A. S. HOLEVO

STATISTICAL STRUCTURE OF QUANTUM THEORY

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barselona
Budapest

А. С. ХОЛЕВО

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Перевод с английского
под редакцией С. В. КЛИМЕНКО

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2003

УДК 535

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-14135.

Холево А. С.

Статистическая структура квантовой теории. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 192 стр.

Книга дает систематическое, сжатое и широко охватывающее изложение математических оснований квантовой теории с точки зрения специалиста по теории вероятностей, особое внимание уделено статистическим аспектам. Среди рассматриваемых вопросов: обобщенная статистическая модель квантовой механики, квантовая теория статистических решений и оценивание состояний, пропускные способности квантовых каналов связи, открытые системы и динамика непрерывных измерений, случайные процессы и стохастическое исчисление в пространстве Фока.

Изложение построено в форме обзора и рассчитано на широкую аудиторию читателей — от физиков до специалистов по теории вероятностей и теории операторов, от научных работников до аспирантов. Книга снабжена обширной библиографией.

ISBN 5-93972-207-5

http://rcd.ru

Холево Александр Семенович

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 08.01.03. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 11,16. Уч. изд. л. 11,27.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Заказ №96.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Оглавление

От редактора перевода

Две наиболее революционные теории XX века — квантовая механика и теория информации, объединившись вместе, породили новое знание, которое ознаменовало рубеж веков теоретическими открытиями и экспериментальными разработками, позволяющими говорить о приближении эры квантовых информационных технологий.

Все это вызвало новый интерес к математическим основаниям квантовой теории и предъявляет повышенные требования к их пониманию. Этим запросам отвечает предлагаемая книга, принадлежащая перу известного специалиста в этой области. Общим для таких различных теорий, как квантовая механика и теория информации, является вероятностный подход и соответствующий математический аппарат. Не отвлекаясь на многословное обсуждение философских вопросов, автор очерчивает архетипы квантовой вероятностной модели. В книге много математики, но она не является самоцелью, а служит раскрытию вероятностной структуры квантовой теории и решению конкретных проблем квантовых измерений. Книга дает прочную основу для понимания статистической сущности квантовой теории и ее многочисленных новых приложений.

Настоящее издание поддержано Российским фондом фундаментальных исследований.

Набор книги был выполнен в системе TEX/LATEX Мариной Лисиной из Института физики высоких энергий, Протвино.

Протвино, 16 октября 2002 г. *С. В. Клименко*

Предисловие

За последние три десятилетия в математических основаниях квантовой механики, связанных с теорией квантовых измерений, произошли глубокие перемены. В настоящее время разворачивается их широкое осмысление.

Хорошо известно, что квантовая механика – это не просто динамическая теория; снабженная статистической интерпретацией, она порождает новый вид вероятностной модели, радикально отличающейся от классической. Таким образом, статистическая структура квантовой механики является предметом, заслуживающим специального изучения и в большой степени отличающимся от стандартного содержания книг по квантовой механике.

Впервые систематическое исследование вероятностной структуры квантовой теории было предпринято в хорошо известной монографии Дж. фон Неймана «Математические основы квантовой механики» (1932). Годом позже появилась другая знаменитая книга – изложение А. Н. Колмогоровым математических основ теории вероятностей. Роль и значение этих книг были существенно различными. Колмогоров завершил длительный период создания концептуальных основ теории вероятностей, представив их с классической ясностью, определенностью и прозрачностью. Книга фон Неймана была написана вскоре после рождения квантовой физики и представляла собой одну из первых попыток понять ее математическую структуру в связи со статистической интерпретацией. В ней был поднят ряд фундаментальных вопросов вероятностной структуры квантовой теории, не все из которых в то время могли найти удовлетворительное решение, и она дала отправные точки для многих дальнейших исследований по основаниям квантовой теории.

В 1930-е годы интересы физиков переместились в квантовую теорию поля и физику высоких энергий, тогда как основания квантовой теории продолжали оставаться в достаточно неразработанном состоянии. Вместе с тем возникновение квантовой механики стимулировало развитие адекватного математического аппарата — в частности, теории операторов — который приобрел современные очертания к шестидесятым годам.

В то же время появление прикладных направлений квантовой физики, таких как квантовая оптика, квантовая электроника и оптическая связь, а также развитие техники высокоточного эксперимента вызвали новый интерес к квантовым измерениям и перевели вопрос о последовательной количественной квантовой статистической теории измерений в более практическую плоскость. Такая теория была создана в семидесятых - восьмидесятых годах как далеко идущее логическое развитие статистической интерпретации, опирающееся на основание современного функционального анализа. Перефразируя известное определение теории вероятностей[1], можно сказать, что это — теория операторов в гильбертовом пространстве, «одушевленная» статистической интерпретацией квантовой механики.

Математической сущностью этой теории являются разнообразные аспекты положительности и тензорных произведений в алгебрах операторов (имеющие свои корни, соответственно, в фундаментальных вероятностных свойствах положительности и независимости). Центральными понятиями являются, в частности, *разложение единицы* (положительная операторно-значная мера) и *вполне положительное отображение*, обобщающие, соответственно, спектральную меру и унитарную эволюцию стандартной квантовой механики.

Целью этой книги было дать обзор основных принципов и результатов этой теории. В нашем изложении мы придерживались прагматичной позиции, сведя к минимуму обсуждения как аксиоматики, так и эпистемологических аспектов квантовой механики; вместо этого мы сосредоточили внимание на последовательной формулировке и решении ряда конкретных проблем (кратко обсуждаемых во введении), которые представляются нерешаемыми в стандартной формулировке. Главы 3–5 можно рассматривать как развитие линии книги «Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории» [41] в направлении задач, включающих изменение состояний и динамику измерений. Однако, в отличие от этой книги, мы даем здесь скорее сжатый обзор[2], нежели подробное изложение рассматриваемых вопросов: мотивировок больше, чем доказательств, которые заинтересованный читатель может найти в цитированных работах. Полное рассмотрение приведенного материала потребовало бы много большего места и заметного усложнения математического аппарата. Мы также хотим отметить, что ко-

[1] «Probability theory is a measure theory — with a soul» (M. Kac).

[2] В основу положена дополненная новыми результатами обзорная статья [49].

нечномерная версия этой статистической теории является адекватной основой для недавних исследований по квантовой теории информации, но эти важные результаты рассматриваются специально в книге [54] и затронуты здесь лишь частично.

0. Введение

0.1. Конечномерные системы

Изложение теории вероятностей принято начинать с конечной схемы. Следуя этой традиции, рассмотрим конечное вероятностное пространство $\Omega := \{1, \ldots, N\}$. Имеют место три тесно связанных между собой факта, которые по разному выражают классичность вероятностной схемы:

1. множество событий $A \subset \Omega$ образует булеву алгебру;
2. множество распределений вероятностей $P = [p_1, \ldots, p_N]$ на Ω является симплексом, т. е. выпуклым множеством, в котором каждая точка однозначно представляется в виде смеси (выпуклой комбинации) крайних точек;
3. множество случайных величин $X = [\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ на Ω образует коммутативную алгебру (относительно поточечного умножения).

Квантовым аналогом этой схемы является модель N-уровневой системы. Аналог распределения вероятностей — *состояние* такой системы — описывается *матрицей плотности*, эрмитовой $N \times N$-матрицей S, удовлетворяющей условиям положительной определенности и единичности следа:

$$S \geqslant 0, \quad \operatorname{Tr} S = 1. \tag{0.1}$$

Аналог случайной величины — *наблюдаемая* — описывается произвольной эрмитовой $N \times N$ матрицей X. Пусть

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j \tag{0.2}$$

спектральное разложение эрмитовой матрицы X, где $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ — собственные числа, а $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — проекторы на соответствующие собственные подпространства. Набор $E = \{E_j; j = 1, \ldots, n\}$ образует *ортогональное разложение единицы*:

$$E_j E_k = \delta_{jk} E_j, \quad \sum_{j=1}^{n} E_j = I, \tag{0.3}$$

где I – единичная матрица. Из свойств (0.1) и (0.3) следует, что

$$\mu_S^X(x_j) := \operatorname{Tr} SE_j, \quad \text{где } j = 1, \dots, n, \tag{0.4}$$

задает распределение вероятностей на спектре $\operatorname{Sp} X = \{x_1, \dots, x_n\}$ наблюдаемой X. В квантовой механике постулируется, что это есть распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S. В частности, среднее значение X в состоянии S равно

$$\mathbf{E}_S(X) = \operatorname{Tr} SX. \tag{0.5}$$

Если в этой модели ограничиться рассмотрением только диагональных матриц

$$S = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

то мы возвращаемся классической схеме с N элементарными событиями, где, в частности, (0.5) сводится к $\mathbf{E}_S(X) = \sum_{j=1}^N p_j \lambda_j$. То же самое мы получили бы, рассматривая только одновременно диагонализуемые (т. е. перестановочные между собой, или коммутирующие) матрицы. Поскольку имеются наблюдаемые, описываемые некоммутирующими матрицами, модель N-уровневой системы не сводится к классической схеме.

Роль индикаторов событий в квантовом случае играют наблюдаемые, принимающие значения 0 или 1, т. е. эрмитовы идемпотентные матрицы: $E^2 = E$. Вводя унитарное координатное пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$, в котором действуют $N \times N$-матрицы, такую матрицу E можно рассматривать как ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{E}$ в $\mathcal{H}$. Таким образом, *квантовые события* можно отождествить с подпространствами унитарного пространства $\mathcal{H}$. Множество квантовых событий, называемое *квантовой логикой*, частично упорядочено (по включению) и наделено операциями $\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2$ (линейная оболочка $\operatorname{Lin}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ подпространств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{H}$), $\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2$ (пересечение $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ подпространств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{H}$) и $\mathcal{E}'$ (ортогональное дополнение $\mathcal{E}^\perp$ подпространства $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$) с известными свойствами. Неклассичность модели N-уровневой системы можно выразить тремя различными утверждениями:

1. квантовая логика событий не является булевой алгеброй, поскольку в ней не выполнено тождество дистрибутивности

$$\mathcal{E}_1 \wedge (\mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2) \vee (\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_3).$$

Вследствие этого нет «элементарных событий», на которые однозначно распадалось бы любое квантовое событие;
2. выпуклое множество состояний не является симплексом, т. е. представление матрицы плотности в виде смеси крайних точек неоднозначно;
3. комплексная оболочка множества наблюдаемых является некоммутативной (ассоциативной) алгеброй.

В бесконечномерном случае вместо матриц приходится использовать операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Математически корректное изложение основных понятий квантовой механики в гильбертовом пространстве было впервые дано Дж. фон Нейманом [24]. Он, в частности, подчеркнул существенное различие между эрмитовыми (симметричными) и самосопряженными операторами, которое не проводилось в предшествующих работах, и указал, что именно условие самосопряженности обеспечивает в случае бесконечномерного гильбертова пространства аналог спектрального разложения (0.2). Другой круг вопросов в случае бесконечномерного гильбертова пространства связан с уточнением понятия следа и соответствующего класса операторов с конечным следом. Математическая схема, называемая *стандартной статистической моделью квантовой механики*, рассматривается в гл. 1.

0.2. Общие постулаты статистического описания

Каждая из математических структур — квантовая логика событий, выпуклое множество состояний и алгебра квантовых наблюдаемых — может быть охарактеризована определенной системой аксиом, но возникающие при этом характеризационные проблемы оказываются совсем не тривиальными и по существу составляют отдельные направления исследований, обзор которых выходит за рамки настоящей работы (см., в частности, [30], [21], [57], [112], [177], [225]). Имея дело с конкретным объектом — квантовой теорией вероятностей в гильбертовом пространстве — не приходится прибегать к тем или иным системам аксиом: более того, именно знание структурных особенностей этого объекта и дает основание для мотивировки той или иной аксиомы. Одним из полезных уроков аксиоматического подхода является, однако, указание на плодотворный параллелизм в описании классических и квантовых систем. Формулируемые ниже положения являются модификацией четырех аксиом Макки, одинаково применимых как к классическим, так и к квантовым системам.

Аксиома 1. *Заданы множество $\mathfrak{S}$, элементы которого называются состояниями, и множество $\mathfrak{O}$, элементы которого называются (вещественными) наблюдаемыми. Для любой пары $S \in \mathfrak{S}$ и $X \in \mathfrak{O}$ задано распределение вероятностей μ_S^X на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$, называемое распределением вероятностей наблюдаемой X в состоянии S.*

Состояние S интерпретируется как более или менее детальное описание приготовления *статистического ансамбля* независимых индивидуальных представителей рассматриваемой системы, а наблюдаемая X – как величина, измеряемая определенным прибором для каждого представителя в данном ансамбле. Аксиома 1, таким образом, предполагает *воспроизводимость* индивидуальных экспериментов и *устойчивость частот* при независимых повторениях. Следующая аксиома выражает возможность *смешивания* ансамблей.

Аксиома 2. *Для любых состояний $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ и любого числа p, $0 < p < 1$, существует состояние $S \in \mathfrak{S}$, такое, что $\mu_S^X = p\mu_{S_1}^X + (1-p)\mu_{S_2}^X$ для всех $X \in \mathfrak{O}$. S называется смесью состояний S_1 и S_2 в пропорции $p : (1-p)$.*

Следующая аксиома говорит о возможности преобразования информации, полученной при измерении наблюдаемой. Пусть f — борелевская функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Если $X_1, X_2 \in \mathfrak{O}$ таковы, что для всех $S \in \mathfrak{S}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_S^{X_2}(B) = \mu_S^{X_1}(f^{-1}(B))$$

где $f^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$, то наблюдаемая X_2 *функционально подчинена* наблюдаемой X_1. В этом случае будем писать $X_2 = f \circ X_1$.

Аксиома 3. *Для любой наблюдаемой $X_1 \in \mathfrak{O}$ и любой борелевской функции f существует наблюдаемая $X_2 \in \mathfrak{O}$, такая что $X_2 = f \circ X_1$.*

Пару непустых множеств $(\mathfrak{S}, \mathfrak{O})$, удовлетворяющих аксиомам 1–3, назовем *статистической моделью*. Статистическая модель называется *отделимой*, если

Аксиома 4. *Из того, что $\mu_{S_1}^X = \mu_{S_2}^X$ для всех $X \in \mathfrak{O}$ следует, что $S_1 = S_2$, а из того, что $\mu_S^{X_1} = \mu_S^{X_2}$ для всех $S \in \mathfrak{S}$ следует, что $X_1 = X_2$.*

Для отделимой модели операция смешивания $\mathfrak{S}$ и отношение функциональной подчиненности $\mathfrak{O}$ определены однозначно. Тем самым множество состояний $\mathfrak{S}$ наделяется выпуклой структурой, а множество наблюдаемых $\mathfrak{O}$ получает частичную упорядоченность.

Наблюдаемые $X_1, \ldots, X_m$ называются *совместимыми*, если они функционально подчинены некоторой наблюдаемой X, т. е. $X_j = f_j \circ X$ для $j = 1, \ldots, m$. Совместимые наблюдаемые могут быть измерены в одном эксперименте. Наблюдаемые, совместимые со всеми наблюдаемыми $X \in \mathfrak{O}$, образуют *центр* или классическую часть статистической модели.

0.3. Классические и квантовые системы

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ — измеримое пространство, $\mathfrak{P}(\Omega)$ — выпуклое множество всех вероятностных мер на Ω, а $\mathfrak{O}(\Omega)$ — совокупность всех вещественных случайных величин с естественным отношением функциональной подчиненности. Пусть

$$\mu_P^X(B) := P\big(X^{-1}(B)\big), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

— распределение вероятностей $X \in \mathfrak{O}(\Omega)$ относительно $P \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Пара $(\mathfrak{P}(\Omega), \mathfrak{O}(\Omega))$ образует отделимую статистическую модель, которую можно назвать *колмогоровской*. В этой модели все наблюдаемые совместимы и центр совпадает с $\mathfrak{O}(\Omega)$.

Статистическая модель N-уровневой квантовой системы была описана в п. 0.1. Если наблюдаемая X имеет спектральное разложение (0.2), то наблюдаемая $f \circ X$ естественно определяется как

$$f \circ X = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) E_j. \tag{0.6}$$

Квантовые наблюдаемые $X_1, \ldots, X_m$ совместимы тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы *перестановочны*, т. е.

$$X_i X_j = X_j X_i \quad \text{для } i, j = 1, \ldots, m.$$

Центр такой модели тривиален: он состоит из матриц, кратных единичной, т. е. только из постоянных наблюдаемых.

Это обстоятельство отражает квантовый *принцип дополнительности*. Физические измерения над микрообъектами осуществляются макроскопическими экспериментальными установками, каждая из которых предполагает сложную и специфичную организацию пространственно-временной среды. Разные способы такой организации, отвечающие разным наблюдаемым, могут быть взаимно-исключающими (хотя и относятся к одному и тому же микрообъекту), т. е. дополнительными. Дополнительность — это первое из основных отличий квантовой статистической модели от классической.

Один из наиболее спорных вопросов квантовой теории — проблема «скрытых параметров», т. е. вопрос о принципиальной возможности описания квантовой статистики в терминах классического вероятностного пространства. Первая попытка доказательства невозможности введения скрытых параметров была предпринята Дж. фон Нейманом в [24], и долгое время его аргументы рассматривались как решающие. В 1966 году Дж. Белл, анализируя парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена, обратил внимание на неполноту «доказательства» фон Неймана и указал на другое фундаментальное свойство квантовомеханического описания, которое может быть названо *целостностью*[1]. Математически оно связано с принципом суперпозиции и с тем обстоятельством, что составные квантовые системы описываются с помощью тензорного, а не декартова произведения, как в классической теории вероятностей. Вследствие этого возникают *сцепленные состояния*[2] составных квантовых систем с необычными корреляционными свойствами.

Дополнительность и целостность — это фундаментальные свойства квантовой статистики, лежащие в основе негативных результатов в проблеме скрытых параметров (см. раздел 1.4 в гл. 1).

0.4. Рандомизация в классической и квантовой статистике

Рассмотрим классическую случайную величину с конечным множеством значений $\{x_j\}$. Такая случайная величина может быть представлена в виде (0.2), а именно

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j(\omega) \tag{0.7}$$

где $E_j(\omega) := 1_{B_j}(\omega)$ — индикатор множества $B_j := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}$. Множества B_j $(j = 1, \ldots, n)$ образуют разбиение Ω. В каждой точке $\omega \in \Omega$ наблюдаемая (0.7) с вероятностью 1 принимает одно из значений x_j. В математической статистике, в частности, в теории статистических решений, полезно рассмотрение «рандомизованных» случайных величин, которые определяются указанием вероятностей $M_j(\omega) \in [0, 1]$ принятия значения x_j для

---

[1] Английский термин — nonseparability.

[2] Английский термин «entangled states» в русскоязычной литературе часто переводят как «перепутанные состояния». Мы считаем этот термин неудачным и предлагаем перевод «сцепленные состояния».

любого элементарного события ω. Набор функций $M := \{M_j : j = 1, \ldots, n\}$ характеризуется условиями

$$M_j(\omega) \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} M_j(\omega) = 1 \text{ для всех } \omega \in \Omega, \tag{0.8}$$

и описывает неточное измерение случайной величины X, т. е. измерение со случайными ошибками. В частности, измерение является точным (без ошибок), если $M_j(\omega) = E_j(\omega)$. Распределение вероятностей такого измерения относительно вероятностной меры P дается формулой

$$\mu_P^M(x_j) = \int\limits_{\Omega} P(d\omega) M_j(\omega). \tag{0.9}$$

Таким образом, возникает другая классическая статистическая модель, которую по имени создателя теории статистических решений можно назвать *моделью Вальда*.

Естественно рассмотреть квантовый аналог модели Вальда, в котором наблюдаемая с конечным множеством значений описывается конечным *разложением единицы*, т. е. семейством матриц (операторов) $M = \{M_j : j = 1, \ldots, n\}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ системы, удовлетворяющим условиям

$$M_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} M_j = I. \tag{0.10}$$

По аналогии с (0.9), вероятность j-го исхода в состоянии S описывается формулой

$$\mu_S^M(x_j) = \operatorname{Tr} \mathcal{S} M_j. \tag{0.11}$$

Эти определения естественно переносятся на наблюдаемые с произвольным множеством значений. Так возникает *обобщенная статистическая модель квантовой механики* (см. п. 2.1 в гл. 2).

Общие разложения единицы в квантовой теории появляются на рубеже 1970-х годов. К этому независимо приводят исследования по квантовой аксиоматике [177], [112], по проблеме воспроизводимости, связанной с повторными измерениями [101], по квантовой теории статистических решений [39] и другие работы.

0.5. Выпуклая геометрия и фундаментальные пределы квантовых измерений

В 1940 50-х годах в работах Д. Габора и Л. Бриллюэна было высказано предположение, что квантовомеханическая природа канала связи должна налагать фундаментальные ограничения на скорость передачи и точность воспроизведения информации. Этот вопрос приобрел актуальность в 60-е годы с появлением квантовых каналов связи – систем передачи информации, основанных на свойствах когерентного лазерного излучения. В 70-е годы была создана последовательная квантовая теория статистических решений, которая дает принципиальную основу для рассмотрения вопросов предельной точности и информативности измерений (см. [34], [41]). В этой теории решающие процедуры-измерения описываются разложениями единицы в гильбертовом пространстве системы, и решаются задачи об отыскании экстремума некоторого функционала (меры точности, шенноновской информации) в классе решающих процедур, обычно подчиненных дополнительным ограничениям (несмещенности, ковариантности и т. п.) (см. гл. 2). В этом направлении было обнаружено следующее свойство *информационной открытости*: измерение над расширением наблюдаемой квантовой системы, включающим независимую вспомогательную квантовую систему, может дать больше информации о состоянии наблюдаемой системы, нежели любое непосредственное измерение над системой.

Это свойство не имеет классического аналога – введение независимой классической системы означает дополнительный шум в наблюдениях и может только уменьшить информацию – и поэтому кажется парадоксальным. Поясним это с точки зрения обобщенной статистической модели квантовой механики.

Хотя приведенное выше обобщение понятия наблюдаемой формально аналогично введению рандомизованных величин в классической статистике, в квантовой теории неортогональные разложения единицы играют намного более значительную роль, чем просто средство для описания неточных измерений. Множество разложений единицы (0.10) выпукло. Это значит, что по аналогии со смесью различных состояний можно говорить о смеси различных измерительных статистик. В физике такие смеси возникают, когда измеряющее устройство имеет флуктуирующие параметры. Как с математической, так и с физической точек зрения, здесь самыми интересными и важными являются крайние точки выпуклого множества разложений единицы, в которых классическая случайность сводится к неустранимому минимуму. Это те разложения единицы, которые описывают статистику экстремально информативных и точных измерений, оптимизирующих соответствующие функционалы. В классическом случае, крайние точки множества (0.8) совпадают с нерандомизованными процедурами $\{E_j : j = 1, \ldots, n\}$, соответствующими обычным случайным величинам. Однако в квантовом случае, когда число исходов $n > 2$, крайние точки множества (0.10) уже не исчерпываются ортогональными разложениями единицы (см. раздел 1.3, гл. 2). Поэтому для описания экстремально точных и информативных квантовых измерений становятся необходимыми и неортогональные разложения единицы.

С другой стороны, как доказал Наймарк в 1940-м году, произвольное разложение единицы может быть расширено до ортогонального в объемлющем гильбертовом пространстве. Это позволяет рассматривать неортогональное разложение единицы как стандартную наблюдаемую в расширении исходной квантовой системы. Таким образом, измерение над расширением может быть более точным и информативным, чем любое прямое квантовое измерение. Этот факт тесно связан с квантовым свойством целостности, упомянутым в п. 0.3.

Если на начальном этапе исследовались фундаментальные квантовые ограничения на передачу информации, то теперь упор делается на новые конструктивные возможности, скрытые в квантовой статистике. Появление в 1990-х годах новых идей и достижений, таких как эффективные квантовые алгоритмы вычислений, криптографические и коммуникационные протоколы, привело к формированию нового научного направления — квантовой теории информации (см., например, [83], [188]). Центральную роль здесь играет свойство сцепленности квантовых состояний.

0.6. Проблема соответствия

Одна из трудностей в стандартной формулировке квантовой механики состоит в невозможности сопоставления некоторым величинам, таким как время, угол, фаза и т. п. самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве системы. Причина кроется в теореме единственности Стоуна – фон Неймана, которая налагает жесткие ограничения на спектры канонически сопряженных наблюдаемых. К этому же кругу вопросов можно отнести и трудности с локализуемостью (т. е. введением ковариантных наблюдаемых положения) для релятивистских квантовых частиц с нулевой массой.

Рассмотрение в качестве наблюдаемых неортогональных разложений единицы, подчиненных условиям ковариантности, аналогичных коммутационным соотношениям Вейля в теореме Стоуна – фон Неймана, позволяет в значительной степени избежать этих трудностей (см.раздел 2.3 гл. 2). Общая схема этого подхода состоит в том, что рассматривается выпуклое множество разложений единицы, удовлетворяющих условию ковариантности, и выделяются крайние точки этого множества, минимизирующие функционал неопределенности в некотором состоянии. Таким способом можно получить обобщенные наблюдаемые времени, фазы и т. п., описываемые неортогональными разложениями единицы. В спектральной теории неортогональные разложения единицы возникают как обобщенные спектральные меры несамосопряженных операторов. В соответствии с этим, например, оператор, отвечающий наблюдаемой времени, оказывается максимальным эрмитовым (но не самосопряженным). Можно сказать, что в этом случае обобщенная статистическая модель квантовой механики на новом математическом уровне оправдывает «наивное» представление о вещественной наблюдаемой, как об эрмитовом, но не обязательно самосопряженном операторе.

0.7. Повторные и непрерывные измерения

В колмогоровской модели преобразования состояний системы могут быть описаны с помощью условных вероятностей. Пусть в результате измерений случайной величины (0.7) получено значение x_j. При этом классическое состояние, т. е. вероятностная мера $P(d\omega)$ на Ω преобразуется по формуле условной вероятности

$$P(A) \to P(A \mid B_j) = \frac{\int\limits_A P(d\omega)E_j(\omega)}{\int\limits_\Omega P(d\omega)E_j(\omega)} \quad \text{для } A \in \mathcal{B}(\Omega). \tag{0.12}$$

Очевидно, что если результат измерения не принимается во внимание, то состояние P не изменяется:

$$P(A) \to \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j) = P(A). \tag{0.13}$$

В квантовой статистике ситуация качественно более сложна. Аналогом преобразования (0.12) является знаменитый *проекционный постулат фон Неймана*

$$S \to S_j = \frac{E_j S E_j}{\operatorname{Tr} S E_j}. \tag{0.14}$$

где S — оператор плотности состояния перед измерением, а S_j — оператор плотности состояния после измерения наблюдаемой (0.2), в результате которого получено значение x_j. Основанием для этого постулата служит феноменологическая гипотеза воспроизводимости, подразумевающая предельную точность и минимальность возмущения, вносимого измерением наблюдаемой X. Если результат измерения не принимается во внимание, то состояние S преобразуется по формуле, аналогичной (0.13):

$$S \to \sum_{j=1}^{n} S_j \mu_S^X(x_j) = \sum_{j=1}^{n} E_j S E_j. \tag{0.15}$$

Однако, в общем случае $\sum_{j=1}^{n} E_j S E_j \neq S$: это означает, что изменение состояния в ходе квантового измерения не сводится только к преобразованию информации и отражает также принципиально неустранимое и необратимое физическое воздействие измерительного прибора на наблюдаемую систему. С проекционным постулатом связан целый ряд проблем; не затрагивая вопросов философского характера, которые выходят за пределы вероятностной интерпретации, остановимся на конкретных проблемах, которые успешно решаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики.

Принципиальную трудность представляет формулировка проекционного постулата для наблюдаемых с непрерывным спектром. Для описания изменения состояния при произвольном квантовом измерении было введено понятие *инструмента* — меры со значениями в множестве преобразований квантовых состояний [104]. Этим понятием охватываются и неточные измерения, не удовлетворяющие условию воспроизводимости, что позволяет включить и случай непрерывного спектра. С каждым инструментом связано разложение единицы, причем инструментам, возникающим из проекционного постулата, отвечают ортогональные разложения единицы. Понятие инструмента открывает возможность описания статистики любой последовательности квантовых измерений.

Новое освещение получает вопрос о траекториях, восходящий к фейнмановской формулировке квантовой механики. Процесс непрерывного (во времени) измерения квантовой наблюдаемой можно представить как предел «серии» n повторных измерений с точностью, уменьшающейся как $\sqrt{n}$ [70]. Математическое описание такого предела [140] обнаруживает замечательные аналогии с классической схемой суммирования случайных величин, функциональными предельными теоремами в теории вероятностей и представлением Леви–Хинчина для процессов с независимыми приращениями (см. гл. 4). Наиболее важными примерами являются аналог винеровского процесса — непрерывное измерение координаты частицы, и аналог пуассоновского процесса — считающий процесс в квантовой оптике.

Результатом непрерывного процесса измерения является целая траектория; состояние системы S_t, обусловленное наблюдаемой траекторией до момента времени t — апостериорное состояние — удовлетворяет стохастическому нелинейному уравнению Шредингера. Это уравнение объясняет, в частности, почему волновой пакет не расплывается в процессе непрерывного измерения координаты [80] (см. гл. 5).

С непрерывными процессами измерения тесно связаны и новые подходы, основанные на стохастических траекториях в квантовой оптике [90] и декогерентных историях в основаниях квантовой механики [118].

0.8. Необратимая динамика

Обратимая динамика изолированной квантовой системы описывается уравнением
$$S \to U_t S U_t^{-1}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{0.16}$$
где $\{U_t : -\infty < t < \infty\}$ — непрерывная группа унитарных операторов. Если система является *открытой*, т. е. взаимодействует с окружением, то ее эволюция, как правило, необратима. Пример такого необратимого изменения состояния, обусловленного взаимодействием с измерительным прибором, дается соотношением (0.15). Наиболее общий вид *динамического отображения*, задающего конечную эволюцию открытой системы, включает как (0.16), так и (0.15):
$$S \to \sum_j V_j S V_j^*. \tag{0.17}$$
где V_j — ограниченные операторы, удовлетворяющие условию $\sum_j V_j^* V_j \leqslant I$. Среди возможных аффинных преобразований выпуклого множества состояний, отображения (0.17) выделяются свойством *вполне положительности*, возникшим и играющим важную роль в современной теории некоммутативных операторных алгебр.

Непрерывная марковская эволюция открытой системы описывается *динамической полугруппой*, т. е. полугруппой динамических отображений, удовлетворяющей определенным условиям непрерывности (см. [101]). Динамические полугруппы, которые являются некоммутативным аналогом марковских полугрупп в теории вероятностей, а также их генераторы, описывающие квантовые марковские управляющие уравнения, обсуждаются в гл. 3.

0.9. Квантовые случайные процессы

Одним из стимулов возникновения теории квантовых случайных процессов послужила проблема *расширения* динамической полугруппы до обратимой динамики «большой системы», включающей открытую систему и окружение. Существование такого расширения означает, в частности, согласованность понятия динамической полугруппы с основным динамическим принципом квантовой механики, выраженным соотношением (0.16).

В теории вероятностей подобное расширение марковской полугруппы до группы временных сдвигов в пространстве траекторий, соответствующих марковскому случайному процессу, осуществляется известной конструкцией Колмогорова – Даниэля. Понятие квантового случайного процесса, играющее важную роль в проблеме расширения динамических полугрупп, было сформулировано в [59]. В 80-е годы теория квантовых случайных процессов превратилась в обширное самостоятельное поле исследований (см., в частности, [204], [205], [206], [207]).

Аналитический аппарат *квантового стохастического исчисления*, позволяющий, в частности, строить нетривиальные классы квантовых случайных процессов и конкретные расширения динамических полугрупп, был предложен в [157]. Квантовое стохастическое исчисление возникает на пересечении двух концепций – временной фильтрации в смысле теории случайных процессов и вторичного квантования в пространстве Фока. В конце 60-х годов Р. Стритер и Х. Араки указали на структуру непрерывного тензорного произведения, которая лежит в основе связи между безграничной делимостью, процессами с независимыми приращениями и пространством Фока. Благодаря этому пространство Фока оказывается носителем процессов «квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Квантовое стохастическое исчисление представляет интерес и с точки зрения классической теории случайных процессов. Оно перебрасывает мост между исчислением Ито и вторичным квантованием, открывает неожиданные связи между непрерывными и скачкообразными процессами, позволяет по новому взглянуть на понятие стохастического интеграла [196], [183]. Наконец, на этой основе развиваются потенциально важные приложения, относящиеся к теории управления и фильтрации для квантовых случайных процессов (см. гл. 5).

1. Стандартная статистическая модель квантовой механики

1.1. Основные понятия

1.1.1. Операторы в гильбертовом пространстве

Изложению теории операторов в гильбертовом пространстве, в значительной мере стимулированной проблемами квантовой механики, посвящено много прекрасных книг (см., в частности, [3], [28]). Ниже мы лишь напоминаем некоторые факты и фиксируем обозначения.

Далее $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Для скалярного произведения в $\mathcal{H}$ используется дираковское обозначение $\langle\varphi|\psi\rangle$, причем считается, что оно линейно по ψ и антилинейно по φ. Иногда векторы $\mathcal{H}$ будут обозначаться как $|\phi\rangle$, а соответствующие (по теореме Рисса) непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{H}$ – как $\langle\psi|$. В конечномерном случае это будут, соответственно, векторы-столбцы и векторы-строки. Символ $|\psi\rangle\langle\varphi|$ тогда обозначает оператор, действующий на вектор $\chi \in \mathcal{H}$ по формуле

$$|\psi\rangle\langle\varphi|\chi = \psi\langle\varphi|\chi\rangle.$$

В частности, если $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, то $|\psi\rangle\langle\psi|$ есть проекция на вектор $\psi \in \mathcal{H}$. Линейная оболочка множества операторов вида $|\psi\rangle\langle\varphi|$ совпадает с множеством операторов конечного ранга в $\mathcal{H}$.

Мы будем также использовать дираковское обозначение для плотно определенных линейных ($\langle|$) и антилинейных ($|\rangle$) форм на $\mathcal{H}$, которые не задаются каким-либо вектором в $\mathcal{H}$. Пусть, например, $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ – пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ соотношение

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

определяет линейную форму $\langle x|$ на плотном подмножестве $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций с компактным носителем. Эта форма является неограниченной и не представима каким-либо вектором в $\mathcal{H}$. Другой полезный пример, который получается преобразованием Фурье предыдущего примера, это форма

$$\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\psi(x)dx,$$

определенная на подпространстве интегрируемых функций.

Если X — ограниченный оператор в $\mathcal{H}$, то X^* обозначает сопряженный ему оператор, определяемый соотношением

$$\langle\varphi|X^*\psi\rangle = \langle X\varphi|\psi\rangle \text{ для } \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Ограниченный оператор $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ называется *эрмитовым*, если $X = X^*$. *Изометрический* оператор — это такой оператор U, что $U^*U = I$, где I — единичный оператор; если более того $UU^* = I$, то U называется *унитарным*. (Ортогональным) *проектором* называется эрмитов оператор E, такой что $E^2 = E$.

Эрмитов оператор X называется *положительным* ($X \geqslant 0$), если $\langle\psi|X\psi\rangle \geqslant 0$ для всех $\psi \in \mathcal{H}$. Для положительного оператора однозначно определен положительный квадратный корень, т. е. для любого положительного оператора B существует единственный положительный оператор A, такой что $A^2 = B$.

Для каждого ограниченного положительного оператора T однозначно определен *след*:

$$\operatorname{Tr} T := \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i|Te_i\rangle \leqslant \infty, \tag{1.1}$$

где $\{e_i\}$ — произвольный ортонормированный базис. Оператор T называется *ядерным* (*оператором со следом*), если он является линейной комбинацией положительных операторов с конечным следом. Для такого оператора след определяется однозначно как сумма абсолютно сходящегося ряда вида (1.1). Множество ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ является банаховым пространством относительно нормы $\|T\|_1 := \operatorname{Tr}\sqrt{T^*T}$, причем множество операторов конечного ранга плотно в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Множество $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ образует двусторонний идеал в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. оно замкнуто относительно как правого, так и левого умножения на произвольный ограниченный оператор. Сопряженное банахову пространству $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ изоморфно $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, алгебре всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, причем сопряженность определяется билинейной формой

$$\langle T, X\rangle = \operatorname{Tr} TX \text{ для } T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}), X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \tag{1.2}$$

Нижний индекс h в обозначении множества операторов означает, что рассматривается соответствующее подмножество эрмитовых операторов. Например, $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ есть вещественное банахово пространство ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{H}$. Отметим, что $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})^* = \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$, причем сопряженность, как и прежде, задается формулой (1.2).

Кроме сходимости по операторной норме в $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$, часто используются более слабые понятия сходимости. Последовательность $\{X_n\}$ *сходится* к X

- *сильно*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n\psi - X\psi\| = 0$ для всех $\psi \in \mathcal{H}$,
- *слабо*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \langle\varphi|X_n\psi\rangle = \langle\varphi|X\psi\rangle$ для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ и
- *-*слабо*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Tr} TX_n = \operatorname{Tr} TX$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Если $\{X_n\}$ ограниченная по норме последовательность операторов, такая что $X_n \leqslant X_{n+1}$ для всех n, то X_n сходится сильно, слабо и *-слабо к ограниченному оператору X (обозначается $X_n \uparrow X$).

1.1.2. Оператор плотности

Так называется всякий положительный оператор S с единичным следом:

$$S \geqslant 0, \quad \operatorname{Tr} S = 1.$$

Множество операторов плотности $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является выпуклым подмножеством вещественного линейного пространства $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$ эрмитовых ядерных операторов. Более того, оно является основанием конуса положительных элементов, порождающего $\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$. Точка S выпуклого множества $\mathfrak{S}$ называется *крайней*, если из того, что $S = pS_1 + (1-p)S_2$, где $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ и $0 < p < 1$, следует, что $S_1 = S_2 = S$. Крайними точками множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ являются одномерные проекторы

$$S_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{1.3}$$

где $\psi \in \mathcal{H}$ и $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Всякий оператор плотности можно представить в виде счетной выпуклой комбинации

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

где $\langle\psi_j|\psi_j\rangle = 1$, $p_j \geqslant 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Одно из таких представлений дается спектральным разложением оператора S, когда ψ_j являются его собственными векторами, а p_j соответствующими собственными числами.

Энтропия оператора плотности S определяется как

$$H(S) = -\operatorname{Tr} S \log S = -\sum_j \lambda_j \log \lambda_j,$$

где λ_j — собственные числа S, с соглашением $0 \log 0 = 0$ (обычно log обозначает логарифм по основанию 2). Энтропия — это положительная вогнутая функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, принимающая минимальное значение 0 в крайних точках $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Если $d = \dim \mathcal{H} < \infty$, то максимальное значение энтропии равно $\log d$, и достигается оно на операторе плотности $S = d^{-1} I$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$ проекторов в $\mathcal{H}$, изоморфное квантовой логике событий (замкнутых линейных подпространств $\mathcal{H}$). *Вероятностной мерой* на $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$ называется вещественная функция μ со свойствами

1. $0 \leqslant \mu(E) \leqslant 1$ для всех $E \in \mathfrak{E}(\mathcal{H})$,
2. если $\{E_j\} \subset \mathfrak{E}(\mathcal{H})$, причем $E_j E_k = 0$ при $j \neq k$ и $\sum_j E_j = I$, то $\sum_j \mu(E_j) = I$.

Отвечая на вопрос, поставленный Макки, Глисон доказал следующую теорему (см. [21], [196]).

Теорема 1.1.1. *Пусть* $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$. *Тогда всякая вероятностная мера* μ *на* $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$ *имеет вид*

$$\mu(E) = \operatorname{Tr} SE \quad \textit{для всех } E \in \mathfrak{E}(\mathcal{H}), \tag{1.4}$$

где S — однозначно определенный оператор плотности.

Случай $\dim \mathcal{H} = 2$ является особым — для него легко указать меры, не представимые в виде (1.4), однако они не используются в квантовой теории. Доказательство теоремы Глисона совершенно не тривиально; оно породило целое направление в некоммутативной теории меры, посвященное всевозможным обобщениям и упрощениям этой теоремы (см. например, обзор Кручиньского в [203]).

1.1.3. Спектральная мера

Пусть $\mathcal{X}$ — множество с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Ортогональным разложением единицы* в $\mathcal{H}$ называется проекторно-значная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, которая является функцией $E\colon \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{E}(\mathcal{H})$, удовлетворяющей условиям:

1. если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, то $E(B_1)E(B_2) = 0$,
2. если $\{B_j\}$ конечное или счетное разбиение $\mathcal{X}$ на попарно непересекающиеся измеримые подмножества, то $\sum_j E(B_j) = I$, где ряд сходится сильно.

Пусть X оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{H}$. Обозначим $\mathcal{D}(X^*)$ множество векторов φ таких, что существует $\chi \in \mathcal{H}$, для которого

$$\langle\varphi|X\psi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle \text{ для всех } \psi \in \mathcal{D}(X).$$

Определим оператор X^* с областью определения $\mathcal{D}(X^*)$, полагая $X^*\varphi = \chi$. Оператор X называется *эрмитовым* (симметричным), если $X \subseteq X^*$ ($\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X)^*$ и $X = X^*$ на $\mathcal{D}(X)$), и *самосопряженным*, если $X = X^*$.

Спектральная теорема (фон Нейман, Стоун, Рисс, 1929–1932) устанавливает взаимно однозначное соответствие между ортогональными разложениями единицы E на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ и самосопряженными операторами в $\mathcal{H}$ по формуле

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} xE(dx), \tag{1.5}$$

где интеграл понимается в подходящем смысле (см. [28]). Разложение единицы E называется *спектральной мерой* оператора X. Для любой борелевской функции f определен самосопряженный оператор

$$f \circ X := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)E(dx),$$

спектральная мера F которого связана со спектральной мерой оператора X соотношением

$$F(B) = E\big(f^{-1}(B)\big) \text{ для } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Совокупность всех самосопряженных операторов в $\mathcal{H}$ обозначим $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$.

1.1.4. Статистический постулат

С каждой квантовомеханической системой связывается сепарабельное комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$. *Состояния* системы описываются операторами плотности в $\mathcal{H}$ (элементами $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$). Крайние точки $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$

называются *чистыми* состояниями. *Вещественной наблюдаемой* называется любой самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ (элемент $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$). Распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S задается формулой Борна – фон Неймана

$$\mu_S^X(B) = \operatorname{Tr} SE(B) \quad \text{для } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{1.6}$$

где E — спектральная мера X. Определенную таким образом отделимую статистическую модель $(\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \mathfrak{O}(\mathcal{H}))$ будем называть *стандартной статистической моделью квантовой механики*.

Из (1.5) и (1.6) вытекает, что *среднее значение* наблюдаемой X в состоянии S

$$\mathbf{E}_S(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\mu_S^X(dx)$$

равно

$$\mathbf{E}_S(X) = \operatorname{Tr} SX \tag{1.7}$$

(по крайней мере для ограниченных наблюдаемых). Среднее значение наблюдаемой в чистом состоянии равно

$$\mathbf{E}_{S_\psi}(X) = \langle\psi|X\psi\rangle.$$

Допуская вольность речи, ограниченной наблюдаемой иногда называют произвольный элемент $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Соотношение (1.7) определяет линейный положительный нормированный ($\mathbf{E}_S(I) = 1$) функционал на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. *состояние* в смысле теории алгебр (предыдущие рассуждения поясняют происхождение этого математического термина). Состояние на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, определяемое оператором плотности по формуле (1.7), является *нормальным* в том смысле, что если $X_n \uparrow X$, то $\mathbf{E}_S(X_n) \to \mathbf{E}_S(X)$.

Алгеброй фон Неймана называется всякая алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, содержащая единичный оператор, замкнутая относительно инволюции и предельного перехода в сильной (или слабой) операторной топологии. С любой алгеброй фон Неймана $\mathfrak{B}$, как и с $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, ассоциируется статистическая модель, в которой состояниями являются нормальные состояния на $\mathfrak{B}$, а наблюдаемыми — самосопряженные операторы, присоединенные к $\mathfrak{B}$. Такие модели занимают промежуточное положение между квантовой и классическими (когда $\mathfrak{B}$ коммутативна) и играют важную роль в теории квантовых систем с бесконечно большим числом степеней свободы — квантовой теории поля и статистической механике (см., например, [8], [88], [57]).

1.1.5. Совместимые наблюдаемые

Коммутатором ограниченных операторов X и Y называется оператор

$$[X,Y] := XY - YX.$$

Операторы X, Y *перестановочны* (коммутируют), если $[X,Y] = 0$. Самосопряженные операторы X и Y называются перестановочными, если перестановочны их спектральные меры.

Следующие утверждения являются эквивалентными:

1. наблюдаемые $X_1, \ldots, X_n$ *совместимы*, т. е. существует наблюдаемая X и борелевские функции $f_1, \ldots, f_n$ такие, что $X_j = f_j \circ X$ для $j = 1, \ldots, n$;
2. операторы $X_1, \ldots, X_n$ перестановочны.

Если $E_1, \ldots, E_n$ — спектральные меры совместимых наблюдаемых $X_1, \ldots, X_n$, то соотношение

$$E(B_1 \times \cdots \times B_n) = E_1(B_1) \cdots E_n(B_n) \text{ для } \{B_j : j = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

однозначно определяет ортогональное разложение единицы E на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, называемое совместной спектральной мерой операторов $X_1, \ldots, X_n$.

Существование несовместимых наблюдаемых отражает квантовый принцип дополнительности. Количественное выражение этого принципа дает *соотношение неопределенностей*. Для наблюдаемых X, Y, имеющих конечный второй момент относительно состояния S (n-й момент наблюдаемой X по отношению к состоянию S определяется как $\int x^n \mu_S^X(dx)$), корректно определяются билинейные формы:

$$\langle X, Y\rangle_S := \Re(\operatorname{Tr} YSX), \quad [X,Y]_S := 2\Im(\operatorname{Tr} YSX)$$

(см. [41], гл. 2). Пусть $\mathcal{X} := \{X_1, \ldots, X_n\}$ – набор произвольных наблюдаемых с конечным вторым моментом. Введем вещественные матрицы

$$\mathbf{D}_S(\mathcal{X}) := \Big(\langle X_i - I\mathbf{E}_S(X_i), X_j - I\mathbf{E}_S(X_j)\rangle_S\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

$$\mathbf{C}_S(\mathcal{X}) := \Big([X_i, X_j]_S\Big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Из положительной определенности полуторалинейных форм $(X,Y) \to \operatorname{Tr} Y^*SX$ и $(X,Y) \to \operatorname{Tr} XSY^*$ вытекает неравенство

$$\mathbf{D}_S(\mathcal{X}) \geqslant \pm\frac{i}{2}\mathbf{C}_S(\mathcal{X}), \tag{1.8}$$

где левая и правая части рассматриваются как комплексные эрмитовы матрицы[1]. Для двух наблюдаемых $X = X_1$ и $Y = X_2$ неравенство (1.8) равносильно соотношению неопределенностей Шредингера – Робертсона:

$$\mathbf{D}_S(X)\mathbf{D}_S(Y) \geqslant \langle X - I\mathbf{E}_S(X), Y - I\mathbf{E}_S(Y)\rangle^2 + \frac{1}{4}[X, Y]_S^2, \tag{1.9}$$

где

$$\mathbf{D}_S(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}_S(X))^2 \mu_S^X(dx)$$

есть *дисперсия* наблюдаемой X в состоянии S. Если X, Y — совместимые наблюдаемые, то величина

$$\langle X - I\mathbf{E}_S(X), Y - I\mathbf{E}_S(Y)\rangle_S = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}_S(X))(y - \mathbf{E}_S(Y))\mu_S^{X,Y}(dxdy)$$

представляет собой *ковариацию* X, Y в состоянии S; при этом $[X, Y]_S = 0$ и (1.9) превращается в неравенство Коши – Шварца для ковариации случайных величин. Для произвольных ограниченных эрмитовых операторов X, Y

$$\langle X, Y\rangle_S = \operatorname{Tr} SX \circ Y, \tag{1.10}$$

где

$$X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX)$$

йорданово (симметризованное) произведение операторов X, Y. Величина вида (1.10) в квантовой статистической механике называется *корреляцией*, хотя если наблюдаемые X, Y не совместимы, она не связана каким-либо простым образом с измерениями X и Y.

Подробный обзор различных обобщений неопределенных отношений можно найти в [17].

1.1.6. Простейшая квантовая система

В физике конечномерное гильбертово пространство обычно описывает внутренние (спиновые) степени свободы квантовой системы. Случай $\dim \mathcal{H} = 2$ отвечает минимальному ненулевому спину $\frac{1}{2}$. Рассмотрим двумерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с каноническим базисом

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

---

[1] Впервые такое неравенство было указано Робертсоном; впоследствии оно неоднократно переоткрывалось (см. [17]).

Базис в $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$ образован матрицами

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы σ_i, называемые *матрицами Паули*, возникают из унитарного представления эвклидовых вращений в $\mathcal{H}$ и выражают геометрию спина частицы. В квантовых вычислениях эта простейшая система описывает элементарную ячейку памяти квантового компьютера — *q-бит* [217], [83]. Здесь действие матриц Паули описывает элементарные ошибки, которые могут произойти в этой ячейке: переворот спина σ_1, фазовую ошибку σ_3 и их комбинацию $\sigma_2 = i\sigma_1\sigma_3$.

