THORNTON C. FRY

PROBABILITY
AND ITS ENGINEERING USES

NEW YORK D. VAN NOSTRAND COMPANY, Inc.
1928

ТОРНТОН ФРАЙ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО И РЕДАКЦИЯ
А. Я. ХИНЧИНА

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Курс теории вероятностей Торнтона Фрая отличается от всех других имеющихся руководств по этому предмету тем, что он предназначен, главным образом, для инженера. Этому своему назначению курс отвечает достаточно хорошо; он ориентируется на инженера и техника не только подбором и расположением материала, но и всем стилем изложения, не оставляющим никаких сомнений в том, что в прикладных вопросах автор чувствует себя, как дома.

С математической стороны книга Фрая содержит многое, что математику покажется неуклюжим и наивным. Неясно, например, какую математическую подготовку автор предполагает у читателя: с одной стороны, он считает нужным воспроизвести вывод формулы бинома Ньютона и правила диференцирования десятичного логарифма; с другой стороны, он ссылается на формулу Грина, даже не напоминая ее, как на что-то, несомненно хорошо знакомое, и без оговорок оперирует сколь угодно сложными интегралами. Замечательно, однако, что все математические соображения Фрая, даже когда специалисту математику они будут казаться наивными, отмечены свежестью и остротою мысли, придающей им своеобразную ценность, а всей книге — отпечаток несомненного теоретического остроумия; бывает, что аргументация Фрая, с точки зрения чистого математика, не решает вопроса; но она зато всегда возбуждает вопросы и неизменно далека от той вульгарности, которой, к сожалению, так часто страдают в своей математической части руководства по техническим дисциплинам.

А. Хинчин

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА IV

Вероятность и опыт

ГЛАВА V

Теорема Бейеса

ГЛАВА VI

Функции распределения и непрерывно изменяющиеся величины

Стр.

ГЛАВА VII

Средние значения

ГЛАВА VIII

Функции распределения, наиболее часто встречающиеся в инженерном деле

ГЛАВА IX

Подбор кривых распределения

ГЛАВА X

Приложения теории вероятностей к проблемам скученности

Стр.

ГЛАВА XI

Флуктуации в физических явлениях

ГЛАВА I

Введение

§ 1. Понятие вероятности. Если ставится вопрос о вероятности какого-либо события [1]), то тем самым предполагается возможность того, что это событие *не* наступит. Однако из одной этой возможности нельзя еще извлечь никаких выводов о том, *какова* вероятность наступления события. В этом можно убедиться простым сопоставлением событий. Рассмотрим, например, вопрос: „Какова вероятность того, что следующий рожденный в Нью-Йорке ребенок будет девочкой?" и сопоставим с ним другой вопрос: „Какова вероятность того, что ближайшие десять детей, рожденных в Нью-Йорке, все окажутся девочками?" И то и другое события возможны. Но ясно, что наступление второго события уже предполагает наступление первого и требует, кроме того, рождения еще девяти девочек подряд. Поэтому первое событие более вероятно, чем второе.

Этот пример раскрывает нам два существенных момента в понятии вероятности. Первый состоит в том, что каждое из двух событий *может* наступить: ближайший ребенок *может* быть девочкой, ближайшие десять детей *могут* все оказаться девочками. Это — момент чисто *качественный*. Второй состоит в том, что первое событие несомненно более вероятно, чем второе. Это — момент *количественный*: одна вероятность *больше* другой.

Рассмотрим еще пример выпадения шестерки на игральной кости. На кости шесть граней; в устройстве кости нет ничего такого, что благоприятствовало бы в большей мере одной какой-нибудь из этих граней, нежели другой. Эту мысль можно выразить так: грань, на которой написана шестерка, может выпасть „с такою же вероятностью", как любая другая грань. Больше того, по аналогичным причинам можно утверждать, что выпадение шестерки или четверки вдвое более вероятно, чем выпадение именно шестерки, и что выпадение шестерки, четверки или двойки втрое более вероятно, нежели выпадение именно одной какой-нибудь из них.

Эти соображения приводят нас еще к двум идеям, связанным с понятием вероятности. Первая есть идея „равновероятности". Вторая состоит в том, что, по крайней мере при известных обстоятельствах, вероятность наступления *того или другого* из нескольких событий равна сумме их отдельных вероятностей.

---

[1]) Всякое явление, о вероятности которого идет речь, мы будем, независимо от его содержания, называть „событием".

§ 2. Измерение вероятностей; единица измерения. Эти идеи лишь несколько уточняют то общепринятое значение слова „вероятность", которое делает его элементом нашего языка. Однако они ни в какой мере не могут служить для *определения* понятия вероятности. Оставляя в стороне вопрос об определении этого понятия, мы перейдем теперь к отысканию способа измерения вероятностей.

Этот способ естественно вытекает из уже рассмотренного. Возвращаясь к примеру с игральной костью, обозначим через p численное значение меры вероятности выпадения шестерки; значение p нам неизвестно, но мы установили уже некоторые соотношения, в которых оно участвует. Так, например, вероятность того, что выпадает четверка, также равна p, и то же самое имеет место и для любой другой грани игральной кости. Более того, мы уже заметили, что вероятность выпадения одной из нескольких граней равна сумме вероятностей выпадения отдельных граней; поэтому вероятность того, что выпадает одна какая-нибудь из шести граней, равна $6p$. Но то, что выпадает одна из шести граней, есть достоверно известный факт; поэтому $6p$ должно равняться числу, являющемуся значением меры вероятности достоверного факта, короче — мерой достоверности.

Какое число будет выбрано для этой цели — это дело нашего произвола, хотя и не совсем. Например, особенно подходящей могла бы показаться бесконечность, потому что нам кажется естественным назвать достоверный факт „бесконечно вероятным". Однако в этом случае мы получили бы уравнение:

$$6p = \infty,$$

требующее, чтобы и p было бесконечно большим. Таким образом этот выбор приводит к логической несообразности: вероятность выпадения шестерки выражается тем самым числом, которое служит для выражения достоверных фактов, хотя это событие, очевидно, не является достоверным.

Единственное другое число, которое напрашивается для представления достоверности, есть единица. Это приводит к уравнению:

$$6p = 1,$$

откуда $p = \frac{1}{6}$. В настоящее время этот выбор общепринят. Следствием его служит то, что вероятности оказываются правильными дробями, включая значения 0 и 1, соответствующие невозможности и достоверности [1]).

§ 3. Измерение вероятностей; основные аксиомы и соглашения. То, что мы рассмотрели до сих пор, содержит в скрытом виде все существенные идеи, необходимые для общего математического определения меры вероятности. Однако, прежде чем перейти к такому определению, желательно выделить и сопоставить по мере возможности те отправные для математического определения положения, или аксиомы, к которым это рассмотрение нас привело. Это:

---

[1]) В § 52 читатель найдет несколько замечаний, связанных с употреблением этих терминов.

Аксиома I. *Вопрос „какова вероятность наступления события A?" имеет определенный ответ.*

Аксиома II. *Вероятность события является количеством и, как и всякое количество, измеряется произведением единицы измерения на отвлеченное число.*

Аксиома III. *Если два события таковы, что нет существенного свойства, которое отличало бы одно из них от другого, то они одинаково вероятны.*

Соглашение I. *За единицу измерения вероятностей принимается вероятность достоверного факта.*

Соглашение II. *Шкала измерения вероятностей выбирается так, чтобы, когда два события несовместимы, т. е. наступление одного из них исключает наступление другого, вероятность наступления какого-нибудь из этих событий была равна сумме их отдельных вероятностей.*

Третья аксиома требует некоторого разъяснения. Можно было бы мне возразить, что она содержит ложный круг, ибо „существенными свойствами" мы называем как раз те, которые влияют на вероятность событий. Это, конечно, справедливо, и против определения это было бы значительным возражением. Однако я должен подчеркнуть, что аксиома III не претендует на то, чтобы служить определением; она представляет собой только попытку выразить другими словами содержание понятия „равновероятные события". Однако она согласуется с содержанием этого понятия и даже может оказать практическую помощь при разборе сомнительных случаев.

При этом необходимо предостеречь от смешения факта отсутствия каких-либо существенных различий между двумя событиями с таким положением вещей, когда наша осведомленность недостаточна для оценки этих различий. Если я завтра получу ровно одну телеграмму, то какова вероятность того, что это случится между 1 и 2 часами пополудни? Очевидно, сутки содержат 24 часа, и я не знаю, какова вероятность каждого из них. Могу ли я на этом основании утверждать, что все они равновероятны? Очевидно, нет; в вышеупомянутый час бодрствует гораздо больше народа, чем, например, между 1 и 2 часами ночи; и это различие, несомненно, является *существенным*, поскольку речь идет о получении телеграммы.

Прежде чем закончить этот параграф, необходимо еще сказать несколько слов по поводу тех соглашений, с помощью которых устанавливается шкала измерения вероятностей. Относительно этой шкалы мы уже условились, что нуль соответствует невозможности, а единица — достоверности. Концы шкалы, таким образом, установлены. Способ подразделения предусмотрен соглашением II; необходимо, однако, подчеркнуть, что это соглашение относится только к *несовместимым* событиям. Простой пример покажет нам, почему необходимо такое ограничение. Вероятность выпадения четного числа очков на игральной кости равна $\frac{1}{2}$, потому что она получается сложением вероятностей, соответствующих отдельным четным числам: 2, 4, 6. Однако вероятность выпадения либо шестерки, либо четного числа очков не равна на этом основании

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Эта трудность не есть специфическое затруднение теории вероятностей; она возникает при всех способах измерения, основанных на непосредственном сравнении. Мы можем сказать, что данный стержень имеет длину в 2 *м*, если он состоит из двух частей, каждая из которых равна 1 *м*. Но говоря так, мы, очевидно, подразумеваем эти две части исключающими друг друга. Мы можем от каждого из концов стержня длиною 1,1 *м* отложить отрезок длиною 1 *м*. Каждый из этих отрезков составляет часть данного стержня; однако на этом основании мы не можем утверждать, что длина всего стержня равна 2 *м*.

§ 4. Измерение вероятностей; определение меры вероятности. Теперь мы можем, опираясь на введенные аксиомы и соглашения, формулировать точное определение „меры вероятности". Заметим прежде всего, что рассуждение § 2, приведшее нас к числу $\frac{1}{6}$, основывалось на следующих фактах:

1. Событие, вероятность которого мы искали (выпадение шестерки на игральной кости), было одним из группы событий (соответствующих различным числам очков).

2. Эти события были исключающими друг друга.

3. Они были равновероятны между собою.

4. Группа была „полной", т. е. то или иное из входящих в нее событий обязательно должно было наступить.

Эти четыре факта позволили нам написать для искомой вероятности уравнение $6p=1$, откуда мы и получили $p=\frac{1}{6}$.

Если бы полная группа состояла из m событий, то вероятность наступления какого-нибудь одного определенного из них, очевидно, определялась бы уравнением $mp=1$, т. е. была бы равна $p=\frac{1}{m}$.

К вопросу „какова вероятность того, что на кости выпадает шестерка, четверка или двойка?" можно применить соглашение II. Ответом будет служить сумма вероятностей тех трех событий, которые входят в состав взятой группы. Так как каждая из этих вероятностей равна $\frac{1}{6}$, то ответ составляет $\frac{1}{2}$. В общем случае, когда полная группа содержит m событий и требуется определить вероятность реализации некоторой частичной группы, состоящей из n событий, приходится складывать n дробей, каждая из которых равна $\frac{1}{m}$; ответом поэтому служит дробь $\frac{n}{m}$. Это немедленно приводит нас к определению:

Если подгруппа из n событий составляет часть полной группы из m попарно несовместимых и равновероятных событий, то вероятность того, что наступит одно из событий, входящих в состав этой подгруппы, измеряется дробью $\frac{n}{m}$ [1]).

§ 5. Измерение вероятностей; недостаточность установленного определения. Данное определение меры вероятности не для всех целей является достаточным. Прежде всего оно предполагает числа n и m конечными. Однако эта трудность несущественна, потому что бесконечное количество имеет смысл лишь как завершение некоторого предельного процесса, а в таком случае этот предельный процесс может быть применен к вычислению дроби $\frac{m}{n}$.

Аналогичное затруднение возникает, если, например, требуется найти вероятность того, что артиллерийский снаряд отклонится от своей цели на расстояние, лежащее в пределах от 5 до 6 *м*; ибо расстояние есть непрерывно меняющаяся величина, влекущая за собою те же затруднения, какие связаны с определением иррациональных чисел. При случае мы убедимся, однако, что и с этою трудностью нам удастся справиться.

Однако имеется еще одно затруднение гораздо более основного характера. Если мы спрашиваем: „Какова вероятность того, что следующий рожденный в Нью-Йорке ребенок будет девочкой?", то у нас нет возможности построить какую-либо группу событий, удовлетворяющую условиям нашего определения; ибо, хотя группа „мальчик-девочка" и полная и хотя ее события несовместимы, но они заведомо *не* равновероятны. Примеров подобного рода существует сколько угодно: почти всякий предмет „статистического" обследования мог бы служить таким примером. В действительности, среди проблем, возникающих в самых различных областях исследования, число тех, к которым наше определение неприложимо, настолько больше числа ему доступных, что многие статистики стали искать обоснования всего учения о вероятностях в статистических данных. Хотя я и убежден, что их определение не годится в качестве фундамента для построения логического здания теории вероятностей, однако мы увидим, что оно — или нечто ему весьма подобное — послужит превосходным практическим указанием для преодоления недостаточности нашего определения.

§ 6. Заключительные замечания. Необходимо подчеркнуть еще раз всю важность условий „полноты", „несовместимости" и „равновероятности" в определении, а также условия „несовместимости" в

---

[1]) Это определение часто выражают несколько иначе: каждое событие полной группы называют одним „случаем" (иногда исходом или „статочностью". *Ред.*), причем случаи, входящие в избранную подгруппу, считают „благоприятствующими", а самую подгруппу называют „событием", независимо от того, является она индивидуальным событием или некоторой комбинацией событий. Приняв эту терминологию, мы можем определение формулировать так:

Вероятность наступления какого-либо события равна отношению числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев, предполагаемых равновероятными.

Прибавим, что хотя мы, следуя традиции, назвали это суждение „определением", на самом деле оно является теоремой.

соглашении II. Чтобы показать, насколько человеческий интеллект склонен забывать эти условия, мы приведем здесь поучительную ошибку, в которую впал один крупный ученый.

Даламбер (D'Alembert), отвечая на вопрос: „Какова вероятность того, что при двукратном бросании монеты хотя бы один раз выпадет герб?", рассуждал следующим образом: герб либо появляется при первом бросании, либо при втором, либо вовсе не появляется. Таким образом имеется всего три события, из которых два входят в состав интересующей нас подгруппы. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

Но если „появление герба при первом бросании" понимать, как „герб при первом, надпись при втором", то группа будет неполной, ибо событие „герб оба раза" также возможно; если же „появление герба при первом (втором) бросании" понимать, как „герб при первом (втором), что бы ни появилось при втором (первом)", то события не будут ни равновероятны, ни несовместимы; они не будут равновероятны потому, что отличаются друг от друга следующим *существенным* свойством: два первых таковы, что наступление каждого из них определяется результатом *одного* только испытания, в то время как наступление третьего зависит от результатов *двух* испытаний; и они не будут несовместимы потому, что в случае двукратного выпадения герба и первое и второе события оказываются реализованными. В действительности Даламбер полагал, что в случае выпадения герба при первом бросании ответ был бы уже получен, и не было бы надобности во втором бросании; таким образом для него „герб при первом" означало „герб при первом, что бы ни появилось при втором", тогда как „герб при втором" означало „надпись при первом и герб при втором". Построенная таким путем группа является, очевидно, полной; входящие в нее события попарно несовместимы, но не равновероятны.

К счастью, в данном случае нетрудно найти группу нужного типа. Вот она:

герб — герб,	надпись — герб,
герб — надпись,	надпись — надпись;

так как событие „хотя бы один раз выпадает герб" наступает в трех из этих четырех случаев, то правильным ответом является $\frac{3}{4}$.

Проведенное нами исследование далеко не полно и возбуждает целый ряд логических проблем; попытка их решения могла бы представлять интерес, однако это не соответствовало бы основной цели нашего изложения. Мы вынуждены поэтому оставить эти проблемы в стороне и перейти к рассмотрению ряда алгебраических закономерностей, на которые нам придется часто ссылаться в дальнейшем.

Литература

1. Бернштейн, Теория вероятностей, ч. 1, гл. I.
2. Боярский и др., Теория математической статистики, гл. II.
3. Лахтин, Курс теории вероятностей. Введение.
4. Мизес, Вероятность и статистика, раздел I.

ГЛАВА II

Перестановки и сочетания

§ 7. Общие законы композиции событий. Изучение перестановок и сочетаний базируется на двух основных правилах, относящихся к композиции событий.

Первое правило композиции. *Если событие A может наступить m различными способами, а событие B может наступить n другими различными способами, то событие „либо A, либо B“ может наступить $m+n$ различными способами.*

Это правило так просто, что едва ли требует доказательства. Несколько примеров убедят нас в его справедливости. Допустим, что из Нью-Йорка в Филадельфию ведут три различных пути, а из Нью-Йорка в Бостон — два. Тогда число путей, ведущих либо в Филадельфию, либо в Бостон, очевидно, равно $3+2=5$. Это согласуется с нашим правилом, однако этот пример еще не дает понять, почему пути осуществления события A должны быть отличны от тех, которыми осуществляется событие B (слово „другими“ в формулировке правила!). Следующий пример покажет, в чем тут дело.

Пусть в Филадельфию ведут три пути, один из которых проходит через Принстон, и пусть это есть вообще единственный путь, ведущий в Принстон. Тогда, хотя три пути ведут в Филадельфию и один в Принстон, однако число путей, ведущих „либо в Филадельфию, либо в Принстон“, будет равно трем, а не четырем. Теперь мы видим, что слово „другими“ играет существенную роль в формулировке правила.

Второе правило композиции. *Если событие A может наступить m различными способами, и вслед затем событие B может наступить n различными способами, то событие „и A, и B“ может наступить в этом порядке mn различными способами.*

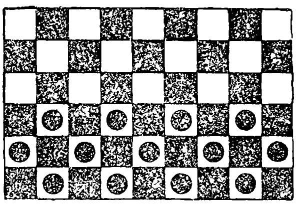
Брошенная монета может упасть двумя различными способами — гербом или надписью. Брошенная игральная кость может упасть шестью различными способами. Значит, согласно второму правилу, число различных результатов, какие можно получить, бросая сперва монету, а затем кость, равно $2 \cdot 6 = 12$. Этот вывод можно проконтролировать подсчетом всех различных возможных исходов.

Вот они:

1. Герб и 1.	7. Надпись и 1.
2. Герб и 2.	8. Надпись и 2.
3. Герб и 3.	9. Надпись и 3.
4. Герб и 4.	10. Надпись и 4.
5. Герб и 5.	11. Надпись и 5.
6. Герб и 6.	12. Надпись и 6.

В качестве другого примера рассмотрим несколько видоизмененную шахматную доску, изображенную на черт. 1, и спросим себя: сколькими различными способами можно сдвинуть шашку верхнего ряда и вслед затем шашку среднего ряда? Непосредственно очевидно, что каждая шашка верхнего ряда может быть сдвинута двумя различными способами, что в общей сложности даст восемь различных способов сдвинуть шашку из верхнего ряда. После того как сдвинута одна из шашек верхнего ряда, всегда имеется два возможных движения для шашек среднего ряда. Таким образом число возможных комбинаций движений равно $8 \cdot 2 = 16$. Как и раньше, мы можем проверить этот результат непосредственным подсчетом.

Оба приведенных примера подтверждают наше второе правило. Однако между ними имеются два существенных различия. В первом примере мы получили результат, умножая число возможных способов падения монеты на число возможных способов падения кости. Во втором примере число различных возможных движений для шашек среднего ряда равно 8, по одному для каждой из крайних и по два для каждой из остальных; однако правильный ответ не может быть получен умножением этого числа на число (именно, 8) возможных движений из верхнего ряда.



Черт. 1.

Второе различие состоит в том, что при бросании монеты и кости безразлично, которая из них брошена первой. Число возможных комбинаций в обоих случаях одинаково. В задаче с шахматной доской число способов, которыми можно сперва сдвинуть шашку среднего, а потом — верхнего ряда, равно нулю, ибо из среднего ряда шашка может быть сдвинута лишь после того, как для нее освобождено место в верхнем ряду.

Причиною этих различий служит то обстоятельство, что события, о которых идет речь в первом примере, *независимы* друг от друга, в то время как для событий второго примера дело обстоит иначе. Как бы ни упала монета, это не оказывает никакого влияния на поведение кости; напротив, от того, какая продвинута шашка верхнего ряда, существенно зависит, какие из шашек среднего ряда получили свободу движений и куда они могут двигаться. Необходимость учитывать подобного рода зависимость в формулировке второго правила нашла себе выражение в словах „вслед затем“ и „в этом порядке“.

Задачи

1. Английский алфавит состоит из 21 согласной из 5 гласных букв; сколько из них можно составить слов, состоящих каждое из пяти букв — трех согласных и двух гласных — в чередующемся порядке?

2. Сколько из этих слов будут состоять из пяти *различных* букв?

3. Для употребительной системы телеграфных сигналов желательно иметь возможно большее число слов того типа, о котором шла речь в задаче 1. Сколько гласных должен содержать алфавит из 26 букв, чтобы наилучшим образом удовлетворить этому требованию?

4. Греческий алфавит содержит всего 24 буквы: 17 согласных и 7 гласных. Какой из двух алфавитов — английский или греческий — лучше удовлетворяет цели, описанной в задаче 3?

§ 8. Определения. С точки зрения изучения перестановок и сочетаний всякая группа предметов должна получить троякую характеристику: мы должны знать, какого рода предметы в нее входят, сколько имеется предметов каждого рода и в каком порядке они расположены. Так, в группе букв

$$a\ b\ a\ a$$

мы констатируем прежде всего, что имеются буквы двоякого рода; далее, что имеются три буквы первого и одна второго рода; наконец, что буквы эти чередуются в определенном порядке.

Мы скажем, что две группы предметов представляют собою различные „сочетания", если хотя бы для одного какого-нибудь рода предметов число входящих в них предметов этого рода различно.

Так, сочетание

$$a\ b\ a\ a$$

отлично от сочетания

$$a\ b\ a,$$

потому что буква a встречается в них не одинаково часто; по той же самой причине оно отлично и от сочетания

$$a\ b\ a\ b,$$

хотя общее число предметов группы в этом случае осталось неизменным.

Напротив, сочетания

$$\begin{array}{c} a\ b\ a\ a \\ a\ a\ b\ a \\ b\ a\ a\ a \\ a\ a\ a\ b \end{array}$$

все одинаковы между собою, ибо как буква a, так и буква b встречаются в них одинаково часто.

Мы скажем, что две группы предметов представляют собою различные „перестановки" в каждом из следующих двух случаев: (a), если они представляют собою различные сочетания; (b), если они образуют одинаковые сочетания, но отличаются порядком предметов.

Так,

$$\begin{array}{c} a\ b\ c\ d \\ a\ b\ d\ c \\ d\ c\ a\ b \end{array}$$

представляют собою одинаковые сочетания, ибо каждое из них содержит четыре буквы a, b, c, d и каждую по одному разу. Однако все они образуют различные перестановки, так как порядок букв в них различен.

Группы

$$\begin{array}{c} a\ b\ c\ d \\ a\ b\ d \end{array}$$

представляют собою различные сочетания, так как число букв c в них различно. Поэтому они образуют также различные перестановки. То же самое имеет место для групп:

$$\begin{array}{c} a\ b\ c\ d \\ a\ b\ c\ e \end{array}$$

§ 9. Приложение общих законов композиции событий к перестановкам и сочетаниям; несколько типичных примеров. Установленные в § 7 два общих правила позволяют решить целый ряд задач, связанных с перестановками и сочетаниями. Приведем несколько примеров, показывающих, как это делается.

Пример 1. Сколько перестановок по три буквы в каждой можно составить из букв a, b, c, d?

Мы можем получить ответ на этот вопрос, вдумавшись в процесс составления этих перестановок. Выписывая какую-нибудь одну из них, мы можем выбрать первую ее букву четырьмя различными способами. После того, как это сделано, вторая буква может быть выбрана тремя различными способами; наконец, для выбора третьей буквы остается лишь два возможных способа. Таким образом для выбора всех трех букв мы имеем $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ различных способа. Других путей для группировки трех букв не имеется. Таким образом существует ровно 24 перестановки из четырех букв, по три в каждой.

Табл. I показывает эти перестановки, расположенные в том порядке, как их дает вышеописанный процесс. Четырем возможным выборам первой буквы соответствуют четыре вертикальных столбца. Каждый из этих столбцов содержит три пары перестановок, соответственно трем возможным выборам второй буквы. Наконец, каждая из этих пар иллюстрирует те две возможности, которые имеются при выборе третьей буквы.

Таблица I

Перестановки из четырех букв по три

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

Пример 2. Сколько сочетаний по три буквы в каждом можно составить из букв a, b, c, d?

Вследствие простоты данных чисел кратчайший путь к решению поставленной задачи совсем не требует применения введенных нами двух правил. Каждый раз, когда мы выбираем три буквы, одна остается. Поэтому число всех сочетаний по три буквы, очевидно, равно числу всех сочетаний по одной букве, т. е. равно четырем.

К сожалению, по большей части подобного рода задачи не решаются так просто. Чтобы привести пример общего случая, мы найдем теперь тот же самый ответ несколько менее прямым путем.

Две перестановки отличаются друг от друга (*a*), если они представляют собою различные сочетания, и (*b*), если они представляют собою различные расположения (т. е. перестановки) одного и того же сочетания. Это — определение. Пусть x есть число сочетаний из четырех предметов по три. Каждое из этих сочетаний представляет собою группу из трех предметов и допускает известное число различных расположений. Обозначим это число через y. Каждое другое сочетание также допускает y перестановок, так что общее число перестановок составляет xy. Очевидно, что все эти перестановки как таковые будут различны между собою — это вытекает непосредственно из определения; и легко убедиться, что все возможные перестановки включены в эту схему; в самом деле, всякая перестановка представляет собою особое расположение некоторого сочетания и потому входит в наше перечисление. Но мы уже знаем, что общее число перестановок равно 24. Таким образом

$$xy = 24. \tag{1}$$

Что касается y, то оно находится так: первую букву в группе из трех букв можно выбрать тремя способами, вторую — двумя, третью — одним единственным способом. Поэтому $y = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Подставляя это значение в уравнение (1), находим $x = 4$, что совпадает с прежним результатом.

§ 10. Применение общих законов композиции к перестановкам; общие теоремы. Те рассуждения, которыми мы пользовались в двух предшествующих примерах, являются совершенно общими и позволяют получить формулы для чисел перестановок и сочетаний групп предметов.

Рассмотрим сначала группу из m различных предметов и постараемся найти число тех перестановок по n предметов в каждой, которые можно составить из этой группы.

Так как все предметы различны между собою, то первый по порядку мы можем выбрать m различными способами. После этого второй может быть выбран $m-1$ способами, третий $m-2$ способами и т. д. Вообще число способов, которыми может быть выбран какой-либо предмет, меньше m на столько единиц, сколько предметов уже выбрано. Когда мы приступаем к выбору последнего, n-го предмета, то $n-1$ предметов уже выбрано, поэтому n-й предмет может быть выбран $m-n+1$ различными способами. Таким образом искомое число перестановок равно

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1). \tag{2}$$

Это — совершенно общая формула. При $m=4$, $n=3$ мы имеем дело с задачей нашего первого примера. В этом случае $m-n+1=2$, и ответом служит произведение всех целых чисел от 2 до 4 включительно; разумеется, это — тот же результат, какой мы получили выше.

Важным частным случаем формулы (2) является тот, когда $m=n$; в этом случае $m-n+1=1$, и формула (2) принимает вид:

$$m(m-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{3}$$

Это — число способов, коими может быть расположена группа из m различных предметов, или, что то же, „число перестановок из m предметов по m“.

Несколько более общая задача — следующая: некоторая группа содержит предметы s различных типов, а именно m_1 предметов первого типа, m_2 предметов второго типа и т. д., причем общее число предметов равно $m=m_1+m_2+\ldots+m_s$. Сколькими различными способами можно расположить (разместить, упорядочить, переставить) эти предметы?

Говоря, что мы имеем m_1 предметов „одного и того же“ (первого) типа, мы хотим этим сказать, что, переставляя два таких предмета между собою, мы не получаем новой перестановки. Так, если в расположении $a\ a\ b\ b$ переставить между собою две первых буквы, то полученное расположение ничем не будет отличаться от предыдущего, а потому и не должно считаться новым расположением.

Пусть ответом на поставленную задачу служит число x. Выберем одну из этих x перестановок и отметим входящие в нее предметы одинакового типа какими-нибудь значками, чтобы отличать их друг от друга; другими словами, сделаем все ее предметы различными между собою. Тогда m_1 предметов первого сорта будут допускать $m_1(m_1-1)\ldots 2\cdot 1$ перестановок между собою; разумеется, если бы мы не сделали наших отметок, то все эти перестановки были бы между собою тождественны. Подобным же образом предметы второго типа допускают теперь $m_2(m_2-1)\ldots 2\cdot 1$ перестановок, каждую из которых мы можем комбинировать с каждой из вышеупомянутых перестановок предметов первого типа, причём первоначальное расположение предметов все еще оставалось бы неизмененным, если бы мы не произвели наших отметок. Подобный же результат может быть, очевидно, получен для каждого из s имеющихся типов. Таким образом для каждого первоначального расположения мы теперь получаем:

$$(1\cdot 2\ldots m_1)(1\cdot 2\ldots m_2)(1\cdot 2\ldots m_3)\ldots(1\cdot 2\ldots m_s)$$

различных перестановок, ставших возможными благодаря введенным нами отметкам. Всего мы получаем, следовательно,

$$(1\cdot 2\ldots m_1)(1\cdot 2\ldots m_2)(1\cdot 2\ldots m_3)\ldots(1\cdot 2\ldots m_s)\,x \tag{4}$$

перестановок.

Необходимо здесь заметить, что все возможные перестановки из $m=m_1+m_2+\ldots+m_s$ отмеченных предметов войдут в это перечисление: ибо если бы существовала какая-нибудь иная перестановка, то, сняв отметки, мы получили бы из нее какую-нибудь из наших перестановок без отметок; но все возможные расположения таких перестановок учтены в формуле (4). Таким образом эта „иная“ перестановка неизбежно совпадает с одной из подсчитанных нами.

Наконец, формула (3) показывает нам, что из отмеченных предметов мы можем составить

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots m$$

различных перестановок. Поэтому из формулы (4) мы получаем:

$$x=\frac{1\cdot 2\ldots m}{(1\cdot 2\ldots m_1)(1\cdot 2\ldots m_2)\ldots(1\cdot 2\ldots m_s)}. \tag{5}$$

Задачи

1. Сколько различных перестановок можно составить из букв, образующих слово „баррикада“?

2 На четыре должности имеется одиннадцать кандидатов. Сколькими способами эти должности могут быть распределены между кандидатами?

3. Каждая подкова имеет восемь гвоздей. Сколько различных порядков забивания этих гвоздей возможны? Представьте себе такой запас лошадей, чтобы все эти способы могли быть реализованы; какое протяжение займет построенный для них ряд стойл, если принять ширину стойла 1,5 *м*?

4. Имеется m_1 предметов первого типа, m_2 предметов второго типа и т. д. Сколько из этих предметов можно составить перестановок, в каждую из которых входило бы n_1 предметов первого типа, n_2 — второго и т. д.? При этом предполагается, конечно, что каждое n не больше соответствующего m.

5. Каков ответ задачи 4, если n_1 больше, чем m_1?

§ 11. Факториалы; функция Гамма. Комбинация чисел, составляющая формулу (3), часто встречается в различных отделах математики, вследствие чего она получила особое обозначение; ее читают „m факториал“ и обозначают через $m!$

Таким образом „m факториал“ определяется, как произведение всех целых чисел от 1 до m включительно. В силу этого определения факториал имеет смысл только для целых значений m; однако от этого ограничения легко избавиться следующим образом.

