренебрегая членами второго порядка малости, получим:  $C^*_+ \approx C^*_- \approx C^*$ .

Положим теперь, что в ячейке поочередно меняется направление распространения акустической волны разностной частоты на противоположное, то есть, по сути, при этом меняется знак  $V$ . Тогда для измеряемых величин - разностей фаз  $\Delta\varphi_+$ ,  $\Delta\varphi_-$  световых пучков получим:

$$\Delta\varphi_+ = \frac{(\Delta\Omega)L}{C^*_+} = \frac{(\Delta\Omega)L}{C^*[1+(V/C)C^*/C]} = \frac{2\Omega L}{C+V(C^*/C)};$$

$$\Delta\varphi_- = \frac{(\Delta\Omega)L}{C^*_ -} = \frac{(\Delta\Omega)L}{C^*[1-(V/C)C^*/C]} = \frac{2\Omega L}{C-V(C^*/C)}.$$

Отсюда следуют соотношения, аналогичные (2.4):

$$C = \Omega L (1/\Delta\varphi_+ + 1/\Delta\varphi); \quad (2.5)$$

$$V = \Omega L (1/\Delta\varphi_+ - 1/\Delta\varphi)(\Omega/\Delta\Omega).$$

Видно, что для обеспечения одинакового значения  $\Omega L(1/\Delta\varphi_+ - 1/\Delta\varphi)$  скорость  $V$  в (2.5) должна быть значительно выше, чем скорость в (2.4).

Итак, при дифракции света на двух встречных акустических волнах фаза оптического сигнала очень слабо зависит от скорости движения среды, так что во многих случаях этой зависимостью можно пренебречь. С одной стороны, отсюда следует важный вывод о возможности определения скорости звука в жидкости независимо от скорости движения самой жидкости относительно акустооптической ячейки. С другой стороны, измерение скорости движения жидкости может оказаться затруднительным.

Рассмотрим теперь случай дифракции Френеля, например, сигнал первой гармоники (1.15). Этот сигнал имеет составляющую вида:  $\sin(\Omega t - \frac{fx}{1+l^2})$ . Если среда движется со скоростью  $V$  относительно излучателя акустических волн и светового пучка, то частота  $\Omega$  не изменится, но изменится длина акустической волны:  $\Lambda \Rightarrow \Lambda(1 + V/C), f \Rightarrow f/(1 + V/C)$ .

Если, как предлагалось выше, измерять интенсивность пучка одновременно при двух значениях  $x$  ( $x = x_1; x = x_2$ ), то по разности фаз  $\Delta\varphi_+, \Delta\varphi$  соответствующих сигналов, используя (1.19), нетрудно найти и величины  $V, C$ . При этом полагается, что  $x_2 - x_1 = L/(1 + l^2)$ .

В рассматриваемом случае, в отличие от дифракции Фраунгофера, используется только один световой пучок, а не два. Во-первых, это упрощает реализацию, а во-вторых, улучшает пространственное разрешение при соответствующих измерениях.

В случае дифракции света на двух встречных акустических волнах сигнал первой гармоники, по аналогии с рассуждениями, изложенными выше, будет иметь вид:

$$\cos[\Delta\Omega t + (f_1 + f_2)L] = \cos[\Delta\Omega(t + L/C^*)],$$

где  $C^* \approx C^*_{+} \approx C^*_{-} \approx C \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}$ .

Итак, в этом случае можно определить скорость звука независимо от скорости движения жидкости при использовании только одного светового пучка.

Выше неявно полагалось, что профиль скорости  $V$  жидкости в пределах диаметра УЗ-волны является постоянным,  $dV/dz = 0$ . Положим теперь, что  $V = V(z) = V_0q(z)$ , где  $V_0$  – максимальное значение скорости, а безразмерный множитель  $q(z)$  описывает собственно профиль скорости, причем  $|q(z)| \leq 1$ ;  $0 < z < L$ . Тогда  $f \Rightarrow f/[1 + V(z)/C] = f/[1 + V_0q(z)/C]$ .

В рассматриваемом случае практический интерес представляет значение  $\bar{V}$  скорости жидкости, усредненное по трассе длиной  $L$ :

$$\bar{V} = \frac{V_0}{L} \int_0^L q(z) dz.$$

При этом, очевидно, (2.4) будет определять именно усредненную скорость жидкости:  $V \Rightarrow \bar{V}$ . Если явный вид зависимости  $q(z)$  известен, то, зная  $\bar{V}$ , в принципе, можно определить и некоторые числовые значения параметров этой зависимости. Однако в общем случае восстановление вида  $q(z)$  вряд ли возможно.

Следует отметить, что при заметных скоростях течение жидкости может иметь турбулентный характер, учет которого представляет собой самостоятельную достаточно сложную задачу.

## 2.2. Некоторые общие вопросы техники измерений

Использование методов акустооптики применительно к технике измерений предполагает, что можно пренебречь воздействием средств измерений на исследуемые объекты.

Рассмотрим вначале возможное влияние акустической (ультразвуковой) волны на исследуемую среду. Здесь возможны два явления: акустический «ветер», приводящий к движению среды в направлении распространения волны с некоторой скоростью  $u$ , и нагрев среды за счет частичного поглощения волны. Оба эти явления в значительной мере определяются интенсивностью  $I_{уз}$  ультразвуковой волны.

Скорость  $u$  акустического ветра можно оценить по соотношению [50]:  $u = v_k^2/C$ , где  $v_k = x_m\Omega$  - амплитуда колебательной скорости в акустической волне,  $x_m$  - амплитуда колебательного смещения в акустической волне,  $\Omega$  - частота волны,  $C$  - скорость звука.

Для плоской синусоидальной бегущей волны  $v_k^2 = 2I_{уз}/(\rho C)$ , где  $\rho$  - плотность среды материала акустооптической ячейки.

Далее, если акустическая волна с интенсивностью  $I_{уз}$  распространяется в среде, характеризуемой акустооптическим качеством  $M_2$  [38, 50], то она создает («наводит») в ней изменение показателя преломления  $\Delta n$ :

$$\Delta n = \sqrt{10^7 M_2 I_{уз}} / 2,$$

где размерность  $I_{уз}$  есть Вт/см<sup>2</sup>; а размерность  $M_2$  есть с<sup>3</sup>/г.

В частности, для воды  $M_2 = 160 \cdot 10^{-18}$  с<sup>3</sup>/г; то есть,  $\Delta n \approx 2,8 \cdot 10^{-5} \sqrt{I_{уз}}$ .

Положим для оценок, что волновое число световой волны  $k = 10^5$  см<sup>-1</sup> (что соответствует длине волны He-Ne лазера  $\lambda = 0,63$  мкм); а длина пути светового пучка, проходящего через волну (длина ячейки в направлении OZ)  $L = 1$  см. Тогда, поскольку  $A = k L \Delta n$ , то  $A \sim \sqrt{I_{уз}}$ .

В частности, для воды, если  $I_{y3} = 0,125 \text{ Вт/см}^2$ , то  $A = 1$ . При этом скорость ветра  $u \approx 0,002 \text{ мм/с}$ . Если же  $I_{y3} = 1,0 \text{ Вт/см}^2$ , то  $A = 2,8$ ;  $u \approx 0,016 \text{ мм/с}$ . То есть, при  $I_{y3} \leq 1 \text{ Вт/см}^2$  акустический ветер можно не учитывать.

Нагрев среды (воды) также несущественен для указанного значения  $I_{y3} \leq 1 \text{ Вт/см}^2$  и частоты УЗ-волны  $\Omega/2\pi \approx 1 \dots 2 \text{ МГц}$ , поскольку, судя по оценкам, он не превышает десятых долей градуса. Однако поглощение УЗ-волн увеличивается пропорционально квадрату частоты, поэтому при частотах в десятки мегагерц (что соответствует случаю  $\sigma f \gg 1$ ) нагрев среды может значимо изменить скорость звука в ней.

При определении скорости  $V$  движения жидкости собственно измеряемой величиной является  $\bar{V}$  - скорость, усредненная по трассе длиной  $L$ . Выше полагалось, что направления  $V$  совпадает с направлением распространения акустической волны. То есть, вообще говоря, при расчетах необходимо учитывать, с одной стороны, возможное различие указанных направлений (акустическая волна распространяется «под углом» к потоку жидкости), а с другой стороны - возможную расходимость акустической волны. В общем случае вид  $q(z)$  будет зависеть как от параметров профиля скорости, так и от расходимости УЗ-волны. В то же время, если определить вид  $q(z)$ , то в принципе можно найти параметры либо профиля скорости, либо диаграммы направленности акустической волны. Однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки данной работы.

Оценки по максимуму показывают, что если  $V(z) = \text{const}$ , а расходимость  $\theta_{y3}$  волны («угол к потоку жидкости») мала ( $\theta_{y3} \ll 1$ ), то соответствующая составляющая относительной погрешности  $\delta V/V = (1 - \cos \theta_{y3})/2 \approx \theta_{y3}^2/4$ . В частности, если  $\theta_{y3} \leq 0,1$ ; то  $\delta V/V \leq 2,5 \cdot 10^{-3}$ .

В подавляющем большинстве случаев в акустооптике используются малогабаритные лазеры с мощностью всего лишь порядка  $10^{-3} \text{ Вт}$ . При этом обычно длина волны лазеров далека от полос поглощения в среде

акустооптической ячейки, так что воздействие оптического излучения на исследуемую среду пренебрежимо мало.

Рассмотрим теперь вопрос о предельно малых значениях  $I_{уз}$ , которые могут быть обнаружены оптическими методами. С практической точки зрения особый интерес представляет случай  $\Lambda \approx D$ . Тогда соседние дифракционные максимумы могут перекрываться в пространстве практически на любом расстоянии от акустооптической ячейки. По сути, для рассматриваемого случая нас интересует выделение минимальный уровень сигнала выбранной гармоники, который может быть выделен на фоне суммы сигнала постоянной составляющей и сигналов всех остальных гармоник. То есть, соответствующее отношение сигнал-шум должно быть не менее заданной величины – обычно не менее 3.

Поскольку нас интересуют лишь переменные составляющие сигнала с частотами, составляющими  $10^3 \dots 10^6$  Гц, то можно не рассматривать низкочастотные шумы фотоприемника (фотодиода) и последующего электронного тракта. В данном случае основным является дробовой шум, обусловленный «фоновой засветкой» фотоприемника - суммой сигнала постоянной составляющей и сигналов всех остальных гармоник. Соответствующий этому шуму ток  $i_{др} = \sqrt{\overline{i_{др}^2}}$  определяется формулой [53] (формулой Шоттки):

$$\overline{i_{др}^2} = 2eI_{\phi} \Delta\nu .$$

Здесь  $\overline{i_{др}^2}$  - средний квадрат флуктуаций тока;  $e$  – элементарный заряд (заряд электрона);  $I_{\phi}$  – протекающий «фоновый» ток;  $\Delta\nu$  - полоса частот, в которой измеряются шумы (полоса пропускания электронного тракта).

Нетрудно видеть, что  $i_{др} / I_{\phi} = \sqrt{2e\Delta\nu / I_{\phi}}$ . Рассмотрим для определенности вторую гармонику, определяемую соотношением (1.8). Положим для оценок,

что минимальный уровень сигнала, уверенно выделяемого на фоне шумов, определяется соотношением:  $\beta_2/\beta_0 \geq 4 i_{др} / I_\phi$ .

Ток  $I_\phi$  определяется чувствительностью  $S$  фотоприемника и величиной  $P$  мощности «фонового» светового сигнала. Для различных типов фотодиодов чувствительность  $S$  может меняться в довольно широких пределах [48, 53]. Для оценок примем некоторое типичное значение  $S \approx 0,1$  А/Вт. Для мощности светового сигнала примем реальное значение  $P \approx 0,1$  мВт =  $10^{-4}$  Вт. Тогда, как нетрудно видеть,  $I_\phi = S P = 10^{-5}$  А.

Для полосы пропускания  $\Delta\nu$  примем реальное значение  $\Delta\nu = 10^3$  Гц. Тогда для интересующего нас отношения  $i_{др} / I_\phi$  получим:  $i_{др}/I_\phi \approx 5 \cdot 10^{-6}$ . Соответственно, при этом  $\beta_2/\beta_0 \geq 2 \cdot 10^{-5}$ .

Рассмотрим теперь соотношение (1.8) для второй гармоники. Учтем при этом, что если  $A \ll 1$ , то:  $J_0(A) \approx 1 - A^2/4$ ;  $J_1(A) \approx A/2$ ;  $J_2(A) \approx A^2/8$ . Тогда получим:

$$\frac{\beta_2}{\beta_0} \approx \frac{2b[J_1^2(A) - 2bJ_0(A)J_2(A)]}{J_0^2(A) + 2bJ_1^2(A)} \approx \frac{2b\{A^2/4 - 2b[(1 - A^2/4)A^2/8]\}}{1 - A^2/2 + bA^2/2} \approx$$

$$\approx \frac{(A^2/2)b(1-b)}{1 - (A^2/2)(1-b)} \approx (A^2/2)b(1-b).$$

Видно, что  $\beta_2/\beta_0 = 0$  при  $b = 1$ . Однако случай  $b = 1$ , как следует из (1.6), соответствует «чистой» рефракции пучка на первой гармонике. Ясно, что при этом амплитуда второй гармоники равна нулю.

В соответствии с результатами раздела 1.2.2, положим, что  $b \approx 0,8$ . В этом случае имеет место локальный максимум зависимости  $\beta_2(b)$ . Тогда  $A^2 \geq 2,5 \cdot 10^{-4}$ .

Итак,  $A \geq 1,6 \cdot 10^{-2}$ . При значениях, принятых выше ( $k = 10^5$  см<sup>-1</sup>;  $L = 1$  см) получим:  $\Delta n \geq 1,6 \cdot 10^{-7}$ ;  $I_{yz} \geq 2,5 \cdot 10^{-5}$  Вт/см<sup>2</sup>.

### 2.3. Измерение смещений объекта

Широкий класс задач связан с измерением смещений объекта – контроль прямолинейности и соосности разного рода направляющих, деформаций различных конструкций, контроль вибраций и т.д.[17, 18, 20, 25, 35].

Рассмотрим вначале смещение (перемещение) объекта с некоторой постоянной скоростью  $v$ , например, при контроле прямолинейности направляющих. Тогда зависимость положения  $x(t)$  светового пучка от времени имеет вид:  $x(t) = x_0(t_1) + v(t - t_1)$ , где  $t_1$  – некоторый заданный момент времени;  $t$  – текущее время. В частности, если  $t = t_2$ , то  $x(t_2) = x_0(t_1) + v(t_2 - t_1)$ .

Скорость  $v$  считается положительной, если ее направление совпадает с направлением распространения акустической волны – в сторону увеличения  $x$ .

В данном случае имеет смысл говорить об измерении смещения  $\Delta x_0$  светового пучка за время  $t_2 - t_1$  относительно акустооптической ячейки:  $\Delta x_0 = x_0(t_2) - x_0(t_1)$ , причем  $v = \Delta x_0 / (t_2 - t_1)$ . Тогда интересующая нас разность фаз  $\Delta\phi$  акустической волны имеет вид, аналогичный (2.1).

Рассмотрим схему измерения смещений (вибраций) объекта, рис. 2.1.

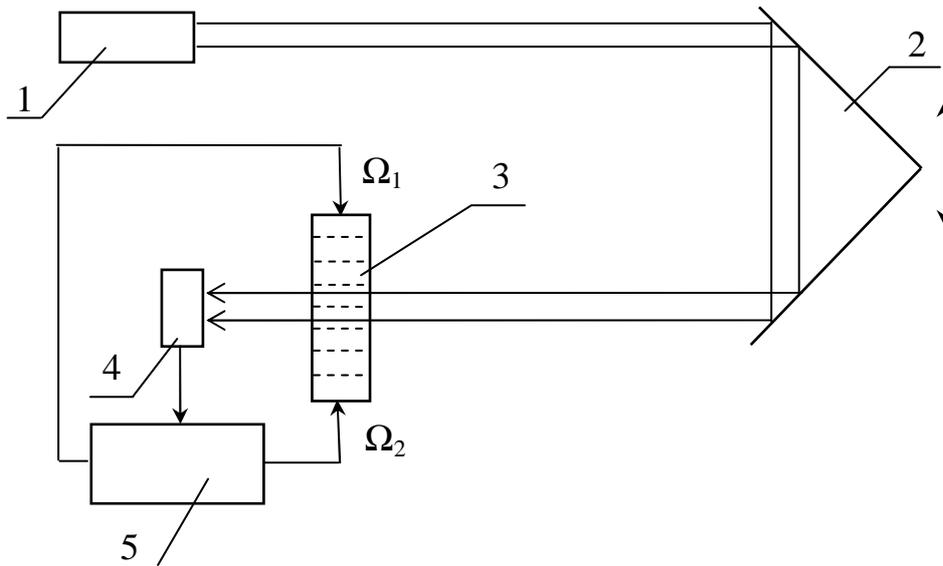


Рис. 2.1. Схема акустооптического измерителя смещений объекта

1 – осветитель; 2 – отражатель, связанный с объектом; 3 – акустооптическая ячейка; 4 – фотоприемный блок; 5 – блок управления и обработки сигналов

Осветитель 1, твердотельная акустооптическая ячейка 3 и фотоприемный блок 4 установлены на едином основании и неподвижны относительно друг друга. Отражатель 2 (трипель-призма) жестко связан с исследуемым объектом (на рисунке не показанным). В ячейке возбуждаются одна ультразвуковая волна с частотой  $\Omega_1$ , или две волны с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , бегущие навстречу друг другу. После прохождения акустооптической ячейки световой пучок попадает на фотоприемный блок 4, подсоединенный к блоку 5 управления и обработки сигналов.

При перемещении отражателя 2 в направлении, перпендикулярном оси исходного пучка (в направлении, указанном стрелкой), выходящий из него световой пучок будет перемещаться относительно ячейки. Измеряя сдвиг фазы оптического сигнала, можно определить смещение пучка относительно ячейки и, соответственно, смещение объекта.

Отметим, что перемещение светового пучка относительно ячейки 3 в два раза больше, чем перемещение отражателя 2, жестко связанного с объектом.

Рассмотрим вначале случай одной акустической волны частоты  $\Omega_1 = \Omega$ .

Интересующая нас разность фаз  $\Delta\varphi$  этой волны имеет вид:

$$\Delta\varphi = f\Delta x_0 = 2\pi(\Delta x_0 / \lambda) = \Omega_d \tau = 2\pi(\tau / T_d), \quad (2.6)$$

где  $\Delta x_0 = x_0(t_2) - x_0(t_1)$  есть искомое смещение объекта за интервал времени  $t_2 - t_1$  между соседними измерениями;  $\tau = \Delta x_0 / (C - v)$  – время, за которое акустическая волна пройдет расстояние  $\Delta x_0$ ;  $\lambda$  – длина акустической волны,  $T_d = T / (1 - v/C)$  – период волны с учетом эффекта Доплера, причем практически всегда  $v/C \ll 1$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае источник акустической волны неподвижен относительно среды, поэтому длина волны не изменяется вследствие движения приемника волны – светового пучка. Тогда имеем:

$$\Delta x_0 = \tau(C - v).$$

Однако непосредственно измерить величину  $\tau$  вряд ли возможно, поскольку она характеризует положение объекта в различные моменты времени. Поэтому положим, что  $\varphi_1 = f x_0(t_1) = 2\pi(\tau_1/T_d)$ ;  $\varphi_2 = f x_0(t_2) = 2\pi(\tau_2/T_d)$ , причем  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ . Здесь  $\tau_1, \tau_2$  – время, за которое волна пройдет расстояния  $x_0(t_1), x_0(t_2)$  соответственно. Выбор начала отсчета в определенной мере является произвольным, поэтому примем, что  $x_0(t_1), x_0(t_2) < \Lambda$  ( $\varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ ).

Измерение величин  $\tau_1, \tau_2$  можно производить различными методами, например, одним из самых точных – электронно-счетным методом, при котором подсчитывается количество импульсов опорной (достаточно высокой) частоты, укладываемых в измеряемом временном интервале. Пусть опорная частота есть  $\nu_0$ , тогда ее период  $T_0 = 1/\nu_0$ . Если при измерении интервала  $\tau_1$  подсчитано  $N_1$  импульсов опорной частоты, а при измерении интервала  $\tau_2$  подсчитано  $N_2$  импульсов, то, соответственно,  $\tau_1 = N_1 T_0$ ;  $\tau_2 = N_2 T_0$ ;  $\tau = (N_2 - N_1) T_0$ .

Для корректного определения  $\Delta x_0$  необходимо знать и скорость  $v$  движения объекта, причем время измерения должно быть сравнимо со временем  $\tau$ . Поэтому самый простой подход – измерение периода  $T_d$  путем заполнения его «метками времени»  $T_0$ . При этом

$$\Delta x_0 = \tau(C - v) = \tau C(T/T_d) = \Lambda(\tau/T_d). \quad (2.7)$$

Верхний предел измерений положим равным длине волны:  $(\Delta x_0)_{\max} = \Lambda$ . Вообще говоря, при определенном усложнении реализации возможно измерение и при  $\Delta x_0 > \Lambda$  ( $\varphi > 2\pi$ ) но этот случай мы рассматривать не будем. Далее, положим для оценок, что  $\Lambda = 1$  см. Если при этом диаметр  $D$  светового пучка составляет 2...3 мм, то отношение  $\Lambda/D$  соответствует максимуму уровня сигнала второй гармоники (1.8).

Итак, можно считать, что  $(\Delta x_0)_{\max} = 1$  см.

Для оценки нижнего предела измерений  $(\Delta x_0)_{\min}$  положим, что  $T_0 = 10^{-8}$  с ( $\nu_0 = 10^8$  Гц). Тогда, считая «естественной» неточность измерения  $N$  в одну «единицу счета», определим  $(\Delta x_0)_{\min}$  как величину, в 3 раза большую:  $(\Delta x_0)_{\min} = 3T_0C$ . Далее, примем для определенности, что акустооптическая ячейка выполнена из оптического стекла, для которого скорость звука  $C = 5$  км/с. Тогда  $(\Delta x_0)_{\min} = 0,15$  мм.

Для принятых значений  $\Lambda = 1$  см,  $C = 5$  км/с найдем частоту  $\Omega$  и период  $T$  акустической волны:  $\Omega = 2\pi C/\Lambda \approx 3 \cdot 10^6$  с $^{-1}$ ;  $T = 2\pi/\Omega = 2 \cdot 10^{-6}$  с  $\approx T_d$ . Нетрудно видеть, что диапазон измерений в данном случае имеет вид:  $(\Delta x_0)_{\max}/(\Delta x_0)_{\min} = T/3T_0 \approx 70$ .

Итак, при заданных  $\Lambda$  и  $C$  диапазон измерений невелик. Таким образом, имеет место противоречие: для расширения диапазона измерений необходимо уменьшить скорость звука  $C$ , но в то же время, скорость звука есть характеристика среды, и простыми методами изменение ее в широких пределах вряд ли возможно. Однако эти рассуждения справедливы для случая только одной акустической волны. Перейдем поэтому к случаю двух волн с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , бегущих навстречу друг другу.

В этом случае, с учетом (1.12), (2.6) разность фаз на частоте  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$  определяется соотношением:

$$\Delta\varphi = (f_1 + f_2)\Delta x_0 = f^*\Delta x_0 = 2\pi(\Delta x_0/\Lambda^*) = \Delta\Omega_d \tau^* = 2\pi(\tau^*/T_d^*), \quad (2.8)$$

где  $f^* = f_1 + f_2 = (\Omega_1 + \Omega_2)/C$ ;  $\Lambda^* = 2\pi/f^* = \Lambda_1\Lambda_2/(\Lambda_1 + \Lambda_2)$  – «эффективная длина суперпозиции» акустических волн;  $\tau^* = \Delta x_0/(\Delta\Omega_d\Lambda^*)$  – время, за которое волна (суперпозиция волн) проходит расстояние  $\Delta x_0$ ;  $\Delta\Omega_d = \Omega_1(1 - \nu/C) - \Omega_2(1 + \nu/C)$ ;

$$\Delta\Omega_d = \Omega_1 - \Omega_2 - (\nu/C)(\Omega_1 + \Omega_2) = \Delta\Omega(1 - \nu/C^*).$$

Тогда  $T_d^* = 2\pi/\Delta\Omega_d = 2\pi[\Delta\Omega(1 - \nu/C^*)]^{-1}$ . Нетрудно видеть, что при этом

$$\Delta x_0 = \tau^*\Delta\Omega\Lambda^*/(2\pi) = \tau^*C_d^*. \quad (2.9)$$

$$C_{д}^* = C \frac{\Delta\Omega_{д}}{\Omega_{1д} + \Omega_{2д}} = C \frac{\Omega_1 - \Omega_2 - (v/C)(\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_1 + \Omega_2 - (v/C)(\Omega_1 - \Omega_2)} = C^* \frac{1 - v/C^*}{1 - (v/C)(C^*/C)};$$

$$C_{д}^* \approx C^* (1 - v/C^*) = C^* - v.$$

Здесь  $C^*$  «эффективная» скорость звука (скорость распространения суперпозиции волн) в соответствии с (1.12):

$$C^* = C \frac{\Delta\Omega}{\Omega_1 + \Omega_2}.$$

Видно, что в рассматриваемом случае скорость  $C^*$  может быть достаточно малой,  $C^* \approx 10^0$  м/с  $\ll C$ . причем изменение  $C^*$  достигается всего лишь изменением разности частот  $\Delta\Omega$ , то есть, может быть реализовано сравнительно просто. Если  $\Delta\Omega \ll \Omega_1, \Omega_2$ , то  $\Omega_1 + \Omega_2 \approx 2\Omega_1 = 2\Omega$ . Тогда  $C^* \approx C\Delta\Omega/(2\Omega)$ .