Полагая $X(\vec{a}) := \sum_{i=1}^{3} a_i\sigma_i$, где $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, имеем

$$X(\vec{a})X(\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})I + iX(\vec{a}\times\vec{b}), \tag{1.12}$$

где $\vec{a}\cdot\vec{b}$ — скалярное, а $\vec{a}\times\vec{b}$ — векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$. Отсюда

$$\mathrm{Tr}\, X(\vec{a})X(\vec{b}) = 2\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{1.13}$$

Всякая матрица плотности однозначно записывается в виде

$$S(\vec{a}) = \frac{1}{2}\big(I + X(\vec{a})\big), \tag{1.14}$$

где $|\vec{a}| \leqslant 1$. Таким образом, выпуклое множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ изоморфно единичному шару в $\mathbb{R}^3$, причем чистые состояния соответствуют точкам сферы $|\vec{a}| = 1$. В этом случае

$$S(\vec{a}) = |\psi(\vec{a})\rangle\langle\psi(\vec{a})|, \tag{1.15}$$

где

$$\psi(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta/2)\mathrm{e}^{(-i\alpha/2)} \\ \sin(\beta/2)\mathrm{e}^{(i\alpha/2)} \end{bmatrix}$$

единичный вектор состояния, причем $\cos\beta = a_3, \sin\beta\mathrm{e}^{i\alpha} = a_1 + ia_2$. Параметры α, β — это эйлеровы углы единичного вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, описывающего направление спина частицы. Чистые состояния с $|\vec{a}| = 1$ являются «полностью поляризованными» состояниями, в которых спин имеет определенное направление, в то время как их смеси с $|\vec{a}| \leqslant 1$ являются «частично поляризованными». Значение $\vec{a} = 0$ соответствует «хаотическому состоянию» $S(0) = \frac{1}{2}I$. Естественный источник частиц обычно дает хаотическое состояние, в то время как полностью поляризованное состояние приготавливается «фильтром Штерна–Герлаха», использующим неоднородное магнитное поле с градиентом в направлении $\vec{a}$ [198].

Поскольку из (1.14), используя (1.13), следует

$$\langle\psi(\vec{a})|\psi(-\vec{a})\rangle = \operatorname{Tr} S(\vec{a})S(-\vec{a}) = 0,$$

то спектральным разложением наблюдаемой $X(\vec{a})$ является

$$X(\vec{a}) = |\psi(\vec{a})\rangle\langle\psi(\vec{a})| - |\psi(-\vec{a})\rangle\langle\psi(-\vec{a})|, \qquad (|\vec{a}| = 1).$$

Итак, наблюдаемая $X(\vec{a})$ принимает значения ± 1, причем вероятность значения ± 1 в состоянии $S(\vec{b})$ ($|\vec{b}| < 1$) есть

$$\operatorname{Tr} S(\vec{b})S(\pm\vec{a}) = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Наблюдаемая $\frac{\hbar}{2}X(\vec{a})$ (где $\hbar$ — постоянная Дирака) описывает компоненту спина в направлении $\vec{a}$. Из (1.12) следует, что наблюдаемые $X(\vec{a})$, $X(\vec{b})$ совместимы тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Устройства Штерна–Герлаха, измеряющие $X(\vec{a})$ и $X(\vec{b})$, требуют применения неоднородных магнитных полей с соответствующими градиентами и, следовательно, являются взаимно дополнительными, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

1.2. Симметрии, кинематика, динамика

1.2.1. Группы симметрий

Рассмотрим отделимую статистическую модель $(\mathfrak{S}, \mathfrak{O})$. Пусть задана пара взаимно однозначных преобразований: $\Psi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ и $\Phi : \mathfrak{O} \to \mathfrak{O}$ такая, что

$$\mu_{\Psi(S)}^{\Phi(X)} = \mu_S^X$$

для всех $S \in \mathfrak{S}$ и $X \in \mathfrak{O}$. Отсюда следует, что Ψ является аффинным отображением, т. е.

$$\Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i S_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Psi(S_i),$$

если $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Преобразование Ψ назовем *симметрией* в пространстве состояний, а преобразование Φ — соответствующей симметрией в пространстве наблюдаемых.

Теорема 1.2.1 (Вигнер). *Всякая симметрия пространства квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет вид*

$$\Psi(S) = USU^*, \tag{1.16}$$

где U — унитарный или антиунитарный оператор в $\mathcal{H}$.

Для средних значений наблюдаемых имеем

$$\mathbf{E}_{\Psi(S)}(X) = \operatorname{Tr}\Psi(S)X = \operatorname{Tr}S\Psi^*(X) = \mathbf{E}_S(\Psi^*(X)),$$

где

$$\Psi^*(X) = U^*XU. \tag{1.17}$$

С точки зрения наблюдаемой статистики, преобразование (1.16) состояний эквивалентно преобразованию (1.17) наблюдаемых. В первом случае говорят о *картине Шредингера*, а во втором — о *картине Гейзенберга*.

Пусть G — группа, а $g \to \Psi_g$ — представление G в группу симметрий $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, так что

$$\Psi_{g_1 \cdot g_2} = \Psi_{g_1} \cdot \Psi_{g_2} \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in G.$$

Если G — связная топологическая группа, а представление $g \to \Psi_g$ непрерывно, то Ψ_g можно представить в виде

$$\Psi_g(S) = U_g S U_g^*,$$

где $g \to U_g$ — проективное унитарное представление группы G в пространстве $\mathcal{H}$, т. е. все операторы U_g унитарны и удовлетворяют уравнению

$$U_{g_1}U_{g_2} = \omega(g_1, g_2)U_{g_1 g_2}, \tag{1.18}$$

где $(g_1, g_2) \to \omega(g_1, g_2)$ — множитель представления — комплексная функция, удовлетворяющая определенным алгебраическим соотношениям (см., например, [225]).

Вторую возможность в теореме Вигнера можно перефразировать следующим образом: зафиксируем некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ и пусть Λ есть антиунитарный оператор комплексного сопряжения в этом базисе. Тогда $\Lambda^2 = I$ и $\widetilde{U} = \Lambda U$ унитарен, поэтому

$$\Psi(S) = \widetilde{U}^*\overline{S}\widetilde{U} = \widetilde{U}^*S'\widetilde{U}.$$

где $\overline{S}$ — комплексное сопряжение, а S' — транспозиция матрицы оператора в этом базисе. Таким образом, источником антиунитарности является комплексное сопряжение, которое в физике ассоциируется с обращением времени [8].

1.2.2. Однопараметрические группы

В случае $G = \mathbb{R}$ всегда можно выбрать $\omega(g_1, g_2) \equiv 1$, так что однопараметрическая группа симметрий определяется унитарным представлением $\mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$ [225].

Теорема 1.2.2 (Стоун). *Пусть $t \to U_t$, $t \in \mathbb{R}$ — сильно непрерывная группа унитарных операторов в $\mathcal{H}$, так что*

$$U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1+t_2} \text{ для всех } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$, такой что $U_t = e^{itA}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Обратно, для любого самосопряженного оператора A семейство $\{e^{itA} : t \in \mathbb{R}\}$ образует сильно непрерывную однопараметрическую группу.

Рассмотрим, например, группу пространственных сдвигов вдоль данной координатной оси. Пусть S_0 — состояние, приготовленное некоторым устройством; тогда новое состояние, приготовленное тем же устройством, сдвинутым вдоль оси на расстояние x, будет

$$e^{-iPx/\hbar} S_0 e^{iPx/\hbar}, \tag{1.19}$$

где P — самосопряженный оператор *импульса* вдоль оси. Здесь x представляет собой параметр пространственного сдвига.

С другой стороны, пусть состояние S_0 приготовлено в некоторый момент времени τ. Тогда состояние, приготовленное тем же устройством в момент времени $\tau + t$, будет

$$e^{iHt/\hbar} S_0 e^{-iHt/\hbar}, \tag{1.20}$$

где H — самосопряженный оператор, называемый *гамильтонианом* (представляющий наблюдаемую энергии системы). Поскольку временной сдвиг $\tau \to \tau + t$ в приготовлении состояния эквивалентен временному сдвигу $\tau \to \tau - t$ в наблюдении, временная эволюция состояния задается уравнением

$$S_0 \to S_t = e^{-iHt/\hbar} S_0 e^{iHt/\hbar}.$$

Отсюда следует уравнение временной эволюции (в картине Шредингера):

$$i\hbar\frac{dS_t}{dt} = [H, S_t]. \tag{1.21}$$

Если $S_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ — чистое состояние, то $S_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ для произвольного t, где $\{\psi_t\}$ — семейство векторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющее уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t. \tag{1.22}$$

В общем случае, H — неограниченный оператор, так что в соотношениях (1.21) и (1.22) следует позаботиться об областях определения.

Вообще говоря, каждой однопараметрической группе симметрий геометрического или кинематического характера соответствует самосопряженный оператор, являющийся генератором преобразований квантовых состояний в соответствии с формулами типа (1.20) и (1.19).

1.2.3. Соотношения Вейля

Кинематика нерелятивистских систем, как классических, так и квантовых, основана на принципе относительности Галилея, согласно которому описание изолированной системы одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Пусть $W_{x,y}$ — унитарный оператор, порождающий преобразование состояний при переходе в систему отсчета, сдвинутую на расстояние x и движущуюся относительно исходной со скоростью $v = y/m$ вдоль выделенной координатной оси (m — масса частицы). Тогда, в соответствии с п. 1.2.1, $(x, y) \to W_{x,y}$ есть проективное представление группы $G = \mathbb{R}^2$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если представление неприводимо, т. е. если нет нетривиального замкнутого подпространства пространства $\mathcal{H}$, инвариантного относительно всех $W_{x,y}$, то можно доказать, что соотношение (1.18) приводится к виду

$$W_{x_1,y_1}W_{x_2,y_2} = \exp\Big(-\frac{i}{2\hbar}(x_1y_2 - x_2y_1)\Big)W_{x_1+x_2,y_1+y_2}. \tag{1.23}$$

Выбирая однопараметрические подгруппы — группу пространственных сдвигов $V_x = W_{x,0}$ и группу «галилеевых бустов» $U_y = W_{0,y}$ — соотношение (1.23) можно переписать в виде

$$U_yV_x = e^{ixy/\hbar}V_xU_y; \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

причем $W_{x,y} = e^{ixy/(2\hbar)} V_x U_y$. Соотношение (1.24) называется *каноническим коммутационным соотношением* (ККС) *Вейля* [11].

Согласно теореме Стоуна, в $\mathcal{H}$ существуют самосопряженные операторы Q, P, такие что

$$U_y = e^{iyQ/\hbar}, \quad V_x = e^{-ixP/\hbar}.$$

Рассматривая Q как вещественную наблюдаемую, заметим, что соотношение (1.24) равносильно уравнению

$$V_x{}^* E(B + x) V_x = E(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{1.25}$$

для спектральной меры E оператора Q. Это же равносильно тому, что распределение вероятностей наблюдаемой преобразуется ковариантно при пространственных сдвигах (1.19):

$$\mu^Q_{S_x}(B + x) = \mu^Q_{S_0}(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

для любого состояния S_0, где $S_x = V_x S_0 V_x^*$. Это дает основание назвать Q *наблюдаемой координаты* вдоль выделенной оси. Симметричное рассуждение показывает, что $\frac{P}{m}$ есть *наблюдаемая скорости* изолированной квантовой системы.

Представлением ККС считается любая конкретная пара (V, U) унитарных семейств, удовлетворяющая соотношениям (1.24). Неприводимым является *представление Шредингера* в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$:

$$V_x\psi(\xi) = \psi(\xi - x), \quad U_x\psi(\xi) = e^{iy\xi/\hbar}\psi(\xi).$$

В этом представлении Q задается оператором умножения на ξ, а P – оператором $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\xi}$. Операторы P, Q имеют общую плотную инвариантную область определения и удовлетворяют на ней *ККС Гейзенберга*:

$$[Q, P] = i\hbar I. \tag{1.26}$$

Операторы P, Q называются *каноническими наблюдаемыми*. Обратный переход от соотношения Гейзенберга к соотношению Вейля (экспоненцирование) имеет ряд аналитических тонкостей, связанных с неограниченностью операторов P и Q, и породил обширную математическую литературу (см. [160]).

Принципиальное значение для квантовой механики имеет тот факт, что ККС определяют канонические наблюдаемые P и Q практически однозначно [21].

Теорема 1.2.3 (Стоун – фон Нейман). *Всякое сильно непрерывное представление ККС является прямой суммой неприводимых представлений, каждое из которых унитарно эквивалентно представлению Шредингера.*

В частности, в любом представлении ККС операторы P и Q, как и в представлении Шредингера, неограничены и имеют лебегов спектр, простирающийся на всю вещественную прямую. С этим связана известная трудность с установлением разумного принципа соответствия в квантовой механике. Вопрос состоит в определении канонически сопряженных квантовых наблюдаемых, аналогичных обобщенным координатам и импульсам в гамильтоновом формализме, и связан с проблемой квантования классических систем. Так, в классической механике время и энергия, подобно координате и импульсу, являются канонически сопряженными величинами. Однако наблюдаемая энергии H имеет ограниченный снизу спектр, поэтому из теоремы Стоуна – фон Неймана вытекает, что не существует самосопряженного оператора времени T, который был бы связан с H каноническим коммутационным соотношением. Эти трудности, возникающие и для других канонических пар, разрешаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики (см. раздел 2.3 гл. 2).

Аналогично формулируются ККС для систем с произвольным числом степеней свободы. Пусть $\{Z, \Delta\}$ — *симплектическое* пространство, т. е. вещественное линейное пространство с билинейной кососимметричной формой $(z, z') \to \Delta(z, z') : Z \times Z \to \mathbb{R}$. Представлением ККС называется семейство $z \to W(z)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющих *ККС Вейля – Сигала*:

$$W(z)W(z') = \exp\Big(\frac{i}{2h}\Delta(z, z')\Big)W(z + z'). \tag{1.27}$$

Если Z конечномерно, а форма Δ невырождена, то Z имеет четную размерность $2d$, и существует базис $\{b_1, \ldots, b_d, c_1, \ldots, c_d\}$, в котором

$$\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^{d}(x_j y'_j - x'_j y_j).$$

где $z = \sum_{j=1}^{d} x_j b_j + y_j c_j$ и $z' = \sum_{j=1}^{d} x'_j b_j + y'_j c_j$. При этом операторы сильно непрерывного представления Вейля могут быть записаны в виде

$$W(z) = \exp\Big(\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{d}(x_j P_j + y_j Q_j)\Big), \tag{1.28}$$

где самосопряженные операторы P_j, Q_j удовлетворяют многомерному аналогу ККС Гейзенберга (1.26)

$$[Q_j, P_k] = i\delta_{jk}\hbar I, \quad [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, Q_k] = 0.$$

В этом случае теорема единственности Стоуна – фон Неймана сохраняет силу.

Для систем с бесконечным числом степеней свободы единственность нарушается и существует континуальное множество неэквивалентных представлений, что является причиной «инфракрасных расходимостей» в квантовой теории поля (см., например, [8], [30], [57]). Эта неединственность представлений ККС тесно связана с неэквивалентностью вероятностных мер в бесконечномерных пространствах и послужила одним из первоначальных стимулов для изучения этого вопроса, занимающего большое место в классической теории вероятностей.

1.2.4. Гауссовские состояния

Неравенство (1.9) и ККС (1.26) влекут *соотношение неопределенностей Гейзенберга*:

$$\mathbf{D}_S(P)\mathbf{D}_S(Q) \geqslant \frac{\hbar^2}{4}. \tag{1.29}$$

из которого видно, что не существует состояния S, в котором P и Q одновременно принимали бы некоторые точные значения с вероятностью 1. Состояния, для которых в (1.29) достигается равенство, называют *состояниями минимальной неопределенности*. Это чистые состояния $S_{x,y} = |\psi_{x,y}\rangle\langle\psi_{x,y}|$, определяемые векторами

$$|\psi_{x,y}\rangle = W_{x,y}|\psi_{0,0}\rangle, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.30}$$

где $|\psi_{0,0}\rangle$ — вектор *основного состояния*, в представлении Шредингера имеющий вид

$$\langle\xi|\psi_{0,0}\rangle = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right).$$

Состояния $S_{x,y}$ характеризуются тремя параметрами:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{E}_{S_{x,y}}(Q) \\ y &= \mathbf{E}_{S_{x,y}}(P) \\ \sigma^2 &= \mathbf{D}_{S_{x,y}}(Q) = \hbar^2\left(4\mathbf{D}_{S_{x,y}}(P)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

При фиксированном σ^2 векторы $\psi_{x,y}$ образуют семейство, эквивалентное известному в квантовой оптике семейству когерентных состояний ([123], [19]). Для этих состояний

$$\left\langle Q - \mathbf{E}_{S_{x,y}}(Q)\cdot I, P - \mathbf{E}_{S_{x,y}}(P)\cdot I\right\rangle_{S_{x,y}} = 0 \tag{1.31}$$

Более широкий класс образуют чистые состояния, для которых достигается равенство в соотношении неопределенностей (1.9) (для P и Q), но условие (1.31) не обязано выполняться. Эти состояния широко обсуждались в физической литературе под названием *сжатых* (squeezed) состояний (см., например, [201]).

С математической точки зрения все эти состояния входят в класс состояний, являющихся естественным квантовым аналогом гауссовских распределений в теории вероятностей [133], [63]. Пусть $\{Z, \Delta\}$ — конечномерное симплектическое пространство с невырожденной кососимметричной формой Δ и пусть $z \to W(z)$ — неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. *Характеристическая функция* оператора плотности $S \in \mathcal{H}$ определяется соотношением

$$\varphi(z) := \operatorname{Tr} SW(z) \text{ для } z \in Z, \tag{1.32}$$

и обладает рядом свойств, аналогичным свойствам характеристических функций в теории вероятностей (см., например, [41], гл. 5; [230]). В частности, аналог условия положительной определенности имеет вид

$$\sum_{j,k} \overline{c_j} c_k \varphi(z_j - z_k) \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\Delta(z_j, z_k)\right) \geqslant 0 \tag{1.33}$$

для всех конечных наборов $\{c_j\} \subset \mathbb{C}$, $\{z_j\} \subset Z$. Состояние S называется *гауссовским*, если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(z) = \exp\left(im(z) - \frac{1}{2}\alpha(z, z)\right),$$

где $m(z)$ — линейная, а $\alpha(z, z')$ — билинейная формы на Z. Это соотношение задает характеристическую функцию тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\alpha(z, z)\alpha(z', z') \geqslant \frac{1}{4}[\Delta(z, z')/\hbar]^2 \qquad \text{для } z, z' \in Z,$$

вытекающее из (1.33). В квантовой теории поля такие состояния называют квазисвободными (обобщенно-свободными) состояниями. В статистической механике они возникают как равновесные состояния бозе-систем с квадратичным гамильтонианом (см., например, [10], [57]).

1.3. Составные системы

1.3.1. Тензорное произведение гильбертовых пространств

Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot|\cdot\rangle_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_2$. В множестве L формальных линейных комбинаций элементов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ введем скалярное произведение, определяя

$$\langle\varphi_1 \times \varphi_2|\psi_1 \times \psi_2\rangle = \langle\varphi_1|\psi_1\rangle_1 \cdot \langle\varphi_2|\psi_2\rangle_2$$

и продолжая это определение на L по линейности. Пополнение L (факторизованного по нулевому подпространству формы) является гильбертовым пространством, которое называется тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и обозначается $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Вектор пространства $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, соответствующий классу эквивалентности векторов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, обозначается $\psi_1 \otimes \psi_2$.

Например, если $\mathcal{H}_1 = \mathrm{L}^2(\Omega_1, \mu_1)$, $\mathcal{H}_2 = \mathrm{L}^2(\Omega_2, \mu_2)$, то пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathrm{L}^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ состоит из всех функций $(\omega_1, \omega_2) \to \psi(\omega_1, \omega_2)$, квадратично интегрируемых по мере $\mu_1 \times \mu_2$, причем вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ определяется функцией $(\omega_1, \omega_2) \to \psi_1(\omega_1)\psi_2(\omega_2)$.

Если $\mathcal{H}_j$ — конечномерные комплексные гильбертовы пространства, то

$$\dim \mathfrak{O}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim \mathfrak{O}(\mathcal{H}_1) \dim \mathfrak{O}(\mathcal{H}_2).$$

Если же $\mathcal{H}_j$ — вещественные гильбертовы пространства, то здесь знак $=$ превращается в $>$, а для кватернионных гильбертовых пространств (при некотором разумном определении $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$), он превращается в $<$. Это обстоятельство рассматривается как косвенный аргумент в пользу поля комплексных чисел в аксиоматической квантовой механике.

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного числа гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. В квантовой механике $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ описывает систему n различимых частиц. В статистической механике приходится рассматривать системы неразличимых частиц — бозонов или фермионов. В n-кратном тензорном произведении

$$\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ раз}}.$$

описывающем n идентичных, но различимых частиц, выделяются два подпространства: симметричное тензорное произведение $\mathcal{H}_+^{(n)}$, описывающее бозоны, и антисимметричное тензорное произведение $\mathcal{H}_-^{(n)}$, описывающее фермионы (в случае $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ первое состоит из симметричных, а второе — из антисимметричных функций $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to \psi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ аргументов $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$). Системы из переменного (неограниченного) числа частиц описываются пространствами Фока: *симметричным пространством Фока*

$$\Gamma_+(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_+^{(n)}$$

в случае бозонов, *антисимметричным пространством Фока*

$$\Gamma_-(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_-^{(n)}$$

для фермионов ($\mathcal{H}_+^{(0)} = \mathcal{H}_-^{(0)} = \mathcal{H}^{(0)} \simeq \mathbb{C}$). В этих пространствах действует специальное представление канонических коммутационных (соответственно, антикоммутационных) соотношений, связанное с процедурой вторичного квантования (см., например, [7], [57], [10]).

1.3.2. Произведение квантовых состояний

Тензорное произведение операторов $X_1 \otimes X_2$, где X_j — операторы в $\mathcal{H}_j$, определяется с помощью соотношения

$$(X_1 \otimes X_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) := X_1\psi_1 \otimes X_2\psi_2.$$

Если S_j — операторы плотности в $\mathcal{H}_j$, то $S_1 \otimes S_2$ — оператор плотности в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, причем

$$\operatorname{Tr}(S_1 \otimes S_2)(X_1 \otimes X_2) = \operatorname{Tr} S_1X_1 \cdot \operatorname{Tr} S_2X_2 \qquad \text{для} \quad X_j \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_j).$$

Операторы вида $X \otimes I_2$, где $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1)$, а I_2 — единичный оператор в $\mathcal{H}_2$, образуют подалгебру $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, изоморфную $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1)$. Формула

$$\mathcal{E}(X_1 \otimes X_2) := X_1 \otimes (\operatorname{Tr} S_2X_2)I_2 \tag{1.34}$$

определяет отображение $\mathcal{E}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ на $\mathfrak{B}_1$, обладающее свойством *условного ожидания*

$$\mathbf{E}_S(XY) = \mathbf{E}_S(\mathcal{E}(X)Y) \text{ для } X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), Y \in \mathfrak{B}_1,$$

относительно состояния $S = S_1 \otimes S_2$. В квантовой теории вероятностей условные ожидания играют меньшую роль, чем в классической, поскольку в общем случае условное ожидание на данную подалгебру $\mathfrak{B}$ относительно данного состояния S существует лишь при весьма ограничительном соотношении между $\mathfrak{B}$ и S, в определенной мере сводящем ситуацию к классической; точнее см. п. 3.1.3 в гл. 3.

Если S — произвольный оператор плотности в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, то найдется единственный оператор плотности S_1 в $\mathcal{H}_1$, такой что

$$\operatorname{Tr} S_1 X = \operatorname{Tr} S(X \otimes I_2) \text{ для } X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1). \tag{1.35}$$

(Заметим, что след с левой стороны — это след в $\mathcal{H}_1$, а след с правой стороны — в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.) Это же верно для любой линейной комбинации операторов плотности, т.е. для любого ядерного оператора T в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Оператор S_1, определенный по (1.35), называется *частичным следом* оператора S и обозначается $\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_2} S$. Операция частичного следа аналогична нахождению маргинального распределения в теории вероятностей.

Пусть $S = |\psi\rangle\langle\psi|$ — чистое состояние в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, а S_1, S_2 — его частичные состояния в $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Если S *сцепленное*, т.е. не является произведением состояний, то частичные состояния не могут быть чистыми. Такого никогда не происходит в классических составных системах. Покажем, что S_1, S_2 имеют одинаковую квантовую энтропию. Обозначая через $\{e_j^1\}$ ортонормированный базис собственных векторов S_1, а через λ_j соответствующие собственные значение, имеем $\psi = \sum_j e_j^1 \otimes h_j^2$, где $h_j{}^2$ векторы в $\mathcal{H}_2$, удовлетворяющие условию $\langle h_j^2 | h_k^2 \rangle = \delta_{jk}\lambda_j$, так что

$$\psi = \sum_j \sqrt{\lambda_j} e_j^1 \otimes e_j^2. \tag{1.36}$$

где $\{e_j^2\}$ — ортонормированный базис собственных значений S_2. Поэтому S_1, S_2 имеют одинаковые ненулевые собственные значения и, следовательно, одинаковую энтропию. Величина $H(S_1) = H(S_2)$ равна нулю тогда и только тогда, когда S — произведение состояний и служит единственной мерой сцепленности в чистом состоянии. Проблема определения сцепленности в произвольном состоянии S намного сложнее, поскольку различным аспектам сцепленности соответствуют различные ее меры [83].

Если S_1 произвольный оператор плотности в $\mathcal{H}_1$ с собственными векторами $\{e_j^1\}$ и собственными значениями λ_j, то формула (1.36) определяет вектор чистого состояния в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, для которого S_1 является частичным состоянием в $\mathcal{H}_1$. Такая (в существенном единственная) конструкция называется *очищением* состояния S_1.

1.4. Проблема скрытых параметров

Проблема скрытых параметров – это вопрос о принципиальной возможности описания квантовой механики в терминах классического фазового пространства. Несмотря на устоявшееся мнение о невозможности такого описания, построение теорий со скрытыми параметрами не прекращается (одной из недавних и наиболее интересных попыток является стохастическая механика [186]). Этой проблеме посвящена обширная литература (см., например, [14]). Здесь мы ограничимся обсуждением наиболее существенных логических аргументов за и против «скрытых параметров».

1.4.1. Скрытые параметры и квантовая дополнительность

С математической точки зрения в проблеме скрытых параметров речь идет о возможности установления соответствий $S \to \hat{S}$ между классическими и квантовыми состояниями, т. е. между распределениями вероятностей S на измеримом «фазовом пространстве» $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ и операторами плотности $\hat{S}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ квантовой системы, и $X \to \hat{X}$ между случайными величинами X и наблюдаемыми $\hat{X}$ в $\mathcal{H}$, которые воспроизводили бы статистические предсказания квантовой теории и удовлетворяли некоторым физическим мотивированным условиям. Такими условиями, естественно возникающими из общего понятия статистической модели (см. п. 0.2), в первую очередь являются сохранение функциональной подчиненности в пространстве наблюдаемых, а также выпуклой структуры в множестве состояний. Обзор с этой точки зрения основных «доказательств невозможности» скрытых параметров дан в [45]. Так, важные результаты Белла [81] и Кошена, Шпеккера равносильны следующему:

Предложение 1.4.1. *Пусть* $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$. *Не существует однозначного отображения* $\hat{X} \to X$ *множества квантовых наблюдаемых* $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$ *в множество случайных величин на каком-либо измеримом пространстве* Ω, *удовлетворяющего функциональному условию*:

1. *если* $\hat{X} \to X$, *то* $f \circ \hat{X} \to f \circ X$ *для любой борелевской функции* f.

Доказательство.

Можно считать, что $\dim \mathcal{H} < \infty$. Пусть такое отображение существует. Тогда из 1. выводятся следующие свойства:

2. *спектральное правило*: $X(\omega) \in \operatorname{Sp} \hat{X}$ для любого $\omega \in \Omega$;

3. *правило конечных сумм*: если $\hat{X}_j$ — совместимые наблюдаемые и $\hat{X}_j \to X_j$, то $\sum_j \hat{X}_j \to \sum_j X_j$.

Фиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим функцию проекторов $\mu(\hat{E}) := E(\omega)$, где $\hat{E} \to E$. Из 2 и 3 вытекает, что μ является вероятностной мерой на $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$, принимающей только значения 0 и 1. По теореме Глисона существует оператор плотности $\hat{S}$ с $\mu(\hat{E}) = \operatorname{Tr} \hat{S}\hat{E}$, но тогда μ не может быть двузначной мерой.

Недостаток аргументации фон Неймана [24] состоит в том, что требуется выполнение свойства 3 для *произвольных*, а не только для совместимых наблюдаемых. Рассуждение с аддитивностью средних значений, которое приводится для обоснования этого требования, по существу заранее исключает теории со скрытыми параметрами (см., например, [14], [45]).

Приведенное выше доказательство означает невозможность введения скрытых параметров по схеме частичной наблюдаемости, реализуемой, например, в классической статистической механике, где имеется взаимно-однозначное соответствие между «макроскопическими» наблюдаемыми и некоторыми функциями на фазовом пространстве. Однако оно не исключает более сложных конструкций, в которых одна и та же квантовая наблюдаемая $\hat{X}$ может быть измерена множеством разных способов, и, следовательно, соответствие $X \to \hat{X}$ не взаимно однозначно. На самом деле, в квантовой механике имеется по крайней мере столько различных способов измерения наблюдаемой $\hat{X}$, сколько есть представлений $\hat{X} = f \circ \hat{Y}$ в виде функций от других наблюдаемых $\hat{Y}$. Если $\hat{X}$ имеет кратное собственное значение, то заведомо найдутся несовместимые наблюдаемые $\hat{Y}_1$ и $\hat{Y}_2$, такие что $\hat{X} = f_1 \circ \hat{Y}_1 = f_2 \circ \hat{Y}_2$. Требование взаимной однозначности входит тогда в прямое противоречие с квантовым свойством дополнительности[2]. Отсюда вытекает, что в теориях со скрытыми параметрами следует оставить возможность для различных классических представлений одной и той же квантовой наблюдаемой. Такого рода теории Белл назвал ***контекстуальными***. Аналогичное замечание можно отнести и к представлению квантовых состояний в виде различных смесей чистых состояний. Действительно, в [45], [139] было доказано следующее предложение, дающее явное описание такой формальной конструкции, сохраняющей структуры статистической модели.

[2] Если $\dim \mathcal{H} = 2$, то наблюдаемые с кратным спектром — это постоянные величины; тогда такого противоречия не возникает, и теория со скрытыми параметрами, удовлетворяющая условиям доказанного предложения, строится явным образом ([81]).

Предложение 1.4.2. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Существует измеримое пространство Ω и отображение $X \to \widehat{X}$ некоторого множества случайных величин на $\mathfrak{O}(\mathcal{H})$ и $S \to \widehat{S}$ некоторого множества вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, такие что*

1. *если $S_j \to \widehat{S}_j$ и $\{p_j\}$ — конечное распределение вероятностей то $\sum_j p_j S_j \to \sum_j p_j \widehat{S}_j$;*
2. *если $X \to \widehat{X}$ и f — борелевская функция, то $f \circ X \to f \circ \widehat{X}$;*
3. *если $X \to \widehat{X}$ и $S \to \widehat{S}$, то*

$$\int_\Omega X(\omega) S(d\omega) = \operatorname{Tr} \widehat{S}\widehat{X}.$$

В случае $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$, отображения $X \to \widehat{X}$ и $S \to \widehat{S}$ с необходимостью не являются взаимно однозначными. Этот результат показывает, что принцип дополнительности препятствует классическому описанию квантовой статистики лишь при дополнительном требовании взаимной однозначности (неконтекстуальности). Контекстуальные описания со скрытыми параметрами для единичной квантовой системы существуют.

1.4.2. Скрытые параметры и квантовая целостность

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух компонент и описываемую гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Чистые состояния такой системы задаются единичными векторами $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, которые являются линейными комбинациями (суперпозициями) факторизуемых векторов $\psi_1 \otimes \psi_2$. Если $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$, то обе компоненты системы находятся в однозначно определенных чистых состояниях; если же ψ сцепленное, то между компонентами обнаруживаются специфические корреляции, которые невозможно смоделировать никаким классическим механизмом случайности. На это обратил внимание Белл [81], показавший, что даже в контекстуальной теории со скрытыми параметрами нельзя удовлетворить естественному требованию, названному «эйнштейновской локальностью». Обсудим близкое, но более общее условие *разделимости* [45].

Рассмотрим наблюдаемые

$$\begin{aligned} \widehat{X}_j &= \widehat{X}_j^{(1)} \otimes \widehat{I}^{(2)}, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \widehat{Y}_k &= \widehat{I}^{(1)} \otimes \widehat{Y}_k^{(2)}, \quad k = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.37}$$

где $\widehat{I}^{(l)}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}_l$, удовлетворяющие условию

$$[\widehat{X}_j, \widehat{Y}_k] = 0, \tag{1.38}$$

т. е. каждая наблюдаемая $\widehat{X}_j$ совместима с каждой $\widehat{Y}_k$. Поэтому для любого состояния $\widehat{S}$ в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ определены квантовые корреляции $\langle \widehat{X}_j, \widehat{Y}_k \rangle_{\widehat{S}}$. Матрица размера $n \times m$

$$\mathbf{C} := \left(\langle \widehat{X}_j, \widehat{Y}_k \rangle_{\widehat{S}} \right)_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,m}}$$

описывает статистические результаты $n \times m$ различных экспериментов, вообще говоря, несовместимых между собой.

Предложение 1.4.3. *Пусть $n, m \geqslant 2$. Не существует измеримого пространства Ω вместе с отображениями $S \to \widehat{S}$, $X \to \widehat{X}$, удовлетворяющими спектральному правилу и следующему условию разделимости: для любого $\widehat{S}$ и любых $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_n$, $\widehat{Y}_1, \ldots, \widehat{Y}_m$ вида* (1.37) *найдутся X_j и Y_k, такие что $X_j \to \widehat{X}_j$, $Y_k \to \widehat{Y}_k$ и*

$$\langle \widehat{X}_j, \widehat{Y}_k \rangle_{\widehat{S}} = \int\limits_{\Omega} X_j(\omega) Y_k(\omega) S(d\omega) \text{ для } j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m,$$

где $S \to \widehat{S}$.

Доказательство.

Достаточно ограничиться случаем $n = m = 2$. Рассмотрим наблюдаемые $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2$ вида (1.37), такие что

$$\|\widehat{X}_j\| \leqslant 1, \ \|\widehat{Y}_k\| \leqslant 1. \tag{1.39}$$

Предположим, что указанные отображения существуют, и пусть X_j, Y_k — соответствующие случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), S)$. По спектральному условию $|X_j(\omega)| \leqslant 1$, $|Y_k(\omega)| \leqslant 1$ для всех $\omega \in \Omega$, откуда

$$X_1(\omega)Y_1(\omega) + X_1(\omega)Y_2(\omega) + X_2(\omega)Y_1(\omega) - X_2(\omega)Y_2(\omega) \leqslant 2 \text{ для } \omega \in \Omega.$$

Усредняя по $S(d\omega)$ и используя условие разделимости, получаем *неравенство Белла–Клаузера–Хорна–Шимони* (БКХШ)

$$\langle \widehat{X}_1, \widehat{Y}_1 \rangle_{\widehat{S}} + \langle \widehat{X}_1, \widehat{Y}_2 \rangle_{\widehat{S}} + \langle \widehat{X}_2, \widehat{Y}_1 \rangle_{\widehat{S}} - \langle \widehat{X}_2, \widehat{Y}_2 \rangle_{\widehat{S}} \leqslant 2 \tag{1.40}$$

Остается указать квантовые наблюдаемые $\widehat{X}_j$, $\widehat{Y}_k$ и состояние $\widehat{S}$, для которых неравенство (1.40) нарушается. Рассмотрим систему из двух частиц со спином $\frac{1}{2}$, так что $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$ (см. п. 1.1.6). Пусть $\widehat{S} = |\psi\rangle\langle\psi|$ – чистое состояние составной системы с вектором

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(\vec{e}) \otimes \psi_2(-\vec{e}) - \psi_1(-\vec{e}) \otimes \psi_2(\vec{e})\right],$$

где $\psi_j(\vec{e})$ — единичный вектор j-й подсистемы, описывающий полностью поляризованное состояние с направлением спина $\vec{e} = (0, 0, 1)$ (см. (1.14), (1.15)). Положим

$$\widehat{X}(\vec{a}) = \widehat{X}^{(1)}(\vec{a}) \otimes \widehat{I}^{(2)}, \quad \widehat{Y}(\vec{b}) = \widehat{I}^{(1)} \otimes \widehat{X}^{(2)}(\vec{b}),$$

где $\widehat{X}^{(j)}(\vec{a})$ — наблюдаемые спина в $\mathcal{H}_j$ (см. п. 1.1.6). Корреляции между компонентами спина имеют вид

$$\langle \widehat{X}(\vec{a}), \widehat{Y}(\vec{b}) \rangle_{\widehat{S}} = \langle \psi | \widehat{X}^{(1)}(\vec{a}) \otimes \widehat{X}^{(2)}(\vec{b}) \psi \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Пусть векторы $\vec{a}_j$, $\vec{b}_k$ образуют конфигурацию, обозначенную на рис. 1.1; тогда если $\widehat{X}_j = \widehat{X}(\vec{a}_j)$, $\widehat{Y}_k = \widehat{Y}(\vec{b}_k)$, значение левой части неравенства (1.40) равно $2\sqrt{2}$, что противоречит неравенству и доказывает предложение[3].

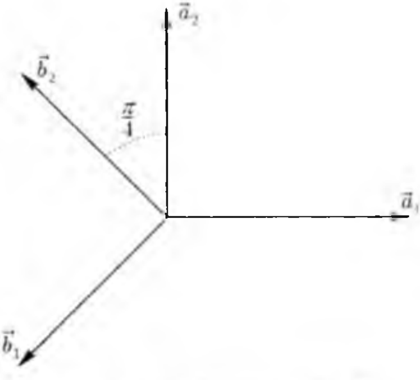

Рис. 1.1. Выбор векторов $\vec{a}_j$ и $\vec{b}_k$.

В [163] указано общее неравенство

$$(\widehat{X}_1\widehat{Y}_1 + \widehat{X}_1\widehat{Y}_2 + \widehat{X}_2\widehat{Y}_1 - \widehat{X}_2\widehat{Y}_2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\widehat{I} - [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] \cdot [\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2],$$

справедливое для любых операторов, удовлетворяющих условиям (1.38) и (1.39). Из него вытекает как неравенство БКХШ (при $[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = [\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2] = 0$), так и граница

$$\|\widehat{X}_1\widehat{Y}_1 + \widehat{X}_1\widehat{Y}_2 + \widehat{X}_2\widehat{Y}_1 - \widehat{X}_2\widehat{Y}_2\| \leqslant 2\sqrt{2},$$

из которой видно, что в построенном примере неравенство БКХШ нарушается максимальным образом.

---

[3] Работы Белла стимулировали ряд экспериментов, в которых нарушение неравенства БКХШ получило подтверждение (см., например, [14]).

Поскольку компоненты составной системы могут представлять собой частицы, пространственно отделенные друг от друга макроскопическим расстоянием, то описывающая их теория со скрытыми параметрами должна быть существенно нелокальной[4]. В работе Саммерса и Вернера [220] показано, что положение не спасает и переход к локальной квантовой теории поля, где неравенство БКХШ также нарушается максимальным образом.

1.4.3. Структура множества квантовых корреляций

В работе Цирельсона [55] было изучено выпуклое множество $\mathrm{Cor}(n,m)$ *квантово-представимых* матриц

$$\mathbf{C} = \left(c_{jk}\right)_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}},$$

элементы которых представлены как корреляции

$$c_{jk} = \langle \widehat{X}_j, \widehat{Y}_k \rangle_{\widehat{S}}$$

каких-либо квантовых наблюдаемых $\widehat{X}_j, \widehat{Y}_k$, удовлетворяющих условиям (1.38) и (1.39). Оказывается, что условие (1.37), формально более сильное (и физически более содержательное), чем (1.38), приводит к тому же множеству корреляционных матриц $\mathbf{C}$. Это видно из доказательства следующей теоремы, которая дает прозрачное геометрическое описание множества $\mathrm{Cor}(n,m)$.

Теорема 1.4.1. *Матрица* $\mathbf{C}$ *принадлежит множеству* $\mathrm{Cor}(n,m)$ *тогда и только тогда, когда существуют векторы* $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$, $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m$ *в евклидовом пространстве размерности* $\min(n,m)$, *такие что* $\|\vec{a}_j\| \leqslant 1$, $\|\vec{b}_k\| \leqslant 1$ *и* $\vec{a}_j \cdot \vec{b}_k = c_{jk}$ *для всех* j,k.

Дадим набросок конструкции, существенной для доказательства. Пусть $\mathcal{C}(n)$ — комплексная алгебра Клиффорда с n эрмитовыми образующими $X_1,\dots,X_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$X_j^2 = 1, \quad X_jX_k + X_kX_j = 0 \quad \text{для } j,k = 1,\dots,n,\ j \neq k.$$

Поскольку элементы $X_j \otimes X_j$ алгебры $\mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(n)$ перестановочны и их спектр состоит из ± 1, число 1 является точкой спектра элемента

$$A = \frac{1}{n}\left(X_1 \otimes X_1 + \dots + X_n \otimes X_n\right)$$

[4] По поводу нелокальности в стохастической механике см. статью [187].

(кратности 1). Пусть π – неприводимое представление алгебры $\mathfrak{C}(n)\otimes\mathfrak{C}(n)$. Тогда в пространстве представления существует единственный, с точностью до множителя, вектор ψ, такой что $\pi(A)\psi = \psi$. Доказывается, что

$$\langle\psi|\pi(X(\vec{a})\otimes X(\vec{b}))\psi\rangle = \vec{a}\cdot\vec{b} \quad \text{для } \vec{a}, \vec{b}\in\mathbb{R}^n,$$

где $X(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$. Вектор ψ определяет состояние $\widehat{S}$ в точном представлении алгебры $\mathfrak{C}(n)\otimes\mathfrak{C}(n)$, такое что

$$\langle\widehat{X}_j, \widehat{Y}_k\rangle_{\widehat{S}} = \vec{a}_j\cdot\vec{b}_k, \tag{1.41}$$

где $\widehat{X}_j = X(\vec{a}_j)\otimes I$, $\widehat{Y}_k = I\otimes X(\vec{b}_k)$ удовлетворяют условию (1.37), а значит и (1.38).

Из этой теоремы в [55] получено описание крайних точек множества $\mathrm{Cor}(n,m)$, а также указаны неравенства, задающие множество $\mathrm{Cor}(2,2)$.

Обозначая через $\mathrm{Cor}_1(n,m)$ множество классически представимых матриц $\mathbf{C}$, таких что

$$c_{jk} = \int X_j(\omega)Y_k(\omega)S(d\omega),$$

где X_j и Y_k – случайные величины, такие что $|X_j(\omega)|\leqslant 1$ и $|Y_k(\omega)|\leqslant 1$, имеем, очевидно,

$$\mathrm{Cor}_1(n,m)\subsetneq\mathrm{Cor}(n,m).$$

Несовпадение этих множеств математически выражает свойство квантовой целостности. В частности, неравенство БКХШ задает граничную гиперплоскость, отделяющую многогранник $\mathrm{Cor}_1(2,2)$ от квантово-реализуемой матрицы

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{Cor}(2,2).$$

Естественно поставить вопрос, насколько $\mathrm{Cor}(n,m)$ превосходит $\mathrm{Cor}_1(n,m)$. Пусть $k(n,m)$ – наименьшее число, обладающее свойством

$$\mathrm{Cor}(n,m)\subset k(n,m)\,\mathrm{Cor}_1(n,m).$$

Последовательность $k(n,m)$ возрастает с ростом n и m. Как отмечалось в [55], из геометрического описания множества $\mathrm{Cor}(n,m)$ вытекает, что

$$k := \lim_{n,m\to\infty} k(n,m) \tag{1.42}$$

совпадает с известной в теории нормированных пространств константой Гротендика $K_G\leqslant\frac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})}\approx 1.782$.

2. Статистика квантовых измерений

2.1. Обобщенные наблюдаемые

2.1.1. Разложения единицы

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ — измеримое пространство. В дальнейшем часто $\mathcal{X}$ — *стандартное* измеримое пространство, т. е. борелевское подмножество полного сепарабельного метрического пространства. Стандартные измеримые пространства одинаковой мощности изоморфны (см., например, [225], гл. 5); поэтому с точки зрения теории меры они эквивалентны борелевским подмножествам вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Разложением единицы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется нормированная положительная операторнозначная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, т. е. функция множеств $M : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющая условиям:

1. $M(B)$ — положительный оператор в $\mathcal{H}$ для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;
2. если $\{B_j\}$ — конечное или счетное разбиение $\mathcal{X}$ на попарно непересекающиеся измеримые подмножества, то $\sum_j M(B_j) = I$, где ряд сходится сильно.

Если $M(B)^2 = M(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, то M — ортогональное разложение единицы (см. п. 1.1.3, гл. 1). Неортогональные разложения единицы (на $\mathbb{R}$) появились в работе Карлемана (1923) в связи с проблемой спектрального разложения несамосопряженных операторов и были детально изучены в 1940–1960-е годы (см., например, [3], [28], [85]).

Теорема 2.1.1 (Наймарк). *Всякое разложение единицы $M : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{H}$ может быть расширено до ортогонального разложения единицы, т. е. существуют гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ и разложение единицы $E : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{E}(\tilde{\mathcal{H}})$ в $\tilde{\mathcal{H}}$, такое что*

$$M(B) = P_{\mathcal{H}} E(B)|_{\mathcal{H}} \text{ для всех } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

где $P_{\mathcal{H}}$ — проектор из $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно, а $\mathcal{X}$ стандартно, то $\tilde{\mathcal{H}}$ можно выбрать сепарабельным. Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное расширение, характеризующееся тем свойством, что множество $\{E(B)|_{\mathcal{H}}\psi; B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \psi \in \mathcal{H}\}$ плотно в $\tilde{\mathcal{H}}$.

Если существует σ-конечная мера μ, такая что $\|M(B)\| \leqslant C \cdot \mu(B)$ для фиксированного $C \in \mathbb{R}$, то

$$M(B) = \int_B P(x)\mu(dx) \text{ для } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{2.1}$$

где $P : \mathcal{X} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — измеримая ограниченная функция со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, называемая *плотностью* M относительно меры μ (интеграл сходится в сильной операторной топологии). Если $\dim \mathcal{H} = \infty$, то ортогональное разложение единицы не может иметь плотности относительно какой-либо σ-конечной неатомарной меры.

Пример 2.1.1. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ система $\{e_x : x \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{H}$ называется *переполненной* ([19], [7]), если

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathcal{X}} |\langle e_x|\psi\rangle|^2 \mu(dx) \text{ для всех } \psi \in \mathcal{H},$$

для некоторой σ-конечной меры μ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, т. е.

$$\int_{\mathcal{X}} |e_x\rangle\langle e_x| \mu(dx) = I.$$

Частным случаем переполненной системы является полная ортогональная система в $\mathcal{H}$, однако в общем случае векторы e_x могут быть не ортогональны и линейно зависимы. Всякий вектор $\psi \in \mathcal{H}$ имеет (не обязательно единственное) разложение

$$\psi = \int_{\mathcal{X}} \langle e_x|\psi\rangle e_x \mu(dx) \tag{2.2}$$

по векторам переполненной системы. Соотношение

$$M(B) = \int_B |e_x\rangle\langle e_x| \mu(dx) \tag{2.3}$$

определяет разложение единицы с плотностью $P(x) = |e_x\rangle\langle e_x|$. Дадим для него явную конструкцию минимального расширения Наймарка (см. [101], гл. 8). Определим ортогональное разложение единицы E в $\tilde{\mathcal{H}} = \mathrm{L}^2(\mathcal{X}, \mu)$ соотношением

$$\big(E(B)f\big)(x) = 1_B \cdot f(x) \text{ для } f \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X}, \mu),$$

где 1_B — индикатор множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Из (2.2) и (2.3) следует, что соотношение

$$(V\psi)(x) := \langle e_x|\psi\rangle \qquad \text{для } \psi \in \mathcal{H}$$

задает изометрическое вложение V из $\mathcal{H}$ в $\tilde{\mathcal{H}}$, причем

$$M(B) = V^* E(B) V.$$

Образ $V\mathcal{H}$ пространства $\mathcal{H}$ в $\mathrm{L}^2(\mathcal{X}, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $\mathcal{K}(x, y) := \langle e_x|e_y\rangle$, т.е. проектор P из $\mathrm{L}^2(\mathcal{X}, \mu)$ на $V\mathcal{H}$ является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}$.

2.1.2. Обобщенная статистическая модель квантовой механики

Это отделимая статистическая модель (см. п. 0.2), в которой состояния описываются операторами плотности, а вещественные наблюдаемые — разложениями единицы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Функциональная подчиненность наблюдаемых определяется соотношением $(f \circ M)(B) := M(f^{-1}(B))$.