Если m есть целое число, то легко показать непосредственным вычислением, что

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx=m! \tag{6}$$

Так как в случае нецелого m выражение $m!$ не имеет для нас никакого смысла, то мы не можем сказать, верно или неверно в этом случае равенство (6). Но если мы примем это равенство (6) вместо выражения (3) за *определение* символа $m!$, то этот символ и для нецелых значений m получит определенный смысл, а для целых — сохранит свое прежнее значение. Это и есть общепринятое определение. Оно непосредственно годится для всех $m>-1$ и только для них, так как для других значений m интеграл не имеет смысла; однако с помощью некоторой редукционной формулы это определение можно распространить на все действительные значения m.

Интегрируя по частям, мы находим:

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx=-x^m e^{-x}\Big|_0^\infty+m\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\,dx.$$

Так как первый член правой части исчезает при обоих пределах [1]), то мы получаем:

$$m! = m(m-1)! \tag{7}$$

В случае целого m это соотношение еще проще усматривается из выражения (3); но, получив его из выражения (6), мы тем самым доказали, что оно справедливо для любых $m > 0$. Более того, считая его универсальным свойством функции $m!$, мы получаем возможность определять эту функцию и для отрицательных значений m.

Например: известно [2]), что $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Полагая в (7) $m = \frac{1}{2}$ и вставляя это значение, мы находим:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)!,$$

или

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}.$$

---

[1]) Он, очевидно, исчезает при $x = 0$. При $x = \infty$ он принимает неопределенную форму $\infty \cdot 0$. Чтобы вычислить его значение, обычно заменяют произведение $x^m e^{-x}$ дробью $\frac{x^m}{e^x}$, которая принимает форму ∞/∞. Далее диференцируют в отдельности числитель и знаменатель, что дает:

$$\frac{mx^{m-1}}{e^x}.$$

Это выражение попрежнему имеет форму ∞/∞, так что надлежит диференцировать еще раз, затем еще раз и т. д. Во всем этом процессе знаменатель остается неизменным, а степень числителя с каждым новым шагом понижается на единицу. После n шагов мы получим:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}}{e^x}.$$

Если m — целое число, то числитель становится при $n = m$ постоянным числом и предел дроби при $x \to \infty$ равен нулю. Если же число m не целое, то мы примем за n целое число, бо́льшее, нежели m, и дробь примет вид:

$$\frac{C}{x^{n-m}e^x},$$

причем в знаменателе оба множителя бесконечно велики при $x \to \infty$. Таким образом и в этом случае дробь бесконечно мала.

Читатель, желающий восстановить в памяти теорию неопределенных форм, может воспользоваться для этого любым курсом диференциального исчисления (например В. И. Смирнов, Курс высшей математики для техников и физиков, т. I, стр. 142, Гиз, 1930 г.).

[2]) По определению

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Полагая далее $m = -\frac{1}{2}$, найдем:

$$\sqrt{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)!,$$

или

$$\left(-\frac{3}{2}\right)! = -2\sqrt{\pi}.$$

Вообще, если начать с надлежащим образом выбранного положительного числа и применять указанный процесс, то можно найти факториал любого отрицательного числа.

Полагая $x = y^2$, мы найдем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^2\, dy,$$

или, обозначая другой буквой переменную интеграции:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 2\int_0^\infty e^{-z^2} z^2\, dz.$$

Перемножая последние два равенства почленно, мы можем записать результат в виде:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)!\right]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)} y^2 z^2\, dy\, dz.$$

Заметим, наконец, что в плоскости zy величина $dy\,dz$ есть элемент площади и что интеграл распространен на весь первый квадрант. Переходя к полярным координатам (ср. § 68), мы должны положить:

$$y = r\cos\theta,$$
$$z = r\sin\theta,$$
$$dy\,dz = r\,dr\,d\theta,$$

и получаем:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)!\right]^2 = 4\int_0^\infty dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, r^5 e^{-r^2}\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

Но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{16}$$

и

$$\int_0^\infty r^5 e^{-r^2} dr = 1,$$

откуда

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Особый интерес представляют факториалы отрицательных *целых* чисел. Очевидно, что $1! = 1$. Полагая в формуле (7) $m = 1$, мы находим $0! = 1$; подставляя далее в формулу (7) $m = 0$, находим:

$$0! = 0(-1)!,$$

или

$$(-1)! = \frac{1}{0} = \infty.$$

Этот же процесс дает далее:

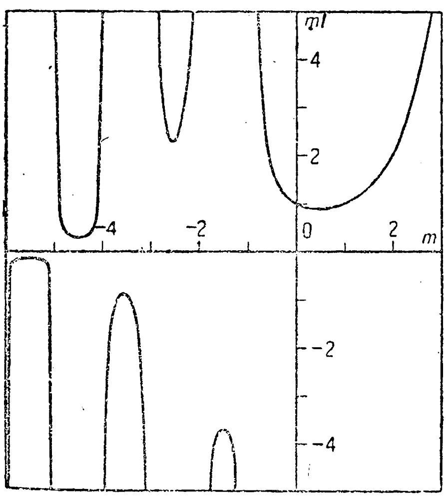
$$(-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \infty,$$

$$(-3)! = \frac{(-2)!}{-2} = \frac{(-1)!}{(-1)(-2)} = \infty,$$

$$(-4)! = \frac{(-3)!}{-3} = \frac{(-1)!}{(-1)(-2)(-3)} = \infty$$

и т. д. Так как при делении бесконечности на любую последовательность конечных величин мы всегда получаем бесконечность, то *факториалы всех отрицательных целых чисел бесконечны*.

Поведение изучаемой функции может стать еще более ясным при рассмотрении черт. 2, на котором даны факториалы чисел, лежащих между -6 и $+3$.



Черт. 2.

Сделаем для полноты еще следующее замечание. У математиков принято говорить о факториалах только в случае, когда речь идет о целых положительных числах. В других случаях они говорят о „функции Γ (гамма)“. Эта функция связана с нашим определением факториала посредством соотношения:

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

Так, $\Gamma(3) = 2! = 2 \cdot 1 = 2$, $\Gamma(0) = (-1)! = \infty$. Чтобы не перегружать терминологии, мы в дальнейшем будем во всех случаях говорить о факториалах.

Из результатов нашего исследования изучающий должен запомнить следующее: a) „m факториал“ для целого положительного m означает произведение всех целых чисел от 1 до m включительно и обозначается так: $m!$; b) этот символ имеет значение и для нецелых чисел. Его значения можно найти в таблицах, подобных логарифмическим; c) $0! = 1$; d) $(-j)! = \infty$, если $j > 0$ и целое число; e) факториалы других (не целых) отрицательных чисел имеют конечное значение.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с факториалами, но в большинстве случаев это будут факториалы целых чисел. Для упрощения вычислений в приложении I приведены факториалы чисел до 200. Так как многие из этих факториалов чрезвычайно велики, то приходится приводить лишь несколько первых цифр их с указанием той степени числа 10, на которую их следует помножить. Так, 20! дано в виде $2{,}432\,902\,0^{18}$, что значит

$$2{,}432\,902\,0 \cdot 10^{18} = 2\,432\,902\,000\,000\,000\,000.$$

В приложении II даны логарифмы факториалов целых чисел до 1200.

§ 12. Новая формулировка общих теорем о перестановках. Обозначим число перестановок из m предметов по n через P_n^m. Тогда формулу (2) можно переписать так:

$$P_n^m = m(m-1)\ldots(m-n+1) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

Пользуясь факториальным обозначением, мы получаем:

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}. \tag{2}$$

Подобным образом формула (3), дающая число перестановок из m предметов по m, перепишется теперь в виде:

$$P_m^m = m! \tag{3}$$

Наконец, формула (5) — дающая число возможных расположений группы, содержащей предметы s различных типов, а именно m_1 предметов первого типа, m_2 — второго и т. д. — напишется в виде:

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_s}^{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}. \tag{5}$$

§ 13. Применение общих законов к сочетаниям. Число сочетаний из m предметов по n может быть вычислено тем же рассуждением, которым мы пользовались при рассмотрении второго примера § 9. Каждое сочетание допускает $n!$ перестановок входящих в него предметов. Поэтому, обозначая искомое число сочетаний через C_n^m, мы находим:

$$P_n^m = C_n^m n!$$

Но P_n^m нам известно из формулы (2), и мы получаем:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}. \tag{8}$$

Это — общая формула для числа сочетаний из m элементов по n. В частности, при $m=4$, $n=3$ мы возвращаемся к примеру 2 из § 9. Подставляя эти значения в формулу (8), мы находим:

$$C_3^4=\frac{4!}{3!\,1!}=4,$$

что подтверждает результат § 9.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Сколько прямых линий можно провести через пять точек так, чтобы каждая соединяла две из данных точек?

Прямую линию можно провести через любую пару точек. Поэтому прямых линий мы будем иметь столько же, сколько пар точек. Единственное, что нам остается решить, это — следует ли такие две пары, как p_1p_2 и p_2p_1 рассматривать как различные или как тождественные? В первом случае мы имели бы дело с *перестановками*, а во втором — с *сочетаниями*.

Очевидно, мы можем провести прямую линию из a в b и также из b в a; но в обычном понимании слова „прямая" эти две прямых будут тождественными между собою; иначе говоря, то направление, в котором карандаш чертит прямую, не имеет значения. Следовательно, пары p_1p_2 и p_2p_1 не должны быть различаемы между собою, и мы имеем дело с сочетаниями. Решение нашей задачи будет поэтому [1]):

$$C_2^5=\frac{5!}{2!\,3!}=10.$$

Пример 4. Сколькими различными способами можно из колоды в 52 карты выбрать 13 карт?

Предполагая, что порядок выбираемых карт нас не интересует, мы имеем дело с сочетаниями, и ответ гласит:

$$C_{13}^{52}=\frac{52!}{13!\,39!}=635\,013\,559\,600.$$

§ 14. О некоторых свойствах чисел C_n^m; треугольник Паскаля.

Первое решение примера 2 в § 9 мы получили, замечая, что каждой определенной комбинации из трех выбранных букв соответствует определенная комбинация из одной оставшейся буквы, и обратно. Небольшое рассуждение показывает, что это — общий закон: всякий раз, когда из m предметов мы каким-нибудь способом выбираем n, в группе остается $m-n$ определенных предметов. Поэтому из m предметов можно составить по меньшей мере столько же сочетаний по $m-n$, сколько по n, т. е.

$$C_{m-n}^m \geqslant C_n^m. \tag{9}$$

[1]) Из этого могут быть исключения. Например, ясно, что если все пять данных точек лежат на одной прямой, то вместо десяти проведенных прямых мы получаем только одну. В тексте неявным образом подразумевается, что из данных пяти точек никакие три не лежат на одной прямой.

Это правило, однако, в такой же мере справедливо справа налево, как и слева направо, потому что ведь, и обратно, выбирая $m-n$ предметов, мы каждый раз оставляем в группе n предметов; поэтому

$$C_n^m \geqslant C_{m-n}^m. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует общее правило[1]):

$$C_n^m = C_{m-n}^m. \tag{11}$$

Другое общее свойство чисел C_n^m может быть получено из очевидного соотношения:

$$(m-n)(m-1)! + n(m-1)! = m!$$

Деля все члены этого равенства на $n!(m-n)!$ и производя элементарные сокращения, мы находим:

$$C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} = C_n^m. \tag{12}$$

Это уравнение принадлежит к числу так называемых „рекуррентных формул". Иначе говоря, строение его таково, что оно позволяет, зная числа всевозможных сочетаний из $m-1$ предметов, найти все числа сочетаний из m предметов. Так, например, в табл. II (стр. 30), в столбце $m=5$, мы находим, что число сочетаний из 5 предметов по одному равно 5, число сочетаний из 5 предметов по два равно 10 и т. д.[2]). Подобным же образом, столбец $m=6$ содержит значения символа C_n^6 Он может быть получен из предыдущего столбца при помощи формулы (12). Полагая в ней $m=6$, мы находим:

$$C_n^6 = C_n^5 + C_{n-1}^5.$$

Это показывает, что каждое число столбца $m=6$ получается сложением числа, стоящего непосредственно влево от него, с числом, стоящим над этим последним. Так, C_1^6 есть сумма чисел 5 и 1; C_2^6 — сумма чисел 10 и 5 и т. д. Подобным же образом столбец $m=7$ может быть получен из столбца $m=6$.

---

[1]) Это правило можно также вывести непосредственно из формулы (8), ибо

$$C_{m-n}^m = \frac{m!}{(m-n)![m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = C_n^m.$$

Однако приведенное в тексте доказательство дает больше этого формального преобразования, так как позволяет непосредственно усмотреть реальную причину установленного тождества.

[2]) Таблица содержит еще строку $n=0$, в которой помещены значения выражения (8) при $n=0$; все они равны единице, независимо от m, так что вся строка заполнена единицами. Разумеется, этим мы не делаем бессмысленного утверждения „число сочетаний из m предметов по нулю равно единице", а просто в порядке определения расширяем значение символа C_n^m на случай $n=0$. Это необходимо, чтобы обеспечить универсальную значимость соотношений (11) и (12).

Таблица II

Значения символа C_n^m

n	$m=5$	$m=6$	$m=7$
0	1	1	1
1	5	6	7
2	10	15	21
3	10	20	35
4	5	15	35
5	1	6	21
6	0	1	7
7	0	0	1

В приложении III даны значения C_n^m для всех $m \leqslant 100$. Эта таблица отпечатана с теми же обозначениями, как и таблица приложения I, так как здесь также приходится иметь дело с большими числами. Далее размеры этой таблицы сокращены на основании свойства (11), в силу которого числа каждого столбца повторяются в обратном порядке после того, как пройдена середина этого столбца. По этой причине достаточно приводить в таблице числа каждого столбца лишь до того места, начиная с которого они повторяются. Например, число C_{31}^{50} не дано в таблице, но формула (11) показывает, что оно равно $C_{19}^{50} = 3{,}040\,594\,3 \cdot 10^{13}$.

§ 15. О некоторых свойствах чисел C_n^m; формула бинома. Правило перемножения многочленов в алгебре состоит в том, что каждый член первого множителя множится на каждый член второго множителя, и все такие произведения складываются между собою. Математики называют это „распределительным (дистрибутивным) законом умножения". Его можно формулировать еще так: „произведение двух многочленов равно сумме частичных произведений всех комбинаций, содержащих по одному члену каждого из множителей".

Допустим, что мы составили по этому правилу произведение двух многочленов и что затем мы умножаем это произведение на некоторый третий многочлен. Полученное таким образом произведение будет суммою всех возможных частичных произведений трех множителей, по одному от каждого из трех многочленов.

В общем случае, когда имеется m множителей, произведение должно содержать сумму всех частичных произведений, какие могут быть получены взятием по одному члену каждого из m многочленов.

Пусть теперь все наши m множителей одинаковы и каждый из них есть простой двучлен $x+y$. Тогда произведение будет равно $(x+y)^m$.

Так как в данном случае имеются только два члена, x и y, то каждое частичное произведение представляет собою произведение некоторой степени члена x на некоторую степень члена y. Далее так как из каждого множителя нужно взять по одному члену, то сумма показателей этих двух степеней во всех случаях равна m. Другими словами, в развернутом виде произведение должно иметь вид:

$$c_0x^m + c_1x^{m-1}y + c_2x^{m-2}y^2 + \ldots + c_my^m, \tag{13}$$

где неизвестны еще значения чисел c. Однако их определить нетрудно. Ведь развернутое произведение (13) должно содержать произведение $x^n y^{m-n}$ ровно столько раз, сколькими различными способами можно из числа всех m множителей выбрать те n двучленов, из которых берется член x, причем порядок этих n множителей безразличен; другими словами, это число равно C_n^m. Разумеется, множители y берутся из остающихся $m - n$ двучленов. Итак, коэфициент при n-й степени x в разложении $(x+y)^m$ равен числу сочетаний из m предметов по n. Выражение (13) поэтому примет вид:

$$C_0^mx^m + C_1^mx^{m-1}y + C_2^mx^{m-2}y^2 + \ldots + C_m^my^m, \tag{14}$$

или более кратко [1]):

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} C_n^m x^{m-n}y^n. \tag{15}$$

---

[1]) Символ $\sum$ для обозначения суммы членов, составленных по некоторому определенному закону, чрезвычайно удобен и позволяет сравнительно просто записывать весьма сложные выражения. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим символом. На примере формулы (15) легко понять идею, на которой основано его применение.

Произведение

$$C_n^m x^{m-n} y^n$$

называется „общим членом" выражения (14); это значит, что, давая числу n разные значения, мы можем последовательно получить из него все члены формулы (14). Так, например, при $n = 2$ мы получаем:

$$C_2^m x^{m-2} y^2.$$

При $n = 1$ мы получаем:

$$C_1^m x^{m-1} y.$$

Продолжая этим путем, мы восстановим все члены формулы (14).

Символ $\sum$ формулы (15) надо понимать как требование сложить между собою все надлежащие члены этого рода. То, что написано под и над этим символом, устанавливает, какие именно члены следует взять, давая нам наименьшее и наибольшее значение числа n. При этом подразумевается, что все промежуточные целые числа должны быть использованы.

Таким образом правая часть формулы (15) есть краткая запись следующей инструкции: „В выражение $C_n^m x^{m-n} y^n$ подставь вместо n последовательно все целые числа от 0 до m включительно и сложи между собою все полученные выражения".

Обращаясь к приложению III, читатель легко узнает в группах чисел

$$\begin{matrix} 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 3, & 1 \end{matrix}$$

коэфициенты хорошо известных разложений

$$(x+y)^1 = 1\cdot x + 1\cdot y,$$
$$(x+y)^2 = 1\cdot x^2 + 2\cdot xy + 1\cdot y^2,$$
$$(x+y)^3 = 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1y^3.$$

Даже единственное число 1, стоящее под рубрикой $m=10$, входит в эту общую схему в силу соотношения $(x+y)^0 = 1$.

§ 16. Решение более сложных задач. Существует много задач на перестановки и сочетания, выходящих за пределы тех простейших классов, с какими мы имели дело до сих пор. Часто такие задачи удается решить посредством надлежащего применения общих законов, установленных в § 6. Чтобы показать общие приемы подхода к таким задачам, приведем несколько примеров.

Пример 5. Сколько сочетаний по четыре буквы можно составить из букв, составляющих слово „*папаха*".

Этот пример усложняется тем обстоятельством, что некоторые из букв повторяются. Проще всего будет его решить, если мы заметим, что все возможные сочетания распадаются на два класса: содержащие букву „х" и не содержащие этой буквы. Те, которые содержат букву „х", очевидно, должны кроме нее содержать еще комбинацию из трех букв, выбранную из числа трех „а" и двух „п". Но эти комбинации очень легко перечислить; вот они:

а а а
а а п
а п п

Те комбинации, которые не содержат буквы „х", должны быть выбираемы из числа трех „а" и двух „п". Очевидно, что таких комбинаций может быть только две:

а а а п
а а п п

Так как два класса, на которые мы разбили все возможные комбинации, очевидно, не перекрываются, то первый основной закон композиции показывает, что общее число сочетаний равно пяти.

При решении этой задачи нам не пришлось применять ни одной из выведенных нами формул. Теперь мы приведем пример, который удобно решать комбинированным применением наших формул и общих законов.

Пример 6. Сколько сочетаний по четыре буквы можно составить из букв составляющих слово „*междоусобце*"?

Это слово содержит 11 букв: два „о", два „е" и по одному разу м, ж, д, у, с, б, и.

Все возможные сочетания букв „о" и „е" можно записать так:

$$\begin{array}{cccc} o\,o\,e\,e & o\,o\,e & o\,o & o \\ & o\,e\,e & o\,e & e \\ & & e\,e & \end{array}$$

Первый столбец содержит одно сочетание из четырех букв; это сочетание — одно из искомых. Второй столбец содержит два сочетания по три буквы, и в силу второго закона композиции каждое из этих сочетаний можно комбинировать с каждой из семи однажды встречающихся букв. Подобным же образом каждое из трех сочетаний третьего столбца можно комбинировать с каждым из C_2^7 сочетаний по 2, а каждое из двух сочетаний последнего столбца с каждым из C_3^7 сочетаний по 3. Наконец, имеется еще C_4^7 сочетаний, не содержащих ни буквы „о", ни буквы „е". Пользуясь первым законом, мы находим, что искомое общее число сочетаний равно

$$1+2C_1^7+3C_2^7+2C_3^7+C_4^7=183.$$

При рассмотрении задач на перестановки и сочетания часто приходится прибегать к приемам подобного рода. В таких случаях легкость, с которою удается получить решение, в значительной степени зависит от надлежащего выбора метода этого решения, так что значительная практика и известная вышколенность интуиции необходимы, когда приходится иметь дело с задачами такого рода.

§ 17. Пример более сложной задачи на перестановки. Следующую задачу мы помещаем по двум причинам: во-первых, она приводит к результату, который сам по себе представляет определенный интерес, и во-вторых, она способствует в высочайшей степени приобретению навыков в чисто формальном мышлении, которое часто связано с употреблением символа $\sum$.

Эта задача относится к положению вещей, сходному с рассмотренным нами в примерах 5 и 6, с тою разницей, что теперь речь идет о *перестановках* вместо *сочетаний*. Она может быть формулирована следующим образом.

Пример 7. Сколько различных перестановок по n предметов в каждой можно составить, имея в своем распоряжении m_1 предметов первого типа, m_2 предметов второго типа и т. д., всего s различных типов? При этом для числа предметов того или иного типа, входящих в перестановки, не делается никаких ограничений.

Каждая перестановка содержит некоторое определенное число предметов каждого типа. Пусть эти числа будут $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Тогда, на основании ответа задачи 4 в § 10, мы будем иметь ровно

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{m_1, m_2, \ldots, m_s}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_s!} \tag{16}$$

перестановок с данными определенными значениями чисел n_i. Очевидно, что полное число $P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s}$ всех перестановок мы получим, складывая все подобные выражения, соответствующие всем возможным составам нашей группы из n предметов. Поэтому результат имеет вид:

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots \sum_{n_s} P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{m_1, m_2, \ldots, m_s},$$

причем при каждой из сумм должны еще быть указаны пределы суммирования.

Эти пределы могут быть установлены следующим образом.

Прежде всего в силу соотношения

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$$

число n_s не является произвольным, когда известны значения остальных n_i, а получает совершенно определенное значение; поэтому сумма по n_s состоит из одного единственного члена, для которого

$$n_s = n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{s-1}.$$

Но в случае, когда сумма состоит из одного единственного члена, знак суммирования, очевидно, может быть опущен. Мы получаем:

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \\ = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \ldots \sum_{n_{s-1}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_{s-1}!\, (n - n_{s-1} - n_{s-2} - \ldots - n_1)!}. \qquad (17)$$

Заметим далее, что n_1 не превосходит m_1, n_2 не превосходит m_2 и т. д. Это наводит на мысль, что верхними пределами суммирования будут соответственно служить числа $m_1, m_2, \ldots, m_{s-1}$. Однако здесь необходимо соблюдать осторожность. Ибо, если какое-либо из чисел m превосходит n, то это потребовало бы введения таких перестановок, в которых число предметов одного какого-либо типа превосходит общее число предметов всех типов, что, очевидно, невозможно.

Однако если какое-либо из чисел n_i, например n_1, превосходит n, то выражение

$$(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{s-1})!$$

в качестве факториала отрицательного числа становится бесконечно большим. Это же самое будет иметь место всякий раз, когда сумма $n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1}$ превосходит n. Так как этот факториал входит в знаменатель формулы (17), то каждый раз, когда мы имеем дело с такой группой чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}$, где сумма этих чисел превосходит n, соответствующий член формулы (17) автоматически обращается в нуль. Отсюда следует, что, хотя числа $m_1, m_2, \ldots, m_{s-1}$ могут быть и больше *подлинных* пределов, тем не менее они могут без ущерба их заменять, так как все добавочные члены, входящие благодаря этому в формулу (17), обращаются в нуль.

Наконец, необходимо определить нижние пределы суммирования. С этою целью рассмотрим сперва n_1 и обратимся к числовому примеру: пусть $n = 7$, $m_1 = 9$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$. Очевидно, что, так как число предметов второго и третьего типа вместе взятых не может быть больше чем 5, то каждая перестановка должна содержать по меньшей мере два предмета первого типа. Иначе говоря, n_1 не может быть меньше двух. В общем случае, так как числа $n_2, n_3, \ldots, n_s$ не могут превосходить соответственно чисел $m_2, m_3, \ldots, m_s$, то сумма их не может превосходить $m_2 + m_3 + \ldots + m_s$. Но так как общее число n предметов в каждой перестановке твердо зафиксировано, то наименьшее число предметов первого типа будет иметь те перестановки, в которых число предметов всех остальных типов будет наибольшим. Иначе говоря, n_1 не может быть меньше, чем

$$n - m_2 - m_3 - \ldots - m_s. \tag{18}$$

То же самое рассуждение мы можем применить к n_2, с тою разницей, что при выполнении второго суммирования значение n_1 предполагается известным, и поэтому возможно большими приходится делать только остальные числа n_i. Таким образом n_2 не может быть меньше, чем

$$n - n_1 - m_3 - \ldots - m_s.$$

Подобным образом и остальные числа n_i должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{gathered} n_3 \geqslant n - n_1 - n_2 - m_4 - \ldots - m_s, \\ n_4 \geqslant n - n_1 - n_2 - n_3 - m_5 - \ldots - m_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_{s-1} \geqslant n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{s-2} - m_s. \end{gathered}$$

Прежде чем пользоваться этими числами в качестве нижних пределов суммирования, необходимо, однако, заметить, что ни одно из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ не может быть меньше нуля. Поэтому нижний предел суммирования по n_1 дается выражением (18), если оно положительно, и равен нулю в противном случае; аналогичные замечания необходимо сделать и по поводу остальных чисел n_i. Однако если выражение (18) отрицательно и если мы примем его за нижний предел суммирования, то мы введем в сумме ряд добавочных членов, в которых n_1 отрицательно. Вследствие того, что $n_1!$ входит множителем в знаменатель нашей формулы, все такие члены обращаются в нуль, так что пользование выражением (18) в качестве нижнего предела суммирования приводит к правильному результату.

Подобное же замечание может быть сделано и по поводу каждого другого суммирования. Таким образом

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1 = n - m_2 - \ldots \\ \ldots - m_s}}^{m_1} \; \sum_{\substack{n_2 = n - n_1 - \\ - m_3 - \ldots - m_s}}^{m_2} \cdots \sum_{\substack{n_{s-1} = n - n_1 - \ldots \\ \ldots - n_{s-2} - m_s}}^{m_{s-1}} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_{s-1}! (n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{s-1})!}. \tag{19}$$

Это и дает формальное решение поставленного вопроса.

Задачи

1. Сколькими различными способами можно из колоды в 52 карты выбрать четыре последовательных карты одной и той же масти, причем порядок выбора безразличен, так что группы

шестерка	шестерка	восьмерка
семерка	девятка	шестерка
восьмерка	восьмерка	семерка
девятка	семерка	девятка

и т. д. рассматриваются как тождественные между собою?

2. Сколькими способами можно надеть на одно кольцо семь ключей?

3. Буквопечатающий телеграфный аппарат снабжен определенным числом скользящих прутьев, каждый из которых может занять одно из двух положений в зависимости от характера передаваемого сигнала. Когда все прутья занимают определенное положение, то тем самым набирается для записи один определенный знак (буква). Очевидно, что число знаков, которые может набирать аппарат, зависит от числа прутьев. Сколько прутьев необходимо для набора 50 различных знаков?

4. Тот же вопрос, если каждый прут может принимать три различных положения вместо двух.

5. Сколькими способами можно расположить в ряд p плюсов и m минусов так, чтобы никакие два минуса не стояли рядом?

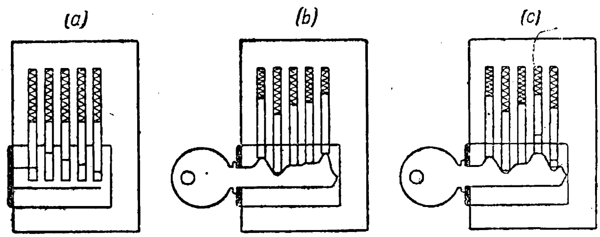
6. Сколько различных сочетаний можно составить из 10 предметов, среди которых имеется три одинаковых между собою, три других одинаковых между собою, а остальные четыре все различны:

a) если каждое сочетание должно содержать четыре предмета,

b) если число предметов в сочетании не установлено?

7. Сколько различных соединений должна иметь возможность совершать телефонная станция, обслуживающая 100 000 абонентов?

Цилиндрический замок, изображенный на черт. 3, содержит пять спускных задвижек. Эти спускные задвижки имеют форму шипов, разрезанных пополам, так что, когда кромка ключа (черт. 3, *b*) ставит их в надлежащее положение, то они не оказывают сопротивления повороту цилиндра. Разрез может быть сделан в одном из десяти пунктов вдоль шипа. Когда ключ вынут (черт. 3, *a*) или когда вставлен неправильный ключ, то не все разрезы приходятся на уровень края цилиндра, и он не может повернуться.



Черт. 3. (*a*) — замок в нормальном положении. Разрезы не на месте; (*b*) — вставлен правильный ключ. Разрезы на месте; (*c*) — вставлена отмычка. Одна серия разрезов на месте.

Если требуется сделать отмычку для данной группы замков, то некоторые из спускных задвижек перерезываются в двух местах (черт. 3, *c*). Это делается так, чтобы одна серия разрезов была одинакова для всех замков; поэтому все они могут быть открыты одной общей отмычкой. Другая серия разрезов — своя для каждого замка, так что ключ, предназначенный для одного из них, не подходит к другим. На черт. 3, *c* те разрезы, которые не находятся на краю цилиндра, попадают туда при помощи ключа, изображенного на черт. 3, *b*, так что замок на черт. 3, *c* может быть открыт любым из этих ключей.

Следующие задачи относятся к замкам этой системы.

8. Сколько можно сделать различных замков описанной системы (без двойных разрезов)?

9. Если ключ от замка украден и владелец хочет предохранить себя от возможного последующего вторжения, то он может вынуть шипы и расположить их в другом порядке. Сколько раз можно это проделать без повторений, если три из пяти шипов разрезаны различным образом, а остальные два имеют одинаковые разрезы?

10. Если для изготовления отмычки первый и четвертый шипы имеют по два разреза, то сколько различных замков может отпирать изготовленная отмычка?

11. Каждый из пяти этажей гостиницы должен иметь свою особую отмычку. Сколько комнат может быть в каждом этаже, при условии, что ключ каждого из постояльцев может отпирать только его собственную комнату и что a) только один шип имеет двойной разрез, b) два шипа имеют двойные разрезы, c) три шипа имеют двойные разрезы.

Литература

Любой курс элементарной алгебры. Специально:
Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, Kap. I, II, XIII.

ГЛАВА III

Элементарные принципы теории вероятностей

§ 18. Дополнительные вероятности. События „A наступает“ и „A не наступает“, очевидно, несовместимы; поэтому, в силу соглашения II, § 3, вероятность того, что „либо A наступит, либо A не наступит“, равна сумме вероятностей этих событий. Так как одно из этих событий наверняка должно наступить, то сумма их вероятностей должна равняться единице. Обозначая через $P(A)$ вероятность события A, а через $P(\bar{A})$ вероятность того, что оно не наступит, мы должны поэтому иметь

$$P(A)+P(\bar{A})=1,$$

или

$$P(A)=1-P(\bar{A}).$$

Числа $P(A)$ и $P(\bar{A})$ — вероятности наступления и ненаступления одного и того же события — называются „дополнительными вероятностями“.

§ 19. Безусловные вероятности. Простейший тип задач в теории вероятностей представляют собою так называемые „задачи на безусловные вероятности“. Отличительной их чертою является полная достоверность, с которою могут быть установлены условия задачи. Мы не можем точнее определить этого класса проблем, потому что сама классификация имеет недостаточно отчетливый характер, но смысл вводимой нами чрезвычайно полезной терминологии станет ясным читателю очень скоро. Задачи этого рода обычно решаются прямым применением основного определения вероятности. Приведем несколько примеров.