Аналогично рассмотренному выше случаю одной акустической волны, примем, что и для встречных волн  $\Lambda \approx 1$  см,  $C = 5$  км/с,  $\Omega \approx 3 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>;  $T_0 = 10^{-8}$  с. Положим также, что  $\Delta\Omega = 6 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. Тогда  $C^* = 5$  м/с. В результате получим:

$$(\Delta x_0)_{\max} = \Lambda^* = \Lambda/2 = 0,5 \text{ см}; (\Delta x_0)_{\min} = 3T_0C^* = 0,15 \text{ мкм}.$$

Итак, по сравнению со случаем только одной акустической волны, в данном случае, для двух встречных волн, диапазон измерений значительно шире:  $(\Delta x_0)_{\max}/(\Delta x_0)_{\min} = T^*/3T_0 \approx 3 \cdot 10^4$ .

Следует отметить, что такое расширение диапазона обусловлено пропорциональным увеличением как  $T^*$ , так и  $\tau^*$ . При этом  $\tau/T = \Delta x_0/\Lambda$ ;  $\tau^*/T^* = \Delta x_0/\Lambda^* = 2\tau/T$ .

Следует отметить, что для многих практически важных случаев  $v/C^* \ll 1$ . Тем не менее, возможны ситуации, когда  $v = C^*$ . При этом световой пучок движется с той же скоростью и в том же направлении, что и акустическая волна разностной частоты, то есть, пучок неподвижен относительно этой волны. В данном случае имеется определенное сходство со стоячей волной, в частности,

$\Delta\Omega_d = 0$ ;  $\tau^* = \infty$ . Если же  $v > C^*$ , то формально при этом формально  $C^* < 0$ . По существу же при этом фаза сигнала меняется на  $\pi$ .

Выше полагалось, что объект движется с некоторой скоростью  $v$ ,  $v = \Delta x_0 / (t_2 - t_1)$ , ограничения на которую не рассматривались. Эта ситуация характерна для контроля прямолинейности/соосности разного рода направляющих в машиностроении, приборостроении, строительстве и т.д. Полагается, что объект движется со скоростью  $v_0$  в направлении, составляющем с осью  $OZ$  малый угол  $\chi$ ,  $\chi \ll 1$  (в идеале  $\chi = 0$ ). Тогда интересующая нас проекция  $v$  скорости на ось  $OX$  имеет вид:  $v = \sin\chi \approx v_0\chi$ . Для большинства практически важных случаев можно выбрать значение  $v_0 \approx 10^0 \dots 10^1$  см/с. Тогда, при  $\chi \leq 10^{-2}$ , получим:  $v \approx 0,1 \dots 1$  мм/с.

Рассмотренные выше параметры акустических волн никак не были связаны со скоростью  $v$ . В частности, используемая для оценок величина  $\Delta\Omega$  была выбрана в значительной мере произвольно. Однако это справедливо только при малых  $v$ . Сформулируем теперь критерий «малости» в следующем образом.

В течение единичного измерения объект должен быть практически неподвижным, то есть, за время измерения  $T_{\text{изм}}$  объект должен сместиться на величину, не превосходящую  $(\Delta x_0)_{\text{min}}$ :  $v T_{\text{изм}} \leq (\Delta x_0)_{\text{min}}$ .

Рассмотрим вначале случай с одной акустической волной, тогда  $T_{\text{изм}} = T$ . То есть, критерий малости скорости движения объекта имеет вид:  $vT \leq 3T_0C$ . Отсюда следует, что  $v/C \leq 3T_0/T$ . Если, как полагалось выше,  $T_0 = 10^{-8}$  с,  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  с, то  $v/C \leq 1,5 \cdot 10^{-2}$ . Если  $C = 5$  км/с, то  $v \leq 75$  м/с. Однако скорость 75 м/с явно превышает «разумные» значения для подавляющего большинства значимых ситуаций. Поэтому можно считать, что в случае с одной акустической волной нет практических ограничений на скорость  $v$ .

Рассмотрим теперь случай двух встречных акустических волн, тогда  $T_{\text{изм}} = T^*$ . При этом критерий малости скорости движения объекта имеет вид:  $vT^* \leq 3T_0C^*$ . Но  $T^* = 2\pi/\Delta\Omega$ ;  $C^* \approx C\Delta\Omega/(2\Omega)$ . Тогда получим:

$$\Delta\Omega \geq 2\sqrt{\frac{v}{C} \frac{\Omega}{T_0}}.$$

С учетом принятых значений  $\Omega = 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_0 = 10^{-8} \text{ с}$ ,  $C = 5 \text{ км/с}$  получим:

$\Delta\Omega \geq 3 \cdot 10^4 \sqrt{v}$ , где  $[\Delta\Omega] = \text{с}^{-1}$ ;  $[v] = \text{см/с}$ . Если  $v = 1 \text{ мм/с}$ , то  $\Delta\Omega \geq 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . При этом, как отмечалось выше,  $(\Delta x_0)_{\text{min}} = 10^{-1} \text{ мкм}$ . Если же  $v = 1 \text{ см/с}$ , то  $\Delta\Omega \geq 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $(\Delta x_0)_{\text{min}} = 10^0 \text{ мкм}$ .

Выше полагалось, что объект монотонно движется только в одну сторону. Рассмотрим теперь вибрации – гармонические колебания объекта относительно некоторого среднего положения с некоторой частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $x_{00} \leq (\Delta x_0)_{\text{max}}$ . Максимальная скорость объекта, как легко видеть, имеет вид:  $v = \omega_0 x_{00}$ . Тогда, по аналогии с вышеприведенными соображениями, получим:  $\omega_0 x_{00} T_{\text{изм}} \leq (\Delta x_0)_{\text{min}}$ . Для одной акустической волны имеем:  $\Omega/\omega_0 \geq 2\pi x_{00}/(\Delta x_0)_{\text{min}}$ .

Отношение  $R \equiv x_{00}/(\Delta x_0)_{\text{min}}$  характеризует разрешающую способность по смещению. При этом, очевидно,  $R \leq (\Delta x_0)_{\text{max}}/(\Delta x_0)_{\text{min}}$ .

Тогда требования к частоте  $\Omega$  акустической волны можно записать в виде:  $\Omega/\omega_0 \geq 2\pi R$ . В частности, если  $\Omega = 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $R = 70$ , то для таких параметров частота колебаний может быть сравнительно высокой:  $\omega_0 \leq 7 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ .

Для случая двух встречных акустических волн положим  $T_{\text{изм}} = T^*$ . При этом требования к разности частот  $\Delta\Omega$  акустической волны можно записать в виде:  $\Delta\Omega/\omega_0 \geq 2\pi R$ . В частности, если  $\Delta\Omega \geq 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $R = 5 \cdot 10^2$ , то  $\omega_0 \leq 10^1 \text{ с}^{-1}$ . Если же  $\Delta\Omega \geq 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $R = 5 \cdot 10^3$ , то при столь высоком разрешении частота колебаний является сравнительно малой:  $\omega_0 \leq 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ .

Рассмотрим теперь возможные погрешности измерений. Одна из основных метрологических характеристик любого средства измерений – абсолютная погрешность  $\delta X$ , представляющая собой усредненное отклонение измеренного значения  $X_{\text{изм}}$  (рассматриваемого как случайная величина  $X$ ) от истинного значения  $X_{\text{ист}}$  [56]. Обычно за абсолютную погрешность случайной величины принимают ее среднеквадратичное отклонение:  $\delta X = \sqrt{(X_{\text{изм}} - X_{\text{ист}})^2}$ .

Относительная погрешность определяется как отношение  $\delta X/X$ . В частности, относительная погрешность, нормированная на верхний предел измерений, есть приведенная погрешность. Именно приведенную погрешность в качестве относительной погрешности мы и будем использовать в дальнейшем.

Итак, измерение смещений ( $\Delta x_0$ ) объекта мы будем характеризовать абсолютной погрешностью  $\delta(\Delta x_0)$  и относительной (приведенной) погрешностью  $\delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\text{max}}$ .

Во многих случаях искомая величина есть функция нескольких переменных, например,  $Z = Z(X, Y)$ , причем случайные величины  $X$ ,  $Y$  статистически независимы. Для простоты записи ограничимся двумя переменными, поскольку для трех и более переменных результат получается аналогичным образом.

Найдем полный дифференциал функции  $Z$  и заменим дифференциалы конечными приращениями (по сути, отклонениями измеренного значения от истинного):

$$\Delta Z = \frac{\partial Z}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial Z}{\partial Y} \Delta Y ; (\Delta Z)^2 = \left( \frac{\partial Z}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial Z}{\partial Y} \Delta Y \right)^2.$$

Далее, усредним обе части равенства, полагая, что соответствующие частные производные при этом не меняются:

$$\overline{(\Delta Z)^2} = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \overline{(\Delta X)^2} + 2 \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y} \overline{\Delta X \Delta Y} + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \overline{(\Delta Y)^2}.$$

Поскольку случайные величины  $X$ ,  $Y$  статистически независимы, то второе слагаемое в правой части последнего соотношения равно нулю. В результате для абсолютных погрешностей  $\delta Z$ ,  $\delta X$ ,  $\delta Y$  получим:

$$\delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X} \delta X\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y} \delta Y\right)^2} \leq \left|\frac{\partial Z}{\partial X}\right| \delta X + \left|\frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \delta Y.$$

Для упрощения оценок ниже мы будем исходить из последнего соотношения, тем самым несколько завышая возможные погрешности:

$$\delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial X}\right| \delta X + \left|\frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \delta Y. \quad (2.10)$$

Оценим погрешности, соответствующие (2.7), то есть, случаю одной акустической волны:

$$\delta(\Delta x_0) = \delta[\tau C(T/T_d)] = A[\delta \tau T_d + (\tau T_d)(\delta C/C + \delta T/T + \delta T_d/T_d)].$$

Учитывая, что  $(\Delta x_0)_{\max} = A$ ,  $C = A/T$ , получим для относительной погрешности:

$$\delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} = \delta \tau T_d + (\tau T_d)(\delta C/C + \delta T/T + \delta T_d/T_d) \leq 3\delta \tau T + \delta C/C. \quad (2.11)$$

Пусть период опорной частоты  $T_0 = 10^{-8}$  с. Положим, что  $\delta \tau$  соответствует использованному выше значению  $3T_0$ :  $\delta \tau = 3 \cdot 10^{-8}$  с. Тогда, при  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  с, получим:  $\delta \tau T = 1,5 \cdot 10^{-2}$ .

Следует отметить, что относительная погрешность  $\delta T/T$  измерения периода колебаний существенно зависит от допустимого времени измерения  $t_{\text{изм}}$ . Выше полагалось, что  $t_{\text{изм}} = T = 2 \cdot 10^{-6}$  с. То есть, в данном случае возможны измерения с достаточно высокой частотой повторения - десятки кГц. В то же время, если  $t_{\text{изм}}$  допустимо выбрать сравнительно большим,  $t_{\text{изм}} \approx 10^{-1}$  с, то можно использовать деление измеряемой частоты, например, в  $M$  раз. При

этом, естественно, период  $T$  и время  $\tau$  увеличатся тоже ровно в  $M$  раз (соответственно, фаза сигнала не изменится). В результате на современном уровне развития техники погрешность  $\delta T/T$  может составлять достаточно малую величину  $10^{-7} \dots 10^{-6}$ .

Отметим, что класс точности средства измерения – это фактически есть основная приведенная погрешность, выраженная в процентах. Так, класс 0,1 и тем более, класс 0,01 с приведенной погрешностью соответственно  $10^{-3}$  и  $10^{-4}$  соответствуют высокоточным средствам измерений, причем соответствуют с учетом всех реальных факторов (как правило, увеличивающих погрешности). Поэтому ниже мы в качестве относительной погрешности мы будем указывать «минимально возможную» погрешность, по сути, учитывающую только факторы, которые отражены в формуле данного конкретного измерительного преобразования. Реально же относительные погрешности могут быть значительно больше, чем «минимально возможные».

В частности, источниками погрешностей измерений могут быть расходимость акустической волны; изменения скорости движения жидкости по трассе светового пучка; неламинарное течение жидкости; возможное влияние акустической волны на параметры жидкости (для воды – при интенсивностях УЗ-волны более  $1 \text{ Вт/см}^2$ ) и т.д. Отметим, что параметры светового пучка на результаты измерений практически не влияют.

«Минимально возможная» погрешность  $\delta C/C$ , в соответствии с результатами раздела **2.4**, может составлять  $10^{-5}$ . Поэтому можно считать, что для (2.7) приведенная, также «минимально возможная» погрешность измерения смещений объекта имеет вид:

$$\delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} < 10^{-5}.$$

Оценим теперь погрешности, соответствующие (2.8), то есть, случаю двух встречных акустических волн. Учтем также, что  $v/C$ ,  $C^*/C \ll 1$ , так что

$C_d^* \approx C^* (1 - \nu/C^*) = C^* - \nu$ . Более того, учтем, что и  $\nu/C^* \ll 1$ . При этом (2.9) примет вид:  $\Delta x_0 = \tau^*(C^* - \nu)$  Тогда получим:

$$\delta(\Delta x_0) = (C^* - \nu)\delta\tau^* + \tau^*\delta(C^* - \nu) = (\Lambda^*/T^*)(\Delta\Omega_d/\Delta\Omega) \delta\tau^* + \tau^*\delta(C^*\Delta\Omega_d/\Delta\Omega).$$

Учтем, что  $(\Delta x_0)_{\max} = \Lambda^* = \Lambda/2$ ;  $T_d^* = 2\pi/\Delta\Omega_d = 2\pi[(\Omega_1 - \Omega_2)(1 - \nu/C^*)]^{-1}$ ;  $C^* \approx C\Delta\Omega/(2\Omega)$ . Кроме того,  $1 - \nu/C^* = \Delta\Omega_d/\Delta\Omega \approx 1$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} &\approx \delta\tau^*/T^* + (\tau^*/T^*)[\delta C^*/C^* + 2\delta(\Delta\Omega)/(\Delta\Omega)] \leq \\ &\leq \delta\tau^*/T^* + \delta C^*/C^* + 2\delta(\Delta\Omega)/(\Delta\Omega). \end{aligned}$$

В то же время, нетрудно видеть, что  $\delta(\Delta\Omega)/(\Delta\Omega) \approx \delta T^*/T^* \approx \delta\tau^*/T^*$ .

В результате получим выражение, аналогичное (2.11):

$$\delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} \leq 3\delta\tau^*/T^* + \delta C^*/C^*. \quad (2.12)$$

Пусть период опорной частоты  $T_0 = 10^{-8}$  с. Положим, что  $\delta\tau^*$  соответствует использованному выше значению  $3T_0$ :  $\delta\tau^* = 3*10^{-8}$  с. Тогда, для  $\Delta\Omega = 6*10^4$  с<sup>-1</sup>, то есть, при  $T^* = 10^{-4}$  с, получим:  $\delta\tau^*/T^* = 3*10^{-4}$ . Если же  $\Delta\Omega = 6*10^3$  с<sup>-1</sup> ( $T^* = 10^{-3}$  с), тогда имеем:  $\delta\tau^*/T^* = 3*10^{-5}$ .

Если же не использовать деление частоты с последующим измерением длительности временных интервалов, то  $\delta\tau^*/T^* \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ .

Погрешность  $\delta C^*/C^*$ , в соответствии с результатами раздела 2.4, может составлять  $10^{-5}$ . Поэтому можно считать, что для (2.8) приведенная погрешность измерения смещений объекта имеет тот же вид, как и для случая одной акустической волны:

$$\delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} < 10^{-5}.$$

Рассмотрим теперь погрешности определения скорости  $\nu$  по измерению смещения  $\Delta x_0$ , исходя из соотношения:  $\nu = \Delta x_0/(t_2 - t_1)$ . В этом случае

$$\delta\nu/\nu = \delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0) + \delta(t_2 - t_1)/(t_2 - t_1) \leq \delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\max} + 2\delta t/(t_2 - t_1).$$

При оценке абсолютной погрешности измерения интервала времени  $\delta(t_2 - t_1) \approx 2\delta t$  положим, что  $\delta t \approx \delta \tau = 3 \cdot 10^{-8}$  с. Длительность интервала  $t_2 - t_1$  определяется, в частности, желаемой частотой  $\omega_{\text{изм}}$  повторения измерений,  $t_2 - t_1 < 2\pi/\omega_{\text{изм}}$ . Если  $\omega_{\text{изм}} \leq 10^1 \dots 10^2$  с<sup>-1</sup>, то  $t_2 - t_1 \leq 3 \cdot 10^{-2} \dots 3 \cdot 10^{-1}$ .

То есть,  $2\delta t/(t_2 - t_1) \approx 2 \cdot 10^{-7} \dots 2 \cdot 10^{-6} \ll \delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\text{max}} = 10^{-4}$ .

В результате получим:

$$\delta v/v \approx \delta(\Delta x_0)/(\Delta x_0)_{\text{max}} \approx 10^{-4}.$$

Пределы измерений по скорости можно оценить следующим образом:  $v_{\text{min}} \approx (\Delta x_0)_{\text{min}}/(t_2 - t_1)$ ;  $v_{\text{max}} \approx (\Delta x_0)_{\text{max}}/(t_2 - t_1)$ . Если, в соответствии с приведенными выше оценками, положить, что  $(\Delta x_0)_{\text{max}} = 0,5$  см;  $(\Delta x_0)_{\text{min}} = 0,1$  мкм;  $t_2 - t_1 = 10^{-1}$  с, то получим:

$$v_{\text{min}} \approx 1 \text{ мкм/с}; v_{\text{max}} \approx 5 \text{ см/с}.$$

Рассмотрим теперь измерение скорости  $v$  по измерению сдвига частоты за счет эффекта Доплера.

Одним из самых точных методов измерения частоты, как отмечалось выше, является электронно-счетный метод, при котором подсчитывается количество импульсов некоторой (достаточно высокой) частоты, укладываемых в заданном временном интервале. При этом широко используются два подхода.

Для не слишком высоких частот формируются заданные временные интервалы, длительность которых равна периоду соответствующей частоты. Эти интервалы заполняются импульсами опорной частоты, значение которой известно с достаточно высокой точностью. То есть, здесь, по сути, измеряется не частота, а период (обратно пропорциональный частоте). Если нет ограничений на время измерений, то для уменьшения погрешностей можно использовать интервалы, длительность которых кратна длительности периода

соответствующей частоты. Обычно такие интервалы получают путем деления исходной частоты в требуемое число раз.

Для высоких частот высокоточным является заданный временной интервал – время измерения, который заполняется импульсами измеряемой частоты.

В обоих случаях относительная погрешность измерения частоты (периода) для большинства практически важных случаев не превышает  $10^{-7} \dots 10^{-6}$ .

Оценим теперь погрешности измерения скорости  $v$  для случая одной акустической волны, исходя из соотношения:  $v/C = (\Omega_d - \Omega)/\Omega$ , где  $\Omega_d$  – частота волны с учетом эффекта Доплера,  $\Omega_d = 2\pi/T_d$ , в соответствии с (2.6). Учтем, что  $\Omega_d - \Omega = v/(C\Omega)$ . Тогда получим:

$$\delta v/v = \delta C/C + \delta(\Omega_d - \Omega)/(\Omega_d - \Omega) + \delta\Omega/\Omega \approx \delta C/C + \delta\Omega/\Omega + 2C/v \delta\Omega/\Omega.$$

$$\delta v \approx v(\delta C/C + \delta\Omega/\Omega) + 2C(\delta\Omega)/\Omega.$$

Пусть  $\delta C/C = 10^{-5} \dots 10^{-6}$ ;  $\delta\Omega/\Omega = 10^{-7} \dots 10^{-6}$ ;  $C = 5 \cdot 10^3$  м/с.

Нижний предел измерений  $v_{\min}$  оценим из условия:  $\delta v/v_{\min} \approx 1$ . Тогда получим:  $v_{\min} \approx 2C(\delta\Omega)/\Omega = 1 \dots 10$  мм/с. То есть, нижний предел измерений оказывается весьма высоким, вряд ли соответствующим требованиям практики. Отметим, что верхний предел  $v_{\max}$  формально может быть достаточно большим, но практического значения эта величина не имеет.

Рассмотрим теперь случай двух встречных акустических волн с частотами  $\Omega_1, \Omega_2$ . Тогда  $v/C^* = (\Delta\Omega_d - \Delta\Omega)/\Delta\Omega$ ; при этом  $\Delta\Omega_d - \Delta\Omega = \Delta\Omega v/C^*$ . Соответственно,

$$\delta v/v = \delta C^*/C^* + \delta(\Delta\Omega_d - \Delta\Omega)/(\Delta\Omega_d - \Delta\Omega) + \delta\Delta\Omega/\Delta\Omega \approx$$

$$\approx \delta C^*/C^* + \delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega + 2C^*/v[\delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega].$$

$$\delta v \approx v[\delta C^*/C^* + \delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega] + 2C^*\delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega.$$

Пусть  $\delta C^*/C^* = 10^{-5}$ ;  $\delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega = 10^{-7} \dots 10^{-6}$ ;  $C^* = 5$  м/с.

Нижний предел измерений  $v_{\min}$  оценим из условия:  $\delta v/v_{\min} \approx 1$ . Тогда получим:  $v_{\min} \approx 2C^*\delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega = 1\dots 10$  мкм/с.

То есть, нижний предел измерений оказывается достаточно малым. Точнее, этот предел по сравнению со случаем одной акустической волны, уменьшается в том же отношении, в каком уменьшается  $C^*$  по сравнению со скоростью звука  $C$ .

Верхний предел измерений  $v_{\max}$  может составлять  $10^0$  см/с. Тогда для относительной (приведенной) погрешности измерений получим:

$$\delta v/v_{\max} \approx 10^{-3} \dots 10^{-4}.$$

В рассматриваемой схеме (рис. 2.1) непосредственно, механически, с объектом связан лишь отражатель. Измерения подобного рода, являясь по своей сути дистанционными, могут представлять интерес при изучении вибраций, контроле прямолинейности разного рода направляющих в машиностроении, приборостроении, строительстве – например, при исследовании возможных искривлений технологических каналов ядерных реакторов [18].

Оценим поэтому возможную «дальность действия» – максимальное расстояние  $L_0$  до объекта. Как отмечалось выше, «естественная» мера смещений - длина акустической волны  $\lambda$  - должна выбираться в соответствии с диаметром  $D$  пучка в ячейке. В частности, в соответствии с изложенным в разделе 1.2.2, для второй гармоники максимальный уровень сигнала реализуется при  $\lambda/D \approx 4\dots 5$ . Если диаметр пучка на выходе осветителя есть  $D_0$ , а его расходимость определяется только дифракцией, то диаметр пучка  $D$  на расстоянии  $L_0$  от осветителя имеет вид:

$$D^2 = D_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{3L_0}{kD_0} \right)^2 \right].$$

Здесь учтены соотношения раздела **1.3.1** для диаметра пучка по уровню  $e^{-1}$  и то обстоятельство, что диаметр определяется по обычно используемому уровню, близкому к 0,1.

Положим, как и ранее, что  $L \approx 1$  см. Пусть при этом  $D_0 \approx 2...3$  мм. Тогда  $D/D_0 \leq \sqrt{2}$  при  $L_0 \leq 10...30$  м. То есть, «дальность действия» оказывается довольно большой.

Следует отметить, что при этом не учитывается возможное влияние турбулентности атмосферы, а именно оно может ограничивать  $(\Delta x_0)_{\min}$ . Действительно, схема рис. 2.1 при неподвижном отражателе будет регистрировать смещения пучка, обусловленные этой турбулентностью (и может использоваться для этой цели). В частности, если смещение пучка  $\Delta x_0 = 0,1$  мкм,  $L_0 = 10$  м, то этому соответствует изменение угла прихода на весьма малую величину  $10^{-8}$ . Такого порядка изменения вызываются крайне слабой турбулентностью, характеризуемой структурной постоянной  $C_n^2 \approx 10^{-19} \text{ см}^{-2/3}$ , в то время для реальной атмосферы  $C_n^2$  может меняться в пределах  $(10^{-18} \dots 10^{-14}) \text{ см}^{-2/3}$  [17].

Итак, схемы с двумя встречными акустическими волнами по сравнению со случаем одной волны характеризуются значительно более широким диапазоном измерений и значительно меньшей относительной погрешностью. Однако «платой» за эти преимущества являются более сильные ограничения на скорость движения объекта.

## **2.4. Измерение скорости жидкости и скорости звука в ней**

Выше, в разделе **2.3**, рассматривался случай акустооптической ячейки, средой в которой ультразвук распространялся в твердом теле (например, оптическом стекле). При этом отсутствовало движение источника акустических

волн относительно среды, но приемник волн – по сути, световой пучок – перемещался относительно среды и, соответственно, источника волн.

Рассмотрим теперь другой случай, когда ультразвук распространяется в движущейся среде – жидкости с некоторой скоростью  $V$ , а источник и приемник неподвижны относительно друг друга. Тогда, несмотря на движение среды, сдвиг частоты за счет эффекта Доплера отсутствует, так что частота  $\Omega_{\text{п}}$  волны, регистрируемая приемником, равна частоте волны  $\Omega$ , формируемой излучателем,  $\Omega_{\text{п}} = \Omega$ . То есть, непосредственное определение скорости  $V$  (точнее, отношения  $V/C$ ) по сдвигу частоты оказывается невозможным. Однако определение  $V/C$  оказывается возможным по измерению фазы (разности фаз) акустической волны.

Рассмотрим возможную схему измерений, представленную на рис. 2.2.

