

Версия 5 апреля 2002 г.

**Санкт-Петербургский государственный
университет**

Кафедра астрофизики

В.В. ИВАНОВ

АСТРОФИЗИКА ЗВЕЗД

**Санкт-Петербург
2002**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие материалы представляют собой методические разработки к спецкурсу „Строение и эволюция звезд” для студентов-астрономов Санкт-Петербургского университета, специализирующихся по астрофизике. Спецкурс был введен в 1976/77 учебном году и читается на V курсе.

Рекомендовать студентам подходящую по своему уровню и не слишком устаревшую литературу по астрофизике звезд на русском языке оказалось трудно. Есть ряд превосходных русских и переводных книг (их аннотированный перечень см. на стр. ??), но такой, которая годилась бы в качестве руководства для университетского астрономического курса, среди них нет. Одни из этих книг, сколь они ни блестящи, все же слишком популярны, другие трактуют предмет с позиций физика-теоретика и мало подходят для студентов-астрономов. Современные же западные руководства мало доступны студентам. В петербургских библиотеках их либо нет вовсе, либо они у кого-то на руках. Это побудило меня взяться за составление настоящего методического пособия. Оно призвано служить материалом, дополняющим лекции.

Рукопись называется „Астрофизика звезд”. Этот термин не является общепринятым, и поэтому стоит его пояснить. Имеется ряд книг по физике звезд, в которых главным объектом исследования являются физические процессы, протекающие в звездах. Есть и многочисленные книги о звездах, написанные с чисто астрономических позиций, с почти полным игнорированием физики дела. Название „Астрофизика звезд” призвано подчеркнуть, что делается попытка соблюсти тот баланс астрономии и физики, который характерен для сегодняшней астрофизики. Получив теоретический результат, выражаемый некоторой формулой, мы стараемся дать не только обсуждение его физического смысла, но и астрономических следствий.

Специфика нашего университета состоит в том, что подготовка астрономов ведется на математико-механическом, а не на физическом факультете. Поэтому знания студентов по физике оставляют желать лучшего. Кроме того, как показывает опыт, вывод той или иной формулы часто воспринимается нашими студентами едва ли не как самоцель. Умение увидеть за формулой физику, которую она описывает, почти отсутствует. Получение простейших численных оценок дается студентам мат-меха с трудом, а главное, вызывает у них характерную психологическую трудность: такие оценки кажутся им только упражнениями в

арифметике, а не тем естественным элементом, который необходим для выработки физической картины явления. Эти обстоятельства наложили заметный отпечаток на характер изложения.

Учебное пособие — это всегда компиляция. Ни в коей мере не претендует на оригинальность материала или способа изложения и эта рукопись. При ее составлении широко использован ряд имеющихся в мировой литературе прекрасных учебных руководств, монографий и недавних обзоров. Было составлено некоторое число задач и упражнений, как правило, совсем легких. Их главная цель — дать возможность читателю проверить, как усвоен изложенный материал. Хотя некоторые задачи дополняют основной текст, они слишком просты, чтобы служить для развития навыков самостоятельной работы.

Методическим образцом для меня в какой-то мере служил берклиевский курс физики, читать который студенту нетрудно и интересно. Часто вспоминались мне и советы моих друзей — астрофизиков-наблюдателей: „Чем меньше будет формул — тем больше будет читателей-астрономов”. К сожалению, формул оказалось все же порядочно. С каждым годом число их росло, и постепенно против моей воли они отвоевывали себе в курсе все большее жизненное пространство. В конце концов этому пришлось перестать сопротивляться. Провалившуюся политику вытеснения формул сменила политика оказания всемерной помощи читателю-астроному в их ассимиляции.

Работая над этой рукописью, я старался хотя бы местами сохранить стиль живой беседы со слушателями. Лаконичность было решено принести в жертву эмоциональности, которая не только не изгонялась, но скорее поощрялась в надежде поддержать интерес читателя.

Превращение лекционных разработок в методическое пособие продвигается у меня очень медленно. Имея в виду интересы студентов, было решено, не дожидаясь окончания всей работы, размножить в небольшом числе экземпляров уже готовые части пособия. Кроме того, с января 2002 г. они доступны в Интернете на сайте Астрономического института СПбГУ (<http://www.astro.spbu.ru>). По мере появления новых готовых разделов их предполагается обнародовать таким же путем.

Так как работа над рукописью не окончена, любые замечания и предложения будут очень полезны. Пособие предназначено в первую очередь для студентов, и поэтому их комментарии будут для меня особенно ценными.

В.В. Иванов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	I
I КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА	1
1 Введение	2
1.1 Звезды во Вселенной	2
1.2 Место звездной астрофизики в астрономии	4
1.3 Структура и задачи астрофизики звезд	4
1.4 Становление эволюционной астрономии	9
1.5 Понимание становится шире и глубже	13
2 Эволюция звезд: что, почему и как	16
2.1 Звезда как физический объект	16
2.2 Физическая классификация звезд	19
III МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ЗВЕЗДЫ	24
1 Уравнение механического равновесия	26
1.1 Вывод уравнения гидростатического равновесия	26
1.2 Динамическая шкала времени	28
1.3 Обсуждение	32
1.4 Динамическое время звезд разных типов	35
1.5 Гидростатика звезды как частный случай ее гидродинамики	37
1.6 Равновесие вращающейся звезды	38
1.7 Уравнение равновесия звезды в ОТО	41
2 Теорема вириала	47
2.1 Гравитационная энергия звезды	47
2.2 Вывод теоремы вириала из условия гидростатического равновесия	51
2.3 Динамический вывод теоремы вириала	53
2.4 Более общие вириальные соотношения	56
2.5 Частные случаи	59
2.6 Магнитная теорема вириала	63
2.7 Релятивистская теорема вириала	67
2.8 Тензорная теорема вириала	69

3	Гравитационное сжатие и энергетика звезд	73
3.1	Кельвиновская шкала времени	73
3.2	Энергетические оценки	76
3.3	Гравитационное сжатие как регулятор ядерной эволюции звезды	80
4	Задачи и упражнения	84
IV	ФИЗИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ВНУТРИ ЗВЕЗД	87
1	Давления в звездах	88
1.1	Оценки давления в центре звезды	88
1.2	Физическое обсуждение	91
1.3	Астрономическое обсуждение	94
2	Температуры в недрах нормальных звезд	99
2.1	Оценки средних температур нормальных звезд	99
2.2	Обсуждение	101
2.3	Астрономические следствия	103
3	Роль давления излучения	105
3.1	Оценка давления излучения в центре звезды	105
3.2	Обсуждение	107
3.3	Температуры в звездах при учете давления излучения	109
3.4	Давление излучения и массы звезд	110
3.5	Массы звезд и мировые постоянные	111
4	Задачи и упражнения	113
V	ПОЛИТРОПЫ	116
1	Основы теории политроп	117
1.1	Что такое политропа	117
1.2	Основные уравнения. Соотношения подобия	119
1.3	Гравитационный потенциал политропы	123
2	Физические характеристики политроп	129
2.1	Гравитационная энергия	129
2.2	Радиус и масса политропы и связь между ними	130
2.3	Другие физические характеристики	135
2.4	Полная энергия и устойчивость политроп	139

3	Полиτροпы из невырожденного газа	142
3.1	Нормальные полиτροпы	142
3.2	Полиτροпы со световым давлением	145
3.3	Стандартная модель Эддингтона	148
3.4	Обсуждение стандартной модели	152
4	Изотермические газовые шары	157
4.1	Постановка задачи	157
4.2	Изотермическая функция Эмдена	158
4.3	Гравитационная неустойчивость изотермического шара . .	162
4.4	Обсуждение неустойчивости	164
5	Структура полиτροп	167
5.1	Распределение вещества и давления	167
5.2	Переменные Милна U и V	168
5.3	Распределение температуры	171
5.4	Гравитационное поле	174
6	Полиτροпа — тест глобальных параметров звезд	178
6.1	Мотивировка	178
6.2	Простейшее правило	178
6.3	Уточненное правило	182
6.4	Альтернативный вариант	186
7	Задачи и упражнения	188
VI	CNO–ЦИКЛ	193
1	CNO–цикл: структура и функционирование	194
1.1	Простой CN–цикл	194
1.2	Тройной CNO–цикл	196
1.3	Основные параметры реакций	200
1.4	Характерные времена реакций	204
2	Равновесный режим CNO–цикла	207
2.1	Простой CN–цикл	207
2.2	Равновесные распространенности нуклидов CN–цикла . .	209
2.3	Равновесный тройной CNO–цикл	211
3	Кинетика нуклеосинтеза в CNO–цикле	216
3.1	Основное приближение	216

3.2	Выход на равновесный режим в CN-цикле	217
-----	---	-----

VII	БЕЛЫЕ КАРЛИКИ	221
------------	----------------------	------------

1	Модель Чандрасекара: уровень II	222
1.1	Гравитационный потенциал	222
1.2	Обсуждение	223
1.3	Уравнение Чандрасекара	227

VIII	КОЕ – КАКАЯ ФИЗИКА	230
-------------	---------------------------	------------

1	Термодинамика звездного вещества	231
1.1	Идеальный невырожденный газ	231
1.2	Равновесное излучение	235
1.3	Идеальный газ в поле излучения	237
2	Кулоновские поправки	243
2.1	Минимум для астронома-прагматика	243
2.2	Дебаевское экранирование	246
2.3	Термодинамика разреженной плазмы	250
3	Задачи и упражнения	253

Глава I

КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА

It is reasonable to hope that in a not too distant future we shall be competent to understand so simple a thing as a star.

A.S. Eddington

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Звезды во Вселенной

Звезды — это те объекты, которые дали имя науке АСТРОномия. Это не случайно. На нынешнем этапе эволюции мира они, несомненно, являются во многих от-

ношениях самыми важными объектами Вселенной.

Во-первых, в звездах сосредоточена бóльшая часть массы светящегося вещества Вселенной: в нашей Галактике — около 97%, в галактиках других типов часто и того больше. Правда, есть еще так называемая скрытая масса, пока непосредственно не наблюдаемая, природа которой сейчас широко дискутируется. Хотя полной ясности здесь еще нет, в любом случае *звезды — одна из основных форм существования материи в сегодняшнем мире.*

Во-вторых, звезды являются важнейшими поставщиками энергии электромагнитного излучения во Вселенной. Впрочем, здесь нужно сделать две оговорки. Мы не учитываем фонового реликтового излучения, в настоящее время практически не влияющего на состояние вещества и энергетику подавляющего большинства происходящих во Вселенной процессов. В далеком космологическом прошлом его роль была огромной, но на звездном этапе эволюции мира взаимодействие реликтового излучения с веществом настолько слабое, что его влиянием можно, как правило, пренебрегать. Вторая оговорка состоит в том, что если лет тридцать – сорок назад звезды можно было считать почти единственными в мире поставщиками энергии электромагнитного излучения, то теперь выяснилось, что это не так. Они делят эту честь с ядрами активных галактик и квазарами, дающими энергию того же порядка. В отличие от звезд, детали механизма энерговыделения в ядрах галактик и в квазарах еще далеко не ясны. Несмотря на важность в энергетике Вселенной этих во многом пока загадочных объектов, содержащих, по-видимому, сверхмассивные черные дыры, классическое представление о важнейшей роли звезд в энергетике мира, безусловно, остается верным и сегодня: звезды дают не меньше, а, судя по всему, в несколько раз больше энергии, чем ядра галактик и квазары. Кроме того, следует иметь в виду, что в обычных (не пекулярных) галактиках — а их большинство — относительная энергетическая роль ядер на нынешнем этапе развития этих галактик ничтожна. Это верно, в частности, для нашей Галактики. Резюмируя, можно утверждать, что *звезды — это важнейшие энергетические установки Вселенной.*

В-третьих, химический состав Вселенной, точнее, распространенность элементов и изменение ее со временем почти целиком определяются процессами ядерных превращений в недрах звезд. На раннем этапе космологической эволюции, когда звезд еще не было, практически не существовало и никаких других элементов, кроме водорода и гелия. Ни Земля, ни другие планеты земной группы, состоящие в основном из тяжелых элементов, образоваться из этого первичного вещества не могли. Все, что окружает нас на Земле — и углерод, эта основа жизни, и кислород, которым мы дышим, и кремний, входящий в песок, по которому мы ходим, — словом, все элементы, кроме водорода и частично гелия, были синтезированы в ядерных топках звезд от пяти до примерно пятнадцати миллиардов лет назад. Это вещество каким-то образом было затем рассеяно в межзвездной среде — частично при взрывах сверхновых, частично путем спокойного истечения из звезд, при сбросах звездных оболочек и т. п. Потом из вещества межзвездной среды, обогащенного таким путем тяжелыми элементами, сформировались Солнце и планеты. С тех пор прошло около пяти миллиардов лет. За это время ядерный состав вещества Земли оставался почти неизменным, хотя, конечно, с ним происходили многие важные процессы — гравитационная дифференциация элементов, сложные химические превращения и т. п.

Часто приходится слышать и читать, что Солнце — источник жизни на Земле, потому что оно нас освещает и обогревает. Однако, как видим, с не меньшим, а пожалуй даже с бóльшим правом на эту роль могут претендовать и те теперь уже умершие звезды, которые когда-то буквально „во чреве своем” породили элементы, ставшие основой жизни.

Энергетическая роль звезд известна очень широко — об этом пишется в школьных учебниках, в популярных книгах по астрономии, не говоря уже о вузовских курсах. Роль же звезд в ядерной эволюции вещества Вселенной подчеркивается гораздо меньше — вероятно, потому, что она была выяснена не так давно и многие детали и сейчас еще поняты не до конца. Между тем, она не менее важна, что мы подчеркнем еще раз такой заключительной фразой: *звезды — это основные центры синтеза элементов в природе.*

Хотя роль звезд во Вселенной перечисленным выше далеко не исчерпывается, все же можно думать, что самое существенное было указано. Итак, изучив строение и эволюцию звезд, мы получим ответы на три важнейших вопроса: в каких физических условиях находится бóльшая часть видимого вещества в мире, как рождается основная часть электромагнитного излучения, активно взаимодействующего с веществом, и каким путем происходит эволюция материи на ядерном уровне. Без

сомнения, эти вопросы имеют не только и даже не столько астрономическое, сколько общенаучное и отчасти философское значение.

1.2. Место звездной астрофизики в астрономии

Давая ответ на те три основных вопроса, о которых только что говорилось, звездная астрофизика указывает вместе с тем пути к решению многих чисто астрономических проблем, хотя и гораздо более частных, но все же захватывающих своей масштабностью. Вот несколько примеров: установление шкалы расстояний в мире звезд; определение возрастов групп звезд и даже отдельных звезд; истолкование различий в химическом составе атмосфер звезд; объяснение звездной переменности и т. д. Без преувеличения, звездная астрофизика — один из основных краеугольных камней здания современной астрономии.

Оглянемся на путь, пройденный астрономией в XX веке, и постараемся выделить ее крупнейшие достижения — по одному на каждое поколение астрономов этого столетия. Больших трудностей в выборе этих эпохальных открытий у нас не возникнет.

Крупнейшее достижение первой трети века — это, несомненно, определение размеров нашей Галактики, выяснение положения Солнца в ней и установление шкалы межгалактических расстояний. Важнейшее достижение второй трети века — открытие источников энергии звезд и создание теории звездной эволюции, позволившей понять в общих чертах развитие Вселенной на звездном этапе ее жизни. Главным достижением конца века стало существенное продвижение вперед в области еще больших пространственно-временных масштабов, т. е. прогресс в области внегалактической астрономии и космологии. Первый из этих трех этапов развития астрономии XX века по справедливости можно назвать *эпохой галактической астрономии*, второй этап — *золотой век звездной астрофизики*, наконец, сейчас мы живем в *космологическую эру* развития астрономии.

1.3. Структура и задачи астрофизики звезд

Астрофизика звезд, понимаемая широко, включает в себя три раздела — физику звездных атмосфер, теорию строения звезд и собственно звездную астрофизику. С точки зрения астронома первые два раздела в какой-то мере вспомогательные, или, правильнее, предварительные. Для него они — прежде всего фундамент главного, третьего раздела, цель которого — понять закономерности мира звезд и пути его

эволюции.

Небольшое наизидание. Устройство теоретического фундамента звездной астрофизики кажется многим астрономам сложным. Кроме того, в ряде руководств по теории строения звезд и особенно по теории звездных атмосфер эти разделы астрофизики излагаются так, как будто развитие соответствующей теории и есть конечная цель. Все это привело к появлению двух искаженных взглядов на теоретические основы астрофизики звезд. Одни излишне увлекаются изучением деталей конструкции этого фундамента. Гордые тем, что они разобрались в хитросплетениях физических факторов, определяющих строение звезды, за этими деревьями они перестают видеть лес, т. е. само здание звездной астрофизики. А ведь ради возведения его этот фундамент в конечном счете и был сложен. Таковы, к сожалению, некоторые астрофизики-теоретики. Другие, отпугнутые сравнительной сложностью и малой астрономичностью теории звездных атмосфер и теории строения звезд, приходят к мысли, что им вовсе ни к чему разбираться в том, на каком же основании покоится кажущееся им прекрасным дворцом здание звездной астрофизики. Они полагают, что этим дворцом можно не только любоваться, но и строить его дальше, не заточая себя надолго в мрачное подземелье его „физического подвала” — достаточно наскоро сколотить легкие леса, хотя и шаткие, но зато позволяющие быстро подняться наверх, туда, где сейчас идет кладка стен очередного этажа (почему-то так хочется, чтобы он был последним!). Так или примерно так в глубине души думают многие астрономы-наблюдатели.

Не будем осуждать ни тех, ни других, но постараемся избежать их узости и попытаемся в меру сил держаться поближе к тому, что большинство астрофизиков сочло бы золотой серединой.

Главная задача первого раздела астрофизики звезд — физики их атмосфер — состоит в извлечении из наблюдений данных об основных параметрах звезд. Важнейшими внешними характеристиками звезды являются ее *масса*, *светимость* и *радиус*, а также *химический состав атмосферы*. Прямому измерению эти параметры, как правило, не поддаются. Основное назначение *теории звездных атмосфер* — дать методы нахождения этих величин по тем или иным характеристикам наблюдаемого излучения звезды. Ими могут служить звездные величины в какой-либо фотометрической системе — широкополосной (чаще всего U, B, V) или узкополосной, спектры звезд низкой дисперсии, пригодные главным образом для изучения распределения энергии в континууме, или более высокой дисперсии, по которым можно получить также и эквивалентные ширины достаточно большого числа спектральных линий, реже — спектральные наблюдения с высокой дисперсией, позволяющие детально исследовать также и профили линий. Две другие существенные характеристики звезды — *скорость осевого вращения* и *напряженность магнитного поля на поверхности*. Их определение также основывается на результатах теории звездных атмосфер. Оно требует спектральных

наблюдений хотя бы среднего или лучше высокого (для определения вращения) или высшего (магнитные наблюдения) спектрального разрешения. Наконец, изучение *движений вещества* в наружных слоях звезд, в частности, важного для понимания эволюции процесса истечения материи из звезд, или *звездного ветра* — это тоже компетенция физики звездных атмосфер. Разумеется, определенный интерес как объекты исследования представляют и сами по себе атмосферы звезд, но все же главная цель их изучения, повторяем, состоит в получении тех данных о звездах, которые служат исходным материалом при исследовании строения и развития звезды как целого.

Другой фундаментальный раздел звездной астрофизики — физика звездных недр, или *теория строения звезд* (у нас еще довольно часто используется несколько старомодный и уже редко встречающийся в мировой литературе термин „теория *внутреннего* строения звезд”). Главная цель здесь — понять физические процессы, определяющие структуру и эволюцию звезд, и дать методы расчета строения звезд и его изменения со временем.

Теория строения звезд содержит три главных компонента, можно сказать, покоится на трех китах. Во-первых, это *теория термоядерных реакций*. На протяжении большей части жизни звезды они поставляют энергию, расходуемую ею на излучение. От места производства в недрах звезды энергию нужно затем доставить к месту потребления — на поверхность, откуда она излучается звездой в окружающее пространство. Теория этой транспортировки энергии — *теория переноса тепла* — есть второй основной компонент физики звезд. Наконец, очевидно, что строение звезды зависит от способности звездного вещества противостоять гравитации, стремящейся его сжать. Эта способность определяется *уравнением состояния* $P = P(\rho, T)$, показывающим, какое давление P любой элемент массы звезды, имеющий плотность ρ и нагретый до температуры T , оказывает на окружающую его среду. Таков третий компонент.

Если говорить о физических явлениях в подавляющем большинстве звезд, то главное мы только что перечислили. Взаимодействие этих факторов учесть, однако, непросто. Звезда — существенно нелинейный объект, и расчет ее строения и развития является сложной вычислительной задачей. Тонкая техника расчетов звездных структур, полностью революционизированная появлением компьютеров, сама стала существенной главой теории строения звезд.

Мы уже обращали внимание на то, что на теорию звездных атмосфер можно смотреть (возможно, несколько односторонне) как на некий блок обработки непосредственных данных наблюдений звездного излу-

чения, переводящий их в сведения об основных параметрах звезд. Подобным же образом и теория строения звезд интересна не столько сама по себе, сколько как фундамент *теории звездной эволюции*, этого венца всей астрономии звезд.

В этом разделе об эволюции звезд много говорить мы не будем, ограничившись несколькими замечаниями общего характера. Наряду с только что обрисованной общефизической основой теория эволюции звезд имеет прочные *астрономические основания*. Главными являются разнообразные *статистические данные об основных параметрах звезд и об их пространственно-кинематических характеристиках*. Особенно важную роль сыграли и продолжают играть в теории эволюции звезды, входящие в звездные скопления. Следует с самого начала подчеркнуть, что число следствий теории звездной эволюции, подтвержденных наблюдениями, во много раз превышает число ее исходных предположений, которые к тому же сами по себе вполне естественны. В активе этой теории — ряд замечательных предсказаний, впоследствии подтвержденных прямыми наблюдениями. Приведем характерные примеры.

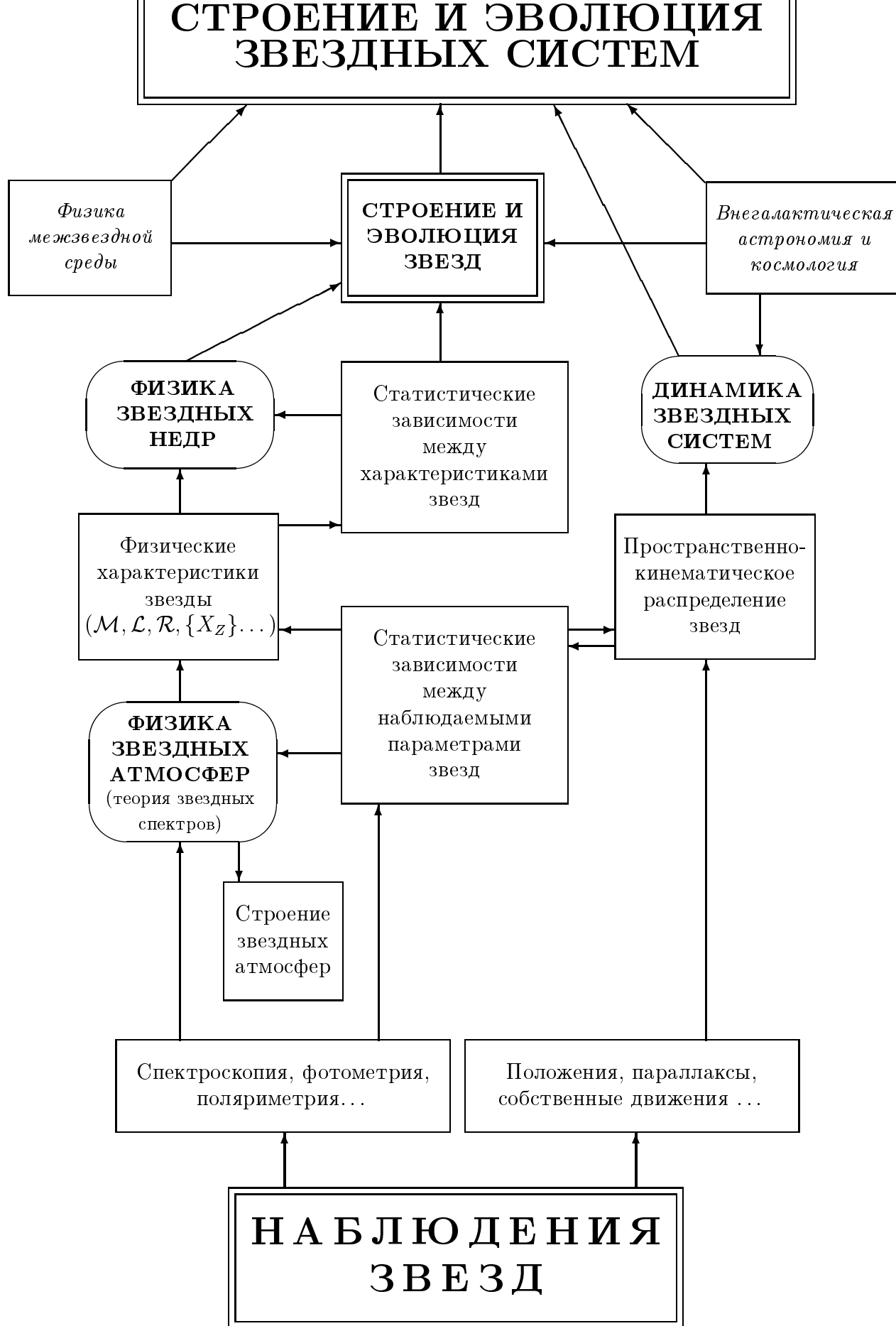
На основе идей теории звездной эволюции Ф. Хойл еще в 50-е годы прошлого века предсказал существование возбужденного уровня у ядра ^{12}C с энергией около 7.5 Мэв. Эксперименты, специально поставленные на ускорителях, показали, что такой уровень действительно существует. Его энергия оказалась равной 7.65 Мэв. Боюсь, что этот пример, относящийся к событиям 50-летней давности, стал почти столь же затасканным, как когда-то история с отождествлением линий „небулия” . . .

В качестве второго примера приведем блистательное наблюдательное подтверждение правильности модели строения Солнца, полученное из гелиосейсмологических исследований. Третий пример — регистрация у сверхновой 1987А того кратковременного всплеска нейтринного излучения, которым, согласно имеющимся представлениям, должны сопровождаться вспышки сверхновых. Можно привести множество и других примеров предсказаний и иных влияний теории строения и эволюции звезд на наблюдательную звездную астрофизику, но мы ограничимся сказанным.

Рис. I.1.1:

Общая структура астрономии звезд.

То, что мы называем астрофизикой звезд, дано синим цветом, зеленый цвет — галактическая астрономия.



Наше обсуждение структуры и задач астрофизики звезд несколько затянулось, да к тому же мы, кажется, немного ушли в сторону. Пришла пора резюмировать изложенное. На рис. I.1.1 сделана попытка изобразить общую структуру астрономии звезд и взаимоотношение различных ее разделов в виде блок-схемы. Пожалуйста, рассмотрите этот рисунок внимательно, а не просто скользните по нему беглым взглядом. Сопоставьте рисунок с обсуждением, которое было дано выше. Согласия в деталях между ними нет, хотя нет и прямых противоречий. Небольшие различия в общей структуре и особенно в местоположении отдельных блоков как они, с одной стороны, изображены на рисунке и, с другой, описаны в тексте, отражают условность и известную произвольность любой подобной структуризации.

1.4. Становление эволюционной астрономии

Прежде чем приступить к изучению предмета по существу, полезно бросить хотя бы беглый взгляд на историю вопроса. Звездная астрофизика, добившись к середине 50-х годов XX века решающих

успехов, коренным образом изменила лицо астрономии. До этого астрономия была наукой, занимавшейся главным образом изучением различных небесных объектов как таковых, их описанием, сопоставлением, классификацией, выяснением строения. Однако понять эволюцию и взаимосвязь основных структурных единиц Вселенной тогда еще не могли. Об этом много говорили и писали, но то были скорее фантазии и смелые, но недостаточно обоснованные гипотезы, чем реальное продвижение вперед на твердом фундаменте астрономических фактов и физических законов. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что в ту пору мы имели морфологическую астрономию.

В качестве грубой исторической аналогии можно считать, что для астрономии первая половина XX столетия была примерно тем же этапом, что для биологии — конец XVIII – первая половина XIX века. В биологии тогда происходило главным образом накопление, сопоставление и осмысление фактического материала на основе незадолго до того созданной классификации Линнея. Потом пришел Дарвин, и лицо биологии сразу решительно изменилось — она стала эволюционной. Это был коренной перелом. Интересно, что почти одновременно с созданием эволюционного учения Дарвина были открыты и законы Менделя, являющиеся „микроосновой” (на клеточном уровне) феноменологической „макроскопической” теории естественного отбора Дарвина. Эволюционные идеи и изучение молекулярно-генетических основ макроскопических биологических процессов тесно переплелись между собой и составляют

сейчас одно из основных направлений исследований в биологии.

Со сдвигом на столетие то же самое произошло и в астрономии. Все началось с попыток понять пути развития звезд чисто астрономическими средствами. После ряда явно неудачных опытов (Н. Локьер, конец XIX в.; Г.Н. Рессел, 20-е годы XX в.) в 30-х годах пришли первые серьезные успехи, и контуры эволюционной картины стали понемногу проступать. Это был плод коллективного творчества, своего Дарвина в астрономии не было.

Роль классификации Линнея для звезд играют диаграмма Герцшпрунга – Рессела (ГР) (Э. Герцшпрунг, 1911 г.; Г.Н. Рессел, 1913 г.) и соотношение масса – светимость. (Обычно его связывают с именем А. Эддингтона, что неточно. Впервые оно появилось у Дж. Холма в 1911 г. и затем рассматривалось Ресселом в 1913 г. и Герцшпрунгом в 1918 г. Исследование же Эддингтона относится к 1924 г.). То, что диаграмма ГР и зависимость масса – светимость отражают закономерности процессов рождения и развития звезд, поняли сразу же, однако подобрать чисто астрономический ключ к однозначному их истолкованию никак не удавалось.

Быть может, вы помните, что для Дарвина толчком к пониманию процесса эволюции послужило изучение фауны Галапагосских островов, изолированных от остального мира океанскими просторами. Роль Галапагос в астрономии сыграли звездные скопления — более или менее обособленные группы звезд совместного происхождения. Во-первых, из простых динамических соображений удалось показать, что возраст типичных рассеянных скоплений очень мал, $10^7 \div 10^8$ лет (Б. Бок, 1937 г.; В.А. Амбарцумян, 1939 г.). Значит, процесс образования звезд не закончился миллиарды лет назад, а продолжается и в наше время. Во-вторых, диаграммы ГР для рассеянных скоплений имели весьма специфический вид (Р. Тремплер, 1930 г.). Хотя для различных скоплений они заметно отличались, все диаграммы можно было расположить в виде некоторой последовательности, зависящей от одного параметра. Эволюционное истолкование напрашивалось само собой: параметр классификации должен быть однозначно связан с возрастом скопления. Из ряда соображений было установлено, что те скопления, в которых есть звезды типов Вольфа–Райе, О или ранние В, являются самыми молодыми. Так чисто астрономическими средствами было установлено, что звезды типа О и ранних подклассов В эволюционируют очень быстро, а значит, все они очень молоды. Следующим важным шагом явилось выделение двух типов звездного населения (В. Бааде, 1944 г.). Они сильно отличаются по виду своих диаграмм ГР, по пространственному распределению звезд (население I является плоской составляющей Галактики, население II —

сферической), по кинематическим особенностям: пространственные скорости (по отношению к Солнцу) у первых малы, у вторых — велики. Не менее важным для теории эволюции было установление в конце 40-х — начале 50-х годов огромного различия в содержании тяжелых элементов в атмосферах звезд населений I и II.

Таковы были главнейшие победы, одержанные при штурме проблемы звездной эволюции на астрономическом фронте. Казалось, „еще напор — и враг бежит. . .” Однако решающему сражению суждено было разыграться не здесь. Сил одних астрономов явно не хватало, им нужны были союзники.

Параллельно с чисто астрономическим подходом к проблеме эволюции звезд, который был в основе своей эмпирическим, происходило (долгое время почти от него независимое) развитие некой специальной области физики — теории строения звезд. До конца сороковых годов прошлого века обратное ее влияние на астрономию было в общем невелико, хотя, конечно, и здесь были отдельные блестящие успехи. Наиболее эффектны, пожалуй, два ранних достижения. Первое — это объяснение того, почему в природе не существует звезд с массами, превосходящими по порядку 100 масс Солнца (А. Эддингтон, двадцатые годы). Как вы знаете, дело здесь в световом давлении; об этом у нас еще будет подробный разговор. Второе — объяснение строения казавшихся до этого совершенно загадочными белых карликов. Их непривычно высокая средняя плотность — порядка тонны в кубическом сантиметре — лет семьдесят назад вызывала у астрономов не меньше изумления, недоверия и неясных опасений, чем сейчас, скажем, обсуждение свойств мира на самых ранних этапах космологического расширения.

Несмотря на эти и другие достижения теории строения звезд, по крайней мере до конца сороковых годов отношение к ней большей части астрономов было весьма сдержанным. Одни считали ее хотя и красивой, но в общем почти замкнутой в себе теорией, приносящей не так уж много пользы астрономии. Другие — таких, вероятно, было большинство — сторонились ее просто потому, что эта теория казалась им пугающе сложной.

С конца 30-х до середины 50-х годов XX в. в расчетах моделей звезд и последующем их сравнении с данными наблюдений были достигнуты замечательные успехи, позволившие наконец-то разобраться в путях развития звезд. Это резко изменило отношение большинства астрономов к теории звезд — неоправданный скептицизм сменился восторженным преклонением, зачастую недостаточно критическим. Радикальное изменение ситуации было связано в первую очередь с тем, что еще в конце 30-х годов были надежно отождествлены источники энергии звезд (Г. Бете,

К. Вейцекер, 1939 г.). Ядерные реакции, за счет которых звезда светит большую часть своей жизни, как известно, имеют результатом слияние четырех протонов в α -частицу. Они весьма нетривиальны. Образование α -частицы должно сопровождаться двумя обусловленными слабым взаимодействием β -распадами. Это и необходимость преодоления за счет туннельного эффекта высокого кулоновского барьера при столкновениях ядер ведет к тому, что соответствующие реакции протекают крайне медленно. Именно поэтому звезды и живут так долго. Именно поэтому сегодня, $\sim 10^{10}$ лет спустя после начала звездообразования, мир еще находится в расцвете сил, а не на стадии старческого угасания: энергетические запасы, содержащиеся в первичной водородно-гелиевой плазме, пока далеки от исчерпания.

Проникновение ядерной физики в астрономию знаменовало приближение нового этапа в изучении звезд — синтеза астрономического и физического подхода. Основные физические процессы, управляющие развитием звезды от довольно ранних этапов ее формирования из межзвездного вещества до весьма поздних стадий эволюции, предшествующих переходу звезды в ее конечное состояние — ту или иную компактную конфигурацию — оказались теперь понятыми. Это не значит, что все сразу стало ясным. Были трудности, и очень значительные, причем не только в технических деталях, но и в основополагающих представлениях.

Один из таких принципиальных вопросов — роль потери массы в ходе эволюции звезды. Теперь известно, что вплоть до довольно поздних стадий эволюции, и во всяком случае за время жизни большинства звезд на главной последовательности потеря массы несущественна. На продвинутых же стадиях эволюции это не так, масса звезды может существенно меняться. Ясное понимание этого пришло далеко не сразу.

Кроме вопроса о роли потери массы, были у теории и другие трудности, другие возможные „развилки”. Окончательный выбор направления делался по стандартной схеме: рассматривали все варианты и останавливались на том, который давал результаты, согласующиеся с наблюдательными данными. Таким путем было, в частности, установлено, что в тех зонах в звездах, где энергия переносится излучением (а не конвекцией), ролью перемешивания вещества можно пренебрегать. Впрочем, в самое последнее время это положение подвергается некоторой ревизии.

Почему вопрос о перемешивании столь важен? Дело в том, что термоядерные реакции постепенно изменяют химический состав вещества. Если перемешивание достаточно интенсивно, звезда в ходе эволюции остается химически однородной. Если же перемешивания нет, то из-за

сильной зависимости скорости термоядерных реакций от температуры ядерное топливо в центральных областях звезды будет выгорать быстрее, чем на периферии. Со временем звезда должна будет стать химически неоднородной. В конце концов ядерное топливо близ центра полностью исчерпается. В звезде возникнет, как говорят, выгоревшее ядро. Строение звезды окажется при этом совсем не таким, как при полном перемешивании. Ясно поэтому, что вопрос о скорости перемешивания вещества в звездах — отнюдь не второстепенная деталь.

К концу сороковых годов эти вопросы оказались выясненными, и проблема эволюции звезд созрела для решения. Прошло еще несколько лет, давших в руки астрофизикам два новых важных технических средства. Во-первых, появились компьютеры. Они сразу же были использованы для расчетов эволюционных последовательностей звездных моделей. Во-вторых, возмужала и с созданием системы U, B, V обрела прочную основу фотоэлектрическая фотометрия. Началось ее широкое применение для изучения звезд в скоплениях. Использование этих технических новинок в сочетании с накопленными ранее сведениями принесло долгожданный успех: пути эволюции звезд перестали быть загадкой. Звездная астрофизика вступила в пору зрелости. Пришла пора сбора урожая.

1.5. Понимание становится шире и глубже

В 60-е годы картина звездной эволюции была дополнена множеством новых важных деталей. Прежде всего следует сказать о двух вещах. Во-первых, было установлено, что тонкие различия химического состава звездных атмосфер могут служить своеобразным зондом для изучения процессов, происходящих в недрах звезд, в частности, перемешивания вещества. Во-вторых, были поняты многие особенности эволюции двойных звезд, в которых, как оказалось, важную роль играет перетекание вещества с одного компонента на другой.

В 60-е – 70-е годы несколькими группами исследователей были произведены обширные расчеты эволюционных последовательностей моделей звезд разных масс и разного химического состава. Их результаты сразу нашли широкое применение для количественной интерпретации разнообразных наблюдательных данных о звездах и звездных системах. Отныне астрономы-наблюдатели получили возможность пользоваться плодами труда теоретиков, не слишком углубляясь в дебри теории. С этого момента теория звездной эволюции стала повседневно используемым рабочим инструментом. Вскоре она обрела у астрономов статус непогрешимой истины, став своего рода астрофизическим Священным

Писанием. Однако история на этом не остановилась.

В 1968 г. было сделано выдающееся открытие, значение которого для понимания картины звездной эволюции трудно переоценить. Были открыты пульсары (Э. Хьюиш с сотрудниками). Они тут же были отождествлены с нейтронными звездами — телами с плотностями порядка ядерной. На возможность существования таких объектов в природе было указано еще в 30-е годы, сразу же после открытия нейтрона (1932 г.). За несколько лет до пульсаров были открыты рентгеновские двойные, и в начале 70-х годов в системе Cyg X-1 был обнаружен компактный объект, являющийся, судя по всему, черной дырой звездной массы. С этого времени в течение двух – трех десятилетий исследование продуктов вспышек сверхновых — нейтронных звезд, звездных черных дыр и быстро расширяющихся в межзвездную среду газовых остатков сверхновых вышло на передний край астрофизики. Вспышка сверхновой 1987А в Большом Магеллановом Облаке дала новые замечательные подтверждения целого ряда предсказаний астрофизиков-теоретиков.

Значительный прогресс был достигнут в понимании самых ранних этапов формирования звезд. Здесь определяющую роль сыграли и продолжают играть наблюдения, причем не только в оптическом, но особенно в инфракрасном и радиодиапазонах. Реальная картина оказалась гораздо богаче, чем та, которую давали ранние простые сферически-симметричные модели теоретиков.

Возможность непосредственно заглянуть в недра хотя бы ближайшей звезды — Солнца — еще полвека назад казалась несбыточной мечтой. Однако в начале 70-х годов было впервые зарегистрировано нейтринное излучение Солнца, приходящее напрямую из самых центральных его частей. Несмотря на трехкратное расхождение между теоретически рассчитанным и измеренным потоком *высокоэнергичных* солнечных нейтрино это убедительно подтвердило не только правильность представлений об идущих в центральных частях Солнца термоядерных реакциях, но и показало, что рассчитанная по модели современного Солнца температура в его центре имеет погрешность не более нескольких процентов — поистине замечательное достижение. С тех пор исследования нейтринного излучения Солнца стремительно развивались, и в 2001 г. стало окончательно ясно, что причина имеющихся расхождений между теоретически рассчитанным и наблюдаемым потоком солнечных нейтрино коренится не в неточности модели строения Солнца, а в проблемах теории элементарных частиц.

Второй способ прозондировать недра Солнца неожиданно открылся в 70-х годах. Речь идет о гелиосейсмологии. Детальность сведений о внутренних слоях Солнца, которые удалось к сегодняшнему дню полу-

чить из анализа колебаний его непосредственно наблюдаемых наружных слоев, буквально поражает. Современная стандартная модель солнечных недр оказалась верна с точностью до долей процента! Воистину, сомневаться в наши дни в правильности основных представлений о строении и эволюции Солнца и звезд — это примерно то же самое, что сомневаться в существовании атомов.

Последняя бурно развивающаяся область звездной астрофизики, о которой мы упомянем, это изучение наконец-то обнаруженных в 90-е годы коричневых карликов — объектов, промежуточных между звездами самых малых масс и газовыми планетами-гигантами. В комбинации с открытием в те же годы множества внесолнечных планет-гигантов это привело к постепенному осознанию того, что никакой „пропасти“ между звездами и планетами, по-видимому, на самом деле нет. Скорее всего, спектр масс самогравитирующих газовых шаров, населяющих мир, непрерывен.

Наш беглый обзор истории развития представлений о строении и эволюции звезд далеко не полон. Достаточно сказать, что термин „магнитное поле“ не был употреблен ни разу. Но нельзя объять необъятное. Даже того, что было упомянуто, если изучить эти вопросы всерьез, более чем достаточно для одного учебного курса.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД: ЧТО, ПОЧЕМУ И КАК

2.1. Звезда как физический объект

Приступая к детальному изучению любого предмета, стоит с самого начала составить себе о нем некоторое общее представление, иначе потом деревья мо-

гут заслонить лес. Какова же в самых общих чертах картина звездной эволюции? Об этом и пойдет сейчас речь.

Прежде всего зададим себе простой вопрос: что такое звезда? Ответить на него не так-то легко. Общее представление о природе звезд имеет любой современный человек, однако его явно недостаточно, чтобы произвести четкое разграничение между звездами и „не-звездами”. Конечно, в естествознании, в отличие от математики, роль формальных определений невелика. И все же давайте четко договоримся о том, что мы будем понимать под звездой.

Звезда — это гравитационно связанная пространственно обособленная непрозрачная для излучения масса вещества, в которой в значительных масштабах происходят, происходили или будут происходить термоядерные реакции превращения водорода в гелий.

Сразу видно, что это определение далеко от канонов строгости математики: мы считаем, что понятие о пространственной обособленности понятно интуитивно, не вполне ясно, что значит, что сжигающие водород термоядерные реакции происходят „в значительных масштабах” и т. д. Главное в этом определении то, что оно подчеркивает три принципиальных момента, отличающих звезду от других космических объектов. Во-первых, масса должна сдерживаться собственным полем тяготения, и потому не может быть слишком малой, а звезда — особенно протяженной. Во-вторых, вещество должно быть распределено непрерывно, иметь не слишком малую плотность и быть достаточно сильно нагретым — только тогда оно непрозрачно. Если бы условие непрозрачности для излучения в определении не упоминалось, то под него подошли бы такие объекты как галактики, шаровые звездные скопления и т. п. Наконец, третья принципиальная особенность, отличающая звезду от других природных объектов, — это идущие в ее недрах водородные термоядерные реакции. Тот факт, что это свойство звезд, открытое всего каких-то 60 лет назад, принимается нами в качестве составной части

определения самого понятия звезды — объекта, с которым люди знакомы с момента своего появления как биологический вид, может показаться особенно странным, вызывающим сильнейший психологический протест. Кажется, что здесь все поставлено с ног на голову. Не будем, однако, торопиться с категорическими суждениями.

Все мы гораздо больше привыкли к „школьному” определению: „Звезда — это гигантский раскаленный самосветящийся газовый шар”, и не задумываемся над тем, что оно совершенно не способно охватить все то многообразие объектов, которое астрономия объединяет сегодня под словом „звезда”. Белые карлики — звезды размером с земной шар или около того, составляющие заметную долю всех звезд в Галактике, едва ли кто назовет *гигантскими* объектами. И уж во всяком случае совсем скромные размеры имеют нейтронные звезды, радиусы которых всего каких-нибудь 10 – 15 км. Посмотрим теперь, как обстоит дело со словом „*раскаленный*”. Под поверхностью звезды обычно понимают слои, откуда исходит излучение тех длин волн, на которых звезда теряет большую часть энергии. У звезд поздних спектральных типов с большими инфракрасными избытками основная энергия излучается в далекой ИК-области. Температура „поверхностей” этих звезд лишь немного выше температуры на поверхности планеты Венера. Тот факт, что звезда представляет собой *самосветящийся* объект, также не есть ее отличительный признак: планета Юпитер, например, излучает в пространство заметно больше энергии, чем получает от Солнца, т. е. тоже является самосветящимся телом. Не лучше обстоит дело и с утверждением, что звезда — это *газовое* образование. Поверхность нейтронных звезд, по-видимому, твердая. Похоже, что в ней время от времени образуются трещины, происходят звездотрясения. Наконец, если звезда быстро вращается вокруг оси или входит в состав тесной двойной системы, то ее форма может сильно отличаться от сферической, так что она вовсе не похожа на *шар*. Как видим, привычное понятие о звезде на проверку оказывается никуда не годным.

Иным из вас эта критика покажется мало убедительной: ведь львиная доля всех звезд все же действительно представляет собой гигантские раскаленные самосветящиеся газовые шары. Однако задумаемся в слова „действительно представляет собой”. Откуда мы это знаем, и когда узнали? Вильяму Гершелю, например, наше „школьное” определение звезды показалось бы отнюдь не очевидным: он думал, что на Солнце под раскаленным слоем облаков есть холодная твердая поверхность, быть может обитаемая. Да и гораздо позже, менее ста лет назад, большинство астрономов полагало, что Солнце не газообразное, а жидкое. Так думали еще и Джинс, и Рессел. Представление о звездах как о газо-

вых шарах — отнюдь не намного более прямой наблюдательный факт, чем утверждение, что они являются водородными термоядерными реакторами. Главная разница в том, что к первому из этих высказываний мы привыкли с детства, и поэтому принять его за аксиому нам психологически легче, чем второе утверждение, с которым большинство из нас познакомилось гораздо позже. Впрочем, не ломлюсь ли я в открытую дверь? Ведь не исключено, что психологическая трудность, о которой идет речь, существует только для людей старшего поколения, а вам, нынешним студентам, обведенное в рамку определение звезды кажется уже вполне естественным.

Более серьезно другое возражение. Под приведенное определение вполне подходят сверхмассивные черные дыры, с массами $\sim (10^6 \div 10^9) M_\odot$, находящиеся в ядрах галактик. Считать их особой разновидностью звезд не принято (хотя вполне можно было бы). От этого дефекта свободно другое, так сказать, „количественное” определение звезды, отличающееся от ранее приведенного лишь тем, что в нем слова про водородные термоядерные реакции заменены на указание возможных масс звезд:

$$10^{32} \lesssim M \lesssim 10^{35} \text{ г}, \quad \text{или} \quad 10^{-1} M_\odot \lesssim M \lesssim 10^2 M_\odot.$$

Как мы вскоре убедимся, масса и в самом деле является во многих отношениях определяющей характеристикой звезды.

Объекты с массами $10^{-2} M_\odot \lesssim M \lesssim 10^{-1} M_\odot$, точнее, с $0.01 M_\odot \leq M \leq 0.07 M_\odot$, или еще точнее с $13 M_J \leq M \leq 87 M_J$, где M_J — масса Юпитера, называются коричневыми карликами. Это, так сказать, „полузвезды”. Термоядерные реакции превращения водорода в гелий на определенных этапах эволюции в этих объектах происходят, но не „в значительных масштабах”. В них выгорает лишь тяжелый водород — дейтерий, обычный же водород не горит. Внешне эти объекты мало чем отличаются от обычных звезд, и в публикациях можно встретить обороты вроде такого: „эта слабая звезда — коричневый карлик”. Не исключено, что в будущем коричневые карлики будут все же причислены к звездам (нам это казалось бы естественным), однако пока полноправными гражданами звездного царства они не считаются. В объектах с $M \leq 13 M_J$ не происходит никаких термоядерных реакций, и они считаются планетами. Если коричневые карлики обнаружены и в качестве спутников обычных звезд, и как одиночные объекты, то одиночных планет, не обращающихся вокруг звезд, пока не найдено, и путей к их надежному обнаружению не видно. Однако скорее всего подобные оди-

ночные газовые планеты-гиганты, не имеющие своих солнц, существуют. В этой связи уместно напомнить, что болометрическая светимость Юпитера примерно вдвое превосходит темп притока энергии к нему от Солнца. Поэтому потоков тепла, идущих из недр одиноких юпитеров, должно быть вполне достаточно, чтобы в течение миллиардов лет их атмосферы не вымерзали и планеты оставались газовыми.

Существование у звезд верхнего предела масс $\sim 10^2 M_\odot$ — один из замечательных наблюдательных фактов, касающихся звезд. Понятно, что отсутствие в природе сверхмассивных звезд должно объясняться процессами, происходящими при их формировании. Речь об этом пойдет в разд. ??.

Черные дыры, или, если быть осторожнее, кандидаты в черные дыры обычных звездных масс ($\sim 10^1 M_\odot$) обнаружены более чем в десятке двойных звезд. В ядрах галактик найдены черные дыры с массами от $\sim 10^6 M_\odot$ до $\sim 10^9 M_\odot$. Таким образом, „звездные” черные дыры отделены по массе от „галактических”, по крайней мере пока. Если будут обнаружены черные дыры с $10^2 M_\odot \lesssim M \lesssim 10^6 M_\odot$ (скорее всего, в ядрах нормальных галактик), то придется специально договариваться, где проводить границу между еще звездами и уже не звездами.

2.2. Физическая классификация звезд

Приведенное только что обсуждение ясно показало, сколь разнообразны звезды по своим свойствам. Пожалуй, лишь с натяжкой о них можно говорить как о

едином классе объектов. Фактически слово звезда — это некоторый собирательный термин. Подобно тому как различают четыре основных состояния вещества — твердое, жидкое, газообразное и плазменное, можно выделить четыре не менее сильно отличающихся друг от друга вида звезд:

- Нормальные звезды
- Белые карлики
- Нейтронные звезды
- Черные дыры

С физической точки зрения эти виды звезд радикально отличаются друг от друга.

Обычными, или **нормальными звездами**, а иногда для краткости и просто звездами, будем называть те звезды, в которых главным фактором, противостоящим самогравитации вещества, является давление обычного невырожденного газа. Плотности этих звезд не могут быть очень велики, а температуры в их недрах должны быть достаточно высоки — только тогда будет существовать то колоссальное давление, ко-

торое необходимо, чтобы сдерживать гравитацию и чтобы в то же время электронная компонента газа не была вырожденной. Обычные звезды составляют в природе абсолютное большинство. Они очень разнообразны по своим свойствам и допускают дальнейшую, и очень детальную, классификацию, несомненно, хорошо известную читателю (звезды главной последовательности, гиганты, субкарлики, звезды горизонтальной ветви и т. п.). Этот вид звезд не является вполне „чистым” в том смысле, что наряду с тепловым давлением газа определенную (иногда и заметную) роль у них могут играть три дополнительных фактора. Во-первых, это давление излучения. Оно существенно для звезд высокой светимости. Во-вторых, в части массы звезды электронный газ все же может быть вырожденным, так что фактически мы имеем тогда дело с объектами, промежуточными между обычными звездами и белыми карликами. Таковы красные гиганты сравнительно небольших масс. Наконец, в-третьих, в звездах малых масс газ оказывается существенно неидеальным из-за кулоновского взаимодействия частиц.

Важнейшая физическая особенность нормальных звезд состоит в том, что у них механическое равновесие теснейшим образом связано с тепловой структурой, так как *давление в нормальных звездах обеспечивается тепловым движением частиц*. Поэтому потери энергии на излучение должны с неизбежностью вести к постепенной перестройке внутренней структуры звезды. Это верно как в отношении тех этапов жизни звезды, когда она светит за счет выделения гравитационной энергии, т. е. когда эффективно происходит сжатие звезды (хотя наружные ее слои могут при этом даже и удаляться от центра), так и тогда, когда энергию поставляют термоядерные реакции. Дело в том, что они не только выделяют энергию, но и вызывают изменение числа реагирующих частиц. По этой причине темп выделения энергии должен постепенно меняться, даже если температура и оставалась бы постоянной (чего на самом деле нет). Кроме того, происходит хотя и очень медленное, но принципиально важное изменение средней молекулярной массы (по крайней мере в области протекания термоядерных реакций). Это вызывает постепенное изменение давления. В итоге звезда перестраивается. Таким образом, наличие связи между тепловой и механической структурой звезды ведет к тому, что из-за потерь энергии на излучение строение такой звезды со временем должно становиться иным, т. е. звезда должна эволюционировать.

Белые карлики — гораздо более компактные объекты. Их типичные радиусы $\sim 10^{-2} R_{\odot}$, т. е. несколько тысяч километров, а массы $\sim (0.3 \div 1) M_{\odot}$. Из-за высокой плотности вещества электронная компонента газа в их недрах сильно вырождена. *Давление этого вырожденно-*

го электронного газа и противостоит у них самогравитации, вклад же в давление от ионной компоненты, которая не является вырожденной, пренебрежимо мал. Что касается гравитации, то по земным меркам на поверхности белого карлика она очень сильная. Скажем, при $M = 1 M_{\odot}$ (как у спутника Сириуса) ускорение силы тяжести $g \sim 5 \cdot 10^8 \text{ см/с}^2 = 5000 \text{ км/с}^2$, скорость убегания $v_e \sim 7 \cdot 10^8 \text{ см/с} = 7000 \text{ км/с}$, гравитационный потенциал $|\varphi| \sim 3 \cdot 10^{17} \text{ (см/с)}^2$. Однако, поскольку $v_e \ll c$ и $|\varphi| \ll c^2$, гравитация все же не настолько сильна, чтобы нельзя было пользоваться ньютоновской теорией.

При сильном вырождении давление газа зависит от температуры слабо, а в пределе полного вырождения и вовсе перестает от нее зависеть. Поэтому, став белым карликом, звезда может пребывать в этом состоянии сколь угодно долго, так как потери энергии на излучение у белых карликов, в отличие от обычных звезд, почти не влияют на их механическое равновесие. Основным источником, из которого они черпают энергию своего излучения, служит тепловая энергия ионов. Ионный газ остывает, но на давлении это почти не сказывается, поскольку, как уже отмечалось, основной вклад в давление из-за своего сильного вырождения дает электронный газ, а не газ ионов. По достижении в ходе охлаждения некоторой критической температуры должна происходить кристаллизация — ионы выстраиваются в решетку.

Светимости белых карликов низки, $(10^{-2} \div 10^{-3}) L_{\odot}$. Поэтому тепловой энергии, запасенной в недрах белого карлика с момента его рождения, хватает надолго. Когда по прошествии миллиардов лет она иссякает, звезда должна потухнуть, превратившись в гипотетического „черного карлика“. Таким образом, всю свою долгую жизнь белый карлик просто остывает, подобно тому, как, почти не меняя размера, медленно остывает сильно нагретый булыжник. В отличие от булыжника, правда, вещество в белом карлике удерживается гравитацией. Она действует на тяжелые частицы — ионы, давление же почти целиком создают вырожденные электроны, „привязанные“ к ионам электростатическими силами, обеспечивающими макроскопическую электронейтральность газа.

Для всей теории звезд, в частности, для понимания того, что происходит со звездами разных масс в конце их жизни, фундаментальное значение имеет следующее утверждение: масса белого карлика не может превышать некоторого критического значения, близкого к $1.4 M_{\odot}$ (*предел Чандрасекара*):

Белые карлики : $M \lesssim 1.4 M_{\odot}$.

Считается, что белые карлики — конечный продукт эволюции нормальных звезд с начальной массой $\lesssim (8 \div 10) M_{\odot}$. Так как массы белых карликов не могут превышать чандрасекаровского предела, в ходе эволюции должна происходить значительная потеря вещества (по крайней мере у звезд с начальной массой $\geq 1.4 M_{\odot}$). Есть два механизма. Во-первых, на фазе красного гиганта значительная масса уносится звездным ветром. Во-вторых, непосредственно перед рождением белого карлика, который постепенно вызревает в недрах красного гиганта в ходе его эволюции, звезда сбрасывает свои наружные слои, которые образуют планетарную туманность, и белый карлик „вылупляется”.

Если белый карлик входит в состав тесной двойной системы, то перетекание вещества с невырожденной компоненты приводит к постепенному накоплению в его наружных слоях богатого водородом вещества (в недрах самого белого карлика водорода нет, ведь это выгоревшее ядро звезды). Возгорание водорода в этом поверхностном слое имеет характер взрыва. Его масштабы могут быть разными. Такова природа разного рода катаклизмических переменных звезд, включая вспышки новых. При подобных повторных вспышках может сбрасываться не все натекающее вещество, так что масса белого карлика будет постепенно увеличиваться. По достижении чандрасекаровского предела механическое равновесие нарушается, происходит коллапс, по-видимому, сопровождающийся образованием нейтронной звезды. Это событие наблюдается как вспышка сверхновой типа Ia.

Нейтронные звезды — это объекты с массами $\sim (1 \div 2) M_{\odot}$, с радиусами ~ 10 км и с плотностями порядка ядерной ($\sim 10^{14}$ г/см³), так что нейтронная звезда подобна гигантскому атомному ядру с числом нуклонов порядка 10^{57} . Однако, в отличие от обычных ядер, частицы в нейтронной звезде удерживаются не за счет короткодействующего сильного взаимодействия, а гораздо более слабой, но зато дальнедействующей силой гравитации. Гравитационная энергия связи нейтронной звезды по порядку величины равна $-GM^2/R \sim 0.1Mc^2 \sim 3 \cdot 10^{53}$ эрг.

Существенно, что объектов, „промежуточных” между белыми карликами и нейтронными звездами, с плотностями порядка $10^{11} \div 10^{12}$ г/см³, не обнаружено. Как будет показано в дальнейшем, такие объекты существовать в природе не могут.

Нейтронные звезды, как показывает само их название, состоят в основном из нейтронов. В какой-то мере они подобны белым карликам.

Давление, градиент которого противостоит гравитации, создается у них сильно вырожденными нейтронами. Как и у белых карликов, давление при этом практически не зависит от температуры и полностью определяется плотностью вещества. Однако по существу сходство с белыми карликами этим и ограничивается. Имеются два принципиальных отличия. Во-первых, гравитационное поле нейтронных звезд сильное (потенциал на поверхности $|\varphi| \sim 0.1c^2$). Поэтому обычной ньютоновской теории тяготения здесь недостаточно. Получение сколько-нибудь точных количественных результатов требует использования релятивистской теории тяготения. Она нужна не только при изучении внутреннего строения нейтронных звезд, но и при исследовании явлений в их окрестностях (аккреция и т. п.). Во-вторых, в отличие от электронного газа в белых карликах, вещество недр нейтронных звезд не является идеальным газом. Существенную роль играет трудно учитываемое взаимодействие нейтронов. Поэтому уравнение состояния вещества нейтронных звезд известно плохо, и как следствие не известен сколько-нибудь точно и верхний предел возможных масс нейтронных звезд, так называемый *предел Оппенгеймера – Волкова* — аналог чандрасекаровского предела. По-видимому, он близок к $2 M_{\odot}$, но во всяком случае не превосходит $3 M_{\odot}$:

Нейтронные звезды : $M \lesssim (2 \div 3) M_{\odot}$.

У одиночных нейтронных звезд потери энергии на излучение покрываются главным образом за счет кинетической энергии вращения звезды. Определяющую роль в трансформации энергии вращения в излучение играет магнитное поле, достигающее $10^{12} \div 10^{13}$ Гс.

Глава III

МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ЗВЕЗДЫ

... история существования любой звезды — это поистине титаническая борьба между силой гравитации, стремящейся ее неограниченно сжать, и силой газового давления, стремящейся ее распылить, рассеять в окружающем межзвездном пространстве. Многие миллионы и миллиарды лет длится эта „борьба”. В течение этих чудовищно больших сроков силы равны. Но в конце концов, как мы увидим дальше, победа будет за гравитацией. Такова драма эволюции любой звезды.

И. С. Шкловский

Звезды, не являющиеся переменными, находятся в механическом равновесии. Сейчас мы примем это как гипотезу, кажущуюся вполне разумной. По крайней мере со времен Гиппарха, т.е. примерно за $2 \cdot 10^3$ лет, звезды заметно не изменились. Это прямой наблюдательный факт, делающий предположение об их механическом равновесии естественным. На самом деле надо еще показать, что нарушение равновесия привело бы к перестройке звезды за время, малое по сравнению с этими 2000 лет. Как мы вскоре узнаем, это действительно так, а потому *механическое равновесие переменных звезд — наблюдательный факт*. Доказательство этого и извлечение отсюда следствий — простых, но важных, — и составляет содержание настоящей главы.

В разд. 1 дается элементарный вывод простейшей формы уравнения механического равновесия. Затем показывается, что нарушение равновесия привело бы к очень быстрой перестройке звезды, за время порядка секунд для белых карликов, минут или часов — для звезд ГП и от ~ 1 до $\sim 10^3$ суток для красных гигантов и сверхгигантов. В конце раздела приводятся более общие формы уравнения механического равновесия. В частности, обсуждается равновесие вращающейся звезды. Приводится также уравнение механического равновесия сферически-симметричной звезды согласно общей теории относительности, позволяющее оценить и учесть отклонения поля тяготения от ньютонова. В разд. 2 рассматривается теорема вириала — замечательное интегральное соотношение, вытекающее из условия механического равновесия. Обсуждение следствий теоремы вириала для физики звезд служит предметом разд. 3. Даются оценки гравитационной энергии звезд. Кратко обсуждается процесс их медленного гравитационного сжатия, важный не только, а пожалуй, даже не столько как поставщик энергии, сколько как один из главных движущих факторов звездной эволюции. Наконец, на основе теоремы вириала рассматривается вопрос об устойчивости механического равновесия самогравитирующей массы, в частности, выводится критерий гравитационной неустойчивости — отправной пункт теории формирования звезд.

1. УРАВНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

1.1. Вывод уравнения гидростатического равновесия

Сделаем естественное предположение, что звезда обладает сферической симметрией. Тем самым мы пренебрегаем влиянием трех факторов: осевого вращения, приливных эффектов (если звезда не является одиночной) и крупномасштаб-

ных магнитных полей. Их роль далеко не всегда мала, однако начинать нужно, конечно, с простейшего сферически-симметричного случая. Следующий шаг — учет перечисленных трех факторов как малых поправок — позволяет вместе с тем получить количественную оценку точности и области применимости исходного предположения о сферической симметрии. Этим мы сейчас заниматься не будем (см., впрочем, п. 1.6 этого раздела).

Силе **гравитации**, стремящейся сжать звезду, противостоит **давление**, точнее, его градиент. Баланс этих двух сил и определяет механическое равновесие звезды.

