

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и
математическое обеспечение»

М.А. Федоткин, П.В. Пакшин

Вероятностное моделирование управляющих систем

*Учебно-методические материалы по программе повышения
квалификации «Информационные технологии и компьютерное
моделирование в прикладной математике»*

Нижний Новгород
2007

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»

Федоткин М. А., Пакшин П.В. Вероятностное моделирование управляющих систем. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы в исследованиях и разработках информационно-телекоммуникационных систем и технологий». Нижний Новгород, 2007, 81 с.

Предлагается кибернетический подход к построению, анализу, синтезу и оптимизации моделей управляющих систем, которые функционируют в случайных и неопределённых условиях. Целесообразность такого подхода обосновывается на решении проблемы нелокального описания и изучения вероятностных свойств выходных потоков в циклической системе обслуживания и управления конфликтными потоками.

Развивается теория экспоненциальной диссипативности для диффузионных систем случайной структуры. Эта теория затем применяется для оценки возможных вариаций закона управления с обратной связью по выходу, при которых система остается робастно устойчивой. Для линейных систем результаты доведены до двухшаговой процедуры нахождения управления с обратной связью по выходу, обеспечивающего робастную одновременную стабилизацию заданного множества систем. При этом сначала предлагается итерационный алгоритм нахождения робастного стабилизирующего управления, затем на основе решения системы линейных матричных неравенств оцениваются возможные вариации закона обратной связи, при которых сохраняется робастная устойчивость.

Федоткин М. А., Пакшин П.В.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Методы построения моделей реальных случайных экспериментов с управлением	4
1.1. Традиционные подходы в изучении случайных экспериментов с управлением	4
1.2. Случайные эксперименты с управлением с позиции управляющей системы	8
Глава 2. Построение модели и изучение свойств выходных потоков в системе циклического управления конфликтными потоками требований	11
2.1. Постановка задачи на содержательном уровне и применение кибернетического подхода для построения математической модели системы обслуживания.....	11
2.2. Кодирование информации блоков схемы управляющей системы	15
2.3. Свойства управляемой векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ и классификация пространства $\Gamma \times X \times Y_j$ её состояний.....	18
2.4. Качественно-численное исследование системы с использованием информационных технологий и имитационного моделирования	44
Глава 3. Стохастические модели в задачах робастного управления	56
3.1. Введение	56
3.2. Модель системы	58
3.3. Экспоненциальная диссипативность диффузионных процессов с марковскими переключениями	60
3.4. Диссипативность и стабилизация.....	63
3.5. Робастная одновременная стабилизация систем с неопределенными параметрами	65
3.6. Пример	75
3.7. Заключение	77
Литература	79

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С УПРАВЛЕНИЕМ

Известно [1], что одним из основных предметов теории вероятностей является построение адекватной математической модели $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}(\cdot))$ статистически устойчивого случайного эксперимента \mathfrak{E} с некоторым комплексом условий его проведения. Произвольный элемент ω из множества Ω определяет с помощью некоторого языка описание так называемого элементарного исхода эксперимента \mathfrak{E} . Множество \mathfrak{S} содержит все наблюдаемые исходы $A \subset \Omega$ эксперимента \mathfrak{E} , и, наконец, вероятностная функция $\mathbf{P}(A): \mathfrak{S} \rightarrow [0,1]$ задается на σ -алгебре \mathfrak{S} .

1.1. Традиционные подходы в изучении случайных экспериментов с управлением

Для многих реальных и статистически устойчивых экспериментов \mathfrak{E} на содержательном уровне можно подметить общую ситуацию из следующих пунктов.

1. Имеется эксперимент \mathfrak{E}^0 некоторое множество T элементов t и однопараметрическое по параметру t семейство $\{\mathfrak{E}_t^0: t \in T\}$ экспериментов. В результате проведения экспериментов $\mathfrak{E}_t^0, t \in T$, однозначно по некоторому закону определяется элементарный исход эксперимента \mathfrak{E}^0 . В этом случае будем писать $\mathfrak{E}^0 = \prod_{t \in T} \mathfrak{E}_t^0$ и говорить, что

эксперимент \mathfrak{E}^0 происходит во времени $t \in T$, т.е. элемент t здесь интерпретируется как время. Каждый экспериментов \mathfrak{E}_t^0 будем называть статическим, а статистически устойчивый эксперимент \mathfrak{E}^0 — эволюционным.

2. Имеется некоторое множество \mathcal{R} элементов b , совокупность экспериментов $\mathfrak{E}_b^c, b \in \mathcal{R}$, и, наконец при каждом фиксированном $b \in \mathcal{R}$ множество $\{\mathfrak{E}_{b,t}^c: t \in T\}$ статистически устойчивых экспериментов. После проведения всех экспериментов $\mathfrak{E}_{b,t}^c, t \in T$, мы однозначно по некоторому правилу находим элементарный исход эволюционного эксперимента \mathfrak{E}_b^c , т. е. по аналогии с экспериментом \mathfrak{E}^0 эксперимент \mathfrak{E}_b^c происходит во времени $t \in T$ и, следовательно, $\mathfrak{E}_b^c = \prod_{t \in T} \mathfrak{E}_{b,t}^c$ для каждого $b \in \mathcal{R}$.

3. Предполагается, что при проведении эксперимента \mathfrak{E}^0 ставится некоторая цель. Эта цель может быть достигнута с помощью выбора некоторым образом эксперимента \mathfrak{E}_b^c из множества $\{\mathfrak{E}_b^c: b \in \mathcal{R}\}$. Естественно, при этом эксперимент \mathfrak{E}_b^c активно влияет на

эксперимент \mathcal{E}^0 по достижению поставленной цели. В силу этого в дальнейшем эксперимент \mathcal{E}^0 удобно называть *объектом управления*, а эксперимент \mathcal{E}_b^c – *системой управления*. При этом в отличие от системы управления, природа и структура объекта управления фиксированы в некотором смысле.

4. В реальной жизни мы можем интересоваться отдельно объектом управления и системой управления. Однако чаще всего мы будем рассматривать их совместное поведение, т. е. будем изучать упорядоченную пару $\mathcal{E}_b = (\mathcal{E}^0, \mathcal{E}_b^c)$, где $b \in \mathcal{R}$.

Упорядоченную пару $(\mathcal{E}^0, \mathcal{E}_b^c)$ будем называть *статически устойчивым экспериментом с управлением*. Между объектом управления \mathcal{E}^0 и системой управления \mathcal{E}_b^c , происходит взаимодействие во времени $t \in T$. Это означает, что исходы экспериментов \mathcal{E}_t^0 , $t \in T$, как правило влияют на исходы экспериментов $\mathcal{E}_{b,t}^c$, $t \in T$, а исходы экспериментов $\mathcal{E}_{b,t}^c$, $t \in T$ всегда влияют на исходы экспериментов \mathcal{E}_t^0 , $t \in T$. Если исходы экспериментов \mathcal{E}_t^0 , $t \in T$, не влияют на исходы экспериментов $\mathcal{E}_{b,t}^c$, $t \in T$, то мы имеем дело со *статически устойчивым экспериментом \mathcal{E}_b с управлением без канала обратной связи*. В противном случае эксперимент \mathcal{E}_b функционирует с каналом обратной связи. При наличии канала связи случайные эксперименты \mathcal{E}^0 и \mathcal{E}_b^c практически не отличаются друг от друга с точки зрения их взаимодействия. Однако следует помнить, что природа и структура системы управления может выбираться путем указания некоторого элемента b из множества \mathcal{R} .

Зафиксируем некоторую природу и структуру $b \in \mathcal{R}$ для системы управления \mathcal{E}_b^c . Пусть теперь $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}(\cdot))$ есть вероятностная модель статически устойчивого случайного экспериментом \mathcal{E}_b с управлением. В настоящее время рассматривают только такие случайные эксперименты с управлением, для которых описание $\omega \in \Omega$ элементарного исхода $\mathcal{E}_b = (\mathcal{E}^0, \mathcal{E}_b^c)$ и σ -алгебра \mathfrak{S} всех исходов \mathcal{E}_b не зависят от конкретного выбора природы и структуры $b \in \mathcal{R}$ системы управления. Однако вероятностная природа функционирования \mathcal{E}_b зависит от $b \in \mathcal{R}$, и поэтому у вероятностной меры $\mathbf{P}_b(\cdot)$ мы ставим метку (индекс) b , подчеркивая тем самым зависимость основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ от $b \in \mathcal{R}$. Заметим, что предлагаемый в работе подход позволяет рассматривать эксперименты \mathcal{E}_b , вероятностная модель которых имеет вид $(\Omega_b, \mathfrak{S}_b, \mathbf{P}_b(\cdot))$, т. е. зависит от b .

Пусть (Z, \mathcal{B}) и (Y, \mathcal{L}) – измеримые пространства с выделенными σ -алгеброй \mathcal{B} подмножеств множества Z и σ -алгеброй \mathcal{L} подмножеств множества Y . Пространство (Z, \mathcal{B}) называют *Фазовым пространством состояний объекта управления* \mathcal{E}^0 , а пространство (Y, \mathcal{L}) , которое в простейшем случае не зависит от b , называют *Фазовым пространством системы управления* \mathcal{E}_b^c . При каждом $t \in T$ обозначим через $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$, где $\varphi_t(\omega): \Omega \rightarrow Z$ и $\psi_t(\omega): \Omega \rightarrow Y$, случайные элементы [2] со значениями в Z и соответственно в Y . Случайные элементы, в частности, могут быть случайными величинами или векторами. На практике $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$ измеряют элементарный исход эксперимента \mathcal{E}_b с описанием ω из Ω с точки зрения объекта управления \mathcal{E}^0 и с точки зрения системы управления \mathcal{E}_b^c в некоторый фиксированный момент времени $t \in T$. Можно также сказать, что $\varphi_t(\omega)$ и $\psi_t(\omega)$ измеряют исходы экспериментов \mathcal{E}_t^0 и $\mathcal{E}_{b,t}^c$ соответственно. Пусть $(Z \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{L})$ – прямое произведение измеримых пространств (Z, \mathcal{B}) и (Y, \mathcal{L}) .

Определение. *Управляемым случайным процессом на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ называется однопараметрическое семейство $\{(\varphi_t, \psi_t); t \in T\}$ случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $(Z \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{L})$.

При проведении статистически устойчивого случайного эксперимента \mathcal{E}_b с управлением ставятся различные цели (основные задачи управления), которые существенно влияют на выбор измерителей φ_t и ψ_t , где $t \in T$. Математическая формулировка этих задач даже для одного и того же управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t, \psi_t); t \in T\}$ может быть самой разнообразной. Одной из распространенных целей является так называемая оптимизационная задача, которая, в свою очередь, имеет много разных форм. Например, пусть $\mathbf{z} = \{z_t; t \in T\} \in Z^T$, $\mathbf{y} = \{y_t; t \in T\} \in Y^T$, \mathcal{B}_0 — борелевская σ -алгебра на действительной прямой R и пусть задан $(\mathcal{B}^T \times \mathcal{L}^T / \mathcal{B}_0)$ -измеримый [2] функционал $\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{y}): Z^T \times Y^T \rightarrow R$. На содержательном уровне этот функционал определяет количественные затраты, необходимые для управления объектом \mathcal{E}^0 с помощью системы \mathcal{E}_b^c , если выбрана совокупность вида $\mathbf{y} = \{y_t; t \in T\} \in Y^T$ из управлений и при этом объект управления \mathcal{E}^0 принял значение вида $\mathbf{z} = \{z_t; t \in T\} \in Z^T$. Если $\Phi = \{\varphi_t; t \in T\}$, $\Psi = \{\psi_t; t \in T\}$ и $M_b \Phi(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega} \Phi(\Phi, \Psi) d\mathbf{P}_b(\cdot)$ — математическое ожидание затрат при

использовании природы и структуры b системы управления, то цель состоит в нахождении такого b' из \mathcal{R} , для которого имеет место условие оптимальности $M_{b'} \Phi(\varphi, \psi) = \inf\{M_b \Phi(\varphi, \psi): b \in \mathcal{R}\}$.

Итак, рассмотрен первый традиционный подход изучения случайных экспериментов с управлением. Этот подход, прежде всего, позволяет обнаруживать статистические свойства эксперимента \mathcal{E}_b в рамках математической модели $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}_b(\cdot))$, дать определение управляемого случайного процесса и интерпретировать его составляющие φ_t и ψ_t как измерители объекта управления и системы управления. К сожалению, только для очень простых экспериментов \mathcal{E}_b удастся построить обозримую вероятностную модель $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ и, тем самым, исследовать управляемый случайный процесс $\{(\varphi_t, \psi_t): t \in T\}$, а иногда и достигнуть поставленной цели управления, т.е. найти оптимальное управление b' .

Второй подход (для определенности и простоты здесь полагаем $T = \{0, 1, \dots\}$) основан на задании вероятностей

$$\mathbf{P}_b(\{\omega: \varphi_0 \in B\}), B \in \mathcal{B}, \quad (1.1)$$

для измерителя объекта управления \mathcal{E}^0 в начальный момент $t = 0$, семейства условных вероятностей

$$\mathbf{P}_b(\{\omega: \varphi_{t+1} \in B\} | \varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_t, \psi_t), B \in \mathcal{B}, t = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

для измерителя объекта управления \mathcal{E}^0 , и, наконец, семейства условных вероятностей

$$\mathbf{P}_b(\{\omega: \psi_0 \in L\} | \varphi_0), L \in \mathcal{L},$$

$$\mathbf{P}_b(\{\omega: \psi_{t+1} \in L\} | \varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_t, \psi_t, \varphi_{t+1}), L \in \mathcal{L}, t = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

измерителя системы управления \mathcal{E}_b^c . Семейство функций (1.1) — (1.3) обозначим через

$$p(B), p(B; z_0, z_1, \dots, z_t; y_0, y_1, \dots, y_t), \\ q_b(L, z_0), q_b(L; z_0, z_1, \dots, z_{t+1}; y_0, y_1, \dots, y_t), B \in \mathcal{B}, L \in \mathcal{L}, z_t \in Z, y_t \in Y, t = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

В этих обозначениях подразумевается независимость вероятностей (1.1) и семейства условных вероятностей (1.2) от параметра $b \in \mathcal{R}$, ибо природа и структура объекта управления \mathcal{E}^0 фиксированы. В работе [3] приведены условия, при которых по функциям

(1.4) дано построение семейств так называемых выборочных вероятностных пространств вида

$$(Z^T, \mathcal{B}^T, p(\cdot|\mathbf{y})), \mathbf{y} \in Y^T, (Y^T, \mathcal{L}^T, q_b(\cdot|\mathbf{z})), \mathbf{z} \in Z^T \quad (1.5)$$

и выборочного вероятностного пространства

$$((Z \times Y)^T, (\mathcal{B} \times \mathcal{L})^T, u_b(\cdot)), \quad (1.6)$$

и, наоборот, по (1.5) определяются (1.4) и (1.6). Заметим, что условия касаются семейства функций (1.4), семейства по $\mathbf{y} \in Y^T$, распределений $p(C|\mathbf{y})$, $C \in \mathcal{B}^T$, семейства по $\mathbf{z} \in Z^T$, распределений $q_b(D|\mathbf{z})$, $D \in \mathcal{L}^T$, и фазовых пространств (Z, \mathcal{B}) , (Y, \mathcal{L}) . Второй подход позволяет исследование управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t, \psi_t): t \in T\}$ на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ с целью определения оптимального управления объектом \mathcal{E}^0 системой \mathcal{E}_b^c свести к изучению управляемого случайного процесса $\{(\varphi'_t, \psi'_t): t \in T\}$ на выборочном вероятностном пространстве (1.6), где $\varphi'_t(\mathbf{z}) = z_t$, $\psi'_t(\mathbf{y}) = y_t$ при $t = 0, 1, \dots$. Из только рассмотренного подхода непосредственно следует несколько другой подход, который априори предполагает задание семейства выборочных вероятностных пространств (1.5). Затем по (1.5) определяется функция (1.4) и, наконец, по функциям (1.4) строится выборочное вероятностное пространство (1.6), на котором задается и исследуется управляемый случайный процесс $\{(\varphi'_t, \psi'_t): t \in T\}$. Этот прием используют в случае непрерывного множества T , см. [3].

В заключение этого раздела отметим существование большого числа частных и важных для практики подходов в случае, когда между случайными процессами $\Phi = \{\varphi_t: t \in T\}$, $\Psi = \{\psi_t: t \in T\}$ обнаруживаются или предполагаются разнообразные (простые или сложные) функциональные зависимости. Например, если указанные процессы удовлетворяют рекуррентным соотношениям, стохастическим дифференциальным уравнениям и т. д.

1.2. Случайные эксперименты с управлением с позиции управляющей системы

Приведенные в первом разделе подходы фактически основаны на формальном описании статических и функциональных связей между входами и выходами эксперимента \mathcal{E}_b . Иначе говоря, эти подходы изучают статически устойчивые эксперименты с управлением с позиции «черного ящика», как это обычно делается в классических задачах автоматического регулирования. Даже при первом подходе, в

котором для построения $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ требуется непосредственный и детальный анализ комплекса условий проведения статически устойчивого эксперимента с управлением, в действительности достаточно иметь условные вероятности (1.1) — (1.3) и далее изучить вероятностные свойства управляемого случайного процесса $\{(\varphi_t, \psi_t): t \in T\}$ или его копии $\{(\varphi'_t, \psi'_t): t \in T\}$.

Упомянутые подходы обладают существенными недостатками, являющимися следствием их единой точки зрения на изучение статически устойчивых экспериментов управления с позиции «черного ящика». Во-первых, в основу определения управляемого случайного процесса положено понятие о фазовых измеримых пространствах (Z, \mathfrak{B}) и (Y, \mathfrak{L}) состояний для объекта управления \mathfrak{E}^o и соответственно для системы управления \mathfrak{E}_b^c . Это позволяет задавать управляемый случайный процесс с помощью семейства условных распределений (1.4) или (1.5). Достигаемая при таком способе задания управляемых случайных процессов математическая общность результатов [3] не дает возможности получить указанные условные распределения для конкретных экспериментов \mathfrak{E}_b . Например, для реальных процессов обслуживания, страхования, диспетчерского контроля над последовательностью взлетов и приземлений самолетов, управления технологическими и информационными сигналами микросварочного комплекса при сборке интегральных схем на кристаллах, адаптивного регулирования транспортных потоков на перекрестках со сложной геометрией переезда, обработки информационных потоков программ в локальных вычислительных сетях, управления конфликтными потоками самолетов при прохождении пересекающихся воздушных коридоров, организации работы таможен в крупных городах мира и т. п. Во-вторых, перед экспериментом \mathfrak{E}_b может быть поставлен ряд целей с различными способами их достижения. В этом случае приходится рассматривать большое число управляемых случайных процессов с различными выборочными вероятностными пространствами и, следовательно, находить большое число семейств условных распределений вида (1.4) или (1.5). Затем необходимо решить трудную проблему согласования (унификации) этого числа семейств условных распределений, например, с помощью построения единого выборочного вероятностного пространства для всех управляемых случайных процессов. Таковы принципиальные трудности и недостатки в практическом отношении указанных подходов изучения случайных экспериментов с управлением.

В связи с вышесказанным в работах [4, 5] разрабатывается кибернетический подход к построению математической модели, анализу и оптимизации статически устойчивых

экспериментов с управлением. При таком подходе считается, что управляемый случайный процесс в классическом смысле [4] является всего лишь удобной вероятностной моделью совместного функционирования во времени $t \in T$ объекта управления и системы управления, а не моделью эксперимента \mathcal{E}_b . Поэтому всегда возникают трудные вопросы эффективного способа задания и методов изучения управляемых случайных процессов с учетом конкретной природы и цели функционирования эксперимента \mathcal{E}_b . В силу этого на эксперимент \mathcal{E}_b целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения общего понятия управляющей системы, впервые данного в математической кибернетике [6]. Эта точка зрения по существу была поддержана и последовательно развивалась в работах [4, 5]. В этих работах, ради простоты, статистически устойчивый эксперимент \mathcal{E}_b интерпретируется как довольно общий процесс обслуживания неоднородных требований и управления конфликтными транспортными потоками. В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели статистически устойчивого случайного эксперимента \mathcal{E}_b с управлением $b \in \mathcal{R}$ лежат следующие фундаментальные положения:

- 1) принцип дискретности актов функционирования эксперимента \mathcal{E}_b во времени $\tau_i, i \geq 0$, где стробирующий точечный случайный процесс $\{\tau_i; i \geq 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени работы управляющей системы;
- 2) принцип нелокальности в описании поэлементного строения эксперимента \mathcal{E}_b ;
- 3) принцип совместного рассмотрения блочного строения эксперимента \mathcal{E}_b и его функционирования во времени на этапе построения вероятностной модели.

Эти принципы позволили [4, 5] выделить схему, информацию, координаты и функцию статически устойчивого эксперимента \mathcal{E}_b . При таком нетрадиционном подходе статически устойчивый эксперимент с управлением представляет собой единство схемы, информации, координат и функции. Для схемы найдены следующие её составляющие блоки: внешняя среда, входные и выходные полюсы, внешняя память, внутренняя память, устройство по переработке информации внешней и внутренней памяти. Некоторые из перечисленных блоков конкретная схема может не включать. Введено понятие алгоритма управления состояниями составляющих блоков схемы (например, состояниями внутренней памяти). Было проведено кодирование информации или, что то же самое, нелокальное описание составляющих блоков схемы эксперимента \mathcal{E}_b . Рассмотрены нетрадиционные задачи классификации составляющих блоков схемы и задачи выявления существенных связей между этими блоками. Основная проблема, которая была

поставлена и частично решена в [4, 5], заключается в выборе искомым характеристик (управляемых случайных процессов) статически устойчивых экспериментов \mathcal{E}_b , в алгоритмизации и конструктивном построении выбранных управляемых случайных процессов, и, наконец, в изучении их вероятностных свойств с целью решения задачи анализа, синтеза, эволюции, надежности, оптимизации и др.

В следующей главе с целью демонстрации эффективности предполагаемого здесь подхода рассмотрим задачу об обслуживании неоднородных требований и об управлении в классе циклических алгоритмов m конфликтными и независимыми потоками. Решается трудная проблема изучения вероятностных свойств выходных потоков в таких управляющих системах обслуживания. При этом эти результаты являются прямым продолжением исследований, начатых в работе [4, 5]. Поэтому здесь сохраним и используем введенные в [4, 5] терминологию, основные обозначения и определения.

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ И ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ВЫХОДНЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ ТРЕБОВАНИЙ

В этой главе с использованием кибернетического подхода строится и изучается математическая модель выходных потоков, возникающих в системе обслуживания и управления m конфликтными пуассоновскими потоками в классе циклических алгоритмов. Функционирование рассматриваемой системы или эксперимента \mathcal{E}_b описывается случайной векторной последовательностью, включающей в себя описание состояния обслуживающего устройства, величин очередей по потокам и, наконец, описание выходных потоков. Доказано, что нелокальное описание выходных потоков можно выполнить с помощью марковской последовательности. Проведена классификация ее состояний, получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений последовательности и рекуррентные выражения для производящих функций распределений последовательности. Также найдены необходимое и достаточное условия существования стационарного режима функционирования системы. С использованием метода имитационного моделирования проводится статистический анализ свойств выходных потоков, возникающих в изучаемых неклассических системах, а также приводятся численные оценки некоторых параметров функционирования данных систем. Эти оценки позволяют определить квазиоптимальное управление потоками по условию минимума средних задержек требований в системе.