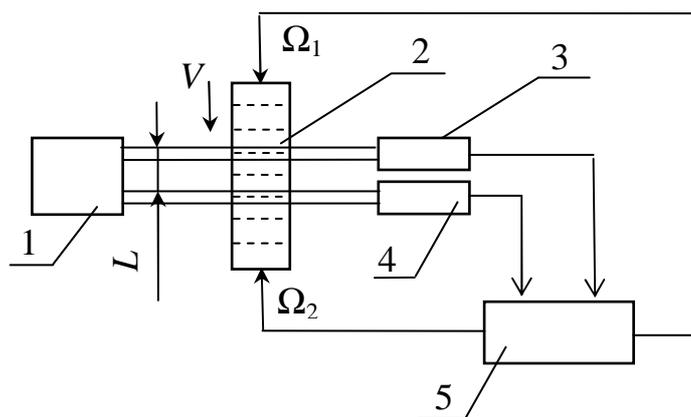


Рис. 2.2. Схема акустооптического измерителя скорости движения жидкости и скорости звука в ней. Дифракция Фраунгофера  
1 – осветитель; 2 – акустооптическая ячейка; 3, 4 – фотоприемные блоки;  
5 – блок управления и обработки сигналов

Осветитель 1 формирует два параллельных световых пучка, разнесенных на расстояние  $L$ . Он содержит либо два лазера, либо один лазер и соответствующую светоделительную призму. В акустооптической ячейке 2 возбуждаются одна акустическая волна с частотой  $\Omega_1 = \Omega$ , или две волны с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , бегущие навстречу друг другу. После прохождения

акустооптической ячейки световые пучки попадают на фотоприемные блоки 3 и 4, подсоединенные к блоку 5 управления и обработки сигналов. Жидкость в акустооптической ячейке движется со скоростью  $V$  в направлении, указанном стрелкой на рисунке.

Рассмотрим случай одной акустической волны. Как и в разделе 2.1, примем, что направление распространения волны поочередно меняется: вначале  $\Omega_1 = \Omega$ ,  $\Omega_2 = 0$ ; затем  $\Omega_2 = \Omega$ ,  $\Omega_1 = 0$  и так далее. Пусть  $\tau_+ = L/(C + V)$  – время, за которое акустическая волна пройдет расстояние  $L$  в случае, когда жидкость и волна движутся в одну и ту же сторону;  $\tau = L/(C - V)$  – время, за которое акустическая волна пройдет то же расстояние  $L$  в случае, когда жидкость и волна движутся навстречу друг другу. При этом  $\Delta\varphi_+ = \Omega\tau_+$ ,  $\Delta\varphi = \Omega\tau$  есть разности фаз сигналов с выходов фотоприемных блоков 3 и 4 для соответствующих случаев движения жидкости и волны.

Отметим, что в большинстве случаев скорость жидкости сравнительно мала,  $V \ll C$ .

Тогда имеют место соотношения, аналогичные (2.4):

$$\begin{aligned} C &= (\Omega L/2) (1/\Delta\varphi_+ + 1/\Delta\varphi) = (L/2)(1/\tau_+ + 1/\tau); \\ V &= (\Omega L/2) (1/\Delta\varphi_+ - 1/\Delta\varphi) = (L/2)(1/\tau_+ - 1/\tau). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Оценим теперь возможные погрешности измерений. Для скорости звука имеем:

$$\delta C/C \approx \delta L/L + (\delta\tau_+/\tau_+^2 + \delta\tau/\tau^2)/(1/\tau_+ + 1/\tau) \leq \delta L/L + \delta T/T.$$

Здесь учтено, что  $\tau_+ \approx \tau = \tau < T = 2\pi/\Omega$ .

Положим, что жидкостью в акустооптической ячейке является вода, т. е.  $C \approx 1,5$  км/с. Примем также, что длина акустической волны  $\lambda \approx 1$  см. Тогда  $\Omega \approx 9 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ;  $T = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ .

Пусть, как принималось и ранее,  $\delta T = 3 \cdot 10^{-8}$ . Положим также, что время измерения может быть сравнительно большим, так что возможно деление частоты  $\Omega$  с целью увеличения как  $T$ , так и  $\tau$ . Тогда  $\delta T/T \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ .

Оценим теперь погрешность  $\delta L/L$ . По-видимому, определение  $L$  целесообразно проводить, используя калибровку измерительной схемы по жидкости с известной скоростью звука. При этом, скорее всего,  $\delta L/L > \delta T/T$ . Для оценок положим, что «минимально возможная» погрешность  $\delta L/L \approx 10^{-5}$ .

В результате получим для «минимально возможной» погрешности:  $\delta C/C \approx \delta L/L \approx 10^{-5}$ . То есть, относительная погрешность измерения скорости звука может быть достаточно малой.

Следует отметить, что реальный диапазон изменений скорости звука в обычных условиях сравнительно невелик, так что диапазон измерений по скорости звука в подавляющем большинстве случаев полностью удовлетворяет требованиям практики.

Перейдем теперь к скорости  $V$  движения жидкости. В данном случае имеем:

$$\delta V/V \approx \delta L/L + (\delta \tau_+ / \tau_+^2 + \delta \tau_- / \tau_-^2) / (1/\tau_+ - 1/\tau_-) \leq \delta L/L + \delta T/T (2 \tau \Delta \tau) \approx \delta L/L + (\delta T/T)(C/V).$$

Здесь учтено, что из (2.13) следует:

$$\frac{1/\tau_+ + 1/\tau_-}{1/\tau_+ - 1/\tau_-} = C/V \approx 2 \tau \Delta \tau.$$

Для оценок можно положить, что  $\delta L/L \approx \delta T/T$ . Тогда

$$\delta V/V \approx (1 + C/V)(\delta T/T) \approx (C/V)(\delta T/T);$$

$$\delta V \approx C(\delta T/T).$$

Итак, абсолютная погрешность  $\delta V$  представляется достаточно малой,  $\delta V \approx 0,1 \dots 1$  мм/с.

Нижний предел  $V_{\min}$  измерений по скорости жидкости определим так:  $V_{\min} \approx 3\delta V$ . Тогда  $V_{\min} \leq 10^0$  мм/с. Верхний предел  $V_{\max}$  определяется динамическим диапазоном электронного тракта. Этот диапазон может превосходить четыре порядка, так что  $V_{\max} \approx 10^1$  м/с.

Итак, случай одной акустической волны представляет непосредственный интерес для задач измерения как скорости звука в жидкостях, так и скорости движения этих жидкостей.

Рассмотрим теперь случай распространения в ячейке двух встречных акустических волн с частотами  $\Omega_1, \Omega_2$ , причем  $\Omega_1 - \Omega_2 = \Delta\Omega$ .

По аналогии с результатами раздела 2.1 можно записать соотношения, аналогичные (2.5):

$$C \approx \Omega L(1/\Delta\varphi_+ + 1/\Delta\varphi_-) = (\Omega/\Delta\Omega)L(1/\tau_+ + 1/\tau_-); \quad (2.14)$$

$$V \approx \Omega L(1/\Delta\varphi_+ - 1/\Delta\varphi_-)(\Omega/\Delta\Omega) = (\Omega/\Delta\Omega)^2 L(1/\tau_+ - 1/\tau_-).$$

Оценим возможные погрешности измерений. Для скорости звука имеем:

$$\delta C/C \approx \delta\Omega/\Omega + \delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega + \delta L/L + (\delta\tau_+/\tau_+^2 + \delta\tau_-/\tau_-^2)/(1/\tau_+ + 1/\tau_-) \leq 2\delta\Omega/\Omega + \delta L/L + \delta\tau/\tau.$$

Для оценок положим, что  $\delta L/L \approx 10^{-5}$ ;  $\delta\Omega/\Omega \approx \delta\tau/\tau \approx \delta T/T \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ .

Тогда для «минимально возможной» погрешности получим:  $\delta C/C \approx \delta L/L \approx 10^{-5}$ .

То есть, в данном случае, как и для одной акустической волны, относительная погрешность измерения скорости звука может быть достаточно малой.

Для скорости  $V$  движения жидкости имеем:

$$\begin{aligned} \delta V/V &\approx 2\delta\Omega/\Omega + 2\delta(\Delta\Omega)/\Delta\Omega + \delta L/L + (\delta\tau_+/\tau_+^2 + \delta\tau_-/\tau_-^2)/(1/\tau_+ - 1/\tau_-) \leq \\ &\leq 4\delta\Omega/\Omega + \delta L/L + \delta T/T(2\tau/\Delta\tau) \approx 4\delta\Omega/\Omega + \delta L/L + (\Omega/\Delta\Omega)(\delta T/T)(C/V). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что из (2.14) следует:

$$\frac{1/\tau_+ + 1/\tau_-}{1/\tau_+ - 1/\tau_-} = (\Omega/\Delta\Omega)(C/V) \approx 2\tau/\Delta\tau.$$

Для оценок положим, что  $\delta L/L \approx \delta \Omega/\Omega \approx \delta \tau/\tau \approx \delta T/T \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ ;  $\Omega/\Delta \Omega \approx 10^3$ . Тогда получим:

$$\delta V \approx [5V + C(\Omega/\Delta \Omega)](\delta T/T) \approx C(\Omega/\Delta \Omega)](\delta T/T).$$

В данном случае абсолютная погрешность  $\delta V$  является сравнительно большой, особенно в сравнении со случаем одной акустической волны,  $\delta V \approx 1$  м/с.

Для нижнего предела  $V_{\min}$  измерений по скорости жидкости  $V_{\min}$  имеем:  $V_{\min} \approx 3\delta V \leq 10^0$  м/с. Верхний предел  $V_{\max}$  может формально составлять сотни метров в секунду, однако реально он определяется условиями течения жидкости.

Таким образом, в случае встречных акустических волн влияние скорости движения жидкости на фазу оптического сигнала оказывается значительно более слабым, чем по сравнению со случаем одной волны. И если метрологические характеристики при измерениях скорости звука в обоих случаях примерно одинаковы, то ситуация с измерением скорости движения жидкости совсем иная: достаточно малый нижний предел измерений  $V_{\min} = 10^0$  мм/с для случая одной волны и на три порядка большее значение  $V_{\min} = 10^0$  м/с для случая встречных волн. Это обстоятельство можно объяснить тем, что эффект изменения направления распространения акустических волн на противоположное направление в случае встречных волн в значительной мере компенсирует друг друга, в отличие от случая одной волны. Действительно, для одной акустической волны  $\tau_+ - \tau \sim V/C$ , тогда как для встречных волн  $\tau_+ - \tau \sim (V/C)(C^*/C) = (V/C)(\Delta \Omega/\Omega) \ll V/C$ .

Выше неявно полагалось, что жидкость движется по некоторому каналу, см. рис.2.2. Однако во многих случаях интерес представляет исследование свободного течения жидкости в различных водоемах и резервуарах. В принципе, схема измерений будет аналогична схеме рис. 2.2, с той лишь разницей, что излучатели акустических волн полностью погружены в жидкость.

Рассмотрим схему двухкомпонентного измерителя скорости жидкости для исследования двумерного течения жидкости, рис. 2.3.

Положим, что ультразвуковые излучатели 1, 1' возбуждают акустическую волну с частотой  $\Omega_1$ , причем направление распространения этой волны (вдоль оси  $Ox$ ) поочередно меняется на противоположное  $1 \rightarrow 1' \Rightarrow 1' \rightarrow 1$ . Излучатели 2, 2' возбуждают акустическую волну с частотой  $\Omega_2$ , причем направление распространения этой волны (вдоль оси  $Oy$ ) также поочередно меняется на противоположное  $2 \rightarrow 2' \Rightarrow 2' \rightarrow 2$ .

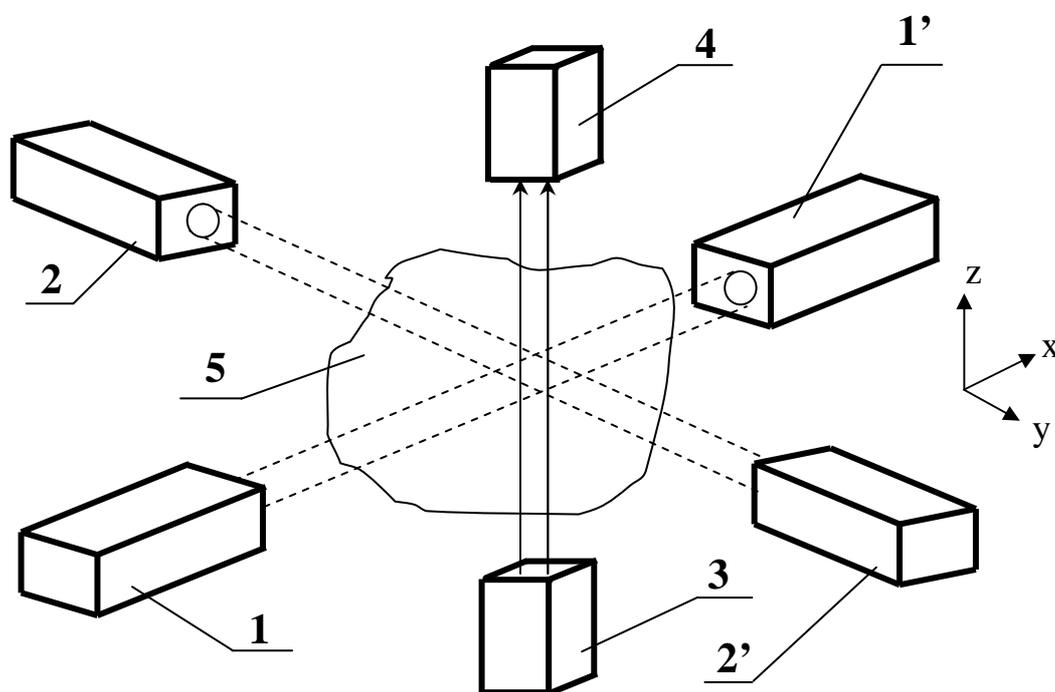


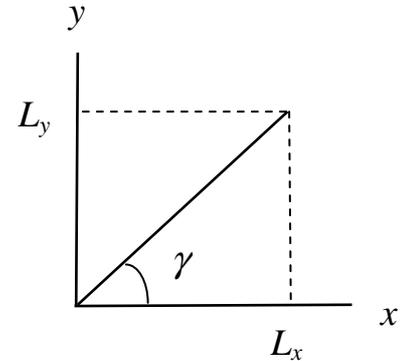
Рис. 2.3. Схема двухкомпонентного акустооптического измерителя скорости движения жидкости

1, 1' – ультразвуковые излучатели с частотой  $\Omega_1$ ; 2, 2' – ультразвуковые излучатели с частотой  $\Omega_2$ ; 3 – осветитель; 4 – фотоприемный блок; 5 – исследуемая среда

Отметим, что в данном случае особый интерес представляет скорость движения жидкости, а не скорость звука, поэтому будем рассматривать лишь одну акустическую волну в каждом направлении.

Осветитель 3, содержащий два лазера (либо один лазер и соответствующую светоделительную призму) формирует два параллельных световых пучка, разнесенных на расстояние  $L$ . На рис. 2.3 эти пучки обозначены стрелками. Линия, проходящая через оси пучков, составляет угол  $\gamma$  с осью  $OX$ . Тогда  $L_x = L \cos \gamma$  и  $L_y = L \sin \gamma$  есть проекции разнесения пучков на оси  $OX$ ,  $OY$ .

Фотоприемный блок 4 содержит два фотоприемника – по одному на каждый световой пучок.



Поскольку световые пучки распространяется в направлении  $OZ$ , то сигналы на выходе каждого фотоприемника блока 4 будут содержать одну составляющую с частотой  $\Omega_1$ , зависящую от  $V_x$  и другую составляющую с частотой  $\Omega_2$ , зависящую от  $V_y$  ( $V_x$ ,  $V_y$  - проекции скорости на оси  $OX$ ,  $OY$ ). Для заданных максимальных значений  $V_x$ ,  $V_y$  нетрудно выбрать частоты  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  такими, что составляющие сигнала легко разделяются соответствующими электронными фильтрами. Тогда на выходе каждого фильтра по измеренным частотам сигналов  $(\Omega_x)_{\text{рег}}$ ,  $(\Omega_y)_{\text{рег}}$  можно найти искомые значения компонент скоростей по соотношениям, аналогичным (2.13):

$$\begin{aligned} V_x &= (\Omega_1 L \cos \gamma / 2) (1/\Delta \varphi_{1+} - 1/\Delta \varphi_{1-}) = (L \cos \gamma / 2) (1/\tau_{1+} - 1/\tau_{1-}); \\ V_y &= (\Omega_2 L \sin \gamma / 2) (1/\Delta \varphi_{2+} - 1/\Delta \varphi_{2-}) = (L \sin \gamma / 2) (1/\tau_{2+} - 1/\tau_{2-}); \\ C &= (L \cos \gamma / 2) (1/\tau_{1+} + 1/\tau_{1-}) = (L \sin \gamma / 2) (1/\tau_{2+} + 1/\tau_{2-}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь  $\Delta \varphi_{1+}$ ,  $\Delta \varphi_{1-}$  - разности фаз сигналов на частоте  $\Omega_1$  для случаев распространения акустической волны по направлению движения жидкости и против этого направления;  $\tau_{1+}$ ,  $\tau_{1-}$  - соответствующие длительности:  $\Delta \varphi_{1+} = \Omega_1 \tau_{1+}$ ;  $\Delta \varphi_{1-} = \Omega_1 \tau_{1-}$ .

Величины  $\Delta\varphi_{2+}$ ,  $\Delta\varphi_{2-}$ ,  $\tau_{2+}$ ,  $\tau_{2-}$  имеют аналогичный смысл применительно к частоте  $\Omega_2$ .

Зададим пределы измерений и возможные погрешности в соответствии со значениями, приведенными выше для соотношений (2.13):

$$\delta V_x \approx \delta V_y \approx 0,1 \dots 1 \text{ мм/с}; (V_x)_{\min} \approx (V_y)_{\min} \approx 10^0 \text{ мм/с}; (V_x)_{\max} \approx (V_y)_{\max} \approx 10^1 \text{ м/с};$$

$$\delta C/C \approx 10^{-5}; \delta C \approx 10^0 \text{ см/с}.$$

Погрешность  $\delta C$  может быть обусловлена неконтролируемыми изменениями температуры и (или) химического состава жидкости. Для воды, в частности,  $\delta C/C < 10^{-3}$  при неопределенности температуры  $\delta T < 0,5^\circ\text{C}$  или солёности  $\delta S < 1 \text{ ‰}$ .

Для частот акустических волн можно принять следующие значения:  $\Omega_1 = 9 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$  ( $\Omega_1/2\pi \approx 150 \text{ кГц}$ );  $\Omega_2 = 6 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$  ( $\Omega_2/2\pi \approx 100 \text{ кГц}$ ). Столь большое различие в частотах позволяет легко разделить соответствующие сигналы, при этом перекрестные помехи могут быть достаточно малыми.

Выше измерения смещений объекта, скорости движения прозрачной жидкости и скорости звука в ней рассматривались применительно к дифракции Фраунгофера.

Рассмотрим теперь особенности дифракции Френеля, в соответствии с результатами раздела 1.3.2. Как следует из (1.14), каждая гармоника имеет составляющую фазы, зависящую от координаты  $x$ . В частности, для первой гармоники оптического сигнала эта составляющая  $\varphi_x$  имеет вид:

$$\varphi_x = \frac{fx}{1+l^2} = \frac{2\pi x}{\Lambda(1+l^2)}. \text{ Здесь, как и в (1.13), принято, что } l \equiv \frac{z}{k\sigma_0^2}. \text{ Будем}$$

регистрировать интенсивность пучка одновременно в двух точках:  $x = x_1$ ;  $x = x_2$ ; причем  $x_2 - x_1 \equiv L$ . Тогда нетрудно найти разность фаз

$\Delta\phi = \phi_{x2} - \phi_{x1}$  соответствующих сигналов:  $\Delta\phi = 2\pi L^*/\Lambda$ , где  $L^* \equiv L/(1 + l^2)$ ;  
 $\phi_{x1} = \phi_x(x_1)$ ;  $\phi_{x2} = \phi_x(x_2)$ .

Отсюда получим и значение  $\Lambda = 2\pi L^*/\Delta\phi$ . Зная длину волны  $\Lambda$  и ее частоту  $\Omega$ , можно вычислить и скорость звука:  $C = \Omega\Lambda/2\pi = \Omega L^*/\Delta\phi$ .

Нетрудно видеть, что чувствительность измерений периода решетки  $\frac{d(\Delta\Phi)}{d\Lambda}$  близка к нулю при  $l \rightarrow \infty$ . С формальной точки зрения, чувствительность измерений максимальна при  $l = 0$ . Однако в этом случае  $U_1(l = 0) = 0$ . Итак, измерение периода решетки (определение скорости звука) реально возможно лишь в определенном диапазоне значений  $l$ . Снизу этот диапазон ограничен приемлемым уровнем  $U_1$ , а сверху – как уровнем  $U_1$ , так и приемлемой чувствительностью измерений. По-видимому, с практической точки зрения целесообразно обеспечить выполнение условия  $\sigma_0 f > 2$  ( $\Lambda/D < 1$ ), а измерения проводить при значениях  $l$ , соответствующих максимуму  $U_1$  (при расстояниях, соответствующих размеру первой зоны Френеля для длины волны звука).

Итак, по частотно-фазовым характеристикам переменных составляющих интенсивности пучка возможно определение фазовой скорости акустической волны. При этом желательно, чтобы значения  $l$  соответствовали максимуму  $U_1$ .

Один из важных вопросов конкретной реализации подобного рода измерений – это определение «приборной константы»  $L^*$ , например, путем калибровки измерительной схемы по среде с известной скоростью звука.

На рис. 2.4 представлена схема акустооптического измерителя скорости движения жидкости и скорости звука в ней, на рис 2.5 - вид плоскости регистрации этой схемы.

Как видно, схема рис 2.4 весьма похожа на схему рис. 2.2.

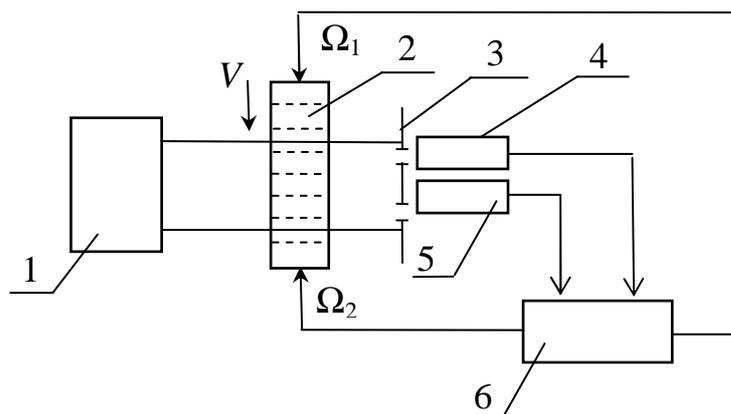


Рис. 2.4. Схема акустооптического измерителя скорости движения жидкости и скорости звука в ней. Дифракция Френеля

1 – осветитель; 2 – акустооптическая ячейка; 3 – диафрагма с двумя отверстиями, 4, 5 – фотоприемные блоки; 6 – блок управления и обработки сигналов

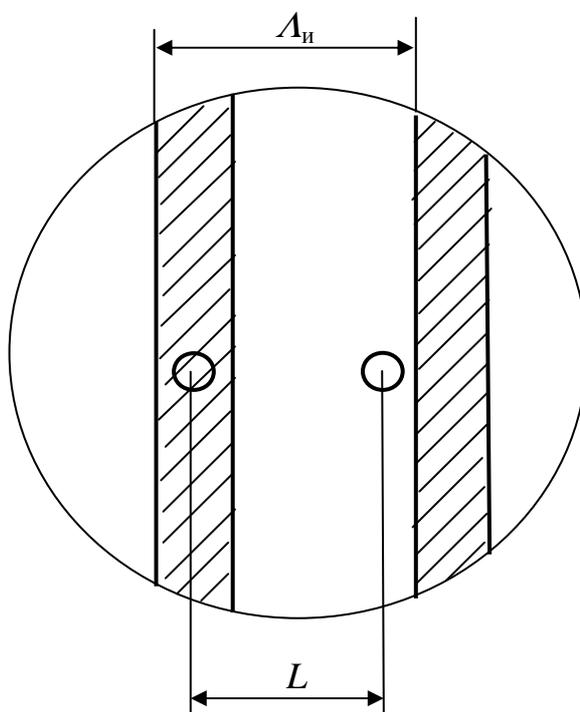


Рис. 2.5. Вид плоскости регистрации

Световой пучок, формируемый осветителем 1, проходит через акустооптическую ячейку и попадает на диафрагму 3, снабженную двумя

отверстиями, разнесенными на расстояние  $L$  (рис. 2.5). В акустооптической ячейке 2 возбуждаются одна акустическая волна с частотой  $\Omega_1 = \Omega$ , или две волны с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , бегущие навстречу друг другу. Световые пучки различных порядков дифракции (в зоне Френеля) интерферируют между собой, формируя в результате соответствующие полосы шириной (периодом)  $\Lambda_n$  (рис. 2.5). Свет, прошедший через отверстия диафрагмы 3, попадает на фотоприемные блоки 4 и 5, подсоединенные к блоку 6 управления и обработки сигналов. Жидкость в акустооптической ячейке движется со скоростью  $V$  в направлении, указанном стрелкой на рисунке.

В схеме рис. 2.5 на фотоприемные блоки 4 и 5 попадает свет от различных участков поперечного сечения светового пучка. В то же время, на схеме рис. 2.2 на один фотоприемный блок попадает свет одного из световых пучков, а на второй блок – от второго пучка.

Итак, по аналогии с результатами для схемы 2.5 аналогичны результатам, представленным выше для схемы рис. 2.2. В частности, для случая одной акустической волны имеем следующее.

Нижний предел  $V_{\min}$  измерений по скорости жидкости  $V_{\min} \leq 10^0$  мм/с; верхний предел  $V_{\max} \geq 10^1$  м/с;  $\delta C/C \approx 10^{-5}$ .

Следует отметить, при дифракции Френеля возможно проведение измерений при регистрации интенсивности в двух точках, пространственное разнесение которых заведомо меньше диаметра светового пучка. При этом область усреднения определяется диаметром светового пучка, так что сами измерения в определенной мере можно считать «точечными». При измерениях для случая дифракции Фраунгофера пространственное разнесение точек регистрации существенно превышает диаметр пучка [23], соответственно, возрастает и область усреднения полученных результатов.