Если $\mathcal{X}$ — измеримое пространство, то *обобщенной наблюдаемой* (соответственно, *наблюдаемой*) со значениями в $\mathcal{X}$ называется произвольное (соответственно, ортогональное) разложение единицы M на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Распределение вероятностей μ_S^M обобщенной наблюдаемой M в состоянии S определяется формулой

$$\mu_S^M(B) := \operatorname{Tr} SM(B) \text{ для } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{2.4}$$

Основанием для этих определений служит следующее

Предложение 2.1.1 ([41]). *Соответствие $S \to \mu_S^M$ является аффинным отображением выпуклого множества квантовых состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в множество вероятностных мер $\mathfrak{P}(\mathcal{X})$. Обратно, всякое аффинное отображение из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{P}(\mathcal{X})$ имеет вид $S \to \mu_S^M$, где M — однозначно определенное разложение единицы на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Аффинность означает, что смесь состояний переходит в соответствующую смесь распределений:

$$\mu^M_{\sum_j p_j S_j} = \sum_j p_j \mu^M_{S_j}$$

для любых $S_j \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, $p_j \geqslant 0$, $\sum_j p_j = 1$, и имеет прямое истолкование в терминах статистических ансамблей. Можно сказать, что разложение единицы дает наиболее общее описание статистики исходов квантового измерения, совместимое с вероятностной интерпретацией квантовой механики.

Опираясь на теорему Наймарка, можно доказать (см. [41], гл. 1), что для любого разложения единицы M в $\mathcal{H}$ найдутся гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, оператор плотности S_0 в $\mathcal{H}_0$ и ортогональное разложение единицы E в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, такие что

$$\mu^M_S(B) = \mathrm{Tr}(S \otimes S_0)E(B) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ и } S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}). \tag{2.5}$$

Эквивалентно, $M(B) = \mathcal{E}_0(E(B))$, где $\mathcal{E}_0$ — условное ожидание относительно состояния S_0, определяемое аналогично формуле (1.34) в гл. 1. Таким образом, разложение единицы описывает статистику измерения обычной наблюдаемой в некотором расширении исходной системы, содержащем вспомогательную независимую систему в состоянии S_0, что говорит о согласованности понятия обобщенной наблюдаемой со стандартной формулировкой квантовой механики.

Пример 2.1.2. Векторы состояний минимальной определенности (1.30) в гл. 1 образуют переполненную систему в $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\psi_{x,y}\rangle\langle\psi_{x,y}| \frac{dxdy}{2\pi\hbar} = I,$$

([123], [19]), что позволяет определить обобщенную наблюдаемую со значениями в $\mathbb{R}^2$:

$$M(B) = \iint_B |\psi_{x,y}\rangle\langle\psi_{x,y}| \frac{dxdy}{2\pi\hbar} \quad \text{для } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{2.6}$$

Укажем конструкцию, которая связывает M с приближенным измерением координаты и скорости квантовой частицы. Пусть $\mathcal{H}_0 = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, P_0 и Q_0 — канонические наблюдаемые в $\mathcal{H}_0$, а $S_0 = |\psi_{0,0}\rangle\langle\psi_{0,0}|$ — основное состояние в $\mathcal{H}$. Самосопряженные операторы

$$\tilde{Q} = Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0, \quad \tilde{P} = P \otimes I_0 + I \otimes P_0 \tag{2.7}$$

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ перестановочны, а значит имеют совместную спектральную меру E. Используя аппарат характеристических функций из п. 1.2.4 в гл. 1, можно доказать, что для любого состояния S распределение вероятностей обобщенной наблюдаемой (2.6)

$$\mu_S^M(B) = \iint\limits_B \langle \psi_{x,y} | S \psi_{x,y} \rangle \frac{dxdy}{2\pi h}$$

удовлетворяет соотношению (2.5), т. е. совпадает с совместным распределением вероятностей наблюдаемых $\widetilde{Q}$, $\widetilde{P}$ в состоянии $S \otimes S_0$ (см. [41], гл. 3). Относительно приближенных измерений Q и P см. также [101], [34], [224], [89].

2.1.3. Геометрия множества обобщенных наблюдаемых

Аналогом обобщенной наблюдаемой в классической статистике является рандомизованная случайная величина, т. е. переходная вероятность $\Pi(B|\omega)$ из пространства элементарных событий Ω в пространство значений $\mathcal{X}$. Будем далее предполагать, что $\mathcal{X}$ — стандартное пространство. Тогда соотношение

$$\Pi(B|\omega) = 1_B(f(\omega)) \quad \text{для } \omega \in \Omega$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между случайными величинами f со значениями в $\mathcal{X}$ и *детерминированными переходными вероятностями*, такими что $\Pi(B|\omega) = 0$ или 1, т. е. $\Pi(B|\omega)^2 = \Pi(B|\omega)$. Переходные вероятности из Ω в $\mathcal{X}$ образуют выпуклое множество, крайними точками которого являются детерминированные переходные вероятности и только они (см., например, [39] гл. 2).

Соотношение между наблюдаемыми и обобщенными наблюдаемыми в квантовом случае значительно сложнее и интереснее. Обозначим $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ выпуклое множество обобщенных наблюдаемых со значениями в $\mathcal{X}$, $\operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ — множество его крайних точек, а $\operatorname{Conv}\mathfrak{M}$ — выпуклую оболочку подмножества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. В $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ вводится естественная топология: последовательность $(M^{(n)}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ сходится к M, если для любого состояния S последовательность вероятностных мер $\mu_S^{(n)}(B) = \operatorname{Tr} SM^{(n)}(B)$ сходится по вариации к $\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B)$. $\overline{\mathfrak{M}}$ означает замыкание множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ в этой топологии.

Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})$ — подмножество обычных наблюдаемых, которые характеризуются условием

$$E(B)^2 = E(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

$\mathfrak{M}_1(\mathcal{X})$ – подмножество обобщенных наблюдаемых M, таких что

$$[M(B_1), M(B_2)] = 0, \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

В [35] показано, что $M \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда

$$M(B) = \int\limits_{\mathcal{X}_1} \Pi(B|x_1)E(dx_1), \tag{2.8}$$

где E – наблюдаемая со значениями в некотором пространстве $\mathcal{X}_1$, а $\Pi(B|x_1)$ – переходная вероятность из $\mathcal{X}_1$ в $\mathcal{X}$. По аналогии с классической статистикой, наблюдаемые, описываемые ортогональными разложениями единицы E, можно рассматривать как *детерминированные* (более точное обсуждение см. в [139]). Наблюдаемые в $\mathfrak{M}_1(\mathcal{X})$, которые задаются перестановочными разложениями единицы, являются *классически рандомизованными* в то смысле, что $M \in \mathfrak{M}_1(\mathcal{X})$ получается из обычной наблюдаемой путем преобразования (2.8), содержащего внешний классический источник случайности. Точки из $\mathrm{Extr}(\mathfrak{M}(\mathcal{X}))$ представляют собой обобщенные наблюдаемые, в которых нет классической рандомизации, вызванной процедурой измерения [137]. Интересный пример такой крайней точки дает неортогональное разложение единицы (2.6). С другой стороны, соотношение (2.5) означает, что каждую обобщенную наблюдаемую $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ можно рассматривать как *квантовую рандомизованную* в расширении системы, включающем независимую квантовую систему. Следующая теорема проясняет отношение между квантовой и классической рандомизациями, показывая, в частности, что квантовая рандомизация является более мощным средством.

Теорема 2.1.2. *Обозначим через m мощность множества значений $\mathcal{X}$. Если $m = 2$, то $\mathfrak{M}_0(\mathcal{X}) = \mathrm{Extr}(M(\mathcal{X}))$ и $\mathfrak{M}_1(\mathcal{X}) = \overline{\mathrm{Conv}(\mathfrak{M}_0(\mathcal{X}))}$. Если $m > 2$, то $\mathfrak{M}_0(\mathcal{X}) \subsetneq \mathrm{Extr}(\mathfrak{M}(\mathcal{X}))$ и $\mathfrak{M}_1(\mathcal{X}) \subsetneq \overline{\mathrm{Conv}\,\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, причем если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то последнее включение точно. Однако, если же $\dim \mathcal{H} = \infty$, то $\overline{\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})} = \mathfrak{M}(\mathcal{X})$.*

Таким образом, ситуация аналогична классической лишь в случае обобщенных наблюдаемых с двумя значениями.[1] В этом случае $\mathfrak{M} = \{M, M'\}$, где $M' = 1 - M$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$, как выпуклое множество, изоморфно порядковому интервалу $\{M : M \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H}), 0 \leqslant M_0 \leqslant I\}$, крайние точки которого совпадают с проекторами в $\mathcal{H}$ (см. например, [101], гл. 2).

---

[1] Такие наблюдаемые, называемые «эффектами», играют центральную роль в аксиоматическом подходе Людвига [177] (см. также Краус [167]).

Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}_0(\mathcal{X}) \neq \operatorname{Extr}\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ при $m > 2$, достаточно сделать это в случае $m = 3$ и $\dim\mathcal{H} = 2$ (см. [42]). Рассмотрим неортогональное разложение единицы

$$M_k = \frac{2}{3}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

где ψ_k, $k = 1, 2, 3$ — векторы состояний системы со спином $\frac{1}{2}$ (см. п. 1.1.6 в гл. 1), копланарные и образующие правильный треугольник (см. рис. 2.1). Тот факт, что (2.9) является крайней точкой, можно установить непосредственно, либо воспользовавшись критерием из статьи Штермера в [112]: конечное разложение единицы $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ является крайней точкой тогда и только тогда, когда для любых $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ из $\sum_{i=1}^m E_i X_i E_i = 0$ следует $E_i X_i E_i = 0$, где E_i — проектор на носитель оператора M_i, т. е. на ортогональное дополнение к нулевому подпространству M_i. Если $\dim\mathcal{H} < \infty$, то по теореме Каратеодори, из наличия крайних точек, не попадающих в $\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})$, следует $\operatorname{Conv}(\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})) \neq \mathfrak{M}(\mathcal{X})$.

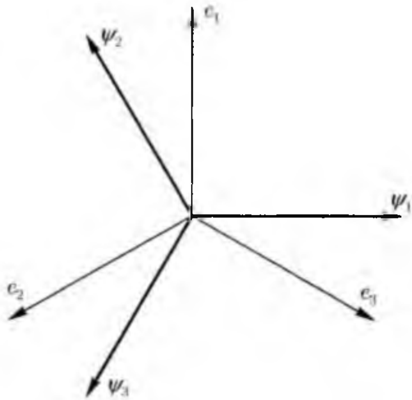

Рис. 2.1. Информационный оптимум для трех векторов на плоскости.

Доказательство того, что $\overline{\mathfrak{M}_0(\mathcal{X})} = \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ в случае $\dim\mathcal{H} = \infty$, основывается на теореме Наймарка [42]. Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ и $(P^{(n)})$ — последовательность конечных проекторов в $\mathcal{H}$, сильно сходящаяся к I. Тогда $M^{(n)}(B) := P^{(n)}M(B)P^{(n)}$ определяет разложение единицы в конечномерном пространстве $\mathcal{H}^{(n)} := P^{(n)}\mathcal{H}$, которое можно расширить до ортогонального разложения единицы $E^{(n)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)} \supset \mathcal{H}^{(n)}$.

Поскольку $\dim\mathcal{H} = \infty$, можно считать, что $\tilde{\mathcal{H}}^{(n)} = \mathcal{H}$. Обозначая $\mu_S^{(n)}(B) = \operatorname{Tr} SE^{(n)}(B)$, $\mu_S(B) = \operatorname{Tr} SM(B)$, имеем

$$\begin{aligned}\mu_S^{(n)}(B) - \mu_S(B) = 2\Re\operatorname{Tr}(I - P^{(n)})SP^{(n)}[E^{(n)}(B) - M(B)] + \\ + \operatorname{Tr}(I - P^{(n)})S(I - P^{(n)})[E^{(n)}(B) - M(B)],\end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{var}(\mu_S^{(n)} - \mu_S) \leqslant 6\|(I - P^{(n)})S\|_1,$$

что доказывает последнее утверждение теоремы. Таким образом, в случае $\dim \mathcal{H} = \infty$ все обобщенные наблюдаемые являются предельными точками множества наблюдаемых.

2.2. Квантовая теория статистических решений

2.2.1. Оптимальное различение состояний

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ наблюдаемой квантовой системы заданы операторы плотности S_θ ($\theta = 1, \ldots, m$), описывающие возможные состояния системы. Наблюдатель может произвести любое квантовое измерение над системой. Основываясь на результатах измерений, он должен принять решение, в каком состоянии находится наблюдаемая система; имеется критерий для сравнения правил выбора решений, и задача состоит в нахождении оптимального правила. С математической точки зрения статистика всей процедуры решения, включающей измерение и возможную последующую обработку информации, дается разложением единицы $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$, которое называется *решающим правилом*. При этом вероятность принятия гипотезы $u = 1, \ldots, m$, если система находится в состоянии S_θ, равна

$$\mu_\theta^M(u) = \mathrm{Tr}\, S_\theta M_u. \tag{2.10}$$

Как и в классической статистике, критерий задается функционалом от вероятностей (2.10), и вопрос состоит в нахождении экстремума этого функционала в том или ином классе решающих правил. В физических задачах квантовая система является носителем информации, состояния которого зависят от «передаваемого сигнала» θ. «Приемник» осуществляет квантовое измерение, статистика которого описывается разложением единицы M в $\mathcal{H}$ [34].

При байесовском подходе задаются априорные вероятности π_θ для гипотез $\theta = 1, \ldots, m$ и функция отклонения $W_\theta(u)$ ($\theta, u = 1, \ldots, m$). *Байесовский риск* определяется обычной формулой

$$\mathcal{R}\{M\} := \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta \sum_{u=1}^{m} W_\theta(u) \mu_\theta^M(u). \tag{2.11}$$

Решающее правило, минимизирующее $\mathcal{R}\{M\}$, называется *байесовским решающим правилом*. Часто рассматривают случай $W_\theta(u) = 1 - \delta_{\theta u}$ и $\pi_\theta = \frac{1}{m}$, когда

$$\mathcal{R}\{M\} = 1 - \mathcal{P}\{M\},$$

где

$$\mathcal{P}\{M\} := \frac{1}{m}\sum_{\theta=1}^{m}\mu_\theta^M(\theta) \tag{2.12}$$

есть средняя вероятность правильного решения. Проблема нахождения байссовского решающего правила тогда сводится к вопросу максимизации $\mathcal{P}\{M\}$, что является дискретным аналогом метода максимального правдоподобия в математической статистике.

Другой важной мерой качества решающего правила является *шенноновская информация*

$$\mathcal{I}\{M\} = \sum_{\theta=1}^{m}\pi_\theta\sum_{u=1}^{m}\mu_\theta^M(u)\log\frac{\mu_\theta^M(u)}{\sum\limits_{\lambda=1}^{m}\pi_\lambda\mu_\lambda^M(u)}. \tag{2.13}$$

Обозначим $\mathfrak{M}$ класс всех решающих правил $M = \{M_1, \dots, M_n\}$, $\mathfrak{M}_1$ — класс классически рандомизированных правил (т. е. таких, что M_j перестановочны, а именно $M_jM_k = M_kM_j$), и $\mathfrak{M}_0$ — класс детерминированных решающих правил ($M_jM_k = \delta_{jk}M_j$). Функционалы (2.11) и (2.12) являются аффинными, а функционал (2.13) — выпуклым на выпуклом множестве $\mathfrak{M}$, следовательно, они достигают своего экстремума на подмножестве $\mathrm{Extr}(\mathfrak{M})$. В классической статистике, где $\mathrm{Extr}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_0$, оптимальное решающее правило может быть выбрано детерминированным. Обсуждение в п. 2.1.3 показывает, что в квантовом случае ситуация может быть радикально отличной.

Пример 2.2.1 ([35]). Рассмотрим задачу различения равновероятных гипотез

$$S_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|, \qquad \theta = 1, 2, 3,$$

где ψ_θ — три равноугольных вектора состояний на плоскости (см. рис. 2.1). Тогда

$$\max_{M\in\mathfrak{M}_0}\mathcal{P}\{M\} = \max_{M\in\mathfrak{M}_1}\mathcal{P}\{M\} = \frac{1}{6}(2+\sqrt{3}) < \frac{2}{3} = \max_{M\in\mathfrak{M}}\mathcal{P}\{M\},$$

причем максимум достигается на решающем правиле (2.9). Более того,

$$\max_{M\in\mathfrak{M}_0}\mathcal{I}\{M\} = \max_{M\in\mathfrak{M}_1}\mathcal{I}\{M\} \approx 0.429 < 0.585 \approx \max_{M\in\mathfrak{M}}\mathcal{I}\{M\},$$

и максимум достигается на решающем правиле, основанном на векторах e_1, e_2, e_3, расположенных, как показано на рис. 2.1 [37].

Этот и другие подобные примеры (см. [103], [209]) демонстрируют неожиданный с классической точки зрения факт: квантовая рандомизация может увеличивать информацию о наблюдаемой системе. Хотя этот эффект проявляется только в конечномерных гильбертовых пространствах (см. последнее утверждение теоремы из предыдущего раздела), он ясно указывает на необходимость использования обобщенных наблюдаемых.

2.2.2. Байесовская задача

Байесовский риск (2.11) можно представить в виде

$$\mathcal{R}\{M\} = \operatorname{Tr} \sum_{u=1}^{m} \widehat{W}_u M_u,$$

где $\widehat{W}_u := \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta W_\theta(u) S_\theta$ – операторная *апостериорная* функция отклонения. Поскольку $M \to \mathcal{R}\{M\}$ аффинный функционал на выпуклом множестве $\mathfrak{M}$, задача его минимизации может быть рассмотрена с помощью методов линейного программирования.

Теорема 2.2.1 ([39]). *Имеет место соотношение двойственности:*

$$\min_{M \in \mathfrak{M}} \mathcal{R}\{M\} = \max \left\{ \operatorname{Tr} \Lambda : \Lambda \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}), \Lambda \leqslant \widehat{W}_u; u = 1, \ldots, m \right\}. \tag{2.14}$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $M^0 := \{M_u^0\}$ *– байесовское решающее правило;*
2. *существует* $\Lambda^0 \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, *такой что*

$$\Lambda^0 \leqslant \widehat{W}_u; \quad (\widehat{W}_u - \Lambda^0) M_u^0 = 0 \text{ для } u = 1, \ldots, m;$$

3. *оператор* $\Lambda^0 = \sum_{u=1}^{m} \widehat{W}_u M_u^0$ *эрмитов и* $\Lambda^0 \leqslant \widehat{W}_u$ $(u = 1, \ldots, m)$.

Оператор Λ^0 *является единственным решением задачи в правой части* (2.14).

Наиболее часто используется достаточность условия 2, которая доказывается элементарно: для любого $M = \{M_u\}$

$$\mathcal{R}\{M\} = \operatorname{Tr} \sum_{u=1}^{m} \widehat{W}_u M_u \geqslant \operatorname{Tr} \Lambda \sum_{u=1}^{m} M_u^0 = \operatorname{Tr} \sum_{u=1}^{m} \widehat{W}_u M_u^0 = \mathcal{R}\{M^0\}.$$

С помощью этого условия легко проверяется оптимальность решающего правила (2.9) в примере предыдущего раздела, при $\Lambda^0 = \frac{1}{6} I$.

Пример 2.2.2. Пусть операторы $\widehat{W}_u - \widehat{W}_v$ $(u, v = 1, \ldots, m)$ перестановочны, т. е. $\widehat{W}_u = C + \widehat{W}_u^0$ где $\widehat{W}_u^0$ — перестановочные операторы. Тогда существует самосопряженный оператор X и функция $W_u^0(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, такие что

$$\widehat{W}_u^0 = W_u^0(X).$$

Пусть $\{\mathfrak{X}_k\}$ разбиение $\mathbb{R}$, такое что $W_k^0(x) \leqslant W_j^0(x)$ при $j \neq k$ и $x \in \mathfrak{X}_k$. Положим $\Lambda^0 := C + \min_k W_k^0(X)$, $M_k^0 := 1_{\mathfrak{X}_k}(X)$. Тогда условие 2 выполнено. Если $C = 0$, то это соответствует вычислению байесовского решающего правила в классической статистике: правило является детерминированным и для каждого x предписывает выбирать решение u, для которого *апостериорное* отклонение $W_u(x)$ минимально ([34], гл. IV).

Оператор Λ^0, дающий единственное решение задачи (2.14), можно считать некоммутативным обобщением функции $\min_u \widehat{W}_u$.

Пример 2.2.3. Условия предыдущего примера автоматически выполняются в случае двух гипотез S_0, S_1. Для простоты рассмотрим функцию отклонения $W_\theta : u \to 1 - \delta_{\theta u}$, так что речь идет о минимизации средней ошибки. Байесовское решающее правило имеет вид

$$M_0^0 = 1_{(0,\infty)}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1), \quad M_1^0 = 1_{(-\infty,0]}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1),$$

а минимальная средняя ошибка

$$\mathcal{R}\{M^0\} = \frac{1}{2}\left(1 - \|\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1\|_1\right).$$

Если S_0, S_1 — чистые состояния с векторами ψ_0, ψ_1, то это сводится к (см. [34])

$$\mathcal{R}\{M^0\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\pi_0\pi_1|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2}\right).$$

Подобные границы, вытекающие из квантовой теории статистических решений, являются эталоном для оценки качества реальных процедур измерения и поэтому имеют фундаментальное значение; однако даже в простейшем случае двух состояний физическая реализации оптимального решающего правила является непростой задачей. Для оптимального различения двух когерентных состояний поля излучения было придумано остроумное измеряющее и обрабатывающее данные устройство — приемник Долинара. Оно основано на счете фотонов и специфической обратной связи от счетчика к входному полю (см. [34], [43]). Во многих других случаях задача реализации оптимального решающего правила еще ждет решения.

В общем случае уравнения оптимальности сводятся к сложной нелинейной задаче, часто геометрического характера. Остановимся на задаче различения m чистых состояний с линейно независимыми векторами ψ_θ и *априорными* вероятностями $\pi_\theta > 0$. Можно считать, что $\mathcal{H}$ порождается векторами $\psi_\theta, \theta = 1, \ldots, m$. Было показано, что в этом случае байесовское решающее правило имеет вид

$$M_u = |e_u\rangle\langle e_u|, \quad u = 1, \ldots, m, \tag{2.15}$$

где $\{e_u\}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (см. [34] гл. 4, [42]). Таким образом, задача сводится к нахождению ортонормированного базиса, наилучшим образом приближающего систему $\{\psi_u\}$ в смысле критерия

$$\mathcal{R}\{M\} = \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta (1 - |\langle \psi_\theta | e_\theta \rangle|^2). \tag{2.16}$$

В [40] указано, что в случае равновероятных чистых состояний имеет место оценка

$$\mathcal{R}\{M\} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{\theta=1}^{m} \|\psi_\theta - e_\theta\|^2.$$

Базис, минимизирующий правую часть, имеет вид

$$e_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \psi_j, \tag{2.17}$$

где $(a_{jk}) = \Gamma^{1/2}$ и $\Gamma = (\langle \psi_j | \psi_k \rangle)$, причем минимальная ошибка

$$\min_{e_\theta} \sum_{\theta=1}^{m} \|\psi_\theta - e_\theta\|^2 = \operatorname{Tr}\bigl(I - \Gamma^{1/2}\bigr)^2 = 2 \operatorname{Tr}\bigl(I - \Gamma^{1/2}\bigr)$$

(теорема Крейна). Из этого следует, что

$$\min \mathcal{R}\{M\} \leqslant \frac{1}{m} \operatorname{Tr}\bigl(I - \Gamma^{1/2}\bigr)^2. \tag{2.18}$$

Решающее правило, отвечающее базису (2.17), асимптотически оптимально в пределе почти ортогональных состояний, $\Gamma \to I$, причем правая часть в (2.18) дает первый член асимптотики. В «равноугольном» случае, где $\langle \psi_j | \psi_k \rangle = \gamma$ для $j \neq k$, и $\pi_\theta = \frac{1}{m}$, базис (2.17) является оптимальным, и получается формула Юна - Лакса ([34], гл. 6)

$$\min \mathcal{R}\{M\} = \frac{m-1}{m^2} \left(\sqrt{1 + (m-1)\gamma} - \sqrt{1 - \gamma} \right)^2.$$

2.2.3. Квантовая теорема кодирования

Вопрос о пропускной способности квантового канала связи возник еще в шестидесятые годы и восходит к более ранним классическим работам Габора и Бриллюэна, посвященным изучению фундаментальных физических пределов скорости и качества обработки информации. Эти работы заложили физическую основу и подняли вопрос о последовательном квантово-статистическом подходе к проблеме. Важные шаги в этом направлении были сделаны в семидесятые годы, когда была создана квантовая теория обнаружения и оценивания, дающая математическую основу для этого круга проблем [34], [41]. Решающий прогресс, достигнутый в последние годы, был стимулирован новыми идеями в квантовой теории информации, связанными с недавним развитием квантовых вычислений [83], [188].

Простейшая модель квантового канала связи (см, [36], [134]) дается отображением $\theta \to S_\theta$, где θ — «сигнал», пробегающий входной алфавит $1,\dots,m$, а S_θ — операторы плотности, описывающие состояния носителя информации (такого, как электромагнитное поле, см. [34]). Передатчик информации задает вероятностное распределение $\pi = \{\pi_\theta\}$ на входном алфавите (кодирование), а приемник выполняет декодирование, описываемое разложением единицы $M = \{M_u\}$, где u пробегает алфавит $1,\dots,p$ (декодирование). Вероятность получить на выходе сигнал u, при условии, что на входе — сигнал θ, дается формулой (2.10). Таким образом, квантовый канал связи можно рассматривать как обычный канал со специфическими ограничениями на переходные вероятности, неявно выраженными формулой (2.10). Чему равна пропускная способность такого канала при передаче последовательности сигналов $\theta_1,\dots,\theta_n$?

Рассмотрим информационное количество $\mathfrak{J}_1\{\pi, M\}$, определяемое формулой типа (2.13) (где u пробегает от 1 до p) и величину

$$C_1 := \max_{\pi,M} \mathfrak{J}_1\{\pi, M\},$$

где максимум берется по всевозможным кодированиям и декодированиям. В ранних работах по квантовой теории связи ([124], [170]) для оценки пропускной способности использовалась величина

$$\overline{C} = \max_{\pi}\left(H\Big(\sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta S_\theta\Big) - \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta H(S_\theta) \right), \tag{2.19}$$

где $H(S)$ — энтропия квантового состояния S. В [38] была установлена *квантовая энтропийная граница*

$$\mathfrak{J}_1\{\pi, M\} \leqslant H\Big(\sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta S_\theta\Big) - \sum_{\theta=1}^{m} \pi_\theta H(S_\theta), \tag{2.20}$$

для произвольных кодирования π и декодирования M (хронологический обзор относящихся к этому вопросу результатов см. в [152]).

В этой же ситуации $C_1 \leqslant \overline{C}$. Однако, как показывают следующие рассуждения, величина C_1 не может рассматриваться как пропускная способность. Правильное определение пропускной способности должно быть связано с предельной скоростью асимптотически безошибочной передачи информации. Рассмотрим n-ю степень канала в пространстве $\mathcal{H}_n := \mathcal{H}^{\otimes n}$, определяемую состояниями $S_v = S_{\theta_1} \otimes \cdots \otimes S_{\theta_n}$, где $v = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — всевозможные слова входного алфавита длины n. Пусть $\mathcal{I}_n\{\pi, M\}$ и $C_n := \max \mathcal{I}_n\{\pi, M\}$ — величины, определяемые для n-й степени канала аналогично $\mathcal{I}_1\{\pi, M\}$ и C_1. Информационное количество $\mathcal{I}_n\{\pi, M\}$ обладает свойством аддитивности

$$\max \mathcal{I}_{n+m}\{\pi^{(n)} \times \pi^{(m)}, M^{(n)} \otimes M^{(m)}\} = \\ = \max \mathcal{I}_n\{\pi^{(n)}, M^{(n)}\} + \max \mathcal{I}_m\{\pi^{(m)}, M^{(m)}\},$$

откуда следует, что последовательность (C_n) супераддитивна, $C_n + C_m \leqslant C_{n+m}$, а следовательно, существует

$$C := \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n} = \sup_n \frac{C_n}{n}.$$

Основываясь на классической теореме кодирования Шеннона, можно доказать, что для n-й степени канала существуют такие кодирования $\{S_{v_j}\}$ и декодирования $\{M_j\}$ размера $N = [2^{nR}]$, что при $R < C$ средняя ошибка

$$\overline{\lambda}(n, N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (1 - \operatorname{Tr} S_{v_j} M_j) \tag{2.21}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, тогда как при $R > C$ она не стремится к нулю при любом выборе кодирования и декодирования. Это дает основание назвать величину C (классической) *пропускной способностью* данного квантового канала связи [40].

Следует отметить, что для классического канала «без памяти» последовательность (C_n) аддитивна и поэтому $C = \frac{C_n}{n} = C_1$ для всех n. Оказывается, что в квантовом случае возможно строгое неравенство, $C_n + C_m < C_{n+m}$, более того, возможно неравенство

$$C_1 < C,$$

выражающее существование парадоксальной с классической точки зрения «памяти» в произведении независимых каналов. «Сцепленное» измерение в таком произведении может нести больше информации, чем сумма информаций, получаемых в каждой компоненте. Этот факт, разумеется, обусловлен необычными статистическими свойствами составных квантовой систем и является еще одним проявлением квантовой целостности.

Из (2.20) и аддитивности величины (2.19) следует, что $C \leqslant \overline{C}$. В [40] было высказано предположение, что здесь может иметь место равенство. Действительно, недавно было показано, сначала для канала с чистыми состояниями [130], а потом и для общего случая [152], что

$$C = \overline{C},$$

что решает вопрос о классической пропускной способности канала $\theta \to S_\theta$. Обратное неравенство $C \geqslant \overline{C}$ доказывается с помощью верхней границы для вероятности ошибки $\bar{\lambda}(n, [2^{nR}])$, которая стремится к нулю при $n \to \infty$, при условии $R < \overline{C}$. Чтобы получить такую границу, приходится иметь дело с минимизацией по всем возможным кодированиям и декодированиям в (2.21). Первый минимум вычисляется, используя концепцию случайного кодирования, которая восходит к Шеннону — среднее по множеству случайных кодов всегда больше или равно минимума. Второй минимум оценивается сверху при помощи специального решающего правила (2.17) и неравенства (2.18). Обе эти идеи уже использовались в доказательстве строгой супераддитивности [38], но этого не было достаточно для получения требуемой верхней границы. Решающее улучшение границы получается применением метода *типичной проекции*, основанного на свойстве асимптотической равнораспределенности, которое позволяет пренебречь «нетипичными» собственными значениями рассматриваемого оператора плотности в пределе $n \to \infty$. Это понятие, которое было введено Шумахером и Джоза [162] в связи с квантовым аналогом сжатия данных, сыграло ключевую роль в получении требуемой верхней $(\varepsilon - \delta)$-границы в случае чистых сигнальных состояний S_θ [130]. Позднее этот результат был обобщен автором и, независимо, Шумахером и Вестморлендом на произвольные сигнальные состояния (см. обзор [152]).

Было также дано другое доказательство для случая чистых состояний, которое не использует метод типичной проекции, а вместо этого опирается на неравенство типа больших уклонений. Этот метод позволяет получить более точную оценку вида

$$\lambda(n, [2^{nR}]) \leqslant \mathrm{const} \cdot 2^{-nE(R)},$$

где $E(R)$ – оценка *функции надежности* канала [152]. До сих пор не удалось обобщить это доказательство на случай с произвольными сигнальными состояниями, хотя есть естественное предположение о возможной нижней границе для $E(R)$, а именно

$$E(R) \geqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left\{\max_{\pi}\mu(\pi,s) - sR\right\},$$

где $\mu(\pi,s) = -\log\operatorname{Tr}\left(\sum_\theta \pi_\theta S_\theta^{\frac{1}{1+s}}\right)^{1+s}$.

Пример 2.2.4. В случае двоичного квантового канала с чистыми состояниями ψ_0,ψ_1

$$C = -\left[\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\log\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\log\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\right],$$

где $\varepsilon = |\langle\psi_0|\psi_1\rangle|$. Максимальная достижимая информация C_1, полученная использованием несцепленных (представимых в виде произведения) измерений, достигается на равномерном входном распределении вероятностей ($\pi = 1/2$), а соответствующее байесовское решающее правило максимального правдоподобия задается ортонормированным базисом, симметрично ориентированным по отношению к векторам $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ (что в этом частном случае совпадает с (2.17)). Это равно пропускной способности классического двоичного симметричного канала с вероятностью ошибки $(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})/2$, т. е.

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})\log(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}) + (1-\sqrt{1-\varepsilon^2})\log(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})\right].$$

В этом случае $C_1 < C$ и, следовательно, $C_n + C_m < C_{n+m}$ для всех $0<\varepsilon<1$.

В приведенных выше рассуждениях классическая информация «записывалась» на квантовые состояния, которые должны передаваться через физический канал. Однако само квантовое состояние можно рассматривать как информационный ресурс со свойствами, существенно отличающимися от любого классического носителя информации. Одним из наиболее фундаментальных свойств квантовой информации является невозможность ее точного копирования (клонирования) (см., например, [231], [188]). Соответствующая «квантовая теория информации» [83] лежит в основе преобразований квантовых состояний в таких гипотетических конструкциях, как квантовый компьютер, а также в уже существующих экспериментальных устройствах, таких как квантовые криптографические каналы [18], [217]. В разделе 3.3 главы 3 мы вернемся к обсуждению пропускной способности на основе общего определения квантового канала.

2.2.4. Общая формулировка

Задача различения или проверки гипотез является весьма специальным случаем следующей общей схемы. Как и в классической теории статистических решений (см., например, [56]), задается множество значений Θ неизвестного параметра θ, множество $\mathcal{X}$ решений x (часто $\mathcal{X} = \Theta$) и функция отклонения $\mathrm{W}_\theta(x)$, определяющая качество решения x при данном значении параметра θ. Множество $\mathcal{X}$ — измеримое (обычно стандартное) пространство и W_θ ограничена снизу и измерима по x при фиксированном $\theta \in \Theta$.

Каждому значению θ соответствует оператор плотности S_θ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматриваемой квантовой системы, а *решающее правило* задается разложением единицы M на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ортогональные разложения единицы описывают *детерминированные* решающие правила. При данном значении параметра θ и данном решающем правиле M решение выбирается в соответствии с распределением вероятности

$$\mu_0^M(B) = \mathrm{Tr}\, S_\theta M(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Среднее отклонение, определяемое формулой

$$\mathcal{R}_\theta\{M\} = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathrm{W}_\theta(x)\mu_\theta^M(dx).$$

является для каждого $\theta \in \Theta$ аффинным функционалом на выпуклом множестве решающих правил $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$.

Решающее правило называется *байесовским*, если оно минимизирует байесовский риск

$$\mathcal{R}_\pi\{M\} = \int\limits_{\Theta} \mathcal{R}_\theta\{M\}\pi(d\theta)$$

для данного априорного распределения π на Θ, и *минимаксным*, если оно минимизирует максимальное отклонение $\max_\theta \mathcal{R}_\theta\{M\}$. Как классическая, так и квантовая теории статистических решений включаются в общую схему, в которой состояния описываются точками произвольного выпуклого множества $\mathfrak{S}$, причем значительная часть результатов классической теории Вальда переносится на это схему, достигая естественных границ общности [39]. При минимальных требований на функцию отклонений установлены общие условия существования байесовского [190] и минимаксного решающих правил, полнота класса байесовских решающих правил [9] и аналог теоремы Ханта–Стейна [41], [9]. Обобщения понятия достаточности изучались в [223], [39] [199]. В силу ограниченности понятия условного ожидания, в квантовой теории статистических решений достаточность играет гораздо меньшую роль, чем в классической, зато на первый план выходят свойства инвариантности относительно подходящих групп симметрий (см. п. 2.3).

На основе соответствующего аппарата интегрирования в [39] получены необходимые и достаточные условия оптимальности и соотношение двойственности в байесовской задаче с произвольными $\Theta, \mathcal{X}$, обобщающие теорему из п. 2.2.2. При некоторых естественных предположениях о регулярности, байесовский риск представляется как

$$\mathcal{R}_\pi\{M\} = \mathrm{Tr}\int \widehat{W}(x)M(dx).$$

Решающее правило M^0 является байесовским тогда и только тогда, когда существует ядерный оператор Λ^0, удовлетворяющий соотношениям

$$\Lambda^0 \leqslant \widehat{W}(x), \quad x \in \mathcal{X};$$

$$\int_B (\widehat{W}(x) - \Lambda^0)M^0(dx) = 0; \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Оператор Λ^0 является единственным решением двойственной задачи о максимизации $\mathrm{Tr}\,\Lambda$ при ограничениях $\Lambda \leqslant \widehat{W}(x)$, $x \in \mathcal{X}$. Эти условия, в частности, позволяют дать исчерпывающее решение многомерной байесовской задачи оценивания среднего значения гауссовских состояний ([6], [39]), которое мы проиллюстрируем здесь одним примером.

В задаче оценивания $\Theta = \mathcal{X}$ является конечномерным многообразием, в частности, областью в $\mathbb{R}^n$. В этом случае детерминированное решающее правило может быть задано набором совместимых вещественных наблюдаемых $X_1, \dots, X_n$ в $\mathcal{H}$. Согласно п. 2.1.2, произвольное решающее правило задается набором совместимых наблюдаемых $X_1, \dots, X_n$ в расширении $\mathcal{H}$ вида $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0$ — вспомогательное гильбертово пространство с оператором плотности S_0. При таком способе задания решающее правило называется *оценкой* многомерного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. В квантовой задаче оценивания, в отличие от классической, байесовские оценки могут оказаться существенно недетерминированными.

Пример 2.2.5. Пусть $\{S_{\alpha,\beta}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ — семейство гауссовских состояний (см. п. 1.2.4 в гл. 1) с характеристической функцией

$$\mathrm{Tr}\, S_{\alpha,\beta} \exp(i(Px + Qy)) = \exp\Big((\alpha x + \beta y) - \frac{\sigma^2}{2}(x^2 + y^2)\Big) \qquad (2.22)$$

для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, где P, Q — канонические наблюдаемые, $\sigma^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Рассмотрим байесовскую задачу оценивания двумерного параметра $\theta = (\alpha, \beta)$ с функцией отклонения

$$\mathrm{W}_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') := g_1(\alpha - \alpha')^2 + g_2(\beta - \beta')^2,$$

и гауссовским априорным распределением вероятностей с плотностью $\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)$. Решение этой задачи качественно зависит от величины $\frac{g_1}{g_2}$. Если $\frac{g_1}{g_2} \leqslant (2s^2)^{-2}$ или $\frac{g_1}{g_2} \geqslant (2s^2)^2$, где $s^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2$, то байесовские оценки детерминированы, т. е. задаются парой перестановочных самосопряженных операторов A, B в $\mathcal{H}$. В первом случае $A = \left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2 P$, $B = 0$, в то время как во втором $A = 0$, $B = \left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2 Q$. Если же $(2s^2)^{-2} \leqslant \frac{g_1}{g_2} \leqslant (2s^2)^2$, то оценки задаются перестановочными операторами

$$A = k_1(P \otimes I_0) + k_2(I \otimes P_0), \quad B = k_2(Q \otimes I) - k_1(I \otimes Q_0)$$

в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ (ср. (2.7)), где k_1, k_2 — коэффициенты, нелинейно зависящие от s^2, g_1 и g_2, а оператор плотности S_0 в $\mathcal{H}_0$ гауссовский и имеет характеристическую функцию

$$\operatorname{Tr} S_0 \exp(i(P_0 x + Q_0 y)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\frac{k_1}{k_2}x^2 + \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\frac{k_2}{k_1}y^2\right)\right).$$

Соответствующее разложение единицы в $\mathcal{H}$ отличается от (2.7) линейной заменой переменных. В отличие от аналогичной классической задачи, зависимость байесовского риска от весов g_1, g_2 также имеет существенно нелинейный характер.

Этот пример иллюстрирует новое явление в квантовой теории оценивания, отсутствующее в классической статистике: дополнительность между компонентами оцениваемого параметра. Оценки компонент должны быть совместимыми наблюдаемыми, и это привносит добавочный шум в оценки, при условии, что веса компонент имеют сопоставимую величину. Однако, если одна компонента имеет очень малый вес по сравнению с другой, оптимальная процедура оценивания предписывает пренебречь несущественной компонентой и произвести точное оценивание существенной компоненты.

2.2.5. Квантовые неравенства Рао–Крамера

Рассмотрим задачу оценивания с многомерным параметром $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ в семействе состояний $\{S_\theta\}$. Решающее правило M назовем *несмещенным*, если для всех $\theta \in \Theta$

$$\int \cdots \int x_j \mu_\theta^M(dx_1 \ldots dx_k) = \theta_j \text{ для } j = 1, \ldots, k.$$

В предположении конечности вторых моментов можно определить матрицу ковариции

$$\mathbf{D}_\theta\{M\} := \left(\int \cdots \int (x_i - \theta_i)(x_j - \theta_j)\mu_\theta^M(dx_1 \ldots dx_k)\right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

В классической статистике хорошо известно неравенство Рао – Крамера, ограничивающее снизу матрицу ковариации несмещенных оценок. Входящая в эту границу информационная матрица Фишера однозначно определяется метрической геометрией симплекса «классических состояний» т. е. распределений вероятностей на пространстве элементарных событий Ω [56]. В квантовой статистике имеется много неэквивалентных неравенств типа Рао – Крамера, что связано с существенно более сложной геометрией множества состояний.

Поскольку неравенство Рао – Крамера имеет локальный характер, достаточно предположить, что семейство состояний определено в окрестности фиксированной точки θ. Введем вещественное гильбертово пространство $\mathrm{L}^2(S_\theta)$, определяемое как пополнение множества $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ ограниченных вещественных наблюдаемых относительно скалярного произведения

$$\langle X, Y\rangle_\theta := \Re \operatorname{Tr} Y S_\theta X = \operatorname{Tr} S_\theta X \circ Y, \tag{2.23}$$

где $X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX)$ – йорданово произведение X и Y. Предположим, что

1. семейство $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо в точке θ как функция со значениями в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$;
2. линейные функционалы $X \to \operatorname{Tr} \frac{dS_\theta}{d\theta_j} X$ непрерывны относительно скалярного произведения (2.23).

При этих условиях по теореме Ф. Рисса существуют *симметризованные логарифмические производные* $L_\theta^j \in \mathrm{L}^2(S_\theta)$, определяемые из условий

$$\operatorname{Tr} \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} X = \langle L_\theta^j, X\rangle \quad \text{для } X \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H}). \tag{2.24}$$

Формально,

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_\theta \circ L_\theta^j. \tag{2.25}$$

Тогда для любого решающего правила M, имеющего конечные вторые моменты и удовлетворяющего условию *локальной несмещенности*

$$\int \cdots \int x_i \frac{\partial \mu_\theta^M}{\partial \theta_j}(dx_1 \ldots dx_n) = \delta_{ij} \text{ для } i, j = 1, \ldots, k, \tag{2.26}$$

где $\frac{\partial \mu_\theta^M}{\partial \theta_i}(B) = \mathrm{Tr}\,\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_i} M(B)$, имеет место неравенство

$$\mathbf{D}_\theta\{M\} \geqslant \mathbf{J}_\theta^{-1}. \tag{2.27}$$

Здесь $\mathbf{J}_\theta := \left(\langle L_\theta^i, L_\theta^j \rangle\right)_{i,j=1,\dots,k}$ — вещественная симметричная матрица, аналог информационной матрицы Фишера для симметризованной логарифмической производной.

С другой стороны, введем комплексные гильбертовы пространства $\mathrm{L}_\pm^2(S_\theta)$ как пополнения $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ относительно скалярных произведений

$$\langle X, Y\rangle_\theta^+ = \mathrm{Tr}\, X^* S_\theta Y, \quad \langle X, Y\rangle_\theta^- = \mathrm{Tr}\, Y S_\theta X^*$$

и определим *правую* и *левую логарифмическую производные* $L_\theta^{\pm j}$ как решения уравнений

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} X = \langle L_\theta^{\pm j}, X_\theta^{\pm}\rangle \text{ для } X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \tag{2.28}$$

которые существуют при тех же условиях 1, 2. Формально

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_\theta L_\theta^{+j} = L_\theta^{-j} S_\theta.$$

Тогда, при условии (2.26),

$$\mathbf{D}_\theta\{M\} \geqslant \left(\mathbf{J}_\theta^{\pm}\right)^{-1}, \tag{2.29}$$

где $\mathbf{J}_\theta^{\pm} := \left(\langle L_\theta^{\pm i}, L_\theta^{\pm j}\rangle\right)_{i,j=1,\dots,k}$ — комплексные эрмитовы матрицы, и (2.29) рассматривается как неравенство для эрмитовых матриц.

Формальное определение (2.25) симметризованной логарифмической производной и неравенство (2.25) принадлежит Хелстрому, а неравенство (2.29) – Юну и Лэксу (см. [34] гл. 8). Другие неравенства были получены Стратоновичем [218]. Математически корректные определения логарифмических производных и вывод соответствующих неравенств даны в гл. 6 книги [41]. Пространства L^2, ассоциированные с квантовым состоянием, полезны и в других вопросах. Элементы этих пространств могут быть интерпретированы как классы эквивалентности неограниченных операторов в $\mathcal{H}$ ([41] гл. 2).

Неравенства (2.27), (2.29) дают существенно различные, несравнимые границы для $\mathbf{D}_\theta\{M\}$. В случае одномерного параметра ($k = 1$) всегда $J_\theta \leqslant J_\theta^{\pm}$, причем неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $[S_\theta, \frac{dS_\theta}{d\theta}] = 0$. В этом случае неравенство, основанное на симметризованной логарифмической производной, оказывается наилучшим (см. [34], гл. 8).

С другой стороны, для двупараметрического семейства гауссовских состояний (2.22) неравенство (2.27) дает лишь $\operatorname{Tr}\mathbf{D}_\theta\{M\} \geqslant 2\sigma^2$, тогда как из (2.29) вытекает $\operatorname{Tr}\mathbf{D}_\theta\{M\} \geqslant 2\sigma^2 + 1$. Последняя граница достигается для несмещенных оценок, определяемых операторами типа (2.7). Неравенство (2.29), основанное на правой (или левой) логарифмической производной, вообще лучше приспособлено к задачам оценивания, в которых параметр допускает естественную комплексификацию (в последнем примере $\theta = \alpha + i\beta$). Здесь снова играет свою роль дополнительность между компонентами.

2.2.6. Недавние достижения в задаче оценивания состояния

В высокоточных экспериментах и в квантовой оптике исследователи уже способны оперировать элементарными квантовыми системами, такими как одиночные ионы, атомы и фотоны. Это приводит к потенциально важным приложениям, таким как квантовые коммуникации и квантовая криптография. Чрезвычайно важен вопрос извлечения максимально возможной информации о состоянии данной квантовой системы. Так, в обсуждаемых сейчас предложениях квантовых вычислений информация записывается в состояния элементарных квантовых ячеек — q-битов, а считывается при помощи квантовых измерений. Со статистической точки зрения, измерение дает оценку квантового состояния — либо всего состояния целиком, либо некоторых его компонент (параметров). Возникает новый интерес к квантовой теории оценивания, ведущей начало с конца 1960-х – начала 70-х годов (см. [34], [41]).

Этот интерес проистекает с одной стороны из вышеупомянутых физических приложений, а с другой — из естественного желания некоторых специалистов по классической математической статистике расширить область приложения этой науки и освоить новые горизонты квантовой статистики. Квантовая теория оценивания имеет несколько отличительных черт, которые делают ее привлекательной для специалиста по математической статистике. Ниже мы кратко обсуждаем эти особенности, давая в то же время краткий обзор наиболее важных недавних достижений квантовой теории оценивания.

1) Как было показано в п. 2.2.5, в квантовом случае задачи оценивания с многомерным параметром кардинально отличаются от задач с одномерным параметром. Это происходит из-за некоммутативности алгебры квантовых наблюдаемых (случайных величин), отражающей существование несовместимых величин, которые в принципе нельзя измерить точно в одном эксперименте. Это устанавливает новые статистические ограничения для компонент многомерных оценок, отсутствующие в классическом случае, и при-

водит к существенной неединственности логарифмических производных и соответствующих квантовых неравенств Рао – Крамера.

Хорошо известно, что в классической статистике фишеровская информация порождает риманову метрику на множестве вероятностей, которая является существенно единственным монотонным инвариантом в категории статистических (марковских) морфизмов [56]. У нее есть естественные квантовые аналоги, однако единственность уже не имеет места. Выражение

$$d(S_1, S_2) := \sqrt{2(1 - \|\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\|_1)}$$

определяет метрику на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ операторов плотности. В более общем контексте алгебр фон Неймана, эта метрика подробно изучалась Араки, Ульманом и другими и была названа *метрикой Бюреса* (см. обзор Раджио в [203]). Если $\{S_\theta\}$ — семейство, удовлетворяющее условиям 1. и 2. из п. 2.2.5, то при $\Delta\theta \to \theta$

$$d(S_\theta, S_{\theta+\Delta\theta})^2 \approx \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{k} \langle L_\theta^i, L_\theta^j\rangle_\theta \Delta\theta_i \Delta\theta_j. \tag{2.30}$$

Таким образом, метрика Бюреса локально эквивалентна римановой метрике, определенной квантовым аналогом фишеровской матрицы информации. Морозова и Ченцов [32] описали метрики в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, где $\dim\mathcal{H} < \infty$, которые монотонно инвариантны в категории марковских морфизмов (т. е. динамических отображений, см. п. 3.1.2, гл. 3). В этом классе риманова метрика, определенная в (2.30), минимальна, в то время как метрика, связанная с правой или левой логарифмической производной, максимальна. Примером метрики, отличной от них обеих, является метрика Боголюбова – Кубо – Мори, играющая важную роль в квантовой статистической механике. Исследование этого вопроса было продолжено в [200], и он получил окончательное решение в [171], где было дано исчерпывающее описание монотонных инвариантных римановых метрик на множестве операторов плотности. Значение этого результата для квантовой теории оценивания еще нуждается в осмыслении.