Рассмотрим элемент объема $dV = d\sigma dr$ в форме *цилиндра* с осью, направленной по радиусу, который находится на расстоянии r от центра звезды (рис. III.1.1). На него действует направленная к центру сила притяжения δF_G массой M_r , заключенной *внутри* сферы радиуса r , и противоположная ей сила давления δF_P . Масса, сферически-симметрично распределенная *вне* сферы радиуса r , силы тяжести внутри этой сферы, как хорошо известно, не создает (почему это так?). Ясно, что δF_G есть вес dV , т.е. произведение ускорения силы тяжести $-GM_r/r^2$ на массу этого элемента ρdV :

$$\delta F_G = -\frac{GM_r}{r^2} \rho dV,$$

где ρ — плотность. Сила δF_P , поддерживающая *цилиндрический* объем dV в равновесии, возникает только из-за разницы в давлениях на его верхнее и нижнее основания, так как радиальная составляющая давления на боковые стенки равна нулю. Пусть dP — приращение давления на dr . Тогда

$$\delta F_P = P d\sigma - (P + dP) d\sigma = -dP d\sigma.$$

Давление P убывает наружу, поэтому dP отрицательно, так что $\delta F_P > 0$.

В состоянии равновесия сила притяжения должна в точности балансироваться давлением, т.е. $\delta F_G + \delta F_P = 0$, или $dP d\sigma =$

Рис. III.1.1:

К выводу уравнения механического равновесия
сферически-симметричной звезды.

$-\rho(GM_r/r^2) d\sigma dr$, откуда окончательно

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} .} \quad (1.1)$$

Это есть *уравнение гидростатического равновесия* звезды. Оно является математическим выражением условия механического равновесия самогравитирующей сферически-симметричной массы.

Входящая в уравнение гидростатики величина M_r есть масса внутри сферы радиуса r :

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' ,$$

или

$$\boxed{\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho .} \quad (1.2)$$

К сожалению, для величины M_r в русском языке специального термина нет. Иногда ее называют текущей массой, а по-английски — *shell mass*.

Соотношения (1.1) и (1.2) относятся к числу основных уравнений строения звезд. Они ясно показывают определяющую роль давления в

структуре звезды. Эти два уравнения содержат три неизвестные функции: $P = P(r)$, $M_r = M_r(r)$ и $\rho = \rho(r)$. Поэтому для расчета равновесной конфигурации их недостаточно. Давление P есть функция, вообще говоря, двух термодинамических переменных, скажем, плотности ρ и температуры T , определяемая *уравнением состояния* $P = P(\rho, T)$. Привлечение его тоже не замыкает систему уравнений, так как появляется новая неизвестная функция $T = T(r)$. Таким образом, *исследование механического равновесия звезды в общем случае нельзя отделить от изучения ее тепловой структуры*. Полная система уравнений оказывается поэтому сложной, она нелинейна и т.п. Главное орудие ее исследования и решения — численные методы.

Однако для выяснения многих важных общих закономерностей и выработки ясного понимания влияния главных факторов полезно изучить пусть не такие уж близкие к реальности, многого не учитывающие, но зато достаточно простые модели звезд. Другой способ разобраться в физике звезд — понять, не решая уравнений равновесия, какие ограничения на те или иные параметры звезд эти уравнения накладывают. Это либо соотношения между глобальными характеристиками звезды, такими как ее потенциальная энергия, интеграл от давления по объему и т. п., либо некоторые строгие неравенства, позволяющие сделать заключения о физических условиях в недрах звезд. В дальнейшем мы используем все эти возможности. Однако сначала нам нужно доказать, что звезды действительно находятся в механическом равновесии.

1.2. Динамическая шкала времени

В жизни звезды бывают периоды, когда она сжимается или расширяется. Например, на начальных этапах развития, до вступления на ГП, происходит сжатие.

Наоборот, при переходе от ГП к стадии красного гиганта звезда расширяется. Малое число звезд на диаграмме Герцшпрунга – Рессела вне ГП и области гигантов служит прямым наблюдательным свидетельством того, что эти этапы являются сравнительно кратковременными. Как вскоре будет показано, для звезд, не слишком сильно отличающихся по своим свойствам от Солнца, характерное время такой перестройки — порядка 10^7 лет. Применимо ли уравнение гидростатического равновесия вообще, и на таких этапах эволюции в частности? Ответ оказывается положительным. Нарушение гидростатического равновесия, как уже говорилось, должно приводить к изменению структуры звезды за время порядка суток, часов, минут или даже секунд, в зависимости от ее типа. Таким образом, уравнение гидростатического равновесия должно быть применимо всегда, кроме двух случаев: а) пульсирующие звезды

и б) звездные взрывы.

Характерные времена звездных пульсаций (обычно это сутки или часы), которые, понятно, определяются периодом собственных колебаний звезды, могут служить *наблюдательным подтверждением* применимости условия механического равновесия на всех космогонических шкалах времени (10^6 лет и более). *Теоретическое же обоснование* этого состоит в следующем. Если равновесие нарушено, то возникает движение. Оно вызывается силой тяжести, несбалансированной градиентом давления. По второму закону Ньютона имеем тогда

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} - \rho \ddot{r}. \quad (1.3)$$

Слева написано $\partial/\partial r$, а не d/dr , так как теперь $P = P(r, t)$. Второй член в правой части будет пренебрежимо мал по сравнению с первым, пока ускорение \ddot{r} не станет одного порядка с локальным ускорением силы тяжести $g = GM_r/r^2$. Если же эти два члена окажутся сравнимыми по величине, то движение по своему характеру будет близко к свободному падению вещества в поле силы тяжести звезды.

Итак, существенное нарушение механического равновесия приводит к движениям, происходящим со скоростями, типичными для свободного падения. Характерное время такого движения есть время, необходимое для полного сжатия звезды при отсутствии сил давления, под действием одной только силы тяжести. Это время называют *временем свободного падения*, или динамическим временем звезды. Мы будем обозначать его t_G (индекс G — от *Gravitation*).

Получим порядковую оценку времени такого схлопывания звезды. Ее можно найти из соображений размерности. В задаче фигурируют следующие размерные величины, определяющие характер движения: масса звезды M , ее радиус R , наконец, так как движение происходит под действием силы тяготения, то и гравитационная постоянная G . Величину с размерностью силы из этих определяющих параметров можно построить двумя путями: одна характерная сила задачи — сила тяготения GM^2/R^2 , другую по второму закону Ньютона можно представить как [масса] \times [ускорение], или $M \cdot R/t_G^2$. Приравнявая эти два выражения, для t_G находим

$$t_G \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}.$$

Это, конечно, не точная формула, а лишь порядковая оценка. Безразмерный коэффициент τ , превращающий оценку в строгое равенство, так

что

$$t_G = \tau \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2},$$

как можно ожидать, не отличается по порядку от единицы.

Следующее утверждение показывает, что это действительно так: если плотность в звезде не возрастает наружу, а в остальном ее распределение произвольно, то

$$1.57\dots = \frac{\pi}{2} > \tau \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11\dots,$$

причем знак равенства соответствует случаю, когда практически вся масса звезды сосредоточена в центре.

Действительно, рассмотрим сначала звезду с $\rho = \text{const}$. Уравнение свободного падения пробной материальной точки с поверхности звезды до центра в „колодеце“, прорытый сквозь звезду, получается отбрасыванием члена $\partial P / \partial r$ в общем уравнении движения (1.3):

$$\ddot{r} = -G \frac{M_r}{r^2}.$$

В случае $\rho = \text{const}$, когда $M_r = (4\pi/3)r^3\rho = (M/R^3)r^3$, оно представляет собой уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{r} + \frac{GM}{R^3} r = 0.$$

Время достижения пробной частицей центра звезды есть одна четверть периода этого гармонического колебания, так что

$$t_G = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}.$$

Итак, для однородного гравитирующего шара безразмерное время свободного падения пробного тела с поверхности до центра равно $\tau = \pi/2 = 1.57$.

Противоположный предельный случай — звезда радиуса R , практически вся масса которой M сосредоточена в центре (*модель Роша*). В этом случае свободное падение можно рассматривать как вырожденный случай кеплеровой задачи, когда материальная точка движется в поле тяготения точечной массы M по „эллипсу“ с большой полуосью $R/2$ и эксцентриситетом $e = 1$ (этот вырожденный эллипс представляет собой отрезок). Время свободного падения есть половина периода обращения по такому „эллипсу“. С другой стороны, по третьему закону Кеплера

Рис. III.1.2:

Свободное падение пробной частицы в звезде.

Кривая 1 — модель Роша (вся масса сосредоточена в центре;
кривая 2 — звезда из несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)).

период обращения по этому „эллипсу” в $2^{3/2}$ раза меньше периода обращения по круговой орбите радиуса R , составляющего $2\pi(R^3/GM)^{1/2}$. Последнее выражение легко получить, приравнявая силу притяжения центробежной силе при движении по окружности. В результате для безразмерного времени свободного падения τ получаем в этом предельном случае $\tau = \pi/(2\sqrt{2}) = 1.11$.

Из физических соображений следует, что для любого монотонно возрастающего к центру распределения плотности безразмерное время τ свободного падения пробного тела в скважину, пробуренную до центра, должно быть заключено между только что найденными крайними значениями (почему?). Мы видим, что величина τ во всех случаях в самом деле близка к единице, и при порядковых оценках — а обычно только они и нужны — можно полагать $\tau = 1$.

Обращает на себя внимание малая чувствительность времени свободного падения к структуре звезды. Значения τ в самых крайних случаях различаются всего в $\sqrt{2}$ раз. Почему это так? Независимо от того, каково распределение плотности в звезде, движение начинается под действием одной и той же силы GM/R^2 (на единицу массы). Поэтому отнимающий много времени начальный разгон происходит примерно одинаковым образом. По мере падения пробного тела в „колодец” слои, оказывающиеся снаружи, перестают его притягивать, и в этом причина того, почему ход плотности вдоль радиуса сказывается на законе падения. Однако существенные различия в движении появляются только тогда, когда уже достигнута значительная скорость и пройдена заметная часть всего пути (рис. III.1.2).

Приведенное рассуждение в какой-то мере искусственно: мы изучали

падение пробной частицы в „колодец”, считая все остальное вещество неподвижным, тогда как на самом деле следовало бы рассматривать одновременное *сжатие всей конфигурации*. Естественно предположить, что при таком сжатии наружные слои не обгоняют внутренние. Если это так, то нового рассмотрения нам не потребуется. Очевидно, что каково бы ни было первоначальное распределение плотности вдоль радиуса, время сжатия конфигурации в точку будет в этом случае таким же, как и для модели Роша. Поэтому в дальнейшем мы будем всегда брать $\tau = \pi/(2\sqrt{2})$, т.е. полагать

$$t_G = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Выражение для t_G можно записать также в форме

$$t_G = \left(\frac{3\pi}{32} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}. \quad (1.5)$$

Как видим, *время свободного падения однозначно определяется начальной средней плотностью $\bar{\rho}$* .

1.3. Обсуждение

Из найденного в предыдущем пункте результата можно извлечь гораздо больше, чем видно на первый взгляд.

Прежде всего заметим, что так как обгона одного слоя падающего вещества другим по предположению не происходит, формулы, аналогичные (1.4) и (1.5), будут иметь место и для времени $t_G(r)$ сжатия в точку любой внутренней сферической части звезды (или лучше сказать — самогравитирующей конфигурации) с $r \leq R$:

$$t_G(r) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{r^3}{GM_r} \right)^{1/2} = \left(\frac{3\pi}{32} \right)^{1/2} (G\bar{\rho}_r)^{-1/2}, \quad (1.6)$$

где M_r и $\bar{\rho}_r$ — соответственно масса и средняя плотность в шаре радиуса r . Отсюда следует, что при $\rho = \text{const}$ все слои опадают на центр одновременно. Если в первоначальной конфигурации плотность убывает с расстоянием, то и $\bar{\rho}_r$ уменьшается с ростом r . Согласно (1.6), в этом случае внутренние слои должны достигать центра раньше наружных, так

что обгона действительно нет. В центре образуется точечная масса, растущая со временем. *Сжатие* при свободном падении происходит, таким образом, *негомологично*, т.е. $\rho(r, t)$ нельзя получить из первоначального распределения плотности $\rho(r, 0)$ масштабным преобразованием.

Эти факты чрезвычайно важны для понимания качественных особенностей гидродинамических стадий звездной эволюции, когда механического равновесия нет, в частности, процессов рождения звезд из межзвездных облаков. Разумеется, на самом деле картина гораздо сложнее. Нужно учитывать эффекты давления, влияние ударной волны, образующейся при выпадении вещества на сформировавшийся близ центра зародыш звезды, и т. п. Обо всем этом речь пойдет в Гл. ??.

Возвращаемся к вопросу о динамическом времени звезды. На него можно взглянуть с другой стороны. Равновесие звезды определяется балансом сил давления и гравитации. Пусть возникло малое возмущение давления. Оно будет распространяться по звезде как звуковая волна. Если изменения в структуре звезды происходят достаточно медленно, так что большая часть вещества движется со скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука, то волны давления будут обгонять движущееся вещество и вызывать изменения структуры, компенсирующие начальное возмущение. Волны давления не будут успевать восстановить равновесие только тогда, когда движения в звезде происходят со скоростями порядка скорости звука, а это, как можно показать, движения, близкие к свободному падению. После только что сказанного неудивительно, что периоды собственных колебаний звезд оказываются того же порядка, что и t_G . Ясно, впрочем, что точные их значения, помимо массы и радиуса звезды, должны определяться еще одним безразмерным параметром, характеризующим упругость звездного вещества. Для обычных звезд им служит соответствующим образом усредненный по звезде эффективный показатель адиабаты Γ_1 газа из смеси частиц и фотонов; см. п. 1.3.

Наконец, последнее замечание. Период обращения спутника, движущегося по круговой орбите непосредственно над поверхностью звезды, равен $4\sqrt{2} t_G$, если t_G определено согласно (1.4). Очевидно, что это есть вместе с тем минимально возможный период осевого вращения недеформируемой звезды — в противном случае на экваторе центробежная сила превысит силу тяжести. Поэтому знание периода осевого вращения P позволяет дать оценку средней плотности объекта. Для недеформируемой звезды, т.е. в пренебрежении изменением формы звезды под действием центробежных сил, что, как можно думать, не должно сказаться

на порядке величины, из (1.5) находим тогда

$$\bar{\rho} \geq \frac{3\pi}{GP^2},$$

или

$$\omega^2 \leq \frac{4\pi}{3} G\bar{\rho},$$

где $\omega = 2\pi/P$ — угловая скорость вращения. Когда достигается равенство, атмосфера, окружающая нашу идеализированную недеформируемую звезду, улетает с нее. В действительности центробежные силы деформируют звезду, причем по-разному в зависимости от степени концентрации вещества к центру. С учетом этого численный коэффициент в правой части будет другим. А. Пуанкаре в конце XIX века показал, что *при твердотельном вращении деформируемой звезды с произвольным распределением плотности*

$$\omega^2 < 2\pi G\bar{\rho}. \quad (1.7)$$

Доказательство см. в п. 1.6.

Если сделать то или иное дополнительное допущение, то можно, конечно, получить и более сильные ограничения на ω . Так, для твердотельно вращающихся сфероидов Маклорена — фигур равновесия несжимаемой жидкости — имеем $\omega^2 < 0.45\pi G\rho$, причем они устойчивы, лишь если $\omega^2 < 0.37\pi G\rho$. Для модели Роша, т.е. для точечной массы, окруженной несжимаемой оболочкой пренебрежимо малой массы, $\omega^2 < 0.72\pi G\bar{\rho}$. Доказательство последнего результата см. в п. ??.

Как видим, наши нестрогие рассуждения (ведь недеформируемая звезда — фикция) дали достаточно хорошую оценку. Для реалистичных моделей звезд коэффициент при $G\bar{\rho}$ в правой части должен быть заключен между $4\pi/3$ (недеформируемая звезда) и 0.72π (модель Роша). Мы в дальнейшем будем принимать его равным π , так что

$$\omega^2 < \pi G\bar{\rho}. \quad (1.8)$$

Перепишем это неравенство в форме

$$\bar{\rho} > \frac{4\pi}{GP^2} = \frac{1.9 \cdot 10^8}{P^2}. \quad (1.9)$$

Применим его к пульсару в Крабе NP 0532. Для него $P = 0.033$ с, и поэтому $\bar{\rho} > 10^{11}$ г/см³, так что это может быть только нейтронная звезда, но никак не белый карлик (для них $\bar{\rho} \sim 10^5 \div 10^7$ г/см³). Предположение о том, что мы имеем здесь дело с пульсациями белого карлика,

также не проходит, поскольку при их характерных плотностях периоды колебаний должны быть не менее нескольких секунд. Это также фактически следует из (1.5); подробнее см. следующий пункт. В 1982 г. открыт пульсар PSR 1937+214=4C 21.53 с рекордно малым периодом $P = 1.558 \cdot 10^{-3}$ с. Для него согласно (1.9) должно быть $\bar{\rho} > 0.8 \cdot 10^{14}$ г/см³. Есть предположение, что этот пульсар вращается с угловой скоростью, близкой к критической. Учет эффектов ОТО, которые для пульсаров, вообще говоря, не являются малыми, в данном случае влияет на результат несущественно.

1.4. Динамическое время звезд разных типов

Дадим численные оценки времени свободного падения для объектов разных типов. Выражения (1.4) и (1.5) в числах принимают вид

$$t_G = 4.3 \cdot 10^3 (R^3/M)^{1/2} = \frac{0.54}{\sqrt{G\bar{\rho}}} = \frac{2.1 \cdot 10^3}{\sqrt{\bar{\rho}}}. \quad (1.10)$$

В солнечных единицах $\mathcal{R} \equiv R/R_\odot$, $\mathcal{M} \equiv M/M_\odot$ имеем

$$t_G = 1.8 \cdot 10^3 \left(\mathcal{R}^3 / \mathcal{M} \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

так что для *Солнца* время свободного падения составляет около полутора часа (это полезно помнить). Период основного радиального колебания Солнца по детальным расчетам его моделей оказывается примерно вдвое больше.

Как говорилось в п. 1.2, для звезд *главной последовательности* зависимость масса-радиус можно аппроксимировать выражением $\mathcal{R} = \mathcal{M}^r$ с $r = 1$ при $\mathcal{M} < 1$ и $r = (2/3 \div 3/4)$ при $\mathcal{M} > 1$. Поэтому согласно (1.11) время свободного падения должно монотонно расти с массой звезды, хотя и не очень быстро. Оно изменяется от нескольких минут для маломассивных ($\mathcal{M} \simeq 0.1$) холодных карликов поздних подклассов М до нескольких часов для горячих О-звезд с массами в десятки масс Солнца.

Так как t_G и период собственных колебаний звезды — величины одного порядка, то приведенные числа позволяют составить представление о периодах радиальных колебаний звезд ГП или близких к ним по положению на диаграмме Герцшпрунга – Рассела. Примером пульсирующих переменных, лежащих на ГП, служат переменные типа δ Щита с эффективными температурами ≈ 7500 К и периодами порядка часа, близкими, как это и должно быть, к теоретическому часовому периоду основной моды радиальных колебаний Солнца.

Гиганты и сверхгиганты — группа весьма разнородных объектов. Их радиусы заключены примерно в промежутке от $\mathcal{R} \sim 10$ до $\mathcal{R} \sim 10^3$, а массы могут быть как малы ($\mathcal{M} \sim 1$, гиганты II типа населения), так и велики (до десятков M_\odot , сверхгиганты населения I). Соответственно этому, характерные времена движений, возникающих в них при нарушении механического равновесия, должны быть заключены от ~ 10 часов до $2 \div 3$ лет. Как хорошо известно, имеется множество типов переменных звезд с периодами из этого интервала. Переменных же с периодом, скажем, в 10 лет не наблюдается, как это и должно быть.

Обратимся к *белым карликам*. Массы типичных белых карликов близки к массе Солнца (в среднем они $\sim 0.6 M_\odot$, хотя в тесных двойных встречаются белые карлики и заметно меньших масс), а их радиусы примерно на два порядка меньше солнечного. Поэтому согласно (1.11), для типичного белого карлика t_G составляет всего несколько секунд. Такого же порядка должны быть и периоды радиальных колебаний белых карликов. Согласно (1.11), они тем больше, чем меньше масса белого карлика, так как радиусы белых карликов с ростом массы убывают (см. разд. ??). Расчеты ряда авторов, хорошо согласующиеся между собой, дают значения периодов радиальных колебаний белых карликов около 20, 10 и 4 секунд при $\mathcal{M} = 0.4; 0.8$ и 1.2 соответственно. Переменность с периодами в десятки секунд обнаружена у белых карликов малых масс — бывших новых, входящих в состав тесных двойных систем. Типичный пример — DQ Нег (бывшая Новая Геркулеса 1934), показывающая колебания блеска с периодом 71 с и амплитудой $\sim 0.1^m$. Впрочем, по-видимому, мы имеем здесь дело не с радиальными колебаниями самого белого карлика, а с более сложными колебательными явлениями, происходящими в его аккреционном диске. Интересно, что в последнее время обнаружены также переменные белые карлики с гораздо большими периодами, доходящими до $\sim 10^3$ с. Ряд фактов, в частности мультипериодичность, указывает на то, что это пульсации, а не вращение. Ясно, однако, что это не могут быть радиальные колебания в основной моде — периоды слишком велики для этого. Предполагается, что здесь наблюдаются нерадиальные колебания. Хотя пока обнаружено немногим более десятка подобных объектов (один из них, четвертый по счету, был открыт в АО ЛГУ О.С. Шуловым и Е.Н. Копацкой), простые статистические оценки показывают, что число таких объектов в Галактике должно быть очень велико. По-видимому, это самые распространенные в природе переменные звезды. Они получили название переменных типа ZZ Кита.

Заканчиваем наше несколько ушедшее в сторону обсуждение. Не правда ли, поистине замечательные выводы позволила сделать прос-

тейшая оценка характерного динамического времени, фактически следующая просто из размерностей!

**1.5. Гидростатика
звезды как частный
случай ее
гидродинамики**

Обсуждавшееся до сих пор уравнение механического равновесия (1.1) является частным случаем общего гидродинамического уравнения движения, выражающего закон сохранения импульса. В эйлеровых переменных оно имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \varphi + \mathbf{F}, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость движения вещества в фиксированной точке \mathbf{r} в момент t , φ — гравитационный потенциал собственного поля тяготения звезды, \mathbf{F} — равнодействующая сил, приложенных к единице массы движущегося вещества („жидкости”), которые отличны от градиента давления и силы тяжести, создаваемой самой рассматриваемой звездой. Эти силы включают, в частности, вязкость, магнитные силы, во вращающихся звездах — центробежную и кориолисову силы, в двойных — силу тяготения, создаваемую спутником, и т. д. Выражение, стоящее в (1.12) слева, есть полная, или субстанциальная производная $d\mathbf{v}/dt$, в правой же части стоит равнодействующая всех сил, приложенных к единице массы. Таким образом, (1.12) — это просто второй закон Ньютона, записанный для единицы массы движущейся жидкости.

Входящий в уравнение движения (1.12) гравитационный потенциал φ связан с плотностью уравнением Пуассона — основным уравнением теории потенциала:

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad (1.13)$$

где Δ — оператор Лапласа. Вместо уравнения Пуассона иногда удобнее пользоваться интегральным представлением потенциала через плотность:

$$\varphi = -G \int_V \frac{\rho dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.14)$$

где интегрирование идет по всему объему звезды.

Уравнения (1.12) – (1.13) следует решать совместно с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.15)$$

выражающим закон сохранения массы. Чтобы замкнуть систему, надо привлечь еще два уравнения — уравнение энергии и уравнение состояния. Приводить их здесь мы не будем, поскольку наша цель состоит

сейчас не в обсуждении общих уравнений звездной гидродинамики, а в первую очередь в том, чтобы показать, частным случаем каких более общих уравнений является рассматривавшееся выше простейшее уравнение механического равновесия (1.1).

Итак, убедимся, что (1.1) — это действительно частный случай (1.12) – (1.13). При отсутствии макроскопических движений ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) и внешних полей ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) (1.12) переходит в уравнение гидростатики

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \varphi. \quad (1.16)$$

Если, далее, имеется сферическая симметрия, то $P = P(r)$, $\varphi = \varphi(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от центра симметрии, и (1.16) записывается в форме

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\varphi}{dr}, \quad (1.17)$$

а уравнение Пуассона (1.13) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (1.18)$$

Из (1.18) имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (1.19)$$

или

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{GM_r}{r^2}.$$

Подстановка последнего выражения в уравнение гидростатического равновесия (1.17) приводит его к виду (1.1).

Заметим, что для потенциала в сферически-симметричной звезде из (1.19) легко найти следующее выражение ($r \leq R$):

$$\varphi(r) = -\frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho r'^2 dr' - 4\pi G \int_r^R \rho r' dr', \quad (1.20)$$

или, при учете (1.2),

$$\varphi(r) = -\frac{GM_r}{r} - \int_r^R \frac{dM_{r'}}{r'}. \quad (1.21)$$

Каков физический смысл каждого из членов в правой части этой формулы? Воспользовавшись предположением о сферической симметрии, получите (1.20) также из (1.14).

**1.6. Равновесие
вращающейся
звезды**

Рассмотрим теперь механическое равновесие одиночной немагнитной звезды, *твердотельно* вращающейся с постоянной угловой скоростью ω и обладающей цилиндрической симметрией относительно оси вращения. Пусть r_1 — расстояние произвольной точки звезды от оси вращения, которую мы примем за ось z . К силе тяжести $-\nabla\varphi$ в этом случае добавляется направленная от оси вращения центробежная сила $\omega^2\mathbf{r}_1$, где \mathbf{r}_1 — вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и соединяющий эту ось и рассматриваемую точку (так что $r_1 = |\mathbf{r}_1|$). Условие равновесия вместо (1.16) принимает поэтому вид

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\varphi + \omega^2\mathbf{r}_1. \quad (1.22)$$

Так как по симметрии задачи все величины могут зависеть лишь от z и r_1 , то векторное уравнение (1.22) эквивалентно двум скалярным

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r_1} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} + \omega^2 r_1, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.22a)$$

которые по-прежнему должны решаться совместно с уравнением Пуассона (1.13).

На первый взгляд кажется, что замена сферической симметрии на цилиндрическую, обусловленная вращением, ведет к тому, что P , ρ и φ становятся функциями двух переменных — r_1 и z . В действительности положение все же немного проще. При твердотельном вращении центробежная сила, очевидно, обладает потенциалом (индекс R — от *Rotation*)

$$\varphi_R = -\frac{\omega^2}{2} r_1^2. \quad (1.23)$$

Поэтому, если ввести полный, или эффективный потенциал $\tilde{\varphi}$ — сумму гравитационного потенциала и потенциала центробежной силы:

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi + \varphi_R, \quad (1.24)$$

то (1.22) перепишется в виде

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\tilde{\varphi}. \quad (1.25)$$

Согласно определению градиента, ∇P в любой точке направлен по нормали к проходящей через эту точку поверхности $P = \text{const}$ (изобарическая поверхность), а $\nabla\tilde{\varphi}$ — по нормали к поверхности $\tilde{\varphi} = \text{const}$

(эквипотенциальная, или уровенная поверхность). Поскольку в (1.25) градиент давления всюду антипараллелен градиенту потенциала, то в произвольной точке изобарическая и эквипотенциальная поверхности, проходящие через нее, должны касаться друг друга. Ясно, что так может быть только тогда, когда семейства поверхностей $P = \text{const}$ и $\tilde{\varphi} = \text{const}$ совпадают. Поэтому на любой уровенной поверхности давление постоянно, а значит, оно является функцией одной переменной — полного потенциала $\tilde{\varphi}$:

$$P = P(\tilde{\varphi}). \quad (1.26)$$

Далее, согласно последней формуле $\nabla P = (dP/d\tilde{\varphi}) \nabla \tilde{\varphi}$, что по подстановке в (1.25) приводит уравнение равновесия к виду

$$\frac{dP}{d\tilde{\varphi}} = -\rho. \quad (1.27)$$

Поскольку, как следует из (1.26), $dP/d\tilde{\varphi}$ зависит только от $\tilde{\varphi}$, то отсюда видно, что плотность также должна быть функцией лишь $\tilde{\varphi}$:

$$\rho = \rho(\tilde{\varphi}). \quad (1.28)$$

Получите этот результат непосредственно из уравнения равновесия (1.25), показав, что $\nabla \rho$ и $\nabla \tilde{\varphi}$ коллинеарны.

Таким образом, в равновесной твердотельно вращающейся звезде давление и плотность (а потому, в силу уравнения состояния, также и температура) являются функциями *одной* переменной — полного потенциала $\tilde{\varphi}$. Сам же этот потенциал зависит, разумеется, от *двух* переменных, например, расстояния от оси вращения r_1 и расстояния от плоскости экватора $|z|$. Часто вместо цилиндрических координат r_1, z используют сферические координаты r — расстояние от центра и $\mu \equiv \cos \theta$, где θ — полярный угол, отсчитываемый от оси вращения. Понятно, что возможен и такой подход: считать, что потенциал, давление и температура являются функциями одной только плотности, ее же рассматривать как функцию двух переменных — (r_1, z) или (r, μ) .

Доказанные только что факты играют существенную роль в теории вращающихся звезд. Замечательно, что эти результаты остаются в силе и в общем случае дифференциального вращения с $\omega = \omega(r_1)$, см. задачу 4, с. 85. Они лежат в основе большинства методов расчета моделей вращающихся звезд.

В заключение покажем, что угловая скорость звезды, вращающейся как твердое тело, ограничена сверху (так называемый *предел Пуанкаре*, уже упоминавшийся в п. 1.2):

$$\omega^2 < 2\pi G \bar{\rho}, \quad (1.29)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность звезды. Применим к (1.24) оператор Лапласа. Так как в цилиндрических координатах он имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

где ϕ — азимутальный угол, то в силу (1.23) имеем $\Delta \varphi_R = 2\omega^2$, тогда как $\Delta \varphi$, согласно уравнению Пуассона (1.13), равно $4\pi G\rho$. Поэтому $\Delta \tilde{\varphi} = 4\pi G\rho - 2\omega^2$. Проинтегрируем это равенство по всему объему звезды V . Поскольку

$$\int_V \Delta \tilde{\varphi} dV = \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\varphi} dV = \int_S \operatorname{grad} \tilde{\varphi} d\mathbf{S},$$

где S — поверхность звезды, $d\mathbf{S}$ — ориентированный элемент этой поверхности, то в результате получим

$$\int_S \operatorname{grad} \tilde{\varphi} d\mathbf{S} = 4\pi GM - 2\omega^2 V.$$

Если звезда находится в равновесии, то эффективная сила тяжести $\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \tilde{\varphi}$ в любой точке ее поверхности должна быть направлена внутрь. Поэтому $\operatorname{grad} \tilde{\varphi} d\mathbf{S} > 0$, так что интеграл в левой части последней формулы положителен, а значит, $4\pi GM - 2\omega^2 V > 0$, что и дает (1.29).

**1.7. Уравнение
равновесия звезды в
ОТО**

Гравитационные поля звезд гораздо сильнее земного. Так, ускорение силы тяжести на поверхности Солнца $GM_\odot/R_\odot^2 \simeq 3 \cdot 10^4$ см/с², т.е. примерно в 30 раз больше земных 10 м/с². Скорость

убегания с его поверхности $v_e \simeq 600$ км/с, что также существенно больше второй космической скорости для Земли (11 км/с). Такого же порядка (500 ÷ 1000 км/с) скорости убегания v_e и у всех звезд ГП. Впрочем, земное гравитационное поле, являющееся *для человека* естественной единицей измерения — об этом позаботилась биологическая эволюция, — *для природы* в астрономическом масштабе ничем не выделено. Поэтому оно не может служить подходящим эталоном при измерении гравитационных полей. Естественный стандарт доставляет скорость света c . Если $v_e \ll c$, то гравитационное поле на поверхности звезды следует считать слабым, при $v_e \sim c$ — сильным. В первом случае применимо классическое ньютоновское описание поля тяготения, во втором необходимо пользоваться эйнштейновской общей теорией относительности (ОТО).

Согласно закону сохранения энергии, в нерелятивистском случае

$$\frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{R}. \quad (1.30)$$

Поэтому скорость убегания — прямая мера гравитационного потенциала на поверхности. Теперь понятно, что за меру того, сколь сильным является гравитационное поле в произвольной точке, естественно принять значение безразмерного отношения $|\varphi|/c^2$, где φ — потенциал. Оказывается, что внутри звезды потенциал по порядку величины не отличается от его значения на поверхности. Это показывают расчеты моделей звезд, как обычных, так и компактных. Поэтому, если $GM/R \ll c^2$, то гравитационное поле можно считать слабым по всей звезде. Иначе это можно сформулировать так. Обозначим через R_G радиус тела массы M , при котором скорость убегания с его поверхности, рассчитанная по классической формуле (1.30), равна скорости света:

$$R_G = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.31)$$

или в числах $R_G = 3 \mathcal{M}$ км. Соответствующая средняя плотность

$$\bar{\rho}_G = \frac{M}{(4\pi/3) R_G^3} = 2 \cdot 10^{16} \mathcal{M}^{-2} \text{ г/см}^3.$$

Величину R_G называют *гравитационным*, или *шварцшильдовским радиусом* массы M . Если реальный радиус тела $R \gg R_G$, его гравитационное поле слабое, если же $R \sim R_G$, или $\bar{\rho} \sim \bar{\rho}_G$, оно сильное.

Из последней формулы видно, что объекты обычных звездных масс ($\mathcal{M} \lesssim 10^2$) могут иметь сильные гравитационные поля лишь при колоссальных средних плотностях. Только нейтронные звезды столь компактны, что обладают действительно сильными гравитационными полями: $|\varphi| \sim 0.1 c^2$ на поверхности. Нейтронные звезды являются, таким образом, существенно релятивистскими объектами, и как следует понять их природу можно лишь на основе ОТО. К сожалению, дело осложняется тем, что свойства вещества очень высокой плотности известны плохо, в частности нет надежных данных об уравнении состояния.

Согласно приведенному критерию, для белых карликов эффекты ОТО должны быть малы. На самом деле это не совсем так. Когда масса белого карлика близка к предельно допустимой для них, звезда находится близ границы устойчивости, и поэтому малые эффекты могут

вызвать нарушение равновесия. В этом положении учет даже небольших отклонений поля тяготения от ньютонова становится необходимым.

Утверждая, что в пределах всей звезды потенциал того же порядка, что и на ее поверхности, мы были не вполне точны. Для красных гигантов это не так. У них потенциал близ центра по порядку отличается от потенциала на поверхности. Поэтому значения GM/R , которые для красных гигантов очень малы, не характеризуют звезду в целом. Потенциал близ центра красного гиганта обычно порядка потенциала на поверхности типичного белого карлика. Хотя он (по абсолютной величине) гораздо больше GM/R , релятивистские эффекты для красных гигантов все же почти всегда можно не учитывать. Что же касается звезд ГП и близких к ним по положению на диаграмме ГР, то здесь поправки на ОТО не играют никакой роли.

Следует ясно понимать, что релятивистский объект отнюдь не обязательно должен иметь высокую плотность. Это так только для тел звездной массы. Объект же с $M \sim 10^8$ создает сильное гравитационное поле при весьма скромной средней плотности $\sim 1 \text{ г/см}^3$. Такие объекты находятся в ядрах активных галактик и в квазарах.

Релятивистское уравнение гидростатического равновесия сферически-симметричной звезды известно как *уравнение Оппенгеймера – Волкова*. Оно имеет вид

$$\frac{dP}{dr} = -G \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\left(M_r + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2} \right)}{r^2 \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r} \right)}, \quad (1.32)$$

где

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'. \quad (1.33)$$

Его вывод не входит в нашу задачу, однако некоторые комментарии необходимы. Прежде всего подчеркнем, что здесь радиальная переменная r не есть эвклидово расстояние от центра. Согласно основной идее ОТО, наличие массы изменяет геометрию пространства и течение времени. В сферически-симметричном случае кривизна пространства и замедление хода времени должны, очевидно, зависеть только от расстояния от центра симметрии. Радиальная координата r вводится таким образом, что длина окружности с центром при $r = 0$ равна $2\pi r$. Иначе говоря, r по определению есть радиус кривизны поверхности трехмерной сферы площади $4\pi r^2$. Однако из-за кривизны пространства объем соответствующего шара отличен от $(4\pi/3)r^3$ и составляет

$$4\pi \int_0^r \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r} \right)^{-1/2} r^2 dr.$$

Величина M_r , даваемая (1.33), есть релятивистский аналог массы-энергии внутри трехмерной сферы радиуса r . В частности, величина

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr, \quad (1.34)$$

где R — радиус конфигурации, определяемый условием $\rho(R) = 0$, есть масса объекта, измеряемая по его полю тяготения удаленным наблюдателем. Она *не равна* суммарной массе покоя всех слагающих звезду частиц. Пусть n — концентрация барионов, μ_0 — средняя масса покоя на один барион. Так как объем шарового слоя толщиной dr в рассматриваемом случае равен $4\pi r^2 (1 - 2GM_r/c^2 r)^{-1/2} dr$, то полная масса покоя

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \mu_0 n \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1/2} r^2 dr. \quad (1.35)$$

Разность $M_0 - M$ известна как *гравитационный дефект массы* конфигурации.

Эти результаты — следствие уравнений поля Эйнштейна для статического сферически-симметричного случая. Геометрия пространства — времени может быть описана при этом линейным элементом

$$ds^2 = e^{2\Phi} c^2 dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.36)$$

Множитель $e^{2\Phi}$ описывает замедление хода времени в гравитационном поле, $e^{2\Lambda}$ — кривизну пространства. Для статического сферически-симметричного поля, очевидно, $\Phi = \Phi(r)$ и $\Lambda = \Lambda(r)$. Оказывается, что

$$e^\Lambda = \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1/2}, \quad (1.37)$$

а Φ определяется уравнением

$$c^2 \frac{d\Phi}{dr} = G \frac{\left(M_r + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)}, \quad (1.38)$$

так что релятивистское уравнение гидростатики можно записать также в форме

$$\frac{dP}{dr} = - \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) c^2 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (1.39)$$

Величина $c^2 \Phi(r)$ играет роль гравитационного потенциала. Помимо механического равновесия, ею определяется и гравитационное красное смещение фотона, испускаемого на r , при его наблюдении на бесконечности (не ограничивая общности, можно считать $\Phi(\infty) = 0$).

Выражение (1.36) для линейного элемента применимо как внутри, так и вне тела. Так как $\rho = 0$, $P = 0$ и $M_r = M$ при $r > R$, то (1.37) и (1.38) дают

$$e^\Lambda = e^{-\Phi} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2}, \quad r > R, \quad (1.40)$$

и вне тела (1.36) принимает вид метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.41)$$

Из этого выражения видно, что значение $r = 2GM/c^2 \equiv R_G$ является выделенным: коэффициент при dt^2 меняет знак, а при dr^2 — к тому же терпит разрыв. Частица, свободно падающая в радиальном направлении из бесконечности в центрально-симметричном гравитационном поле, описываемом метрикой Шварцшильда (1.41), при $r = R_G$ приобретает скорость, равную c . Этот строгий результат в точности совпадает с тем, что дал нам классический интеграл энергии (1.30) при бездумной подстановке в него $v = c$ (т.е. вне области его применимости). Это не более чем совпадение. Из классики можно было надеяться получить лишь правильную порядковую оценку $R_G \sim GM/c^2$. То, что на самом деле верным оказывается и коэффициент, — дело случая.

В чем качественные отличия гидростатики звезды по Ньютону и по Эйнштейну? Для удобства сопоставления выпишем соответствующие уравнения рядом:

$$\frac{dP}{dr} = -G\rho \frac{M_r}{r^2}, \quad (\text{H})$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\left(M_r + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2} \right)}{r^2 \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r} \right)}. \quad (\text{Э})$$

Классическое уравнение равновесия *само по себе* не накладывает ограничений на массу и радиус конфигурации, в ОТО же это не так. Как видно из (Э), равновесие возможно лишь при $r > R_G$. В противном случае в наружных частях конфигурации было бы $dP/dr > 0$, что несовместимо со статикой. Далее, видно, что при одинаковых ρ , P и M_r значения $|dP/dr|$ в релятивистском случае *больше*, чем в ньютоновском: в числителе в правой части (Э) в обеих круглых скобках появились дополнительные положительные слагаемые (давление в ОТО не только „давит“, но и „весит“), знаменатель же из-за множителя $(1 - 2GM_r/c^2 r)$ уменьшился. Итак, гравитация в статическом сферическом теле согласно теории относительности оказывается сильнее, чем по ньютоновской

теории. Проявлением этого служит, в частности, уменьшение предельной массы белых карликов из-за учета эффектов ОТО (см. разд. ??).

2. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

2.1. Гравитационная энергия звезды

Теорема вириала — это замечательное своей простотой и общностью соотношение между гравитационной энергией связи конфигурации и ее внутренней энергией, являющееся прямым следствием условия механического равновесия. В комбинации с законом сохранения энергии и принципом Паули теорема вириала позволяет в общих чертах понять, каковы должны быть основные этапы в жизни звезды.

Теорема вириала широко используется также в галактической и внегалактической астрономии. Это одно из очень важных и часто применяемых в современной астрофизике соотношений, такая же простая и безотказная рабочая лошадка как третий закон Кеплера, формула эффекта Доплера и т.п. Поэтому мы обсудим теорему вириала довольно подробно. Сначала рассматривается вопрос о нахождении гравитационной энергии звезды. Далее для простейших случаев приводятся два вывода теоремы вириала, внешне очень разных. Затем даются более общие формы теоремы вириала, позволяющие учесть наличие макроскопических движений, влияние крупномасштабных магнитных полей, релятивистские эффекты и др.

Переходим к нахождению гравитационной энергии связи звезды E_G , т.е. энергии, которую надо затратить, чтобы полностью рассеять составляющее звезду вещество, удалив его на бесконечность. Это один из важнейших глобальных параметров звезды. Мы получим для E_G два выражения — одно общее, годное при произвольном распределении вещества, и второе — частное, справедливое при сферической симметрии.

Энергия гравитационного взаимодействия точечных масс m_i и m_j („частиц“), находящихся на расстоянии r_{ij} , равна $-Gm_i m_j / r_{ij}$. Знак минус стоит потому, что при удалении частиц энергия не выделяется, а затрачивается. Для системы частиц

$$E_G = -\frac{1}{2} G \sum'_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

где суммирование идет по всем i, j , а штрих у знака суммы означает, что $i \neq j$. Множитель $1/2$ появляется из-за того, что при таком суммировании энергия взаимодействия каждой пары частиц учитывается дважды. Обозначив

$$\varphi_i = -G \sum'_j \frac{m_j}{r_{ij}},$$

можем переписать выражение для E_G в виде

$$E_G = \frac{1}{2} \sum_i m_i \varphi_i .$$

Величина φ_i есть, очевидно, гравитационный потенциал в месте расположения i -ой частицы, создаваемый всеми остальными массами.

Если вещество распределено непрерывно, то суммирование заменяется интегрированием, причем под „частицей” теперь следует понимать массу ρdV , заключенную в элементарном объеме dV . Поэтому

$$E_G = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV, \quad (2.1)$$

где интегрирование идет по всему объему, содержащему вещество. Эта формула справедлива при *произвольном* распределении вещества.

Отметим, что наряду с (2.1) для E_G имеется также и другое представление, а именно

$$E_G = - \int_V (\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi) \rho dV.$$

Сейчас оно нам не понадобится, и потому пока мы ограничиваемся лишь его упоминанием. Вывод см. в п. 2.5, где оно используется.

Если имеется *сферическая симметрия*, то $\rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = dM_r$, и поэтому (2.1) принимает вид

$$E_G = \frac{1}{2} \int_0^M \varphi dM_r .$$

Интегрируя по частям и учитывая, что в рассматриваемом случае $d\varphi/dr = GM_r/r^2$, легко получить, что (проверить!)

$$E_G = -\frac{GM^2}{2R} - \int_0^R \frac{GM_r^2}{2r^2} dr,$$

где M и R — масса и радиус конфигурации. Отсюда после еще одного интегрирования по частям окончательно находим

$$E_G = - \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r . \quad (2.2)$$

Рис. III.2.1:

К вычислению гравитационной энергии
сферически-симметричной звезды.

Проверьте, что (2.2) можно получить также подстановкой в (2.1) явного выражения (1.20) для φ через ρ .

Формулу (2.2) легко вывести и непосредственно из физических соображений. Удаляем вещество со звезды слой за слоем. Тогда на некотором этапе будем иметь звезду радиуса r и массы M_r , от которой отделен слой массы dM_r , находящийся на расстоянии r' от центра звезды (рис. III.2.1). На единицу массы в этом шаровом слое действует сила притяжения GM_r/r'^2 , и поэтому для смещения слоя на dr' надо совершить работу $(GM_r dM_r/r'^2) dr'$. Энергия, необходимая для перемещения массы dM_r с поверхности на бесконечность, составляет, таким образом,

$$-dE_G = GM_r dM_r \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{GM_r}{r} dM_r.$$

Суммируя работу по последовательному удалению всех слоев, составляющих звезду, приходим к (2.2).

При сжатии массы M в звезду радиуса R выделяется энергия $|E_G|$, определяемая (2.2). Эта энергия частично идет на нагрев звезды, частично же расходуется на излучение. Оценим ее. Вводя безразмерные переменные — долю массы $q \equiv M_r/M$ и долю радиуса $x \equiv r/R$, можем переписать (2.2) в виде

$$E_G = -\omega \frac{GM^2}{R}, \quad (2.3)$$

где ω — безразмерный структурный множитель, определяемый ходом плотности в звезде:

$$\omega = \int_0^1 \frac{q \, dq}{x}.$$

Внимание! Та же буква ω используется нами для обозначения угловой скорости вращения звезды (см., например, п.п. 1.2 и 1.6).

Для оценки ω заметим, что так как $x = r/R \leq 1$, то $\omega \geq \int_0^1 q \, dq = 1/2$. Знак равенства соответствует нереальной модели звезды в виде пустотелой тонкой тяжелой сферической оболочки радиуса R . Для однородного шара $M_r = (4\pi/3)r^3\rho = x^3M$, и E_G легко вычисляется, что дает $\omega = 3/5$. Очевидно, что когда плотность растет к центру, как это на самом деле и есть, то $\omega > 3/5$. Действительно, чтобы получить такое распределение плотности из равномерного, надо часть вещества с периферии перенести ближе к центру, что будет сопровождаться выделением дополнительной гравитационной энергии. Так как M и R считаются при этом постоянными, то ω должно возрастать.

В столь сильно различающихся по распределению массы моделях, как „мяч” с тонкими тяжелыми стенками и однородная сфера, значения ω оказываются, таким образом, очень близки: $\omega = 0.5$ и 0.6 , соответственно. В обоих случаях они не сильно отличаются от единицы.

Проверьте, что линейному падению плотности $\rho = \rho_c(1 - r/R)$ отвечает $\omega = 26/35 = 0.74$.

Можно думать, что и для более реалистичных моделей, у которых плотность возрастает к центру довольно быстро, ω все же будет порядка единицы. И действительно, если в звезде $P \propto \rho^{1+1/n}$ — в этом случае говорят, что звезда есть политропа индекса n , — то, как будет показано в п. V.2.1 (с. 129), $\omega = 3/(5 - n)$. Звезды главной последовательности по своему строению близки к политропам с n от 1.5 до примерно 3.5. Соответственно этому, для них значения ω заключены в интервале от ~ 0.9 до 2. Это иллюстрируется рис. III.2.2, дающим ω для моделей химически однородных звезд различных масс (расчеты В.Б. Ильина, Астрономический институт СПбГУ; химический состав: $X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$).

Из всех звезд начальной главной последовательности наибольшими значениями ω , а значит, и наибольшей концентрацией вещества к центру обладают звезды с массами, близкими к солнечной, точнее, раза в полтора — два большими M_\odot .

Рис. III.2.2:

Безразмерная гравитационная потенциальная энергия химически однородных звезд разных масс ($X=0.70$, $Y=0.27$, $Z=0.03$).

Полезно знать также значение ω для Солнца в его нынешнем состоянии, когда оно прожило на ГП уже около половины отпущенного ему срока:

$$\omega_{\odot} = 1.62.$$

Это значение рассчитано нами по только что появившейся в Интернете (октябрь 2000 г.) и, как можно думать, одной из лучших, если не лучшей из имеющихся моделей сегодняшнего Солнца (J.N. Bahcall et al., <http://www.sns.ias.edu/~jnb>). Значению E_G для современного Солнца, приводимому в третьем издании стандартного справочника К. Аллена „Астрофизические величины” (М.: Мир, 1977), соответствует $\omega_{\odot} = 1.7$.

Обсуждение численных значений E_G для звезд разных типов и их изменения в ходе звездной эволюции мы отложим до п. 3.2.

2.2. Вывод теоремы вириала из условия гидростатического равновесия

Получим теперь соотношение, выражающее теорему вириала для простейшего случая сферически-симметричной нормальной звезды. Исходим из уравнения механического равновесия

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

и уравнения, определяющего M_r :

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Перемножив их крест-накрест и домножив результат на r , получим

$$4\pi r^3 dP = -G \frac{M_r dM_r}{r},$$

или

$$3V dP = dE_G,$$

где обозначено $V = (4\pi/3)r^3$, $dE_G = -GM_r dM_r/r$. Проинтегрируем это равенство по всей звезде. Согласно (2.2), интеграл от dE_G есть гравитационная энергия звезды E_G . Левую часть преобразуем интегрированием по частям. С учетом того, что в центре звезды $V = 0$, а на поверхности $P = 0$, окончательно находим

$$E_G = -3 \int P dV, \quad (2.4)$$

где интегрирование идет по всему объему звезды. Это соотношение и выражает теорему вириала для сферически-симметричной звезды, находящейся в механическом равновесии. Поскольку $dM_r = \rho dV$, его можно записать также в форме

$$E_G = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r.$$

По определению нормальной звезды, давление в ней создается идеальным невырожденным нерелятивистским газом. Поэтому $P = NkT$, где N — концентрация частиц. В звездах газ можно считать одноатомным. В пренебрежении энергией возбуждения и ионизации по сравнению с кинетической энергией поступательного движения частиц объемная плотность энергии газа равна тогда $e_{\text{кин}} = (3/2)NkT$, так что $P = (2/3)e_{\text{кин}}$. Полная энергия теплового движения всех составляющих звезду частиц

$$E_T \equiv \int e_{\text{кин}} dV = \frac{3}{2} \int P dV,$$

и поэтому для нормальной звезды вириальное соотношение (2.4) принимает вид

$$E_G + 2E_T = 0. \quad (2.5)$$

Это простейшая и одновременно *наиболее употребительная* форма теоремы вириала. Другой вариант ее записи получается, если ввести полную энергию нормальной звезды E , равную, очевидно,

$$E = E_G + E_T .$$

Тогда вместо (2.5) будем иметь

$$E = -E_T . \quad (2.6)$$

Во всей теории звезд едва ли найдется другой пример столь же внешне простого результата, который был бы в то же время столь же важен, как и скромное на вид равенство (2.5). Его обсуждение будет дано в п. 3.3, с. 81.

**2.3. Динамический
вывод теоремы
вириала**

С точки зрения динамики теорема вириала есть некоторое утверждение статистического характера относительно совокупности взаимодействующих частиц. Рассмотрим систему материальных точек с массами m_i , находящихся в \mathbf{r}_i под действием сил \mathbf{F}_i . В нерелятивистском случае уравнение движения i -ой частицы имеет вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i .$$

Умножим его скалярно на \mathbf{r}_i . Мы имеем

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i^2}{dt^2} = 2\mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i + 2\dot{\mathbf{r}}_i^2 .$$

Это частный случай формулы Лейбница для n -ой производной произведения при $n = 2$. Далее, $\mathbf{r}_i^2 = r_i^2$, где $r_i = |\mathbf{r}_i|$, а $\dot{\mathbf{r}}_i^2 = v_i^2$, так что $\mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = 1/2 (d^2 r_i^2 / dt^2) - v_i^2$. Поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (m_i r_i^2) - m_i v_i^2 = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i .$$

Суммируя по всем частицам, получаем

$$\frac{1}{2} \ddot{I} - 2E_K = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i , \quad (2.7)$$

где

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

есть момент инерции системы, E_K — ее полная кинетическая энергия

$$E_K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2},$$

а сумма, стоящая в правой части, известна как *вириал Клаузиуса* (отсюда и название теоремы).

В студенческих конспектах часто фигурирует теорема некоего Вириала, однако назвать национальность господина Вириала студенты затрудняются.

Ревнителю чистоты русского языка считают термин „теорема вириала” научным жаргоном и настаивают на том, что следует говорить „теорема о вириале”. Если согласиться с ними, то из математики по тем же соображениям пришлось бы изгнать все теоремы существования, превратив их в теоремы о существовании.

Термин „вириальная теорема” — точный перевод *virial theorem* — мог бы рассматриваться как разумный компромисс, если бы в нем была нужда.

Применим (2.7) к звезде. Если магнитное поле отсутствует, то силы, входящие в вириал, — это электростатические силы кулоновского взаимодействия составляющих звезду частиц газа — ионов и свободных электронов, а также гравитационные силы их взаимного притяжения. Электростатические силы гораздо сильнее гравитационных. Так, сила кулоновского отталкивания двух протонов e^2/r^2 больше силы их ньютонова притяжения Gm_p^2/r^2 в $e^2/Gm_p^2 \sim 10^{36}$ раз. Тем не менее вклад электростатических сил в вириал обычно мал. Ионизованный газ электрически нейтрален, и поэтому со стороны звезды в целом никакой кулоновой силы на объем не действует. Несбалансированные электростатические силы действуют на частицы только при их столкновениях. При этом сталкивающиеся частицы дают в вириале два члена, сумма которых равна нулю, так как для сталкивающихся частиц \mathbf{r} практически одинаковы, а \mathbf{F} равны по величине и противоположны. Поэтому силами кулоновского взаимодействия мы пренебрежем, т.е. будем считать газ идеальным. (Обсуждение кулоновских поправок, обусловленных неравномерностью распределения заряда на малых расстояниях из-за поляризации плазмы, см. в разд. ???.2.)

Единственными силами, дающими вклад в вириал, остаются тогда ньютоновские силы взаимного притяжения частиц

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где \mathbf{F}_{ij} — сила, действующая на частицу i со стороны частицы j , и

$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Объединив частицы в пары, перепишем вириал в виде

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum^* (\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \mathbf{r}_j),$$

где \sum^* означает, что суммирование идет по всем парам. Учитывая, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, будем иметь

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum^* \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Величина, стоящая под знаком правой суммы, равна

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

т.е. представляет собой потенциальную энергию взаимодействия частиц i и j . Поэтому вся сумма, т.е. вириал, равна в данном случае гравитационной энергии звезды E_G , и (2.7) принимает вид

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2E_K + E_G. \quad (2.8)$$

Приведенный вывод ясно показывает, что это соотношение есть следствие того, что гравитационное взаимодействие происходит по закону обратных квадратов. Заметим мимоходом, что в небесной механике (2.8) известно как уравнение Лагранжа – Якоби.

Подчеркнем, что E_K в вириальном соотношении (2.8) включает в себя кинетическую энергию как теплового движения частиц, так и *всех* макроскопических движений вещества (обусловленных вращением, пульсациями, конвективными токами и т.п.). Если не происходит разлета или неограниченного сжатия, то при усреднении (2.8) по промежутку времени, большому по сравнению с характерным временем крупномасштабных движений, левая часть обращается в нуль. Таким образом, если под E_K и E_G понимать усредненные по времени величины, то вместо (2.8) будем иметь

$2E_K + E_G = 0.$

(2.9)

Существенно, что здесь, в отличие от п. 2.2, при выводе не предполагалось ни сферической симметрии системы, ни того, что вклад в ее кинетическую энергию E_K дают лишь хаотические тепловые движения частиц. Поэтому вириальное соотношение $2E_K + E_G = 0$ имеет

более широкую область применимости, чем его частный случай — соотношение $2E_T + E_G = 0$, полученное в предыдущем пункте из уравнения гидростатики для сферически-симметричной звезды. Если нормальная звезда находится в механическом равновесии, то вириальное соотношение $2E_K + E_G = 0$ будет выполняться и тогда, когда в ней происходят установившиеся макроскопические движения вещества. В частности, оно имеет место для вращающейся звезды, причем вращение не обязательно твердотельное. Если вращение происходит быстро, вклад кинетической энергии вращения в E_K может быть значительным (см. п. ??).

**2.4. Более общие
вириальные
соотношения**

Хотя в большинстве случаев оказывается достаточно той „детской” формы теоремы вириала, в которой она была получена выше, стоит привести и более общие вириальные соотношения — „для

взрослых”. Обобщение будет произведено в нескольких направлениях. Во-первых, в настоящем пункте нестационарная (с членом \ddot{I}) теорема вириала выводится в форме, применимой не только к звезде в целом, но и к ее частям. Важнейшие частные случаи этого общего соотношения обсуждаются в следующем пункте. Во-вторых, в п. 2.6 дается так называемая магнитная теорема вириала, т.е. теорема вириала для самогравитирующей плазмы, находящейся в магнитном поле. В-третьих, обсуждается случай столь больших скоростей движения вещества и/или частиц газа, что становится необходимым релятивистское рассмотрение (специальная теория относительности) (п. 2.7). Наконец, в-четвертых, в п. 2.8 дается понятие о тензорной теореме вириала — важном средстве исследования несферических самогравитирующих систем. Круг вопросов, связанных с теоремой вириала и ее астрономическими применениями, далеко не исчерпывается тем, что мы излагаем. Достаточно сказать, что имеется даже монография, целиком посвященная теореме вириала и ее применениям к физике звезд (**G.W. Collins**, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*, Tucson, 1978; ее микрофильм есть в библиотеке АИ СПбГУ). Впрочем, и к этой книге можно сделать целый ряд дополнений.

До конца этого раздела мы будем заниматься строгими, подчас довольно громоздкими выводами формул. Физических пояснений будет даваться мало. Они отнесены в последующие разделы. Поэтому читатели, которых больше интересуют астрономические следствия теоремы вириала, чем ее всестороннее обоснование, могут просто принять на веру те из имеющихся далее в этом разделе формул, которые специально отмечены (они используются в дальнейшем), и прямо перейти к чтению последующих, менее формальных разделов.

Соотношение, выражающее теорему вириала в весьма общей (нестационарной) форме, нетрудно вывести из гидродинамического уравнения движения (1.12). Его левая часть $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ есть попросту ускорение $d^2 \mathbf{r} / dt^2$ фиксированного элемента жидкости, и поэтому уравнение движения можно записать также в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \varphi + \mathbf{F}. \quad (2.10)$$

Умножим его скалярно на $\rho \mathbf{r}$ и проинтегрируем затем по объему V^* — такой произвольной части полного объема звезды V , которая ограничена изобарической поверхностью S^* , т.е. на ней $P = P^* = \text{const}$.

В результате в левой части появится интеграл от $\rho \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ по объему V^* . Так как $\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = (1/2) d^2 r^2 / dt^2 - v^2$, то этот интеграл приводится к виду

$$\int_{V^*} \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rho dV = \frac{1}{2} \ddot{I}^* - 2E_{\text{макр}}^*, \quad (2.11)$$

где

$$E_{\text{макр}}^* = \int_{V^*} \frac{\rho v^2}{2} dV$$

есть кинетическая энергия макроскопических движений вещества, находящегося в объеме V^* , и

$$I^* = \int_{V^*} r^2 \rho dV.$$

Отметим, что как сам объем V^* , занимаемый рассматриваемой (фиксированной) массой, так и плотность ρ изменяются со временем: $V^* = V^*(t)$, $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Выше при преобразованиях мы использовали тот факт, что для произвольной величины $Q = Q(\mathbf{r}, t)$, характеризующей движущееся вещество,

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} Q \rho dV = \int_{V^*} \frac{dQ}{dt} \rho dV.$$

Это есть следствие того, что фактически интегрирование ведется по выделенной фиксированной массе.

Первый член в правой части порождает слагаемое

$$- \int_{V^*} \mathbf{r} \cdot \nabla P dV.$$

Для его упрощения заметим прежде всего, что $\mathbf{r} \cdot \nabla P = \operatorname{div}(P \mathbf{r}) - 3P$. Появляющийся объемный интеграл $\int_{V^*} \operatorname{div}(P \mathbf{r}) dV$ преобразуем по теореме Гаусса в поверхностный $\int_{S^*} P \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$. Так как по предположению S^* — изобарическая поверхность, на которой $P = P^* = \text{const}$, то последний интеграл равен $P^* \int_{S^*} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$. Еще раз пользуясь теоремой Гаусса — на этот раз в обратную сторону, т.е. преобразуя поверхностный интеграл в интеграл по объему, — находим $P^* \int_{S^*} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = P^* \int_{V^*} \operatorname{div} \mathbf{r} dV = 3P^* V^*$, так как $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$. В результате оказывается, что

$$- \int_{V^*} \mathbf{r} \cdot \nabla P dV = 3 \int_{V^*} P dV - 3P^* V^*. \quad (2.12)$$

Наконец, второй и третий члены в правой части уравнения движения по умножении его на $\rho \mathbf{r}$ и интегрировании по V^* дают вириал

$$\operatorname{Vir}^* = \int_{V^*} \mathbf{r} \cdot (-\nabla \varphi + \mathbf{F}) \rho dV. \quad (2.13)$$

Собирая вместе выражения (2.11) – (2.13), приходим окончательно к следующему вириальному соотношению для произвольной части звезды, ограниченной изобарической поверхностью:

$$\boxed{\frac{1}{2} \ddot{I}^* = 2E_{\text{макр}}^* + 3 \int_{V^*} P dV - 3P^* V^* + \operatorname{Vir}^*}. \quad (2.14)$$

При выводе вириального соотношения для части звезды не обязательно было исходить из модели сплошной среды. Можно рассматривать и совокупность материальных точек, движение которых описывается уравнениями Ньютона $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$. При таком подходе вириальное равенство получается в форме, слегка отличной от (2.14):

$$\frac{1}{2} \ddot{I}^* = 2E_K^* - 3P^* V^* + \operatorname{Vir}^*, \quad (2.15)$$

где E_K^* — кинетическая энергия поступательного движения частиц, находящихся в объеме V^* , слагаемое $-3P^* V^*$ — вклад в вириал, давае-

мый силой давления P^* , действующей на ограничивающую V^* поверхность (которую по-прежнему считаем изобарической), Vir^* — вириальный член, обусловленный силами, которые действуют на частицы, расположенные внутри V^* :

$$\text{Vir}^* = \sum_{V^*} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i. \quad (2.16)$$

Суммирование распространяется здесь на все имеющиеся в объеме V^* частицы; \mathbf{F}_i — равнодействующая сил, приложенных к i -ой частице.

2.5. Частные случаи

а) В важнейшем частном случае, когда V^* — весь объем звезды ($V^* = V$), а единственной силой, дающей вклад в вириал, является сила взаимного притяжения частей звезды, так что $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, (2.14) переходит в соотношение

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2E_{\text{макр}} + 3 \int_V P dV + E_G, \quad (2.17)$$

где $E_{\text{макр}}$ — полная кинетическая энергия макроскопических движений вещества во всей звезде, а E_G , как всегда, гравитационная энергия конфигурации. Действительно, поскольку на поверхности звезды давление равно нулю, то $P^* = 0$ при $V^* = V$. Поэтому для получения (2.17) из (2.14) нам достаточно показать, что гравитационную энергию связи звезды E_G можно представить в виде (уже упоминавшемся в п. 2.1)

$$E_G = - \int_V (\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi) \rho dV, \quad (2.18)$$

поскольку согласно (2.13) при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ и $V^* = V$ вириал дается именно этим выражением.