### 3. Дифракция электромагнитных волн на поверхностных волнах

#### 3.1. Эффект Доплера для капиллярно-гравитационных волн

Волны на свободной поверхности жидкости (на границе двух не смешивающихся жидкостей) существенно отличаются от акустических волн, как объемных, так и поверхностных [12, 31, 52]. Одно из важных отличий – наличие дисперсии – зависимости скорости волны от частоты. Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\Omega^2 = (\sigma/\rho)K^3 + gK, \quad (3.1)$$

где  $\Omega$  - частота волн;  $\sigma$  и  $\rho$  - коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $K$  – волновое число,  $K = 2\pi/\Lambda$ ,  $\Lambda$  - длина волны.

Волны, описываемые (3.1), называют капиллярно-гравитационными (гравитационно-капиллярными).

Фазовая скорость  $C$  волны (3.1) определяется соотношением:

$$C = \frac{\Omega}{K} = \sqrt{(\sigma/\rho)K + g/K}. \quad (3.2)$$

То есть,  $C = C(K)$ , или, с учетом (3.1),  $C = C(\Omega)$ . В отсутствие дисперсии, например, для акустических волн, имеет место линейная зависимость между частотой и волновым числом:  $\Omega = CK$ , где коэффициент пропорциональности  $C$  есть фазовая скорость волны, не зависящая ни от  $\Omega$ , ни от  $K$ .

Из (3.2) следует, что скорость  $C(K)$  имеет минимум  $C_{\min}$  при  $K^2 = (\rho g/\sigma)$ ,  $C_{\min}^2 = 2\sqrt{(\sigma g)/\rho}$ . В данном случае одинаков вклад в  $C(K)$  как «капиллярной», так и «гравитационной» составляющих:  $(\sigma/\rho)K = g/K$ . В частности, для воды  $C_{\min} \approx 23$  см/с при  $K \approx 3,85$  см<sup>-1</sup> ( $\Lambda \approx 1,63$  см);  $\Omega \approx 87$  с<sup>-1</sup> ( $\Omega/(2\pi) \approx 14$  Гц).

Отметим, что величина  $\sqrt{\sigma/\rho g} \equiv r_0$ , называемая капиллярной постоянной, имеет размерность длины. Для воды  $r_0 \approx 0,26$  см.

Пусть для некоторой известной частоты  $\Omega_0$  волны заданы соответствующие значения  $K_0$  и  $C_0$  – волнового числа и скорости волны, причем  $\Omega_0 = C_0 K_0$ . Тогда (3.1) можно записать в «нормированном» виде:

$$\Omega/\Omega_0 = \sqrt{\frac{b(K/K_0)^3 + (K/K_0)}{b+1}},$$

где  $b \equiv (r_0 K_0)^2 = (\sigma/\rho g) K_0^2$ .

На рис. 3.1 представлен график дисперсионного соотношения для капиллярно-гравитационных волн (3.1) для случая  $b = 1$ , когда  $C(K_0) = C_{\min}$ . Штрих-пунктирной линией обозначена зависимость при отсутствии дисперсии:  $\Omega/\Omega_0 = K/K_0$ . Тогда, как легко видеть,  $\Omega/K = \Omega_0/K_0 = C = C_0$ .

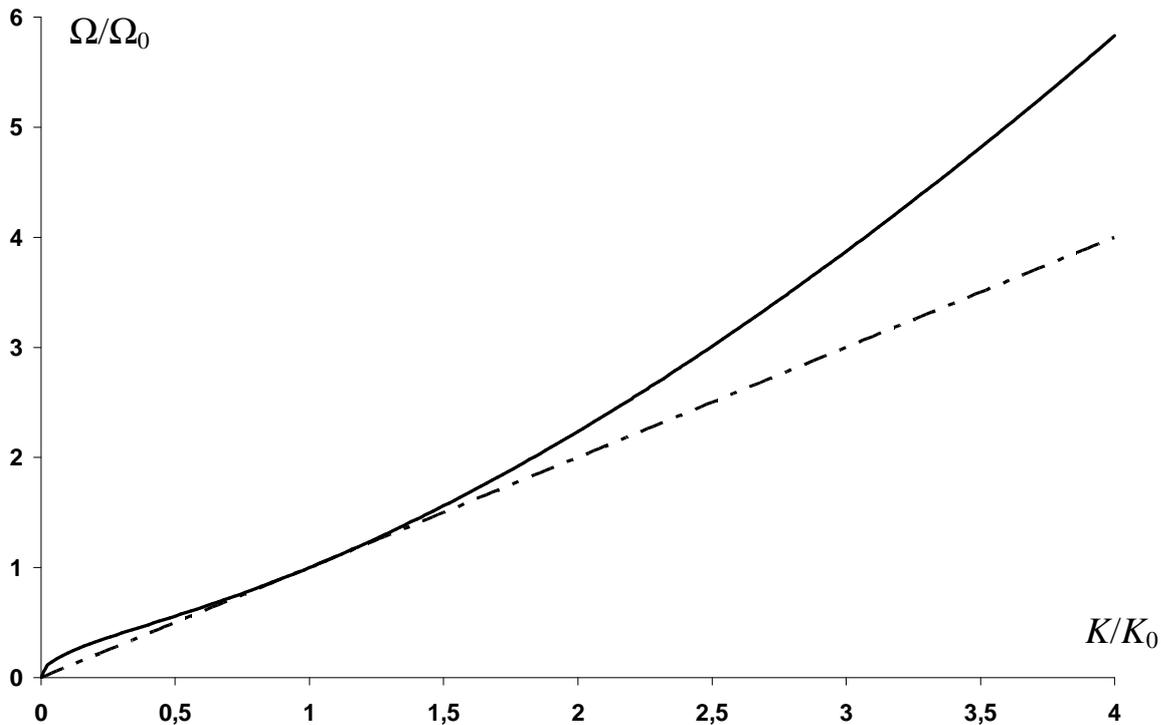


Рис. 3.1. График дисперсионного соотношения для капиллярно-гравитационных волн

Видно, что в рассматриваемом случае  $\Omega/\Omega_0 \geq K/K_0$ . С увеличением  $K/K_0$  (для  $K/K_0 > 1$ ) заметно увеличивается и величина  $C/C_0$ , представляющая собой отношение  $(\Omega/\Omega_0)/(K/K_0)$ .

Капиллярные силы заведомо больше сил гравитации в случае достаточно коротких волн:  $K^2 \gg \rho g / \sigma$ . Тогда (3.1) переходит в соотношение для капиллярных волн:

$$\Omega^2 = (\sigma / \rho) K^3. \quad (3.3)$$

Влиянием капиллярности можно пренебречь в случае достаточно длинных волн:  $K^2 \ll \rho g / \sigma$ . Тогда (3.1) описывает чисто гравитационные волны:

$$\Omega^2 = gK. \quad (3.4)$$

Для капиллярных волн (3.3) получим:

$$C = \sqrt{(\sigma / \rho) K} = \sqrt[3]{(\sigma / \rho) \Omega}.$$

Для гравитационных волн (3.4) получим:

$$C = \sqrt{g / K} = g / \Omega.$$

Выше глубина водоема считалась достаточно большой для того, чтобы можно ею можно было пренебречь (случай «глубокой воды»). Для водоема конечной глубины  $H$  ситуация иная. В этом случае вместо дисперсионного соотношения (3.1) следует использовать более общее соотношение:

$$\Omega^2 = [(\sigma / \rho) K^3 + gK] \operatorname{th}(KH). \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что (3.5) переходит в (3.1) в случае не слишком длинных волн, таких, что  $KH \gg 1$ . Это условие и является условием «глубокой воды». В то же время, для «длинных» волн ( $KH \ll 1$ ) получим:

$$\Omega^2 = (\sigma / \rho) HK^4 + gHK^2. \quad (3.6)$$

Фазовая скорость  $C$  волны (3.5) определяется соотношением:

$$C = \frac{\Omega}{K} = \sqrt{[(\sigma / \rho) K + gK] \operatorname{th}(KH)}. \quad (3.7)$$

Если  $KH \gg 1$ , то (3.7) переходит в (3.2). Если же  $KH \ll 1$ , то

$$C = \sqrt{[(\sigma / \rho) HK^2 + gH]}.$$

В частности, для длинных гравитационных волн ( $K^2 \ll \rho g / \sigma$ ) дисперсия фазовой скорости отсутствует:  $C = \sqrt{gH}$ .

Выше рассматривалась одна гармоническая волна с некоторой частотой  $\Omega$ . Перейдем теперь к случаю двух волн с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , бегущих в одном направлении, причем  $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \ll \Omega_1, \Omega_2$ .

В данном случае в результате суперпозиции волн возникают, как говорят в теории колебаний, биения частоты. При этом возникает составляющая вида  $\cos(\Delta\Omega t - \Delta K x)$ , где  $\Delta K = K_1 - K_2$ ;  $K_1, K_2$  – волновые числа, соответствующие частотам  $\Omega_1, \Omega_2$  в соответствии с (3.1).

Скорость распространения этой составляющей определяется отношением  $\Delta\Omega / \Delta K$ . В пределе, при  $\Delta\Omega, \Delta K \rightarrow 0$  мы получим выражение для групповой скорости  $C_{гр} = d\Omega / dK$ . При этом фазовая скорость  $C = C_{ф} = \Omega / K$  определяется (3.2).

Учтем, что  $\Omega = KC$ , тогда для групповой скорости получим:

$$C_{гр} = C + K(dC/dK) = \sqrt{(\sigma/\rho)K + g/K} + \frac{(\sigma/\rho)K - g/K}{2\sqrt{(\sigma/\rho)K + g/K}} = C + \sqrt{\frac{g}{K} \frac{b_k - 1}{2\sqrt{b_k + 1}}}.$$

Здесь  $b_k = (\sigma/\rho g)K^2$ .

Если  $b_k \gg 1$ , то  $C_{гр} \approx (3/2)C \approx (3/2)\sqrt{(\sigma/\rho)K}$ .

Если  $b_k \ll 1$ , то  $C_{гр} \approx (1/2)C \approx (3/2)\sqrt{g/K}$ .

Наконец, пусть  $b_k = 1$ , то есть,  $(\sigma/\rho)K = g/K$ . Тогда  $1/K^2 = \sigma/(\rho g) = r_0^2$ , где  $r_0$  – капиллярная постоянная. В этом случае  $C_{гр} = C$ , то есть, групповая и фазовая скорости совпадают, причем, как показано выше, фазовая скорость  $C(K)$  имеет минимум  $C_{\min} = [2\sqrt{(\sigma g)/\rho}]^{1/2}$ .

Одна из важных характеристик - коэффициент  $\gamma$  затухания капиллярно-гравитационных волн. Этот коэффициент характеризует скорость убывания

амплитуды волны со временем  $t$  по закону  $e^{-\gamma t}$ . Величина  $\gamma$  определяется соотношением:

$$\gamma = 2\nu K^2, \quad (3.8)$$

где  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости,  $\nu = \eta/\rho$ ,  $\eta$  - динамическая вязкость. Для воды при нормальных условиях  $\nu \approx 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с} = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ;  $\eta \approx 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

Видно, что  $\gamma$  возрастает с уменьшением длины волны (с увеличением  $K$ ).

Для капиллярных волн на глубокой воде имеем:

$$\gamma = 2\nu \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3} \Omega^{4/3}. \quad (3.9)$$

Для гравитационных волн на глубокой воде получим:

$$\gamma = \frac{2\nu\Omega^4}{g^2}.$$

Анализ общего случая соотношений (3.5), (3.7) представляется достаточно громоздким, поэтому для выяснения особенностей дифракции света на капиллярно-гравитационных волнах мы ограничимся лишь случаем  $KN \gg 1$ , соответствующим «глубокой воде».

Рассмотрим теперь эффект Доплера с учетом дисперсионного соотношения (3.1).

Пусть волны от неподвижного источника характеризуются «собственной» частотой  $\Omega_0$ . Соответственно,  $K_0$  и  $C_0$  – волновое число и скорость волны, соответствующие неподвижному источнику (и приемнику).

Положим теперь, что этот источник движется с некоторой скоростью  $V$  относительно жидкости. Тогда за счет эффекта Доплера изменяется волновой вектор  $K$  (изменяется длина волны  $\Lambda = 2\pi/K$ ), причем

$$K = \Omega_0/(C - V) = K_0 C_0/(C - V) = \frac{K_0}{C/C_0 - V/C_0}.$$

Здесь  $C$  есть скорость волны относительно жидкости, тогда как  $C - V$  есть скорость волны относительно источника. Мы рассматриваем одномерную

задачу: направление скорости  $V$  совпадает с направлением распространения волны ( $V > 0$ ) или же противоположно последнему ( $V < 0$ ). Итак,

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{C/C_0 - V/C_0}. \quad (3.10)$$

Для частоты  $\Omega$  волны от движущегося источника, распространяющейся в жидкости (и регистрируемой неподвижным приемником), получим:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{KC}{K_0C_0} = \frac{C/C_0}{C/C_0 - V/C_0} = \frac{1}{1 - V/C}. \quad (3.11)$$

Если дисперсии нет ( $C/C_0 = 1$ ), то получаем очевидный результат:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{K}{K_0} = \frac{1}{1 - V/C_0}.$$

Однако, для рассматриваемых капиллярно-гравитационных волн, в отличие от акустических волн, дисперсией пренебречь нельзя. Поэтому в этом случае, для так называемого сложного эффекта Доплера, соотношение (3.10) есть уравнение относительно  $K$ , которое в общем случае может иметь несколько решений.

Далее, представим (3.2) в виде:

$$C = \sqrt{(\sigma/\rho)K + g/K} = \sqrt{(g/K)[(\sigma/\rho g)K^2 + 1]} = \sqrt{(g/K)(r_0^2 K^2 + 1)},$$

где  $r_0 = \sqrt{\sigma/\rho g}$  - капиллярная постоянная.

Тогда получим:

$$C/C_0 = \sqrt{\frac{K_0 (r_0^2 K^2 + 1)}{K (r_0^2 K_0^2 + 1)}} = \sqrt{\frac{1 (by^2 + 1)}{y (b+1)}} = \frac{K_0}{K} + \frac{V}{C_0} = \frac{1}{y} + a. \text{ То есть,}$$

$$\sqrt{\frac{1 (by^2 + 1)}{y (b+1)}} = \frac{1}{y} + a,$$

где приняты обозначения:  $K/K_0 \equiv y$ ;  $b \equiv (r_0 K_0)^2 = (\sigma/\rho g)K_0^2$ ;  $V/C_0 \equiv a$ . Отсюда следует кубическое уравнение относительно  $y$ :

$$by^3 - (b+1)a^2 y^2 + [1 - 2a(b+1)]y - (b+1) = 0. \quad (3.12)$$

Видно, что если  $a = 0$ , то уравнению (3.12) удовлетворяет решение  $y = 1$ . Это уравнение является кубическим, то есть, в общем случае имеет три корня. Детальное рассмотрение решения (3.12) выходит за рамки данной работы, поэтому в дальнейшем мы ограничимся учетом только одного действительного корня.

На рис. 3.2 представлены графики зависимостей  $y(a) = K(a)/K_0$ ;  $1/y + a = C(a)/C_0$ ;  $(K/K_0)(C/C_0) = 1 + ay = \Omega(a)/\Omega_0$  для «больших» волновых чисел - при  $b = (\sigma/\rho g)K_0^2 = 10$ . Для воды при этом  $K_0 \approx 12 \text{ см}^{-1}$ ;  $\Lambda_0 \approx 0,5 \text{ см}$ .

Тогда (3.12) имеет вид:  $10y^3 - 11a^2 y^2 + (1 - 22a)y - 11 = 0$ .

Напомним, что  $a > 0$ , когда направление скорости  $V$  совпадает с направлением распространения волны ( $V > 0$ ). При этом  $\Omega = \Omega_0/(1 - V/C)$ . Если же направление скорости  $V$  противоположно направлению распространения волны ( $V < 0$ ), то и  $a < 0$ . При этом  $\Omega = \Omega_0/(1 + V/C)$ .

На рис. 3.3 представлены графики тех же зависимостей  $K(a)/K_0$ ;  $C(a)/C_0$ ;  $\Omega(a)/\Omega_0$  для «средних» волновых чисел - при  $b = 1$ . Для воды это означает, что  $K_0 \approx 3,85 \text{ см}^{-1}$ ;  $\Lambda_0 \approx 1,6 \text{ см}$ . Тогда (3.12) имеет вид:  $y^3 - 2a^2 y^2 + (1 - 4a)y - 2 = 0$ .

На рис. 3.4 представлены графики тех же зависимостей  $K(a)/K_0$ ;  $C(a)/C_0$ ;  $\Omega(a)/\Omega_0$  для «малых» волновых чисел - при  $b = 0,1$ . Для воды это означает, что  $K_0 \approx 1,2 \text{ см}^{-1}$ ;  $\Lambda_0 \approx 5,2 \text{ см}$ .

В этом случае (3.12) имеет вид:  $y^3 - 11a^2 y^2 + (10 - 22a)y - 11 = 0$ .

Напомним, что для волн без дисперсии графики зависимости частоты и волнового числа от скорости движения источника имеют одинаковый вид гиперболы:  $\Omega/\Omega_0 = K/K_0 = 1/(1 - a)$ . То есть, в этом случае имеется разрыв второго рода в точке  $a = 1$  ( $V = C = C_0$ ). В этой же точке происходит изменение фазы волны на  $\pi$ , что формально описывается изменением знака  $\Omega$ ;  $K$  на противоположный.

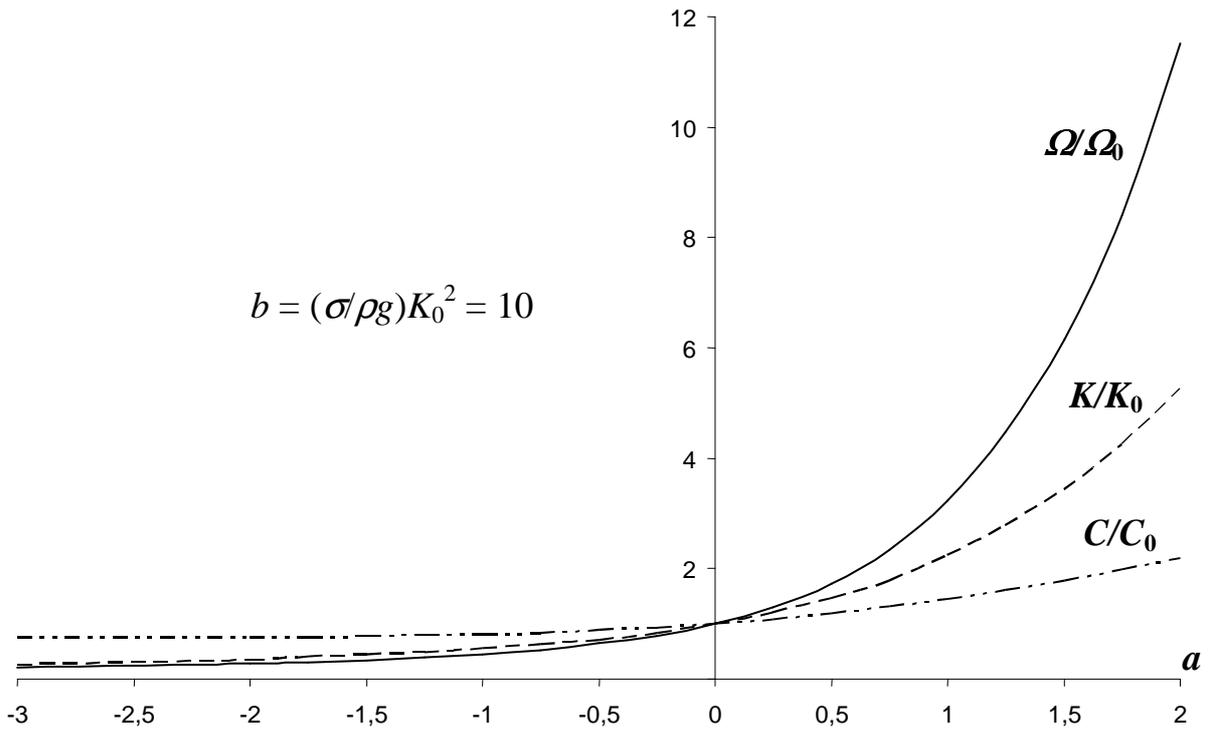


Рис.3.2. Эффект Доплера для капиллярно-гравитационных волн.

«Большие» волновые числа

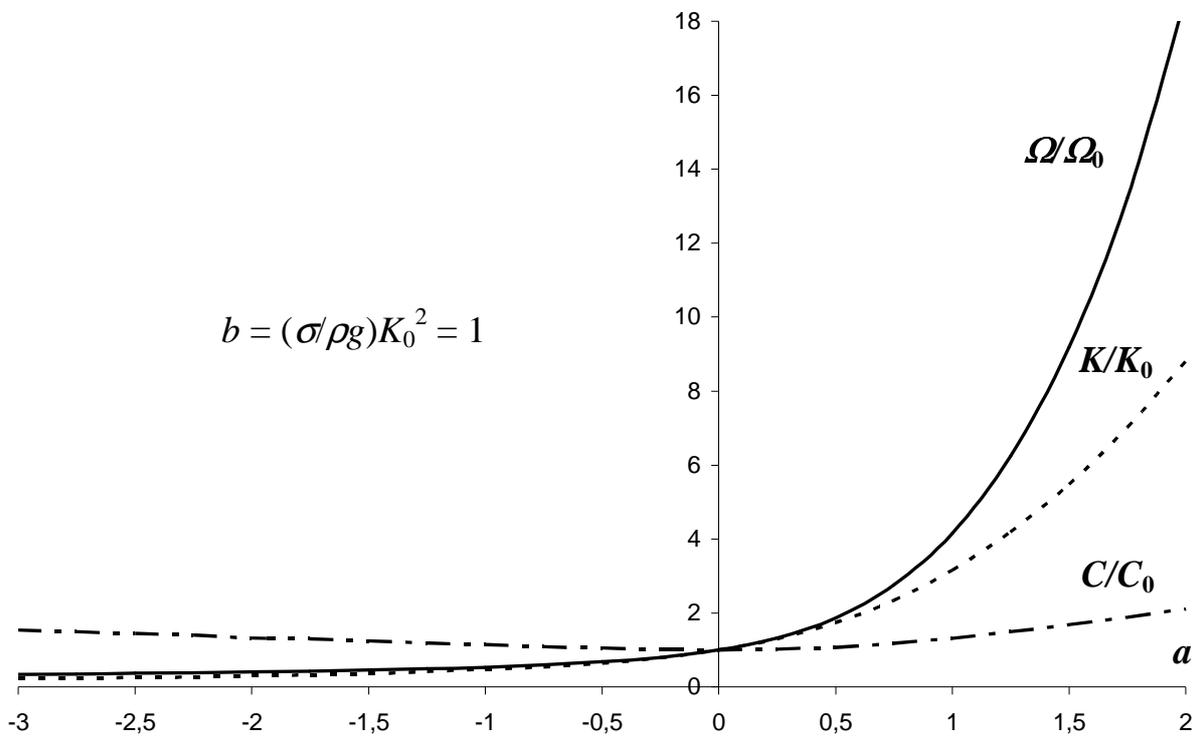


Рис.3.3. Эффект Доплера для капиллярно-гравитационных волн.

«Средние» волновые числа

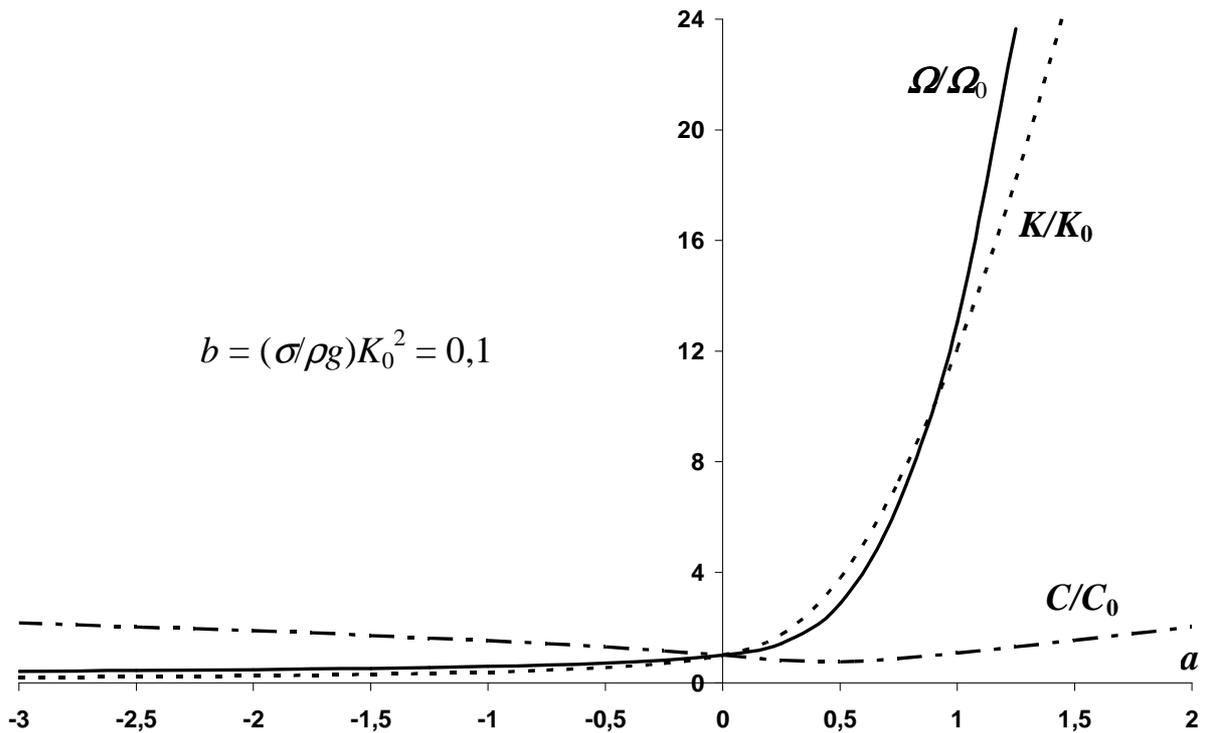


Рис.3.4. Эффект Доплера для капиллярно-гравитационных волн.