С общей точки зрения, исследования в области классической геометростатистики (термин, введенный Колмогоровым), связанные с именами Ченцова, Амари, Барндорфа-Нильсена и других, совершенно естественно приводят к исследованию дифференциально-геометрической структуры более сложных выпуклых пространств состояний, таких как множество квантовых состояний (операторов плотности) [222]. В частности, оказывается, что степень некоммутативности статистической модели и ее комплексная структура тесно связаны с кривизной Панчаратнама и с фазой Берри, которые хорошо известны в квантовой механике [181].

2) Другое фундаментальное отличие квантовой статистики проявляется при обсуждении последовательностей независимых одинаковых квантовых систем и асимптотического поведения соответствующих оценок. В работе [137], посвященной асимптотике квантового оценивания параметра сдвига, было найдено, что статистическая информация в квантовых моделях с независимыми наблюдениями может быть строго супераддитивной. Это свойство, которое аналогично строгой супераддитивности шенноновской информации (см. п. 2.2.3), означает, что значение меры статистической информации для квантовой системы, состоящей из независимых компонент, может быть строго больше, чем суммы ее значений для отдельных систем. Свойство строгой супераддитивности имеет глубокие корни в квантовой физике: оно связано с существованием сцепленных измерений в составной системе и двойственно корреляциям Эйнштейна–Подольского–Розена. Явление строгой супераддитивности было подтверждено также для других важных квантовых статистических моделей, таких как полная модель (см. 2) ниже) [182], [120].

Здесь уместно описать основные конкретные модели, представляющие интерес в квантовой теории оценивания.

1) Параметрические модели с группами симметрий. В частности, модели с параметром сдвига или поворота непосредственно связаны с проблемой канонической сопряженности и нестандартных соотношений неопределенностей, таких как время–энергия, фаза–число квантов и т.д. Эти модели обсуждаются ниже в п. 2.3.5.

2) Полная модель, в которой многомерным параметром является само квантовое состояние. Хотя при конечных размерностях эта модель является параметрической моделью с конкретной группой симметрий, она заслуживает отдельного рассмотрения как из-за ее важности для физики, так и из-за ее математических свойств. Особенно интересным и наиболее изученным является случай состояния q-бита с трехмерным параметром, изменяющимся внутри сферы Блоха. Асимптотическая теория оценок для полной модели в случае чистого состояния была разработана в [180], [131]. На этой модели можно ясно увидеть еще одно отличительное свойство квантового оценивания: сложность проблемы резко возрастает с переходом от оценок чистого состояния к оценкам смешанного состояния. Фактически, теория оцениваний смешанных состояний — это важная область, в значительной мере открытая для исследования.

С другой стороны, полная модель, особенно бесконечномерная, принадлежит скорее к непараметрической квантовой математической статистике, которая в настоящее время также находится в стадии развития. В связи с этим следует упомянуть метод гомодинной томографии оператора плотности в квантовой оптике [100].

3) Оценивание среднего значения квантового гауссова состояния. Это квантовый аналог классической задачи «сигнал+шум», однако с шумом, имеющим квантово-механическое происхождение. Эта модель подробно рассмотрена в [133], [39], [41].

2.3. Ковариантные наблюдаемые

2.3.1. Формулировка проблемы

Пусть G — локально компактная группа, действующая непрерывно на транзитивном G-пространстве $\mathcal{X}$, а $V : g \to V_g$ $(g \in G)$ — непрерывное (проективное) унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Разложение единицы $M : B \to M(B)$ $(B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ в $\mathcal{H}$ называется *ковариантным* по отношению к V, если

$$V_g^* M(B) V_g = M(g^{-1}B) \quad \text{для } g \in G, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{2.31}$$

В квантовой механике $\mathcal{X}$ является пространством значений физического параметра (обобщенной координаты) x, обладающего группой симметрий (движений) G. Фиксируем $x_0 \in \mathcal{X}$ и оператор плотности S_0. Соотношение

$$S_x = V_g S_0 V_g^*, \qquad \text{где } x = gx_0, \tag{2.32}$$

описывает преобразование квантового состояния, отвечающее движению g. А именно, если состояние S_0 приготовлено некоторым макроскопическим устройством, отнесенным к начальной точке x_0, то состояние S_x приготовлено тем же самым устройством, перемещенным в положение $x = gx_0$ (ср. п. 1.2.2, гл. 1). Рассмотрим обобщенную наблюдаемую M, удовлетворяющую условию ковариантности (2.31), и пусть $\mu_x^M(B) := \operatorname{Tr} S_x M(B)$ — ее распределение вероятностей в состоянии S_x. Тогда условие (2.31) равносильно следующему:

$$\mu_{gx_0}^M(gB) = \mu_{x_0}^M(B) \quad \text{для } g \in G, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{2.33}$$

для любого состояния S_0. Это означает, что статистика наблюдаемой M преобразуется согласно движению g в пространстве обобщенной координаты $\mathcal{X}$ (см. пример в п. 1.2.3, гл. 1). Условие ковариантности, таким образом, дает некоторое правило для установления соответствия между классическими параметрами и квантовыми наблюдаемыми.

Такое соответствие является, конечно, далеко не однозначным. Среди множества ковариантных обобщенных наблюдаемых основной интерес представляют те, которые описывают предельно точные измерения соответствующего параметра. Рассмотрим задачу оценивания параметра $x \in \mathcal{X}$ в семействе состояний (2.32). Пусть задана функция отклонения $\mathrm{W}_\theta(x)$ на множестве $\mathcal{X} = \Theta$, такая что $\mathrm{W}_{g\theta}(gx) = \mathrm{W}_\theta(x)$. При условии (2.31), среднее отклонение

$$\mathcal{R}_\theta\{M\} = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathrm{W}_\theta(x)\mu_\theta^M(dx) \tag{2.34}$$

не зависит от θ. Минимум аффинного функционала (2.34) достигается в крайней точке выпуклого множества $\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{X})$ ковариантных обобщенных наблюдаемых. Обозначим $\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{X})$ подмножество ковариантных наблюдаемых, задаваемых ортогональными разложениями единицы. Проблема соответствия в математическом плане сводится к изучению запаса элементов и структуры множеств $\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{X})$ и $\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{X})$. В общем случае

$$\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{X}) \subsetneq \operatorname{Extr}\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{X}).$$

Целый ряд парадоксов в стандартной формулировке квантовой механики обусловлен тем, что множество $\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{X})$ оказывается пустым. С другой стороны, $\operatorname{Extr}\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{X})$ имеет значительно более обширный запас элементов, среди которых и находится обобщенная квантовая наблюдаемая, отвечающая данному классическому параметру.

2.3.2. Структура ковариантного разложения единицы

При специальных предположениях относительно G, $\mathcal{X}$ и V можно дать прямое решение уравнения ковариантности (2.31), проливающее свет и на общий случай.

Пусть G – унимодулярная группа, а $G_0 := G/\mathcal{X}$ компактна. Тогда существует σ-конечная мера μ на G и конечная мера ν на $\mathcal{X}$, такие что $\nu(B) = \mu(\lambda^{-1}(B))$, где $\lambda : g \to gx_0$ (см., например, [225]).

Теорема 2.3.1 ([101], [41]). *Пусть V — конечномерное представление группы G. Для любого ковариантного разложения единицы M найдется положительный оператор P_0, такой что $[P_0, V_g] = 0$, $g \in G_0$ и*

$$M(B) = \int_B P(x)\nu(dx),$$

где плотность $P(x)$ определяется соотношением

$$P(gx_0) = V_g P_0 V_g^*. \tag{2.35}$$

Доказательство.

Из тождества

$$\int_G \operatorname{Tr} V_g S V_g^* M(B)\mu(dg) = \nu(B) \qquad \text{для } S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

(см. [41], гл. 4), полагая $S=(\dim\mathcal{H})^{-1}I$, получаем $\operatorname{Tr} M(B)=(\dim\mathcal{H})^{-1}\nu(B)$. Поэтому существует плотность $P(x)$ со значениями в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Соотношение (2.35) вытекает из условия ковариантности.

Ограничение на P_0, вытекающее из условия нормировки $M(\mathcal{X}) = I$, иногда удается выразить явно. Очень просто устроено множество $\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{X})$ в случае, когда V — неприводимое квадратично-интегрируемое представление ($\dim\mathcal{H} \leqslant +\infty$) унимодулярной группы $G = \mathcal{X}$. Из соотношения ортогональности для V (см. [178]) следует, что при надлежащей нормировке μ

$$\int_G V_g S_0 V_g^* \mu(dg) = I$$

для любого оператора плотности S_0. Таким образом, формула

$$M(B) = \int_B V_g S_0 V_g^* \mu(dg)$$

устанавливает взаимно однозначное аффинное соответствие между $\mathfrak{M}^{G,V}(G)$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. В частности, крайние точки множества $\mathfrak{M}^{G,V}(G)$ описываются формулой

$$M(B) = \int_B |\psi(g)\rangle\langle\psi(g)|\mu(dg), \tag{2.36}$$

где $\psi(g) = V_g\psi_0$, а ψ_0 — произвольный единичный вектор в $\mathcal{H}$. Семейство $\{\psi(g); g \in G\}$ образует переполненную систему, называемую в физике *обобщенными когерентными состояниями* (обычные когерентные состояния отвечают неприводимому представлению ККС и специальному выбору вектора ψ_0 (см. п. 1.2.4 в гл. 1).

2.3.3. Обобщенные системы импримитивности

Если M в соотношении (2.31) — ортогональное разложение единицы, то пара (V, M) называется *системой импримитивности*. Это понятие, введенное Макки (см. [178]), играет важную роль в теории представлений групп: представление V продолжается до системы импримитивности тогда и только тогда, когда оно индуцировано с подгруппы $G/\mathcal{X}$. Если же M — произвольное ковариантное разложение единицы, то (V, M) называется обобщенной системой импримитивности. Имеет место следующее обобщение теоремы Наймарка.

Теорема 2.3.2 ([93], [212]). *Пусть G — локально-компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ — стандартное измеримое пространство, а (V, M) — обобщенная система импримитивности в $\mathcal{H}$. Тогда существует изометрическое вложение W пространства $\mathcal{H}$ в некоторое гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ и система импримитивности $(\widetilde{V}, E)$ в $\widetilde{\mathcal{H}}$, такие что*

$$V_g = W^*\widetilde{V}_gW, \quad M(B) = W^*E(B)W.$$

Если множество $\{E(B)W\psi|B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \psi \in \mathcal{H}\}$ плотно в $\widetilde{\mathcal{H}}$, то $(\widetilde{V}, E)$ унитарно эквивалентно системе импримитивности, продолжающей представление в $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathrm{L}^2_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}, \mu)$, индуцированное с подгруппы $G/\mathcal{X}$.[2]

Для иллюстрации рассмотрим пару (V, M), где V — неприводимое квадратично интегрируемое представление, а M задается формулой (2.36). Искомое расширение в $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathrm{L}^2(G, \mu)$ является модификацией конструкции для произвольной переполненной системы, а именно

$$\widetilde{V}_g f(x) = f(g^{-1}x), \quad E(B)f(x) = 1_B(x)f(x),$$

причем вложение W действует по формуле $W\psi(g) := \langle\psi(g)|\psi\rangle$. Подпространство $W\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(G, \mu)$ связано с воспроизводящим ядром $K(g, g') :=$ $:= \langle\psi(g)|\psi(g')\rangle = \langle\psi_0|V(g^{-1}g')\psi_0\rangle$. Связь между обобщенными когерент-

[2] $\mathrm{L}^2_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}, \mu)$ обозначает гильбертово пространство функций на $\mathcal{X}$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, квадратично интегрируемых по мере μ.

ными состояниями и индуцированными представлениями подробно исследована в [212]. В общем случае в [94] показано, что M имеет ограниченную плотность $P(x)$ относительно квазиинвариантной меры μ на $\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда подпространство $W\mathcal{H} \subset L^2_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{K})$).

2.3.4. Случай абелевой группы

Случай, когда $G = \mathcal{X}$ — абелева локально компактная группа, представляет интерес, в частности, в связи с проблемой канонической сопряженности в квантовой механике. Полное описание ковариантных разложений единицы для произвольного (непрерывного) представления V дается в терминах преобразования Фурье; при этом значения «плотности» $P(x)$ оказываются, вообще говоря, неограниченными незамкнутыми положительно определенными формами. Излагаемые далее результаты могут быть получены как прямыми методами гармонического анализа, так и с помощью теоремы о расширении из предыдущего раздела (см. [44], [138]). Обобщение на неабелевы группы типа I дано в работе [46]. Пусть $\hat{G}$ — двойственная группа, а $d\hat{g}$ — мера Хаара в $\hat{G}$.

Предложение 2.3.1. *Множество ковариантных обобщенных наблюдаемых $\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{G})$ непусто тогда и только тогда, когда спектр V абсолютно непрерывен относительно $d\hat{g}$.*

Если это выполнено, то V разлагается в прямой интеграл факторных представлений, а именно

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\Lambda} \oplus \mathcal{H}(\lambda) d\lambda,$$

где Λ — измеримое подмножество $\hat{G}$, $\{\mathcal{H}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ — измеримое семейство гильбертовых пространств с $\dim \mathcal{H}(\lambda) > 0$ для почти всех $\lambda \in \Lambda$, причем

$$V_g \psi = \int\limits_{\Lambda} \oplus \overline{\lambda(g)} \psi(\lambda) d\lambda, \quad \text{если } \psi = \int\limits_{\Lambda} \oplus \psi(\lambda) d\lambda.$$

Здесь $\lambda(g)$ — значение характера $\lambda \in \hat{G}$ на элементе $g \in G$.

Следующее утверждение, которое следует сравнить с предложением 2.3.1, вытекает из теоремы импримитивности Макки, обобщающей теорему единственности Стоуна–фон Неймана (см. п. 1.2.3, гл. 1).

Предложение 2.3.2. *Множество ковариантных наблюдаемых непусто тогда и только тогда, когда $\Lambda = \widehat{G}$ с точностью до множества нулевой меры, и $\dim \mathcal{H}(\lambda) = \mathrm{const}$ для почти всех $\lambda \in \widehat{G}$.*

Будем называть семейство $\{P(\lambda, \lambda'); \lambda, \lambda' \in \Lambda\}$ *ядром*, если $P(\lambda, \lambda')$ – сжимающие операторы из $\mathcal{H}(\lambda')$ в $\mathcal{H}(\lambda)$, причем комплексная функция $\langle\varphi(\lambda)|P(\lambda, \lambda')\psi(\lambda')\rangle_\lambda$ измерима на мере $d\lambda \times d\lambda'$ для любых $\varphi = \int \oplus\varphi(\lambda)d\lambda$, $\psi = \int \oplus\psi(\lambda)d\lambda \in \mathcal{H}$ (здесь $\langle\cdot|\cdot\rangle_\lambda$ обозначает скалярное произведение в $\mathcal{H}(\lambda)$). Ядро *положительно определено*, если

$$P(\varphi, \varphi) := \int\limits_\Lambda\int\limits_\Lambda \langle\varphi(\lambda)|P(\lambda, \lambda')\varphi(\lambda')\rangle_\lambda d\lambda d\lambda' \geqslant 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}_1 := \left\{\varphi\colon \int\limits_\Lambda \|\varphi(\lambda)\|_\lambda d\lambda < \infty\right\}$. Заметим, что положительная форма $P(\varphi, \varphi)$ может не быть замкнутой, т. е. связанной с каким-либо самосопряженным оператором. Для таких ядер однозначно с точностью до эквивалентности определяется диагональное значение $P(\lambda, \lambda)$ (см. [44]). Обозначим $\widehat{1}_B(\lambda) := \int\limits_B \lambda(g)dg$, где dg – мера Хаара в G.

Теорема 2.3.3. *Соотношение*

$$\langle\varphi|M(B)\varphi\rangle = \int\limits_B P(V_g^*\varphi, V_g^*\varphi)dg \tag{2.37}$$

$$= \int\limits_\Lambda\int\limits_\Lambda \langle\varphi(\lambda)|P(\lambda, \lambda')\varphi(\lambda')\rangle_\lambda \widehat{1}_B(\lambda - \lambda')d\lambda d\lambda',$$

где B пробегает компактные подмножества в G, а $\varphi \in \mathcal{H}_1$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между ковариантными разложениями единицы в $\mathcal{H}$ и квадратичными формами $P(\varphi, \varphi)$ на $\mathcal{H}_1$, заданными положительно определенными ядрами $\{P(\lambda, \lambda')\}$, такими что $P(\lambda, \lambda) = I_\lambda$ (единичный оператор в $\mathcal{H}(\lambda)$).

Эта теорема сводит вопрос об описании множества $\mathrm{Extr}\, M^{G,V}(G)$ к нахождению крайних точек выпуклого множества положительно определенных ядер $\{P(\lambda, \lambda')\}$, удовлетворяющих условию $P(\lambda, \lambda) = I_\lambda$. В полном объеме эта задача не решена даже для конечного Λ. Можно, однако, выделить подкласс множества $\mathrm{Extr}\, \mathfrak{M}^G(G, V)$, существенный для квантовомеханических приложений.

Для простоты ограничимся далее случаем, когда $\dim \mathcal{H}(\lambda) = \text{const}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Обозначим $\mathfrak{M}_c^G(G, V)$ класс ковариантных разложений единицы, ядра которых удовлетворяют соотношению

$$P(\lambda, \lambda')P(\lambda', \lambda'') = P(\lambda, \lambda'') \text{ для любого } \lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda.$$

Если $\Lambda = G$, то этот класс совпадает с $\mathfrak{M}_0^G(G, V)$, с другой стороны, $\mathfrak{M}_c^G(G, V) \subset \operatorname{Extr} \mathfrak{M}^G(G, V)$, причем совпадение имеет место, только если Λ состоит из двух точек. Все элементы $\mathfrak{M}_c^G(G, V)$ получаются друг из друга *калибровочными преобразованиями*

$$M'(B) = U^* M(B) U, \tag{2.38}$$

где $U = \int\limits_\Lambda \oplus U(\lambda)d\lambda$ — разложимый унитарный оператор в $\mathcal{H} = \int\limits_\Lambda \oplus \mathcal{H}(\lambda)d\lambda$.

Если реализовать $\mathcal{H}$ как $L^2_{\mathcal{K}}(\Lambda, d\lambda)$, где $\mathcal{K} \simeq \mathcal{H}(\lambda)$ для $\lambda \in \Lambda$, то в классе $\mathfrak{M}_c^G(G, V)$ выделяется разложение единицы M_c, определяемое ядром $P(\lambda, \lambda') = I_{\mathcal{K}}$ (единичный оператор в $\mathcal{K}$), для которого

$$\langle \psi | M_c(B) \varphi \rangle = \int\limits_\Lambda \int\limits_\Lambda \langle \psi(\lambda) | \varphi(\lambda') \rangle_{\mathcal{K}} \widehat{1}_B(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'. \tag{2.39}$$

Всякое $M \in \mathfrak{M}_c^G(G, V)$ имеет ядро вида $U(\lambda)^* U(\lambda')$, где $\{U(\lambda)\}$ — измеримое семейство унитарных операторов в $\mathcal{K}$.

2.3.5. Каноническая сопряженность в квантовой механике

Пусть x — одномерный параметр, так что $G = \mathcal{X}$ является вещественной прямой $\mathbb{R}$ (случай параметра сдвига) или единичной окружностью $\mathbb{T}$ (случай параметра поворота), и пусть $x \to V_x = e^{-ixA}$ — унитарное представление группы G в $\mathcal{H}$. Спектр Λ оператора A содержится в двойственной группе $\widehat{G}$, которая совпадает с $\mathbb{R}$ в случае $G = \mathbb{R}$ и с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$ в случае $G = \mathbb{T}$.

Условие ковариантности обобщенной наблюдаемой M имеет вид

$$V_x^* M(B) V_x = M(B - x) \text{ для } B \in \mathcal{B}(G), x \in G, \tag{2.40}$$

где $B - x := \{y; y + x \in B\}$, причем в случае $G = \mathbb{T}$ имеется в виду сложение по модулю 2π. Введем операторы

$$U_y := \int\limits_G e^{iyx} M(dx) \text{ для } y \in \widehat{G}. \tag{2.41}$$

Тогда (2.40) сводится к соотношению Вейля (см. п. 1.2.3, гл. 1)

$$U_y V_x = e^{ixy} V_x U_y \text{ для } x \in G, y \in \widehat{G}, \tag{2.42}$$

в котором, однако, операторы U_y, вообще говоря, не унитарны. В этом смысле обобщенная наблюдаемая M является канонически сопряженной к наблюдаемой A.

Для обобщенной канонической пары (A, M) имеет место соотношение неопределенностей [137]

$$\Delta_S^M(y) \cdot \mathbf{D}_S(A) \geqslant \frac{1}{4} \text{ для } y \in \widehat{G}, \tag{2.43}$$

где $\Delta_S^M(y) := y^{-2}(|\mathrm{Tr}\, SU_y|^{-2} - 1)$, $y \neq 0$ есть некоторая функциональная мера неопределенности ковариантной обобщенной наблюдаемой M в состоянии S. Если $G = \mathbb{R}$ и M имеет конечную дисперсию $\mathbf{D}_S(M)$, то $\lim_{y \to 0} \Delta_S^M(y) = \mathbf{D}_S(M)$, так что из (2.43) следует обобщение соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\mathbf{D}_S(M)\mathbf{D}_S(A) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Для параметров поворота ($G = \mathbb{T}$) дисперсия не является адекватной мерой неопределенности, и неравенство (2.43) следует рассматривать как окончательное. Различные формы соотношения неопределенностей для угловых переменных обсуждались в обзорах [91] и [17]. Следует отметить, что обобщенная наблюдаемая угла поворота существует всегда, поскольку условия предложения 2.3.1 из предыдущего раздела выполняются автоматически ($\widehat{G} = \mathbb{Z}$). С другой стороны, условия предложения 2.3.2 не могут быть выполнены, если $\dim \mathcal{H} < \infty$ (как для систем с конечным спином), и в этих случаях обычной наблюдаемой угла поворота не существует.

Наибольший интерес представляют ковариантные обобщенные наблюдаемые, имеющие минимальную неопределенность. Следующий результат описывает их в случае чистого начального состояния.

Теорема 2.3.4 ([137]). *Пусть $S = |\psi\rangle\langle\psi|$ — чистое состояние. Тогда*

$$\min_{M \in \mathfrak{M}^{\psi}(G,V)} \Delta_S^M(y) = y^{-2}\left(\left(\int_{\widehat{G}} \|\psi(y')\| \|\psi(y'+y)\| dy'\right)^{-2} - 1\right). \tag{2.44}$$

Минимум достигается на ковариантной наблюдаемой M^* класса $\mathfrak{M}_c^{\psi}(G,V)$, которая задается ядром $P^*(y, y')$, таким что

$$\frac{P^*(y,y')\psi(y')}{\|\psi(y')\|} = \frac{\psi(y)}{\|\psi(y)\|} \text{ для } y, y' \in \Lambda.$$

В частности, для $G = \mathbb{R}$, (2.44) влечет:

$$\min_{M \in \mathfrak{M}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R},V)} \mathbf{D}_S(M) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dy}\|\psi(y)\|\right)^2 dy, \tag{2.45}$$

где $\psi(y)$ — компоненты вектора ψ в представлении, диагонализующем оператор A. Величины (2.44), (2.45) дают внутреннюю меру неопределенности параметра x в состоянии S.

Таким образом, требование ковариантности и минимальной неопределенности (относительно чистых состояний) определяют канонически сопряженную обобщенную наблюдаемую с точностью до калибровочного преобразования (2.38). Следует отметить, что аналогичная степень произвола остается и в стандартной формулировке квантовой механики, поскольку в случае $\Lambda = \widehat{G}$ класс $\mathfrak{M}_c^G(G,V)$ совпадает с классом ковариантных наблюдаемых $\mathfrak{M}_0^G(G,V)$. Квантовомеханическое описание с этой точки зрения нестандартных канонических пар, таких как фаза – число квантов и время – энергия, приводится в [135], [136], [41].

Приведем краткое рассмотрение случая наблюдаемой времени.

Пример 2.3.1. Рассмотрим квантовую систему с положительным гамильтонианом H. Представление $t \to V_t := e^{iHt/\hbar}$ группы временных сдвигов не удовлетворяет условиям предложения 2.3.2 предыдущего пункта, поскольку $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$. Поэтому ковариантной наблюдаемой временного сдвига не существует. Предположим для простоты, что $\Lambda = \mathbb{R}_+$ и что спектр H однороден (т. е. имеет постоянную кратность для почти всех $\lambda \in \Lambda$). Тогда H унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}_+)$ квадратично интегрируемых функций $\psi = [\psi(\lambda)]$ на $\mathbb{R}_+$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$. Ковариантные обобщенные наблюдаемые класса $\mathfrak{M}_c^{\mathbb{R}}(\mathbb{R},V)$ с точностью до калибровочного преобразования (2.38) эквивалентны наблюдаемой M_c, определяемой соотношением (2.39), т. е.

$$\langle\psi|M_c(B)\varphi\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}_+\mathbb{R}_-} \langle\psi(\lambda)|\varphi(\lambda')\rangle_{\mathcal{K}} \int\limits_B e^{-i(\lambda'-\lambda)\tau}\frac{d\tau}{2\pi} d\lambda d\lambda' \tag{2.46}$$

Оператор (2.41) задается как

$$U_y = \begin{cases} P_y;\ y \geqslant 0, \\ P_y^*;\ y < 0, \end{cases}$$

где $\{P_y\}$ – сжимающая полугруппа односторонних сдвигов в $L^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}_+)$:

$$P_y\psi(\lambda) = \psi(\lambda + y); \quad y \geqslant 0.$$

Генератором этой полугруппы является iT, где T — максимальный симметричный (несамосопряженный) оператор

$$T = \frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda},$$

$$\mathcal{D}(T) = \left\{\psi; \psi \text{ абсолютно непрерывна}, \psi(0) = 0, \int\limits_{\mathbb{R}_+} \|\frac{d}{d\lambda}\psi(\lambda)\|^2_{\mathcal{K}} d\lambda < \infty\right\}.$$

Разложение единицы M_c является обобщенной спектральной мерой в смысле [3].

Минимальное расширение Наймарка разложения единицы M_c в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = L^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ получается заменой в (2.46) $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_+$ и является спектральной мерой самосопряженного оператора $i^{-1}\frac{d}{d\lambda}$ в $L^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$.

Для свободной частицы массы m для вычисления оператора T лучше использовать импульсное, а не энергетическое представление, что дает

$$T = m\sum_{j=1}^{3}\frac{P_j}{|P|^2} \circ Q_j$$

с максимальной областью, в которой $\|T\psi\| < \infty$ [135]. Это согласуется с выражением, используемым в теории рассеяния для оценки времени соударения.

2.3.6. Локализуемость

Пусть W — унитарное представление группы, описывающей кинематику данной квантовой системы (универсальной накрывающей группы Галилея в нерелятивистском или группы Пуанкаре в релятивистском случае) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и пусть U — ограничение W на универсальную накрывающую G группы эвклидовых преобразований $g : x \to Ax + b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Система называется *локализуемой по Вайтману*, если в $\mathcal{H}$ существует ортогональное разложение единицы E на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ борелевских подмножеств координатного пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющее условию эвклидовой ковариантности

$$U_g^* E(B) U_g = E(g^{-1}B) \text{ для } g \in G, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3).$$

При этом условии для любой области $B \subset \mathbb{R}^3$ найдется вектор состояния ψ, такой что $\langle\psi|E(B)\psi\rangle = 1$, т.е. вероятность обнаружения системы в области B равна 1. Для локализуемой системы определены совместные наблюдаемые координат

$$Q_j = \iiint x_j E(dx_1 dx_2 dx_3); \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.47}$$

ковариантные относительно эвклидовых преобразований.

Используя то обстоятельство, что (U, E) — система импримитивности, можно доказать, что локализуемыми по Вайтману являются все массивные частицы и релятивистские безмассовые частицы с нулевой спиральностью. Безмассовые частицы с ненулевой спиральностью (фотон, нейтрино) оказываются нелокализуемыми [225]. Такой вывод не согласуется с экспериментальной локализуемостью фотона; более того, как показал Хегерфельдт (см., например, [65]), такое понятие локализуемости приводит к противоречию с требованием причинности в релятивистской динамике.

Эти трудности снимаются, если в определении локализуемости допускаются произвольные разложения единицы. Неортогональное разложение единицы M, описывающее локализацию фотона, было приведено, в частности в работах Крауса [224] и автора [136]. Полная классификация соответствующих обобщенных систем импримитивности при дополнительном условии ковариантности относительно преобразования подобия, включающая характеризацию крайних точек, дана в [92]. Релятивистские безмассовые частицы оказываются приближенно локализуемыми в том смысле, что $\|M(B)\| = \sup_{\|\psi\|=1} \langle\psi|M(B)\psi\rangle = 1$ для любой области $B \subset \mathbb{R}^3$. Наблюдаемые координат, определенные соотношениями типа (2.47), являются самосопряженными, но не перестановочными операторами и поэтому не имеют совместной спектральной меры.

В ряде работ, обзор которых имеется в статьях [65], развивалась идея стохастической локализуемости в фазовом пространстве. Результаты этих работ также указывают на то, что обобщенная статистическая модель квантовой механики дает возможность по крайней мере смягчить известные противоречия между релятивистской инвариантностью и нелокальностью квантовомеханического описания. Однако все же излагаемая теория квантового измерения имеет в существенном нерелятивистский характер, и построение последовательной релятивистской теории сталкивается с до сих пор не преодоленными трудностями.

3. Эволюция открытой системы

3.1. Преобразования квантовых состояний и наблюдаемых

Динамика изолированной квантовой системы, описываемая однопараметрической группой унитарных операторов, обратима во времени. Эволюция открытой системы, подверженной внешним воздействиям, будь то процесс установления равновесия с окружением или взаимодействие с измерительным прибором, обнаруживает черты необратимости. В математическом плане такие необратимые изменения описываются вполне положительными отображениями.

3.1.1. Вполне положительные отображения

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — некоторая *C^*-алгебра* операторов, т. е. подпространство $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, замкнутое относительно алгебраических операций, инволюции и перехода к пределу по операторной норме (см. [30], [88]). Обозначим $\mathfrak{M}_n$ алгебру комплексных $n \times n$-матриц. Линейное отображение $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ — гильбертово пространство, называется *положительным*, если из $X \in \mathfrak{A}$, $X \geqslant 0$, следует $\Phi[X] \geqslant 0$, и *вполне положительным*, если для всех $n \geqslant 1$ линейное отображение Φ_n из C^*-алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}_n$ в C^*-алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathfrak{M}_n$, определяемое формулой $\Phi_n[X \otimes Y] := \Phi_n[X] \otimes Y$, является положительным. Другими словами, для любой матрицы $(X_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ с элементами $X_{jk} \in \mathfrak{A}$, положительно определенной в том смысле, что $\sum\limits_{j,k=1}^{n} \langle \phi_j | X_{jk} \phi_k \rangle \geqslant 0$ для любого семейства $\{\phi_j\} \subset \mathcal{H}$, матрица $[\Phi(X_{jk})]_{j,k=1,\dots,n}$ также является положительно определенной. Еще одно эквивалентное определение: для любых конечных наборов $\{X_j\} \subset \mathfrak{A}$ и $\{\psi_j\} \subset \mathcal{K}$

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi[X_j^* X_k] \psi_k \rangle \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Для положительных отображений имеет место *неравенство Кэдисона–Шварца*:

$$\Phi[X]^*\Phi[X] \leqslant \|\Phi\|\Phi[X^*X] \tag{3.2}$$

для всех $X \in \mathfrak{A}$, таких что $X^*X = XX^*$ (такие операторы называются *нормальными*). Если Φ вполне положительно, то это неравенство выполняется для всех $X \in \mathfrak{A}$. Пример положительного, но не вполне положительного отображения (связанного с обращением времени, см. п. 1.2.1, гл. 1) — транспонирование в $\mathfrak{M}_n$. Если Φ положительно, а $\mathfrak{A}$ либо $\Phi[\mathfrak{A}]$ коммутативны, то Φ вполне положительно. Таким образом, свойство полной положительности проявляется лишь в некоммутативной ситуации.

Отображение $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ называется **-гомоморфизмом*, если оно сохраняет алгебраические операции и инволюцию.

Теорема 3.1.1 (Стрейнспринг). *Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра с единицей и пусть $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ — линейное отображение. Отображение Φ вполне положительно тогда и только тогда, когда оно допускает представление*

$$\Phi[X] = V^*\pi[X]V, \tag{3.3}$$

*где V — ограниченное линейное отображение из $\mathcal{K}$ в некоторое гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{K}}$, а π — *-гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{K}})$.*

Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное представление (3.3), характеризующееся свойством: подпространство $\{\pi[X]V\psi : X \in \mathfrak{A}, \psi \in \mathcal{K}\}$ плотно в $\tilde{\mathcal{K}}$.

Доказательство прямого утверждения представляет собой обобщение *конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС)*, которая соответствует случаю положительного линейного функционала на $\mathfrak{A}$ (т. е. $\dim\mathcal{K} = 1$) [30], [88]. На алгебраическом тензорном произведении $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{K}$ определяется (псевдо-)скалярное произведение, такое что

$$\langle X \otimes \varphi | Y \otimes \psi\rangle = \langle\varphi|\Phi[X^*Y]\psi\rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{для } X, Y \in \mathfrak{A}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{K}.$$

Неотрицательность скалярного квадрата следует из (3.1). Пусть $\tilde{\mathcal{K}}$ — гильбертово пространство, получающееся в результате факторизации и пополнения $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{H}$ по этому скалярному произведению. Соотношения

$$\pi[X](Y \otimes \psi) = XY \otimes \psi$$
$$V\varphi = I \otimes \varphi$$

определяют в $\tilde{\mathcal{K}}$ объекты V и π, удовлетворяющие соотношению (3.3).

Примечание 3.1.1. Если $\mathcal{X}$ — метризуемое компактное множество и M — разложение единицы в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$ на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, то отображение

$$f \to \int_{\mathcal{X}} f(x)M(dx) \text{ для } f \in \mathrm{C}(\mathcal{X})$$

C^*-алгебры $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ непрерывных комплексных функций на $\mathcal{X}$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$ является (вполне) положительным. Теорема Стайнспринга в этом случае дает расширение Наймарка для M, поскольку $*$-гомоморфизм $\mathrm{C}(\mathcal{X})$ задается ортогональным разложением единицы.

Всякая алгебра фон Неймана $\mathfrak{B}$ является C^*-алгеброй с единицей. Положительное отображение Φ алгебры $\mathfrak{B}$ называется *нормальным*, если из $X_\alpha \uparrow X$ в $\mathfrak{B}$ следует $\Phi[X_\alpha] \uparrow \Phi[X]$.

Следствие 3.1.1 ([166]). *Всякое нормальное вполне положительное отображение $\Phi : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ имеет вид*

$$\Phi[X] = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^* X V_n, \tag{3.4}$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n^* V_n$ сходится сильно в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство.

Если Φ нормально, то представление π в формуле (3.3) можно также считать нормальным. Известно, что всякое нормальное представление алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{K}}$ кратно единичному представлению, т. е. $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ и $\pi(X) = X \otimes I_0$, где $\mathcal{H}_0$ — другое гильбертово пространство, а I_0 — единичный оператор в $\mathcal{H}_0$ (см., например, [101], гл. 9). Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_0$, тогда $V\psi = \sum_{n=1}^{\infty} V_n\psi \otimes e_n$, и соотношение (3.3) переходит в (3.4).

Обзор свойств вполне положительных отображений имеется в статье Штермера в [112]. Андо и Чой [67] рассмотрели нелинейные вполне положительные отображения и установили для них обобщение теоремы Стайнспринга.

3.1.2. Операции, динамические отображения

Алгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ как банахово пространство является сопряженной к пространству ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ (см. п. 1.1.1, гл. 1). Если Ψ — линейное отображение в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, положительное в том смысле, что $\Psi[T] \geqslant 0$ при $T \geqslant 0$, то Ψ ограничено (см., например, [101], гл. 2) и поэтому имеет сопряженное отображение $\Phi = \Psi^* : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, которое является линейным положительным нормальным отображением; более того, всякое Φ с такими свойствами является сопряженным к некоторому Ψ. Если к тому же $\operatorname{Tr}\Psi[T] \leqslant \operatorname{Tr} T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, $T \geqslant 0$, то Ψ называется *операцией* (в пространстве состояний). В терминах сопряженных отображений, это равносильно тому, что $\Phi[I] \leqslant I$. Отображение Φ также называется операцией (в алгебре наблюдаемых).

В квантовой статистике операции описывают изменения состояний (или наблюдаемых) открытой системы в результате эволюции или макроскопического воздействия, включая отбор по какому-либо признаку (например, по результату измерения) в соответствующем статистическом ансамбле. Если S — оператор плотности исходного состояния, то число $\operatorname{Tr}\Psi[S]$ интерпретируется как доля отобранных представителей ансамбля, а $\frac{\Psi[S]}{\operatorname{Tr}\Psi[S]}$ — как оператор плотности, описывающий новое состояние отобранного ансамбля. Термин «операция» был введен в известной работе Хаага и Кастлера [129], посвященной обоснованию квантовой теории поля. Базирующийся на понятии операции аксиоматический подход к квантовой механике был развит Дэвисом и Льюисом, Людвигом и другими авторами (см., например, [101], [177], [167], [112], [89]).

В динамической теории особенно важны операции, переводящие состояния в состояния. Это выражается свойством $\operatorname{Tr}\Psi[T] = \operatorname{Tr} T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ или $\Phi[I] = I$, где $\Phi = \Psi^*$. Если вдобавок Φ вполне положительно, то Ψ (или Φ) называется *динамическим отображением*.[1] Из теоремы Вигнера (см. п. 1.2.1, гл. 1) следует, что обратимые динамические отображения описываются формулами

$$\Psi[T] = UTU^*, \quad \Phi[X] = U^*XU,$$

где U — унитарный оператор в $\mathcal{H}$ (если U антиунитарный, то Ψ и Φ антилинейны, и мы не будем рассматривать этот случай, относящийся к инверсии времени). В общем случае динамические отображения описывают необратимые эволюции и являются некоммутативным аналогом марковских отображений в теории вероятностей. Мерой обратимости может служить *относительная энтропия* квантовых состояний

$$\mathrm{H}(S_1; S_2) = \begin{cases} \operatorname{Tr} S_1(\log S_1 - \log S_2), & \text{если } \operatorname{supp} S_2 \supseteq \operatorname{supp} S_1, \\ +\infty, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

[1] На свойство полной положительности эволюции открытой системы было указано, в частности, в работах [166], [36], [175].

где supp S обозначает носитель оператора S. Подробнее об определении и свойствах относительной энтропии см. [229], [189]. Важнейшим свойством является *монотонность* или обобщенная H-теорема: для любого динамического отображения Ψ
$$\mathrm{H}(\Psi[S_1];\Psi[S_2]) \leqslant \mathrm{H}(S_1;S_2).$$
Эта теорема была доказана Линдбладом [174] при помощи фундаментального свойства *сильной субаддитивности* квантовой энтропии, установленного Либом и Рускаи (см. обзор [229]). Это свойство весьма нетривиально (хотя его классический аналог почти очевиден), и только недавно Лесьневский и Рускаи нашли прямое доказательство монотонности, не использующее сильную субаддитивность [171].

Согласно следствию из раздела 3.1.1, динамическое отображение допускает представление
$$\Psi[T] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n T V_n^*, \quad \Psi^*[X] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^* X V_n,$$
где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} V_n^* V_n = I$. Отсюда нетрудно получить:

Следствие 3.1.2. *Отображение $\Psi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ является динамическим тогда и только тогда, когда существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, состояние S_0 в $\mathcal{H}_0$ и унитарный оператор U в $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, такие что*
$$\Psi[S] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} U(S \otimes S_0)U^*,$$
где $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ — частичный след в $\mathcal{H}_0$.

Таким образом, динамическое отображение расширяется до обратимой эволюции составной системы, включающей исходную открытую систему и «окружение», причем возможность такого расширения обусловлена свойством полной положительности.

3.1.3. Условные ожидания

Так называются отображения $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, являющиеся идемпотентами ($\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$) с единичной нормой. Условное ожидание $\mathcal{E}$ отображает $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ на C^*-подалгебру $\mathfrak{A} = \{X : X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathcal{E}[X] = X\}$. Если $\mathcal{E}$ нормально, то $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Условное ожидание *согласовано* с состоянием S, если $\mathrm{Tr}\, S\mathcal{E}[X] = \mathrm{Tr}\, SX$ для $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Томияма показал, что условное ожидание является положительным отображением и обладает свойством
$$\mathcal{E}[XYZ] = X\mathcal{E}[Y]Z \quad \text{для } Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), X, Z \in \mathfrak{A}.$$

Это свойство включалось в первоначальное определение, данное Умегаки в [223]. На самом деле всякое условное ожидание вполне положительно.

Общий критерий существования нормального условного ожидания в алгебрах фон Неймана дал Такесаки [221]. В случае $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ этот критерий имеет следующую формулировку. Пусть S – невырожденный оператор плотности. Тогда с ним связана *модулярная группа автоморфизмов* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

$$\alpha_t[X] = S^{it} X S^{-it} \quad \text{для } X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), t \in \mathbb{R}.$$

Условное ожидание $\mathcal{E}$ на подалгебре $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, согласованное с состоянием S, существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно α_t. В частности, это выполняется, если $[S, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{A}$.

Пример нормального условного ожидания (усреднение по подсистеме составной системы) был дан в разделе 1.3.1, гл. 1. Приведем другой важный пример. Пусть $\{E_n\}$ – ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}$. Тогда

$$\mathcal{E}[X] := \sum_{n=1}^{\infty} E_n X E_n \tag{3.5}$$

является нормальным условным ожиданием на подалгебру $\mathfrak{A}$ операторов вида (3.5), согласованным с любым состоянием, оператор плотности которого принадлежит $\mathfrak{A}$. Алгебру $\mathfrak{A}$ можно описать также соотношением $\mathfrak{A} = \{E_n; n = 1, 2, \dots\}'$, где $\mathfrak{M}'$ обозначает *коммутант* подмножества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. совокупность всех ограниченных операторов, перестановочных с операторами из $\mathfrak{M}$.

Обзор результатов об условных ожиданиях на алгебрах фон Неймана имеется в статьях Чеккини в сборнике [203] и Петца в сборнике [205].

3.2. Пропускная способность квантового канала

3.2.1. Определение канала

Постановка задачи в теории информации в некотором смысле противоположна неравновесной статистической механике: использовать необратимое преобразование, такое как канал с шумом, для почти совершенной (обратимой) передачи данных. Теорема кодирования устанавливает фундаментальную характеристику канала (его пропускную способность), которая описывает экспоненциальную скорость роста максимального размера массива данных, который может быть таким образом передан при помощи n независимых использований канала [99], когда $n \to \infty$.

Информация кодируется состояниями физических систем. Пусть $\mathfrak{A}$ (соответственно, $\mathfrak{B}$) — C^*-алгебра с единицей, которую мы будем называть *входной* (соответственно, *выходной*) алгеброй. Обозначим $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ множество состояний на $\mathfrak{A}$. Обычно $\mathfrak{A}$ является алгеброй фон Неймана, а $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ — множеством нормальных состояний. Однако во многих важных приложениях $\mathfrak{A}$ конечномерно (что мы и будем предполагать для простоты в этом разделе), и топологические усложнения становятся несущественными. *Канал* — это аффинное отображение Φ из $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathfrak{B})$, линейное продолжение которого (также обозначаемое Φ) имеет вполне положительное сопряженное Φ^*. Отображение Φ в общем случае необратимо, представляя таким образом необратимую (зашумленную) эволюцию. В частности, если $\mathfrak{A}$ (соответственно, $\mathfrak{B}$) абелева, то Φ может описывать кодирование (соответственно, декодирование) классической информации; если обе алгебры абелевы, то Φ является классическим каналом. Проиллюстрируем эти определения простыми примерами.

Классические (c-c) *каналы.* Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — конечные множества (алфавиты), $\mathfrak{A} = C(\mathcal{X})$, $\mathfrak{B} = C(\mathcal{Y})$ — алгебры всех комплексных функций на $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Тогда любой канал описывается переходной вероятностью из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Квантовые (q-q) *каналы.* Пусть $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ — конечномерные гильбертовы пространства, а $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ — алгебры всех линейных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$. Тогда любой канал из $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathfrak{B})$ задается представлением Стайнспринга–Крауса

$$\Phi[S] = \sum_j V_j S V_j^*, \quad S \in \mathfrak{S}(\mathfrak{A}),$$

где $\sum\limits_j V_j^* V_j = I_{\mathcal{H}}$ (единичный оператор в $\mathcal{H}$). Особенно важными для приложений являются двоичные каналы, для которых $\dim\mathcal{H} = \dim\mathcal{K} = 2$ [83], и *гауссовские каналы* над алгебрами канонических перестановочных соотношений [153], [154].

C-q *каналы.* Пусть $\mathfrak{A} = C(\mathcal{X})$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{K})$, тогда канал из $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathfrak{B})$ задается соотношением

$$\Phi[P] = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x S_x.$$

где $P = \{p_x\}$ — распределение вероятностей (классическое состояние), а S_x — фиксированные операторы плотности в $\mathcal{K}$ (сигнальные состояния).

Q-c *каналы.* Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{B} = C(\mathcal{Y})$, тогда

$$\Phi[S] = \{\mathrm{Tr} S M_y\}_{y \in \mathcal{Y}},$$

где $\{M_y\}_{y\in\mathcal{Y}}$ — разложение единицы в $\mathcal{H}$, т. е. набор эрмитовых операторов, удовлетворяющих условиям $M_y \geqslant 0$, $\sum M_y = I_{\mathcal{H}}$. В частности, ортогональное разложение единицы, для которого $M_y^2 = M_y$, соответствует измерению стандартной наблюдаемой с исходами $y \in \mathcal{Y}$.

3.2.2. Многообразие классических пропускных способностей

Процесс передачи информации представляется диаграммой

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \quad \stackrel{\mathfrak{E}}{\to} \quad \stackrel{\Phi}{\to} \quad \stackrel{\mathfrak{D}}{\to} \quad \mathfrak{S}(\mathfrak{B}). \tag{3.6}$$

Здесь задан канал с шумом Φ, и целью дизайна информационной системы является выбор кодирования $\mathfrak{E}$ и декодирования $\mathfrak{D}$, который минимизирует искажение входного сигнала шумом канала. Обычно рассматривают асимптотическую ситуацию, когда задана последовательность каналов $\Phi^{\otimes n} = \Phi \otimes \stackrel{n}{\cdots} \otimes \Phi$, с $n \to \infty$ и фиксированным Φ, и вопрос состоит в том, как быстро растет количество информации, которое может быть передано асимптотически точно через $\Phi^{\otimes n}$. Такая модель называется *каналом без памяти.* Более общим образом, можно рассматривать (открытую) динамическую систему с эргодическим поведением в пределе, когда время наблюдения стремится к бесконечности.

Чтобы определить классическую пропускную способность канала Φ, мы полагаем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ в (3.6) абелевыми, а именно, $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_m = C(\{0,1\}^{\otimes m})$ и обозначаем

$$\lambda_c(m,n) = \inf_{\mathfrak{E}_n^m, \mathfrak{D}_n^m} \|\mathrm{Id}_2^{\otimes m} - \mathfrak{D}_n^m \circ \Phi^{\otimes n} \circ \mathfrak{E}_n^m\| \tag{3.7}$$

величину, которая измеряет отклонение преобразования: кодирование — канал – декодирование от идеального (тождественного) канала $\mathrm{Id}_2^{\otimes m}$: $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}_m) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{B}_m)$. Здесь инфимум берется по всевозможным кодированиям и декодированиям. Рассмотрим предел $n \to \infty$, когда отношение $m/n = R$ фиксировано. *Классическая пропускная способность* канала Φ определяется как

$$C(\Phi) = \sup\{R : \lim_{n\to\infty} \lambda_c(nR, n) = 0\}. \tag{3.8}$$

Чтобы определить квантовую пропускную способность, мы полагаем $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2^{\otimes m})$, где $\mathcal{H}_2$ — двумерное гильбертово пространство (q-бит), и вводим величину $\lambda_q(m,n)$, задаваемую формулой, аналогичной (3.7), где инфимум берется по соответствующим классам кодирований и декодирований. *Квантовая пропускная способность* $Q(\Phi)$ дается тогда формулой типа (3.8) с заменой $\lambda_c(m,n)$ на $\lambda_q(m,n)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а $\Phi : \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – квантовый канал. Согласно *теореме кодирования* для c-q каналов (см. п. 2.2.3 гл. 2),

$$C(\Phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\overline{C}(\Phi^{\otimes n}), \tag{3.9}$$

где

$$\overline{C}(\Phi) = \max\left\{H\left(\sum_x p_x \Phi(S_x)\right) - \sum_x p_x H(\Phi(S_x))\right\}, \tag{3.10}$$

$H(S) = -\mathrm{Tr}\, S \log S$ энтропия, а максимум берется по всем распределениям вероятностей $\{p_x\}$ и наборам операторов плотности $\{S_x\}$ в $\mathcal{H}$. До сих пор неизвестно, являются ли величины $\overline{C}(\Phi)$ аддитивными, т. е.

$$\overline{C}(\Phi^{\otimes n}) \overset{?}{=} n\overline{C}(\Phi)$$

для произвольного квантового канала Φ. Это справедливо для классических каналов, c-q, q-c каналов и для идеальных квантовых каналов. Дальнейшее обсуждение некоторых частных результатов можно найти в [1].