Пример 8. Буквы, составляющие слово „ремонт“, написаны каждая на отдельной карточке; эти карточки тщательно перемешиваются, после чего вынимаются четыре из них поочередно; какова вероятность, что при этом выйдет слово „море“?

Мы знаем, что число перестановок из шести различных предметов по четыре равно $\frac{6!}{2!}=360$. Никаким существенным для нашей задачи свойством эти перестановки друг от друга не отличаются. Следовательно, они образуют полную группу равновероятных событий. Так как только одно из этих событий дает требуемое слово „море“, то искомая вероятность равна $\frac{1}{360}$.

Пример 9. Буквы, составляющие слово „папаха“, написаны каждая на отдельной карточке; эти карточки тщательно перемешиваются, после чего вынимаются четыре из них поочередно; какова вероятность, что при этом выйдет слово „папа“?

В этом случае необходимо отличать карточки от букв. Перестановки карточек все равновероятны, перестановки букв — нет. Перестановки карточек образуют полную группу из 360 событий, некоторые из которых дают требуемое слово. Наша задача состоит в том, чтобы определить число перестановок этой подгруппы.

Любая перестановка трех букв „а“ между собою не оказывает никакого влияния на результат, поскольку речь идет только о буквах. То же относится и к двум буквам „п“. Ясно, что любую перестановку букв „а“ мы можем комбинировать с любою перестановкой букв „п“, так что полное число перестановок, оставляющих неизменным слово „папа“, равно $P_2^3 P_2^2 = 6 \cdot 2 = 12$. Таким образом фиксированная нами подгруппа содержит 12 событий, и следовательно искомая вероятность равна $\frac{12}{360} = \frac{1}{30}$.

Пример 10. Первый вид задачи психического испытания. Некий „ясновидящий“ утверждает, что может угадать цвет игральной карты, не видя ее. Чтобы проверить его утверждение, организуется опыт с помощью четырех черных и четырех красных карт. Эти карты тщательно перемешиваются и кладутся на стол кверху сорочкой. „Ясновидящему“ сообщается, что имеется четыре красных и четыре черных карты; но о расположении этих карт он предположительно ничего не знает. Лицо, производящее опыт, берет одну карту, не заглядывая в нее и не показывая ее „ясновидящему“, и спрашивает, каков ее цвет. Если „ясновидящий“ отвечает „красная“, карта кладется в одну сторону стола, если „черная“ — в другую. Этот процесс продолжается до исчерпания всех карт.

Если „ясновидящий“ не обладает тою способностью, которую он себе приписывает, то какова вероятность того, что среди карт, названных красными, окажется ровно одна черная [1])?

Разумеется, порядок, в котором „ясновидящий“ будет называть красные и черные карты, неизвестен; однако если он на самом деле не обладает даром ясновидения, то этот порядок будет, очевидно, совершенно независим от того порядка, в котором карты фактически будут появляться. Поэтому шансы нашего медиума на ту или иную степень успеха ничуть не изменятся, если он заранее предскажет чередование черных и красных карт, т. е. если вместо дара „ясновидения“ он будет приписывать себе дар „пророчества“. Условимся поэтому тот порядок чередования, который провозглашен медиумом, называть „стандартным порядком“ и исследовать вероятность того, что фактический порядок

---

[1]) Этот пример, встречающийся в различных формах, имеет следующую интересную историю.

Некий псевдонаучный мистификатор описанного в нашей задаче типа находился на исследовании у одного моего друга. Последний был крайне заинтересован в том, чтобы сделать возможно малыми шансы случайных удач, в частности и удач спорных, которые „медиум“, несомненно, стал бы истолковывать в свою пользу. Нужно было выбрать наиболее выгодную для этой цели относительную долю „красных“ карт, причем общее число карт, с которыми „медиум“ соглашался иметь дело, было ограничено. В конце концов мы остановились на такой постановке опыта, которая хоть и не была вполне удовлетворительной, все же являлась лучшей из возможных; со страхом и трепетом мой друг приступил к эксперименту. Исход оправдал его опасения — произошел один из наименее вероятных случаев: „медиум“ добился самого благоприятного для себя из всех возможных результатов.

окажется так близким к стандартному, как того требует формулировка нашей задачи. Как мы уже упоминали, „ясновидящему" известно, что имеется ровно четыре красных и четыре черных карты. Мы можем поэтому считать достоверным, что он четыре раза назовет красный цвет и четыре раза — черный; иначе говоря, что стандартный порядок содержит четыре красных и четыре черных карты.

Обращаясь теперь к порядку, в котором карты появляются, мы немедленно замечаем, что $P^{4,4}_{4,4}=70$ возможных перестановок образуют полную группу равновероятных и взаимно исключающих друг друга событий. Среди этих перестановок имеется определенная подгруппа таких, которые ровно в трех красных картах совпадают со стандартным порядком. Если мы найдем число перестановок этой группы, то наша задача, очевидно, будет решена.

Это можно сделать, вдумываясь в процесс получения такой перестановки, которая удовлетворяла бы условиям задачи. В первую очередь, мы можем положить черную карту на одно из красных „мест" стандартного расположения, после того как это сделано, остальные красные места должны уже быть обязательно заняты красными картами. Затем, остающаяся еще в нашем распоряжении красная карта может быть положена на любое из четырех мест, которые в стандартном расположении заняты черными картами, после чего все оставшиеся места должны быть обязательно заняты черными картами. Таким образом имеется ровно $4\cdot 4=16$ перестановок, удовлетворяющих условиям задачи. Искомая вероятность равна $\frac{16}{70}=\frac{8}{35}$.

Задачи

1. Линейный искатель в шаговой автоматической станции может дать соединение с десятью абонентами в каждой декаде, всего с сотней абонентов. Каждый абонент прикреплен к одному искателю. Какова вероятность того, что линия наудачу выбранного абонента включена в третью декаду?

2. Допустим, что различные движения линейного искателя требуют времени, указанного в следующей таблице:

a) Первый вертикальный шаг	0,15 сек.
в) Каждый последующий вертикальный шаг	0,10 сек.
c) Первый горизонтальный шаг	0,25 сек.
d) Каждый последующий горизонтальный шаг	0,10 сек.

Наблюдатель регистрирует время, в течение которого искатель находится в движении. Какова вероятность того, что это время окажется меньше чем 0,66 сек.? Какова вероятность того, что оно окажется заключенным между 0,66 и 1,50 сек.?

3. Некто A производит в течение часа два вызова, и его также вызывают два других абонента, один из которых — некто B. Вызывающие абоненты, в случае если аппарат A занят, повторяют свои вызовы. Какова вероятность того, что B сразу (при первом вызове) будет соединен с A, если каждый вызов занимает одну из 60 минут часа?

4. В задаче примера 10 найти вероятность того, что медиум угадает на 100%.

5. Тот же вопрос, если взять шесть красных и две черных карты.

6. Если взять шесть красных и две черных карты, то какова вероятность того, что медиум ошибется ровно в одной карте каждого из двух цветов?

7. Группа из тысячи ламп содержит 5% брака. Если испытанию подвергаются пять ламп, то какова вероятность, что среди них не найдется ни одной испорченной? Какова вероятность, что пробная группа будет иметь 40% брака?

§ 20. Условные вероятности. Примеры, рассмотренные нами в предыдущем параграфе, были формулированы с полной определенностью. Однако бывает, что формулировка той или иной задачи содержит известные оговорки, которые весьма существенно изменяют искомую вероятность. Так, например, мы видели, что задача „Какова вероятность того, что на игральной кости выпадет шестерка?" имеет ответ $\frac{1}{6}$. Но задача: „Какова вероятность того, что на игральной кости выпадет шестерка, если известно, что не может выпасть нечетное число?" также может служить предметом исследования теории вероятностей; и ясно, что число $\frac{1}{6}$ уже не будет решением этой новой задачи.

Число, которое ищется в задачах такого рода, обычно называют „условною вероятностью" и обозначают символом $P_A(B)$, который читается так: „Вероятность наступления события B при условии наступления события A". Задачи этого рода иногда бывают чрезвычайно трудными; но во многих случаях они решаются почти так же просто, как если бы дополнительные условия не были наложены. Именно такой случай мы имеем, например, в только что приведенной задаче. Если не может выпасть нечетное число очков, то должно выпасть одно из четных чисел; и если при этом все эти числа остаются равновероятными, то искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

Вот еще пример.

Пример 11. Допустим, что в условиях примера 10 первая взятая карта оказалась черной, в то время как „ясновидящий" назвал ее красной. Какова вероятность того, что в конце испытания ровно три красных карты окажутся на красных местах?

После того, как названа красная карта, медиуму остается назвать еще три красных и четыре черных. Эти цвета он называет в определенном порядке, который мы снова назовем „стандартным".

Так как первая взятая карта оказалась черной, то для того, чтобы в конечном счете получить три совпадения на красных местах, необходимо, чтобы оставшиеся три красных места стандартного расположения все были заняты красными картами. Если это осуществляется, то остаются три черных и одна красная карта, которые и должны занять четыре черных „места". Очевидно, что красная карта может прийтись на любое из этих мест, после чего три черных карты должны (безразлично в каком порядке) занять оставшиеся три места. Таким образом число перестановок в подгруппе, удовлетворяющей условиям задачи, равно 4. Так как полная группа содержит $P_{3,4}^{3,4}=35$ перестановок, то искомая вероятность равна $\frac{4}{35}$.

Другими словами, шансы медиума на 75% удачи уменьшаются вдвое, если его первое утверждение оказывается ошибочным.

Интересно теперь узнать, насколько увеличиваются его шансы в случае, если в первый раз он случайно угадает. Для этой цели рассмотрим следующую задачу.

Пример 12. Если в условиях примера 10 цвет первой карты угадан верно, то какова вероятность, что в окончательном результате верно угаданными будут ровно три карты каждого из двух цветов?

Обратите внимание, что формулировка этой задачи несколько отлична от формулировки предыдущей. В той было определенно сказано, что первую карту, на самом деле черную, медиум назвал красной. Здесь же цвет первой карты неизвестен, известно только, что испытуемый субъект этот цвет угадал. Однако для целей нашей задачи это не составляет различия, потому что оба цвета одинаково часто представлены и, следовательно, одинаково вероятны. Кажущееся затруднение легко устранить, говоря не о „черных" и „красных" картах, а о „картах первого цвета" и „картах второго цвета", причем первым цветом мы будем называть цвет первой карты стандартного порядка.

Медиуму, который угадал карту первого цвета, остается назвать три карты первого цвета и четыре второго; порядок, в котором он их фактически называет, мы будем называть „стандартным". Если мы хотим, чтобы только одна карта каждого цвета оказалась ошибочно названной, то одна из карт второго цвета обязательно должна появиться в таком месте, которое в стандартном порядке занято картою первого цвета; так как таких мест осталось три, то это может произойти ровно тремя различными способами. Остающиеся в стандартном порядке два места первого цвета должны тогда быть заняты картами первого цвета, после чего остается одна карта первого цвета и три — второго; эти четыре карты должны занять те четыре места, которые в стандартном порядке заняты картами второго цвета. Так как оставшаяся карта первого цвета может занять любое из этих четырех мест, то полное число перестановок, удовлетворяющих условиям задачи, равно $3 \cdot 4 = 12$.

Что касается общего числа перестановок в полной группе, то оно, как легко видеть, равно $P_{3,4}^{3,4} = 35$. Искомая вероятность поэтому равна $\frac{12}{35}$.

Следовательно, если медиум угадал первую карту, то вероятность угадать 75% карт для него после этого возрастает на 50%.

Если бы задача была формулирована явно, как в случае примера 11, то рассуждение осталось бы в точности таким же; только вместо „первый цвет" и „второй цвет" мы должны были бы теперь говорить либо „красный" и „черный", либо „черный" и „красный", смотря по условиям задачи. Как мы уже упоминали выше, мы могли здесь в общем случае рассуждать так же, как в частном потому, что оба цвета были одинаково вероятны (одинаково часто представлены). Мы приведем теперь пример, в котором дело обстоит совсем иначе.

Пример 13. Если в условиях примера 10 мы имеем шесть черных карт и две красных и если первой появляется красная карта, причем медиум назвал ее черной, то какова вероятность того, что среди карт, названных черными, окажется ровно одна красная?

Стандартный порядок начинается здесь с черной карты. Однако первая фактически появляющаяся карта — красная. Поэтому остается $P^{6,\,1}_{6,\,1}=7$ возможных перестановок, которые все одинаково вероятны, но, разумеется, не все отвечают требованиям задачи. Они образуют собою полную группу, требуемую нашим определением вероятности.

Стандартный порядок, начиная со второго места, состоит из пяти черных и двух красных „мест". Чтобы удовлетворить условиям задачи, единственная фактически оставшаяся красная карта должна прийтись на одно из двух красных „мест", после чего расположение остающихся черных карт не играет никакой роли. Поэтому имеются ровно две перестановки, отвечающие условиям задачи. Они и образуют ту группу, вероятность которой мы ищем.

Прежде чем итти дальше, необходимо отметить, что метод, которым мы пользовались при решении последних задач, состоял в применении исключительно второго закона композиции событий и определения вероятности. Целый ряд более сложных задач допускает формальное решение этими же средствами, хотя фактические расчеты оказываются значительно более сложными. При решении задач подобного рода успех обусловливается двумя причинами: 1) ясное, точное представление о том, что требуется найти, и 2) постоянная забота о том, чтобы не нарушались условия равновероятности, несовместимости и взаимной независимости.

Наконец, не следует думать, что существует только единственный способ для решения задач подобного рода. Это вообще редко бывает в математике. В нашем случае приведенные примеры связаны между собою таким образом, что решения одних из них могут быть получены из решений других более простыми средствами, чем изложенные в тексте. Немного ниже, после того как будут введены необходимые для этого новые понятия, мы покажем, как это может быть сделано.

Задачи

1. В задаче 2, § 19, искатель по прошествии 0,66 сек. не остановился; какова вероятность, что он остановится в течение ближайших 0, 33 сек?

2. Если искатель в течение первых 0,66 сек. не остановился, то какова вероятность его остановки для каждого из следующих интервалов:

$$1{,}00 - 1{,}50,$$
$$0{,}66 - 10{,}00,$$
$$0{,}20 - 0{,}50?$$

3. В задаче примера 10 первые две взятых карты были черными; медиум назвал одну из них черной и одну — красной; какова вероятность того, что 75% карт будут угаданы верно?

4. В этой же задаче, если имеется шесть красных карт и две черных, и если первая вынутая карта — на самом деле черная — ошибочно названа красной, то какова вероятность, что будет угадано 75% карт? Совпадает ли ответ с ответом примера 13? Почему?

5. В тех же условиях первая карта — красная — угадана верно. Какова вероятность 75%-ного успеха?

6. Продукция большой фабрики электрических ламп содержит в среднем 5% брака. Магазином закуплено 20 картонов по 5 ламп в каждом. Разумеется, нельзя утверждать, что в купленной партии окажется ровно 5 испорченных ламп, потому что купленный „образчик" случайно может оказаться как лучше, так и

хуже средней нормы. Розничный покупатель приобретает в магазине один картон. На сколько вероятность того, что все лампы этого картона окажутся в исправности, вычисленная в предположении, что купленная магазином партия, была на 1% лучше средней нормы, превосходит вероятность того же события, вычисленную в предположении, что партия была на 1% хуже средней нормы?

7. Какова вероятность выпадения шестерки на несимметричной игральной кости, у которой вероятность шестерки на 5% превышает вероятность каждой из прилегающих граней, а вероятность единицы (грань, противоположная шестерке) на 10% меньше каждой из них?

§ 21. Сложные вероятности. До сих пор мы не встречались с задачами, в которых приходилось бы иметь дело с совместным наступлением нескольких событий. Теперь мы переходим к вопросам этого рода. Основной закон, управляющий такими случаями, может быть формулирован так:

Вероятность того, что событие A наступит и будет сопровождаться [1]) *событием B, равна произведению вероятности наступления события A на вероятность того, что если наступило A, то наступит и B. Символически:*

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{20}$$

Этот закон аналогичен второму закону композиции событий и может быть доказан во всей своей общности, как мы покажем в § 47. В настоящий момент мы не располагаем еще всем арсеналом средств, необходимых для этого доказательства, и потому удовлетворимся разбором частного случая.

Начнем с рассмотрения примера.

Пример 14. Буквы, составляющие слово „банан", написаны каждая на особой карточке, и эти карточки тщательно перемешаны. Какова вероятность того, что две последовательно взятые карточки составят слово „на"?

Метод § 19 (ср. пример 9) сразу дает нам ответ $\frac{1}{5}$, однако мы можем несколько иначе вести рассуждение. Чтобы получить слово „на", мы должны получить в первую очередь „н" и во вторую „а". Но первый тираж дает нам одну из пяти, а второй — одну из оставшихся четырех карт. Различные возможные результаты могут быть схематически представлены так:

$$\frac{\text{б}}{\text{анан}} \quad \frac{\text{а}}{\text{бнан}} \quad \frac{\text{н}^*}{\text{ба}^*\text{а}^*\text{н}} \quad \frac{\text{а}}{\text{банн}} \quad \frac{\text{н}^*}{\text{ба}^*\text{на}^*}.$$

Всего имеется $5 \cdot 4$ возможных результатов. Из них дают слово „на" те, которые отмечены звездочками — числом $2 \cdot 2$. Таким образом искомая

---

[1]) Эта формулировка относится к случаю, когда A и B наступают одновременно. Иногда приходится иметь дело с последовательностью событий, например „человек подвергается ранению и умирает". В этом случае $P(AB)$ означает вероятность того, что наступит A, и *вслед за ним* B, причем порядок не может быть обращен.

Например, имеется определенная вероятность того, что человек будет ранен. Если он ранен, то имеется определенная вероятность смерти. Произведение их дает вероятность того, что он умрет от ранения. Эта вероятность совсем не совпадает с вероятностью того, что „человек умрет и после этого будет ранен" — случай несравненно более редкий.

вероятность равна $\frac{2\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}$. Первая из этих дробей дает — не только по величине, но и по своему происхождению — безусловную вероятность появления буквы „н“; аналогичным образом вторая соответствует появлению буквы „а“, *если буква „н“ уже появилась*. Наш пример, таким образом, подтверждает формулированный закон.

В общем случае, когда „событие A“ определяет собою подгруппу из n событий, входящую как часть в группу из m событий; когда каждому члену полной группы поставлена в соответствие полная группа из m' последующих событий, так что имеется всего m таких „последующих групп“ и когда, наконец, в каждой из этих последующих групп, связанных с „событием A“, имеется n' членов, составляющих „событие B“, — когда все эти предпосылки выполнены, то мы имеем mm' сложных событий, из которых nn' дают „A с последующим B“. Искомая вероятность поэтому равна $\frac{nn'}{mm'}=\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m'}\right)$; здесь первый множитель по определению равен безусловной вероятности события A, а второй — условной вероятности события B.

Доказанная нами теорема имеет исключительное значение; и необходимо повторить, что приведенное нами доказательство содержит ограничения, которые на самом деле являются излишними. Так, например, если мы задачу примера 14 формулируем так:

Пример 15. „Буквы б, а, н, а, н написаны каждая на отдельной карточке и карточки перемешаны. Одна карточка вынимается. Если написанная на ней буква не есть „н“, то обе карточки с буквой „н“ выбрасываются. Затем карточки снова перемешиваются, и снова из них берется одна. Какова вероятность комбинации „н а“?

Возможные результаты даются схемой:

$$\frac{\text{б}}{\text{аа}}\qquad\frac{\text{а}}{\text{ба}}\qquad\frac{\text{н*}}{\text{ба*а*н}}\qquad\frac{\text{а}}{\text{ба}}\qquad\frac{\text{н*}}{\text{ба*на*}}\,.$$

События первой группы здесь также ассоциированы с „последующими группами“, но числа событий в этих последующих группах различны для различных событий первой группы. Это обстоятельство, нарушающее одно из условий нашего доказательства, очевидно, не мешает тому, что теорема остается верной. В § 22 мы обобщим теорему в такой мере, что этот случай будет ею охвачен; однако теорема и там еще не достигнет свойственной ей полной общности.

Наконец, надо заметить, что теорема может быть распространена на случай любого числа последовательных событий. Вероятность того, что все они наступят, будет равна произведению их вероятностей, вычисленных в надлежащих предположениях. Приведем несколько примеров.

Пример 16. Буквы, составляющие слово „ремонт“, выписаны каждая на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешиваются, после чего вынимаются четыре из них в определенном порядке. Какова вероятность получить слово „море“? (См. прим. 8.)

Из шести равновероятных возможностей для первой буквы только одна дает „м“. Таким образом вероятность получить ряд букв, начинающийся с „м“, составляет $\frac{1}{6}$. После первого тиража остаются пять карт. Таким образом, если первая вынутая буква была „м“, то вероятность появления во вторую очередь буквы „о“ составляет уже $\frac{1}{5}$. Таким образом вероятность того, что появится сперва „м“, а затем „о“, составляет $\frac{1}{30}$. Если оба эти события состоялись, то вероятность появления в следующем тираже буквы „р“ составляет $\frac{1}{4}$. Поэтому вероятность появления комбинации „мор“ равна $\frac{1}{120}$. Наконец, после появления этих трех букв вероятность того, что при следующем тираже выйдет „е“, составляет $\frac{1}{3}$. Таким образом искомая вероятность равна $\frac{1}{360}$. Разумеется, этот ответ совпадает с тем, который мы получили в примере 8.

Указанное здесь решение задачи основано на пользовании безусловной вероятностью появления буквы „м“ наряду с еще тремя вероятностями, каждая из которых является условною по отношению ко всем предшествующим.

Пример 17. Буквы, составляющие слово „папаха“, написаны каждая на особой карточке. Карточки тщательно перемешиваются, после чего вынимаются четыре из них в определенном порядке. Какова вероятность получить слово „папа“?

Вероятность того, что при первом тираже появится „п“, равна $\frac{2}{6}$. Если это случилось, то вероятность появления буквы „а“ при втором тираже составляет $\frac{3}{5}$, и вероятность последующего „п“ равна $\frac{1}{4}$. Наконец, если все эти буквы появились, то вероятность появления „а“ в четвертом тираже равна $\frac{2}{3}$. Таким образом искомый результат есть

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}.$$

Пример 18. В условиях примера 10 найти вероятность того, что первая карта будет угадана и что только одна карта каждого из двух цветов будет названа неверно.

Вероятность того, что первая карта будет угадана, составляет $\frac{1}{2}$. Если это случится, то вероятность получения трех верных карт каждого цвета равна $\frac{12}{35}$, как мы видели в примере 12. Поэтому искомая вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{12}{35}\right)=\frac{6}{35}$.

Пример 19. В той же задаче найти вероятность того, что первая карта будет названа ошибочно и что в конечном результате все карты кроме двух будут названы верно.

Вероятность ошибки, связанной с первой картой, равна $\frac{1}{2}$. Если эта ошибка имела место, то вероятность получить в конечном итоге только две ошибки составляет $\frac{4}{35}$, согласно примеру 11. Таким образом искомая вероятность равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{35}=\frac{2}{35}$.

Пример 20. Каждая из двух групп игральных карт содержит четыре красных и четыре черных карты. Первая группа тщательно перемешивается, после чего ее карты раскладываются кверху сорочкой на стол. Затем перемешиваются карты второй группы и раскладываются так, что каждая из них покрывает одну из карт первой группы. Найти вероятность того, что первая карта каждой группы будет черной и что среди остальных ровно пять пар имеют совпадающие цвета.

Вероятность того, что первая карта первой группы — черная, составляет $\frac{1}{2}$; если это соответствует действительности, то вероятность того, что эта карта будет покрыта черной картой второй группы, также составляет $\frac{1}{2}$. Таким образом вероятность того, что первая пара будет состоять из двух черных карт, равна $\frac{1}{4}$. Но если в первой паре цвета совпали, то, как непосредственно видно из сравнения с примером 12, вероятность получения ровно двух разноцветных пар становится равной $\frac{12}{35}$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{35}=\frac{3}{35}$.

Задачи

Пользуясь данными задачи 2, § 19, ответить на следующие вопросы:

1. Если наблюдатель регистрирует продолжительность соединения десяти вызовов, то какова вероятность, что все десять будут меньше чем 0,66 сек.?

2. Какова вероятность того, что ровно два из них будут меньше 0,66 сек.?

3. В условиях примера 16 каждая вынутая карта кладется обратно, и карты тасуются перед следующим тиражом. Какова при этих условиях вероятность слова „море“? Увеличилась она или уменьшилась по сравнению с первоначальными условиями?

4. В том же примере 16 найти вероятность результата „торт“ в случае, когда карты не возвращаются. Тот же вопрос в случае, когда карты возвращаются. В каком случае вероятность больше?

Следующие три задачи относятся к эксперименту, описанному в примере 20, с тою только разницей, что теперь мы предполагаем наличие 6 красных и 2 черных карт в каждой группе.

5. Найти вероятность того, что первая карта первой группы — черная, первая карта второй группы — красная и что в конечном итоге имеется ровно две разноцветных пары.

6. Найти вероятность того, что обе первые карты — красные и что в общем имеются ровно две разноцветных пары.

7. Найти вероятность того, что первые карты обеих групп имеют соответственно красный и черный цвет и что в общем имеются ровно две разноцветных пары.

8. В примере 20 допустим, что карты первой группы не тасуются, а раскладываются в определенном порядке: сперва четыре красных, потом четыре черных. Карты второй группы тасуются. Найти вероятность того, что мы будем иметь ровно две разноцветных пары.

9. В той же задаче найти вероятность того, что первая пара состоит из двух красных карт, а среди остальных имеются ровно две разноцветных пары.

10. В тех же условиях найти вероятность того, что первая пара состоит из двух черных карт, а среди остальных имеются ровно две разноцветных пары.

§ 22. Вероятности альтернативных сложных событий. Есть целый ряд задач, которые, будучи по форме очень похожи на только что рассмотренные, требуют для своего решения применения нашего „соглашения II".

Пример 21. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 написаны каждая на особой карточке; из этих карточек берутся наудачу две подряд, без возвращения; какова вероятность того, что полученное двузначное число будет четным?

Очевидно, что для решения этой задачи безразлично, какова будет первая цифра, а второю может с одинаковою вероятностью оказаться любая из пяти; следовательно, искомая вероятность равна $\frac{2}{5}$. Однако попытаемся решить эту же задачу методом § 21. Возможные результаты образуют следующую схему:

$$\frac{1}{2*34*5}\ \frac{2}{134*5}\ \frac{3}{12*4*5}\ \frac{4}{12*35}\ \frac{5}{12*34*}.$$

Очевидно, что при первом выборе допустима любая цифра, и следовательно, вероятность того, что первая цифра окажется благоприятной, равна единице. Но как найти условную вероятность того, что и второй выбор будет удачен? Каждый первый выбор ассоциируется с четырьмя возможными вторыми выборами, из которых *благоприятными оказываются иногда два, а иногда и один.* Очевидно, что это положение вещей не соответствует тем условиям, при которых нами доказана основная теорема о сложных вероятностях.

С другой стороны, легко найти вероятность „четного числа, начинающегося с 1" — она равна $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$. Такова же вероятность „четного числа, начинающегося с 3" или „с 5"; в то время как вероятность четного числа, начинающегося с 2 (или с 4), равна $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$. Эти пять случаев, очевидно, попарно несовместимы: поэтому вероятность того, что наступит один из пяти, равна сумме их вероятностей, т. е. равна $\frac{2}{5}$; а так как никаким другим путем четное число появиться не может, то это и есть искомая вероятность. Конечно, она совпадает с непосредственно полученным результатом. Вообще, *если некоторое событие может быть представлено как сумма (альтернатива) нескольких сложных событий, взаимно исключающих друг друга и для которых могут быть найдены их вероятности, то вероятность основного события может быть определена в силу соглашения II. При* *этом существенно, чтобы все возможные способы осуществления основного события были действительно учтены.*

Такое разложение события производится введением новых условий, не имевшихся в виду в первоначальной постановке вопроса. Так, например, в примере 21 ничего не говорится и не подразумевается относительно результата первого тиража; это неопровержимо доказывается первым способом решения, который мы привели непосредственно после формулировки. Между тем, каждая из отдельных вероятностей, вычисленных при втором способе решения, была получена рассмотрением одного из таких „новых" событий. Если мы обозначим через A результат первого тиража, а через B — появление двузначного четного числа, то символически наш способ расчета запишется так:

$$P(B) = \sum_{A} P(A)\ P_A(B). \tag{21}$$

Эта символическая запись в частности особенно наглядно показывает, что события A, подобно диференциалам при вычислении интеграла, играют в известной мере роль „катализаторов", введенных с целью сделать расчет возможным, хотя и не находящих себе места в окончательном результате. Следует также отметить, что, хотя все $P_A(B)$ в правой части равенства — условные вероятности, вероятность $P(B)$, для вычисления которой они служат, не имеет условного характера[1]).

Что касается области суммирования, то она всегда должна охватывать полную группу событий A; однако если некоторые из вероятностей $P_A(B)$ обращаются в нуль, то, разумеется, соответствующие им события A без ошибки могут быть опущены. Так, если бы в условиях примера 21 мы искали вероятность „числа, меньшего чем 30", то комбинации, начинающиеся с цифр 3, 4 и 5, можно было бы опустить; но можно было бы с таким же успехом и включить их, так как соответствующие им условные вероятности обращаются в нуль.

Наконец, приведем один частный случай, заслуживающий по своему значению специального упоминания; это — тот случай, когда „новая" группа состоит из некоторого события A и ему противоположного $\bar{A}$. Тогда формула получает вид:

$$P(B) = P(A)\ P_A(B) + P(\bar{A})\ P_{\bar{A}}(B).$$

Так, в примере 21 первое число должно быть либо *четным* (A), либо *нечетным* ($\bar{A}$), причем соответствующие вероятности равны

$$P(A) = \frac{2}{5},$$

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{5}.$$

[1]) Т. е. безусловна по отношению к событиям A. Может случиться, что весь процесс предпринят для отыскания вероятности, которая является условной по отношению к другим событиям, не входящим в наши рассуждения.

Так как соответствующие им условные вероятности равны

$$P_A(B)=\frac{1}{4},$$

$$P_{\bar{A}}(B)=\frac{2}{4},$$

то искомая вероятность равна

$$P(B)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{2}{5},$$

в согласии с ранее полученным результатом.

Пример 22. Если те две группы карт, о которых идет речь в примере 20, содержат каждая по шесть красных и две черных карты, то какова вероятность, что в первой паре цвета совпадут и что общее число совпадений составит 75%?

Для того чтобы требуемое положение вещей осуществилось, необходимо, чтобы первые карты были либо красные в обеих группах, либо черные в обеих группах. Но вероятность того, что первая карта группы I будет красная, равна $\frac{3}{4}$; и такова же аналогичная вероятность для группы II. Следовательно, вероятность того, что обе первые карты будут красными, составляет $\frac{9}{16}$. С другой стороны, вероятность того, что первая карта окажется черной, равна $\frac{1}{4}$ для каждой группы в отдельности, и значит, вероятность того, что обе первых карты окажутся черными, равна $\frac{1}{16}$.

Эти два события, очевидно, несовместимы, и в этом отношении удовлетворяют условиям, которые мы выше установили для совокупности „событий A“ в формуле (21). Они не образуют собою полной группы, потому что первые карты могут иметь и разные цвета; однако условная вероятность события B (т. е. того, что в первой паре цвета совпадают и общее количество совпадений составляет 75%) в этом случае равна нулю. Поэтому нет надобности знать вероятности этих остающихся возможностей.

Что касается условных вероятностей 75%-ного совпадения в двух нетривиальных случаях—т. е. величин $P_A(B)$ формулы (21), —то они, как легко вычислить, соответственно равны $\frac{10}{21}$ и $\frac{6}{7}$. Следовательно, ответ задачи гласит:

$$\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{10}{21}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{9}{28}\right).$$

Пример 23. В условиях примера 22 найти вероятность того, что первая пара будет разноцветной и что общее количество совпадений составит 75%.