2.1. Постановка задачи на содержательном уровне и применение кибернетического подхода для построения математической модели системы обслуживания

В данном разделе рассматривается система массового обслуживания, которая является математической моделью управления m независимыми и конфликтными транспортными потоками на пересечении магистралей в классе циклических алгоритмов. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать и это не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком. Обслуживание требований из конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. Эти промежутки называются основными этапами обслуживания заявок. Под обслуживанием машин понимается их проезд через перекресток. Кроме того, есть еще дополнительные промежутки переналадок, за счет которых разрешается проблема конфликтности потоков, например, проблема безопасности движения транспорта на перекрестке. Во время переналадок продолжает обслуживаться тот же поток, что и на предыдущем этапе, но с большей интенсивностью.

Так как у каждого из m пуассоновских потоков есть основной этап обслуживания и этап переналадки, то обслуживающее устройство должно иметь ровно $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, ..., $\Gamma^{(2m)}$, причем физический смысл данных состояний состоит в следующем:

1) при $j = 1, 2, \dots, m$ состояние $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживает только требования потока P_j с интенсивностью μ_j (можно интерпретировать это состояние как зеленый свет для потока P_j и красный для остальных потоков);

2) при $j = 1, 2, \dots, m$ состояние $\Gamma^{(2j)}$ обслуживает только требования потока P_j с интенсивностью $\mu_j \zeta \geq \mu_j$ (можно интерпретировать это состояние как желтый свет для P_j).

Здесь μ_j ($\mu_j \zeta$) определяет число машин, пропускаемых за единицу времени в состоянии светофора $\Gamma^{(2j-1)}$ ($\Gamma^{(2j)}$) соответственно.

Длительности состояний $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, ..., $\Gamma^{(2m)}$ соответственно равны T_1, T_2, \dots, T_{2m} единиц времени. Работа обслуживающего устройства осуществляется по циклическому алгоритму [4] с периодом $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{2m}$. Такой алгоритм управления конфликтными потоками используется потому, что он прост в реализации. Более того, за счёт выбора вектора $b = (T_1, T_2, \dots, T_{2m})$ циклический алгоритм часто оказывается квазиоптимальным по условию минимума задержек при сильной загрузке системы. Естественно вектор b есть управление m независимыми конфликтными потоками в циклической системе обслуживания, где $b \in \mathcal{R} = \{(T_1, T_2, \dots, T_{2m}): T_1 > 0, T_2 > 0, \dots, T_{2m} >$

0}. Граф смены состояний обслуживающего устройства имеет вид, представленный на рис. 2.1.

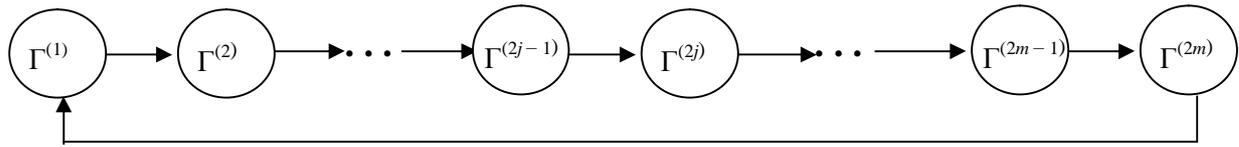


Рис. 2.1. Граф смены состояний обслуживающего устройства

Входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ считаем пуассоновскими соответственно с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Заметим, что для каждого $j = \overline{1, m}$ интенсивность λ_j определяет среднее число машин, поступивших к стоп – линии перекрестка за единицу времени. Для транспортных потоков при условии, что перекресток находится в начале транспортной магистрали и стоит хорошая погода, с большой достоверностью подтверждается движение машин по закону Пуассона. Особое положение закона Пуассона при аналитическом рассмотрении задач транспорта объясняется не только его простотой и адекватностью, но и тем, что многие известные ученые, такие как Ю.К. Беляев, Л. Брейман, Б.В. Гнеденко, Б.И. Григелинис, К. Пальм, А. Реньи, А.Я. Хинчин и др. достаточно полно изучили его свойства.

Заявки, пришедшие в систему, могут или сразу поступать на обслуживание или образовывать неограниченные очереди O_1, O_2, \dots, O_m . Из соответствующей очереди заявки выбираются на обслуживание группами по принципу: первая пришла – первая ушла. Таким образом, вновь пришедшие машины поступают в конец очереди, а выбор на обслуживание осуществляется из ее начала. Рассмотрим теперь две величины. Первая величина определяет максимальное число требований, которое может обслужить система при эффективной работе и максимальной загруженности. В этом случае на выходе система генерирует так называемые виртуальные потоки насыщения $\Pi\zeta_1, \Pi\zeta_2, \dots, \Pi\zeta_m$. Потоки насыщения $\Pi\zeta_1, \Pi\zeta_2, \dots, \Pi\zeta_m$ будем считать независимыми. Вторая величина равна сумме чисел машин, находящихся в очереди к моменту включения сигнала, разрешающего переезд, и машин, подъехавших за время работы этого сигнала. Тогда число машин, которое в действительности может проехать через перекресток, определяется как минимум из этих двух величин. Такие стратегии обслуживания $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ называются экстремальными [4, 5].

Классические методы построения и изучения математических моделей реальных систем обслуживания в основном исчерпываются двумя подходами. Первый из них основан на классических работах А.К. Эрланга, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, К.

Пальма, Ф. Поллачека, Д.Дж. Кендалла, Б.В. Гнеденко и др. и в значительной степени является описательным и всегда предполагает формальное задание таких составляющих элементов системы, как входной поток, обслуживающее устройство, дисциплина формирования очереди и структура системы, причем описание дисциплины очереди и структуры системы дается исключительно на содержательном уровне. Второй подход связан с исследованием А.А. Боровкова по созданию общих асимптотических методов анализа в теории массового обслуживания. Этот подход является излишне формализованным и практически не учитывает физические особенности конкретных систем обслуживания. Данные подходы фактически основаны на формальном описании статистических и функциональных связей между входами и выходами наблюдаемой системы. Иначе говоря, они изучают управляющую систему с позиции «черного ящика». Указанные классические подходы в построении моделей систем массового обслуживания обладают рядом существенных недостатков, являющихся следствием их единой точки зрения на изучение систем управления с позиции «чёрного ящика». В частности достигаемая при их применении математическая общность результатов не дает возможности получения конечномерных распределений для соответствующего случайного процесса, описывающего поведение реальных систем.

В связи с вышесказанным для построения математической модели изучаемой системы массового обслуживания будем использовать так называемый кибернетический подход. Данный подход развит в ряде работ, например [4, 5] и обязан своим возникновением исследованиям таких ученых как А.А. Ляпунов и С.В. Яблонский [6]. Основой кибернетического подхода является идея, что на систему целесообразно смотреть не с позиции «чёрного ящика», а с точки зрения общего понятия управляющей системы. При кибернетическом подходе для любой управляющей системы обслуживания необходимо выделить схему, информацию, координаты и функцию. Схема управляющей системы обслуживания отражает её скелетное строение и даёт возможность графического изображения системы с помощью фиксированного числа составляющих блоков схемы и заданных связей между блоками. Функциональная схема изучаемой здесь системы представлена на рис. 2:

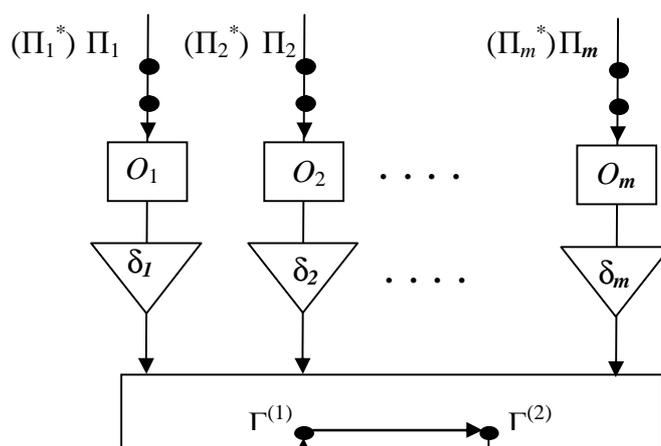


Рис. 2.2. Функциональная схема циклической системы массового обслуживания

На рис. 2.2 представлены следующие составляющие блоки схемы:

- a)* входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ первичных требований — первый тип входных полюсов для управляющей системы обслуживания;
- b)* потоки насыщения $\Pi\zeta_1, \Pi\zeta_2, \dots, \Pi\zeta_m$ (выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании) — второй тип входных полюсов;
- c)* накопители O_1, O_2, \dots, O_m очередей по входным потокам — внешняя память;
- d)* устройства $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ по организации дисциплины очередей в накопителях или стратегии обслуживания — блок по переработке информации внешней памяти;
- e)* обслуживающее устройство с состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}$ — внутренняя память;
- f)* выходные потоки $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_m$ обслуженных требований — выходные полюса.

Набор состояний очередей в накопителях, обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и потоков обслуженных требований полностью определяют информацию управляющей системы обслуживания. Номера входных потоков, потоков насыщения, выходных потоков, накопителей, механизмов формирования очередей и номера состояний обслуживающего устройства задают координаты управляющей системы обслуживания, которые определяют расположение блоков на схеме. Функция системы — это, прежде всего, управление потоками (разрешение или запрещение начала обслуживания каждого из них) и непосредственно обслуживание неоднородных требований.

2.2. Кодирование информации блоков схемы управляющей системы

В данном случае, когда дополнительно не определяются времена обслуживания отдельных заявок, функционирование системы в непрерывном времени является сложным

процессом, и в общем случае не является при этом марковским процессом. Поэтому изучение таких характеристик системы как длины очередей, время ожидания обслуживания заявки по потокам и выходные потоки в непрерывном времени является трудноразрешимой задачей. Для решения данной проблемы процесс обслуживания в непрерывном времени будем рассматривать в специально подобранные дискретные моменты. Эти моменты времени выбираются таким образом, чтобы новый процесс обладал свойством марковости. При таком подходе возникает трудный вопрос выбора указанных специальных моментов времени. Данная проблема будет решаться уже на этапе кодирования информации составляющих блоков схемы и построения вероятностной модели системы.

Условимся, что величины $\tau_i, i \geq 0$ являются моментами переключения состояний обслуживающего устройства (светофора) из одной фазы в другую. Положим, что τ_0 – момент начала функционирования системы. Пусть он совпадает с некоторым моментом переключения фазы светофора. В дальнейшем изучать характеристики системы будем в дискретные моменты времени $\tau_i, i = 0, 1, \dots$ переключений фаз светофора или на каждом из промежутков $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Дискретная шкала функционирования системы во времени задается случайной последовательностью $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$. Элементы этой последовательности случайны, поскольку значения T_1, T_2, \dots, T_{2m} различны и можно задавать вероятности состояний светофора в начальный момент времени τ_0 . Введем на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}_b(\cdot))$ при $j = \overline{1, m}$ и $i = 0, 1, \dots$ следующие случайные величины и элементы:

a) $\eta_{j,i}$ – число заявок потока Π_j , пришедших за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$, каждая дискретная случайная величина $\eta_{j,i}$ принимает свои значения из множества $X = \{0, 1, \dots\}$;

b) $\xi_{j,i}$ – максимально возможное число заявок, которое может быть обслужено за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из очереди потока Π_j ; любая дискретная случайная величина $\xi_{j,i}$ принимает значения из множества $\{0, l\zeta, l_j\}$, где l_j – максимально возможное число машин потока Π_j , которое может проехать за время работы сигнала $\Gamma^{(2j-1)}$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, а $l\zeta$ – это максимально возможное число машин потока Π_j , которое может проехать за время работы сигнала $\Gamma^{(2j)}$ и $l\zeta = [\mu \zeta T_{2j}]$; причем $l_j \geq l\zeta$, так как $T_{2j-1} \gg T_{2j}$;

c) Γ_i – состояние светофора на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, каждый из случайных элементов Γ_i принимает значения из набора $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$ возможных состояний обслуживающего устройства (светофора);

d) $\alpha_{j,i}$ – длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i , любая из величин $\alpha_{j,i}$ является дискретной случайной величиной со значениями из множества X ;

e) $\xi_{j,i}$ – число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$, случайная величина $\xi_{j,i}$ принимает значения из множества $Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$;

f) $\xi_{j,-1}$ – число реально обслуженных заявок потока Π_j за $[0, \tau_0)$, причем $\xi_{j,-1} \in Y_j$.

Входные потоки и потоки насыщения будем задавать не локально [4, 5]. Вместо случайного процесса $\Pi_j = \{\eta_j(t); t \geq 0\}$ с непрерывным временем t рассмотрим последовательность $\Pi_j^* = \{\eta_{j,i}; i \geq 0\}$ из неотрицательных целочисленных случайных величин, где $j = \overline{1, m}$. Потоки считаем пуассоновскими, поэтому для $\eta_{j,i}$ можно записать вероятности:

$$\mathbf{P}_b(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j T_r)^u (u!)^{-1} \exp\{-\lambda_j T_r\} = \varphi_j(u, T_r), \quad u \in X, \quad j = \overline{1, m}, \quad r = \overline{1, 2m}. \quad (2.1)$$

Поток насыщения по j -му направлению будем задавать в виде случайной последовательности $\Pi_j^\zeta = \{\xi_{j,i}; i \geq 0\}$, $j = \overline{1, m}$. Введем в рассмотрение функции:

$$f_j(\Gamma^{(r)}) = \begin{cases} l_j & \text{при } r = 2j - 1; \\ l_\zeta & \text{при } r = 2j; \\ 0 & \text{при } r \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{2j - 1, 2j\}, \text{ где } j = \overline{1, m}, \Gamma^{(r)} \in \Gamma. \end{cases}$$

Случайные величины $\xi_{j,i}$ при $i = 0, 1, \dots$ и $j = \overline{1, m}$ определяются с помощью функций $f_j(\Gamma^{(r)})$ следующим образом: $\xi_{j,i} = f_j(\Gamma_i)$. Для $\xi_{j,i}$ можно записать общее вырожденное условное распределение вида:

$$\mathbf{P}_b(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \beta_j(v, \Gamma^{(r)}), \quad j = \overline{1, m},$$

$$\text{где } \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = l_j, \quad r = 2j - 1; \\ 1 & \text{при } v = l_\zeta, \quad r = 2j; \\ 1 & \text{при } v = 0, \quad r \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{2j - 1, 2j\}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Так как обслуживающее устройство или светофор имеет циклический алгоритм работы, то его следующее состояние Γ_{i+1} зависит только от предыдущего состояния Γ_i . Введем функцию $U(\Gamma^{(r)})$, которая принимает значение $\Gamma^{(1)}$ при $r = 2m$ и принимает значение $\Gamma^{(r+1)}$

в остальных случаях, т.е. при $r \in \{1, 2, \dots, 2m - 1\}$. Тогда зависимость Γ_{i+1} от Γ_i определяется рекуррентным соотношением вида

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i), \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Стратегия механизма обслуживания формализует работу блока $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ по переработке информации внешней памяти и представляет собой функциональную зависимость, которая по очереди, потоку насыщения и входному потоку заявок указывает, сколько требований на самом деле обслужилось. Заявки обслуживаются в соответствии с так называемой экстремальной стратегией [4, 5]. Это значит, что справедливо выражение:

$$\xi_{j,i} = \min\{\alpha_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Осталось получить рекуррентное соотношение для очереди. Очередь в момент времени τ_{i+1} будет складываться из очереди в момент времени τ_i , плюс заявки, пришедшие за интервал времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, и минус те, которые обслужились на этом интервале. Таким образом, для очереди можно записать следующее рекуррентное по i соотношение: $\alpha_{j,i+1} = \alpha_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i} = \alpha_{j,i} + \eta_{j,i} - \min\{\alpha_{j,i} + h_{j,i}, \xi_{j,i}\} = \max\{0, \alpha_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, i = 0, 1, \dots, j = \overline{1, m}$. Учитывая это и равенства (2.3), (2.4), можно написать следующее рекуррентное по $i = 0, 1, \dots$ соотношение:

$$(\Gamma_{i+1}, \alpha_{j,i+1}, \xi_{j,i}) = (U(\Gamma_i), \max\{0, \alpha_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{\alpha_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}). \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.5) видно, что для всех $j = \overline{1, m}$ случайные величины $\alpha_{j,i+1}$ и $\xi_{j,i}$ определяются как неслучайные функции от случайных аргументов $\alpha_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}$, а Γ_{i+1} как неслучайная функция от случайного элемента Γ_i (состояния обслуживающего устройства или светофора в i -й момент времени). Случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}, j = \overline{1, m}$ являются независимыми при условии, что состояние светофора известно.

В силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний светофора можно рассматривать процесс обслуживания машин отдельно для каждого из потоков Π_j . Состояние всей системы по потоку Π_j на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ будем характеризовать случайным вектором $(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1})$. Поведение системы по потоку Π_j описывается векторной последовательностью $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$, которая определяет динамику состояний обслуживающего устройства, флуктуацию длин очередей по потокам и флуктуацию обслуженных требований. Более того, данная последовательность задает нелокальное описание выходного потока по j -му направлению, причем за выходной поток отвечает случайная величина $\xi_{j,i-1}$, а компоненты Γ_i и $\alpha_{j,i}$ играют роль меток. Здесь и далее все рассуждения проводятся для j -го потока.

Аналогично можно получить результаты и для последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{m,i}, \xi_{1,i-1}, \xi_{2,i-1}, \dots, \xi_{m,i-1}); i \geq 0\}$. Считаем, что в начальный момент τ_0 задано распределение векторов $(\Gamma_0, \alpha_{j,0}, \xi_{j,-1})$, то есть известны вероятности

$$P_b(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)}, \alpha_{j,0} = x, \xi_{j,-1} = y), \text{ где } \Gamma^{(s)} \in \Gamma, x \in X, y \in Y_j. \quad (2.6)$$

Из равенств (2.1), (2.2) следует, что условное распределение каждой из случайных величин $\eta_{j,i}, \xi_{j,i}$ зависит от выбора вектора $b = (T_1, T_2, \dots, T_{2m})$. Отсюда, в силу соотношения (2.5) и (2.6), конечномерные распределения векторной случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ также зависят от выбора вектора b . Поэтому, как уже отмечалось ранее, b есть управление m конфликтными пуассоновскими потоками в циклической системе обслуживания, где $b \in \mathcal{R} = \{(T_1, T_2, \dots, T_{2m}): T_1 > 0, T_2 > 0, \dots, T_{2m} > 0\}$. Теперь с полным основанием можно утверждать, что математический объект $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ является управляемой векторной случайной последовательностью.

2.3. Свойства управляемой векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ и классификация пространства $\Gamma \times X \times Y_j$ её состояний

Кибернетический подход изучения реальных процессов обслуживания с управлением требует на этапе построения математической модели так выбирать шкалу $\{\tau_i; i \geq 0\}$ тактов времени, чтобы можно было определить конечномерные распределения управляемой векторной случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Если дискретные моменты времени $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ были выбраны удачно, то векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ трехмерных векторов, как правило обладает свойством марковости. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, \alpha_{j,0}, \xi_{j,-1})$ управляемая векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ является однородной марковской цепью со счетным числом состояний.

Доказательство. Марковское свойство для случайной последовательности состоит в следующем ограничении:

$$\begin{aligned} P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \alpha_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \alpha_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) = \\ = P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \alpha_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \alpha_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\Gamma^{(r)}, \Gamma^{(r_k)} \in \Gamma; x, x_k \in X; y, y_k \in Y_j$.

Докажем, что для рассматриваемой последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ это свойство справедливо. Рассмотрим отдельно левую часть выражения (2.7). Преобразуем ее, используя формулу полной вероятности, а также учитывая, что случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$ условно независимы при фиксированном значении случайных величин $\Gamma_k, \mathfrak{a}_{j,k}$ и $\xi_{j,k-1}$, где $k = \overline{0, i}$. Последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
& P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) = \\
& = \sum_{v, u=0}^{\infty} P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y, \eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) = \\
& = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u; \xi_{j,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) \times \\
& \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}, \eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v) = \\
& = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(h_{j,i} = u \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) \times \\
& \quad \times P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) \times \\
& \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}, \eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v).
\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,i}, \mathfrak{a}_{j,k}, \xi_{j,k-1}, k = \overline{0, i}$ и $\Gamma_k, k = \overline{0, i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i , и тем, что $\xi_{j,i}, \mathfrak{a}_{j,k}, \xi_{j,k-1}, k = \overline{0, i}$ и $\Gamma_k, k = \overline{0, i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i . Затем используем соотношением (2.5). Итак, имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(h_{j,i} = u \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) \times \\
& \quad \times P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) \times \\
& \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_k = \Gamma^{(r_k)}, \mathfrak{a}_{j,k} = x_k, \xi_{j,k-1} = y_k, k = \overline{0, i}, \eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v) = \\
& = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)} P(\mathfrak{a}_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times \\
& \quad \times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y).
\end{aligned}$$

Если воспользоваться соотношениями (2.1) и (2.2), то можно получить следующее:

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times$$

$$\begin{aligned} & \times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y) = \\ & = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v, \Gamma^{(r_i)}) P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y). \end{aligned}$$

Теперь повторим эти же выкладки с незначительными изменениями для правой части выражения (2.7). При ее преобразовании также используем формулу полной вероятности и учитываем, что случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i , $\mathfrak{a}_{j,i}$ и $\xi_{j,i-1}$. Тогда последовательно получим:

$$\begin{aligned} & P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i) = \\ & = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \bar{\xi}_{j,i} = y, \eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i) = \\ & = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u, \xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i) \times \\ & \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i, \eta_{j,i} = u; \xi_{j,i} = v) = \\ & = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_{i-1}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i) \times \\ & \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \bar{\xi}_{j,i-1} = y_i, \eta_{j,i} = u; \xi_{j,i} = v). \end{aligned}$$

Последовательно воспользуемся тем, что случайные величины $\eta_{j,i}$, $\mathfrak{a}_{j,i}$, $\xi_{j,i-1}$ условно независимы при фиксированном значении Γ_i , и что $\xi_{j,i}$, $\mathfrak{a}_{j,i}$, $\xi_{j,i-1}$ также являются условно независимыми при фиксированном значении Γ_i . Затем применим соотношение (2.5).

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_{i-1}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i) \times \\ & \times P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi_{j,i-1} = y_i, \eta_{j,i} = u; \xi_{j,i} = v) = \\ & = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times \\ & \times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y). \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношениями (1) и (2) получим следующее:

$$\begin{aligned} & \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} P(\eta_{j,i} = u \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) P(\xi_{j,i} = v \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}) \times \\ & \times P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u, v\} = y) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v, \Gamma^{(r_i)}) P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0; x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u; v\} = y).$$

Таким образом, в итоге преобразования правой и левой частей выражения (2.7) были получены одинаковые результаты. Значит, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \alpha_{j, i+1} = x, \xi_{j, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_k)}, \alpha_{j, k} = x_k, \xi_{j, k-1} = y_k, k = \overline{0, i}) = \\ & = P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \alpha_{j, i+1} = x, \xi_{j, i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \alpha_{j, i} = x_i, \xi_{j, i-1} = y_i) = \\ & = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{r_i}) \beta_j(v, \Gamma^{(r_i)}) P(U(\Gamma^{(r_i)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0; x_i + u - v\} = x, \min\{x_i + u; v\} = y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что для случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j, i}, \xi_{j, i-1}); i \geq 0\}$ марковское свойство (2.7) выполняется. Лемма 2.1 доказана.