Доказательство (2.18) исходит из обычного представления для потенциала

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Поскольку $\nabla_{\mathbf{r}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}) = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$, то

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi = G \int_V \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.19)$$

Подинтегральное выражение можно преобразовать, воспользовавшись тождеством $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. В результате получим для $\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi$ другое представление

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi = -\varphi - G \int_V \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.20)$$

Подставим (2.20) в (2.18) и изменим порядок интегрирования в получающемся двойном интеграле. Сравнивая результат с тем, что дает (2.18) при подстановке в него (2.19), приходим к соотношению

$$E_G = \int_V \varphi \rho dV - E_G,$$

доказывающему тождественность (2.18) и обычного выражения для гравитационной энергии связи произвольной конфигурации, полученного в п. 2.1:

$$E_G = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV.$$

б) В звездах больших масс заметный вклад в давление наряду с частицами газа дают также фотоны. В этом случае $P = P_g + P_r$, где P_g — давление максвелловского идеального газа, P_r — давление излучения. В любой точке внутри звезды поле излучения очень близко к термодинамически равновесному с температурой, равной локальной температуре T . Поэтому $P_r = (1/3)e_{\text{изл}}$, где $e_{\text{изл}}$ — объемная плотность энергии равновесного излучения: $e_{\text{изл}} = aT^4$, a — постоянная Стефана. Имеем также $P_g = (2/3)e_{\text{кин}}$, где $e_{\text{кин}}$ — плотность энергии тепловых движений частиц максвелловского газа. Следовательно,

$$3 \int_V P dV = 2E_T + E_R,$$

где E_T и E_R — соответственно полная тепловая энергия вещества и полная энергия излучения, запасенные в звезде:

$$E_T = \int_V e_{\text{кин}} dV, \quad E_R = \int_V e_{\text{изл}} dV. \quad (2.21)$$

В итоге при учете давления излучения (2.17) дает

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2E_K + E_R + E_G, \quad (2.22)$$

где E_K — полная кинетическая энергия системы:

$$E_K = E_{\text{макр}} + E_T.$$

В частности, в стационарном случае

$$2E_K + E_R + E_G = 0. \quad (2.23)$$

Заметим, что при пренебрежении энергией возбуждения и ионизации полная энергия звезды

$$E = E_K + E_R + E_G.$$

Поэтому в стационарном случае всегда $E = -E_K$, независимо от того, какова роль давления излучения.

При $E_R = 0$ формула (2.22) переходит в соотношение (2.8), полученное ранее другим путем. Этот путь, однако, не давал возможности учесть вклад энергии излучения. Что же до формулы (2.23) при $E_R = 0$, то она дает хорошо уже нам знакомое равенство $2E_K + E_G = 0$. Впрочем, при выводе (2.14) мы предполагали, не оговаривая этого специально, что звезда не вращается — в противном случае в уравнение движения следовало бы ввести члены, учитывающие центробежную и кориолисову силы. Тем самым равенство $2E_K + E_G = 0$, следующее из (2.23) при $E_R = 0$, доказано здесь лишь для невращающейся звезды. В действительности же, как было установлено в предыдущем пункте, оно имеет место для звезды с произвольным, не обязательно твердотельным, вращением. Таким образом, два разных способа вывода вириального соотношения — а) исходя из уравнения движения жидкости и б) отправляясь от уравнений движения системы материальных точек — отчасти дополняют друг друга, давая результаты хотя и очень близкие, но все же не полностью перекрывающиеся.

в) Применим теперь (2.15) к малому объему $V^* = dV$ покоящегося вещества ($\dot{I}^* = 0$), на которое внешние силы не действуют, так что \mathbf{F}_i в (2.16) обусловлены только взаимодействием частиц самого рассматриваемого малого объема. В этом случае P^* равно, очевидно, давлению P в этом объеме, а $E_K^* = e_{\text{кин}} dV$, где $e_{\text{кин}}$ — объемная плотность энергии поступательного движения частиц. Предположим сначала, что вещество — это идеальный газ. Тогда силы взаимодействия между частицами \mathbf{F}_i равны нулю по определению, так что $\text{Vir}^* = 0$, и (2.15) дает

$$P = \frac{2}{3} e_{\text{кин}}. \quad (2.24)$$

Эта полезная формула уже встречалась нам выше (в частности, в п. 2.2), будет использоваться она и в дальнейшем. Существенно, что

при ее выводе никаких предположений о распределении частиц по скоростям не делалось. Поэтому она применима *независимо от степени вырождения газа*, если только газ идеальный и энергии частиц нерелятивистские.

Откажемся теперь от первого из этих предположений (об идеальности газа). В сильно ионизованном газе, из которого состоят звезды, отклонения от идеальности вызываются кулоновскими взаимодействиями частиц. Хотя макроскопически плазма нейтральна, в микромасштабах это не так. Положительные и отрицательные заряды распределены в ней не вполне хаотически — электроны образуют облака отрицательного заряда вокруг положительно заряженных ионов (поляризация плазмы). В обычных звездах роль этого эффекта оказывается малой, так что газ близок к идеальному.

Однако для сильно остывших белых карликов это уже далеко не так. Кулоновские взаимодействия решающим образом влияют на поведение ионной составляющей их вещества, которая должна из-за этих взаимодействий образовывать кристаллическую решетку. Подробнее см. ????

Как учет кулоновских поправок изменяет (2.24)? Кулоновские взаимодействия, как и гравитационные, происходят по закону обратных квадратов. Это позволяет преобразовать кулоновский вириал для малого объема $V^* = dV$ совершенно таким же образом, как это делалось с входящим в (2.8) гравитационным вириалом всей звезды. В результате оказывается, что при действии только кулоновских сил

$$\sum_{dV} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = e_{\text{кул}} dV,$$

где $e_{\text{кул}}$ — объемная плотность энергии кулоновского взаимодействия в макроскопически нейтральной плазме:

$$e_{\text{кул}} = \sum_{V=1}^* \frac{e_i e_j}{r_{ij}}. \quad (2.25)$$

Здесь e_i, e_j — заряды частиц. Символ $\sum_{V=1}^*$ означает, что суммирование идет по всем парам заряженных частиц, находящимся в единичном объеме. Учет этого кулоновского члена в вириальном соотношении (2.15), записанном для малого объема dV , ведет к тому, что (2.24) заменяется на

$$P = \frac{2}{3} e_{\text{кин}} + \frac{1}{3} e_{\text{кул}}. \quad (2.26)$$

Мы не будем сейчас находить плотность кулоновской энергии $e_{\text{кул}}$, поскольку это не имеет отношения к теореме вириала. Ограничимся

двумя замечаниями. Во-первых, отметим, что кулоновская энергия $e_{\text{кул}}$ отрицательна. Таким образом, согласно (2.26) *давление в плазме ниже, чем в идеальном газе той же температуры и плотности*. Во-вторых, укажем, что $e_{\text{кул}}$ и $e_{\text{кин}}$ зависят от плотности (и температуры) по-разному. В частности, в сильно ионизованном невырожденном почти идеальном ($e_{\text{кул}} \ll e_{\text{кин}}$) газе $e_{\text{кул}} \propto (\rho^3/T)^{1/2}$. Так как $e_{\text{кин}} \propto \rho T$, то $e_{\text{кул}}/e_{\text{кин}} \propto (\rho/T^3)^{1/2}$. Следовательно, в невырожденном газе отклонения от идеальности с ростом плотности увеличиваются, как это подсказывается и „интуицией”. Впрочем, полагаться на нее нужно с осторожностью. Так, в сильно вырожденном (нерелятивистском) электронном газе $e_{\text{кин}} \propto \rho^{5/3}$, а $e_{\text{кул}} \propto \rho^{4/3}$. Поэтому $e_{\text{кул}}/e_{\text{кин}} \propto \rho^{-1/3}$, и такой газ тем ближе к идеальному, чем он плотнее.

Более подробное обсуждение эффектов кулоновского взаимодействия см. в п. ??.

2.6. Магнитная теорема вириала

Важная роль магнитных полей в космосе была в полной мере осознана сравнительно поздно. Неудивительно, что при рассмотрении равновесия и динамики космических газовых масс — как звезд, так и межзвездной среды, — давление магнитного поля долгое время не учитывалось вовсе. Так, в теорему вириала соответствующий член был введен лишь в 50-е годы (С. Чандрасекар и Э. Ферми).

Вещество звезд — это ионизованный газ высокой проводимости, т.е. плазма. Для нее, разумеется, $\varepsilon = \mu = 1$, где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; поэтому в макроскопических уравнениях Максвелла $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. Если имеется магнитное поле напряженности \mathbf{H} и в проводнике, в данном случае — плазме, течет ток, плотность которого \mathbf{j} , то на единицу объема действует сила

$$\rho \mathbf{F} = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}). \quad (2.27)$$

Соответствующая сила на единицу массы есть, очевидно \mathbf{F} . Эта ponderomotorная сила должна учитываться в гидродинамическом уравнении движения (2.10). С другой стороны, в обычное выражение для силы тока

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right),$$

где σ — проводимость, в свою очередь, входит скорость \mathbf{v} . Поэтому уравнения гидродинамики оказываются „сцепленными” с уравнениями

Максвелла в одну систему — систему уравнений магнитной гидродинамики. Ее детальное обсуждение не входит в нашу задачу, которая гораздо скромнее — найти, какой вклад в вириал дает сила (2.27) и тем самым — какой дополнительный член магнитное поле вводит в вириальное соотношение. Мы покажем, что вместо (2.17) для магнитной звезды как целого выполняется равенство

$$2E_{\text{макр}} + 3 \int_V P dV + E_M + E_G = 0, \quad (2.28)$$

где P — обычное давление (за вычетом магнитного) и E_M — полная энергия магнитного поля звезды:

$$E_M = \int_{V_M} \frac{H^2}{8\pi} dV. \quad (2.29)$$

Интегрирование в (2.29) распространяется по всей области пространства V_M , в которой имеется поле. Равенство (2.28) будем называть *магнитной теоремой вириала*.

Прежде чем обращаться к выводу (2.28), рассмотрим магнитно-гидродинамическое уравнение движения. Ввиду высокой проводимости плазмы током смещения $(1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$ в уравнении Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

можно пренебречь по сравнению с пропорциональным σ током проводимости $(4\pi/c)\mathbf{j}$. Это стандартное предположение магнитной гидродинамики. Тогда

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H},$$

и поэтому (2.27) принимает вид

$$\rho \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (2.27')$$

откуда

$$\rho \mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi} \nabla H^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (2.27'')$$

Здесь мы воспользовались известной формулой векторного анализа

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = -\frac{1}{2} \nabla A^2 + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

где $A = |\mathbf{A}|$. Вводя \mathbf{F} отсюда в (2.10), получаем уравнение движения в часто используемой в магнитной гидродинамике форме:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \nabla \varphi. \quad (2.30)$$

Для наших целей это уравнение целесообразно, однако, преобразовать дальше. Воспользуемся тождеством

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = -\mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{A} \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A} \mathbf{A}$ — тензор с компонентами $A_i A_j$, а $\nabla \cdot \mathbf{A} \mathbf{A}$ — его дивергенция, т.е., по определению, вектор с составляющими $\partial(A_j A_i)/\partial x_j$, $i = 1, 2, 3$. Здесь и далее по повторяющимся индексам (в данном случае — j) предполагается суммирование. Последняя формула становится очевидной, если ее расписать в компонентах:

$$A_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = -A_i \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(A_i A_j)}{\partial x_j}.$$

Взяв $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ и учтя, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ (это уравнение Максвелла), получим

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{H} \mathbf{H}.$$

Далее, согласно определениям градиента скалярного поля и дивергенции тензора имеем тождество $\nabla a = \nabla \cdot (a \mathbf{l})$, где \mathbf{l} — единичный тензор, т.е. тензор с компонентами $l_{ij} = \delta_{ij}$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Значит,

$$\nabla \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) = \nabla \cdot \left(\left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) \mathbf{l} \right).$$

Введя тензор давления

$$\mathbf{P} = \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) \mathbf{l} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \mathbf{H}, \quad (2.31)$$

мы можем поэтому переписать уравнение (2.30) в следующей окончательной форме:

$$\rho \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} - \rho \nabla \varphi. \quad (2.32)$$

Внешне это уравнение очень похоже на обычное уравнение движения идеальной жидкости под действием силы тяжести, с той разницей, что градиент скалярного давления ∇P заменен в правой части на $\nabla \cdot \mathbf{P}$.

Тензор давления \mathbf{P} складывается из члена $P\mathbf{I}$, обусловленного обычным изотропным давлением при отсутствии магнитного поля, и максвелловского тензора магнитных напряжений

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{H^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{H} \right).$$

Если говорить на наглядном языке силовых линий, то магнитные напряжения обусловлены тем, что магнитные силовые линии подобны стремящимся сжаться растянутым пружинам, которые в то же время отталкиваются друг от друга.

Вывод магнитной теоремы вириала из (2.32) проводится по той же схеме, что и при изотропном (скалярном) давлении. Небольшие отличия есть лишь при преобразовании объемного интеграла от $\mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P})$.

Прежде всего, использовавшуюся в скалярном случае для преобразования величины $\mathbf{r} \cdot \nabla P$ векторную формулу $\mathbf{r} \cdot \nabla P = \operatorname{div}(\mathbf{r} P) - 3P$ надлежит заменить ее тензорным обобщением

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) = \operatorname{div}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - P_{ii}. \quad (2.33)$$

Последняя формула становится очевидной (*self-explanatory*, как говорят по-английски), если ее расписать в компонентах (напоминаем: по повторяющимся индексам — суммирование)

$$x_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j P_{ji}) - P_{ii}.$$

Член P_{ii} — это след тензора давления \mathbf{P} , т.е. сумма его диагональных компонент. Он равен утроенному среднему давлению \overline{P} (усреднение — по направлениям). Из (2.31) находим

$$P_{ii} = 3\overline{P} = 3 \left(P + \frac{1}{3} \frac{H^2}{8\pi} \right). \quad (2.34)$$

Величина $(1/3)H^2/8\pi$ есть среднее магнитное давление. Оно составляет, таким образом, одну треть плотности энергии магнитного поля.

Далее (2.33) следует проинтегрировать по области V_+ , представляющей собой объединение области V , содержащей вещество, и области V_M , в которой есть магнитное поле. В результате (2.33) и (2.34) дадут

$$\int_{V_+} \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = -3 \int_V P dV - \int_{V_M} \frac{H^2}{8\pi} dV + \int_{V_+} \operatorname{div}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) dV.$$

Последний интеграл в правой части равен нулю. Чтобы в этом убедиться, его нужно преобразовать по теореме Гаусса в поверхностный и

учесть, что, по определению области V_+ , на ограничивающей ее поверхности и P , и \mathbf{H} равны нулю.

Сказанного достаточно, чтобы считать магнитную теорему вириала (2.28) доказанной. Ее астрофизическое обсуждение см. в п. ???. ???

2.7. Релятивистская теорема вириала

Когда движения происходят с большими ($\sim c$) скоростями, ньютонова механика неприменима. Перестает работать и классическая теорема вириала. Как выглядит ее релятивистское обобщение?

Единственное отличие релятивистского уравнения движения (точнее, трех его пространственных компонент) от (2.10) состоит в том, что в левой части вместо $\ddot{\mathbf{r}}$ стоит $\dot{\mathbf{p}}$, где \mathbf{p} — релятивистский импульс в расчете на единицу массы покоя: $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}/\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = v/c$ и $v = |\dot{\mathbf{r}}|$. Действуя, как и в классическом случае, умножаем скалярно обе части уравнения движения на \mathbf{r} . Правая часть интереса для нас сейчас не представляет — она такая же, как и в нерелятивистском случае. Левую же можно преобразовать так:

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{dt} - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

. Далее, поскольку $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}/\sqrt{1-\beta^2}$, то

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

что можно представить также в форме

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \varepsilon_{\text{макр}} \left(1 + \sqrt{1-\beta^2} \right),$$

где $\varepsilon_{\text{макр}}$ — кинетическая энергия *единицы массы*, обусловленная макроскопическими движениями, т.е. разность ее полной энергии и энергии покоя:

$$\varepsilon_{\text{макр}} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - c^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \varepsilon_{\text{макр}} \left(1 + \sqrt{1-\beta^2} \right).$$

Для простоты ограничимся в дальнейшем рассмотрением стационарного случая. Интегрируя последнее равенство по всей звезде, будем

тогда иметь

$$\int_M \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} dm = -\bar{\alpha}_{\text{макр}} E_{\text{макр}},$$

где $E_{\text{макр}}$ — полная энергия макроскопических движений в звезде:

$$E_{\text{макр}} = \int_M \varepsilon_{\text{макр}} dm,$$

$\bar{\alpha}_{\text{макр}}$ — средневзвешенное по звезде значение $1 + \sqrt{1 - \beta^2}$:

$$\bar{\alpha}_{\text{макр}} = \frac{\int_M (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) \varepsilon_{\text{макр}} dm}{\int_M \varepsilon_{\text{макр}} dm}.$$

Далее, поскольку правые части релятивистского и классического уравнений движения совпадают, порождаемые ими члены вириального соотношения в релятивистском случае должны быть такими же, как и в нерелятивистском. С учетом этого приходим к следующему результату — релятивистскому обобщению стационарной теоремы вириала:

$$\bar{\alpha}_{\text{макр}} E_{\text{макр}} + 3 \int_V P dV + E_G = 0. \quad (2.35)$$

Параметр релятивизации $\bar{\alpha}_{\text{макр}}$ монотонно убывает с увеличением скоростей макроскопических движений от $\bar{\alpha}_{\text{макр}} = 2$ в нерелятивистском случае ($\beta \rightarrow 0$) до $\bar{\alpha}_{\text{макр}} = 1$ в ультрарелятивистском пределе ($\beta \rightarrow 1$).

Когда макроскопические движения в веществе происходят с релятивистскими скоростями, хаотические движения частиц обычно тоже релятивистские. В таком случае классическое соотношение $P = (2/3)e_{\text{кин}}$ между давлением P и объемной плотностью энергии $e_{\text{кин}}$ микроскопических движений в идеальном газе (неважно — вырожденном или нет, см. с. 62) не имеет более места. Оно заменяется на $P = (\alpha_{\text{микро}}/3)e_{\text{кин}}$, где $\alpha_{\text{микро}}$ — соответствующий параметр релятивизации, изменяющийся от $\alpha_{\text{микро}} = 2$ в классическом пределе до $\alpha_{\text{микро}} = 1$ в ультрарелятивистском. Поэтому в общем случае для звезды, состоящей из идеального газа,

$$3 \int P dV = \bar{\alpha}_{\text{микро}} E_K,$$

где E_K — полная энергия хаотических движений частиц вещества звезды, $\bar{\alpha}_{\text{микро}}$ — соответствующее средневзвешенное значение $\alpha_{\text{микро}}$, и (2.35) принимает вид

$$\bar{\alpha}_{\text{макр}} E_{\text{макр}} + \bar{\alpha}_{\text{микро}} E_K + E_G = 0. \quad (2.36)$$

Это — релятивистское обобщение простейшей теоремы вириала $2E_K + E_G = 0$.

Соотношение (2.36) находит применение в теории белых карликов. Давление в белых карликах создается релятивистским электронным газом, и поэтому классической теоремой вириала для них пользоваться нельзя (подробнее см. раздел ???).

2.8. Тензорная теорема вириала

Существует ряд факторов, которые нарушают сферическую симметрию звезды. Важнейшие из них — осевое вращение, приливное взаимодействие со спутником, влияние крупномасштабных магнитных полей, наконец, нерадиальные колебания. При отсутствии сферической симметрии получить решения уравнения гидростатики, а тем более гидродинамики звезды нелегко, а в иных случаях — и просто невозможно. К счастью, в этом часто и нет нужды. Ответы на такие важнейшие для астрофизики вопросы как вопрос об устойчивости состояния равновесия звезды, расчет частот ее колебаний и др. во многих случаях удается найти без решения полной системы уравнений строения звезды. Для этого развит ряд методов, об одном из которых — *вириальном* — и будут сейчас даны начальные сведения.

Суть вириального метода состоит в том, что по уравнению движения строится цепочка моментных уравнений, гораздо более простых, чем само уравнение движения, но все же достаточно информативных, чтобы из них можно было извлечь существенные сведения о состоянии системы. Мы ограничимся тем, что приведем без вывода и поясним эти, как говорят, *вириальные уравнения* для простейшего случая звезды, состоящей из идеальной сжимаемой жидкости.

Уравнение движения идеальной жидкости под действием силы взаимного притяжения ее частей (и, разумеется, градиента давления), записанное в инерциальной системе отсчета, имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \varphi,$$

где $d\mathbf{v}/dt$ — лагранжева (полная) производная скорости.

Сейчас нам будет удобно записать это уравнение движения в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.37)$$

Будем считать, что на поверхности звезды давление обращается в нуль. Вириальные уравнения первого, второго, третьего и т.д. порядков получаются путем последовательного умножения обеих частей (2.37) на

1, x_j , $x_j x_k$ и т.д. и интегрирования по объему звезды. Уравнения первого порядка интереса не представляют. Оказывается, что их можно привести к виду

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V \rho x_i dV = 0,$$

так что они выражают равномерность движения центра инерции. Гораздо интереснее уравнения второго порядка. Их можно представить в форме

$$\frac{1}{2} \ddot{I}_{ij} = 2E_{ij}^K + E_{ij}^G + \delta_{ij} \int_V P dV, \quad (2.38)$$

где I_{ij} — тензор инерции системы:

$$I_{ij} = \int_V x_i x_j \rho dV,$$

E_{ij}^K — тензор кинетической энергии макроскопических движений:

$$E_{ij}^K = \frac{1}{2} \int_V v_i v_j \rho dV,$$

наконец, E_{ij}^G — тензор потенциальной энергии:

$$E_{ij}^G = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi_{ij} dV,$$

в котором φ_{ij} — тензорное обобщение обычного ньютоновского потенциала:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{r}) = -G \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (2.39)$$

В стационарном случае $\ddot{I}_{ij} = 0$, и (2.38) принимает вид

$$2E_{ij}^K + E_{ij}^G + \delta_{ij} \int_V P dV = 0. \quad (2.40)$$

Очевидно, что все введенные только что тензоры симметричны. Поэтому одно тензорное соотношение (2.38) — это совокупность *шести* скалярных ($i, j = 1, 2, 3$; $i \leq j$).

След I_{ii} тензора инерции I_{ij} есть, очевидно, центральный момент инерции:

$$I = I_{ii} = \int_V \rho r^2 dV.$$

Аналогичным образом, след тензора E_{ij}^K — это кинетическая энергия системы:

$$E_{\text{макр}} = E_{ii}^K = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV,$$

а след E_{ij}^G — ее гравитационная потенциальная энергия:

$$E_G = E_{ii}^G = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi_{ii} dV,$$

поскольку след φ_{ii} тензорного потенциала φ_{ij} согласно (2.39) представляет собой скалярный ньютоновский потенциал: $\varphi_{ii} = \varphi$.

Записав (2.38) для диагональных компонент входящих в эти равенства тензоров и сложив почленно получающиеся уравнения (короче: произведя свертку тензоров в (2.38)), получим

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2E_{\text{макр}} + E_G + 3 \int_V P dV,$$

т.е. обычное скалярное вириальное соотношение. Таким образом, тензорное вириальное уравнение (2.38) является обобщением скалярной теоремы вириала, вытекающей из него как следствие. Ясно, что шесть скалярных равенств, которым эквивалентно одно тензорное соотношение (2.38), накладывают на распределения давления, плотности и макроскопических скоростей в звезде гораздо более жесткие ограничения, чем одно скалярное соотношение, выражающее обычную теорему вириала. По сути дела, в этом и коренится высокая эффективность тензорных вириальных соотношений как средства исследования несферических звезд.

Путем умножения (2.37) на $x_j x_k$ и интегрирования по объему звезды V можно получить вириальные уравнения третьего порядка. Число их — 18. Используются они (а тем более 30 вириальных уравнений четвертого порядка) редко, главным образом при изучении нерадиальных колебаний звезд. Однако говорить об этих и других применениях тензорных вириальных соотношений пока преждевременно, поскольку мы еще не рассматривали астрофизических следствий, вытекающих даже из простейшей скалярной теоремы вириала. Обсуждению этого посвящен следующий раздел.

Тензорные вириальные уравнения были введены в астрофизику в 50-е годы Е. Паркером при изучении динамических эффектов, вызываемых крупномасштабными магнитными полями. Однако их принято связывать в первую очередь с именем С. Чандрасекара, и это справедливо. В начале 60-х годов он показал, что использование тензорных вириальных уравнений может служить систематическим методом исследования звездных структур и получил с его помощью много интересных тонких результатов. Эти исследования С. Чандрасекара и его сотрудников подытожены в быстро ставшей классической монографии С. Чандрасекара „Эллипсоидальные фигуры равновесия” (1969; русский перевод — М.: Мир, 1973). Подробный вывод тензорного вириального

равенства (2.38) можно найти в начале главы II этой книги. После описанного выше (см. с. 69) первого шага последовательность действий при выводе остается той же, что и в скалярном случае, хотя в деталях, конечно, есть отличия.

Самостоятельный вывод (2.38) — это превосходное упражнение, которое мы всячески рекомендуем читателю в качестве пробы сил. *Указание:* см. Упражнение 4°, с. 85.

3 ГРАВИТАЦИОННОЕ СЖАТИЕ И ЭНЕРГЕТИКА ЗВЕЗД

3.1. Кельвиновская шкала времени

Наиболее очевидным свойством звезд является то, что они светятся. За счет чего покрываются их энергетические потери? Этот вопрос возник, как только был сформулирован закон сохранения энергии, однако найти исчерпывающий ответ на него сумели лишь век спустя.

С самого начала было очевидно, что одним из источников энергии может быть гравитация. Так, Р. Мейер, один из отцов закона сохранения энергии, полагал, что Солнце светится за счет кинетической энергии выпадающего на него метеорного вещества. В течение многих десятилетий гипотеза Мейера считалась чуть ли не смехотворной и упоминалась лишь как исторический курьез. Теперь мы знаем, что модернизированный вариант механизма Мейера — аккреция — играет в мире звезд важную роль.

Другой пионер принципа сохранения энергии Г. Гельмгольц предположил, что свечение Солнца может поддерживаться его медленным вековым сжатием, что приводит, разумеется, к выделению гравитационной энергии. Вскоре вслед за Гельмгольцем Дж. Томсон (впоследствии лорд Кельвин) уточнил его оценку времени такого сжатия, учтя неоднородность в распределении вещества вдоль радиуса. Уже давно известно, что гравитационной энергии явно недостаточно, чтобы обеспечить свечение Солнца и звезд на протяжении большей части их жизни. И тем не менее *процесс медленного гравитационного сжатия* Гельмгольца — Кельвина, обычно называемый кельвиновским сжатием, *играет очень важную роль в жизни любой звезды*. Начнем, однако, с энергетики.

Гравитационная энергия связи звезды равна

$$E_G = -\omega \frac{GM^2}{R},$$

где ω — безразмерный структурный множитель, определяемый распределением плотности. Обычно он близок к единице (см. п. 2.1). (Важное исключение из этого правила — красные гиганты. Для них ω значительно превосходит единицу, см., в частности, п. ??, с. ??). Разделив $|E_G|$ на светимость звезды L и взяв для простоты $\omega = 1$, получим порядковую оценку времени, в течение которого звезда могла бы светить

Рис. III.3.1:

Уильям Томсон

(William Thomson ≈ Lord Kelvin, 1824 – 1907) (слева)

Герман Гельмгольц

(Herman L.F. von Helmholtz, 1821 – 1894) (справа)

В период открытия закона сохранения энергии и разработки контракционного механизма поддержания излучения Солнца Гельмгольц был профессором физиологии (!) Кенигсбергского университета. Уильям Томсон долгие годы был профессором университета в Глазго. Титула лорда Кельвина его удостоили за научные заслуги в 1892 г.

И Гельмгольц, и Кельвин были членами Петербургской Академии Наук.

за счет сжатия, если бы ее светимость оставалась постоянной:

$$t_T \approx \frac{GM^2}{RL}. \quad (3.1)$$

Это есть так называемое *тепловое характерное время* звезды (индекс T — от *Thermal*). Происхождение названия вскоре прояснится. Говорят также, что t_T *определяет кельвиновскую, или контракционную шкалу времени*. Разумеется, это выражение для t_T можно получить и просто из соображений размерности, точно так же, как и в случае динамического времени. Определяющими параметрами являются масса, радиус и светимость звезды, а также гравитационная постоянная, поскольку энергия по предположению поставляется гравитационным сжатием. Величина с размерностью времени, построенная из этих параметров, и есть GM^2/RL .

На самом деле обычная звезда способна высветить лишь половину выделяющейся при сжатии гравитационной энергии, другая половина идет на ее нагрев. Докажем это *очень важное* утверждение. Когда

внутренних источников энергии в звезде нет, т.е. в ней не идут термоядерные реакции, ее светимость поддерживается только за счет сжатия. Поэтому $L = -\dot{E}$, где E — полная энергия звезды (за вычетом остающейся по предположению постоянной ядерной энергии). Для нормальной звезды (идеальный одноатомный газ, отсутствие вырождения, пренебрежимо малый вклад излучения во внутреннюю энергию) имеем $E = E_K + E_G$, где E_K — полная кинетическая энергия звезды, обусловленная как макроскопическими, так и тепловыми движениями. Согласно теореме вириала, для нормальной звезды $2E_K + E_G = 0$ (см. п. ??), так что $E = E_G/2$. Поэтому $L = \dot{E} = -\dot{E}_G/2$, т.е. *нормальная звезда, лишенная внутренних источников энергии, теряет на излучение ровно половину выделяющейся при ее сжатии гравитационной энергии.*

С учетом этого в правой части выражения для t_T следует добавить множитель $1/2$. Если не пренебрегать также отличием ω от единицы, то приходим к следующему более аккуратному выражению для кельвиновского времени:

$$t_T = \frac{\omega}{2} \frac{GM^2}{RL}. \quad (3.2)$$

В дальнейшем в зависимости от случая будет использоваться как (3.1), так и (3.2).

Пусть звезда светится за счет кельвиновского сжатия. Будем сначала для простоты считать, что оно происходит *гомологически*, т.е. без перестройки структуры звезды, так что

$$\rho(r, t) = \frac{M}{R^3(t)} f\left(\frac{r}{R(t)}\right).$$

Тогда ω остается постоянным, и $\dot{E}_G = \omega(GM^2/R^2) \cdot \dot{R} = -(E_G/R) \cdot \dot{R}$. Но $L = -\dot{E}_G/2$, откуда при учете (3.2) находим, что радиус уменьшается со скоростью

$$-\dot{R} = \frac{R}{t_T}.$$

Эта формула объясняет происхождение термина „контракционная шкала времени” (*contraction* — сжатие).

В действительности для звезды, энергетические расходы которой на излучение покрываются выделением гравитационной энергии, скорость изменения радиуса может сильно отличаться от R/t_T . Если степень концентрации вещества к центру с течением времени убывает, то $|\dot{R}|$ будет больше R/t_T (фактически этот случай едва ли реализуется). Наоборот,

если звезда эволюционирует так, что степень концентрации вещества возрастает со временем, как это обычно и бывает, то $-\dot{R} < R/t_T$. Может даже оказаться, что радиус будет со временем расти, хотя звезда и лишена других источников энергии, кроме гравитационного. Энергии, выделяющейся при перемещении масс внутри звезды к центру, может оказаться достаточно не только для поддержания светимости, но и для того, чтобы вызвать расширение наружных слоев. Такого рода перестройка происходит при уходе звезды с главной последовательности в область гигантов. Правда, при этом в звезде выделяется также и ядерная энергия.

3.2. Энергетические оценки

Получим численные оценки гравитационной энергии и теплового (кельвиновского) времени для звезд разных типов.

Если массу, радиус и светимость измерять в солнечных единицах, обозначив, как обычно, $\mathcal{M} = M/M_\odot$, $\mathcal{R} = R/R_\odot$ и $\mathcal{L} = L/L_\odot$, то выражения для E_G и t_T примут вид

$$E_G = -\omega \cdot 3.79 \cdot 10^{48} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}} \text{ эрг}, \quad (3.3)$$

$$t_T = \omega \cdot 4.86 \cdot 10^{14} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R} \mathcal{L}} \text{ сек} = \omega \cdot 1.54 \cdot 10^7 \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R} \mathcal{L}} \text{ лет}. \quad (3.4)$$

Применим их прежде всего к *Солнцу*. Значение ω для Солнца в его нынешнем состоянии, рассчитанное по его эволюционной модели, равно $\omega = 1.62$ (см. п. 2.1), что близко к традиционно используемому при порядковых оценках значению $\omega = 3/2$ (политропа индекса $n = 3$). В результате находим

$$E_{G\odot} \approx -6 \cdot 10^{48} \text{ эрг.}$$

Это число (и уж во всяком случае его порядок) следует помнить. Так как Солнце в очень хорошем приближении можно считать нормальной звездой и так как вращается оно очень медленно, то запасенная в нем тепловая энергия есть, по теореме вириала, $E_T = -E_G/2 \approx 3 \cdot 10^{48}$ эрг. Кельвиновское время для Солнца составляет ~ 25 млн лет, а соответствующая скорость сжатия — около 30 м/год, или $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ угловой секунды в год, так как при расстоянии в одну астрономическую единицу угловой секунде соответствует линейный размер 725 км.

То, что $1''$ в центре Солнца — это 725 км, каждому астрофизику следует помнить, иначе невозможно иметь правильное представление о размерах образований, различимых на Солнце.

В полученных оценках, разумеется, важны лишь порядки величин, и поэтому пользоваться „точным“ значением $\omega = 1.62$ нужды не было. Еще Гельмгольц, считая Солнце однородным ($\omega = 3/5$), дал в общем удовлетворительную оценку t_T .

Из найденной оценки t_T следуют два вывода. Первый — это явная недостаточность гравитационной энергии как источника свечения Солнца. Водоросли существовали на Земле уже по меньшей мере два миллиарда, а по последним данным — даже и более трех миллиардов лет назад. Как считают палеоклиматологи, светимость Солнца не могла тогда поэтому отличаться от современной более чем на $20 \div 30\%$. Значит, Солнце черпает свою энергию не только из гравитационного сжатия, но и из другого, гораздо более мощного источника. Им служат термоядерные реакции превращения водорода в гелий, как это знает теперь каждый подросток.

Стоит заметить, что хотя оценка возраста Земли ($\sim 4.6 \cdot 10^9$ лет) основана, конечно, на данных ядерной физики (периоды полураспада), недостаточность кельвиновской шкалы чувствовалась еще в XIX веке, когда возраст Земли оценивался чисто геологическими средствами: по скорости накопления соли в океане (это исторически первый метод определения возраста Земли, предложенный еще в начале XVIII века Э. Галлеем, тем самым, о комете которого — первой в истории астрономии периодической комете — все слышали), по времени, необходимому для образования осадочных пород, и т.п. Любопытная историческая деталь: сам Кельвин считал малость t_T сильным аргументом против дарвиновской теории биологической эволюции!

Второй вывод из того, что $t_T = 25$ млн лет, состоит в утверждении, что Солнце, как и звезды вообще, обладает значительной тепловой инерцией. Если бы термоядерные источники работали не с постоянной мощностью, а испытывали временные вариации с характерными временами, малыми по сравнению с t_T , то это не сказалось бы на оптическом излучении Солнца, которое оставалось бы постоянным, хотя, конечно, и проявилось бы полностью в вариациях его нейтринного излучения, которое выходит из недр наружу непосредственно, за секунды. Эту простую мысль лет тридцать назад пытались использовать для объяснения обнаруженного в опыте Дэвиса дефицита потока солнечных нейтрино высоких энергий (подробнее см. раздел ??).??).

Для получения оценок гравитационной энергии и кельвиновского времени звезд главной последовательности зависимости масса — радиус и масса — светимость достаточно взять в простейшем виде $\mathcal{R} = M^r$, $\mathcal{L} = M^\ell$, а изменением ω с массой пренебречь. Для нижней части ГП ($M \lesssim 1$) берем $r = 1$, $\ell = 4$, и тогда $E_G \propto M$, $t_T \propto M^{-3}$. Поэтому

для звезд самых малых масс ($M \sim 0.1$) кельвиновское время оказывается очень большим — порядка космологического (10^{10} лет). Для звезд с массой, превышающей солнечную, можно принять $r = 3/4$, $\ell = 3^{1/4}$, что дает $E_G \propto M^{1.25}$, $t_T \propto M^{-2}$. Кельвиновское сжатие массивных звезд происходит, таким образом, очень быстро. Далее, поскольку запасы ядерной энергии звезды E_N , очевидно, пропорциональны ее массе, отношение E_N/E_G для звезд ГП оказывается очень слабо зависящим от массы. Оно изменяется вдоль всей ГП всего раза в $2 \div 3$. Существенно, что это отношение велико — достигает нескольких сотен (см. п. ??). Поэтому, если ввести третье характерное время звезды — ядерное, положив (индекс N — от *Nuclear*)

$$t_N = \frac{E_N}{L},$$

то для всех звезд ГП $t_T \ll t_N$. С другой стороны, с еще гораздо бóльшим запасом выполняется неравенство $t_G \ll t_T$. Поэтому три характерных времени звезды — динамическое, тепловое и ядерное — для всех обычных звезд соотносятся между собой так:

$$t_G \ll t_T \ll t_N.$$

Это важный результат. Если изменения в звезде происходят на характерном времени t_G или еще быстрее, то механического равновесия нет. Вместо гидростатики звезды нужно рассматривать ее гидродинамику, что неизмеримо сложнее. К счастью, обычно все же приходится иметь дело с гидростатикой. А тогда любые изменения в звезде происходят на характерных временах не менее кельвиновского, играющего роль постоянной времени этой сложной нелинейной системы. Все перестройки в звезде происходят при этом квазистационарно, без нарушения ее механического равновесия. Наконец, возможно такое положение, когда структура звезды изменяется совсем медленно, на характерном времени t_N . Тогда говорят, что звезда находится в тепловом равновесии. Смысл этого термина в данном случае состоит в том, что вырабатываемая звездой энергия не тратится ни на нагрев, ни на перемещение вещества, а целиком выходит наружу. Выделение ядерной энергии и потери энергии на излучение звезды практически точно сбалансированы. Фактически такое положение осуществляется в жизни звезды всего один раз — когда она находится на ГП.

От нормальных звезд перейдем к *белым карликам*. Так как для типичного белого карлика $R \simeq 10^{-2}$, $M \lesssim 1$, то $|E_G| \simeq 10^{49} \div 10^{51}$ эрг. Детальные расчеты по классической модели Чандрасекара (см. гл. ??)

дают $|E_G| = 1 \cdot 10^{49}$, $6 \cdot 10^{49}$ и $4 \cdot 10^{50}$ эрг при $M = 0.25$; 0.5 и 1.0 соответственно (для $\mu_e = 2$, т.е. при отсутствии водорода в их недрах). При малых массах ($M \lesssim 0.3$) имеем $|E_G| \propto M^{7/3}$, при бóльших массах E_G растет с M еще быстрее. В рамках этой модели белый карлик предельной массы $M_c = 1.44$ имеет нулевой радиус, а потому для него $|E_G| = \infty$. На самом деле, когда масса близка к предельной, следует принимать во внимание эффекты, не учитываемые моделью Чандрасекара, в первую очередь — обратные β -распады, т.е. начало нейтронизации, а также неидеальность вырожденного электронного газа, отклонения поля тяготения от ньютонова и др. С учетом только первых двух из этих эффектов (остальные играют меньшую роль) предельная масса снижается до $M_c \approx 1.2 \div 1.4$. Гравитационная энергия ньютоновского белого карлика предельной массы (состоящего из ^{12}C) конечна и составляет $E_G = -4.3 \cdot 10^{51}$ эрг. При этом средняя гравитационная энергия связи на единицу массы равна $1.5 \cdot 10^{18}$ эрг/г, или 1.6 Мэв/нуклон.

Если бы белые карлики могли сжиматься как нормальные звезды, то из-за низких светимостей ($\mathcal{L} \simeq 10^{-2} \div 10^{-3}$) их кельвиновское время было бы огромным, $\sim 10^{11} \div 10^{12}$ лет. Однако такое сжатие невозможно. Давление сильно вырожденного *электронного* газа, дающего у белых карликов основной вклад в полное давление, почти не зависит от температуры. Поэтому высвечивание тепловой энергии максвелловского газа *ионов*, вклад которого в давление мал, ведет к охлаждению белого карлика, практически не сопровождающемуся его сжатием (подробнее см. гл. ??). И все же оценка кельвиновского времени для белых карликов не лишена смысла. Она позволяет сделать вывод, что если белый карлик достаточно быстро вращается, то энергии вращения, составляющей даже малую долю $|E_G|$, было бы достаточно для обеспечения его свечения в течение длительного времени. Чтобы эта возможность осуществлялась, необходим, впрочем, какой-то механизм отвода углового момента.

Хотя свечение белых карликов, во всяком случае подавляющего их большинства, происходит не за счет энергии вращения, а за счет запасенной в них тепловой энергии — по-видимому, они просто медленно остывают, для *нейтронных звезд* положение иное. Считается, что они светятся именно за счет вращательной энергии. Ньютоновская гравитационная энергия ($\sim GM^2/R$) нейтронной звезды с массой $M \simeq 1$ и радиусом $R \simeq 10$ км (чему соответствует средняя плотность $\sim 5 \cdot 10^{14}$ г/см³) составляет $\sim 3 \cdot 10^{53}$ эрг, что лишь на порядок меньше ее энергии покоя $Mc^2 = 2 \cdot 10^{54}$ эрг. Кинетическая энергия вращения $E_{Rot} = I\omega^2/2$, где I — момент инерции, ω — угловая скорость вращения, для сферически-симметричной звезды равна $E_{Rot} = (\omega^2/2) i MR^2$, где i — безразмерный множитель, определяемый ходом плотности вдоль радиуса. Перейдя от

угловой скорости ω к периоду $P = 2\pi/\omega$, будем иметь

$$E_{Rot} = 2\pi^2 i \frac{MR^2}{P^2}.$$

Значения i уменьшаются с ростом концентрации вещества к центру. Для однородного шара $i = 0.4$, при линейном падении плотности от центра к поверхности, когда $\rho_c/\bar{\rho} = 4$, имеем $i = 0.27$, политропе индекса $n = 3$ отвечают $\rho_c/\bar{\rho} = 54$ и $i = 0.075$. В качестве типичного значения можно взять $i = 0.1$. Тогда для пульсара с $M = M_\odot$, $R = 10$ км и очень коротким периодом $P = 0.03$ с (как у пульсара в Крабе) вращательная энергия оказывается равной $E_{Rot} = 5 \cdot 10^{48}$ эрг. Это на четыре порядка меньше гравитационной энергии такого объекта. Поэтому предположение о сферической симметрии вполне оправдано. При светимости пульсара L порядка 10^{35} эрг/с, опять-таки как у пульсара в Крабе, этого запаса ротационной энергии хватит на 2 млн лет (при постоянной светимости; на самом деле с возрастом светимости пульсаров убывают). При этом по закону сохранения энергии период должен увеличиваться со скоростью, определяемой условием $L = -\dot{E}_{Rot}$, откуда

$$\dot{P}/P = L/E_{Rot},$$

что для рассматриваемого примера дает $\dot{P}/P = 2 \cdot 10^{-14}$. Согласно наблюдениям, для пульсара в Крабе $\dot{P}/P = 1.4 \cdot 10^{-14}$, в прекрасном согласии с нашей оценкой.

Вопросов о механизме торможения, сопровождающегося уменьшением углового момента, и о механизме излучения пульсаров мы сейчас не касаемся. Упомянем лишь, что определяющая роль здесь, несомненно, принадлежит рекордно сильным магнитным полям пульсаров, достигающим, как предполагается, $10^{12} \div 10^{13}$ Гс. Эти вопросы разбираются в гл. ??, где даются и более аккуратные энергетические оценки.

3.3. Гравитационное сжатие как регулятор ядерной эволюции звезды

Возвращаемся к рассмотрению обычных звезд. Для нормальной не вращающейся звезды согласно теореме вириала сумма ее гравитационной потенциальной и удвоенной тепловой энергии равна нулю: $2E_T + E_G = 0$. Поэтому полная энергия $E = E_T + E_G$ оказывается равной $E = -E_T$. Если звезда лишена внутренних источников энергии, то ее светимость покрывается за счет уменьшения полной энергии, и поэтому $L = -\dot{E}$, а тогда $L = \dot{E}_T$. Так как светимость положительна, то $\dot{E}_T > 0$. Это означает, что полная

тепловая энергия составляющего звезду газа со временем растет, так что звезда нагревается. На первый взгляд этот вывод кажется невероятным: теряя энергию на излучение, звезда не охлаждается, а нагревается! Чтобы она остыла, необходимо подвести энергию. Иначе говоря, *звезда из обычного невырожденного газа*, рассматриваемая как целое, — *это система с отрицательной теплоемкостью*.

Как понять такое парадоксальное свойство? Когда звезда лишена внутренних источников энергии, она сжимается. Если это сжатие происходит медленно, без нарушения механического равновесия, то выделяющейся гравитационной энергии хватает не только на покрытие, так сказать, „внешних обязательств” — на излучение, но и на обеспечение „внутреннего рынка” — на нагрев. Освобождающаяся гравитационная энергия делится ровно пополам. Одна половина безвозвратно теряется на излучение, вторая остается в звезде и нагревает ее (см. также п. 3.1, с. 75).

При сжатии звезды сила тяжести возрастает. Однако этот рост в точности компенсируется ростом давления $P \propto \rho T$, обусловленным как увеличением плотности, так и нагревом газа. В результате механическое равновесие при медленном сжатии не нарушается. Следует подчеркнуть, что одного только роста плотности из-за сжатия недостаточно для компенсации возрастающей силы тяжести. Это видно из того, что $\rho \sim M/R^3$, $g \sim M/R^2$, и поэтому, чтобы удовлетворить условию механического равновесия $d(\rho T)/dr \propto g\rho$, должно быть $(T \cdot M/R^3)/R \sim (M/R^2)(M/R^3)$, или $T \cdot M/R^4 \sim M^2/R^5$, откуда $T \sim M/R$. Итак, при (гомологическом) кельвиновском сжатии температура должна расти как R^{-1} . Вместе с тем становится понятным, что любая перестройка тепловой структуры звезды, происходящая без нарушения механического равновесия, должна занимать время порядка t_T (отсюда и термин „тепловое время звезды”).

Нагрев звезды при ее медленном квазистационарном сжатии — факт фундаментальной важности для понимания истории жизни любой звезды. После в деталях еще не ясной стадии быстрого динамического сжатия, или коллапса первичного облака образуются механически равновесные, но внутри еще сравнительно холодные протозвезды, на которые довольно долго, видимо, продолжается выпадение вещества из внешних частей коллапсирующего облака. В дальнейшем мы покажем (см. п. ??, с. ??), что эти протозвезды с необходимостью должны быть нагреты настолько, чтобы главные их составляющие — водород и гелий — в большей части массы протозвезды были ионизованы. В противном случае механическое равновесие невозможно. Однако температура в недрах этих протозвезд еще недостаточна для того, чтобы шли термоядерные

Рис. III.3.2:

Вклад энергии гравитационного сжатия в светимость звезды на стадии перехода от горения водорода к горению гелия в ядре.

Ордината — отношение светимости за счет сжатия L_G к полной светимости L . *Абсцисса* — безразмерное время $\tau \equiv t/t_{cc}$, где t — время от начала горения водорода, t_{cc} — время, требующееся для полного выгорания водорода в центральной части звезды — в ее конвективном ядре. Фактически τ — это возраст звезды в долях времени ее жизни на ГП. *Числа у кривых* — значения $M \equiv M/M_\odot$.

Источник: В.И. Варшавский, Научные информации Астросовета АН СССР, вып. 4, 65 – 73, 1966.

реакции, и они могут черпать энергию только из одного доступного им источника — гравитации. Начинается их медленное квазистационарное сжатие — и одновременно нагрев. Эта так называемая *стадия кельвиновского сжатия* продолжается до тех пор, пока температура близ центра не достигнет $(5 \div 10) \cdot 10^6$ K и тем самым не будут созданы условия для начала термоядерного горения водорода. Сжатие сначала замедляется, а затем и вовсе прекращается. Детство звезды окончено, она стала взрослой — вступила на ГП и начала свой „трудовой путь“ — выработку ядерной энергии и синтез элементов.

По прошествии некоторого времени водород в центральных частях выгорает, превращаясь в гелий, и термоядерные реакции здесь прекращаются. Опять начинается сжатие (рис. III.3.2). Оно вызывает дальнейший разогрев и позволяет звезде в конце концов вступить в следующую стадию ее ядерной жизни. Начинается горение гелия с образованием углерода. Для горения гелия требуются более высокие температуры, поскольку приходится преодолевать более высокий кулоновский барьер. Хотя уже на этой, а тем более на последующих стадиях ядерной эволюции детальная картина довольно сложна, принципиально все происходит так же. По исчерпанию близ центра очередного топлива ядерные реакции здесь гаснут, и дальнейшее развитие происходит по стандартной схеме: сжатие \Rightarrow нагрев \Rightarrow начало горения близ центра наиболее легких и потому обладающих наименьшим зарядом из имеющихся там

ядер, синтезированных на предшествующей стадии. Так продолжается до тех пор, пока не случится одно из двух. Первая возможность — при очередном сжатии в центральных частях звезды наступает вырождение. Это существенно меняет физическую ситуацию, и весь дальнейший ход событий оказывается иным. Здесь имеются различные варианты, описывать которые мы сейчас не будем (см. гл. ??). Вторая возможность — после очередного сжатия и разогрева близ центра начинаются реакции синтеза ^{56}Fe . Это последняя стадия спокойной ядерной эволюции. Синтез элементов тяжелее железа требует уже затрат энергии. Поэтому сжатие и нагрев железного ядра должны иметь иные последствия, чем во всех предыдущих случаях. Оказывается, что неизбежна потеря равновесия и взрыв звезды. Почему это так, вскоре станет ясно.

Нарисованная картина во многом схематична, но она подчеркивает то, что сейчас является для нас главным — роль медленного гравитационного сжатия в эволюции звезд. Поистине, это двигатель прогресса в мире звезд. Гравитационное сжатие — это как бы идеальный звездный кочегар, каждый раз умудряющийся аккуратно подправлять звезду так, чтобы угасший было близ ее центра ядерный огонь занялся с новой силой. Не будет ошибкой сказать и так: вся жизнь звезды — это процесс медленного гравитационного сжатия, перемежаемый паузами, когда горит очередное ядерное топливо, но неизменно возобновляющийся, как только топливо подходит к концу.

4. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1° Вывести уравнение (1.1) из рассмотрения баланса сил давления и тяготения, действующих на заштрихованный малый *усеченный конус* с осью и образующими, направленными по радиусу (см. рисунок).

К задаче 1°.

2° Получить уравнение гидростатического равновесия сферически-симметричной звезды из рассмотрения сил, которые действуют на малый объем dV произвольной формы, находящийся на расстоянии r от центра.

3° Исходя из закона сохранения энергии, показать, что свободное падение материальной точки на точечную массу M описывается соотношением

$$t = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} F\left(\frac{r}{R}\right),$$

где R — начальное расстояние, r — расстояние в момент t и

$$F(x) = \int_x^1 z^{1/2}(1-z)^{-1/2} dz = \sqrt{x(1-x)} + \arccos \sqrt{x},$$

или в параметрической форме

$$r = R \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad t = \left(\frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2} \frac{\pi - \alpha + \sin \alpha}{2},$$

где α — параметр, $\alpha \in [0, \pi]$. При $\alpha = 0$ получаем отсюда, в частности, (1.4). Кривая 1 на рис. III.1.2 построена по этим формулам.

4° Построить эскиз графиков хода потенциала и ускорения силы тяжести в функции r/R для двух сферически-симметричных конфигураций с одинаковой массой M и радиусом R — одной с $\rho = \text{const}$ и другой с $\rho = \rho_c(1 - r/R)$. Почему во втором случае сила тяжести максимальна не на поверхности?

5° Показать, что если у вращающейся звезды угловая скорость зависит только от расстояния r_1 от оси вращения: $\omega = \omega(r_1)$, то центробежная сила обладает потенциалом

$$\varphi_R = - \int_0^{r_1} \omega^2(r) r dr,$$

и уравнение механического равновесия может быть приведено к виду $dP/d\tilde{\varphi} = -\rho$, где $\tilde{\varphi} \equiv \varphi + \varphi_R$ — полный потенциал.

6° В широко известном справочнике К. Аллена „Астрофизические величины”, 3-е изд., М.: Мир, 1977, в разд. 75 приводятся, наряду с другими, следующие параметры Солнца:

Работа, необходимая для рассеяния солнечного вещества на бесконечность (наше $|E_G|$ — В.В.И.) = $6.6 \cdot 10^{48}$ эрг.

Полная внутренняя лучистая энергия Солнца (в наших обозначениях E_R — В.В.И.) = $2.8 \cdot 10^{47}$ эрг.

Энергия поступательного движения атомов и электронов (наше E_K ; термин translational energy, т.е. энергия поступательного движения, в русском издании неверно переведен как энергия переноса — В.В.И.) = $2.7 \cdot 10^{48}$ эрг.

Могут ли все эти три числа быть верными? Кинетическая энергия вращения Солнца мала, $\sim 10^{42}$ эрг.

7° Пользуясь релятивистской теоремой вириала, доказать, что для ультрарелятивистского идеального газа давление P и объемная плотность энергии $e_{\text{кин}}$ связаны соотношением $P = (1/3) e_{\text{кин}}$.

8° Согласно доказанному в п. 2.4, гравитационную энергию звезды можно представить в виде

$$E_G = - \int_V (\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi) \rho dV.$$

Получить следующее тензорное обобщение этой формулы:

$$E_{ij}^G = - \int_V x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rho dV,$$

где E_{ij}^G — тензор гравитационной энергии (см. п. 2.8).

Глава IV

ФИЗИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ВНУТРИ ЗВЕЗД

Наша цель при изучении звездных недр — не только подивиться фантастическому миру, условия которого превосходят данные нашего обычного опыта. Мы хотим узнать внутренний механизм, который делает звезды такими, какие они есть.

А. Эддингтон

Цель настоящей главы — дать представление о физических условиях, господствующих внутри звезд, в первую очередь — нормальных. Будут получены оценки давлений и температур, непосредственно вытекающие из того наблюдательного факта, что звезды находятся в состоянии механического равновесия. Далее будет установлено, для каких звезд должно учитываться давление излучения и к каким последствиям это приводит. В конце главы обсуждается справедливость и границы применимости представления о том, что вещество в обычных звездах является невырожденным идеальным газом.

Без решения полной системы уравнений, описывающих структуру звезды, т.е. без расчета ее модели, найти точные значения физических величин в ее недрах, разумеется, невозможно. Поэтому в этой главе мы вынуждены ограничиться получением простейших порядковых оценок. Впрочем, в астрофизике такие оценки часто играют ключевую роль. Будут приведены также кое-какие данные, полученные из расчетов моделей, однако их придется пока принимать на веру. Эти данные позволят, в частности, составить правильное представление о точности простейших оценок.

1. ДАВЛЕНИЯ В ЗВЕЗДАХ

1.1. Оценки давления в центре звезды

Будем считать известными массу звезды M и ее радиус R . Тогда из условия гидростатического равновесия удастся, и очень просто, оценить давление в ее центре P_c (индекс c — от *Center*). Если не делать никаких дополнительных предположений, получающаяся оценка довольно груба — но зато она строгая.

Почленно поделив друг на друга уравнения механического равновесия и сохранения вещества

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}, \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho,$$

получим альтернативную форму условия механического равновесия

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}.$$

Из нее и будем сейчас исходить. Интегрируя это равенство по всей звезде и учитывая, что на поверхности P должно обращаться в нуль, для давления в центре находим

$$P_c = \frac{1}{4\pi} \int_0^M \frac{GM_r dM_r}{r^4}. \quad (1.1)$$

Если в интеграле перейти к безразмерным переменным $q = M_r/M$ и $x = r/R$, то получим

$$P_c = p_c \frac{GM^2}{4\pi R^4}, \quad (1.2)$$

где

$$p_c = \int_0^1 \frac{q dq}{x^4}.$$

Величину p_c можно рассматривать как безразмерное давление в центре звезды. Так как $x \equiv r/R \leq 1$, то $p_c \geq \int_0^1 q dq = 1/2$, и окончательно

$$P_c \geq \frac{GM^2}{8\pi R^4}. \quad (1.3)$$

Это и есть та строгая, но, к сожалению, обычно все же довольно грубая оценка давления в центре звезды, которая следует из одного только условия механического равновесия, без каких-либо иных ограничивающих предположений. Эта оценка применима к любой равновесной сферически-симметричной гравитирующей массе, в частности, к Солнцу, Земле, белым карликам и даже к шаровым звездным скоплениям (при соответствующем понимании давления).

Сделаем, далее, естественное дополнительное предположение — примем, что плотность не возрастает наружу. Уже этого оказывается достаточно, чтобы несколько улучшить оценку P_c . Именно, можно показать, что в таком случае

$$P_c \geq \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}, \quad (1.4)$$

т.е. $p_c \geq 3/2$, причем знак равенства соответствует звезде из несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$).

Действительно, обозначим среднюю плотность вещества в сфере радиуса r через $\bar{\rho}_r$ и выразим r^{-4} под интегралом в (1.1) через $\bar{\rho}_r$ и M_r . Дело тогда сведется по существу к оценке интеграла

$$\int_0^M \bar{\rho}_r^{4/3} M_r^{-1/3} dM_r.$$

Если плотность не возрастает наружу, то $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$, где $\bar{\rho} \equiv \bar{\rho}_R$ — средняя плотность звезды (докажите это). Поэтому написанный интеграл должен быть не меньше $\bar{\rho}^{4/3} \int_0^M M_r^{-1/3} dM_r$, или $(3/2)M^{2/3}\bar{\rho}^{4/3}$. Выразив в получающемся выражении $\bar{\rho}$ через M и R , мы придем к (1.4).

Замечание: из приведенного вывода следует, что для справедливости неравенства (1.4) предполагать, что плотность не возрастает с r , не обязательно. Достаточно, чтобы выполнялось более слабое условие $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$. Нарисуйте эскиз графика немонотонного распределения плотности, для которого тем не менее $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$.

Для давления в центре можно дать и оценку сверху, которая на первый взгляд кажется не очень интересной, так как в нее входит центральная плотность ρ_c , обычно заранее неизвестная. Несколько страниц ниже (п. 3.1) мы убедимся, однако, что эта оценка тем не менее полезна. Если считать, что $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$ (это, в частности, будет так, если наибольшая плотность достигается в центре звезды), то, рассуждая как и при получении (1.4), найдем, что

$$P_c \leq \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R_c^4}, \quad (1.4')$$

где R_c — радиус, который был бы у звезды, если бы ее плотность была постоянна и равна ρ_c , так что $(4\pi/3)R_c^3 \rho_c = M$.

Оценки (1.4) и (1.4') можно переписать в виде следующего двойного неравенства:

$$c_1 GM^{2/3} \bar{\rho}^{4/3} \leq P_c \leq c_1 GM^{2/3} \rho_c^{4/3}, \quad (1.5)$$

где

$$c_1 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} = 0.8060.$$

Для его справедливости достаточно, чтобы $\rho_c \geq \bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$, в частности, оно имеет место при монотонно убывающем $\rho(r)$.

Смысл этих неравенств состоит в следующем (рис. IV.1.1). Пусть имеется некая равновесная конфигурация массы M с произвольным распределением плотности. Рассмотрим два однородных шара той же массы: один с плотностью, равной средней плотности конфигурации (а потому — с тем же радиусом, что и у нее), и другой, меньшего размера (с радиусом R_c), плотность в котором равна центральной плотности конфигурации. Обозначим давления в центрах этих однородных шаров соответственно через P_c^{\min} и P_c^{\max} . Согласно (1.5), если в рассматриваемой равновесной конфигурации $\rho_c \geq \bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$, то $P_c^{\max} \geq P_c \geq P_c^{\min}$.

Рис. IV.1.1:

К оценке давления в центре звезды.

Давление в центре равновесной конфигурации при весьма общем предположении о распределении плотности в ней $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$ (выполняющемся, в частности, если $\rho(r)$ монотонно убывает) удовлетворяет двойному неравенству $P_c^{\min} \leq P_c \leq P_c^{\max}$, где P_c^{\min} и P_c^{\max} — давления в центрах *однородных* шаров той же массы с плотностями $\bar{\rho}$ и ρ_c , соответственно.

**1.2. Физическое
обсуждение**

1) Равенство в (1.3) достигается в случае, когда вся масса сосредоточена на поверхности сферы радиуса $r = R$, т.е. находится на максимально возможном удалении от центра.

В (1.4) равенство имеет место при $\rho = \text{const}$. При наложенном здесь дополнительном условии, что $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$ (в частности, если плотность не возрастает наружу), случай $\rho = \text{const}$ также представляет собой такое распределение вещества, при котором оно наибольшим допустимым образом удалено от центра. Эти два примера иллюстрируют полезное общее правило, согласно которому в сферически-симметричной равновесной конфигурации *любой перенос массы с периферии к центру ведет к росту центрального давления*. В самом деле, пусть $r(M_r)$ — радиус сферы, в которой заключена масса M_r . Ясно, что при любом переносе вещества к центру значения $r(M_r)$ могут разве лишь уменьшиться, а потому величина $1/r^4(M_r)$ — разве лишь возрасти. Согласно (1.1), это должно приводить к росту P_c .

Физический смысл этого результата становится ясным из следующего рассуждения. Перенесем массу δM из тонкой оболочки, находящейся на расстоянии r_1 от центра, в оболочку, лежащую на меньшем расстоянии r_0 . (Чтобы при этом не нарушилось механическое равновесие, надо одновременно соответствующим образом изменить распределение температуры.) Такое перераспределение массы вызывает два эффекта. Рас-

смотрим сначала вещество, лежащее между r_0 и r_1 . Первоначально оно не испытывало гравитационного воздействия массы δM (так как эта масса была сферически-симметрично распределена снаружи), а затем стало его ощущать. В итоге вес этого вещества возрос, и оно начало сильнее давить на нижележащие слои. Соответствующее приращение давления в центре есть, очевидно,

$$\delta P'_c = \int_{r_0}^{r_1} \delta g \rho dr ,$$

где $\delta g = G \delta M / r^2$ — добавочное ускорение, создаваемое в оболочке между r_0 и r_1 массой δM в ее новом положении. Поэтому

$$\delta P'_c = \frac{G}{4\pi} \delta M \int_{M_0}^{M_1} \frac{dM_r}{r^4} ,$$

где M_0 и M_1 — массы, заключенные в сферах с радиусами r_0 и r_1 соответственно.

Второй эффект от перемещения массы δM состоит в том, что изменяется вклад в центральное давление, даваемый самóй этой массой. В первоначальном положении он составлял $(GM_1/4\pi r_1^4) \delta M$, в новом же стал $(GM_0/4\pi r_0^4) \delta M$. Результирующее изменение давления за счет этого эффекта

$$\delta P''_c = \frac{G}{4\pi} \delta M \left(\frac{M_0}{r_0^4} - \frac{M_1}{r_1^4} \right) .$$

Оно может быть как положительным, так и отрицательным. Примеры: а) Модель Роша. Здесь $M_0 = M_1$, и $\delta P''_c > 0$; б) Полая оболочка: $M_1 \neq 0$, $M_0 = 0$. Тогда $\delta P''_c < 0$. Однако суммарное приращение давления в центре за счет обоих эффектов при любом распределении вещества вдоль радиуса будет положительным. Действительно, поскольку при $r_0 < r_1$

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{dM_r}{r^4} \geq \frac{1}{r_1^4} \int_{M_0}^{M_1} dM_r = (M_1 - M_0)/r_1^4 ,$$

то

$$\delta P_c = \delta P'_c + \delta P''_c \geq \left(\frac{G}{4\pi} \right) \delta M M_0 \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r_1^4} \right) > 0 .$$

Иначе говоря, добавочное давление в центре от увеличения веса вышележащих слоев всегда более чем компенсирует возможное уменьшение вклада в P_c , даваемого самим веществом, перемещаемым ближе к центру. В итоге любой перенос вещества с периферии внутрь увеличивает давление в центре конфигурации.