Вероятность того, что первая карта группы I окажется красной, равна $\frac{3}{4}$; если это осуществилось, то вероятность того, что первая карта группы II окажется черной, равна $\frac{1}{4}$. Комбинация этих двух событий составляет собою один из двух случаев разноцветности первой пары; вероятность этой комбинации, очевидно, равна $\frac{3}{16}$. Вероятность второй (противоположной) комбинации, очевидно, также составляет $\frac{3}{16}$. Это — безусловные вероятности.

Что касается условных вероятностей, то первая из них, очевидно, дается решением примера 13[1]). Она равна $\frac{2}{7}$. Вторая, как легко убедиться, также равна $\frac{2}{7}$. Подставляя эти значения в формулу (21), мы находим:

$$\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{16}\right)\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{28}.$$

§ 23. Примеры; задача психического испытания. Между вероятностями, которые нами были вычислены в задаче психического испытания, существуют интересные взаимоотношения. Прежде всего, останавливаясь на случае, когда имеется четыре красных и четыре черных карты, заметим, что между четырьмя красными „местами“ стандартного порядка нет никаких существенных различий, в силу которых попадание черной карты на одно из этих мест было бы более вероятным, чем на любое другое. Поэтому безусловная вероятность того, что, называя красную карту, ясновидящий ошибется, будет одинакова для всех четырех раз, когда он это делает. Далее, так как карта, выпадающая при этом фактически, может с одинаковой вероятностью оказаться как черной, так и красной, то каждая из этих вероятностей равна $\frac{1}{2}$. Все это самоочевидно.

Далее между первым и последующими появлениями красного цвета в стандартном порядке нет никаких различий, которые позволяли бы утверждать, что ошибка медиума в одном из них сообщает окончательному результату „75 % совпадений“ большую вероятность, чем ошибка в каком-либо другом. Другими словами, если мы случайно замечаем,

[1]) В самом деле, с математической точки зрения нет никакого различия между „стандартным“ порядом, в котором цвета провозглашаются медиумом, и тем порядком, в котором они ложатся при разложении группы I примера 20. Однако психологические различия имеются. Ибо если я только не заблуждаюсь, то медиум, который знает, что он шесть карт должен назвать красными и только две — черными, почти наверняка назовет первую карту красной; поэтому мы не вправе утверждать, что все восемь *слов*, которые он должен произнести, имеют равные шансы оказаться на первом месте, в то время как, очевидно, все восемь *карт* группы I имеют одинаковую вероятность попасть на первое место.

что медиум назвал черную карту красной, то независимо от того, происходит ли это при первом или каком-либо другом провозглашении красной карты, вероятность получения 75% совпадений становится равной $\frac{4}{35}$, как было показано в примере 11.

Но если мы вообще хотим иметь 75% совпадений в конечном итоге, то одно какое-либо из красных „мест" стандартного порядка обязательно должно быть заполнено черной картой. Так как четыре сложных события („первое красное место занято черной картой и 75% совпадений в итоге", „второе красное место занято черной картой и 75% совпадений в итоге", и т. д.)- взаимно исключают друг друга, то безусловная вероятность 75% совпадений равна сумме вероятностей четырех сложных событий, каждая из которых составляет $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{35}\right)$. Это дает $\frac{8}{35}$, что, разумеется, совпадает с результатом, полученным в примере 10.

Тем же самым рассуждением может быть получен еще и другой результат: требование, чтобы первая карта была названа *верно* и чтобы получилось 75% совпадений, равносильно требованию о том, чтобы либо вторая, либо третья, либо четвертая черная карта была названа *неверно*, причем остальные в каждом случае должны быть угаданы верно. Но вероятность каждой из этих альтернатив равна $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{35}\right)=\frac{2}{35}$. Значит, вероятность того, что первая карта названа верно, и что в общей сложности имеется 75% совпадений, равна $\frac{2}{35}+\frac{2}{35}+\frac{2}{35}=\frac{6}{35}$,— результат, который был уже получен выше.

Другой результат легко получить из формулы (20), если понимать под „событием A" тот факт, что первая карта названа правильно, а под „событием B" — 75% совпадений в итоге. Тогда формула (20) показывает, что вероятность двойного факта „первая карта названа правильно, и общее число совпадений составляет 75%" является произведением безусловной вероятности того, что первая карта будет угадана, равной $\frac{1}{2}$, на условную вероятность $P_A(B)$ того, что при этом получится 75% совпадений. Приравнивая величину $\frac{1}{2}\cdot P_A(B)$ только что полученному результату, мы находим $P_A(B)=\frac{12}{35}$, что мы уже знаем из примера 12.

Между полученными нами результатами можно было бы установить еще целый ряд подобных соотношений. Однако и тех, которые читатель уже видел, достаточно, чтобы показать, в какой мере установленные нами в последних параграфах теоремы могут упростить решение задач подобного рода.

§ 24. Примеры; обобщение задачи психического испытания. После того как задача психического испытания, описанного в примере 10, была нами так широко использована для самых различных целей, было бы странно расстаться с нею, не попытавшись решить задачи более общей, содержащей все рассмотренные до сих пор в качестве частных случаев. Поэтому поставим теперь следующую задачу:

Пример 24. Имеются две группы предметов, причем каждая содержит m предметов первого типа и n предметов второго типа. Эти группы приводятся во взаимно-однозначное соответствие посредством метода, не зависящего от признаков, отличающих оба типа друг от друга. Какова вероятность того, что мы получим при этом ровно r таких пар, в которых предметы будут разных типов?

В нашей прежней терминологии это можно выразить так:

Пример 25. Если в условиях примера 10 имеется m красных и n черных карт; то какова вероятность того, что ровно r карт каждого цвета будут названы неверно?

Самый простой способ решения этой задачи состоит в непосредственном применении определения вероятности — именно так мы решили пример 10. Порядок, в котором карты называются „ясновидящим", мы условились называть стандартным порядком; порядок же, в котором карты появляются фактически, будет одною из возможных $P_{m,n}^{m,n}$ перестановок из m красных и n черных карт. Эти перестановки образуют полную группу равновероятных и попарно несовместимых событий. Некоторые из этих перестановок отличаются от стандартного порядка в точности в p черных и p красных картах и образуют собою подгруппу, благоприятствующую условиям задачи. Другими словами, это можно выразить так: те m мест, которые в стандартном порядке заняты красными картами, должны теперь быть заполнены одной из возможных перестановок, содержащих p черных и $m-p$ красных карт; и аналогично, „черные" места стандартного порядка должны быть заполнены перестановкой из p красных и $n-p$ черных. Каждый возможный способ заполнения красных „мест" может быть ассоциирован с каждым возможным способом заполнения черных. Поэтому общее число событий в подгруппе равно

$$P_{m-p,\,p}^{m-p,\,p}\cdot P_{n-p,\,p}^{n-p,\,p},$$

вследствие чего искомая вороятность получает выражение:

$$P(p)=\frac{P_{m-p,\,p}^{m-p,\,p}\cdot P_{n-p,\,p}^{n-p,\,p}}{P_{m,\,n}^{m,\,n}}=\left(\frac{m!\,n!}{p!}\right)^2\frac{1}{(m-p)!\,(n-p)!\,(m+n)!}.$$

Это можно записать также в виде:

$$P(p)=\frac{C_p^m\,C_p^n}{C_m^{m+n}}, \tag{22}$$

допускающем и непосредственное обоснование.

Из формулы (22) может быть получено одно из многих изящных соотношений между биномиальными коэфициентами. В испытании описанного типа мы должны иметь одинаковое число неверно названных карт того и другого цвета; это число может равняться 0, 1, 2 и т. д., вплоть до наименьшего из чисел m, n; таким образом сумма

$$\sum_{p=0}^{m \text{ или } n} P(p)$$

должна равняться единице, т. е.

$$\sum_{p=0}^{m \text{ или } n} \frac{C_p^m C_p^n}{C_n^{m+n}} = 1.$$

В этом равенстве налево стоит сумма нескольких дробей, направо — целое число 1. Равенство не нарушится, если мы помножим обе части на C_n^{m+n}, что дает:

$$\sum_{p=0}^{m \text{ или } n} C_p^m C_p^n = C_n^{m+n}.$$

Это соотношение показывает, что если мы выберем в приложении III два любых столбца и будем перемножать попарно их соответственные числа вплоть до исчерпания одного из столбцов, то сумма всех полученных таким образом произведений в свою очередь будет биномиальным коэфициентом. Более того, этот коэфициент должен стоять в том столбце таблицы, номер которого равен сумме номеров взятых столбцов, и в строке, номер которой совпадает с номером одного (любого) из этих столбцов.

Так, например, если мы возьмем столбцы с номерами 3 и 8, то мы получим схему:

3	8	Произведение
1	1	1
3	8	24
3	28	84
1	56	56
		Сумма = 165

Так как сумма номеров столбцов составляет $3+8=11$, то формула (22) показывает, что полученное число 165 равно C_3^{11} и C_8^{11}, что и подтверждают таблицы.

При формулировке закона мы на месте верхнего предела суммирования писали m или n, разумея под этим меньшее из этих двух чисел. Допустим, что этим меньшим числом является m. Тогда $C_p^m = 0$, коль скоро $p > m$. Таким образом, если мы распространим суммирование дальше меньшего из чисел m и n, то фактически мы присоединим к нашей сумме только несколько нулей, что, разумеется, никак на ней не отразится. Другими словами, в качестве верхнего предела суммирования мы можем взять любое число, лишь бы оно было не меньше, чем меньшее из чисел m и n. В частности, имеют место формулы:

$$\sum_{p=0}^{m} C_p^m C_p^n = C_n^{m+n},$$

$$\sum_{p=0}^{n} C_p^m C_p^n = C_n^{m+n},$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p^m C_p^n = C_n^{m+n}.$$

По поводу одного шага в процессе вывода этой формулы следует сделать небольшое замечание. Перенос числа C_n^{m+n} из левой части в правую был произведен посредством умножения обеих частей равенства на это число. При этом мы подчеркивали, что каждый отдельный член левой части должен быть помножен на *одно и то же* число, иначе результат был бы неверным. В символическом обозначении из этого следует, что общий член

$$\frac{C_p^m C_p^n}{C_n^{m+n}}$$

можно множить на любое число, не зависящее от p, т. е. не изменяющееся от члена к члену. Множитель, стоящий в знаменателе, не содержит p и поэтому может быть вынесен за знак суммирования. Но если бы общий член, например, имел вид:

$$\frac{C_p^m C_p^n}{C_p^{m+n}},$$

то было бы совершенно невозможно, помножив все члены суммы на C_p^{m+n}, притти к выводу:

$$\sum_{p=0}^{m \text{ или } n} C_p^m C_p^n = C_p^{m+n}.$$

В самом деле, это уравнение не только неверно, но даже не имеет никакого смысла, в чем учащийся легко убедится сам, подставляя вместо букв числовые значения. Дело в том, что правая часть этого равенства содержит p, в то время как левая зависит только от m и n.

§ 25. Примеры; задача о независимых испытаниях. Весьма важным классом сложных событий являются те, в которых вероятность наступления одного из составляющих событий совершенно не зависит от того, наступили или не наступили другие события; иными словами, каждое из составляющих событий независимо от всех остальных. Задачи с игральными костями и им подобные именно потому представляют такой интерес для теории вероятностей, что являются типичными для этого рода проблем. Вот простой пример:

Пример 26. Какова вероятность того, что при шести бросаниях игральной кости шестерка выпадет ровно один раз?

Эта задача может быть решена с помощью теории альтернативных сложных событий. Возможные благоприятные случаи исчерпываются схемой:

$$+-----,\quad -+----,\quad --+---,\quad ---+--,$$
$$----+-,\quad -----+.$$

Остановим наше внимание на первом случае; вероятность выпадения шестерки при первом бросании равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что ни при одном из последующих пяти бросаний шестерка не выпадет, составляет $\left(\frac{5}{6}\right)^5$, так как все эти события взаимно независимы. Таким образом вероятность первого сложного события равна $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5$.

Во втором случае ответ получается в виде: $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4$, что только порядком сомножителей отличается от первого ответа.

Подобным же образом мы убедимся, что и вероятность каждого из остальных случаев имеет то же значение. Так как эти случаи, очевидно, исключают друг друга, то вероятность наступления какого-нибудь одного из них, — а это и есть та вероятность, которую мы ищем, — равна

$$6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5=\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Разберемся, чему нас учит эта задача. Так как бросания кости взаимно независимы, то вероятность выпадения одной шестерки и пяти „не шестерок“ в каком-либо определенном, заранее предписанном порядке равна $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5$, независимо от того, какой выбран порядок. Следовательно, нам приходится сложить между собою столько таких равных между собою чисел, сколько может существовать таких различных порядков. Но это число различных расположений, очевидно, равно числу перестановок из шести предметов, среди которых имеется пять одинаковых[1]) и один от них отличный, т. е. равно $P_{5,1}^{5,1}$.

В общем случае, если надо найти вероятность выпадения в точности n шестерок при m бросаниях, то различных возможных расположений результатов существует столько, сколько перестановок можно составить из n предметов одного типа и $m-n$ предметов другого, т. е. $\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$. Это численно равно C_n^m, и следовательно, решение общей задачи дается суммою из C_n^m членов, каждый из которых дает вероятность выпадения n шестерок и $m-n$ „не шестерок“ в некотором опре-

---

[1]) Т. е. „не шестерок“. Их различия в данном случае несущественны.

деленном порядке. Вследствие взаимной независимости испытаний каждый из этих членов является произведением n множителей, равных $\frac{1}{6}$, и $m-n$ множителей, равных $\frac{5}{6}$, т. е. равен $\left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n}$. Поэтому результат будет:

$$C_n^m \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n}.$$

Теперь уже нетрудно обобщить полученную формулу и высказать следующую общую теорему:

Если вероятность некоторого события в каждом отдельном испытании равна p, то вероятность того, что при m взаимно независимых испытаниях это событие наступит ровно n раз, дается формулой:

$$P_m(n) = C_n^m p^n (1-p)^{m-n}. \tag{23}$$

Это — одна из основных теорем теории вероятностей. Позднее мы еще к ней вернемся.

§ 26. Примеры; обобщение задачи о независимых испытаниях. В качестве следствия из этой теоремы мы можем вывести другую, которая часто оказывается полезной. Мы будем в дальнейшем вести изложение в терминах задачи об игральной кости, но будем обозначать число выпадений шестерки через n_6 вместо прежнего n; заметим, что $m-n_6$ „не шестерок" состоят частично из пятерок, частично из других чисел. Вероятность того, что среди них найдется ровно n_5 пятерок, равна

$$C_{n_5}^{m-n_6} \left(\frac{1}{5}\right)^{n_5} \left(\frac{4}{5}\right)^{m-n_6-n_5},$$

так как $m-n_6$ испытаний, о которых идет речь, независимы между собою, и вероятность появления пятерки равна $\frac{1}{5}$, если известно, что появилась не шестерка. Необходимо учитывать, что вычисленная таким путем вероятность представляет собою условную вероятность появления n_5 пятерок при m бросаниях, *вычисленную в предположении, что число появившихся шестерок равно n_6*. Отсюда мы заключаем, что вероятность получить ровно n_6 шестерок и n_5 пятерок равна произведению этого выражения на безусловную вероятность выпадения n_6 шестерок.

Если мы сделаем еще один аналогичный шаг, то найдем, что вероятность получить при m бросаниях ровно n_4 четверок, в предположении, что выпало n_6 шестерок и n_5 пятерок, выражается формулой:

$$C_{n_4}^{n-n_6-n_5} \left(\frac{1}{4}\right)^{n_4} \left(\frac{3}{4}\right)^{m-n_6-n_5-n_4};$$

перемножая это выражение с двумя найденными выше, мы получим вероятность того, что при m бросаниях выпадут ровно n_6 шестерок, n_5 пятерок и n_4 четверок.

Продолжая шаг за шагом этот процесс, мы можем получить вероятность того, что при m бросаниях выпадут ровно n_6 шестерок, n_5 пятерок, n_4 четверок, ..., n_1 единиц. После простых сокращений мы получим:

$$P_m(n_6, n_5, n_4, \ldots, n_1) = P_{n_6 n_5 \ldots n_1}^{n_6 n_5 \ldots n_1} \left(\frac{1}{6}\right)^{n_6} \left(\frac{1}{6}\right)^{n_5} \ldots \left(\frac{1}{6}\right)^{n_1},$$

где, конечно, предполагается, что $n_6 + n_5 + \ldots + n_1 = m$.

Из этой формулы легко извлечь общую теорему, хотя то обстоятельство, что все шесть граней кости имеют одинаковые вероятности, несколько мешает нам угадать формулировку этой теоремы. Отчасти по этой причине, отчасти же вследствие того, что другое доказательство представляет самостоятельный интерес, мы наметим здесь доказательство, основанное на иного рода соображениях.

Если мы имеем полную группу исключающих друг друга событий, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_s$, и если производится m независимых испытаний, то вероятность того, что первое событие наступит ровно n_1 раз, второе — n_2 раз и т. д., *в некотором определенном порядке*, равна

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s},$$

каков бы ни был выбранный порядок. Следовательно, для того чтобы найти вероятность n_1-кратного наступления первого события, n_2-кратного — второго и т. д. *в любом порядке*, надо помножить выписанное нами число на число возможных перестановок. Это непосредственно приводит нас к следующей теореме:

Если события, отмечаемые значками 1, 2, ..., s, *исключают друг друга и образуют полную группу и если вероятности их появления в отдельном испытании соответственно равны* $p_1, p_2, \ldots, p_s$, *то вероятность того, что числа их появления будут соответственно* $n_1, n_2, \ldots, n_s$ *при* $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ *независимых испытаниях равна*:

$$P_m(n_1, n_2, \ldots, n_s) = P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{n_1, n_2, \ldots, n_s} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}. \tag{24}$$

В случае двух событий эта формула приводится к формуле (23); в случае же шести равновероятных событий она приводится к тому результату, который мы получили для игральной кости.

§ 27. Примеры; типичная урновая задача. При рассмотрении последней задачи мы неоднократно подчеркивали важность факта взаимной независимости испытаний. Следующий пример покажет нам, что несоблюдение этого условия существенным образом отражается на результате.

Пример 27. В урне находятся пять красных и десять черных шаров. Восемь из них вынуты и переложены в другую урну. Какова вероятность того, что в последней окажется два красных и шесть черных шаров?

Этот пример очень напоминает предыдущий; его можно формулировать так: какова вероятность вынуть ровно два красных шара при восьми испытаниях? Однако этот пример отличается от предыдущего тем, что здесь испытания не обладают взаимной независимостью; так, например, вероятность появления красного шара при первом тираже равна $\frac{5}{15}$. Вероятность же появления красного шара при втором тираже будет $\frac{4}{14}$ или $\frac{5}{14}$, смотря по тому, появился или нет красный шар при первом испытании.

Однако решение задачи найти нетрудно. Для появления требуемых двух красных и шести черных шаров существует всего $P_{6,2}^{6,2}=C_2^8$ различных порядков. Вероятность появления шаров в каком-либо определенном из этих порядков должна быть нами найдена в первую очередь; сумма всех таких вероятностей и даст нам ответ поставленной задачи. На первый взгляд это требует вычисления $C_2^8=28$ различных слагаемых, что, конечно, было бы весьма утомительно. К счастью, однако, рассмотрев два-три слагаемых, мы быстро подметим общий закон их составления, что даст нам возможность легко найти полное решение задачи.

Из возможных 28 порядков отметим три следующих:

к к ч ч ч ч ч ч,
ч ч ч ч ч ч к к,
ч ч к ч к ч ч ч

Рассмотрим первый из них. Вероятность того, что при первом тираже появится красный шар, равна $\frac{5}{15}$. Если это случится, то вероятность появления красного шара при следующем тираже равна $\frac{4}{14}$. В случае, если состоятся оба описанных события, вероятности появления черных шаров при следующих тиражах будут соответственно равны[1]) $\frac{10}{13}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{9}$ и $\frac{5}{8}$. Поэтому вероятность того, что наступят все эти события, будет равна

$$\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}.$$

Для второго из вышеуказанных порядков соответствующая вероятность принимает вид:

$$\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8},$$

[1]) Все это — условные вероятности; они не равны между собою, как в случае независимых испытаний.

а для третьего:

$$\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}.$$

И вот, замечательно, что хотя в этих трех выражениях отдельные дроби соответственно различны, тем не менее произведение этих дробей во всех трех случаях одно и то же. В действительности это будет иметь место для всех членов без исключения. После каждого тиража, независимо от того, какой цвет имел вынутый шар, число оставшихся в урне шаров уменьшается на единицу, вследствие чего на единицу же уменьшается и знаменатель следующей условной вероятности. Это показывает, что вне зависимости от чередования цветов ряд знаменателей наших дробей будет всегда один и тот же. Подобным же образом, после появления красного шара числитель следующей условной вероятности для красного шара уменьшается на единицу, числитель же условной вероятности для ближайшего черного шара остается без изменений. Таким образом красным шарам соответствуют две дроби с числителями 5 и 4, в то время как черным шарам соответствуют шесть дробей с числителями 10, 9, 8, 7, 6 и 5. Так как любая перестановка этих множителей не отражается на их произведении, то любой порядок появления двух красных и шести черных шаров имеет ту же вероятность, что и любой другой. Поэтому искомая вероятность равна

$$C_2^8\,\frac{5!\,10!\,7!}{3!\,4!\,15!}=\frac{140}{429}.$$

Этот же результат может быть получен еще другим путем. Допустим, что наши шары снабжены какими-нибудь отметками, имеющими целью отличать их друг от друга. Для восьми последовательных тиражей имеется всего P_8^{15} возможных результатов, очевидно, равновероятных между собою [1]). Для того чтобы применить к решению нашей задачи основное определение понятия вероятности, мы должны еще только найти, сколько из этих результатов будут содержать два красных и шесть черных шаров. Чтобы это сделать, заметим, что два красных шара из данной группы можно выбрать C_2^5 различными способами, а шесть черных — C_6^{10} различными способами. Это дает всего $C_2^5\cdot C_6^{10}$ различных сочетаний отмеченных шаров, удовлетворяющих условиям задачи. Каждое из этих сочетаний допускает еще P_8^8 перестановок входящих в него событий. Таким образом общее число перестановок, удовлетворяющих условиям

[1]) Кроме непосредственной очевидности, здесь можно сослаться и на такое соображение: для каждого *определенного* порядка чередования шаров вероятность равна

$$\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{14}\cdots\frac{1}{8},$$

каков бы ни был этот порядок.

задачи, равно $C_2^5 C_6^{10} P_8^8$, и следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{C_2^5 C_6^{10} P_8^8}{P_8^{15}},$$

что легко может быть приведено к ранее найденному виду.

Как и в предыдущем параграфе, найденное решение может быть обобщено и формулировано в виде общей теоремы. Допустим, что наша задача гласит:

В урне находятся m красных и n черных шаров. Если мы последовательно вынимаем $p+q$ шаров и кладем их в другую урну, то какова вероятность того, что в последней окажется ровно p красных и q черных шаров?

Если бы шары были снабжены отличающими их друг от друга пометками, то мы имели бы всего P_{p+q}^{m+n} равновероятных перестановок. При каждом испытании осуществляется какая-нибудь одна из этих перестановок. Подобным же образом мы будем иметь всего $C_p^m C_q^n$ сочетаний по p красных и q черных шаров, причем каждое из них допускает еще P_{p+q}^{p+q} перестановок. Поэтому общее число перестановок, удовлетворяющих условиям задачи, равно $C_p^m C_q^n P_{p+q}^{p+q}$. Деля его на общее число возможных перестановок, мы получаем искомую вероятность:

$$P_{m,n}(p, q) = \frac{C_p^m C_q^n P_{p+q}^{p+q}}{P_{p+q}^{m+n}} = \frac{C_p^m C_q^n}{C_{p+q}^{m+n}}.$$

Полученную теорему можно формулировать так:

Если мы имеем группу, содержащую m предметов одного типа и n — другого, и если мы последовательно вынимаем из нашей группы по одному предмету, причем тираж ни в какой мере не обусловливается принадлежностью предмета к тому или другому типу, то вероятность того, что при первых $p+q$ тираж появится p предметов первого и q — второго типа, равна

$$P_{m,n}(p, q) = \frac{C_p^m C_q^n}{C_{p+q}^{m+n}}. \tag{25}$$

Из этой формулы можно получить полезное соотношение между биномиальными коэфициентами посредством рассуждения, аналогичного проведенному в § 24. Обозначим через r общее число производимых тиражей, так что $p+q=r$. Среди r вынутых предметов мы должны иметь: либо ни одного предмета первого типа и r предметов второго; либо один предмет первого и $r-1$ второго; либо какой-нибудь иной из возможных результатов. Это непосредственно приводит к соотношению:

$$\sum_{p=0}^{r} P_{m,n}p, (r-p) = 1,$$

или, подставляя в эту формулу выражение (25) и замечая, что знаменатель у всех членов суммы один и тот же,

$$\sum_{p=0}^{r} C_p^m C_{r-p}^n = C_r^{m+n}. \tag{26}$$

В дальнейшем мы встретимся с применением этой формулы.

§ 28. Примеры; другая типичная урновая задача. Мы теперь следующим образом видоизменим условия последней задачи:

Пример 28. В урне находится пять красных и десять черных шаров. Восемь раз подряд вынимается шар, но каждый раз он кладется обратно перед следующим тиражом. Какова вероятность того, что при этом два раза появится красный шар и шесть раз — черный?

Так как шары возвращаются обратно, то состав урны перед каждым из последующих тиражей тот же, как перед первым тиражом, и потому вероятность появления черного (или красного) шара — одна и та же во всех тиражах. Другими словами, тиражи совершенно независимы друг от друга. Поэтому к данному случаю можно применить теорему § 24.

Вероятность появления красного шара равна $\frac{1}{3}$, а вероятность появления черного — $\frac{2}{3}$. Следовательно, вероятность появления ровно двух красных и шести черных шаров равна

$$C_2^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1792}{6561}.$$

Это число значительно меньше того, которое мы получили в случае невозвращаемых шаров. В десятичной форме ответ данной задачи гласит 0,273, а ответ предыдущей — 0,326.

§ 29. Примеры; задача о совпадении признаков. Мы приведем теперь более трудную задачу, требующую для своего решения повторного применения теории альтернативных сложных событий.

Пример 29. Из тщательно стасованной колоды вынуты m карт и положены в ряд, кверху сорочкой, в порядке появления. После этого взята новая колода, из которой подобным же образом вынимаются m карт и кладутся на первую вынутую группу. Таким образом получаются m пар карт. В каждой паре входящие в нее две карты могут быть либо одного, либо различных цветов. Какова вероятность того, что число одноцветных пар в точности равно n?

Этот пример имеет очевидное сходство с примерами 20 и 25, однако отличается от них одной весьма существенной особенностью, делающей его решение значительно труднее. В прежних задачах число красных и черных карт в обеих выложенных группах было одинаково и заранее известно, между тем как теперь мы не знаем, сколько черных и сколько красных карт будет вынуто из каждой колоды.

Сколько красных карт будет вынуто из первой колоды, — мы не знаем. Обозначим число их через r. Это число может принимать любое значение от 0 до m включительно.

Далее, обозначим через $P(r)$ вероятность того, что из первой колоды будет вынуто r красных карт, и через $P_r(n)$ — вероятность того, что в конечном итоге будет n одноцветных пар, если известно, что из первой колоды вынуто r красных карт. Очевидно, что, обозначая искомую вероятность через $P(n)$, мы будем иметь в силу формулы (21):

$$P(n)=\sum_{r=0}^{m} P(r)\,P_r(n). \tag{27}$$

Но ясно, что $P(r)$ можно вычислить по формуле (25), где вместо p и q надо соответственно подставить r и $m-r$, а m и n заменить одним и тем же числом 26. Таким образом

$$P(r)=\frac{C_r^{26}\,C_{m-r}^{26}}{C_m^{52}}. \tag{28}$$

Следовательно, для вычисления $P(n)$ нам остается найти величины $P_r(n)$. К этому мы и переходим.

Если в итоге опыта получается ровно n одноцветных пар, то либо имеется n красных пар и ни одной чёрной, либо $n-1$ красных и одна черная, либо мы имеем какую-нибудь другую комбинацию чисел, в сумме дающих n. Обозначая через $P_r(k, n-k)$ вероятность получения k красных и $n-k$ черных пар при условии, что нижний ряд содержит r красных карт, мы будем иметь:

$$P_r(n)=P_r(0, n)+P_r(1, n-1)+\ldots=\sum_{k=0}^{n} P_r(k, n-k). \tag{29}$$

Таким образом все приводится к вычислению величин $P_r(k, n-k)$, что может быть сделано методом § 22.

Мы не знаем порядка, в котором расположены карты нижнего ряда; тем не менее мы назовем его „стандартным порядком“. С другой стороны, верхний ряд представляет собою некоторую состоящую из m карт перестановку, выбранную из всех пятидесяти двух карт колоды. Если учитывать индивидуальность каждой карты, то число таких перестановок равно $P_m^{52}=\frac{52!}{(52-m)!}$. Эти перестановки равновероятны, исключают друг друга и образуют полную группу. Поэтому для отыскания $P_r(k, n-k)$ достаточно найти подгруппу тех перестановок, которые, будучи наложены на стандартный порядок, дают k красных и $n-k$ черных пар. С этою целью проще всего определить число возможных *сочетаний*, а затем учесть, сколько перестановок допускает каждое отдельное сочетание. Произведение этих чисел и даст искомое число *перестановок*.

Те k красных карт второй колоды, которые должны лечь на красные карты стандартного порядка, могут быть выбраны C_k^{26} различными способами, если не обращать внимания на порядок. С любой такой комбинацией можно сочетать любую из C_{n-k}^{26} комбинаций по $r-k$

черных карт, ложащихся на красные карты стандартного порядка. Затем из оставшихся $26-r+k$ черных карт те $n-k$, которые ложатся на черные карты стандартного порядка, могут быть выбраны C_{n-k}^{26-r+k} различными способами. И наконец, те $(m-r)-(n-k)$ красных карт, которые должны лечь на черные, могут быть выбраны из оставшихся $26-k$ красных карт $C_{(m-r)-(n-k)}^{26-k}$ различными способами. Таким образом полное число *сочетаний*, которые могут осуществиться в верхнем ряду, составляет:

$$C_k^{26}\, C_{r-k}^{26}\, C_{n-k}^{26-r+k}\, C_{(m-r)-(n-k)}^{26-k}.$$

Карты, которые легли на красные „места" стандартного порядка, можно как угодно переставить между собой, не меняя этим числа одноцветных пар. То же самое относится, разумеется, и к картам, занимающим черные „места". Число перестановок в первом случае составляет $P_r^r = r!$, а во втором $P_{m-r}^{m-r} = (m-r)!$ Умножая вышенаписанное произведение на эти два факториала, мы и получим, очевидно, число всех перестановок исследуемой нами подгруппы.

Следовательно, *вероятность получить в итоге k красных и $n-k$ черных пар, вычисленная в предположении, что стандартный порядок содержит r красных и $m-r$ черных карт, составляет*[1]:

$$P_r(k, n-k) = \frac{C_k^{26}\, C_{r-k}^{26}\, C_{n-k}^{26-r+k}\, C_{(m-r)-(n-k)}^{26-k}\, P_r^r\, P_{m-r}^{m-r}}{P_m^{52}}. \qquad (30)$$

Теперь остается только сопоставить полученные результаты. Заметим прежде всего, что

$$\frac{P_r^r\, P_{m-r}^{m-r}}{P_m^{52}} = \frac{1}{C_r^m\, C_m^{52}}.$$

Подставляя это в формулу (30) и затем в формулу (29), мы получаем:

$$P_r(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^{26}\, C_{r-k}^{26}\, C_{n-k}^{26-r+k}\, C_{m+k-n-r}^{26-k}}{C_r^m\, C_m^{52}}. \qquad (31)$$

---

[1]) Эта формула выведена нами без какого бы то ни было учета тех границ, между которыми должны заключаться числа k и $r-k$. Очевидно, такие границы существуют: число красных пар, например, не может быть отрицательным; точно так же число черных пар не может быть отрицательным, т. е. мы должны иметь $n-k \geqslant 0$ или $k \leqslant n$. С другой стороны, число красных пар не может быть больше числа красных карт стандартного порядка, т. е. мы должны иметь $k \leqslant r$, и аналогично для черных $n-k \leqslant m-r$. В случае нарушения хотя бы одного из этих условий величина $P_r(k, n-k)$ должна обращаться в нуль.