«Малые» волновые числа

Для капиллярно-гравитационных волн зависимости  $K(a)/K_0$ ;  $\Omega(a)/\Omega_0$  являются непрерывными и монотонно возрастающими (рис. 3.2-3.4), причем во всех случаях  $\Omega/\Omega_0$ ;  $K/K_0 > a$ . При этом для одних значений  $a$ ,  $b$  имеет место соотношение  $\Omega(a)/\Omega_0 > K(a)/K_0$ , тогда как для других значений – наоборот,  $\Omega(a)/\Omega_0 < K(a)/K_0$ . Если  $b = 10$  (рис. 3.2), то  $\Omega(a)/\Omega_0 > K(a)/K_0$  лишь при  $a > 0$ ; если  $b = 1$  (рис. 3.3), то  $\Omega(a)/\Omega_0 > K(a)/K_0$  при всех  $a$ . Если же  $b = 0,1$  (рис. 3.4), то  $\Omega(a)/\Omega_0 > K(a)/K_0$  при  $a < 0$  и при  $a > 0,89$ . В интервале  $0 < a < 0,89$  имеем:  $\Omega(a)/\Omega_0 < K(a)/K_0$ . При этом  $\Omega(a)/\Omega_0 = K(a)/K_0$  при  $a = 0$ ;  $a = 0,89$ .

Фазовая скорость  $C(K)$  капиллярно-гравитационных волн, определяемая (3.2), имеет минимум при  $K^2 = (\rho g/\sigma)$ , причем  $C_{\min}^2 = 2\sqrt{(\sigma g)/\rho}$ . В то же время,  $K = K(a)$ , поэтому зависимость  $C(a)/C_0$  может быть немонотонной, как и зависимость  $C(K)$ .

Представим (3.2) в виде:

$$C = \sqrt{(\sigma/\rho)K + g/K} = \sqrt{(g/K)(b_k + 1)},$$

где  $b_k = (\sigma/\rho g)K^2$ .

Если  $a = 0$ , то  $K = K_0$ ;  $b_k = b = (\sigma/\rho g)K_0^2$ ;  $C = C_0$ . Далее, нетрудно видеть, что  $K_0^2 = b(\rho g/\sigma)$ ;  $C_0^2 = \sqrt{(\sigma g/\rho)}(1 + b)/\sqrt{b}$ ;  $(C_{\min}/C_0)^2 = 2\sqrt{b}/(1 + b)$ . В частности, если  $b = 1$ , то  $C_0 = C_{\min}$ .

Итак, в случае  $b = 1$  выполняется условие  $K_0^2 = (\rho g/\sigma)$ , где  $K_0 = K(a = 0)$ . Поскольку  $K(a)$  монотонно изменяется с изменением  $a$ , то любое отклонение  $a$  от нулевого значения приведет к нарушению условия  $K^2 = (\rho g/\sigma)$ , то есть, приведет к увеличению  $C(a)$ .

Таким образом, для случая  $b = 1$  (рис. 3.3) зависимость  $C(a)/C_0$  имеет минимум при  $a = 0$ , причем  $C(0)/C_0 = 1$ .

Если же  $b > 1$ , то  $K_0^2 > (\rho g/\sigma)$ . В этом случае  $C_0 > C_{\min}$ . Тогда отклонение  $a$  от нулевого значения в сторону увеличения приведет к увеличению  $K$  и, следовательно, к увеличению  $C(a)/C_0$ . Отклонение  $a$  от нулевого значения в сторону уменьшения приведет к уменьшению  $K$  и, следовательно, к уменьшению  $C(a)$  в сторону приближения к  $C_{\min}$ .

Пусть для некоторого значения  $a$  ( $a < 0$ ) имеет место соотношение  $b_k = 1$ , то есть,  $C(a) = C_{\min}$ . Тогда  $b_k/b = (K/K_0)^2$ , то есть,  $K/K_0 = 1/\sqrt{b}$ . При этом, как отмечалось выше,  $(C_{\min}/C_0)^2 = 2\sqrt{b}/(1 + b)$ .

Для  $b = 10$  (рис. 3.2) минимум зависимости  $C(a)/C_0$  достигается при  $a \approx -2$ . В этом случае  $K/K_0 \approx 0,32$ ;  $C(a)/C_0 \approx 0,76$ .

Если же  $b < 1$ , то  $K_0^2 < (\rho g/\sigma)$ , однако по-прежнему  $C_0 > C_{\min}$ . Тогда отклонение  $a$  от нулевого значения в сторону увеличения приведет к уменьшению  $K$  и, следовательно, к уменьшению  $C(a)$  в сторону приближения к  $C_{\min}$ . Отклонение  $a$  от нулевого значения в сторону уменьшения приведет к увеличению  $K$  и, следовательно, к увеличению  $C(a)/C_0$ .

Для  $b = 0,1$  (рис. 3.4) минимум зависимости  $C(a)/C_0$  достигается при  $a \approx 0,5$ . В этом случае  $K/K_0 \approx 0,32$ ;  $C(a)/C_0 \approx 0,76$ .

Рассмотрим теперь некоторые приближения.

Для капиллярных волн, как нетрудно видеть,  $b \gg 1$ . Тогда, полагая, что и

$$by^2 \gg 1, \text{ получим: } \sqrt{\frac{1 (by^2 + 1)}{y (b+1)}} \approx \sqrt{y}.$$

Условие  $by^2 \gg 1$  предполагает, что  $y^2$  не является очень малой величиной, то есть, не должно быть малой величиной и  $a$ . По аналогии с графиками рис. 3.2, для оценок можно положить, что  $a \geq -10^0$ .

В этом случае вместо (3.12) можно записать:

$$x^3 - ax^2 - 1 = 0, \quad (3.13)$$

где приняты обозначения:  $y^{1/2} = (K/K_0)^{1/2} \equiv x$ ,  $V/C_0 \equiv a$ . При этом, как нетрудно видеть,  $\Omega/\Omega_0 = x^3$ ,  $C/C_0 = x$ .

Если  $(a/3)^3 + 1/4 > 0$ , то (3.13) имеет один действительный корень и два комплексно-сопряженных корня. При этом действительное решение имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{(a/3)^3 + 1/2 + \sqrt{(a/3)^3 + 1/4}} + \sqrt[3]{(a/3)^3 + 1/2 - \sqrt{(a/3)^3 + 1/4}} + a/3. \quad (3.14)$$

Если же  $(a/3)^3 + 1/4 < 0$ , то имеется три различных действительных корня. Наконец, если  $(a/3)^3 + 1/4 = 0$  ( $a = -3/4^{1/3} = -1,89$ ), то имеются два различных действительных корня (точнее говоря, имеется три корня, два из которых совпадают).

Если  $(a/3)^3 \ll 1/4$ , то (3.14) можно упростить:

$$x \approx \sqrt[3]{2(a/3)^3 + 1} + a/3 \approx 1 + (2/3)(a/3)^3 + a/3 \approx 1 + a/3 = C/C_0.$$

Тогда  $\Omega/\Omega_0 = x^3 \approx 1 + a = 1 + V/C_0$ . То есть, при  $a \ll 1$  сдвиг частоты имеет примерно такой же вид, как и в случае отсутствия дисперсии:  $\Omega/\Omega_0 \approx 1 + V/C_0$ , причем  $C/C_0 - 1 = a/3 \ll 1$ .

Если  $(a/3)^3 \gg 1/4$ , то (3.14) примет вид:

$$x \approx \sqrt[3]{(a/3)^3 + (a/3)^{3/2}} + \sqrt[3]{(a/3)^3 - (a/3)^{3/2}} + a/3 \approx a = V/C_0.$$

То есть,  $\Omega/\Omega_0 \approx (V/C_0)^3$ ;  $C/C_0 \approx V/C_0$  ( $C \approx V$ ).

Выше рассматривались капиллярные волны. Перейдем теперь к гравитационным волнам, для которых обычно  $b \ll 1$ . Тогда, полагая, что и  $by^2 \ll 1$ , получим:

$$\sqrt{\frac{1 (by^2 + 1)}{y (b+1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Условие  $by^2 \ll 1$  предполагает, что  $y^2$  не должно быть большой величиной, то есть, не должно быть большой величиной и  $a$ . По аналогии с графиками рис. 3.4, для оценок можно положить, что  $a \leq 10^{-1}$ .

В этом случае вместо (3.12) можно записать:

$$a^2 y^2 - (1 - 2a)y + 1 = 0, \quad (3.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y_{1,2} = (1 - 2a \pm \sqrt{1 - 4a}) / (2a^2)$$

Видно, что действительные корни имеются лишь при  $a \leq 1/4$ . В частности,  $y_{1,2}(a = 1/4) = 4$ .

В противном случае, если  $a > 1/4$ , то уравнение (3.15) является излишне упрощенным и не соответствует действительности. По сути, в данном случае особый интерес могут представлять лишь малые значения  $a$ . Так, если  $a \ll 1$ , то  $y \approx 1 + 2a$ ;  $K/K_0 \approx 1 + 2V/C_0$ . Здесь учтено, что  $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16$ .

Рассмотрим теперь случай  $a \ll 1$  для общего соотношения 3.12. Найдем производную функции  $y = y(a)$  в точке  $a = 0$ ;  $y = 1$ :

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{2(b+1)y(1+ay)}{3by^2 - 2(b+1)a^2y + 1 - 2a(b+1)}.$$

Тогда в окрестности точки  $(a = 0; y = 1)$  получим:

$$\frac{K}{K_0} \approx 1 + \frac{2(b+1)}{3b+1}a; \quad \frac{\Omega}{\Omega_0} \approx 1 + a; \quad \frac{C}{C_0} \approx 1 + \frac{b-1}{3b+1}a. \quad (3.16)$$

Нетрудно видеть, что при этом имеют место следующие соотношения (отчетливо проявляющиеся на рис. 3.2-3.4):

если  $b < 1$ , то  $\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{K_0} \right) > \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)$ ;  $\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{C}{C_0} \right) < 0$ ;

если же  $b \geq 1$ , то  $\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{K}{K_0} \right) \leq \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)$ ;  $\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{C}{C_0} \right) \geq 0$ .

В частности, отсюда следует, что для  $b < 1$  минимум  $C/C_0$  достигается при  $a > 0$ ; а для  $b > 1$  - при  $a < 0$ . То есть, соответствующие особенности зависимости  $C(a)/C_0$  (рис. 3.2-3.4) имеют общий характер.

Итак, дисперсия капиллярно-гравитационных волн качественно меняет проявления эффекта Доплера по сравнению с волнами без дисперсии.

Выше рассматривался случай движения источника волны, приемник же полагался неподвижным относительно среды. Перейдем теперь к случаю движения приемника, полагая источник неподвижным.

Пусть, как полагалось выше, волны от источника характеризуются некоторой частотой  $\Omega_{и}$ . Соответственно,  $K_{и}$  и  $C$  – соответствующие волновое число и скорость волны,  $\Omega_{и} = K_{и}C$ .

Положим теперь, что приемник волн движется относительно жидкости со скоростью  $V_{п}$ . Тогда изменяется частота  $\Omega$  волны, регистрируемая приемником:

$$\Omega = K_{и}(C - V_{п}) = (\Omega_{и}/C)(C - V_{п});$$

$$\Omega/\Omega_{и} = \frac{C/C_0 - V_{п}/C_0}{C/C_0} = 1 - V_{п}/C.$$

Для неподвижного источника имеем:  $\Omega_{и} = \Omega_0$ ,  $K_{и} = K_0$ ,  $C = C_0$ . Тогда получим очевидный результат:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{K}{K_0} = 1 - V_{п}/C_0.$$

Отметим, что этот результат не связан с наличием или отсутствием дисперсии, поскольку на характеристики собственно волны движение приемника никак не влияет, в отличие от движения источника.

Если же источник движется со скоростью  $V_{и}$ , то, в соответствии с (3.11),

$$\frac{\Omega_u}{\Omega_0} = \frac{C/C_0}{C/C_0 - V_u/C_0} = \frac{1}{1 - V_u/C};$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{1 - V_n/C}{1 - V_u/C}. \quad (3.17)$$

При наличии дисперсии (3.17) скорость  $C \neq C_0$ , поэтому соотношение (3.17), по сути, является уравнением для определения частоты  $\Omega$  или же волнового вектора  $K$ .

Нетрудно видеть, что если  $V_n = V_u$ , то  $\Omega = \Omega_0$ . То есть, если источник и приемник неподвижны относительно друг друга, то отсутствует сдвиг частоты приемника относительно частоты источника, даже и при наличии дисперсии. При этом, однако, имеет место изменение волнового вектора,  $K \neq K_0$ .

С практической точки зрения особый интерес представляет движение жидкости относительно неподвижных источника и приемника. Этот случай можно рассматривать как случай движения источника и приемника с одинаковой скоростью относительно жидкости. Очевидно, направление формального движения источника и приемника будет противоположным направлению реального движения жидкости.

### 3.2. Дифракция света на капиллярных волнах

Если на поверхности исследуемой жидкости возбудить капиллярные волны, то по измеренным параметрам этих волн - частоте  $\Omega$ , волновому числу  $K$ , амплитуде  $W$  - можно сделать определенные выводы о характеристиках поверхностного слоя жидкости [29]. В частности, таковыми характеристиками могут быть капиллярная постоянная  $r_0 = \sqrt{\sigma / \rho g}$ , коэффициент затухания волн  $\gamma = 2(\eta / \rho)K^2$ , скорость  $V_{\text{ж}}$  движения поверхностного слоя жидкости. Здесь  $\sigma$  и  $\rho$  - коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости;  $g$  - ускорение силы тяжести;  $\eta$  - динамическая вязкость жидкости.

В свою очередь, коэффициент  $\sigma$  поверхностного натяжения существенно зависит от физико-химических свойств жидкости. В частности, измерение поверхностного натяжения водных растворов поверхностно-активных веществ является одним из наиболее чувствительных методов определения концентрации этих веществ в растворах. В ряде случаев чувствительность таких измерений сравнима по чувствительности с измерениями радиохимическими методами. Это обстоятельство дает широкие возможности для оперативного контроля свойств жидкостей (свойств, влияющих на  $\sigma/\rho$ ), поскольку соответствующий измеритель, в определенном смысле являясь бесконтактным, мог бы легко «встраиваться» в различные технологические процессы. Особый интерес представляют вопросы экологии (контроль воды на содержание поверхностно-активных веществ), вопросы исследования свойств различных растворов, вопросы контроля токсичных жидкостей, расплавленных металлов, и т.д.

Важной характеристикой любой жидкости является ее вязкость. С одной стороны, эта вязкость зависит от температуры. В частности, для воды при температуре  $10^{\circ}\text{C}$  кинематическая вязкость  $\nu = 1,3037 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ; при температуре же  $20^{\circ}\text{C}$  вязкость заметно ниже:  $\nu = 1,0019 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ . Напомним, что кинематическая вязкость жидкости  $\nu$  связана с динамической вязкостью  $\eta$ :

$\nu = \eta/\rho$ . С другой стороны, вязкость растворов зависит от концентрации растворенных веществ.

В связи с этим, оценка вязкости жидкостей представляет значительный технический интерес для многих практических задач.

Еще в XIX в. было известно, что «если по какой-то причине существует перепад поверхностного натяжения вдоль свободной поверхности жидкости, то жидкость будет перемещаться в направлении более высокого поверхностного натяжения». В свою очередь, перепад поверхностного натяжения может быть вызван градиентами температуры жидкости или концентрации примесей. Во всех этих случаях могут развиваться гидродинамические течения, оказывая определенное влияние на процессы тепломассопереноса в жидкостях.

Таким образом, контроль движения поверхностного слоя жидкости, обусловленный, в частности, капиллярной (термокапиллярной) конвекцией, важен для многих технологических задач [14, 16].

### 3.2.1. Определение коэффициента поверхностного натяжения

Одна из возможных схем для измерения параметров поверхностного слоя жидкости представлена на рис. 3.5.

На свободной поверхности исследуемой жидкости 2 источник 3 возбуждает капиллярно-гравитационную волну 4 с частотой  $\Omega_0$ , задаваемой генератором 5. Источник света (лазер) 6 и светоделительная призма 7 формируют два параллельных световых пучка, разнесенных на расстояние  $L$ . После отражения от поверхности жидкости световые пучки попадают на фотоприемные блоки 8 и 9, подсоединенные к блоку 10 обработки сигналов (реализуется дифракция Фраунгофера). Световой пучок, прошедший через призму 7 «насквозь», задерживается светоловушкой 11. Поверхностный слой жидкости в сосуде движется со скоростью  $V$  в направлении, указанном стрелкой на рисунке.

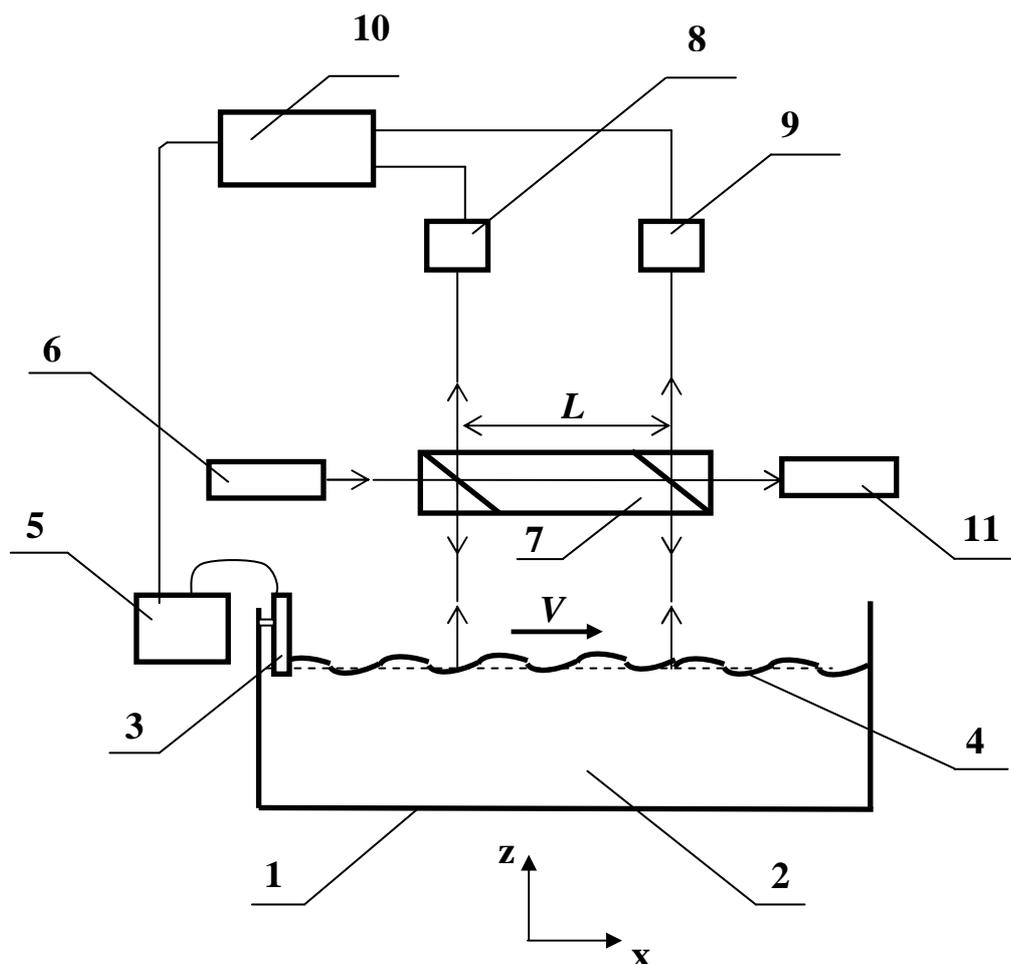


Рис. 3.5. Схема опико-электронного измерителя параметров поверхностного слоя жидкости

1 - сосуд; 2 - исследуемая жидкость; 3 – источник волн; 4 – капиллярно-гравитационная волна; 5 – генератор электрических колебаний; 6 - источник света; 7 – призма; 8 и 9 – фотоприемные блоки; 10 - блок обработки сигналов; 11 – светоловушка.

Как и следовало ожидать, схема рис. 3.5 сходна со схемой рис. 2.2. В то же время, если схема рис. 2.2 «работает на просвет», то схема рис. 3.5 «работает на отражение». В этом случае возможно исследование и непрозрачных сред, например, жидких металлов.

Другое важное отличие дифракции света на капиллярно-гравитационных волнах от дифракции на объемных акустических (ультразвуковых) волнах состоит в том, что скорость представляющих интерес капиллярно-

гравитационных волн на несколько порядков ниже скорости звука в подавляющем большинстве конденсированных сред (жидкостей и твердых тел). То есть, введение в схему рис. 3.5 дополнительного источника для формирования встречных волн (аналогично схеме рис. 2.2) вряд ли представляет практический интерес (за исключением некоторых «экзотических» задач, связанных, например, с моделированием малых скоростей волн  $\sim 10^0$  мкм/с).

Сравнительно низкая скорость капиллярно-гравитационных волн обуславливает и низкие частоты этих волн, которые, кроме всего прочего, ограничиваются заметным ростом затухания волны при увеличении ее частоты.

Введем для меры затухания волны величину  $m = 1/(\gamma T) = C/(\gamma \Lambda)$ , где  $\gamma$  - коэффициент затухания, определяемый (3.8),  $T = 2\pi/\Omega$  - период волны,  $\Lambda$  - длина волны. Очевидно,  $m$  характеризует количество периодов, через которое амплитуда волны «сама по себе» уменьшится в  $e$  раз - за время  $1/\gamma$ , либо на

$$\text{расстоянии } C/\gamma. \quad m = \frac{1}{4\pi\nu} \frac{\Omega}{K^2} = \frac{1}{4\pi\nu} \frac{C}{K}.$$

В данном случае зависимость  $\Omega = \Omega(K)$  определяется (3.1).

В частности, для воды можно получить следующие значения, представленные в табл. 3.1 (полагаем, что  $\sigma/\rho \approx 70 \text{ см}^3/\text{с}^2$ ;  $g \approx 1000 \text{ см}/\text{с}^2$ ).

Таблица 3.1.

$K, \text{ см}^{-1}$	3,85	6,28	10	20	30	40
$\Lambda, \text{ см}$	1,63	1,0	0,63	0,315	0,21	0,16
$\Omega, \text{ с}^{-1}$	87	153	282	760	1386	2126
$C, \text{ см}/\text{с}$	23	24,5	28	38	46	53
$m$	47	30	23	15	12	10
$m\Lambda, \text{ см}$	76,7	30	14,4	4,7	2,5	1,6

По-видимому, чтобы можно было говорить о волне как таковой, затухание не должно быть слишком большим:  $m \geq 10$ .

Значение  $K = \rho g / \sigma \approx 3,85 \text{ см}^{-1}$  и соответствующий столбец описывают случай, когда скорость волны  $C(K)$  имеет минимум,  $C_{\min}^2 = 2\sqrt{(\sigma g)/\rho}$ . В данном случае одинаков вклад в  $C(K)$  как «капиллярной», так и «гравитационной» составляющих:  $(\sigma/\rho)K = g/K$ . При этом  $(\sigma K^2)/(\rho g) = 1$ .

Последняя строка определяет «пространственный масштаб» схемы измерений: как расстояние  $L$  между пучками, так и расстояние от источника волн до любого из пучков не должны заметно превышать приведенные значения  $m\lambda$ .

Итак, для воды  $K \leq 40 \text{ см}^{-1}$  ( $\lambda \geq 1,6 \text{ мм}$ );  $\Omega \leq 2100 \text{ с}^{-1}$ , т.е.  $\Omega/(2\pi) \leq 338 \text{ Гц}$ .

Рассмотрим вначале случай неподвижного поверхностного слоя, т.е. положим, что  $V = 0$ . Тогда для разности фаз  $\Delta\varphi$  сигналов с фотоприемных блоков 8, 9 (разность фаз световых пучков) можно записать:  $\Delta\varphi = \Omega \tau = KL$ , где  $\tau = \Delta\varphi/\Omega = KL/\Omega = L/C$  – время, за которое капиллярно-гравитационная волна пройдет расстояние  $L$ . Обычно именно  $\tau$  является непосредственно измеряемой величиной. Тогда получим:  $C = L/\tau$

Для акустических волн скорость звука (скорость волны), которую можно найти по соотношению  $C = L/\tau$ , представляет интерес сама по себе.

Однако весьма важным отличием объемных акустических волн от капиллярно-гравитационных волн является дисперсия последних, описываемая (3.1) и (3.5).

Ограничимся случаем глубокой воды и учтем, что  $K = \Omega \tau/L$ . Тогда из (3.1) получим:

$$\sigma/\rho = (\Omega^2 - gK)/K^3 = \frac{L^2}{\Omega^2 \tau^3} (\Omega L - g\tau). \quad (3.18)$$

Итак, если ускорение силы тяжести  $g$  известно с требуемой точностью, то можно вычислить и  $\sigma/\rho$  - отношение коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости.

Оценим теперь «минимально возможные» погрешности измерений для схемы рис. 3.5, аналогично оценкам погрешностей для схемы рис.2.2.