Выражение (2.8) фактически представляет собой вид переходных вероятностей для марковской цепи. Правая часть этого уравнения на самом деле не зависит именно от i (времени), а зависит от значений некоторых случайных величин в этот момент времени. Следовательно, эти условные вероятности одинаковы для любых пар t_i, t_{i+1} , а это означает, что рассматриваемая цепь Маркова является однородной по времени.

Одной из основных задач данной работы является определение условий, при которых рассматриваемая система массового обслуживания будет работать в стационарном режиме. Для решения этой задачи необходимо выполнить классификацию пространства $\Gamma \times X \times Y$ состояний векторной случайной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j, i}, \xi_{j, i-1}); i \geq 0\}$. Введем обозначения вида: $P(\{\Gamma_i = \Gamma^{(s)}, \alpha_{j, i} = x, \xi_{j, i-1} = y\}) = Q_{j, i}(\Gamma^{(s)}; x; y)$, $\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}$, $\Gamma^{(2m+1)} \equiv \Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2m+2)} \equiv \Gamma^{(2)}$, $T_0 \equiv T_{2m}$, $T_{2m+1} \equiv T_1$, $T_{2m+2} \equiv T_2$, $\Gamma(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}, \Gamma^{(2j+2)}\}$, $\Gamma'(j) = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}$, $E_j(\Gamma^{(2j)}) = \{(\Gamma^{(2j)}, x, l_j): x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y): y = \overline{0, l_j - 1}\}$; $E_j(\Gamma^{(2j+1)}) = \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, l_j): x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, 0, y): y = \overline{0, l_j - 1}\}$; $E_j(\Gamma^{(s)}) = \{(\Gamma^{(s)}, x, 0): x \in X\}$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j)$. Для пространства $\Gamma \times X \times Y = \{(\Gamma^{(r)}, x, y): \Gamma^{(r)} \in \Gamma, x \in X, y \in Y_j\}$ имеет место [7]

Лемма 2.2. Следующие состояния управляемой случайной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j, i}, \xi_{j, i-1}); i \geq 0\}$ являются несущественными:

$$(\Gamma^{(s)}, x, y), \text{ где } \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in X, y = \overline{1, l_j};$$

$$(\Gamma^{(2j)}, x, y), \text{ где } x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l_j - 1};$$

$$(\Gamma^{(2j+1)}, x, y), \text{ где } x \in X, y = \overline{l'_j + 1, l_j};$$

$$(\Gamma^{(2j+1)}, x, y), \text{ где } x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l'_j - 1}.$$

Доказательство. Учитывая связь многомерных распределений, а также используя теорему умножения вероятностей, соотношение (2.8) и свойства отображения $U(\cdot): \Gamma \rightarrow \Gamma$, при $i \geq 0$ последовательно находим:

1) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; y), \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in X, y = \overline{1, l_j}$ получаем:

$$\begin{aligned} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\ &\times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(s)}, \max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{s-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) \times \\ &\times P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(\max\{0, w+u\} = x, \min\{w+u, 0\} = y) = 0. \end{aligned}$$

В данном случае $y > 0$, и равенство нулю следует из того, что условие $\min\{w+u, 0\} = y$ никогда не выполнится.

2) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y), x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l_j - 1}$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\ &\times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(2j)}, \max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j-1)}) \times \\ &\times P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j-1}) P(\max\{0, w+u-l_j\} = x, \min\{w+u, l_j\} = y) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим два возможных варианта:

a) в случае $w + u < l_j$ равенство нулю следует из того, что условие $\max\{0, w + u - l_j\} = x$ невыполнимо при $x \in X \setminus \{0\}$;

b) в случае $w + u \geq l_j$ к равенству нулю приводит то, что невозможно выполнить условие $\min\{w + u, l_j\} = y$ при $y = \overline{0, l_j - 1}$.

3) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y)$ последовательно получим:

$$\begin{aligned} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\ &\times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(2j+1)}, \max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) \times \\ &\quad \times P(\max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\ &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) P(\max\{0, w + u - l'_j\} = x, \min\{w + u, l'_j\} = y) = 0. \end{aligned}$$

В случае $y = \overline{l'_j + 1, l_j}$ равенство нулю следует из невыполнимости следующего условия $\min\{w + u, l'_j\} = y$. При $y = \overline{0, l'_j - 1}$ необходимо рассмотреть две возможности:

a) $w + u < l'_j$ равенство нулю следует из того, что условие $\max\{0, w + u - l'_j\} = x$ никогда не выполнится при $x \in X \setminus \{0\}$;

b) $w + u \geq l'_j$ равенство нулю возникает, поскольку условие $\min\{w + u, l'_j\} = y$ не возможно при $y = \overline{0, l'_j - 1}$.

Лемма 2.2 доказана.

Пусть $\Phi_{j,i}(\Gamma^{(r)}; y; w) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; x; y) w^x$ является производящей функцией для семейства $\{Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; x; y): \Gamma^{(r)} \in \Gamma, x \in X, y \in Y_j\}$, где $i \geq 0, \Gamma^{(r)} \in \Gamma, y \in Y_j$ и $|w| \leq 1$. Равенства (2.1) — (2.5) позволяют найти рекуррентные по $i = 1, 2, \dots$ соотношения как для семейства $\{Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; x; y): \Gamma^{(r)} \in \Gamma, x \in X, y \in Y_j\}$ одномерных распределений последовательности вида $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$, так и для семейства $\{\Phi_{j,i}(\Gamma^{(r)}; y; w): \Gamma^{(r)} \in \Gamma, y \in Y_j\}$ из производящих функций.

Теорема 2.1. Для одномерных распределений случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ при $j = \overline{1, m}$, $x \in X$, $y \in Y_j$, имеют место следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$Q_{j,1}(\Gamma^{(s)}; x; 0) = \sum_{w=0}^x \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \varphi_j(x-w, T_{s-1}), \quad \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j);$$

$$Q_{j,1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) = \sum_{c=0}^{l_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) P(x=0, y=c) + \\ + \sum_{c=l_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) P(x=c-l_j, y=l_j);$$

$$Q_{j,1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) = \sum_{c=0}^{l'_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) P(x=0, y=c) + \\ + \sum_{c=l'_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) P(x=c-l'_j, y=l'_j);$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; 0) = \sum_{w=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \varphi_j(x-w, T_{s-1}), \quad i \geq 1, \quad \Gamma^{(s)} \in \Gamma(j);$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) = \sum_{w=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(y-w, T_{2j-1}) P(x=0, y < l_j) + \\ + \sum_{w=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) P(y=l_j), \quad i \geq 1;$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(y, T_{2j}) P(x=0, y < l'_j) + \\ + \sum_{w=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(y-w, T_{2j}) P(x=0, y < l'_j) + \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) P(y=l'_j) + \\ + \sum_{w=0}^{x+l'_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) P(y=l'_j), \quad i \geq 1;$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; x; 0) = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \varphi_j(x, T_{2j+1}) + \\ + \sum_{w=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \varphi_j(x-w, T_{2j+1}), \quad i \geq 1.$$

Доказательство. При доказательстве учитывалась связь многомерных распределений, а также использовалась теорема умножения вероятностей, соотношение (2.8) и свойства отображения $U(\cdot): \Gamma \rightarrow \Gamma$.

В случае $i = 0$ нельзя отбрасывать несущественные состояния, которые могут возникнуть за счет начального распределения, в связи с этим, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
& Q_{j,1}(\Gamma^{(s)}; x; y) = \\
& = \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(r)}; w; g) P(\Gamma_1 = \Gamma^{(s)}, \mathfrak{K}_{j,1} = x, \bar{\xi}_{j,0} = y \mid \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{K}_{j,0} = w, \bar{\xi}_{j,-1} = g) = \\
& = \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \varphi_j(u, T_r) \times \\
& \times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(s)}, \max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) \varphi_j(u, T_{s-1}) P(\max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y).
\end{aligned}$$

Далее, в соответствии с соотношением, которое определяет функцию $\beta_j(v, \Gamma^{(s-1)})$, рассмотрим три случая, при которых $\beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) = 1$.

1) $s \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{2j - 1, 2j\}$

$$\begin{aligned}
& Q_{j,1}(\Gamma^{(s)}; x; y) = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) \varphi_j(u, T_{s-1}) \times \\
& \times P(\max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(\max\{0, w + u\} = x, \min\{w + u, 0\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(\max\{0, w + u\} = x, \min\{w + u, 0\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(x = w + u, y = 0) = \\
& = \sum_{w=0}^x \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \varphi_j(x - w, T_{s-1}) P(x \geq 0, y = 0).
\end{aligned}$$

2) $s = 2j$

$$\begin{aligned}
Q_{j,1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \beta_j(v, \Gamma^{(2j-1)}) \varphi_j(u, T_{2j-1}) \times \\
&\times \mathbf{P}(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j-1}) \mathbf{P}(\max\{0, w+u-l_j\} = x, \min\{w+u, l_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=w+u=0}^{l_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) \mathbf{P}(\max\{0, c-l_j\} = x, \min\{c, l_j\} = y) + \\
&+ \sum_{c=w+u=l_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) \mathbf{P}(\max\{0, c-l_j\} = x, \min\{c, l_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=0}^{l_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) \mathbf{P}(x=0, y=c) + \\
&+ \sum_{c=l_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j-1}) \mathbf{P}(x=c-l_j, y=l_j).
\end{aligned}$$

3) $s = 2j + 1$

$$\begin{aligned}
Q_{j,1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) &= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) \varphi_j(u, T_{2j}) \times \\
&\times \mathbf{P}(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbf{P}(\max\{0, w+u-l'_j\} = x, \min\{w+u, l'_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=w+u=0}^{l'_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) \mathbf{P}(\max\{0, c-l'_j\} = x, \min\{c, l'_j\} = y) + \\
&+ \sum_{c=w+u=l'_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) \mathbf{P}(\max\{0, c-l'_j\} = x, \min\{c, l'_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=0}^{l'_j-1} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) \mathbf{P}(x=0, y=c) + \\
&+ \sum_{c=l'_j}^{\infty} \sum_{w=0}^c \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \varphi_j(c-w, T_{2j}) \mathbf{P}(x=c-l'_j, y=l'_j).
\end{aligned}$$

В случае $i \geq 1$ последовательно получаем:

1) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; y)$ при $\Gamma^{(s)} \in \Gamma(j)$

$$\begin{aligned}
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\
&\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(s)}, \max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{s-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y).$$

Используя лемму 2.2, освобождаемся от несущественных состояний, а затем применяем выражение (2.2). Таким образом находим:

$$\begin{aligned} & \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{s-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ & = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{s-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(s-1)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ & = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(\max\{0, w+u\} = x, \min\{w+u, 0\} = y) = \\ & = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{s-1}) P(x = w+u, y = 0) = \sum_{w=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \varphi_j(x-w, T_{s-1}) P(y = 0). \end{aligned}$$

2) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y)$

$$\begin{aligned} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\ & \times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(2j)}, \max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ & = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j-1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j-1)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y). \end{aligned}$$

Последовательно используем лемму 2.2, чтобы освободиться от несущественных состояний, и применяем соотношение (2.2). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j+1)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\ & = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j+1)}) P(\max\{0, u-v\} = x, \min\{u, v\} = y) = \\ & = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(\max\{0, u\} = x, \min\{u, 0\} = y) + \\ & + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(\max\{0, w+u\} = x, \min\{w+u, 0\} = y) = \\ & = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(x = u, y = 0) + \\ & \quad + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(x = w+u, y = 0) = \\ & = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \varphi_j(x, T_{2j+1}) P(y = 0) + \sum_{w=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \varphi_j(x-w, T_{2j+1}) P(y = 0). \end{aligned}$$

Далее, область суммирования для w и u разбивается на две. В первой области $w + u < l_j$, а во второй $w + u \geq l_j$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j-1}) P(\max\{0, w+u-l_j\} = x, \min\{w+u, l_j\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j-1}) P(x=0, w+u=y) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j-1}) P(x=w+u-l_j, y=l_j) = \\
& = \sum_{w=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(y-w, T_{2j-1}) P(x=0, y < l_j) + \sum_{w=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) P(l_j=y).
\end{aligned}$$

3) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y)$ получим, что

$$\begin{aligned}
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\
& \times P(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(2j+1)}, \max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y).
\end{aligned}$$

Используем лемму 2, чтобы освободиться от несущественных состояний, и применяем соотношение (2.2). Тогда найдём:

$$\begin{aligned}
& \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\
& = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) P(\max\{0, u-v\} = x, \min\{u, v\} = y) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j)}) P(\max\{0, w+u-v\} = x, \min\{w+u, v\} = y) = \\
& = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) P(\max\{0, u-l'_j\} = x, \min\{u, l'_j\} = y) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) P(\max\{0, w+u-l'_j\} = x; \min\{w+u, l'_j\} = y).
\end{aligned}$$

Область суммирования для w и u разбиваем на две таким образом, что в первой области справедливо условие $w + u < l'_j$, во второй $w + u \geq l'_j$. Отсюда легко получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(\max\{0, u - l'_j\} = x, \min\{u, l'_j\} = y) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(\max\{0, w + u - l'_j\} = x, \min\{w + u, l'_j\} = y) = \\
& = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{u=0}^{l'_j-1} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(x = 0, y = u) + \\
& + \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{u=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(x = 0, y = w + u) + \\
& + \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{u=l'_j}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(x = u - l'_j, y = l'_j) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{u=\max\{0, l'_j-w\}}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j}) \mathbb{P}(x = w + u - l'_j, y = l'_j) = \\
& = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(y, T_{2j}) \mathbb{P}(x = 0, y < l'_j) + \sum_{w=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(y - w, T_{2j}) \mathbb{P}(x = 0, y < l'_j) + \\
& + \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(x + l'_j, T_{2j}) \mathbb{P}(y = l'_j) + \sum_{w=0}^{x+l'_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(x + l'_j - w, T_{2j}) \mathbb{P}(y = l'_j).
\end{aligned}$$

4) для $Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; x; y)$ найдём:

$$\begin{aligned}
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; x; y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_r) \beta_j(v, \Gamma^{(r)}) \times \\
& \times \mathbb{P}(U(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(2j+2)}, \max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\
& = \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j+1)}) \times \\
& \times \mathbb{P}(\max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 2, освобождаемся от несущественных состояний, а затем применяем соотношение (2.2). Теперь можно написать:

$$\begin{aligned}
& \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j+1)}) \mathbb{P}(\max\{0, w + u - v\} = x, \min\{w + u, v\} = y) = \\
& = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v \in \{0, l'_j, l_j\}} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \beta_j(v, \Gamma^{(2j+1)}) \mathbb{P}(\max\{0, u - v\} = x, \min\{u, v\} = y) = \\
& = \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \mathbb{P}(\max\{0, u\} = x, \min\{u, 0\} = y) + \\
& + \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) \mathbb{P}(\max\{0, w + u\} = x, \min\{w + u, 0\} = y) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(x=u, y=0) + \\
&+ \sum_{w=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_j(u, T_{2j+1}) P(x=w+u, y=0) = \\
&= \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \varphi_j(x, T_{2j+1}) P(y=0) + \sum_{w=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \varphi_j(x-w, T_{2j+1}) P(y=0).
\end{aligned}$$

Лемма 2.3. Пространство всех состояний последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ разбивается на незамкнутое подмножество $\{(\Gamma^{(s)}, x, y): \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j), x \in X, y = \overline{1, l_j}\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, x, y): x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l_j-1}\} \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, y): x \in X, y = \overline{l'_j+1, l_j}\} \cup \{(\Gamma^{(2j+1)}, x, y): x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l'_j-1}\}$ несущественных состояний и на замкнутое подмножество $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ существенных периодических состояний с периодом $2m$.

Доказательство. Докажем, что для цепи $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ все состояния из множества $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ сообщаются. Переход из состояния $(\Gamma^{(r)}, w, g)$ в $(\Gamma^{(s)}, x, y)$ обозначим следующим образом: $(\Gamma^{(r)}, w, g) \rightarrow (\Gamma^{(s)}, x, y)$. Выберем состояние $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$ из множества $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$. Рассмотрим любое состояние $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in \bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$. Покажем, что состояние $(\Gamma^{(s)}, x, y)$ достижимо из $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$ и состояние $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$ достижимо из $(\Gamma^{(s)}, x, y)$. Ради простоты в дальнейшем будем считать $j = 1$. Рассмотрим сначала переход вида $(\Gamma^{(1)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(s)}, x, y)$. Пусть марковская цепь находится в состоянии $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$. Если $s = 2$ то она переходит за один шаг в состояние $(\Gamma^{(2)}, x, y)$ с вероятностью $\varphi_1(x+y, T_1) > 0$. Если же $s \in \{1, 3, 4, \dots, 2m\}$, то существует хотя бы одна конечная цепочка переходов, например, вида $(\Gamma^{(1)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(s-1)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(s)}, x, y)$ по которой марковская цепь перейдет в состояние $(\Gamma^{(s)}, x, y)$ с вероятностью $\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \times \dots \times \varphi_1(0, T_{s-2}) \varphi_1(x+y, T_{s-1}) > 0$. Аналогичные рассуждения можно провести и для оставшихся случаев $j = 2, \dots, m$.

Пусть теперь марковская цепь находится в состоянии $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in \bigcup_{r=1}^{2m} E_1(\Gamma^{(r)})$. Построим хотя бы одну цепочку, по которой переход $(\Gamma^{(s)}, x, y) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ осуществляется с положительной вероятностью за конечное число шагов. Если $s = 2m$, то при $x = 0$ цепь переходит за один шаг в состояние $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ с вероятностью $\varphi_1(0, T_{2m}) > 0$. Если же $x \neq 0$, то цепь попадает в это же состояние по пути $(\Gamma^{(2m)}, x, y) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x, 0) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, x - \min\{x, l_j\},$

$\min\{x, l_j\} \rightarrow (\Gamma^{(3)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}) \rightarrow$
 $\rightarrow (\Gamma^{(4)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x - \min\{x, l_j\} -$
 $- \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, 0) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x - l\zeta - \min\{x - l\zeta, l_j\}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ за $1 + 2mk$
 шагов, с вероятностью $\varphi_1(0, T_{2m}) \varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \varphi_1(0, T_3) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \varphi_1(0, T_1) \times \dots \times$
 $\times \varphi_1(0, T_{2m}) \equiv \varphi_1(0, T_{2m}) (\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \dots \varphi_1(0, T_{2m}))^k > 0$, где k определяется
 следующим образом:

$$k = \begin{cases} \left[\frac{x}{l_j + l'_j} \right] + 1, & \text{если } \frac{x}{l_j + l'_j} \text{ - не целое число;} \\ \frac{x}{l_j + l'_j}, & \text{если } \frac{x}{l_j + l'_j} \text{ - целое число.} \end{cases}$$

В случае $s = 1$ марковская цепь может перейти в состояние $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ по цепочке
 $(\Gamma^{(1)}, x, y) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, x - \min\{x, l_j\}, \min\{x, l_j\}) \rightarrow (\Gamma^{(3)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\},$
 $\min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}) \rightarrow (\Gamma^{(4)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, 0) \rightarrow$
 $\rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, 0) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x - l\zeta - \min\{x - l\zeta, l_j\}, 0) \rightarrow$
 $\rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ за $2mk$ шагов. Вероятность такого перехода равна $\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \times$
 $\times \dots \times \varphi_1(0, T_{2m}) \varphi_1(0, T_1) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \equiv (\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \dots \varphi_1(0, T_{2m}))^k > 0$. Здесь k
 определяются следующим образом:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ \left[\frac{x}{l_j + l'_j} \right] + 1, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } \frac{x}{l_j + l'_j} \text{ - не целое число;} \\ \frac{x}{l_j + l'_j}, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } \frac{x}{l_j + l'_j} \text{ - целое число.} \end{cases}$$

При $s = 2$ переход $(\Gamma^{(2)}, x, y) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ можно осуществить хотя бы по одной
 цепочке вида $(\Gamma^{(2)}, x, y) \rightarrow (\Gamma^{(3)}, x - \min\{x, l\zeta\}, \min\{x, l\zeta\}) \rightarrow (\Gamma^{(4)}, x - \min\{x, l\zeta\}, 0) \rightarrow$
 $\rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x - \min\{x, l\zeta\}, 0) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x - \min\{x, l\zeta\}, 0) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, x - \min\{x, l\zeta\} -$
 $- \min\{x - \min\{x, l\zeta\}, l_j\}, \min\{x - \min\{x, l\zeta\}, l_j\}) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ за конечное число
 шагов, равное $2m - 1 + 2mk$ с вероятностью $\varphi_1(0, T_2) \varphi_1(0, T_3) \varphi_1(0, T_4) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \times$
 $\times \varphi_1(0, T_1) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \equiv \varphi_1(0, T_2) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) (\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \dots \varphi_1(0, T_{2m}))^k > 0$, где:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq l'_j; \\ \left[\frac{x-l'_j}{l_j+l'_j} \right] + 1, & \text{если } x > l'_j \text{ и } \frac{x-l'_j}{l_j+l'_j} - \text{ не целое число}; \\ \frac{x-l'_j}{l_j+l'_j}, & \text{если } x > l'_j \text{ и } \frac{x-l'_j}{l_j+l'_j} - \text{ целое число.} \end{cases}$$

В случаях $s \in \{3, 4, \dots, 2m-1\}$ цепь может перейти в состояние $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ хотя бы по одной цепочке вида $(\Gamma^{(s)}, x, y) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x, 0) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x, 0) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, x - \min\{x, l_j\}, \min\{x, l_j\}) \rightarrow (\Gamma^{(3)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x - \min\{x, l_j\} - \min\{x - \min\{x, l_j\}, l\zeta\}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(1)}, x - l\zeta - \min\{x - l\zeta, l_j\}, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ за $2m - (s-1) + 2mk$ шагов. Вероятность такого перехода равна $\varphi_1(0, T_s) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \varphi_1(0, T_1) \times \dots \times \varphi_1(0, T_2) \varphi_1(0, T_3) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \varphi_1(0, T_1) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \equiv \varphi_1(0, T_s) \varphi_1(0, T_{s+1}) \dots \varphi_1(0, T_{2m}) \times (\varphi_1(0, T_1) \varphi_1(0, T_2) \dots \varphi_1(0, T_{2m}))^k > 0$, где k определяются следующим образом:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \left[\frac{x}{l_j+l'_j} \right] + 1, & \text{если } x > 0 \text{ и } \frac{x}{l_j+l'_j} - \text{ не целое число}; \\ \frac{x}{l_j+l'_j}, & \text{если } x > 0 \text{ и } \frac{x}{l_j+l'_j} - \text{ целое число.} \end{cases}$$

Аналогичные результаты можно получить и для случаев $j = 2, \dots, m$.