Мы уже видели формулы подобного рода, автоматически обращающиеся в нуль при выходе за естественную область изменения переменных. Любопытно отметить, что формула (30) действительно дает нуль в случае нарушения одного из перечисленных условий. Так, если $k < 0$, то $C_k^{26} = 0$; при $k > r$ исчезает C_{r-k}^{26}, и т. д.

Так как знаменатель не зависит от k, то он может быть вынесен за знак суммирования, что дает:

$$P_r(n) = \frac{1}{C_r^m C_m^{52}} \sum_{k=0}^{n} C_k^{26} C_{r-k}^{26} C_{n-k}^{26-r+k} C_{m+k-n-r}^{26-k}. \tag{32}$$

Наконец, подставляя выражения (32) и (28) в формулу (27) и вынося за знак суммирования множители, не зависящие от r, мы находим:

$$P(n) = \frac{1}{(C_m^{52})^2} \sum_{r=0}^{m} \frac{C_r^{26} C_{m-r}^{26}}{C_r^m} \sum_{k=0}^{n} C_k^{26} C_{r-k}^{26} C_{n-k}^{26-r+k} C_{m+k-n-r}^{26-}. \tag{33}$$

Это и есть искомая вероятность.

§ 30. Пример на вычисление.

§ 30. Пример на вычисление. Формула (33) чрезвычайно сложна, даже при пользовании сокращенной символикой. Написать ее без этой символики было бы почти невозможно. Хотя взятый нами пример сам по себе не имеет большого значения и имеет целью просто иллюстрировать метод подхода к одному часто встречающемуся типу задач, тем не менее целесообразно проделать весь ход вычислений для каких-либо определенных числовых данных: этим мы во-первых, более наглядно покажем смысл введенных обозначений, а во-вторых, убедимся, что схема необходимых расчетов создается почти автоматически.

С этою целью рассмотрим следующий частный случай примера 29.

Пример 30. Если из каждой колоды, в условиях примера 29, взято по восемь карт, то какова вероятность получения четырех одноцветных пар?

Для этого частного случая, разумеется, мы получим решение, подставляя в формулу (33) значения $m = 8$ и $n = 4$. Тогда в формуле остаются две буквы — r и k. Согласно указанным пределам суммирования, r должно принимать все значения от 0 до 8, а k — все значения от 0 до 4. Для удобного расположения величин, зависящих от этих двух чисел, полезно заготовить таблицу, столбцы которой имели бы

Таблица III

Вычисление $C_k^{26} C_{r-k}^{26}$

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
0	1				
1	26	26			
2	325	676	325		
3	2 600	8 450	8 450	2 600	
4	14 950	67 600	105 625	67 600	14 950
5	65 780	388 700	845 000	845 000	388 700
6	230 230		4 858 750	6 760 000	4 858 750
7	657 800			38 870 000	38 870 000
8	1 562 275				223 502 500

номера 0, 1, 2, 3, 4 соответственно значениям числа k, а строки были бы занумерованы от нулевой до восьмой, соответственно значениям числа r. В действительности для реализации всех потребных вычислений нам потребуется несколько подобных таблиц.

Первая из них (табл. III) предназначена для вычисления произведений $C_k^{26}C_{r-k}^{26}$. При $k=0$ это произведение равно C_r^{26}; поэтому первый столбец табл. III может быть просто списан с соответствующего места приложения III, учитывая, разумеется, что $C_0^{26}=1$. Второй столбец получается перемножением постоянного множителя на переменные множители C_{r-1}^{26}. Но C_1^{26} является вторым числом первого столбца, в то время как переменные множители представляют собою последовательные числа этого же столбца, смещенные только на одно место вследствие того, что индексом теперь служит $r-1$ вместо r. Это означает, что каждое число первого столбца надо помножить на 26 и результат поместить не против данного числа, а одною строкою ниже.

Подобным же образом мы получаем третий столбец, помножая все числа первого столбца на 325 и помещая результаты двумя строками ниже тех чисел первого столбца, из которых они получены. Остальные столбцы вычисляются аналогичным образом. В каждом столбце содержится всего пять строк, потому что этого требуют пределы, в которых может изменяться число k при каждом данном r.

Следующим шагом является вычисление C_{4-k}^{26-r+k}. Это проделано в табл. IV; здесь в сущности приходится просто заполнить таблицу, пользуясь данными приложения III.

Таблица IV

Вычисление C_{4-k}^{26-r+k}

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
0	14 950				
1	12 650	2 600			
2	10 626	2 300	325		
3	8 855	2 024	300	26	
4	7 315	1 771	276	25	1
5		1 540	253	24	1
6			231	23	1
7				22	1
8					1

Третьим шагом является вычисление C_{4+k-r}^{26-k}. Это опять-таки можно произвести, просто выписывая данные из приложения III. Результаты собраны в табл. V. Необходимо отметить, что числа, пропущенные здесь внизу столбцов (так же как пропущенные вверху столбцов в табл. III), все — нули. Поэтому бесполезно вычислять те множители, на которые придется помножать эти нули согласно формуле (33). Этим замечанием следует объяснить пустые места и в последующих таблицах.

Таблица V

Вычисление C_{4+k-r}^{26-k}

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
0	14 950				
1	2 600	12 650			
2	325	2 300	10 626		
3	26	300	2 024	8 855	
4	1	25	276	1 771	7 315
5		1	24	253	1 540
6			1	23	231
7				1	22
8					1

Теперь необходимо перемножить между собою соответственно расположенные числа построенных нами таблиц. Результаты собраны в табл. VI.

Таблица VI

Вычисление $C_k^{26} C_{r-k}^{26} C_{4-k}^{26-r+k} C_{4+k-r}^{26-k}$

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	Σ_k
0	2,235 02^{8}					2,235 03^{8}
1	8,551 40	8,551 40^{3}				1,710 28^{9}
2	1,122 37^{9}	3,576 04^{9}	1,122 37^{9}			5,820 78
3	5,985 98^{8}	5,130 84	5,130 84	5,985 98^{3}		1,145 88^{10}
4	1,093 59	2,992 99	8,046 09	2,992 99^{9}	1,093 59^{8}	1 425 08
5		5,9[illegible]5 98^{8}	5,130 84	5,130 84	5,985 98	1,14 89
6			1,122 37	-3,576 04	1,122 37^{9}	5,820 78^{9}
7				8,551 40^{3}	8,551 40^{8}	1,710 28
8					2,235 03	2,235 03^{8}

Теперь мы можем произвести суммирование этих чисел по k согласно указаниям формулы (33). Это означает, что мы должны сложить между собою все числа каждой из строк табл. VI; результаты этого действия даны в той же табл. VI, в последнем ее столбце.

На этой стадии вычисления исчезает индекс k; иначе говоря, числа, которые мы обозначили через Σ_k, зависят от одного только r Следовательно, остающаяся часть вычислений может быть расположена в одной таблице.

Первый столбец этой таблицы (табл. VII) содержит значения величины C_r^{26}. Следующий столбец содержит произведения $C_r^{26} C_{8-r}^{26}$, которые можно получить, помножая в предыдущем столбце первое число на последнее, второе на предпоследнее, и т. д. Очевидно, что этот столбец симметричен относительно своей середины. Поэтому достаточно выписать пять первых чисел.

Третий столбец содержит C_r^8. Теперь мы должны каждое Σ_k, данное в табл. VI, помножить на соответствующее число второго столбца табл. VII и разделить на соответствующее число третьего столбца этой таблицы. При пользовании современными счетными машинами обычно легче бывает проделать сразу обе операции, нежели выписывать промежуточный результат. В связи с этим, следующий столбец таблицы содержит прямо числа

$$\frac{C_r^{26} C_{8-r}^{26} \Sigma_k}{C_r^8}.$$

Так как числа Σ_k и C_r^8 тоже симметричны относительно середины столбца, то все эти вычисления проделаны только для пяти верхних строк.

Наконец, формула (33) требует сложения чисел этого последнего столбца для всех значений r от 0 до 8. Полученная таким путем сумма помещена внизу этого столбца. После этого $P(n)$ получается просто делением этой суммы Σ_r на квадрат величины C_8^{52}, которая заимствуется непосредственно из приложения III. Это и завершает решение задачи.

Таблица VII

Заключительное вычисление искомой вероятности

r	C_r^{26}	$C_r^{26} \cdot C_{8-r}^{26}$	C_r^8	$C_r^{26} \cdot C_{8-r}^{26} \cdot \frac{\Sigma_k}{C_r^8}$
0	1	$1{,}5623^{6}$	1	$3{,}4917^{14}$
1	26	$1{,}7103^{7}$	8	$3{,}6563^{15}$
2	325	$7{,}4825^{7}$	28	$1{,}5555^{16}$
3	2 600	$1{,}7103^{8}$	56	$3{,}49$[illegible]6^{16}
4	14 950	$2{,}2350^{8}$	70	$4{,}5501^{16}$
5	65 780			
6	230 230			
7	657 800			
8	1 562 275			

$$\Sigma_r = 1{,}5461^{17}$$
$$(C_8^{52})^2 = 5{,}6631^{17}$$
$$P(4) = 0{,}27302$$

§ 31. Примеры; третья урновая задача. Рассмотрим теперь урновую задачу несколько иного типа, нежели та, которую мы рассматривали выше.

Пример 31. В урне находится m черных и n белых шаров. Эти шары по одному вынимают из урны и откладывают в другой сосуд до тех пор, пока все оставшиеся шары не будут одинакового цвета. Найти вероятность того, что эти оставшиеся шары будут черными.

Допустим сначала, что мы изменили условия задачи в том смысле, что процесс продолжается до тех пор, пока в урне останется только один шар. Каждый такой процесс представляет собою одну возможную перестановку из m черных и n белых предметов, причем остающийся шар служит последним элементом этой перестановки. Число перестановок, в которых последний шар оказывается черным, очевидно, равно

$$P_{m-1,\,n}^{m-1,\,n},$$

и так как все эти перестановки равновероятны между собою, то вероятность того, что последний шар окажется черным, выразится формулой:

$$\frac{P_{m-1,\,n}^{m-1,\,n}}{P_{m,\,n}^{m,\,n}}=\frac{m}{m+n}.$$

Этот же самый результат мы получили бы, замечая, что любой из всех $m+n$ шаров имеет равные с любым другим шансы оказаться на последнем месте и что общее число всех черных шаров равно m.

Этот же результат является ответом нашей задачи и в ее первоначальной формулировке; это станет очевидным, если мы заметим, что, коль скоро последний по счету шар оказывается черным, то необходимо и вся группа, оставшаяся в тот момент, когда впервые все шары оказались одного цвета, была черной. Напротив, если бы последний по счету шар был белым, то и вся оставшаяся группа должна была бы быть белой.

§ 32. Примеры; четвертая урновая задача. Следующая задача — подобно предшествующей — не вызывает больших затруднений, если мы удачно выберем метод ее решения. В противном случае задача могла бы представить большие трудности.

Пример 32. В урне находится m белых шаров и n красных шаров, причем $m>n$. Эти шары один за другим вынимаются и складываюся в другой сосуд. Процесс продолжается до тех пор, пока все шары не окажутся переложенными во второй сосуд. Найти вероятность того, что в течение всего процесса во втором сосуде белых шаров будет больше, чем красных.

Очевидно, что в результате каждого тиража должна получиться одна из $P_{m,\,n}^{m,\,n}$ возможных перестановок из m белых и n красных шаров. Эти перестановки равновероятны между собою и образуют полную группу, необходимую для применения основного определения вероятности.

Найти число перестановок, удовлетворяющих тому условию, чтобы в течение всего процесса во втором сосуде белых шаров было больше, чем красных, — вот, очевидно, наша ближайшая задача. Это проще всего сделать, отыскивая число перестановок, не удовлетворяющих этому условию, и вычитая его затем из общего числа перестановок.

Каждая перестановка, не удовлетворяющая условиям задачи, должна принадлежать к одному из следующих двух классов: класс перестановок, у которых первый вынутый шар — красный, и класс тех, у которых он — белый. Эти два класса мы рассмотрим в отдельности.

Очевидно, всякая перестановка, начинающаяся с красного шара, тем самым уже нарушает условия задачи, потому что уже после первого тиража число красных шаров во втором сосуде превышает число белых. Число же таких перестановок, очевидно, просто равно числу способов, какими могут появляться остающиеся $n-1$ красных и m белых шаров, т. е. $P_{m,\, n-1}^{m,\, n-1}$.

Из перестановок, начинающихся с белого шара, некоторые удовлетворяют условиям задачи, а некоторые нет. Каждая из последних должна в некоторый момент процесса давать во втором сосуде число красных шаров большее, чем число белых, или равное ему. Но если в данный момент во втором сосуде красных шаров больше, чем белых, то в некоторый позднейший момент процесса эти числа должны сравняться, потому что в конечном итоге число m белых шаров обязательно превзойдет число n красных. Поэтому, находя число перестановок, которые в тот или иной момент дают во втором сосуде одинаковое число красных и белых шаров, мы тем самым находим число перестановок, нарушающих условия задачи.

Проще всего сделать это посредством искусственного приема. Рассматриваемые нами перестановки принадлежат к следующему общему типу:

б б к б к к |к б| б к| б б б

В моменты, отмеченные вертикальными черточками, число белых и красных шаров во втором сосуде одинаково. Это, как я ствует из приведенного примера, может случиться и более одного раза; но сколько бы раз это ни случилось, рано или поздно это случится в последний раз. Составим теперь новую, вспомогательную перестановку, которая, начиная с последнего момента равенства, в точности совпадает с нашей, но которая до этого момента имеет красные шары там, где были белые, и наоборот. В случае вышеприведенной схемы такая вспомогательная перестановка будет иметь вид:

к к б к б б |б к| к б| б б б

Это также возможная перестановка из m белых и n красных шаров. Она начинается с красного шара. Таким образом каждой перестановке, начинающейся с белого шара и нарушающей условие задачи посредством описанного процесса обращения, соответствует определенная перестановка, начинающаяся с красного шара. Изменяя в чем-либо первоначальную перестановку, мы обязательно получаем и другую обращенную. Отсюда непосредственно следует, что число перестановок, начинающихся с белого шара и не удовлетворяющих условиям задачи, не может быть больше, чем число перестановок, начинающихся с красного шара Запишем это символически так:

$$p_{\text{б}} \leqslant p_{\text{к}}.$$

Каждая перестановка, начинающаяся с красного шара, должна в какой-либо момент иметь одинаковое число красных и белых шаров потому что в конечном итоге белых должно оказаться больше, чем красных. Поэтому вышеописанный процесс обращения может быть проделан в противоположном направлении, что приводит нас к следующему заключению: каждой перестановке, начинающейся с красного шара соответствует некоторая другая перестановка, начинающаяся с белого шара и не отвечающая условиям нашей задачи. Это, разумеется, означает, что число перестановок, начинающихся с красного шара, не может превзойти числа перестановок, начинающихся с белого шара и не удовлетворяющих условиям нашей задачи; или, символически:

$$p_к \leqslant p_б.$$

Сопоставляя полученные нами два неравенства, мы убеждаемся, что $p_к = p_б$. Но $p_к$, как мы только что нашли, равно $P^{m,\, n-1}_{m,\, n-1}$; отсюда сразу вытекает, что общее число перестановок, не удовлетворяющих условиям нашей задачи, равно

$$2P^{m,\, n-1}_{m,\, n-1}.$$

Остальные перестановки образуют именно ту подгруппу, о которой идет речь в основном определении вероятности. Число их равно

$$P^{m,\, n}_{m,\, n} - 2P^{m,\, n-1}_{m,\, n-1},$$

и следовательно, искомая вероятность дается формулой:

$$\frac{P^{m,n}_{m,n} - 2P^{m,n-1}_{m,n-1}}{P^{m,\, n}_{m,\, n}} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Два последних примера приведены нами с целью показать, в какой степени иногда, для получения решения сравнительно простых задач, приходится сочетать стандартные приемы теории вероятностей с методами, специально приноровленными к особенностям каждой отдельной задачи.

Задачи

1. Воспользоваться результатами задач 5, 6 и 7 § 21 для решения примера 23.

2. В начале § 23 замечено, что безусловная вероятность ошибки медиума при появлении каждой определенной черной карты равна $\frac{1}{2}$. Так как всего имеется четыре черных карты, то вероятность того, что либо первая из них, либо вторая, либо третья, либо четвертая окажется неверно названной, составляет $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. В чем ошибка этого рассуждения?

3. Группа из p плюсов и m минусов наудачу расположена в линейный ряд найти вероятность того, что при этом не встретится двух рядом стоящих минусов.

4. С помощью формулы (25) доказать формулу:

$$\sum_{p=0}^{r} C^m_p C^n_{r-p} = C^{m+n}_r.$$

5. Показать, что соглашение II, приводящее к формуле (21), может служить основанием для решения задачи примера 15.

Литература

1. Лахтин, Курс теории вероятностей, ч. I, гл. I.
2. Бернштейн, Теория вероятностей, ч. I, гл. II и IV; ч. II, гл. I и II.

ГЛАВА IV

Вероятность и опыт; теорема Бернулли

§ 33. Вводные замечания. Читатель, который хоть сколько-нибудь имел дело со статистикой, вероятно, уже обратил внимание на то, что до сих пор мы ни слова не говорили о частоте, с которою наступает то или иное событие. Бросая монету, мы всегда говорили, что появление той и другой ее стороны одинаково вероятно, и никогда не говорили о том, что обе стороны появляются одинаково часто. Мы не говорили об этом потому, что это неверно. Читатель может сделать опыт и сам в этом убедиться. Это неверно даже и „в длинном ряду испытаний“, если только не придавать этому выражению несвойственного ему смысла, который угрожает уничтожить самую постановку задачи.

Не более верно и утверждение, что „при большом числе независимых *рядов* испытаний, число выпадений герба будет столько же раз меньше числа выпадений другой стороны монеты, сколько раз оно будет превосходить его“. Говорить так означало бы только, вместо отдельного бросания направить внимание на целый ряд таких бросаний; однако плохую логику никогда еще не удавалось исправить посредством усложнения. Наконец, пусть опять-таки читатель произведет опыт и посмотрит, что получится.

И тем не менее мы можем пользоваться экспериментом как средством для приближенного вычисления вероятностей. Почему это так, — это, говоря несколько суммарно, и составляет предмет настоящей главы. Ответ, конечно, лучше всего дать после надлежащего его обоснования, к построению которого мы теперь и приступаем.

§ 34. Повторные независимые испытания. Пусть мы имеем урну, в которой содержатся три шара: один белый и два черных. Допустим, что из этой урны раз за разом вынимается шар и каждый раз кладется обратно перед следующим тиражем. Согласно формуле (23) § 25, вероятность того, что при m испытаниях белый шар появится n раз, выразится так:

$$P_m(n) = C_n^m \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}.$$

Пусть теперь произведено пять тиражей. Тогда должен иметь место один какой-нибудь из шести возможных результатов: либо белый шар не появился ни разу, либо один раз, либо два, либо три, либо четыре, либо пять. Вероятность каждого из этих шести результатов нетрудно вычислить — результаты даны в прилагаемой табл. VIII.

В данном случае мы имеем два „наивероятнейших“ результата. Появление белого шара один раз и два раза одинаково вероятно, и каждое из них более вероятно, чем любой из остальных возможных результатов.

Таблица VIII

Вероятность n появлений события при пяти испытаниях, если в отдельном испытании вероятность равна $\frac{1}{3}$

n	Вероятность	n	Вероятность	n	Вероятность
0	0,1317	2	0,3292	4	0,0412
1	0,3292	3	0,1646	5	0,0041

Если вместо пяти испытаний мы произведем десять, то мы будем иметь одиннадцать возможных результатов. Вероятности их даны в табл. IX. В этом случае мы имеем одно „наивероятнейшее“ число появлений белого шара — именно три. Наименее вероятным числом появлений белого шара является, разумеется, число десять, вероятность которого согласно нашей таблице равна 0,0000. Это, конечно, не значит, что никогда не может появиться десять белых шаров сряду; это означает только, что вероятность такого события меньше половины числа 0,0001. Точное значение этой вероятности есть $\frac{1}{59\,049} = 0{,}0000169$.

Таблица IX

Вероятность n появлений события при 10 испытаниях, если в отдельном испытании вероятность равна $\frac{1}{3}$

n	Вероятность	n	Вероятность	n	Вероятность
0	0,0173	4	0,2276	8	0,0030
1	0,0867	5	0,1367	9	0,0003
2	0,1951	6	0,0569	10	0,0000
3	0,2601	7	0,0163		

Для случая 50 испытаний результаты даны в табл. X (стр. 74). Здесь мы снова имеем два „наивероятнейших“ результата, 16 и 17.

Первая и последняя из приведенных в этой таблице вероятностей указывают не на невозможность тех случаев, к которым они относятся, а на то, что вероятность каждого из этих случаев меньше $\frac{1}{20\,000}$.

Таблица X

Вероятность n появлений события при 50 испытаниях, если в отдельном испытании вероятность равна $\frac{1}{3}$

n	Вероятность	n	Вероятность	n	Вероятность
<5	0,0000	13	0,0679	23	0,0202
		14	0,0898	24	0,0113
5	0,0001	15	0,1077	25	0,0059
6	0,0004	16	0,1178	26	0,0023
7	0,0012	17	0,1178	27	0,0012
8	0,0033	18	0,1080	28	0,0005
9	0,0077	19	0,0910	29	0,0002
10	0,0157	20	0,0704	30	0,0001
11	0,0287	21	0,0503		
12	0,0470	22	0,0332	>30	0,0000

На самом деле существует положительная вероятность того, что белый шар появится 50 раз подряд, хотя эта вероятность и чрезвычайно мала. Она равна[1])

$$\frac{1}{3^{50}}=\frac{1}{717\,898\,000\,000\,000\,000\,000\,000}.$$

§ 35. Предельные условия при весьма большом числе испытаний. Вероятности, даваемые табл. VIII, IX и X, нанесены в качестве ординат на черт. 4. В этом графическом изображении некоторые закономерности становятся непосредственно очевидными.

1. Мы наблюдаем регулярное смещение каждого графика по отношению к предыдущему.

2. Наивероятнейшее число появлений события непрестанно возрастает, т. е. становится тем больше, чем больше число испытаний.

3. Вероятность этого наивероятнейшего числа появлений события непрестанно убывает; иначе говоря, чем больше испытаний, тем меньше шансов получить наиболее вероятный результат.

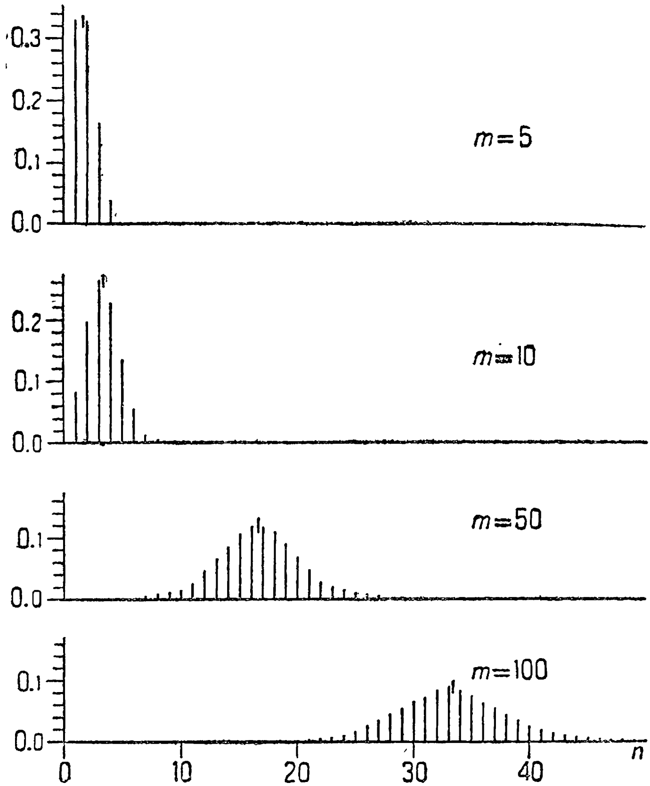
4. Число различных исходов, вероятности которых близки к вероятности наивероятнейшего исхода, непрестанно растет. Этот результат весьма просто можно формулировать так: чем больше испытаний, тем длиннее диаграмма. Другими словами: вероятность того, что отклонение фактического результата от наивероятнейшего превзойдет некоторое данное число, непрестанно растет с возрастанием числа испытаний.

---

[1]) Числа подобной величины невозможно себе представить. Я предлагаю, в качестве занимательного упражнения, которое именно здесь является уместным, вычислить размеры сосуда, вмещающего 3^{50} дробинок данного диаметра. Сделав это, представьте себе, что сосуд наполнен черными дробинками, среди которых помещена одна белая. Тогда наше число выражает вероятность того, что, вынимая из такого сосуда наудачу одну дробинку, мы вынем именно белую. Если вы на это возразите, что столь малая вероятность практически равна нулю, то подумайте о том, что та дробинка, которую вы фактически извлекли из сосуда, имела за себя в точности такую же вероятность.

Этот последний пункт заслуживает более подробного освещения.

Пусть, например, нас интересует вероятность того, что фактический результат будет отличаться от наивероятнейшего больше чем на пять единиц. Если произведено только пять испытаний, то это, очевидно, вообще невозможно. В этом случае искомая вероятность равна нулю. Напротив, в случае десяти испытаний вероятность уклонения фактического результата от наивероятнейшего больше чем на пять единиц, хотя



Черт. 4.

и очень мала, все же имеет положительное значение. Она равна[1]) 0,0003. В случае пятидесяти испытаний аналогичная вероятность равна уже 0,13. Более того, эту вероятность можно сделать сколь угодно большою — стоит только взять достаточно большое число испытаний. Так, при 100 испытаниях она равна 0,29, при 1000 испытаниях — 0,74, а при 1 000000 испытаниях — около 0,99.

[1]) Это число получено следующим образом. В табл. IX наивероятнейшее значение n равно 3. Чтобы фактический результат отличался от него больше чем на пять единиц, нужно, чтобы либо n было отрицательным, что невозможно, либо n было больше восьми, вероятность чего мы находим, складывая между собою два последних числа таблицы.

Подобным же образом вычислены данные для 50, 100 и 1000 испытаний.

Все эти данные вычислены для уклонения, превышающего пять единиц. Однако качественно результат остался бы тот же самый, если бы для уклонения была выбрана любая другая нижняя граница.

При бесконечно большом числе испытаний вероятность того, что фактический результат будет уклоняться от наивероятнейшего больше чем на любое наперед заданное число, приближается к достоверности.

Именно это взаимное расхождение результатов и обусловливает собою непрестанное уменьшение вероятности наивероятнейшего результата. Так как при всех обстоятельствах один из возможных результатов должен обязательно наступить, то сумма ординат на каждой диаграмме должна равняться единице. И если число ординат, длина которых близка к максимальной, растет, то длина каждой из них необходимо должна убывать.

Несколько иначе это можно формулировать так: вероятность того, что уклонение от наивероятнейшего результата будет больше пяти, равна сумме всех ординат, лежащих вне вертикальной полосы, простирающейся на пять единиц вправо и влево от максимальной ординаты. Так как эта сумма с возрастанием числа испытаний непрестанно возрастает, то сумма ординат внутри полосы должна соответствующим образом убывать.

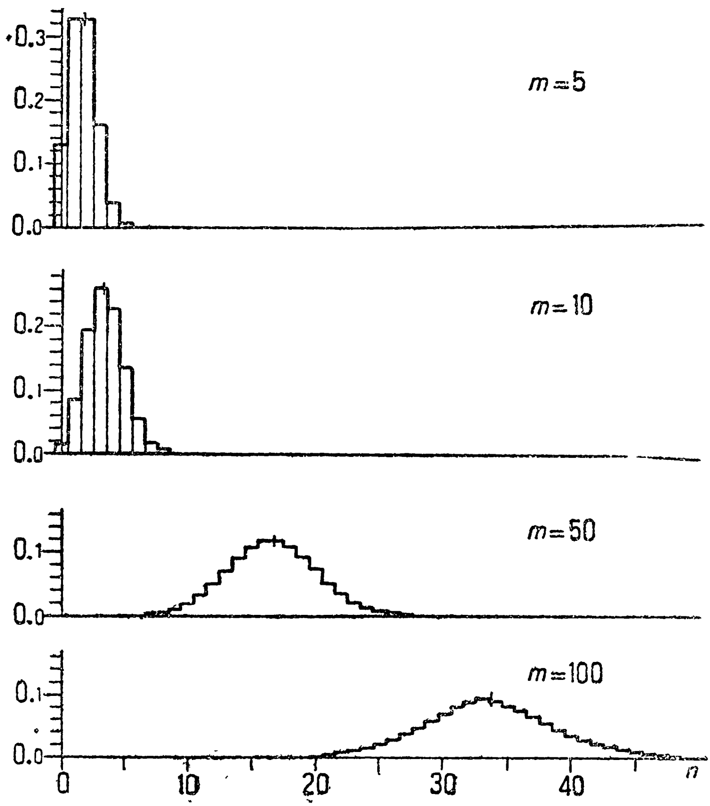
5. Наиболее вероятное число появлений события всегда приблизительно равно одной трети числа испытаний.

На чертеже это изображено короткой вертикальной чертой, проведенной вблизи вершины диаграммы для значения $n=\frac{m}{3}$. В случае пяти испытаний $\frac{m}{3}=\frac{5}{3}$ и лежит между 1 и 2. Это как раз два наиболее вероятных результата. В случае десяти испытаний $\frac{m}{3}$ равно $\frac{10}{3}$ и расположено между 3 и 4. Наивероятнейшим результатом является 3. Для 50 испытаний $\frac{m}{3}=\frac{50}{3}$ и лежит между двумя наивероятнейшими результатами 16 и 17. При 100 испытаниях $\frac{m}{3}=\frac{100}{3}$, и наивероятнейшим результатом является 33.

Так как вероятность события при отдельном испытании равна $\frac{1}{3}$, то это наводит на предположение, что в случае, когда mp (где p — вероятность события в отдельном испытании) есть число целое, это число и будет наивероятнейшим результатом; в противном же случае наивероятнейшим результатом будет одно из тех двух целых чисел, между которыми заключено mp. Хотя подобное возведение частных наблюдений в общий принцип и не всегда безопасно, в данном случае наше предположение оказывается правильным.

Для дальнейшего будет целесообразно несколько преобразовать черт. 4. Так как расстояние между двумя соседними ординатами во всех случаях равно единице, то к каждой из них можно пристроить прямоугольник ширины 1, воздвигая таким образом систему прямоугольников, площади которых соответственно равны вероятностям тех значений n, против которых они расположены.

Диаграмма при этом принимает вид, изображенный на черт. 5, где для случаев пяти и десяти испытаний графики построены в точном согласии с нашим описанием. Остальные две диаграммы отличаются от них только тем, что вертикальные стороны прямоугольников, не имею-

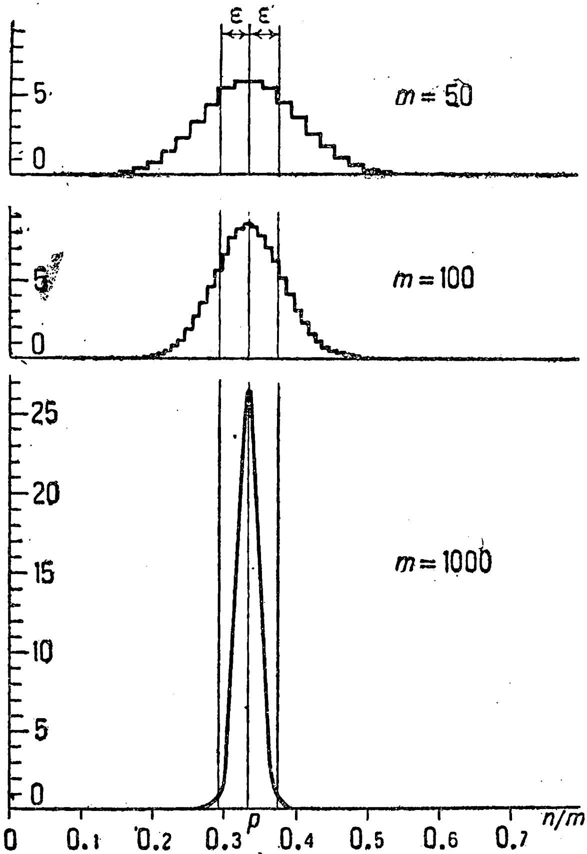


Черт. 5.