Аддитивность $\overline{C}(\Phi)$ имела бы важное физическое следствие – это означало бы, что использование сцепленных состояний не увеличивает пропускную способность квантового канала. С другой стороны, известно, что использование сцепленных измерений на выходе квантового канала в самом деле может увеличивать пропускную способность (см. п. 2.2.3 гл. 2). Более общим образом, следуя Беннету и Шору [83], можно определить четыре классические пропускные способности $C_{1,1}, C_{1,\infty}, C_{\infty,1}, C_{\infty,\infty}$ канала Φ, где первый (второй) индекс соответствует кодированиям (декодированиям), ∞ означает использование произвольных кодирований (декодирований), 1 означает ограничение кодированиями с несцепленными выходами (декодированиями с несцепленными входами) в определении (3.7). Тогда $C_{\infty,\infty} = C(\Phi)$, $C_{1,\infty} = \overline{C}(\Phi)$, а $C_{1,1}$ – «одношаговая» пропускная способность, которая представляет собой максимальную шенноновскую информацию, достижимую при использовании несцепленных входов и выходов. Соотношения между этими четырьмя пропускными способностями показаны на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} C_{\infty,1} & \overset{<}{\neq} & C_{\infty,\infty} \\ \| & & ? \\ C_{1,1} & \overset{<}{\neq} & C_{1,\infty} \end{array} \tag{3.11}$$

где символ $\overset{<}{\neq}$ означает «всегда меньше или равно, а иногда строго меньше». Равенство $C_{1,1} = C_{\infty,1}$ следует из соображений, аналогичных предложению 1 в [53]; верхнее неравенство $C_{\infty,1} \overset{<}{\neq} C_{\infty,\infty}$ следует из этого и из нижнего неравенства, которое выражает строгую супераддитивность по отношению к декодированиям.

Пример 3.2.1. Рассмотрим конфигурацию трех равноугольных векторов $|\psi_k\rangle, k = 1, 2, 3$ в двумерном пространстве, как показано на рис. 2.1 в п. 2.1.3 и соответствующий c-q канал

$$\Phi[P] = \sum_{k=1}^{3} p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \equiv \overline{S}_P.$$

Этот канал был введен в [37], где было показано, что для равномерного P максимальная шенноновская информация, достижимая через произвольные стандартные наблюдаемые (≈ 0.459 бит), *строго меньше*, чем максимум по всем декодированиям, задаваемым произвольными разложениями единицы (≈ 0.585 бит). Величина $C_{1,1} \approx 0.645$ бит достигается для распределения $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ и наблюдаемой, соответствующей ортонормированному базису, оптимальному для различения двух равновероятных состояний $|\psi_k\rangle, k = 1, 2$. С другой стороны, легко видеть, что $C_{\infty,\infty} (= C_{1,\infty}) = \max_P H(\overline{S}_P) = 1$, где максимум достигается на равномерном распределении. Как следует из (2.20) гл. 2, значение $C(\Phi) = 1$ бит является абсолютным максимумом пропускной способности двоичного квантового канала. Это дает пример канала с неортогональными состояниями, который тем не менее имеет эту максимальную пропускную способность.

3.2.3. Квантовая взаимная информация

Пусть S — входное состояние канала Φ. Имеются три важные энтропийные величины, относящиеся к паре (S, Φ), а именно, энтропия входного состояния $H(S)$, энтропия выходного состояния $H(\Phi[S])$ и обменная энтропия $H(S, \Phi)$. В то время как определение и значение первых двух энтропий понятно, третья величина представляет собой нечто более сложное. Чтобы определить ее, вводится *эталонная система*, которая описывается гильбертовым пространством $\mathcal{H}_R$, изоморфным гильбертову пространству $\mathcal{H}_Q = \mathcal{H}$ исходной системы. Тогда, в соответствии с п. 1.3.1, существует *очищение* состояния S, т. е. единичный вектор $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_R$, такой что

$$S = \mathrm{Tr}_R |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Обменная энтропия определяется тогда как

$$H(S,\Phi) = H\big((\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)(|\psi\rangle\langle\psi|)\big), \tag{3.12}$$

т. е. как энтропия выходного состояния расширенного канала $(\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)$, примененного ко входу, который является очищением состояния S. Это определение, как легко показать, не зависит от выбора очищения.

Из этих трех энтропий можно сформировать несколько информационных величин. По аналогии с классической теорией информации, можно определить *квантовую взаимную информацию* между системой R (которая идентична входу Q) и выходом системы Q' [62] как

$$I(S,\Phi) = H(S'_R) + H(S'_Q) - H(S'_{RQ}) = H(S) + H(\Phi(S)) - H(S,\Phi). \tag{3.13}$$

Величина $I(S,\Phi)$ имеет «естественные» свойства, в частности, положительность, вогнутость по отношению к входному состоянию S и аддитивность для произведения каналов, которые устанавливаются с помощью сильной субаддитивности [62]. Более того, непосредственно доказывается, что максимум $I(S,\Phi)$ относительно S равен *классической пропускной способности с использованием сцепленного состояния* $C_{ea}(\Phi)$ [84]. Это означает, что вход и выход канала Φ могут иметь общее сцепленное состояние, причем входная часть используется для кодирования классической информации, которая затем посылается на выход через канал Φ. Было доказано, что этот максимум аддитивен относительно произведения каналов, таким образом, одношаговое выражение даст полную (асимптотическую) пропускную способность.

В общем случае, $C_{ea}(\Phi) \geqslant C(\Phi)$, а для идеального канала $C_{ea}(\mathrm{Id}) = 2C(\mathrm{Id})$. Для неидеального канала отношение $C_{ea}(\Phi) : C(\Phi)$ может быть сколь угодно большим при достаточно малых значениях отношения сигнал – шум [84], [154]. Таким образом, хотя само по себе наличие сцепленности между входом и выходом не может быть использовано для передачи классической информации, оно служит катализатором, увеличивающим передачу информации через настоящий канал связи между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

3.2.4. Квантовая пропускная способность

Важной компонентой $I(S,\Phi)$ является *когерентная информация*

$$J(S,\Phi) = H(\Phi(S)) - H(S,\Phi). \tag{3.14}$$

Ее свойства не слишком хороши. Она может быть отрицательной, ее трудно максимизировать, и было показано, что ее максимум строго супераддитивен для некоторого произведения каналов. Однако есть основания предполагать, что эта величина имеет прямое отношение к квантовой пропускной способности канала Φ. Барнум, Нильсен и Шумахер [76] (см. также [77]), используя квантовое обобщение неравенства Фано, смогли доказать, что

$$Q(\Phi) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_S J(S, \Phi^{\otimes n}). \tag{3.15}$$

Существует гипотеза, что на самом деле здесь имеет место равенство. Если это верно, то (3.15) есть обратное утверждение теоремы кодирования для квантовой пропускной способности $Q(\Phi)$. В силу строгой супераддитивности когерентной информации предполагаемая полная квантовая пропускная способность может быть больше, чем одношаговое выражение, в отличие от классической пропускной способности с использованием сцепленного состояния.

Правую часть соотношения (3.15) трудно оценить даже для самых простых двоичных каналов. Полезная и аналитически более податливая граница дается неравенством Вернера

$$Q(\Phi) \leqslant \log \|\Phi \circ \Theta\|_{\mathrm{cb}},$$

где Θ – отображение транспозиции, а $\|\cdot\|_{\mathrm{cb}}$ обозначает норму полной ограниченности (см. [154], где для квантовых гауссовских каналов вычисляются и сравниваются как эта граница, так и энтропийные и информационные количества).

Одним из наиболее значительных достижений квантовой теории информации является открытие квантовых кодов, исправляющих ошибки, что позволяет безошибочно передавать квантовую информацию через каналы с шумом [83], [217].

3.3. Квантовые динамические полугруппы

3.3.1. Определение и примеры

Динамическая полугруппа является некоммутативным обобщением полугруппы переходных операторов в теории марковских случайных процессов. Она описывает необратимую эволюцию квантовой системы, определяемую только настоящим состоянием системы, без памяти о прошлом. В квантовой статистической механике динамические полугруппы возникают при рассмотрении открытых квантовых систем в пределе слабого или сингулярного взаимодействия [214]. Такие полугруппы удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые являются некоммутативными обобщениями уравнений Фоккера–Планка или Колмогорова–Чэпмена. Возможны два эквивалентных способа задания динамической полугруппы — в пространстве состояний и в алгебре наблюдаемых системы.

Квантовой динамической полугруппой в пространстве состояний называется семейство динамических отображений $\{\Psi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ банахова пространства ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, такое что

1. $\Psi_t \cdot \Psi_s = \Psi_{t+s}$ для $t, s \in \mathbb{R}_+$;
2. $\Psi_0 = \mathrm{Id}$ (тождественное отображение);
3. $\{\Psi_t\}$ *сильно непрерывна*, т. е. $\lim_{t\to 0}\|\Psi_t[T] - T\|_1 = 0$ для любого $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Из общей теории полугрупп в банаховом пространстве (см., например, [88], гл. 3) вытекает, что существует плотно определенный инфинитезимальный оператор (*генератор*)

$$\mathcal{K}[T] = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi_t[T] - T}{t}.$$

Если Ψ_t непрерывна по норме, т. е. $\lim\limits_{t\to 0}\|\Psi_t - \mathrm{Id}\| = 0$, то $\mathcal{K}$ всюду определенное ограниченное отображение $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Если S_0 — начальное состояние, то функция $t \to S_t := \Psi_t[S_0]$ удовлетворяет квантовому марковскому *управляющему уравнению*[2]

$$\frac{dS_t}{dt} = \mathcal{K}[S_t], \tag{3.16}$$

которое является некоммутативным аналогом прямого уравнения Колмогорова–Чэпмена. В физических приложениях динамические полугруппы и возникают как решения марковских управляющих уравнений.

Динамическая полугруппа в алгебре наблюдаемых $\{\Phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ — это полугруппа динамических отображений алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, такая что $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ и $\mathrm{w}^* - \lim_{t\to 0} \Phi_t[X] = X$ для любого $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Каждая такая полугруппа $\{\Phi_t\}$ сопряжена к полугруппе $\{\Psi_t\}$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ и наоборот. Полугруппа $\{\Psi_t\}$ непрерывна по норме тогда и только тогда, когда $\{\Phi_t\}$ является таковой. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{K}^*$ — генератор полугруппы $\{\Phi_t\}$. Семейство $X_t = \Phi_t[X_0]$ удовлетворяет обратному марковскому управляющему уравнению

$$\frac{dX_t}{dt} = \mathcal{L}[X_t]. \tag{3.17}$$

[2] Английский термин — master equation.

В случае непрерывности по норме прямое и обратное уравнения (3.16), (3.17) равносильны и имеют единственное решение, задаваемое соответствующими динамическими полугруппами. Это не обязательно верно для неограниченных генераторов (см. п. 3.3.3).

Пример 3.3.1 ([165]). Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, $g \to V_g$ – непрерывное унитарное представление G в $\mathcal{H}$, а $\{\mu_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ — непрерывная сверточная полугруппа вероятностных мер на G (см., например, [13]). Тогда соотношения

$$\Psi_t[S] = \int\limits_G V_g S V_g^* \mu_t(dg), \quad \Phi_t[X] = \int\limits_G V_g^* X V_g \mu_t(dg)$$

задают квантовые динамические полугруппы, соответственно, в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ и в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

В частности, пусть A — эрмитов оператор в $\mathcal{H}$. Тогда выражение

$$\Psi_t[S] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-iAx} S e^{iAx} dx,$$

соответствующее гауссовской сверточной полугруппе на $\mathbb{R}$, определяет динамическую полугруппу с генератором

$$\mathcal{K}[S] = ASA - A^2 \circ S. \tag{3.18}$$

Если U — унитарный оператор и $\lambda > 0$, то

$$\Psi_t[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} U^n S U^{*n}$$

является динамической полугруппой, отвечающей пуассоновской сверточной полугруппе на $\mathbb{Z}$, с генератором

$$\mathcal{K}[S] = \lambda(USU^* - S). \tag{3.19}$$

В обоих случаях мы имеем стохастическое представление

$$\Psi_t[S] = \mathbf{E}(e^{-iA\xi_t} S e^{iA\xi_t}),$$

где $\{\xi_t : t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский процесс в первом случае, а во втором — пуассоновский процесс с параметром интенсивности λ и с $U = e^{iA}$. Это примеры необратимых квантовых эволюций, возникающих при взаимодействии системы с классическими (гауссовским и пуассоновским) шумами.

Понятие динамической полугрупы было предложено Коссаковским [165] (см. также [101]), однако без ключевого условия полной положительности, которое позднее было введено Линдбладом [175]. Многие физические примеры укладываются в общую схему квазисвободных динамических полугрупп, которые являются квантовым аналогом гауссовских марковских полугрупп. В случае ККС такие полугруппы характеризуются условием, что они переводят гауссовские состояния в гауссовские (см. п. 1.2.4, гл. 1). В статистической механике квазисвободные полугруппы описывают необратимую динамику открытых Бозе или Ферми систем с квадратичным взаимодействием (см. обзоры [25], [66]).

3.3.2. Генератор динамической полугруппы

Требование полной положительности налагает нетривиальные ограничения на генератор полугруппы. Описание генераторов непрерывной по норме квантовой динамической группы было получено Линдбладом и, независимо, в случае $\dim \mathcal{H} < \infty$, Горини, Коссаковским и Сударшаном (см. [175], [110]).

Теорема 3.3.1 ([175]). *Для того, чтобы ограниченное отображение $\mathcal{K}$ пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ было генератором непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{K}[S] = -i[H, S] + \sum_{j=0}^{\infty}(L_j S L_j^* - L_j^* L_j \circ S), \tag{3.20}$$

где $H, L_j \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $H = H^*$ и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ сходится сильно.

Первое слагаемое в (3.20) отвечает обратимой эволюции с гамильтонианом H, а второе задает диссипативные члены. Оператор $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ связан со скоростью диссипации. Переходя к формулировке в алгебре наблюдаемых, имеем для генератора $\mathcal{L} = \mathcal{K}^*$ полугруппы $\Phi_t = \Psi_t^*$

$$\mathcal{L}[X] = i[H, X] + \sum_{j=1}^{\infty}(L_j^* X L_j - L_j^* L_j \circ X). \tag{3.21}$$

В основе доказательства теоремы лежат следующие два факта.

Предложение 3.3.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченное отображение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя, такое что $\mathfrak{L}[I] = 0$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $\exp t\mathfrak{L}$ *вполне положительно для всех* $t \in \mathbb{R}_+$;
2. $\mathfrak{L}[X^*] = \mathfrak{L}[X]^*$ *и* $\mathfrak{L}$ *условно вполне положительно, т. е. из* $\sum_j X_j\psi_j = 0$ *следует, что*
$$\sum_{j,k} \langle\psi_j|\mathfrak{L}[X_j^* X_k]\psi_k\rangle \geqslant 0.$$

Доказательство этого предложения, которое является некоммутативным аналогом теоремы Шенберга в теории условно положительно определенных функций, (см., например, [197], а также п. 4.2.4 в гл. 4), можно найти в [110]. Утверждение, что 1) $\Longrightarrow$ 2), получается дифференцированием $\exp t\mathfrak{L}$ при $t = 0$.

Теорема 3.3.2. *Ограниченное отображение $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ условно вполне положительно тогда и только тогда, когда*
$$\mathfrak{L}[X] = \Phi[X] - K^*X - XK, \tag{3.22}$$
где Φ — вполне положительное отображение и $K \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Имеется элементарное доказательство, которое может быть обобщено на случай неограниченных генераторов [146]. Зафиксируем единичный вектор $\psi_0 \in \mathcal{H}$ и определим оператор K формулой:
$$\langle\psi|K\phi\rangle = -\langle\psi_0|\mathfrak{L}[|\psi_0\rangle\langle\psi|]\phi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi_0|\mathfrak{L}[|\psi_0\rangle\langle\psi_0|]\psi_0\rangle\langle\psi|\phi\rangle.$$

Полагая $\Phi[X] = \mathfrak{L}[X] - K^*X - XK$, имеем
$$\sum_{j,k=1}^{n} \langle\psi_j|\Phi[X_j^* X_k]\psi_k\rangle = \sum_{j,k=0}^{n} \langle\psi_j|\mathfrak{L}[X_j^* X_k]\psi_k\rangle$$
для любых конечных наборов $\{\psi_j\}_{j=1,\dots,n} \in \mathcal{H}$; $\{X_j\}_{j=0,1,\dots,n} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $X_0 = -\sum_{j=1}^{n} X_j|\psi_j\rangle\langle\psi_0|$. Так как $\sum_{j=0}^{n} X_j\psi_j = 0$, а $\mathfrak{L}$ — условно вполне положительно, то Φ является вполне положительным.

Теперь представление (3.21) может быть получено из формулы (3.3) для вполне непрерывного по норме отображения, принимая во внимание условие нормировки $\mathfrak{L}[I] = 0$.

Доказательство формулы (3.22) в случае произвольной алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ может быть связано с когомологиями алгебры $\mathfrak{A}$ [98]. Конструкция типа ГНС сопоставляет вполне диссипативному отображению $\mathfrak{L}$ линейное отображение B алгебры $\mathfrak{A}$ в пространство ограниченных операторов из $\mathcal{H}$ в другое гильбертово пространство $\mathfrak{K}$, такое что

$$\mathfrak{L}[X^*Y] - X^*\mathfrak{L}[Y] - \mathfrak{L}[X^*]Y = B[X]^*B[Y].$$

Более того, отображение B оказывается *коциклом* для некоторого представления π алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$B[XY] = \pi[X]B[Y] + B[X]Y; \quad X, Y \in \mathfrak{A}.$$

Основную трудность представляет доказательство того, что всякий коцикл тривиален, т. е. имеет вид $B[X] = \pi[X]R - RX$, где R — ограниченный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$.

Физическую интерпретацию стандартного представления (3.20) можно получить из разложения Дайсона решения прямого марковского управляющего уравнения

$$\Psi_t[S] = \widehat{\Psi}_t[S] + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant t} \cdots \int \widehat{\Psi}_{t_1}[\Psi[\widehat{\Psi}_{t_2-t_1}\ldots\Psi[\widehat{\Psi}_{t-t_n}[S]]\ldots]]dt_1\ldots dt_n,$$

описывающего последовательность «спонтанных скачков» величины $\Psi[S] = \sum_j LSL_j^*$, происходящих в моменты времени $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ на фоне «релаксирующей эволюции», задаваемой полугруппой $\widehat{\Psi}_t[S] = \mathrm{e}^{-Kt}S\mathrm{e}^{-K^*t}$.

3.3.3. Неограниченные генераторы

Исследование динамических полугрупп без требования непрерывности по норме, будучи интерссным как с физической, так и с математической точек зрения, представляет собой трудную задачу. Генератор такой полугруппы является неограниченным, и область его определения может быть достаточно сложной и трудной для описания. Поэтому неясно, как следует обобщить свойство условной вполне положительности и охарактеризовать генератор полугруппы. Нетривиальной является и задача построения динамической полугруппы по формальному выражению типа (3.21), где H, L_j — неограниченные операторы. Дэвис [102] указал довольно общие условия, при которых с формальным выражением (3.20) ассоциируется сильно непрерывная полугруппа вполне положительных отображений $\{\Phi_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, такая что

$$\Phi_t[I] \leqslant I,$$

являющаяся аналогом феллеровского минимального решения в классической теории марковских процессов.

Более современный вероятностный подход [97], [146] переносит акцент с динамических полугрупп на марковские управляющие уравнения, которым они удовлетворяют. Пусть K, L_j — операторы, определенные на плотной области $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ и удовлетворяющие *условию консервативности*

$$\sum_j \|L_j\psi\|^2 = 2\Re\langle\psi|K\psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{3.23}$$

Из него, в частности, следует, что оператор K является *аккретивным*: $\Re\langle\psi|K\psi\rangle \geqslant 0$, $\psi \in \mathcal{D}$. Вводя *форму-генератор*

$$\mathcal{L}(\psi; X; \phi) = \sum_j \langle L_j\psi|XL_j\phi\rangle - \langle K\psi|X\phi\rangle - \langle\psi|XK\phi\rangle, \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}, \tag{3.24}$$

рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\Phi_t[X]|\psi\rangle = \mathcal{L}(\psi; \Phi_t[X]; \phi), \tag{3.25}$$

которое называется *обратным марковским управляющим уравнением*. Решением этого уравнения называется семейство $\Phi_t, t \geqslant 0$, нормальных вполне положительных отображений, равномерно ограниченное, *-слабо непрерывное по t и удовлетворяющее (3.25) для всех X и $\phi, \psi \in \mathcal{D}$.

Теорема 3.3.3. *Пусть K — максимальный аккретивный оператор и $\mathcal{D}$ — инвариантная область полугруппы $e^{-Kt}, t \geqslant 0$. Тогда существует минимальное решение Φ_t^∞ обратного уравнения* (3.25), *такое что для любого другого решения Φ_t разность $\Phi_t - \Phi_t^\infty$ вполне положительна; более того, Φ_t^∞ является полугруппой.*

Если минимальная полугруппа является *унитальной* в том смысле, $\Phi_t^\infty[I] = I$, то она является единственным решением уравнения (3.25).

При дополнительном условии, что операторы L_j^*, K^* определены на плотной области $\mathcal{D}^*$ и

$$\sum_j \|L_j^*\psi\|^2 < \infty, \quad \psi \in \mathcal{D}^*,$$

можно также рассмотреть *прямое марковское управляющее уравнение* для полугруппы Ψ_t в пространстве состояний:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\Psi_t[S]\phi\rangle = \tag{3.26}$$

$$= \sum_j \langle L_j^*\phi|\Psi_t[S]L_j^*\psi\rangle - \langle K^*\phi|\Psi_t[S]\psi\rangle - \langle\phi|\Psi_t[S]K^*\psi\rangle, \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}^*.$$

Теорема 3.3.4. *Пусть K^* максимальный аккретивный оператор, а $\mathcal{D}^*$ — инвариантная область полугруппы $e^{-K^*t}, t \geqslant 0$. Тогда существует минимальное решение Ψ_t^∞ обратного уравнения* (3.26) *и* $(\Psi_t^\infty)^* = \Phi_t^\infty$.

Пример 3.3.2. Пусть $\mathcal{H} = l^2$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых последовательностей $\{\psi_n;\, n \geqslant 0\}$ и пусть N, W — операторы «числа частиц» и «сдвига», определенные соотношениями

$$(N\psi)_n = n\psi_n, \quad (W\psi)_n = \psi_{n-1}$$

на плотной области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ последовательностей с конечным числом ненулевых коэффициентов ψ_n. Обозначая $S_t = \Psi_t[S]$, рассмотрим прямое уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle\phi|S_t\psi\rangle = \langle L(N)^*W^*\phi|S_tL(N)^*W^*\psi\rangle - \langle K(N)^*\phi|S_t\psi\rangle - \langle\phi|S_tK(N)^*\psi\rangle,$$

$\phi, \psi \in \mathcal{D}$, где $L(n), K(n)$ — комплексные функции, удовлетворяющие условию консервативности $|L(n)|^2 = 2\Re K(n) = \lambda_n$. Диагональные элементы $p_n(t)$; $n = 0, 1, \ldots$ оператора S_t удовлетворяют уравнению чистого рождения

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t),$$

единственное решение которого удовлетворяет соотношению $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие Феллера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty.$$

Это означает, что среднее полное время, которое система проводит в фазовом пространстве, бесконечно. Легко понять, что это есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы минимальное решение Φ_t^∞ соответствующего обратного уравнения было унитальным. Аналогичная ситуация имеет место для дифференциальных уравнений Колмогорова–Феллера в теории марковских процессов. Если Φ_t^∞ не унитально, то существует положительная вероятность «взрыва», т. е. выхода из фазового пространства за конечное время. Тогда решение обратного уравнения будет не единственным, и для его задания требуются дополнительные «граничные условия».

Дэвис дал достаточные условия унитальности, пригодные для класса моделей квантовой диффузии. Необходимым и достаточным условием, которое является некоммутативным аналогом классического критерия Феллера, является то, что уравнение

$$\mathcal{L}(\psi; X; \phi) + \langle\phi|X\psi\rangle = 0; \quad \phi, \psi \in \mathcal{D},$$

должно не иметь решений X, удовлетворяющих $0 \leqslant X \leqslant I$ [97]. Имеется более практичное общее достаточное условие, важной частью которого является свойство *гипердиссипативности*: существует строго положительный оператор A в $\mathcal{H}$, такой что

$$\sum_j \|A^{1/2}L_j\psi\|^2 - 2\Re\langle A\psi|K\psi\rangle \leqslant c\|A^{1/2}\psi\|^2, \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{3.27}$$

Заметим, что левую часть можно рассматривать как определение величины $\mathcal{L}(\psi; A; \phi)$ для неограниченного оператора A. Это свойство, введенное в [147], обобщает и улучшает условие из [97], соответствующее $A = \sum\limits_j L_j^* L_j$. Оно препятствует слишком быстрому выходу решений марковского управляющего уравнения на «границу», причем оператор A играет роль некоммутативной «функции Ляпунова».

Возвращаясь к проблеме стандартного представления, можно сделать следующие замечания. Тот факт, что форма-генератор имеет стандартное представление (3.24), влечет за собой возможность разложения генератора $\mathcal{K}$ на вполне положительную и релаксирующую компоненты только на подпространстве

$$\mathfrak{D} = \{S : S = |\psi\rangle\langle\phi|, \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}\}. \tag{3.28}$$

которое может не быть существенной областью определения для $\mathcal{K}$. Если имеет место взрыв, то эти компоненты не обязаны быть раздельно продолжаемыми на существенную область определения для $\mathcal{K}$. С другой стороны, генераторы различных динамических полугрупп, ограниченных на подпространство (3.28), могут приводить к одному и тому же стандартному выражению (3.24). Можно формализовать определение стандартного представления, сказав, что динамическая полугруппа является *стандартной*, если ее можно построить как минимальную полугруппу для некоторого марковского управляющего уравнения, т. е. вполне положительным возмущением релаксирующей полугруппы. В [51] было предложено возможное некоммутативное расширение «граничных условий» для консервативной формы-генератора в виде весьма сингулярных вполне положительных возмущений, обращающихся в нуль на плотной области (3.28). Используя такое возмущение, автор дал конструкцию нестандартной динамической полугруппы на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ [51], [52].

3.3.4. Ковариантные эволюции

Пусть $g \to V_g$ — представление в $\mathcal{H}$ группы G, описывающей симметрии открытой квантовой системы. Динамическая полугруппа $\{\Psi_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *ковариантной*, если

$$\Psi_t[V_g S V_g^*] = V_g \Psi_t[S] V_g^*$$

для всех $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, $g \in G$, $t \in \mathbb{R}_+$.

В конечномерном случае в [125] и в [2] получена достаточно полная классификация генераторов динамических полугрупп, ковариантных относительно групп пространственных симметрий.

Пример 3.3.3. Рассмотрим эволюцию (3.16) открытой системы со спином $\frac{1}{2}$, где $\dim \mathcal{H} = 2$ (см. п. 1.1.6, гл. 1), ковариантную относительно действия группы $SO(2)$, соответствующей аксиальной симметрии. Представление имеет вид $\psi \to e^{i\psi\sigma_3}$, где $\psi \in [0, 2\pi]$. Общий вид генератора ковариантной динамической полугруппы

$$\mathcal{L}[S] = -i[H, S] + \sum_{j=-1}^{i} c_j (L_j S L_j^* - L_j^* L_j \circ S), \tag{3.29}$$

где $c_j \geqslant 0$, $H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_3$, $L_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - i\sigma_2)$, $L_0 = \sigma_3$ и $L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + i\sigma_2)$. Пусть $S_t = S(\mathfrak{a}_t)$, где $\mathfrak{a}_t$ — вещественный трехмерный вектор, представляющий состояние. Тогда для вектора $\mathfrak{a}_t$ имеем уравнение Блоха

$$\frac{d\mathfrak{a}_t}{dt} = \begin{bmatrix} -T_\perp^{-1} & \omega_0 & 0 \\ -\omega & -T_\perp^1 & 0 \\ 0 & 0 & T_\parallel^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{a}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_\infty / T_\parallel \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

где $T_\perp^{-1} = 2c_0 + (c_1 + c_{-1})$, $T_\parallel^{-1} = 2(c_1 + c_{-1})$, $c_\infty = 2T_\parallel(c_1 - c_{-1})$. Уравнение (3.30) описывает релаксацию спина в аксиально-симметричном магнитном поле. Параметр $T_\parallel$ ($T_\perp$) имеет смысл времени продольной (поперечной) релаксации. Если $t \to +\infty$, то $\mathfrak{a}_t \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_\infty \end{bmatrix}$, так что S_t стремится к предельному состоянию

$$S_\infty = \frac{1}{2}(I + c_\infty \sigma_3).$$

Генератор (3.29) вполне диссипативен, что налагает нетривиальные ограничения на физические параметры эволюции. Именно, $2T_\perp^{-1} - T_\parallel^{-1} = 2c_0 \geqslant 0$, откуда $2T_\parallel \geqslant T_\perp$ [125].

В общем случае для генераторов непрерывных по норме ковариантных групп имеет место следующий результат [144].

Теорема 3.3.5. *Пусть $g \to V_g$ — непрерывное представление компактной группы G. Если $\mathfrak{L}$ — генератор непрерывной по норме ковариантной динамической полугруппы, то он имеет стандартное представление* (3.22), *в котором Φ является ковариантным вполне положительным отображением, а $[K, V_g] = 0$, $g \in G$.*

Этот результат справедлив для динамической полугруппы на произвольной алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$, а для $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ он может быть более подробно описан следующим образом: существует стандартное представление (3.21), в котором $[H, V_g] = 0$, $g \in G$, а L_j являются компонентами *тензорного оператора*, а именно, существует унитарное представление $g \to D_g$ во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$, такое что

$$V_g^* L_j V_g = \sum_k \langle e_j | D_g e_k \rangle L_k, \tag{3.31}$$

где $\{e_j\}$ — ортонормальный базис в $\mathcal{H}_0$. В случае $G = SO(2)$ можно получить генератор (3.29) уравнения Блоха.

Такое разложение на ковариантные компоненты может не выполняться для неограниченных генераторов и для некомпактных групп симметрий.

Пример 3.3.4. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ — пространство неприводимого представления ККС (1.24). Рассмотрим гауссовскую динамическую полугруппу

$$\Phi_t[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{iPx} X e^{iPx} dx, \tag{3.32}$$

которая ковариантна относительно представления $y \to e^{iyQ}$ аддитивной группы $G = \mathbb{R}$. Ее генератор

$$\mathcal{L}[X] = PXP - P^2 \circ X,$$

определенный на подходящей области, не допускает разложения на ковариантные компоненты.

Как объяснялось выше в разделе 3.3.3, случай неограниченных генераторов удобнее исследовать с помощью марковских управляющих уравнений, определяемых формами-генераторами. Предположим, что $g \to V_g$ — это представление группы симметрий G, и пусть $\mathcal{D}$ — плотная область в $\mathcal{H}$, инвариантная относительно V_g. Форма-генератор $\mathcal{L}(\psi; X; \phi)$; $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ является ковариантной, если $\mathcal{L}(\psi; V_g^* X V_g; \phi) = \mathcal{L}(V_g\psi; X; V_g\phi)$ для всех допустимых значений аргументов. В этом случае минимальное решение марковского управляющего уравнения является ковариантной динамической полугруппой. Обозначим

$$\mathfrak{A}_V = \{X : X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), V_g^* X V_g = X; g \in G\}$$

алгебру инвариантных элементов представления $g \to V_g$.

Теорема 3.3.6. *Минимальное решение Φ_t^∞ является унитальным тогда и только тогда, когда $X_t \equiv I$ — единственное решение задачи Коши*

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|X_t\phi\rangle = \mathcal{L}(\psi; X_t; \phi); \quad t > 0; \quad X_0 = I \tag{3.33}$$

в классе равномерно ограниченных слабо непрерывных функций со значениями в $\mathfrak{A}_V$.

В частности, если $\mathcal{L}(\psi; X; \phi) = 0$ для $X \in \mathfrak{A}_V$, то решение является единственным. Это случай, когда V_g неприводимо, поскольку тогда $\mathfrak{A}_V = \mathbb{C}I$. Генераторы ковариантных динамических полугрупп, действующие тождественно на алгебре инвариантных элементов, описаны в серии работ, обзор которых имеется в [109]. Однако это очень частный случай, а сформулированная теорема может быть особенно полезна в случае, когда $\mathfrak{A}_V$ — абелева алгебра, поскольку тогда ее условия по существу означают отсутствие взрыва для классического марковского процесса в $\mathfrak{A}_V$, порождаемого обратным уравнением Колмогорова (3.33).

Пример 3.3.5. Рассмотрим форму-генератор

$$\mathcal{L}(\psi; X; \phi) = \langle P\psi | XP\phi\rangle - \frac{1}{2}\langle P^2\psi | X\phi\rangle - \frac{1}{2}\langle\psi | XP^2\phi\rangle,$$

определенную на $\mathcal{D} = C_0(\mathbb{R}^2)$ и соответствуюшую формальному выражению (3.3.4). Алгебра инвариантных элементов $\mathfrak{A}_V$ представления $y \to e^{iyQ}$ в $L^2(\mathbb{R})$ является алгеброй ограниченных измеримых функций от Q. Задача Коши (3.33) сводится к

$$\frac{\partial}{\partial t}X_t(Q) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial Q^2}X_t(Q); \quad X_0(Q) = I,$$

а это является уравнением Колмогорова для винеровского процесса, имеющим единственное решение $X_t(Q) = 1$. Таким образом, (3.32) является единственным решением марковского управляющего уравнения.

Поскольку свойства симметрии представляют интерес как с физической, так и с математической точек зрения, важно изучить структуру марковских управляющих уравнений, ковариантных относительно данной группы симметрий. Эта задача была решена для широкого класса групп в [146], а для важного частного случая группы Галилея — в [149]. Было показано, что форма-генератор допускает стандартное представление, компоненты которого подчиняются уравнениям ковариантности, более общим, чем (3.31), поскольку содержат коцикл $\alpha(g)$ представления $g \to D_g$ в $\mathcal{H}_0$, т. е. решение уравнения $D_g\alpha(h) = \alpha(gh) - \alpha(g)$; $g, h \in G$. Возможность простого разложения ограниченного ковариантного генератора, описанная теоремой 3.3.5, связана с тем фактом, что ограниченный коцикл является когранней. Для многих локально компактных групп структура коциклов известна (см., например. [128], [197]). Это позволяет решать уравнения ковариантности, приводящие к некоторому представлению типа Леви–Хинчина для ковариантных форм-генераторов. В случае абелевой группы, ковариантная динамическая полугруппа является продолжением на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ классического марковского процесса с локально независимыми приращениями в алгебре инвариантных элементов представления, и отсутствие взрыва для этого процесса является условием единственности решения квантового обратного марковского управляющего уравнения.

3.3.5. Эргодические свойства

Если Φ — динамическое отображение, то семейство $\{\Phi^k;\ k = 0, 1, \ldots\}$ можно рассматривать как динамическую полугруппу с дискретным временем. Асимптотические свойства таких полугрупп при $k \to \infty$ являются нетривиальным обобщением эргодической теории для классических цепей Маркова. Свойство полной положительности используется при этом лишь постольку, поскольку оно влечет неравенство Кэдисона–Шварца (3.2). Эргодические теоремы для средних верны для положительных отображений.

В большинстве работ в той или иной форме присутствует предположение, что Φ имеет точное нормальное инвариантное состояние, т. е. состояние с невырожденным оператором плотности S_∞, такое что $\mathrm{Tr}\, S_\infty \Phi[X] = \mathrm{Tr}\, S_\infty X$ для всех $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Имеет место эргодическая теорема для средних:

$$w^* - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \Phi^k[X] = \mathcal{E}_\infty[X], \tag{3.34}$$

где $\mathcal{E}_\infty$ — условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{A}_\infty$ инвариантных элементов отображения Φ. В разной степени общности этот результат был получен Синаем, Морозовой и Ченцовым, Кюммерером и другими авторами (см. обзор [25]). Соотношение (3.34) можно рассматривать как обобщение закона больших чисел. Много внимания было уделено распространению теорем типа (3.34) на неограниченные операторы и изучению некоммутативного аналога сходимости почти наверное в алгебрах фон Неймана. Подробный обзор этих результатов приведен в [159].

Отображение Φ *неприводимо*, если не существует проектора $P \neq 0, I$, такого что $\Phi[P] = P$. Последнее равенство равносильно тому, что подалгебра операторов вида PXP; $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ инвариантна относительно Φ. Неприводимость эквивалентна единственности инвариантного состояния S_∞ и одномерности подалгебры $\mathfrak{A}_\infty$. Тогда $\mathcal{E}_\infty[X] = (\mathrm{Tr}\, S_\infty X)\cdot I$ в (3.34). Если Φ записать в виде (3.4), то для неприводимости необходимо и достаточно, чтобы $\{V_n;\, n = 1, 2, \ldots\}'' = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}')'$ есть алгебра фон Неймана, порожденная $\mathfrak{A}'$. Для неприводимого отображения имеет место аналог теоремы Перрона–Фробениуса, отвечающий разложению замкнутого класса состояний цепи Маркова на подклассы (см. обзор [25]). Случай $\dim \mathcal{H} < \infty$ детально рассмотрен также в книге Сарымсакова [29].

Пусть теперь $\{\Psi_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ — квантовая динамическая полугруппа, имеющая точное нормальное инвариантное состояние S_∞. Для нее также имеет место эргодическая теорема для средних (см. обзоры [25], [126]). Неприводимые полугруппы изучали Дэвис, Эванс, Шпон, Фриджерио (см. [101], [214]). Необходимое и достаточное условие неприводимости динамической полугруппы с генератором (3.21) состоит в том, что

$$\{H,\, L_j\, L_j^*;\ j = 1,\, 2,\, \ldots\}'' = \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Для неприводимых квантовых динамических полугрупп с непрерывным временем имеет место существенное усиление эргодической теоремы (см. [126]):

$$w^* - \lim_{t \to +\infty} \Phi_t[X] = (\mathrm{Tr}\, S_\infty X) \cdot I.$$

Этот факт не переносится на динамические полугруппы в произвольных алгебрах фон Неймана. Обобщения на этот случай других асимптотических свойств, спектральной теории и теоремы Перрона–Фробениуса подробно рассмотрены в обзоре Гроха [126].

Основные физические примеры эргодических динамических полугрупп относятся к классу квазисвободных групп, для которых эргодичность устанавливается непосредственно (см. обзор [25]).

3.3.6. Расширения динамических полугрупп

С точки зрения статистической механики закономерен вопрос – насколько понятие динамической полугруппы согласуется с более фундаментальным законом обратимой эволюции для изолированной системы. В физических приложениях управляющее уравнение (3.34) получается при рассмотрении взаимодействия квантовой системы с окружением в марковском приближении (пределы слабого или сингулярного взаимодействия). Строгое обоснование такого приближения требует достаточно громоздких оценок даже для простых моделей. Имеется ряд обзоров [214], [66], [125], [25], [58], [60], в которых эта проблема квантовой статистической механики получила всестороннее освещение, и лучшее, что здесь можно предложить — это обратиться к одному из этих обзоров.

В принципиальном плане представляет интерес также постановка обратной задачи о расширении динамической полугруппы до группы автоморфизмов, т. е. представление марковской динамики через обратимую динамику открытой системы, взаимодействующей с окружением. Возможность такого расширения обусловлена главным образом свойством полной положительности [102], [110].

Теорема 3.3.7. *Пусть* $\{\Psi_t\colon\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *— непрерывная по норме динамическая полугруппа в пространстве состояний* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. *Найдутся гильбертово пространство* $\mathcal{H}_0$, *состояние* S_0 *в* $\mathcal{H}_0$ *и сильно непрерывная группа унитарных операторов* $\{U_t\colon\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *в* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, *такие что*

$$\Psi_t[S] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} U_t (S \otimes S_0) U_t^*;\ S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

В п. 5.2.2 гл. 5 будет приведена явная конструкция расширения, допускающая прозрачное динамико-статистическое толкование. Следует отметить, что одна и та же динамическая полугруппа может иметь много неэквивалентных расширений (даже если требовать минимальность расширения). Дополнительный свет на структуру возможных расширений проливает понятие квантового случайного процесса. Согласно определению Аккарди, Фриджерио и Льюиса [58], *квантовый случайный процесс* задается тройкой $(\mathfrak{A}, (j_t), \varphi)$, где $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра, $(j_t; t \in \mathbb{R})$ — семейство *-гомоморфизмов некоторой фиксированной C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, а φ — состояние на $\mathfrak{A}$. При определенных условиях регулярности случайный процесс однозначно с точностью до эквивалентности восстанавливается по *корреляционным ядрам*

$$w_{t_1,\ldots,t_n}(X_1,\ldots,X_n;\ Y_1,\ldots,Y_n) = \\ = \varphi(j_{t_1}(X_1)^* \ldots j_{t_n}(X_n)^* j_{t_n}(Y_n) \ldots j_{t_1}(Y_1))$$

(некоммутативный аналог теоремы Колмогорова о продолжении для системы конечномерных распределений). В классическом случае $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — коммутативные алгебры измеримых ограниченных функций, соответственно, на пространстве элементарных исходов Ω и на фазовом пространстве системы E, (j_t) определяется семейством случайных величин на Ω со значениями в E, а φ — функционал математического ожидания, соответствующий вероятностной мере на Ω.

С квантовым случайным процессом связываются семейства подалгебр «прошлого», «настоящего» и «будущего»:

$$\mathfrak{A}_{t]} = \bigvee_{s \leqslant t} j_s(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}_t = j_t(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}_{[t} = \bigvee_{s \geqslant t} j_s(\mathfrak{B}).$$

Процесс называется *марковским*, если существует семейство условных ожиданий $(\mathcal{E}_{t]}, t \in \mathbb{R})$ из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_{t]}$, связанное с φ, такое что

$$\mathcal{E}_{t]}(\mathfrak{A}_{[t}) \subseteq \mathfrak{A}_t,$$

ковариантным марковским, если дополнительно существует группа *-автоморфизмов $(\alpha_t, t \in \mathbb{R})$ алгебры $\mathfrak{A}$, такая что $\alpha_t(\mathfrak{A}_{s]}) = \mathfrak{A}_{t+s]}$; t, $s \in \mathbb{R}$ и $\alpha_t \cdot \mathcal{E}_{s]} \cdot \alpha_{-t} = \mathcal{E}_{t+s]}$, и, наконец, *стационарным марковским*, если вдобавок φ инвариантно относительно (α_t). Для ковариантного марковского процесса соотношение

$$\Phi_t[X] = j_t^{-1} \mathcal{E}_{t]} j_t[X] \tag{3.35}$$

при выполнении некоторых условий непрерывности определяет динамическую полугруппу в $\mathfrak{B}$. Обратно, всякая непрерывная по норме квантовая динамическая полугруппа $\{\Phi_t\}$ расширяется до ковариантного марковского процесса, удовлетворяющего соотношению (3.35). Если же динамическая полугруппа удовлетворяет условию детального равновесия, то она расширяется до стационарного марковского квантового случайного процесса (Горини, Фриджерио). Условие *детального равновесия* относительно состояния S для полугруппы $\{\Phi_t\}$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ означает, что существует другая динамическая полугруппа $\{\Phi_t^+\}$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, такая что

$$\operatorname{Tr} S\Phi_t^+[X]Y = \operatorname{Tr} SX\Phi_t[Y]; \ X, Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}),$$

с генератором $\mathcal{L}^+$, удовлетворяющим соотношению

$$\mathcal{L}[X] - \mathcal{L}^+[X] = 2i[H, X],$$

где $H \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ (состояние S с необходимостью оказывается стационарным для Φ_t и Φ_t^+). До сих пор отсутствует полное описание динамических полугрупп, допускающих стационарные марковские расширения.

Фриджерио и Маассен [114] указали широкий класс полугрупп, не удовлетворяющих условию детального равновесия, но допускающих расширение с помощью «квантового пуассоновского процесса». Систематическое исследование стационарных марковских расширений предпринял Кюммерер [168]. Он установил прямую связь между эргодическими свойствами динамического отображения (неприводимость, слабое, сильное перемешивание) и его минимального стационарного марковского расширения. Кюммерер и Маассен [169] показали, что квантовая динамическая полугруппа в конечномерном гильбертовом пространстве допускает стационарное марковское расширение с помощью классического случайного процесса тогда и только тогда, когда ее генератор имеет вид

$$\mathcal{L}[X] = i[H, X] + \sum_s (A_s X A_s - A_s^2 \circ X) + \sum_r \lambda_r (U_r^* X U_r - X), \quad (3.36)$$

где A_s — эрмитовы, U_r — унитарные операторы, а $\lambda_r > 0$. Оператор (3.36) является суммой выражений (3.18) и (3.19), соответствующих гауссовским и пуассоновским полугруппам, а расширение получается с помощью случайного блуждания на группе автоморфизмов алгебры $\mathfrak{M}_n$. Аналогичные генераторы, но с неограниченными A_s, U_r и с заменой второй суммы на интеграл, появляются в исследованиях галилеево ковариантной динамической полугруппы [149].

Неоднозначность расширения динамической полугруппы до случайного процесса связана с тем, что знание полугруппы $\{\Phi_t\}$ позволяет восстановить лишь хронологически упорядоченные корреляционные ядра

$$W_{t,\dots,t_n}(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n) =$$
$$= \varphi_0(\Phi_{t_1}[X_1^* \Phi_{t_2-t_1}[\dots \Phi_{t_n-t_{n-1}}[X_n^* Y_n] \dots]Y_1]),$$

для которых $0 < t_1 < \ldots < t_n$ (здесь $\varphi_0 = \varphi \mid \mathfrak{A}_0$ — начальное состояние). В классической теории вероятностей корреляционные ядра зависят от времен $t_1, \ldots, t_n$ симметричным образом; известная конструкция Колмогорова–Даниэля однозначно сопоставляет полугруппе переходных вероятностей марковский процесс, являющийся ее минимальным расширением до группы временных сдвигов в пространстве траекторий. Определение квантового случайного процесса, основанное только на хронологически упорядоченных ядрах, было предложено Линдбладом [176], некоммутативные обобщения конструкции Колмогорова–Даниэля рассматривались Винсент-Смитом [226], Белавкиным [4], Соважо [210]. Алицки и Мессер установили существование и единственность решения класса *нелинейных* кинетических уравнений, в частности, квантового уравнения Больцмана:

$$\frac{dS_t}{dt} = \mathrm{Tr}_{(2)}\, W(S_t \otimes S_t)W^* - (\mathrm{Tr}\, S_t) \cdot S_t, \tag{3.37}$$

где W — унитарный «оператор парных столкновений» в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, а $\mathrm{Tr}_{(2)}$ — частичный след по второму множителю в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Отвечая на вопрос, поставленный Стритером в [205], Фриджерио и Аратари построили расширение «нелинейной квантовой динамической полугруппы», определенной уравнением (3.37) до унитарной эволюции в квантовой системе, состоящей из бесконечного числа частиц с парными взаимодействиями (квантовое обобщение «карикатуры Мак-Кина» классического уравнения Больцмана). Белавкин [5] дал конструкцию квантового ветвящегося процесса, в котором одночастичная динамика описывается полугруппой нелинейных вполне положительных отображений общего вида.

4. Последовательные и непрерывные процессы измерения

4.1. Статистика последовательных измерений

4.1.1. Понятие инструмента

Рассмотрим последовательное измерение двух величин X и Y, принимающих значения, соответственно, в множествах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, которое осуществляется над системой в состоянии S. Совместная вероятность того, что исход первого измерения x попадает в множество A, а исход второго y — в B (где $A \subset \mathcal{X}$, $B \subset \mathcal{Y}$) есть

$$\mu_S(A; B) = \mu_S(A)\mu_S(B \mid A), \tag{4.1}$$

где $\mu_S(A) = \mu_S(A; \mathcal{Y})$ — вероятность того, что $x \in A$, а $\mu_S(B \mid A)$ — соответствующая условная вероятность. Обозначим S_A состояние системы после первого измерения (оно зависит также от S, но не зависит от B). Тогда, согласно соотношению (2.4) из гл. 2,

$$\mu_S(B \mid A) = \operatorname{Tr} S_A M(B), \tag{4.2}$$

где M — разложение единицы, отвечающее наблюдаемой Y. Из (4.1), (4.2) видно, что функция множеств

$$\mathcal{M}(A)[S] = \mu_S(A) S_A$$

должна быть σ-аддитивной по A. Это мотивирует следующее определение [104].

Пусть $\mathcal{X}$ — множество с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Инструментом* (в пространстве состояний) со значениями в $\mathcal{X}$ называется функция множеств $\mathcal{M}$, заданная на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{M}(B)$ — операция для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;

2. $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ — динамическое отображение, т. е. $\operatorname{Tr}\mathcal{M}(\mathcal{X})[T] = \operatorname{Tr} T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$;
3. если $\{B_j\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ — конечное или счетное разбиение множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ на попарно непересекающиеся подмножества, то

$$\mathcal{M}(B)[T] = \sum_j \mathcal{M}(B_j)[T], \quad T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}),$$

   где ряд сходится по норме $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Постулируется, что если S оператор плотности, описывающий состояние системы перед измерением, то вероятность события, что исход измерения попадает в множество $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, равна

$$\mu_S(B) = \operatorname{Tr}\mathcal{M}(B)[S], \tag{4.3}$$

а состояние доли статистического ансамбля, в которой зарегистрировано это событие, дается оператором плотности

$$S_B = \mathcal{M}(B)[S] / \operatorname{Tr}\mathcal{M}(B)[S] \tag{4.4}$$

(при условии, что $\mu_S(B) > 0$). В частности, изменение состояния всего статистического ансамбля задается динамическим отображением $S \to \mathcal{M}(\mathcal{X})[S]$.