Теперь нетрудно заметить, что для $j = \overline{1, m}$ существует возможность попасть из любого состояния $(\Gamma^{(s)}, x, y)$ множества $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ в любое другое состояние $(\Gamma^{(r)}, w, g) \in \bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ по крайней мере, по одному пути, а именно:

$$(\Gamma^{(s)}, x, y) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(r)}, w, g).$$

Следовательно, все состояния множества $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ сообщаются и образуют один неразложимый класс. Период этого класса, очевидно, равен $2m$. В самом деле, пусть марковская последовательность $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ находится в состоянии $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ в

момент времени i . Минимальный путь, ведущий из $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ обратно в $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$, для множества состояний $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ выглядит следующим образом:

$$(\Gamma^{(1)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(2)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(3)}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, 0, 0) \rightarrow (\Gamma^{(1)}, 0, 0).$$

Число шагов, необходимое для прохождения такого пути, составляет $2m$. Это значит, что в момент времени $i + 2m$ марковская цепь с вероятностью

$$\varphi_j(0, T_1) \varphi_j(0, T_2) \varphi_j(0, T_3) \dots \varphi_j(0, T_{2m-1}) \varphi_j(0, T_{2m}) > 0$$

может снова оказаться в состоянии $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$. Из-за жесткой циклической смены сигналов обслуживающего устройства, формализованной функцией $U(\Gamma^{(r)})$, любое попадание из $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ в $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ происходит за время $2mk$, $k \geq 1$. Следовательно, период состояния $(\Gamma^{(1)}, 0, 0)$ равен $2m$. Известно, что все состояния одного неразложимого класса имеют один и тот же период, в данном случае этот период соответствует $2m$.

Следовательно, период неразложимого класса состояний $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ также равен $2m$.

Лемма 2.3. доказана

Результаты леммы 2.3. позволяют в дальнейшем, когда это целесообразно, рассматривать только замкнутое подмножество $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ существенных состояний последовательности $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$, в частности, и начальное распределение задавать на этом подмножестве. При этом цепь Маркова $\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ выходит из несущественных состояний за один шаг и больше никогда в них не возвращается, а движение из подкласса в подкласс осуществляется согласно рис. 2.3

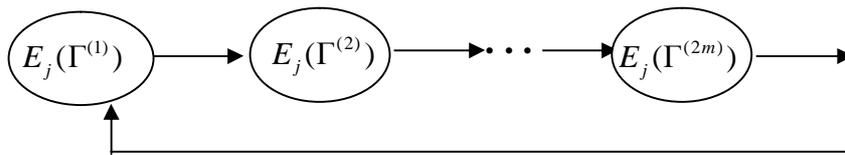


Рис. 2.3

Теорема 2.2. Для производящих функций вида $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z)$, $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; 0; z)$, при $j = \overline{1, m}$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma(j)$, $|z| \leq 1$, выполняются следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) &= z^{-l_j} e^{l_j T_{2j-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; 0; z) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) &= z^{-l_j} e^{l_j T_{2j}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + \\ &+ z^{-l'_j} \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k; \end{aligned}$$

$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z) = e^{l_j T_{2j+1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) + e^{l_j T_{2j+1}(z-1)} \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) z^w;$$

$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; 0; z) = e^{l_j T_{s-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; 0; z).$$

Доказательство. Используя рекуррентные соотношения теоремы 2.1, последовательно получим соотношения для производящих функций:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}; x; l_j) z^x = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \sum_{w=0}^{x+l_j} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) = \\ &= z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) z^{x-w+l_j} + \\ &+ z^{-l_j} \sum_{w=l_j}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=w-l_j}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) z^{x-w+l_j} = \\ &= z^{-l_j} \sum_{w=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=w-l_j}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) z^{x-w+l_j} - \\ &- z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=w-l_j}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) z^{x-w+l_j} + \\ &+ z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-w, T_{2j-1}) z^{x-w+l_j} = \\ &= z^{-l_j} \sum_{w=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k + \\ &+ z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=l_j-w}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k = z^{-l_j} e^{\lambda_j T_{2j-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; 0; z) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k - \sum_{k=l_j-w}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k \right] = \\ &= z^{-l_j} e^{\lambda_j T_{2j-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; 0; z) - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; x; l'_j) z^x = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) + \sum_{w=0}^{x+l'_j} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) \right] = \\ &= z^{-l'_j} \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) z^{x+l'_j} + \sum_{w=0}^{x+l'_j} z^w \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} \right] = \\ &= z^{-l'_j} \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) z^{x+l'_j} + \sum_{w=l'_j}^{x+l'_j} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{x=w-l'_j}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} + \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} \right] = \\
& = z^{-l'_j} \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) z^{x+l'_j} + \sum_{w=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \times \right. \\
& \times \sum_{x=w-l'_j}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} + \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} - \\
& \left. - \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{x=w-l'_j}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j-w, T_{2j}) z^{x+l'_j-w} \right] = \\
& = z^{-l'_j} \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l'_j, T_{2j}) z^{x+l'_j} + z^{-l'_j} e^{\lambda_j T_{2j}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + \\
& + z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=l'_j-w}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k = \\
& = z^{-l'_j} e^{\lambda_j T_{2j}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + z^{-l'_j} \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
& - z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; 0; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+2)}; x; 0) z^x = \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \varphi_j(x, T_{2j+1}) z^x + \sum_{w=0}^x \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) \varphi_j(x-w, T_{2j+1}) z^x \right] = \\
&= \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x, T_{2j+1}) z^x + \sum_{w=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; w; l'_j) z^w \sum_{x=w}^{\infty} \varphi_j(x-w, T_{2j+1}) z^{x-w} = \\
&= e^{\lambda_j T_{2j+1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) e^{\lambda_j T_{2j+1}(z-1)} \sum_{g=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; 0; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(s)}; x; 0) z^x = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{w=0}^x \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) \varphi_j(x-w, T_{s-1}) z^x = \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{x=w}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) z^w \varphi_j(x-w, T_{s-1}) z^{x-w} = \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; w; 0) z^w \sum_{x=w}^{\infty} \varphi_j(x-w, T_{s-1}) z^{x-w} = e^{\lambda_j T_{s-1}(z-1)} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(s-1)}; 0; z).
\end{aligned}$$

Теорема 2.2. доказана.

Определим при $j = \overline{1, m}$, $i = 0, 1, \dots$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma(j)$, $|z| \leq 1$ последовательности производящих функции:

$$\begin{aligned}
\Phi_{j, 2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j, 2mi}(\Gamma^{(2j)}; x; l_j) z^x; \\
\Phi_{j, 2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) &= \sum_{x=0}^{\infty} \mathcal{Q}_{j, 2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; x; l'_j) z^x;
\end{aligned}$$

$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)};0;z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)};x;0)z^x;$$

$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)};0;z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(s)};x;0)z^x.$$

Обозначим через $T = \sum_{r=1}^{2m} T_r$ период смены состояний обслуживающего устройства.

Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Для производящих функций $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)};l_j;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)};l'_j;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+2)};0;z)$, $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(s)};0;z)$ при $\Gamma^{(s)} \in \Gamma(j)$, $|z| \leq 1$, выполняются следующие рекуррентные по i (времени) соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)};l_j;z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};l_j;z) + \\ &+ z^{-l_j} z^{-l'_j} \prod_{k \in \{1,2,\dots,2m\} \setminus \{2j\}} e^{\lambda_j(z-1)T_k} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};0;g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\ &- z^{-l_j} z^{-l'_j} \prod_{k \in \{1,2,\dots,2m\} \setminus \{2j\}} e^{\lambda_j(z-1)T_k} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)};w;l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\ &+ z^{-l_j} \prod_{k \in \{1,2,\dots,2m\} \setminus \{2j\}} e^{\lambda_j(z-1)T_k} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)};0;g) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)};w;0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)};l'_j;z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)};l'_j;z) + \\ &+ z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)};0;g) - \\ &- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T_{2j}} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)};w;0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k + \\ &+ z^{-l'_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)};0;g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - z^{-l'_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)};w;l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+2)};0;z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+2)};0;z) - \\ &- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T_{2j+1}+T_{2j})} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2j-1)};w;0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k + \\ &+ z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j)};0;g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\ &- z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j)};w;l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - e^{\lambda_j(z-1)T_{2j+1}} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j+1)};0;g); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(s)}; 0; z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; 0; z) - \\
&- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\dots+T_{2j+1}+T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-r-3}(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k + \\
&+ z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\dots+T_{2j+1})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-r-2}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
&- z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\dots+T_{2j+1})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-r-2}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\
&+ e^{\lambda_j(z-1)(T_{s-1}+T_{s-2}+\dots+T_{2j+1})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_{j,2m(i+1)-r-1}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g),
\end{aligned}$$

где $r = s - 2j - 2$ при $s > 2j + 2$ и $r = s + 2m - 2j - 2$ при $s < 2j + 2$.

Указанные в теоремах 2.2. и 2.3. рекуррентные по $i = 1, 2, \dots$ соотношения существенно использовались для доказательства следующих теорем.

Теорема 2.4. Для существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $\lambda_j T - l_j - l'_j < 0$.

Доказательство необходимости. Пусть существует стационарное распределение вида $\{Q_j(\Gamma^{(s)}; x; y): (\Gamma^{(s)}, x, y) \in \bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})\}$ управляемой векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_{j,i}, \xi_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Далее, все рассуждения будем проводить для последовательности $\{\Phi_{j, 2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z); i \geq 0\}$ функций. Поскольку существует стационарное распределение, то можно записать рекуррентное выражение (2.9) для каждой из производящих функций $\Phi_{j, 2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)$, $j = \overline{1, m}$, $i = 0, 1, \dots$, $|z| \leq 1$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) &= \\
&= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)T} \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
&- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\
&+ z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_j(\Gamma^{(2j)}; x; l_j) z^x$.

Соотношение (2.10) получается из соотношения (2.9), если в качестве начального выбрать стационарное распределение. Разложим функцию $q_j(z) = z^{-(l_j+l'_j)} e^{\lambda_j(z-1)T}$ в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z = 1$:

$$\begin{aligned}
q_j(z) &= q_j(1) + \frac{d}{dz} q_j(z) \Big|_{z=1} (z-1) + o(z-1) = \\
&= z^{-(l_j+l'_j)} e^{\lambda_j(z-1)T} \Big|_{z=1} + \left[-(l_j+l'_j) z^{-(l_j+l'_j)-1} e^{\lambda_j(z-1)T} + (\lambda_j T) z^{-(l_j+l'_j)} e^{\lambda_j(z-1)T} \right] \Big|_{z=1} + o(z-1) = \\
&= 1 + (\lambda_j T - l_j - l'_j)(z-1) + o(z-1).
\end{aligned}$$

Разложим в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z = 1$ также функцию $A_j(z)$, где

$$\begin{aligned}
A_j(z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
&- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\
&+ z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Прежде преобразуем это выражения, используя некоторые выражения теоремы 2.1 в случае стационарной марковской последовательности. А именно:

$$\begin{aligned}
Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; y) &= \sum_{w=0}^y Q_j(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) \varphi_j(y-w, T_{2j-1}), \quad y < l_j; \\
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}; 0; y) &= \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \varphi_j(y, T_{2j}) + \sum_{w=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \varphi_j(y-w, T_{2j}), \quad y < l'_j.
\end{aligned}$$

Тогда для $A_j(z)$ получим:

$$\begin{aligned}
A_j(z) &= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
&- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\
&+ z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j+1)}; 0; g) - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}; w; 0) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j-1}) z^k = \\
&= z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k - \\
&- z^{-l_j} z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) z^w \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \\
&+ z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \left[\sum_{g=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) + \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z^{-l_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) z^g = \\
& = z^{-l_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - z^g \right] - \\
& - z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[z^{w+k-l'_j} - 1 \right].
\end{aligned}$$

$$A_j(1) = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[\sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) + \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] = 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} A_j(z) & = -l_j z^{-l_j-1} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \right. \\
& + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - z^g \left. \right] + z^{-l_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[-l'_j z^{-l'_j-1} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + \right. \\
& + \lambda_j(T-T_{2j}) z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} k \varphi_j(k, T_{2j}) z^{k-1} + \\
& + \lambda_j(T-T_{2j}) e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - g z^{g-1} \left. \right] + \\
& + l_j z^{-l_j-1} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[z^{w+k-l'_j} - 1 \right] - \\
& - \lambda_j(T-T_{2j}) z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[z^{w+k-l'_j} - 1 \right] - \\
& - z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[w+k-l'_j \right] z^{w+k-l'_j-1}.
\end{aligned}$$

После ряда несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} A_j(z) \Big|_{z=1} & = -l_j \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[\sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) + \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] + \\
& + \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[-l'_j \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) + \lambda_j(T-T_{2j}) \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) + \sum_{k=l'_j}^{\infty} k \varphi_j(k, T_{2j}) + \right. \\
& + \lambda_j(T-T_{2j}) \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - g \left. \right] - \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[w+k-l'_j \right] = \\
& = \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[\lambda_j T - l'_j - g + \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) (l'_j - k) \right] - \\
& - \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) (w+k-l'_j).
\end{aligned}$$

Таким образом, $A_j(z)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
A_j(z) &= \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[\lambda_j T - l'_j - g + \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - k) \right] - \\
&- \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j})(w + k - l'_j).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Подставим соотношения (2.11) и (2.12) в выражение (2.10) и получим:

$$\begin{aligned}
\Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) &= q_j(z) \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + A_j(z) = \\
&= \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) [1 + (\lambda_j T - l_j - l'_j)(z-1) + o(z-1)] + \\
&+ \left(\sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) [\lambda_j T - l'_j - g + \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - k)] - \right. \\
&- \left. \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j})(w + k - l'_j) \right) (z-1) + o(z-1) = \\
&= \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) [1 + (\lambda_j T - l_j - l'_j)(z-1) + o(z-1)] + \\
&+ \left(\sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) [\lambda_j T - l_j - l'_j] + \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - k) + \right. \\
&+ \left. \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g)(l_j - g) - \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j})(w + k - l'_j) \right) (z-1) + o(z-1).
\end{aligned}$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) (\lambda_j T - l_j - l'_j) + \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) (\lambda_j T - l_j - l'_j) + \\
&+ \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - k) + \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g)(l_j - g) + \\
&+ \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - w - k) + o(z-1)/(z-1).
\end{aligned}$$

Переходим к пределу слева при $z \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) (l_j T - l_j - l'_j) + \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) (\lambda_j T - l_j - l'_j) + \\
&+ \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - k) + \sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g)(l_j - g) + \\
&+ \sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j})(l'_j - w - k).
\end{aligned}$$

Так как $\Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) > 0$, при $z > 0$, $\sum_{g=0}^{l_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; 0; g) > 0$, $\sum_{w=0}^{l'_j-1} \mathcal{Q}_j(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) > 0$, $l'_j - w - k > 0$,

$k < l'_j$, $g < l_j$, то для выполнения последнего равенства необходимо: $\lambda_j T - l_j - l'_j < 0$.

Доказательство достаточности. Доказательство этого утверждения будем проводить итеративно-мажорантным методом, который основан на анализе последовательностей

$$\begin{aligned} & \{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z); i = 0, 1, \dots\}; \\ & \{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z); i = 0, 1, \dots\}; \\ & \{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; 0; z); i = 0, 1, \dots\}, \Gamma^{(s)} \in \Gamma'(j) \end{aligned}$$

из производящих функций с помощью построения для них мажорирующих функциональных последовательностей. При этом рассматриваемые последовательности задаются посредством рекуррентных соотношений. Рекуррентные соотношения для производящих функций были получены из рекуррентных соотношений для одномерных распределений, описывающих изменения распределения случайных векторов с течением времени.

Будем проводить теперь рассуждения на примере последовательности функций вида $\{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z); i = 0, 1, \dots\}$. Для оставшихся последовательностей рассуждения аналогичные, поэтому укажем для них лишь окончательные выводы.

Далее, строим доказательство от противного. Пусть $\lambda_j T - l_j - l\zeta < 0$ и не существует стационарного режима работы системы. В этом случае справедливо, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; x; y) = 0 \quad (2.13)$$

при любых допустимых значениях $\Gamma^{(s)}$, x , y .

Оценим среднюю величину очереди при $i \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} M\alpha_{j,2mi} &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y) = \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=0}^N \sum_{y=0}^{l_j} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y) + \\ &+ \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=N+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y) \geq \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=N+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y) \geq \\ &\geq N \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=N+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y) = N \left(1 - \sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=0}^N \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; x; y)\right). \end{aligned}$$

Из условия (2.13) следует, что для любого сколь угодно большого натурального N и для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ найдется такой номер I , что во все моменты времени $i > I$ будет выполнено

$$\sum_{r=1}^{2m} \sum_{x=0}^N \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; x; y) < \epsilon.$$

Таким образом, получили, что для любого сколь угодно большого натурального N и сколь угодно малого $\epsilon > 0$ существует натуральное число $I(N, \epsilon)$ такое, что при всех значениях $i > I(N, \epsilon)$, будет справедливо:

$$M\alpha_{j,2mi} \geq N(1 - \epsilon).$$

Другими словами, математическое ожидание длины очереди $M\alpha_{j,2mi}$ по потоку Π_j стремится к бесконечности при $i \rightarrow \infty$.

Теперь для функции $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)$ рассмотрим выражение:

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) = q_j(z)\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + A_{j,2mi}(z),$$

где $q_j(z) = z^{-(l_j+l'_j)} e^{\lambda_j(z-1)T}$;

$$A_{j,2mi}(z) = z^{-l_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - z^g \right] - z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[z^{w+k-l'_j} - 1 \right].$$

Рассмотрим функцию $q_j(z)$. Так как $q_j(1) = 1$ и $\frac{d}{dz} q_j(z)|_{z=1} = \lambda_j T - l_j - l'_j < 0$, то существует такое число $z^* > 1$, что в области $D = \{z: 1 < z \leq z^*\}$ справедливо неравенство $q_j(z) < 1$.

Выберем начальное распределение так, что $\Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z^*) < \infty$. Это всегда можно сделать, определив, например, вырожденное распределение вида

$$Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; 0; l_j) = 1, Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; x; l_j) = 0, Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; 0; y) = 0, \text{ где } x \in X \setminus \{0\}, y = \overline{0, l_j - 1}.$$

Напомним, что при наличии единого неразложимого класса существенных состояний, поведение марковской цепи со счетным числом состояний не зависит начального распределения. Оценим значение функции $A_{j,2mi}(z)$ в области D .

$$\begin{aligned}
|A_{j,2mi}(z)| &= \left| z^{-l_j} \sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - z^g \right] - \right. \\
&- z^{-l_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[z^{w+k-l'_j} - 1 \right] \Big| = \\
&= \left| z^{-l_j} \left[\sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[z^{-l'_j} e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) z^k + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - z^g \right] + \right. \right. \\
&+ e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[1 - z^{w+k-l'_j} \right] \Big| \leq \\
&\leq |1^{-l_j}| \left[\sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[1^{-l'_j} e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) (z^*)^k + e^{\lambda_j(z-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1^g \right] + \right. \\
&+ e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[1 - (z^*)^{w+k-l'_j} \right] \Big| \leq \\
&\leq \left[\sum_{g=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; 0; g) \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) (z^*)^k + e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] + \right. \\
&+ e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; w; l_j) \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[1 - (z^*)^{w+k-l'_j} \right] \Big| \leq \\
&\leq \left[\left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) (z^*)^k + e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] + \right. \\
&+ \left. \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{w=0}^{l'_j-1} \sum_{k=0}^{l'_j-w-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[1 - (z^*)^{w+k-l'_j} \right] \right] \right] \leq \\
&\leq \left[\left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=l'_j}^{\infty} \varphi_j(k, T_{2j}) (z^*)^k + e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] + \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \left[1 - (z^*)^{-l'_j} \right] \right] \right] = \\
&= \left[\left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} e^{\lambda_j(z^*-1)T_{2j}} - e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) (z^*)^k + e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) - 1 \right] + \right. \\
&+ \left. \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \left[1 - (z^*)^{-l'_j} \right] \right] \right] \leq \\
&\leq \left[\left[e^{\lambda_j(z^*-1)T} - e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \sum_{k=0}^{l'_j-1} \varphi_j(k, T_{2j}) \left[(z^*)^k - 1 \right] - 1 \right] + \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \left[1 - (z^*)^{-l'_j} \right] \right] \right] \leq \\
&\leq \left[\left[e^{\lambda_j(z^*-1)T} - 1 \right] + \left[e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \left[1 - (z^*)^{-l'_j} \right] \right] \right] = e^{\lambda_j(z^*-1)T} + e^{\lambda_j(z^*-1)(T-T_{2j})} \left[1 - (z^*)^{-l'_j} \right] - 1 = K_j,
\end{aligned}$$

где K_j некоторая константа.

Составим последовательность функций $\{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z); i = 0, 1, \dots\}$, определенных при помощи начального распределения $\{Q_{j,0}(\Gamma^{(s)}; x; 0); \Gamma^{(s)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}\}, x \in X\} \cup \{Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; x; l_j); x \in X\} \cup \{Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; 0; y); y = \overline{0, l_j - 1}\}$, такого, чтобы для любых z из области D выполнялось условие $\Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z^*) = \Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z^*) < \infty$. Рекуррентное выражение для функций $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)$ определим следующим образом:

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) = q_j(z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) + K_j. \quad (2.14)$$

Очевидно, что $|\Phi_j(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)| \leq |\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)|$, поскольку $A_{j,2mi}(z)$ заменили большей по абсолютному значению величиной K_j . Так как в области $D = \{z: 1 < z \leq z^*\}$ выполняется неравенство $q_j(z) < 1$, то известно, что при этом отображение (2.14) является сжимающим, поэтому последовательность $\{\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z); i = 0, 1, \dots\}$ сходится, следовательно, она ограничена, то есть $|\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)| \leq C, i = 0, 1, \dots$

Таким образом, справедливо $|\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z)| \leq C, i = 0, 1, \dots, z \in D$.

Функции $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z), i = 0, 1, \dots$ представляют собой ряды по степеням z и, таким образом, являются аналитическими в области $G = \{z: |z| \leq z^*\}$, следовательно, они имеют ограниченные производные в этой области, то есть:

$$\left| \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) \right| \leq C_{j,2j}. \quad (2.15)$$

Как уже отмечалось выше, для остальных последовательностей функций рассуждения аналогичные, поэтому для них сразу приведем результат:

$$\left| \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) \right| \leq C_{j,2j+1}; \left| \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}; 0; z) \right| \leq C_{j,s}, s \in \{1, 2, \dots, 2m\} \setminus \{2j, 2j+1\}. \quad (2.16)$$

Оценим среднее число $M_{\alpha_{j,2mi}}$ заявок в очереди по j -му потоку, используя свойства (2.15) и (2.16) производящих функций. Итак, имеем:

$$\begin{aligned} M_{\alpha_{j,2mi}} &= \\ &= \sum_{\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{(j)}} \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}; 0; z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}; l_j; z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}; l'_j; z) \Big|_{z=1} \leq \sum_{r=1}^{2m} C_{j,r}. \end{aligned}$$

Получили, что при любом $i = 0, 1, \dots$ величина $M_{\alpha_{j,2mi}}$ является ограниченной, что противоречит пункту 1 данной теоремы. Значит, для существования стационарного распределения достаточно выполнения неравенства $\lambda_j T - l_j - l_{\zeta} < 0$. Теорема 2.4. доказана.

Изложенный выше метод позволяет изучить также и свойства последовательности вида $\{(\Gamma_i, \alpha_i, \xi_{i-1}); i \geq 0\}$, где $\alpha_i = (\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{m,i})$ и $\xi_{i-1} = (\xi_{1,i-1}, \xi_{2,i-1}, \dots, \xi_{m,i-1})$.