щие существенного значения, на них опущены, так что остались одни только ломаные линии. Каждая из этих ломаных линий обладает двумя свойствами: во-первых, площадь, лежащая под каждой ступенью, равна вероятности соответствующего значения n; и во-вторых, — так как значения n образуют полную группу — площадь, ограниченная всей ломаной линией, равна единице.

Построенную подобным образом линию мы будем называть „кривой распределения“ для переменной величины n.

§ 36. Теорема Бернулли. Тот факт, что наивероятнейшее число появлений события на черт. 4 и 5 оказывается весьма близким к одной трети числа произведенных испытаний, наводит нас на мысль — еще раз сопоставить эти кривые, беря теперь в качестве абсциссы число $\frac{n}{m}$ вместо n. Этим путём мы получили нечто вроде кривой распределения для дроби $\frac{n}{m}$; эту кривую будем называть „относительной кривой распределения“. Но для того чтобы термин „кривая распределения“ имел здесь



Черт. 6.

по возможности свой прежний смысл, мы должны озаботиться, чтобы были сохранены два основных свойства такой кривой, указанных в § 35. Это значит, что *площади* прямоугольников должны оставаться неизменными, в то время как *высоты* их могут подлежать изменению. Естественно, что кривая для $m = 100$, например, сжатая с боков больше, чем кривая для $m = 10$, должна зато иметь большее протяжение в вертикальном направлении.

Видоизмененная указанным образом группа кривых изображена на черт. 6 для $m = 50$, 100 и 1000, причем в последнем случае ступени так узки, что не могут быть показаны на чертеже. Эти кривые обнаруживают явные и регулярные тенденции изменения; однако эти тенденции совсем не те, что у наших прежних кривых; теперь их можно формулировать следующим образом:

1. Наиболее вероятное относительное число $\frac{n}{m}$ появлений события остается приблизительно неизменным при возрастании m.

2. Это наивероятнейшее значение всегда так близко подходит к p, как только это позволяет требование, чтобы n было целым числом.

3. Высота прямоугольника, соответствующего этому наивероятнейшему значению, возрастает при возрастании числа испытаний.

4. Ширина относительной кривой распределения *уменьшается* с возрастанием числа испытаний. Это значит, что хотя вероятность уклонения от наивероятнейшего значения больше чем на любую наперед заданную *величину* с возрастанием числа испытаний становится все больше и больше — на этом мы подробно останавливались в предыдущем параграфе, — тем не менее вероятность уклонения от наивероятнейшего значения n больше чем на любое заданное число *процентов* непрестанно убывает.

Легко видеть, что вероятность получить дробь $\frac{n}{m}$, отличающуюся от $\frac{1}{3}$ меньше чем на установленное заранее число ε, изображается на черт. 6 площадью, ограниченной с боков двумя вертикальными прямыми, отстоящими от прямой $\frac{n}{m}=\frac{1}{3}$ на расстояние ε по ту и другую сторону. На чертеже взято $\varepsilon=0,04$. При 50 испытаниях больше половины площади лежит вне этой полосы. Это значит, что относительная частота $\frac{n}{m}$ появлений события здесь имеет больше шансов оказаться вне соответствующих пределов (0,293 и 0,373), чем попасть в промежуток между ними. В случае 100 испытаний часть площади, лежащая за пределами полосы, значительно уменьшается, и шансы внутренней области уже превышают половину. В случае 1000 испытаний почти вся площадь лежит внутри этой полосы: вероятность того, что отношение $\frac{n}{m}$ при столь длинной серии испытаний будет отличаться от $\frac{1}{3}$ больше чем на 0,04, ничтожно мала. Заставляя m возрастать еще больше, мы можем добиться того, чтобы вероятность получения относительной частоты, лежащей вне предписанных пределов, была меньше любого наперед заданного числа. Другими словами, когда m растет безгранично, вероятность того, что дробь $\frac{n}{m}$ выйдет из пределов $p-\varepsilon$, $p+\varepsilon$, стремится к нулю, а вероятность того, что она окажется заключенной между этими пределами, стремится к единице.

В нашем примере мы взяли $\varepsilon=0,04$ и $p=\frac{1}{3}$; однако наше заключение остается неизменным, каковы бы ни были значения этих величин. Если мы, например, возьмем $\varepsilon = 0{,}000\,001$, то вероятность попадания дроби $\frac{n}{m}$ в пределы от $p - \varepsilon$ до $p + \varepsilon$ будет чрезвычайно мала при 100 и даже при 1000 испытаниях, но при дальнейшем росте числа испытаний она будет непрестанно расти, и при m чрезвычайно большом (например равном миллиону миллионов) она станет почти равной единице. Этот факт может быть формулирован в виде следующей теоремы:

Теорема Бернулли. *Если вероятность наступления события в определенном испытании равна p и если предпринят ряд взаимно независимых испытаний, то вероятность того, что отношение числа наступлений события к числу всех испытаний будет отличаться от p меньше чем на сколь угодно малую наперед заданную величину, может быть сделана сколь угодно близкой к единице, если только взять число испытаний достаточно большим.*

Иногда содержание той или иной теоремы становится гораздо яснее, если мы, отбросив математическую щепетильность, сформулируем эту теорему на самом обывательском языке. Кажется, в данный момент, мы имеем дело именно с таким случаем. Поэтому я приведу еще следующую формулировку:

Если вероятность некоторого события равна p, то при бесконечно большом числе испытаний относительная частота наверно будет равна p.

§ 37. Резюме. Является желательным сопоставить теперь важнейшие пункты теоремы Бернулли в возможно сжатом виде. Так как они сами естественно распадаются на два класса — в одних речь идет о *числе* появлений события, а в других об *отношении* этого числа к числу всех испытаний, — то мы расположим их в двух параллельных столбцах.

Свойства числа появлений события	*Свойства относительной частоты события*
1. При m взаимно независимых испытаниях, происходящих в одинаковых условиях, число n появлений события может принимать любое значение от 0 до m.	1. При m взаимно независимых испытаниях, происходящих в одинаковых условиях, относительная частота события $\frac{n}{m}$ может принимать любое значение от 0 до 1.
2. Существует „наивероятнейшее" число появлений события (иногда их могут быть два).	2. Существует „наивероятнейшая" относительная частота события (иногда их могут быть две).
3. Это наивероятнейшее число равно pm, если pm есть целое число. В противном случае оно равно одному из двух целых чисел, между которыми заключено pm (или оба эти числа являются наивероятнейшими).	3. Это наивероятнейшее значение относительной частоты равно либо p, либо одному из тех двух кратных дроби $\frac{1}{m}$, между которыми заключено p; либо, наконец, каждое из этих кратных дает наивероятнейшее значение относительной частоты.
4. Вероятность того, что уклонение фактического числа появлений события от его наивероятнейшего значения не превзойдет любой, сколь угодно	4. Вероятность того, что уклонение фактической относительной частоты события от ее наивероятнейшего значенья не превзойдет любой, скол

большой, наперед заданной величины, стремится к нулю при безграничном возрастании числа испытаний.

В вольной формулировке: при бесконечно большом числе испытаний разность между фактическим и наивероятнейшим числом появлений события становится бесконечно большою.

угодно малой, наперед заданной величины, стремится к единице при безграничном возрастании числа испытаний.

В вольной формулировке: при бесконечно большом числе испытаний разность между фактической и наивероятнейшей относительной частотой события обращается в нуль.

§ 38. Математическое обоснование. До сих пор мы избегали математического обоснования и аргументировали больше ссылками на здравый смысл, чем доказательствами. Теперь мы должны восполнить этот пробел. Прежде всего мы докажем, что наиболее вероятное число появлений события равно либо mp, либо одному из двух ближайших к mp целых чисел; с этою целью мы убедимся, что на черт. 4 каждая ордината влево от mp больше предшествующей, а каждая лежащая вправо от mp меньше предшествующей.

Если мы возьмем два соседних значения n, например $n-1$ и n, и разделим вероятность второго на вероятность первого, то получим:

$$\frac{P_m(n)}{P_m(n-1)}=\frac{m-n+1}{n}\,\frac{p}{1-p}=\frac{1-\frac{n}{m}+\frac{1}{m}}{\frac{n}{m}}\,\frac{p}{1-p}.$$

Отсюда, уменьшая числитель зачеркиванием дроби $\frac{1}{m}$, мы находим:

$$\frac{P_m(n)}{P_m(n-1)}>\frac{1-\frac{n}{m}}{1-p}\,\frac{p}{\frac{n}{m}}. \tag{34}$$

Аналогично, уменьшая знаменатель прибавлением отрицательной дроби $-\frac{1}{m}$, находим:

$$\frac{P_m(n)}{P_m(n-1)}<\frac{1-\frac{n-1}{m}}{1-p}\cdot\frac{p}{\frac{n-1}{m}}. \tag{35}$$

Чтобы доказать наш[illegible] нам достаточно теперь заметить, что при $n\leqslant mp$ оба множителя [illegible]й части (34) не меньше единицы, и потому $P_m(n)>P_m(n-1)$. Если же $n-1\geqslant mp$, то (35) дает нам $P_m(n)<P_m(n-1)$.

В графической интерпретации этот результат означает, что на черт. 4 каждая ордината больше предыдущей, если ее абсцисса не превосходит mp, и что, напротив, вправо от mp каждая ордината меньше предыдущей. Следовательно, ближайшая к короткой черте ордината справа больше, чем все, расположенные еще правее, а ближайшая к короткой черте слева — больше всех, расположенных влево от нее. Из этих двух ординат та, которая больше другой, и есть максимальная ордината; если они равны между собою, то они образуют пару максимальных ординат.

Таким образом мы дали обоснование для пп. 2 и 3 нашего резюме. Очевидно, что полученные результаты справедливы и для черт. 6, который отличается от черт. 4 только масштабом. Это значит, что наше доказательство охватывает оба столбца нашего резюме.

§ 39. Формула Стирлинга. Для обоснования п. 4 мы должны найти приближенную оценку выражения $C_n^m p^n (1-p)^{m-n}$ при очень большом m и при n, близком к mp, т. е., вообще говоря, тоже очень большом. При этих условиях величина C_n^m содержит три факториала очень больших чисел, а мы уже в § 10 видели, что такие факториалы становятся невообразимо большими. Таким образом нам нужно орудие в виде приближенной формулы для $n!$ при больших значениях n.

Говоря в этом случае о „приближенной формуле“, мы не имеем в виду требовать, чтобы разность между точным и приближенным значением была мала; для нас важна величина относительной погрешности. Так, например, формула, дающая для 50! приближенное значение $3{,}0415 \cdot 10^{64}$, является хорошим приближением, так как только на пятом месте отличается от истинного значения. Но величина разности в данном случае огромна; она имеет порядок 10^{60}.

В § 11 мы положили по определению

$$m! = \int_0^\infty x^m e^{-x}\, dx; \tag{6}$$

в графической интерпретации это означает, что $m!$ равен величине площади, заключенной между кривой

$$y = x^m e^{-x}$$

и осью x-ов. Первое указание для построения приближенной формулы мы получим, рассматривая несколько кривых, соответствующих различным значениям m. Черт. 7 (a) показывает, что бо́льшая часть площади соответствует при больших значениях m тому участку кривой, который расположен в непосредственном соседстве максимальной ординаты. „Спуски“ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$ становятся все круче, так что соответствующие им части площади получают все меньший удельный вес в общей величине интеграла. Это наводит на мысль о том, что площади в грубом приближении пропорциональны максимальным ординатам, по крайней мере в том смысле, что отношение этих двух величин при возрастании m изменяется не с такой исключительной быстротой, как сами факториалы.

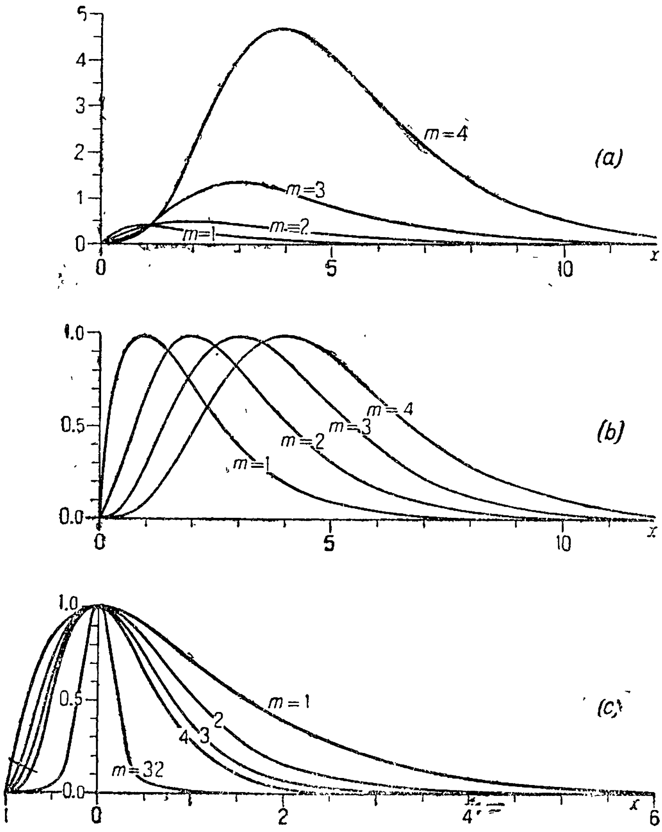
Найти эту максимальную ординату Y очень нетрудно. Она соответствует значению $x = m$ и равна

$$Y = m^m e^{-m}.$$

Если мы разделим формулу (6) почленно на последнее равенство и обозначим через $f(m)$ величину получаемого отношения, то будем иметь:

$$f(m) = \frac{m!}{Y} = \int_0^\infty \left(\frac{x}{m}\right)^m e^{m-x}\, dx.$$

Этот интеграл снова можно истолковать как площадь, лежащую под некоторой кривой; эта кривая, очевидно, отличается от соответствующей кривой черт. 7 (*a*) только тем, что масштаб по оси y-ов выбран другой — именно тот, при котором максимальная ордината становится равной единице; такое семейство кривых изображено на черт. 7 (*b*).



Черт. 7.

Сдвинем теперь все кривые так, чтобы все максимальные ординаты расположились по оси y-ов (это равносильно замене x новой переменной $x' = x - m$), и сожмем их в направлении оси x-ов в отношении 1 к m $\left(\text{иначе говоря, заменим } x' \text{ новой переменной } x'' = \frac{x'}{m}\right)$. В результате обоих преобразований мы получим:

$$f(m) = m \int_{-1}^{\infty} [(x'' + 1)\, e^{-x''}]^m \, dx'',$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям:

$$f(m) = m \int_{-1}^{\infty} [(x + 1)\, e^{-x}]^m \, dx. \tag{36}$$

Кривые, дающие подинтегральные функции этих интегралов, изображены на черт. 7 (c).

Следующий шаг нашего процесса носит искусственный характер и оправдывается исключительно успехом. Мы заменяем x новой переменной u посредством преобразования:

$$(x+1)e^{-x}=e^{-u^2} \tag{37}$$

или, что то же:

$$x-\log(x+1)=u^2.$$

Тогда мы будем иметь:

$$dx=2u\,du+2\frac{u}{x}\,du,$$

и формула (36) дает:

$$f(m)=m\int e^{-mu^2}2u\,du+2m\int e^{-mu^2}\frac{u}{x}\,du.$$

При этом мы временно не обращаем внимания на пределы интеграции.

Первый интеграл непосредственно дает $-e^{-mu^2}$, т. е. $-[(x+1)e^{-x}]^m$. Так как эта величина обращается в нуль при $x=-1$ и при $x\to\infty$, то весь первый интеграл равен нулю. Таким образом мы приходим к формуле:

$$f(m)=2m\int e^{-mu^2}\frac{u}{x}\,du. \tag{38}$$

Теперь нам ничего не остается, как непосредственно вычислить этот интеграл. Для этого необходимо прежде всего выразить x через u, а так как уравнение (37) трансцендентно, то решение может быть получено только в виде ряда. Разложение получается следующее [1]):

$$\frac{u}{x}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}u^2+\frac{1}{432}u^4-\frac{139}{194\,400}u^6+\dots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{3}u+\frac{4}{135}u^3-\frac{4}{2835}u^5+\dots\right). \tag{39}$$

Теперь мы должны определить пределы интеграции. Из соотношения (37) следует, что как при $x=-1$, так и при $x\to\infty$ u^2 становится бесконечно большим. Таким образом $u=\pm\infty$ для обоих пределов интеграции. Если бы пределы были одинаковы, то интеграл обращался бы в нуль [2]); но мы из наших графических рассмотрений знаем, что этого быть не может. Таким образом мы должны поставить у одного предела $-\infty$, у другого $+\infty$. Если бы мы расставили эти символы ошибочно, то этим мы только изменили бы знак интеграла; а так как

[1]) Область сходимости этого ряда определяется неравенством $|u|<\sqrt{2\pi}$. Здесь мы не имеем возможности обосновать того факта, что мы пользуемся этим рядом в бесконечных пределах.

[2]) Если определять u с помощью главной ветви логарифма, u^2 будет положительным для всех значений x в промежутке интеграции. Поэтому u не должно

мы знаем, что интеграл должен иметь положительную величину, мы можем с самого начала предотвратить эту ошибку. Легко проверить, что $+\infty$ должно быть верхним пределом, а $-\infty$ — нижним. Подставляя затем выражение (39) в формулу (38) и интегрируя почленно, мы приходим в конце концов к результату:

$$f(m)=\sqrt{2\pi m}\left\{1+\frac{1}{12m}+\frac{1}{288m^2}-\frac{139}{51\,840m^3}+\ldots\right\},$$

и следовательно,

$$m!=\sqrt{2\pi m}\,m^m e^{-m}\left\{1+\frac{1}{12m}+\frac{1}{288m^2}-\frac{139}{51\,840m^3}+\ldots\right\}. \quad (40)$$

Это и есть формула Стирлинга [1]). Чтобы иллюстрировать ее применение, вычислим 100! с ее помощью. Мы получаем:

$$100!=\sqrt{200\pi}\,100^{100}e^{-100}\left\{1+\frac{1}{1200}+\frac{1}{2\,880\,000}+\ldots\right\}=$$
$$=9{,}332\,621\,5\cdot 10^{157}.$$

Это согласуется с результатом, данным в приложении I.

Следующая табл. XI содержит еще несколько факториалов вместе с их приближенными значениями, полученными по формуле Стирлинга с одним членом и четырьмя членами.

Таблица XI

Сравнение факториалов с их приближенными значениями, полученными из формулы Стирлинга

m	Правильное значение	Формула с одним членом		Формула с четырьмя членами	
		$m!$	% ошибки	$m!$	% ошибки
1	1	0,922 137	8	0,999 711	0,03
2	2	1,919 005	4	1,999 986	0,0007
5	120	118 0192	2	120,0000	—
10	3 628 800	3 598 696	0,8	3 628 800	—
100	$9{,}332\,621\,5\cdot 10^{157}$	$9{,}324\,847\cdot 10^{157}$	0,08	$9{,}332\,621\,5\cdot 10^{157}$	—

Заметим, что, когда m больше десяти, то даже одночленная формула дает совершенно достаточную точность. Для меньших же значений m формула Стирлинга вообще излишня, так как факториалы легко вычисляются непосредственно.

покидать действительной оси. Так как на действительной оси $\frac{u}{x}$ не имеет особых точек за исключением $u=\pm\infty$, то путь, ведущий из бесконечности в некоторую конечную точку, может вернуться обратно только с тою же самою ветвью функции.

[1]) Часто, впрочем, этим именем называют приближенную формулу $m!\approx\sqrt{2\pi m}\;m^m e^{-m}$.

§ 40. Другая приближенная формула. Нам нужно еще приближенное выражение для $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ при очень больших значениях m. Очевидно, что при весьма большом m сумма $1+\frac{x}{m}$ очень мало отличается от единицы. Любая ограниченная степень этой величины поэтому также мало отличалась бы от единицы; но в нашем случае показатель степени m сам безгранично возрастает, вследствие чего отличие может стать значительным.

Найдем прежде всего предел изучаемого выражения при безгранично возрастающем m. Для этого заметим, что

$$\log\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = m\log\left(1+\frac{x}{m}\right).$$

Но,

$$\log\left(1+\frac{x}{m}\right) = \frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \ldots,$$

откуда

$$\log\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = x - \frac{x^2}{2m} + \frac{x^3}{3m^2} - \ldots.$$

Следовательно,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^{x-\left(\frac{x^2}{2m}\right)+\left(\frac{x^3}{3m^2}\right)-\ldots},$$

что, очевидно, имеет пределом e^x, когда m безгранично возрастает. Итак,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x \tag{41}$$

— первый основной результат настоящего параграфа.

Мы можем, если угодно, смотреть на e^x как на первое приближение к

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m,$$

при больших значениях m. Мы можем, однако, получить лучшее приближение, отделяя множитель

$$e^{-\left(\frac{x^2}{2m}\right)+\left(\frac{x^3}{3m^2}\right)-\left(\frac{x^4}{4m^3}\right)+\ldots}$$

и разлагая его в ряд по нисходящим степеням m. Мы получаем таким образом:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x\left\{1 - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{m} + \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\frac{1}{2!\,m^2} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{x^6}{8}+x^5+\frac{3x^4}{2}\right)\frac{1}{3!\,m^3} + \left(\frac{x^8}{16}+x^7+\frac{13x^6}{3}+\frac{24x^5}{5}\right)\frac{1}{4!\,m^4} + \ldots\right\}. \tag{42}$$

Это — второй основной результат настоящего параграфа.

§ 41. Доказательство первой части теоремы Бернулли. Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы Бернулли. Мы докажем два предложения:

a) *Максимальная ордината черт. 4 стремится к нулю при безграничном возрастании m.* Так как между $mp-\varepsilon$ и $mp+\varepsilon$ заключается только ограниченное число ординат и так как ни одна из них не превосходит максимальной ординаты, то и сумма их должна стремиться к нулю, что доказывает первую часть теоремы.

b) *Ординаты черт. 6, за исключением только лежащих в непосредственном соседстве значения $\frac{n}{m}=p$, при возрастании m столь быстро убывают, что сумма всех тех, которые лежат вне вертикальной полосы, в пределе исчезает.* Это — вторая часть теоремы. В настоящем параграфе мы докажем п. „a", а в следующем — п. „b".

Мы начнем с формулы:

$$P_m(n)=C_n^m p^n (1-p)^{m-n} \tag{23}$$

и заменим в ней факториалы их приближенными значениями по формуле Стирлинга. Мы получим:

$$P_m(n)=\sqrt{\frac{m}{2\pi n(m-n)}}\left[\frac{m(1-p)}{m-n}\right]^m\left[\frac{(m-n)p}{n(1-p)}\right]^n. \tag{43}$$

Но мы знаем, что наивероятнейшее значение n отличается от mp не более чем на единицу. Следовательно,

$$mp-1<n<mp+1,$$
$$m(1-p)-1<m-n<m(1-p)+1.$$

В правой части равенства (43) мы заменим знаменатели *меньшими* числами, а числители — *большими*, вследствие чего получим неравенство

$$P_m(n)<\sqrt{\frac{m}{2\pi(mp-1)[m(1-p)-1]}}\left[\frac{m(1-p)}{m(1-p)-1}\right]^m\left[\frac{m(1-p)+1}{mp-1}\cdot\frac{p}{1-p}\right]^n$$

Здесь мы рассмотрим в отдельности три множителя правой части.

Прежде всего очевидно, что при безграничном возрастании m первый множитель стремится к нулю, так как m дважды встречается в знаменателе и только один раз в числителе. Таким образом для доказательства нашего предложения достаточно будет убедиться, что два других множителя при этом остаются ограниченными.

Но второй множитель имеет вид:

$$\frac{1}{\left[1-\frac{1}{m(1-p)}\right]^m},$$

что приводится к виду (42), если обозначить через x величину $-\frac{1}{(1-p)}$. Следовательно, этот множитель стремится к пределу $e^{-\frac{1}{(1-p)}}$ и, значит, остается ограниченным.

Третий множитель может быть приведен к виду:

$$\left[\frac{1+\frac{1}{m(1-p)}}{1-\frac{1}{mp}}\right]^n.$$

Так как дробь, стоящая в скобке, очевидно, больше единицы, то все выражение увеличится, если мы заменим показатель n любым бо́льшим числом, в частности числом $mp+1$. Таким образом третий множитель меньше, чем

$$\frac{\left[1+\frac{1}{m(1-p)}\right]^{mp}}{\left(1-\frac{1}{mp}\right)^{mp}}\cdot\frac{\left[1+\frac{1}{m(1-p)}\right]}{\left(1-\frac{1}{mp}\right)}.$$

Когда m безгранично возрастает, то вторая дробь, очевидно, стремится к единице; с другой стороны, если мы будем писать m вместо mp и x вместо $\frac{p}{(1-p)}$, то числитель первой дроби получит вид формулы (42) и, следовательно, будет иметь своим пределом $e^{\frac{p}{(1-p)}}$. Подобным же образом легко убедиться, что знаменатель имеет пределом e^{-1}. Таким образом и третий множитель остается ограниченным, и следовательно, выражение (43) стремится к нулю. Этим доказана первая часть теоремы.

§ 42. Доказательство второй части теоремы Бернулли. Вторая часть теоремы Бернулли доказывается проще. Мы знаем, что ордината, соответствующая данному значению n, больше, чем все ординаты, соответствующие значениям n, более удаленным от наивероятнейшего значения. Пусть $n=m\eta$, где η может и не равняться p. Из (43) мы имеем:

$$P_m(n)=\sqrt{\frac{1}{2\pi\eta(1-\eta)m}}\left[\left(\frac{1-p}{1-\eta}\right)^{1-\eta}\left(\frac{p}{\eta}\right)^{\eta}\right]^m$$

или

$$P_m(n)=\sqrt{\frac{1}{2\pi\eta(1-\eta)m}}\,z^m,$$

если выражение в квадратных скобках обозначить через z.

Прежде всего мы покажем, что z всегда меньше единицы; это проще всего сделать, найдя наибольшее значение z, а еще лучше — наибольшее значение $\log z$, что легче. Мы имеем:

$$\log z=(1-\eta)[\log(1-p)-\log(1-\eta)]+\eta[\log p-\log\eta],$$

откуда

$$\frac{d\log z}{d\eta}=\log\left(\frac{1-\eta}{1-p}\cdot\frac{p}{\eta}\right). \tag{44}$$

Чтобы эта величина обратилась в нуль, мы должны иметь $\eta=p$; но при этом $\log z=0$. Итак, наибольшее значение z равно единице. Для всех других значений η $z<1$.

Возьмем, наконец, η равным тому из чисел $p-\varepsilon$, $p+\varepsilon$, для которого ордината на черт. 6 окажется бóльшей, чем для другого. Тогда вне полосы, ограниченной этими числами, *все* ординаты будут меньше, чем ордината, соответствующая числу η; иначе говоря, все они меньше, чем

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\eta(1-\eta)m}}\,z^m.$$

Так как число их не превосходит m, то сумма их не может быть больше, чем

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\eta(1-\eta)}}\sqrt{m}\,z^m.$$

Но так как $z<1$, то при m достаточно большом число $\sqrt{m}\,z^m$ может быть сделано сколь угодно малым. Другими словами, сумма всех ординат, лежащих вне полосы

$$p+\varepsilon>\frac{n}{m}>p-\varepsilon,$$

может быть сделана сколь угодно малой, если только выбрать m достаточно большим.

Это доказывает вторую часть нашей теоремы. Ниже, в § 78, мы получим возможность оценить вероятность попадания n или $\frac{n}{m}$ в те или иные границы, не прибегая к вычислению отдельных ординат. В самом деле, мы убедимся, что если мы построим семейство кривых распределения для величины $\frac{n}{\sqrt{m}}$, то при больших значениях m отдельные кривые этого семейства будут почти неотличимы друг от друга. В известной мере на эту мысль наводит уже формула (43), в которой единственный множитель, стремящийся к нулю, содержит $\sqrt{m}$ в знаменателе. Это подсказывает нам, что максимальные ординаты черт. 5 все приближенно сравняются, если их помножить на соответственные значения $\sqrt{m}$. Но если мы при этом хотим сохранить площади всех прямоугольников неизменными, то мы должны одновременно сжать все кривые в горизонтальном направлении в том же самом отношении, а это равносильно переходу к кривым распределения для величин $\frac{n}{\sqrt{m}}$.

Здесь не место доказывать это; однако это и на самом деле верно: при возрастании числа испытаний вершины кривых на черт. 5 становятся все ниже и ниже, в отношении обратно пропорциональном квадратным корням из чисел испытаний, в то время как в горизонтальном направлении кривые растягиваются в отношении квадратных корней из m.

§ 43. Экспериментальное определение вероятности. Содержание теоремы Бернулли по существу заключается в том, что вероятность сколько-нибудь значительного различия между вероятностью события в отдельном испытании и $\frac{n}{m}$, относительной частотой появления события при m независимых испытаниях, может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно большое число испытаний. Если это так, то совершенно очевидно, что число $\frac{n}{m}$ для большинства практических надобностей может служить приближенным значением вероятности p; а это приводит нас к новому способу измерения вероятностей.

В случае совершенно правильной монеты, например, мы можем либо составить группу из двух равновероятных, исключающих друг друга событий: „герб, надпись" и отсюда немедленно заключить, что вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$, либо мы можем бросать монету повторно и принять относительное число выпадений герба за его вероятность. В данном примере, конечно, первый способ является лучшим, потому что он дает нам точный ответ, в то время как вторым способом мы в лучшем случае получаем приближенное значение. Однако существует много проблем, к которым этот точный метод вообще не может быть применен, потому что мы не знаем подходящей группы альтернативных событий.

Рассмотрим, например, вероятность того, что мужчина, которому сейчас двадцать лет, умрет в возрасте от 50 до 55 лет; в этом случае было бы совершенно безнадежно искать полной группы равновероятных событий. Зато мы можем зарегистрировать большое число двадцатилетних мужчин и, подождав тридцать пять лет, установить, какая доля зарегистрированных умерла между интересующими нас возрастными границами. Если мы допустим, что вероятность смерти для каждого из них не зависит от того, что случилось с остальными, то мы можем принять эту долю за экспериментально найденное приближенное значение искомой вероятности.

Таким образом *теорема Бернулли дает нам более или менее приемлемый суррогат для случаев, когда прямое определение вероятности не удается.*

Однако здесь необходимо соблюдать осторожность. Мы доказали теорему Бернулли, основываясь на формуле (23), которая в свою очередь была выведена с помощью формулы (20); эта же последняя была установлена только для тех случаев, к которым может быть приложено основное определение. Следовательно, если мы хотим пользоваться теоремой Бернулли как оправданием для экспериментального метода измерения вероятностей, то мы должны дать более широкое обоснование либо самой этой теореме, либо „теореме умножения" (20), на которой она основана. Так как обобщение теоремы умножения не представляет затруднений для случая, когда события A и B взаимно независимы [а для вывода формулы (23) нужен именно этот случай], то мы дадим здесь это обобщенное доказательство, тем самым расширяя и область применения теоремы Бернулли. Потом мы увидим, что, обратно, теоремой Бернулли можно воспользоваться для того, чтобы распространить теорему умножения на случай взаимно зависимых событий, вероятности которых не могут быть получены прямым путем.

§ 44. Теорема умножения. Рассмотрим два любых *взаимно независимых* события A и B, вероятности которых пусть будут соответственно p и p'. Вероятность наступления обоих событий A и B есть некоторая функция от p и p'. Обозначим ее через

$$P(A, B)=f(p, p'). \tag{45}$$

Наша задача состоит в том, чтобы определить вид функции f.