Дайте физическое истолкование неравенства (1.4) в духе приведенного только что рассмотрения. Поймите также, как путем перераспределения массы вдоль радиуса из модели с $\rho = \text{const}$ можно строить конфигурации с немонотонным распределением плотности, для которых неравенство (1.4') тем не менее выполнено.

2) Чем бóльшая доля вещества сосредоточена близ центра, тем больше должно быть P_c (при фиксированных M и R). Сам по себе сколь угодно сильный рост плотности к центру еще не гарантирует неограниченного роста центрального давления. Если, увеличивая концентрацию материи к центру, одновременно уменьшать долю массы, в пределах которой происходит резкое нарастание плотности, можно добиться того, что P_c будет при этом оставаться конечным.

Рассмотрим, например, конфигурации с

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right],$$

где a — параметр, $0 \leq a < \infty$. Для них

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 1 + \frac{3}{a},$$

так что при $a \rightarrow 0$ концентрация материи к центру неограниченно возрастает. Безразмерное центральное давление p_c , как можно показать, равно в данном случае

$$p_c = \frac{3}{2} \frac{(3+a)(4+a)}{(1+a)(2+a)}.$$

Поэтому $p_c \rightarrow 9$ при $a \rightarrow 0$, т.е. давление в центре остается конечным. Укажем еще, что безразмерная гравитационная энергия ω равна здесь

$$\omega = \frac{3}{5} \frac{(3+a)(11+2a)}{(5+a)(5+2a)}.$$

При $a = 0$ она также конечна: $\omega = 99/125$. Отметим значения $p_c = 5$ и $\omega = 26/35 = 0.74$ при $a = 1$, т.е. при линейном падении плотности от центра. Причина того, почему при $a \rightarrow 0$ несмотря на неограниченный рост плотности близ центра (в долях средней) центральное давление и гравитационная энергия остаются конечными, — быстрое падение при $a \rightarrow 0$ доли массы, сосредоточенной в „центральной конденсации”. Впрочем, рассмотренная ситуация мало реалистична, и в звездных моделях иметь с нею дело не приходится. Сильный (формально — неограниченный) рост плотности к центру конфигурации практически

всегда сопровождается сильным (неограниченным) ростом давления и абсолютной величины гравитационной энергии (пример — политропы; см. разд. V.2).

Задание: проверить приведенные выше выражения для $\rho_c/\bar{\rho}$, p_c и ω . К сожалению, это требует довольно длинных вычислений. Показать, что в предположении применимости простейшего уравнения состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu)\rho T$ семейство моделей с $a \rightarrow 0$ и фиксированными M и R имеет $T_c \rightarrow 0$.

1.3. Астрономическое обсуждение

1) Начнем с вопроса о том, насколько безразмерное центральное давление чувствительно к структуре звезды. Значение $p_c = 1/2$ соответствует модели в виде пустотелого „мячика”, вся масса которого сосредоточена в его тонкой наружной оболочке (почему?). Для этой модели безразмерная потенциальная энергия $\omega = 1/2$ (см. п. III.2.1). Для звезды с $\rho = \text{const}$, как говорилось выше, $p_c = 3/2$, тогда как $\omega = 0.6$. Это заставляет предполагать, что безразмерное центральное давление p_c гораздо чувствительнее к распределению плотности, чем безразмерная потенциальная энергия ω . Это действительно так, что непосредственно вытекает, например, из любопытного универсального неравенства $p_c \geq 8\omega^4$ (см. Упр. 4°, с. 115). Поскольку очевидно, что плотность сильно возрастает к центру звезды, следует ожидать, что p_c будет заметно больше $3/2$, а для звезд с особенно сильной концентрацией материи к центру — даже гораздо больше этой величины.

Точное значение p_c можно получить только из расчета модели звезды. Для общей ориентировки приведем результат для простейших так называемых политропных моделей, у которых $P \propto \rho^{1+1/n}$ (см. гл. V). При $3/2 \leq n \leq 3.5$ — именно эти значения n и представляют в первую очередь интерес — можно приближенно полагать $p_c \approx 2000/(5-n)^4$ (подробнее см. п. V.2.3). Хотя эта оценка p_c гораздо ближе к тому, что дают детальные численные расчеты моделей звезд ГП, она, в отличие от (1.2) и (1.3), не является ни универсальной, ни строгой. (Заметим мимоходом, что так как для политроп $\omega = 3/(5-n)$, то из универсального неравенства $p_c \geq 8\omega^4$ для них следует строгая оценка $p_c \geq 648/(5-n)^4$.)

Строение звезд ГП, кроме самых поздних, не очень далеко от политропной модели с $n = 3$, значение p_c для которой, полученное численным расчетом, есть $p_c = 1.4 \cdot 10^2$ (см. п. V.2.3). Поэтому давления в центрах звезд ГП (кроме маломассивных) на два порядка превосходят те, которые даются правой частью (1.4). Звезды ГП малых масс ($M \lesssim 0.5 M_\odot$)

близки по строению к политропе с $n = 3/2$, а для нее $p_c = 9.7$. Поэтому оценка (1.4) в этом случае занижает давление в центре на порядок. Расчеты моделей компактных звезд — белых карликов и нейтронных звезд — приводят к P_c , которые отличаются от $(3/8\pi) GM^2/R^4$ в несколько десятков раз.

2) Среди теоретиков широко распространен формульный снобизм — формулу-де достаточно вывести, все остальное читатель обязан увидеть сам. К сожалению, такой стиль стал проникать и в учебники. Есть много способов борьбы с этим злом. Один из них — следовать совету Р. Фейнмана: „Нет ничего некрасивого в том, что в формулы подставляются числа”.

Подстановка в (1.2) численных значений дает

$$P_c = 8.95 \cdot 10^{14} p_c \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}^4} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 8.83 \cdot 10^8 p_c \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}^4} \text{ атм}, \quad (1.6)$$

где \mathcal{M} и \mathcal{R} — масса и радиус в солнечных единицах.

Для звезд ГП в разумном приближении можно считать, что $R \propto M^r$, где $r = (1/2 \div 1)$. Для нижней части ГП такая аппроксимация с $r = 1$ является практически точной, она превосходно согласуется как с наблюдениями, так и с расчетами моделей с $\mathcal{M} \lesssim 1$. Для верхней части ГП лучшую точность обеспечивает аппроксимация $R \propto M^{2/3}$ (а для самой верхней ее части — даже $R \propto M^{1/2}$).

В приближении $R \propto M^r$ для звезд ГП из (1.6) имеем $P_c \approx 10^9 p_c \mathcal{M}^{2-4r}$. С учетом сказанного выше о значениях p_c и r отсюда следует, что центральные давления в звездах ГП составляют

$$P_c \simeq 10^{10} \div 2 \cdot 10^{11} \text{ атм.}$$

По земным меркам эти давления огромны: самые высокие давления, достигнутые пока в эксперименте, составляют несколько единиц 10^6 атм. И все же давления $\sim 10^{11}$ атм ничтожны по сравнению с давлением в центре типичного белого карлика с $\mathcal{M} \simeq 1$ и $\mathcal{R} \simeq 10^{-2}$, для которого P_c близко к 10^{19} атм, а тем более нейтронной звезды ($\mathcal{M} \simeq 1$, $R \simeq 15 \text{ км} \simeq 2 \cdot 10^{-5} R_\odot$). Для нее $P_c \simeq 10^{29} \div 10^{30}$ атм.

3) Рассмотрим данные о давлениях в центрах звезд ГП более подробно. Для этого нам придется использовать результаты расчетов моделей звезд, о деталях которых мы получим возможность рассказать лишь в гл. ???. Пока же их придется принять на веру.

Рис. IV.1.2 А дает зависимость P_c от \mathcal{M} для звезд ГП населения I согласно данным подробных расчетов. На рис. IV.1.2 Б приведены соответствующие значения безразмерного давления в центре p_c в функции

Рис. IV.1.2:

Центральные давления в химически однородных звездах разных масс ($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$).

Рис. А — абсолютные значения давления P_c , рис. Б — соответствующие безразмерные структурные множители p_c . Объяснение вида кривых см. в тексте.

массы. Модели разных авторов слегка различаются по химическому составу, по деталям в учете ряда физических процессов, происходящих в звездах (по-английски кратко говорят — по их *input physics*), наконец, по методам численного решения основной системы уравнений, описывающих модель. Поэтому положение звезд ГП на плоскости (\mathcal{M} , P_c) известно лишь приближенно. Приведенные кривые основаны на расчетах сетки моделей химически однородных звезд с массами от 0.15 до $125 M_\odot$ и химическим составом $X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$, которые много лет назад были выполнены в Астрономическом институте Санкт-Петербургского университета В.Б. Ильиным.

На первый взгляд немонотонный характер зависимости P_c от \mathcal{M} может показаться неожиданным. Физическая причина этого состоит в заметном различии в степени концентрации вещества к центру у звезд разных масс.

У звезд с $\mathcal{M} \lesssim 0.5$ степень концентрации вещества к центру невелика и лишь очень слабо зависит от \mathcal{M} . Поэтому здесь p_c остается почти постоянным, а P_c убывает примерно пропорционально \mathcal{M}^{-2} . С ростом массы от ~ 0.5 до $\sim 1.5 M_\odot$ концентрация вещества к центру заметно возрастает. Следствием этого является рост p_c , который происходит настолько быстро, что убывание P_c сменяется возрастанием. При дальнейшем росте \mathcal{M} концентрация вещества постепенно становится меньше. В результате значения p_c начинают убывать, а кривая $P_c = P_c(\mathcal{M})$ снова

круто заворачивает вниз.

Для тех, кто знаком в общих чертах со строением звезд ГП разных масс, дадим более подробное объяснение вида кривой рис. IV.1.2 Б. Начнем с объяснения убывания p_c в области больших масс. Это связано с переходом от выделения энергии за счет протон-протонных цепочек к углеродно-азотному циклу, что сопровождается появлением у звезды конвективного ядра. Доля массы звезды, входящей в конвективное ядро, растет с M . Поскольку концентрация вещества к центру в конвективном ядре мала (она соответствует политропе с $n = 3/2$, находящейся под давлением вышележащего вещества лучистой оболочки), это должно сказываться на общем распределении вещества, уменьшая его среднюю концентрацию к центру, а тем самым и p_c . Объясним теперь качественно восходящую ветвь кривой (область $M \lesssim 1$). Звезды самых малых масс являются полностью конвективными, и для них p_c должно быть невелико — как для политропы с $n = 3/2$, т.е. $p_c \simeq 10$. С ростом массы звезды у нее появляется лучистое ядро (примерно при $M = 0.4$), для которого характерна более сильная концентрация вещества к центру. Рост лучистого ядра с увеличением массы и служит причиной роста p_c при M от ~ 0.4 до $1.5 \div 2$.

На рис. IV.1.3 мы приводим для справок сведения о плотностях и концентрации вещества к центру у химически однородных звезд населения I разных масс (расчеты — те же, что для рис. IV.1.2). Рис. А дает плотность в центре, рис. Б — отношение центральной плотности к средней для звезд разных масс. Последняя величина часто рассматривается как количественная мера степени концентрации вещества к центру. Физическое истолкование общего вида рис. IV.1.3Б то же, что и для рис. IV.1.2Б.

4) Скажем теперь несколько слов о центральных давлениях в звездах, не лежащих на ГП. Начнем с белых карликов. Распределение вещества в них, как и у химически однородных звезд ГП, определяется (при заданном химическом составе) единственным параметром — массой. При этом степень концентрации вещества, а потому и безразмерное давление p_c монотонно растут с M . В предельном случае малых масс (примерно при $M \lesssim 0.3$) имеем $p_c \simeq 10$. В противоположном случае, когда масса приближается к предельно допустимой для белого карлика (около $1.4 M_\odot$ — так называемый чандрасекаровский предел, см. разд. ???), безразмерное давление $p_c \rightarrow 139$. Как видим, для белых карликов значения p_c того же порядка, что и для звезд ГП.

С красными гигантами положение существенно иное, так как концентрация вещества к центру у них чрезвычайно сильна. Качественно

Рис. IV.1.3:

Плотности в химически однородных звездах разных масс
($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$).

Рис. А — центральная плотность, рис. Б — отношение центральной плотности к средней. Последнюю величину часто принимают за количественную меру степени концентрации вещества к центру звезды.

строение красного гиганта таково: огромная по размерам звезда низкой и не особенно быстро возрастающей к центру плотности имеет небольшое очень плотное ядро, близкое по своим характеристикам к белому карлику — как бы его зародыш, вызревающий в недрах гиганта. Поэтому простейшие оценки P_c , вытекающие из условия механического равновесия, оказываются здесь столь грубыми, что реального интереса не представляют.

Хорошие оценки давлений в центрах красных гигантов можно получить на основе теории белых карликов в сочетании с аргументацией п.п. 1.2 и 1.3 настоящего раздела (см. п.п. ?? и ?? и задачу ??). Это любопытно, поскольку белые карлики как по строению, так и по физике происходящих в них процессов гораздо проще красных гигантов.

2. ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕДРАХ НОРМАЛЬНЫХ ЗВЕЗД

2.1. Оценки средних температур нормальных звезд

При обсуждении теоремы вириала говорилось, что она позволяет оценить средние температуры в нормальных звездах, т.е. в звездах из идеального невырожденного газа с пренебрежимо малым давлением излучения.

Правомерно ли, однако, считать, что звезды состоят из такого газа? Ведь давления в них, как было только что установлено, поистине колоссальны, а их средние плотности, если иметь в виду звезды ГП, не так уж сильно отличаются от плотностей обычных жидкостей и твердых тел на Земле. Согласно рис. IV.1.2, $\bar{\rho}$ возрастает вдоль ГП от $\sim 10^{-2}$ г/см³ для звезд О5 до $> 2 \cdot 10^2$ г/см³ для звезд поздних подклассов М (Солнце имеет $\bar{\rho} = 1.4$ г/см³). Несмотря на это, ответ на поставленный вопрос оказывается положительным: *в звездах ГП газ можно считать идеальным и к тому же невырожденным* (подробнее см. разд. ??).

Суть дела в том, что внутри звезд из-за высоких температур и давлений подавляющее большинство атомов лишено своих электронов, так что газ представляет собой плазму, состоящую из свободных электронов и голых ядер. В обычном газе заметные отклонения от идеальности возникают, когда средние расстояния между молекулами становятся соизмеримыми с размерами самих молекул. В недрах звезд высокая температура и большое давление вызывают ионизацию атомов, что уменьшает их размеры на много порядков ($s \sim 10^{-8}$ см — размера атома — до $\sim 10^{-13}$ см — размера ядра). Вследствие этого газ должен оставаться идеальным вплоть до очень больших плотностей. Правда, в плазме, в отличие от газа из нейтральных частиц, взаимодействие не короткодействующее, а длиннодействующее (кулоновское), и поэтому приведенная аргументация не вполне убедительна. Оказывается, однако, что во внутризвездной плазме поправки на кулоновское взаимодействие в большинстве случаев несущественны (см. п. ??).

Есть три причины, по которым простейшее уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$ может оказаться неприменимым к недрам звезды: 1) вырождение газа; 2) отклонения от идеальности, обусловленные взаимодействием между частицами; 3) необходимость учитывать вклад давления излучения. В дальнейшем мы убедимся, что вырождение наступает до того, как газ перестает быть идеальным. Будет также показано, что для звезд ГП, кроме самых поздних, эффекты вырождения и влияние неиде-

альности, обусловленной кулоновским взаимодействием, несущественны (см. разд. ??). Что же касается давления излучения, его пока будем попросту игнорировать. Как будет показано в следующем разделе, для звезд не очень больших масс это в самом деле возможно.

Итак, рассмотрим звезду с пренебрежимо малым давлением излучения, состоящую из идеального невырожденного газа, т.е. нормальную звезду, согласно нашей терминологии. Исходим из следующего соотношения, выражающего теорему вириала (см. разд. III.2):

$$3 \int_V P dV = -E_G.$$

Учитывая, что $P dV = (P/\rho) dM_r = (\mathcal{R}^*/\mu) T dM_r$ и считая, что звезда химически однородна ($\mu = \text{const}$), можем переписать его в виде

$$3 \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \int_0^M T dM_r = \omega \frac{GM^2}{R}.$$

Обозначим через \bar{T} среднюю по массе температуру газа:

$$\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^M T dM_r.$$

Из последнего соотношения находим тогда

$$\boxed{\bar{T} = \frac{\omega}{3} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}}. \quad (2.1)$$

Температуру, даваемую этой формулой, по понятной причине принято называть *вириальной*.

В п. 2.1 гл. III было показано, что если плотность не возрастает наружу, то $\omega \geq 3/5$, и поэтому

$$\bar{T} \geq \frac{1}{5} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}. \quad (2.2)$$

За время жизни звезды на ГП термоядерные реакции успевают заметно изменить химический состав ее центральных областей. В такой звезде с частично или полностью выгоревшим ядром средняя молекулярная масса μ зависит от расстояния от центра r . Выгорание легких элементов — сначала, на стадии ГП, водорода, а затем также и гелия, — ведет к тому, что μ возрастает. Как будет показано в п. ??, для полностью ионизованного газа $\mu = (2X + 3Y/4 + Z/2)^{-1}$, где X , Y и

Z — весовые доли соответственно водорода, гелия и тяжелых элементов ($X + Y + Z = 1$). В чисто водородной плазме $Y = Z = 0$, и поэтому $\mu = 1/2$, тогда как там, где водород и гелий выгорели ($X = Y = 0$), имеем $\mu = 2$. Поэтому следует ожидать, что с приближением к центру звезды μ будет увеличиваться. Ролью самых наружных слоев, где ионизация еще не полная и μ возрастает к границе, в данном случае можно пренебречь. Учитывая сказанное, откажемся от предположения о химической однородности звезды ($\mu = \text{const}$), заменив его физически оправданным допущением, что $\mu \geq \mu_s$, где μ_s — молекулярная масса полностью ионизованного газа с химическим составом, имеющимся в поверхностных слоях звезды (s — от *Surface*). Так как в этом случае $(\mathcal{R}^*/\mu) T dM_r \leq (\mathcal{R}^*/\mu_s) T dM_r$, то оценка (2.2) останется в силе, если в ней заменить μ на μ_s .

2.2. Обсуждение

1) Подставляя в (2.1) численные значения постоянных, находим, что для химически однородной звезды

$$\bar{T} = 7.64 \cdot 10^6 \omega \mu \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}} \text{ К}, \quad (2.3a)$$

или

$$\bar{T} = 659 \omega \mu \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}} \text{ эВ}, \quad (2.3b)$$

где $\mathcal{M} = M/M_\odot$ и $\mathcal{R} = R/R_\odot$. Оценка (2.2) принимает вид $\bar{T} \geq 4.6 \cdot 10^6 \mu_s \mathcal{M}/\mathcal{R}$ кельвинов, или $\bar{T} \geq 400 \mu_s \mathcal{M}/\mathcal{R}$ эВ. Напомним, что она является универсальной, единственное ограничение — выполнение неравенства $\bar{\rho}_r \geq \bar{\rho}$ (верного, в частности, если $\rho'(r) \leq 0$). Таким образом, бо́льшая часть вещества в звездах ГП должна иметь температуру по крайней мере в несколько мегакельвинов. Соответствующие средние тепловые энергии частиц составляют не менее сотен электрон-вольт. Они значительно больше энергии ионизации водорода (13.6 эВ) и двукратной ионизации гелия ($13.6 \cdot 2^2 = 54$ эВ) и достаточны для отрыва большей части электронов от атомов тяжелых элементов, так что газ в недрах звезд действительно можно считать полностью ионизованным (когда речь идет об уравнении состояния).

Следует помнить, что неравенство (2.2) дает лишь *нижнюю оценку* средней температуры вещества нормальной звезды. Действительные же значения \bar{T} должны быть выше, так как $\omega > 3/5$. *Характерные значения температур в недрах звезд ГП*, согласно детальным расчетам их

моделей, порядка $(1 \div 3) \cdot 10^7$ К. Соответствующие тепловые энергии частиц $\sim (1 \div 3)$ кэВ.

Итак, чтобы находиться в механическом равновесии, нормальные звезды с неизбежностью должны быть очень сильно нагреты — иначе газовое давление в их недрах не могло бы противостоять весу вышележащих слоев. В этом суть наших оценок температуры.

2) Если говорить о существе дела, а не о деталях, то понять полученный результат можно так. Гравитационная энергия связи звезды порядка GM^2/R , ее тепловая энергия $\sim \mathcal{N} k \bar{T}$, где $\mathcal{N} = M/(\mu m_0)$ — полное число частиц в звезде и \bar{T} — характерная температура звездных недр. Очевидно, что эти энергии должны быть одного порядка, в противном случае механическое равновесие было бы невозможно. Итак, $(M/(\mu m_0)) k \bar{T} \sim GM^2/R$, или

$$\bar{T} \sim \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R},$$

в согласии с найденным ранее более аккуратным способом.

Если последнее выражение переписать в виде

$$k \bar{T} \sim (\mu m_0) \frac{GM}{R},$$

то становится ясно, что полученный результат можно сформулировать также так: средняя тепловая энергия частицы *в недрах* нормальной звезды того же порядка, что и ее гравитационная энергия связи *на поверхности* звезды.

3) Из соображений размерности можно утверждать, что *центральная температура* звезды T_c должна зависеть от параметров таким же образом, как и \bar{T} , т.е.

$$T_c = t_c \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}, \quad (2.4)$$

где t_c — близкий к единице численный коэффициент. (Можно показать, что для нормальных звезд $t_c \geq 0.32$, см. Упр. 4°, с. 114). Следует подчеркнуть кажущийся на первый взгляд неожиданным факт: у нормальных звезд \bar{T} и T_c отличаются не более чем вдвое.

На рис. IV.2.1 А приведены для справок значения центральных температур химически однородных звезд, полученные из расчетов их моделей (В.Б. Ильин, АИ СПбГУ). Соответствующие значения t_c показаны на рис. IV.2.1 Б. Как видим, центральные температуры монотонно

Рис. IV.2.1:

Центральные температуры химически однородных звезд
($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$).

Рис. А — температуры T_c в млн К, рис. Б — значения безразмерного параметра t_c .

убывают вдоль ГП, различаясь на ее верхнем и нижнем концах всего в несколько раз.

Используя данные, приведенные на рис. IV.2.1 и III.2.2, постройте график T_c/\bar{T} в функции массы для химически однородных звезд с $M \leq 10$ (при больших M начинает заметно сказываться давление излучения и формула (2.1) становится неприменима).

Сопоставьте значения \bar{T} , даваемые детальными расчетами моделей, с оценкой (2.2). Почему простейшая оценка температуры в недрах звезд оказывается гораздо точнее оценки давления, полученной из сходных соображений?

2.3.
**Астрономические
следствия**

1) В разд. III.2 указывалось, что безразмерная потенциальная энергия ω не очень чувствительна к структуре звезды и для звезд ГП есть число, близкое к единице. Поэтому согласно (2.1) струк-

турная чувствительность характерной температуры вещества в недрах звезд также должна быть не очень сильной. Поскольку химический состав звезд ГП примерно один и тот же, то μ не зависит от M , и \bar{T} оказывается пропорциональной M/R . С другой стороны, согласно наблюдениям, у звезд ГП с $M \leq 1$ радиусы примерно пропорциональны массам, для звезд же с $M \geq 1$ имеем $R \propto M^r$, причем $r = (0.5 \div 0.8)$. Поэтому из (2.1) следует, что средние температуры вещества в недрах звезд ГП должны медленно убывать с уменьшением массы, отличаясь

на верхнем и нижнем концах ГП в несколько раз (как и их центральные температуры, см. рис. IV.2.1 А).

Светимости звезд ГП различаются очень сильно, гораздо сильнее, чем их массы (соответственно в $\sim 10^{10} \div 10^{11}$ и $\sim 10^3$ раз). В сочетании с тем, что \bar{T} убывает вдоль ГП медленно, это заставляет сделать вывод об очень сильной зависимости мощности энерговыделения в звездах от температуры. В гл. ?? будет установлено, что этот вывод полностью подтверждается изучением характера протекания ядерных реакций, обеспечивающих свечение звезд ГП.

2) Применим теперь (2.1) к красным гигантам (КГ). Массы большинства КГ — порядка массы Солнца, а светимости велики. Только что было установлено, что мощность энерговыделения в звездах сильно зависит от температуры. Учитывая это, заключаем, что характерное значение \bar{T} у КГ должно быть во всяком случае не ниже, чем у звезд ГП.

С другой стороны, радиусы КГ порядка $10^2 R_\odot$. Поэтому согласно (2.1) температура в их недрах была бы на два порядка ниже, чем в звездах ГП, если бы распределение вещества вдоль радиуса (оно учитывается множителем ω) было близко к „нормальному” для звезд ГП ($\omega \sim 1$). Следовательно, для получения $\bar{T} \geq 10^7$, что необходимо, чтобы объяснить наблюдаемые высокие светимости КГ, требуется такое распределение вещества в недрах звезды, которое обладает исключительно сильной концентрацией к центру, настолько сильной, что $\omega \gtrsim 10^2$. Итак, строение КГ должно радикально отличаться от строения звезд ГП. Заметная доля их массы должна быть сосредоточена в очень небольшом плотном центральном ядре — том самом зародыше белого карлика, о котором уже мимоходом упоминалось в п. 1.3.

На самом деле вопрос тоньше. К ядрам КГ небольших масс простейшее уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$ неприменимо, так как электронный газ в них вырожден. Поэтому оценкой \bar{T} , даваемой (2.1), в этом случае нужно пользоваться с осторожностью. Однако вывод о наличии у КГ небольших плотных ядер все же верен.

3. РОЛЬ ДАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

3.1. Оценка давления излучения в центре звезды

Оценивая температуру в недрах звезд, мы пренебрегали давлением излучения. Когда и в какой мере это оправдано? Попробуем составить об этом представление.

Газовое давление в невырожденной звезде равно $P_g = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$, давление излучения $P_r = a T^4$, где a — постоянная Стефана. Поэтому $P_r/P_g \propto \mu T^3/\rho$. С другой стороны, как было показано выше, характерная температура звездных недр $T \propto \mu M/R$, откуда $T^3 \propto \mu^3 M^3/R^3 \propto \rho \mu^3 M^2$, так что $T^3/\rho \propto \mu^3 M^2$. Поэтому $P_r/P_g \propto (\mu^2 M)^2$, и в звездах достаточно большой массы давление излучения должно становиться существенным. Это не более чем полукачественные соображения, но они выражают самую суть дела. Можно думать, что отношение P_r/P_g , например, в центре звезды, будет определяться единственным параметром — $\mu^2 M$, хотя ожидать простой пропорциональности P_r/P_g и $\mu^2 M$, конечно, не приходится.

Переходим к более аккуратному рассмотрению. Пусть β — доля газового давления в полном давлении P , так что

$$\beta P = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho T, \quad (1 - \beta) P = \frac{a}{3} T^4.$$

Исключая из этих соотношений T , находим связь между P , ρ и β :

$$P = \left[\left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}. \quad (3.1)$$

Запишем соотношение (3.1) для центра звезды (индекс c). Перейдя в нем от P_c и ρ_c к безразмерному давлению $p_c \equiv (GM^2/4\pi R^4)^{-1} P_c$ и безразмерной плотности $\sigma_c = (M/4\pi R^3)^{-1} \rho_c$ и разрешив результат относительно $(1 - \beta_c)/\beta_c^4$, получим

$$\frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} = b_c \frac{\pi}{18} \frac{a G^3}{\mathcal{R}^{*4}} (\mu_c^2 M)^2, \quad (3.2)$$

где b_c — безразмерный структурный параметр:

$$b_c = 24 \frac{p_c^3}{\sigma_c^4}. \quad (3.3)$$

Весьма существенно, что хотя значения ρ_c и σ_c зависят от вида модели сильно (а ρ_c^3 и σ_c^4 , разумеется, еще сильнее), структурная чувствительность отношения ρ_c^3/σ_c^4 , определяющего значение b_c , оказывается сравнительно слабой. Так, при $\rho = \text{const}$ имеем $b_c = 1$, распределению плотности $\rho(r) = \rho_c[1 - (r/R)^2]$ отвечает $b_c = 0.40$, при линейном падении плотности вдоль радиуса $b_c = 0.14$ и т.д. Для моделей, у которых $P(r) = K\rho(r)^{4/3}$, где $K = \text{const}$ (политропы индекса $n = 3$, см. следующую главу), центральное давление почти в сто, а центральная плотность — более чем в 50 раз превышают значения этих величин у однородного шара той же массы и радиуса. Значение же b_c для этого случая отличается от b_c для однородного шара примерно в 10 раз: $b_c = 0.092$.

Приведенное только что значение $b_c = 0.092$ соответствует так называемой стандартной модели Эддингтона, сыгравшей на заре развития теории строения звезд огромную роль. Забегая вперед (а для кое-кого из читателей, вероятно, просто напоминая некогда известное им), укажем, что стандартная модель — это политропа индекса $n = 3$, построенная из невырожденного газа с учетом давления излучения; см. п. V.3.3. Ознакомившись со следующей главой, вернитесь к этому месту и с помощью результатов п. V.2.3 установите, что для политропы произвольного индекса n

$$b_c = 24/[(n+1)^3 \mu_1^2],$$

что можно записать также в виде (см. п. V.6.3)

$$b_c = (4/3)(n+1)^{-2} \nu_1^{-2},$$

где ν_1 — приводимый в Табл. V.6.2 (стр. 183) поправочный множитель (очень близкий к единице).

Сравнительно слабая чувствительность структурного параметра b_c к распределению вещества вдоль радиуса имеет важное следствие: наложив самые минимальные ограничения на модель, мы получим осмысленную оценку вклада давления излучения в центре звезды.

Если $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$, в частности, если плотность максимальна в центре звезды, то наименьшее возможное значение b_c равно 1, причем оно соответствует звезде с $\rho = \text{const}$. Это следует из (3.1) и правого неравенства (1.5) (проверьте!). Поэтому при заданном $\mu_c^2 M$ (и $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$) наименьшее значение $(1 - \beta_c)/\beta_c^4$ будет у модели с $\rho = \text{const}$. Так как $(1 - \beta)/\beta^4$ убывает с ростом β , то для этой модели β_c будет наименьшим из возможных. Обозначив его β^* , так что

$$\frac{1 - \beta^*}{\beta^{*4}} = \frac{\pi}{18} \frac{a G^3}{\mathcal{R}^{*4}} (\mu_c^2 M)^2, \quad (3.4)$$

будем иметь поэтому

$$1 - \beta_c \leq 1 - \beta^*. \quad (3.5)$$

Рис. IV.3.1:

Доля давления излучения в полном давлении в центре звезды $1 - \beta_c$
для звезд разных масс.

Сплошная кривая — верхняя оценка $1 - \beta_c$ для звезд произвольной структуры, пунктир — политропа индекса $n = 3$ (стандартная модель Эддингтона).

Неравенство (3.5) называют иногда β^* -теоремой Чандрасекара. Это и есть та строгая оценка β_c , о которой только что говорилось.

3.2. Обсуждение

1) Соотношение (3.5) позволяет, зная одну только массу звезды (точнее, $\mu_c^2 M$) найти ту *максимально возможную* долю $1 - \beta^*$, которую давление излучения близ центра звезды может составлять в полном давлении, *какова бы ни была структура звезды* (если только $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$). Зависимость $1 - \beta^*$ от $\mu_c^2 M$ показана на рис. IV.3.1 (сплошная кривая). Из рисунка видно, что для звезд малых масс ($M \leq 1$) роль давления излучения заведомо пренебрежимо мала, для звезд не слишком больших масс ($1 \leq M \leq 10$) она должна быть еще невелика, и лишь в недрах весьма редко встречающихся в природе массивных звезд ($M \geq 10$) давление излучения может быть существенным.

Было бы, однако, неверно думать, что для звезд как совокупности объектов давление излучения — лишь второстепенный фактор. Судя по всему, именно оно ответственно в первую очередь за то, что в мире не существует звезд очень больших масс (см. разд. ??).??).

Следует помнить, что β^* -теорема позволяет оценить относительную роль давления излучения лишь в центре звезды. Правда, расчеты звездных моделей показывают, что доля давления излучения меняется в недрах невырожденной звезды с удалением от ее центра не очень сильно (для массивных звезд ГП — раза в два). Однако в наружных слоях звезды роль давления излучения может быть значительно больше. Повидимому, именно световым давлением регулируется выброс вещества

из звезд на продвинутых стадиях их эволюции — процесс, который несомненно играет важную роль в жизни большинства звезд.

2) До сих пор речь шла о зависимости доли давления излучения в полном давлении от массы звезды. Теперь обратим внимание на роль химического состава, входящего через посредство μ_c . Значения μ_c в самых крайних случаях различаются в четыре раза, изменяясь от $\mu_c = 1/2$ для чистого водорода до $\mu_c \simeq 2$ для газа из голых ядер атомов тяжелых элементов и оторванных от них электронов. Однако пренебрегать отличием μ_c от единицы нельзя. (Если атомы тяжелых элементов ионизованы не полностью, скажем не разрушены их К-оболочки, то μ_c может быть заметно больше 2).

Для химически однородных, т.е. достаточно молодых звезд I типа населения $\mu_c \simeq 0.6$ (это μ соответствует полностью ионизованному газу с химическим составом, который имеют наружные слои Солнца). Поэтому при оценке роли давления излучения в звездах ГП по рис. IV.3.1 входной параметр $\mu_c^2 M$ есть $\sim 0.4M$.

В историческом плане любопытно отметить, что в период становления теории строения звезд — во времена Эддингтона, Милна и Джинса — полагали, что недра звезд состоят из тяжелых элементов ($\mu_c \simeq 2$). Поэтому $\mu_c^2 M$ принималось равным $4M$, вместо правильного для звезд ГП значения $0.4M$. В итоге роль светового давления в те далекие времена значительно преувеличивалась.

3) Неравенство Чандрасекара (3.5) позволило сделать важный вывод о незначительной роли давления излучения в маломассивных звездах ГП. Однако оценки вклада давления излучения в звездах больших масс, даваемые β^* -теоремой, оказываются заметно завышенными.

Для невырожденной звезды с произвольным распределением вещества вдоль радиуса значение $1 - \beta_c$ должно находиться из уравнения (3.2). В числах оно имеет вид

$$\frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} = 0.0324 b_c (\mu_c^2 M)^2. \quad (3.6)$$

На рис. IV.3.1 пунктиром нанесена зависимость $1 - \beta_c$ от $\mu_c^2 M$, найденная отсюда при значении структурного множителя $b_c = 0.092$, т.е. для стандартной модели Эддингтона. Точечная кривая построена по данным тех детальных расчетов моделей химически однородных звезд, которые уже не раз использовались в этой главе.

Обратим внимание на то, что кривые $1 - \beta_c$ в функции $\mu_c^2 M$ располагаются тем правее и ниже, чем меньше значение структурного множителя b_c . Значения же b_c , как было показано, убывают с ростом степени

концентрации вещества к центру. Поэтому следует ожидать, что если имеются две звезды с равными значениями $\mu_c^2 \mathcal{M}$, то вклад давления излучения в центральных областях будет меньше у той из них, которая обладает более сильной концентрацией вещества к центру.

4) Если в основном соотношении (3.2) вместо a и \mathcal{R}^* подставить их выражения через мировые постоянные

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3}, \quad \mathcal{R}^* = \frac{k}{m_0},$$

то его можно представить в следующей поучительной форме:

$$\frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} = \frac{\pi^3}{270} b_c (\mu_c^2 M / M_*)^2, \quad (3.7)$$

где M_* — имеющая размерность массы комбинация мировых постоянных

$$M_* = \left(\frac{c \hbar}{G m_0^{4/3}} \right)^{3/2}. \quad (3.8)$$

Численно $M_* = 3.69 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1.85 M_\odot$.

Масса M_* играет фундаментальную роль для всей теории звезд (см. п. 3.4).

3.3. Температуры в звездах при учете давления излучения

Учет давления излучения приводит к изменению вида зависимости центральной температуры звезды от параметров. Согласно п. 2.2, для нормальных звезд (давление чисто газовое) $T_c \propto \mu M / R$. В противоположном случае преобладающей роли давления излучения (звезды предельно больших масс) $P_c = a T_c^4 / 3$. Но $P_c = p_c (G M^2 / 4 \pi R^4)$, где p_c — безразмерный структурный множитель. Поэтому в рассматриваемом предельном случае мы имели бы

$$T_c = p_c^{1/4} \left(\frac{3G}{4\pi a} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{M}}{R}. \quad (3.9)$$

Таким образом, здесь $T_c \propto \sqrt{M} / R$. Зависимости от μ нет (почему?). Хотя такой крайний случай в природе, видимо, не осуществляется из-за неустойчивостей, полученный результат $T_c \propto \sqrt{M} / R$ показывает, в каком направлении должно происходить изменение классического соотношения $T_c \propto \mu M / R$.

Для верхней части ГП $R \propto M^r$, где $r \simeq 0.5$. Поэтому пока давление излучения еще не играет заметной роли, центральная температура хотя и не очень быстро, но все же растет с массой (при $r = 0.5$ — как \sqrt{M} , поскольку $T_c \propto M^{1-r}$). Однако когда начинает существенно сказываться давление излучения, скорость роста T_c с M должна несколько замедляться. В пределе особо больших масс было бы $T_c \propto M^{(1-2r)/2}$, так что при $r = 0.5$ зависимость T_c от M должна была бы исчезнуть вовсе.

**3.4. Давление
излучения и массы
звезд**

Учет нового фактора — давления излучения — естественным образом вводит в теорию звезд характерную массу — ту, при которой главенствующая роль в сдерживании гравитации переходит от газового давления к световому. Чтобы оценить эту массу, можно поступить по-разному. Например, можно приравнять правые части выражений для центральной температуры, отвечающих предельным случаям пренебрежимо малого светового и газового давления соответственно, т.е. (см. п. 2.2, формула (2.5), и п. 3.3, формула (3.9))

$$T_c = t_c \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R} \quad \text{и} \quad T_c = p_c^{1/4} \left(\frac{3G}{4\pi a} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{M}}{R}.$$

Результат дает характерную массу

$$M_1 = \left(\frac{3p_c}{4\pi t_c^4} \frac{\mathcal{R}^{*4}}{aG^3} \right)^{1/2} \mu^{-2},$$

что можно записать также в виде

$$M_1 = \frac{C_1}{\mu^2} M_*,$$

где M_* дается (3.8), а C_1 — вобравший в себя все числовые коэффициенты структурный множитель:

$$C_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2\pi^{3/2}} \frac{p_c^{1/2}}{t_c^2}.$$

Если в звезде $P \propto \rho^{4/3}$, то $C_1 = 9.73$. Это значение C_1 отвечает стандартной модели Эддингтона, для которой доля давления излучения в полном давлении не зависит от расстояния от центра звезды, см. п. п. V.3.3 и V.3.4. Структурная чувствительность коэффициента C_1 сравнительно слабая, и для всех звезд ГП он должен быть близок к 10,

так что для $M_1 = (C_1/\mu^2)M_*$ находим $M_1 \simeq 18M_\odot\mu^{-2}$. При M порядка M_1 давление излучения должно уже быть весьма существенным фактором, при M , заметно меньших M_1 , его роль мала. Поскольку звезд с массами больше нескольких M_1 во Вселенной нет, можно предполагать, что именно давление излучения и определяет верхний предел звездных масс.

Значение M_1 — не более чем порядковая оценка. Чтобы подчеркнуть это, найдем из точного соотношения (3.2) ту массу, при которой P_r в центре звезды становится равным P_g . Обозначим ее M_2 . Ясно, что M_1 и M_2 должны быть одного порядка. Различие между ними — мера той точности, которой разумно требовать от подобных оценок. Полагая в (3.7) $\beta_c = 1/2$ и беря $b_c = 0.092$ (что соответствует $P \propto \rho^{4/3}$), находим, что $M_2 = 27.5 M_*/\mu^2$, или $M_2 = 51 M_\odot/\mu^2$. Согласно наблюдениям, наиболее массивные звезды имеют массы порядка $100M_\odot$. Так как $\mu \simeq 0.6$, то из полученной оценки M_2 следует, что *звезд, в недрах которых давление излучения преобладало бы над газовым, в природе не существует.*

3.5. Массы звезд и мировые постоянные

Изучение относительной роли газового и светового давления в звездах позволило выявить существование принципиально важной для теории звезд комбинации фундаментальных постоянных с размерностью массы:

$$M_* = \left(\frac{c\hbar}{Gm_0^{4/3}} \right)^{3/2} = 1.85 M_\odot.$$

Массы невыврожденных звезд отличаются от M_* в ту или другую сторону не более чем в несколько десятков раз. Характерная масса M_* естественным образом появляется также в теории белых карликов и нейтронных звезд (см. гл. ?? и ??), несмотря на то, что физика этих объектов существенно иная. Так, у белых карликов основной вклад в давление дает сильно вырожденный электронный газ, роль же ионов и фотонов в создании давления у них, в отличие от звезд ГП, пренебрежимо мала. Оказывается, что массы белых карликов не могут превосходить так называемой чандрасекаровской предельной массы $3.1 M_*/\mu_e^2$, где μ_e — электронная молекулярная масса, т.е. масса, приходящаяся на один свободный электрон. Для полностью ионизованного газа, лишенного водо-

рода, μ_e очень близко к 2, так что предельная масса оказывается равной $0.78 M_*$, или $1.4 M_\odot$. Отсюда следует, что звезды ГП с большими массами в ходе своей эволюции к белым карликам либо должны сбрасывать часть вещества, либо же вовсе не могут в них превращаться. Какая из этих возможностей реализуется, зависит от начальной массы звезды.

Таким образом, *величина M_* определяет характерные значения масс любых звезд*. Выражение для нее можно переписать в форме

$$M_* = \frac{m_0}{\delta^{3/2}},$$

где

$$\delta = \frac{Gm_0}{\hbar c} = 5.8 \cdot 10^{-39}.$$

Роль безразмерной постоянной δ в теории звезд подобна роли постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ в теории атома. Малость δ отражает крайнюю слабость гравитационного взаимодействия и служит причиной того, что звезды имеют столь большие массы.

Еще в 30-е годы было отмечено, что масса Вселенной порядка m_0/δ^2 . Недавно было указано, что масса $m_0/\delta \sim 10^{15}$ г тоже выделена. Гравитационный радиус тела такой массы оказывается порядка размеров нуклона. Возможно также, что масса $m_0/\delta^{1/2}$ играет особую роль в природе фундаментальных взаимодействий. Итак, массы $m_0/\delta^{n/2}$ с $n = 1, 2, 3$ и 4 выделены — но кем, природой или человеком? Проявляется ли здесь какая-то общая глубинная закономерность или это просто игра случая? Скорее всего второе.

4. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1° Показать, что для звезды, находящейся в гидростатическом равновесии,

$$\int_0^M \frac{GM_r dM_r}{r^\nu} = (4 - \nu) \int_V P r^{1-\nu} dV, \quad \nu < 4.$$

Частными случаями этой формулы являются вириальное соотношение (2.4) главы III (при $\nu = 1$) и выражение (1.1), получающееся при $\nu \rightarrow 4 - 0$ (проверьте!). Отметьте для себя также случай $\nu = 0$, когда интеграл в левой части берется.

2° Пусть \bar{P} — среднее (по массе) давление в звезде:

$$\bar{P} = \frac{1}{M} \int_0^M P dM_r.$$

Тем же путем, которым в п. 1.1 были найдены оценки P_c , показать, что для любой равновесной конфигурации

$$\bar{P} \geq \frac{1}{12\pi} \frac{GM^2}{R^4},$$

если же средняя плотность $\bar{\rho}_r$ в сфере радиуса r не меньше средней плотности всей звезды $\bar{\rho}$ (в частности, если плотность не возрастает от центра к периферии), то

$$\bar{P} \geq \frac{3}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}.$$

3° Показать, что если плотность не возрастает наружу, то величина

$$P + \frac{3}{8\pi} \frac{GM_r^2}{r^4}$$

не возрастает с r . Исходя из этого, доказать, что в этом случае $P_c \geq (3/8\pi) GM^2/R^4$ (Э. Милн, 1929 г.).

4° Обозначим

$$I_{\sigma,\nu} = G \int_0^M \frac{M_r^\sigma dM_r}{r^\nu}, \quad 3(\sigma + 1) > \nu.$$

Пользуясь тем же приемом, что и при выводе (1.4) и (1.4'), доказать, что (С. Чандрасекар, 1936 г.)

$$\frac{3}{3\sigma + 3 - \nu} \frac{G M^{\sigma+1}}{R^\nu} \leq I_{\sigma,\nu} \leq \frac{3}{3\sigma + 3 - \nu} \frac{G M^{\sigma+1}}{R_c^\nu},$$

где $(4\pi/3)R_c^3\rho_c = M$. При этом левое неравенство справедливо, когда средняя плотность $\bar{\rho}_r$ в сфере радиуса r при всех r не меньше средней плотности звезды $\bar{\rho}$, правое — при $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$.

Рассмотрев изменение $I_{\sigma,\nu}$ при переносе малой массы δM из одной оболочки в другую, понять физический смысл этих неравенств.

5° Пользуясь неравенством из предыдущей задачи, показать, что в равновесной конфигурации с $\rho_c \geq \bar{\rho}_r$ безразмерная гравитационная энергия ω , безразмерное центральное давление p_c и степень концентрации вещества к центру $\sigma_c \equiv 3\rho_c/\bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ — средняя плотность звезды, удовлетворяют неравенствам

$$\sigma_c^4 \geq 24p_c^3, \quad \sigma_c \geq \frac{125}{9}\omega^3.$$

Применив второе из этих неравенств а) к конфигурациям с $\rho = \rho_c[1 - (r/R)^a]$ при $a = \infty, 2$ и 1 и б) к политропам с $n = 0, 1, 3$ и $n \rightarrow 5$, получить представление о точности, с которой оно позволяет оценивать σ_c по известному ω . Значения σ_c для политроп см. в Табл. V.2.2, с. 136.

6° Пусть звезда состоит из идеального газа с $\mu = \text{const}$, причем плотность и температура в ней не возрастают наружу, а давление излучения пренебрежимо мало. Показать, что равновесная конфигурация с наименьшей возможной центральной температурой, удовлетворяющая этим условиям, должна состоять из изотермического ядра, окруженного оболочкой, в которой $\rho = \text{const}$ (А. Эддингтон, 1925 г.). Можно доказать, что соответствующая безразмерная центральная температура t_c ,

определяемая выражением $T_c = t_c (\mu/\mathcal{R}^*) GM/R$, равна $t_c = 0.32$. Сопоставьте этот результат со значениями t_c для конфигурации с $\rho = \text{const}$ и для политропы с $n = 3$ (см. Табл. V.2.2, с. 136). Сделайте заключение о структурной чувствительности центральной температуры.

7° Применив неравенство Гёльдера к интегралам, дающим безразмерную потенциальную энергию ω :

$$\omega = \int_0^1 \frac{q dq}{x}$$

и безразмерное центральное давление p_c :

$$p_c = \int_0^1 \frac{q dq}{x^4},$$

установить, что для произвольной равновесной конфигурации

$$p_c \geq 8 \omega^4.$$

8° Таким же способом, как в предыдущей задаче, показать, что для произвольной равновесной конфигурации безразмерный момент инерции i , определяемый равенством

$$i MR^2 \equiv \frac{2}{3} \int_V \rho r^2 dV,$$

связан с ω и p_c неравенствами

$$i \geq \frac{18}{125} \frac{1}{\omega^2}, \quad p_c \geq \frac{3}{16} \frac{1}{i^2}.$$

Составить представление о качестве этих оценок, применив их а) к пустотелому „мячику” с тяжелыми стенками; б) однородному шару и в) политропе произвольного индекса n (в последнем случае воспользоваться численными данными из Табл. V.2.2, с. 136).

Глава V

ПОЛИТРОПЫ

... политропная теория дает хорошие приближения в отсутствие точных численных расчетов. Политропная теория позволяет также понять некоторые качественные особенности теории звезд. Даже закоренелый релятивист должен знать основные элементы этой теории.

Я.Б. Зельдович

К только что приведенным словам Я.Б. Зельдовича можно добавить, что закоренелый наблюдатель, подобно закоренелому релятивисту, также должен знать основы теории политроп. Для всех, кто изучает строение и эволюцию звезд, это своего рода начальная школа.

До сих пор рассматривались такие свойства звезд, которые можно вывести из одного только условия механического равновесия, без каких-либо иных существенных ограничений. Во всех случаях их удавалось исследовать без решения уравнения механического равновесия. Теперь мы сделаем следующий шаг и рассмотрим решения этого уравнения для простейшей модели звезды. Это позволит получить гораздо более детальные сведения о структуре газовой массы, находящейся в равновесии в собственном поле тяготения. Правда, за это придется заплатить дорожную цену — сделать весьма специальное предположение о связи давления и плотности, которое в реальных звездах в большинстве случаев не выполняется. И тем не менее по причинам, которые будут указаны ниже, эта так называемая политропная модель представляет значительный интерес.

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛИТРОП

1.1. Что такое политропа

Политропной моделью звезды, или короче *политропой* называется звезда, находящаяся в механическом равновесии и такая, что в каждой ее точке выполняется

следующее соотношение между давлением и плотностью:

$$P = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \equiv K \rho^{\gamma'},$$

где K и n — постоянные. Значение n называется индексом политропы, γ' известно как показатель политропы. Политропная модель содержит, вообще говоря, три свободных параметра. Одним из них является индекс политропы n или γ' . (В дальнейшем, если не оговорено противное, считается, что $0 \leq n \leq 5$). Выбор двух других параметров в разных случаях разный. Ими могут служить масса и радиус звезды (тогда значение K через них выражается, см. следующий пункт). Однако бывает и иначе, скажем, задаются масса и величина K . Например, для белых карликов малой массы, которые, как будет показано в гл. ??, можно считать политропами, значение K определяется однозначно — это есть

константа, выражающаяся через мировые постоянные. Впрочем, вскоре мы узнаем, что политропы обладают замечательными свойствами подобия, в силу которых по существу они образуют однопараметрическое семейство моделей, зависящих лишь от n .

Почему же политропные модели столь важны? Сначала — два менее существенных соображения. Во-первых, политропы были исторически первыми моделями звезд. Они были изучены еще в XIX в. Лейном (J.H. Lane), Риттером (A. Ritter), Кельвином (Lord Kelvin), Эмденом (R. Emden) и др. Подробная историческая справка есть у С. Чандрасекара, „Введение в учение о строении звезд”, в библиографических замечаниях к гл. IV. Во-вторых, политропа — это единственная сравнительно простая и в то же время довольно гибкая модель, для которой расчет механического равновесия удастся провести независимо от расчета тепловой структуры звезды. Разумеется, это возможно всегда, когда давление зависит только от плотности: $P = P(\rho)$ (так называемое *баротропное* уравнение состояния).

Таково, например, положение у белых карликов: уравнение состояния полностью вырожденного электронного газа, давление которого противостоит у них гравитации и обеспечивает их механическое равновесие, имеет вид $P = P(\rho)$ и, если масса белого карлика не является совсем малой, не сводится к простой политропной зависимости (см. гл. !??, разд. ??).

Наибольший интерес, однако, представляют простейшие модельные зависимости P от ρ . Политропы выделены среди них тем, что они (и только они) содержат в соотношении, связывающем P и ρ , лишь один размерный свободный параметр (K).

Впрочем, следует помнить, что на самом деле отделить расчет механического равновесия звезды от расчета ее тепловой структуры в большинстве случаев нельзя. На звезду можно смотреть как на машину по переработке ядерной и гравитационной энергии в электромагнитное излучение и нейтрино. В роли регулятора этой машины выступает гравитация. Делая априорное предположение о существовании в звезде политропной связи между давлением и плотностью, мы полностью оставляем в стороне всю эту важнейшую энергетическую часть проблемы, так как в теории политроп вопрос о выделении и переносе энергии в звезде не фигурирует. Поэтому возможности политропной модели не следует переоценивать.

Однако можно привести ряд очень веских соображений, по которым политропы заслуживают внимательного изучения.

1) Существуют звезды, для которых политропная зависимость $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ является хорошей (почти точной) аппроксимацией практически

для всей звезды: а) Полностью конвективные невырожденные звезды. Таковы карлики типа М и звезды на некоторых стадиях гравитационного сжатия. В этом случае $n = 3/2$. б) Белые карлики малой массы, без релятивистских эффектов в уравнении состояния. Здесь также $n = 3/2$. в) Белые карлики с массой, близкой к предельно большой, возможной для них, — это политропы индекса $n = 3$. г) Звезды на стадии гравитационного сжатия с лучистым переносом энергии, еще не достигшие главной последовательности. Для них разумной аппроксимацией служит политропа с $n = 13/4$.

2) Более реалистичные (но и более трудные для расчета) модели звезд ГП (кроме маломассивных) по своей структуре не так уж сильно отличаются от политропы индекса $n = 3$. Последнее утверждение, вероятно, вам известно. Возможно, правда, вы слышали его в такой формулировке: звезды ГП по своему строению близки к стандартной модели Эддингтона. Подробнее об этом — позже.

3) Звезды верхней части ГП должны обладать конвективными ядрами, строение которых соответствует политропе с $n = 3/2$ (правда, здесь ею описывается уже не вся звезда, а только ее центральные области).

При изучении строения звезд важно ясно представлять себе, насколько чувствительны к различиям во внутренней структуре звезды с заданными M и R такие ее основные характеристики как гравитационная энергия связи, давление и температура в центре и т. п. Политропы позволяют легко научиться „чувствовать” это.

Мы рассмотрим политропы довольно подробно как из-за всего того, о чем сейчас говорилось, так и по чисто педагогическим соображениям: учиться лучше на простых моделях.

**1.2. Основные
уравнения.
Соотношения
подобия**

Основные уравнения политропной модели — это уравнение гидростатического равновесия, уравнение изменения массы вдоль радиуса и политропное соотношение между плотностью и давлением. Они имеют вид

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}, \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad P = K \rho^{1+\frac{1}{n}}.$$

(1.1)

Хотя плотность и возрастает вглубь, естественно считать, что в центре звезды она остается конечной: $\rho \rightarrow \rho_c$ при $r \rightarrow 0$. Это приводит

к требованию, чтобы $dP/dr \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Действительно, если $\rho \rightarrow \rho_c$ при $r \rightarrow 0$, то $M_r \sim (4\pi/3)r^3\rho_c$. Вводя это в первое из уравнений (1.1), получаем, что $dP/dr = 0$ при $r = 0$. Кроме того, на поверхности звезды, при $r = R$, давление P должно обращаться в нуль, а M_r давать полную массу звезды M . Таким образом, имеем следующую совокупность граничных условий:

$$\frac{dP}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad P = 0, \quad M_r = M \quad \text{при } r = R. \quad (1.2)$$

Первое из этих граничных условий задано в центре звезды, два других — на ее поверхности, так что мы имеем здесь дело с краевой задачей (а не с задачей Коши). Это не есть особенность политроп: краевые условия типа (1.2) должны выполняться для всех моделей звезд. Далее, система основных дифференциальных уравнений (1.1) есть система *второго* порядка. Решение ее, представляющее физический интерес, должно быть подчинено *трем* краевым условиям (1.2). Очевидно, что такое решение будет существовать не всегда, а лишь при некотором дополнительном соотношении между параметрами задачи. Иначе говоря, расчет строения звезды — это краевая задача на собственные значения.

В конкретном случае политропной модели при заданных M и R решение будет существовать не для любого K , а лишь для некоторого фиксированного. Это значит, что для политроп между массой M , радиусом R и политропным параметром K должна существовать связь.

Что это должно быть так, можно понять и иначе. Зададимся некоторой плотностью в центре звезды ρ_c . Тогда уравнение (1.1) можно решить, ведя интегрирование от $r = 0$ наружу до тех пор, пока при каком-то $r = R$ давление P не обратится в нуль. Соответствующее M_r есть, очевидно, полная масса звезды M . Таким образом, M и R можно получить, если заданы ρ_c и K , т.е. $M = M(\rho_c, K)$, $R = R(\rho_c, K)$. Исключив ρ_c из этих двух соотношений, приходим к связи между M , R и K .

Замечание. Если в (1.1) политропное соотношение $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ заменить на некоторую произвольную баротропную зависимость $P = P(\rho)$, то, как следует из только что сказанного, и в этом случае масса и радиус звезды будут связаны функциональной зависимостью. Ее конкретный вид определяется, конечно, тем, какова функция $P(\rho)$. Именно таково положение с белыми карликами, где $P(\rho)$ — это уравнение состояния полностью вырожденного электронного газа (вообще говоря, частично релятивистского). Оказывается, что зависимость $M \div R$ для белых карликов — ее впервые рассчитал Чандрасекар в 30-е годы — имеет замечательную особенность: с ростом массы радиус монотонно убывает и обращается в нуль,

когда масса становится равной $M = 1.4M_{\odot}$ (если в недрах белого карлика нет водорода). Эта критическая масса называется чандрасекаровским пределом. Это лишь предварительные замечания, подробнее см. гл. ??, разд. ??.

Для политроп функциональную форму зависимости между массой, радиусом и параметром K можно найти из соображений размерности, без решения задачи (1.1) – (1.2). У нас есть следующие определяющие размерные параметры: прежде всего, масса звезды M и ее радиус R — это очевидно; далее, гравитационная постоянная G , так как именно гравитация и создает звезду, и, наконец, K , поскольку эта размерная константа фигурирует в основном политропном соотношении. В задаче имеется еще один параметр — n . Зависимость от него весьма существенна, и мы вскоре будем ее подробно обсуждать. Однако поскольку n безразмерно, среди определяющих размерных параметров задачи оно не появляется.

Из четырех перечисленных размерных величин можно составить лишь одну безразмерную комбинацию. Сконструировать ее можно так. Исходя из политропного соотношения $P = K\rho^{1+1/n}$ и образуя из M и R комбинацию M/R^3 с размерностью плотности, убеждаемся, что величина $K(M/R^3)^{1+1/n}$ имеет размерность давления. С другой стороны, характерное значение гравитационного давления в недрах звезды есть (ньютонова сила тяготения)/(площадь), т.е. $\frac{GM^2}{R^2}/R^2$, или GM^2/R^4 . Отношение этих двух давлений, $K(M/R^3)^{1+1/n}$ и GM^2/R^4 , равное $KG^{-1}M^{1/n-1}R^{1-3/n}$, есть отвлеченное число. Значения безразмерных комбинаций определяющих величин могут зависеть лишь от безразмерных параметров задачи. Поэтому

$$KG^{-1}M^{\frac{1-n}{n}}R^{\frac{n-3}{n}} = c, \quad (1.3)$$

где c зависит от n . Численные значения c в функции n из соображений размерности найти, разумеется, нельзя, они должны определяться из решения основных уравнений. Однако можно ожидать, что c — число порядка единицы. Как показывает следующая таблица, это действительно так:

n	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
c	0.637	0.424	0.365	0.351	0.364	0.401	0.477	0.658

О том, как эти числа найдены, будет сказано ниже (см. п. 2.2). Двойной рамкой обведена область значений n , характерных для звездных моделей.

!!!

Формула (1.3), дающая *зависимость масса – радиус*, является одним из важнейших результатов теории политроп. Простота вывода не делает эту формулу тривиальной. Как мы потом узнаем, вытекающие из нее следствия имеют фундаментальное значение для теории строения звезд.

Обратим теперь же внимание на то, что для политропы индекса $n = 3$ зависимость от R выпадает из (1.3), так что (при фиксированном K) здесь существует единственное значение массы M , при котором возможно равновесие. Отметим также случай $n = 1$, когда из (1.3) выпадает зависимость от M , и потому задание K однозначно определяет радиус конфигурации. Этот факт — он скорее любопытен, чем реально важен — означает, что все равновесные самогравитирующие шары из вещества с уравнением состояния $P = K\rho^2$, независимо от их массы, обладали бы одним и тем же радиусом.

Использование соображений размерности чрезвычайно полезно и при расчете структуры политроп. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{r}{R}, \quad q = \frac{M_r}{M}, \quad p = \left(\frac{GM^2}{4\pi R^4} \right)^{-1} P, \quad \sigma = \left(\frac{M}{4\pi R^3} \right)^{-1} \rho. \quad (1.4)$$

Переменные x , q , p называют иногда переменными Шварцшильда, по имени одного из создателей теории звездной эволюции американского астрофизика Мартина Шварцшильда, который широко ими пользовался.

Не путайте недавно скончавшегося М. Шварцшильда с его отцом Карлом Шварцшильдом, знаменитым немецким астрофизиком начала века: радиус (К.) Шварцшильда в релятивистской астрофизике, приближение (К.) Шварцшильда – Шустера в теории переноса излучения, показатель (К.) Шварцшильда в фотографической фотометрии и др.

В переменных Шварцшильда уравнения строения политроп (1.1) принимают вид

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{q\sigma}{x^2}, \quad \frac{dq}{dx} = x^2\sigma, \quad p = \frac{c}{(4\pi)^{1/n}} \sigma^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1.5)$$

где c определено по (1.3) (проверьте!). Краевые условия (1.2) переходят в

$$p' = 0 \text{ при } x = 0; \quad q = 1, \quad p = 0 \text{ при } x = 1. \quad (1.6)$$

Как видим, все размерные величины из основных уравнений исчезли. Это значит, что *все политропные шары с одинаковым индексом политропы имеют подобное строение*: отношение плотностей и давлений

в двух точках, находящихся на одинаковых относительных, т.е. выраженных в долях радиуса, расстояниях от центра звезды, зависит лишь от n . В частности, профили давления и плотности, т.е. зависимости P/P_c и ρ/ρ_c от относительного расстояния от центра звезды $x = r/R$, для всех политроп с одним и тем же n совпадают. Имея в виду это свойство политроп, говорят, что они образуют *однопараметрическое гомологическое семейство моделей*.

Когда задача (1.5) – (1.6) решена, т.е. p , q и σ найдены как функции x , следует вернуться к исходным размерным физическим переменным, что дает, например, для давления такое выражение:

$$P(r) = \frac{GM^2}{4\pi R^4} p\left(\frac{r}{R}\right)$$

и аналогично для M_r и ρ . Подчеркнем, что вид функции p (а также функций q и σ) определяется только значением индекса политропы n , так что для *всех* политроп с этим n и *любыми* M , R и K , удовлетворяющими соотношению (1.3), эта функция одна и та же.

При расчетах звездных моделей в качестве независимой переменной часто вместо расстояния от центра r используют массу M_r . Фактически это есть переход от эйлеровой переменной к лагранжевой. Использование массы в качестве независимой переменной позволяет, в частности, наглядно представить, в каких физических условиях — при каких плотностях, температурах и т. п. — находится большая часть вещества звезды (это не единственное и не главное удобство такого использования M_r). Применительно к политропам переход к массе в качестве независимой переменной тривиален. Будем p , σ и x рассматривать как функции безразмерной массы q . Разделив первое из уравнений (1.5) на второе, „перевернув” второе, а третье оставив без изменения, мы приведем основную систему к виду

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{q}{x^4}, \quad \frac{dx}{dq} = \frac{1}{x^2\sigma}, \quad p = \frac{c}{(4\pi)^{\frac{1}{n}}} \sigma^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1.7)$$

а краевые условия переписутся так:

$$x = 0 \text{ при } q = 0; \quad p = 0, \quad x = 1 \text{ при } q = 1. \quad (1.8)$$

Когда в разд. 5 будет обсуждаться строение политроп, ход физических параметров в звезде от центра к поверхности будет даваться как в функции относительного расстояния от центра x , так и в функции доли массы q .