Переходя к сопряженным отображениям $\mathcal{N}(B) = \mathcal{M}(B)^*$, получаем формулировку в алгебре наблюдаемых: инструмент — это функция множеств $\mathcal{N}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, такая что

1. $\mathcal{N}(B)$ положительное нормальное отображение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;
2. $\mathcal{N}(\mathcal{X})[I] = I$;
3. если $\{B_j\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ — разбиение множества B, то $\mathcal{N}(B)[X] = \sum_j \mathcal{N}(B_j)[X]$; $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где ряд сходится $*$-слабо.

Каждому инструменту соответствует обобщенная наблюдаемая

$$M(B) = \mathcal{N}(B)[I]; \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{4.5}$$

такая что

$$\mu_S(B) = \operatorname{Tr} S M(B).$$

Озава [192] показал, что для любого инструмента $\mathcal{M}$ и любого состояния S существует семейство *апостериорных состояний* $\{S_x : x \in \mathcal{X}\}$, т. е. операторов плотности S_x, такое что

1. функция $x \to \operatorname{Tr} S_x Y$ μ_S-измерима для любого $Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$;
2. $\operatorname{Tr} \mathcal{M}(B)[S]Y = \int\limits_B (\operatorname{Tr} S_x Y)\mu_S(dx)$

Оператор плотности S_x описывает состояние доли статистического ансамбля, в которой исход измерения равен x, а величина $\operatorname{Tr} S_x Y = \mathbf{E}_S(Y|x)$ есть *апостериорное среднее* наблюдаемой Y при условии, что исход предыдущего измерения равен x.

Инструмент $\mathcal{M}$ (или $\mathcal{N}$) называется *вполне положительным*, если отображения $\mathcal{N}(\mathcal{B})$; $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, вполне положительны.

Пример 4.1.1. Пусть $A = \sum_i x_i E_i$ – вещественная наблюдаемая с чисто точечным спектром. Соотношение

$$\mathcal{M}(B)[S] = \sum_{i:x_i \in B} E_i S E_i \tag{4.6}$$

определяет вполне положительный инструмент со значениями в $\mathbb{R}$, соответствующий *проекционному постулату*, который описывает предельно точное измерение наблюдаемой A. Распределение вероятностей в состоянии S есть

$$\mu_S(B) = \sum_{i:x_i \in B} \operatorname{Tr} S E_i,$$

а апостериорные состояния даются формулой

$$S_i = E_i S E_i / \operatorname{Tr} S E_i. \tag{4.7}$$

Пример 4.1.2. Пусть A – вещественная наблюдаемая, а $p(x)$ – плотность распределения вероятностей на $\mathbb{R}$, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2 < \infty. \tag{4.8}$$

Вполне положительный инструмент

$$\mathcal{M}(B)[S] = \iint\limits_B \sqrt{p(xI - A)} S \sqrt{p(xI - A)} dx \tag{4.9}$$

описывает неточное измерение наблюдаемой A со случайной ошибкой, распределенной с плотностью $p(x)$. В самом деле, вероятность распределения исходов равна

$$\mu_S(B) = \int\limits_B \operatorname{Tr} S p(xI - A) dx = \iint\limits_B p(x - y) \mu_S^A(dy) dx,$$

где μ_S^A – распределение вероятностей наблюдаемой A в состоянии S. Апостериорные состояния суть

$$S_x = \frac{\sqrt{p(xI - A)}S\sqrt{p(xI - A)}}{\operatorname{Tr} Sp(xI - A)}.$$

Чем меньше σ^2, т. е. чем ближе $p(x)$ к δ-функции, тем точнее измерение наблюдаемой A. Для наблюдаемой A с чисто точечным спектром случай $\sigma^2 = 0$ соответствует примеру 4.1.1.

Для наблюдаемой с непрерывным спектром возникают принципиальные трудности, не позволяющие непосредственно обобщить проекционный постулат на этот случай (см. далее п. 4.1.4).

4.1.2. Представление вполне положительного инструмента

Многие реальные процессы укладываются в следующую схему косвенного измерения: рассматриваемая система взаимодействует с «пробной системой», после чего над пробной системой производится прямое измерение некоторой квантовой наблюдаемой. Пусть $\mathcal{H}_0$ – гильбертово пространство пробной системы, S_0 – оператор плотности, описывающий исходное состояние, U – унитарный оператор в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, задающий взаимодействие, а E_0 – ортогональное разложение единицы в $\mathcal{H}_0$, соответствующее наблюдаемой. Распределение вероятностей такого измерения задается формулой

$$\mu_S(B) = \operatorname{Tr} U(S \otimes S_0)U^*(I \otimes E_0(B)); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

где S – оператор плотности системы перед измерением. Оно может быть записано в виде (4.3), где

$$\mathcal{M}(B)[S] = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_0} U(S \otimes S_0)U^*(I \otimes E_0(B)) \tag{4.10}$$

вполне положительный инструмент в пространстве состояний системы $\mathcal{H}$ (здесь $\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ – частичный след по $\mathcal{H}_0$). Верно и обратное.

Теорема 4.1.1 ([191]). *Пусть $\mathcal{M}$ – вполне положительный инструмент со значениями в $\mathcal{X}$. Найдется гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, оператор плотности S_0 в $\mathcal{H}_0$, унитарный оператор U в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ и ортогональное разложение единицы E_0 в $\mathcal{H}_0$, такие что для любого оператора плотности S в $\mathcal{H}$ имеет место формула* (4.10).

В основе этой теоремы лежит следующая комбинация теоремы Наймарка и теоремы Стайнспринга: если $\mathbf{N}$ вполне положительный инструмент (в алгебре наблюдаемых), то существует гильбертово пространство $\mathcal{K}$, изометрический оператор V из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, ортогональное разложение единицы E в $\mathcal{K}$ и нормальный *-гомоморфизм π из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$, такие что $[E(B), \pi[X]] = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, и

$$\mathbf{N}(B)[X] = V^* E(B) \pi[X] V. \tag{4.11}$$

Пространство $\mathcal{K}$ превращается в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ с помощью рассуждений, которые были использованы при доказательстве следствия 3.1.1, гл. 3.

Пример 4.1.3. Рассмотрим вполне положительный инструмент (4.9), описывающий приближенное измерение квантовой наблюдаемой A. Пусть $\mathcal{H}_0 = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ — пространство представления Шредингера Q. P, которое будет описывать пробную систему. В качестве исходного состояния пробной системы возьмем $S_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, где $\psi_0(x) = \sqrt{p(x)}$. Пусть $U_t = \exp(-itH_{int})$ — унитарная эволюция в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, где

$$H_{int} = \lambda(A \otimes P), \tag{4.12}$$

и λ выбрана достаточно большой, чтобы пренебречь свободной динамикой системы. Наконец, пусть $E_Q(dx) = |x\rangle\langle x| dx$ — спектральная мера наблюдаемой координаты Q пробной системы. Тогда для инструмента (4.9) при $t = \frac{1}{\lambda}$ выполняется соотношение (4.10). Доказательство основывается на формуле

$$\langle x|e^{-i(A\otimes P)}\psi_0\rangle = \psi_0(xI - A),$$

которая следует из того факта, что $P = -i\frac{d}{dx}$.

Эта схема является обобщением процесса измерения фон Неймана для наблюдаемой A с чисто точечным спектром (см. [24], гл. IV, § 3). Она сводит приближенное измерение произвольной наблюдаемой A к измерению координаты пробной системы.

Важным примером вполне положительного инструмента является

$$\mathbf{N}(B)[X] = \int_B V(x)^* X V(x) \mu(dx),$$

где μ — σ-конечная мера на $\mathcal{X}$, а $V(x)$ — μ-измеримая функция на $\mathcal{X}$ со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такая что

$$\int_{\mathcal{X}} V(x)^* V(x) \mu(dx) = 1.$$

Соответствующий инструмент в пространстве состояний имеет вид

$$\mathcal{M}(B)[S] = \int\limits_B V(x)SV(x)^*\mu(dx). \tag{4.13}$$

Здесь распредсление вероятностей в состоянии S дается формулой

$$\mu_S(B) = \int\limits_B \operatorname{Tr} SV(x)^*V(x)\mu(dx), \tag{4.14}$$

а апостериорные состояния –

$$S_x = V(x)SV(x)^* / \operatorname{Tr} SV(x)^*V(x).$$

С помощью представления (4.11) можно показать, что этот пример является общим в том смысле, что любой вполне положительный инструмент можно представить как сумму членов типа (4.13), где, однако, $V(x)$ в общем случае являются нсограниченными операторами (см. п. 4.1.6).

4.1.3. Три уровня описания квантовых измерений

Теорема 4.1.1 имеет принципиальное значение, поскольку демонстрирует согласованность понятия (вполне положительного) инструмента со стандартным формализмом квантовой механики. Описание измерения в обобщенной статистической модели квантовой механики может быть осуществлено с различной степенью подробности. Имеются три основных уровня описания, каждому из которых отвечает определенный математический объект в гильбертовом пространстве системы.

1. Задана только статистика исходов измерения. Как показано в п. 2.1.2 главы 2, это эквивалентно заданию обобщенной наблюдаемой, т. е. некоторого разложения единицы в $\mathcal{H}$.
2. Кроме статистики, задан закон преобразования состояний в зависимости от исхода измерения. На этом уровне адекватное описание измерения дается понятием инструмента. Каждому инструменту по формуле (4.5) отвечает обобщенная наблюдаемая, однако это соответствие не взаимно однозначно, поскольку инструмент дает более подробное описание измерения, нежели наблюдаемая.
3. Задано динамическое описание взаимодействия системы с пробной системой. Этот уровень является еще более подробным: каждому инструменту по формуле (4.10) может соответствовать множество различных

процедур косвенного измерения. Детальность схемы косвенного измерения зависит от того, где в измерительном приборе проводится черта между «пробной системой» и «детектором», осуществляющим прямое измерение.

С точки зрения физических приложений представляет большой интерес вопрос о реализуемости той или иной теоретической схемы квантового измерения. Высказывалась мысль (см., например, статью «Проблема измерения» в сборнике [12]), что хотя квантовая механика правильно отражает некоторые черты микромира, далеко не все, что содержится в ее математической модели, может иметь свой прототип в реальности. Известны общие ограничения типа правил суперотбора (см., например, [21]), которые постулируют измеримость только наблюдаемых, совместимых с некоторой выделенной величиной типа заряда. В связи со схемой косвенного измерения возникают следующие вопросы:

1. Соответствует ли данному унитарному оператору U реальное квантово-механическое взаимодействие?
2. Соответствует ли данной наблюдаемой A реально измеримая физическая величина?

Подробное обсуждение таких вопросов выходит за рамки настоящего обзора, но некоторые комментарии здесь все же необходимы. В работах Ваневского [228] и Мельника [184] показано, что всякий унитарный оператор может быть получен из шредингеровской эволюции с некоторым потенциалом, зависящим от времени. Таким образом, первый вопрос сводится к реализуемости потенциалов в квантовой механике. С другой стороны, в п. 4.1.5 будет показано, что второй вопрос сводится к первому для потенциалов весьма специального вида. Практически, конечно, эти вопросы могут быть совсем не просты и требуют отдельного рассмотрения в каждой конкретной задаче измерения (см. в этой связи поучительное обсуждение «приемника Долинара» в [34] и в [43]).

4.1.4. Воспроизводимость

Пусть S — оператор плотности, а $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ — последовательность инструментов со значениями в измеримых пространствах $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$. Из постулатов (4.3), (4.4) следует, что величина

$$\mu_S^{\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \operatorname{Tr} \mathcal{M}_n(B_n)[\ldots \mathcal{M}_1(B_1)[S]\ldots], \quad (4.15)$$

где $B_j \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_j)$, есть вероятность получения исходов $x_j \in B_j$; $j = 1, \ldots, n$ в последовательности измерений, задаваемых инструментами $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ над системой, первоначально находившейся в состоянии S. Если $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ — стандартные измеримые пространства, то функция множеств (4.15), заданная на параллелепипедах $B_1 \times \ldots \times B_n$, однозначно продолжается до вероятностной меры на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{X}_1) \times \ldots \times \mathcal{B}(\mathcal{X}_n)$ (см. [101], § 42). Соотношения (4.15) можно записать также в виде

$$\mu_S^{\mathcal{M}_1, \ldots \mathcal{M}_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \operatorname{Tr} S\mathbf{N}_1(B_1)[\ldots \mathbf{N}_n(B_n)[I]\ldots]. \tag{4.16}$$

В случае инструментов, соответствующих проекционному постулату (4.6), соотношение (4.15) переходит в формулу Вигнера (см. статью «Проблема измерения» в сборнике [12]).

Рассмотрим повторное измерение, описываемое инструментом $\mathcal{M}$. Инструмент $\mathcal{M}$ называется *воспроизводимым*, если

$$\mathcal{M}(B_1)[\mathcal{M}(B_2)[S]] = \mathcal{M}(B_1 \cap B_2)[S]; \ B_1, \ B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \tag{4.17}$$

для любого оператора плотности S. Это свойство является математическим выражением *гипотезы воспроизводимости*, гласящей, что «если физическая величина дважды измеряется на системе $\mathcal{S}$, причем измерения следуют непосредственно одно за другим, то в обоих случаях получается одно и то же значение» (см. [24], гл. 4, п. 3).

Рассмотрим инструмент со счетным множеством исходов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и положим $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}(\{x_i\})$.

Предложение 4.1.1 ([191, 101]). *Всякий инструмент вида* (4.6) *обладает свойствами*:

1. $\mathcal{M}_i[\mathcal{M}_j[S]] = \delta_{ij}\mathcal{M}[S]$ (*воспроизводимость*);
2. *если* $\operatorname{Tr}\mathcal{M}_i[S] = 1$, то $\mathcal{M}_i[S] = S$ (*минимальность возмущения*);
3. *если* $X \geqslant 0$ *и* $\mathcal{M}_i^*[X] = 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots$, *то* $X = 0$ (*невырожденность*).

Обратно, всякий инструмент с этими свойствами имеет вид (4.6).

Таким образом, проекционный постулат (4.6) можно рассматривать как следствие ряда физически содержательных свойств соответствующего инструмента, включающих воспроизводимость. Как уже отмечалось, в случае непрерывного спектра возникают принципиальные трудности, которые в наиболее ясной форме выражаются следующей теоремой.

Теорема 4.1.2 ([191]). *Пусть $\mathcal{X}$ — стандартное измеримое пространство. Всякий инструмент со значениями в $\mathcal{X}$, обладающий свойством воспроизводимости* (4.17), *с необходимостью является дискретным, т. е. существует счетное подмножество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, такое что $\mathbf{M}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0)[S] = 0$ для всех S.*

Доказательство.

Рассмотрим точное состояние, задаваемое невырожденным оператором плотности S. Согласно п. 4.1.1, существует семейство апостериорных состояний $\{S_x\}$. Пусть $\{B_n\}$ — счетная подалгебра, порождающая $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Обозначая $M(B) = \mathbf{M}^*[I](B)$ и используя воспроизводимость, имеем

$$\int\limits_B \operatorname{Tr} S_x M(B_n) \mu_S(dx) = \operatorname{Tr} \mathbf{M}(B)[S] M(B_n) =$$

$$= \operatorname{Tr} \mathbf{M}(B \cap B_n)[S] = \int\limits_B 1_{B_n}(x) \mu_S(dx),$$

откуда $\operatorname{Tr} S_x M(B_n) = 1_{B_n}(x)$ для μ_S-почти всех $x \in \mathcal{X}$. Поэтому найдется подмножество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, такое что $\mathbf{M}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0)[S] = 0$ и

$$\operatorname{Tr} S_x M(B) = 1_B(x); \quad x \in \mathcal{X}_0, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Но тогда $\operatorname{Tr} S_x M(\{x\}) = 1$, т.е. $M(\{x\}) \neq 0$ и $\mu_S(\{x\}) \neq 0$ для $x \in \mathcal{X}_0$, откуда следует, что $\mathcal{X}_0$ счетно.

В примере 4.1.1 апостериорные состояния (4.7) таковы, что в этих состояниях (дискретная) наблюдаемая A с вероятностью 1 имеет определенное значение x_j. Причина трудностей с непрерывным спектром связана с тем, что (алгебраическое) состояние, в котором непрерывная наблюдаемая A имеет определенное значение, не может быть нормальным (т. е. задаваться каким-либо оператором плотности).

4.1.5. Измерения непрерывных наблюдаемых

В работах Шринивaза [215] и Озавы [193] указана возможность описания воспроизводимых измерений непрерывных наблюдаемых, использующая состояния и инструменты, не удовлетворяющие условию нормальности. Пусть $A = \int\limits_{\infty}^{\infty} x E_A(dx)$ — вещественная наблюдаемая и пусть η — какое-либо инвариантное среднее на пространстве $C(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Следуя [215], рассмотрим отображение $\mathcal{E}_\eta^A$ алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя, определяемое формулой

$$\operatorname{Tr} S\mathcal{E}_\eta^A[X] = \eta_y(\operatorname{Tr} Se^{iyA}Xe^{-iyA}),$$

где индекс y означает, что усреднение происходит по переменной y, и введем функцию множеств

$$\mathcal{N}_A(B)[X] = E_A(B)\mathcal{E}_\eta^A[X]; \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4.18}$$

Отображение $\mathcal{E}_\eta^A$ является условным ожиданием на коммутативную подалгебру $\{E_A(B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}' = \mathfrak{B}_A$, порожденную наблюдаемой A. Если A имеет чисто точечный спектр, то $\mathcal{E}_\eta^A$ есть нормальное условное ожиданис, задаваемое формулой (3.5) из гл. 3, а соотношение (4.18) совпадает с проекционным постулатом (4.6). В общем случае отображение $\mathcal{E}_\eta^A$ не нормальное, а функция множеств (4.18) обладает всеми свойствами воспроизводимого инструмента. кроме нормальности.

Вероятности последовательного измерения наблюдаемых $A_1, \ldots, A_n$ даются обобщением формулы (4.16):

$$\mu_S^{A_1,\ldots,A_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \operatorname{Tr} S\mathcal{N}_{A_1}(B_1)[\ldots\mathcal{N}_{A_n}(B_n)[I]\ldots].$$

Если $A_1, \ldots, A_n$ совместимы, то $\mathcal{E}_\eta^{A_j}[E_{A_k}(B)] = E_{A_k}(B)$, откуда

$$\mu_S^{A_1,\ldots,A_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \operatorname{Tr} SE_{A_1}(B_1)\ldots E_{A_n}(B_n), \tag{4.19}$$

т. е. распределение вероятностей последовательных точных измерений совместимых наблюдаемых совпадает с распределением точного совместного измерения этих наблюдаемых (см. п. 1.1.5, гл. 1) — результат. который подтверждает правомерность «обобщенного проекционного постулата» (4.18).

С другой стороны, если A_j несовместимы, то из-за ненормальности отображений $\mathcal{E}_\eta^{A_j}$, функция множеств (4.18) может оказаться лишь конечно аддитивной на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для того, чтобы восстановить σ-аддитивность, необходимо рассматривать распределение на компактификации вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. Например, после точного измерения наблюдаемой координаты Q система переходит в не нормальное состояние, в котором импульс P принимает значения $\pm\infty$ с положительными вероятностями [215].

Озава [193] построил процесс косвенного измерения, отвечающий обобщенному проекционному постулату (4.18) и разъяснил роль инвариантного среднего η. Это построение аналогично примеру 4.1.3, относящемуся к приближенному измерению A. Рассмотрим наблюдаемые Q, P во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R})$, которое будет описывать «пробную систему». Пользуясь теоремой Хана–Банаха о продолжении, можно показать, что для любого среднего η на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ существует (не нормальное) состояние E_η, такое что

$$E_\eta(f(Q)) = f(0), \quad E_\eta(g(P)) = \eta(g),$$

для любых $f, g \in C(\mathbb{R})$. Пусть $U_t = \exp(-itH_{int})$ — унитарная эволюция в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ с гамильтонианом взаимодействия (4.12). В [193] показано, что для любого (нормального) состояния S и для любого $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\operatorname{Tr} S\mathbf{N}_A(B)[X] = (S \otimes E_\eta)(U^*_{1/\lambda}(X \otimes E_Q(B))U_{1/\lambda}); \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Таким образом, пробная система, находящаяся в состоянии E_η с точно определенной координатой, в течение времени $1/\lambda$ взаимодействует с наблюдаемой системой согласно гамильтониану (4.20), после чего производится точное измерение координаты пробной системы.

Эта схема сводит измерение квантовой наблюдаемой A к измерению координаты пробной системы при условии реализуемости гамильтониана взаимодействия (4.20).

4.1.6. Стандартный квантовый предел

Для вполне положительного инструмента имеет место некоторая разновидность представления Стайнспринга–Крауса [152].

Теорема 4.1.3. *Пусть $\mathbf{N}$ — вполне положительный инструмент со значениями в $\mathcal{X}$. Тогда существуют положительная мера на $\mathcal{X}$, плотное подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ и семейство $\{V_k(x); k = 1, 2, \ldots; x \in \mathcal{X}\}$ операторов, определенных на $\mathcal{D}$, такие что*

$$\langle\psi|\mathbf{N}(B)[X]\psi\rangle = \int_B \sum_k \langle V_k(x)\psi|XV_k(x)\psi\rangle\mu(dx); \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{4.20}$$

Операторы $V_k(x)$ должны удовлетворять условию нормировки

$$\int_{\mathcal{X}} \|V_k(x)\psi\|^2\mu(dx) = \|\psi\|^2; \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{4.21}$$

Представление (4.20) получается из (4.11) использованием спектральной теоремы фон Неймана для спектральной меры $E(B) = I \otimes E_0(B)$ и разложением гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$ в прямой интеграл по отношению к положительной мере μ. Заметим, что операторы $V_k(x)$ в этом представлении не обязаны быть ограниченными или даже замкнутыми.

Пример 4.1.4. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ — пространство шредингеровского представления ККС, а $V(x) = |\psi_x\rangle\langle x|$, где ψ_x; $x \in \mathbb{R}$ — семейство единичных векторов в $\mathcal{H}$, и пусть $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ — подпространство непрерывных функций. Таким образом,

$$\|V(x)\psi\|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2, \quad \psi \in \mathcal{D},$$

так что (4.21) выполняется при $k = 1$, $\mu(dx) = dx$. Тогда соотношение (4.20) определяет вполне положительный инструмент, такой что

$$\mathcal{M}(dx)[S] = |\psi_x\rangle\langle x|S|x\rangle\langle\psi_x|dx, \tag{4.22}$$

с вероятностью исходов

$$\mu_S(dx) = \langle x|S|x\rangle dx = \operatorname{Tr} SE_Q(dx),$$

и апостериорными состояниями $\psi_x; x \in \mathbb{R}$. Этот инструмент описывает точное измерение Q, приводящее систему в состояние ψ_x, если исходом измерения было x. Операторы $V(x)$ не замкнутые, сопряженные к ним имеют тривиальную область определения. Следующее обсуждение показывает, что этот пример представляет не только математический интерес (более подробно см. [194]).

В течение продолжительного времени среди физиков, занимающихся проблемой обнаружения гравитационных волн, существовало представление, что повторные измерения координаты свободной массы, такие как гравитационная интерферометрия, ограничены так называемым стандартным квантовым пределом (СКП). Он состоит в том, что «при повторном измерении координаты свободной массы m с промежутком времени τ, результаты второго измерения не могут быть предсказаны с неопределенностью, меньшей чем $\sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}$. Стандартное «доказательство» использует соотношение неопределенностей Гейзенберга. Пусть $Q(t) = Q + Pt/m$ — координата массы m в момент t. Тогда утверждается, что

$$\mathbf{D}(Q(\tau)) = \mathbf{D}(Q) + \left(\frac{\tau}{m}\right)^2 \mathbf{D}(P) \geqslant 2\frac{\tau}{m}\sqrt{\mathbf{D}(Q)\mathbf{D}(P)} \geqslant \frac{\hbar\tau}{m}. \tag{4.23}$$

Однако первое равенство и, следовательно, СКП справедливы, только если Q и P некоррелированы. Юн показал, что может существовать произвольно точное первое измерение координаты, которое оставляет свободную массу в «сжимающем состоянии» с большой отрицательной корреляцией между Q и P. Тогда СКП (4.23) не выполняется и может быть нарушен вторым измерением.

Сжимающее состояние можно быть приготовлено следующим образом. Пусть $\psi_{x,0}$ – состояние с минимальной неопределенностью (1.30) с нулевой средней скоростью, а $U_t = \exp\left(-it\frac{P^2}{m}\right)$ – унитарная эволюция свободной массы. Тогда вектор состояния

$$\psi_x = U_{-\tau}\psi_{x,0} \tag{4.24}$$

эволюционирует за время τ в состояние $\psi_{x,0}$ с неопределенностью координаты σ^2, которая может быть сделана произвольно малой. Рассмотрим инструмент (4.20) с апостериорными состояниями (4.24); он описывает точное измерение Q, оставляя систему в сжимающем состоянии (4.24). Если второе измерение в момент τ будет произведено с достаточно высокой точностью, оно нарушит СКП (4.23).

Реализация этого инструмента через процесс измерения с гамильтонианом, квадратичным по каноническим переменным, описана в явном виде Озавой [194].

4.2. Процессы непрерывного измерения

4.2.1. Неразрушающие измерения

Рассмотрим изолированную квантовую систему, эволюция которой описывается группой унитарных операторов $\{U_t;\, t \in \mathbb{R}\}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\{A_{jt};\ j = 1,\ldots,m;\ t \in T\}$, где $T \subset \mathbb{R}$ – семейство вещественных наблюдаемых. Обозначим

$$A_j(t) = U_t^* A_{jt} U_t;\ t \in T \tag{4.25}$$

и предположим, что для любых моментов времени $t_1 < \ldots < t_n$ и любых $j_1,\ldots j_n$ наблюдаемые $A_{j_1}(t_1),\ldots,A_{j_n}(t_n)$ совместимы. Согласно формуле (4.19), последовательное точное измерение наблюдаемых $A_{j_1}(t_1),\ldots,A_{j_n}(t_n)$ $(j_k = 1,\ldots,m)$ имеет распределение вероятностей

$$\mu_S(B_1 \times \ldots \times B_n) = \operatorname{Tr} S E_{(t_1)}(B_1)\ldots E_{(t_n)}(B_n), \tag{4.26}$$

где $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ и $E_{(t_k)}$ – совместные спектральные меры наблюдаемых $A_j(t_k);\ j = 1,\ldots,m$.

Семейство вероятностных мер (4.26) при всевозможных $n = 1, 2, \ldots;$ $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ является согласованным. Используя теорему Колмогорова о продолжении, можно доказать, что существует единственное ортогональное разложение единицы E на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ — σ-алгебра цилиндрических множеств на пространстве траекторий $\mathbb{R}^T$, такое что

$$E(x(\cdot) : x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n) = E_{(t_1)}(B_1) \ldots E_{(t_n)}(B_n).$$

Оно описывает статистику непрерывного (по времени) точного измерения семейства совместимых наблюдаемых (4.25), в том смысле, что вероятность подмножества B в пространстве траекторий есть

$$\mu_S(x(\cdot) \in B) = \operatorname{Tr} SE(B).$$

В физической литературе подобные измерения получили название *неразрушающих* и привлекли внимание в связи с задачей обнаружений слабой силы (гравитационной волны), действующей на пробную систему [87], [201].

Пример 4.2.1. Квантовомеханический осциллятор массы m с частотой ω, возмущаемый скалярной силой $\varphi(t)$, описывается уравнениями

$$\dot{Q}(t) = m^{-1}P(t), \quad \dot{P}(t) = -m\omega^2 Q(t) + \varphi(t)I, \tag{4.27}$$

где $Q(0) = Q$, $P(0) = P$ — канонические наблюдаемые, т. е. $[Q, P] = iI$. Положим $A_{1t} = Q\cos\omega t - (P/m\omega)\sin\omega t$, так что

$$A_1(t) = Q(t)\cos\omega t - (P(t)/m\omega)\sin\omega t.$$

Из уравнения (4.27)

$$\dot{A}_1(t) = -(\varphi(t)/m\omega)\sin\omega t I, \tag{4.28}$$

поэтому наблюдаемые $A_1(t)$ совместимы при разных t, и возможно непрерывное неразрушающее измерение для семейства $\{A_1(t)\}$. Сила $\varphi(t)$ может быть определена по любой траектории из соотношения (4.28).

Аналогично, для $A_{2t} = P\cos\omega t + m\omega Q\sin\omega t$ получаем семейство совместимых наблюдаемых

$$A_2(t) = P(t)\cos\omega t + m\omega Q(t)\sin\omega t,$$

для которого $\dot{A}_2(t) = \varphi(t)\cos\omega t I$. Заметим, что $A_1(t)$ и $A_2(t)$ несовместимы, поскольку $[A_1(t), A_2(t)] = iI$. Действуя в духе п. 2.1.3, гл. 2, рассмотрим семейство совместимых наблюдаемых

$$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) \otimes I_0 - I \otimes Q_0; \quad \tilde{A}_2(t) = A_2(t) \otimes I_0 + I \otimes P_0 \tag{4.29}$$

в пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ (см. [141]). Сила $\varphi(t)$ определяется тогда из соотношения

$$\varphi(t) = \cos\omega t \widetilde{A}_2(t) - m\omega \sin\omega t \widetilde{A}_1(t).$$

4.2.2. «Квантовый парадокс Зенона»

Попытки рассмотрения непрерывных измерений несовместимых наблюдаемых, опирающиеся на проекционный постулат, приводят к парадоксальным выводам, в основе которых лежит следующий математический факт. Пусть H — самосопряженный оператор из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, а E — проектор. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (E\exp(itH/n)E)^n = E\exp(itEHE). \qquad (4.30)$$

Это следует из того, что $\|\exp(itH/n) - I - itH/n\| = o(1/n)$ и $E^2 = E$. Обобщение этого результата на случай неограниченного H является непростой задачей; некоторые условия были получены Фридманом в [113]. Его результаты включают случай, когда $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, $H = -\Delta/2m$ — гамильтониан свободной частицы в $\mathbb{R}^n$, а $E = 1_{\mathcal{D}}(\cdot)$ — индикатор ограниченной области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Рассмотрим свободную частицу, эволюционирующую на временном интервале $[0, t]$, и предположим, что в каждый момент времени tk/n, $k = 0, 1, \ldots, n$ производится точное измерение наблюдаемой E, описываемое проекционным постулатом (4.6). Если исход измерения равен 1, то это означает, что частица находится в области $\mathcal{D}$. Вероятность того, что во всех $n + 1$ измерениях получен исход 1, есть

$$\mu_S(1, \ldots, 1) = \mathrm{Tr}(E\exp(itH/n)E)^n S(E\exp(-itH/n)E)^n \qquad (4.31)$$

и при $n \to \infty$ в силу (4.30) стремится к

$$\mathrm{Tr}\, E\exp(itEHE)S_0\exp(-itEHE)E = \mathrm{Tr}\, S_0 E,$$

где S_0 — начальное состояние. Если в начальный момент частица находится в области $\mathcal{D}$, то вероятность (4.31) равна 1 независимо от эволюции, т. е. при непрерывном точном измерении местоположения частица никогда не покидает область $\mathcal{D}$ (см. также [101], § 7.4). Необычные физические следствия соотношения (4.30) были подробно рассмотрены в работе Мисры и Сударшана [185], где для них было предложено общее название «квантовый парадокс Зенона».

Причина парадокса состоит в том, что измерение, описываемое проекционным постулатом, переводя состояние системы в состояние, отвечающее точно определенному значению наблюдаемой, производит конечное изменение, на фоне которого эффект эволюции за время t/n является пренебрежимо малым при $n \to \infty$. Чтобы избежать этого и получить нетривиальный предельный процесс непрерывного измерения, включающий эволюцию, Баркиелли, Ланц и Проспери [69, 70] предложили рассматривать последовательность неточных измерений, точность которых убывает пропорционально корню квадратному из числа измерений n. Первоначально описание предельного процесса в частных случаях связывалось с фейнмановским интегралом по траекториям (ср. [23]), однако общая картина прямо основывается на идеях, изложенных в п. 4.1, в частности, на понятии инструмента. В работах автора [47], [140] было указано на параллель такого подхода с классическими предельными теоремами в схеме серий, причем предельный процесс непрерывного измерения оказывается некоммутативным аналогом процесса с независимыми приращениями. Подобно классическому случаю, все такие процессы описываются некоторой формулой типа Леви–Хинчина [50]. Квантовые случайные процессы в смысле Дэвиса [101] с этой точки зрения соответствуют сложному пуассоновскому процессу. Далее кратко излагаются результаты этих работ.

4.2.3. Предельная теорема для сверток инструментов

Для простоты ограничимся измерениями со значениями в $\mathbb{R}$ (существенно лишь, что пространство значений является абелевой локально-компактной группой). Пусть $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n$ — инструменты (в алгебре наблюдаемых) со значениями в $\mathbb{R}$. Существует единственный инструмент $\mathcal{N}$ со значениями с $\mathbb{R}^n$, такой что

$$\mathcal{N}(B_1 \times \ldots \times B_n)[X] = \mathcal{N}_1(B_1)[\ldots \mathcal{N}_n(B_n)[X] \ldots]; \; B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Свертка инструментов $\mathcal{N}_1, \ldots \mathcal{N}_n$ определяется соотношением

$$\mathcal{N}_1 * \ldots * \mathcal{N}_n(B)[X] = \mathcal{N}((x_1, \ldots, x_n) : x_1 + \ldots + x_n \in B); \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

и, согласно формуле (4.16), описывает статистику суммы исходов n повторных измерений, соответствующих инструментам $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n$. Инструмент $\mathcal{N}$ со значениями в $\mathbb{R}$ называется *безгранично-делимым*, если для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется инструмент $\mathcal{N}_{(n)}$, такой что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{(n)} * \ldots * \mathcal{N}_{(n)} = \mathcal{N}_{(n)}^{*n}$. Проблема непрерывного измерения оказывается тесно связанной с пределами n -кратных сверток вида $\mathbf{N}_{(n)}^{*n}$ при $n \to \infty$ и со структурой безгранично-делимых инструментов. Решение этих вопросов опирается на некоторое обобщение метода характеристических функций в теории вероятностей.

Обозначим $\mathfrak{F}_\sigma$ банахову алгебру *-слабо непрерывных линейных отображений $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя с произведением $\Phi \cdot \Psi[X] = \Phi[\Psi[X]]$. Единицей в этой алгебре является тождественное отображение, обозначаемое Id. Введем топологию τ в алгебре $\mathfrak{F}_\sigma$, определяемую семейством полунорм

$$\|\Phi\|_S = \sup_{\|X\| \leqslant 1} |\operatorname{Tr} S\Phi[X]|, \quad S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Характеристическая функция инструмента $\mathbf{N}$ определяется соотношением

$$\Phi(\lambda)[X] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mathbf{N}(d\lambda)[X], \tag{4.32}$$

где интеграл сходится в топологии τ. Функция $\Phi(\lambda)$ со значениями в $\mathfrak{F}_\sigma$ является характеристической функцией вполне положительного инструмента тогда и только тогда, когда

1. $\Phi(0)[I] = I$;
2. $\Phi(\lambda)$ τ-непрерывна в точке $\lambda = 0$;
3. $\Phi(\lambda)$ *положительно определена* в следующем смысле: для любых конечных наборов $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$, $\{X_j\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi(\lambda_k - \lambda_j)[X_j^* X_k] \psi_k \rangle \geqslant 0.$$

(Аналог теоремы Бохнера–Хинчина, сводящийся к ней в случае $\dim \mathcal{H} = 1$).

Характеристическая функция свертки $\mathbf{N}_1 * \ldots * \mathbf{N}_n$ есть поточечное произведение соответствующих характеристических функций $\Phi_1(\lambda) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(\lambda)$, поэтому n-кратная свертка $\mathbf{N}_{(n)}^{*n}$ имеет характеристическую функцию $\Phi_{(n)}(\lambda)^n$, где $\Phi_{(n)}(\lambda)$ — характеристическая функция инструмента $\mathbf{N}_{(n)}$. Распределение вероятностей $\mu_S^{(n)}$ суммы n повторных измерений, описываемых инструментом $\mathbf{N}_{(n)}$, определяется формулой

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_S^{(n)}(dx) = \operatorname{Tr} S\Phi_{(n)}(\lambda)^n [I].$$

Следующее утверждение является аналогом центральной предельной теоремы в схеме серий.

Предложение 4.2.1. *Пусть $\{\mathbf{N}_{(n)}\}$ — последовательность вполне положительных инструментов и пусть существует предел*

$$\tau - \lim_{n\to\infty} n(\Phi_{(n)}(\lambda) - \mathrm{Id}) = \mathcal{L}(\lambda). \tag{4.33}$$

Тогда свертка $\mathbf{N}_{(n)}^{*n}$ слабо сходится к безгранично-делимому инструменту $\mathbf{N}$ с характеристической функцией[1] $\exp\mathcal{L}(\lambda)$ *в том смысле, что*

$$\tau - \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{N}_{(n)}^{*n}(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{N}(dx)$$

для всех непрерывных ограниченных функций $f(x)$.

Заметим, что аналог классического условия асимптотической пренебрегаемости

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_{(n)}(\lambda) - \mathrm{Id}\| = 0$$

в общем случае не влечет соотношение (4.33). Вопрос об описании возможных пределов $\tau - \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{(n)}(\lambda)$ при одном этом условии остается открытым.

Пример 4.2.2. Пусть A и H — (ограниченные) вещественные наблюдаемые, а $p(x)$ — плотность распределения вероятностей на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (4.9). Рассмотрим вполне положительный инструмент

$$\mathbf{N}_{(n)}(B)[X] = e^{itH/n}\sqrt{n}\int\limits_{B}\sqrt{p(\sqrt{n}xI - \tfrac{1}{\sqrt{n}}A)}\times$$
$$\times X\sqrt{p(\sqrt{n}xI - \tfrac{1}{\sqrt{n}}A)}dx e^{-itH/n}. \tag{4.34}$$

Свертка $\mathbf{N}_{(n)}^{*n}$ имеет следующую статистическую интерпретацию. Рассмотрим квантовую систему, динамика которой на интервале $[0, t]$ описывается гамильтонианом H. В моменты времени $t_j = jt/n$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$ производится приближенное измерение наблюдаемой A с дисперсией $n\sigma^2 = n\int x^2 p(x)dx$, а затем вычисляется среднее $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha(t_j^{(n)})$ полученных результатов $\alpha(t_j^{(n)})$ (которое имеет дисперсию σ^2). При $n\to\infty$ это стремится к пределу $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau$, который равен среднему исходов $\alpha(\tau)$ «непрерывного

[1] Имеется в виду экспонента в банаховой алгебре $\mathfrak{F}_\sigma$.

измерения» наблюдаемой A. Вычисления показывают, что для достаточно гладкой плотности $p(x)$ предел (4.33) равен

$$\mathfrak{L}(\lambda)[X] = it[H, X] + \frac{1}{4}J(AXA - A^2 \circ X) + i\lambda A \circ X - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 X, \quad (4.35)$$

где $J = \int p'(x)^2 p(x)^{-1}dx$ — информационное количество Фишера для семейства плотностей $\{p(x+\theta)\}$ с параметром сдвига $\theta \in \mathbb{R}$, так что $\sigma^2 J \geqslant 1$.

4.2.4. Сверточные полугруппы инструментов

Следующий результат типа теоремы Шенберга (см. [128], [197]) перебрасывает мост между скалярными условно положительно определенными функциями и вполне диссипативными отображениями (ср. п. 3.3.2 в гл. 3).

Предложение 4.2.2. *Пусть $\mathfrak{L}(\lambda)$ — функция со значениями в $\mathfrak{F}_\sigma$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\exp t\mathfrak{L}(\lambda)$ *является положительно определенной функцией для всех* $t \geqslant 0$;
2. *функция* $\mathfrak{L}(\lambda)$ эрмитова, *т. е.* $\mathfrak{L}(-\lambda)[X^*] = \mathfrak{L}(\lambda)[X]^*$, *и условно положительно определенная, т. е. для любых конечных наборов* $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$, $\{X_j\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, *таких что* $\sum_j X_j\psi_j = 0$, *выполняется*

$$\sum_{j,k} \langle\psi_j|\mathfrak{L}(\lambda_k - \lambda_j)[X_j^* X_k]\psi_k\rangle \geqslant 0.$$

Для того, чтобы функция $\mathfrak{L}(\lambda)$ представлялась в виде предела (4.33), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному из условий этого предложения, была τ-непрерывной и $\mathfrak{L}(0)[I] = 0$. Такие функции будем называть *квазихарактеристическими*.

Семейство инструментов $\{\mathcal{N}_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ образует *сверточную полугруппу*, если $\mathcal{N}_t * \mathcal{N}_s = \mathcal{N}_{t+s}$; $t,\ S \in \mathbb{R}_+$.

Очевидно. что все инструменты $\mathcal{N}_t$ безгранично-делимы. Пусть $\Phi_t(\lambda)$ — характеристическая функция инструмента $\mathcal{N}_t$. Соотношение

$$\Phi_t(\lambda) = \exp t\mathfrak{L}(\lambda); \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.36)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между квазихарактеристическими функциями $\mathfrak{L}(\lambda)$ и сверточными полугруппами вполне положительных инструментов, удовлетворяющими условию непрерывности

$$\lim_{t\to 0}\|\mathcal{N}_t(U_0) - \mathrm{Id}\| = 0 \quad (4.37)$$

для любой окрестности нуля U_0.

Следующий результат можно рассматривать как обобшение представления Леви – Хинчина для логарифма характеристической функции безгранично-делимого распределения.

Теорема 4.2.1. *Для того, чтобы функция* $\mathfrak{L}(\lambda)$ *со значениями в* $\mathfrak{F}_\sigma$ *была квазихарактеристической, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1(\lambda) + \mathfrak{L}_2(\lambda), \tag{4.38}$$

где $\mathfrak{L}_0$ *— вполне диссипативное отображение вида* (3.21),

$$\mathfrak{L}_1(\lambda)[X] = \sigma^2 \left[(L^*XL - L^*L \circ X) + i\lambda(L^*X + XL) - \frac{1}{2}\lambda^2 X \right], \tag{4.39}$$

причем $\sigma^2 \geqslant 0$, $L \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, *т. е. функция типа* (4.35), *и*

$$\mathfrak{L}_2(\lambda)[X] = \tag{4.40}$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}\backslash 0} \left(\mathfrak{J}(dx)[X]e^{i\lambda x} - \mathfrak{J}(dx)[I] \circ X - i[X, H(dx)] - X\frac{i\lambda x}{1+x^2}\mu(dx) \right),$$

где $\mathfrak{J}(dx)$ *есть* $\mathfrak{F}_\sigma$*-значная функция множеств, такая что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\backslash 0} \frac{x^2}{1+x^2}\mathfrak{J}(dx)$$

является ограниченным отображением и условие $\sum_j X_j\psi_j = 0$ *влечет*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\backslash 0} \sum_{j,k} \langle \psi_j | \mathfrak{J}(dx)[X_j X_k] \psi_k \rangle < \infty;$$

эрмитова операторнозначная мера $H(dx) = (F(dx) - F(dx)^*)/2i$, *где* $F(dx)$ *определяется соотношением*

$$\langle \psi_0 | F(dx)\psi \rangle = \langle \psi_0 | \mathfrak{J}(dx)[|\psi_0\rangle\langle\phi|]\psi \rangle,$$

с фиксированным единичным вектором ψ_0, *а*

$$\mu(dx) = \langle \psi_0 | \mathfrak{J}(dx)[|\psi_0\rangle\langle\psi_0|]\psi_0 \rangle.$$

Доказательство формулы (4.38) использует разновидность конструкции ГНС, которая сопоставляет условно положительно определенной функции $\mathcal{L}(\lambda)$ пару коммутирующих коциклов алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и группы $\mathbb{R}$, а также сведения о структуре этих коциклов [128], [110], [98] (доказательство можно обобщить на случай любой алгебры фон Неймана и любой абелевой локально-компактной группы, см. [72]).

Вероятностный смысл каждого из слагаемых в формуле (4.36) выясняется в связи с процессами непрерывного измерения.

4.2.5. Инструментальные процессы

Пусть $\mathcal{Y}$ — пространство всех вещественных функций на $\mathbb{R}$, а $\mathcal{B}_{a,b}$ — σ-алгебра, порождаемая приращениями $y(s) - y(t)$; $a \leqslant t < s \leqslant b$. ***Инструментальным процессом с независимыми приращениями*** (и.-процессом) называется семейство $\{\mathcal{N}_{a,b};\ a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\}$, где $\mathcal{N}_{a,b}$ — инструмент (в алгебре наблюдаемых) со значениями в $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_{a,b})$, причем

$$\mathcal{N}_{a,b}(E) \cdot \mathcal{N}_{b,c}(F) = \mathcal{N}_{a,c}(E \cap F), \tag{4.41}$$

если $a \leqslant b \leqslant c$ и $E \in \mathcal{B}_{a,b}$, $F \in \mathcal{B}_{b,c}$. Если все инструменты $\mathcal{N}_{a,b}$ вполне положительны, то и.-процесс называется ***вполне положительным***. Для любого оператора плотности S и временного промежутка $[a, b]$ и.-процесс определяет распределение вероятностей

$$\mu_S(E) = \operatorname{Tr} S\mathcal{N}_{a,b}(E)[I];\ E \in \mathcal{B}_{a,b}, \tag{4.42}$$

на пространстве траекторий $y(t)$; $t \in [a, b]$. С физической точки зрения, исходом непрерывного измерения является производная $\dot{y}(t)$, однако оказывается, что распределение (4.42) сосредоточено на недифференцируемых функциях.

Это определение, данное в [140], является модификацией определения Дэвиса [101], использовавшего лишь пространство скачкообразных функций, и более общего определения Баркиелли, Ланца и Проспери [69], основанного на пространстве обобщенных функций. В случае $\dim \mathcal{H} = 1$ и.-процессы — это обычные вещественные процессы с независимыми приращениями. Всякий и.-процесс однозначно определяется набором своих конечномерных распределений, которые в силу (4.41) имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{\tau_0,\tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1, \ldots, y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p) = \\ &= \mathcal{N}_{\tau_0,\tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{N}_{\tau_{p-1},\tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p),\end{aligned}$$

где $\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_p$; $B_1, \ldots, B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

И.-процесс называется *однородным*, если для любых $a, b, \tau \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\mathcal{N}_{a+\tau,b+\tau}(T_\tau(E)) = \mathcal{N}_{a,b}(E),\ E \in \mathcal{B}_{a,b},$$

где $(T_\tau y)(t) = y(t+\tau)$. Соотношение

$$\mathcal{N}_t(B) = \mathcal{N}_{a,a+t}(y(\cdot) : y(a+t) - y(a) \in B);\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{4.43}$$

определяет тогда сверточную полугруппу инструментов, через которую конечномерные распределения выражаются по формуле

$$\mathcal{N}_{\tau_0,\tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1, \ldots, y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p) = \\ = \mathcal{N}_{\tau_1-\tau_0}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{N}_{\tau_p-\tau_{p-1}}(B_p). \tag{4.44}$$

Если и.-процесс непрерывен в том смысле, что

$$\lim_{t\to 0}\|\mathcal{N}_{a,a+t}(y(\cdot) : | y(a+t) - y(a) | \geqslant \varepsilon)\| = 0 \tag{4.45}$$

для любого $\varepsilon > 0$, то соответствующая сверточная полугруппа непрерывна в смысле (4.37) и, следовательно, ее характеристические функции имеют вид (4.36), где $\mathcal{L}(\lambda)$ — некоторая квазихарактеристическая функция. Обратно, пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ — квазихарактеристическая функция, а $\{\mathcal{N}_t\}$ — соответствующая сверточная полугруппа. Тогда соотношение (4.44) определяет конечномерные распределения, продолжающиеся до однородного, непрерывного, вполне положительного и.-процесса $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$. Более того, модифицируя технику продолжения теории случайных процессов, можно доказать, что и.-процесс $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$ сосредоточен на подпространстве $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$, состоящем из функций без разрывов второго рода[2]. Функция $\mathcal{L}(\lambda)$ называется *генератором* и.-процесса $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$.

Слагаемое $\mathcal{L}_0$ в формуле (4.38) описывает эволюцию (в общем случае, обратимую) рассматриваемой квантовой системы, происходящую независимо от процесса измерения. В классическом случае ($\dim \mathcal{H} = 1$) это слагаемое вообще отсутствует. Второе слагаемое $\mathcal{L}(\lambda)$ описывает процесс непрерывного приближенного измерения наблюдаемой $A = \sigma^2(L + L^*)$. Соответствующий и.-процесс сосредоточен на непрерывных траекториях и отвечает классическому винеровскому процессу. Многомерное обобщение — сумма слагаемых вида (4.39) с разными операторами $L_1, \ldots, L_m$ — задает процесс непрерывного приближенного измерения нескольких (вообще говоря,

---

[2] См. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2. — М.: Наука, 1973.

несовместимых) наблюдаемых [70]. Наконец, слагаемое $\mathfrak{L}_2(\lambda)$ описывает скачкообразную компоненту процесса измерения.