Для соотношения (3.18) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} &= 2 \frac{\Omega^2}{(\sigma/\rho)K^3} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \left[ \frac{g}{(\sigma/\rho)K^2} + 3 \right] \frac{\delta K}{K} + \frac{g}{(\sigma/\rho)K^2} \frac{\delta g}{g} = \\ &= 2 \left( 1 + \frac{\rho g}{\sigma K^2} \right) \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \left( 3 + \frac{\rho g}{\sigma K^2} \right) \frac{\delta K}{K} + \frac{\rho g}{\sigma K^2} \frac{\delta g}{g} = 2 \left( 1 + \frac{1}{b} \right) \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \left( 3 + \frac{1}{b} \right) \frac{\delta K}{K} + \frac{1}{b} \frac{\delta g}{g}, \end{aligned}$$

где  $b = (\sigma K^2)/(\rho g)$  – параметр, введенный в разделе 3.2. В частности, рис. 3.1, 3.3 соответствуют случаю  $b = 1$ . Если жидкостью является вода, а  $b = 1$ , то  $K \approx 3,85 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Omega \approx 87 \text{ с}^{-1}$  (табл. 3.1).

Далее учтем, что  $K = \Omega \tau L$ , т.е.  $\delta K/K = \delta\Omega/\Omega + \delta\tau/\tau + \delta L/L$ . Тогда окончательно получим:

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} = (5 + 3/b) \frac{\delta\Omega}{\Omega} + (3 + 1/b) \left( \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right) + (1/b) \frac{\delta g}{g}. \quad (3.19)$$

Если  $b \gg 1$  («большие» волновые числа, чисто капиллярные волны), то, как и следовало ожидать, погрешность  $\delta g/g$  на результатах измерений не сказывается. При этом

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx 5 \frac{\delta\Omega}{\Omega} + 3 \left( \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right).$$

Если  $b \ll 1$  («малые» волновые числа, чисто гравитационные волны), то, как и следовало ожидать, определение  $\sigma/\rho$  является проблематичным.

Формально в этом случае  $\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \gg 1$ .

Если  $b \approx 1$  («средние» волновые числа), то

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx 8 \frac{\delta\Omega}{\Omega} + 4 \left( \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right) + \frac{\delta g}{g}$$

Как и для схемы рис.2.2 примем, что  $\delta\Omega/\Omega \approx \delta\tau/\tau \approx 10^{-6} \dots 10^{-7}$ ;  $\delta L/L \approx 10^{-5}$ . Тогда  $\delta K/K \approx 10^{-5}$ . Для ускорения силы тяжести  $g$  в справочниках обычно приводят значение с указанием второго знака после запятой. Так, на широте Москвы, на уровне моря  $g = 981,56 \text{ см/с}^2$ . То есть, для оценок положим, что и  $\delta g/g \approx 10^{-5}$ . Тогда получим:

$$\text{для случая } b \gg 1: \frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx 3 \cdot 10^{-5}; \text{ для случая } b \approx 1: \frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx 5 \cdot 10^{-5}.$$

Следует отметить, что коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  в справочниках обычно приводят значение с указанием второго знака после запятой. Так, для воды  $\sigma = 74,11 \text{ дн/см}$  при температуре  $10^0\text{C}$ ;  $\sigma = 72,58 \text{ дн/см}$  при температуре  $20^0\text{C}$ .

Итак, относительная погрешность  $\delta(\sigma/\rho)/(\sigma/\rho) = \delta\sigma/\sigma + \delta\rho/\rho \approx 5 \cdot 10^{-5}$  для многих измерительных задач представляется достаточно малой.

Выше полагалось, что ускорение силы тяжести  $g$  известно из независимых источников. В то же время, если измерения проводить поочередно на двух частотах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то для соответствующих значений  $\tau_1$ ;  $\tau_2$ ;  $K_1 = \Omega_1 \tau_1/L$ ;  $K_2 = \Omega_2 \tau_2/L$  получим систему двух линейных уравнений относительно  $\sigma/\rho$  и  $g$ :

$$(\sigma/\rho)K_1^3 + gK_1 = \Omega_1^2;$$

$$(\sigma/\rho)K_2^3 + gK_2 = \Omega_2^2.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\sigma/\rho = \frac{\Omega_1^2/K_1 - \Omega_2^2/K_2}{K_1^2 - K_2^2} = L^3 \frac{\Omega_1/\tau_1 - \Omega_2/\tau_2}{(\Omega_1\tau_1)^2 - (\Omega_2\tau_2)^2};$$

(3.20)

$$g = \frac{K_1^2\Omega_2^2/K_2 - K_2^2\Omega_1^2/K_1}{K_1^2 - K_2^2} = \Omega_1\Omega_2L \frac{\Omega_1\tau_1(\tau_1/\tau_2) - \Omega_2\tau_2(\tau_2/\tau_1)}{(\Omega_1\tau_1)^2 - (\Omega_2\tau_2)^2}.$$

Нетрудно видеть, что для случая чисто гравитационных волн ( $b_1, b_2 \ll 1$ ) имеем:  $\Omega_1^2/K_1 \approx \Omega_2^2/K_2$ ;  $K_1^2 \approx K_2^2$ . Тогда для определения  $\sigma/\rho$  получим неопределенность (типа 0/0) – что и следовало ожидать, поскольку для гравитационных волн параметр  $\sigma/\rho$  является несущественным. В то же время, параметр  $g$  в этом случае определяется легко:  $g \approx \Omega_1^2/K_1 \approx \Omega_2^2/K_2$ .

Для случая чисто капиллярных волн ( $b_1, b_2 \gg 1$ ) имеем:  $\Omega_1^2/K_1^3 \approx \Omega_2^2/K_2^3$ ;  $K_1^2 \approx K_2^2$ . Тогда для определения  $g$  получим неопределенность (также типа 0/0) – что и следовало ожидать, поскольку для капиллярных волн параметр  $g$  является несущественным. В то же время, в этом случае параметр  $\sigma/\rho$  определяется легко:  $\sigma/\rho \approx \Omega_1^2/K_1^3 \approx \Omega_2^2/K_2^3$ .

Рассмотрим теперь погрешности измерений, соответствующие (3.20).

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} &= \frac{b_1+b_2+2}{b_1-b_2} \left( 2 \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{\delta K}{K} \right) + 2 \frac{b_1^2+b_2^2}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta K}{K} = \\ &= 2 \frac{b_1+b_2+2}{b_1-b_2} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{3(b_1^2+b_2^2)+2b_1b_2+2(b_1+b_2)}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta K}{K} = \\ &= \frac{5(b_1^2+b_2^2)+6b_1b_2+4(b_1+b_2)}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{3(b_1^2+b_2^2)+2b_1b_2+2(b_1+b_2)}{b_1^2-b_2^2} \left( \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right); \\ \frac{\delta g}{g} &= \frac{b_1+b_2+2b_1b_2}{b_1-b_2} \left( 2 \frac{\delta\Omega}{\Omega} + 3 \frac{\delta K}{K} \right) + 2 \frac{b_1^2+b_2^2}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta K}{K} = \\ &= 2 \frac{b_1+b_2+2b_1b_2}{b_1-b_2} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{6b_1b_2(b_1+b_2+1)+5(b_1^2+b_2^2)}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta K}{K} = \\ &= \frac{7(b_1^2+b_2^2)+10b_1b_2(b_1+b_2+1)}{b_1^2-b_2^2} \frac{\delta\Omega}{\Omega} + \frac{6b_1b_2(b_1+b_2+1)+5(b_1^2+b_2^2)}{b_1^2-b_2^2} \left( \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right). \end{aligned}$$

Для случая чисто гравитационных волн  $b_1, b_2 \ll 1$ . Тогда  $b^2 \ll b$ , поэтому

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx \frac{2}{b_1-b_2} \left( 2 \frac{\delta\Omega}{\Omega} \frac{\delta\tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right);$$

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{7(b_1^2 + b_2^2) + 10b_1b_2}{b_1^2 - b_2^2} \frac{\delta \Omega}{\Omega} + \frac{5(b_1^2 + b_2^2) + 6b_1b_2}{b_1^2 - b_2^2} \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right).$$

Если для оценок принять, что  $b_1 \approx b_2$ , то получим:

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{12b_1}{b_1 - b_2} \frac{\delta \Omega}{\Omega} + \frac{8b_1}{b_1 - b_2} \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right).$$

В данном случае, как и следовало ожидать,  $\delta g/g \ll \delta(\sigma/\rho)/(\sigma/\rho)$ .

Для случая чисто капиллярных волн  $b_1, b_2 \gg 1$ . Тогда  $b^2 \gg b$ , поэтому

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx \frac{5(b_1^2 + b_2^2) + 6b_1b_2}{b_1^2 - b_2^2} \frac{\delta \Omega}{\Omega} + \frac{3(b_1^2 + b_2^2) + 2b_1b_2}{b_1^2 - b_2^2} \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right);$$

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{10b_1b_2(b_1 + b_2)}{b_1^2 - b_2^2} \frac{\delta \Omega}{\Omega} + \frac{6b_1b_2(b_1 + b_2)}{b_1^2 - b_2^2} \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right).$$

Если для оценок принять, что  $b_1 \approx b_2$ , то получим:

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx \frac{8b_1}{b_1 - b_2} \frac{\delta \Omega}{\Omega};$$

$$\frac{\delta g}{g} \approx \frac{10b_1^2}{b_1 - b_2} \frac{\delta \Omega}{\Omega} + \frac{6b_1^2}{b_1 - b_2} \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right).$$

В данном случае, как и следовало ожидать,  $\delta g/g \gg \delta(\sigma/\rho)/(\sigma/\rho)$ .

Рассмотрим теперь «средние» волновые числа ( $b \approx 1$ ) и для конкретности положим, что  $b_1 = 2; b_2 = 1$ . Тогда получим:

$$\frac{\delta(\sigma/\rho)}{\sigma/\rho} \approx 19 \frac{\delta \Omega}{\Omega} + 8 \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right) \approx 10^{-4};$$

$$\frac{\delta g}{g} \approx 37 \frac{\delta \Omega}{\Omega} + 24 \left( \frac{\delta \tau}{\tau} + \frac{\delta L}{L} \right) \approx 2,5 * 10^{-4}.$$

В данном случае погрешность  $\delta g/g$  на порядок превышает погрешность, соответствующую справочным данным. Как следствие, более высокой, по

сравнению со случаем использования справочных, данных оказывается и погрешность  $\delta(\sigma/\rho)/(\sigma/\rho)$ .

Тем не менее, рассматриваемый достаточно простой подход может быть полезен для некоторых измерительных задач, в том числе, и в гравиметрии.

Схема измерений, представленная на рис. 3.5, соответствует дифракции Фраунгофера, как и схема, представленная на рис. 2.2. В то же время, возможно построение схемы измерений, основанной на дифракции Френеля, по аналогии со схемой рис. 2.4.

В этом случае, как отмечалось в разделе 2.4, размер области усреднения полученных результатов определяется диаметром светового пучка, так что сами измерения в определенной мере можно считать «точечными». При измерениях для случая дифракции Фраунгофера размер этой области существенно превышает диаметр пучка.

Однако платой за «точечность» измерений являются более высокие требования к стабильности расстояния между поверхностью жидкости и фотоприемными блоками.

### 3.2.2. Определение вязкости жидкости

Гармоническая капиллярно-гравитационная волна на свободной поверхности жидкости, распространяющаяся в направлении  $Ox$  и однородная в направлении  $Oy$ , для случая невязкой жидкости имеет вид:

$$h = h_0 e^{iKz} \cos(\Omega t - Kx),$$

где  $h$  – смещение элемента поверхности жидкости в направлении  $Oz$ ;  $h_0$  – амплитуда смещения (амплитуда волны). При этом имеет место соотношение (3.1) между  $\Omega$  и  $K$ .

Однако вязкость  $\nu$  свойственна практически всем жидкостям (за исключением экзотических случаев типа сверхтекучего жидкого гелия и т.д.).

Коэффициент  $\gamma$  затухания капиллярно-гравитационных волн (3.8),  $\gamma = 2\nu K^2$ , характеризует скорость убывания амплитуды волны со временем  $t$  по закону  $e^{-\gamma t}$ : Здесь  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости,  $\nu = \eta/\rho$ , где  $\eta$  - динамическая вязкость. Соответственно, коэффициент  $\gamma_L$  затухания волн,  $\gamma_L = 2\nu K^2/C = 2\nu K^3/\Omega$  характеризует масштаб убывания амплитуды волны с расстоянием  $x$  по закону  $e^{-\gamma_L x}$ . То есть, в этом случае  $h_0(x) = h_0(0)e^{-\gamma_L x}$ , где  $h_0(0) = h_0(x=0)$ .

Если найти амплитуду волны в двух точках:  $x_1 = x$ ;  $x_2 = x + L$ , то отношение этих амплитуд будет зависеть только от коэффициента  $\gamma_L$  и расстояния  $L$ :

$$\frac{h_0(x_1)}{h_0(x_2)} = e^{\gamma_L L}; \ln \frac{h_0(x_1)}{h_0(x_2)} = \gamma_L L.$$

Отсюда нетрудно вычислить и вязкость жидкости:

$$\nu = \frac{\Omega}{2K^3 L} \ln \frac{h_0(x_1)}{h_0(x_2)}.$$

В связи с этим, возникает вопрос об измерении в двух точках амплитуды волны  $h_0(x)$ . Схема соответствующего устройства может быть аналогична схеме рис. 3.5.

При определении коэффициента поверхностного натяжения, как и при определении смещений объектов, определении скорости движения жидкости и скорости звука в ней, измерялись частотно-фазовые характеристики светового сигнала, обусловленные теми же характеристиками соответствующих волн. При этом амплитудные характеристики сигнала практически не учитывались. Более того, обычно измерение частотно-фазовых характеристик производят при уровне сигнала, соответствующем ограничению этого сигнала, с тем, чтобы уменьшить погрешности измерений.

Для определения вязкости нам необходимы именно амплитудные характеристики. Другими словами, фотоприемники должны работать на линейном участке световой характеристики.

В рассматриваемом случае непосредственно измеряемой величиной схемы рис. 3.5 является амплитуда  $U$  переменной составляющей сигнала на выходе фотоприемного блока. По аналогии с (1.2),  $U$  в значительной мере определяется параметром  $A$  – максимальным изменением оптического пути, обусловленным капиллярно-гравитационной волной, рассматриваемой как фазовая решетка:  $A(x) = kh_0(x)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны света. Тогда получим:

$$\nu = \frac{\Omega}{2K^3L} \ln \frac{A(x)}{A(x+L)}. \quad (3.21)$$

Зависимость  $U(A)$  для выбранной гармоники частоты  $\Omega$  определяется закономерностями дифракции света – соотношениями, аналогичными (1.6), (1.14). В частности, для второй гармоники и практически важного случая  $A < 1$ , в соответствии с (1.8), имеем:

$$U(A) \sim \beta_2 \approx 2rJ_1^2(A) - 4r^2(A)J_0(A)J_2(A) - 4r^5J_1(A)J_3(A),$$

где  $r = \exp\{-(2D/\lambda)^2\}$ ;  $D$  – диаметр светового пучка по уровню, примерно равному 0,1. Далее, учтем, что  $J_n(A) \approx (A/2)^n/(n!)[1 - (A/2)^2/(n+1)]$ . То есть,

$$J_0(A) \approx 1 - A^2/4; J_1(A) \approx A/2; J_2(A) \approx A^2/8; J_3(A) \approx A^3/48; J_4(A) \approx A^4/384;$$

$$J_1^2(A) \approx A^2/4; J_0(A)J_2(A) \approx A^2/8; J_1(A)J_3(A) \approx A^4/384; J_2(A)J_4(A) \approx A^6/3072.$$

Тогда получим:

$$\beta_2 \approx r(1-r)A^2/2 - r^5A^4/96 = rA^2/2[(1-r) - r^4A^2/48].$$

Если выполняется условие  $r^4A^2/48 \ll (1-r)$ , то имеет место простое соотношение:  $\beta_2 \approx [r(1-r)/2]A^2$ . В свою очередь, это условие выполняется при не слишком жестких требованиях к параметрам схемы измерений.

В частности, если  $D \approx \lambda/2$ , то  $r \approx 0,37$ . При этом  $r^4A^2/[48(1-r)] \leq 10^{-3}$  при достаточно больших  $A \leq 1$ . В этом случае с погрешностью не более  $10^{-3}$  можно считать, что  $\beta_2 \approx 0,12A^2$ . Если же  $A < 0,3$ , то погрешность будет не более  $10^{-4}$ .

Однако помимо параметра  $A$  амплитуда  $U$  зависит и от величины светового потока, попадающего на фотоприемник, от чувствительности этого приемника. Примем, что зависимость этого рода учитывается некоторым параметром  $q$ . Тогда  $U = q \beta_2$ , причем  $U(x_1) = q(x_1) \beta_2(x_1)$ ,  $U(x_2) = q(x_2)$ . При этом значения технических характеристик фотоприемных блоков могут несколько различаться, так что в общем случае  $q(x_1) \neq q(x_2)$ . Поэтому и отношение  $U(x_1)/U(x_2) \neq \beta_2(x_1)/\beta_2(x_2) \approx A^2(x_1)/A^2(x_2)$ .

В связи с этим, примем, что мы вначале нашли отношение  $P \equiv U(x_1)/U(x_2)$ , соответствующее распространению капиллярно-гравитационной волны слева направо на рис. 3.5, а затем с помощью дополнительного источника, аналогичного источнику 3, возбудили волну той же частоты, но распространяющуюся в противоположном направлении – справа налево. Величины, соответствующие этому направлению, будем обозначать штрихованными символами. Тогда имеем:

$$P = U(x_1)/U(x_2) = [q(x_1)/q(x_2)] [\beta_2(x_1)/\beta_2(x_2)];$$

$$P' = U'(x_2)/U'(x_1) = [q'(x_2)/q'(x_1)] [\beta_2'(x_2)/\beta_2'(x_1)].$$

Однако нетрудно видеть, что  $\beta_2(x_1)/\beta_2(x_2) = \beta_2'(x_2)/\beta_2'(x_1) \approx A^2(x_1)/A^2(x_2)$ . С другой стороны,  $q(x_1) = q'(x_1)$ ;  $q(x_2) = q'(x_2)$ , поскольку значения технических характеристик фотоприемных блоков не зависят от направления распространения капиллярно-гравитационной волны. Тогда получим:

$$PP' = [\beta_2(x_1)/\beta_2(x_2)]^2 \approx A^4(x_1)/A^4(x_2); P/P' = [q(x_1)/q(x_2)]^2.$$

Для простоты положим, что  $q(x_1) = q(x_2) = q$ ; тогда  $P' = P$ ;  $A^2(x_1)/A^2(x_2) = P$ . В результате (3.21) запишется в виде:

$$\nu = \frac{\Omega}{4K^3L} \ln \frac{U(x)}{U(x+L)}. \quad (3.22)$$

Итак, соотношение (3.22) позволяет вычислить вязкость жидкости  $\nu$ .

Оценим теперь «минимально возможные» погрешности измерений, соответствующие (3.22).

$$\frac{\delta v}{v} \approx \frac{\delta \Omega}{\Omega} + 3 \frac{\delta K}{K} + \frac{\delta L}{L} + \frac{2}{\ln[U(x)/U(x+L)]} \frac{\delta U}{U} = \frac{\delta \Omega}{\Omega} + 3 \frac{\delta K}{K} + \frac{\delta L}{L} + \frac{\Omega}{2vK^3L} \frac{\delta U}{U}.$$

Как и для схемы рис.3.5 примем, что  $\delta \Omega / \Omega \approx 10^{-6} \dots 10^{-7}$ ;  $\delta K / K \approx \delta L / L \approx 10^{-5}$ .

Амплитудные измерения, как правило, менее точны, чем частотные. Поэтому для оценок примем, что  $\delta U / U \approx 10^{-3} \dots 10^{-4}$ .

Положим также, что жидкостью является вода ( $v = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ ), причем  $K = 10 \text{ см}^{-1}$ ;  $\Omega \approx 280 \text{ с}^{-1}$ ;  $L = 1 \text{ см}$ . Тогда получим:

$$\delta v / v \approx 10^{-2} \dots 10^{-3}.$$

Указанная погрешность является достаточно высокой в сравнении погрешностями современных высокоточных вискозиметров ( $10^{-4}$ ), однако сравнительная простота схемы рис. 3.5 позволяет использовать подобные измерения в достаточно широком классе технических и технологических задач.

Оценки показывают, что предлагаемый способ пригоден для определения вязкости, не слишком превышающей вязкость воды.

### 3.2.3. Измерения при движении поверхностного слоя жидкости

Выше рассматривались капиллярно-гравитационные волны применительно к измерениям в неподвижной жидкости. Перейдем теперь к измерениям в жидкости, движущейся с некоторой скоростью  $V$  относительно неподвижного источника волны (аналогично случаю акустических волн, рассмотренному в разделе 2.4).

Скорость  $C$  капиллярно-гравитационных волн относительно жидкости, в которой эти волны распространяются, назовем «собственной» скоростью. Вследствие дисперсии, определяемой соотношением (3.2), собственная скорость  $C$  оказывается зависящей от скорости жидкости  $V$ , см. рис. 3.2-3.4. Тогда скорость волны относительно неподвижного источника можно записать в виде:  $C_+ + V$  или же  $C_- - V$ , где  $C_+ = C(V > 0)$  - собственная скорость волны для случая, когда волна и жидкость движутся в одном и том же направлении;  $C_- = C(V < 0)$  - собственная скорость для случая, когда волна и жидкость

движутся навстречу друг другу. На рис. 3.2-3.4 значения  $C$  при  $V > 0$  ( $a > 0$ ) соответствуют  $C_+$ ; значения  $C$  при  $V < 0$  ( $a < 0$ ) соответствуют  $C_-$ ;  $a = V/C_0$ , где  $C_0 = C(V = 0)$  – собственная скорость волны в неподвижной жидкости.

Положим, что в схеме рис. 3.5 имеется дополнительный источник, (аналогичный источнику 3) для возбуждения капиллярно-гравитационной волны той же частоты  $\Omega$ , но распространяющейся в противоположном направлении – справа налево. Примем, что направление распространения волны поочередно меняется при неизменном направлении движения жидкости.

Пусть  $\tau_+ = L/(C_+ + V)$  – время, за которое капиллярно-гравитационная волна пройдет расстояние  $L$  в случае, когда жидкость и волна движутся в одну и ту же сторону;  $\tau_- = L/(C_- - V)$  – время, за которое акустическая волна пройдет то же расстояние  $L$  в случае, когда жидкость и волна движутся навстречу друг другу. При этом  $\Delta\varphi_+ = \Omega\tau_+$ ,  $\Delta\varphi_- = \Omega\tau_-$  есть разности фаз сигналов с выходов фотоприемных блоков 8 и 9 для соответствующих случаев движения жидкости и волны.

Тогда можно записать соотношения, аналогичные соотношениям (2.13):

$$C_+ + C_- = L(1/\tau_+ + 1/\tau_-);$$

$$2V + C_+ - C_- = L(1/\tau_+ - 1/\tau_-).$$

В общем случае вследствие дисперсии  $C_+ \neq C_-$ . В результате мы имеем два уравнения с тремя неизвестными, так что затрудняется раздельное определение скорости волны и скорости движения поверхностного слоя жидкости.

В связи с этим, рассмотрим практически важный случай малых скоростей  $a \ll 1$  ( $V \ll C_+, C_-$ ). Тогда скорость  $C(a)$  волны в окрестности точки  $a = 0$  можно разложить в ряд по степеням  $a$ :

$$C \approx C_0 + \frac{\partial C}{\partial a} a + \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} (a^2 / 2) + \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} (a^3 / 6) + \dots,$$

где  $C = C(a)$ ;  $1/y + a = C(a)/C_0$ , причем  $y = y(a) = K(a)/K_0$  определяется соотношением (3.12),  $y(a = 0) = 1$ .

Нетрудно видеть, что

$$C_+ \approx C_0 + \frac{\partial C}{\partial a} a + \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} (a^2 / 2) + \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} (a^3 / 6) + \dots,$$

$$C_- \approx C_0 - \frac{\partial C}{\partial a} a + \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} (a^2 / 2) - \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} (a^3 / 6) + \dots$$

Тогда

$$C_+ + C_- \approx 2[C_0 + \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} (a^2 / 2) + \frac{\partial^4 C}{\partial a^4} (a^4 / 24) + \dots],$$

$$C_+ - C_- \approx 2[\frac{\partial C}{\partial a} a + \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} (a^3 / 6) + \dots].$$

Найдем теперь производные:

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial C}{\partial a} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial y}{\partial a} + 1;$$

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + \frac{2}{y^3} \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2;$$

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial^3 y}{\partial a^3} + \frac{6}{y^3} \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{6}{y^4} \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^3;$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{2(b+1)y(1+ay)}{3by^2 - 2(b+1)a^2y + 1 - 2a(b+1)}.$$

Как видно из рис. 3.2-3.4, весьма удобным является случай  $b = 1$ , при котором, в соответствии с (3.16),  $C/C_0 \approx 1$ . Поэтому рассмотрим приведенные выше выражения для производных (в точке  $a = 0$ ;  $y = 1$ ) для конкретного случая

$b = 1$ . Обозначим для краткости:  $\frac{\partial y}{\partial a} = y'$ ;  $\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = y''$ ;  $\frac{\partial^3 y}{\partial a^3} = y'''$ . Тогда получим:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = y' = \frac{4y(1+ay)}{3y^2 - 4a(1+ay) + 1} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = y'' = 4 \frac{y'(1+2ay) + y^2}{3y^2 - 4a(1+ay) + 1} - 8 \frac{y(1+ay)[y'(3y-2a^2) - 2(1+2ay)]}{[3y^2 - 4a(1+ay) + 1]^2} = 3/2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y}{\partial a^3} = & 4 \frac{y''(1+ay) + 2y'(2y+ay')}{3y^2 - 4a(1+ay) + 1} - \\ & - 16 \frac{[y'(1+2ay) + y^2][y'(3y-2a^2) - 2(1+2ay)]}{[3y^2 - 4a(1+ay) + 1]^2} - \\ & - 8 \frac{y(1+ay)[y''(3y-2a^2) + y'(3-2a) - 4y - 4ay']}{[3y^2 - 4a(1+ay) + 1]^2} + \\ & + 32 \frac{y(1+ay)[y'(3y-2a^2) - 2(1+2ay)][y'(3y-2a^2) - 2(1+2ay)]}{[3y^2 - 4a(1+ay) + 1]^3} = 9/4. \end{aligned}$$

Тогда имеем:

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial C}{\partial a} = 0; \quad \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{C_0} \frac{\partial^3 C}{\partial a^3} = 3/4;$$

$$C(a)/C_0 \approx 1 + a^2/4 - a^3/8;$$

$$(C_+ + C_-)/C_0 \approx 2(1 + a^2/4);$$

$$(C_+ - C_-)/C_0 \approx a^3/4.$$

Если пренебречь членами третьего порядка малости  $a^3$ , то собственная скорость волны не зависит от направления скорости жидкости относительно направления распространения волны (от знака  $a$ ). То есть, если  $b = 1$ , то  $C_+ \approx C_-$ . Тогда скорость  $V$  определяется соотношением, аналогичным (2.13). В свою очередь, зная  $V$ , можно вычислить и  $C_0$ . В результате получим:

$$V + \frac{V^3}{8C_0^2} = (L/2)(1/\tau_+ - 1/\tau_-); \tag{3.2.3}$$

$$C_0 \approx (L/2)(1/\tau_+ + 1/\tau_-)(1 - \frac{1}{4} \frac{V^2}{C_{00}^2}).$$

Здесь  $C_{00} \equiv (L/2)(1/\tau_+ + 1/\tau_-)$  – гипотетическая скорость волны в отсутствие дисперсии. Видно, что  $C_0 = C_0(V)$  имеет вид параболы с вершиной в точке  $V = 0$ . Зависимость  $C(a)/C_0$ , представленная на рис. 3.3, имеет минимум в точке  $a = 0$  ( $V = 0$ ). При этом по существу  $C(a) = C_{00}$ . В связи с этим, естественно, что для любого знака  $V$  справедливо неравенство  $C_0 < C_{00}$ .