**1.3.
Гравитационный
потенциал
политропы**

Входящая в уравнения строения политроп (1.5) или (1.7) величина c пока нам неизвестна. Она является собственным значением краевой задачи (1.5) – (1.6).

Оказывается, однако, что эту краевую задачу можно преобразовать так, что мы получим обычную задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка, исследовать и численно решать которую гораздо удобнее. Именно так, решая эту задачу Коши, и рассчитывают обычно строение политроп. К сожалению, аналитическое сведение краевой задачи к задаче Коши, легко осуществимое для политроп, для более реалистичных моделей звезд сделать уже невозможно.

Для лучшего уяснения физики дела мы предпочтем при указанном только что сведении к задаче Коши не преобразовывать уравнения (1.5) дальше, а, наоборот, вернемся назад к исходному уравнению гидростатического равновесия, записав его так:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho.$$

Ускорение силы тяжести g есть градиент гравитационного потенциала (со знаком минус):

$$g = -\frac{d\Phi}{dr}.$$

В звезде и ускорение силы тяжести, и потенциал отрицательны. Наши g и Φ — это их абсолютные величины. С учетом политропного соотношения $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ уравнение гидростатики принимает вид

$$\frac{n+1}{n} K \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr} = \rho \frac{d\Phi}{dr}.$$

Интегрируя, находим отсюда связь между плотностью и потенциалом в политропном шаре:

$$\rho = \left(\frac{\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (1.9)$$

Постоянная интегрирования взята равной нулю, что соответствует тому, что потенциал отсчитывается от поверхности звезды, так что $\Phi = 0$ при $r = R$.

Понятно, что строение самогравитирующей массы должно полностью определяться пространственным распределением потенциала. В рассматриваемом случае связь между потенциалом и распределением вещества в звезде совсем проста и дается формулой (1.9). Расчет структуры политропы сведен тем самым к нахождению потенциала Φ .

Как известно, гравитационный потенциал Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi = -4\pi G \rho,$$

где Δ — оператор Лапласа. В нашем случае (сферическая симметрия плюс только что найденная связь ρ и Φ) оно имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = - \frac{4\pi G}{[(n+1)K]^n} \Phi^n.$$

Перейдем здесь к безразмерным переменным. Прежде всего, условимся измерять потенциал Φ в долях его значения в центре звезды Φ_c , положив

$$\Phi = \Phi_c \theta,$$

что согласно (1.9) можно записать и так:

$$\Phi = \left((n+1)K \rho_c^{\frac{1}{n}} \right) \theta. \quad (1.10)$$

Таким образом, θ — это *безразмерный потенциал*. Далее, введем безразмерное расстояние от центра ξ , положив

$$r = \xi r_1,$$

и выберем r_1 так, чтобы вид уравнения для Φ максимально упростился, именно, чтобы из него исчезли все постоянные. Введем для этого два последних выражения в уравнение Пуассона и возьмем

$$r_1 = \left(\frac{n+1}{4\pi G \rho_c} K \rho_c^{\frac{1}{n}} \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

или, что то же самое,

$$r_1 = \left(\frac{\Phi_c}{4\pi G \rho_c} \right)^{1/2}. \quad (1.11')$$

Тогда оно примет такой окончательный вид

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n,$$

(1.12)

или

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' = -\theta^n, \quad (1.12')$$

Рис. V.1.1:

Роберт Эмден (Robert Emden, 1862 – 1940).

Его основная работа — книга „Газовые шары” („Gaskugeln”) — вышла в 1907 г. Ее цитируют до сих пор, впрочем, по-видимому, больше по традиции, чем по существу.

На титульном листе этой книги можно прочесть, что в момент ее опубликования Эмден был приват-доцентом физики и метеорологии Мюнхенской высшей технической школы.

или, наконец,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2(\xi\theta)}{d\xi^2} = -\theta^n. \quad (1.12'')$$

Уравнение (1.12) известно как *уравнение Лейна – Эмдена*.

При его выводе предполагалось, что вы помните тот фундаментальный факт, что потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Можно, конечно, получить (1.12) и непосредственно из исходных уравнений (1.1), введя функцию θ с помощью равенства $\rho = \rho_c \theta^n$ чисто формально, без выяснения ее физического смысла. Можете проделать это в качестве упражнения.

Очевидно, что $\theta(0) = 1$ — это следует из определения функции θ . Далее, если интересоваться только распределениями плотности, не имеющими сингулярности при $r = 0$, так что $\rho \rightarrow \rho_c \neq \infty$ при $r \rightarrow 0$, то $\theta'(0) = 0$, поскольку ускорение силы тяжести $g = -d\Phi/dr \propto \theta'(\xi)$ должно в центре звезды обращаться в нуль. Можно дать и формальный вывод. Для несингулярных распределений плотности $dP/dr \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ (см. текст сразу за формулой (1.1)). Так как $P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}$, то отсюда следует, что $(d\rho/dr)_c = 0$, а тогда, согласно формуле перед (1.9), и $(d\Phi/dr)_c = 0$, т.е. $\theta'(0) = 0$. Итак, при несингулярных распределениях плотности, которые только и представляют физический интерес, начальные условия к уравнению (1.12) имеют вид:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (1.13)$$

Рис. V.1.2:**Функции Эмдена $\theta(\xi)$.**

Их физический смысл: 1) $\theta(\xi)$ есть гравитационный потенциал, отсчитанный от поверхности политропы и выраженный в долях его значения в центре звезды. 2) Если политропа состоит из идеального невырожденного газа с постоянным по глубине средним молекулярным весом, то при пренебрежении давлением излучения $\theta(\xi)$ есть одновременно температура газа в долях центральной.

Решения уравнения Лейна-Эмдена при этих граничных условиях известны как *функции Эмдена*. Они образуют однопараметрическое семейство (параметр — n). Устроено оно очень просто: все θ монотонно убывают (там, где $\theta > 0$), причем тем быстрее, чем меньше n .

Докажите, что это так, исходя из вида уравнения (1.12), но не решая его. Поймите также физический смысл этого.

Расчет функций Эмдена сегодня (но не во времена Эмдена!) не составляет труда: (1.12) – (1.13) — это задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка, которая легко решается численно по стандартным процедурам, например, методом Рунге – Кутты. Результаты приведены на рис. V.1.1; см. также Приложение.

Функции Эмдена, вообще говоря, неэлементарны, за исключением трех из них:

n	0	1	5
$\theta(\xi)$	$1 - \frac{\xi^2}{6}$	$\frac{\sin \xi}{\xi}$	$\left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

В первых двух случаях интегрирование уравнения Лейна – Эмдена не вызывает затруднений. Случай $n = 5$ заметно сложнее, и отыскание

приведенного решения требует изобретательности. Впрочем, проверка того, что оно удовлетворяет уравнению и граничным условиям, не составляет труда.

Попробуйте найти все три решения самостоятельно. Подробный их вывод есть у Чандрасекара, „Введение в учение о строении звезд”, гл. IV, разд. 4. Почему-то часто оказывается, что у многих из изучавших теорию политроп со временем в памяти остается только тот в общем второстепенный факт, что для каких-то трех частных случаев уравнение Лейна – Эмдена решается в явном виде. Надеюсь, с вами будет не так.

Упомянем еще, что при малых ξ функцию Эмдена можно вычислить по ее разложению в степенной ряд

$$\theta(\xi) = 1 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi^4 + a_3 \xi^6 + \dots,$$

в котором

$$a_1 = -\frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{n}{120}, \quad a_3 = -\frac{n(8n-5)}{3 \cdot 7!}, \quad a_4 = \frac{n(122n^2 - 183n + 70)}{9 \cdot 9!}.$$

Получите a_1 и a_2 подстановкой приведенного разложения в уравнение Лейна – Эмдена (1.12) и граничные условия (1.13). Таким же образом можно найти a_3 и a_4 , но это требует громоздких скучных выкладок. Другой способ см. в задаче 7, с. 189.

Когда функция Эмдена найдена, т.е. получено распределение гравитационного потенциала, строение политропы тем самым фактически определено. Так, профиль плотности в звезде, т.е. ρ/ρ_c , дается функцией θ^n . Это видно, например, из того, что уравнение Лейна – Эмдена — это уравнение Пуассона, в левой части которого стоит $\Delta\Phi$, а в правой — величина, пропорциональная плотности, так что $\theta^n \propto \rho$. Далее, для центра звезды $\theta = 1$, а $\rho = \rho_c$, и поэтому $\rho = \rho_c \theta^n$. Выражение других физических переменных через функции Эмдена будет рассмотрено немного позже. Основной целью этого пункта было показать, что расчет строения политропы можно представить как задачу Коши для нахождения потенциала, что и сделано.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛИТРОП

2.1. Гравитационная энергия

Одним из важнейших параметров звезды является ее гравитационная энергия связи E_G . Для политроп значение E_G удастся найти в явном виде.

Будем исходить из представления гравитационной энергии звезды в виде (см. п. III.2.1)

$$E_G = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

Поскольку на поверхности звезды потенциал $\varphi = -GM/R$, а для использовавшегося в теории Эмдена (п. 1.2) потенциала Φ мы считали $\Phi = 0$ при $r = R$ и принимали, что $\Phi > 0$, то

$$\varphi = -\frac{GM}{R} - \Phi.$$

Вводя это φ в только что приведенное выражение для E_G и переходя в подынтегральном выражении от Φ сначала к ρ с помощью (1.9), а потом от ρ к $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$, получим

$$\rho \Phi = (n+1)P,$$

так что

$$E_G = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{n+1}{2} \int_V P dV.$$

С другой стороны, теорема вириала дает для E_G другое выражение через интеграл от давления по объему (см. п. III.2.2, формула (2.4))

$$E_G = -3 \int_V P dV,$$

что позволяет, исключив $\int_V P dV$ из предыдущего соотношения, получить (проверьте!)

$$E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.1)$$

Эта замечательная своей простотой формула — редкий, по существу единственный во всей теории политроп случай, когда выражение для

важной физической величины не содержит констант, находимых численно.

Формулу для гравитационной энергии политропы нужно помнить. Достаточно запомнить коэффициент $\omega = 3/(5 - n)$, множитель же GM^2/R „сам собой” конструируется из характерных параметров из соображений размерности: [энергия] = [сила] \times [расстояние] = $[GM^2/R^2] \times [R] = [GM^2/R]$. Напомним, что в п. III.2.1 мы уже пользовались только что найденным выражением для E_G , приняв его на веру. Не раз будет оно использовано и в дальнейшем.

Обсуждение. 1) $|E_G|$ есть энергия, выделяющаяся при сжатии массы M в политропный шар радиуса R . При фиксированных M и R эта энергия тем больше, чем больше индекс политропы n . Это значит, что степень концентрации материи к центру звезды с ростом n увеличивается. Что это должно быть так, можно было бы заключить, конечно, уже и прямо из основного политропного соотношения $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ (поймите, почему!). В этом смысле обсуждаемая формула интересна не качественно, а количественно: коэффициент $3/(5 - n)$ служит интегральной мерой степени концентрации материи к центру.

2) Из формулы для E_G ясно видна выделенность случая $n = 5$: если M и R фиксированы, а $n \rightarrow 5$, то гравитационная энергия стремится к бесконечности, т.е. степень концентрации вещества к центру при $n = 5$ бесконечно велика. Впрочем, этот результат правильнее интерпретировать иначе: если, зафиксировав массу и плотность в центре звезды, устремить n к 5, то радиус звезды должен стремиться к бесконечности. Именно эта интерпретация соответствует первоначальной постановке задачи, в которой считается, что ρ остается в центре звезды конечной. Итак, радиус звезды, построенной как политропа с $n = 5$, был бы бесконечен (при конечной массе, см. с. 134).

2.2. Радиус и масса политропы и связь между ними

Простые явные выражения можно найти для всех основных параметров политроп. Правда, в эти выражения входят некоторые зависящие от индекса политропы n числовые коэффициенты. Но если иметь

в виду лишь несколько наиболее важных, чаще всего используемых величин, то достаточно определить из уравнения Лейна – Эмдена всего два числа (значения которых, конечно, зависят от n). Они давным-давно вычислены (что потребовало решения уравнения Лейна – Эмдена). Мы будем считать эти числа известными. Это даст возможность рассмотреть общие закономерности строения политроп до изучения деталей их

структуры.

В эмденовском подходе удобно *сначала* принять за исходные характеристики модели центральную плотность ρ_c и политропный параметр K , а остальные величины выражать через них. Покажем, как это делается.

Радиус. Обозначим через ξ_1 значение эмденовской безразмерной пространственной переменной, при которой $r = R$:

$$R = \xi_1 r_1.$$

Поскольку $\theta(\xi)$ — потенциал, отсчитываемый от его значения на поверхности, то $\theta(\xi_1) = 0$, т.е. ξ_1 есть (первый) корень функции Эмдена. Можно сказать и иначе: так как $\rho = \rho_c \theta^n$ и на поверхности звезды плотность обращается в нуль, то $\theta(\xi_1) = 0$.

Величина ξ_1 — один из тех двух числовых параметров, о которых только что говорилось. Следует иметь в виду, что ξ_1 довольно быстро меняется с n и не при всех n есть число порядка единицы (см. Табл. V.2.1, стр. 132). Откладывая детальное обсуждение зависимости параметров политроп от n до более позднего места (разд. 6), укажем уже сейчас, что

$$(5 - n)\xi_1 \rightarrow \frac{32\sqrt{3}}{\pi}, \quad n \rightarrow 5.$$

В итоге оказывается, что произведение $(5 - n)\xi_1$ зависит от n слабо.

Можно высказать предположение, что ξ_1 в окрестности $n = 5$ разлагается в ряд по степеням $5 - n$:

$$\xi_1 = \frac{32\sqrt{3}}{\pi(5 - n)} \left(1 + a_1(5 - n) + a_2(5 - n)^2 + \dots \right).$$

Было бы интересно установить, так ли это, и — в случае положительного ответа — найти несколько первых коэффициентов a_i . Это дало бы способ получения ξ_1 без численного решения уравнения Лейна – Эмдена. Попробуйте заняться этой задачей. Единственное, что удалось сделать мне, — это получить a_1 , именно, $a_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{17}{12} + \ln 2 \right) = -0.3618$.

Вводя в формулу для радиуса $R = \xi_1 r_1$ выражение для величины r_1 , называемой иногда эмденовской единицей длины, через K и ρ_c (формула (1.11), стр. 125), окончательно находим

$$R = \xi_1 \left(\frac{n+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K}{G}} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}. \quad (2.2)$$

Таблица V.2.1:

Две важнейшие числовые константы, ξ_1 и μ_1 ,
связанные с функцией Эмдена

n	ξ_1	μ_1
0.0	2.4495	4.8990
0.1	2.5045	4.6159
0.25	2.5921	4.2579
0.5	2.7527	3.7887
1.0	3.1416	3.1416
1.5	3.6538	2.7141
2.0	4.3529	2.4110
2.5	5.3553	2.1872
3.0	6.8968	2.0182
3.5	9.5358	1.8906
4.0	14.9716	1.7972
4.5	31.836	1.7378
4.75	66.387	1.7243
4.9	171.43	1.7246
$\rightarrow 5$	$\sim \frac{32\sqrt{3}}{\pi(5-n)}$	$\rightarrow 1.7320$

Обсуждение. 1) Для получения *оценки* радиуса можно при любом n брать $\xi_1 \approx 13/(5-n)$. Коэффициент пропорциональности в этом выражении взят таким, чтобы достигалась по возможности хорошая аппроксимация для $1.5 \leq n \leq 3$ и чтобы в то же время он был легко запоминающимся (13 — чертова дюжина). О точности этой оценочной формулы можно судить по тому, что при $n = 3/2$ значение ξ_1 есть 3.65, приведенная же аппроксимация дает 3.71; при $n = 3$ имеем соответственно 6.90 (точное значение) и 6.50 (приближенное). Кроме того, это выражение правильно передает функциональную форму зависимости ξ_1 от n при $n \rightarrow 5$.

Радиус политропы с фиксированными K и ρ_c , согласно (2.2), неограниченно растет при $n \rightarrow 5$. Это качественное заключение уже было сделано раньше из других соображений (см. с. 130), однако теперь появилась и количественная оценка скорости расходимости. Впрочем, большого физического интереса этот результат не представляет, так как политропы с n , мало отличающимися от 5, далеки от реалистич-

ных моделей звезд.

2) Еще одно заключение из обсуждаемой формулы — выделенность политропы с $n = 1$. Для нее при заданном K радиус не зависит от центральной плотности. Он равен $(\pi K/2G)^{1/2}$. При $n < 1$ с увеличением ρ_c радиус растет, при $n > 1$ — убывает.

Масса. Ясно, что

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr.$$

Переходя здесь к переменным Эмдена θ и ξ , т.е. полагая $\rho = \rho_c \theta^n$, $r = \xi r_1$, будем иметь

$$M = \mu_1 4\pi r_1^3 \rho_c,$$

где

$$\mu_1 \equiv \int_0^{\xi_1} \theta^n(\xi) \xi^2 d\xi \quad (2.3)$$

есть вторая характерная числовая константа, связанная с функцией Эмдена. Ее значения также даны в Табл. V.2.1. Они монотонно убывают от $\mu_1 = 2\sqrt{6} = 4.899$ при $n = 0$ до $\mu_1 = 1.723$ при $n = 4.82$, после чего слегка возрастают и достигают $\mu_1 = \sqrt{3} = 1.732$ при $n = 5$.

В астрофизической литературе постоянно воспроизводятся значения ξ_1 и μ_1 из Табл. 4 книги С. Чандрасекара „Введение в учение о строении звезд”. Однако в этой таблице имеются неточности. Так, при $n = 4.9$ верные значения ξ_1 и μ_1 таковы: $\xi_1 = 171.43$, $\mu_1 = 1.7246$, тогда как Чандрасекар дает $\xi_1 = 169.47$, $\mu_1 = 1.7355$. В частной беседе Чандрасекар сообщил автору, что неточности в его таблице при $n = 4.9$ и $n = 0.5$ вызваны тем, что для этих значений индекса политропы он пользовался результатами численного решения уравнения Лейна – Эмдена, выполнявшегося еще самим Эмденом (!), тогда как для других n использовались более поздние — и соответственно более точные — численные решения.

Величину μ_1 можно записать и в другой форме, которая не требует вычисления интеграла:

$$\mu_1 = -\xi_1^2 \theta'(\xi_1). \quad (2.3')$$

Для этого нужно $\theta^n(\xi)$ в представлении μ_1 в виде интеграла заменить на левую часть уравнения Лейна – Эмдена (со знаком минус) и выполнить интегрирование. Между прочим, выражение μ_1 в форме (2.3') позволяет легко, едва ли не в уме, найти приведенные только что значения μ_1 для $n = 0$ и $n = 5$. Достаточно вспомнить соответствующие явные выражения для θ .

Физический смысл полученного для M выражения очевиден: масса политропы должна быть порядка произведения характерного объема $(4\pi/3)r_1^3$ на характерную плотность ρ_c . Поправочный коэффициент $3\mu_1$ превращает оценку в точное равенство. Если теперь в обсуждаемую формулу подставить явное представление для эмденовской единицы длины r_1 (формула (1.11)), получим такое окончательное выражение для массы через ρ_c и K (которые мы пока считаем за исходные характеристики модели):

$$M = \mu_1 \frac{(n+1)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{K}{G}\right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (2.4)$$

Обсуждение. 1) Случай $n = 5$ не является выделенным. Масса звезды, устроенной как политропа индекса 5 с заданной (конечной) центральной плотностью, была бы конечной. (Почему здесь употреблено сослагательное наклонение?)

2) Зафиксируем параметр K , а ρ_c и M будем считать переменными. При $n < 3$ показатель степени у ρ_c положителен. Поэтому здесь с ростом массы центральная плотность также растет. При $n > 3$ картина обратная: чем больше масса конфигурации, тем меньше ее центральная плотность, а потому, в силу политропного соотношения $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$, и давление в центре, что кажется физически противоестественным. Это странное поведение есть отражение неустойчивости таких политроп (подробнее см. п. 2.4).

3) *Политропа с $n = 3$ является выделенной: ее масса не зависит от центральной плотности и однозначно определяется значением K .* Позже мы узнаем, что это имеет важные астрофизические следствия.

Соотношение масса — радиус. Как уже говорилось выше (стр. 120), интегрирование уравнения гидростатического равновесия для политропы можно выполнять следующим образом: выбираем K и ρ_c и затем ведем интегрирование от центра наружу до тех пор, пока при каком-то r давление не обратится в нуль. Это r есть, очевидно, радиус звезды R , а соответствующее M_r — ее полная масса M . Поэтому можно было сразу же, не решая уравнения механического равновесия, утверждать, что должны существовать зависимости вида $R = R(K, \rho_c)$ и $M = M(K, \rho_c)$. Теперь эти зависимости найдены нами в явном виде. Они даются формулами (2.2) и (2.4).

Исключая из этих выражений для M и R центральную плотность ρ_c , приходим к соотношению масса — радиус для политроп

$$KG^{-1}M^{\frac{1-n}{n}}R^{\frac{n-3}{n}} = c, \quad (2.5)$$

в котором

$$c = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}}}{(n+1)} \mu_1^{\frac{1-n}{n}} \xi_1^{\frac{n-3}{n}}. \quad (2.6)$$

Оно уже было получено из соображений размерности еще в самом начале обсуждения свойств политроп (стр. 121). Однако найти таким путем c было нельзя, и тогда этот коэффициент остался неизвестным. Теперь мы восполнили этот пробел. Значения c в таблице на с. 121 (и в Табл. V.2.2, с. 136) вычислены по полученному только что явному выражению.

Вплоть до этого места исходными параметрами политропы считались значения K и ρ_c (а также, конечно, n). Через них можно выразить не только M и R , но и все остальные характеристики звезды. Однако обычно гораздо более естественно, строя модель звезды, задавать ее массу и радиус. Начиная с этого момента мы так и будем поступать.

Соотношение масса – радиус позволяет найти K по M и R :

$$K = c GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}. \quad (2.7)$$

2.3. Другие физические характеристики

Центральная плотность и степень концентрации материи к центру.

Как центральная плотность ρ_c , так и средняя $\bar{\rho}$ должны быть пропорциональны M/R^3 . Поэтому достаточно найти $\rho_c/\bar{\rho}$ в функции индекса политропы n . Очевидно, что $M = (4\pi/3)R^3 \bar{\rho}$. С другой стороны, как было показано в п. 2.2, $M = 3\mu_1 (4\pi/3)r_1^3 \rho_c$, где $r_1 = R/\xi_1$. Приравнявая эти два выражения для M , находим

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{\sigma_c}{3}, \quad (2.8)$$

где

$$\sigma_c = \frac{\xi_1^3}{\mu_1}. \quad (2.9)$$

Степень концентрации материи к центру, за меру которой удобно взять $\rho_c/\bar{\rho}$, быстро растет с n (Табл. V.2.2, стр. 136). Грубо говоря, этот рост происходит как $(5-n)^{-3}$. (Отметим без доказательства любопытное неравенство $\sigma_c \geq 375/(5-n)^3$). Значения $\rho_c/\bar{\rho}$ для $n = 1.5$ и $n = 3$, равные 6 и 54, полезно помнить.

Быстрый рост $\rho_c/\bar{\rho}$ с n качественно вполне понятен. Так как $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$, то при малых n показатель степени у ρ большой, так что даже небольшое увеличение плотности ведет к значительному росту давления. Поэтому при малых n для компенсации веса вышележащих слоев

Таблица V.2.2:
Безразмерные структурные параметры политроп

n	c	σ_c	p_c	ϕ_c	t_c	τ	i	\bar{g}
0.0	∞	3.000	1.500	0.5000	0.5000	2.500	0.4000	0.7500
0.1	$23.220 \cdot 10^4$	3.404	1.679	0.5426	0.4933	2.417	0.3843	0.7840
0.25	43.39	4.090	1.992	0.6088	0.4870	2.313	0.3616	0.8392
0.5	2.523	5.505	2.667	0.7266	0.4843	2.180	0.3259	0.9442
1.0	0.6366	9.870	4.935	1.0000	0.5000	2.000	0.2614	1.2188
1.5	0.4242	$1.797 \cdot 10^1$	9.678	1.346	0.5385	1.885	0.2046	1.625
2.0	0.3647	$3.421 \cdot 10^1$	$2.059 \cdot 10^1$	1.805	0.6018	1.805	0.1548	2.259
2.5	0.3515	$7.022 \cdot 10^1$	$4.912 \cdot 10^1$	2.448	0.6996	1.749	0.1118	3.330
3.0	0.3639	$1.625 \cdot 10^2$	$1.389 \cdot 10^2$	3.417	0.8543	1.709	$0.7536 \cdot 10^{-1}$	5.339
3.5	0.4010	$4.587 \cdot 10^2$	$5.141 \cdot 10^2$	5.044	1.1209	1.681	$0.4555 \cdot 10^{-1}$	9.999
4.0	0.4772	$1.867 \cdot 10^3$	$3.111 \cdot 10^3$	8.330	1.666	1.666	$0.2257 \cdot 10^{-1}$	$2.280 \cdot 10^1$
4.5	0.6580	$1.857 \cdot 10^4$	$6.185 \cdot 10^4$	$1.832 \cdot 10^1$	3.331	1.665	$0.6895 \cdot 10^{-1}$	$9.560 \cdot 10^1$
4.75	0.9042	$1.697 \cdot 10^5$	$1.136 \cdot 10^6$	$3.850 \cdot 10^1$	6.696	1.674	$0.2124 \cdot 10^{-2}$	$3.950 \cdot 10^2$
4.9	1.3532	$2.921 \cdot 10^6$	$4.922 \cdot 10^7$	$9.940 \cdot 10^1$	16.85	1.685	$0.4460 \cdot 10^{-3}$	$2.533 \cdot 10^3$
5.0	∞	∞	∞	∞	∞	1.698	0.0000	∞

за счет давления достаточно сравнительно небольшого увеличения ρ в центральных частях звезды, тогда как при больших n для достижения того же эффекта рост плотности к центру должен быть гораздо сильнее.

Когда обсуждалась зависимость E_G от n , вам предлагалось провести это нехитрое рассуждение самим. Теперь мы все же решили его воспроизвести.

Если $\rho_c/\bar{\rho}$ известно, центральная плотность находится тривиально:

$$\rho_c = \sigma_c \frac{M}{4\pi R^3}. \quad (2.10)$$

Заметим, что σ_c есть безразмерная плотность (переменная Шварцшильда, см. с. 122) в центре политропы.

Давление в центре звезды получается из политропного соотношения $P_c = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}$, если в него вместо K и ρ_c ввести их выражения через M и R . Результат таков:

$$P_c = p_c \frac{GM^2}{4\pi R^4}, \quad (2.11)$$

где p_c есть безразмерное давление в центре политропы:

$$p_c = \frac{\xi_1^4}{(n+1)\mu_1^2}. \quad (2.12)$$

Здесь уместно напомнить, что в п. IV.1.1 непосредственно из уравнения гидростатического равновесия, без его решения, при предположении, что плотность не возрастает наружу, была получена строгая оценка

$$P_c \geq \frac{3}{2} \frac{GM^2}{4\pi R^4},$$

т.е. было показано, что для любой находящейся в механическом равновесии конфигурации с $d\rho/dr \leq 0$, независимо от того, какова связь между давлением и плотностью, $p_c \geq 3/2$. Эта оценка отличается от значения p_c , даваемого политропной теорией для $n = 3$, грубо говоря, в 100 раз. Применение к политропам универсального неравенства $p_c \geq 8\omega^4$ из Упражнения ?? к гл. IV позволяет утверждать, что $p_c > 648/(5-n)^4$. Это неравенство обеспечивает гораздо лучшую оценку центрального давления. Неулучшаемая же оценка вида $p_c \geq a/(5-n)^4$ имеет $a = 1875/2$, причем равенство достигается при $n = 0$.

Значения p_c в функции n , найденные по (2.12), даны в Табл. V.2.2. При $n \in [1.5; 3]$ легко запоминающаяся приближенная формула

$$p_c \approx \frac{2000}{(5-n)^4}$$

обеспечивает неплохую точность. Погрешность составляет 10; 4; 20 и 38% соответственно при $n = 3.0$; 2.5; 2.0 и 1.5. Относительно более точной аппроксимации см. разд. V.6.

Гравитационный потенциал в центре. Потенциал, отсчитываемый от его значения на поверхности звезды (точнее, абсолютная величина потенциала), выражается через функцию Эмдена $\theta(\xi)$ следующим образом (см. с. 125):

$$\Phi(\xi) = \left((n+1)K\rho_c^{1/n} \right) \theta(\xi).$$

Подстановка вместо K и ρ_c их выражений через M и R преобразует это к виду

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{\xi_1}{\mu_1} \right) \frac{GM}{R} \theta(\xi),$$

так что

$$\Phi_c \equiv \Phi(0) = \phi_c \frac{GM}{R}, \quad (2.13)$$

где

$$\phi_c = \xi_1/\mu_1. \quad (2.14)$$

Потенциал на поверхности звезды, отсчитанный от его значения на бесконечности, равен $-GM/R$. Поэтому безразмерный множитель ϕ_c показывает, во сколько раз работа по перенесению частицы из центра политропы на ее поверхность больше, чем при удалении ее с поверхности звезды на бесконечность. В наиболее интересной для звездных моделей области значений индекса политропы $1.5 \leq n \leq 3.5$ эти величины оказываются одного порядка (см. Табл. V.2.2, с. 136).

Относительно расходимости ϕ_c при $n \rightarrow 5$ см. обсуждение формулы для E_G (с. 130).

Момент инерции. Рассматривая различные параметры политроп, мы всякий раз убеждались, что их удастся выразить всего через две числовые константы, ξ_1 и μ_1 , порождаемые функцией Эмдена индекса n (а также, конечно, через те или иные размерные множители). Возможно, подспудно у читателя стало складываться ощущение, что любую существенную характеристику политропы можно найти, зная лишь ξ_1 и μ_1 . Это, конечно, не так, и вычисление момента инерции служит тому примером.

Центральный момент инерции сферически-симметричной конфигурации есть, как известно,

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho r^4 dr.$$

Введением переменных Эмдена это выражение можно преобразовать к виду (проделайте это!)

$$I = i MR^2,$$

где

$$i = \frac{2\mu_2}{3\mu_1\xi_1^2}$$

и

$$\mu_k = \int_0^{\xi_1} \theta^n(\xi) \xi^{2k} d\xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Входящая сюда величина μ_2 не выражается через μ_1 и ξ_1 . Значения безразмерного момента инерции i приведены в Табл. V.2.2, с. 136. Они найдены численным интегрированием.

Для $n = 0$ и $n = 1$ легко получить точные значения i (равные $2/5$ и $(2/3)(1 - 6/\pi^2)$, соответственно). Можно также показать, что при $n \rightarrow 5$ значение i стремится к нулю пропорционально $(5 - n)^2 \ln(5 - n)^{-1}$.

**2.4. Полная энергия
и устойчивость
политроп**

Из размерности очевидно, что полная энергия звезды $E = -\varepsilon(GM^2/R)$, где ε — структурный множитель. Для политроп ε можно найти в явном виде. Вывод — образец элегантности.

Простейший анализ размерностей привел нас в п. 1.2 к соотношению масса – радиус (1.3). Из него следует, что $R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$ и, значит, $E \propto GM^2/R \propto M^{\frac{5-n}{3-n}}$. Поэтому энергии двух равновесных политроп одного и того же индекса n с массами M и $M + dM$ различаются (при фиксированном K) на

$$dE = \frac{5-n}{3-n} \frac{E}{M} dM.$$

Рассмотрим теперь наряду с политропой массы M неравновесную конфигурацию, получающуюся из этой политропы добавлением на ее поверхность массы dM . Пусть dE^* — разность полных энергий возникшей конфигурации и первоначальной политропы. Так как на поверхности $P = 0$, то внутренняя энергия добавляемого вещества равна нулю, и dE^* равна приращению гравитационной энергии, т.е. $dE^* = -(GM/R)dM$. Далее, известно, что равновесное распределение вещества выделено среди близких к нему: оно доставляет полной энергии конфигурации экстремальное значение (чтобы равновесие было устойчивым, этот экстремум должен быть минимумом). В силу этой экстремальности полной энергии ее изменение при добавлении массы dM с точностью до $(dM)^2$ должно быть безразлично к тому, как добавляемая масса распределена вдоль радиуса. Поэтому $dE = dE^*$, т.е. $\frac{5-n}{3-n}(E/M) = -GM/R$, откуда

$$E = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \quad (2.15)$$

так что $\varepsilon = (3-n)/(5-n)$.

Полная энергия есть сумма внутренней E_U и гравитационной E_G :

$$E = E_U + E_G.$$

Но для политропы (см. п. 2.1)

$$E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R},$$

и потому

$$E_U = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.16)$$

Для устойчивости конфигурации необходимо, чтобы ее полная энергия E была отрицательна. При $E = 0$ имеем безразличное равновесие,

$E > 0$ отвечают неустойчивые конфигурации. Согласно (2.15), политропы, построенные из вещества с уравнением состояния $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ (с фиксированным K) устойчивы лишь при $n < 3$. Неустойчивость при $n > 3$ вызывается тем, что при сжатии рост давления из-за увеличения плотности вещества не поспевает за ростом гравитационного давления, и малые радиальные возмущения должны нарастать. При $n = 3$ давление и гравитация всегда уравновешены — изменение силы тяжести из-за произвольного изменения радиуса оказывается в точности скомпенсированным изменением давления вследствие сжатия или расширения. Малые возмущения поэтому не возрастают, но и не подавляются, и мы имеем состояние безразличного равновесия. При $n < 3$ давление газа растет быстрее гравитационного давления. Любое малое возмущение порождает восстанавливающую силу, стремящуюся вернуть систему к первоначальному состоянию. Равновесие устойчиво.

Было бы, однако, ошибкой думать, что *любые* политропы с $n \geq 3$ неустойчивы. При выводе (2.15) предполагалось, что политропная константа K фиксирована (и при добавлении массы dM не изменяется). Если же это не так, устойчивыми могут оказаться и политропы с $n \geq 3$. Дело в том, что равновесное распределение вещества вдоль радиуса и устойчивость этого распределения определяются, вообще говоря, разными физическими параметрами: первое — показателем политропы, второе — показателем адиабаты. Показатель адиабаты определяется лишь локальными свойствами вещества, его способностью противостоять сжатию, на показателе же политропы сказывается и то, как упругость газа (из частиц и фотонов) изменяется от точки к точке. В следующем разделе мы вернемся к этому вопросу и дадим пример устойчивой политропы с $n = 3$ (см. п. 3.4).

Если не предполагать равенства показателей политропы и адиабаты, то (2.15) и (2.16) следует заменить более общими формулами

$$E = -\frac{3 - n'}{5 - n} \frac{GM^2}{R}, \quad (2.17)$$

$$E_U = \frac{n'}{5 - n} \frac{GM^2}{R}, \quad (2.18)$$

где $n' \equiv (\gamma - 1)^{-1}$, $n = (\gamma' - 1)^{-1}$, а γ и γ' — показатели адиабаты и политропы, соответственно (считается, что они постоянны по всей звезде).

Скомбинирав две последние формулы с выражением для гравитационной энергии политропы, получим представление E и E_U через E_G

и показатель адиабаты γ :

$$E_U = -\frac{1}{3(\gamma - 1)} E_G, \quad (2.19)$$

$$E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_G. \quad (2.20)$$

Формула (2.19) известна как формула Риттера. Из (2.20) видим, что знак E , а тем самым и устойчивость политропы, определяется на самом деле не индексом политропы, а показателем адиабаты составляющего ее газа.

3. ПОЛИТРОПЫ ИЗ НЕВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА

3.1. Нормальные политропы

В политропной модели расчет механического равновесия отделен от расчета тепловой структуры звезды. Если, однако, сделать дополнительное предположение, что вещество политропы подчиняется уравнению состояния $P = P(\rho, T)$, то по известным из расчета механического равновесия зависимостям $P(r)$ и $\rho(r)$ мы получаем возможность найти и распределение температуры $T(r)$ (если только уравнение состояния не является баротропным). Следует, впрочем, помнить, что, допустив наличие политропной связи $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ и одновременно приняв выполнимость некоторого конкретного уравнения состояния $P = P(\rho, T)$, мы фактически делаем весьма специальное предположение о зависимости процессов выделения и отвода тепла от температуры и плотности.

Имея в виду только что сказанное, предположим, что звезда состоит из идеального невырожденного газа с постоянным по глубине молекулярным весом μ , так что

$$P = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho T,$$

причем $\mu = \text{const}$. В звездах газ может быть вырожден, и даже очень сильно (примеры: белые карлики, ядра красных гигантов малой массы). Кроме того, если звезда успела сжечь значительную долю своего ядерного топлива и перемешивание вещества в ней несущественно, то ее химический состав, а вместе с ним и μ , заметно меняются с глубиной. Таким образом, приняв, что звезда состоит из невырожденного газа с $\mu = \text{const}$, мы действительно сделали существенное дополнительное предположение, заметно ограничивающее область применимости результатов. Фактически они будут прямо относиться только к звездам, находящимся на главной последовательности или еще не вступившим на нее. Для начала будем пренебрегать также вкладом светового давления, т.е. будем считать массу звезды не слишком большой. От этого последнего ограничения мы вскоре откажемся.

Политропу, для которой выполняется простейшее уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$ с $\mu = \text{const}$, будем называть *нормальной политропой* (прилагательное „нормальная” означает здесь — химически однородная, без вырождения и светового давления, как и в нашем термине „нормальная звезда”, см. п. ??). Можно ли выразить распределение температуры в нормальной политропе через функцию Эмдена? Да, и

очень просто. Как уже говорилось (с. 128), $\rho = \rho_c \theta^n$. Поскольку, далее, $P = K \rho^{1+\frac{1}{n}}$, то $P = P_c \theta^{n+1}$. Подставляя эти выражения для P и ρ через функцию Эмдена в уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$, обнаруживаем, что

$$T = T_c \theta, \quad (3.1)$$

причем

$$T_c = \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{P_c}{\rho_c}.$$

Таким образом, *функция Эмдена есть температура в нормальной политропе, выраженная в долях центральной*. Эта физическая интерпретация функции Эмдена $\theta(\xi)$ по области применимости уже данной ранее и утверждающей, что $\theta(\xi)$ есть по существу гравитационный потенциал в политропе.

Важный параметр политропы из невырожденного газа — ее центральная температура. Из соображений размерности легко убедиться (см. п. IV.2.2), что через основные характеристики звезды — массу, радиус и средний молекулярный вес — она должна выражаться так:

$$T_c = t_c \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}, \quad (3.2)$$

где t_c — безразмерный множитель (зависящий от n). Величина t_c представляет собой частное значение (для центра звезды) еще одной шварцшильдовой переменной (см. с. 122) — безразмерной температуры t , определяемой следующим образом:

$$T = t \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}. \quad (3.3)$$

Для нормальной политропы

$$t = t_c \theta.$$

Если строение политропы рассчитывается путем решения безразмерных уравнений (1.5), а не уравнения Эмдена (1.12), и известно, что политропа состоит из невырожденного газа с $\mu = \text{const}$, то эти уравнения надо дополнить соотношением

$$p = \sigma t,$$

представляющим собой уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$, записанное в безразмерных переменных.

Применяя последнюю формулу к центру звезды и пользуясь выражениями (2.12) и (2.8) для p_c и σ_c , находим, что для нормальной политропы

$$t_c = \frac{\xi_1}{(n+1)\mu_1}. \quad (3.4)$$

В „звездном” интервале изменения n , при $1.5 \leq n \leq 3.5$, зависимость t_c от n не очень сильная, так что центральные температуры нормальных звезд — в той мере, в какой их можно считать политропами, — сравнительно мало чувствительны к структуре звезды (Табл. V.2.2, с. 136). Для политропы с $n = 3$, $M = M_\odot$ и $R = R_\odot$ из (3.2) и (3.4) получаем $T_c = 19.6 \mu$ млн кельвинов. При $\mu = 0.60$, что соответствует химическому составу солнечной атмосферы ($X = 0.73$, $Y = 0.25$, $Z = 0.02$), центральная температура оказывается равной $T_c = 12 \cdot 10^6$ К.

Температурные условия в центре в общем не сильно отличаются от тех, в которых находится большая часть вещества нормальной политропы. В этом легко убедиться, если привлечь теорему вириала. Для звезды из невырожденного газа с $\mu = \text{const}$ вириальное выражение для средней температуры вещества звезды, как было найдено в п. IV.2.1, имеет вид

$$\bar{T} = \frac{\omega}{3} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}.$$

Для политропы $\omega = 3/(5-n)$, и поэтому

$$\bar{T} = \frac{1}{5-n} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}. \quad (3.5)$$

Здесь \bar{T} — средняя по массе температура:

$$\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^M T dM_r.$$

Обсудите физический смысл зависимости \bar{T} от n . Сравните это выражение с универсальной оценкой \bar{T} из п. IV.2.1.

Эта средняя температура связана с температурой в центре политропы соотношением, получающимся сопоставлением выражений для T_c и \bar{T} :

$$T_c = \frac{(5-n)\xi_1}{(n+1)\mu_1} \bar{T} \equiv \tau \bar{T}.$$

Оно показывает, что \bar{T} и T_c — величины одного порядка. В наиболее интересной области значений n центральная температура превосходит

среднюю не более чем вдвое (см. Табл. V.2.2, с. 136). Впрочем, следует иметь в виду, что мощность выделения энергии при термоядерных реакциях зависит от температуры очень сильно. Поэтому при обсуждении энергетики звезд даже сравнительно небольшие различия в температуре оказываются существенными.

3.2. Политропы со световым давлением

В звездах больших масс, как было показано в разд. 3 гл. IV, заметную роль должно играть давление излучения. Произведем его учет, предполагая по-прежнему, что распределение вещества и давления в звезде описывается политропой некоторого индекса n , а звезда состоит из невырожденного газа. Обозначим, как обычно, долю газового давления в полном давлении через β , так что $\beta P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$. Тогда доля давления излучения равна $1 - \beta$, и $(1 - \beta)P = a T^4/3$. Из этих выражений исключением T легко получить связь между P , ρ и β :

$$P = \left[\left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}, \quad (3.6)$$

из которой мы и исходили в п. IV.3.1 при выводе универсальной оценки вклада давления излучения в центре звезды $1 - \beta_c$. Для политроп это соотношение позволяет продвинуться дальше, давая возможность найти не только $1 - \beta_c$, но и ход $1 - \beta$ вдоль радиуса.

Действительно, если считать звезду химически однородной ($\mu = \text{const}$), то из последнего соотношения немедленно следует, что

$$\left(\frac{P}{P_c} \right)^3 = \frac{(1 - \beta)/\beta^4}{(1 - \beta_c)/\beta_c^4} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^4.$$

Но для политропы индекса n имеем $P = P_c \theta^{n+1}$, $\rho = \rho_c \theta^n$, и поэтому оказывается, что

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = \frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} \theta^{3-n}(\xi). \quad (3.7)$$

Распределение доли давления излучения вдоль радиуса фактически выражено тем самым через функцию Эмдена (с точностью до решения алгебраического уравнения четвертой степени). С помощью (IV.3.2) последнее соотношение можно переписать также в виде

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = b_c \frac{\pi}{18} \frac{a G^3}{\mathcal{R}^{*4}} (\mu^2 M)^2 \theta^{3-n}(\xi), \quad (3.8)$$

где b_c — зависящий от n структурный множитель, равный (проверьте!)

$$b_c = \frac{24}{(n+1)^3 \mu_1^2}.$$

Из (3.7) следует, что при $n < 3$ вклад давления излучения максимален в центре звезды, монотонно убывая наружу. Отсюда, между прочим, можно заключить, что у полностью конвективных звезд небольших масс, представляющих собой политропы индекса $n = 3/2$ (звезды ГП типа М и прародительницы звезд нижней части ГП, находящиеся на стадии гравитационного сжатия) давление излучения малó не только в центре — вывод, к которому мы пришли еще в разд. 3, — но и по всей звезде. Поэтому его можно не учитывать вовсе.

Любопытно, что на ранних этапах кельвиновского сжатия (в верхней части трека Хаяши, см. разд. ???) звезда умеренной массы может обладать довольно высокой светимостью, и тем не менее, как мы только что установили, давление излучения в ней должно быть несущественно. В звезде же ГП, обладающей той же светимостью (но большей массой) оно может уже играть заметную роль.

В политропах с $n > 3$, согласно (3.7), роль давления излучения с удалением от центра возрастает. Хотя звезд с распределением плотности, близким к тому, которое имеется в политропах с n , заметно большим 3, в природе, видимо, нет, вывод о росте вклада давления излучения наружу при $n > 3$ все же представляет интерес по следующей причине. С ростом индекса политропы концентрация материи к центру возрастает. Поэтому политропы с $n > 3$ должны обладать значительной концентрацией вещества к центру. Вывод о росте доли давления излучения при удалении от центра у звезд с таким характером распределения плотности не связан с конкретным его видом (политропа). Звезды же с сильной концентрацией материи к центру, хотя и мало похожие на политропы, весьма многочисленны. Таковы, в частности, красные гиганты. Можно думать — и детальные расчеты звездных моделей подтверждают это, — что у таких звезд роль давления излучения будет с приближением к поверхности возрастать.

Наконец, имеется исключительный случай $n = 3$, когда доля давления излучения на всех глубинах одна и та же. Это знаменитая в свое время эддингтоновская стандартная модель звезды (см. следующий пункт).

Задав значение индекса политропы, мы фактически фиксировали профили давления и плотности. Профиль же температуры при учете давления излучения, как легко убедиться, определяется уже не только значением n , но и массой конфигурации, точнее, значением $\mu^2 M$ (если $n \neq 3$). Иначе это можно сформулировать так: при учете давления

излучения политропы с $n \neq 3$ не являются полностью гомологичными (однако частичная гомологичность — по давлению и плотности — сохраняется). В самом деле, таким же путем, как при $\beta = 1$ ранее было найдено (3.1), из соотношения $\beta P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$ теперь получим

$$T = T_c \frac{\beta}{\beta_c} \theta.$$

Поскольку, однако, $\beta = \beta(\xi)$, где ξ — расстояние от центра в эмденовских единицах, и вид функции $\beta(\xi)$ при разных $\mu^2 M$ разный, что непосредственно следует из (3.8), ход температуры вдоль радиуса оказывается зависящим не только от n , но и от $\mu^2 M$. При $n < 3$ спад температуры наружу происходит более плавно, при $n > 3$ — круче, чем при $\beta = 1$, т.е. в предельном случае малых масс (подробнее см. п. 5.3).

Что касается центральной температуры, то учет давления излучения снижает ее по сравнению со случаем нормальной политропы той же массы и радиуса. Как легко видеть, в выражении для T_c появляется дополнительный множитель β_c , так что

$$T_c = \beta_c t_c \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{R}, \quad (3.9)$$

где t_c по-прежнему дается (3.4). Следует подчеркнуть, что значение β_c зависит от $\mu^2 M$. Поэтому пропорциональность между T_c и M , имеющая место для нормальных политроп, при учете давления излучения уступает место более сложной зависимости. Скорость роста T_c с M при больших M замедляется.

В предельном случае очень больших масс, когда давление излучения велико по сравнению с газовым, $P \sim P_r = (a/3)T^4$. Поэтому $(a/3)T_c^4 \sim p_c (GM^2/4\pi R^4)$, откуда (ср. с п. 3.4, стр. 110)

$$T_c \sim t_c^* \left(\frac{G}{a} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{M}}{R}, \quad (3.10)$$

где

$$t_c^* = \left(\frac{3}{4\pi (n+1)\mu_1^2} \right)^{1/4} \xi_1. \quad (3.11)$$

Здесь центральная температура не зависит от молекулярного веса, поскольку гравитации противостоит давление излучения, а не газа. Пока неясно, существуют ли в природе объекты, описываемые рассматриваемым предельным случаем.

Получите (3.10) также как предельный случай (3.9), соответствующий $\beta_c \ll 1$.

3.3. Стандартная модель Эддингтона

Так называется модель звезды из нерелятивистского идеального невырожденного газа с $\mu = \text{const}$, в которой давление излучения составляет постоянную по глубине долю полного давления. Согласно (3.6), в этом случае

$$P = K \rho^{4/3},$$

где K — постоянная, равная

$$K = \left[\frac{3}{a} \left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \right)^4 \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/3}. \quad (3.12)$$

Итак, стандартная модель — это политропа индекса $n = 3$. Полезно помнить, что для нее $T^3/\rho = \text{const}$ (почему?). Отсюда, между прочим, следует, что отношение числа фотонов в единице объема ($\propto T^3$) к концентрации частиц ($\propto \rho$) не меняется с глубиной.

На раннем этапе развития теории строения звезд эта модель сыграла значительную роль. Она была введена одним из основоположников теории строения звезд А. Эддингтоном около 1920 г.

Стандартной модель с $\beta = \text{const}$ назвал, вопреки часто встречающемуся в литературе утверждению, конечно, не сам Эддингтон — он был изысканно воспитанным человеком, — а его современник и соотечественник Э. Милн.

Первоначальное определение стандартной модели отличалось от нашего. Эддингтон постулировал существование некоторого соотношения между мощностью энерговыделения и эффективностью теплоотвода излучением, постоянство же β получалось как одно из следствий. Нам удобнее это свойство стандартной модели ($\beta = \text{const}$) принять за ее определение. Предположение же Эддингтона о соотношении между выделением и оттоком энергии мы получим позже в качестве свойства стандартной модели (см. разд. ???). Так поступить методически удобнее, так как это позволяет ввести стандартную модель в рассмотрение уже теперь, до обсуждения сравнительно сложных вопросов о выделении и переносе энергии в звездах.

Стандартная модель — разумное нулевое приближение при обсуждении строения химически однородных звезд, в которых главенствующую роль в переносе энергии в большей части звезды играет излучение, а не конвекция. Таковы все звезды главной последовательности, кроме самых поздних (типа М). Почему это так и насколько на самом деле эта модель хороша (или, если угодно, насколько она плоха), мы узнаем позже, а пока примем эти слова на веру.

Таблица V.3.1:

Доля давления излучения в полном давлении в звездах разных масс,
построенных по стандартной модели

$1 - \beta$	$\mu^2 \mathcal{M}$	$1 - \beta$	$\mu^2 \mathcal{M}$	$1 - \beta$	$\mu^2 \mathcal{M}$
0.90	1737	0.40	32.2	0.035	3.68
0.85	750	0.35	25.6	0.030	3.37
0.80	409	0.30	20.5	0.025	3.04
0.75	254	0.25	16.3	0.020	2.70
0.70	170	0.20	12.8	0.015	2.31
0.65	120	0.15	9.81	0.010	1.87
0.60	88.6	0.10	7.15	0.005	1.31
0.55	67.0	0.05	4.54	0.000	0.00
0.50	51.8	0.045	4.26		
0.45	40.6	0.040	3.97		

Итак, стандартная модель — это политропа индекса $n = 3$. Но политропа с $n = 3$, как уже указывалось (с. 134), является вырожденной: зависимость от радиуса в соотношении масса – радиус в этом случае выпадает, и между массой звезды M и политропным параметром K имеется однозначная связь вида

$$M = \frac{4\mu_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2}. \quad (3.13)$$

Проще всего она получается из (2.4), хотя следует, конечно, и из соотношения масса – радиус (2.5) – (2.6). С другой стороны, согласно (3.12) для стандартной модели K определяется значением β , что позволяет получить связь между M и β :

$$M = \frac{4\mu_1}{\sqrt{\pi}} G^{-3/2} \left[\frac{3}{a} \left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \right)^4 \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

или

$$\mu^2 \mathcal{M} = 18.0 \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\beta^2}, \quad (3.14')$$

или, наконец,

$$2.979 \cdot 10^{-3} \mu^4 \mathcal{M}^2 \beta^4 = 1 - \beta, \quad (3.14'')$$

Таблица V.3.2:
Поправочная функция $\varepsilon(A)$

A	$\varepsilon(A)$	A	$\varepsilon(A)$
0.00	1.0000	4	0.8878
0.01	0.9972	6	0.8881
0.05	0.9845	8	0.8896
0.1	0.9714	10	0.8913
0.2	0.9529	50	0.9131
0.3	0.9404	100	0.9242
0.4	0.9314	500	0.9472
0.5	0.9245	1000	0.9553
0.6	0.9191	5000	0.9700
0.8	0.9112	10^4	0.9747
1	0.9056	10^5	0.9859
2	0.8929	10^6	0.9921
		∞	1.0000

где \mathcal{M} — масса, выраженная в массах Солнца. Как видим, для стандартной модели с заданным химическим составом (точнее — с заданным μ) масса однозначно определяет значение β .

По существу соотношение (3.14) уже известно нам из разд. IV.3. Это есть не что иное, как формула (IV.3.2), в которой структурный параметр b_c взят соответствующим политропе с $n = 3$.

Вклад давления излучения в полное давление в звездах разных масс, построенных согласно стандартной модели, дается Табл. V.3.1 (см. также нижнюю кривую на рис. IV.3.1, с. 107).

Заметим, что в предельных случаях малых и больших A для корня уравнения четвертой степени

$$A\beta^4 = 1 - \beta,$$

неизменно появляющегося при расчетах вклада давления излучения, имеют место разложения (проверьте!)

$$\beta = 1 - A + 4A^2 - 22A^3 + \dots, \quad A \rightarrow 0,$$

$$\beta = \frac{1}{A^{1/4}} - \frac{1}{4A^{1/2}} - \frac{1}{8A^{3/4}} + \dots, \quad A \rightarrow \infty.$$

Полезно также представление β в форме

$$\beta = \frac{1 - A}{1 - A^{5/4}} \varepsilon(A),$$

где $\varepsilon(A)$ — удобная для интерполирования поправочная функция, при всех A мало отличающаяся от единицы (Табл. V.3.2).

Приведем для справок сводку основных параметров стандартной модели. Большинство из них следует из общих формул для политроп с $n = 3$. Газ считаем полностью ионизованным, так что показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Как всегда, \mathcal{M} и \mathcal{R} — масса и радиус в солнечных единицах.

$$E_G = -5.69 \cdot 10^{48} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}}; \quad (3.15)$$

$$E = -2.84 \cdot 10^{48} \beta \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}}; \quad (3.15B)$$

$$\Phi_c = 6.51 \cdot 10^{15} \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}}; \quad (3.15C)$$

$$\rho_c = 76.3 \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}^3}, \quad \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 54.18; \quad (3.15D)$$

$$P_c = 1.24 \cdot 10^{17} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{R}^4}; \quad (3.15E)$$

$$T_c = 1.96 \cdot 10^7 \mu \beta \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}}, \quad \bar{T} = 0.585 T_c; \quad (3.15F)$$

$$I = 7.26 \cdot 10^{53} \mathcal{M} \mathcal{R}^2; \quad (3.15G)$$

$$g_{\max} = 1.81 \cdot 10^5 \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{при} \quad r = 0.217 R. \quad (3.15H)$$

Подчеркнем, что значения множителей β в (3.15B) и (3.15F) зависят от $\mu^2 \mathcal{M}$ (см. Табл. V.3.1).

Так как стандартная модель — это политропа индекса $n = 3$, то ход основных физических переменных — плотности, давления и температуры — с удалением от центра дается обычными для политроп формулами

$$\rho(r) = \rho_c \theta^3(\xi), \quad P(r) = P_c \theta^4(\xi), \quad T(r) = T_c \theta(\xi),$$

где $\theta(\xi)$ — функция Эмдена индекса $n = 3$ и $\xi = \xi_1 r / R = 6.897 r / R$. Ввиду важной роли, которую функция Эмдена для $n = 3$ и связанные с нею величины играют в теории строения звезд (не только в стандартной

Таблица V.3.3:

Функция Эмдена индекса $n = 3$ и связанные с ней величины как функции доли радиуса $x \equiv r/R$

x	$\theta(x)$	$-\frac{\partial\theta}{\partial x}$	$\frac{\partial\theta}{\partial n}$
0.00	1.00000	0.00000	0.00000
0.05	0.98052	0.76544	0.00011
0.10	0.92598	1.38165	0.00161
0.15	0.84626	1.76657	0.00680
0.20	0.75319	1.92135	0.01702
0.25	0.65705	1.90052	0.03173
0.30	0.56492	1.77206	0.04915
0.35	0.48069	1.59257	0.06724
0.40	0.40588	1.39993	0.08441
0.45	0.34055	1.21557	0.09976
0.50	0.28401	1.04952	0.11289
0.55	0.23524	0.90506	0.12382
0.60	0.19315	0.78185	0.13276
0.65	0.15673	0.67792	0.14000
0.70	0.12508	0.59070	0.14586
0.75	0.09742	0.51763	0.15063
0.80	0.07312	0.45633	0.15457
0.85	0.05163	0.40478	0.15789
0.90	0.03251	0.36122	0.16073
0.95	0.01540	0.32423	0.16324
1.00	0.00000	0.29263	0.16548

модели!), приводим для справок таблицы ее значений, значений ее производной по пространственной переменной ξ и по индексу n в функции доли радиуса (Табл. V.3.3) и доли массы (Табл. V.3.4).

3.4. Обсуждение стандартной модели

Начнем с комментариев к сводке формул (3.15А) — (3.15Н), дающих глобальные параметры стандартной модели.

Прежде всего обратимся к выражению (3.15В) для полной энергии конфигурации, построенной из одноатомного газа согласно стандартной

Таблица V.3.4:

Функция Эмдена индекса $n = 3$ и связанные с ней величины как функции доли массы $q \equiv M_r/M$

q	ξ	$\theta(\xi)$	$\frac{\partial\theta}{\partial n}$	$-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}$
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.02	0.5063	0.9588	0.0005	0.1564
0.05	0.7039	0.9235	0.0017	0.2033
0.10	0.9146	0.8760	0.0045	0.2405
0.20	1.218	0.7976	0.0116	0.2717
0.30	1.471	0.7277	0.0206	0.2796
0.40	1.710	0.6628	0.0311	0.2760
0.50	1.954	0.5950	0.0432	0.2642
0.60	2.218	0.5276	0.0570	0.2462
0.70	2.522	0.4563	0.0727	0.2222
0.80	2.904	0.3773	0.0911	0.1915
0.90	3.475	0.2801	0.1138	0.1505
0.95	3.966	0.2135	0.1285	0.1220
0.98	4.515	0.1536	0.1406	0.0972
0.99	4.869	0.1216	0.1465	0.0843
1.00	6.897	0.0000	0.1655	0.0424

модели, которое можно записать в виде

$$E = \beta \frac{E_G}{2}.$$

Так как $E_G < 0$, то полная энергия конфигурации отрицательна. Стандартная модель — пример политропы индекса $n = 3$ с $E < 0$, устойчивой относительно радиальных колебаний. Согласно формуле (3.13), в данном случае политропный параметр K зависит от массы звезды и не является фиксированной постоянной, характеризующей конфигурации любой массы, построенные согласно стандартной модели.

Вывод приведенной только что формулы для полной энергии звезды $E = (\beta/2)E_G$ совсем прост. Пусть $e_{\text{кин}}$ и $e_{\text{изл}}$ — соответственно объемные плотности тепловой энергии газа и энергии излучения. Считая газ нерелятивистским, имеем $P_g = (2/3)e_{\text{кин}}$, поле же излучения — это ульт-

Рис. V.3.1:

Отношение температур в центре T_c/T_c^{Edd} (сплошная линия) и центральных плотностей ρ_c/ρ_c^{Edd} (пунктир) в химически однородных звездах ($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$) разных масс согласно данным детальных расчетов (T_c , ρ_c) и по модели Эддингтона (T_c^{Edd} , ρ_c^{Edd}).

релятивистский фотонный газ, и поэтому $P_r = (1/3)e_{изл}$. Итак,

$$\beta P = \frac{2}{3}e_{кин}, \quad (1 - \beta)P = \frac{1}{3}e_{изл}. \quad (3.16)$$

Пусть E_T и E_R — соответственно полная тепловая энергия вещества и энергия излучения, запасенные в звезде:

$$E_T = \int_V e_{кин} dV, \quad E_R = \int_V e_{изл} dV,$$

наконец, E — полная энергия звезды:

$$E = E_T + E_R + E_G.$$

Интегрируя равенства (3.16) по всей звезде и привлекая вириальное соотношение $3 \int_V P dV = -E_G$, после простейших алгебраических преобразований приходим к искомому результату $E = \beta E_G/2$.

Отказ от предположения о том, что газ одноатомный, разумеется, сказывается на величине коэффициента пропорциональности между E и βE_G . Найдём его. Примем, что показатель адиабаты вещества γ одинаков по всей звезде. Кроме случая $\gamma = 5/3$, на самом деле это едва ли когда-либо бывает так, так что сейчас мы скорее будем отдавать дань тем далеким временам, когда о звездах знали еще совсем мало, чем обсуждать реально важное обобщение.

В формуле Риттера (2.19), связывающей внутреннюю энергию газа звезды E_U с ее потенциальной гравитационной энергией E_G , учет давления излучения при сделанных предположениях ($\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$)

ведет к появлению в правой части дополнительного множителя β (проверьте!):

$$E_U = -\frac{\beta}{3(\gamma - 1)} E_G. \quad (3.17)$$

Связь же между запасенной в звезде энергией поля излучения E_R и ее гравитационной энергией

$$E_R = -(1 - \beta) E_G, \quad (3.18)$$

получающаяся интегрированием второго из равенств (3.16) с учетом теоремы вириала, от γ не зависит. Пользуясь последними двумя выражениями, для $E = E_U + E_R + E_G$ находим окончательно

$$E = \beta \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_G. \quad (3.19)$$

При $\gamma = 5/3$ получаем уже известный нам результат $E = \beta E_G/2$.

Заметим, далее, что $E_U = E_T = -\frac{\beta}{2} E_G$ при $\gamma = 5/3$, так что для стандартной модели $E_R/E_T = 2(1 - \beta)/\beta$. Для звезд не слишком больших масс $1 - \beta$ мал, и энергия, запасенная в звезде в форме излучения, оказывается много меньше тепловой энергии газа. Далее, поскольку при термодинамическом равновесии средняя энергия фотона порядка средней тепловой энергии частицы ($2.7 kT$ и $1.5 kT$, соответственно), то число фотонов в звездах не слишком больших масс гораздо меньше числа слагающих их частиц (для Солнца — примерно в $10^3 \div 10^4$ раз).

Обратим, далее, внимание на выражение (3.15H) для максимального ускорения силы тяжести в звезде g_{\max} . Оно достигается не на поверхности, а внутри звезды, причем сравнительно близко к центру (при $r = 0.217 R$). Понятно, что причиной этого служит сильная концентрация материи к центру в политропе с $n = 3$ (подробнее см. п. п. 6.3 и 5.4). С тем же связана и малость коэффициента при $\mathcal{M}\mathcal{R}^2$ в выражении (3.15G) для момента инерции I , который примерно в 5 раз меньше, чем для однородного шара с теми же \mathcal{M} и \mathcal{R} .

Что касается потенциала в центре Φ_c (формула (3.15C)), то напомним, что он отсчитывается от поверхности звезды. Далее, если Φ_c выражать не в системе СГС (т.е. в $\text{см}^2/\text{с}^2$), а в электрон-вольтах в расчете на атомную единицу массы, что иногда удобнее, то для политропы с $n = 3$ оказывается

$$\Phi_c = 6.75 \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}} \text{ кэВ/а.е.м.}$$

Давление, температуру и плотность в центре звезды, даваемые стандартной моделью Эддингтона, обсудим более подробно. Это позволит

Рис. V.3.2:

Отношение давлений в центре P_c/P_c^{Edd} в химически однородных звездах ($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$) разных масс согласно данным детальных расчетов (P_c) и по модели Эддингтона (P_c^{Edd}).