Заметим прежде всего, что если событие A случайно состоит из двух несовместимых событий A_1 и A_2 (подобно тому, как „выпадение четного числа на игральной кости" состоит из „выпадения двойки", „выпадения четверки" и „выпадения шестерки"), то и сложное событие AB будет состоять из двух несовместимых частей, A_1B и A_2B. Поэтому, в силу соглашения II,

$$P(A, B)=P(A_1, B)+P(A_2, B),$$

и

$$p=p_1+p_2,$$

где p_1 и p_2 означают соответственно вероятности событий A_1 и A_2.

Заметив это и учитывая, что формула (45) должна быть справедлива для любых двух взаимно независимых событий, мы приходим к функциональному уравнению:

$$f(p_1+p_2, p')=f(p_1, p')+f(p_2, p'),$$

которому можно удовлетворить только полагая [1])

$$f(p, p')=p\cdot F(p').$$

Заметим далее, что в случае взаимной независимости события A и B совершенно равноправны, так что мы должны иметь:

$$f(p, p')=f(p', p),$$

или

$$pF(p')=p'F(p),$$

откуда

$$\frac{F(p)}{p}=\frac{F(p')}{p'}.$$

---

[1]) Это можно легко показать, предполагая, что функция $f(p, p')$ может быть разложена в ряд Тейлора. Напишем:
откуда

$$f(p, p')=a+bp+cp'+dp^2+\ldots, \tag{46}$$

$$f(p_1, p')+f(p_2, p')=2a+bp_1+bp_2+2cp'+dp_1^2+dp_2^2+\ldots \tag{47}$$

и

$$f(p_1+p_2, p')=a+bp_1+bp_2+cp'+dp_1^2+2d\,p_1p_2+dp_2^2+\ldots \tag{48}$$

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях этих двух разложений, мы постепенно найдем $a=0$, $c=0$, $d=0$ и т. д. Легко видеть, что каждый член разложения (46), содержащий p в степени выше первой, приводит в разложении (48) к членам, содержащим произведение чисел p_1 и p_2 в тех или иных степенях, тогда как в разложении (47) таких членов быть не может. Отсюда следует, что в разложении (46) коэфициенты при всех степенях p кроме первой должны быть нулями, т. е. $f(p, p')$ должно иметь вид:

$$p(b+ep'+gp'^2+\ldots)=pF(p').$$

Левая часть этого равенства не содержит p' и потому не будет изменяться при изменении p'; но тогда, очевидно, и правая часть должна при этом оставаться неизменной, т. е. дробь $\frac{F(p')}{p'}$ должна быть постоянным числом. Обозначая его через C, мы будем иметь:

$$F(p') = Cp',$$

и следовательно,

$$f(p, p') = pF(p') = Cpp'.$$

Заметим, наконец, что в случае, когда событие A достоверно ($p = 1$), наступление „и A, и B“ равносильно наступлению одного „B“, откуда мы заключаем, что $f(1, p') = Cp' = p'$. Это показывает, что $C = 1$, и тем самым завершает наше доказательство, поскольку речь идет о независимых событиях.

Доказав, таким образом, теорему умножения для случая независимых событий и не сделав при этом никаких предположений относительно возможности построения той группы, которая нужна для применения нашего определения меры вероятности, мы можем быть уверены в справедливости теоремы Бернулли и в этом общем случае. Пусть теперь события A и B взаимно зависимы. Пусть далее мы производим большое число M *независимых между собою испытаний* относительно сложного события AB. Пусть среди этих испытаний имеется N_A случаев наступления события A и N_{AB} случаев наступления сложного события AB. Тогда отношение $\frac{N_A}{M}$, по всей вероятности, будет весьма близко к $P(A)$, и точно так же отношение $\frac{N_{AB}}{N_A}$ (т. е. „относительная частота наступления события AB при условии наступления события A“), по всей вероятности, будет мало отличаться от $P_A(B)$. Наконец, дробь $\frac{N_{AB}}{M}$, по всей вероятности, будет весьма близка к $P(AB)$. В самом деле, вероятность того, что отклонение превзойдет любое наперед заданное число, может быть во всех трех случаях сделана сколь угодно малой, если только M выбрано достаточно большим.

Обозначим эти три разности соответственно через δ, δ' и δ'', так что

$$P(A) = \frac{N_A}{M} - \delta,$$

$$P_A(B) = \frac{N_{AB}}{N_A} - \delta',$$

$$P(AB) = \frac{N_{AB}}{M} - \delta''.$$

Тогда непосредственный подсчет дает:

$$P(A)\,P_A(B) - P(AB) = -\delta\frac{N_{AB}}{N_A} - \delta'\frac{N_A}{M} + \delta\delta' + \delta''. \qquad (49)$$

Пусть теперь $P(A)P_A(B)-P(AB)=d$, и допустим, что $d \neq 0$. Тогда по крайней мере одно из трех чисел δ должно превышать $\frac{d}{4}$ по абсолютному значению, так как иначе правая часть не могла бы равняться d. Имеется, таким образом, при сколь угодно большом M вероятность, равная единице, что какое-либо из этих чисел превзойдет $\frac{d}{4}$. Но это невозможно: теорема Бернулли учит нас, что эта вероятность (для каждого δ в отдельности, а значит и для „какого-нибудь одного из них“) стремится к нулю. Следовательно, мы с необходимостью должны заключить, что

$$P(A)P_A(B)=P(AB).$$

Задачи

1. Из того факта, что при $\eta=p$ выражение (44) обращается в нуль, мы заключали, что z имеет максимум при этом значении η. Но оно могло с таким же успехом иметь при этом минимум. Как исследовать действительное положение вещей?

2. Построить кривую распределения для вероятностей различных по длине серий непрерывных выпадений герба при бросании монеты.

3. Построить функцию распределения для суммы чисел, выпадающих при одновременном бросании двух игральных костей.

4. Построить функцию распределения для числа очков, выпадающих при бросании одной игральной кости.

Литература

1. Лахтин, Курс теории вероятностей, ч. I, гл. III.
2. Боярский и др., Теория математической статистики, гл. III.
3. Мизес, Вероятность и статистика, раздел IV.

ГЛАВА V

Теорема Бейеса

§ 45. Еще об условных вероятностях. В этой главе будет итти речь об определении вероятностей на основании данных опыта, при помощи понятия условной вероятности.

Во избежание легко возможных здесь неправильных толкований и проистекающих отсюда ошибок в расчетах мы начнем с выяснения некоторых существенных сторон этого понятия.

Возьмем такой пример. Три шкатулки содержат каждая по две монеты. В одной шкатулке — две золотых монеты, в другой — две серебряных, в третьей — одна золотая и одна серебряная. Снаружи все три шкатулки одинаковы.

Возьмем наудачу одну шкатулку. Она может оказаться как раз той, которая содержит две золотые монеты. Условимся обозначать это событие — выбор шкатулки с двумя золотыми монетами — через A. Оно имеет определенную вероятность $P(A)$ (в данном случае такую же, как и выбор любой другой шкатулки).

Мы можем распорядиться нашими шкатулками и иначе. А именно, мы можем из первой попавшейся шкатулки вынуть наудачу одну монету. Эта монета может при этом оказаться золотой. Это событие — выбор золотой монеты — условимся обозначать через B. Оно также имеет определенную вероятность $P(B)$ (в данном случае опять-таки такую же, как и выбор серебряной монеты).

Видоизменим теперь последний опыт. Пусть кто-нибудь, знающий, какие монеты находятся в каждой из шкатулок, укажет нам шкатулку с двумя золотыми монетами. Мы будем снова вынимать наудачу одну монету, но уже из этой шкатулки. На этот раз выбор золотой монеты снова будет иметь определенную вероятность, но это будет уже не прежняя вероятность $P(B)$: теперь это будет вероятность $P_A(B)$ выбора золотой монеты *при условии*, что шкатулка, из которой она вынимается, заведомо содержит только золотые монеты. В отличие от предыдущего выбора монет из первой попавшейся шкатулки, здесь выбор золотой монеты будет событием достоверным.

Подобным же образом можно видоизменить и первый опыт. А именно: мы можем начать с того, что вынем наудачу из первой попавшейся шкатулки одну монету, и она окажется золотой. Если после этого мы зададим себе вопрос, какова же вероятность того, что в этой шкатулке обе монеты золотые, то этот вопрос, очевидно, уже не будет иметь смысла вопроса „какова вероятность того, что в первой попавшейся шкатулке обе монеты золотые?“ [это была вероятность $P(A)$], а будет иметь смысл вопроса „какова вероятность того, что в шкатулке, из которой появилась золотая монета, и вторая монета также золотая?“ это будет вероятность $P_B(A)$ *появления A после появления B*.

Вот здесь-то мы и хотим предостеречь читателя от одного весьма распространенного смешения понятий. Является естественный соблазн утверждать, что при нашем видоизменении второго опыта — выбора наудачу одной монеты — *изменилась* вероятность события B, а при видоизменении первого опыта — выбора наудачу шкатулки — *изменилась* вероятность события A. Сам по себе этот способ выражения законен. Но следует отчетливо понимать смысл происшедшего изменения.

Суть происшедшего изменения состоит в том, что видоизменяется само событие, о вероятности которого идет речь: если сначала шла речь просто о *появлении A*, то затем идет речь *о появлении A после появления B*. Формулировка, названная нами неправильной, плоха тем, что она скрадывает это существенное различие, что может приводить к прямым ошибкам.

Такое положение вещей встречается довольно часто и имеет большое практическое значение. То обстоятельство, что извлечение из определенной шкатулки золотой монеты позволило нам иначе, чем до этого извлечения, поставить вопрос о вероятности нахождения в этой шкатулке двух золотых монет, может иметь то значение, что наше знание о содержимом этой шкатулки стало более определенным. Вероятность $P_B(A)$ здесь, очевидно, больше, чем вероятность $P(A)$. Часто мы сознательно добиваемся такого эффекта: для получения более определенных сведений о каком-нибудь явлении (как в данном случае — о содержании двух золотых монет в некоторой заинтересовавшей нас шкатулке) и при невозможности или трудности получения точных сведений мы ставим вспомогательный опыт, дающий нам сведения о другом явлении (как в данном случае — о том, какова в заинтересовавшей нас шкатулке, по крайней мере, одна монета), и пользуемся исходом этого вспомогательного опыта, чтобы иначе поставить вопрос о вероятности первого явления, заменить вопрос о безусловной вероятности вопросом об условной вероятности.

Дальше мы приведем пример задачи такого типа, имеющей техническое значение. Это задача о болтах в последнем параграфе этой главы.

Для таких задач желательно иметь готовую формулу, которая позволила бы нам автоматически находить условные вероятности, исходя из знания безусловных вероятностей и некоторых других, которые по условиям задачи, может быть, легче установить чем, непосредственно найти искомую условную вероятность.

Такую формулу доставляет нам *теорема Бейеса*. К ее изложению мы и переходим.

§ 46. Теорема Бейеса. Вернемся к рассмотрению формул (20) и (21). Очевидно, что соотношение (20) можно написать в любом из двух видов:

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B) \tag{20}$$

или

$$P(AB) = P(B)\,P_B(A), \tag{50}$$

причем необходимо помнить, что при всех рассуждениях, в которых играет какую-либо роль порядок чередования событий A и B, этот порядок в обоих случаях должен быть одинаков[1]).

Напомним, что наши обозначения имеют следующий смысл:

$P(AB)$. Вероятность того, что наступит событие A и вслед за ним — событие B.

$P(A)$. Вероятность наступления события A. О событии B ничего неизвестно.

$P(B)$. Вероятность наступления события B. О событии A ничего неизвестно.

$P_A(B)$. Известно, что событие A наступило. Символ выражает собою вероятность того, что вслед за событием A наступит событие B.

$P_B(A)$. Известно, что наступило событие B. Символ выражает собою вероятность того, что событию B предшествовало событие A.

Так как $P(AB)$ означает в обоих уравнениях в точности одно и то же, то мы можем приравнять друг другу их правые части, откуда

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}. \tag{53}$$

Другими словами, если мы знаем вероятности $P(A)$, $P(B)$ и $P_A(B)$ и если сверх того мы знаем, что событие B *наступило*, то мы можем вычислить по уравнению (53) вероятность того, что событию B предшествовало событие A. *Содержание этого уравнения и составляет теорему Бейеса.*

Прежде чем приступить к приложениям этой теоремы, заметим, что обычно она записывается в несколько ином виде, к которому мы придем, заменяя знаменатель по формуле (21):

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{\sum\limits_A P(A)P_A(B)}, \tag{54}$$

или, словами:

---

[1]) В § 22, в выноске, мы обратили внимание читателя на тот факт, что вероятность сложного события „человек подвергается ранению и умирает" (взятого именно в этой временной и причинной связи) и вероятность сложного события „человек умирает и подвергается ранению" (взятого в этой новой временной связи) — две разные вещи. Пусть A означает ранение, а B — смерть. Тогда первый из упомянутых порядков есть AB, а второй — BA; вероятности их можно обозначить соответственно через $P(AB)$ и $P(BA)$. Первому порядку соответствуют формулы (20) и (50), второму же будут соответствовать совершенно аналогичные формулы:

$$P(BA) = P(B)P_B(A), \tag{51}$$

$$P(BA) = P(A)P_A(B). \tag{52}$$

Правые части этих ревенств формально совпадают с правыми частями формул (50) и (20). Однако сходство это ограничивается внешностью. В формуле (50) $P(B)$ означает „вероятность смерти", а $P_B(A)$ — „вероятность того, что умерший человек был ранен". Между тем, хотя в формуле (51) $P(B)$ означает то же „вероятность смерти", но $P_B(A)$ есть теперь „вероятность того, что умерший человек *будет* ранен".

Нас будут интересовать только равенства (20) и (50). Отметим, однако, что и вторая пара равенств приводит к своей „теореме Бейеса", которая при известных обстоятельствах может иметь смысл, несколько отличный от первой.

Теорема Бейеса. *Если событие B может наступить не иначе, как вслед за каким-нибудь одним из группы событий A, безусловные вероятности которых равны $P(A)$, и если известно, что событие B наступило, то вероятность того, что ему предшествовало некоторое определенное событие A, равна дроби, числитель которой есть произведение вероятности этого события A на вероятность того, что за ним последует событие B, знаменатель же представляет собою сумму в точности таких же произведений, составленных для всех событий A* [1]).

§ 47. Примеры; задача о шкатулках. Рассмотрим пример, о котором шла речь в § 45:

Пример 33. Три шкатулки содержат каждая по две монеты. В одной шкатулке — две золотых монеты, в другой — две серебряных, в третьей — одна золотая и одна серебряная. Снаружи все три шкатулки одинаковы. Некто выбирает наудачу одну шкатулку и из нее берет монету, которая оказывается золотою. Найти вероятность того, что и другая монета в этой шкатулке — золотая.

Для решения этой задачи можно обойтись и без теоремы Бейеса. Можно рассуждать следующим образом: любая из трех имеющихся золотых монет могла оказаться взятой в первую очередь. Две из них находятся в такой шкатулке, где „вторая монета тоже золотая". Значит, искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. Однако для нашей цели выгоднее получить ответ двумя более окольными путями, соответственно формулам (53) и (54); мы введем следующие обозначения:

A_{11} — „выбор шкатулки с двумя золотыми монетами",
A_{22} — „выбор шкатулки с двумя серебряными монетами",
A_{12} — „выбор шкатулки с двумя различными монетами",
B_1 — „появление золотой монеты",
B_2 — „появление серебряной монеты".

Вероятность события A_{11} равна $P(A_{11}) = \frac{1}{3}$. Подобным же образом каждая из шести имеющихся монет имеет такие же шансы оказаться вынутой, как и каждая другая; это дает $P(B_1) = \frac{1}{2}$. Однако, если была

[1]) Необходимо подчеркнуть еще раз, что во всей формуле все обозначения предполагают, что „B следует за A". Из формул (51), (52) и (21) можно получить другое уравнение, формально совпадающее с уравнением (54), но в котором всюду подразумевается, что „A следует за B". Таким образом формулы (53) и (54) верны, какой бы порядок чередования событий A и B ни имелся в виду; однако в случаях, когда порядок имеет значение, надо остерегаться смешивать эти два порядка в одной и той же формуле.

Благодаря целому ряду неточных формулировок такого типа, как указанные нами в § 45, теорема Бейеса всегда вызывала к себе критическое отношение; некоторые достаточно авторитетные ученые предпочитали даже вовсе от нее отказаться. Однако в настоящее время эти сомнения как будто бы изживаются, общепринятым становится мнение, что теорема эта в логическом отношении обоснована не хуже и не лучше, чем любое другое предложение теории вероятностей, и может давать верные и ценные результаты всякий раз, когда нам удается правильно ее применять; затруднение же состоит именно в том, что это редко удается сделать.

выбрана шкатулка с двумя золотыми монетами, то вероятность появления *после этого* золотой монеты $P_{A_{11}}(B_1)=1$. Поэтому формула (53) дает нам следующий результат: вероятность того, что шкатулка, из которой вынута золотая монета, содержала две золотых монеты, равна:

$$P_{B1}(A_{11})=\frac{P(A_{11})P_{A_{11}}(B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Наконец, мы можем найти решение и следующим рассуждением. Очевидно, что

$$P(A_{12})=P(A_{22})=\frac{1}{3},$$

и, с другой стороны,

$$P_{A22}(B_1)=0$$

и

$$P_{A12}(B_1)=\frac{1}{2}.$$

Поэтому формула (54) дает:

$$P_{B_1}(A_{11})=\frac{P(A_{11})P_{A11}(B_1)}{P(A_{11})P_{A_{11}}(B_1)+P(A_{22})P_{A_{22}}(B_1)+P(A_{12})P_{A_{12}}(B_1)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{2}{3}.$$

Как и следовало ожидать, ответ во всех трех случаях получается один и тот же.

§ 48. Примеры; пятая урновая задача. Вот еще задача, подобная предыдущей, но представляющая особый интерес, так как с ней связан, как мы это увидим ниже, один довольно распространенный способ применения теоремы Бейеса.

Пример 34. $n+1$ ящиков содержат каждый по n шаров: в одном ящике все шары белые, в другом — один шар черный и остальные белые, в следующем — два шара черные и остальные белые, и т. д. Снаружи все ящики одинаковы. Некто выбирает наудачу один ящик и из него берет шар, который оказывается белым. Каков наиболее вероятный состав ящика?

Задача будет решена, если мы найдем ответы на следующий ряд вопросов: какова вероятность того, что ящик, из которого появился белый шар, не содержит ни одного черного? какова вероятность того, что ящик, из которого появился белый шар, содержит ровно один черный? какова вероятность того, что ящик, из которого появился белый шар, содержит ровно два черных? и т. д. После этого останется только сопоставить найденные вероятности и посмотреть, какая из них окажется наибольшей.

Ответ на наш ряд вопросов мы получим таким рассуждением. По условию задачи первый попавшийся ящик может иметь один из $n+1$ составов; он может содержать:

A_0) все шары белые;
A_1) один шар черный и остальные белые;
A_2) два шара черных и остальные белые;
. . . .
A_n) все шары черные.

По условию же задачи, при выборе наудачу одного ящика появление любого из составов A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ одинаково вероятно. Очевидно, что

$$P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n+1}.$$

Вероятность появления белого шара из ящика, имеющего состав A_0, очевидно, равна единице; из ящика, имеющего состав A_1, равна $\frac{n-1}{n}$; из ящика, имеющего состав A_2, равна $\frac{n-2}{n}$ и т. д. Таким образом, если обозначить через B появление белого шара, то мы получим:

$$P_{A_0}(B) = 1,\ P_{A_1}(B) = \frac{n-1}{n},\ P_{A_2}(B) = \frac{n-2}{n} \ldots,\ P_{A_n}(B) = 0.$$

Нас же интересует как раз обратное: вероятности каждого из составов A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ при условии, что появился белый шар. В соответствии с тем, что мы сказали в § 45, это будут вероятности $P_B(A_0)$, $P_B(A_1)$, $P_B(A_2), \ldots, P_B(A_n)$. Их мы можем определить из только что найденных нами вероятностей, применяя формулу (54). Мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
P_B(A_0) &= \frac{P(A_0)P_{A_0}(B)}{P(A_0)P_{A_0}(B) + P(A_1)P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B)},\\
P_B(A_1) &= \frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{P(A_0)P_{A_0}(B) + P(A_1)P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_B(A_n) &= \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(A_0)P_{A_0}(B) + P(A_1)P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Знаменатели всех этих дробей одинаковы, и так как нас интересует только сравнительная величина дробей, то мы можем их не вычислять. Все числители, опять-таки, имеют одинаковые множители:

$$P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n),$$

следовательно, интересуясь только сравнительной величиной дробей, мы можем и эти множители исключить из вычисления. Мы видим, таким образом, что вопрос о сравнительной величине вероятностей $P_B(A_0)$, $P_B(A_1), \ldots, P_B(A_n)$ решается сравнительной величиной вторых множителей в числителях: $P_{A_0}(B)$, $P_{A_1}(B), \ldots, P_{A_n}(B)$. Их мы уже подсчитали выше, и одного взгляда на этот подсчет достаточно, чтобы убедиться в том, что наибольший из них — первый, $P_{A_0}(B) = 1$. Итак, искомая наибольшая вероятность есть $P_B(A_0)$; „наиболее вероятно, что во взятом ящике все шары белые“.

Этот пример поучителен вот в каком отношении. Мы видели, что из чисел $P_{A_0}(B)$, $P_{A_1}(B)$, ..., $P_{A_n}(B)$ самое большое — первое; ответ нашей задачи показывает, что из чисел $P_B(A_0)$, $P_B(A_1)$, ..., $P_B(A_n)$ самое большое — также первое. Это означает, что *после наступления события B из гипотез A_0, A_1, ..., A_n наибольшую вероятность получает та, которая в свою очередь сообщала событию B наибольшую вероятность*. Формулы (55), в сущности, показывают даже больше, а именно: если числа $P(A_i)$ все равны между собою, то числа $P_B(A_i)$ пропорциональны числам $P_{A_i}(B)$.

§ 49. Пример; шестая урновая задача. Эта задача является задачей на комбинированное применение равенств (21) и (54); задачи этого типа иногда называются задачами о вероятностях будущих событий.

Пример 35. При условиях, указанных в примере 34, найти вероятность появления белого шара, когда вынутый однажды белый шар возвращен обратно в ящик и после этого из того же ящика вынимается вторично один шар.

Пусть B' — вторичное появление белого шара. Тогда интересующую нас вероятность $P(B')$ можно представить, сохраняя обозначение предыдущего параграфа и пользуясь формулой (21), в таком виде:

$$P(B') = \sum_A P_B(A) P_A(B').$$

Мы пишем здесь $P_B(A)$ вместо $P(A)$, потому что по условиям задачи мы имеем дело не с первым попавшимся ящиком, а с ящиком, из которого появился белый шар.

По формуле (54), эти вероятности $P_B(A)$ для каждого возможного состава A нашего ящика можно представить в свою очередь так:

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{\sum_A P(A) P_A(B)}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, мы получим:

$$P(B') = \frac{\sum_A P(A) P_A(B) P_A(B')}{\sum_A P(A) P_A(B)}.$$

По условиям нашей задачи здесь возможны некоторые упрощения. Во-первых, как мы видели в предыдущем параграфе, вероятности $P(A)$ одинаковы для всех A: они таким образом выйдут за знаки сумм в числителе и в знаменателе и сократятся. Во-вторых, поскольку после первой выемки B белого шара состав A ящика восстанавливается, постольку и появление B' белого шара при второй выемке будет иметь ту же вероятность, что B:

$$P_A(B') = P_A(B).$$

Учитывая оба эти обстоятельства, мы можем написать последнее равенство в таком виде:

$$P(B')=\frac{\sum\limits_A [P_A(B)]^2}{\sum\limits_A P_A(B)}.$$

Теперь остается только воспользоваться вычисленными в предыдущем араграфе значениями $P_A(B)$:

$$P_{A_0}(B)=1,\ P_{A_1}(B)=\frac{n-1}{n},\ P_{A_2}(B)=\frac{n-2}{n},\ \ldots,\ P_{A_n}(B)=0.$$

Мы получим:

$$P(B')=\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n-2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}=$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n+1}{3n}.$$

Нам нет надобности продолжать искусственно строить такого рода примеры, так как в дальнейшем мы встретим их в достаточном числе в естественном порядке нашего изложения.

§ 50. Примеры; задача на технический контроль. Рассмотрим следующую задачу на испытание фабричной продукции.

Пример 36. Фабрика производит болты определенного типа в качестве стандартного продукта. Болты складываются в ящики, по 1200 штук в каждом. Как показал долговременный опыт, относительная доля ящиков, содержащих тот или иной процент брака, определяется следующей таблицей:

Процент брака	Относительное число ящиков, содержащих данный процент брака
0	0,78
1	0,17
2	0,034
3	0,009
4	0,005
5	0,002
6	0,000

2 % брака допускаются стандартом; это значит, что ящик, содержащий 2 % или менее негодной продукции, считается нормальным, и задача технического контроля — выявить и изъять ящики с большим содержанием брака. Нормальное обследование состоит в том, что в каждом ящике проверяют 50 болтов,

В одном ящике при нормальном обследовании было обнаружено 6 негодных болтов, причем нет никаких оснований для особых подозрений по отношению к содержимому данного ящика. Какова вероятность того, что этот ящик не удовлетворяет условиям стандарта?

Из теоремы Бернулли мы знаем, что *относительные числа*, стоящие в последнем столбце приведенной таблицы, почти наверняка очень недалеки от *вероятностей* соответственных долей брака. Мы будем поэтому считать, что они дают нам значение $P(A)$ в формуле (54), причем под событиями A мы подразумеваем здесь различные возможные проценты брака. Тогда условные вероятности немедленно получаются из формулы (25), где p и q соответственно равны 6 и 44, а m и n — $12A$ и $1200-12A$. Подставляя все это в формулу (54), мы после очевидных сокращений получаем:

$$P_B(A)=\frac{P(A)\,C_6^{12A}\,\dfrac{(1200-12A)!}{(1200-12A-44)!}}{\sum\limits_A P(A)\,C_6^{12A}\,\dfrac{(1200-12A)!}{(1200-12A-44)!}}.$$

Таблица XII

A	$P(A)$	C_6^{12A}	$\dfrac{(1200-12A)!}{(1200-12A-44)!}$		$P_B(A)$
0	0,78	0,0000	$13,721^{134}$	$0,000^{139}$	0,000
1	0,17	$9,2400^2$	8,746	0,014	0,004
2	0,034	$1,3460^5$	5,548	0,254	0,070
3	0,009	$1,9478^6$	3,503	0,614	0,170
4	0,005	$1,2272^7$	2,201	1,351	0,374
5	0,002	$5,0060^7$	1,376	1,378	0,382
6	0,000				0,000
				$3,611^{139}$	

Вычислить значения этих величин сравнительно нетрудно. Схема вычислений показана в табл. XII. Второй столбец содержит значения $P(A)$, как они даны в формулировке задачи; третий столбец содержит биномиальные коэфициенты, взятые из приложения III; четвертый столбец содержит различные значения выражения

$$\frac{(1200-12A)!}{(1200-12A-44)!},$$

которые найдены с помощью приложения II, где даны логарифмы больших факториалов. Перемножением соответственных чисел этих трех столбцов получается пятый столбец, содержащий числители тех дробей, которые представляют $P_B(A)$ для различных значений A; сумма же $3,611\cdot10^{139}$ всех чисел этого столбца служит общим знаменателем этих дробей. Таким образом искомые вероятности получаются делением чисел этого столбца на $3,611\cdot10^{139}$. Результаты даны в последнем столбце.

Вероятность брака свыше $2\,\%$ равна сумме четырех последних чисел этого столбца и столь велика, что безусловно сигнализирует о неблагополучии, Само собою разумеется, что если бы реально имела место производственная ситуация, описанная в этом примере, то вычисления этого рода заранее и раз навсегда были бы проделаны для всех случаев, с какими можно было бы ожидать встретиться. После этого для учета значения того или иного результата обследования надо было бы только справляться в специально заготовленных таблицах.

Однако в известном смысле вся эта задача идеализирована. Прежде всего как при ее формулировке, так и при вычислении результатов мы предполагали, что брак может составить либо 1 %, либо 2 % и т. д., но не 1,5 % или другое какое-либо дробное число. Очевидно, что на самом деле это не так; среди 1200 болтов, входящих в состав ящика, любое целое кратное дроби $\frac{1}{12}$ может указывать процент брака; а в задачах более общего типа эта переменная может принимать почти всевозможные значения. Поэтому мы должны понимать „0 %" как совокупность всех случаев, в которых брак составляет меньше $\frac{1}{2}$ %, „1 %" как совокупность случаев с браком от $\frac{1}{2}$ до $1\frac{1}{2}$ %, и т. д. Как показывает опыт, такая группировка данных обычно столь мало искажает результат, что не стоит тратить сил на более полное вычисление. В общем, надо полагать, наши результаты таковы, что в практическом положении данного рода ничего лучшего нельзя требовать.

Задачи

1. Нижеследующее рассуждение приводилось как пример неправильного применения теоремы Бейеса. Речь идет о примере 33, только теперь ищется вероятность того, что две вынутых монеты будут различными.

„Вероятность того, что первая появившаяся монета будет золотою, равна $\frac{1}{2}$. Если это случилось, то мы знаем, что взяли первую или третью шкатулку, но которую именно — не знаем. Так как они одинаково вероятны, то вероятность вынуть сперва золотую, а потом серебряную монету равна $\frac{1}{4}$. Очевидно, такова же вероятность вынуть сперва серебряную, а затем — золотую монету. Отсюда, полная вероятность вынуть две разных монеты составляет $\frac{1}{2}$".

Найти ошибку этого рассуждения.

2. Тот же автор в качестве правильного рассуждения выдвигает следующее. „Если появилась золотая монета, то априорная вероятность как для первой, так и для третьей шкатулки равна $\frac{1}{2}$; но первая шкатулка сообщает появлению золотой монеты в первом тираже вероятность 1, а третья — $\frac{1}{2}$. Поэтому вероятность того, что золотая монета вынута из третьей шкатулки, равна

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3},$$

и такова же вероятность для серебряной монеты".

Это рассуждение также неверно. Почему?

3. Имеются две группы урн. Первая группа состоит из 3 урн, каждая из которых содержит 5 белых шаров и 2 черных. Вторая группа состоит из 2 урн, каждая из которых содержит 1 белый шар и 4 черных. Все урны по наружному виду одинаковы. Из одной урны, взятой наудачу, извлекается один шар. Он оказался черным. Какова вероятность того, что урна взята из первой группы?

4. При стрельбе в цель у стрелка A из 5 выстрелов 4 бывают удачны (т. е. A попадает в цель), у стрелка B из 4 выстрелов 3 удачны, а у стрелка C из 3 выстрелов 2 удачны. A, B и C стреляют в цель залпом. Два выстрела оказываются удачными. Какова вероятность того, что промахнулся C?

Литература

1. Лахтин, Курс теории вероятностей, ч. I, гл, IV.
2. Бернштейн, Теория вероятностей, ч. II, гл. III.
3. Molina a. Crowell, Deviation of Random Samples from Average Conditions and Significance to Traffic Men, Bell System Technical Journal, Vol. 3 (1924), pp. 88—89.

ГЛАВА VI

Функции распределения и непрерывно изменяющиеся величины

§ 51. Случайный выбор точки на отрезке. Во всем предшествующем мы всегда имели дело с дискретными группами чисел и событий. Так, при бросании монеты мы имели дело с двумя резко отличными друг от друга возможностями, не допускающими никакого промежуточного исхода. При повторном бросании монеты мы можем получить различные числа выпадений герба; но это всегда будут целые числа — никогда мы не можем получить такого результата, как, например, 1,736 герба.