Рассуждения при этом аналогичны и приводят к утверждению, сформулированному в виде теоремы 2.5.

Теорема 2.5. Для существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \alpha_i, \xi_{i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенств $\lambda_j T - l_j - l\zeta < 0$, $j = \overline{1, m}$,

Из теорем 2.4 и 2.5 следует, что в рассматриваемой управляющей системе обслуживания возможно существование стационарного распределения как для отдельного потока Π_j , $j = \overline{1, m}$, так и во всей системе, в зависимости от выполнения соответственно неравенства $\lambda_j T - l_j - l\zeta < 0$ только лишь для Π_j при каком-либо j , или же m неравенств $\lambda_j T - l_j - l\zeta < 0$ для всех $j = \overline{1, m}$. Это является следствием независимости входных потоков, потоков насыщения и циклической смены состояний обслуживающего устройства.

2.4. Качественно-численное исследование системы с использованием информационных технологий и имитационного моделирования

Аналитические исследования в некоторых случаях не могут дать конкретных результатов, поскольку сводятся к изучению сложных стохастических моделей. Поэтому в последнее время исследователи все чаще применяют статистические методы, в частности, метод имитационного моделирования. Данный метод позволяет, эффективно используя возможности современной вычислительной техники, с заданной точностью и надежностью оценивать значения тех характеристик, для которых аналитические расчеты пока недоступны.

В нашем случае для рассматриваемых систем также не удастся аналитически определить стационарные законы распределения выходных потоков, времени ожидания обслуживания заявки по потокам, длин очередей. Чтобы получить численные оценки этих и других характеристик, а также определить квазиоптимальные параметры функционирования систем была создана программа, являющаяся имитационной моделью процесса движения m конфликтных транспортных потоков на пересечении магистралей в случае циклической системы. Ниже, в качестве примера рассмотрим случай двух потоков ($m = 2$), причем будем считать, что выбраны два наиболее интенсивных транспортных потока.

Программная реализация имитационной модели выполнена при помощи средства разработки Borland Delphi 7.0. Для моделирования использовался компьютер на базе процессора Pentium 4. При моделировании предполагалось, что машины обслуживаются

последовательно по одной по мере поступление в систему. В начале работы программы задавались следующие параметры:

- a) длительности T_1, T_2, T_3, T_4 фаз обслуживающего устройства в секундах (с);
- b) длины $x_{1,0}$ и $x_{2,0}$ очередей в начальный момент времени по первому и второму потокам соответственно в машинах (маш);
- c) интенсивности λ_1 и λ_2 поступления машин на перекресток по первому и второму потокам в маш/с;
- d) интенсивности μ_1, μ_2 и μ_4, μ_2 обслуживания машин в зеленую и желтую фазу светофора по потокам соответственно в маш/с.

Моделирование включало в себя два этапа. На первом этапе определялся момент перехода исследуемой системы в квазистационарный (близкий к стационарному) режим функционирования. Для определения начала квазистационарного режима при заданном наборе входных параметров одновременно наблюдались две системы. В начальный момент времени очереди первой системы были пусты ($x_{1,0} = x_{2,0} = 0$), а длины очередей второй системы отличны от нуля ($x_{1,0} > 0, x_{2,0} > 0$). В качестве стандартного возмущения второй системы в данной модели размер начальных очередей по потокам определялся по формулам: $x_{j,0} = [\lambda_j T], j = 1, 2, T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$. Здесь T — длительность цикла работы автомата-светофора. Другими словами, начальные очереди для второй системы задаются в предположении, что в течение одного цикла работы автомата-светофора ни по одному из потоков машины не пропускались. При этом моделирование производилось при значении параметров, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям существования стационарного движения в обеих системах, а именно при выполнении неравенств вида $\lambda_1 T - l_1 - l_4 < 0, \lambda_2 T - l_2 - l_2 < 0$. Величину $\rho_j = \lambda_j T (\mu_j T_{2j-1} + \mu_4 T_{2j})^{-1}$ естественно назвать загрузкой системы по j -му потоку, где $j = 1, 2$.

На i -м шаге вычислялись значения $M\% \gamma_{j,i}^0$ и $M\% \gamma_{j,i}^+$ $j=1,2$ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания машины по каждому потоку в первой и второй системах соответственно. Затем определялись значения γ_i^0 и γ_i^+ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в первой и второй системах соответственно, где $\gamma_i^0 = (\lambda_1 M\% \gamma_{1,i}^0 + \lambda_2 M\% \gamma_{2,i}^0) / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\gamma_i^+ = (\lambda_1 M\% \gamma_{1,i}^+ + \lambda_2 M\% \gamma_{2,i}^+) / (\lambda_1 + \lambda_2)$. При выполнении условия $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| \geq \delta \gamma_i^0$ переходили к $(i + 1)$ -му шагу. В противном случае, то есть когда выполнялось $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| < \delta \gamma_i^0$, считали, что система достигла квазистационарного режима

функционирования и фиксировали время наблюдения t_n , которое и является оценкой времени переходного процесса в системе. Постоянное число δ выбирается из интервала $(0, 1)$, при моделировании использовали $\delta = 0,05$. Стоит отметить, что в квазистационарном режиме во всех обозначениях отсутствует индекс i , соответствующий времени.

На втором этапе моделировалась работа системы с нулевыми начальными очередями в квазистационарном режиме для нахождения с точностью $\varepsilon = 0,01$ и доверительной вероятностью $\alpha = 0,99$ следующих основных числовых характеристик:

a) значений $M\gamma_1$ и $M\gamma_2$ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания машины по первому и второму потокам в секундах;

b) значения γ^* оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в секундах, где $\gamma^* = (\lambda_1 M\gamma_1 + \lambda_2 M\gamma_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$;

c) значений Mk_1 и Mk_2 оценок средней очереди перед зеленым светом по первому и второму потокам в машинах, где $\varkappa_{j,i} \equiv k_j$ $j=1,2$ определяет очередь в квазистационарном режиме по j -му потоку перед переходом светофора в состояние $\Gamma^{(2j-1)}$.

Для выходных потоков вычислялись статистические законы распределения и статистические числовые характеристики. В частности для случайной величины $\bar{\xi}_{j,i} \equiv \theta_j$, $j=1,2$, которая определяет в квазистационарном режиме число обслуженных машин за время пока светофор находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, вычислялись статистический ряд распределения, выборочное математическое ожидание $M(\theta_j)$ и выборочная дисперсия $D(\theta_j)$.

В ходе проведения эксперимента для систем обоих типов изучались различные ситуации в зависимости от значений параметров $T, T_1, T_2, T_3, T_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \lambda_1, \lambda_2$. В частности, исследовался разброс σ^* оценок среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в зависимости от загрузки ρ системы. При этом разброс σ^* и загрузка ρ определялись по следующим формулам: $\sigma^* = (\gamma_{\max}^* - \gamma_{\min}^*) / (\gamma_{\min}^*)^{-1} 100\%$, $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Здесь γ_{\max}^* и γ_{\min}^* суть наибольшее и соответственно наименьшее значение оценки γ^* , среди полученных по десяти различным реализациям.

При получении значений численных оценок рассматривалось несколько вариантов длин периодов работы светофора. Стоит отметить, что из физических соображений величины T_1, T_2, T_3, T_4 , и T нельзя уменьшать ниже некоторых границ: $T_2 \geq 4, T_4 \geq 4$,

$T_1 \geq T_2, T_3 \geq T_4$ и $T \geq 60$. Продолжительности желтых фаз T_2, T_4 светофора выбираются инженерами ГАИ из условий безопасности проезда через конкретный перекресток. Ради простоты, в численных экспериментах было принято, что $T_2 = T_4 = 4$. Учитывая всё это и условия существования стационарного режима по двум потокам область поиска квазиоптимальных параметров T_1, T_3 имеет вид: $b = (T_1, T_3) \in \mathcal{R}_c = \{(T_1, T_3): T_1 \geq 4, T_3 \geq 4, T_1 + T_3 \geq 52, \lambda_1(T_1 + T_3 + 8) - l_1 - l_4 < 0, \lambda_2(T_1 + T_3 + 8) - l_2 - l_6 < 0\}$, $\mathcal{R}_c \subset \mathcal{R}$. В этом случае период времени работы светофора равен $T = T_1 + T_3 + 8$. Выбирая точки в этой области, можно за конечное число шагов найти квазиоптимальные значения параметров T_1, T_3 и решить задачу оптимизации по критерию $\gamma^* \rightarrow \min$. Результаты поиска квазиоптимальных параметров автомата-светофора в случае циклического алгоритма управления для различных значений параметров $T, T_1, T_2, T_3, T_4, \mu_1, \mu_2, \mu_4, \mu_6, \lambda_1, \lambda_2$ приведены в табл. 2.1 и табл. 2.2. Данные результаты были получены при фиксированных значениях параметров $\mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_4 = \mu_6 = 1,25$.

Из табл. 2.1 следует, что для интенсивностей $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,1$ квазиоптимальными являются следующие значения параметров: $T = 60, T_1 = 36, T_3 = 16$. При квазиоптимальных параметрах значение оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины в секундах равно 8,1711, значение оценки выборочного математического ожидания для первого выходного потока $M(\theta_1) = 11,313$ и, наконец, выборочная дисперсия $D(\theta_1) = 10,974$. Для второго выходного потока соответственно $M(\theta_2) = 5,602$ и $D(\theta_2) = 5,540$.

Таблица 2.1. Случай $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,1$

T	T_1	T_3	$M\gamma_1$	$M\gamma_2$	γ^*	$M\kappa_1$	$M\kappa_2$
100	80	12	1,9913	40,0221	14,6682	3,4631	8,3080
	64	28	6,6497	26,5182	13,2725	6,4311	6,8660
	50	42	14,1165	16,9436	15,0589	9,5329	5,496
80	60	12	2,3443	29,6783	11,4556	3,3353	6,5740
	50	22	5,5524	21,5643	10,8897	5,2056	5,4460
	40	32	10,9870	14,0769	12,0170	7,5309	4,4900
60	46	6	1,3811	24,8173	9,1932	2,2156	5,2100

T	T_1	T_3	M_{γ_1}	M_{γ_2}	γ^*	M_{κ_1}	M_{κ_2}
	36	16	4,6239	15,2658	8,1711	4,1397	4,0000
	30	22	7,9450	11,4347	9,1083	5,4871	3,4780
	24	28	11,6426	7,7255	10,3369	6,7645	2,9460
	20	32	14,0359	5,9278	11,3332	7,3353	2,5360

Таблица 2.2. Случай $\lambda_1 = 0,4$ и $\lambda_2 = 0,4$

T	T_1	T_3	M_{γ_1}	M_{γ_2}	γ^*	M_{κ_1}	M_{κ_2}
100	50	42	18,5915	27,6577	23,1246	18,5629	23,0260
	46	46	22,3083	22,5965	22,4524	20,4711	20,6680
	40	52	31,8705	17,1342	24,5024	24,9122	18,000
80	40	32	15,0539	25,0880	20,0710	15,1098	19,5560
	36	36	18,7498	18,7821	18,7660	16,8962	16,9740
	32	40	25,1379	14,6285	19,8832	19,6826	14,9260
60	30	22	10,5518	20,3498	15,4508	11,0059	15,2420
	26	26	14,4569	14,2396	14,3483	12,7365	12,7340
	24	28	17,4793	12,4363	14,9578	14,0778	11,7700
	22	30	22,7467	10,5835	16,6651	16,5150	10,7920
	20	32	49,8610	9,1515	29,5062	27,2695	10,1140

Из табл. 2.2 следует, что для интенсивностей $I_1 = 0,4$ и $I_2 = 0,4$ квазиоптимальными являются следующие значения параметров: $T = 60$, $T_1 = 26$, $T_3 = 26$. При квазиоптимальных значениях параметров для первого выходного потока выборочное математическое ожидание $M(\theta_1) = 21,896$, а выборочная дисперсия $D(\theta_1) = 15,574$. Для второго выходного потока соответственно $M(\theta_2) = 21,528$ и $D(\theta_2) = 15,489$.

Далее, при $j = 1, 2$ обозначим через y_j возможное значение случайной величины θ_j , а соответствующее ему статистическую вероятность через p_j^* . В табл. 2.3 и 2.4 при различных фиксированных значениях интенсивностей λ_1, λ_2 представлены статистические ряды распределения числа машин, обслуженных при квазиоптимальных значениях параметров T_1, T_3 по первому потоку за время работы состояния $\Gamma^{(1)}$ светофора. На

рисунках 2.4 и 2.5 изображены полигоны частот, построенные по этим статистическим рядам.

Таблица 2.3. Случай $I_1=0,2$ и $I_2=0,1$

y_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_1^*	0	0	0	0,008	0,008	0,012	0,040	0,060	0,054
y_1	9	10	11	12	13	14	15	16	17
p_1^*	0,128	0,102	0,134	0,114	0,112	0,074	0,062	0,038	0,022
y_1	18	19	20	21	22	23	...	36	
p_1^*	0,022	0,006	0,002	0,002	0,002	0	...	0	

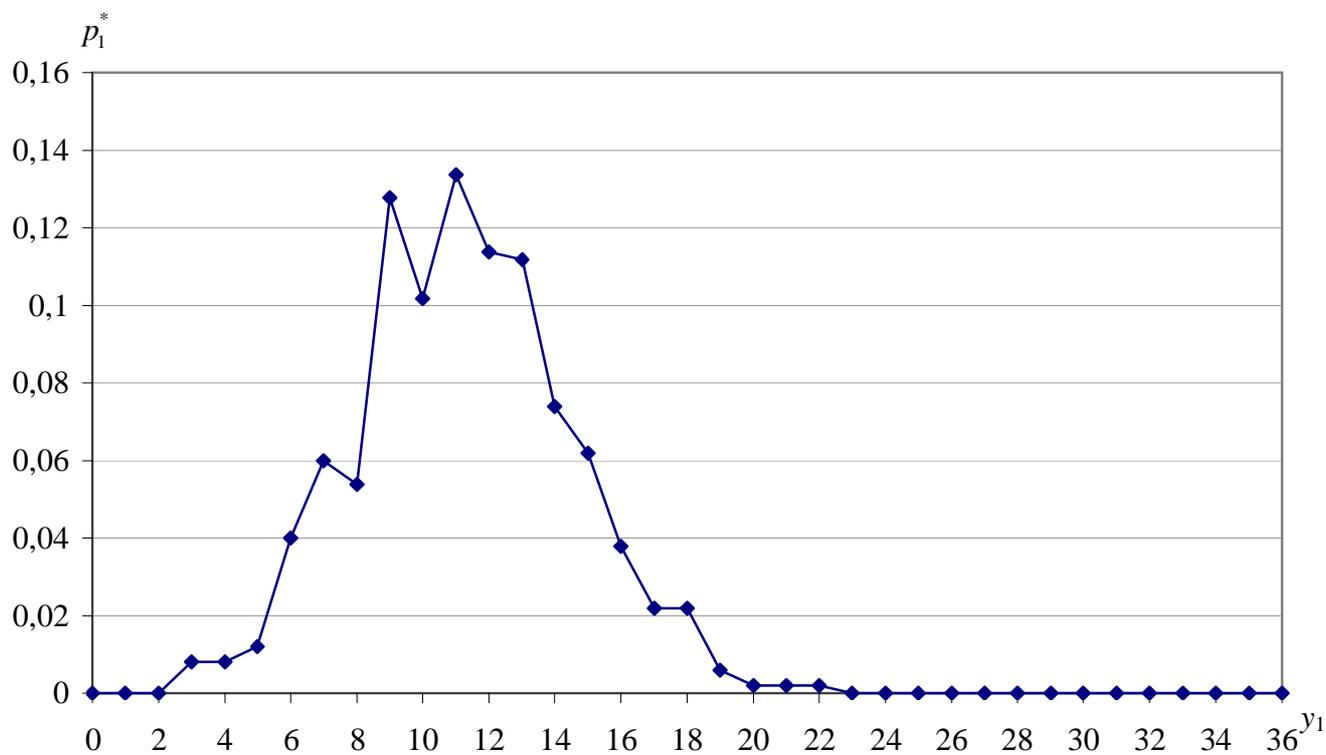


Рис. 2.4

Таблица 2.4. Случай $\lambda_1=0,4$ и $\lambda_2=0,4$

y_1	0	...	9	10	11	12	13	14	15	16
p_1^*	0	...	0	0,002	0,006	0,010	0,008	0,030	0,028	0,020
y_1	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p_1^*	0,058	0,056	0,056	0,072	0,078	0,060	0,076	0,080	0,066	0,295

p_1^*

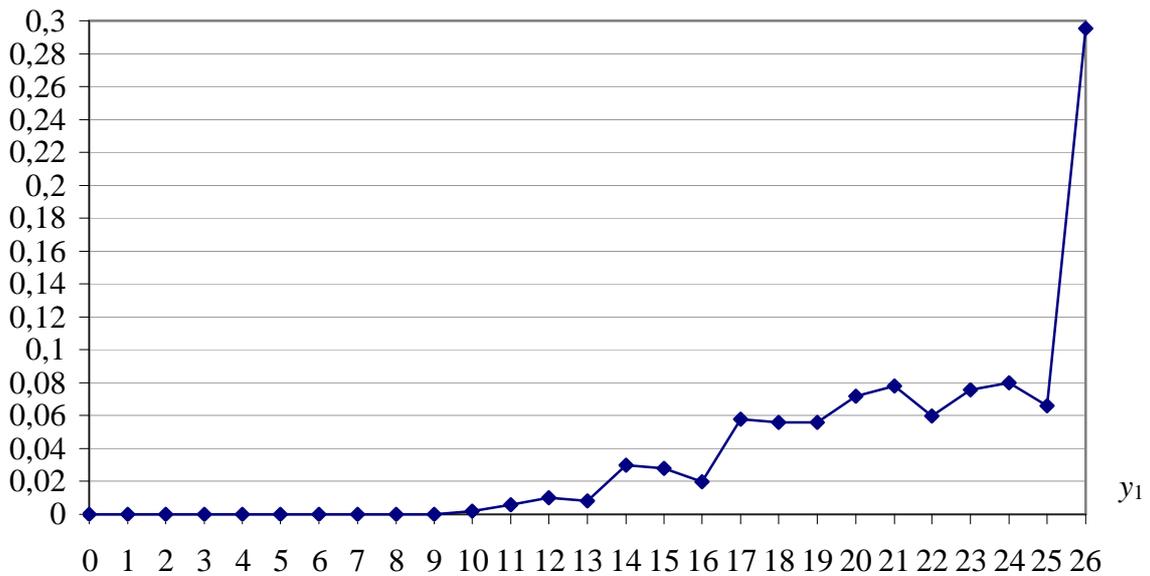


Рис. 2. 5

В табл. 2.5 и 2.6 при различных фиксированных значениях интенсивностей λ_1, λ_2 представлены статистические ряды распределения числа машин, обслуженных при квазиоптимальных значениях параметров T_1, T_3 по второму направлению за время, пока светофор находился в состоянии $\Gamma^{(3)}$. На рис. 2.6 и 2.7 изображены полигоны частот, полученные по этим статистическим рядам. Напомним, что через символ y_2 обозначено возможное значение случайной величины θ_j , а соответствующее ему статистическую вероятность через символ p_j^* .

Таблица 2.5. Случай $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,1$

y_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_2^*	0	0,020	0,064	0,150	0,146	0,146	0,166	0,128	0,070
y_2	9	10	11	12	13	14	15	16	
p_2^*	0,058	0,028	0,012	0,006	0,004	0	0,002	0	

p_2^*

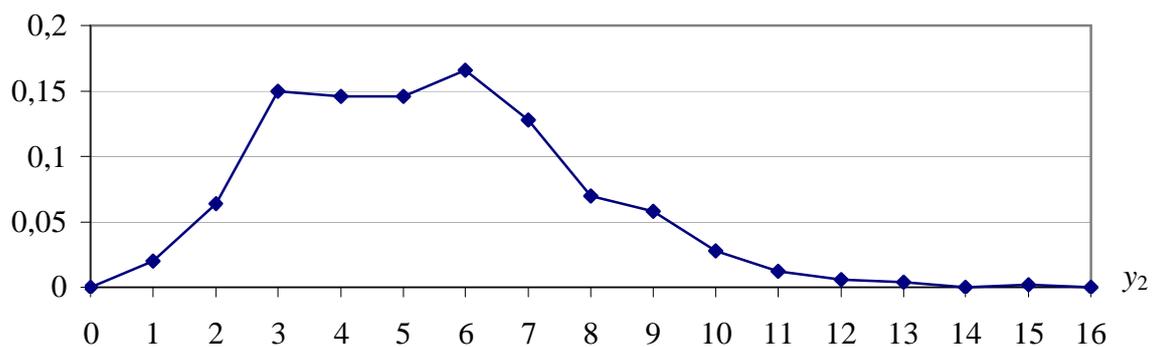


Рис. 2.6

Таблица 2.6. Случай $I_1=0,4$ и $I_2=0,4$

y_2	0	...	10	11	12	13	14	15	16	17
p_2^*	0	...	0	0,006	0,006	0,016	0,026	0,024	0,052	0,064
y_2	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
p_2^*	0,062	0,062	0,058	0,068	0,082	0,082	0,078	0,070	0,244	

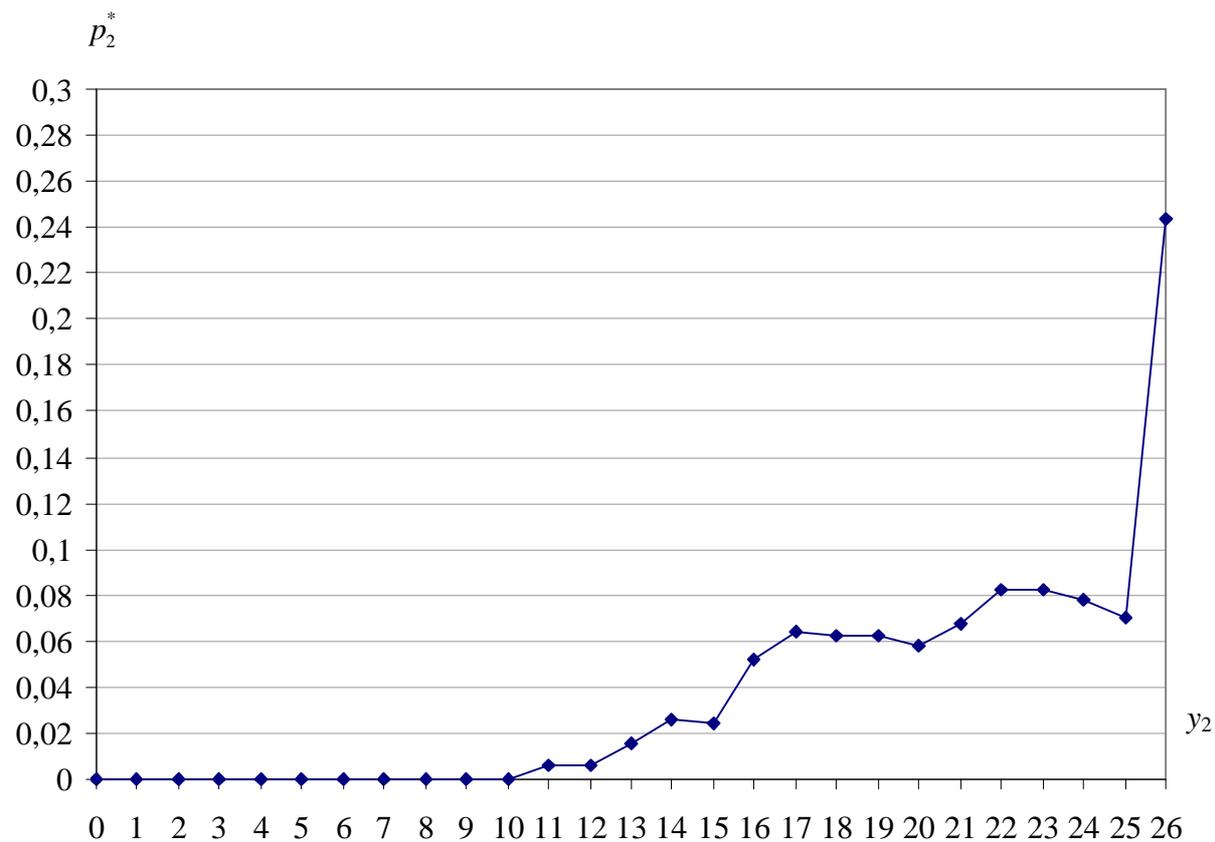


Рис. 2.7

2.5. Проблема Вебстера^{3/4}Алсопа о задержках в циклических системах массового обслуживания

Основным критерием качества управления потоками является среднее время ожидания начала обслуживания произвольной заявки в стационарном режиме работы системы, такую характеристику еще называют средней задержкой требования. Для вычисления средних задержек транспорта на регулируемом по циклическому алгоритму перекрестке при постоянных интенсивностях обслуживания машин инженеры-транспортники, как правило, используют следующую приближенную формулу Вебстера—Алсопа [4]:

$$M_{T_j}^0 = \frac{T(1-a_j)^2}{2(1-a_j\rho_j)} + \frac{\rho_j^2}{2\lambda_j(1-\rho_j)} - 0,65 \left(\frac{T}{\lambda_j^2} \right)^{1/3} \rho_j^{(2+5a_j)},$$

где $M_{T_j}^0$ — средняя задержка на перекрестке машины j -го потока; T — продолжительность периода работы светофора, λ_j — интенсивность j -го транспортного потока, T_{2j-1} — длительность зеленого света для j -го потока, μ_j — интенсивность обслуживания машин j -го потока в соответствующую зеленую фазу светофора, $a_j = T_{2j-1}T^{-1}$, $\rho_j = \lambda_j T (\mu_j T_{2j-1})^{-1}$.