читателю составить правильное представление о том, чего можно ждать от стандартной модели, а чего — нет, т.е. о ее реальной точности. На рис. V.3.1 и V.3.2 мы приводим графики отношений значений T_c , ρ_c и P_c , полученных по детальным расчетам моделей химически однородных звезд ($X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$) и по стандартной модели (со значениями радиусов, даваемыми детальными расчетами). Центральные давления в химически однородных звездах с массами, близкими к массе Солнца, стандартная модель, как видим, дает со значительной ошибкой — на целый порядок. Ошибка в центральной плотности никогда не достигает множителя 2, а центральные температуры воспроизводятся с погрешностью не более 40% .

Объяснение того, почему при всей своей простоте стандартная модель Эддингтона все же оказывается в общем неплохим приближением, будет дано в разд. ???.??.

4. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ГАЗОВЫЕ ШАРЫ

4.1. Постановка задачи

Когда водород в центральных областях звезды исчерпался, целиком превратившись в гелий, выделение ядерной энергии здесь прекращается и переходит в слоевой источник, окружающий это выгоревшее ядро. В итоге в центре звезды появляется почти изотермический газовый шар, находящийся под давлением вышележащих неизотермических слоев. Таково строение красных гигантов. Состояние газа в их почти изотермических ядрах определяется массой той звезды ГП, из которой развился красный гигант. Звезды малых масс ($M \lesssim M_\odot$) эволюционируют в красные гиганты с вырожденными ядрами. Если же масса звезды достаточно велика ($M \gtrsim M_\odot$), электронный газ в выгоревшем ядре оказывается невырожденным. Так мы естественно приходим к задаче о расчете равновесия изотермического газового шара из невырожденного газа, находящегося под внешним давлением.

На самом деле эта задача была изучена гораздо раньше, чем стало ясно строение красных гигантов и даже раньше, чем люди вообще узнали, что среди звезд бывают гиганты и карлики. Более ста лет назад, в 1882 г., эту естественную в своей простоте задачу исследовал Риттер. Позже ею занимался Эмден.

Дело, очевидно, сводится к отысканию потенциала φ из уравнения Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$ при граничных условиях $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, первое из которых означает, что мы отсчитываем потенциал от его значения в центре конфигурации, а второе — равенство нулю силы тяжести в центре шара. В изотермическом газе плотность связана с потенциалом обычной формулой Больцмана

$$\rho = \rho_c \exp\left(-\frac{\mu m_0}{kT} \varphi\right),$$

так что уравнение Пуассона принимает в данном случае вид

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_c \exp\left(-\frac{\mu m_0}{kT} \varphi\right).$$

Здесь естественно перейти к безразмерным переменным. Прежде всего, вместо φ буквально „просится” новая переменная, стоящая в показателе экспоненты:

$$\psi \equiv \frac{\mu m_0}{kT} \varphi = \frac{\mu}{\mathcal{R}^* T} \varphi. \quad (4.1)$$

Физический смысл ψ таков. Это есть отсчитываемая от центра конфигурации гравитационная энергия связи в расчете на одну частицу, измеренная в единицах ее тепловой энергии kT . Далее, введем характерную длину r_1 и положим $r = r_1 \xi$. Выберем это r_1 из того условия, чтобы в уравнении Пуассона, записанном в безразмерных переменных ξ , ψ , сократились все числовые коэффициенты. Для этого нужно взять

$$r_1 = \left(\frac{kT}{\mu m_0 4\pi G \rho_c} \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

что с точностью до малосущественного множителя порядка единицы есть не что иное как *джинсовская длина* — фундаментальное понятие теории гравитационной неустойчивости (см. ??).??).

Перепишав (4.2) в форме

$$\frac{1}{3} kT = \mu m_0 \frac{GM_1}{r_1},$$

где M_1 — масса однородного шара плотности ρ_c и радиуса r_1 , поймите физический смысл r_1 .

Уравнение Пуассона и граничные условия к нему во введенных только что переменных записываются в следующей безразмерной форме (оператор Лапласа выпишем на этот раз в явном виде):

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi}; \quad (4.3)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0.$$

Функцию $\psi(\xi)$ будем называть *изотермической функцией Эмдена*. В изотермическом случае уравнение состояния $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$ можно переписать в форме $P = K \rho$, где $K = (\mathcal{R}^*/\mu) T = \text{const}$, так что мы имеем здесь дело с предельным случаем политропной связи $P = K \rho^{1+1/n}$, соответствующим $n = \infty$.

Стоит отметить, что функция Эмдена θ большого (но конечного) индекса n и изотермическая функция ψ (соответствующая $n = \infty$) связаны асимптотической зависимостью

$$\theta(\xi) \sim \exp \left(-\frac{1}{(n+1)} \psi(\sqrt{n+1} \xi) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Попробуйте вывести эту формулу. Исходите из выражения для профиля плотности как функции r через потенциал φ в политроне индекса n . Значения K и ρ_c считайте заданными.

**4.2. Изотермическая
функция Эмдена**

При малых ξ функцию $\psi(\xi)$ можно найти по ее разложению

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^2}{6} - \frac{\xi^4}{120} + \frac{\xi^6}{1890} + \dots,$$

справедливость которого устанавливается его подстановкой в (4.3). Соответствующее распределение плотности есть

$$\rho(\xi) = \rho_c \left(1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{45} + \dots \right).$$

Функция $\psi(\xi)$ монотонно возрастает при всех ξ , что следует, например, из ее физического смысла.

Это можно показать и формально. Так как $e^{-\psi} > 0$, то при $\xi > 0$ согласно (4.3) $\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) > 0$, и потому $(\xi^2 d\psi/d\xi)$ должно возрасти с ξ . Поскольку, далее, $(\xi^2 d\psi/d\xi)|_{\xi=0} = 0$, то заключаем, что $d\psi/d\xi > 0$ при $\xi > 0$, т.е. $\psi(\xi)$ действительно монотонно возрастает. Подобное же рассуждение в применении к политропам произвольного индекса n , описываемым (1.12) – (1.13), доказывающее, что функции Эмдена $\theta(\xi)$ монотонно убывают, на с. 127 мы предлагали читателю провести самостоятельно.

Скорость роста $\psi(\xi)$ убывает с ξ , и при больших ξ , как показал еще Эмден,

$$\psi(\xi) = \ln \frac{\xi^2}{2} - \frac{A}{\xi^{1/2}} \cos \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln \xi + \delta \right) + \dots,$$

где A и δ — некоторые постоянные. Поэтому

$$\rho = \rho_c \frac{2}{\xi^2} \left[1 + \frac{A}{\xi^{1/2}} \cos \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln \xi + \delta \right) + \dots \right], \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Впрочем, как вскоре станет ясно, эта область значений ξ для разбираемой задачи интереса не представляет.

Значения изотермической функции Эмдена, как и обычных функций Эмдена, находятся численным интегрированием (рис. V.4.1; таблица значений $\psi(\xi)$ и связанных с нею величин дается в Приложении ???).

Поскольку функция ψ конечна при всех ξ , а $\rho = \rho_c e^{-\psi}$, плотность в изотермическом шаре не может обратиться в нуль ни на каком конечном расстоянии от центра. Поэтому давление $P = K\rho$, где $K = (\mathcal{R}^*/\mu)T = \text{const}$, не будет обращаться в нуль на поверхности изотермического шара. А это значит, что такой шар может находиться в равновесии только в том случае, если он подвергается внешнему давлению. В звездах такое внешнее давление на их изотермические ядра

Рис. V.4.1:

Изотермическая функция Эмдена $\psi(\xi)$.

Функция $\psi(\xi)$ — это гравитационный потенциал на безразмерном расстоянии ξ от центра изотермического шара, отсчитанный от его значения в центре и измеренный в единицах характерной тепловой энергии единицы массы $kT/\mu m_0$. Изотермические шары безразмерного радиуса $\xi_1 \geq \xi_1^* = 6.45$ гравитационно неустойчивы.

обеспечивается весом вышележащих неизотермических слоев. Однако изотермический шар заданной массы, химического состава (μ) и температуры способен выдержать не любое внешнее давление, а лишь не превосходящее некоторого предельного, в противном случае механическое равновесие нарушается. Это важное для понимания хода эволюции звезд обстоятельство подробно обсуждается в двух следующих пунктах. Пока же найдем необходимые для дальнейшего выражения ряда физических характеристик изотермического шара через функцию Эмдена $\psi(\xi)$.

Массу M_r , заключенную в сфере радиуса r ,

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'$$

введением переменных Эмдена ξ , ψ можно представить в форме

$$M_r = 4\pi r_1^3 \rho_c \mu(\xi),$$

где $\xi = r/r_1$ и

$$\mu(\xi) = \int_0^\xi e^{-\psi(\xi')} \xi'^2 d\xi'.$$

С помощью (4.3) для $\mu(\xi)$ можно получить и другое представление (ср. со с. 167):

$$\mu(\xi) = \xi^2 \psi'(\xi).$$

Если M — полная масса изотермического шара и ξ_1 — его безразмерный радиус, то, очевидно,

$$M = 4\pi r_1^3 \rho_c \mu_1, \quad (4.4)$$

Таблица V.4.1:
Физические характеристики самогравитирующих
изотермических газовых шаров.

ξ_1	μ_1	ξ_1/μ_1	σ_c	p_1	ω_1
0.00	1.667	1.000	1.667	1.000	1.000
0.05	1.603	0.966	1.667	1.000	1.000
0.1	1.563	0.949	1.667	1.000	1.000
0.2	1.511	0.938	1.667	1.000	1.000
0.3	1.476	0.937	1.667	1.000	1.000
0.4	1.449	0.941	1.667	1.000	1.000
0.5	1.426	0.947	1.667	1.000	1.000
0.6	1.405	0.956	1.667	1.000	1.000
0.7	1.386	0.965	1.667	1.000	1.000
0.8	1.368	0.976	1.667	1.000	1.000
0.9	1.350	0.991	1.667	1.000	1.000
1.0	1.333	1.000	1.667	1.000	1.000
1.0	1.333	1.000	1.667	1.000	1.000
1.0	1.333	1.000	1.667	1.000	1.000

где $\mu_1 \equiv \mu(\xi_1)$. При учете (4.2) это можно переписать так:

$$M = \frac{\mu_1}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \left(\frac{\mathcal{R}^*T}{\mu G} \right)^{3/2}. \quad (4.5)$$

Степень концентрации материи к центру, мерой которой может служить безразмерный параметр $\sigma_c \equiv 3\rho_c/\bar{\rho}$, где $\bar{\rho} \equiv \bar{\rho}(\xi_1)$ — это средняя плотность шара, оказывается равной

$$\sigma_c = \frac{\xi_1^3}{\mu_1}.$$

Она монотонно возрастает с ξ_1 (см. Табл. V.4.1).

Что касается радиуса шара, то через его массу M и параметры газа T и μ он выражается так:

$$R = \left(\frac{\xi_1}{\mu_1} \right) \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{T}. \quad (4.6)$$

Для получения этого соотношения достаточно в (4.5) подставить $\rho_c = \sigma_c (M/4\pi R^3)$. Заметим, что по существу мы уже знаем (4.6) — это есть

не что иное, как соотношение (3.2), записанное в слегка измененной форме.

Значение ξ_1 определяется величиной внешнего давления. Действительно, строение изотермического шара фиксированной температуры T , массы M и химического состава (μ), в частности, степень концентрации материи в нем к центру может определяться единственным оставшимся в нашем распоряжении свободным параметром — внешним давлением. К обсуждению зависимости параметров шара от внешнего давления мы теперь и перейдем.

**4.3. Гравитационная
неустойчивость
изотермического
шара**

Газовое давление на поверхности изотермического шара P_s , которое должно уравниваться внешним давлением, равно, очевидно, $P_s = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho_s T$, где ρ_s — плотность на поверхности шара. Но $\rho_s = \rho_c e^{-\psi_1}$, где $\psi_1 \equiv \psi(\xi_1)$, так что

$$P_s = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho_c T e^{-\psi_1}.$$

Исключив отсюда ρ_c с помощью (4.5), получим

$$P_s = p_1 \left(\frac{\mathcal{R}^* T}{\mu} \right)^4 \frac{1}{G^3 M^2}, \quad (4.7)$$

где обозначено

$$p_1 = \frac{\mu_1^2}{4\pi} e^{-\psi_1}. \quad (4.8)$$

Соотношение (4.7) может рассматриваться как уравнение для определения структурного параметра p_1 . Затем по нему из (4.8) находится безразмерный радиус ξ_1 , который будет иметь изотермический шар с известными M , T и μ , находящийся под заданным внешним давлением P_s . Значения p_1 в функции ξ_1 даны в Табл. V.4.1, общий характер зависимости p_1 от ξ_1 иллюстрируется рис. V.4.2. Важной особенностью этой зависимости является ее немонотонный характер. Максимальное значение p_1 , равное $p_1^{\max} = 1.3977$, достигается при критическом значении $\xi_1 \equiv \xi_1^{\max} = 6.45075$.

Пользуясь (4.8), показать, что ξ_1^{\max} является корнем функции

$$F(\xi) = \sqrt{2} \exp \left(-\frac{\psi(\xi)}{2} \right) - \psi'(\xi).$$

Рис. V.4.2:

Зависимость радиуса ξ_1 изотермического шара

от внешнего давления p_1 .

Равновесные конфигурации описываются частью кривой, нанесенной сплошной линией. Пунктир — конфигурации, для которых механическое равновесие невозможно.

Согласно (4.7), ограниченность p_1 означает, что для шара с данными M , T и μ существует некоторое критическое внешнее давление P_s^{\max} — то, которому соответствует $p_1 = p_1^{\max}$. При $P_s \leq P_s^{\max}$ изотермический шар может находиться в механическом равновесии, если же $P_s > P_s^{\max}$, механическое равновесие невозможно. Упругость газа оказывается недостаточной, чтобы противостоять внешнему давлению, и должно наступать быстрое сжатие.

Пусть теперь изотермический шар находится под внешним давлением, меньшим критического. Тогда согласно рис. V.4.2 этому давлению (его можно характеризовать значением безразмерного параметра p_1) отвечают два возможных значения безразмерного радиуса шара — один, меньший критической величины $\xi_1^{\max} = 6.45$, другой — больший ее. Легко, однако, видеть, что второе значение не годится, так как соответствует неустойчивой конфигурации. Действительно, согласно (4.6) и данным Табл. V.4.1, сжатие шара всегда ведет к росту ξ_1 , давление же газа на поверхности шара при $\xi_1 > \xi_1^{\max}$ с ростом ξ_1 , т.е. при сжатии, уменьшается. Поэтому малейшее сжатие шара приведет в этом случае к тому, что внешнее давление окажется больше газового давления у поверхности шара. Ясно, что такое состояние равновесия неустойчиво и реализоваться не будет. Поэтому если внешнее давление не превышает

критического, оно однозначно определяет значение ξ_1 , а тем самым — и радиус шара R .

В действительности вопрос несколько тоньше. Зависимость $p_1(\xi_1)$ при $\xi_1 > \xi_1^{\max}$ не является монотонной. При больших ξ_1 на кривой $p_1 = p_1(\xi_1)$ имеются плавные волны небольшой амплитуды, убывающей от волны к волне. Слева от гребня каждой такой волны, т.е. там, где $p_1(\xi_1)$ возрастает с ξ_1 , на оси ξ_1 имеется „островок устойчивости”. Едва ли, однако, изотермический шар когда-либо реально попадает на эти „островки устойчивости”.

Исследовать ход кривой $p_1(\xi_1)$ при больших ξ_1 и убедиться в справедливости сказанного можно с помощью асимптотики $\psi(\xi)$ при больших ξ , приведенной в п. 4.2.

4.4. Обсуждение неустойчивости

Вывод о возможности гравитационной неустойчивости изотермического газового шара имеет большое значение для понимания путей эволюции звезд. Поэтому

следует ясно представлять себе физическую причину наступления этой неустойчивости.

Очевидно, что при медленном росте внешнего давления, происходящем без нарушения механического равновесия и без изменения температуры газа, шар будет сжиматься. Средняя плотность и плотность в центре шара будут расти. Одновременно будет происходить перераспределение вещества вдоль радиуса, и степень концентрации вещества к центру будет постепенно увеличиваться (рис. V.4.3). Это приводит к тому, что по мере роста внешнего давления и сжатия шара рост плотности, а вместе с ней и газового давления во внешних его частях будет происходить все медленнее. В конце концов непрерывно возрастающая при все увеличивающемся сжатии неоднородность распределения вещества берет во внешних частях шара верх над общим ростом плотности из-за сжатия. При дальнейшем сжатии шара газовое давление у его поверхности должно начать уменьшаться. Начиная с этого момента восстановить равенство между внешним давлением и газовым давлением на поверхности путем сжатия — этого единственного доступного газовому шару средства регулировки давления — становится уже невозможно. Механическое равновесие оказывается нарушенным, и должно наступить катастрофическое сжатие — коллапс.

Неизбежность нарушения механического равновесия при росте внешнего давления и сжатии шара можно понять и с помощью теоремы вириала. В рассматриваемом случае (статическая конфигурация, отличное от нуля внешнее давление $P_s \neq 0$, вклад в вириал — только

Рис. V.4.3:

Плотность в изотермическом шаре в долях максимально возможной плотности в центре ρ_c^{\max} , при которой наступает гравитационная неустойчивость.

Числа у кривых — значения безразмерного радиуса шара ξ_1 . Соответствующие значения внешнего давления в долях максимального внешнего давления P_s^{\max} (при котором нарушается равновесие), равны

$$\xi_1$$

$$P_s/P_s^{\max}$$

Обратите внимание на гораздо более быстрый рост плотности в центре шара, чем на его поверхности. Максимально возможная плотность (а вместе с ней и давление) на поверхности шара достигается при $\xi_1 = \xi_1^{\max} = 6.45$. При $\xi_1 > 6.45$ плотность и давление на поверхности шара при его дальнейшем сжатии падают (пунктирная кривая). Такие конфигурации неустойчивы.

от самогравитации) вириальное соотношение (III.2.14) принимает вид

$$E_G + 3 \int_V P dV - 4\pi R^3 P_s = 0.$$

Для изотермического шара это дает

$$3 \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T M - \omega_1 \frac{GM^2}{R} = 4\pi R^3 P_s,$$

где ω_1 — безразмерная гравитационная энергия шара (порядка единицы, см. Табл. V.4.1, стр. 161).

При малом внешнем давлении R велико, и гравитационная энергия шара ($\propto R^{-1}$) мала по сравнению с его тепловой энергией (не зависящей от R). Плотность в шаре при этом почти постоянна. В этом предельном случае $R \propto P_s^{-1/3}$. Из-за убывания R с ростом P_s гравитационная энергия в конце концов становится порядка тепловой. Это ведет к увеличению скорости убывания R с ростом P_s . Однако радиус не может стать меньше некоторого предельного, что видно хотя бы из того, что левая

часть в вириальном соотношении не может стать отрицательной. Это, как легко видеть, влечет неравенство

$$R > \frac{1}{5} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{T}.$$

Поэтому механическое равновесие будет возможно только при $R > R^{\min}$, где R^{\min} — предельный радиус. Этому предельному радиусу будет соответствовать некоторое определенное внешнее давление P_s^{\max} . При $P_s > P_s^{\max}$ вириальное соотношение не будет удовлетворяться ни при каком R , а следовательно, механическое равновесие невозможно. Мы пришли к уже известному нам результату. Хотя получить R^{\min} и P_s^{\max} по заданным M , T и μ теорема вириала и не позволяет, сам факт существования этих предельных значений устанавливается ею, как видим, весьма наглядно. Заметим, что согласно (4.6) радиус шара (с $\xi_1 = \xi_1^{\max} = 6.45$), находящегося под предельным давлением, т.е. на границе устойчивости, равен

$$R^{\min} = 0.411 \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{GM}{T}.$$

Описанная выше картина наступления гравитационной неустойчивости с ростом внешнего давления имеет непосредственное отношение к проблеме формирования звезд из межзвездного газа. Впрочем, эта проблема скорее относится к физике межзвездной среды, чем к физике звезд, и поэтому ее обсуждение не является для нас первоочередным делом. Однако гравитационная неустойчивость, о которой шла речь, играет важную роль и в эволюции уже сформировавшихся звезд. Фактически именно ею объясняется важный астрономический факт — наличие на диаграмме ГР пробела Герцшпрунга (см. разд. ???).

5. СТРУКТУРА ПОЛИТРОП

5.1. Распределение вещества и давления

Каково детальное строение политропных шаров, т.е. ход физических параметров в них вдоль радиуса? Обратимся к рисункам.

Плотность в долях центральной в функции расстояния от центра в долях радиуса $x \equiv r/R$ показана на рис. V.5.1А, в функции доли массы $q \equiv M_r/M$ — на рис. V.5.1Б. Кривые, соответствующие $n = 3/2$ и $n = 3$, на этих и последующих рисунках ограничивают наиболее для нас интересную область значений n . Рис. V.5.1А построен по таблицам функций Эмдена с учетом того, что $\rho = \rho_c \theta^n$ и $x = \xi/\xi_1$; о построении рис. V.5.1Б будет сказано немного позже.

Рис. V.5.1 наглядно показывает, как концентрация материи к центру растет с увеличением n . При $n = 1.5$ центральная плотность превосходит среднюю в шесть раз. Согласно рис. V.5.1А, в этом случае плотность убывает вдвое примерно при $r = R/2$ и в десять раз — при $r \approx (3/4)R$. Рис. V.5.1Б показывает, что около 90% массы политропы с $n = 3/2$ имеет плотность, которая отличается от центральной не более чем в десять раз.

Когда $n = 3$, концентрация материи к центру гораздо выше: $\rho_c/\bar{\rho} = 54$. Уже при $r = 0.35R$ плотность падает в десять раз, а плотность, более чем в 10 раз меньшую центральной, имеет около 30% всей массы конфигурации.

Распределение массы вдоль радиуса. Другой способ проиллюстрировать увеличение степени концентрации вещества к центру — рассмотреть зависимость $q = M_r/M$ от $x = r/R$ при разных n (рис. V.5.2). В шаре с $r = R/2$ при $n = 1.5$ содержится примерно половина, а при $n = 3$ — около 9/10 всей массы звезды.

Рис. V.5.2 построен с использованием таблиц производных функций Эмдена, так как

$$q \equiv M_r/M = -\xi^2 \theta'(\xi)/\mu_1.$$

Проверьте это, перейдя в интеграле $M_r = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'$ к переменным θ и ξ и преобразовав его затем с помощью уравнения Лейна – Эмдена.

Рис. V.5.1:

Профили плотности ρ/ρ_c в политропах с разными n в функции доли радиуса $x = r/R$ (А) и доли массы $q = M_r/M$ (Б).

Рис. V.5.2:

Доля полной массы политропы $q = M_r/M$, заключенная в сфере радиуса r , как функция доли радиуса звезды $x = r/R$.

Рис. V.5.2 позволяет рассматривать x как известную функцию q (при заданном n) и дает возможность получить зависимость любой физической переменной, найденной в функции x , также и в виде функции q . Например, графики рис. V.5.1А с помощью кривых рис. V.5.2 преобразуются в графики рис. V.5.1Б. Более строго это можно сформулировать так: соотношения $\rho/\rho_c = \theta^n(\xi)$ и $q = -\xi^2\theta'(\xi)/\mu_1$ представляют собой параметрические уравнения кривых, показанных на рис. V.5.2Б (параметр — ξ).

Давление выражается через функцию Эмдена так: $P = P_c \theta^{n+1}$. Поскольку θ — убывающая функция, давление падает с удалением от центра быстрее, чем плотность $\rho = \rho_c \theta^n$ (рис. V.5.3). Обратите внимание на то, что при $n \in [1.5; 3]$ распределение давления по массе зависит от n не сильно.

Рис. V.5.3:

Распределение давления вдоль радиуса (А) и по массе (Б) в политропах разных индексов n .

5.2. Переменные Милна U и V

Существует еще один способ описания распределения вещества и давления в звездах, который используется довольно широко. Этот способ имеет общий характер и применим для любых моделей звезд, а не только для политроп.

Рассмотрим некоторую функцию переменной r . Это может быть переменная масса M_r , давление P или какая-то другая величина. Аппроксимируем эту функцию наилучшим возможным образом в окрестности некоторого конкретного значения r степенной функцией. Показатель степени этой аппроксимации будет, вообще говоря, некоторой функцией r . Однако если исходная функция меняется в очень широких пределах и быстро — а это так обычно и бывает с такими величинами, как M_r , P и т.п., — то показатель такой степенной аппроксимации меняется гораздо медленнее и часто в значительно более узких пределах. В этом состоит одно из достоинств использования этого показателя степени для описания исходной функции.

Формализуем эту общую идею. Пусть $f(x)$ — произвольная неотрицательная дифференцируемая функция. Аппроксимируем ее в окрестности $x = x_0$ степенной функцией, т.е. представим в виде

$$f(x) = f(x_0) \left(\frac{x}{x_0} \right)^\alpha + \dots$$

Тогда

$$\ln f(x) = \ln f(x_0) + \alpha(\ln x - \ln x_0) + \dots,$$

и поэтому

$$\alpha = \left. \frac{d \ln f(x)}{d \ln x} \right|_{x=x_0}.$$

Показатель α характеризует скорость роста $f(x)$ при $x = x_0$. Фактически представление $f(x)$ в виде $f(x_0)(x/x_0)^\alpha$ с $\alpha = (d \ln f(x)/d \ln x)|_{x=x_0}$ есть линейная аппроксимация $\ln f(x)$ как функции $\ln x$ в окрестности $x = x_0$.

В соответствии с только что сказанным, распределение массы вдоль радиуса должно быть удобно описывать параметром

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r},$$

рассматриваемым как функция r . Аналогичным образом, распределение давления по звезде целесообразно описывать функцией

$$V = -\frac{d \ln P}{d \ln r},$$

причем знак „минус” добавлен справа для того, чтобы V было неотрицательным. Переменные U и V были введены в 1930 г. Э. Милном. В домашинную эпоху при численных расчетах звездных моделей ими пользовались очень широко. Встречаются они и в более современных публикациях.

С помощью уравнения гидростатического равновесия и уравнения сохранения массы легко показать, что (проверьте!)

$$U = \frac{4\pi r^3 \rho}{M_r}, \quad V = \frac{GM_r}{r} \frac{\rho}{P}.$$

Какой физический смысл можно приписать U и V , исходя из этих формул? Принять, что $P = (\mathcal{R}^*/\mu) \rho T$.

Укажем на одно важное обстоятельство. Из определений U и V как показателей степенных аппроксимаций M_r и P непосредственно следует, что значения этих параметров на заданном относительном расстоянии от центра (выраженном в долях радиуса) не зависят от единиц, в которых измеряется r . Поэтому для моделей с подобным (гомологичным) распределением плотности значения U и V в подобных точках (т.е. в точках с одним и тем же $x \equiv r/R$) не должны зависеть от масштабного множителя. Иначе говоря, U и V представляют собой *гомологические инварианты*.

Проверить это для V прямым расчетом, воспользовавшись тем, что для гомологичных моделей давление представимо в виде $P(r) = (GM^2/4\pi R^4) p(r/R)$.

Рис. V.5.4:

Параметры U и $v \equiv V/(n+1)$ в функции относительного расстояния $x = r/R$ от центра для политроп разных индексов n . Пунктир — функция $(1-x)^{-1}$ (см. Упражнение 7, с. 191).

Из сказанного следует, что для *политроп* в силу их гомологичности (см. с. 123) параметры U и V , рассматриваемые как функции безразмерного расстояния от центра $\xi = r/r_1$, где r_1 — эмденовская единица длины (1.11), должны зависеть лишь от индекса политропы n . Легко видеть, что (убедитесь в этом!)

$$U = -\xi\theta^n/\theta', \quad V = -(n+1)\xi\theta'/\theta.$$

На рис. V.5.4А и Б даны графики U и $v \equiv V/(n+1)$ в функции $x \equiv r/R = \xi/\xi_1$ при разных n .

Обдумайте общий вид кривых, приведенных на этих рисунках. Дайте физическую интерпретацию расходимости V при $x \rightarrow 1$ для нормальных политроп.

Приведенные только что выражения для U и V через функцию Эмдена и ее производную можно рассматривать как параметрические уравнения кривой на плоскости (U, V) , изображающей структуру политропы данного индекса n . Эти кривые для разных n даны на рис. V.5.5.

5.3. Распределение температуры

Как было показано в разд. 3, температура в нормальной политропе $T(r)$ выражается через функцию Эмдена следующим образом: $T(r) = T_c \theta(r_1 \xi/R)$.

Профили температуры при разных n в функции доли радиуса $x = r/R$ приведены на рис. V.5.6А. На рис. V.5.6Б даны распределения

Рис. V.5.5:

Кривые на плоскости (U, V) , изображающие структуру политроп разных индексов n .

температуры в политропах разных индексов в функции доли массы $q = M_r/M$. Обращаем внимание на *слабую зависимость* $T(q)$ от n . Кривые для $n = 3/2$ и $n = 3$ в масштабе рисунка едва ли были бы различимы. Отражением малой чувствительности вида функции $T(q)$ к изменению параметра n является установленная ранее (п. 3.1) слабая зависимость отношения \bar{T}/T_c от n .

При $n \neq 3$ учет давления излучения изменяет распределение температуры, так как $T/T_c = (\beta/\beta_c)\theta$ (см. с. 147), а значение β при $n \neq 3$ не постоянно по звезде. Оно определяется уравнением (3.9). Отличие T/T_c от хода температуры в предельном случае нормальной политропы растет с массой звезды M . Рис. V.5.7 иллюстрирует характер происходящих изменений. Под $(T/T_c)_0$ на рисунках понимаются профили температуры в нормальных политропах; формально они соответствуют $M \rightarrow 0$. Если $n < 3$, спад температуры наружу происходит медленнее, чем в нормальной политропе (рис. V.5.7А). При $r \rightarrow R$ давление излучения должно в конце концов становиться больше газового, причем толщина поверхностного слоя, где это имеет место, растет с M . Однако реально в звездах с таким положением едва ли приходится иметь дело, поскольку в самых поверхностных слоях звезды должно приниматься во внимание множество эффектов, не описываемых политропной моделью (и здесь обычно $n \geq 3$).

В виде упражнения, впрочем, поучительно изучить ход температуры близ поверхности в политропах с $n < 3$ и дать физическую интерпретацию результатов.

Когда $n > 3$, температура убывает наружу несколько медленнее, чем без учета давления излучения (рис. V.5.7Б). С ростом массы звезды

Рис. V.5.6:

Профили температуры в нормальных политропах в функции доли радиуса (А) и доли массы (Б).

Рис. V.5.7:

Отношение T/T_c в звездах с разными \mathcal{M} в долях T/T_c для нормальной политропы как функция расстояния от центра. При $n < 3$ учет давления излучения делает спад температуры более плавным (А), при $n > 3$ — более крутым (Б).

Рис. V.5.8:

Гравитационное поле политроп разных индексов n . Хотя с ростом n потенциальная яма становится глубже, при $n \leq 3$ потенциал в пределах всей звезды все еще имеет тот же порядок, что и на поверхности.

влияние давления излучения на распределение температуры увеличивается.

Политропы — слишком схематичные модели для изучения различных второстепенных эффектов, лишь одним из которых в звездах не слишком больших масс является давление излучения. Поэтому наше обсуждение скорее излишне подробно, чем недостаточно полно.

5.4. Гравитационное поле

Звезда создает гравитационную потенциальную яму. Глубина этой потенциальной ямы при заданных массе и радиусе звезды определяется распределением

вещества, т.е. в случае политропы — значением n . Внутри политропы, при $r < R$, потенциал φ , нормированный к нулю на бесконечности, выражается через функцию Эмдена θ так (см. разд. 2, с. 129 и 137):

$$\varphi(r) = - \left(1 + \frac{\xi_1}{\mu_1} \theta \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) \right) \frac{GM}{R};$$

при $r > R$ имеем обычный ньютоновский потенциал GM/r . С ростом n глубина потенциальной ямы растет (рис. V.5.8). Однако при $n \leq 3$ потенциал внутри звезды по порядку не отличается от его значения на поверхности. Отсюда, в частности, следует, что если эффекты ОТО малы близ поверхности, то они малы и по всей звезде.

Будет уместно также напомнить, что потенциал, отсчитанный от поверхности, в нормальной политропе пропорционален температуре, т.е.

Рис. V.5.9:

Параметр δ для политроп разных индексов.

$\Phi \propto T$. Поэтому профили температуры, показанные на рис. V.5.6, являются одновременно и профилями потенциала Φ/Φ_c . В частности, согласно рис. V.5.6Б, потенциал в долях центрального, рассматриваемый в функции доли массы $q = M_r/M$, сравнительно мало чувствителен к значению индекса политропы n .

Имеется еще одна возможность для описания гравитационного поля звезды. Представим потенциал φ в виде

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r^\delta},$$

где $\delta = \delta(r)$ — параметр, изменяющийся от $\delta = 0$ при $r = 0$ до $\delta = 1$ при $r = R$:

$$\delta = -\frac{d \ln |\varphi(r)|}{d \ln r}.$$

Нетрудно показать, что для политропы (проверьте!)

$$\delta = -\xi_1 \frac{\xi \theta'(\xi)}{\mu_1 + \xi_1 \theta(\xi)}.$$

Графики δ в функции доли радиуса $x = r/R$ приведены для политроп на рис. V.5.9.

Покажите, что крайние кривые на этом рисунке, соответствующие $n = 0$ и $n = 5$, имеют вид:

$$\delta = \frac{2x^2}{3 - x^2}, \quad n = 0;$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad n = 5.$$

Рис. V.5.10:

Ход ускорения силы тяжести g в политропах разных индексов n . С ростом n максимальное значение g (в единицах GM/R^2) растет примерно как $(5 - n)^2$, причем максимум постепенно перемещается к центру звезды.

Рис. V.5.11:

Ускорение силы тяжести, измеренное в единицах GM/\tilde{R}^2 , где $\tilde{R} \equiv (1 - \frac{n}{5})R$, как функция доли массы $q = M_r/M$.

Для абсолютной величины ускорения силы тяжести внутри политропы $g = d\varphi/dr$ из первой формулы настоящего пункта находим

$$g = \frac{\xi_1^2}{\mu_1} \theta' \left(\xi_1 \frac{r}{R} \right) \frac{GM}{R^2}.$$

Максимальное значение g довольно быстро растет с n . Максимальная сила тяжести достигается на тем меньших расстояниях от центра звезды (в долях радиуса), чем больше n (рис. V.5.10); см. также п. 6.3 (с. 185)

Поучительно рассмотреть ускорение силы тяжести и как функцию доли массы q . Если при этом измерять g в единицах GM/\tilde{R}^2 , где $\tilde{R} \equiv (1 - \frac{n}{5})R$, то получаются результаты, показанные на рис. V.5.11. Обратите внимание на предельную кривую, соответствующую $n \rightarrow 5$.

Получите ее параметрическое представление, воспользовавшись явным выражением для $\theta(\xi)$ при $n = 5$ и асимптотикой ξ_1 при $n \rightarrow 5$.

В предельном случае $(5 - n) \ll 1$ наибольшая сила тяжести достигается при q около 0.2. Она превосходит силу тяжести на поверхности конфигурации асимптотически ($n \rightarrow 5$) примерно в $40/(5 - n)^2$ раз.

6. ПОЛИТРОПА — ТЕСТ ГЛОБАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗВЕЗД

6.1. Мотивировка

Этот параграф можно целиком пропустить без ущерба для понимания всего дальнейшего.

В гл. III и IV кратко обсуждалась чувствительность ряда параметров звезды с заданными массой M и радиусом R (ее гравитационной энергии E_G , давления в центре P_c , средней температуры газа \bar{T}) к ее внутренней структуре. Фактически все выводы строились на очень бедном материале. Сопоставлялись две простейшие модели — пустотелый „мячик” с тяжелыми стенками и однородная сфера. Иногда, кроме того, привлекались также конфигурации с различными степенными распределениями плотности вдоль радиуса. Теперь мы располагаем гораздо более обширным набором моделей, к тому же значительно лучших, — политропами. Это позволяет существенно продвинуться в изучении структурной чувствительности ряда важнейших параметров звезд. Таков один из очень полезных, но почему-то редко отмечаемых побочных продуктов исследования политроп.

Политропы позволяют составить правильное представление о степени *относительной чувствительности* каких-нибудь двух параметров звезды с заданными M и R — скажем, давления и температуры в центре — *к распределению вещества в ее недрах*. Вырабатывающееся на политропах чутье оказывается чрезвычайно полезным при рассмотрении более реалистичных моделей звезд. Имея в виду эту общую перспективу, приступим к формальному исследованию.

6.2. Простейшее правило

Характерные комбинации определяющих параметров G , M , R и \mathcal{R}^*/μ , имеющие те же размерности, что и та или иная из рассматривавшихся выше важ-

нейших физических характеристик звезды (P_c , ρ_c , φ_c , T_c и т.д.), легко конструируются из соображений размерности. Как, однако, найти те безразмерные коэффициенты, на которые эти комбинации надо умножить, чтобы получить значения самих величин? Эти коэффициенты не являются, вообще говоря, числами порядка единицы, они сильно и по-разному в разных случаях зависят от n , как в этом убеждает даже беглый взгляд на Табл. V.2.2 (с. 136). Поэтому может показаться,

что единственная возможность здесь — это численное решение задачи. Такова и была наша позиция до сих пор. Однако, как оказывается, с точностью до множителей порядка единицы значения безразмерных коэффициентов все же можно получить по простому единому рецепту. Это существенно, так как зависимость от n безразмерного коэффициента в выражении того или иного физического параметра звезды через G , M , R и \mathcal{R}^*/μ характеризует структурную чувствительность этого параметра.

Обратимся к Табл. V.6.1 (с. 180). В первом ее столбце перечислены характеристики политроп, рассматривавшиеся в разд. V.2 и V.3. Во втором столбце приведены комбинации определяющих параметров G , M , R и \mathcal{R}^*/μ , имеющие те же размерности, что и соответствующие величины первого столбца. Третий столбец дает безразмерные коэффициенты, на которые, как было выше установлено, надо умножить выражения из второго столбца, чтобы получить численные значения величин первого столбца. Нас интересует характер зависимости этих коэффициентов от индекса политропы n . О двух последних столбцах будет сказано позже.

Если пока не обращать внимания на первую и две последние строки таблицы, то в остальных случаях множителю $M^\alpha R^\beta$ в характерной размерной комбинации соответствует множитель $\mu_1^{-\alpha} \xi_1^{-\beta}$ в безразмерном коэффициенте. Значение μ_1 меняется с n сравнительно слабо, а ξ_1 , как уже было рассмотрено более подробно, можно считать, грубо говоря, пропорциональным $(5-n)^{-1}$ (см. п. 2.2). Далее, поскольку безразмерный коэффициент в выражении для E_G строго пропорционален $(5-n)^{-1}$, правило соотношения $M^\alpha R^\beta \Longleftrightarrow \mu_1^{-\alpha} \xi_1^{-\beta}$ без большой погрешности можно распространить и на эту величину. Оказывается, что для \bar{g} оно также работает (см. с. 186). При n , не слишком близких к 5, им можно пользоваться и для оценки зависимости от n коэффициента при MR^2 в выражении для момента инерции I (см. ниже, с. 181).

Итак, поскольку μ_1 меняется с n слабо, изучение зависимости безразмерных коэффициентов от n сводится по существу к исследованию ξ_1 как функции n . Данные Табл. V.2.1 (с. 132) показывают, что произведение $(5-n)\xi_1$ изменяется при $n \in [0; 5]$ в узких пределах, монотонно возрастая от 12.2 при $n = 0$ до 17.6 при $n = 5$. В уже упоминавшемся в п. 2.2 простейшем (довольно грубом) приближении можно принять, что

$$\xi_1 \approx \frac{13}{5-n}.$$

Как уже говорилось, коэффициент пропорциональности выбран здесь таким образом, чтобы он был легко запоминающимся (13 — чертова дюжина) и в то же время давал по возможности хорошую аппроксимацию для $n \in [3/2; 3]$. О точности этой оценочной формулы можно судить по

Таблица V.6.1:
Основные физические характеристики политроп

Величина	Характерная комбинация	Безразмерный коэффициент	Диапазон	изменения \tilde{c}
			$n \in [1.5; 3]$	$n \in [0; 5]$
$-E_G$	$\frac{GM^2}{R}$	$\frac{3}{5-n}$	$1.66 \div 1.66$	$1.66 \div 1.66$
K	$GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}$	$\frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} \mu_1^{\frac{1-n}{n}} \xi_1^{\frac{n-3}{n}}$	$0.57 \div 0.80$	$0.44 \div 1.76$
ρ_c	M/R^3	$\xi_1^3/[4\pi\mu_1]$	$0.61 \div 0.65$	$0.61 \div 1.00$
P_c	$\frac{GM^2}{R^4}$	$\xi_1^4/[4\pi(n+1)\mu_1^2]$	$0.30 \div 0.39$	$0.29 \div 1.00$
Φ_c	$\frac{GM}{R}$	ξ_1/μ_1	$1.50 \div 1.93$	$1.00 \div 2.60$
T_c	$\frac{\mu}{R^*} \frac{GM}{R}$	$\xi_1/[(n+1)\mu_1]$	$0.48 \div 0.60$	$0.43 \div 1.00$
I	MR^2	$2\mu_2/[3\mu_1\xi_1^2]$	$0.87 \div 1.76$	$0.26 \div \infty$
\bar{g}	$\frac{GM}{R^2}$	$2\xi_1^2\eta/[(n+1)\mu_1^2]$	$0.87 \div 1.16$	$0.77 \div 2.17$

Обозначения:

$$\mu_k = \int_0^{\xi_1} \theta^n(\xi) \xi^{2k} d\xi, \quad k = 1, 2; \quad \eta = \int_0^{\xi_1} \theta^{n+1}(\xi) \xi d\xi.$$

тому, что при $n = 3/2$ значение ξ_1 есть 3.65, приведенная же аппроксимация дает 3.71. При $n = 3$ имеем соответственно 6.90 (точное значение) и 6.50 (приближенное). Кроме того, это выражение правильно передает функциональную форму асимптотической зависимости ξ_1 от n при $n \rightarrow 5$, имеющей вид

$$\xi_1 \sim \frac{32\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{5-n}, \quad n \rightarrow 5.$$

Эту асимптотику проще всего, по-видимому, получить так. Для политропы $E_G = -(3/(5-n))GM^2/R$, и поэтому вириальное соотношение (III.2.4) записывается в виде

$$4\pi \int_0^R P r^2 dr = \frac{1}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

Переходя в интеграле от r и P к переменным Эмдена ξ и θ , получаем

$$\int_0^{\xi_1} \theta^{n+1}(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{(n+1)\mu_1^2}{(5-n)\xi_1}.$$

Осталось устремить здесь n к 5 и воспользоваться тем, что при этом $\theta(\xi) \rightarrow (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$ и $\mu_1 \rightarrow \sqrt{3}$. Интеграл вычисляется, и мы приходим к приведенной асимптотике.

Если использовать разложение $\theta(\xi)$ при $(5 - n) \ll 1$ из Упражнения 7° (с. 189), то из полученного только что соотношения можно таким же путем найти и более точный результат, упоминавшийся на с. 131, именно,

$$\xi_1 = \frac{32\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{5-n} + a_1 + \alpha_n \right),$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{17}{12} + \ln 2 \right) = -0.3618$$

и $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 5$.

Таким образом, в первом приближении можно считать, что ξ_1 изменяется с n как $(5 - n)^{-1}$, а μ_1 от n не зависит. Этому соответствует следующее простейшее правило: *множитель R^β в характерной размерной комбинации порождает множитель $(5 - n)^\beta$ в численном коэффициенте при ней*. Поэтому, например, давление в центре, пропорциональное GM^2/R^4 , должно зависеть от n сильно — примерно как $(5 - n)^{-4}$, а гравитационная энергия политропы — слабее, именно, как $(5 - n)^{-1}$, поскольку $E_G \propto R^{-1}$.

Простое правило соотнесения любой степени R в самой размерной величине такой же степени $5 - n$ в соответствующем безразмерном коэффициенте, пожалуй, больше, чем что-либо другое позволяет научиться "чувствовать" структуру политроп. Как уже говорилось выше, очень существенно также, что по тому, насколько быстро та или иная характеристика *политропы* изменяется с n , можно составить в общем правильное представление и о том, насколько вообще эта характеристика *звезды* (не обязательно политропы) чувствительна к ее внутренней структуре.

Впрочем, пользоваться сформулированным правилом нужно с осторожностью, так как оно не имеет универсального характера. Например, в случае момента инерции — величины, которая пропорциональна MR^2 , — безразмерный коэффициент при $n \rightarrow 5$ ведет себя как $(5 - n)^2 \ln(5 - n)$, тогда как наше правило дает зависимость вида $(5 - n)^2$. Правда, в наиболее интересной области значений индекса политропы $n \in [3/2; 3]$ простая аппроксимация

$$i \approx \frac{1}{60} (5 - n)^2$$

обеспечивает вполне приличную точность. Погрешность при этих n не превышает 12%.

Покажите, что сформулированным рецептом можно пользоваться, если рассматриваемая величина выражается через интегралы вида

$$\int_0^R \rho^a r^b dr,$$

где a и b — такие постоянные, что $5a > 1 + b$. Если же $1 + b \geq 5a$, то рецепт не работает.

Итак, если нас интересует какая-либо глобальная физическая характеристика звезды, то следует построить из основных определяющих параметров комплекс соответствующей размерности. По тому, с каким показателем степени в него входит радиус звезды, обычно можно сразу же сделать заключение о степени структурной чувствительности безразмерного коэффициента при этой характерной размерной комбинации.

6.3. Уточненное правило

Можно указать и более рафинированное правило получения оценок глобальных физических характеристик *политропы* по ее индексу n .

Прежде всего, безразмерные радиус и массу политропы ξ_1 и μ_1 оказывается полезным представить в виде

$$\xi_1 = \frac{32}{\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} \frac{(n+1)^{1/4}}{5-n} \zeta_1,$$

$$\mu_1 = \frac{3\sqrt{2}}{(n+1)^{1/2}} \nu_1.$$

Вводимые этими выражениями величины ζ_1 и ν_1 изменяются с n очень мало и близки к единице при всех $n \in [0; 5]$ (Табл. V.6.2). Их можно рассматривать как удобные для интерполирования поправочные множители. Полагая $\zeta_1 = \nu_1 = 1$, получаем приближенные выражения для ξ_1 и μ_1 , погрешность которых при любом $n \in [0; 5]$ не превышает $\sim 15\%$.

Указанные только что аппроксимации ζ_1 и μ_1 позволяют сформулировать улучшенное правило оценки важнейших физических характеристик политропы по ее индексу n . Пусть рассматривается некоторая характеризующая политропу величина Q , для которой из соображений размерности можно получить представление вида

$$Q = \eta G^a \left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu}\right)^b R^\alpha M^\beta,$$

Таблица V.6.2:

Поправочные множители ζ_1 и ν_1 как функции индекса политропы n

n	ζ_1	ν_1	n	ζ_1	ν_1
0.0	1.0864	1.1547	3.0	0.8653	0.9514
0.1	1.0630	1.1411	3.5	0.8712	0.9453
0.25	1.0330	1.1220	4.0	0.8882	0.9472
0.5	0.9930	1.0932	4.5	0.9221	0.9606
1.0	0.9374	1.0472	4.75	0.9508	0.9745
1.5	0.9022	1.0115	4.9	0.9758	0.9874
2.0	0.8802	0.9843	5.0	1.0000	1.0000
2.5	0.8683	0.9645			

где η — безразмерный коэффициент. Тогда если этот коэффициент представить в форме

$$\eta = \eta^* 2^{-\beta} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (n+1)^{-\frac{2\alpha+\beta}{4}} \left(\frac{5-n}{5} \right)^{\alpha},$$

то во всем промежутке изменения $n \in [0; 5]$ множитель η^* окажется порядка единицы. Пределы, в которых изменяются коэффициенты η^* при $n \in [1.5; 3]$ и $n \in [0; 5]$, указаны в двух последних столбцах Табл. V.6.1. Сами же значения η^* для различных физических величин (указанных в заголовках столбцов) приведены в функции n в Табл. V.6.3. В отличие от коэффициентов η , множители η^* меняются с n медленно и к тому же близки к единице. Если требуется лишь порядковая оценка, можно полагать $\eta^* = 1$.

О том, как это правило получено, подробно говорить не будем, ограничившись следующим замечанием. Коэффициент c в соотношении масса – радиус (п. 2.2)

$$K = c GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}}$$

расходится как при $n \rightarrow 5$, так и при $n \rightarrow 0$. Связь между η и η^* сконструирована таким образом, чтобы для коэффициента η^* , фигурирующего в соотношении масса – радиус, обеспечивалась близость его к единице во всей области изменения n от 0 до 5.

Таблица V.6.3:
Поправочные множители η^* в функции n

n	K	ρ_c	P_c	Φ_c	T_c	E_G	I	\bar{g}
0.0	1.7676	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.6584	0.2639	2.1708
0.1	1.6124	0.9479	0.8948	1.0384	0.9440	1.6584	0.2974	2.0290
0.25	1.4303	0.8844	0.7740	1.0939	0.8751	1.6584	0.3494	1.8544
0.5	1.2123	0.8063	0.6355	1.1823	0.7882	1.6584	0.4408	1.6332
1.0	0.9499	0.7082	0.4764	1.3454	0.6727	1.6584	0.6410	1.3425
1.5	0.7960	0.6536	0.3919	1.4989	0.5995	1.6584	0.8662	1.1590
2.0	0.6947	0.6238	0.3423	1.6462	0.5487	1.6584	1.1206	1.0328
2.5	0.6228	0.6112	0.3126	1.7901	0.5115	1.6584	1.4127	0.9416
3.0	0.5689	0.6130	0.2962	1.9331	0.4833	1.6584	1.758	0.8741
3.5	0.5270	0.6298	0.2908	2.0779	0.4617	1.6584	2.189	0.8243
4.0	0.4933	0.6660	0.2968	2.2283	0.4457	1.6584	2.784	0.7894
4.5	0.4658	0.7349	0.3197	2.3926	0.4350	1.6584	3.832	0.7704
4.75	0.4539	0.7941	0.3434	2.4864	0.4324	1.6584	4.991	0.7698
4.9	0.4473	0.8473	0.3664	2.5513	0.4324	1.6584	6.765	0.7748
5.0	0.4431	0.9003	0.3906	2.6033	0.4339	1.6584	∞	0.7833

Нахождение значения η^* при $n = 0$ в соотношении масса – радиус, равного $4 \exp(-49/60) = 1.768$, требует аккуратного выполнения предельного перехода $n \rightarrow 0$. При этом следует учесть, что при малых n , как можно показать (каким образом?), $\xi_1^3/3\mu = 1 + \left(\frac{8}{3} - 2 \ln 2\right)n + \dots$. Попробуйте воспроизвести соответствующую выкладку. Это может позволить понять, из каких соображений был подобран численный коэффициент $2^{-\beta}(2\pi/3)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ в соотношении, связывающем η и η^* .

Упомянем также о том, что, как показывает предпоследний столбец Табл. V.6.3, при n , не слишком близких к 5, правило применимо и в „особом” случае момента инерции I .

В качестве иллюстрации использования сформулированного правила получим оценку среднего по массе значения ускорения силы тяжести

$$\bar{g} = \frac{1}{M} \int_0^M g dM_r = \frac{1}{M} \int_0^M \frac{GM_r}{r^2} dM_r.$$

Из размерности $\bar{g} = \eta (GM/R^2)$, где η — безразмерный коэффициент,

Таблица V.6.4:
Местоположение и величина максимального
ускорения силы тяжести в политропах

n	ξ_{\max}	x_{\max}	g_{\max}/\bar{g}
0.0	2.4495	1.000	1.3333
0.5	2.3468	0.853	1.1549
1.0	2.0816	0.663	1.1243
1.5	1.8775	0.514	1.1332
2.0	1.7209	0.395	1.1584
2.5	1.5969	0.298	1.1932
3.0	1.4960	0.217	1.2357
3.5	1.4119	0.148	1.2574
4.0	1.3404	0.0895	1.3464
4.5	1.2787	0.0402	1.4230
4.75	1.2508	0.0188	1.4723
4.9	1.2349	0.0072	1.5088
5.0	1.2247	0.0000	1.5396

так что $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Поэтому, положив

$$\eta = \eta^* \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} (n+1)^{3/4} \left(\frac{5}{5-n} \right)^2,$$

мы вправе надеяться, что η^* окажется близким к единице и будет слабо зависеть от n . Это действительно так: η^* заключено между 0.77 и 2.17 (см. Табл. V.6.3).

Отметим, что в политропах с n , не слишком близким к 0, максимальное значение ускорения силы тяжести g_{\max} достигается *внутри* звезды, и притом тем ближе к центру, чем больше n (почему?). Поскольку функция Эмдена — это гравитационный потенциал, то максимум g должен достигаться при таком $\xi = \xi_{\max}$, для которого $\theta'(\xi)$ максимально, а потому $\theta''(\xi_{\max}) = 0$. Значения ξ_{\max} и $x_{\max} \equiv \xi_{\max}/\xi_1$, т.е. расстояния от центра звезды в долях радиуса, на котором сила тяжести максимальна, приведены в Табл. V.6.4.

Если, далее, g_{\max} представить в виде $g_{\max} = \eta_{\max}(GM/R^2)$, то коэффициент η_{\max} должен изменяться с n примерно как $(5-n)^{-2}$.

Таблица V.6.5:
Структурные множители c_1 и ω_1

n	c_1	ω_1	n	c_1	ω_1
0.0	0.8060	0.9672	3.0	0.3639	0.6390
0.1	0.7624	0.9463	3.5	0.3379	0.6029
0.25	0.7080	0.9181	4.0	0.3146	0.5664
0.5	0.6378	0.8778	4.5	0.2924	0.5268
1.0	0.5419	0.8129	4.75	0.2812	0.5039
1.5	0.4780	0.7608	4.9	0.2740	0.4879
2.0	0.4310	0.7162	5.0	0.2687	0.4748
2.5	0.3942	0.6762			

Покажите, что η_{\max} следующим образом выражается через функцию Эмдена:

$$\eta_{\max} = \frac{\theta'(\xi_{\max})}{\theta'(\xi_1)}.$$

Естественно ожидать, что g_{\max} и \bar{g} будут величинами одного порядка. Это в самом деле так (см. Табл. V.6.4).

6.4. Альтернативный вариант

До сих пор в качестве исходных размерных параметров, характеризующих политропу данного индекса n , использовались ее масса и радиус, что кажется вполне естественным. Однако это не единственная возможность. В некоторых случаях за определяющие размерные параметры удобнее брать массу и центральную плотность.

Из (2.4) находим для K следующее выражение через M и ρ_c :

$$K = c_1 G M^{2/3} \rho_c^{\frac{n-3}{3n}},$$

где

$$c_1 = \frac{(4\pi)^{1/3}}{(n+1)\mu_1^{2/3}}.$$

Имея ρ_c и K , можно вести интегрирование уравнений строения политропы (1.1) от центра к поверхности.

Приведем для справок выражения для гравитационной энергии, давления в центре и центральной температуры в нормальной политропе через M и ρ_c :

$$\begin{aligned} E_G &= -\omega_1 G M^{5/3} \rho_c^{1/3}, \\ P_c &= c_1 G M^{2/3} \rho_c^{4/3}, \\ T_c &= c_1 \left(\frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \right) G M^{2/3} \rho_c^{1/3}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_1 = \frac{3(4\pi\mu_1)^{1/3}}{(5-n)\xi_1}.$$

Значения структурных множителей c_1 и ω_1 приведены в Табл. V.6.5. Они близки к единице и изменяются в сравнительно узких пределах.

Как ведет себя радиус политропы с фиксированными M и ρ_c при росте n ?
Почему c_1 и ω_1 убывают с n ? *Указание:* см. п. 1.2.

7. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1° Считая звезды политропами с заданным n , найти отношение давлений при $r = R/2$ в двух таких звездах, 1 и 2, у которых гравитационные энергии связи одинаковы, а $M_2/M_1 = 2$.

2° Найти температуру в центре нормальной политропы с массой $M = M_\odot$, $\mu = 1$ и потенциальной энергией $E_G = -10^{48}$ эрг, если $n = 5$.

3° Во сколько раз температура в нормальной политропе с $n = 1$ на расстоянии $r = R/6$ от центра меньше центральной? Чему равно ее абсолютное значение, если $M = M_\odot$, $R = R_\odot$ и звезда состоит из чистого водорода?

4° Показать, что при отрицательном индексе $n \in [-1, 0)$ химически однородные политропы из идеального газа имели бы плотность, возрастающую с удалением от центра, температура же в них быстро убывала бы наружу (тем быстрее, чем меньше n).

5° Доказать, что соотношение

$$(n+1) \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T + \varphi = \text{const} \left(= -\frac{GM}{R} \right), \quad r \in [0, R],$$

где φ — потенциал, есть необходимое и достаточное условие того, что нормальная звезда представляет собой политропу индекса n .

6° Показать, что решения уравнения Лейна – Эмдена допускают следующее преобразование подобия: если $\theta(\xi)$ — какое-нибудь решение уравнения Лейна – Эмдена индекса n (не обязательно удовлетворяющее начальным условиям $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$, т.е. не обязательно функция Эмдена), то функция $A^{2(n-2)}\theta(A\xi)$, где A — произвольная постоянная, также является решением этого уравнения.

7° Имеется химически однородная ($\mu = \text{const}$) политропа малой массы с $n = 1$. Найти, во сколько раз доля давления излучения в полном давлении в такой политропе при $r = (5/6)R$ меньше, чем при $r = 0$.

8° Применить к политропам универсальное неравенство $p_c \geq 8\omega^4$ (см. задачу 4° к гл. IV). Сопоставив получающиеся оценки p_c с данными, приводимыми в Табл. V.2.2 (с. 136), сделать заключение о качестве этой оценки в применении к звездам разной структуры (не обязательно политропам).

9° Пользуясь соображениями размерности и рецептом из п. 6.3 (в приближении $\eta^* = 1$) по массе и радиусу дать оценку центральной температуры в звезде предельно большой массы, построенной согласно стандартной модели. Сравнением с точной асимптотикой (3.10) – (3.11) найти погрешность полученного результата.

10° Можно показать, что коэффициент a_k в степенном разложении функции Эмдена

$$\theta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k}$$

при $k > 1$ есть многочлен по n степени $k - 1$. Приведенные на с. 127 явные выражения для $\theta(\xi)$ при $n = 0, 1$ и 5 позволяют вычислить a_k для этих n . Опираясь на это, получить a_1, a_2 и a_3 для любого n .

11*° Подстановкой в уравнение Лейна – Эмдена разложения $\theta(\xi)$ в степенной ряд (см. предыдущую задачу) убедиться в том, что a_k удовлетворяют рекуррентному соотношению (З.Ф. Сеидов, Р.Х. Кузахмедов, 1976 г.)

$$a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)(2k+3)} \sum_{i=1}^k (1+i-k)(k-i+1)(3+2(k-i)) a_i a_{k+1-i}.$$

Чему равен радиус сходимости рассматриваемого степенного ряда для $\theta(\xi)$ при $n = 1$ и при $n = 5$?

12° Пусть θ и θ_0 — функции Эмдена для индексов политропы, равных соответственно n и n_0 . Положим

$$\theta(\xi) = \theta_0(\xi) + \varepsilon_0(\xi)(n - n_0) + o(n - n_0), \quad n \rightarrow n_0.$$

Получить уравнение и граничные условия, которым удовлетворяет

$$\varepsilon_0(\xi) \equiv \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial n} \bigg|_{n=n_0}.$$

13* Подстановкой в уравнение для $\varepsilon_0(\xi)$ (см. предыдущую задачу) проверить, что при $n_0 = 5$ (З.Ф. Сеидов и Р.Х. Кузахмедов, 1978 г.)

$$\varepsilon_0(\xi) = \frac{1}{48 \sin \nu} \left(\sin 2\nu - \frac{5}{4} \sin 4\nu + 3\nu \cos 4\nu - 3(2 \sin 2\nu + \sin 4\nu) \ln \cos \nu \right),$$

где

$$\nu = \arctg \frac{\xi}{\sqrt{3}}.$$

14° Исходя из результатов двух предыдущих задач, показать, что при $n \rightarrow 5$ корень функции Эмдена

$$\xi_1 \sim \xi_1^{as} = \frac{32\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{5-n}.$$

(Другим путем этот результат получен в тексте, с. 180).

15° Пользуясь выражением для $\varepsilon_0(\xi)$ из задачи 7°, установить, что если $n \rightarrow 5$ и одновременно $\xi \rightarrow \infty$ так, что $(5-n)\xi = \text{const}$, то

$$\theta(\xi) \rightarrow \theta^{as}(\xi) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1^{as}} \right),$$

где

$$\xi_1^{as} = \frac{32\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{5-n}.$$

16° Исходя из результатов задач ??° и ??°, показать, что безразмерная масса политропы индекса n при $n \rightarrow 5$ равна

$$\mu_1 = \sqrt{3} \left(1 - \frac{5-n}{12} + \dots \right),$$

так что она *меньше* $\sqrt{3}$.

17° Исходя из вириального соотношения (см. п. 4.3)

$$3 \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T M - \omega \frac{G M^2}{R} = 4\pi R^3 P_s$$

и пользуясь тем, что безразмерная гравитационная энергия изотермического шара ω возрастает при его сжатии, причем $\omega \geq 3/5$, показать, что радиус такого шара

$$R > \frac{4}{15} \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{G M}{T}.$$

18° Почему разложение функции Эмдена при малых ξ со с. 128 нельзя получить, непосредственно подставив в выражение $\theta(\xi)$ при больших n (с. 158) асимптотику изотермической функции Эмдена ψ со с. 159?

19° Показать, что гравитационная энергия изотермического шара безразмерного радиуса ξ_1 (определяемого внешним давлением), массы M и температуры T равна

$$E_G = -\tilde{\omega}_1 \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T M,$$

где

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1(\xi_1) = 3 - \frac{\xi_1^3}{\mu_1} e^{-\psi_1} = 3 \left(1 - \frac{\rho_s}{\bar{\rho}} \right).$$

Здесь $\bar{\rho}$ и ρ_s — средняя плотность шара и плотность у его поверхности, соответственно; $\mu_1 = \xi_1^2 \psi'(\xi_1)$ и $\psi_1 = \psi(\xi_1)$, где $\psi(\xi)$ — изотермическая функция Эмдена.

Чему равно отношение тепловой и гравитационной энергий шара, находящегося на границе устойчивости?

20° Показать, что в переменных Милна (U, V) уравнение Лейна – Эмдена (1.12) принимает вид

$$\frac{U}{V} \frac{dV}{dU} = \frac{(n+1)U + V - (n+1)}{(n+1)U + nV - 3(n+1)}.$$

21° Пусть \bar{V} — среднее по массе значение гомологического инварианта V :

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{M} \int_0^M V dM_r = \frac{1}{M} \int_0^M \frac{d \ln P}{d \ln r} dM_r.$$

Проверить, что для политропы индекса n

$$\bar{V} = 3 \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

22° Показать, что для политроп при $x \equiv r/R \rightarrow 0$ (около центра)

$$U = 3 - \frac{n}{5} \xi_1^2 x^2 + \dots,$$

$$V = \frac{n+1}{3} \xi_1^2 x^2 \left[1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{n}{10} \right) \xi_1^2 x^2 + \dots \right],$$

а при $x \rightarrow 1$ (вблизи поверхности)

$$U =$$

$$V = \frac{n+1}{1-x} + \dots$$

Каков физический смысл того, что $V \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$ и $U \rightarrow 3$ при $x \rightarrow 0$?