Пример 4.2.3. (см. [101] гл. 5.) Пусть $B \to \mathfrak{J}(B)$; $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash 0)$, в (4.40) — функция множеств, удовлетворяющая определению вполне положительного инструмента (см. п. 4.1.1), за исключением условия нормировки 2). Таким образом, $C = \mathfrak{J}(\mathbb{R}\backslash 0)[I]$ — некоторый положительный оператор. Соотношение

$$\mathfrak{L}(\lambda)[X] = \int\limits_{\mathbb{R}\backslash 0} e^{i\lambda x}\mathfrak{J}(dx)[X] - C \circ X + i[H, X] \tag{4.46}$$

определяет квазихарактеристическую функцию. Однородный и.-процесс $\{\mathfrak{N}_{a,b}\}$ с генератором (4.46) имеет кусочно постоянные траектории; пусть, например, $F \subset \mathcal{D}$ — подмножество траекторий, имеющих ровно m скачков на отрезке $[a, b]$, причем j-й скачок происходит на интервале $\Delta_j \subset [a, b]$ и имеет величину $h_j \in B_j$, где $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash 0)$. Если интервалы $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ следуют друг за другом без пересечений, то

$$\mathfrak{N}_{a,b}(F) = \int\limits_{\Delta_1} \ldots \int\limits_{\Delta_m} e^{(t_1 - a)\mathfrak{L}_0} \cdot \mathfrak{J}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{J}(B_m) \cdot e^{(b - t_m)\mathfrak{L}_0} dt_1 \ldots dt_m,$$

где $\mathfrak{L}_0[X] = -C \circ X + i[H, X]$.

Особенно просто устроен аналог пуассоновского процесса с генератором

$$\mathfrak{L}(\lambda)[X] = \mu(e^{i\lambda h}U^*XU - X) + i[H, X],$$

где U — изометрический оператор. Это *считающий процесс* [216], для которого скачки траектории имеют фиксированную величину h и происходят в случайные моменты времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметром $\mu > 0$. В момент скачка состояние преобразуется по формуле $S \to USU^*$, а между скачками эволюционирует согласно закону

$$S \to e^{-\mu t}e^{-iHt}Se^{iHt}.$$

Рассмотрим вкратце вопрос о сходимости повторных измерений к процессу непрерывного измерения. Пусть временная ось $\mathbb{R}$ разбита на промежутки $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ длины $1/n$, и каждому моменту времени $t_i^{(n)}$ отвечает измерение, описываемое вполне положительным инструментом $\mathfrak{N}_{(n)}$ с характеристической функцией $\Phi_{(n)}(\lambda)$. Серия таких повторных измерений естественным образом определяет и.-процесс $\{\mathfrak{N}_{a,b}\}$, траекториями которого являются кусочно-постоянные функции (см. [140]). Обозначим

$$\mu_{S,X}^{(n)}(B) = \operatorname{Tr} S\mathfrak{N}_{a,b}^{(n)}(E)[X]; \ E \in \mathcal{B}_{a,b},$$

где $X \geqslant 0$.

Теорема 4.2.2. *Пусть существует τ-непрерывный предел*

$$\tau - \lim_{n\to\infty} n(\Phi_{(n)}(\lambda) - \mathrm{Id}) = \mathfrak{L}(\lambda),$$

причем $\sup\limits_{n} \sup\limits_{|\lambda|<1} n\|\Phi_{(n)}(\lambda) - \mathrm{Id}\| < \infty$. *Тогда последовательность мер* $\{\mu_{S,X}^{(n)}\}$ *сходится в топологии Скорохода к мере*

$$\mu_{S,X}(E) = \operatorname{Tr} S\mathfrak{N}_{a,b}(E)[X],$$

где $\{\mathfrak{N}_{a,b}\}$ *— однородный вполне положительный и.-процесс с генератором* $\mathfrak{L}(\lambda)$.

В частности, последовательность повторных приближенных измерений наблюдаемой A из примера 4.2.2 сходится к процессу непрерывного измерения с генератором (4.35).

В случае $\dim \mathcal{H} = 1$ этот результат переходит в теорему Скорохода о сходимости сумм независимых случайных величин к процессу с независимыми приращениями.

Знание генератора и.-процесса позволяет в принципе определять основные вероятностные характеристики распределения (4.42) в пространстве траекторий, в частности, произвольные смешанные моменты [70]. На этом основаны квантовостатистические приложения рассматриваемой теории. В работе [141] проведено сравнение оценок неизвестной силы, действующей на открытую квантовую систему, построенных на основе различных процессов непрерывного измерения. Статистика считающих процессов рассматривалась в работе [216], а в работе [43] рассматривается приложение к оптимальному различению двух когерентных состояний с использованием фотодетектора и обратной связи (приемник Долинара). Другие приложения к квантовой оптике можно найти, например, в работах [73], [74].

5. Процессы в пространстве Фока

5.1. Квантовое стохастическое исчисление

5.1.1. Основные определения

Пусть $\mathfrak{h}$ — гильбертово пространство. *Симметричное пространство Фока*, ассоциированное с $\mathfrak{h}$, определяется как

$$\Gamma(\mathfrak{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \Gamma_n(\mathfrak{h}),$$

где $\Gamma_0(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}$, а $\Gamma_n(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_+^{(n)}$ — симметризованная n-я тензорная степень пространства $\mathfrak{h}$ (см. п. 1.3.1, гл. 1). $\Gamma_n(\mathfrak{h})$ называется *n-частичным*, а $\Gamma_0(\mathfrak{h})$ — *вакуумным* подпространством. В квантовой теории $\Gamma(\mathfrak{h})$ описывает систему из переменного (неограниченного) числа частиц (бозонов) [7], [8].

В интересующем нас случае, когда $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}_+)$, пространство Фока $\Gamma(\mathfrak{h})$ состоит из бесконечных последовательностей

$$\psi = [f_0, f_1(t), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_n), \ldots],$$

где $f_0 \in \mathbb{C}, f_n(t_1, \ldots, t_n)$ — комплексная симметричная квадратично интегрируемая функция от $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, причем

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} | f_n(t_1, \ldots, t_n) |^2 \, dt_1 \ldots dt_n < \infty.$$

Удобная модификация этого представления была предложена Маассеном в [204]. Пусть $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$ — цепь в $\mathbb{R}_+$, т. е. конечное подмножество $\mathbb{R}_+$, с $|\tau| = n$, упорядоченное так, что $t_1 < \ldots < t_n$. Обозначая $\mathcal{P}$ множество всех цепей длины n, имеем $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_0 = \{\varnothing\}$. Определим σ-конечную меру $\mu(d\tau)$ на $\mathcal{P}$, которая совпадает с мерой $dt_1 \dots dt_n$ на $\mathcal{P}_n$ для $n > 0$, и для которой $\mu(\varnothing) = 1$. Для $\psi \in \Gamma(\mathfrak{h})$ положим $\psi(\tau) = f_n(t_1, \dots, t_n)$, если $|\tau| = n > 0$ и $\psi(\varnothing) = f_0$. Симметричная функция f_n однозначно определяется своим ограничением на $\mathcal{P}_n$, причем

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty |f_n(t_1, \dots, t_n)|^2 \, dt_1 \dots dt_n = \int_{\mathcal{P}_n} |\psi(\tau)|^2 \, \mu(d\tau),$$

так что

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{P}_n} |\psi(\tau)|^2 \, \mu(d\tau) = \int_{\mathcal{P}} |\psi(\tau)|^2 \, \mu(d\tau). \tag{5.1}$$

Для любого $t \geqslant 0$ определим операторы $A(t), A^+(t), \Lambda(t)$ соотношениями

$$\begin{aligned} (A(t)\psi)(\tau) &= \int_0^t \psi(\tau \cup \{s\}) ds, \\ (A^+(t)\psi)(\tau) &= \sum_{s \in \tau} 1_{[0,t]}(s) \psi(\tau \setminus \{s\}), \\ (\Lambda(t)\psi)(\tau) &= \sum_{s \in \tau} 1_{[0,t]}(s) \psi(\tau). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Оператор $A(t)$ переводит $\Gamma_n = \Gamma_n(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ в Γ_{n-1}, $A^+(t)$ переводит Γ_n в Γ_{n+1}, а $\Lambda(t)$ переводит Γ_n в Γ_n. В квантовой физике $A(t)$ является *оператором уничтожения* (бозона) на временном отрезке $[0, t]$, $A^+(t)$ — *оператором рождения*, а $\Lambda(t)$ *оператором числа частиц* (бозонов). Их общей инвариантной областью определения является подпространство Γ_∞, состоящее из векторов $\psi \in \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$, таких что

$$\int_{\mathcal{P}} \lambda^{|\tau|} |\psi(\tau)|^2 \, \mu(d\tau) < \infty$$

для всех $\lambda > 0$. Операторы $A(t), A^+(t)$ однозначно продолжаются до замкнутых взаимно сопряженных операторов (для которых сохраняются прежние обозначения). Операторы $\Lambda(t)$, а также

$$Q(t) = A(t) + A^+(t), \ \ P(t) = i(A^+(t) - A(t)), \tag{5.3}$$

являются существенно самосопряженными на Γ_∞ (см., например, [7], [27]).

Из определений (5.2) вытекают следующие коммутационные соотношения на Γ_∞:

$$\begin{aligned} &[A(t),\ A(s)] = 0, && [A^+(t), A^+(s)] = 0, \\ &[A(t), A^+(s)] = (t \wedge s)I, && [\Lambda(t),\ \Lambda(s)] = 0, \\ &[\Lambda(t),\ A(s)] = -A(t \wedge s), && [\Lambda(t), A^+(s)] = A^+(t \wedge s), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $t \wedge s = \min(t, s)$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} [Q(t), Q(s)] = 0, \quad [P(t), P(s)] = 0, \\ [Q(t), P(s)] = 2i(t \wedge s)I, \\ [\Lambda(t), Q(s)] = -iP(t \wedge s), \quad [\Lambda(t), P(s)] = iQ(t \wedge s). \end{gathered} \tag{5.5}$$

Пусть $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Соответствующим *экспоненциальным вектором* называется вектор $\psi_f \in \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$, такой что $\psi_f(\varnothing) = 1$, $\psi_f(\tau) = \prod\limits_{t \in \tau} f(t)$. Скалярное произведение двух экспоненциальных векторов есть

$$\langle \psi_f | \psi_g \rangle = \exp \int\limits_0^\infty \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Из (5.2) следует, что $A(t)\psi_f = \left(\int\limits_0^t f(s) ds \right) \cdot \psi_f$. Вектор ψ_0, соответствующий $f = 0$, называется *вакуумным вектором*. Для него

$$A(t)\psi_0 = 0, \quad \Lambda(t)\psi_0 = 0. \tag{5.6}$$

Линейную оболочку семейства экспоненциальных векторов обозначим Γ_e. Она плотна в $\Gamma(\mathfrak{h})$ (см., например, [128]).

5.1.2. Стохастический интеграл

Одно из основных свойств пространства Фока — *функториальное свойство*

$$\Gamma(\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2) = \Gamma(\mathfrak{h}_1) \otimes \Gamma(\mathfrak{h}_2). \tag{5.7}$$

В частности, для любого $t \in \mathbb{R}_+$

$$\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)) = \Gamma(\mathrm{L}^2(0, t)) \otimes \Gamma(\mathrm{L}^2(t, \infty)). \tag{5.8}$$

При этом экспоненциальные векторы, включая вакуумный, также факторизуются:

$$\psi_f = \psi_f^{(0,t)} \otimes \psi_f^{(t,\infty)}. \tag{5.9}$$

Поскольку $L^2(\mathbb{R}_+)$ можно рассматривать как непрерывную прямую сумму (т. е. прямой интеграл одномерного гильбертова пространства), пространство Фока $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ является, в определенном смысле, непрерывным тензорным произведением. Эта структура лежит в основе связи между пространством Фока, безграничной делимостью и процессами с независимыми приращениями (см., например, [128], [197]).

Далее $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, где $\mathcal{H}$ некоторое «начальное» пространство. Элементы $\mathfrak{H}$ можно рассматривать как функции $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathcal{P}$, со значениями в $\mathcal{H}$. Будет удобно не различать в написании операторы, действующие в $\mathcal{H}$ или в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, и их поднятия в $\mathfrak{H}$. Например, $A(t)$ обозначает как оператор в $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, так и оператор в $\mathfrak{H}$. Обозначим $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$ алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{H}$ и Γ_e. Семейство (вообще говоря, неограниченных) операторов $\{M(t);\, t \in \mathbb{R}_+\}$, определенных на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$, будет называться *процессом* в $\mathfrak{H}$.

Соотношения (5.8), (5.9) задают естественную фильтрацию в пространстве $\mathfrak{H}$. Процесс $\{M(t);\, t \in \mathbb{R}_+\}$ в $\mathfrak{H}$ называется *согласованным* (с данной фильтрацией), если для любого $t \in \mathbb{R}_+$

$$M(t) = M_{t]} \otimes I_{[t}, \tag{5.10}$$

где $M_{t]}$ — оператор, действующий в $\mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(0,t))$, а $I_{[t}$ — единичный оператор в $\Gamma(L^2(t,\infty))$. Благодаря (5.8) и (5.9), определено отображение условного ожидания $\mathcal{E}_{t]}$ на алгебру операторов вида (5.10), согласованное с вакуумным состоянием $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Согласованный процесс называется *мартингалом*, если $\mathcal{E}_{t]}[M(s)] = M(t)$ при $s > t$. Основные процессы $\{A(t)\}$, $\{A^+(t)\}$, $\{\Lambda(t)\}$ являются мартингалами.

Хадсон и Партасарати в [157] построили стохастический интеграл от согласованных процессов по основным мартингалам $A^+(t)$, $A^+(t)$ и $\Lambda(t)$. Дальше излагается модификация этой конструкции (см. статью автора в [207]). Процесс $\{M(t)\colon t \in [0,T]\}$ называется *простым*, если существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, такое что $M(t) = M(t_{j-1})$ для $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Для четверки простых согласованных процессов $\{M_\alpha(t)\}$, $\alpha = 0,1,2,3$, стохастический интеграл определяется соотношением

$$\begin{aligned} I(T) &= \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt) = \\ &= \sum_{j=1}^N \{M_0(t_{j-1})[\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})] + M_1(t_{j-1})[A(t_j) - A(t_{j-1})] + \\ &\qquad + M_2(t_{j-1})[A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})] + M_3(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из неравенств Журне (см. [183] п. V.1.4) вытекает оценка

$$\sup_{0<t<T} \|I(t)\psi \otimes \psi_f\|^2 \leqslant C(\|f\|) \cdot \left\{ \int_0^T | f(t) |^2 \times \right.$$
$$\times \|M_0(t)\psi \otimes \psi_f\|^2 dt + \int_0^T [\|M_1(t)\psi \otimes \psi_f\|^2 +$$
$$\left. + \|M_2(t)\psi \otimes \psi_f\|^2] dt + \left[\int_0^T \|M_3(t)\psi \otimes \psi_f\| dt \right]^2 \right\}, \quad (5.12)$$

где $\psi \in \mathcal{H}$, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Назовем $\{M_\alpha(t)\}$ *допустимой* четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\left\{\widetilde{M}_\alpha(t)\right\}$ простых согласованных процессов, такая что

$$\operatorname{ess}\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|[M_0(t) - \widetilde{M}_0(t)]\psi \otimes \psi_f\| < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \|[M_{1,2}(t) - \widetilde{M}_{1,2}(t)]\psi \otimes \psi_f\|^2 dt < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \|[M_3(t) - \widetilde{M}_3(t)]\psi \otimes \psi_f\| dt < \varepsilon,$$

и *сильно допустимой* четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\left\{\widetilde{M}_\alpha\right\}$ простых согласованных процессов со значениями в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, такая что

$$\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} \|[M_0(t) - \widetilde{M}_0(t)\| < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \|M_{1,2}(t) - \widetilde{M}_{1,2}(t)\|^2 dt < \varepsilon,$$
$$\int_0^T \|M_3(t) - \widetilde{M}_3(t)\| dt < \varepsilon. \quad (5.13)$$

Из неравенств (5.12) вытекает, что для любой допустимой четверки стохастический интеграл

$$I(T) = \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt) \quad (5.14)$$

определен на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$ как сильный предел стохастических интегралов вида (5.11) от простых процессов $\{M_\alpha\}$ и является согласованным процессом. Если $M_3 = 0$, то $I(t)$ является мартингалом; обратно, было показано, что достаточно произвольный ограниченный мартингал в пространстве Фока является стохастическим интегралом (Партасарати и Синха). Пример неограниченного мартингала, не представимого в виде стохастического интеграла по основным процессам, содержится в работе Журне [161].

Из определений (5.2) основных мартингалов вытекает явная формула (см. работу Белавкина в [32])

$$(I(t)\psi)(\tau) = \int_0^t \left[M_3(s)\psi + M_1(s)\psi^{(s)}\right](\tau)ds + \sum_{s\in\tau, s<t}\left[M_2(s)\psi + M_0(s)\psi^{(s)}\right](\tau\backslash\{s\}),$$

где $\psi^{(s)}(\tau) = \psi(\tau \cup \{s\})$, которая может служить для альтернативного определения стохастического интеграла, имеющего смысл для более широких классов процессов (включая несогласованные процессы).

Стохастический интеграл по процессам в антисимметричном пространстве Фока рассматривался Барнетом, Стритером, Уальдом [75], [203], а также Эпплбаумом и Хадсоном [156].

5.1.3. Квантовая формула Ито

Соотношение (5.14) принято записывать в дифференциальной форме

$$dI = M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt. \tag{5.15}$$

Пусть $J(t)$ – другой стохастический интеграл, такой что $dJ = N_0 d\Lambda + N_1 dA + N_2 dA^+ + N_3 dt$.

Теорема 5.1.1 (Хадсон, Партасарти [157]). *Если четверки $\{M_\alpha\}$, $\{N_\alpha\}$ — сильно допустимы, то произведение $I(t)J(t)$ является стохастическим интегралом, причем*

$$d(IJ) = I(dJ) + (dI)J + (dI)(dJ),$$

где произведение вычисляется по следующим формальным правилам: значения любого согласованного процесса в момент времени t коммутируют *со стохастическими дифференциалами основных процессов $d\Lambda(t)$, $dA(t)$, $dA^+(t)$ и dt, а в слагаемом $(dI)(dJ)$ произведения стохастических дифференциалов основных процессов находятся согласно таблице умножения*

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & dA^+ & d\Lambda & dA & dt \\
\hline
dA & dt & dA & 0 & 0 \\
d\Lambda & dA^+ & d\Lambda & 0 & 0 \\
dA^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\
dt & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad (5.16)
$$

В [48] было показано, что алгебра стохастических дифференциалов (5.15) с таблицей умножения (5.16) изоморфна некоторой алгебре 3×3-матриц. Особенно удобно симметричное представление, предложенное Белавкиным в [32}: соответствие

$$
dI = M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.17)
$$

оказывается алгебраическим *-изоморфизмом, переводящим инволюцию $(dI)^* = M_0^* d\Lambda + M_2^* dA + M_1^* dA^+ + M_3^* dt$ в инволюцию

$$
\begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & M_2^* & M_3^* \\ 0 & M_0^* & M_1^* \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}.
$$

Пример 5.1.1. Рассмотрим стохастические интегралы

$$
B(t) = \int_0^t J(s) dA(s), \quad B^+(t) = \int_0^t J(s) dA^+(s),
$$

где $J(t) = (-1)^{\Lambda(t)}$ — сильно допустимый процесс. Из формулы (5.25) следующего раздела вытекает, что $J(t)$ удовлетворяет уравнению

$$
dJ = -2J d\Lambda.
$$

Пользуясь таблицей (5.16), находим

$$
d(BJ + JB) = -2(BJ + JB) d\Lambda.
$$

Поскольку $B(0) = 0$, то из теоремы следующего раздела вытекает, что $B(t)J(t) + J(t)B(t) = 0$. Снова пользуясь таблицей (5.16), находим $d(BB^+ + B^+B) = dt$, откуда

$$B(t)B^+(t) + B^+(t)B(t) = t,$$

и аналогичное рассуждение показывает, что операторы $B(t), B^+(t)$ удовлетворяют каноническому антикоммутационому соотношению для фермионных операторов рождения-уничтожения. Этот факт лежит в основе изоморфизма между симметричным (бозонным) и антисимметричным (фермионным) пространствами Фока, установленного Хадсоном и Партасарати [155].

Квантовый стохастический интеграл и формула Ито имеют естественное обобщение на случай многих степеней свободы, когда основные процессы $A_j(t)$, $A_k^+(t)$ и $\Lambda_{jk}(t)$ многомерны и действуют в пространстве Фока $\Gamma(\mathrm{L}^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}_+))$, где $\mathcal{K}$ — гильбертово пространство, размерность которого равна числу степеней свободы (Хадсон, Эванс в [205], Белавкин в [32]), а также в нефоковских пространствах, связанных с гауссовскими состояниями канонических коммутационных соотношений (Хадсон, Линдсей в [204]).

5.1.4. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения

Рассмотрим линейное однородное квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dV = \left[L_0 d\Lambda + L_1 dA + L_2 dA^+ + L_3 dt\right] V, \quad t \geqslant 0, \tag{5.18}$$

с начальным условием $V(0) = I$, которое является краткой записью интегрального уравнения

$$V(t) = I + \int_0^t \left[L_0(s)d\Lambda(s) + L_1(s)dA(s) + L_2(s)dA^+(s) + L_3(s)ds\right] V(s).$$

Модифицируя рассуждение Хадсона и Партасарати [157], основанное на методе последовательных приближений, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.1.2. *Если $\{L_\alpha\}$ — сильно допустимая четверка, то решение $\{V(t);\, t \in \mathbb{R}\}$ уравнения* (5.18) *существует, единственно и является согласованным процессом, сильно непрерывным на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$.*

Обозначим $\mathcal{S}_t$ оператор временного сдвига в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}_t\psi(\tau) = \psi(\tau_t)$, где $\tau_t = \{t_1 + t, \ldots, t_n + t\}$, если $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Решение $V(t)$ удовлетворяет уравнению *коцикла*

$$V(t+u) = (\mathcal{S}_u^* V(t) \mathcal{S}_u) V(u); \quad t,\, u \in \mathbb{R}_+. \tag{5.19}$$

Особый интерес представляет случай, когда $V(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, являются унитарными операторами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (5.18) имело вид

$$dV = [(W - I)d\Lambda + LdA^+ - L^*WdA - \left(iH + \frac{1}{2}L^*L\right)dt]V, \tag{5.20}$$

где W — унитарный, H — эрмитов, а L — произвольный ограниченный оператор в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Весьма важной является задача обобщения теоремы существования и единственности решения уравнения (5.18) на случай неограниченных коэффициентов $L_\alpha(t)$. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работах Хадсона и Партасарати [157], Журне [161], Фриджерио, Фаньолы и Чеботарева [96], Фаньолы [111]. В работе [161] частично решена задача описания сильно непрерывных унитарных решений уравнения (5.19). Этот вопрос тесно связан с проблемой консервативности, обсуждавшейся в п. 3.3.3.

Уравнения типа (5.18) связаны с линейными стохастическими дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве (см., в частности, Скороход [31]), и можно надеяться, что эти два направления взаимно обогатят друг друга. Решения уравнения (5.20) являются некоммутативным аналогом мультипликативного процесса с независимыми стационарными приращениями в группе унитарных операторов. Общая теория таких процессов развита Аккарди, фон Вальденфельсом и Шурманом [61]. Последний показал в [206] и в [211], что всякий такой процесс, удовлетворяющий условию равномерной непрерывности, является решением уравнения типа (5.20). Используя аналогию с квантовыми процессами, автор указал стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет произвольный классический мультипликативный процесс с независимыми стационарными приращениями в группе Ли (мультипликативный аналог разложения Ито [207]).

Наглядное представление решений уравнения (5.18) дают хронологически упорядоченные экспоненты, родственные мультипликативному стохастическому интегралу в классической теории случайных процессов (по поводу последнего см. Эмери [108]). Пусть $\{\widetilde{M}_\alpha(t)\}$ — четверка простых согласованных процессов на $[0,T]$ со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Положим

$$V_j = \exp[\widetilde{M}_0(t_{j-1})(\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})) + \widetilde{M}_1(t_{j-1})(A(t_j) -$$
$$- A(t_{j-1})) + \widetilde{M}_2(t_{j-1})(A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})) + \widetilde{M}_3(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})]$$

и обозначим

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^T (\widetilde{M}_0 d\Lambda + \widetilde{M}_1 dA + \widetilde{M}_2 dA^+ + \widetilde{M}_3 dt) = V_N \cdot \ldots \cdot V_1. \tag{5.21}$$

Оператор (5.21) определен на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$. В работах автора (см. [143], [148]) доказано, что если $\{M_\alpha\}$ – сильно допустимая четверка согласованных процессов со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\{\widetilde{M}_\alpha^N\}$ – последовательность четверок простых процессов, аппроксимирующая $\{M_\alpha\}$ в смысле (5.13), то существует сильный предел на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$ выражений вида (5.21), который называется *хронологически упорядоченной экспонентой*. При этом семейство хронологически упорядоченных экспонент

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5.22}$$

является сильно непрерывным на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$ согласованным процессом, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (5.18), где $\{L_\alpha\}$ и $\{M_\alpha\}$ связаны соотношениями

$$L_0 = a(M_0),\ L_1 = M_1 b(M_0),\ L_2 = b(M_0) M_2,$$
$$L_3 = M_3 + M_1 c(M_0) M_2.$$

Здесь a, b, c – целые функции

$$a(z) = e^z - 1,\ b(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad c(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2},\ z \neq 0. \tag{5.23}$$

Используя изоморфизм (5.17), эти соотношения можно объединить в одно матричное равенство

$$\mathbf{L} = e^{\mathbf{M}} - I.$$

Если коэффициенты $M_\alpha(t)$ коммутируют между собой при всевозможных значениях временных аргументов, то хронологически упорядоченная экспонента превращается в обычную

$$\exp \int_0^t (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt), \tag{5.24}$$

и дает, таким образом, явное решение уравнения (5.18).

Пример 5.1.2. Решение уравнения

$$dJ_z = zJ_z d\Lambda; \quad J_z(0) = I, \tag{5.25}$$

при $z \neq -1$ записывается в виде

$$J_z(t) = (z+1)^{\Lambda(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Если $z = -1$, то решение уравнения (5.25) имеет вид

$$J_{-1}(t) = \delta_{0,\Lambda(t)},$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Поскольку $J_{-1}(t)$ обращается в нуль, оно не может быть записано в виде экспоненты.

Хронологически упорядоченные экспоненты

$$V(t) = \overleftarrow{\exp} \int\limits_0^t (LdA^+ - L^* dA - iHdt) \tag{5.26}$$

рассматривались фон Вандельфельсом, а также Хадсоном и Партасарати в [203]. Эти экспоненты являются унитарными операторами, удовлетворяющими уравнению

$$dV = [LdA^+ - L^* dA - \left(iH + \frac{1}{2}L^* L\right) dt]V; \quad V(0) = I. \tag{5.27}$$

Пример 5.1.3. Пусть $\dim \mathcal{H} = 1$ и $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Экспонента

$$V_f(t) = \exp \int\limits_0^t (f(s)dA^+(s) - \overline{f(s)}dA(s))$$

является унитарным решением уравнения

$$dV_f(t) = [f(t)dA^+(t) - \overline{f(t)}dA(t) - \frac{1}{2} \mid f(t) \mid^2 dt]V_f(t) \tag{5.28}$$

в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$. Из этого уравнения и квантовой формулы Ито вытекает, что процессы $V_f(t)V_g(t)$ и $V_{f+g}(t) \exp i\Im \int\limits_0^t f(s)\overline{g(s)}ds$, где g — другая функция из $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяют одному и тому же уравнению; кроме того, они совпадают при $t = 0$. Следовательно, они тождественно равны, т. е.

$$V_f(t)V_g(t) = V_{f+g}(t)\exp\left[i\Im\int_0^t f(s)\overline{g(s)}ds\right]. \tag{5.29}$$

Рассмотрим $L^2(\mathbb{R}_+)$ как вещественное линейное пространство Z с кососимметричной формой

$$\Delta(f,g) = 2\Im\int_0^\infty f(s)\overline{g(s)}ds.$$

Из (5.29) тогда следует, что операторы $W(f) = V_f(\infty)$ образуют (неприводимое) представление канонического коммутационного соотношения Вейля–Сигала (1.27) из гл. 1 в симметричном (бозонном) пространстве Фока $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, а формулы (5.4), (5.5) дают инфинитезимальную форму канонического коммутационного соотношения. При этом экспоненциальные векторы играют ту же роль, что и когерентные состояния в случае конечного числа степеней свободы, а отображение дуальности (см. (5.2.1)) соответствует переходу к представлению Шредингера, диагонализующему операторы $Q(t)$.

Дальнейшие сведения о квантовом стохастическом исчислении можно найти в книгах Партасарати [196] и Мейера [183], а также в сборниках [204]–[207], охватывающих такие темы, как связи с некоммутативной геометрией (Хадсон, Эпплбаум, Робинсон), применение к теории кратного стохастического интеграла (Маассен, Мейер, Партасарати, Линдсей), некоммутативные случайные блуждания в «игрушечном пространстве Фока» и их сходимость к основным процессам (Партасарати, Линдсей, Аккарди) и другие.

5.2. Расширения в пространстве Фока

Благодаря структуре непрерывного тензорного произведения, пространство Фока является естественным вместилищем различных «безгранично-делимых» объектов. В конце 60-х годов Араки и Стритер рассматривали безгранично-делимые представления групп и показали, что такие представления вкладываются в пространство Фока. Поскольку представление группы определяется некоторой положительно определенной функцией, то этот результат дает запись безгранично-делимой положительно определенной функции через фоковское вакуумное среднее (см. [128, 197]). Отсюда также следует, что всякое безгранично-делимое распределение вероятностей может быть реализовано как распределение некоторой квантовой наблюдаемой относительно вакуумного состояния в пространстве Фока. Таким образом, пространство Фока вмещает в себя все процессы с независимыми приращениями, а также процессы «квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Это обстоятельство лежит в основе конструкций расширения, использующих фоковское пространство.

5.2.1. Винеровский и пуассоновский процессы в пространстве Фока

Если $\{X(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ — коммутирующее семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то оно *диагонализуемо*: существует пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ и унитарный оператор J из $\mathfrak{H}$ на $\mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$, такие что

$$(JX(t)J^{-1}\psi)(\omega) = X_t(\omega)\psi(\omega),$$

для $\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$, где $X_t(\omega)$ — вещественные измеримые функции. При этом для любого $\psi \in \mathfrak{H}$ и ограниченной борелевской функции $f(x_1, \ldots x_n)$

$$\langle\psi|f(X(t_1), \ldots, X(t_n))\psi\rangle = \int f(X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega))P(d\omega),$$

где $P(d\omega) = |\ (J\psi)(\omega)\ |^2\ \mu(d\omega)$ — вероятностная мера на Ω. В этом смысле, семейство $\{X(t)\}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с выделенным вектором ψ *стохастически эквивалентно* случайному процессу $\{X_t(\omega)\}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$.

Рассмотрим коммутирующее (в силу (5.15)) семейство самосопряженных операторов $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$. Пусть $\{W_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ — стандартный винеровский процесс, а $\mathrm{L}^2(W)$ — гильбертово пространство комплексных квадратично интегрируемых функционалов от винеровского процесса. *Отображение дуальности* (Сигал)

$$J\psi = f_0 + \sum_{n=1} \int \cdots \int_{\mathfrak{P}_n} f_n(t_1, \ldots, t_n)dW_{t_1} \ldots dW_{t_n}.$$

где в правой части формулы — кратные стохастические интегралы в смысле Ито, является изоморфизмом пространства Фока $\mathcal{H} = \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ и $\mathrm{L}^2(W)$, причем

$$J\psi_0 = 1; \quad JQ(t)J^{-1} = W_t.$$

Поэтому семейство $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно винеровскому процессу W_t. Аналогичное утверждение справедливо и для коммутирующего семейства $\{P(t)\}$. Заметим, однако, что в силу (5.5) операторы $Q(t)$ не коммутируют с операторами $P(s)$ и поэтому семейство $\{Q(t), P(t)\}$ не эквивалентно двумерному винеровскому процессу. Унитарный оператор $U\psi(\tau) = i^{|\tau|}\psi(\tau)$ оставляет ψ_0 инвариантным и удовлетворяет соотношению

$$P(t) = UQ(t)U^{-1}.$$

Оператору U в $\mathrm{L}^2(W)$ отвечает преобразование Фурье–Винера[1].

Рассмотрим теперь коммутирующее семейство самосопряженных операторов $\{\Lambda(t)\}$. Пусть $\{N_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_\lambda)$ и $\mathrm{L}^2(N) = \mathrm{L}^2(\Omega, P_\lambda)$. Отображение

$$J^{(\lambda)}\psi = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathfrak{P}_n}\!\cdots\!\int f_n(t_1, \ldots, t_n)dX_{t_1} \ldots dX_{t_n},$$

где $X_t = \lambda^{1/2}(N_t - \lambda t)$ — компенсированный пуассоновский процесс, является изоморфизмом пространства Фока $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ и $\mathrm{L}^2(N)$, причем

$$J^{(\lambda)}\psi_0 = 1, \quad J^{(\lambda)}\Pi^{(\lambda)}(t)J^{(\lambda)-1} = N_t,$$

где

$$\Pi^{(\lambda)}(t) = \Lambda(t) + \sqrt{\lambda}Q(t) + \lambda t. \tag{5.30}$$

Таким образом, семейство $\{\Pi^{(\lambda)}(t)\}$ в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно пуассоновскому процессу [157].

С точки зрения классической теории вероятностей соотношение (5.30) не может не вызвать удивления — пуассоновский процесс представлен как сумма винеровского процесса с постоянным сносом и процесса $\Lambda(t)$, равного нулю почти наверное (относительно вакуумного состояния). Дело, конечно, в том, что слагаемые не коммутируют и поэтому не могут рассматриваться

[1] См. Т. Хида, Броуновское движение, — М.: Наука, 1987.

как классические случайные процессы на одном вероятностном пространстве. Заметим, что подобная связь между пуассоновским и нормальным распределением хорошо известна в квантовой оптике [19].

В подходящее пространство Фока $\Gamma(\mathrm{L}^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}_+))$, где $\mathrm{L}^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}_+)$ — пространство квадратично интегрируемых функций со значениями в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, может быть вложен произвольный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями (Партасарати, см. [196]). Представление такого процесса требует, вообще говоря, бесконечного числа независимых процессов рождения–уничтожения–числа частиц.

Среди процессов с независимыми приращениями только винеровский и пуассоновский обладают следующие свойством *хаотической представимости*: гильбертово пространство квадратично интегрируемых функционалов от процесса является прямой суммой подпространств, порождаемых n-кратными стохастическими интегралами (Винер, Ито). Вопрос — какие другие мартингалы обладают этим свойством — привлек внимание специалистов по теории случайных процессов. В частности, Эмери показал, что этим свойством обладает мартингал Аземы

$$X_t = \operatorname{sgn} W_t \sqrt{2(t-g_t)}, \tag{5.31}$$

где g_t – последний нуль винеровского процесса W_t перед моментом времени t. Партасарати в [195] рассмотрел квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = (c-1)X(t)d\Lambda(t) + dQ(t), \quad X(0) = 0,$$

и показал, что при любом $c \in [-1, 1]$ оно имеет решение, являющееся коммутирующим семейством самосопряженных операторов и стохастически эквивалентное (относительно вакуумного вектора) мартингалу со свойством хаотической представимости. Как заметил Мейер, при $c = 0$ решение $X(t)$ стохастически эквивалентно мартингалу Аземы. Таким образом, в высшей степени нелинейное преобразование (5.31) винеровского процесса оказывается тесно связанным с линейным стохастическим дифференциальным уравнением для некоммутирующих процессов.

5.2.2. Стохастические эволюции и расширения динамических полугрупп

Интересный класс безгранично-делимых объектов возникает в связи с динамическими полугруппами. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а Φ —

динамическое отображение в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. нормальное вполне положительное отображение, такое что $\Phi[I] = I$. Назовем Φ *безгранично-делимым*, если для любого $n = 1, 2, \ldots$, $\Phi = (\Phi_n)^n$, где Φ_n — динамическое отображение. Если $\{\Phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ — динамическая полугруппа, то все отображения Φ_t безгранично-делимы, поскольку $\Phi_t = (\Phi_{t/n})^n$. С другой стороны, если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то всякое безгранично-делимое отображение имеет вид $\Phi = \mathcal{E} \cdot e^{\mathfrak{L}}$, где $\mathcal{E}$ — условное ожидание на некоторую подалгебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, а $\mathfrak{L}$ — вполне диссипативное отображение, оставляющее подалгебру $\mathfrak{B}$ инвариантной [15]. Отображение $\mathcal{E}$ играет роль, аналогичную идемпотентному делителю в теории безгранично-делимых функций на группах [197]. Если $\mathcal{E} = \mathrm{Id}$, то через Φ можно провести квантовую динамическую полугруппу.

В работе Хадсона и Партасарати [157] было построено вложение непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы в пространство Фока, которое может быть истолковано как расширение до марковского квантового случайного процесса в смысле п. 3.3.6, гл. 3 (см. статью Фриджерио в [204]). Для простоты ограничимся описанием конструкции работы [157] для полугруппы с генератором вида

$$\mathfrak{L}[X] = i[H, X] + L^* X L - L^* L \circ X, \tag{5.32}$$

где $H, L \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $H^* = H$.

Предложение 5.2.1. *Пусть $\{\Phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ — квантовая динамическая полугруппа в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ с генератором* (5.32). *Тогда*

$$\Phi_t[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes I)V(t))], \quad X \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \tag{5.33}$$

где $\{V(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ — семейство унитарных операторов в $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$, удовлетворяющее уравнению (5.27), *а отображение $\mathcal{E}_0 : \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — усреднение по вакуумному состоянию, определяемое формулой*

$$\mathrm{Tr}\, S\mathcal{E}_0[Y] = \mathrm{Tr}(S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)Y.$$

для любого оператора плотности S в $\mathcal{H}$ и для любого $Y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Доказательство.

Из уравнения (5.27) и квантовой формулы Ито вытекает *квантовое уравнение Ланжевена* для $X(t)$:

$$dX(t) = [L(t)^*, X(t)]dA(t) + [X(t), L(t)]dA^+(t) + \\ + \{i[H(t), X(t)] + (L(t)^* X(t) L(t) - L(t)^* L(t) \circ X(t))\}dt.$$

Усредняя по вакуумному состоянию и учитывая первое из соотношений

$$dA(t)\psi_0 = 0, \quad d\Lambda(t)\psi_0 = 0, \tag{5.34}$$

вытекающих из (5.6), получаем, что семейство наблюдаемых $\widetilde{\Phi}_t[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes I)V(t)]$ в алгебре системы $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ удовлетворяет уравнению

$$d\widetilde{\Phi}_t[X] = \widetilde{\Phi}_t[\mathcal{L}[X]]dt; \quad \widetilde{\Phi}_0[X] = X.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\Phi}_t[X] = \exp t\mathcal{L}[X] = \Phi_t[X].$$

Пусть теперь $\{\Psi_t;\ t \in \mathbb{R}_+\}$ — соответствующая динамическая полугруппа в пространстве состояний. Из представления (5.33) вытекает конструктивное доказательство теоремы о расширении, сформулированной в п. 3.3.6, гл. 3. Обозначим $\mathcal{H}_0 = \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ пространство Фока, ассоциированное с $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, и пусть $S_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, где ψ_0 — вакуумный вектор в $\mathcal{H}_0$. В пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ действует группа унитарных операторов временного сдвига $\{\mathcal{S}_t;\ t \in \mathbb{R}\}$, определяемых, как в п. 5.1.4. Поскольку $\mathcal{H}_0 = \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_-)) \otimes \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, действие основных процессов $A(t), A^+(t), \Lambda(t)$; $t \in \mathbb{R}_+$ естественно переносится на $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$. Решение уравнения (5.27) является тогда семейством унитарных операторов $\{V(t)\colon t \in \mathbb{R}_+\}$ в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, удовлетворяющим соотношению коцикла (5.19). Из этого соотношения вытекает, что

$$U_t = \begin{cases} \mathcal{S}_t V(t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ V(-t)^* \mathcal{S}_t, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

является группой унитарных операторов в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$. Поскольку $\mathcal{S}_t^*(X \otimes I)\mathcal{S}_t = X \otimes I$, из (5.33) следует, что

$$\Psi_t[S] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} U_t(S \otimes S_0)U_t^*, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Построенное расширение имеет прозрачную физическую интерпретацию. Группа операторов временного сдвига $\{\mathcal{S}_t\}$ описывает динамику квантового шума, который играет роль окружения рассматриваемой системы. Записывая операторы $V(t)$ в виде хронологически упорядоченной экспоненты (5.26), можно видеть, что они задают эволюцию системы с гамильтонианом H, взаимодействующей с окружением посредством сингулярного гамильтониана

$$H_{\text{int}} = i(L\dot{A}^+(t) - L^*\dot{A}(t)). \tag{5.35}$$

Усреднение унитарной эволюции $\{U_t\}$ по вакуумному состоянию шума и дает динамическую полугруппу в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Аналогичное унитарное расширение имеет место для произвольной квантовой динамической полугруппы с генератором (3.20) — надо только использовать квантовое стохастическое исчисление с бесконечным набором операторов рождения–уничтожения.

С точки зрения статистической механики представляет интерес выяснение точных условий, при которых такая в высшей степени идеализированная динамическая система, как квантовый шум, возникает из более реалистичных физических моделей открытых систем (см. в этой связи работы [58], [60], где обсуждаются приближения слабого взаимодействия и малой плотности).

Из формулы (5.33) можно также получить представление квантовой динамической полугруппы через решение классических стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ [48]. Пусть W_t — стандартный винеровский процесс и $\{V_t^{(1)}(W);\, t \in \mathbb{R}_+\}$ — случайный процесс со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered} dV_t^{(1)}(W) = \left[L dW_t - \left(iH + \frac{1}{2}L^*L\right)dt\right]V_t^{(1)}(W); \\ V_0^{(1)}(W) = I. \end{gathered} \tag{5.36}$$

Тогда

$$\Phi_t[X] = \mathbf{E}_{(1)}(V_t^{(1)}(W)^* X V_t^{(1)}(W)), \tag{5.37}$$

где $\mathbf{E}_{(1)}(\cdot)$ — математическое ожидание, отвечающее распределению винеровского процесса. С другой стороны, пусть N_t — пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, и $\{V_t^{(2)}(N), t \in \mathbb{R}_+\}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} dV_t^{(2)}(N) = \left[(L - I)dN_t - \left(iH + \frac{1}{2}(L^*L - 1)\right)dt\right]V_t^{(2)}(N); \\ V_0^{(2)}(N) = I. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Тогда

$$\Phi_t[X] = \mathbf{E}_{(2)}(V_t^{(2)}(N)^* X V_t^{(2)}(N)). \tag{5.39}$$

где $\mathbf{E}_{(2)}(\cdot)$ — математическое ожидание, отвечающее распределению пуассоновского процесса.

Заметим, что решения уравнений (5.36) и (5.38) могут быть записаны в виде хронологически упорядоченных экспонент (мультипликативных стохастических интегралов):

$$V_t^{(1)}(W) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left\{ L dW_s - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* + L)L \right] ds \right\}, \tag{5.40}$$

$$V_t^{(2)}(N) = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left\{ (\ln L) dN_s - \left[iH + \frac{1}{2}(L^* L - I) \right] ds \right\}. \tag{5.41}$$

Ограничимся выводом представления (5.37). Введем семейство изометрических операторов $V_t^{(1)}$ из $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+)$, определяемых соотношением

$$V_t^{(1)}\psi = V(t)(\psi \otimes \psi_0); \quad \psi \in \mathcal{H}. \tag{5.42}$$

Из уравнения (5.20) следует, что

$$dV_t^{(1)} = \left[L dQ(t) - \left(iH + \frac{1}{2}L^* L \right) dt \right] V_t^{(1)}, \tag{5.43}$$

поскольку, в силу (5.34), коэффициент при $dA(t)$ может быть произвольным. Если воспользоваться теперь преобразованием дуальности, то формула (5.33) перейдет в (5.37), а уравнение (5.43) — в уравнение (5.36). Аналогично, вывод представления (5.39) из формулы (5.33) основан на преобразовании $J^{(\lambda)}$ из (5.30) (при $\lambda = 1$).

5.2.3. Расширения инструментальных процессов

При рассмотрении процессов непрерывного измерения естественно возникает понятие безграничной делимости инструмента, которое объединяет безграничную делимость распределений вероятностей и динамических отображений. В работах Баркиелли и Лупиери [71], [204] построено соответствующее расширение в пространстве Фока, которое можно рассматривать как конкретизацию теоремы Озава из п. 4.1.2, гл. 4 для процессов измерения, протекающих непрерывно во времени. Ограничимся здесь двумя наиболее важными примерами.

Пример 5.2.1. Рассмотрим и.-процесс $\{\mathbf{N}_{a,b}^{(1)}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda)[X] = \mathcal{L}[X] + i\lambda(L^* X + XL) - \frac{1}{2}\lambda^2 X. \tag{5.44}$$

где $L, H = H^*$ — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\mathcal{L}[X]$ задается формулой (5.32). Согласно п. 4.2.3 гл. 4, это есть процесс непрерывного измерения наблюдаемой $A = (L + L^*)$ в системе, эволюционирующей с гамильтонианом H. Из результатов Баркиелли и Лупиери [71] следует, что

$$\mathcal{N}_{0,t}^{(1)}(E)[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes P_{0,t}^{(1)}(E))V(t)]; \quad E \in \mathcal{B}_{0,t}, \tag{5.45}$$

где $\{V(t)\}$ — семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$, удовлетворяющее квантовому стохастическому дифференциальному уравнению (5.27), а $P_{0,t}^{(1)}(E)$; $E \in \mathcal{B}_{0,t}$, — спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $Q(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$, в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ (см. п. 5.2.1) (в силу однородности, аналогичное представление имеет место и для $\mathcal{N}_{a,b}^{(1)}$, где $a \leqslant b$).

Пусть $\{\mathcal{M}_{a,b}^{(1)}\}$ — соответствующий и.-процесс в пространстве состояний. Тогда соотношение (5.45) приобретает вид формулы (4.10) из гл. 4

$$\mathcal{M}_{0,t}^{(1)}(E)[S] = \mathrm{Tr}_{\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))} V(t)(S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \times V(t)^*(I \otimes P_{0,t}^{(1)}(E)), \tag{5.46}$$

которая имеет ясную физическую интерпретацию: наблюдаемая система, первоначально находящаяся в состоянии S и эволюционирующая с гамильтонианом H, взаимодействует с квантовым шумом посредством сингулярного гамильтониана (5.35). При этом над квантовым шумом, который играет роль пробной системы, производится непрерывное неразрушающее измерение семейства совместимых наблюдаемых $Q(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$.

Пример 5.2.2. И.-процесс $\{\mathcal{N}_{a,b}^{(2)}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(2)}(\lambda)[X] = i[H, X] + (L^* X L e^{i\lambda} - L^* L \circ X), \tag{5.47}$$

где $H, L \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, является естественным обобщением считающего процесса из п. 4.2.5, гл. 4. Для этого процесса расширение имеет вид

$$\mathcal{N}_{0,t}^{(2)}(E) = \mathcal{E}_0[V(t)^*(I \otimes P_{0,t}^{(2)}(E))V(t)]; \quad E \in \mathcal{B}_{0,t}, \tag{5.48}$$

где $P_{0,t}^{(2)}(E)$; $E \in \mathcal{B}_{0,t}$, — спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Lambda(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$, в $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$. Соответствующее представление в пространстве состояний

$$\mathcal{M}_{0,t}^{(2)}(E) = \mathrm{Tr}_{\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))} V(t)(S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)V(t)^*(I \otimes P_{0,t}^{(2)}(E)) \tag{5.49}$$

имеет интерпретацию, аналогичную соотношению (5.46).

Несколько слов о методе доказательства соотношений (5.45) и (5.48). Обозначим

$$\widetilde{\mathfrak{N}_t}^{(j)}(B) = \mathcal{E}_0[V(t)^*(I \otimes P_{0,t}^{(j)}(Y(\cdot) : Y(t) - Y(0) \in B))V(t)],$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, и введем характеристические функции

$$\widetilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\widetilde{\mathfrak{N}_t}^{(j)}(dx).$$

Тогда

$$\widetilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda)[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes e^{i\lambda Y^{(j)}(t)})V(t)], \tag{5.50}$$

где $Y^{(1)}(t) = Q(t)$ и $Y^{(2)}(t) = \Lambda(t)$. Используя квантовую формулу Ито, можно доказать, что функции (5.50) удовлетворяют уравнениям

$$d\widetilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \mathfrak{L}^{(j)}(\lambda) \cdot \widetilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda)dt,$$
$$\widetilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \exp t\mathfrak{L}^{(j)}(\lambda).$$

Отсюда вытекает, что $\{\widetilde{\mathfrak{N}}_t^{(j)}\}$ есть сверточная полугруппа, отвечающая и.-процессу $\{\mathfrak{N}_{a,b}^{(j)}\}$. В силу взаимной однозначности соответствия между и.-процессом и сверточными полугруппами (см. п. 4.2.5), отсюда следуют соотношения (5.45) и (5.48).

5.2.4. Стохастические представления процессов непрерывного измерения

Используя прием, который позволил получить в п. 5.2.2 стохастические представления квантовой динамической полугруппы, найдем соответствующие стохастические представления для процессов непрерывного измерения, см. [142]. Из этих представлений вытекает явное описание распределений вероятностей в пространстве траекторий — исходов непрерывного измерения и апостериорных состояний наблюдаемой квантовой системы.

Рассмотрим сначала и.-процесс с генератором (5.44). Как отмечалось в п. 4.2.5, он сосредоточен на непрерывных траекториях. Пусть $\mu_{(1)}$ — мера Винера в пространстве непрерывных функций $\mathcal{C}$, отвечающая стандартному винеровскому процессу W_t.