Первый член формулы Вебстера—Алсопа позволяет определить среднюю задержку машины j -го транспортного потока на перекрестке при непрерывном прибытии автомобилей с интенсивностью λ_j и при непрерывном обслуживании машин в зеленую фазу с интенсивностью μ_j . Второй член учитывает среднюю задержку машины на перекрестке в случае, когда машины прибывают по закону Пуассона с параметром и покидают перекресток в течение всего периода через постоянные интервалы. Таким образом, первый член формулы учитывает детерминированный характер поступления машин, а второй — случайный характер прибытия автомобилей. Третий член формулы является корректирующим. Он позволяет учесть погрешность при расчете задержки по первым двум составляющим формулы по сравнению с ее экспериментальным значением.

Формула Вебстера—Алсопа была найдена в 1958 эмпирическим путем году с применением методов теории массового обслуживания и имитационного моделирования. В 1966 году Федоткин [4] получил аналитическую формулу для определения средней задержки в случае постоянной длительности обслуживания требований. При небольших значениях интенсивностей транспортных потоков средние задержки, полученные по

приближенной формуле Вебстера—Алсопа, хорошо соответствует аналитическим вычислениям. Однако, при значительных интенсивностях транспортных потоков значения средних задержек, получаемых по формуле Вебстера—Алсопа, существенно больше средних наблюдаемых задержек в реальных системах. Более того, это отличие нельзя обосновать точностью вычислений, полученных разными методами. Выясним, чем объясняется данное отличие.

Преыдушие разделы были посвящены системам массового обслуживания, в которых значение интенсивности потоков насыщения предполагалось равным постоянной величине в течение всего периода времени, пока обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$. Пусть теперь обслуживающее устройство в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ на промежутке времени T_{2j-1} изменяет числовое значение интенсивности потоков насыщения. Рассмотрим простейший случай, когда интенсивность μ_j последовательно принимает значения $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$, то есть имеет кусочно-постоянный вид. Данное обстоятельство позволяет представить состояние $\Gamma^{(2j-1)}$ в виде множества из двух виртуальных состояний $\Gamma_1^{(2j-1)}$, $\Gamma_2^{(2j-1)}$, следовательно, состояние $\Gamma^{(2j-1)} = \{\Gamma_1^{(2j-1)}, \Gamma_2^{(2j-1)}\}$ фактически будет являться укрупненным состоянием. В обоих состояниях $\Gamma_1^{(2j-1)}$ и $\Gamma_2^{(2j-1)}$ обслуживаются требования j -го потока, но с разной интенсивностью $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$. Длительности виртуальных состояний $\Gamma_1^{(2j-1)}$ и $\Gamma_2^{(2j-1)}$ соответственно равны $T_{2j-1,1}$ и $T_{2j-1,2}$ единиц времени, причем длительность $T_{2j-1} = T_{2j-1,1} + T_{2j-1,2}$. Пусть алгоритм смены состояний обслуживающего устройства остается циклическим. В силу этого для новой модели можно применять те же методы исследований, что и для циклической модели, только с увеличением числа состояний обслуживающего устройства.

В качестве примера также рассмотрим случай двух транспортных потоков ($m = 2$). Пусть для первого потока ($j = 1$) интенсивность обслуживания машин в состоянии $\Gamma^{(1)}$ светофора имеет кусочно-постоянный вид, а для второго потока интенсивность обслуживания остается постоянной. В этом случае число состояний светофора становится равным 5. Граф смены состояний обслуживающего устройства представлен на рисунке 12.

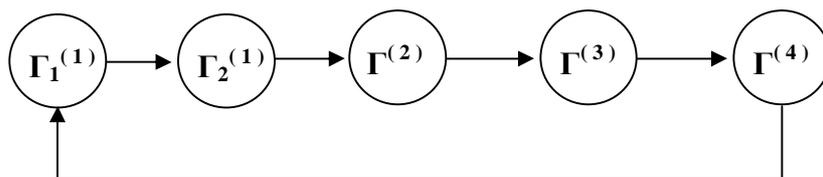


Рис.2.8

Интенсивности $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$ обслуживания машин и длины интервалов $T_{1,1}$ и $T_{1,2}$ будем варьировать так, чтобы при этом средняя интенсивность μ_1 переезда машин первого потока на интервале T_1 оставалась постоянной и равной единице. При этом, как и в предыдущих примерах, из физических соображений фиксируем некоторые параметры $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_2 = 1$, $\mu_4 = \mu_5 = 1,2$. Изучим, как влияет нелинейность интенсивности обслуживания машин по первому направлению на значения оценки γ^* . В табл. 2.8 приведены значения оценки γ^* в случае циклической системы при заданных параметрах $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_4 = \mu_5 = 1,2$, $\lambda_1 = 0,7$, $\lambda_2 = 0,1$ и, следовательно, при постоянных интенсивностях обслуживания.

Таблица 2.8

T	T_1	T_3	$M\gamma_1$	$M\gamma_2$	γ^*
120	104	8	4,629	89,839	15,281
	100	12	6,723	54,528	12,698
	94	18	10,106	46,209	14,619
	90	22	12,731	42,708	16,479
100	86	6	4,533	83,168	14,363
	80	12	7,638	41,445	11,864
	70	22	17,511	30,995	19,197
	66	26	47,520	28,064	45,088
80	68	4	4,184	65,967	11,907
	64	8	6,409	35,056	10,002
	60	12	9,216	30,289	11,851
	56	16	13,356	25,492	14,873
60	48	4	5,761	40,054	10,108
	46	6	6,784	26,127	9,202
	44	8	8,204	23,326	10,095
	42	10	13,132	19,449	13,922

Из табл. 2.8 видно, что для интенсивностей $\lambda_1 = 0,7$ и $\lambda_2 = 0,1$ минимальное значение оценки γ^* равно 9,202, и оно достигается при $T = 60$, $T_1 = 46$, $T_3 = 6$, которые и являются квазиоптимальными параметрами.

В таблице 2.9 приведены значения оценки γ^* в случае нелинейной интенсивности обслуживания машин первого транспортного потока при $\lambda_1 = 0,7$, $\lambda_2 = 0,1$ и при квазиоптимальных значениях параметров T_1 и T_3 для каждого периода $T = 120, 100, 80, 60$.

Из табл. 2.8 и табл. 2.9 очевидно, что наличие нелинейности интенсивности обслуживания от времени даже по одному направлению приводит к заметному уменьшению величины оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной машины. Например, при $\lambda_1 = 0,7$ и $\lambda_2 = 0,1$ и периоде $T = 60$ на квазиоптимальных параметрах, возможно уменьшение значения оценки γ^* с 9,202 до 7,409. При этом интервал времени $T_1 = 46$ разбивается на два участка $T_{1,1} = 16$ и $T_{1,2} = 30$, а интенсивности обслуживания машин выбираются соответственно $\mu_{1,1} = 1,438$ и $\mu_{1,2} = 0,767$. Аналогичным образом, варьируя параметры $T_{1,1}$, $T_{1,2}$ и $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$ можно добиться заметного уменьшения значения оценки γ^* для произвольных интенсивностей λ_1 , λ_2 и периода T . Также стоит отметить, что если интенсивности переезда машин через перекресток в начале зеленой фазы меньше интенсивности переезда в конце зеленой фазы, то средние задержки требований по потокам резко увеличиваются.

Таблица 2.9

T	$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	T_3	$\mu_{1,1}$	$\mu_{1,2}$	γ^*
120	30	70	12	1,667	0,715	12,459
	38	62	12	1,316	0,807	11,869
	40	60	12	1,250	0,834	10,081
	46	54	12	1,087	0,926	11,984
100	26	54	12	1,539	0,741	11,562
	30	50	12	1,333	0,800	9,708
	34	46	12	1,177	0,870	10,882
	40	40	12	1,000	1,000	11,778
80	18	46	8	1,778	0,696	10,127
	20	44	8	1,600	0,728	9,542
	24	40	8	1,334	0,801	8,206
	32	32	8	1,000	1,000	9,998
60	12	34	6	1,917	0,677	8,688
	16	30	6	1,438	0,767	7,409
	20	26	6	1,150	0,885	8,684
	23	23	6	1,000	1,000	9,205

Результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод, что можно значительно уменьшить задержки на перекрестке за счет выбора функциональных зависимостей $\mu_j = \mu_j(t)$, например, увеличивая интенсивности переезда в начале включения соответствующей зеленой фазы светофора. Таким образом, описанное выше

отличие средних задержек может быть вызвано эффектом неучтенных в приближенной формуле Вебстера—Алсопа нелинейных зависимостей интенсивностей обслуживания требований от времени за такт обслуживания.

ГЛАВА 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Введение

Исследование систем с неопределенными параметрами является одним из центральных направлений современной теории управления и составляет предмет интенсивно развивающейся теории робастной устойчивости и управления [9,10]. В этой теории существуют разные подходы к построению моделей неопределенностей. Для линейных систем широкое распространение получили аффинные и политопные модели, которые позволяют привлечь эффективный аппарат полуопределенного программирования, в частности линейных матричных неравенств [9-11]. В то же время эти модели обладают тем существенным недостатком, что порядок системы неравенств, которую необходимо решать для анализа устойчивости или синтеза стабилизирующего управления, пропорционален $n2^N$, где n -- порядок системы, N -- число неопределенных параметров. Ясно, что для реальных систем даже при наличии хорошей вычислительной базы и программного обеспечения подобные задачи остаются трудоемкими для исследователей и совсем непривлекательными для инженеров, занятых конкретным проектированием. Кроме того, неясным остается вопрос о том, как влияют возможные вариации самого закона управления на свойства системы.

В [12] был предложен подход к исследованию робастности, основанный на построении стохастической системы с мультипликативными шумами, из устойчивости которой в среднем квадратическом следовала асимптотическая устойчивость исходной системы с неопределенными параметрами при любых неопределенностях из заданной области (робастная устойчивость). При этом не происходит повышения размерности задачи в зависимости от числа неопределенных параметров. К сожалению эта работа не получила дальнейшего развития прежде всего в связи с тем, что оставалось неясным, как решать те нестандартные матричные квадратные уравнения, к которым в конечном итоге приводили поставленные задачи робастной устойчивости и стабилизации.

Достигнутый в недавнее время прогресс в развитии методов решения нестандартных матричных уравнений типа Риккати на основе выпуклой оптимизации позволяет довести

задачу до эффективных алгоритмов с применением современных программных пакетов для решения линейных матричных неравенств в случае, если вектор состояния доступен наблюдению [13,14]. Этот факт стимулировал в данной работе развитие идей [12] для снятия трудностей, связанных с указанной выше проблемой размерности.

Вторая из обозначенных проблем оказывается тесно связанной с теорией диссипативности и пассивности. Основы этой теории были заложены в [15, 16]. Идейно она весьма близка к теории устойчивости по Ляпунову и характеризует свойства динамических систем в терминах специальных функций, зависящих от входных и выходных переменных, так называемых *функций запаса (supply rate)* и *функций накопления (storage function)*. Исследования показали, что теория пассивности и диссипативности является весьма эффективным инструментом для исследования устойчивости и стабилизации нелинейных систем управления [17-19], см. также списки литературы в этих работах и прекрасную обзорную статью [20]. В частности, если систему удастся сделать пассивной, то она сохраняет устойчивость в достаточно широкой области вариаций закона управления с обратной связью.

Отмеченный прогресс детерминированной теории стимулировал в последнее время существенный интерес к обобщению теории диссипативности для стохастических систем. Разновидности подобного обобщения были предложены рядом авторов [21-26]. В [21-23, 25, 26] изучались системы, описываемые управляемыми диффузионными процессами Ито; статья [24] посвящена исследованию управляемых систем с запаздыванием и марковскими скачкообразными изменениями параметров. В [25, 26] на базе обобщения теории диссипативности для стохастических систем развивалась теория H_∞ -управления для широкого класса стохастических нелинейных стационарных систем с обратной связью по состоянию и по выходу. В работе [23] показана связь идей диссипативности с задачей эргодического управления частично наблюдаемыми диффузионными процессами.

В данной работе рассматривается класс систем, описываемый конечным множеством управляемых диффузионных процессов Ито, аффинных по управлению, со скачкообразными переходами между ними, определяемыми эволюцией однородной марковской цепи. Показано, что для таких систем, в общем случае, невозможно обеспечить пассивность, поэтому вводится новое понятие и развивается теория экспоненциальной диссипативности. Новая теория позволяет оценить возможные вариации закона управления с обратной связью по выходу, при которых система остается робастно устойчивой.

Для множества линейных систем с неопределенными параметрами на основе принципа сравнения со стохастической моделью результаты доводятся до численных процедур. В частности предлагается процедура нахождения управления с обратной связью по выходу, обеспечивающего робастную одновременную стабилизацию этого множества систем. Процедура состоит из этапа синтеза, где с помощью сходящегося итерационного алгоритма находится робастное стабилизирующее управление, и из этапа анализа, где оцениваются возможные вариации закона обратной связи, при которых сохраняется робастная устойчивость. Оба этапа эффективно используют современные решатели линейных матричных неравенств. Дается пример.

3.2. Модель системы

Рассмотрим теперь следующую нелинейную систему, описываемую стохастическими дифференциальными уравнениями с марковскими переключениями

$$dx_t = [a(x_t, r_t) + B(x_t, r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^N g_l [f_l(x_t, r_t) + G_l(x_t, r_t)u_t]dw_{lt}, \quad (3.1)$$

$$z_t = c(x_t, r_t), \quad t \geq t_0, \quad (3.2)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $u_t \in \mathbb{R}^m$ - вектор входных переменных, $z_t \in \mathbb{R}^k$ - вектор выходных переменных, r_t - однородная марковская цепь с пространством состояний $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и матрицей вероятностей переходов $P(t) = [P_{ij}(t)]_1^n = [\text{Prob}\{r(t+t) = j \mid r(t) = i\}]_1^n = \exp(\Pi t)$, $0 \leq t \leq t+t$, $\Pi = [p_{ij}]_1^n$, $p_{ij} \geq 0, j \neq i, p_{ii} = -\sum_{j \neq i} p_{ij}$, $w_t = [w_{1t} w_{2t} \dots w_{Nt}]$ - стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) с естественной фильтрацией $F_t, t \geq t_0$, порожденной процессом w до момента t включительно; начальные условия $x_{t_0} = x_0$ и $r_{t_0} = i_0$ - детерминированные, w_t и r_t - независимы, $g_l (l = 1, 2, \dots, N)$ -- положительные скаляры. Обозначим $f(x_t, r_t, u_t) = a(x_t, r_t) + B(x_t, r_t)u_t$, $\Psi(x_t, r_t, u_t) = [g_1(f_1(x_t, r_t) + G_1(x_t, r_t)u_t) \mathbf{K} g_N(f_N(x_t, r_t) + G_N(x_t, r_t)u_t)]$ и будем считать эти функции непрерывными по x, u для всех $r \in N$. Для обеспечения существования тривиального решения $x_t \equiv 0$ уравнения (3.1) положим, что для всех $i \in N, f(0, i, 0) \equiv 0, \Psi(0, i, 0) \equiv 0, c(0, i) \equiv 0$.

Будем считать, что входная переменная u_t принадлежит классу U марковских относительно F_t случайных процессов таких, что при $u_t \in U$ существует единственное сильное решение уравнения (3.1) и $[x_t, r_t] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ -- марковский процесс относительно F_t . При этом необходимо принять следующее предположение.

Предположение 3.1 Класс U является непустым.

Покажем, что это не является слишком ограничительным. Пусть входная переменная u_t может быть представлена в виде $u_t = j(z_t)$, где $j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ - непрерывная функция, а f и Ψ удовлетворяют локальному условию Липшица и условию линейного роста, т.е. для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует $h_k > 0$ такое, что

$$|f(x, i, j(\bar{z})) - f(\bar{x}, i, j(\bar{z}))| + |\Psi(x, i, j(\bar{z})) - \Psi(\bar{x}, i, j(\bar{z}))| \leq h_k |x - \bar{x}| \quad (3.3)$$

для всех $i \in \mathbb{N}$ и $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ с $|x| \vee |\bar{x}| \leq k$, и кроме того существует $h > 0$ такое, что

$$|f(x, i, j(z))| + |\Psi(x, i, j(z))| \leq h(1 + |x|) \quad (3.4)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \mathbb{N}, z = c(x, i)$.

Тогда существует единственное сильное решение уравнения (3.1), определяющее марковский процесс $[x_t, r_t]$ в пространстве состояний $\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$; здесь и далее символ $'$ означает операцию транспонирования. Таким образом, в этом случае условие Липшица и условие ограниченного линейного роста достаточны для того, чтобы класс U был непустым.

Пусть $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$ обозначает множество неотрицательных функций $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по x . Рассмотрим оператор L на $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$, который для $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$ и для $u \in \mathbb{R}^m$ задает $L_u V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\begin{aligned} L_u V(x, i) = & V_x(x, i)[a(x, i) + B(x, i)u] + \sum_{j=1}^n p_{ij} V(x, j) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N g_l^2 [f_l(x, i) + G_l(x, i)u]' V_{xx}(x, i) [f_l(x, i) + G_l(x, i)u], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где, как обычно, $V_x(x, i) = \left[\frac{\partial V(x, i)}{\partial x_1} \mathbf{K} \frac{\partial V(x, i)}{\partial x_n} \right]$ и $V_{xx}(x, i) = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \right]_{n \times n}$. Этот оператор

представляет собой производящий дифференциальный оператор марковского процесса $[x_t, r_t]'$ в пространстве состояний $\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ [27, 28].

3.3. Экспоненциальная диссипативность диффузионных процессов с марковскими переключениями

Обозначим через $L_F^2([s, T], \mathbb{R}^m)$ множество всех входных процессов $u_t \in U$ таких, что

$$\|u\|_{L_F^2([s, T])}^2 = E \int_s^T \|u_t\|^2 dt < \infty, s \geq 0.$$

Рассмотрим функцию $W: \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, связанную с системой (3.1), (3.2). Эту функцию, следуя [15], назовем функцией запаса на $[s, \infty)$, если она обладает следующим свойством: для любого $u \in L_F^2([s, T], \mathbb{R}^m)$ выход (3.2) системы (3.1) с детерминированными начальными условиями $x_s = x_0, r_s = i_0$ удовлетворяет соотношению

$$E \int_s^T |W(u_t, r_t, z_t)| dt < \infty \quad \forall T \geq s \geq 0.$$

Определение 3.1. Систему (3.1), (3.2) с функцией запаса W назовем экспоненциально диссипативной на $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$, если существуют неотрицательная непрерывная функция $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, называемая функцией накопления, и непрерывная по x для всех $r \in \mathbb{N}$ функция $m(x, i) > 0, x \neq 0, m(0, i) = 0$, такие, что для всех $t \geq t_0 \geq 0, x_{t_0} = x \in \mathbb{R}^n$ и $r_{t_0} = i \in \mathbb{N}$

$$E_{x,i} [V(x_t, r_t) + \int_{t_0}^t m(x_t, r_t) dt] - V(x, i) \leq E_{x,i} \int_{t_0}^t W(u_t, r_t, z_t) dt. \quad (3.6)$$

Неравенство (3.6) будем называть неравенством экспоненциальной диссипации. Обоснованием такого названия является то, что в случае, когда система (3.1), (3.2) является автономной, неравенство (3.6) при известных дополнительных требованиях к функциям V и m [27] выражает условие экспоненциальной устойчивости этой системы. Стохастическую диссипативность можно определить и в более общей форме, используя понятия времени F_t -остановки и F_t -супермартингала [22, 23], но такое обобщение не будет рассматриваться и обсуждаться в рамках данной работы.

Определение 3.2. Функцией доступного накопления $V_a(x, i)$ системы (3.1), (3.2) с функцией запаса $W(u, i, z)$ называется функция, определенная для $t \geq t_0$ следующим образом:

$$V_a(x, i) = \sup_{u \in L_{\mathbb{F}}^2([t_0, t], \mathbb{R}^m)} \sup_{i \geq t_0} \mathbb{E}_{x, i} \int_{t_0}^t [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt.$$

Как и для детерминированных систем, доступное накопление играет важную роль в определении того, является система диссипативной или нет. Это показывает следующая теорема.

Теорема 3.1. Функция доступного накопления $V_a(x, i)$ является конечной для всех $x \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда система (3.1), (3.2) экспоненциально диссипативна на $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$. Кроме того для любой функции накопления V справедливо неравенство $0 \leq V_a(x, i) \leq V(x, i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$ и V_a сама является одной из функций накопления.