Следует отметить, что случай  $b = 1$ , по-видимому, весьма удобен для многих практических задач. При этом, с одной стороны,  $C_+ \approx C_-$ . С другой стороны, собственная скорость волны  $C(a)$  в движущейся жидкости имеет минимум при  $a = 0$ :  $C(a = 0) = C_{\min}$ . Кроме того, в этом случае фазовая скорость волны равна групповой скорости,  $C = C_{\text{гр}}$ , т.е.  $dC/dK = 0$ .

Оценим теперь возможные погрешности измерений в соответствии с соотношениями (3.2.3).

По аналогии с результатами, изложенными в разделе 2.4, для скорости  $V$  движения жидкости имеем:

$$\delta V/V[1 + (3/8)(V/C_0)^2] \leq \approx \delta L/L + (\delta T/T)(C_0/V) + (1/4)(V/C_0)^2(\delta C_0/C_0).$$

Как и в разделе 2.4, полагаем, что  $\delta T/T \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ ;  $\delta L/L \approx 10^{-5}$ . Примем также, что  $a = V/C_0 \leq 10^{-2}$  и учтем, что  $\delta C_0/C_0 \ll 1$  (с учетом приведенной ниже оценки). Тогда

$$\delta V \approx C_0(\delta T/T); \delta V/C_0 \approx \delta T/T.$$

Итак, абсолютная погрешность  $\delta V$  представляется достаточно малой, поскольку  $C_0$  есть минимальная скорость волны в неподвижной жидкости. Действительно, поскольку  $b = 1$ , то  $K = \rho g/\sigma$ . В этом случае скорость волны  $C(K) = C(\rho g/\sigma)$  имеет минимум. То есть,  $C_0 = C_{\min} = [2\sqrt{(\sigma g)/\rho}]^{1/2}$ .

В частности, для воды при нормальных условиях  $C_{\min} \approx 23$  см/с; для ртути  $C_{\min} \approx 19,6$  см/с. В связи с этим, для оценок можно положить, что  $C_0 \approx 20$  см/с;  $\delta V \approx 0,1$  мкм/с.

Нижний предел  $V_{\min}$  измерений по скорости жидкости определим так:  $V_{\min} \approx 3\delta V$ . Тогда  $V_{\min} \approx 0,3$  мкм/с. Верхний предел  $V_{\max}$  определяется динамическим диапазоном электронного тракта. Этот диапазон может составлять четыре порядка, так что  $V_{\max} \approx 0,3$  см/с.

Следует отметить, что для многих практических задач учет слагаемого  $V^3/(8C_0^2)$  в первой формуле (3.2.3) является излишним, так что указанная формула становится полностью аналогичной формуле (2.13).

По аналогии с результатами, изложенными в разделе 2.4, для скорости  $C_0$  капиллярно-гравитационной волны имеем:

$$\delta C_0/C_0 = (\delta C_{00}/C_{00})[1 + (1/4)(V/C_{00})^2] + (1/2)(V/C_{00})(\delta V/C_{00}),$$

где  $\delta C_{00}/C_{00} = \delta L/L + (\delta \tau_+/\tau_+^2 + \delta \tau/\tau^2)/(1/\tau_+ + 1/\tau) \leq \delta L/L + \delta T/T$ .

Для приведенных выше значений  $\delta T/T \approx 10^{-7} \dots 10^{-6}$ ;  $\delta L/L \approx 10^{-5}$ ;  $V/C_{00} \leq 10^{-2}$ ;  $\delta V/C_{00} \approx 10^{-6}$  получим для «минимально возможной» погрешности:

$$\delta C_0/C_0 \approx \delta L/L \approx 10^{-5}.$$

То есть, относительная погрешность измерения собственной скорости капиллярно-гравитационной волны может быть достаточно малой.

Для многих практических задач учет слагаемого  $V^2/(4C_{00}^2)$  во второй формуле (3.2.3) является излишним, так что указанная формула становится полностью аналогичной формуле (2.13).

При невысокой скорости волны  $C < 10^2$  см/с для большинства приложений нет необходимости в использовании встречных капиллярно-гравитационных волн (по аналогии со встречными акустическими волнами, рассмотренными в разделе 2.1). В то же время, в некоторых случаях такие волны могут иметь некоторые преимущества перед «обычными» волнами, распространяющимися в одном направлении.

Оценим теперь возможную скорость движения жидкости, обусловленную градиентами коэффициента поверхностного натяжения [14, 16].

Рассмотрим жидкость, в которой имеется градиент поверхностного натяжения  $d\sigma/dx$ . Выберем элемент приповерхностного слоя жидкости массой  $m = \rho l q h$ , где  $\rho$  - плотность жидкости;  $l, q, h$  – размеры выбранного элемента по осям  $OX, OY, OZ$  соответственно. При этом ось  $OY$  параллельна поверхности жидкости, а ось  $OZ$  направлена по вертикали. То есть, по сути  $h$  есть толщина (глубина) приповерхностного слоя. На выбранный элемент действует ускоряющая сила  $q(d\sigma/dx)l$ , обусловленная перепадом коэффициента поверхностного натяжения на расстоянии  $l$ . Кроме того, со стороны «подстилающего слоя» жидкости действует тормозящая сила  $\rho\nu(dV/dz)ql$ , обусловленная вязкостью  $\nu$ . Здесь  $V$  – скорость движения рассматриваемого элемента жидкости. Начальное условие примем в виде:  $V(0) = 0$ . Учтем также, что  $dV/dz \approx V/h$ . Тогда уравнение движения можно записать в виде:

$$dV/dt = (d\sigma/dx)/(qh) - \nu V/h^2.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$V(t) = V_m (1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $V_m = (d\sigma/dx)h/\eta$  - максимальная скорость;  $\eta = \rho\nu$  - динамическая вязкость;

$\tau = h^2/\nu$  - характерное время установления скорости.

Итак, если  $t \gg \tau$ , то  $V = V_m$ .

Если градиент коэффициента поверхностного натяжения обусловлен только лишь градиентом  $dT/dx$  температуры поверхности жидкости, то  $d\sigma/dx = (d\sigma/dT)(dT/dx)$ .

В частности, для воды при обычных условиях  $d\sigma/dT \approx 0,15$  дн/(см·К);  $\nu \approx 10^{-4}$  см<sup>2</sup>/с;  $\eta \approx 10^{-4}$  г/(см·с). Положим также, что  $dT/dx \approx (10^{-1} \dots 10^{-2})$  К/см.

Оценим теперь толщину  $h$  приповерхностного слоя жидкости, учитывая, что характерная толщина мономолекулярного слоя составляет примерно

$10^{-3}$  мкм. Поскольку мы рассматриваем жидкость как непрерывную среду и не интересуемся ее внутренним строением, то величину  $h$  следует принять много большей, чем толщина мономолекулярного слоя,  $h \gg 10^{-3}$  мкм. Поэтому положим для определенности, что  $h \approx 10^{-1}$  мкм. Отметим, что радужные разводы тонких пленок нефтепродуктов на поверхности воды имеют примерно такую же толщину.

Таким образом, для рассматриваемых значений параметров скорость движения поверхностного слоя жидкости является малой,  $V_m \approx (1 \dots 10)$  мкм/с. Также малым является и характерное время установления скорости:  $\tau \approx 10^{-6}$  с.

Как отмечалось выше, нижний предел измерений по скорости составляет  $V_{\min} \approx 0,3$  мкм/с  $< V_m$ . То есть, с помощью схемы рис. 3.5 оказывается возможной регистрация малых движений жидкости, обусловленных термокапиллярной конвекцией.

### **3.3. Дифракция СВЧ-волн на гравитационных волнах. Определение параметров волнения поверхности моря**

#### **3.3.1. Общие соображения**

Широко используемые методы радиолокационного определения параметров волнения, как правило, основаны на анализе статистических характеристик эхо-сигнала [15, 43]. При этом обычно исходят из двухмасштабной модели волнения (крупная волна и «рябь»), причем диаметр облучаемого пятна на морской поверхности полагается меньшим, чем длина крупной волны.

Однако обработка статистических характеристик эхо-сигнала является достаточно сложной и предполагает наличие определенной априорной информации.

В связи с этим, актуальным является дальнейшее развитие методов радиолокационного определения параметров волнения, в частности, методов определения регулярной составляющей эхо-сигнала.

Основой такого подхода является подобие между дифракцией электромагнитных волн СВЧ-диапазона на гравитационных волнах и дифракцией электромагнитных волн светового диапазона на движущейся тонкой фазовой решетке.

Для света подобной решеткой могут являться периодические неоднородности показателя преломления среды, «наведенные» акустической (ультразвуковой) волной, или же периодические неоднородности свободной границы жидкости, наведенные капиллярно-гравитационной волной

Если диаметр светового пучка и период решетки (длина капиллярно-гравитационной волны) являются величинами одного порядка, то пучок, отраженный от «взволнованной» поверхности жидкости, оказывается модулированным. Интенсивность (квадрат амплитуды) пучка имеет набор переменных составляющих - гармоник частоты, соответствующей скорости перемещения волны относительно пучка. Амплитуды этих гармоник зависят от

трех безразмерных параметров:  $p = D/\Lambda$ ;  $A = (2\pi/\lambda)h$ ;  $\varphi_0$ . Здесь  $D$  - диаметр пучка,  $\Lambda$  - период решетки (длина капиллярно-гравитационной волны),  $\lambda$  - длина волны света,  $h$  - высота капиллярно-гравитационной волны,  $\varphi_0$  - расходимость пучка (ширина его диаграммы направленности). При этом уровни гармоник нечетного порядка определяются слагаемыми, содержащими множители вида  $J_0J_1$ ,  $J_1J_2$ ,  $J_2J_3$  и т.д. Уровни гармоник четного порядка определяются слагаемыми, содержащими множители вида  $J_1^2$ ,  $J_0J_2$ ,  $J_1J_3$ ,  $J_2J_4$  и т.д. И, наконец, уровень постоянной составляющей определяется слагаемыми, содержащими множители вида  $J_0^2$ ,  $J_1^2$ ,  $J_2^2$  и т.д. Здесь  $J_n(A) =$  функция Бесселя порядка  $n$ .

Если  $p \gg 1$ , то имеет место дифракция «в чистом виде». В этом случае интенсивности пучков различных порядков дифракции от времени не зависят.

Если  $p \ll 1$ , то имеет место рефракция «в чистом виде». В этом случае пучок периодически колеблется как целое относительно некоторого среднего значения. При этом увеличение  $\Lambda$  при неизменной высоте волны приводит к монотонному уменьшению амплитуды колебаний.

Для задач измерительной техники наибольший интерес представляет промежуточный случай  $p \approx 1$  - тогда уровни гармоник сигнала максимальны. С физической точки зрения это обстоятельство объясняется тем, что решетка (волна) модулирует фазовый фронт исходного светового пучка, что приводит к модуляции интенсивности (мощности) этого пучка "естественным» образом", без наличия каких либо дополнительных оптических элементов.

Следует отметить, что при определенных условиях по соотношению уровней различных гармоник можно вычислить значение параметра  $A$ , т.е. можно определить и высоту  $h$  капиллярно-гравитационной волны.

Частоты гармоник зависят как от собственной частоты волны, так и от скорости движения среды относительно пучка. То есть, по частотам гармоник можно определить и частоту капиллярно-гравитационной волны.

### 3.3.2. Возможная реализация измерений

Рассмотрим особенности отражения электромагнитных волн СВЧ-диапазона от морской поверхности, полагая, что диаметр облучаемого пятна на морской поверхности сравним с длиной морской волны.

Примем одномасштабную модель волнения – двумерные регулярные прогрессивные гравитационные волны одной длины «на глубокой воде» (волны полагаются синусоидальными).

В этом случае связь между скоростью  $C$  и длиной волны  $\Lambda$  определяется известным образом [55]:  $C^2 = g\Lambda/(2\pi)$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести.

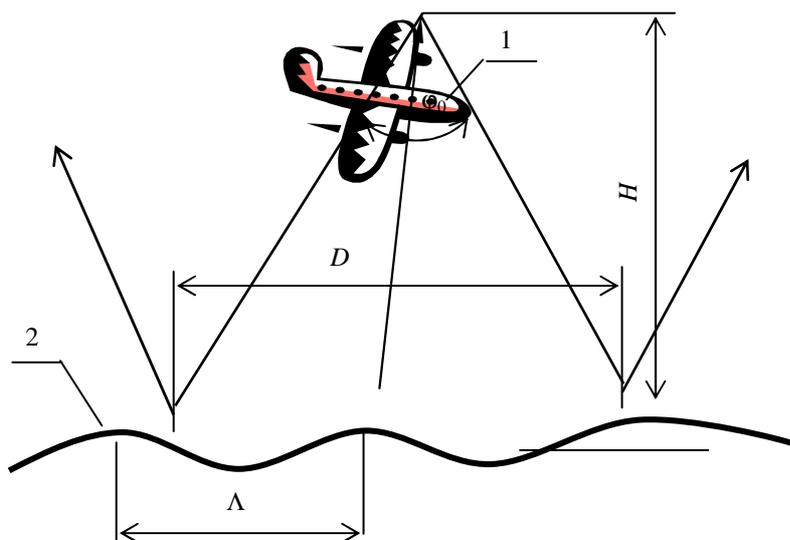
Положим, что самолет (вертолет) 1 летит над морской поверхностью 2 с некоторой скоростью  $V$ , причем вектор скорости составляет угол  $\alpha$  с направлением скорости распространения морской волны (см. рисунок). Радиолокатор, работающий в непрерывном (импульсном) режиме, «смотрит вниз», причем регистрируется эхо-сигнал обратного отражения.

Далее выделяется огибающая эхо-сигнала – полезный сигнал. Он содержит набор переменных составляющих с частотами, кратными основной частоте (первой гармонике)  $f_1 = (V \cos \alpha + C)/\Lambda$ :

$$f_1 = \frac{V \cos \alpha}{\Lambda} + \sqrt{\frac{g}{2\pi\Lambda}}. \quad (3.3.1)$$

Из условия:  $d_0 + \varphi_0 H = D \approx \Lambda$  нетрудно выбрать такую высоту  $H$  полета, чтобы диаметр  $D$  СВЧ-пучка на поверхности моря по порядку величины был равен  $\Lambda$  ( $d_0, \varphi_0$  - апертура антенны и ширина диаграммы направленности антенны). В этом случае обеспечиваются максимальные уровни низкочастотных переменных составляющих интенсивности эхо-сигнала.

Нетрудно видеть, что  $f_1$  зависит только от  $\Lambda$ , если  $V = 0$  или же  $\alpha = \pi/2$ . Если же  $V \cos \alpha \gg C$ , то  $f_1 = V \cos \alpha / \Lambda$ .



Отражение электромагнитных волн от морской поверхности

Очевидно, в случае импульсного режима частота  $f_r$  повторения импульсов радиолокатора должна удовлетворять условию:  $f_r \gg f_1$ .

Практический интерес представляют «чисто» гравитационные волны, для которых  $\Lambda = 10^0 \div 10^2$  м. В этом случае для  $V \cos \alpha = 0$  имеем:  $f_1 \approx 10^{-1}$  Гц, так что требования к частоте повторения  $f_r$  являются весьма «мягкими».

Итак, по спектру частот переменных составляющих полезного сигнала можно определить и длину морской волны, точнее, в общем случае - отношение  $(V + C)/\Lambda$ .

Для рассматриваемого случая СВЧ-диапазона указанная выше высота полета соответствует регистрации сигнала в зоне дифракции Френеля. В частности, если  $\alpha = \pi/2$ , то периодическое изменение угла крена самолета обеспечивает соответствующее изменение угла регистрации сигнала в направлении распространения морских волн.

Величина аргумента всех функций Бесселя параметр  $A = (2\pi/\lambda)h$  может меняться в широких пределах. Для электромагнитных волн метрового диапазона для оценок можно считать, что  $A \approx 1$ . В этом случае спектр полезного (фазомодулированного) сигнала близок по виду к спектру

амплитудно-модулированного сигнала. Функции Бесселя различных порядков существенно различаются по величине, причем  $J_n(A) \ll 1$  при  $n \gg 1$ . В то же время, отношение уровня некоторой гармоники к уровню постоянной составляющей (глубина модуляции полезного сигнала на соответствующей частоте) не зависит от ширины и вида диаграммы направленности антенны. То есть, если известно  $D/\lambda$ , то, выразив в явном виде все функции Бесселя через аргумент  $A$ , можно определить параметр  $A$  и, следовательно, высоту морских волн по глубине модуляции сигнала для какой-то гармоники (например, второй). Если же измерить глубину модуляции для двух различных гармоник, то можно определить и значение «промежуточного» параметра  $D/\lambda$ .

Однако с практической точки зрения наибольший интерес представляет сантиметровый диапазон электромагнитных волн.

В этом случае практически всегда  $A = (2\pi/\lambda)h \gg \gg 1$ . Так, если принять, что  $\lambda = 3$  см,  $h = 1 \div 6$  м, то  $A = 200 \div 1200$ . Углы дифракции являются малыми. Если  $\lambda = 3 \div 300$  м, то  $\lambda/A \approx 10^{-2} \div 10^{-4}$ . При этом, однако, имеется большое число  $N$  дифракционных максимумов,  $N \approx A$ , причем  $J_0, J_1, \dots, J_k \approx 1/\sqrt{A}$ , если  $k \ll A$ . Тогда глубина модуляции для какой-то гармоники не зависит от  $A$ , так что определение высоты волн по аналогии со случаем метрового диапазона является проблематичным.

Однако поведение функций Бесселя порядка  $n$  при  $n \approx A$  имеет совсем иной характер: «при  $n$ , близких к  $A$ ,  $J_n(A)$  образует всплеск, достигающий максимума, когда  $n$  немного меньше  $A$ . Когда  $n > A + 1$ , функция  $J_n(A)$  быстро убывает до нуля». При этом  $J_n(A)$  достигает максимума при  $n = A - 0,8\sqrt[3]{A}$  [9]. То есть, при  $A \gg 1$  спектр сигнала резко отличается от спектра амплитудно-модулированного сигнала.

Положим, что диаграмма направленности исходного СВЧ-пучка имеет гауссов вид. Тогда, как следует из аналогии с соотношениями (1.14), диаграмма

направленности  $\psi(\beta)$  постоянной составляющей СВЧ-пучка, отраженного от морской поверхности, будет иметь набор слагаемых вида:

$$J_n^2[\exp\{-(\operatorname{tg}\beta + n\lambda/\Lambda)^2/\operatorname{tg}^2\varphi_0\} + \exp\{-(\operatorname{tg}\beta - n\lambda/\Lambda)^2/\operatorname{tg}^2\varphi_0\}].$$

Здесь  $\beta$  - угол наблюдения,  $\varphi_0$  - ширина диаграммы направленности исходного СВЧ-пучка,  $J_n = J_n(A)$  – функция Бесселя порядка  $n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

При больших  $n$  основной вклад в диаграмму направленности (для сравнительно больших углов наблюдения) будут давать лишь слагаемые, для которых выполняется условие  $\operatorname{tg}\beta \approx n\lambda/\Lambda$ . При этом полагается, что также выполняется условие  $(n\lambda/\Lambda)^2 \gg \operatorname{tg}^2\varphi_0$ . Но функция  $J_n(A)$  быстро убывает до нуля при  $n > A + 1$ , поэтому диаграмма направленности отраженного от морской поверхности СВЧ-пучка будет иметь достаточно резкие границы.

Таким образом, если определить ширину  $\beta_0$  диаграммы направленности СВЧ-пучка, отраженного от морской поверхности, то по ней можно будет найти и значение  $A \approx n = \operatorname{tg}\beta_0 (\Lambda/\lambda)$ . Но поскольку  $A = (2\pi\lambda)h$ , то имеем:  $\operatorname{tg}\beta_0 = 2\pi h/\Lambda$ . Итак, ширина диаграммы направленности  $\beta_0$  определяется крутизной волны  $h/\Lambda$ .

В свою очередь, ширина диаграммы направленности может быть определена при периодическом изменении угла крена самолета. Нетрудно видеть, что если угол крена равен некоторому значению  $\gamma$ , то угол наблюдения равен  $2\gamma$ . Тогда

$$h = \operatorname{tg}2\gamma (\Lambda/2\pi), \quad (3.3.2)$$

где  $\gamma_0$  - «предельный» угол крена, соответствующий «границе» диаграммы направленности СВЧ-пучка, отраженного от морской поверхности.

Оценим теперь возможные погрешности измерений в соответствии с (3.3.2). Нетрудно видеть, что

$$\delta h/h \approx \delta A/A + 2\delta\gamma (1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma) / \operatorname{tg} 2\gamma = \delta A/A + 2\delta\gamma [1 + (Kh)^2] / Kh,$$

где  $\delta h$ ,  $\delta A$ ,  $\delta\gamma$  – абсолютные погрешности измерения соответствующих величин,  $K = 2\pi/\lambda$  – волновое число для морских волн.

Средняя крутизна ветровых волн на глубокой воде составляет  $0,05 \div 0,1$  [52, 55]. В этом случае  $Kh \approx 0,3 \div 0,6$ . Если положить  $\delta\gamma \approx 10^{-2}$ ;  $\delta A/A \ll \delta\gamma$ , то получим:  $\delta h/h \approx 0,04 \div 0,07$ . При этом погрешность  $\delta\gamma$  определения угла крена является определяющей.

Для зыби крутизна волн может быть неограниченно малой [52, 55], так что погрешность  $\delta h/h$  может быть существенно выше.

В то же время, при углах крена, близких к «предельным», спектр частот полезного сигнала будет содержать лишь высокочастотные составляющие:  $nf_1$ ,  $(n-1)f_1$ ,  $(n-2)f_1$  и т.д. При этом  $n \approx A$ ; а  $f_1$  определяется соотношением (3.3.1).

Следует отметить, что при малых углах крена ( $\gamma \ll 1$ ) спектр частот полезного сигнала будет содержать лишь низкочастотные составляющие:  $f_1$ ,  $2f_1$ ,  $3f_1$  и т.д.

Таким образом, по спектру частот полезного сигнала можно определить как  $A$ , так и  $f_1$  – то есть, как высоту, так и длину морских волн.

### 3.3.3. Ограничения, принятые «по умолчанию»

- Одномасштабная модель волнения – по-видимому, достаточно «мягкое» ограничение. Действительно, для «ряби» отношение  $D/\lambda_{\text{ряби}} \gg 1$ , так что уровень гармоник соответствующего сигнала будет пренебрежимо малым. В то же время, наличие «главных» волн с близкими частотами может быть обнаружено по анализу частотного спектра полезного сигнала.

С другой стороны, уменьшение высоты полета приводит к уменьшению  $D/\lambda$ . То есть, в определенной мере оказывается возможным исследование и относительно высокочастотной составляющей волнения.

При этом, однако, возникает вопрос о влиянии «главных» волн на параметры полезного сигнала. Для сантиметрового диапазона электромагнитных волн, как отмечалось выше, практически  $A \gg 1$  (в отличие от акустооптики). Но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

- Форма волны. Реально морские волны имеют достаточно сложную форму, близкую к форме трохойды. Фактически это означает наличие волн с кратными частотами (нечетными гармониками «основной» частоты). Тогда, очевидно, спектр частот полезного сигнала будет шире, чем в случае синусоидальной волны. В частности, могут появиться разного рода комбинационные частоты. При этом нужно учесть, что для различных гармоник морской волны отношение  $D/\lambda$  будет различным, так что различным будет и вклад этих гармоник в полезный сигнал.

В целом этот вопрос представляется достаточно сложным, так что он требует отдельного рассмотрения.

- Глубина водоема. В рассматриваемом подходе, строго говоря, определяется скорость  $C$  морской волны, а ее длина  $\lambda$  вычисляется, исходя из известной зависимости  $C(\lambda)$ . Для волн на поверхности водоема произвольной глубины в зависимость  $C(\lambda)$  входит и глубина водоема, в общем случае – неизвестная:  $C^2 = (g\lambda/2\pi)\text{th}(2\pi H_B/\lambda)$ . То есть, рассматриваемый подход имеет ограничения по глубине водоема – последняя должна быть не меньше примерно половины максимальной длины морской волны.