Предложение 5.2.2. *И.-процесс $\{\mathcal{M}_{a,b}^{(1)}\}$ абсолютно непрерывен по мере $\mu_{(1)}$ в том смысле, что*

$$\mathcal{M}_{0,t}^{(1)}(E)[S] = \int_E V_t^1(W)SV_t^{(1)}(W)^*d\mu_{(1)}(W); \quad E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathcal{C}, \tag{5.51}$$

где $\{V_t^{(1)}(W)\}$ *— семейство ограниченных операторов в* $\mathcal{H}$, *удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению* (5.36) *относительно меры* $\mu_{(1)}$.

Доказательство основано на применении преобразования дуальности к представлению (5.46). При этом, как в п. 5.2.2, появляются операторы $V_t^{(1)}(W)$, а спектральная мера $P_{0,t}^{(1)}$ семейства $Q(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$, диагонализуется, так что проектор $P_{0,t}^{(1)}(E)$ переходит в индикатор множества $E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathfrak{C}$.

Соотношение (5.46) дает конкретное представление вполне положительного инструмента $\mathfrak{M}_{0,t}^{(1)}$ в виде (4.13). Отсюда получается распределение вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий

$$\mu_S(E) = \int\limits_E \operatorname{Tr} SV_t^{(1)}(W)^* V_t^{(1)}(W) d\mu_{(1)}(W); \quad E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathfrak{C}.$$

Оно абсолютно непрерывно по мере Винера $\mu_{(1)}$ и имеет плотность

$$p_t^{(1)}(W) = \operatorname{Tr} SV_t^{(1)}(W) V_t^{(1)}(W)^*, \tag{5.52}$$

которая почти наверное положительна. Апостериорное состояние, отвечающее наблюдаемой траектории W_s; $0 \leqslant s \leqslant t$, есть

$$S_t^{(1)}(W) = p_t^{(1)}(W)^{-1} V_t^{(1)}(W) S V_t^{(1)}(W)^*. \tag{5.53}$$

Отметим, что если начальное состояние чистое, $S = |\psi\rangle\langle\psi|$, то и апостериорные состояния чистые $S_t^{(1)}(W) = |\psi_t^{(1)}(W)\rangle\langle\psi_t^{(1)}(W)|$, где

$$\psi_t^{(1)}(W) = V_t^{(1)}(W)\psi / \|V_t^{(1)}(W)\psi\|.$$

Перейдем к случаю считающего процесса с генератором (5.47). Пусть $\mu_{(2)}$ — мера в пространстве $\mathfrak{D}$, отвечающая пуассоновскому процессу единичной интенсивности.

Предложение 5.2.3. *И.-процесс* $\{\mathfrak{M}_{a,b}^{(2)}\}$ *абсолютно непрерывен по мере* $\mu_{(2)}$, *а именно*

$$M_{0,t}^{(2)}(E)[S] = \int\limits_E V_t^{(2)}(N) S V_t^{(2)}(N)^* d\mu_{(2)}(N); \quad E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathfrak{D}, \tag{5.54}$$

где $\{V_t^{(2)}(N)\}$ *— семейство ограниченных операторов в* $\mathcal{H}$, *удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению* (5.38) *относительно меры* $\mu_{(2)}$.

Доказательство соотношения (5.34) требует некоторого преобразования представления (5.49). Рассмотрим унитарные операторы Вейля $V_z(t) = \exp[zA^+(t) - \bar{z}A(t)]$, где $z \in \mathbb{C}$. При $s \leqslant t$ имеет место соотношение

$$V_z(t)^* A(s) V_z(t) = A(s) + \bar{z}A(s) + zA^+(s) + |z|^2 s = \Pi(s),$$

которое проверяется с использованием уравнения (5.28) и квантовой формулы Ито. Положим $z = 1$, тогда $\Pi(s)$ является пуассоновским процессом единичной интенсивности в пространстве Фока. Обозначая $\widetilde{U}_t = V_1(t)^* V(t)$, перепишем (5.49) в виде

$$M_{0,t}^{(2)}(E) = \mathrm{Tr}_{\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))} \widetilde{U}_t (S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|) \widetilde{U}_t^* (I \otimes \widetilde{P}_{0,t}^{(2)}(E)), \tag{5.55}$$

где $\widetilde{P}_{0.t}^{(2)}$ – спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Pi(s)$; $0 \leqslant s \leqslant t$. Из квантовой формулы Ито вытекает уравнение для $\widetilde{U}_t$:

$$d\widetilde{U}_t = \left\{(L - I)dA^+(t) - (L - I)^* dA(t) - \left[iH + \frac{1}{2}(L^*L - 2L + I)\right]dt\right\}\widetilde{U}_t.$$

Вводя изометрические операторы $V_t^{(2)}$ из $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{H}$, определенные формулой

$$V_t^{(2)}\psi = \widetilde{U}_t(\psi \otimes \psi_0); \quad \psi \in \mathcal{H},$$

и учитывая соотношения (5.34), получаем уравнение

$$dV_t^{(2)} = \left\{(L - 1)d\Pi(t) - \left[iH + \frac{1}{2}(L^*L - I)\right] dt\right\} V_t^{(2)}. \tag{5.56}$$

Унитарный оператор $J^{(1)}$ из п. 5.2.1 переводит пространство Фока $\Gamma(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+))$ в $\mathrm{L}^2(N)$, где N_t — классический пуассоновский процесс единичной интенсивности, при этом уравнение (5.56) переходит в (5.38), проектор $\widetilde{P}_{0.t}^{(2)}(E)$ — в индикатор множества E, а формула (5.55) — в представление (5.54).

Для распределения вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий и апостериорных состояний получаются формулы, аналогичные (5.52)–(5.53).

5.2.5. Нелинейные стохастические уравнения апостериорной динамики

Получим стохастические дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют наблюдаемые траектории и апостериорные состояния в процессе непрерывного квантового измерения. Рассмотрим сначала процесс измерения наблюдаемой $A = L + L^*$ с генератором (5.44). Из уравнения (5.36) для семейства $V_t^{(1)}(W)$ и формулы (5.52) вытекает, что плотность $p_t^{(1)}(W)$ распределения вероятностей μ_S наблюдаемых траекторий относительно меры Винера $\mu_{(1)}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dp_t^{(1)}(W) = m_t(W)p_t^{(1)}(W)dW_t, \tag{5.57}$$

где

$$m_t(W) = \mathrm{Tr}S_t^{(1)}(W)A$$

— апостериорное среднее наблюдаемой A. Отсюда следует, что наблюдаемый процесс $Y(t)$ является процессом диффузионного типа, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t) = m_t(Y)dt + d\widetilde{W}_t, \tag{5.58}$$

где $\widetilde{W}_t$ — обновляющий винеровский процесс[2]. Применяя стохастическое исчисление Ито, получаем уравнение для апостериорного состояния (5.53)

$$\begin{aligned} dS_t^{(1)}(Y) - \mathcal{K}[S_t^{(1)}(Y)]dt = \Big[\Big(L - \frac{1}{2}m_t(Y)\Big)S_t^{(1)}(Y) + {}\\ + S_t^{(1)}(Y)\Big(L - \frac{1}{2}m_t(Y)\Big)^*\Big][dY(t) - m_t(Y)dt]. \end{aligned} \tag{5.59}$$

где

$$\mathcal{K}[S] = -i[H, S] + LSL^* - L^*L \circ S.$$

Это уравнение было получено Белавкиным из рассмотрения квантового аналога задачи фильтрации случайных процессов [78] (см. также Диоши [105]). В случае чистых состояний уравнение для вектора апостериорного состояния имеет вид

$$\begin{aligned} d\psi_t^{(1)}(Y) = \Big[L - \frac{1}{2}m_t(Y)\Big]\psi_t^{(1)}(Y)[dY(t) - m_t(Y)dt] - {}\\ - \Big[iH + \frac{1}{2}\Big(L^*L - Lm_t(Y) + \frac{1}{4}m_t(Y)^2\Big)\Big]\psi_t^{(1)}(Y)dt. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Нелинейность уравнений (5.59) и (5.60) обусловлена нормировкой апостериорных состояний (5.53), в основе же лежит линейное стохастическое уравнение (5.36) типа уравнения Закаи в классической теории фильтрации.

[2] См. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, п. 7.2.

Большой интерес представляет задача вывода и исследования уравнений (5.59) и (5.60) в случае, когда L и H — неограниченные операторы. В работах Диоши [105], Белавкина и Сташевского [80] и Белавкина и Мелсхаймера [79] рассмотрено уравнение

$$d\psi_t^{(1)}(Y) = (Q - \langle Q\rangle_t)\psi_t^{(1)}(Y)[dY(t) - 2\langle Q\rangle_t dt] - \\ - \left[iP^2/2m + \frac{1}{2}(Q - \langle Q\rangle_t)^2\right]\psi_t^{(1)}(Y)dt, \quad (5.61)$$

которое получается из (5.60) формальной заменой $L = Q, H = P^2/2m$, где Q и P — канонические наблюдаемые нерелятивистской частицы массы m. Это соответствует непрерывному приближенному измерению координаты свободной частицы. Найдено явное решение в случае гауссовского начального состояния и показано, что оно является гауссовским с дисперсией, стремящейся к конечному пределу при $t \to +\infty$. Таким образом, уравнение (5.61) снимает известный квантовомеханический парадокс с расплыванием волнового пакета свободной частицы.

Интересно, что сходные нелинейные уравнения, однако с совершенно иной мотивировкой и интерпретацией, возникли практически одновременно в работах ряда авторов, занимающихся поисками альтернативного концептуального обоснования теории квантового измерения. В работе, опубликованной в сборнике [204], Гирарди, Римини и Вебер поставили вопрос о нахождении уравнений, дающих единое описание микро- и макросистем, из которых, в частности, вытекали бы как обратимая квантовая динамика, так и необратимые изменения типа проекционного постулата. Предлагались различные решения этого вопроса; в работах Джизэна [122], [119] введено уравнение типа (5.60), где, однако, вместо $dY(t) - m_t(Y)dt$ фигурирует стохастический дифференциал некоторого априорно данного винеровского процесса (уравнение в [122] отличается выбором фазового множителя для $\psi_t^{(1)}$). Пусть $H = 0$, $L = \sum x_i E_i$ — самосопряженный оператор с чисто точечным спектром. В [122], [119] отмечается, что получающееся уравнение

$$d\psi_t = (L - \langle L\rangle_t)\psi_t dW_t - \frac{1}{2}(L - \langle L\rangle_t)^2\psi_t dt, \quad (5.62)$$

где $\langle L\rangle_t = \langle\psi_t|L \mid \psi_t\rangle$, дает динамическое описание проекционного постулата $\psi \to \psi_i = E_i\psi/\|E_i\psi\|$, в том смысле, что при $t \to +\infty$ решение ψ_t стремится к одному из состояний ψ_i. В работе Гатарска и Джизэна [117] дано математическое исследование уравнения (5.62) для неограниченного оператора L, а также уравнения типа (5.61). Для доказательства существования слабого решения эти авторы использовали формальный прием преобразования вероятностной меры (теорему Гирсанова), который в схеме непрерывного измерения имеет содержательный смысл перехода от процесса $Y(t)$ к винеровскому процессу $\widetilde{W}_t$, определяемому формулой (5.58). Утверждалось, что таким же образом можно исследовать и многомерный случай. Однако их аргументация на самом деле существенным образом основывается на приведенном ниже свойстве (5.66), которое автоматически выполняется в случае (5.62). Чтобы распространить доказательство на общий случай, надо дополнить его условием, обеспечивающим сохранение среднеквадратичной нормы (см. ниже).

В случае считающего процесса с генератором (5.47) стохастическое уравнение для плотности в пространстве траекторий имеет вид

$$dp_t^{(2)}(N) = [\lambda_t(N) - 1]p_t^{(2)}(N)(dN - dt),$$

где

$$\lambda_t(N) = \operatorname{Tr} S_t^{(2)}(N)L^*L$$

есть апостериорная интенсивность скачков. Уравнением для апостериорного состояния является

$$dS_t^{(2)}(Y) - \mathcal{K}[S_t^{(2)}(Y)]dt = \left[\frac{LS_t^{(2)}(Y)L^*}{\lambda_t(Y)} - I\right][dY(t) - \lambda_t(Y)dt]. \quad (5.63)$$

Общий вид *диссипативных* стохастических интегрально-дифференциальных уравнений Ито, сводящихся к нелинейным уравнениям типа (5.59) или (5.63) в случае винеровских или пуассоновских шумов, и соответствующие квантовые процессы изучались в работе [73]. В работах автора [147], [149] были исследованы диссипативные стохастические уравнения, порожденные многомерным винеровским процессом, в случае общих неограниченных операторных коэффициентов, и их применение к построению квантовых динамических полугрупп с неограниченными генераторами.

Классическое стохастическое исчисление дает мощный аналитический инструмент для изучения соответствующих квантовых процессов. С другой стороны, квантовое стохастическое исчисление дает новое понимание задач существования и единственности решений для широкого класса стохастических уравнений Ито в гильбертовом пространстве. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$\psi_t = \psi_0 + \int_0^t \sum_j L_j\psi(s)dW_j(s) - \int_0^t K\psi(s)ds \quad (5.64)$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $W_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ — независимые стандартные винеровские процессы, L_j и K — вообще говоря, неограниченные операторы, определенные на плотной области $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, а $\psi_0 \in \mathcal{H}$. Уравнение называется *диссипативным*, если

$$\sum_j \|L_j\psi\|^2 - 2\Re\langle K\psi|\psi\rangle \leqslant c\|\psi\|^2, \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{5.65}$$

Результаты по поводу уравнений этого типа можно найти в книге Розовского [208], где при некоторых дополнительных предположениях доказывается существование и единственность сильного решения уравнения (5.64) в некоторой шкале гильбертовых пространств. Другие работы используют условия типа коэрцитивности, более сильные, чем (5.65). При весьма общих предположениях можно доказать существование и единственность обобщенных решений диссипативных уравнений в смысле слабой топологии [147]. Доказательство навеяно некоторыми идеями из квантового стохастического исчисления (хотя его не использует!), а именно, доказательством Фриджерио–Фаньолы существования и доказательством Мохари единственности решений квантовых стохастических уравнений (обзор этих идей см. в [183], гл. VI). Можно ввести дуальное стохастическое дифференциальное уравнение, решение которого является классическим аналогом «дуального коцикла», введенного и изученного в некоммутативном случае в работах Журне.

Консервативные стохастические дифференциальные уравнения оказываются тесно связанными с такими важными объектами некоммутативной вероятности, как динамические полугруппы и нелинейное стохастическое уравнение для нормализованной апостериорной волновой функции. Линейное уравнение (5.64) является *консервативным*, если левая часть в (5.65) тождественно равна нулю, т. е. выполняется условие (3.23) из гл. 3. Если операторы L_j, K ограничены, то это условие влечет сохранение среднеквадратичной нормы для его решения:

$$\mathbf{M}\|\psi_t\|^2 = \|\psi_0\|^2, \tag{5.66}$$

однако в общем случае будет выполняться только $\mathbf{M}\|\psi_t\|^2 \leqslant \|\psi_0\|^2$ с возможностью строгого неравенства. Решения уравнения (5.64) дают классическое стохастическое представление для квантовых динамических полугрупп, обобщающее (5.37), а свойство (5.66) тесно связано с унитальностью (отсутствием взрыва) для этой динамической полугруппы. Уравнение (5.64) соответствует прямому, в то время как дуальное уравнение, аналогично, соответствует обратному марковскому управляющему уравнению, для которых полугруппа является общим минимальным решением. Используя технику стохастического исчисления Ито в гильбертовом пространстве, свойство (5.66) можно вывести из консервативности и дополнительного условия гипердиссипативности (3.27), которое означает диссипативность в гильбертовой шкале, связанной с некоторым строго положительным самосопряженным оператором (см. п. 3.3.3, гл. 3).

Литература

1. Амосов Г. Г., Холево А. С., Вернер Р. Ф., *О проблеме аддитивности в квантовой теории информации*, Пробл. передачи информ. **36** No. 4, стр. 25–34 (2000); LANL e-print math-ph/0003002

2. Артемьев А. Ю., *Классификация квантовых марковских уравнений спиновых систем по группам симметрий окружения*, Теорет. и математич. физика. **79** No. 3, стр. 323–333 (1989)

3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Москва, Наука, (1966)

4. Белавкин В. П., *Теорема реконструкции для квантового случайного процесса*, Теоретич. и математич. физика. **62** No. 3, стр, 409–431 (1985)

5. Белавкин В. П., *Квантовые ветвящиеся процессы и нелинейная динамика многоквантовых систем*, ДАН СССР **301** No. 6, стр. 1348–1352, (1988)

6. Белавкин В. П., Гришанин Б. А., *Исследование проблемы оптимального оценивания в квантовых каналах методом обобщенного неравенства Гейзенберга*, Пробл. передачи информации **9** No. 3, стр. 44–52 (1973)

7. Березин Ф А., *Метод вторичного квантования*, Москва, Наука, (1986)

8. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т., *Общие принципы квантовой теории поля*, Москва, Наука, (1987)

9. Богомолов Н. А., *Минимаксные измерения в общей теории статистических решений*, Теор. вероятн. и ее примен. **26** No. 4, стр. 798–807 (1981)

10. Брателли У., Робинсон Д., *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Москва, Мир, (1982)

11. Вейль Г., *Теория групп и квантовая механика*, Москва, Наука, (1986)

12. Вигнер Е., *Этюды о симметрии*, Москва, Мир, (1971)

13. Гренадер У., *Вероятности на алгебраических структурах*, Москва, Мир, (1965)

14. Гриб А. А., *Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых колрреляций на макроскопических расстояниях*, Успехи физ. наук **142** No. 4, стр. 619–634 (1984)

15. Денисов Л. В., *Безгранично делимые марковские отображения в квантовой теории вероятностей*, Теория вероятн. и ее примен. **33** No. 2, стр. 417–420 (1988)

16. Дирак П., *Принципы квантовой механики*, Москва, Наука, (1979)

17. Додонов В. В., Манько В. И., *Обобщения соотношений неопределенностей в квантовой механике*, Труды ФИАН СССР **183**, стр. 5–70 (1987)

18. Китаев А. Ю., *Квантовые вычисления: алгоритмы и исправление ошибок*, УМН, **52** No. 6, стр. 53–112 (1997)

19. Клаудер Дж. и Сударшан Э., *Основы квантовой оптики*, Москва, Мир, (1970)

20. Колмогоров А. Н., *Основные понятия теории вероятностей*, Москва, Наука, (1974)

21. Макки Дж., *Лекции по математическим основам квантовой механики*, Москва, Мир, (1965)

22. Маслов В. П., *Операторные методы*, Москва, Наука, (1973)

23. Менский М. Б., *Группа путей: измерения, поля, частицы*, Москва, Наука, (1983)

24. фон Нейман Дж., *Математические основы квантовой механики*, Москва, Наука, (1964).

25. Оселедец В. И., *Вполне положительные линейные отображения, негамильтонова эволюция и квантовые стохастические процессы*, Итоги науки

и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т. 20. Москва, ВИНИТИ, стр. 52–94, (1983)

26. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., *Теория вероятностей*, Москва, Наука, (1967)

27. Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, Т. 2. Москва, Наука, (1978)

28. Рисс Б., Секельфальви-Надь Б., *Лекции по функциональному анализу*, Москва, Мир, (1979)

29. Сарымсаков Т. А., *Введение в квантовую теорию вероятностей*, ФАН, Ташкент, (1985)

30. Сигал И., *Математические проблемы релятивистской физики*, Москва, Мир, стр. 191, (1968)

31. Скороход А. В., *Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы*, Успехи матем. наук, **37** No. 6, стр. 157–183 (1982)

32. *Современные проблемы математики. Новейшие достижения*. ВИНИТИ, **36**, стр. 185, (1990).

33. Стратонович Р. Л., Ванцян А. Г., *Об асимптотически безошибочном декодировании в чистых квантовых каналах*, Пробл. управл. и теор. информ. **7** No. 3, стр. 161–174 (1978)

34. Хелстром К. У., *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*, Москва, Мир, (1979)

35. Холево А. С., *Аналог теории статистических решений в некоммутативной теории вероятностей*, Труды моск. мат. общества,. **26**, стр. 133–149 (1972)

36. Холево А. С., *К математической теории квантовых каналов связи*, Пробл. передачи информ. **8** No. 1, стр. 62–71, (1972)

37. Холево А. С., *Информационные аспекты квантовых измерений*, Пробл. передачи информ. **9** No. 2, стр. 31–42 (1973)

38. Холево А. С., *Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи*, Пробл. передачи информ. **9** No. 3, стр. 3–11 (1973)

39. Холево А. С., *Исследования по общей теории статистических решений*, Труды МИАН СССР **124**, Москва, Наука, (1976).

40. Холево А. С., *О пропускной способности квантового канала связи*, Пробл. передачи информ. **15** No. 4, стр. 3–11 (1979)

41. Холево А. С., *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Москва, Наука, (1980)

42. Холево А. С., *О проверке статистических гипотез в квантовой теории*, Probab. Math. Statist. **3** No. 1, 113–126 (1982)

43. Холево А. С., *Квантово-вероятностное исследование статистики отсчетов с применением к приемнику Долинара*, Изв. ВУЗ. Математика **26**, No. 8, 3–19 (1982).

44. Холево А. С., *Обобщенные системы импримитивности для абелевых групп*, Изв. ВУЗ. Математика **27**, No. 2, 49–71 (1983).

45. Холево А. С., *Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры*, Москва, Знание, (1985)

46. Холево А. С., *Об одном обобщении канонического квантования*, Изв. акад. наук, сер. Мат. **50** No. 1, стр. 181–194 (1986).

47. Холево А. С., *Безгранично-делимые измерения в квантовой теории вероятностей*, Теория вероят. и ее примен. **31** No. 3, стр. 560–564 (1986)

48. Холево А. С., *Стохастические представления квантовых динамических полугрупп*, Труды МИАН. **191**, стр. 130–139 (1989)

49. Холево А. С., *Квантовая вероятность и квантовая статистика*, Итоги науки и техники, Современные проблемы мат-ки, **83**, ВИНИТИ, Москва, (1991)

50. Холево А. С., *О формуле Леви–Хинчина в некоммутативной теории вероятностей*, Теория вероятн. и ее примен. **37**, No. 2, стр. 211–216 (1993)

51. Холево А. С., *Эксцессивные отображения, «моменты достижения» и возмущения динамических полугрупп*, Известия РАН: Математика, **59**, стр. 207–222 (1995).

52. Холево А. С., *На $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ существует нестандартная динамическая полугруппа*, УМН, **51** No. 6, стр. 225–226 (1996)

53. Холево А. С., *Квантовые теоремы кодирования*, УМН, **53** No. 6, стр. 193–230 (1998).

54. Холево А. С., *Введение в квантовую теорию информации*, Москва, МЦНМО, (2002)

55. Цирельсон Б. С., *Квантовые аналоги неравенств Белла. Случай двух пространственно разделенных областей*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Проблемы вероятностных распределений. IX. **142**, стр. 175–194 (1985)

56. Ченцов Н. Н., *Статистические решающие правила и оптимальные выводы*, Москва, Наука, (1972)

57. Эмх Ж., *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Москва, Мир, (1976)

58. Accardi L., Alicki R., Frigerio A., Lu Y. G., *An invitation to the weak coupling and low density limits*, Quant. Prob. Rel. Topics **6**, 3–62 (1991)

59. Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T., *Quantum stochastic processes*, Publ. RIMS Kyoto University **18**, 97–133 (1982)

60. Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V., *Stochastic limit of quantum theory*, Springer, Berlin, (2001) (to be published)

61. Accardi L., Schürmann M. and von Waldenfels W., *Quantum independent increment processes on superalgebras*, Math. Z. **198**, 451–477 (1988)

62. Adami C., Cerf N. J., *Capacity of noisy quantum channels*, Phys. Rev. **A 56**, 3470–3485 (1997)

63. Agarwal G. S., *Quantum theory of nonlinear mixing in multimode fields*, Phys. Rev. A **A 34**, 4055–4069 (1986)

64. Alberti P. M., Uhlmann A., *Stochasticity and partial order*, Kluwer, Dordrecht. (1982)

65. Ali S. T. and Prugovečki E., *Mathematical problems of stochastic quantum mechanics: harmonic analysis on phase space and quantum geometry*, Acta Appl. Math. **6**, 1–62 (1986)

66. Alicki R. and Lendi K., *Quantum dynamical semigroups and applications*, Lect. Notes Phys. **286**, (1987)

67. Ando T. and Choi M. D., *Non-linear completely positive maps*. In *Aspects of positivity in functional analysis*. Eds. R. Nagel, U. Schlotterbeek and M. P. H. Wolff, North-Holland, Elsevier, pp. 3–13, (1986)

68. H. Araki, *Factorizable representations of current algebras*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. **A5**, 361–422 (1970)

69. Barchielli A., Lanz L. and Prosperi G. M., *A model for macroscopic description and continuous observations in quantum mechanics*, Nuovo Cimento **72 B**, 79–91 (1982)

70. Barchielli A., Lanz L. and Prosperi G. M., *Statistics of continuous trajectories in quantum mechanics: operation-valued stochastic processes*, Found. Phys. **13**, 779–812 (1983)

71. Barchielli A. and Lupieri G., *Quantum stochastic calculus, operation-valued stochastic processes and continual measurements in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **26** No. 9, 2222–2230 (1985)

72. Barchielli A., Lupieri G., *An analog of Hunt's representation theorem in quantum probability*, J. Theor. Probab. **6**, 231–265 (1993)

73. Barchielli A., Holevo A. S., *Constructing quantum measurement processes via classical stochastic calculus*, Stoch. Proc. and Appl. **58**, 293–317 (1995)

74. Barchielli A., Paganoni A. M., *Detection theory in quantum optics: stochastic representation*, Quant. Semiclass. Optics **8**, 133–156 (1996)

75. Barnett C., Streater R. E. and Wilde I. E., *The Ito – Clifford integral*, J. Funct. Anal. **48** No. 2, 171–212 (1982)

76. Barnum H., Nielsen M. A., Schumacher B., *Information transmission through a noisy quantum channel*, Phys. Rev. A **57**, 4153–4175 (1998)

77. Barnum H., Knill E., Nielsen M. A., *On quantum fidelities and channel capacities*, IEEE Trans. Inform Theory **84**, 1317–1329 (2000); LANL Report quant-ph/9809010

78. Belavkin V. P., *Nondemolition stochastic calculus in Fock space and nonlinear filtering and control in quantum systems*. In: *Stochastic methods in mathematics and physics, Proc. 24 Karpacz winter school 1988*. Eds. R. Gielerak and W. Karwowski, World Scientific, Singapore, pp. 310–324, (1989)

79. Belavkin V. P. and Melsheimer O., *A Hamiltonian solution to quantum collapse, state diffusion and spontaneous localization*. In: *Proc. 2-nd Int. Conf. on Quantum Communication and Measurement, Nottingham 1994*. Eds. V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson, Plenum Press, NY pp. 201–222, (1995)

80. Belavkin V. P. and Staszewski P., *A quantum particle undergoing continuous observation*, Phys. Lett. A. **140** No. 7/8, 359–362 (1989)

81. Bell J. S., *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. **38**, 447–552 (1966)

82. Benjaballah C., *Introduction to photon communication*, Lect. Notes Phys. **m29**, Springer-Verlag, Berlin, (1995)

83. Bennett C. H., Shor P. W., *Quantum information theory*, IEEE Trans. Inform. Theory **44** No. 6, 2724–2742 (1998)

84. Bennett C. H., Shor P. W., Smolin J. A., Thapliyal A. V., *Entanglement-assisted classical capacity of noisy quantum channel*, Phys. Rev. Lett., **83**, 3081, (1999); LANL Report quant-ph/9904023

85. Berberian S. K., *Notes on spectral theory*, Van Nostrand, Princeton, (1966)

86. Braginsky V. B., Khalili F. Ya., *Quantum measurement*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992)

87. Braginsky V. B., Vorontzov Y. I. and Thorne K. S., *Quantum nondemolition measurement*, Science **209** 4456, 547–557 (1980)

88. Bratteli O. and Robinson D. W., *Operator algebras and quantum statistical mechanics* I, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1979)

89. Busch P., Grabovski M., Lahti P. J., *Operational quantum physics*, Lect. Notes Phys. **m31**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1997)

90. Carmichael H. J., *An open system approach to quantum optics*, Lect. Notes. Phys. **m18**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1993)

91. Carruthers P. and Nieto M. M., *Phase and angle variables in quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **40** No. 2, 411–440 (1968)

92. Castrigiano D. P. L., *On euclidean systems of covariance for massless particles*, Lett. Math. Phys. **5**, 303–309 (1981)

93. Cattaneo U., *On Mackey's imprimitivity theorem*, Commun. Math. Helv. **54** No. 4, 629–641 (1979)

94. Cattaneo U., *Densities of covariant observables*, J. Math. Phys. **23** No. 4, 659–664 (1982)

95. Chebotarev A. M., *Lectures on quantum probability*, Aportaciones matemáticas, textos **14**, Sociedad Matemática Mexicana (2000)

96. Chebotarev A. M., Fagnola F., Frigerio A., *Towards a stochastic Stone's theorem*, Stochastic partial differential equations and applications. Pitman Research Notes in Math. pp. 86–97, (1992)

97. Chebotarev A. M., Fagnola F., *Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups*, J. Funct. Anal. **118** 131–153 (1993)

98. Christensen E., Evans D. E., *Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups*, J. London Math. Soc. **20** No. 2, 358–368 (1979)

99. Cover T. M., Thomas J. A., *Elements of information theory*, Wiley, New York, (1991)

100. D'Ariano G. M., *Homodyning as universal detection*. In: *Quantum Communication, Computing and Measurement*. Eds. O. Hirota, A. S. Holevo and C. M. Caves, Plenum Press, NY, pp. 253–264, (1997); LANL e-print quant-ph/9701011

101. Davies E. B., *Quantum theory of open systems*, Academic Press, London, (1976)

102. Davies E. B., *Quantum dynamical semigroups ant the neutron diffusion equation*, Rep. Math. Phys. **11** No. 2, 169–188 (1977)

103. Davies E. B., *Information and quantum measurement*, IEEE Trans. Inform. Theory **IT 24**, 596–599 (1978)

104. Davies E. B. and Lewis J. T., *An operational approach to quantum probability*, Comm. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970)

105. Diosi L., *Continuous quantum measurement and Ito formalism*, Phys. Lett. A **129** No. 8/9, 419–423 (1988)

106. Diosi L., *Localized solution of a simple nonlinear quantum Langevin equation*, Phys. Lett. A **132** No. 5, 233–236 (1988)

107. Doebner H. D., Luecke W., *Quantum logic as a consequence of realistic measurements*, J. Math. Phys. **32**, 250–253 (1991)

108. Emery M., *Stabilite des solutions des equations differentielles stochastiques: applications aux integrals multiplicatives stochastiques*, Z. Wahrsch Verw. Gebiete **41**, 241–262 (1978)

109. Evans D. E., *A review on semigroups of completely positive maps*, Lect. Notes Phys. **116**, 400–406 (1980)

110. Evans D. E., Lewis J. T., *Dilations on irreversible evolutions in algebraic quantum theory*, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., Ser. A. **24**, (1977)

111. Fagnola F., *Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space*, Quant. Probab. Rel. Topics **8**, 189–214 (1993)

112. *Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces*. Eds. A. Hartkamper and H. Neumann, Lect. Notes Phys. **29**, Springer-Verlag, New

York-Heidelberg-Berlin, (1974)

113. Friedman C. N., *Semigroup product formulas, compressions and continual observations in quantum mechanics*, Indiana Univ. Math. J. **21** No. 11, 1001–1013 (1972)

114. Frigerio A. and Maassen H., *Quantum Poisson processes and dilations of dynamical semigroups*, Probab. Theory Rel. Fields **83** No. 4, 489–508 (1989)

115. Gardiner C. W., *Quantum noise*, Springer-Verlag, Berlin, (1991)

116. Gardiner C. W., Collett M. J., *Input and output in damped quantum systems: quantum stochastic differential equations and the master equation*, Phys. Rev. A **31**, 3761–3774 (1985)

117. Gatarek D. and Gisin N., *Continuous quantum jumps and infinite dimensional stochastic equations*, J. Math. Phys. **32** No. 8, 2152–2157 (1991)

118. Gell-Mann M., Hartle J. B., *Quantum mechanics in the light of quantum cosmology*. In: *Proc. 3d Symp. Found. Quant. Mech.*. Tokyo, pp. 321--343, (1989)

119. Ghirardi G., Pearle P. and Rimini A., *Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles*, Preprint ICTP, Trieste IC/89/44, (1989)

120. Gill R. D., Massar S., *State estimation for large ensembles*, Phys. Rev. A **61**, 042312/1-16 (2000); LANL e-print quant-ph/9902063.

121. Giri N. and von Waldenfels W., *An algebraic version of the central limit theorem*, Z. Warsch. Verw. Gebiete **42** No. 2, 129–134 (1978)

122. Gisin N., *Stochastic quantum dynamics and relativity*, Helv. Phys. Acta **62**, 363–371 (1989)

123. Glauber R., *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev. **130**, 2529–2539 (1963)

124. Gordon J. P., *Noise at optical frequencies; information theory*. In: *Quantum Electronics and Coherent Light, Proc. Int. School Phys. «Enrico Fermi», Course XXXI*. Ed. P. A. Miles, Academic Press, New York, pp. 156–181 (1964)

125. Gorini V., Frigerio A., Verri M., Kossakowski A. and Sudarshan E. C. G., *Properties of quantum Markovian master equations*, Rep. Math. Phys. **13** No. 2, 149–173 (1978)

126. Groh U., *Positive semigroups on C^*- and W^*-algebras*, Lect. Notes Math. **1184**, 369–425 (1986)

127. Gudder S., *Stochastic methods in quantum mechanics*, North-Holland, New York, (1979)

128. Guichardet A., *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lect. Notes Math. **261**, (1972)

129. Haag R., Kastler D., *An algebraic approach to quantum field theory*, J. Math. Phys. **5**, 848–861 (1964)

130. Hausladen P., Jozsa R., Schumacher B., Westmoreland M., Wootters W., *Classical information capacity of a quantum channel*, Phys. Rev. A **54** No. 3, 1869–1876 (1996)

131. Hayashi M., *Asymptotic estimation theory for a finite dimensional pure state model*, J. Phys. A **31**, 4633–4655, (1998)

132. Hegerfeldt G. C., *Noncommutative analogs of probabilistic notions and results*, J. Funct. Anal. **64** No. 3, 436–456 (1985)

133. Holevo A. S., *Some statistical problems for quantum Gaussian states*, IEEE Trans. Inform. Theory **21** No. 5, 533–543 (1975)

134. Holevo A. S., *Problems in the mathematical theory of quantum communication channels*, Rep. Math. Phys. **12** No. 2, 253–258 (1977)

135. Holevo A. S., *Estimation of shift parameter of a quantum state*, Rep. Math. Phys. **13** No. 3, 287–307 (1978)

136. Holevo A. S., *Covariant measurements and uncertainty relations*, Rep. Math. Phys.**16**, No. 3, 289–304 (1980)

137. Holevo A. S., *Bounds for generalized uncertainty of the shift parameter*, Lect. Notes Math. **1021**, 243–251 (1983)

138. Holevo A. S., *Covariant measurements and imprimitivity systems*, Lect. Notes Math. **1055**, 153–172 (1984)

139. Holevo A. S., *Statistical definition of observables and the structure of statistical model*, Rep. Math. Phys. **22** No. 3, 385–407 (1985)

140. Holevo A. S., *Conditionally positive definite functions in quantum probability*. In: Proc. of International Congress of Mathematicians, Berkeley, Calif., USA, pp. 1011–1020 (1987)

141. Holevo A. S., *Quantum estimation*, Adv. Statist. Signal Processing **1**, 157–202 (1987)

142. Holevo A. S., *Inference for quantum processes*. In: *Proc. Internat. Workshop on Quantum Aspects of Optical Communication, Paris, 1990.* Eds. C. Benjaballah, O. Hirota and S. Reynaud, Lect. Notes in Phys. **378**, pp. 127–137 (1991)

143. Holevo A. S., *Time-ordered exponentials in quantum stochastic calculus*, Quant. Probab. Rel. Topics. **7**, 175–202 (1992)

144. Holevo A. S., *A note on covariant dynamical semigroups*, Rep. Math. Phys. **32**, 211–216 (1993)

145. Holevo A. S., *On conservativity of covariant dynamical semigroups*, Rep. Math. Phys. **33**, 95–110 (1993)

146. Holevo A. S., *On the structure of covariant dynamical semigroups*, J. Funct. Anal. **131**, 255–278 (1995)

147. Holevo A. S., *On dissipative stochastic equations in Hilbert space*, Probab. Theory Rel. Fields **104**, 483–500 (1996)

148. Holevo A. S., *Exponential formulae in quantum stochastic calculus. Proc. Royal Academy of Edinburgh* **126A**, 375–389 (1996)

149. Holevo A. S., *Covariant quantum Markovian evolutions*, J. Math. Phys., **37** 1812–1832 (1996)

150. Holevo A. S., *Stochastic differential equations in Hilbert space and quantum Markovian evolutions*, In: *Probability Theory and Mathematical Statistics.*

Proc. 7th Japan-Russia Symp. Tokyo, 1995. Eds. S. Watanabe, M. Fukushima, Yu. V. Prohorov and A. N. Shiryaev, World Scientific, pp. 122–131 (1996)

151. Holevo A. S., *The capacity of quantum channel with general signal states*, IEEE Trans. Inform. Theory, **44** No. 1, 269–273 (1998); LANL e-print quant-ph/9611023,

152. Holevo A. S., *Radon–Nikodym derivatives of quantum instruments*, J. Math. Phys., **39** No. 3, 1373–1387 (1998)

153. Holevo A. S., Sohma M. and Hirota O., *The capacity of quantum Gaussian channels*, Phys. Rev. A **59**, 1820–1828, (1999).

154. Holevo A. S., Werner R. F., *Evaluating capacities of Bosonic Gaussian channels*, Phys. Rev. A **63**, 032312/1-18 (2001); LANL e-print quant-ph/9912067

155. Hudson R. L., *Unification of Fermion and Boson stochastic calculus*, Comm. Math. Phys. **104**, 457–470 (1986)

156. Hudson R. L. and Applebaum D., *Fermion Ito's formula and stochastic evolutions*, Comm. Math. Phys. **96**, 456–473 (1984)

157. Hudson R. L. and Parthasarathy K. R., *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Comm. Math. Phys. **93** No. 3, 301–323 (1984)

158. Ingarden K. S., *Quantum information theory*, Rep. Math. Phys. **10** No. 1, 43–72 (1976)

159. Jajte P., *Strong limit theorems in noncommutative probability*, Lect. Notes Math. **1110**, (1985)

160. Jörgensen P. T. and Moore R. T., *Operator commutation relations*, Reidel, Dordrecht, (1984)

161. Journé T. L., *Structure des cocycles markoviens sur e' espace de Fock*, Probab. Theory Rel. Fields **75** No. 2, 291–316 (1987)

162. Josza R., Schumacher B., *A new proof of the quantum noiseless coding theorem*, J. Modern Optics **41**, 2343–2349 (1994)

163. Khalfin L. A., Tsirelson B. S., *Quantum and quasilocal analogs of Bell inequalities*. In: *Symp. on the foundations of modern physics*. Eds. P. Lahti and P. Mittelstaedt, pp. 441–460 (1985)

164. Kochen S. and Specker E., *The problem of hidden variables in quantum mechanical systems*, J. Math. Mech. **17**, 59–87 (1967)

165. Kossakowski A., *On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems*, Rept. Math. Phys. **3** No. **4**, 247–274 (1972)

166. Kraus K., *General state changes in quantum theory*, Ann. Phys. **64** No. 2, 331–335 (1971)

167. Kraus K., *States, effects and operations*, Lect. Notes Phys. **190**, (1983)

168. Kümmerer B., *Markov dilations on W^*-algebras*, J. Funct. Anal. **62** No. 2, 139–177 (1985)

169. Kümmerer B., Maassen H., *The essentially commutative dilations of dynamical semigroups on M_n*, Comm. Math. Phys. **109**, 1–22 (1987)

170. Lebedev D. S., Levitin L. B., *The maximal amount of information transmissible by an electromagnetic field*, Information and Control **9**, 1–22 (1966)

171. Lesniewski A., Ruskai M. B., *Monotone Riemannian metrics and relative entropy on non-commutative probability spaces*, J. Math. Phys. **40**, 5702–5724, (1999)

172. Lieb E., Ruskai M. B., *Proof of strong subadditivity of quantum mechanical entropy*, J. Math. Phys. **14**, 1938–1941 (1973)

173. Lindblad G., *Entropy, information and quantum measurement*, Comm. Math. Phys. **33**, 305–222 (1973)

174. Lindblad G., *Completely positive maps and entropy inequalities*, Comm. Math. Phys. **40**, 147–151 (1975)

175. Lindblad G., *On the generators of quantum dynamical semigroup*, Comm. Math. Phys. **48**, 119–130 (1976)

176. Lindblad G., *Non-markovian quantum stochastic processes and their entropy*, Comm. Math. Phys. **65**, 281–294, (1979)

177. Ludwig G., *Foundations of quantum mechanics* I, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1983)

178. Mackey G. W., *Unitary group representations in physics, probability and number theory*, Benjamin Cummings Dubl. Comp., Reading Mass., London, (1978)

179. Manuceau J. and Verbeure A., *Quasifree states of the CCR*, Comm. Math. Phys. **9** No. 4, 293–302 (1968)

180. Matsumoto K., *A new approach to CR type bound of the pure state model*, LANL e-print quant-ph/9711008

181. Matsumoto K., *Berry's phase in view of quantum estimation theory and its intrinsic relation with the complex structure*, LANL e-print quant-ph/0006076

182. Massar S., Popescu S., *Optimal extraction of information from finite quantum ensembles*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1259–1263, (1995)

183. Meyer P. A., *Quantum probability for probabilists*, Lect. Notes Math. **1538**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1993)

184. Mielnik B., *Global mobility of Schrödinger's particle*, Rep. Math. Phys. **12** No. 3, 331–339 (1977)

185. Misra B. and Sudarshan E. C. G., *The Zeno's paradox in quantum theory*, J. Math. Phys. **18** No. 4, 756–763 (1977)

186. Nelson E., *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton, New Jersey, (1967)

187. Nelson E., *Field theory and the future of stochastic mechanics*, Lect. Notes Phys. **262**, 438–469 (1986)

188. Nielsen M., Chuang I., *Quantum computation and information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000)

189. Ohya M., Petz D., *Quantum entropy and its use*, Lect. Notes Phys. **8**, Springer-Verlag, Berlin (1993)

190. Ozawa M., *Optimal measurements for general quantum systems*, Rep. Math. Phys. **18** No. 1, 11–28 (1980)

191. Ozawa M., *Quantum measuring processes of continuous observables*, J. Math. Phys. **25**, 79–87 (1984)

192. Ozawa M., *Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **21** No. 2, 279–295 (1985)

193. Ozawa M., *Measuring processes and repeatability hypothesis*, Lect. Notes Math. **1229**, 412–421 (1987)

194. Ozawa M., *Realization of measurement and the standard quantum limit*. In: *Squeezed and nonclassical light*. Eds. P. Tombesi and E. R. Pike, Plenum Press, New York, pp. 263–286, (1989)

195. Parthasarathy K. R., *Azema martingales and quantum stochastic calculus*. In: *Proc. R. C. Bose Symp*. Ed. R. R. Bahadur, Wiley Eastern, New Delhi, pp. 551–569, (1990)

196. Parthasarathy K. R., *An introduction to quantum stochastic calculus*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, (1992)

197. Parthasarathy K. R. and Schmidt K., *Positive definite kernels, continuous tensor products and central limit theorems of probability theory*, Lect. Notes Math. **272**, (1972)

198. Peres A., *Quantum theory: concepts and methods*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht (1993)

199. Petz D., *Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra*, Comm. Math. Phys. **105**, 123–131 (1986)

200. Petz D., *Monotone metrics on matrix spaces*, Lin. Alg. Appl. **244**, 81–96, (1996)

201. *Quantum optics, experimental gravitation and measurement*. Eds. P. Meystre and M. Q. Scully, Plenum Press, New York, (1983)

202. *Quantum communication, computing and measurement* Eds. O. Hirota, A. S. Holevo and C. M. Caves, Plenum Press, New York, (1997)

203. *Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes.* Eds. L. Accardi, A. Frigerio and V. Gorini, Lect. Notes Math. **1055**, (1984)

204. *Quantum probability and applications II.* Eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lect. Notes Math. **1136**, (1985)

205. *Quantum probability and applications III.* Eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lect. Notes Math. **1303**, (1988)

206. *Quantum probability and applications IV.* Eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lect. Notes Math. **1396**, (1989)

207. *Quantum probability and applications V* Eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lect. Notes Math. **1442**, (1990)

208. Rozovskii B. L., *Stochastic evolution systems. Linear theory and applications to nonlinear filtering*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, (1990)

209. Sasaki M., Barnett S. M., Jozsa R., Osaki M., Hirota O., *Accessible information and optimal strategy for real symmetrical quantum sources*, Phys. Rev. A **59** No. 5 (1999); LANL e-print quant-ph/9812062

210. Sauvageot T.-L., *Markov quantum semigroups admit covariant Markov C^*-dilation*, Comm. Math. Phys. **106**, 91–103 (1986)

211. Schürmann M., *Noncommutative stochastic processes with independent and stationary increments satisfy quantum stochastic differential equations*, Probab. Theory Rel. Fields **84**, 473–490 (1990)

212. Scutaru H., *Coherent states and induced representations*, Lett. Math. Phys. **2** No. 2, 101–107 (1977)

213. Shale D. and Stinespring W., *States of the Clifford algebra*, Ann. of Math. **80** No. 2, 365–381 (1964)

214. Spohn H., *Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits*, Rev. Modern Phys. **53** No. 3, 569–615 (1980)

215. Srinivas M., *Collapse postulate for observables with continuous spectrum*, Comm. Math. Phys. **71**, 131–158 (1980)

216. Srinivas M. and Davies E. B., *Photon counting probability in quantum optics*, Optica Acta **28** No. 7, 981–996 (1981)

217. Steane A., *Quantum computing*, Rept. Progress in Physics **61**, 117–173 (1998); LANL e-print quant-ph/9708022

218. Stratonovich R. L., *The quantum generalization of optimal statistical estimation and hypothesis testing*, Stochastics **1**, 87–126 (1973)

219. Streater R. F., *Statistical dynamics: a stochastic approach to nonequilibrium thermodynamics*, Imperial College Press, London, (1995)

220. Summers S. J. and Werner R., *Bell's inequalities and quantum field theory — II. Bell's inequalities are maximally violated in vacuum*, J. Math. Phys. **28** No. 10, 2448–2456 (1987)

221. Takesaki M., *Conditional expectations in von Neumann algebra*, J. Funct. Anal. **9**, 306–321 (1972)

222. Uhlmann A., *Density operators as an arena for differential geometry*, Rep. Math. Phys. **33**, 253–263 (1993)

223. Umegaki H., *Conditional expectations in an operator algebra IV (Entropy and information)*, Kodai Math. Sem. Rep. **14** No. 2, 59–85 (1962)

224. *The uncertainty principle and foundations of quantum mechanics*. Eds. W. C. Price and G. S. Chissick, Wiley, London, (1977)

225. Varadarajan V. S., *Geometry of quantum theory*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, (1985)

226. Vincent-Smith G. F., *Dilation of a dissipative quantum dynamical system to a quantum Markov process*, Proc. London Math. Soc. **59** No. 1, 58–72 (1989)

227. Walls D. F., Milburn G. J., *Quantum optics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1994)

228. Waniewski T., *Theorem about completeness of quantum mechanical motion group*, Rept. Math. Phys. **11** No. 3, 331–339 (1977)

229. Wehrl A., *General properties of entropy*, Rev. Modern Phys. **50**, 221–250 (1978)

230. Werner R. F., *Quantum harmonic analysis on phase space*, J. Math. Phys. **25**, 1404–1411 (1984)

231. Werner R. F., *Optimal cloning of pure states*, Phys. Rev. A **A58**, 1827–1832 (1998)

Символы

Операторы, матрицы	$A, B, C, \dots$
Множества операторов	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$
Вещественная прямая	$\mathbb{R}$
Комплексная плоскость	$\mathbb{C}$
Гильбертовы пространства	$\mathcal{H}, \mathcal{K}, \dots$
Пространство самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{O}(\mathcal{H})$
Алгебра ограниченных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$
Пространство ядерных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{T}(\mathcal{H})$
Пространство эрмитовых ограниченных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$
Пространство эрмитовых ядерных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{T}_h(\mathcal{H})$
Логика проекционных операторов на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{E}(\mathcal{H})$
Множество операторов плотности на $\mathcal{H}$	$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$
Множество обобщенных наблюдаемых	$\mathfrak{M}$
Генераторы и операции	$\mathbf{\mathfrak{L}}, \mathbf{\mathfrak{M}}, \dots$
σ-алгебра борелевских подмножеств множества $\mathcal{X}$	$\mathfrak{B}(\mathcal{X})$
Пространство квадратично интегрируемых функций на $\mathcal{X}$	$\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$
Пространство непрерывных функций на $\mathcal{X}$	$\mathrm{C}(\mathcal{X})$
Вещественная часть	$\Re$
Мнимая часть	$\Im$
Среднее значение наблюдаемой X в состоянии S	$\mathbf{E}_S(X)$
Дисперсия наблюдаемой X в состоянии S	$\mathbf{D}_S(X)$

Предметный указатель