Доказательство. Предположим, что $V_a < \infty$ и покажем, что тогда система (3.1), (3.2) является экспоненциально диссипативной. Для этого достаточно показать, что V_a является одной из функций накопления. Прежде всего отметим, что $V_a(x, i) \geq 0$ поскольку эта функция представляет собой supremum на множестве, содержащем нулевой элемент

($t = t_0$). Пусть $t_0 \leq s \leq t$ и $u^* = \arg \sup_{u \in L_{\mathbb{F}}^2([t_0, t], \mathbb{R}^m)} \mathbb{E}_{x, i} \int_{t_0}^t [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt$. В

соответствии с принципом оптимальности, принимая во внимание свойства условных математических ожиданий, получим

$$\begin{aligned} V_a(x, i) &\geq \mathbb{E}_{x, i} \int_{t_0}^s [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt + \\ &+ \mathbb{E}_{x, i} \sup_{i \geq s} \int_s^t [-W(u_t^*, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt = \mathbb{E}_{x, i} \int_{t_0}^s [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt + \\ &+ \mathbb{E}_{x, i} \sup_{u \in L_{\mathbb{F}}^2([s, t], \mathbb{R}^m)} \sup_{i \geq s} \mathbb{E} \left[\int_s^t [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt \mid x_s, r_s \right] = \\ &= \mathbb{E}_{x, i} \int_{t_0}^s [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt + \mathbb{E}_{x, i} V_a(x_s, r_s), \end{aligned}$$

откуда видно, что V_a удовлетворяет неравенству экспоненциальной диссипации (3.6).

Предположим теперь, что система экспоненциально диссипативна. Тогда

$$V(x, i) + E_{x,i} \int_{t_0}^t [W(u_t, r_t, z_t) - m(x_t, r_t)] dt \geq E_{x,i} V(x_t, r_t) \geq 0,$$

отсюда получим, что

$$V(x, i) \geq \sup_{u \in L_{\mathbb{F}}^2([t_0, t], \mathbb{R}^m)} \sup_{t \geq t_0} E_{x,i} \int_{t_0}^t [-W(u_t, r_t, z_t) + m(x_t, r_t)] dt = V_a(x, i).$$

Следовательно, $V_a < \infty$ и $0 \leq V_a(x, i) \leq V(x, i)$.

Далее рассмотрим функцию запаса специального вида

$$W(u, i, z) = z'Q(i)z + 2z'S(i)u + u'R(i)u, \quad (3.7)$$

где $Q(i) = Q'(i), S(i)$ и $R(i) = R'(i)$ ($i \in \mathbb{N}$) -- матрицы соответствующих размеров. Следующее предположение позволяет использовать производящий дифференциальный оператор, что дает возможность получить более конструктивные результаты.

Предположение 3.2. Функция накопления, если она существует, относится к классу $C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$.

Теорема 3.2. Для экспоненциальной диссипативности системы (3.1), (3.2) с функцией запаса $W(\cdot, \cdot, \cdot)$ на $[t_0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали неотрицательная функция $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$ и функции $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ и $v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, где $n_1 > 0$ - некоторое целое число, такие, что

$$\begin{aligned} & -m(x, i) + c'(x, i)Q(i)c(x, i) - V_x(x, i)a(x, i) - \sum_{j=1}^n p_{ij} V(x, j) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N g_l^2 f_l'(x, i) V_{xx}(x, i) f_l(x, i) = q'(x, i)q(x, i), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & 2c'(x, i)S(x, i) - V_x(x, i)B(x, i) - \\ & - \sum_{l=1}^N g_l^2 f_l'(x, i) V_{xx}(x, i) G_l(x, i) = 2v'(x, i)q(x, i), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$R(i) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N g_l^2 G_l'(x, i) V_{xx}(x, i) G_l(x, i) = v'(x, i)v(x, i) \quad (3.10)$$

Доказательство. Если система (3.1), (3.2) экспоненциально диссипативна на $[t_0, \infty)$ с функцией запаса $W(\cdot, \cdot, \cdot)$, то в соответствии с теоремой 3.1 $V = V_a$ - одна из функций накопления, которая удовлетворяет неравенству экспоненциальной диссипации (3.6).

Поскольку справедливо предположение 1, можно применить формулу Дынкина [27]:

$$\mathbb{E}_{x,i} V_a(x_t, r_t) - V_a(x, i) = \mathbb{E}_{x,i} \int_{t_0}^t L_u V_a(x_t, r_t) dt. \quad (3.11)$$

Из (3.6) и (3.11) следует, что

$$\mathbb{E}_{x,i} \frac{\int_{t_0}^t L_u V_a(x_t, r_t) dt}{t - t_0} \leq \mathbb{E}_{x,i} \frac{\int_{t_0}^t [W(u_t, r_t, z_t) - m(x, i)] dt}{t - t_0}.$$

Полагая в предыдущем выражении $t \downarrow t_0$, получим $L_u V(x, i) - W(u, i, z) + m(x, i) \leq 0$ или

$$\begin{aligned} J(x, i, u) &= V_x(x, i)[a(x, i) + B(x, i)u] + \sum_{j=1}^v \pi_{ij} V(x, j) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \gamma_l^2 [f_l(x, i) + G_l(x, i)u]' V_{xx}(x, i) [f_l(x, i) + \\ &+ G_l(x, i)u] - c'(x, i) Q(i) c(x, i) + x' M(i) x - 2c'(x, i) S(i) u - u' R(i) u \leq 0 \end{aligned}$$

для всех x, i и u . Из того факта, что правая часть этого неравенства квадратична по u , существуют $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ и $v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ (не обязательно единственные) такие, что

$$J(x, i, u) = -(q(x, i) + v(x, i)u)'(q(x, i) + v(x, i)u).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u , получаем (3.8), (3.9), и (3.10). Обратное утверждение вытекает из того факта, что если некоторая неотрицательная функция $V \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}; \mathbb{R})$ и функции $q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ и $v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ удовлетворяют уравнениям (3.8), (3.9), и (3.10), то для любого $x_{t_0} = x \in \mathbb{R}^n$, и $r_{t_0} = i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,i} \int_{t_0}^t [W(u_t, r_t, z_t) - m(x, i)] dt &= \mathbb{E}_{x,i} \int_{t_0}^t (q(x_t, r_t) + \\ &+ v(x_t, r_t)u_t)'(q(x_t, r_t) + v(x_t, r_t)u_t) dt + \\ &+ \mathbb{E}_{x,i} V(x_t, r_t) - V(x, i) \geq \mathbb{E}_{x,i} V(x_t, r_t) - V(x, i). \end{aligned}$$

Уравнения (3.8) - (3.10) можно рассматривать как обобщение стохастического варианта уравнений Лурье, возникающего в теории абсолютной стохастической устойчивости [29], на класс нелинейных стохастических систем (3.1) - (3.2), аффинных по входной переменной.

3.4. Диссипативность и стабилизация

В теории детерминированных систем особую роль играет функция запаса в виде скалярного произведения входной и выходной переменных

$$W(u, i, z) = z'u. \quad (3.12)$$

Диссипативные системы с такой функцией запаса называются пассивными. Обобщение понятия пассивности для стохастических систем выглядит следующим образом [21].

Определение 3.3. Система (3.1), (3.2) называется пассивной на $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$, если она диссипативна на $[t_0, \infty), t_0 \geq 0$, с функцией запаса (3.12), и функция накопления удовлетворяет условию $V(0, i) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Анализируя уравнения Лурье (3.8) - (3.10), нетрудно видеть, что понятие пассивности имеет смысл лишь для частного случая системы (3.1), (3.2) с $G_i(x, i) \equiv 0$, иначе уравнение (3.10) не может быть выполнено, и обобщение детерминированной теории, аналогичной [19], не всегда возможно. В дальнейшем, чтобы гарантировать существование и единственность решения уравнения (3.1) и марковское свойство $[z_i, r_i]'$, примем следующее предположение.

Предположение 3.3. Если в уравнении (3.1) $u_i = u(z_i)$, то выполняются условия (3.3) и (3.4).

Экспоненциально диссипативная система (3.1), (3.2) обладает следующим свойством стабилизируемости обратной связью по выходу.

Теорема 3.3. Предположим, что система (3.1), (3.2) экспоненциально диссипативна с функцией накопления $V(x, i)$, удовлетворяющей неравенству

$$\lambda_1 |x|^2 \leq V(x, i) \leq \lambda_2 |x|^2, \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad (3.13)$$

функцией запаса $W = z'Qz + 2z'Su + u'Ru$ и функцией $m(x, i) = x'Mx, M = M' > 0, i \in \mathbb{N}$. Пусть $j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$z'Qz - z'Sj(z) + j'(z)Rj(z) \leq 0 \quad \forall z \neq 0, j(0) = 0. \quad (3.14)$$

Тогда управление с обратной связью по выходу

$$u = -j(z) \quad (3.15)$$

обеспечивает экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения $x_t \equiv 0$ системы (3.1).

Доказательство. Если закон обратной связи u задан выражением (3.15), то в силу определения пассивности и (3.14) получим

$$\begin{aligned} LV(x, i) &\leq z'Qz + 2z'Su + u'Ru - x'Mx = \\ &= z'Qz - 2z'S\varphi(z) + \varphi'(z)R\varphi(z) - x'Mx \leq -\lambda_3 |x|^2 < 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

откуда, учитывая (3.13), в соответствии с [41] получим, что тривиальное решение уравнения (3.1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

В частном случае, когда входная и выходная переменные скалярные и $Q = 0$, квадратичное неравенство (3.14) является обычным секторным ограничением на функцию (3.15). Отсюда становится ясной причина невозможности обеспечить пассивность при $G_l(x, i) \neq 0$: неограниченный коэффициент усиления, который допускает пассивная система, неограниченно увеличивает интенсивности шумов, доводя их до критических значений, начиная с которых система теряет устойчивость.

3.5. Робастная одновременная стабилизация систем с неопределенными параметрами

3.5.1. Нелинейные системы. Пусть множество детерминированных нелинейных систем описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = a_i(x_t) + B_i(x_t)u_t + \sum_{j=1}^n s_j(t)(f_{li}(x_t) + G_{li}(x_t)u_t), \quad (3.17)$$

$$z_t = c_i(x_t), t \geq t_0, i = 1, \mathbf{K}, n, \quad (3.18)$$

где $s_l(t), t \geq 0, l = 1, \mathbf{K}, N$, -- неопределенные параметры такие, что

$$|s_l(t)| \leq d_l, t \geq 0, l = 1, \mathbf{K}, N, \quad (3.19)$$

остальные обозначения те же самые, что и раньше. Рассмотрим следующую задачу *робастной одновременной стабилизации*: найти управление с обратной связью по выходу

$$u = -u(z), u(0) = 0, \quad (3.20)$$

где $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ -- непрерывная функция, такое, что все замкнутые системы из множества (3.17), (3.18) асимптотически устойчивы в целом при любых $s_l(t)$, удовлетворяющих (3.19). Обозначим

$$\bar{a}_i(x) = a_i(x) - B_i(x)u(z), \quad \bar{f}_{ii} = f_{ii} - G_{ii}(x)u(z)$$

и запишем уравнения множества замкнутых систем в виде

$$\dot{x}_i = \bar{a}_i(x_i) + \sum_{l=1}^N s_l(t) \bar{f}_{li}(x_i), \quad (3.21)$$

$$z_i = c_i(x_i), \quad t \geq t_0, \quad i = 1, \mathbf{K}, n \quad (3.22)$$

Анализ робастности основан на следующей теореме, которая обобщает результат [12] на случай нелинейных систем и дает возможный способ построения функции Ляпунова, гарантирующей робастную устойчивость.

Теорема 3.4. Предположим, что существуют функции $\Phi_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m_{ii}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $n_{ii}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \mathbf{K}, N$, $i = 1, \mathbf{K}, n$, и положительно определенная матрица $P = P'$ такие, что для некоторого $b > 0$

$$m'_{ii}(x)n_{ii}(x) + n'_{ii}(x)m_{ii}(x) = \bar{f}'_{ii}(x)Px + x'P\bar{f}_{ii}(x), \quad (3.23)$$

$$\bar{a}'_i(x)Px + x'P\bar{a}_i + \Phi_i(x) \leq 0, \quad (3.24)$$

$$\sum_{l=1}^N d_l (m'_{ii}(x)m_{ii}(x) + n'_{ii}(x)n_{ii}(x)) - \Phi_i(x) \leq -b |x|^2. \quad (3.25)$$

Тогда закон управления (3.20) одновременно стабилизирует все системы из множества (3.17), (3.18) при любых неопределенностях параметров, удовлетворяющих (3.19).

Доказательство. Из условий (3.19) и (3.24) следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq [d_l^{1/2} m_{ii}(x) - d_l^{-1/2} s_l(t) n_{ii}]' [d_l^{1/2} m_{ii}(x) - \\ &- d_l^{-1/2} s_l(t) n_{ii}] = d_l m'_{ii}(x) m_{ii}(x) + d_l^{-1} s_l^2(t) n'_{ii}(x) n_{ii}(x) - \\ &- s_l(t) [m'_{ii}(x) n_{ii}(x) + n'_{ii}(x) m_{ii}(x)] \leq d_l [m'_{ii}(x) m_{ii}(x) + \\ &+ n'_{ii}(x) n_{ii}(x)] - s_l(t) [\bar{f}'_{ii}(x) Px + x' P \bar{f}_{ii}]. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$s_l(t) [\bar{f}'_{ii}(x) Px + x' P \bar{f}_{ii}] \geq d_l [m'_{ii}(x) m_{ii}(x) + n'_{ii}(x) n_{ii}(x)], \quad l = 1, \mathbf{K}, N, \quad i = 1, \mathbf{K}, n. \quad (3.26)$$

Определим функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = x'Px. \quad (3.27)$$

Производная функции (3.27) в силу системы (3.21) определится выражением

$$\dot{V}(x_t) = \dot{x}_t'Px_t + x_t'P\dot{x}_t = \bar{a}'_i(x_t)Px_t + x_t'P\bar{a}_i(x_t) + \sum_{l=1}^N s_l(t) \bar{f}_{li}(x_t)Px_t + x_t'P\bar{f}_{li}(x_t).$$

Используя (3.24), (3.26) и (3.25), получим

$$\dot{V}(x_t) \leq -[\Phi_i(x) - \sum_{l=1}^N d_l[m'_i(x)m_{li}(x) + n'_i(x)n_{li}(x)]] \leq -b|x|^2, \quad i = 1, \mathbf{K}, n.$$

Последнее, в силу теоремы Барбашина-Красовского, означает, что тривиальное решение уравнения (3.21) асимптотически устойчиво в целом и, таким образом, закон управления (3.20) одновременно стабилизирует все системы из множества (3.17), (3.18) при любых неопределенностях параметров, удовлетворяющих (3.19).

Рассмотрим следующую стохастическую систему:

$$dx_t = [A(x_t, r_t) + B(x_t, r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^N g_l[f_l(x_t, r_t) + G_l(x_t, r_t)u_t]dw_t, \quad (3.28)$$

$$z_t = c(x_t, r_t), \quad t \geq t_0, \quad (3.29)$$

где $A(x, i) = a(x, i) + aIx$, $x \in \mathbf{R}^n$, $a > 0$, $a(x, i) = a_i(x)$, $f_l(x, i) = f_{li}(x)$, $l = 1, \mathbf{K}, N$, $i \in \mathbf{N}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5. Предположим, что для системы (3.28), (3.29) с управлением (3.20) существует квадратичная функция Ляпунова вида (3.27) такая, что $LV(x) \leq 0$ и

$$a - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \frac{d_l^2}{g_l^2} > 0. \quad (3.30)$$

Тогда это управление одновременно стабилизирует все системы из множества (3.17), (3.18) при любых неопределенностях параметров, удовлетворяющих (3.19).

Доказательство. Производящий дифференциальный оператор системы (3.28) с управлением (3.20) для квадратичной функции (3.27) дается выражением

$$LV(x) = \bar{a}'_i(x)Px + x'P\bar{a}_i(x) + 2ax'Px + \sum_{l=1}^N g_l^2 \bar{f}_{li}(x)P\bar{f}_{li}(x).$$

Определим

$$\Phi_i(x) = 2ax'Px + \sum_{l=1}^N g_l^2 \bar{f}_{li}(x) P \bar{f}_{li}(x),$$

$$m_{li}(x) = \left(\frac{g_l^2}{d_l} \right)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \bar{f}_{li}(x), n_{li}(x) = \left(\frac{d_l}{g_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}(x),$$

тогда, принимая во внимание, что $LV(x) \leq 0$, легко видеть, что справедливы (3.23) и (3.24). Более того,

$$\sum_{l=1}^N d_l (m'_{li}(x) m_{li}(x) + n'_{li}(x) n_{li}(x)) - \Phi_i(x) = \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \frac{d_l^2}{g_l^2} - a \right) x' P x.$$

В силу (3.30) существует $b > 0$ такое, что выполняется (3.25). Тогда в соответствии с теоремой 3.4 этим доказано, что тривиальное решение уравнения (3.21) асимптотически устойчиво в целом и закон управления (3.20) одновременно стабилизирует все системы из множества (3.17), (3.18) при любых неопределенностях параметров, удовлетворяющих (3.19).

Из теорем 3.3 и 3.5 вытекает следующий результат, устанавливающий робастные свойства стабилизирующего управления.

Следствие 3.1. Предположим, что (3.20) является робастным стабилизирующим управлением и кроме того система (3.28), (3.29) с этим управлением экспоненциально диссипативна с положительно определенной функцией накопления вида (3.27), функцией запаса

$$W = z' Q z + 2z' S u + u' R u$$

и функцией $m(x, i) = x' M x$, $M = M' > 0$, $i \in N$. Пусть $j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условию (3.14). Тогда

$$u = -(j(z) + u(z)) \tag{3.31}$$

является робастным стабилизирующим управлением для системы (3.17), (3.18). Таким образом, робастность системы (3.17), (3.18) сохраняется при вариациях управления, удовлетворяющих условию (3.14), если она является экспоненциально диссипативной с указанными функциями запаса и накопления.

3.5.2. Линейные системы Как специальный случай рассмотрим множество линейных систем с неопределенными параметрами

$$\dot{x} = A_i x_t + B_i u_t + \sum_{l=1}^N S_l(t) (A_{li} x_t + B_{li} u_t), \tag{3.32}$$

$$z_i = Cx_i, t \geq 0, i = 1, \mathbf{K}, n. \quad (3.33)$$

Определим матрицу усиления F такую, что все замкнутые системы из этого множества, состоящие из объекта управления (3.32), вектора измерений (3.33) и закона управления со статической обратной связью по выходу

$$u(t) = -u(z) = -Fz(t), \quad (3.34)$$

асимптотически устойчивы для неопределенностей, удовлетворяющих ограничениям (3.19) и для вариаций вида (3.31) самого закона управления (3.34), удовлетворяющих ограничениям (3.14).

После выбора интенсивностей шумов и параметра a в соответствии с (3.30) и следствием 3.1. решение этой задачи сводится к нахождению матриц $H = H' > 0$ и F , удовлетворяющих системе матричных квадратных неравенств

$$\begin{aligned} & (A_{ai} - B_i FC)' H + H(A_{ai} - B_i FC) + M - C' Q C + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - \\ & - B_{ij} FC)' H (A_{ij} - B_{ij} FC) + (HB_i - \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} FC)' HB_{ij} - C'S)(R - \\ & - \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' HB_{ij})^{-1} (HB_i - \sum_{l=1}^N g_l^2 (A_{ij} - B_{ij} FC)' HB_{ij} - C'S)' \leq 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $A_{ai} = (A_i + aI)$. Решение подобных неравенств представляет собой NP -сложную задачу [30]. Далее предлагается двухшаговая процедура, где сначала с помощью сходящегося итерационного алгоритма находится матрица усиления F робастного стабилизирующего управления. Затем при известной матрице F неравенство (3.35) с помощью стандартного применения теоремы о дополнении Шура [9-11] сводится к системе линейных матричных неравенств, на основе решения которых проверяется выполнение ограничений (3.14).

Рассмотрим теперь эти шаги подробно. Нахождение матрицы усиления управления с обратной связью по состоянию

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.36)$$

не встречает принципиальных затруднений, тогда матрицу усиления стабилизирующего управления (3.34) с обратной связью по выходу можно было бы легко найти из уравнения

$$FC = K, \quad (3.37)$$

но оно имеет точное решение лишь при специальной структуре матрицы K . Чтобы найти такое решение, попытаемся наложить соответствующие структурные ограничения на эту матрицу. Следуя [31], запишем сингулярное разложение для матрицы C :

$$C = USV', U'U = I, V'V = I, \quad (3.38)$$

где U и V - ортогональные матрицы, S - прямоугольная матрица, у которой элементы с равными индексами представляют собой сингулярные числа S , а остальные элементы нулевые. Определим

$$F = KC^+, \quad (3.39)$$

где C^+ - псевдообращение по Муру-Пенроузу и, вводя обозначения $\hat{A} = V'AV$, $\hat{B} = V'B$, $\hat{K} = KV = [\hat{K}_1 \quad \hat{K}_2]$, где $\hat{K}_1 = KV_1, V_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\hat{K}_2 = KV_2, V_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$, с учетом (3.38) запишем

$$A - BFC = V \left(\hat{A} - \hat{B} [\hat{K}_1 \quad \hat{K}_2] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) V^T, \quad (3.40)$$

аналогично

$$A_i - B_i FC = V \left(\hat{A}_i - \hat{B}_i [\hat{K}_1 \quad \hat{K}_2] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) V^T. \quad (3.41)$$

С учетом этих соотношений

$$KC^+C = KV_1V_1' = K(I - V_2V_2') = K - KV_2V_2'. \quad (3.42)$$

Заметим, что соотношения (3.40), (3.41) не зависят от конкретного значения \hat{K}_2 . В то же время если положить

$$\hat{K}_2 = KV_2 = 0, \quad (3.43)$$

из (3.42) получим, что справедливо (3.37). Таким образом если K является матрицей усиления стабилизирующего управления (3.36) с обратной связью по состоянию и

выполнено ограничение (3.43), то (3.39) является матрицей усиления стабилизирующего управления (3.34) с обратной связью по выходу.