Глава VI

CNO–ЦИКЛ

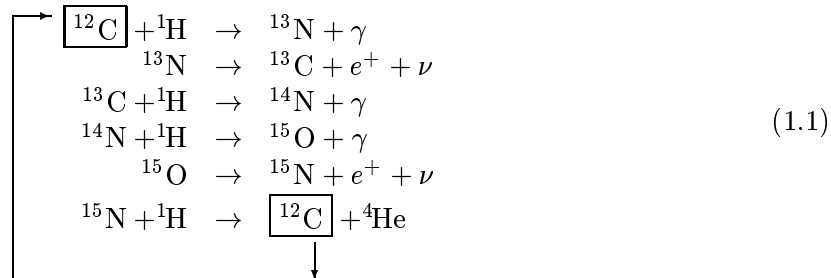
1. CNO-ЦИКЛ: СТРУКТУРА И ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ

1.1. Простой CN-цикл

Помимо *pp*-цепочек, имеется еще один путь синтеза α -частиц из протонов, работающий в звездах, — так называемый CNO-цикл. Он является основным спосо-

бом производства энергии у звезд ГП с $M \gtrsim 1.2$. Весьма существенную энергетическую роль он играет также у красных гигантов. Не менее важен и вопрос о нуклеосинтезе в CNO-цикле. Подход астрофизика-практика к интерпретации широкого круга наблюдательных данных, касающихся особенностей содержания C, N и O у различных звезд, базируется на анализе специфики нуклеосинтеза в ходе CNO-цикла. Сказанное оправдывает большое место, отводимое нами детальному изучению этого цикла.

CNO-цикл — это совокупность трех (если быть совсем строгим, то даже четырех) сцепленных друг с другом или, точнее, частично перекрывающихся циклов. Изучение их мы начнем с энергетически наиболее важного из них — *простого CN-цикла*. Другие его названия — углеродный цикл, цикл Бете. Так именуют следующую цепочку реакций:



Ее итогом является, очевидно, слияние четырех протонов в α -частицу, а углерод, азот и кислород выступают лишь как катализаторы. (При всей кажущейся очевидности последнего утверждения оно нуждается в серьезных оговорках, см. ниже).

На первый взгляд последовательность реакций CN-цикла выглядит довольно-таки замысловатой. Кажется, что ее и запомнить-то нелегко, а уж как она была придумана — и вовсе непонятно. При беглом взгляде возникает ощущение, что в CN-цикле есть что-то искусственное, что он специально подобран, и если внимательно поискать, то — как знать? — быть может отыщутся еще какие-то сходные, а то и более простые цепочки энерговыделяющих реакций. Все эти впечатления совершенно обманчивы.

Запомнить последовательность реакций CN-цикла не составляет труда. Суть его состоит в непрямом синтезе α -частицы из четырех протонов при их последовательных захватах ядрами, начиная с ^{12}C . Захват первых трех протонов вызывает однотипные реакции (p, γ) , захват последнего, четвертого протона влечет, естественно, реакцию (p, α) — синтез α -частицы завершается. Когда-то должны произойти два позитронных β -распада — позитронных потому, что суммарный заряд четырех протонов $+4$, заряд же α -частицы $+2$. При каждом β -распаде излучается также по одному нейтрину. Собственно, единственное, что нужно запомнить, — это когда именно, на каких этапах происходят β -распады. В реакциях (p, γ) образуются ядра как с четными, так и с нечетными A . Последние неустойчивы — они и распадаются.

Вы только что прочли объяснение устройства CN-цикла — а в результате без всяких усилий его запомнили!

Проверьте себя — выпишите, никуда не заглядывая, цепочку реакций CN-цикла. Если это вызовет затруднения или если в записи будут ошибки, внимательно прочтите предыдущий абзац еще раз, сопоставив его с приведенной выше последовательностью реакций.

Простой перебор реакций термоядерного синтеза в газе космического химического состава, постепенно нагреваемого до $\sim 2 \cdot 10^7$ К, с неизбежностью приводит к обнаружению CN-цикла. Как уже не раз говорилось, из-за необходимости преодоления высокого кулоновского барьера за счет туннельного эффекта первыми должны пойти реакции между самыми легкими ядрами — для них $Z_1 Z_2$ мало. Если бы дело было только в этом, горение начиналось бы с протон-протонной реакции. Однако при этой реакции, кроме подбарьерного проникновения, должен произойти еще и β -распад „на лету”, вероятность чего крайне низка. В итоге S -фактор для протон-протонной реакции оказывается рекордно малым: $S \sim 10^{-22}$ кэВ·барн. Поэтому выгорание легких элементов начинается не с водорода, а с дейтерия ($Z = 1$, $A = 2$), лития ($Z = 3$), бериллия ($Z = 4$) и бора ($Z = 5$) (см. п. ??). Гелия в этом перечне нет, поскольку он на водороде не горит. Существенно, что захваты протонов ядрами Li, Be и B вызывают реакции (p, α) , так что эти ядра в реакциях с протонами *не воспроизводятся*, почему и выгорают практически полностью. Правда, ядра ^7Li , ^7Be и ^8B синтезируются в цепочках $ppII$ и $ppIII$, но тут же и разрушаются (см. п. ??). Поэтому результирующие концентрации D, Li, Be и B при $T \gtrsim 10^7$ К оказываются совершенно ничтожными.

За бором идут углерод ($Z = 6$), азот ($Z = 7$) и кислород ($Z = 8$). Они горят в реакциях (p, γ) , причем с „нормальными” S -факторами: $S \sim 10^0 \div 10^1$ кэВ · барн. Первым должен начать выгорать углерод, так как для него кулоновский барьер ниже, чем для азота и кислорода.

да. Итак, мы естественным образом пришли к рассмотрению реакции $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$. Из-за сильной β -радиоактивности ядра ^{13}N оно за минуты, т.е. практически мгновенно, превращается в ^{13}C . Это ядро, в свою очередь, должно захватывать протон и превращаться в азот: $^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$. Проходит некоторое время, и углерод почти весь выгорает, преобразуясь в азот. Очередной этап — протонные реакции на азоте — должен начинаться с реакции $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$, за которой сразу же, за минуты, следует $^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$. Кулоновский барьер у ^{15}N тот же, что и у ^{14}N , и поэтому будет захватываться еще один протон. Два возможных исхода этого — реакции $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$ и $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$. Реакция (p, α) происходит здесь в $\sim 10^3$ раз чаще, чем (p, γ) , поскольку она идет с сильным взаимодействием, тогда как (p, γ) — с электромагнитным (излучается γ -квант), а оно слабее.

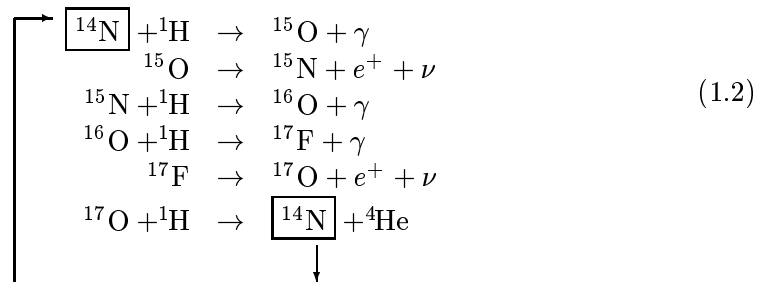
Реакция $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$ создает качественно новую ситуацию. Ядро ^{12}C , с разрушения которого начинаются протонные реакции на ядрах углеродно-кислородной группы, оказывается в ходе этих реакций заново синтезированным. Иначе говоря, выгорание углерода сменяется его воспроизводством — заработал CN-цикл!

Как видим, этот цикл отнюдь не является продуктом какого-то хитроумного специального подбора цепочки реакций, а появляется непременно, буквально сам собой.

1.2. Тройной CNO-цикл

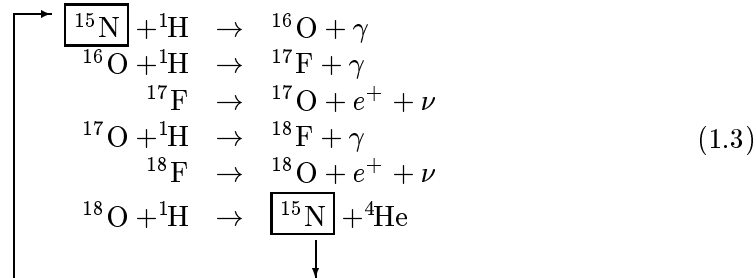
Пренебрежение боковым ответвлением от CN-цикла, обусловленным радиационным захватом протона ядром ^{15}N , на первый взгляд кажется вполне оправданным, так как одна реакция $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$ приходится примерно на 10^3 реакций $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$. И тем не менее это боковое ответвление играет существенную роль как в энергетике, так и в нуклеосинтезе элементов CNO-группы.

Долгое время полагали, что CNO-цикл двойной. Считалось, что основной CN-цикл частично перекрывается со следующим циклом:



Этот второй цикл, который мы будем называть циклом *NOI*, имеет в точности ту же структуру, что и CN-цикл. Ясно, что из-за малости сечения реакции $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$ по сравнению с $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$ скорость синтеза α -частиц по этому циклу в стационарном режиме должна быть гораздо (в $\sim 10^3$ раз) ниже, чем по CN-циклу. Как это ни парадоксально, несмотря на это цикл *NOI* существенно сказывается на энергетике, повышая темп энерговыделения в CN-цикле. Это происходит потому, что распространенность ядер ^{16}O в газе нормального космического химического состава до начала работы цикла велика, выше суммарной концентрации C и N. В реакциях цикла *NOI* ядра ^{16}O выгорают и превращаются главным образом в ^{14}N , заметно (раза в два-три) увеличивая тем самым число ядер-катализаторов CN-цикла и повышая в результате темп энерговыделения.

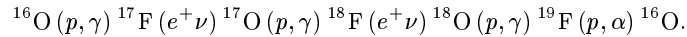
Подобно тому как с последней реакцией CN-цикла $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$ может конкурировать реакция $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$, что порождает цикл *NOI*, последняя реакция этого второго цикла $^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$ имеет своим конкурентом реакцию $^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$. До середины 70-х годов считали, что скорость этой (p, γ) -реакции гораздо меньше скорости соответствующей реакции (p, α) . Однако проведенные затем лабораторные измерения сечения реакции $^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$ показали, что ранее оно было сильно — по крайней мере в 50 раз — завышено. Хотя и теперь это сечение известно не очень надежно (заметим, что реакция $^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$ — резонансная), можно думать, что реакции (p, α) и (p, γ) на ядре ^{17}O при температурах $T_6 \gtrsim 30$ имеют скорости одного порядка. Это делает необходимым учет в составе CNO-цикла третьего подцикла, первые три реакции которого совпадают с тремя последними реакциями цикла *NOI*:



Эту цепочку реакций будем называть циклом *NOII*. По-видимому, темпы циклов *NOI* и *NOII* одного порядка.

Циклы CN, *NOI* и *NOII* образуют *тройной CNO-цикл*. Концентрации изотопов фтора из-за их нестабильности столь малы, что он не „удостоился“ упоминания в названии цикла. При температурах $T_6 \lesssim 100$ тройной CNO-цикл можно считать практически замкнутым.

Имеется еще очень медленный четвертый цикл:



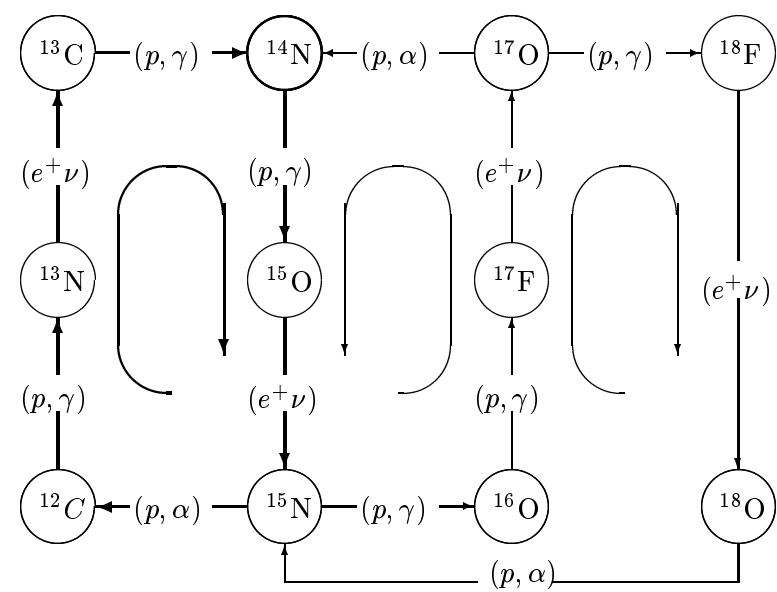
Его роль в нуклеосинтезе изотопов С, N и O, а тем более в выработке энергии ничтожно мала. В установившемся режиме он работает раз в 10 медленнее NO-циклов (которые, в свою очередь в 10^3 раз медленнее основного CN-цикла). Единственное, в чем этот четвертый цикл может оказаться важным, — это объяснение происхождения ^{19}F .

Структура тройного CNO-цикла иллюстрируется рис. VIII.2.1. Направления обхода циклов указаны изогнутыми линиями со стрелками. Итог каждого из циклов — слияние четырех протонов в α -частицу. Двойные кружки отмечают нестабильные изотопы. Жирные стрелки подчеркивают то обстоятельство, что в установившемся режиме циркуляция в углеродной (CN) ветви тройного цикла происходит гораздо быстрее, чем в кислородной (NOI + NOII).

В реакциях CNO-цепочек суммарное число ядер углерода, азота и кислорода остается неизменным. Они лишь превращаются друг в друга. Если температура сохраняется постоянной или изменяется достаточно медленно, спустя некоторое время должно установиться равновесие, или точнее стационарное распределение нуклидов углеродно-кислородной группы (C, N, O), определяемое лишь температурой. Как мы вскоре убедимся (см. п. 2), важнейшая его черта состоит в том, что в равновесии содержание ^{14}N во много раз превышает содержание всех остальных нуклидов этой группы. На рис. VIII.2.1 этот факт подчеркивается особым видом кружка у ^{14}N . Заметим, что до достижения равновесия считать ядра C, N и O только катализаторами нельзя — они служат и топливом.

Рассматриваемый как ядерная фабрика по переработке элементов углеродно-кислородной группы, CNO-цикл с выходом на равновесный режим прекращает свою активную жизнь, продолжая, однако, полным ходом работать как термоядерная энергетическая установка, сжигающая водородное топливо. В этом своем энергетическом качестве CNO-цикл конкурирует с *pp*-цепочками. Хотя кулоновские барьеры в протонных реакциях CNO-цикла заметно выше, чем в реакциях *pp*-цепочек, а концентрация ядер C, N и O, вместе взятых, на два – три порядка ниже концентрации протонов, CNO-цикл все же оказывается вполне конкурентоспособным — в его активе те 22 порядка, на которые *S*-факторы (*p, γ*)-реакций CNO-цикла превышают *S*-фактор протон-протонной реакции. Количественное обсуждение см. в п. ??.

В заключение этого пункта заметим, что при взрывном горении водорода в поверхностных слоях звезд, например, при вспышках новых, могут развиваться очень высокие температуры. При этом харак-



Цикл CN	Цикл NO I	Цикл NO II
Углеродная ветвь	Кислородная ветвь	

Рис. VI.1.1: Структура тройного CNO-цикла.

В установившемся режиме CN-цикл работает в 10^3 раз быстрее имеющих примерно одинаковую производительность циклов NOI и NOII. Несмотря на это, NO-циклы заметно сказываются не только на нуклеосинтезе, но и на скорости выработки энергии в тройном CNO-цикле (см. текст).

тер CNO-цикла резко меняется. При $T_6 \gtrsim 100$ реакции (p, γ) идут столь быстро, что они способны конкурировать с β -распадами нестабильных изотопов N, O и F. Цепочки реакций учитывающего это обстоятельство так называемого *горячего* CNO-цикла образуют сложный запутанный клубок. Подробнее об этом речь пойдет в гл. ??.

1.3. Основные параметры реакций

Из всех ядерных реакций, представляющих интерес для физики звезд, реакции CNO-цикла изучены едва ли не лучшим образом. Почти все сечения надежно измерены в ряде лабораторий, из которых в первую очередь нужно назвать Кэллогскую радиационную лабораторию Калифорнийского технологического института. В ней под руководством Уильяма Фаулера вот уже около полувека ведутся измерения сечений астрофизически интересных ядерных реакций.

Любопытные детали истории этих работ приводятся в лекции, прочитанной У. Фаулером в 1983 г. при вручении ему Нобелевской премии за исследования по ядерной астрофизике. Опубликованы два разных ее русских перевода — один в виде брошюры общества „Знание” (серия „Космонавтика, астрономия”, N5 за 1985 г.), другой — в „Успехах физических наук”, 145, N3, 441 – 488, 1985. Много интересных сведений исторического характера и авторитетные обзоры состояния широкого круга вопросов ядерной астрофизики по состоянию на середину 80-х годов имеются в сборнике „Ядерная астрофизика” под ред. Ч. Барнса, Д. Клейтона и Д. Шрамма, М.: Мир, 1986. Мы широко использовали оба этих важных источника информации.

Прежде всего приведем времена жизни τ_β фигурирующих в CNO-цикле β -радиоактивных ядер:

$^{13}\text{N} (e^+ \nu)$	^{13}C	— — —	870 с	(~ 14.5 мин)
$^{15}\text{O} (e^+ \nu)$	^{15}N	— — —	178 с	(~ 3 мин)
$^{17}\text{F} (e^+ \nu)$	^{17}O	— — —	95 с	(~ 1.5 мин)
$^{18}\text{F} (e^+ \nu)$	^{18}O	— — —	158 мин	(~ 2.7 часа)

Они столь малы, что каждый из циклов фактически идет в четыре этапа:

CN	NOI	NOII
$^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}(e^+ \nu)^{13}\text{C}$	$^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$	$^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$
$^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$	$^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$	$^{16}\text{O}(p, \gamma)^{17}\text{F}(e^+ \nu)^{17}\text{O}$
$^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$	$^{16}\text{O}(p, \gamma)^{17}\text{F}(e^+ \nu)^{17}\text{O}$	$^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}(e^+ \nu)^{18}\text{O}$
$^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$	$^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$	$^{18}\text{O}(p, \alpha)^{15}\text{N}$

Таблица VI.1.1:
Основные параметры реакций CNO-цикла

Реакция	$S(0)$ кэВ·барн	$dS(0)/dE$ барн	Q МэВ	\bar{E}_ν МэВ	C
$^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$	$1.45 (1 \pm 0.15)$	$2.45 \cdot 10^{-3}$	1.94	—	136.
$^{13}\text{N}(e^+ \nu)^{13}\text{N}$	—	—	2.22	0.71	—
$^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$	$5.50 (1 \pm 0.15)$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	7.55	—	137.2
$^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$	$3.32 (1 \pm 0.18)$	$-5.91 \cdot 10^{-3}$	7.29	—	152.3
$^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$	—	—	2.76	1.00	—
$^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$	$7.8 \cdot 10^4 (1 \pm 0.17)$	351	4.965	—	152.5
$^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$	$64 (1 \pm 0.09)$	$3 \cdot 10^{-2}$	12.13	—	152.5
$^{16}\text{O}(p, \gamma)^{17}\text{F}$	$9.4 (1 \pm 0.16)$	$-2.3 \cdot 10^{-2}$	0.60	—	167.0
$^{17}\text{F}(e^+ \nu)^{17}\text{O}$	—	—	2.76	0.94	—
$^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$	Резонансная реакция		1.19	—	167.15
$^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$	Резонансная реакция		5.61	—	167.15
$^{18}\text{F}(e^+ \nu)^{18}\text{O}$	—	—	?	?	—
$^{18}\text{O}(p, \alpha)^{15}\text{N}$?	?	3.98	—	167.29

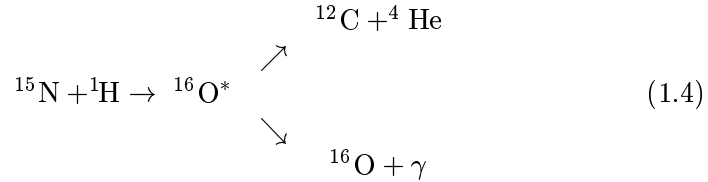
Другим следствием малого времени жизни вырабатываемых в CNO-цикле легких нестабильных изотопов азота, кислорода и фтора должна быть их крайне низкая распространенность — синтезируются они сравнительно медленно, распадаются же очень быстро. По этой причине точное знание периодов полураспада в данном случае неважно, все равно надежды обнаружить ^{13}N , ^{15}O , ^{17}F и ^{18}F на звездах пока нет.

Сводка важнейших величин, характеризующих реакции CNO-цикла, дана в Табл. VI.1.1 (по J.N. Bahcall, W.F. Huebner, S.N. Lubow, P.D. Parker, R.K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.*, **54**, N 3, 736 – 799, 1982). Обсудим ее.

Столбцы $S(0)$ и $dS(0)/dE$. Для всех (p, γ) -реакций CN-цикла величины $S(0)$ одного порядка — несколько кэВ·барн, для двух нерезонансных (p, γ) -реакций, фигурирующих в NO-циклах, они примерно в десятков раз больше. Идущие с сильным взаимодействием заключительные реакции циклов CN и NOII $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$ и $^{18}\text{O}(p, \alpha)^{15}\text{N}$ имеют гораздо большие S -факторы, $S(0) \sim 10^5$. На сечение реакции $^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$, завершающей цикл NOI, и конкурирующей с ней в цикле NOII реакции $^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$ существенное влияние оказывают близлежащие резонансы. Поэтому эти сечения нельзя рассчитывать по обычной формуле для нерезонансных реакций. Более подробное обсуждение конкуренции этих двух реакций будет дано чуть позже.

Погрешности $S(0)$ даны в таблице по уровню 1σ . Как видим, они во всех случаях невелики — менее 20%. К численным значениям этих погрешностей следует, однако, относиться с известной осторожностью: они выведены из анализа неоднородного по точности экспериментального материала, полученного в разных лабораториях. Впрочем, уже тот факт, что известны не только $S(0)$, но и $dS(0)/dE$ (и даже $d^2S(0)/dE^2$; их мы не приводим), свидетельствует о том, что сечения найдены достаточно надежно. Напомним, что они получаются экстраполяцией сечений, измеренных в области $E_{\text{лаб}} \gtrsim 50 \div 100$ кэВ, в сторону низких энергий (см. п. ??).

В оценках сечений рассматриваемых реакций за последние три десятка лет произошли два существенных изменения. Первое — это увеличение более чем вдвое S -фактора реакции $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$: раньше принималось $S(0) = 27$, теперь $S(0) = 64$ кэВ·барн. Таким образом, ветвление в CNO-цикле вслед за захватом протона ядром ^{15}N и образованием составного ядра $^{16}\text{O}^*$



происходит чаще, чем считалось прежде. Однако *вероятность осуществления реакции по второму каналу все же очень мала*, $\sim 10^{-3}$ от первого. Это обстоятельство имеет принципиальное значение для понимания работы CNO-цикла. Ясно, что в равновесном режиме синтез α -частиц по NO-циклу должен происходить на три порядка медленнее, чем по CN-циклу. Предостережем, однако, читателя от поспешного вывода, что NO-ветви должны поэтому мало сказываться на темпе энерговыделения в тройном CNO-цикле. Как уже разъяснялось на с. 197, это не так; подробнее см. в п. 1.4.

Столбец Q . Суммирование приведенных в таблице значений выхода энергии для каждой из реакций циклов CN, NOI и NOII во всех трех случаях дает $\sum Q = 26.73$ МэВ. Таким образом, в Q включена и энергия, уносимая нейтрино. Чтобы найти выход полезной для звезды энергии, идущей на ее нагрев, надо из $\sum Q$ вычесть $\sum \bar{E}_\nu$ (для каждого из циклов по отдельности). В итоге получим 25.02 МэВ для CN-цикла, 24.79 МэВ для цикла NOI и ??? МэВ для NOII.

Столбец \bar{E}_ν . Нейтрино в CNO-цикле излучаются при β^+ -распаде нестабильных легких изотопов азота, кислорода и фтора. Поэтому во всех случаях энергетический спектр этих нейтрино непрерывный. Мак-

симальная энергия испускаемых нейтрино E_ν^{\max} близка к $8/5$ от их средней энергии, приведенной в таблице. Для ν от распада ^{13}N , ^{15}O , ^{17}F и ^{18}F имеем $E_\nu^{\max} = 1.20, 1.74, 1.74$, и ??? МэВ соответственно. (Обсуждение вида энергетического спектра β^+ -распадных нейтрино см. в п. ??.)

При синтезе одной α -частицы по CN-циклу нейтрино уносят 1.7 МэВ, или 6.4% всей выделяющейся энергии. Это заметно больше, чем для цепочки ppI (1.9%).

Замечание. Если в звезде работает CNO-цикл, то кроме β^+ -распадных нейтрино непрерывного спектра, о которых только что шла речь, должны излучаться также моноэнергетические нейтрино. Дело в том, что одновременно с каждой реакцией позитронного распада

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu \quad (*)$$

всегда идет соответствующая ей реакция электронного захвата

$$(A, Z) + e^- \rightarrow (A, Z-1) + \nu. \quad (**)$$

При этом излучаются практически моноэнергетические нейтрино с энергией, определяемой разностью масс покоя частиц слева и справа. Разброс по энергиям — порядка тепловой энергии частиц, т.е. для звезд ГП — несколько кэВ. Эти моноэнергетические нейтрино обладают энергией, превосходящей максимальную энергию нейтрино, излучаемых в реакции (*), на $2m_e c^2$ (почему?). Так, в цепочке реакций CN-цикла имеется β^+ -распад $^{13}\text{N}(e^+ \nu) ^{13}\text{C}$, при котором испускаются нейтрино с $E_\nu \leq 1.20$ МэВ. Парной к этой реакции позитронного распада является реакция захвата электрона $^{13}\text{N}(e^-, \nu) ^{13}\text{C}$, рождающая нейтрино с $E_\nu = 2.22$ МэВ.

Скорости реакций захвата электрона (**) в нормальных звездах столь малы, что в энергетике никакой роли они не играют. Упоминаем же мы о них здесь главным образом в связи с проблемой солнечных нейтрино (см. разд. ??). Хотя основным источником энергии Солнца являются pp -цепочки, некоторый вклад ($\sim 1.5\%$) дает и CN-цикл. Захваты электронов вырабатываемыми при этом ядрами ^{13}N и ^{15}O должны порождать в нейтринном спектре Солнца линии при $E_\nu = 2.22$ и 2.76 МэВ, подобно тому как парная к протон-протонной реакции $^1\text{H}(p, e^+ \nu) ^2\text{D}$ с $E_\nu \leq 0.420$ МэВ так называемая pep -реакция $^1\text{H}(pe^-, \nu) ^2\text{D}$ дает нейтринную линию с $E_\nu = 1.44$ МэВ. Можно, однако, показать, что интенсивности солнечных нейтринных линий, порождаемых ^{13}N и ^{15}O , настолько малы, что ими можно полностью пренебречь.

Столбец С. Как известно (см. разд. ??), зависимость скорости протекания нерезонансной термоядерной реакции от температуры (главный член) определяется величиной $\tau^2 e^{-\tau}$, где

$$\tau = \tau(T) = 42.5 \left(\frac{Z_i^2 Z_k^2 A}{T_6} \right)^{1/3} \equiv \frac{C}{T_6^{1/3}}. \quad (1.5)$$

Здесь $A = A_i A_k / (A_i + A_k)$. Значения вводимого этим равенством параметра C приведены в последнем столбце таблицы.

Для реакций захвата протонов разными изотопами одного и того же элемента значения C различаются мало. При переходе же от захвата протона ядром с зарядом Z к захвату его ядром с зарядом $Z+1$ значение C из-за роста кулоновского барьера подскакивает заметно. Это важно, так как соответствующие τ оказываются существенно разными.

1.4. Характерные времена реакций

До сих пор речь шла о тех параметрах реакций CNO-цикла, которые не зависят от условий в газе, где эти реакции идут. Важнейший из параметров, характеризующих термоядерную реакцию, который существенно зависит от температуры, плотности и химического состава газа, — это характерное время реакции, или *время выгорания*. Обсудим его применительно к реакциям CNO-цикла в звездах ГП. Это абсолютно необходимо для понимания функционирования цикла.

Как говорилось в п. ??, временем жизни ядер типа k по отношению к реакции с ядрами типа i , или временем выгорания ядер k на ядрах i , называется величина

$$\tau_i(k) = \frac{1}{N_i \langle \sigma v \rangle_{ik}} \equiv \frac{1}{N_i \lambda_{ik}}, \quad (1.6)$$

где N_i — концентрация ядер i . Для краткости здесь введено обычное обозначение $\lambda_{ik} \equiv \langle \sigma v \rangle_{ik}$. Подчеркнем, что если $N_i \neq N_k$, то $\tau_i(k) \neq \tau_k(i)$. Для нерезонансных реакций зависимость времени выгорания от температуры в окрестности T_0 можно аппроксимировать степенной функцией

$$\tau_i(k) = \tau_i^0(k) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\nu} \quad (1.7)$$

с показателем $\nu = (\tau_0 - 2)/3$, где τ_0 определено по (2.6) при $T = T_0$, т.е. $\tau_0 \equiv \tau(T_0)$ (см. п. ??).

В Табл. VI.1.2 для ряда температур приведено время (в годах) выгорания основных CNO-изотопов на протонах при $N_p = 100/m_p \approx 6 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$. Этой концентрации протонов, по порядку характерной для центральных областей звезд ГП, соответствует $\rho X_H = 100 \text{ г/см}^3$. Согласно данным таблицы, во всем рассматриваемом диапазоне температур *самой медленной из реакций простого CN-цикла является реакция $^{14}\text{N}(p, \gamma) ^{15}\text{O}$, причем время жизни ^{14}N существенно превосходит время жизни всех других стабильных ядер, фигурирующих в CN-цикле (Табл. VI.1.3).*

Далее, из-за более высокого кулоновского барьера кислород выгорает значительно медленнее ^{14}N . При низких температурах, $T_6 \lesssim 15$, время выгорания его основного изотопа ^{16}O превышает 10^{10} лет, так что

Таблица VI.1.2:

Времена выгорания (в годах) стабильных изотопов
C, N и O на протонах (при $\rho X_H = 100 \text{ г/см}^3$)

Изоотоп T_6	^{12}C	^{13}C	^{14}N	^{15}N	^{16}O	^{17}O
10	2.6+9	7.9+8	1.5+12	6.6+7	4.7+14	
15	1.1+6	3.2+5	2.6+8	1.1+4	3.5+10	
20	8.1+3	2.4+3	1.1+6	44	8.85+7	
25	250	73	2.4+4	0.88	1.3+6	
30	18	5.1	1.25+3	4.45–2	5.0+4	
40	0.37	0.11	17		460	
50			0.84		16	

„подкачки ядер” в CN-цепь из NO-ветвей фактически нет. Нет и оттока ядер из CN-цикла в циклы NO, так как из-за малой вероятности ветвления (2.4) для заметного оттока необходимо, чтобы прошло $\sim 10^3$ полных CN-циклов, что при $T_6 \lesssim 18$ также занимает не менее 10^{10} лет. Кроме того — и это даже важнее — CN-цикл успевает при этом выжечь весь водород и должен прекратить свою работу. Таким образом, при $T_6 \lesssim 15$ NO-циклы практически полностью отключены.

При высоких (по масштабам звезд ГП) температурах, $T_6 \gtrsim 22$, положение иное: кислород выгорает достаточно быстро, за характерное время $\lesssim 10^7$ лет, синтезируется же медленно. В итоге *большая часть ядер кислорода разрушается и уходит в CN-ветвь*, где они почти целиком превращаются в ^{14}N (см. следующий раздел). Как уже упоминалось, это заметно сказывается на энергетике CN-цикла: содержание ^{14}N увеличивается, и вследствие этого темп синтеза α -частиц по CN-циклу возрастает. Эффект довольно значительный, так как до начала реакций CNO-цикла в газе солнечного химического состава (характерного для звезд населения I) содержание O по числу атомов несколько превышает суммарное содержание C и N. Так, согласно сводке содержания элементов в Солнечной системе (А. Камерон, 1982 г.) C:N:O=4.8:1:8.0. В результате выгорания O скорость энерговыделения по CN-циклу для этого химического состава должна возрасти почти в два с половиной раза (13.8:5.8).

В области промежуточных температур ($15 \lesssim T_6 \lesssim 22$), а также при

Таблица VI.1.3:

Времена выгорания стабильных изотопов CN-цикла
в долях времени выгорания ^{14}N

Изотоп T_6	^{12}C	^{13}C	^{15}N
10	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$
20	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
30	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-5}$
40	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
50	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$

$T_6 \gtrsim 22$ на начальных этапах горения, до завершения выгорания кислорода, аккуратное рассмотрение энергетики CNO-цикла неотделимо от расчета кинетики соответствующих ядерных реакций.

2. РАВНОВЕСНЫЙ РЕЖИМ CNO-ЦИКЛА

2.1. Простой CN-цикл

Рассмотрим сначала работу простого CN-цикла. Пусть первоначально в газе, состоящем в основном из водорода и гелия, имеется некоторая примесь углерода и азота с произвольным соотношением содержания их стабильных изотопов. Представим себе, что мы нагрели газ до достаточно высокой температуры, скажем, до $T_6 = 15$, и в дальнейшем поддерживаем ее постоянной. Начнутся реакции захвата протонов. Если в первичном газе имелось заметное количество ^{15}N (обычно это не так), то он выгорит первым, превратившись в ^{12}C . Характерное время этого процесса — 10^4 лет (при $T_6 = 15$; см. Табл. VI.1.2). Затем за $\sim 2 \cdot 10^5$ лет выгорит ^{13}C (если он был), наконец, $\sim 10^6$ лет потребуется для выгорания ^{12}C . Подавляющая часть всех этих ядер превратится в ^{14}N , содержание которого спустя несколько миллионов лет после начала процесса станет почти равным суммарному содержанию всех изотопов C и N в первичном газе. После этого изменение содержаний ^{12}C , ^{13}C и ^{15}N замедлится, а вскоре и вовсе прекратится. Захваты протонов ядрами ^{14}N , ведущие к появлению ^{15}N в реакциях $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ ($e^+ \nu$) ^{15}N , начнут компенсировать выгорание остатков ^{15}N . В свою очередь, выгорание этого вновь образующегося ^{15}N производит ^{12}C и т.д. — начинает работать цикл. Время его включения и выхода на стационарный режим определяется временем выгорания ^{12}C , превышая его в несколько раз. Оно существенно меньше времени выгорания ^{14}N . Так, при $T_6 = 15$ выход на стационарный режим занимает несколько миллионов лет, время же жизни ^{14}N по отношению к выгоранию на протонах $\sim 2 \cdot 10^8$ лет. Здесь проявляется следующее общее важное правило: *в произвольном цикле с существенно различающимися временами протекания отдельных реакций характерное время выхода цикла на стационарный режим определяется не самой медленной его реакцией, а следующей за ней по продолжительности*. Не правда ли, это кажется противоестественным, противоречащим тому, что подсказывает „интуиция”? И тем не менее это так!

Чтобы лучше понять, в чем суть дела, рассмотрим такой пример. Пусть первоначально в газе, кроме водорода, имеется только ^{12}C . При $T_6 = 15$ спустя $\sim (5 \div 6) \cdot 10^6$ лет в результате его выгорания с последующим быстрым (формально — мгновенным) превращением ^{13}N и ^{13}C в ^{14}N станет $^{14}\text{N}/^{12}\text{C} = 200 : 1$ (проверьте!). (Выгорание ^{14}N в течение

этого периода незначительно, и мы им пренебрегаем.) Начиная с этого момента число реакций $^{12}\text{C} + p$ и $^{14}\text{N} + p$ оказывается практически равным: $\lambda_{1,12}^{12}\text{C} \approx \lambda_{1,14}^{14}\text{N}$.

Количественное описание работы CN-цикла в переходном режиме см. в разд. 3.

Основной итог переходного периода — установление в газе такого относительного содержания изотопов C и N, которое в дальнейшем не меняется (если температура остается постоянной). Оно определяется тем очевидным условием, что в равновесном режиме скорости реакций на всех этапах цикла одинаковы, так что

$$\lambda_{12}^{12}\text{C} = \lambda_{13}^{13}\text{C} = \lambda_{14}^{14}\text{N} = \lambda_{15}^{\alpha}^{15}\text{N}. \quad (2.1)$$

Поскольку мы имеем дело только с реакциями захвата протонов, здесь и далее до конца этого раздела для краткости вместо $\lambda_{1,i}$ будем писать просто λ_i . Верхний индекс α указывает на реакцию (p, α) (а не (p, γ)). Условие (2.1) иначе можно записать так:

$$\frac{^{12}\text{C}}{\tau_{12}} = \frac{^{13}\text{C}}{\tau_{13}} = \frac{^{14}\text{N}}{\tau_{14}} = \frac{^{15}\text{N}}{\tau_{15}}, \quad (2.2)$$

где для краткости обозначено, как это принято, $\tau_{12} \equiv \tau_p(^{12}\text{C})$ и т.д. Сохранения нестабильных ядер ^{13}N и ^{15}O ничтожны. Мы ими пренебрегли, приняв, что β -распады происходят мгновенно и цикл идет в четыре шага.

Пусть CN — суммарная концентрация ядер углерода и азота, т.е.

$$\text{CN} = ^{12}\text{C} + ^{13}\text{C} + ^{14}\text{N} + ^{15}\text{N}.$$

При работе цикла она не меняется. Обозначим, далее, через τ_{CN} период цикла, т.е. время, которое занимает синтез α -частицы, когда цикл работает в стационарном режиме:

$$\tau_{\text{CN}} = \tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{14} + \tau_{15}^{\alpha}.$$

Складывая все числители и все знаменатели в (2.2), по свойству пропорции заключаем, что общая величина отношения в цепочке равенств (2.2) равна $\text{CN}/\tau_{\text{CN}}$. Поэтому, например,

$$^{12}\text{C} = \frac{\text{CN}}{\tau_{\text{CN}}} \tau_{12},$$

и аналогично для ^{13}C и т.д. Таким образом, в равновесном режиме в цепочке последовательно идущих реакций устанавливаются концентрации ядер, прямо пропорциональные временам их выгорания.

Это достаточно общее правило. Оно применимо и к последовательным реакциям, не образующим цикла. Пример — цепочка идущих в звездах реакций последовательного захвата нейтронов — важнейший механизм синтеза тяжелых элементов. Поскольку сечения нейтронного захвата хорошо известны, относительные распространенности возникающих таким путем тяжелых ядер легко рассчитать. См. гл. ??.

Работу CN-цикла в равновесном режиме можно уподобить течению реки. Там, где уклон большой и потому скорость течения велика, река узкая. Там же, где уклон мал, река течет медленно, но разливается широко. Реакция $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ — это место самого „широкого разлива”: малое сечение этой реакции влечет высокое равновесное содержание ^{14}N . Напротив, характеризующаяся очень большим S -фактором и потому большим сечением реакция $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$ — это как бы речной порог, где бурлящий поток становится совсем узким: равновесная концентрация ^{15}N очень мала.

2.2. Равновесные распространенности нуклидов CN-цикла

Расчет равновесных концентраций нуклидов CN-цикла представляет большой астрофизический интерес. Начнем с ^{14}N . Поскольку характерное время реакции $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ гораздо больше характерных времен всех остальных реакций CN-цикла (см. Табл. VI.1.2, с. 205 и Табл. VI.1.3, с. 206), с хорошим приближением можно считать, что $\tau_{\text{CN}} \approx \tau_{14}$. Для звезд верхней части ГП погрешность этого приближения не превышает нескольких процентов. Поэтому $^{14}\text{N} = (\tau_{14}/\tau_{\text{CN}})\text{CN} \approx \text{CN}$. Итак, если в газе достаточно долго действовал CN-цикл, то большая часть ядер C и N окажется переработанной в один изотоп азота — ^{14}N . Его содержание будет составлять более 95% общего числа ядер углерода и азота, имевшихся в газе первоначально. По-видимому, это *один из существенных, а может быть и основной путь синтеза азота в природе*. Если это так, то *значительная часть азота является продуктом двукратного звездного нуклеосинтеза*. На первом шаге горение гелия в недрах красных гигантов производит ядра ^{12}C и ^{16}O (см. разд. ??), которые, попав затем в межзвездную среду и из нее — в звезды следующих поколений, перерабатываются в них в CNO-цикле в азот (^{16}O за счет NO-циклов также почти целиком превращается в ^{14}N , см. п. 2.3).

Далее, как уже упоминалось, равновесное содержание тяжелого изотопа азота ^{15}N должно быть очень низким, $^{15}\text{N}/^{14}\text{N} \approx 4 \cdot 10^{-5}$, поскольку его синтез из ^{14}N идет медленно, а разрушение — очень быстро (в реакции $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$). Заметим, что на Земле отношение $^{15}\text{N}/^{14}\text{N}$ на два

Таблица VI.2.1:

Относительные содержания изотопов С и N,
устанавливающиеся в равновесном CN-цикле,
в долях полного числа ядер углерода и азота

T_6	$^{12}\text{C}/\text{CN}$	$^{13}\text{C}/\text{CN}$	$(^{12}\text{C} + ^{13}\text{C})/\text{CN}$	$^{14}\text{N}/\text{CN}$	$^{15}\text{N}/\text{CN}$
10	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$5.22 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	0.998	$4.42 \cdot 10^{-5}$
15	$4.19 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$5.42 \cdot 10^{-3}$	0.995	$4.12 \cdot 10^{-5}$
20	$7.17 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$9.26 \cdot 10^{-3}$	0.991	$3.88 \cdot 10^{-5}$
25	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	0.986	$3.67 \cdot 10^{-5}$
30	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$3.99 \cdot 10^{-3}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$	0.982	$3.49 \cdot 10^{-5}$

Таблица VI.2.2:

Относительные содержания (в %) изотопов
С, N и O в Солнечной системе

^{12}C	98.89	^{14}N	99.634	^{16}O	99.759
^{13}C	1.11	^{15}N	0.366	^{17}O	0.0374
				^{18}O	0.2039

порядка выше: $^{15}\text{N}/^{14}\text{N} = 3.7 \cdot 10^{-3}$, что требует специального объяснения.

Наконец, практически *независимо от температуры* (и, разумеется, от плотности), при которой работает CN-цикл, в равновесном режиме устанавливается специфическое отношение содержаний изотопов углерода ^{12}C и ^{13}C :

$$\frac{^{12}\text{C}}{^{13}\text{C}} \approx 3.4.$$

На Земле содержание ^{13}C гораздо ниже: $^{13}\text{C}/^{12}\text{C} \approx 1.1\%$, в атмосфере Солнца оно того же порядка, что и на Земле.

Детальные данные о равновесном содержании изотопов С и N, определяемом условием (2.2), представлены в Табл. VI.2.1. При расчетах

использовались скорости реакций, приводимые в сводках У. Фаулера с сотрудниками (*Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **13**, 69, 1975; **21**, 165, 1983). Табл. 2.2 суммирует данные о содержании изотопов C, N и O в Солнечной системе.

Упражнения.

- 1) Объясните очень слабую зависимость величин отношений $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ и $^{15}\text{N}/^{14}\text{N}$ от температуры.
- 2) Покажите, пользуясь (2.2) и данными Табл. VI.1.1, с. 201, что температурную зависимость равновесного отношения $^{12}\text{C}/^{14}\text{N}$ вблизи T_0 можно аппроксимировать выражением

$$\left. \frac{^{12}\text{C}}{^{14}\text{N}} \right|_T = \left. \frac{^{12}\text{C}}{^{14}\text{N}} \right|_{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^\mu,$$

где

$$\mu = \frac{5.1}{(T_0)^{1/3}},$$

причем, как обычно, T_0 — температура в миллионах кельвинов. В окрестности $T_0 = 27$ имеем поэтому $^{12}\text{C}/^{14}\text{N} \propto T^{1.7}$.

Для интерпретации ряда наблюдательных фактов важно следующее обстоятельство. Отношения содержаний изотопов $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ и $^{12}\text{C}/^{14}\text{N}$ становятся близкими к равновесным спустя существенно разное время после начала работы цикла, или, как говорят, требуют различной глубины CN-переработки (CN-processing), или различной длительности CN-экспозиции. В частности, *отношение $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ делается близким к равновесному после очень короткой экспозиции, $t_{exp} \sim 0.5 \tau_{12}$* . Отношение же $^{12}\text{C}/^{14}\text{N}$ приближается к равновесному лишь в результате значительно более длительной CN-переработки, $t_{exp} \sim (7 \div 10)\tau_{12}$. Предлагаем читателю самостоятельно понять, почему это так. Соответствующее количественное рассмотрение см. в п. ???. Астрономические следствия обсуждаются в п. ???; см. также п. ??.

2.3. Равновесный тройной CNO-цикл

Рассмотрим теперь установившийся режим тройного CNO-цикла. Ограничимся температурами $T_6 \geq 15$. При меньших температурах равновесие в кислородной ветви цикла за время жизни звезды заведомо не достигается.

Установившееся, не меняющееся со временем содержание нуклидов, связанных друг с другом любой сколь угодно сложной сетью реакций, определяется очевидными *условиями стационарности*: скорость синтеза ядер каждого данного вида всеми возможными способами должна

быть равна суммарной скорости их разрушения по всем имеющимся каналам.

Выражающие это условие уравнения аналогичны столь привычным для астрофизиков-оптиков системам уравнений стационарности, которые определяют населенности уровней атомов в газе из условия баланса скоростей заселения и опустошения каждого из уровней.

Хотя использование этого общего подхода для анализа равновесного тройного CNO-цикла может показаться стрельбой из пушки по воробьям, оно поучительно в педагогическом отношении, позволяя на простом примере проиллюстрировать общий метод.

Обратимся к структурной схеме цикла (рис. VIII.2.1, стр. 199). Она позволяет написать следующие очевидные условия стационарности (слева в каждой строке указано то ядро, к которому это условие относится; нестабильными изотопами по-прежнему пренебрегаем, считая тем самым, что β -распады происходят мгновенно):

$$\begin{array}{llll}
 {}^{12}\text{C} : & \lambda_{15}^{\alpha} {}^{15}\text{N} & = & \lambda_{12} {}^{12}\text{C} & a \\
 {}^{13}\text{C} : & \lambda_{12} {}^{12}\text{C} & = & \lambda_{13} {}^{13}\text{C} & b \\
 {}^{14}\text{N} : & \lambda_{13} {}^{13}\text{C} + \lambda_{17}^{\alpha} {}^{17}\text{O} & = & \lambda_{14} {}^{14}\text{N} & c \\
 {}^{15}\text{N} : & \lambda_{14} {}^{14}\text{N} + \lambda_{18}^{\alpha} {}^{18}\text{O} & = & (\lambda_{15}^{\alpha} + \lambda_{15}) {}^{15}\text{N} & d \\
 {}^{16}\text{O} : & \lambda_{15} {}^{15}\text{N} & = & \lambda_{16} {}^{16}\text{O} & e \\
 {}^{17}\text{O} : & \lambda_{16} {}^{16}\text{O} & = & (\lambda_{17}^{\alpha} + \lambda_{17}) {}^{17}\text{O} & f \\
 {}^{18}\text{O} : & \lambda_{17} {}^{17}\text{O} & = & \lambda_{18}^{\alpha} {}^{18}\text{O} & g
 \end{array}$$

Эта однородная линейная алгебраическая система имеет ненулевое решение. Значит, ее определитель равен нулю, т.е. одно из уравнений является следствием остальных.

Проверьте, что мы получим последнее уравнение, если сложим почленно все остальные.

Таким образом, выписанная система определяет лишь *отношения* равновесных распространенностей различных изотопов C, N и O друг по отношению к другу. Если одно из уравнений системы (любое) отбросить, а вместо него добавить условие

$${}^{12}\text{C} + {}^{13}\text{C} + {}^{14}\text{N} + {}^{15}\text{N} + {}^{16}\text{O} + {}^{17}\text{O} + {}^{18}\text{O} = \text{CNO}, \quad h$$

где CNO — (заданная) суммарная концентрация всех ядер C, N и O, то из полученной таким образом системы можно будет найти абсолютное содержание различных CNO-нуклидов. Взяв CNO = 1, получим в качестве решения распространенности различных изотопов катализаторов CNO-цикла в долях их общего числа.

Казалось бы, все сделано — осталось выбрать температуру, считать по ней значения коэффициентов λ и решить систему. Однако поступить так — это значит не быть настоящим физиком. Всегда следует помнить девиз: „Цель расчетов — не числа, а понимание”.

Очень часто понимание достигается за счет того, что в задаче удастся отыскать малый параметр. В данном случае он очевиден — это отношение скоростей реакций (p, γ) и (p, α) на ядре ^{15}N , т.е. эффективность отщепления от основного CN-цикла в кислородную ветвь. Этот параметр

$$\varepsilon \equiv \lambda_{15}/\lambda_{15}^{\alpha}$$

имеет порядок 10^{-3} . Малость ε позволяет рассматривать влияние кислородной ветви методом возмущений.

При $\varepsilon = 0$ (т.е. $\lambda_{15} = 0$) система уравнений стационарности CNO-цикла переходит в рассматривавшиеся ранее уравнения, описывающие равновесный простой CN-цикл (проверьте!). При этом полное число ядер всех изотопов C и N равно суммарному числу первоначально содержащихся в газе ядер C, N и O. Последнее не должно удивлять. При $\varepsilon = 0$ оттока из CN-цикла в кислородную ветвь нет, „подкачка” же в CN-ветвь ядер кислорода за счет их выгорания возможна. Поэтому в процессе выхода тройного цикла на стационарный режим весь кислород выгорает, превращаясь в C и N (на самом деле главным образом в ^{14}N , как мы знаем из п. 2.2).

Невозмущенное решение ($\varepsilon = 0$) известно в явном виде (см. предыдущий пункт):

$$^{12}\text{C} = \tau_{12} \frac{\text{CNO}}{\tau_{\text{CN}}}, \quad \dots, \quad ^{15}\text{N} = \tau_{15}^{\alpha} \frac{\text{CNO}}{\tau_{\text{CN}}}.$$

Решения при $\varepsilon \neq 0$ естественно искать в виде рядов по степеням ε вида

$$^{15}\text{N} = ^{15}\text{N}^{(0)} + \varepsilon ^{15}\text{N}^{(1)} + \dots$$

и аналогично для ^{12}C , ^{13}C и ^{14}N . Для изотопов кислорода разложения должны начинаться с членов, пропорциональных ε , так как при $\varepsilon = 0$ кислорода в равновесном режиме нет. Поэтому

$$^{16}\text{O} = \varepsilon ^{16}\text{O}^{(1)} + \dots$$

и подобным же образом для ^{17}O и ^{18}O . Так как ε малó, а скорости реакций известны не абсолютно точно, удерживать члены с ε^2 не имеет смысла.

Подстановка приведенных разложений в уравнение стационарности для ^{16}O дает (с точностью до членов порядка ε^2)

$$^{16}\text{O} = \varepsilon \cdot \tau_{16} \frac{\text{CNO}}{\tau_{\text{CN}}}.$$

Хотя из-за различия в высоте кулоновского барьера для кислорода и азота значение τ_{16} на один – два порядка превосходит τ_{14} , а значит, и τ_{CN} , так как $\tau_{14} \approx \tau_{\text{CN}}$ (см. Табл. VI.1.2, с. 205), вследствие малости ε равновесное содержание ^{16}O тем не менее оказывается низким, всего несколько процентов. Так, при $T_6 = 30$ имеем $^{16}\text{O}/\text{CNO} \approx 2\%$. Таким образом, *при выходе CNO-цикла на равновесный режим происходит сильное выгорание первоначально имевшегося в газе кислорода*. Далее, ясно, что с ростом температуры равновесное содержание ^{16}O должно убывать, поскольку из-за различия в Z скорость разрушающих кислород протонных реакций зависит от T сильнее, чем темп синтезирующей его реакции $^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$.

По найденному содержанию ^{16}O из соответствующих уравнений стационарности немедленно находятся содержания ^{17}O и ^{18}O . Для ^{18}O содержание заведомо низкое, хотя из-за неопределенности в сечении реакции $^{18}\text{O}(p, \alpha)^{15}\text{N}$ численное его значение ненадежно. Отношение же $^{17}\text{O}/^{16}\text{O}$ оказывается не малым. Так, при $T_6 = 30$ содержание ^{17}O лишь всего примерно в полтора раза ниже содержания ^{16}O . Это резко расходится с тем, что есть у нас на Земле, где изотоп ^{17}O очень редок (см. Табл. 2.2, с. 210). Заметим, что отношение $^{17}\text{O}/^{16}\text{O}$ заметно меняется с температурой. (Почему это может происходить?)

Сравнительно высокое содержание ^{17}O в газе, остающемся после выгорания водорода в CNO-цикле, представляет интерес в связи с проблемами нуклеосинтеза. На стадии горения гелия может идти реакция $^{17}\text{O}(\alpha, n)^{20}\text{Ne}$. Таким образом, ^{17}O становится на этом этапе поставщиком нейтронов, как и другой продукт CNO-цикла — изотоп ^{13}C (за счет реакции $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$). Появление в звезде свободных нейтронов — важное событие в ее жизни. Оно открывает возможность синтеза тяжелых ядер за счет реакций нейтронного захвата, для которых кулоновские барьеры не являются препятствием. См. гл. ??.

Очевидно, что вследствие малости ε подключение к быстро циркулирующему CN-циклу кислородных ветвей NOI и NOII с очень малой „силой тока” в них и большим временем циркуляции должно мало сказаться на *относительных* распространенностях изотопов CN-цикла. Дальнейшая детализация едва ли заслуживает внимания. Полезнее просто привести окончательные результаты. Они представлены в

Таблица VI.2.3:

Относительные распространенности нуклидов,
устанавливающиеся в равновесном тройном CNO-цикле*

T_6	C/CNO	N/CNO	O/CNO	$^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$	$^{16}\text{O}/^{17}\text{O}$
15	$4.90 \cdot 10^{-3}$	0.899	$9.63 \cdot 10^{-2}$	3.41	???
30	$1.73 \cdot 10^{-3}$	0.934	$2.89 \cdot 10^{-2}$	3.45	???
50	$3.40 \cdot 10^{-2}$	0.953	$1.34 \cdot 10^{-2}$	3.46	???
80	$5.42 \cdot 10^{-2}$	0.939		3.44	???

* $\text{C} \equiv ^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}$; $\text{N} \equiv ^{14}\text{N} + ^{15}\text{N}$; $\text{O} \equiv ^{16}\text{O} + ^{17}\text{O}$; $\text{CNO} \equiv \text{C} + \text{N} + \text{O}$.

Табл. VI.2.3. При расчетах использовались скорости реакций из фаулеровских сводок 1975 и 1983 гг. (*Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **13**, 69, 1975; **21**, 165, 1983). Поправки на электронное экранирование не вводились.

Резюме важнейшего результата этого параграфа сводится к следующему. В результате длительной работы CNO-цикла, помимо выделения энергии и выгорания водорода, происходит превращение почти всех ($\sim 94\%$ при $T_6 = 30$) ядер C, N и O в азот ^{14}N , а также радикальное изменение изотопного состава сохраняющихся в виде примесей ядер углерода ($\sim 2\%$) и кислорода ($\sim 4\%$): $^{12}\text{C}/^{13}\text{C} \approx 3.5$, $^{16}\text{O}/^{17}\text{O} \approx 3 : 2$.

3 . КИНЕТИКА НУКЛЕОСИНТЕЗА В CNO-ЦИКЛЕ

3.1. Основное приближение

Вслед за проведенным в предыдущем разделе рассмотрением равновесного режима CNO-цикла естественно дать количественное исследование нуклеосинте-

за в переходном режиме, до достижения равновесия.

Работа тройного CNO-цикла в неравновесном режиме определяется соответствующей системой дифференциальных уравнений кинетики нуклеосинтеза. Они описывают изменение со временем содержания каждого из фигурирующих в цикле изотопов. Эти дифференциальные уравнения легко составляются непосредственно по уравнениям реакций (рецепт см. в п. ???). Действуя подобным формальным образом, мы получили бы систему одиннадцатого порядка — по одному уравнению первого порядка на каждый из изотопов C, N, O и F, встречающихся в тройном цикле. Выписывать эту систему едва ли целесообразно, так как она допускает значительные упрощения, причем некоторые из них почти очевидны. Физической причиной этих упрощений служат большие различия в характерных временах протекания реакций цикла.

Вместо того, чтобы сразу рассматривать конкретные уравнения кинетики для CNO-цикла, начнем с обсуждения одной общей часто встречающейся ситуации. Пусть некоторое ядро типа A синтезируется из ядра B в реакции, идущей с характерным временем τ_B , а разрушается в некоторой другой реакции, имеющей характерное время протекания τ_A . Тогда изменение содержания ядер A со временем определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B}{\tau_B} - \frac{A}{\tau_A}. \quad (3.1)$$

Здесь символы A и B — это концентрации соответствующих ядер (так что A и B означают у нас одновременно и типы ядер, и концентрации ядер этих типов; недоразумений, однако, возникнуть не должно). Предположим, что синтез ядер A идет существенно медленнее их разрушения, т.е.

$$\tau_A \ll \tau_B.$$

Будем, далее, считать, что на временах порядка τ_A изменениями плотности, температуры и концентрации ядер B можно пренебречь. Тогда в уравнении (3.1) τ_A , τ_B и B постоянны, и его решение можно записать в

виде

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{A}{B}\right)_e \left(1 - e^{-t/\tau_A}\right) + \left(\frac{A}{B}\right)_0 e^{-t/\tau_A}, \quad (3.2)$$

где $(A/B)_0$ — начальное и $(A/B)_e$ — равновесное отношение концентраций:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_e = \frac{\tau_A}{\tau_B}.$$

Так как по предположению скорость разрушения ядер А существенно меньше скорости их синтеза, то $(A/B)_e$ мало. Важнее, однако, подчеркнуть другое: согласно (3.2), характерное время достижения равновесия дается τ_A , т.е. *меньшим из двух* фигурирующих в уравнении (3.1) времен τ_A и τ_B . Поэтому если содержание ядер В меняется со временем, но эти изменения происходят на временных масштабах, больших по сравнению с τ_A , то содержание быстро разрушающихся ядер А будет успевать „следить” за медленно меняющейся концентрацией рождающих их ядер В. В результате в каждый данный момент отношение (A/B) можно считать равновесным. Концентрацию ядер А можно при этом находить по имеющейся в данный момент концентрации В из условия

$$\frac{A}{\tau_A} = \frac{B}{\tau_B},$$

получающегося из (3.1) приравниванием производной к нулю.

Что реально означает „много меньше” в условии $\tau_A \ll \tau_B$, лежащем в основе всех этих рассуждений? Если требуется точность $\sim 1\%$ — а в обсуждаемых задачах почти никогда большего не нужно, — то достаточно, чтобы τ_B превышало τ_A раза в $3 \div 4$. Подробнее об этом — немного позже.

**3.2. Выход на
равновесный режим
в CN-цикле**

Теперь мы готовы к изучению кинетики CNO-цикла. В основе лежит анализ характерных времен протекания различных реакций. Начнем с рассмотрения простого CN-цикла. (Учет кислородной

ветви, как уже упоминалось в п. 2.3, мало сказывается на *относительных* распространенностях ядер CN-цикла; подробнее см. ниже, п. ??). Времена жизни синтезируемых в CN-цикле нестабильных изотопов ^{15}N и ^{15}O на несколько порядков меньше характерных времен всех других реакций — всего минуты. Поэтому, когда речь идет о гидростатических стадиях эволюции (а не о звездных взрывах), относительное содержание этих изотопов в любой момент можно с огромной точностью считать

равновесным:

$$\frac{{}^{12}\text{C}}{\tau_{12}} = \frac{{}^{13}\text{N}}{\tau_{13}}, \quad \frac{{}^{14}\text{N}}{\tau_{14}} = \frac{{}^{15}\text{O}}{\tau_{15}}, \quad t \gg \max(\tau_{\beta}).$$

Справа указано, спустя какое время такое относительное содержание изотопов устанавливается.

Характерные времена остальных реакций цикла располагаются в порядке возрастания следующим образом:

$$\tau_{15}, \quad \tau_{13}, \quad \tau_{12}, \quad \tau_{14},$$

причем они значительно отличаются друг от друга (см. Табл. VI.1.2, с. 205). Следствием этого являются существенные упрощения в кинетике нуклеосинтеза в CN-цикле.

Начнем с рассмотрения содержания ${}^{15}\text{N}$. Из-за очень большого сечения идущей с сильным взаимодействием реакции ${}^{15}\text{N}(p, \alpha){}^{12}\text{C}$ время выгорания ${}^{15}\text{N}$ очень мало (порядка 10^4 лет при $T_6 = 15$ и $\rho X_H = 100$, см. Табл. VI.1.2). Так как распад ${}^{15}\text{O}$ можно считать происходящим мгновенно, то изменение содержания ${}^{15}\text{N}$ со временем должно определяться уравнением

$$\frac{d{}^{15}\text{N}}{dt} = \frac{{}^{14}\text{N}}{\tau_{14}} - \frac{{}^{15}\text{N}}{\tau_{15}},$$

вытекающим непосредственно из цепочки реакций цикла. Время выгорания ${}^{14}\text{N}$ велико, $\sim 2 \cdot 10^8$ лет при $T_6 = 15$ и $\rho X_H = 100$. Поэтому это уравнение принадлежит к обсуждавшемуся выше общему типу (3.1) с $\tau_A \ll \tau_B$. Вывод — при $T_6 \geq 15$ спустя достаточно короткое время ($\lesssim 10^5$ лет) должно устанавливаться равновесное (очень низкое) относительное содержание ${}^{15}\text{N}/{}^{14}\text{N}$. Оно определяется условием

$$\frac{{}^{14}\text{N}}{\tau_{14}} = \frac{{}^{15}\text{N}}{\tau_{15}}, \quad t \gg \tau_{15},$$

получающимся приравниванием производной к нулю в приведенном только что уравнении. Заметим, что при высоких температурах такое относительное содержание изотопов азота устанавливается *очень быстро*, поскольку τ_{15} в этом случае мало. Так, при $T_6 = 20$ имеем $\tau_{15} \sim 10^2$ лет, а при $T_6 = 25$ значение τ_{15} всего порядка года.

Итак, при $t \gg \tau_{15}$ система уравнений нуклеосинтеза в простом CN-цикле очень сильно упрощается. Заметно отличаться от равновесных могут лишь концентрации ${}^{12}\text{C}$, ${}^{13}\text{C}$ и ${}^{14}\text{N}$, содержания же всех других ядер подстроены равновесным образом под имеющиеся в каждый данный момент концентрации ${}^{12}\text{C}$, ${}^{13}\text{C}$ и ${}^{14}\text{N}$. Изменение содержания со

временем этих трех в некотором смысле основных ядер определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d^{13}\text{C}}{dt} &= \frac{^{12}\text{C}}{\tau_{12}} - \frac{^{13}\text{C}}{\tau_{13}}, \\ \frac{d^{12}\text{C}}{dt} &= \frac{^{14}\text{N}}{\tau_{14}} - \frac{^{12}\text{C}}{\tau_{12}}, \\ \frac{d^{14}\text{N}}{dt} &= \frac{^{13}\text{C}}{\tau_{13}} - \frac{^{14}\text{N}}{\tau_{14}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Они непосредственно следуют из цепочки реакций CN-цикла (считаем β -распады происходящими мгновенно).