Возможно, что при развитии рассматриваемого подхода удастся одновременно определить как длину волны  $\lambda$ , так и скорость ее распространения  $C$ . Тогда окажется возможным и определение глубины водоема – по известной зависимости  $(\lambda, H_B)$ . Последнее обстоятельство представляется весьма интересным, поскольку измерение глубины водоема было бы полностью дистанционным.

- Гауссов вид диаграммы направленности антенны. Это ограничение является весьма «слабым», поскольку вид диаграммы направленности влияет только на амплитудные характеристики полезного сигнала, но не на частотные характеристики. То есть, вид диаграммы направленности не влияет на спектр частот полезного сигнала. При определении глубины модуляции (для различных гармоник полезного сигнала), вид диаграммы направленности, вообще говоря, может влиять на результаты измерений. Но поскольку этот вид во времени не меняется, то можно каким-то образом «прокалибровать» радиолокатор по морским волнам с характеристиками, известными из независимых наблюдений.

- «Шероховатость» морской поверхности. Один из основных «вредных» факторов, влияющих на измерения - это «шероховатость» морской поверхности. Эта «шероховатость» может быть обусловлена пеной, капиллярными волнами и т.д. С увеличением длины электромагнитной волны роль этой «шероховатости» уменьшается, и для локаторов метрового диапазона она, по-видимому, несущественна. Однако для локаторов сантиметрового диапазона ситуация иная. Здесь один из важных вопросов - соотношение сигнал-шум. То есть, можно ли измерить с заданной точностью характеристики регулярного полезного сигнала (в первую очередь, спектр частот) на фоне случайного сигнала – шума.

Из общих соображений ясно, что роль «шероховатости» будет возрастать с увеличением балла шкалы состояния поверхности моря (океана) под влиянием ветра [52, 55]. При низких баллах влиянием «шероховатости» можно пренебречь. При высоких баллах, по-видимому, вообще нет смысла говорить о регулярном отражении электромагнитной волны от морской поверхности. В этом случае будет иметь место чисто диффузное отражение, так что рассматриваемый подход попросту неприменим к определению параметров волнения.

В то же время, для определения реальных возможностей применимости данного подхода требуются дополнительные исследования.

Следует отметить, что при использовании судовых или наземных радиолокаторов эхо-сигнал обычно обусловлен обратным диффузным рассеянием на «шероховатостях» волн (двухмасштабная модель волнения). В этом случае при обработке результатов может использоваться аналогия с известными в оптике спекл-структурами, возникающими при отражении лазерного пучка от шероховатой поверхности. В частности, при не слишком высоких баллах шкалы состояния поверхности моря случайная структура «шероховатости» будет накладываться на сравнительно регулярную структуру «главных» волн. В этом случае случайный сигнал будет содержать некоторую регулярную составляющую.

### **3.4. Дифракция света на поверхностных акустических волнах**

Поверхностные акустические волны широко используются для неразрушающего контроля различных материалов, причем одна из основных проблем – детектирование этих волн. Известные методы, использующие соответствующие акустические датчики, в подавляющем большинстве являются контактными. В то же время, во многих случаях, в частности, для различных задач ультразвуковой дефектоскопии, интерес представляют бесконтактные измерения [2].

В простейшем случае гладкой (зеркальной) поверхности для света (лазерного пучка) волны Релея (волны с вертикальной поляризацией) представляют фазовую дифракционную решетку, причем во многих практических задачах можно обеспечить выполнение условия:  $\lambda/D \approx 1$ , где  $\lambda$  – длина волны Релея,  $D$  – диаметр светового пучка.

В этом случае, как известно, отраженный пучок модулирован по интенсивности гармониками частоты поверхностной волны (волны Релея).

Если же поверхностная волна является квазимонохроматичной, то и выходной оптический сигнал будет содержать квазимонохроматические составляющие.

Оценки показывают, что для лазеров видимого диапазона с помощью обычных фотодиодов может регистрироваться сигнал, обусловленный поверхностными волнами с амплитудой смещений всего лишь  $10^{-3}$  мкм. При этом диапазон частот может составлять, как правило,  $10^5 \dots 10^7$  Гц.

Итак, по параметрам переменных составляющих интенсивности отраженного пучка, в принципе, можно определить параметры поверхностных волн – амплитудно-частотный спектр, скорость распространения, затухание и т.д. Оптическая схема измерений является весьма простой: лазер – исследуемая поверхность – фотоприемник.

В общем случае нелинейной акустики скорость звука зависит от колебательной скорости частиц среды. В соответствии со сказанным выше, нетрудно найти экспериментальную зависимость скорости звука от интенсивности исходной акустической волны и (или) от расстояния до источника звука. То есть, в этом случае можно определить и параметр нелинейности среды.

Следует отметить, что малая область усреднения (определяемая диаметром светового пучка) позволяет, в принципе, исследовать зависимость скорости звука от расстояния до источника звука. То есть, оказывается возможным изучение динамики распространения акустической волны в пространстве.

С другой стороны, нелинейную волну саму по себе можно представить в виде набора гармоник некоторой исходной частоты, причем соотношение уровней различных гармоник, вообще говоря, меняется в пространстве (в направлении распространения волны). При этом для нелинейных волн частотный спектр сигнала оказывается существенно более богатым, чем для случая «монохроматической» волны.

Однако и в этом случае при надлежащем выборе условий измерений оказывается возможным измерение параметров нелинейности среды весьма простыми методами.

Так, в зоне Френеля измерение разности фаз сигналов в двух точках поперечного сечения светового пучка дает возможность определения скорости звука в зависимости от интенсивности исходной акустической волны и (или) от расстояния до источника звука.

В частности, любая гармоника сигнала, кроме первой, может быть обусловлена интерференцией пучков, обусловленных дифракцией света либо на первой гармонике волны, либо на второй гармонике волны, либо перекрестными членами, обусловленными дифракцией на обеих гармониках волны. Первая же гармоника не может возникнуть вследствие дифракции только лишь на второй гармонике волны.

Однако детальное рассмотрение указанных вопросов выходит за рамки настоящей работы.

## Заключение

Исследована дифракция пучка электромагнитных волн на тонкой фазовой решетке при произвольном соотношении между периодом решетки и диаметром пучка. Для света такого типа решеткой могут быть продольные акустические волны, поверхностные акустические волны Релея, капиллярные волны на свободной поверхности жидкости. Для волн СВЧ-диапазона такой решеткой могут быть гравитационные волны на поверхности водоема.

Особое внимание уделено практически важному случаю, когда диаметр светового пучка и период фазовой решетки являются величинами одного порядка.

С точки зрения практической реализации важно, что оптическая схема соответствующего акустооптического устройства во многих случаях может быть предельно простой: лазер - акустооптическая ячейка – фотоприемник.

### *Основные результаты работы состоят в следующем*

1. Получены соотношения для диаграммы направленности интенсивности (не амплитуды!) света, описывающие дифракцию (Фраунгофера) гауссова светового пучка на акустической волне, бегущей в прозрачной среде, для произвольного отношения диаметра пучка к длине акустической волны.

Показано, что при диаметре пучка, сравнимом с длиной акустической волны, дифракционные максимумы модулированы по интенсивности - содержат набор переменных составляющих с различными частотами. Частота (фаза) сигнала модуляции (выходного оптического сигнала) зависит не только от частоты (фазы) акустической волны, но и от скорости возможных движений среды на трассе распространения светового пучка.

Проведен анализ соотношений для второй гармоники оптического сигнала. Показано, что уровень этой гармоники имеет локальный максимум как в зависимости от набега фазы на акустической волне, так и в зависимости от отношения диаметра пучка к длине акустической волны. Таким образом,

возможна оптимизация параметров дифракции с целью повышения уровня сигнала.

Рассмотрены особенности дифракции света на двух встречных акустических волнах. Показано, что в этом случае появляются качественно новые особенности, полезные для многих практических задач. С одной стороны, измерения могут проводиться на низкочастотной составляющей (разностной частоте). С другой стороны, при этом «эффективная» скорость волны разностной частоты может быть значительно меньше, чем скорость звука в соответствующей среде. В частности, предложена конструкция двухлучевого акустооптического интерферометра, в котором, как и в известных устройствах, разнесение пучков различных порядков дифракции определяется несущими (достаточно высокими) частотами акустических волн. Однако «рабочая частота» теперь определяется *разностью* несущих частот и может быть сравнительно малой независимо от значений несущих частот.

2. Получены соотношения для интенсивности (не амплитуды!) света, описывающие дифракцию (Френеля) гауссова светового пучка на акустической волне, бегущей в прозрачной среде, для произвольного отношения диаметра пучка к длине акустической волны в зависимости от трех пространственных координат. В предельном случае эти соотношения переходят в соотношения, описывающие дифракцию Фраунгофера.

Показано, что при диаметре пучка, сравнимом с длиной акустической волны, интенсивности дифракционных максимумов содержат набор переменных составляющих с различными частотами, зависящими не только от частоты акустической волны, но и от скорости возможных движений среды на трассе распространения светового пучка.

На конечных расстояниях от решетки фаза каждой гармоники зависит и от координаты в направлении распространения акустической волны. В связи с этим, появляется возможность определения длины волны по частотно-фазовым

характеристикам какой-либо гармоники. Длина волны и, соответственно, скорость звука зависит от физико-химических свойств среды, так что измерение этой скорости дает возможность оценки свойств среды.

Проведен анализ соотношений для первой гармоники оптического сигнала. Показано, что для достаточно больших отношений диаметра пучка к длине акустической волны уровень этой гармоники имеет локальный максимум в зависимости от расстояния до фазовой решетки, причем величина этого максимума возрастает с увеличением указанного отношения при одновременном уменьшении «оптимального» расстояния до решетки. Таким образом, возможна оптимизация параметров дифракции с целью повышения уровня сигнала.

3. Рассмотрены некоторые применения акустооптики к технике измерений. Показано, что в отличие от режима, используемого в большинстве известных технических решений, при котором диаметр светового пучка много больше длины акустической волны, режимы измерений, при которых диаметр светового пучка сравним с длиной акустической волны, оказываются весьма удобными с точки зрения практических применений. В этом случае пучки различных порядков дифракции интерферируют друг с другом «сами собой», без наличия дополнительных оптических элементов с соответствующими юстировками для углового и пространственного совмещения пучков. При этом естественным образом возникает модуляция интенсивности пучка, которая легко регистрируется обычным фотоприемником.

В связи с этим, открываются широкие возможности применения рассмотренных методов для ряда задач измерительной техники.

Рассмотрена акустооптическая схема измерения смещений объекта. Показано, что диапазон измеряемых смещений может быть весьма широким и «в идеале» составлять  $10^{-1}$  мкм... $10^0$  см.

Широкий класс задач подобного рода связан с измерением смещений объекта в машиностроении, приборостроении, строительстве и т.д. Это, прежде всего, контроль прямолинейности и соосности разного рода направляющих, контроль деформаций различных конструкций, контроль вибраций.

4. Рассмотрены варианты акустооптических схем для измерения скорости движения прозрачной жидкости и скорости звука в ней. Показано, что диапазон измеряемых скоростей движения может быть весьма широким и «в идеале» лежать в интервале от  $10^{-1} \dots 10^0$  мм/с до  $10^1$  м/с, независимо от того, измеряется одна компонента скорости или две. То есть, нижний предел измерений по скорости движения может быть на порядок лучше, чем у «времяпролетных» акустических анемометров. Кроме того, в акустооптической схеме по сравнению с «времяпролетным» акустическим анемометром исследуемая область (формирующая световой сигнал) может иметь достаточно малые размеры ( $1 \times 1 \times 10$  мм<sup>3</sup>) и соответственно, малый объем ( $10^{-2}$  см<sup>3</sup>). Это обстоятельство может быть весьма существенным для ряда практических задач.

В данном случае оказывается возможным объединение в одном приборе достоинств «времяпролетных» акустических анемометров с достоинствами лазерных доплеровских анемометров. С одной стороны, сравнительная простота и низкая себестоимость, возможность работы с «чистыми» жидкостями, в которых пренебрежимо мала концентрация взвешенных частиц; с другой стороны - малый нижний предел измерений по скорости движения, малые погрешности измерений.

При измерении скорости звука «в идеале» может быть обеспечена весьма малая приведенная погрешность,  $\delta C/C \approx 10^{-5}$ . При этом возможен одновременный контроль (одним прибором) как расхода жидкости (скорости ее движения), так и скорости звука в ней. Это представляет особый интерес для различных химических технологий. В частности, при контроле качества нефтепродуктов по скорости звука возможна оценка октанового числа бензина непосредственно в процессе течения бензина по трубопроводу.

5. Рассмотрены особенности эффекта Доплера для капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости.

Показано, что частота и волновой вектор являются непрерывной и монотонной функциями скорости движения жидкости относительно источника волн. При этом с увеличением указанной скорости частота волны возрастает быстрее, чем волновой вектор.

«Собственная скорость» волны (скорость относительно жидкости) является непрерывной, но не монотонной функцией скорости движения жидкости относительно источника волн. При этом имеется локальный минимум для некоторого значения указанной скорости жидкости.

При значении волнового вектора для неподвижной жидкости, равном величине, обратной капиллярной постоянной, имеют место некоторые важные особенности: локальный минимум собственной скорости волны достигается при нулевой скорости жидкости относительно источника волн; в окрестности этого минимума собственная скорость волны может быть аппроксимирована квадратичной параболой; фазовая и групповая скорости волны совпадают.

6. Рассмотрены применения дифракции света на капиллярно-гравитационных волнах к технике измерений некоторых параметров поверхностного слоя жидкости. Измерения подобного рода оказываются весьма удобными с точки зрения практических применений и могут представлять интерес для самых разных областей науки и техники. Такие измерения, по сути, есть измерения *in situ*, причем в определенном смысле являются бесконтактными.

Предложена новая схема измерения отношения коэффициента поверхностного натяжения к плотности жидкости. «Минимально возможная» относительная погрешность для этой схемы может быть достаточно малой, менее  $10^{-4}$ .

Рассмотрены возможности измерения ускорения силы тяжести. «Минимально возможная» относительная погрешность для этой схемы может быть менее  $10^{-3}$ . Для многих задач гравиметрии это не слишком малая погрешность, однако, практическая реализация измерений может быть значительно проще, чем при традиционных подходах.

Рассмотрена схема измерения вязкости жидкости (не слишком превышающей вязкость воды). Показано, что «минимально возможная» относительная погрешность для этой схемы может быть менее  $10^{-2}$ .

Показано, что возможно определение скорости движения поверхностного слоя жидкости при нижнем пределе измерений примерно 0,3 мкм/с и динамическом диапазоне не менее  $10^4$ . Столь малые скорости могут быть обусловлены, в частности, термокапиллярной конвекцией, вызванной градиентами температуры жидкости или концентрации растворенных веществ. При этом собственно измерительная поверхность (определяемая диаметром светового пучка) может быть достаточно малой ( $10^{-2}$  см<sup>2</sup>).

7. Дифракция СВЧ-волн на гравитационных волнах рассмотрена как дальнейшее развитие методов радиолокационного определения параметров волнения, в частности, развитие методов определения регулярной составляющей эхо-сигнала.

Принята одномасштабная модель волнения – двумерные регулярные прогрессивные гравитационные волны (синусоидальные) одной длины «на глубокой воде». Радиолокатор, работающий в непрерывном (импульсном) режиме, установлен на самолете и «смотрит вниз», причем регистрируется эхо-сигнал обратного отражения. При этом диаметр облучаемого пятна на морской поверхности полагается меньшим, чем длина морской волны. С практической точки зрения наибольший интерес представляет сантиметровый диапазон электромагнитных волн.

Далее выделяется огибающая эхо-сигнала – полезный сигнал. При определенных условиях по спектру частот полезного сигнала можно определить как высоту, так и длину морских волн. Относительная погрешность измерения высоты волн может быть не более 10%.

Один из основных «вредных» факторов, влияющих на измерения - это «шероховатость» морской поверхности. Эта «шероховатость» может быть обусловлена пеной, капиллярными волнами и т.д. С увеличением длины электромагнитной волны роль этой «шероховатости» уменьшается, и для локаторов метрового диапазона она, по-видимому, несущественна. Однако для локаторов сантиметрового диапазона ситуация иная. Роль «шероховатости» будет возрастать с увеличением балла шкалы состояния поверхности моря (океана) под влиянием ветра. При низких баллах влиянием «шероховатости» можно пренебречь. При высоких баллах, по-видимому, вообще нет смысла говорить о регулярном отражении электромагнитной волны от морской поверхности.

8. Рассмотрены применения дифракции света на поверхностных акустических волнах (волнах Релея) к технике измерений некоторых параметров поверхностного слоя твердого тела. Измерения подобного рода могут представлять интерес для многих областей науки и техники.

Для указанных задач могут быть использованы схемы, аналогичные рассмотренным выше схемам для контроля параметров поверхностного слоя жидкости. Эти схемы являются существенно более простыми, чем обычно используемые традиционные интерференционные схемы. Тем не менее, при измерении поверхностных волн «в идеале» может быть обеспечена весьма малая приведенная погрешность,  $\delta C/C \approx 10^{-5}$ . При этом может регистрироваться сигнал, обусловленный поверхностными волнами с амплитудой смещений всего лишь  $10^{-3}$  мкм.

В общем случае нелинейной акустики по соотношению амплитуд различных гармоник, измеренных при нескольких значениях расстояния до источника акустических волн, можно сделать определенные выводы о параметрах нелинейности, т. е. о некоторых свойствах исследуемой среды.

**Полученные результаты могут быть основой как совершенствования известных, так и разработки новых методов измерений некоторых параметров среды методами акустооптики.**

## Литература

1. Базыкина Н.А. Акустооптические лазерные интерферометры в информационно-измерительных и управляющих системах. Автореферат дис. канд. техн. наук. - Пенза, Пензенский гос. университет, 2006. – 17 с.
2. Базылев П.В. Бесконтактные оптические методы возбуждения и регистрации ультразвуковых рэлеевских волн. Автореферат дис. канд. техн. наук. - Владивосток, Всероссийский НИИ физико-технических измерений «Дальсстандарт», 2003. – 24 с.
3. Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. - М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
4. Бобровников Г.Н., Новожилов Б.М., Сарафанов В.Г. Бесконтактные расходомеры. – М.: Машиностроение, 1985. – 128 с.
5. Богданов С.В. Акустооптические методы измерения скорости звука. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. – 139 с.
6. Важдаев К.В. Акустооптические преобразователи линейных перемещений. Автореферат дис. канд. техн. наук. – Уфа, Уфимский гос. авиационный технический университет, 2003. – 15 с.
7. Варичев М.А. Перспективы применения ультразвука для определения расхода воды в открытых каналах оросительных систем//Вопросы мелиорации, 2007. - № 5-6. – С. 52-59.
8. Введение в интегральную оптику / Под ред. М. Барноски. – М.: Мир, 1977. – 367 с.
9. Верещагин Е.М., Никитенко Ю.Г. Частотная и фазовая модуляция в технике связи. - М.: «Связь», 1974. – 224 с.
10. Гетеродинный способ измерения оптического пути. Авт. св. 715929 СССР / А.И. Гудзенко, С.М. Коломиец, Л.А. Осадчев и др. // Бюллетень "Открытия, изобретения", 1980. - № 6.

11. Громов Г.В., Озеров А.В., Шафрановский М.Н. Бесконтактные методы измерения расхода жидкости в напорных и безнапорных трубопроводах // Мир измерений, 2004. - № 1. – С. 4-8.
12. Гравитационно-капиллярные волны на поверхности жидкости: Учебно-методическое пособие / Б.П. Безручко, Т.В. Диканев, А.М. Захаревич. – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2003. – 17 с.
13. Даев Ж.А. Сравнительный анализ методов и средств измерения расхода газа. [Электронный ресурс]. URL: [http://ogbus.ru/authors/Daev/Daev\\_2.pdf](http://ogbus.ru/authors/Daev/Daev_2.pdf) (дата обращения - 20.01.2015).
14. Денисова М.О. Нестационарная концентрационная конвекция Марангони в вертикальных слоях жидкости. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Пермь, Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 2013. – 16 с.
15. Загородников А.А. Радиолокационная съемка морской поверхности с летательных аппаратов. - Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 240 с.
16. Зуева А.Ю. Математическое моделирование фотоиндуцированной термокапиллярной конвекции в слое прозрачной жидкости на поглощающей подложке. Дис. канд. физ.-мат. наук. - Тюмень, Тюменский гос. университет, 2007. – 121 с.
17. Климков Ю.М. Основы расчета оптико-электронных приборов с лазерами. - М.: Сов. радио, 1978. – 264 с.
18. Коломиец А.С. Лазерный измеритель искривления технологических каналов ядерных реакторов // Известия ВУЗ'ов. Ядерная энергетика, 1998. - № 1. – С. 12 - 14.
19. Коломиец С.М. Двухлучевой интерферометр удвоенной чувствительности // Оптико-механическая промышленность. - 1983.- № 6. - С. 30-31.
20. Коломиец С.М. Лазерный измеритель скорости жидкости // Оптический журнал, 1997. - № 1. – С. 58 – 60.
21. Kolomiets, S.M. Object displacements measured by acoustooptical methods // Physics of vibration, 1999. Volume 7, Number 2, 123 - 129.

22. Коломиец С.М. Некоторые особенности дифракции света на ультразвуке // Оптический журнал, 2000. - Т. 67, № 9. – С. 85-86.
23. Kolomiets, S.M. Optical methods for fluid motion control // Int. Conf. "Fluxes and Structures in Fluids". Moscow, June 20-22, 2001. - Pp. 107-109.
24. Коломиец С.М. Измерение скорости движения прозрачной жидкости методами акустооптики // Известия РАН. Серия ФАО, 2000. - Т. 36, № 6. – С. 847-852.
25. Коломиец С.М. Способ измерения скорости и перемещения исследуемой среды. Патент 2150707 РФ. Выдан 10 июня 2000 г.
26. Kolomiets, S.M. Laser beam diffraction at thin phase grating (Fresnel diffraction) / Physics of Vibration, 2002. - V. 10, № 4. - Pp. 212 - 221.
27. Kolomiets, S.M. Interference method for determining refractive index of medium or speed of sound in this medium // Physics of Vibration, 2002. - V. 10, № 4. - Pp. 222 – 227.
28. Kolomiets, S.M. Some features of acousto-optical methods as applied to measurement technology// Lasers for Measurements and Information Transfer 2002. Proceedings of SPIE, 2003. - Vol. 5066. - Pp. 69-77.
29. Коломиец С.М. Способ определения характеристик поверхностного слоя жидкости. Патент 2200944 РФ. Выдан 20 марта 2003 г.
30. Коломиец С.М. Способ определения скорости звука. Патент 2221224 РФ. Выдан 10 января 2004 г.
31. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 298 с.
32. Корпел А. Акустооптика. – М.: Мир, 1993. – 238 с.
33. Кремлевский П.П. Расходомеры и счетчики количества вещества. – СПб.: Политехника, 2002. – 410 с.
34. Красильников В.А. Введение в акустику. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 152 с.

35. Лазерная анемометрия, дистанционная спектроскопия и интерферометрия/  
В.П. Клочков, Л.Ф. Козлов, И.В. Потыкевич и др. – Киев: Наукова думка,  
1985. - 759 с.
36. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976. – 928 с.
37. Литвиненко О.Н. Основы радиооптики. - Киев: Техника, 1974. - 208 с.
38. Мустель Е. Р., Парыгин В.Н. Методы модуляции и сканирования света. -  
М.: Наука, 1970. – 295 с.
39. Осипов Ю.В. Оптические методы неразрушающего контроля: Лаб. практик. –  
СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2001. – 46 с.
40. Парыгин В.Н., Балакший В.И. Оптическая обработка информации. - М.:  
Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 142 с.
41. Показеев К.В., Чаплина Т.О., Чашечкин Ю.Д. Оптика океана. – М.: МАКС  
Пресс, 2010. – 216 с.
42. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.  
Специальные функции. - М.: Наука. Главная редакция физико-  
математической литературы, 1983. – 752 с.
43. Радиоокеанографические исследования морской поверхности/Под ред. С.Я.  
Брауде. – Киев: Изд. АН УССР, 1962. – 116 с.
44. Ребрин Ю.К. Управление оптическим лучом в пространстве. - М.: Сов.  
радио, 1977. - 336 с
45. Ринкевичус Б.С. Лазерная диагностика потоков. - М.: Издательство МЭИ,  
1990. – 287 с.
46. Серавин Г.Н. Измерение скорости звука в океане. – Л.: Гидрометеиздат,  
1979. – 136 с.
47. Способ определения октанового числа автомобильных бензинов. Патент  
2189039 РФ. - Выдан 10 сентября 2002 г. // В.М. Пашенко, В.С. Чуклов,  
В.И.Ванцов и др.

48. Справочник конструктора опτικο-механических приборов/ В.А. Панов, М.Я. Кругер, В.В. Кулагин и др. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1980. – 742 с.
49. Точные измерения расхода жидкостей / Б.В. Бирюков и др. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
50. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1979. - С. 126-131.
51. Ураксеев М.А., Важдаев К.В. Акустооптические датчики физических величин. – Уфа: Уфимск. гос. академия экономики и сервиса, 2008. – 111 с.
52. Физика океана/Под ред. Ю.П. Доронина. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 295 с.
53. Фотоприемники видимого и ИК диапазонов / Р.Дж. Киес, П.В. Крузе, Э.Г. Паттли и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 328 с.
54. Шамов А.В. Применение ультразвука для определения октанового числа бензина [Электронный ресурс]. URL: [http://www.mami.ru/science/autotr2009/scientific/article/s03/s03\\_28.pdf](http://www.mami.ru/science/autotr2009/scientific/article/s03/s03_28.pdf) (дата обращения - 23.01.2015).
55. Шулейкин В.В. Физика моря. М.: Наука, 1968. – 1083 с.55.
56. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. - М.: Наука, 1972. – 381 с.