Рассмотрим стохастическую систему

$$dx = [A_a(r_t)x_t + B(r_t)u_t]dt + \sum_{l=1}^N g_l(A_l(r_t)x_t + B_l(r_t)u_t)dw_l, \quad (3.44)$$

где интенсивности шумов выбраны в соответствии с (3.30) и выходная переменная задается выражением (3.33). Поставим следующую задачу *одновременной оптимальной стабилизации*. Найти такое управление с обратной связью по выходу вида (3.34), которое обеспечивает экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы (3.44) при ограничении (3.43) и минимизирует функционал

$$J = E_x \int_0^{\infty} [x_t' Q_s(r_t) x_t + u_t' R_s(r_t) u_t] dt \quad (3.45)$$

а решениях системы (3.44), где $Q_{si} = Q_{si}' > 0$, $R_{si} = R_{si}' > 0$, $i = 1, \mathbf{K}, n$. Предположим, что существует матрица $P = P'$, такая, что $V(x) = x'Px > 0$ и

$$L_u V(x) = -x'(Q_{si} + K_i' R_{si} K_i)x, \quad i = 1, \mathbf{K}, n, \quad (3.46)$$

где L_u обозначает производящий дифференциальный оператор на решениях системы (3.44) при управлении (3.36). Тогда замкнутая система (3.44),(3.36) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом. Условие (3.46) эквивалентно следующим матричным уравнениям

$$\begin{aligned} & (A_{ai} - B_i K)' P + P(A_{ai} - B_i K) + \\ & + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} K)' P (A_{ij} - B_{ij} K) + Q_{si} + K_i' R_{si} K_i = 0, \quad i = 1, \mathbf{K}, n. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Минимизация (3.45) на решениях системы (3.44) при заданном в виде (3.36) управлении эквивалентна нахождению матрицы K из условия минимума функции $\text{tr} X P X$ при ограничениях (3.47), (3.43), где $X = x x'$. Решая эту задачу методом множителей Лагранжа, находим

$$\sum_{i=1}^n (A_{ai} - B_i K) Y_i + Y_i (A_{ai} - B_i K)' + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} K) Y_i (A_{ij} - B_{ij} K)' + X = 0,$$

$$(A_{ai} - B_i K)' P + P(A_{ai} - B_i K) + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} K)' P (A_{ij} - B_{ij} K) + Q_{si} + K' R_{si} K = 0, i = 1, \mathbf{K}, n, \quad (3.48)$$

$$\sum_{i=1}^n [(R_{si} + \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' P B_{ij}) K - \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' P A_{ij} - B_i' P] Y_i + \Lambda V_2' = 0, \quad (3.49)$$

$$K V_2 = 0,$$

где Y_i ($i = 1, \mathbf{K}, n$), Λ - множители Лагранжа. По аналогии с [32] можно показать, что если система уравнений (3.47) имеет положительно определенное решение, то уравнение (3.48) имеет решение $Y_i = Y > 0, i = 1, \mathbf{K}, n$. Тогда из (3.49) и (3.43) получим

$$K = \left[\sum_{i=1}^n R_{si} + \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' P B_{ij} K \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n B_i' P + \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' P A_{ij} \right] [I - V_2 (V_2' Y^{-1} V_2)^{-1} V_2' Y^{-1}]. \quad (3.50)$$

Для нахождения матрицы усиления K стабилизирующего управления можно предложить следующий итерационный алгоритм, гарантирующий на каждом шаге выполнение условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом.

Шаг 1. Задаем матрицы $Q_{si} \geq 0, R_{si} > 0, X > 0$ и начальное значение матрицы усиления K . Эта матрица находится из условия стабилизации системы (3.44) в среднем квадратическом управлением (3.36) любым из известных методов.

Шаг 2. Решаем уравнение для Y_n и неравенства для P_n :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (A_{ai} - B_i K_n) Y_{(n)} + Y_n (A_{ai} - B_i K_n)' + \\ & + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} K_n) Y_n (A_{ij} - B_{ij} K_n)' + X = 0, \\ & (A_{ai} - B_i K_n)' P_n + P_n (A_{ai} - B_i K_n) + Q_{si} + K_n' R_{si} K_n + \\ & + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} K_n)' P_n (A_{ij} - B_{ij} K_n) < 0, i = 1, \mathbf{K}, n, n = 0, 1, \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Шаг 3. Вычисляем приращение и находим $K_{n+1} = K_n + b_n \Delta K_n$, где $0 < b_n < 2$, выбирается из условия устойчивости системы (3.44) в среднем квадратическом на данном шаге. Полагаем $n = n + 1$.

Шаг 4. Если $\|K_n V_2\| < \varepsilon$, то вычисления заканчиваем и полагаем $F = K C^+$, иначе переходим к шагу 2.

Важно отметить, что вместо уравнений (3.47) с матрицами $Q_{si} > 0$ в алгоритме используются строгие неравенства (3.51) с $Q_{si} \geq 0, (i=1, \mathbf{K}, n)$. Это связано с тем, что рассматриваемая задача одновременной оптимальной стабилизации разрешима лишь при специальном выборе матриц Q_{si} и R_{si} . В случае использования неравенств (3.51) проблема такого специального выбора снимается, поскольку при выполнении (3.51) гарантируется существование матриц $\bar{Q}_{si} > 0 (i=1, \mathbf{K}, n)$ таких, что при $Q_{si} = \bar{Q}_{si}$ выполняются уравнения (3.47).

Следующая теорема дает метод нахождения параметра b_n , гарантирующего устойчивость системы (3.44) в среднем квадратическом на каждом шаге алгоритма и сходимость этого алгоритма. Введем обозначения

$$\begin{aligned} M_i &= A_{\alpha i} - B_i K_n, \quad W = P_n, \\ D_i &= -B_i \Delta K_n, \quad N_{ij} = A_{ij} - B_{ij} K_n, \quad \tilde{N}_{ij} = -B_{ij} \Delta K_n, \quad j = 1, \mathbf{K}, N, \\ a_i &= \| Q_{si}^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \tilde{N}'_j W \tilde{N}_j \right) Q_{si}^{-1/2} \|_2, \\ b_i &= 2 \| Q_{si}^{-1/2} (W D'_i + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 N'_{ij} W \tilde{N}_{ij}) Q_{si}^{-1/2} \|_2. \end{aligned}$$

Теорема 3.6. (Сходимость алгоритма) Пусть на каждом шаге алгоритма параметр b_i выбирается из условия

$$b_n < \min_i \min\{b_i^+, 2\},$$

где b_i^+ -- положительный корень квадратного уравнения

$$a_i b^2 + b_i b - 1 = 0.$$

Тогда алгоритм сходится и управление (3.36) с матрицей усиления $K = K_i, i=1, 2, \mathbf{K}$ гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы.

Доказательство. Поскольку в соответствии с алгоритмом $K_{n+1} = K_n + b_n \Delta K_n$, получим

$$K_{n+1} V_2 = K_n V_2 + b_n \Delta K_n V_2 = (1 - b_n) K_n V_2,$$

откуда $\|K_{n+1} V_2\| = |1 - b_n| \|K_n V_2\|$, и, следовательно, при $0 < b_n < 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P K_n V_2 P = 0$.

Пусть далее найденная на некотором шаге матрица усиления K_n является матрицей управления (3.36), стабилизирующего систему (3.44) в среднем квадратическом. Это

означает, что неравенства (3.51) имеет положительно определенное решение, удовлетворяющее условию

$$M_i'W + WM_i + \sum_{j=1}^N g_j^2 N_{ij}' W N_{ij} + Q_{si} < 0. \quad (3.52)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$U_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Q_{si}^{1/2} - \sqrt{2} Q^{-1/2} \beta_n W D_i - \frac{\sqrt{2}}{2} Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n^2 \tilde{N}_{ij}' W \tilde{N}_{ij} - \\ - \sqrt{2} Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n N_{ij}' W \tilde{N}_{ij}.$$

Выберем b_i из условия

$$Q_{si} > 4(Q_{si}^{-1/2} \beta_n W D_i + \frac{1}{2} Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n^2 \tilde{N}_{ij}' W \tilde{N}_{ij} + \\ + Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n N_{ij}' W \tilde{N}_{ij})' (Q_{si}^{-1/2} \beta_n D_i W + \\ + \frac{1}{2} Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n^2 \tilde{N}_{ij}' W \tilde{N}_{ij} + Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n N_{ij}' W \tilde{N}_{ij}), \quad (3.53)$$

тогда из очевидного неравенства $U_i' U_i \geq 0$ с учетом (3.52)) получим

$$-(M_i'W + WM_i + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 N_{ij}' W N_{ij}) > \beta_n (W D_i + D_i' W + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n N_{ij}' W \tilde{N}_{ij} + \\ + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \beta_n \tilde{N}_{ij}' W N_{ij}) + \beta_n^2 \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \tilde{N}_{ij}' W \tilde{N}_{ij},$$

откуда

$$(M_i + \beta_n D_i)' W + W (M_i + \beta_n D_i) + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 (N_{ij} + \beta_n \tilde{N}_{ij}) W (N_{ij} + \beta_n \tilde{N}_{ij}) < 0. \quad (3.54)$$

Следовательно, матрица усиления $K_{n+1} = K_n + b_n \Delta K_n$ является матрицей управления с обратной связью по состоянию, стабилизирующего систему (3.44) в среднем квадратическом.

Неравенство (3.53) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\|2\beta_n Q_{si}^{-1/2} (WD_i + \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 N_{ij}' W \tilde{N}_{ij}) Q_{si}^{-1/2} + \beta_n^2 Q_{si}^{-1/2} \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 N_{ij}' W \tilde{N}_{ij} Q_{si}^{-1/2}\|_2 < 1.$$

Нетрудно видеть, что это неравенство выполняется, если b_n удовлетворяет условию теоремы.

Следствие 3.2. При реализации алгоритма величину b_n более удобно находить, решая на каждом шаге задачу максимизации этой величины при ограничениях в виде линейных матричных неравенств (3.54) и $0 < b_n < 2$.

Теперь можно воспользоваться условиями экспоненциальной диссипативности, чтобы оценить робастные свойства управления. Для этого можно воспользоваться неравенствами (3.35), которые при найденной матрице усиления F сводятся к линейным матричным неравенствам относительно матрицы H :

$$H > 0, \begin{bmatrix} \Gamma_{11i} & \Gamma_{12i} \\ \Gamma_{12i}' & \Gamma_{22i} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.55)$$

где $\Gamma_{11i} = (A_{ai} - B_i FC)' H + H(A_{ai} - B_i FC) + M - C' Q C + \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} FC)' H (A_{ij} - B_{ij} FC)$, а

$$\Gamma_{12i} = H B_i - \sum_{j=1}^N g_j^2 (A_{ij} - B_{ij} FC)' H B_{ij} - C' S, \quad \Gamma_{22i} = -R + \sum_{j=1}^N g_j^2 B_{ij}' H B_{ij}.$$

Если неравенства (3.55) разрешимы, то управление

$$u = -(Fz + j(z)) \quad (3.56)$$

является робастным стабилизирующим управлением для системы (3.32), (3.33) при любых $j(z)$, удовлетворяющих неравенству (3.14).

3.6. Пример

В задачах автоматического управления полетом часто бывает необходимо найти такие постоянные настройки регулятора с обратной связью по выходу, которые обеспечили бы стабилизацию летательного аппарата во всех возможных режимах. В данном разделе на основе предложенного метода решается задача стабилизации продольного углового движения многорежимного летательного аппарата. Линеаризованная модель такого движения задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{J}} &= w_z, \\
\dot{w}_z &= -a_{mz}^a J - a_{mz}^{wz} w_z + a_{mz}^a \Theta + a_{mz}^d d, \\
\dot{\Theta} &= -a_y^a J + a_y^a \Theta,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

где J - угол тангажа, w_z - угловая скорость тангажа, $\Theta = J - a$ - угол наклона траектории, a - угол атаки, d - угол отклонения руля высоты. Переменными состояниями и управления системы (3.57) будут соответственно

$$x(t) = [J \ w_z \ \Theta]', \quad u(t) = d.$$

Обычно непосредственному измерению доступны только J и w_z , тогда вектор выхода будет иметь вид

$$z(t) = [J \ w_z]'$$

Рассматриваемый летательный аппарат имеет девять типовых режимов полета, в которых параметры содержат неопределенности, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned}
a_{mz}^a &\in [a_{mz0}^a - \Delta a_{mz}^a, a_{mz0}^a + \Delta a_{mz}^a], \Delta a_{mz}^a = 0, 2a_{mz0}^a, \\
a_y^a &\in [a_{y0}^a - \Delta a_y^a, a_{y0}^a + \Delta a_y^a], \Delta a_y^a = 0, 2a_{y0}^a, \\
a_{mz}^{wz} &\in [a_{mz0}^{wz} - \Delta a_{mz}^{wz}, a_{mz0}^{wz} + \Delta a_{mz}^{wz}], \Delta a_{mz}^{wz} = 0, 2a_{mz0}^{wz}, \\
a_{mz}^d &\in [a_{mz0}^d - \Delta a_{mz}^d, a_{mz0}^d + \Delta a_{mz}^d], \Delta a_{mz}^d = 0, 0,5a_{mz0}^d.
\end{aligned}$$

Числовые значения параметров взяты из [33]:

Задача состоит в нахождении такой постоянной матрицы коэффициентов усиления обратной связи по выходу (3.34), при которой система (3.57) будет устойчивой независимо от процесса смены режимов для заданных неопределенностей параметров.

В результате вычислений на основе предложенного алгоритма была получена постоянная матрица коэффициентов усиления обратной связи. При этом в результате решения неравенств (3.55) оказалось, что закон управления (3.56) обеспечивает робастную стабилизацию при произвольной гладкой функции, удовлетворяющей ограничению. Заметим, что расчеты ограничились конкретной проверкой и попытки найти предельные вариации обратной связи не предпринимались. На рис 3.1. показаны характерные переходные процессы в замкнутой системе для рассматриваемых девяти режимов.

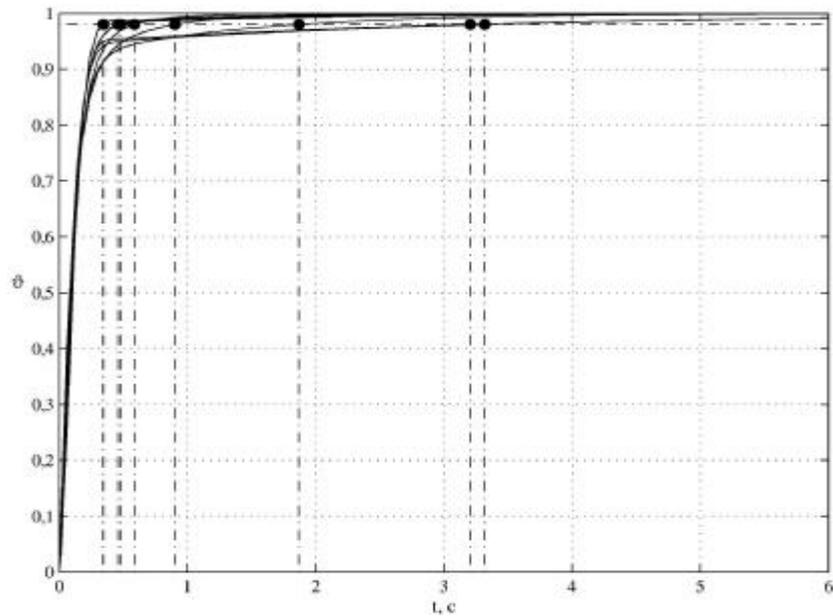


Рис. 3.1. Характерные переходные процессы по углу тангажа в рассматриваемых режимах

Для решения нестандартных матричных уравнений при выборе начального приближения и на отдельных шагах итерационного процесса использовались специальные алгоритмы полуопределенного программирования [13,14], реализованные с помощью программных приложений YALMIP/SeDuMi в среде MATLAB. На рис. 3.2. и 3.3. представлены зависимости нормы KV_2 и параметра b в зависимости от числа итераций.

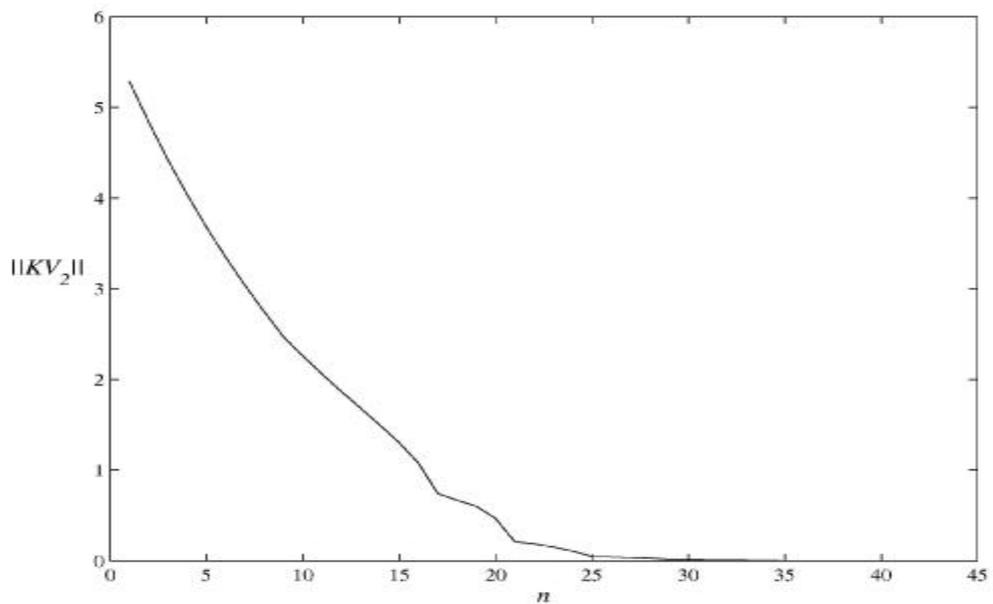


Рис. 3.2. Зависимость нормы KV_2 от числа шагов

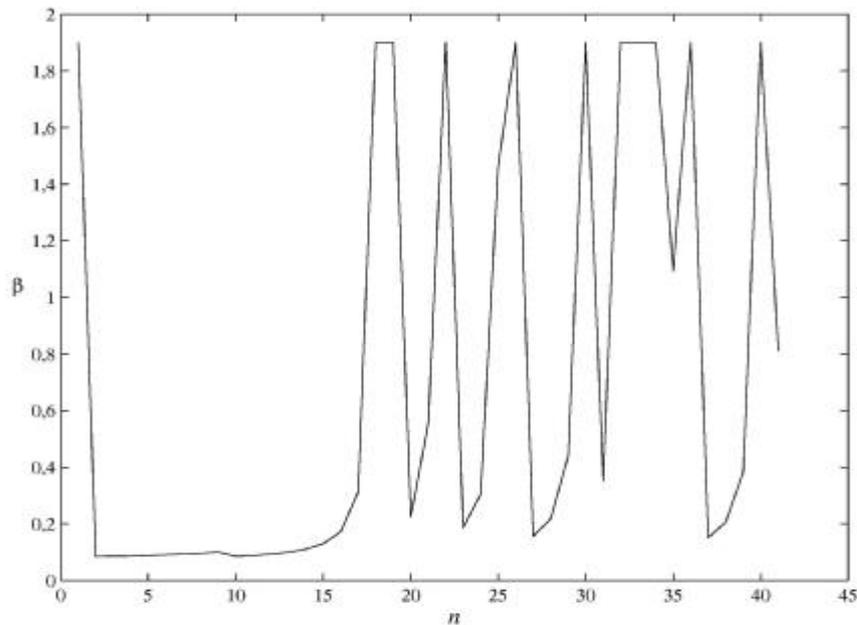


Рис. 3.3. Зависимость параметра b от числа шагов

3.7. Заключение

В данной главе развивается теория экспоненциальной диссипативности для диффузионных систем случайной структуры. Эта теория затем применяется для оценки возможных вариаций закона управления с обратной связью по выходу, при которых система остается робастно устойчивой.

Для линейных систем результаты доведены до двухшаговой процедуры нахождения управления с обратной связью по выходу, обеспечивающего робастную одновременную стабилизацию заданного множества систем, где сначала предлагается итерационный алгоритм нахождения робастного стабилизирующего управления, затем на основе решения системы линейных матричных неравенств оцениваются возможные вариации закона обратной связи при которых сохраняется робастная устойчивость. Существенный интерес в дальнейшем представляет нахождение конструктивной одношаговой процедуры, когда свойства обратной связи задавались бы в виде исходных параметров.

Предложенный алгоритм обеспечивает сходимость, однако численный эксперимент показал, что число шагов, за которое он сходится может изменяться в очень широких пределах в зависимости от начального приближения, интенсивностей шумов, параметра a , характеризующего дополнительный запас устойчивости, и весовых матриц. В ряде случаев это число оказывается недопустимо большим и даже наблюдается заикливание.

Поэтому представляет интерес исследование свойств алгоритма и попытки его улучшения.

Другая сложность связана с тем, что назначение параметров модели сравнения и прежде всего интенсивностей шумов не определено однозначно. В связи с этим возможен неудачный выбор этих параметров, при котором задача стабилизации вообще может оказаться неразрешимой. Здесь большую роль могли бы сыграть новые условия стабилизации систем вида (3.44), отличающиеся тем, что в них организуется регулярная процедура выбора интенсивностей шумов и дополнительного запаса устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. — М.: Высшая школа. 2006.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: МЦНМО. 2004.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова думка. 1977.
4. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы. // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1996. — Вып. 6. — С. 51—70.
5. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов. // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. — Вып. 7. — С. 333—344.
6. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики. // Проблемы кибернетики. — М.: Физматгиз, 1968. — Вып. 9. — С. 5—22.
7. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика. — 2006. — Вып. 1 (4). — С. 92—102.

8. Пройдакова, Е.В., Федоткин М.А. Достаточное условие существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2006. — Вып. 3 (32). — С. 118—126.
9. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in control and system theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
10. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
11. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Наука, 2007.
12. Bernstein D. S. Robust static and dynamic output-feedback stabilization: Deterministic and stochastic perspectives // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32, P. 1076--1084.
13. Ait Rami M., El Ghaoui L. LMI optimization for nonstandard Riccati equation arising in stochastic control // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. P. 1666--1671.
14. Ait Rami M., Zhou X. Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V.45. P.1131-1143.
15. Willems J. C. Dissipative dynamic systems Part I: General theory // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 45. P. 321--351.
16. Willems J. C. Dissipative dynamic systems Part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch.Rat. Mech. Anal. 1972. V. 45. P. 352--393.
17. Hill D. J., Moylan P. J. The stability of nonlinear dissipative systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. V. 21. P. 708--711.
18. Hill D. J., Moylan P. J. Connection between finite-gain and asymptotic stability // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. V. 25. P. 931--936.
19. Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. 36. P. 1228--1240.
20. Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.В. Пассивность и пассивификация нелинейных систем // АиТ. 2000. № 3. С.3-37.
21. Florchinger P. A passive system approach to feedback stabilization of nonlinear control stochastic systems // SIAM J. Control Optimiz. // 1999. V. 37. P. 1848--1864.
22. Thygesen U. H. On dissipation in stochastic systems // Proc. Amer. Control Conf., San Diego, CA. Los Alamitos, CA : IEEE. 1999. P. 1430--1434.

23. Borkar V., Mitter S. A note on stochastic dissipativeness / Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization, Lecture Notes in Control Inform. V. 286. Berlin: Springer, 2003. P. 41--49.
24. Aliyu M. D. S. Dissipative analysis and stability of nonlinear stochastic state-delayed systems // Nonlinear Dynam. Syst. Theory. 2004. V.4. P. 243--256.
25. Shaked U., Berman N. H_∞ control for nonlinear stochastic systems: The output-feedback case // Preprints 16th IFAC World Congr., Prague, Czech Republic, July 3-8. 2005. CD-ROM. P.1--6.
26. Zhang W., Chen B. S. State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems // SIAM J. Control Optimiz. 2006. V. 44. P. 1973--1991.
27. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. акад. путей сообщения, 1998.
28. Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching // Stoch. Process. Appl. 1999. V. 79. P. 45--67.
29. Пакшин П. В., Угриновский В. А. Стохастические задачи абсолютной устойчивости // АиТ. 2006. № 11. С.122-158.
30. Blondel V. and Tsitsiklis J. N. NP-hardness of some linear control design problems SIAM J. Control Optimiz. // 1997 V. 35. P. 2118--2127.
31. Yu J-T. A convergent algorithm for computing stabilizing static output feedback gains // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. P. 2271--2275.
32. Pakshin P. V., Robust stability and stabilization of the family of jumping stochastic systems // Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 1997. V.30. P. 2855--2866.
33. Красовский А. А Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.