Если не требовать высокой точности, то эта система допускает дальнейшее, и существенное упрощение. Дело в том, что время выгорания ^{12}C хотя и не на порядки, но все же довольно значительно, примерно в три с половиной раза, превосходит время выгорания ^{13}C (отсюда равновесное отношение $^{12}\text{C}/^{13}\text{C} \approx 3.5$). Поэтому первое из трех выписанных уравнений можно приближенно трактовать по нашей схеме, т.е. как уравнение (3.1) с $\tau_A \ll \tau_B$ и постоянными A , τ_A и τ_B . В результате приходим к заключению, что спустя время порядка нескольких τ_{13} должно установиться равновесное отношение содержаний ^{12}C и ^{13}C , определяемое условием

$$\frac{^{12}\text{C}}{\tau_{12}} = \frac{^{13}\text{C}}{\tau_{13}}, \quad t \gg \tau_{13}.$$

Подчеркнем, что пока в цикле не достигнуто полного равновесия, абсолютные содержания ^{12}C и ^{13}C могут продолжать меняться и при $t > \tau_{13}$.

По достижении равновесного отношения $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ наступает последний, самый медленный этап релаксации — выгорание углерода с превращением его в азот. Характерное время этого процесса равно, очевидно, τ_{12} . Это видно и из (3.3). По истечении времени в несколько τ_{12} достигается полное равновесие, т.е.

$$\frac{^{14}\text{N}}{\tau_{14}} = \frac{^{12}\text{C}}{\tau_{12}}, \quad t \gg \tau_{12}.$$

Разумеется, это лишь приближенное рассмотрение. Более строгий анализ требует аккуратного решения системы (3.3). Вряд ли, впрочем, этим стоит заниматься, так как в реальных звездах исходные предположения о постоянстве во времени температуры и концентрации протонов не выполняются. Должно сказываться и влияние NO-ветвей цикла. Поэтому, строго говоря, система уравнений нуклеосинтеза должна решаться

совместно с остальными уравнениями, описывающими строение и эволюцию звезды. В лучших из имеющихся расчетов звездной эволюции так и поступают. Результат подобного расчета нуклеосинтеза за счет CNO-цикла в недрах Солнца см. в следующем пункте.

Резюмируем *два важнейших заключения* качественного характера, которые выявило проведенное рассмотрение. *Во-первых, время выхода* CN-цикла *на стационарный режим* дается не наибольшим из фигурирующих в нем характерных времен τ_{14} , а следующим за ним по величине (τ_{12}). *Во-вторых, равновесные отношения содержаний изотопов азота и углерода $^{15}\text{N}/^{14}\text{N}$ и $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ устанавливаются задолго до наступления равновесного режима.*

Глава VII

БЕЛЫЕ КАРЛИКИ

??

?.?. ????????

1. МОДЕЛЬ ЧАНДРАСЕКАРА: УРОВЕНЬ II

1.1. Гравитационный потенциал

Расчет механического равновесия полностью вырожденной самогравитирующей конфигурации сводится к совместному решению уравнения гидростатики

$$\nabla P = -\rho \nabla \varphi,$$

где φ — гравитационный потенциал, и уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho$$

в комбинации с баротропным уравнением состояния $P = P(\rho)$. Это позволяет найти давление, плотность и гравитационный потенциал.

Баротропность уравнения состояния следует из предположения о том, что имеется полное вырождение, т.е. формально $T = 0$. Явный вид зависимости $P = P(\rho)$ определяется тем, какие факторы учитываются. В классической теории БК Чандрасекара в качестве $P = P(\rho)$ берется уравнение состояния идеального полностью вырожденного электронного газа. О том, какова для вещества БК реальная физическая точность этого уравнения состояния, речь пойдет в п. ???. Коротко говоря, в большинстве случаев это вполне удовлетворительное приближение (погрешность $\lesssim 10\%$).

Наша тактика будет следующей. В качестве первого шага из уравнения гидростатики в комбинации с уравнением состояния в параметрической форме (см. п. ????)

$$P = P_1 F(x), \quad \rho = \mu_e \rho_1 x^3$$

мы найдем φ в функции параметра релятивизации x . Тем самым фактически будет получена связь между потенциалом и плотностью. На втором шаге из уравнения Пуассона получим зависимость параметра x от расстояния от центра звезды r , что и даст полное решение задачи.

Для сферически-симметричного случая уравнение гидростатического равновесия принимает вид

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\varphi}{dr}, \quad (1.1)$$

так что для нахождения потенциала достаточно иметь *производную* от давления. Поэтому нам фактически понадобится не сама функция $F(x)$,

а имеющая гораздо более простое явное выражение ее производная. Мы имеем (см. п. ????)

$$F(x) = \int_0^x \frac{y^4 dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

так что

$$\frac{dP}{dr} = P_1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{dr}.$$

Вводя это и выражение для плотности $\rho = \mu_e \rho_1 x^3$ в уравнение гидростатики, получаем после сокращений

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{P_1}{\mu_e \rho_1} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}},$$

откуда

$$\varphi = -\frac{P_1}{\mu_e \rho_1} (1+x^2)^{1/2} + C.$$

Постоянную интегрирования C находим из условия на поверхности звезды, где, с одной стороны, $\varphi = -GM/R$, а с другой $\rho = 0$, так что $x = 0$. Учитывая также, что, как было установлено в п. ????,

$$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{m c^2}{m_0},$$

получаем окончательно

$$\mu_e m_0 \varphi + m c^2 (\sqrt{1+x^2} - 1) = -\mu_e m_0 \frac{GM}{R}. \quad (1.2)$$

Первый шаг тем самым завершен — гравитационный потенциал φ найден в функции параметра x . Прежде чем переходить ко второму шагу, обсудим полученный результат — он того заслуживает.

1.2. Обсуждение

1) Термодинамическое рассмотрение. Обозначим через H энтальпию газа (в расчете на 1 г)

$$H = U + PV,$$

где U — внутренняя энергия, V — удельный объем: $V = 1/\rho$. Привлекая основное термодинамическое соотношение $T dS = dU + P dV$, находим, что при постоянной энтропии $dH|_S = V dP$, или

$$dH = \frac{dP}{\rho}, \quad S = \text{const.}$$

С учетом этого для любой изэнтропичной звезды уравнение гидростатического равновесия (1.1) можно переписать в виде:

$$\frac{d(H + \varphi)}{dr} = 0.$$

Так как на поверхности звезды $\varphi = -GM/R$, $P = 0$, $\rho = 0$ и $H = 0$, то отсюда

$$\varphi + H = -\frac{GM}{R}. \quad (1.3)$$

Очевидно, что формула (1.2) — это частный случай (1.3) для холодного ($T = 0$) БК. Сопоставление (1.2) и (1.3) показывает, что для полностью вырожденного электронного газа

$$\mu_e m_0 H = m c^2 \left(\sqrt{1 + x^2} - 1 \right).$$

Величина, стоящая справа, есть кинетическая энергия ε_F электрона с импульсом, равным граничному импульсу Ферми p_F (напомним, что $x \equiv p_F/mc$):

$$\varepsilon_F = m c^2 \left(\sqrt{1 + x^2} - 1 \right),$$

тогда как $\mu_e m_0 H$ есть, очевидно, энтальпия в расчете на свободный электрон. Итак, мы пришли к следующему красивому результату: для идеального газа с $T = 0$ (полное вырождение электронного газа; вклад во внутреннюю энергию и давление от атомных ядер нет; вклад в массу — только от ядер) энтальпия равна

$$H = \frac{\varepsilon_F}{\mu_e m_0}.$$

Если полученное для H выражение ввести в определение энтальпии $H = U + PV$ и воспользоваться тем, что согласно уравнению состояния

$$PV \equiv \frac{P}{\rho} = \frac{P_1}{\mu_e \rho_1} \frac{F(x)}{x^3} = \frac{m c^2}{\mu_e m_0} \frac{F(x)}{x^3},$$

то для внутренней энергии полностью вырожденного электронного газа мы получим

$$U = \frac{m c^2}{\mu_e m_0} \left(\sqrt{1 + x^2} - 1 - \frac{F(x)}{x^3} \right).$$

Среди читателей наверняка найдутся такие, которым вывод выражений для H и U с привлечением уравнения гидростатического равновесия покажется слишком экзотическим. Им можно рекомендовать стандартный путь — вычисление внутренней энергии по очевидной формуле

$$U \rho = \int_0^{p_F} n(p) \varepsilon(p) dp,$$

где p_F — граничный импульс Ферми, $\varepsilon(p)$ — энергия электрона с импульсом p за вычетом энергии покоя:

$$\varepsilon(p) = m c^2 \left(\sqrt{1 + (p/mc)^2} - 1 \right),$$

наконец, $n(p)$ — функция распределения электронов по импульсам:

$$n(p) = \begin{cases} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2, & p \leq p_F, \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

Результат, разумеется, получается тот же, но требуются вычисления.

Прodelайте необходимые выкладки.

2) Внутренняя энергия. Для любой изэнтропичной звезды, в том числе и для холодного БК, ее внутренняя энергия E_U весьма просто выражается через гравитационную энергию связи E_G , именно

$$E_U = -\frac{5}{3} E_G - \frac{GM^2}{R}. \quad (1.4)$$

Этот красивый результат легко получить из найденного только что условия равновесия в форме $\varphi + H = -GM/R$. Так как $H = U + P/\rho$, то

$$\varphi + U + \frac{P}{\rho} = -\frac{GM}{R}.$$

Умножая на ρ и интегрируя по всему объему звезды, находим

$$\int_V \rho \varphi dV + \int_V U \rho dV + \int_V P dV = -\frac{GM^2}{R}.$$

Первый интеграл есть, очевидно, $2E_G$ (см. п. III.2.1), второй — это внутренняя энергия конфигурации E_U , наконец, третий согласно теореме вириала равен $-E_G/3$ (см. п. III.2.2). Отсюда и следует искомое выражение для E_U .

Полная энергия $E = E_U + E_G$ изэнтропичной звезды согласно (1.4) оказывается равной

$$E = -\frac{2}{3} E_G - \frac{GM^2}{R}. \quad (1.5)$$

Замечание о политропах. Пусть уравнение состояния вещества имеет вид $P = K\rho^{1+1/n}$. Звезда из такого вещества есть, очевидно, политропа индекса n . Из закона сохранения энергии $dQ = dU + P d(1/\rho)$ при адиабатическом изменении состояния ($S = \text{const}$) имеем $dU = -P d(1/\rho)$, так что $dU = (P/\rho^2) d\rho$, или $U = K\rho^{(1/n)-1} d\rho$, откуда $U = nP/\rho$. Поэтому внутренняя энергия звезды из такого вещества равна

$$E_U = n \int_V P dV = \frac{n}{3} E_G.$$

Второе равенство написано здесь по теореме вириала. Комбинируя последнее выражение с формулой (1.4), получаем хорошо известный из теории политроп результат (см. п. V.2.1)

$$E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R},$$

а (1.5) дает

$$E = -\frac{n-3}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

Обращаем внимание на то, что в п. V.2.1 при выводе приведенной только что формулы для E_G предположения о постоянстве энтропии вдоль радиуса не делалось. Она справедлива для любой, не обязательно изэнтропичной политропы. Выражение же для E верно лишь при $S = \text{const}$.

3) Релятивистские эффекты. Звезда создает гравитационную потенциальную яму. Чтобы можно было пользоваться ньютоновской теорией, глубина этой ямы не должна быть слишком большой. Если φ_c — потенциал на дне ямы, т.е. в центре звезды, то должно быть

$$|\varphi_c| \ll c^2.$$

Возникает вопрос: не вытекает ли из этого требования, что релятивистские эффекты несущественны и в уравнении состояния, т.е. $x_c \ll 1$, или $\rho_c \ll 2 \cdot 10^6$ г/см³? Ответ, как мы сейчас убедимся, отрицателен: имеются такие $x_c \gg 1$, при которых все еще $|\varphi_c| \ll c^2$. Иначе говоря, возможно существование БК, сильно релятивистских по уравнению состояния, но классических по полю тяготения.

Действительно, положим

$$\varphi_c = -(\phi_c + 1) \frac{GM}{R},$$

так что $(\phi_c + 1)$ — это ньютоновский потенциал в центре конфигурации в единицах потенциала на поверхности. Для политроп с $n = 3/2$ и $n = 3$ имеем $\phi_c = 1.35$ и 3.42 , соответственно (см. Табл. V.2.2, с. 136). Значения ϕ_c для чандрасекаровских БК заключены между этими пределами,

монотонно возрастаая с массой. Применяя (1.2) к центру конфигурации, для которой $\rho_c \gg 2 \cdot 10^6$ г/см³, так что $x_c \gg 1$, находим

$$\phi_c \frac{GM}{R} = \frac{m c^2}{\mu_e m_0} x_c.$$

Неравенство $|\varphi_c| \ll c^2$ принимает поэтому вид

$$x_c \ll \frac{\phi_c}{\phi_c + 1} \frac{\mu_e m_0}{m}.$$

Но $\phi_c/(\phi_c + 1) \approx 3/4$ при $x_c \gg 1$ (впрочем, нам вполне достаточно было бы и более грубой оценки $\phi_c/(\phi_c + 1) \sim 1$). Поэтому при

$$x_c \ll \mu_e \cdot 1.4 \cdot 10^3,$$

чему при $\mu_e = 2$ соответствует $\rho_c \ll 5 \cdot 10^{16}$ г/см³, имеем $|\varphi_c| \ll c^2$, и поправки на ОТО должны быть малы. Итак, мы убедились, что существует очень широкий диапазон плотностей, при которых в уравнении состояния релятивистские эффекты существенны, поле же тяготения близко к ньютонову.

Фактически для БК поправки на ОТО заведомо не могут быть большими. Как будет показано в п. ??, при использовании того уравнения состояния, которое применялось выше, уже малые поправки на ОТО делают невозможным существование гидростатически равновесных БК с $\rho_c \gtrsim 10^9$ г/см³. Однако на самом деле неустойчивость должна возникать даже при несколько меньших плотностях. Причина этого в том, что при $\rho_c \gtrsim 10^8$ становятся существенными процессы обратного β -распада (нейтронизация ядер). Это ведет к резкому замедлению роста давления с плотностью, что и порождает неустойчивость.

Итак, со стороны высоких плотностей теория Чандрасекара ограничивается совместным действием двух причин — эффектов ОТО и (в большей мере) неприменимостью используемого в ней уравнения состояния (подробнее см. разд. ??).

1.3. Уравнение Чандрасекара

Обратимся теперь ко второму шагу в рассмотрении гидростатики БК — получению физических переменных P , ρ и φ в функции расстояния от центра r . Сде-

лать это в явном виде, выразив эти величины через элементарные функции или хотя бы в виде интегралов, не удастся. Нахождение зависимости от r включает в себя решение задачи Коши для некоторого нелинейного

дифференциального уравнения второго порядка. Впрочем, каких-либо трудностей при численном решении здесь не возникает. Излагаемая далее теория строится „по образу и подобию” теории политроп. Настоятельно рекомендуем читателю шаг за шагом сопоставлять чандрасекаровскую теорию белых карликов с эмденовской теорией политроп (см. разд. V.1 и V.2).

Оставим пока физику в стороне и будем действовать формально. Применяя к (1.2) оператор Лапласа и пользуясь уравнением Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$, получаем, учитывая, что у нас $\rho = \mu_e \rho_1 x^3$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\sqrt{1+x^2}}{dr} \right) = -\frac{\mu_e^2 m_0}{m c^2} 4\pi G \rho_1 x^3.$$

Теперь естественно сделать три вещи:

- 1) Ввести в качестве искомой функции

$$z = \sqrt{1+x^2};$$

- 2) Произвести масштабирование решения, добившись того, чтобы оно не выходило из промежутка $[0, 1]$. Для этого следует положить

$$z = z_c \psi,$$

где z_c — значение z в центре конфигурации (при $r = 0$);

- 3) Перейти от r к безразмерному расстоянию ζ :

$$r = r_1 \zeta,$$

выбрав линейный масштаб r_1 так, чтобы все размерные множители в уравнении сократились и вид его стал настолько простым, насколько это только возможно.

Осуществляя эту программу, найдем, что r_1 следует взять равным

$$r_1 = \frac{1}{z_c} \left(\frac{m c^2}{\mu_e^2 m_0 4\pi G \rho_1} \right)^{1/2}.$$

Тогда уравнение для ψ примет вид

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d\psi}{d\zeta} \right) = \left(\psi^2 - \frac{1}{z_c^2} \right)^{3/2}. \quad (1.6)$$

Оно должно решаться при следующих начальных условиях:

$$\psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = 0. \quad (1.7)$$

Первое из них есть следствие определения ψ , второе в силу (1.2) выражает равенство нулю силы тяжести в центре звезды.

Уравнение (1.6) — основное уравнение теории Чандрасекара в ее наиболее полной форме (1935 г.). Когда задача Коши (1.6) – (1.7) решена, тем самым фактически найдена зависимость параметра релятивизации x (а вместе с тем — давления, плотности и потенциала) от расстояния от центра r . Действительно, согласно определению безразмерных чандрасекаровских переменных ζ , ψ мы имеем

$$(1 + x^2)^{1/2} = z_c \psi(r/r_1),$$

так что

$$x = \left(1 + z_c^2 \psi^2(r/r_1)\right)^{1/2}.$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (1.6) содержит параметр z_c . Поэтому его решения образуют однопараметрическое семейство.

Глава VIII

КОЕ – КАКАЯ ФИЗИКА

??

г.г. гggggggg

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЗВЕЗДНОГО ВЕЩЕСТВА

1.1. Идеальный невырожденный газ

Все студенты-астрономы в свое время, безусловно, „проходили” вопросы, излагаемые в первых двух пунктах этого раздела. Однако опыт показывает, что у многих от этого мало что осталось. Мы не хотим строить все дальнейшее изложение на песке туманных воспоминаний читателя или на зыбкой надежде, что он честно полезет за справками в курсы физики. Поэтому было решено дать сводку самого необходимого, благо на это нужно не так уж много места.

В этом пункте напоминаются основные факты, относящиеся к термодинамике невырожденного газа. Рассмотрим единичную массу такого газа. Пусть ρ — его плотность, $V \equiv 1/\rho$ — удельный объем, т.е. объем, приходящийся на единицу массы, T — температура, P — давление. Будем для определенности считать, что газ находится в цилиндре с площадью основания 1 см^2 и высотой, численно равной V . Считаем, что этот цилиндр теплоизолирован, т.е. обмена энергией со стенками не происходит. Подведем к нему тепло dQ . В результате газ в объеме нагреется на dT . Коэффициент пропорциональности между dQ и dT в этом случае есть *удельная теплоемкость при постоянном объеме* c_v :

$$dQ = c_v dT, \quad V = \text{const.} \quad (1.1)$$

Будем теперь считать, что одно из оснований нашего цилиндрического объема — это поршень в длинном цилиндре. Тогда, подведя то же тепло dQ и медленно отодвинув поршень, можно добиться того, что давление в газе останется неизменным. Обозначим коэффициент пропорциональности между dQ и приращением температуры в этом случае через c_p , так что $dQ = c_p dT$. Величина c_p есть *удельная теплоемкость при постоянном давлении*. Тепло dQ частично расходуется здесь на нагрев газа (на это уходит энергия $c_v dT$), а частично — на работу $P dV$, совершаемую при перемещении поршня на dV под действием силы давления P . Поэтому

$$dQ = c_p dT = c_v dT + P dV, \quad P = \text{const.} \quad (1.2)$$

Теперь нам понадобится *уравнение состояния идеального газа*, которое считается известным читателю. Его можно записать в разных формах. Мы в нашем курсе чаще всего берем его в виде

$$P = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho T. \quad (1.3)$$

Здесь μ — средняя молекулярная масса и \mathcal{R}^* — универсальная газовая постоянная:

$$\mathcal{R}^* \equiv k/m_0 = 8.314 \cdot 10^7 \text{ эрг/К},$$

где $k = 1.381 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана и $m_0 = 1.661 \cdot 10^{-24}$ г — атомная единица массы (1/12 массы ядра ^{12}C). Она очень близка к массе протона m_p и к массе атома водорода m_{H} :

$$m_p = 1.007 m_0; \quad m_{\text{H}} = 1.008 m_0.$$

В подавляющем большинстве случаев различия между m_0 , m_p и m_{H} можно не делать.

Так как $\rho = 1/V$, то уравнение состояния (1.3) можно переписать в виде

$$PV = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T. \quad (1.4)$$

В термодинамике обычно используется именно эта его форма. Далее, поскольку $\rho = \mu t_0 N$, где N — концентрация частиц, то (1.3) эквивалентно следующему:

$$P = NkT. \quad (1.5)$$

Вводя, наконец, число Авогадро

$$N_{\text{A}} \equiv 1/m_0 = 6.022 \cdot 10^{23} (\text{моль})^{-1},$$

можем представить (1.4) также в форме

$$PV = (N_{\text{A}}/\mu) kT. \quad (1.6)$$

Согласно уравнению состояния (1.4),

$$P dV + V dP = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} dT.$$

Для изобарического процесса ($P = \text{const}$), очевидно, $dP = 0$, и поэтому

$$P dV = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} dT, \quad P = \text{const}, \quad (1.7)$$

так что (1.2) можно представить также в виде

$$dQ = c_v dT + \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} dT, \quad P = \text{const}. \quad (1.8)$$

Сопоставление (1.1) и (1.8) дает

$$c_p - c_v = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu}. \quad (1.9)$$

Обозначим через U внутреннюю энергию единицы массы газа (размерность — эрг/г). В *одноатомном* идеальном газе каждая частица имеет три степени свободы. Если газ не вырожден, то на одну степень свободы в расчете на частицу приходится энергия $kT/2$. Поэтому $U = (3/2)NkT/\rho$, или, так как $\rho = \mu m_0 N$ и $\mathcal{R}^* = k/m_0$, то

$$U = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T = \frac{3}{2} PV. \quad (1.10)$$

Помимо трех степеней свободы поступательного движения, всегда имеющихся у частиц идеального газа, в различных температурных областях может оказаться „размороженным” также то или иное число внутренних степеней свободы, связанных с вращательной и колебательной энергией молекул. Пусть в некоторой (достаточно широкой) области температур частицы газа обладают f степенями свободы. Ясно, что формула (1.10) заменится тогда на следующую:

$$U = \frac{f}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T. \quad (1.11)$$

Так как давление в идеальном газе целиком обусловлено скоростью переноса импульса пересекающими единичную площадку частицами, то оно не должно зависеть от внутренней (колебательной и вращательной) энергии частиц. Поэтому уравнение состояния и все формулы по (1.9) включительно сохраняют свой вид при любом $f \geq 3$.

Если при подводе тепла объем, занимаемый газом, сохраняется, то это тепло целиком идет на увеличение внутренней энергии газа, т.е. $dQ = dU$ при $V = \text{const}$. Из (1.1), (1.11) и (1.9) находим тогда

$$c_v = \frac{f}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu}, \quad c_p = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \frac{\mathcal{R}^*}{\mu}. \quad (1.12)$$

Отношение

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f} \quad (1.13)$$

называется *показателем адиабаты* газа. При $f = 3$ имеем $\gamma = 5/3$.

Удельная *энтропия* S (на единицу массы) вводится следующим общим соотношением:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{P dV}{T}. \quad (1.14)$$

Если состояние системы изменяется медленно (квазистатически), то энтропия является *функцией состояния*. Это означает, что разность энтропий $S_1 - S_2$ в состояниях 1 и 2 не зависит от того, каким образом

совершался (квазистатический) переход $1 \rightarrow 2$. Внутренняя энергия U также есть функция состояния, так что, вообще говоря, $U = U(T, V)$ (для идеального газа $U = U(T)$, зависимости от V нет). Поэтому

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV,$$

и выражение (1.14) для dS можно записать в виде

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T} \right] dV. \quad (1.15)$$

Поскольку S — это функция состояния, то dS — полный дифференциал. Значит, должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T} \right]_V,$$

откуда

$$P = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T. \quad (1.16)$$

Напомним, что выражение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции только тогда, когда

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Применим общую формулу (1.15) к идеальному невырожденному газу. Учитывая (1.11) и (1.13), а также то, что $V = 1/\rho$ и согласно (1.13) $f/2 = (\gamma - 1)^{-1}$, находим

$$dS = (\gamma - 1)^{-1} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{dT}{T} = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1.17)$$

Отсюда для удельной энтропии идеального газа получаем

$$S = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \ln \left(\frac{T^{1/(\gamma-1)}}{\rho} \right) + \text{const}, \quad (1.18)$$

что с помощью уравнения состояния (1.3) можно переписать также в форме

$$S = (\gamma - 1)^{-1} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \ln(P/\rho^\gamma) + \text{const}'. \quad (1.19)$$

Значения постоянных интегрирования в (1.18) и (1.19) найти из одних только термодинамических соображений нельзя. Впрочем, для нас это неважно, так как обычно приходится иметь дело лишь с изменениями S , и эти аддитивные постоянные сокращаются.

Процесс, происходящий без обмена энергией с окружающей средой ($dQ = 0$), называется *адиабатическим*. Если он происходит медленно (квазистатически), то энтропия остается постоянной (изэнтропический процесс). В силу (1.18) и (1.19) температура и давление связаны в этом случае с плотностью следующим образом (*уравнения адиабаты*):

$$P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad T/T_0 = (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}, \quad (1.20)$$

откуда следует также, что

$$P/P_0 = (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (1.21)$$

Последние формулы часто записывают в форме

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0; \quad \frac{dP}{P} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = 0; \quad \frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} = 0. \quad (1.22)$$

Здесь подразумевается, что изменения состояния происходят адиабатически, с сохранением энтропии: $S = \text{const}$. Поэтому в (1.22) в соответствии с принятыми в термодинамике обозначениями следовало бы писать $(dT/T)_S$ и т.д., а не просто dT/T и т.д., однако для сокращения записи мы этого не делаем. Другая распространенная форма записи (1.22):

$$\left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_S = \gamma; \quad \left(\frac{d \ln P}{d \ln T} \right)_S = \frac{\gamma}{\gamma-1}; \quad \left(\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right)_S = \gamma-1. \quad (1.23)$$

1.2. Равновесное излучение

Рассмотрим теперь термодинамические свойства равновесного излучения. У фотонного газа имеются два принципиальных отличия от обычного нерелятивистского невырожденного идеального газа. Во-первых, он является ультрарелятивистским. Во-вторых, это есть система с переменным числом частиц: с ростом температуры концентрация фотонов в равновесном поле излучения растет как T^3 . Эти обстоятельства существенно сказываются на термодинамике равновесного излучения.

Обозначим через u объемную плотность энергии (эрг·см⁻³) равновесного фотонного газа, через P_r — соответствующее давление излучения. Как и для всякого ультрарелятивистского газа, $P_r = u/3$.

Дайте кинетический вывод этой формулы, воспользовавшись следующим:

1) давление в идеальном газе — это скорость переноса импульса через единичную площадку пересекающими ее в одном направлении частицами; 2) в ультрарелятивистском газе скорости всех частиц можно считать равными c .

Соотношение $P_r = u/3$ в комбинации с простыми термодинамическими соображениями позволяет установить, что $u \propto T^4$. Действительно, обозначим через U энергию фотонного газа в расчете на единицу массы вещества (размерность — эрг \cdot г $^{-1}$). Тогда $U = u(T) V$, где $V = 1/\rho$ — удельный объем. Итак, $U = U(T, V)$. Соотношение (1.16), являющееся, напомним, прямым следствием определения энтропии, в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{u}{3} = \frac{1}{3} T \frac{du}{dT} - u,$$

откуда

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{du}{u}.$$

Интегрируя, находим

$$u(T) = a T^4, \quad (1.24)$$

где a — постоянная интегрирования. Это есть закон Стефана – Больцмана. Значение постоянной a из одних только термодинамических соображений получить нельзя.

С учетом (1.24) имеем $U = a T^4 V$, и поэтому (1.15) записывается в этом случае в форме

$$dS = 4a T^2 V dT + \frac{4}{3} a T^3 dV, \quad (1.25)$$

откуда непосредственно следует выражение для энтропии равновесного фотонного газа, содержащегося в объеме V :

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V. \quad (1.26)$$

Итак, если давление в газе создается в основном излучением, то при медленных адиабатических изменениях $T^3/\rho = \text{const}$. Отсюда, в частности, видно, что в этом предельном случае отношение числа фотонов к числу частиц газа при изэнтропических изменениях остается постоянным.

Равновесное излучение может рассматриваться как идеальный газ с показателем адиабаты $4/3$. В самом деле, при квазистатическом адиабатическом изменении состояния энтропия остается постоянной. Поэтому

$dS = 0$, и согласно (1.25)

$$T^2 V dT + \frac{1}{3} T^3 dV = 0,$$

откуда

$$\frac{dT}{T} + \frac{1}{3} \frac{dV}{V} = 0.$$

Сопоставление с третьей формулой (1.22) дает показатель адиабаты, равный $4/3$.

1.3. Идеальный газ в поле излучения

Внутри звезд из-за высокой температуры плотность лучистой энергии может оказаться не пренебрежимо малой по сравнению с плотностью энергии теплового движения частиц. В этом случае нельзя пренебрегать и давлением излучения по сравнению с газовым. Как ясно из п. п. 1.1 и 1.2, термодинамические свойства равновесного фотонного газа и обычного одноатомного идеального газа существенно различны. Так, показатели адиабаты для них равны соответственно $4/3$ и $5/3$ и т.д. Теперь нам предстоит изучить термодинамику *смеси* одноатомного идеального газа с равновесным фотонным газом. Основной вопрос, который нас будет интересовать, — как в этом случае происходят медленные адиабатические изменения. Ясно, что показатель адиабаты будет „где-то” между $4/3$ и $5/3$ — но как его найти? Ответ оказывается неожиданным: единого показателя адиабаты γ , которым описывались бы сразу все три соотношения (1.22), не существует.

Будем исходить из выражения для *внутренней энергии на единицу массы* U (эрг/г). Она складывается из энергии поступательного движения частиц $(3/2)(\mathcal{R}^*/\mu)T$ и энергии фотонного газа aT^4V , где V — удельный объем ($V = 1/\rho$):

$$U = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} T + aT^4 V. \quad (1.27)$$

Газ мы считаем невырожденным, а поле излучения равновесным, поскольку условия внутри звезд очень близки к термодинамическому равновесию. (Едва ли где-либо в природе отыщется место, где поле излучения было бы ближе к равновесному, чем в недрах звезд. Впрочем, полного равновесия нет и здесь, иначе не существовало бы потока излучения из недр звезды наружу). Что касается предположения об отсутствии вырождения, то оно оправдано тем, что, как выяснится позже,

в вырожденных слоях звезд вклад излучения в энергетику пренебрежимо мал. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае согласно (1.27) $U = U(T, V)$, тогда как для идеального газа из одних только частиц $U = U(T)$.

При квазистационарном изменении состояния согласно закону сохранения энергии должно быть

$$dQ = dU + P dV.$$

Но так как $U = U(T, V)$, то

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV,$$

и поэтому в силу (1.27)

$$dU = \left(\frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} + 4a T^3 V \right) dT + a T^4 dV.$$

Подставляя это в правую часть выражения для dQ и переходя от V к $\rho = 1/V$, находим, что при *адиабатических изменениях* состояния ($dQ = 0$) должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} + 4a \frac{T^3}{\rho} \right) \frac{dT}{T} = \left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} + \frac{4}{3} a \frac{T^3}{\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1.28)$$

Привлечем теперь *уравнение состояния*, имеющее в данном случае вид

$$P = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 \quad (1.29)$$

и утверждающее, что полное давление складывается из газового P_g и лучистого P_r :

$$P_g = \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \rho T, \quad P_r = \frac{a}{3} T^4. \quad (1.30)$$

Логарифмируя (1.29), получаем

$$\ln P = \ln \left(\frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \right) + \ln \rho + \ln T + \ln \left(1 + \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{a}{3} \frac{T^3}{\rho} \right),$$

откуда легко найти (проверьте!)

$$\left(1 + \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{a}{3} \frac{T^3}{\rho} \right) \frac{dP}{P} = \left(1 + 4 \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{a}{3} \frac{T^3}{\rho} \right) \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1.31)$$

Адиабатические изменения состояния смеси из идеального газа частиц и равновесного фотонного газа по существу полностью описываются совокупностью двух дифференциальных соотношений (1.28) и (1.31). Однако по давней традиции, восходящей к Эддингтону, эти соотношения принято записывать в другой, эквивалентной, но более наглядной форме. Обозначим через β долю, которую газовое давление составляет в полном давлении, так что

$$P_g = \beta P, \quad P_r = (1 - \beta) P, \quad (1.32)$$

и введем эту естественную для обсуждаемой задачи безразмерную переменную в (1.31) и (1.28). Согласно (1.30) и (1.32),

$$\frac{1 - \beta}{\beta} = \frac{\mu}{\mathcal{R}^*} \frac{a}{3} \frac{T^3}{\rho}. \quad (1.33)$$

С помощью (1.33) соотношения (1.31) и (1.28) можно представить в форме

$$\frac{dP}{P} = \beta \frac{d\rho}{\rho} + (4 - 3\beta) \frac{dT}{T}, \quad (1.34)$$

$$3(8 - 7\beta) \frac{dT}{T} = 2(4 - 3\beta) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1.35)$$

Первое из них есть прямое следствие уравнения состояния (1.29) и поэтому должно выполняться при любом (не обязательно адиабатическом) изменении состояния системы, второе же справедливо лишь для изэнтропических процессов.

Теперь нам осталось сделать совсем немного. Введем для разбираемой задачи обобщенный показатель адиабаты Γ_1 , *определив* его равенством ($S = \text{const}$)

$$\frac{dP}{P} = \Gamma_1 \frac{d\rho}{\rho}, \quad (1.36)$$

или

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S, \quad (1.36a)$$

так что $P \propto \rho^{\Gamma_1}$. Определение (1.36) обобщает обычное уравнение адиабаты идеального газа (см. первые формулы в (1.20), (1.22) и (1.23)). Исключая из (1.34) и (1.35) dT/T , приходим к следующему явному выражению для Γ_1 через β :

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta}. \quad (1.37)$$

Таблица VIII.1.1:

Адиабатические показатели Γ_i одноатомного газа,
находящегося в поле равновесного излучения

$1 - \beta$	Γ_1	Γ_2/Γ_1	Γ_3/Γ_1
0.00	1.667	1.000	1.000
0.05	1.603	0.966	0.978
0.1	1.563	0.949	0.966
0.2	1.511	0.938	0.956
0.3	1.476	0.937	0.954
0.4	1.449	0.941	0.957
0.5	1.426	0.947	0.961
0.6	1.405	0.956	0.967
0.7	1.386	0.965	0.974
0.8	1.368	0.976	0.982
0.9	1.350	0.991	0.991
1.0	1.333	1.000	1.000

Его можно переписать также в двух других формах, которые иногда оказываются удобнее:

$$\Gamma_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(1 - \beta) \frac{5 + 3(1 - \beta)}{1 - 7(1 - \beta)} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\beta \frac{4 - 3\beta}{8 - 7\beta}. \quad (1.37a)$$

Формула (1.37) принадлежит Эддингтону (1918 г.). При малых $1 - \beta$, когда роль излучения незначительна, Γ_1 близко к $5/3$, т.е. к показателю адиабаты газа, как это и должно быть. В противоположном предельном случае малых β , когда доминирует излучение, Γ_1 близко к $4/3$. Изменение Γ_1 между этими крайними значениями происходит монотонно (Табл. VIII.1.1).

Можно ввести два других адиабатических показателя, Γ_2 и Γ_3 , по аналогии со второй и третьей формулами в (1.22) *определив* их следующим образом (С. Чандрасекар, 30-е годы):

$$\frac{dP}{P} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \frac{dT}{T}, \quad \frac{dT}{T} = (\Gamma_3 - 1) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (1.38)$$

или

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_S, \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S. \quad (1.38a)$$

В случае обычного идеального газа все три показателя Γ_i совпадают между собой, постоянны и равны γ (т.е. $5/3$ для одноатомного газа).

Уравнения, описывающие адиабатические изменения, в этом случае легко интегрируются, см. формулы (1.20) — (1.22). Когда мы имеем дело со смесью частиц и фотонов равновесного поля излучения, положение оказывается сложнее. Здесь уже $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma_3$, более того, значения Γ_i при адиабатических изменениях не остаются постоянными, так как β меняется вдоль адиабаты.

Выражение для Γ_2 через β получается исключением $d\rho/\rho$ из (1.34) — (1.35) и последующим сопоставлением результата с первой из формул (1.38):

$$\Gamma_2 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 18\beta - 3\beta^2}, \quad (1.39)$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(1 - \beta) \frac{10 - 2(1 - \beta)}{1 + 8(1 - \beta) - (1 - \beta)^2} = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\beta \frac{1}{8 - 6\beta - \beta^2}. \end{aligned} \quad (1.39a)$$

Сравнение (1.31) со второй формулой (1.38) дает Γ_3 :

$$\Gamma_3 = \frac{32 - 27\beta}{24 - 21\beta}, \quad (1.40)$$

или

$$\Gamma_3 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}(1 - \beta) \frac{8}{1 + 7(1 - \beta)} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\beta \frac{1}{8 - 7\beta}. \quad (1.40a)$$

Хотя $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma_3$ (при β , не равных 0 и 1), отличия адиабатических показателей друг от друга невелики — менее 10% (Табл. VIII.1.1). И все же между Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 следует делать четкое различие, беря тот из адиабатических показателей, который отвечает рассматриваемой задаче. Так, в критерии наступления конвекции фигурирует Γ_2 (см. разд. ???), Γ_3 встречается при изучении пульсационной неустойчивости, показатель же Γ_1 играет важнейшую роль в вопросах, связанных с вековой устойчивостью и колебаниями звезд. О последнем скажем несколько слов уже сейчас. Введем среднее по звезде значение Γ_1 , взвешенное по давлению:

$$\bar{\Gamma}_1 = \int_V \Gamma_1 P dV / \int_V P dV. \quad (1.41)$$

Оказывается, что значение $\bar{\Gamma}_1 = 4/3$ является критическим: при $\bar{\Gamma}_1 \leq 4/3$ гидростатическое равновесие неустойчиво. Как было показано выше, в полностью ионизованном газе, находящемся в поле излучения,

$\Gamma_1 > 4/3$. Это значит, что учет одного только давления излучения не может вызвать нарушения механического равновесия. Однако если роль давления излучения велика, то показатель Γ_1 оказывается близок к критическим $4/3$, и „запас прочности” у звезды мал. Учет других факторов, помимо давления излучения, например начинающегося при высоких температурах рождения электрон-позитронных пар, может приводить к тому, что $\bar{\Gamma}_1$ опускается ниже критического значения $4/3$, и звезда теряет устойчивость (см. гл. ??).

Найдем еще энтропию одноатомного идеального газа, находящегося в равновесном поле излучения. Будем исходить из основного термодинамического соотношения

$$TdS = dU + P dV.$$

Подставив в него U и P из (1.27) и (1.29), легко получить

$$dS = 4a \frac{T^2}{\rho} dT - \frac{4}{3} a T^3 \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{dT}{T} - \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{d\rho}{\rho},$$

откуда

$$S = \frac{4}{3} a \frac{T^3}{\rho} + \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \text{const.} \quad (1.42)$$

Таким образом, энтропия смеси газа и излучения равна сумме энтропий двух ее составляющих — одноатомного газа (формула (1.18) с $\gamma = 5/3$) и равновесного излучения (формула (1.26)).

2. КУЛОНОВСКИЕ ПОПРАВКИ

2.1. Минимум для астронома-прагматика

Подавляющее большинство астрофизиков буквально с пеленок настолько привыкает к тому, что любую космическую плазму — от межгалактической до внутризвездной — можно рассматривать как

обычный идеальный газ, что совершенно не задумывается над тем, почему, собственно, это так. А ведь это вовсе не очевидный, хотя и поистине замечательный факт. Он во многом определяет картину астрономического мира. Поэтому не пожалеем места для подробного обсуждения этого важного вопроса. Без этого вся теория строения звезд была бы построена на песке.

Дело сводится к выяснению роли кулоновского взаимодействия составляющих плазму заряженных частиц. В сильно ионизованном газе сколько-нибудь значительные макроскопические пространственные заряды существовать не могут. Взаимное кулоновское отталкивание частиц ведет к очень быстрому рассасыванию пространственного заряда. По любым звездным временным масштабам это происходит мгновенно. Поэтому внутризвездную, да и вообще космическую плазму всегда можно считать макроскопически электронейтральной. Следствие этого — практически полное отсутствие кулоновского взаимодействия удаленных макроскопических объемов между собой. Однако в микромасштабах электронейтральности нет, и здесь пренебрегать кулоновским взаимодействием нельзя. При оценке его роли определяющим параметром является отношение энергии кулоновского взаимодействия в расчете на частицу к тепловой энергии kT . Если это отношение мало, вещество близко по своим свойствам к идеальному газу, а кулоновское взаимодействие — это малая поправка, вызывающая небольшие отклонения от идеальности. В этом случае говорят о *горячей разреженной плазме*. Она и рассматривается в настоящем разделе. По существу, центральный вопрос здесь — в каких областях плоскости (ρ, T) плазму (без магнитного поля) с заданной точностью можно считать обычным идеальным газом.

Сразу же укажем, что у звезд ГП с массами $M \gtrsim M_{\odot}$ плотности и температуры таковы, что приближение идеального газа применимо с достаточно высокой точностью. Иное дело — звезды малых масс, ядра красных гигантов и особенно белые карлики, где энергия кулоновского взаимодействия не всегда мала по сравнению с кинетической энергией частиц. В этих случаях вещество по своим свойствам иногда оказыва-

ется подобно жидкости или даже твердому телу (см. гл. ??).

Итак, рассмотрим горячую разреженную плазму. Любой имеющийся в ней или помещаемый в нее заряд вызывает ее поляризацию — притягивает к себе одноименные с ним заряды, создавая некоторый их избыток, и отталкивает разноименные, отчего они оказываются в недостатке. С этой тенденцией к разделению зарядов конкурирует хаотическое тепловое движение частиц, стремящееся сгладить, замыть все неоднородности. В результате устанавливается некоторое равновесное распределение. В первом приближении его можно считать сферически-симметричным. Качественная картина, таким образом, такова: любая заряженная частица создает вокруг себя в плазме облако нейтрализующего ее пространственного заряда противоположного знака, а тем самым — электростатическую потенциальную яму, на дне которой она и находится. Поэтому для удаления из плазмы каждой из составляющих ее заряженных частиц требуется затратить некоторую энергию. Значит, *кулоновская поправка к внутренней энергии* плазмы должна быть *отрицательна*. Соответственно отрицательна и кулоновская добавка к давлению, так что *давление в плазме* должно быть *ниже*, чем в идеальном газе той же температуры и плотности.

Согласно нарисованной только что картине, для горячей разреженной плазмы должна существовать некая фундаментальная длина, порождаемая происходящими в ней электростатическими взаимодействиями. Ее называют *дебаевской длиной*, или длиной экранирования. Она характеризует размеры облаков пространственного заряда, нейтрализующих, или, точнее, экранирующих точечные заряды. Можно сказать также, что дебаевская длина — это характерный масштаб разделения зарядов в плазме.

С дебаевской длиной r_D непосредственно связан другой характерный параметр плазмы — число частиц \mathcal{N}_D в сфере радиуса $r = r_D$ — так называемой *сфере Дебая*: $\mathcal{N}_D = (4\pi/3)r_D^3 N$, где N — средняя концентрация частиц в плазме. Для разреженной плазмы \mathcal{N}_D велико: $\mathcal{N}_D \gg 1$.

Такова качественная картина. Перейдем к количественным результатам. Для читателей, больше интересующихся практическими рецептами, чем физикой дела, сформулируем в готовом виде и кратко обсудим два важнейших результата. Первый из них — это уравнение состояния горячей разреженной плазмы. В описанном выше дебаевском приближении оно имеет вид

$$P = NkT \left(1 - \frac{1}{18\mathcal{N}_D} \right), \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{N}_D = 1.38 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{T^3}{(\overline{Z^2})^3 N}} = \frac{1.77 \cdot 10^{-9}}{\zeta^3 \mu} \sqrt{\frac{T^3}{\rho}}. \quad (2.2)$$

Второй результат — выражение для дебаевского радиуса

$$r_D = 6.90 \sqrt{\frac{T}{\overline{Z^2} N}} = \frac{8.89 \cdot 10^{-12}}{\zeta} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (2.3)$$

В этих формулах $\overline{Z^2}$ — средневзвешенное по всем частицам значение Z_i^2 , где Z_i — зарядовое число частиц i -го сорта (вес — относительная концентрация частиц N_i/N с зарядами eZ_i):

$$\overline{Z^2} = \sum Z_i^2 N_i / N, \quad (2.4)$$

μ — средняя молярная масса, наконец, ζ определяется так, что ζ^2 — это среднее по всем частицам значение Z_i^2 в расчете на атомную единицу массы:

$$\zeta^2 = \overline{Z^2} / \mu. \quad (2.5)$$

Для полностью ионизованной водородно-гелиевой смеси $\overline{Z^2}$ заключено между 1 (чистый Н) и 2 (дважды ионизованный He); соответствующие значения ζ^2 равны 2 и 3/2.

Для плазмы, состоящей из свободных электронов и ионов только одного сорта с зарядом eZ и массой $m_0 A$, имеем $\overline{Z^2} = Z^2$ и, при пренебрежении массой электронов по сравнению с массой ионов, $\zeta = (Z(Z+1)/A)^{1/2}$. Проверить.

Проиллюстрируем эти формулы несколькими астрофизическими примерами. Близ основания солнечной короны $N \sim 10^8$, $T \sim 10^6$, и дебаевский радиус оказывается порядка 1 см (при среднем расстоянии между частицами $\sim 10^{-3}$ см), а число частиц в сфере Дебая $\sim 10^8 \div 10^9$. В типичной газовой туманности, скажем, планетарной, $N \sim 10^3 \div 10^4$, $T \sim 10^4$, так что $r_D \sim (10 \div 20)$ см, а $\mathcal{N}_D \sim 10^7$. В обоих случаях число частиц в сфере Дебая очень велико, а значит, вещество с высочайшей точностью можно считать идеальным газом. То, что в этих двух случаях мы имеем дело с горячей разреженной плазмой, не кажется удивительным. Ведь повседневный смысл слов „горячий” и „разреженный” формировался по земным стандартам, а по ним и корона, и туманности в самом деле и очень горячие, и очень разреженные. Иное дело — центр Солнца, где плотность составляет ~ 150 г/см³,

а температура ~ 15 млн кельвинов. Всякий, безусловно, согласится с тем, что там горячо, но мало кто отважится назвать столь плотное вещество разреженным. Но... число частиц в сфере Дебая составляет здесь $\mathcal{N}_D \sim 5$, а значит, и в этом случае плазма должна считаться разреженной, хотя и не очень сильно. Физическая терминология расходится в этом случае с обывательским здравым смыслом.

Поскольку $\mathcal{N}_D \sim 5$, согласно (2.1) для центра Солнца уравнение состояния идеального газа дает давление с погрешностью $\sim 1\%$ (вклад давления излучения, как оказывается, меньше кулоновской поправки). Далее, как показывают расчеты моделей Солнца, в большей части его недр отношение T^3/ρ остается почти постоянным, мало меняясь вдоль радиуса (подробнее см. гл. ??), а тогда согласно (2.2), для большей части массы Солнца число частиц в сфере Дебая \mathcal{N}_D то же, что и для его центра. Поэтому применять уравнение состояния идеального газа к внутренним слоям Солнца вполне правомерно. Разумеется, это не относится к тем сравнительно близким к поверхности слоям, где ионизацию основных составляющих солнечного вещества — водорода и гелия — нельзя считать полной. Здесь уравнение состояния весьма сложно, см. разд. ???.

Отметим, что к оценке точности ($\sim 1\%$), обеспечиваемой для недр Солнца простейшим уравнением состояния $P = NkT$, следует относиться лишь как к порядковой: так как $\mathcal{N}_D \sim 5$, то условие применимости дебаевского приближения $\mathcal{N}_D \gg 1$ выполняется здесь на самом пределе.

Кривая, приведенная на рис. VIII.2.1, дает число частиц в сфере Дебая для центров химически однородных звезд в функции массы звезды (химический состав: $X = 0.70$, $Y = 0.27$, $Z = 0.03$; соответствующее $\overline{Z^2} = 1.18$).

Перейдем теперь к выводу приведенных формул.

2.2. Дебаевское экранирование

Найдем электростатический потенциал точечного заряда в почти идеальной плазме с учетом ее поляризации. Пусть, как и ранее, N_i — средняя концентрация частиц с зарядами eZ_i (для электронов $Z = -1$), N — суммарная средняя концентрация всех заряженных частиц: $N = \sum N_i$. В среднем плазма электрически нейтральна:

$$\sum eZ_i N_i = 0. \quad (2.6)$$

Выделим некоторый точечный заряд eZ . Обозначим потенциал создаваемого им в плазме электростатического поля через φ . Считаем, что

Рис. VIII.2.1:
Число частиц \mathcal{N}_D в сфере Дебая в центрах
химически однородных звезд.

это поле в среднем сферически-симметрично, так что $\varphi = \varphi(r)$, где r — расстояние от заряда. Как всегда в электростатике, потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона ($r \neq 0$)

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_E. \quad (2.7)$$

Здесь ρ_E — плотность пространственного заряда в нейтрализующем облаке:

$$\rho_E = \sum eZ_i n_i, \quad (2.8)$$

где $n_i = n_i(r)$ — концентрация частиц i -го сорта в облаке. Она, в свою очередь, определяется ходом потенциала φ . Поскольку потенциальная энергия частицы с зарядом eZ_i в поле с потенциалом φ есть, очевидно, $eZ_i\varphi$, то по формуле Больцмана

$$n_i = N_i e^{-\frac{eZ_i\varphi}{kT}}. \quad (2.9)$$

Множитель перед экспонентой определяется очевидным условием, что вдали от заряда, где $\varphi \rightarrow 0$, концентрация должна стремиться к средней. Мы имеем, таким образом, дело с нелинейной задачей о расчете самосогласованного электрического поля: потенциал определяется распределением объемного заряда в нейтрализующем облаке, а само это распределение, в свою очередь, управляется ходом потенциала коллективного поля.

Предположение о малости энергии кулоновского взаимодействия по сравнению с тепловой энергией позволяет линеаризовать уравнения,

так как вариации концентраций, обусловленные кулоновскими силами, в этом случае должны быть малы. Разлагая экспоненту в формуле Больцмана (2.9), получаем тогда приближенно

$$n_i = N_i - N_i \frac{eZ_i}{kT} \varphi.$$

Подставляем это в (2.8). Воспользовавшись условием квазинейтральности (2.6) и обозначив через $\overline{Z^2}$ усредненное по всем частицам значение Z_i^2 :

$$\overline{Z^2} = \frac{1}{N} \sum Z_i^2 N_i,$$

получаем из уравнения Пуассона (2.7) следующее линейное уравнение для сферически-симметричного потенциала самосогласованного поля:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{4\pi e^2 \overline{Z^2} N}{kT} \varphi. \quad (2.10)$$

Это основное уравнение разбираемой задачи. Нас интересует его решение, обращающееся в 0 на бесконечности, а при $r \rightarrow 0$ переходящее в кулоново поле голого заряда eZ :

$$\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad \varphi \rightarrow \frac{eZ}{r}, \quad r \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Прежде всего, заметим, что из структуры левой части уравнения (2.10) очевидно, что множитель при φ справа имеет размерность (длина)⁻². Таким образом, в задаче имеется характерная длина

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 \overline{Z^2} N}}. \quad (2.12)$$

Ее называют *радиусом Дебая*, или длиной экранирования. Далее, заметив, что

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 (r\varphi)}{dr^2},$$

можем переписать уравнение для потенциала в форме

$$\frac{d^2 (r\varphi)}{dr^2} = \frac{r\varphi}{r_D^2},$$

откуда

$$r\varphi = A e^{r/r_D} + B e^{-r/r_D}.$$

Первое из условий (2.11) дает $A = 0$, согласно второму $B = eZ$. Поэтому электростатический потенциал точечного заряда eZ в плазме — *дебаевский потенциал* — имеет вид

$$\varphi = \frac{eZ}{r} e^{-r/r_D}. \quad (2.13)$$

При $r \ll r_D$ влияние пространственного заряда несущественно, и дебаевский потенциал близок к кулоновскому. Напротив, при $r \gg r_D$ из-за сильной экранировки центрального заряда окружающим его противоположно заряженным облаком частиц потенциал быстро (экспоненциально) стремится к нулю. Можно сказать, что r_D — это характерный линейный размер области, в которой точечный заряд создает в плазме ощутимое поле. Грубо говоря, при $r < r_D$ поле есть и близко к кулоновскому, а при $r > r_D$ поля вообще нет.

Добавка $\tilde{\varphi}$ к кулоновскому потенциалу центрального точечного заряда Ze/r , обусловленная поляризацией плазмы, составляет, как видим,

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi - \frac{Ze}{r} = \frac{eZ}{r_D} \frac{e^{-\rho} - 1}{\rho}, \quad (2.14)$$

где обозначено $\rho = r/r_D$. Этим выражением описывается потенциальная яма, создаваемая дебаевским облаком. Ее глубина равна eZ/r_D . Таким образом, взаимодействие точечного заряда eZ с порождаемым им в плазме вокруг себя заряженным облаком энергетически эквивалентно чисто кулоновскому взаимодействию зарядов $+eZ$ и $-eZ$, разнесенных на расстояние, равное дебаевскому радиусу. Далее, видно, что характерный линейный размер поляризационной потенциальной ямы от величины поляризующего заряда не зависит и составляет r_D . Итак, по сути дела, дебаевская длина определяет все — и глубину потенциальной ямы, и ее размеры. Подчеркнем еще, что поляризационное облако — это неравномерность в пространственном распределении именно заряда, а не общей концентрации частиц (см. задачу 3°, с. 254).

Критерий применимости полученных результатов очевиден: чтобы имело смысл говорить о сферически-симметричном непрерывно распределенном заряде, в облаке должно быть много частиц. Поскольку его характерный размер равен r_D , это значит, что число частиц \mathcal{N}_D в сфере Дебая должно быть велико: $\mathcal{N}_D = (4\pi/3)r_D^3 N \gg 1$. С учетом определения дебаевского радиуса (2.12) этот критерий можно переписать в форме

$$N \ll \frac{1}{36\pi} \left(\frac{kT}{e^2 Z^2} \right)^3 = 1.90 \cdot 10^6 \left(\frac{T}{Z^2} \right)^3, \quad (2.15)$$

или

$$\frac{\rho}{T^3} \ll 3.15 \cdot 10^{-18} \frac{\mu}{(\overline{Z^2})^3}. \quad (2.16)$$

Итак, для применимости дебаевского описания плазма должна быть разреженной (малые N) и горячей (большие T). Точнее говоря, отношение N/T^3 должно быть по порядку меньше 10^6 , или $\rho/T_6^3 \ll 1$.

Проверьте правильность порядков численных коэффициентов в формулах (2.1), (2.2), (2.3), (2.15) и (2.16).

2.3. Термодинамика разреженной плазмы

Получим теперь выражения для основных термодинамических параметров разреженной плазмы — внутренней энергии, давления, энтропии и др. в

функции температуры T и концентрации частиц N .

Начнем с *внутренней энергии* полностью ионизованного газа, точнее, получим кулоновскую добавку $e_{\text{кул}}$ к объемной плотности энергии поступательного движения частиц такого газа $e_{\text{кин}} = (3/2)NkT$. Объемная плотность электростатической энергии системы частиц, взаимодействие которых между собой описывается дебаевским потенциалом, равна, очевидно (ср. с энергией гравитационного взаимодействия системы материальных точек, п. III.2.1)

$$e_{\text{кул}} = \frac{1}{2} \sum e Z_j N_j \widetilde{\varphi}_j,$$

где $\widetilde{\varphi}_j$ — потенциал в месте расположения произвольной частицы с зарядом $e Z_j$, т.е. на дне той потенциальной ямы, которую создает частица за счет поляризации окружающей ее плазмы. Он дается, очевидно, пределом при $r \rightarrow 0$ выражения (2.14) с $Z = Z_j$. Поэтому

$$e_{\text{кул}} = -\frac{1}{2} \sum e^2 Z_j^2 N_j / r_D = -\frac{1}{2} \frac{e^2 \overline{Z^2} N}{r_D}. \quad (2.17)$$

Заметим, что любой заряд, независимо от его знака, дает отрицательный вклад в кулоновскую энергию плазмы, так как окружает себя экранирующим облаком с зарядом противоположного знака. Подстановка в последнюю формулу явного выражения для r_D из (2.12) дает окончательно

$$e_{\text{кул}} = -\sqrt{\pi} \left(e^2 \overline{Z^2} \right)^{3/2} \left(\frac{N^3}{kT} \right)^{1/2}, \quad (2.18)$$

что, очевидно, можно записать также в форме ($A > 0$)

$$e_{\text{кул}} = -A \sqrt{\frac{\rho^3}{T}}. \quad (2.19)$$

Гораздо нагляднее, однако, другое представление для $e_{\text{кул}}$, получающееся из (2.17), если наряду с (2.12) учесть также, что $\mathcal{N}_D = (4\pi/3)r_D^3 N$:

$$e_{\text{кул}} = -\frac{NkT}{6\mathcal{N}_D} = \frac{1}{9\mathcal{N}_D} e_{\text{кин}}. \quad (2.20)$$

Из него, в частности, видно, что *условие применимости теории Дебая* $\mathcal{N}_D \ll 1$ есть одновременно условие того, что *кулоновская энергия плазмы мала по сравнению с ее тепловой энергией*.

Для получения *давления* плазмы можно поступить по-разному. Один путь — воспользоваться следующим соотношением, заблаговременно „заготовленным” в п. III.2.4 в качестве одного из следствий теоремы вириала:

$$P = \frac{2}{3} e_{\text{кин}} + \frac{1}{3} e_{\text{кул}}. \quad (2.21)$$

В комбинации с (2.20) оно сразу дает уравнение состояния плазмы, декларируемое в п. 2.1:

$$P = NkT \left(1 - \frac{1}{18\mathcal{N}_D} \right). \quad (2.22)$$

Заметим, что при получении соотношения (2.21) мы считали взаимодействие между частицами кулоновским, тогда как (2.20) найдено с использованием дебаевского потенциала. Однако противоречия или какой-либо непоследовательности здесь нет — формула (2.21) точная, выражение же (2.20) — лишь приближенное (приближение Дебая).

Другой путь получения давления плазмы — чисто термодинамический (он дает одновременно и энтропию). Внутренняя энергия дебаевской плазмы в расчете на 1 г есть сумма энергии идеального газа $U_{\text{ид}}$ и кулоновской поправки $e_{\text{кул}}V$, где $e_{\text{кул}}$ дается (2.19) и $V \equiv 1/\rho$ — удельный объем. Итак,

$$U = U_{\text{ид}} - \frac{A}{T^{1/2}V^{1/2}}.$$

Давление и энтропию дебаевской плазмы естественно искать в аналогичной форме

$$P = P_{\text{ид}} - \frac{A_p}{T^{p_1}V^{p_2}},$$

$$S = S_{\text{ид}} - \frac{A_s}{T^{s_1}V^{s_2}},$$

где A_p , A_s и p_i , s_i — подлежащие определению постоянные, $P_{\text{ид}}$ и $S_{\text{ид}}$ — обычные давление и энтропия идеального газа с теми же T и ρ , что и у плазмы. (Возможность такого представления P и S можно строго доказать).

Привлекаем основное термодинамическое тождество

$$TdS = dU + PdV.$$

Приравнивая члены при dT и dV слева и справа, имеем

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V,$$

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P.$$

Вводя в эти соотношения наши предполагаемые выражения для S , U и P , по обычной схеме метода неопределенных коэффициентов находим

$$P = P_{\text{ид}} - \frac{1}{3} A \left(\frac{\rho^3}{T} \right)^{3/2},$$

$$S = S_{\text{ид}} - \frac{1}{3} A \left(\frac{\rho}{T^3} \right)^{1/2}.$$

Почему у плазмы внутренняя энергия меньше, чем у идеального газа той же температуры и плотности?

Заключительное замечание: всюду в этом параграфе молчаливо предполагалось, что вырождения нет и релятивистские эффекты несущественны. Первое из этих условий ограничивает применимость дебаевской теории по температуре снизу, а второе — сверху.

3. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1° Показать, что удельные теплоемкости идеального одноатомного газа, находящегося в равновесном поле излучения, равны

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{8 - 7\beta}{\beta}, \quad c_p = c_v + \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} \frac{(4 - 3\beta)^2}{\beta^2}.$$

Рассмотреть предельные случаи $\beta \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 0$ и дать физическую интерпретацию результатов.

2° Показать, исходя из определяющих их уравнений, что адиабатические показатели Γ_i для одноатомного газа, находящегося в поле равновесного излучения (п. 1.3), удовлетворяют соотношению

$$\Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_2 \Gamma_3 = \Gamma_1 - \Gamma_2.$$

3° Показать, что адиабатические изменения P , ρ и T в одноатомном идеальном газе, находящемся в поле равновесного излучения, описываются параметрическими уравнениями (С. Чандрасекар, 1951 г.)

$$\begin{aligned} T &= \text{const} \cdot Z^{2/3} e^{8Z/3}, \\ \rho &= \text{const} \cdot Z \cdot e^{8Z}, \\ P &= \text{const} \cdot (1 + Z) Z^{5/3} e^{32Z/3}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

причем параметр $Z \equiv (1 - \beta)/\beta$, где β — доля газового давления в полном давлении.

Указание: исходить из выражения (1.42) для энтропии, скомбинировав его с (1.34) и (1.35).

4° Рассчитать суммарный заряд экранирующего облака, окружающего точечный заряд eZ .

5° Показать, что доля полного заряда экранирующего облака, обусловленная электронами, составляет

$$\frac{N_e}{Z^2 N},$$

где N_e — невозмущенная электронная концентрация. Убедиться, далее, что для плазмы, состоящей из ионов с зарядом eZ и свободных электронов, эта доля равна $(1 + Z)^{-1}$, так что не менее половины всего экранирующего заряда создают ионы.

6° Рассчитать число $\Delta\mathcal{N}_i$ избыточных (по сравнению со средним) частиц типа i в экранирующем облаке и убедиться, что 1) оно не зависит от температуры и 2) $\sum_i \Delta\mathcal{N}_i = 0$, так что средняя по облаку суммарная концентрация частиц всех типов в точности равна N . В частности, найти число избыточных электронов и протонов в поляризационном облаке, окружающем протон в чисто водородной плазме.

7° Показать, что для чисто водородной плазмы с различающимися электронной и ионной температурами T_e и T_i радиус Дебая дается обычным выражением (2.12), если под T понимать среднее гармоническое T_e и T_i :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right).$$

При $T_i \gg T_e$ вклад в экранирование дают только электроны. В чем физический смысл этого?

8° Пусть X_i — весовая доля ионов с зарядом eZ_i , A_i — их массовое число. Показать, что параметр $\zeta^2 \equiv \overline{Z^2}/\mu$, фигурирующий в формулах (2.2) и (2.3), можно представить в следующей форме, часто используемой в астрофизической литературе:

$$\zeta^2 = \sum_+ Z_i(1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i},$$

где \sum_+ означает, что суммирование идет только по ионам.

9° Показать, что в дебаевском приближении теплоемкость c_V полностью ионизованного газа равна

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}^*}{\mu} + \frac{1}{2} A \left(\frac{\rho}{T^3} \right)^{1/2},$$

где A определено согласно (2.19). Она больше, чем у идеального газа. Почему?