Однако часто приходится иметь дело с событиями, которые не образуют подобного рода дискретных групп, хотя и представляют собою весьма подходящий материал для применения математической теории вероятностей. Так, например, при производстве электрических лампочек идеальным положением было бы такое, при котором все лампы имеют в точности одинаковое сопротивление. Производственный процесс к этой цели стремится, но, разумеется, никогда ее не достигает. Вместе с тем, в данном случае неверно было бы предполагать, что имеется только дискретное множество возможных значений сопротивления, а другие значения невозможны. Напротив, сопротивление может изменяться *непрерывно.*

Это обстоятельство сейчас же вызывает принципиальное затруднение: там, где нет дискретного множества событий, не может быть речи и о тех группах и подгруппах событий, которые входят в наше определение вероятности. Поэтому может показаться, что здесь необходимо некоторое существенно новое определение. Однако это не совсем так; дело в том, что затруднение, с которым мы встретились, имеет свои корни не столько в определении вероятности, сколько в понятии непрерывно изменяющейся величины, и может быть преодолено посредством приема, подобного тому, с помощью которого обычно определяют понятие иррационального числа.

Ближайшей целью двух следующих параграфов будет показать, как это может быть сделано. В качестве первого шага в этом направлении мы сейчас рассмотрим пример настолько специального характера, что он на первый взгляд может показаться имеющим слишком мало общего с нашей принципиальной задачей; однако, отправляясь от него, мы сможем рядом последовательных обобщений добиться того, что нам нужно.

Пример 37. Случайный выбор точки на отрезке. Окружность свободно вращающего колеса равна единице длины. На эту окружность нанесена равномерная шкала. Над колесом укреплена неподвижная стрелка ничтожно малой ширины, и колесо приведено в движение. Когда оно остановится, стрелка будет указывать на некоторое число шкалы. Какова вероятность, что это число будет лежать между a и b [1])?

Пусть, например, данный интервал простирается от 0,7 до 0,8. Мы знаем, что десять интервалов, отделяемых друг от друга точками 0,0; 0,1; 0,2;...; 0,9, все имеют одинаковую длину. Поэтому мы имеем десять равновероятных и исключающих друг друга событий, соответственно десяти интервалам, против которых может оказаться стрелка при остановке колеса. Из этих интервалов только один принадлежит к интересующей нас подгруппе. Поэтому, применяя наше первоначальное определение, мы находим, что искомая вероятность равна $\frac{1}{10}$.

Если мы видоизменим нашу задачу и будем теперь искать вероятность того, что стрелка остановится в промежутке от 0,70 до 0,71, то мы подобным же образом разделим всю окружность колеса на 100 равных частей и найдем, что искомая вероятность равна $\frac{1}{100}$.

Возьмем теперь более общий случай. Пусть длина интервала равна $b-a=x$. Если x — число рациональное, т. е. если его можно представить как отношение двух целых чисел $\frac{n}{m}$, то мы можем, начиная от точки a, разбить окружность колеса на m равных частей, из которых ровно n попадут в промежуток от a до b. Очевидно, вероятность того, что стрелка становится против этого интервала, равна $\frac{n}{m}=x$, т. е. равна длине интервала. Значит, *для всякого интервала рациональной длины вероятность того, что после остановки стрелка придется против этого интервала, равна его длине.*

Как же быть, если длина интервала не может быть выражена отношением двух целых чисел? В этом случае наше основное определение меры вероятности оказывается бессильным, потому что мы не можем разделить окружность на равные части так, чтобы интересующий нас отрезок содержал целое число таких частей.

Так как это затруднение возникает только в том случае, когда число x иррационально, то нам естественно обратиться за помощью к той ветви математики, которая изучает природу иррациональных чисел. Но сделав это, мы наталкиваемся на затруднение еще более глубокое: оказывается, что иррациональное число вообще не может быть записано в нашей обычной системе счисления и требует для своего определения

---

[1]) С целью избежания некоторых логических трудностей целесообразно считать этот интервал содержащим точку a, но не содержащим точки b, т. е. считать, что если против стрелки остановится точка a, то требуемое событие наступает, а если b, то нет. Единственной целью этого соглашения является устроить дело таким образом, чтобы сумма интервалов (a, b) и (b, c) в точности равнялась интервалу (a, c). При других соглашениях мы должны были бы либо потерять одну точку, либо считать ее дважды.

некоторого совершенно нового комплекса идей [1]). Первые сведения о том, в каком отношении иррациональные числа стоят к нашим обычным числам (а вместе с тем и первое указание на то, как можно преодолеть стоящую перед нами трудность), мы получим, посмотрев, как мы обращаемся с ними в практической жизни.

Выберем в качестве примера число $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Мы обычно записываем его в виде 0,7 или 0,707 или 0,7071; при этом в каждом случае мы подразумеваем, что это есть *ближайшее* число десятых, или тысячных, или десятитысячных. Ту же мысль мы легко могли бы, если бы захотели, выразить в виде цепи неравенств:

$$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

$$0{,}7<\frac{1}{\sqrt{2}}<0{,}8,$$

$$0{,}70<\frac{1}{\sqrt{2}}<0{,}71,$$

$$0{,}707<\frac{1}{\sqrt{2}}<0{,}708.$$

Эту цепь можно было бы продолжать как угодно далеко.

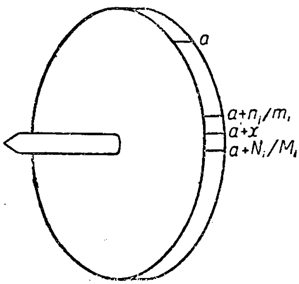
Однако это не только *практический* прием. Он ведет к важным следствиям и в *логическом* отношении, ибо он показывает, что мы можем написать последовательность рациональных чисел, стремящихся к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ как к пределу, хотя каждое из этих чисел меньше чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. То же самое справедливо и для любого другого иррационального числа; так, число π аппроксимируется последовательностью чисел 3; 3,1; 3,14; 3,141; ..., которые все меньше, чем π; но мы можем аппроксимировать его также и числами 4; 3,2; 3,15, 3,142; ..., которые все больше π.

---

[1]) Некоторые рациональные числа не могут быть записаны в виде „десятичных дробей" потому, что в качестве основания системы счисления выбрано именно число 10. Таково, например, число $\frac{1}{3}$, приводящее к „периодической десятичной дроби" 0,333...; но если бы основанием нашей системы счисления служило какое-нибудь кратное числа 3, то это затруднение исчезло бы. Так, если бы основанием системы счисления служило число 12, то дробь $\frac{1}{3}$ изображалась бы в виде 0,4, так как это выражение теперь означало бы $\frac{4}{12}$, а не $\frac{4}{10}$.

То затруднение, которое мы имеем в тексте, не носит такого случайного характера. Мы должны считаться с ним как с основным фактом учения о числе, остающимся в силе при любой системе счисления. Можно показать, что любое рациональное число может быть изображено либо конечной, либо периодической десятичной дробью. Что же касается иррациональных чисел, то их не только не удается изобразить в виде конечной десятичной дроби или в виде отношения двух целых чисел; они, как это легко показать, не поддаются изображению даже в виде периодических десятичных дробей.

Поэтому мы заключаем, что *всякое иррациональное число является пределом по меньшей мере двух последовательностей рациональных чисел, из которых одна приближается к нему снизу, а другая — сверху.*



Черт. 8.

Вернемся теперь к рассмотрению нашего вращающегося колеса. Если x иррационально, то, как мы теперь знаем, должна существовать последовательность рациональных чисел:

$$\frac{n_1}{m_1},\ \frac{n_2}{m_2},\ \frac{n_3}{m_3},\ \ldots,$$

которые все меньше, чем x, и стремятся к нему как к своему пределу; и другая последовательность

$$\frac{N_1}{M_1},\ \frac{N_2}{M_2},\ \frac{N_3}{M_3},\ \ldots,$$

числа которой все *больше*, чем x, но также стремится к нему как к своему пределу. Отметим на окружности колеса четыре точки:

$$a,\ a+\frac{n_i}{m_i},\quad a+x,\quad a+\frac{N_i}{M_i},$$

где индекс i — любое целое положительное число.

Как мы знаем, вероятность того, что стрелка остановится против интервала $\left(a,\ a+\frac{n_i}{m_i}\right)$ (черт. 8), равна $\frac{n_i}{m_i}$. Но в этом случае она и подавно останавливается против интервала $(a,\ x)$. Поэтому искомая вероятность $P(x)$ *по меньшей мере равна* $\frac{n_i}{m_i}$. Подобным же образом, всякая точка, принадлежащая интервалу $(a,\ a+x)$, и подавно принадлежит интервалу $\left(a,\ a+\frac{N_i}{M_i}\right)$. Следовательно, $P(x)$ не может превосходить дроби $\frac{N_i}{M_i}$. Таким образом

$$\frac{n_i}{m_i}\leqslant P(x)\leqslant\frac{N_i}{M_i}.$$

Эти неравенства справедливы для любого значения i. Но по мере того как i становится все больше и больше, дроби $\frac{n_i}{m_i}$ и $\frac{N_i}{M_i}$ стремятся к одному и тому же пределу x, а так как $P(x)$ все время заключено между этими дробями, как бы близко они ни подходили к x, то по необходимости $P(x)=x$.

Вероятность того, что стрелка придется против интервала $(a,\ b)$, равна длине этого интервала независимо от того, рациональна эта длина или нет.

Мы требовали, чтобы длина окружности колеса составляла как раз единицу длины. Однако в сущности это условие определяет собой, конечно, не размеры колеса, а ту единицу, с помощью которой мы условливаемся измерять все встречающиеся нам длины. Поэтому доказанная нами теорема утверждает, что вероятность попадания в любой интервал равна длине этого интервала, при условии, что за единицу длины принята длина окружности колеса. Так как вероятность, о которой идет речь, очевидно, не зависит от выбора единицы длины, то мы приходим к следующему заключению:

Вероятность того, что стрелка придется против некоторого интервала длины x, лежащего на окружности длины L, равна $\frac{x}{L}$.

В известном смысле это представляет собой расширение нашего прежнего определения меры вероятности, так как старое определение совсем не приложимо к данному случаю. Это новое определение становится необходимым потому, что „длина“ есть непрерывно изменяющаяся величина. Однако указанное нами расширение представляет собой скорее теорему, нежели новую аксиому, потому что является логическим следствием принятого нами взаимоотношения между рациональными и иррациональными числами.

Заметим, наконец, что единственное назначение нашего вращающего колеса состоит в том, чтобы гарантировать одинаковую вероятность попадания в различные интервалы. Тот же самый результат мы получили бы, заменив наше колесо любым другим механизмом, при действии которого интервалы равной длины становятся равновероятными. Поэтому мы можем принять следующую окончательную формулировку доказанной теоремы:

Если точка должна занять то или иное положение на некотором отрезке длины L и если при этом вероятности попадания точки на два равных интервала равны между собою, то вероятность попадания точки на интервал длины x равна $\frac{x}{L}$.

Про такую точку мы будем говорить, что она „случайно“ или „наудачу“ брошена на данный отрезок.

§ 52. Об одном парадоксе, связанном со случайным помещением точки на отрезок. Существует любопытный парадокс, связанный с таким выбором точки на отрезке и интересный тем, что проливает некоторый свет на значение нулевых вероятностей или по крайней мере привлекает внимание к этой проблеме.

Парадокс этот возникает в связи с такой задачей: найти вероятность того, что брошенная точка попадает как раз в середину данного отрезка. Если мы построим вокруг этой середины интервал длины x, то, как мы знаем, вероятность попадания точки в этот интервал будет равна $\frac{x}{L}$. Возможно, однако, что точка, попав в этот интервал, все же не совпадает с серединою первоначального отрезка; мы заключаем отсюда, что искомая вероятность меньше, чем $\frac{x}{L}$. Так как это должно оставаться справедливым, сколь бы мал ни был построенный интервал, то искомая вероятность должна равняться нулю. Таким образом *веро-*

ятность того, что точка, наудачу брошенная на отрезок, разделит этот отрезок пополам, равна нулю.

Мы провели все это рассуждение для середины отрезка L; очевидно, однако, что с одинаковым основанием оно могло бы быть проведено и для любой другой точки этого отрезка[1]). Отсюда мы заключаем: *вероятность того, что точка, наудачу брошенная на отрезок, совпадает с некоторой заранее указанной его точкой, равна нулю.*

Однако брошенная точка обязательно должна попасть на ту или другую из точек данного отрезка. Поэтому, если только вероятность, равная нулю, означает невозможность события, то наша точка заведомо осуществит невозможное. Куда бы она ни попала, она находится в таком месте, куда она не могла попасть.

Этот парадокс представляет собою лишь один из многих, связанных с понятием бесконечно большого числа и вообще предельного процесса[2]). Чтобы надлежащим образом раскрыть его, нам придется вернуться к нашему первоначальному определению вероятности, согласно которому мы должны иметь дело с группою из m равновероятных событий, причем ищется вероятность наступления какого-либо одного из n событий некоторой ее подгруппы. Мерою вероятности служит дробь $\frac{n}{m}$. Коль скоро m остается неизменным, дробь эта может обратиться в нуль только при $n=0$, т. е. только тогда, если в подгруппу не входит ни одно из событий основной группы.

В таких случаях вероятность, равная нулю, знаменует собою невозможность. Если, однако, мы, сохраняя n неизменным, заставляем m безгранично возрастать, то вероятность может быть сделана сколь угодно малою. Так, например, если в ящике находится 10 шаров, из которых n красных и $10-n$ белых, то вероятность того, что шар, вынутый из этого ящика, окажется красным, равна $\frac{n}{10}$. Она может равняться нулю только в том случае, если в ящике вообще нет красных шаров и если, следовательно, появление красного шара вообще невозможно. То же самое остается верным, если число шаров в ящике увеличить до сотни, тысячи, миллиона. Однако, если, начав с десяти шаров в ящике, мы будем затем прибавлять все большее и большее число белых шаров, то вероятность появления из нашего ящика красного шара будет становиться все меньше и меньше, и может быть сделана сколь угодно малой, если мы добавим достаточное количество белых шаров. Так,

---

[1]) Иногда нам кажется (хотя мы легко убеждаемся в обманчивости этого чувства), что было бы более странно попасть как раз в середину отрезка, чем в какую-нибудь другую, ничем особым не замечательную точку. События, отмеченные какой-либо симметрией, часто кажутся нам необычными. Представьте себе, что при раздаче колоды карт четырем игрокам каждый случайно получит целиком одну из четырех мастей. Это событие покажется вам крайне замечательным; однако вероятность его отнюдь не меньше вероятности любого другого результата сдачи. Для любого результата она равна $4{,}48\cdot10^{-28}$. Замечательной была симметрия полученного результата, а не малая вероятность его.

[2]) Необходимо напомнить, что бесконечность — не число, а описание характера изменения безгранично растущей переменной величины.

если ящик содержал только один красный шар, так что первоначальная вероятность равнялась $\frac{1}{10}$, то мы можем сделать эту вероятность менее $\frac{1}{100}$ прибавлением 100 белых шаров $\left[\text{она тогда равна } \frac{1}{110}\right]$. Если мы хотим сделать ее меньше одной миллионной, то для этого достаточно добавить миллион белых шаров. Вообще, желая сделать ее меньше любого положительного числа ε, мы можем достигнуть этого прибавлением m белых шаров, где $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Пока m конечно, получающаяся вероятность отлична от нуля, и никаких затруднений не возникает. Мы знаем только, что эта вероятность чрезвычайно мала. Но когда m становится бесконечным, искомая вероятность обращается в нуль. Поэтому, с логической точки зрения, вероятность, равная нулю, означает невозможность только при условии, что данная группа состоит из конечного числа событий; если число событий в группе бесконечно, то она означает, что избранная нами подгруппа составляет бесконечно малую часть основной группы [1]).

§ 53. Обобщение полученных результатов. До сих пор мы в настоящей главе все время говорили о „точке, брошенной наудачу" на некоторый отрезок. Сперва мы себе представляли этот процесс осуществляющимся при помощи механизма особого типа. Затем мы стали на несколько более общую точку зрения, совершенно отказавшись от механизма и говоря только о „бросании точки" независимо от тех приспособлений, с помощью которых оно осуществляется. Теперь нам желательно убедиться, что все проведенные нами рассуждения имеют еще более общее значение и что все разговоры о „точках" и „отрезках" были просто приемом, который имел целью дать нам возможность наглядно представить себе каждый шаг нашего рассуждения.

Отметить точку на отрезке, носящем на себе шкалу, — это все равно, что выбрать какое-нибудь определенное число. Обратно, измерив какую угодно величину, мы всегда можем нанести на чертеж найденное значение и тем самым отметить некоторую точку. Таким образом *отметка точек на отрезках и измерение величин* — это два процесса, из которых каждый может служить истолкованием другого; все, что справедливо для одного из них, будет, с надлежащими изменениями в формулировке, верно и для другого. Поэтому два основных полученных нами до сих пор результата могут быть формулированы следующим образом:

Если в результате какого бы то ни было процесса получается число, про которое известно: 1) *что оно не может быть ни меньше, чем x_1, ни больше, чем x_2, и* 2) *что между этими границами число выбирается случайно, то вероятность того, что это число окажется*

---

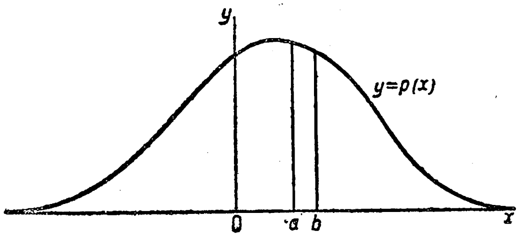
[1]) К сожалению (по нашему мнению, к счастью. *Ред.*), в математике нет особых обозначений для чисел, полученных в результате предельных переходов. Если бы они имелись, то мы могли бы сказать, что нуль-число как вероятность означает невозможность события, в то время как нуль-предел должен быть в каждом случае особо истолкован на основе того предельного процесса, результатом которого он явился.

лежащим между a и b, равна $\frac{(b-a)}{(x_2-x_1)}$, причем, конечно, предполагается, что $x_1 \leqslant a < b \leqslant x_2$.

Вероятность же того, что выбранное число окажется равным какому-либо наперед заданному числу, равна нулю.

В последующих параграфах мы совсем отбросим ссылки на какие бы то ни было механизмы, осуществляющие выбор чисел, и будем говорить в духе этой более общей терминологии.

§ 54. Функции распределения для непрерывно меняющихся величин. Подобно тому как „равновероятные события“, которые дают нам исходный пункт для изучения дискретных групп событий и тем самым приобретают исключительное теоретическое значение, на практике встречаются сравнительно редко, так и „случайно выбираемые числа“ (или, если угодно предпочесть это выражение, „равновероятные интервалы“) имеют более теоретическое, нежели практическое значение. Большая часть переменных, с которыми приходится встречаться инженеру, имеют свои предпочтительные области значений и, напротив, чрезвычайно редко попадают в другие определенные области. Мы привели уже сопротивление волоска электрической лампочки в качестве примера величины, значение которой не может быть с полной точностью предсказано заранее; однако, если идеал, к которому стремится производство, составляет 300 ом, то для данной отдельной лампы вероятность иметь сопротивление, заключенное между 300 и 310 ом, очевидно, значительно больше, чем вероятность иметь сопротивление, заключенное в интервале той же длины, простирающемся от 390 до 400 ом.



Черт. 9.

Такую переменную лучше всего представлять себе в связи с соответствующей кривой распределения, т. е. кривой, построенной таким образом, что расположенная под нею площадь между ординатами $x=a$ и $x=b$ представляет собою вероятность того, что величина x лежит между этими пределами. Пусть мы имеем дело с кривой, изображенной на черт 9. Непосредственно ясно, что вся площадь, расположенная под кривою, от $-\infty$ до $+\infty$, должна быть равна единице, потому что x с достоверностью должно принять какое-либо значение, заключенное между этими границами.

Пусть уравнение этой кривой есть $y=p(x)$, и пусть $p(>a)$ означает вероятность того, что $x>a$, а $p(<a)$ — вероятность того, что $x<a$. Мы непосредственно видим, что эти три функции связаны между собою следующими соотношениями:

$$p(>a)=\int_a^{\infty} p(x)\,dx, \quad p(<a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx.$$

Первая формула выражает величину площади, расположенной вправо от $x=a$, а вторая — влево. Вообще, вероятность того, что x заключено между a и b, выражается формулой:

$$\int_a^b p(x)\,dx.$$

Допустим теперь, что a и b весьма близки друг к другу, и положим $b=a+da$. Если кривая $y=p(x)$, как это обычно бывает на практике, непрерывна в соседстве точки $x=a$, то фигура, ограниченная осью x-ов, данной кривой и ординатами в точках a и $a+da$, мало отличается от прямоугольника, а потому площадь ее мало отличается от $p(a)\,da$. Разность представляет собою бесконечно малую высшего порядка относительно da, которою обычно можно пренебречь. Поэтому, поскольку мы имеем дело с весьма малыми промежутками, обычно бывает позволительно принять $p(a)\,da$ за вероятность того, что значение переменной попадет в этот промежуток.

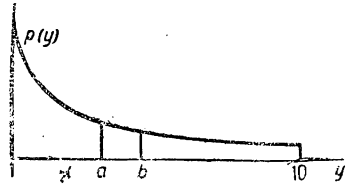
В качестве примеров функций распределения для таких переменных, для которых равные интервалы, вообще говоря, не равновероятны, мы рассмотрим два простых случая. Первый из них — весьма искусственный, но зато вероятности в нем могут быть вычислены. Второй представляет собою наиболее часто встречающийся случай, когда о вероятностях приходится судить — насколько это возможно — на основании длинного ряда наблюдений.

§ 55. Пример переменной, распределенной не „случайно"[1]).

Пример 38. На окружности колеса в примере 37 нанесена логарифмическая шкала с пометками от 1 до 10. Какова кривая распределения для числа, против которого останавливается стрелка, на этой шкале?

Обозначим через y *число*, помеченное на шкале, а через x — его *расстояние* от числа 1. Тогда $x=\log y$ в силу определения логарифмической шкалы. Возьмем теперь два *числа* a и b. Расстояние между ними равно $\log b-\log a$, между тем как длина окружности составляет $\log 10-\log 1$. Значит, вероятность того, что стрелка укажет на число, заключенное между a и b, равна

$$\frac{(\log b-\log a)}{(\log 10-\log 1)}.$$



Черт. 10.

Если мы пользуемся десятичными логарифмами, то $\log 10=1$ и $\log 1=0$, так что найденная вероятность просто равна $\log b-\log a$. Наша кривая распределения должна поэтому иметь такую природу (черт. 10), чтобы для любого интервала $(a,\ b)$ площадь давалась этой формулой. Очевидно, это означает, что

$$\int_a^b p(y)\,dy=\log b-\log a.$$

[1]) Мы напоминаем, что „случайно" распределенными мы условились называть только такие величины, для которых равные интервалы равновероятны. *Прим. ред.*

Диференцируя это соотношение по b, мы находим [1]):

$$p(b) = \frac{\log e}{b},$$

или, если угодно перейти к нашим старым обозначениям:

$$p(y) = \frac{\log e}{y}.$$

Этим и определяется наша кривая.

С этим примером мы справились, отправляясь прямо от нашего определения вероятности. Рассмотрим теперь другой пример, к которому нам не удастся найти теоретического подхода.

§ 56. Функции распределения, определяемые эмпирическим путем.

Пример 39. Построить кривую распределения для продолжительности жизни; другими словами, такую кривую, чтобы площадь, лежащая под каждым ее участком, представляла собою вероятность того, что новорожденного ребенка постигнет смерть в соответствующих возрастных границах.

Несомненно, что с чисто теоретической точки зрения эта задача неразрешима. Известно, что для различных возрастов вероятность смерти различна; целый ряд других фактов, касающихся смертности, также устанавливается опытом. Самое лучшее, что мы можем сделать, — это обратиться к социальной статистике и посмотреть, какая доля населения умирает в данных возрастных границах. Если отдельные случаи смерти рассматривать как взаимно независимые события, то на основании теоремы Бернулли, в случае, когда статистические данные достаточно обширны, можно заключить, что относительное число смертей в данных возрастных границах по всей вероятности мало отличается от вероятности умереть в этих границах.

---

[1]) Не надо забывать, что мы имеем дело с десятичными логарифмами. Чтобы возобновить в памяти формулу диференцирования для этого случая, заметим, что для любого числа x

$$x = e^{\log_e x}.$$

Подобным же образом

$$e = 10^{\log_{10} e}.$$

Подставляя второе выражение в первое, мы находим:

$$x = 10^{(\log_e x)(\log_{10} e)},$$

Но по определению

$$x = 10^{\log_{10} x}.$$

Сравнивая правые части, находим:

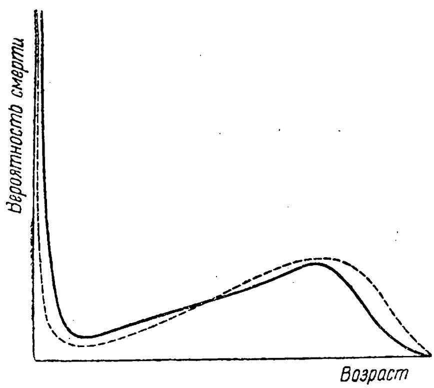
$$\log_{10} x = \log_{10} e \log_e x,$$

откуда диференцированием получаем:

$$\frac{d}{dx} \log_{10} x = \frac{\log_{10} e}{x}.$$

Кривая черт. 11 построена таким путем на основе данных, относящихся к Германии и опубликованных Чубером в его курсе теории вероятностей.

Эта кривая есть кривая „условных вероятностей“: она указывает вероятность смерти в тех или иных возрастных границах для ребенка, родившегося в определенной местности. Она является условной еще и в другом смысле, имеющем для инженера более существенное значение. Жизненные условия не остаются неизменными; медицина и санитария, например, добиваются все новых успехов. Поэтому наша кривая *привязана к определенному времени*. На самом деле в ту эпоху, к которой относится данная кривая, ни один ребенок уже родиться не может, ибо самое существование статистических данных предполагает, что эта эпоха уже миновала. Для ребенка, родившегося сегодня, шансы уже другие, они, может быть, примерно изображаются пунктирною кривою на черт. 11, хотя для построения такой кривой у нас нет лучших оснований, как учет „тенденций“ изменения уже имеющихся вероятностей.



Черт. 11.

Самое важное, что здесь нужно себе заметить, это то, что наши данные *неудовлетворительны вследствие изменчивости вероятностей во времени*. В случае, когда это не так, мы будем говорить, что имеет место „статистическое равновесие“.

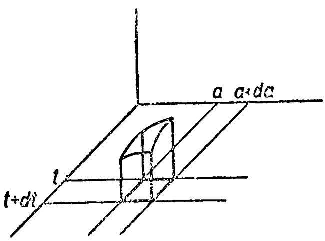
Статистический материал, собранный прежде, только тогда позволяет судить о вероятностях для данного момента, если мы имеем дело с системой, находящейся в статистическом равновесии.

Некоторое представление о том, какого рода неуверенность вносится этим фактором в дело страхования жизни, мы можем получить, сообразив, в каком положении оказались бы страховые общества, если бы, например, общая „тенденция“ была направлена в сторону сокращения продолжительности жизни. Несомненно, в этом случае они понесли бы известные убытки, если бы основывали свои расчеты на имеющемся статистическом материале, и были бы вынуждены всеми доступными способами стараться оценить отличие настоящего момента от минувшего времени, очевидно, рискуя пагубными последствиями в случае неверной догадки.

Страхование жизни само по себе не представляет для нас интереса. Но с теми же самыми условиями постоянно приходится встречаться и в инженерном деле. Возьмем хотя бы пример 36, где в основу решения задачи были положены эмпирические данные. Правда, как раз в этом случае на такие данные можно всецело положиться, так как производство болтов представляет собою, насколько мне известно, вполне установившийся процесс, не подверженный внезапным усовершенствованиям. Допустим, однако, что то же самое рассуждение мы пожелаем применить к производству радиоаппаратуры; за то время, пока мы начнем чувствовать известное доверие к нашим данным, кому-нибудь может притти в голову „усовершенствовать" процесс, и мы станем лицом к лицу с рядом условий, к которым наши данные уже *в точности* применены быть не могут.

Другими словами, условия производства, подобно жизненным условиям, не находятся в состоянии статистического равновесия. Напротив, *вероятности здесь зависят от времени*, и, вообще говоря, характер этой зависимости нам неизвестен.

§ 57. Функции распределения для нескольких переменных. Понятию „сложного события" для случая дискретных величин соответствует понятие „функции нескольких переменных" в случае, когда величины изменяются непрерывно. Пусть, например, мы вырезаем с помощью соответствующего станка металлические кружки, предназначенные для того, чтобы опускать их в отверстие автомата. Если автомат построен таким образом, что не принимает кружков, вес которых слишком отличается от установленного стандарта, то нас естественно будут интересовать вероятные колебания веса нашей продукции. Но вес диска зависит от двух факторов: от толщины t листа в том месте, из которого выбит данный диск, и от его площади a. Обе эти величины подвержены колебаниям, и обе могут меняться непрерывно.



Черт. 12.

Условимся изображать a и t в виде декартовых координат (черт. 12) и построим „поверхность распределения", т. е. такую поверхность, чтобы объем, лежащий под любым ее участком, равнялся вероятности того, что точка (a, t) попадет в соответствующую область. Переменную высоту этой поверхности обозначим через $p(a, t)$. Тогда непосредственно очевидно следующее:

1. Вероятность получить пару значений, соответственно заключенных в пределах $(a, a+da)$ и $(t, t+dt)$, равна $p(a, t)\, da\, dt$ с точностью до бесконечно малых высших порядков.

2. Вероятность получить значение a, заключенное в промежутке $(a, a+da)$, равна объему вертикального слоя, основанием которого служит полоса, ограниченная прямыми a и $a+da$. Если мы обозначим эту вероятность через $p(a)\, da$, то связь ее с $p(a, t)$ может быть записана в виде[1]):

$$p(a)\, da = da \int_{-\infty}^{+\infty} p(a, t)\, dt.$$

[1]) С точностью до бесконечно малых высших порядков относительно da. Общая идея в настоящий момент уже настолько выяснена, что в дальнейшем мы будем опускать подобного рода оговорки, помня, что диференциальное обозначение приобретает полную точность только в пределе.

3. Вероятность получить значение t, заключенное в промежутке $(t, t+dt)$, изображается аналогичным вертикальным слоем. Соответствующая формула пишется так:

$$p(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(a, t)\, da. \tag{56}$$

4. Назовем „событием A“ тот факт, что значение величины a заключено между a и $a+da$, и „событием B“ — тот факт, что значение величины t заключено между t и $t+dt$. К этим событиям мы можем непосредственно применить вывод § 44, что дает:

$$P(AB)=P(A)\, P_A(B). \tag{20}$$

Но мы уже знаем, что $P(A)$ отличается от $p(a)\,da$ на бесконечно малую высшего порядка относительно da, т. е.

$$P(A)=[p(a)+\varepsilon]\, da,$$

где ε стремится к нулю вместе с da. Подобным же образом $P(AB)$ отличается от $p(a, t)\, da\, dt$ на бесконечно малую высшего порядка относительно $da\, dt$, т. е.

$$P(AB)=[p(a, t)+\varepsilon']\, da\, dt,$$

где ε' также стремится к нулю.

Подставляя эти выражения в формулу (20), мы после небольших преобразований получаем:

$$\frac{P_A(B)}{dt}=\frac{p(a, t)+\varepsilon'}{p(a)+\varepsilon}.$$

Пусть теперь da и dt стремятся к нулю. Правая часть последнего равенства при этом стремится к пределу $\frac{p(a, t)}{p(a)}$, который можно, если угодно, обозначить через $p_a(t)$. Поэтому и левая часть должна стремиться к тому же пределу. Это, разумеется, означает, что $p_a(t)\,dt$ отличается от $P_A(B)$ на бесконечно малую высшего порядка относительно dt. Мы можем поэтому назвать величину $p_a(t)\,dt$ „условной вероятностью попадания точки между t и $t+dt$, если известно, что она лежит между a и $a+da$“; при этом, как во всех подобных случаях, подразумевается, что мы пренебрегаем бесконечно малыми высших порядков.

Точное определение величины $p_a(t)$ показывает, однако, что она удовлетворяет соотношению:

$$p(a, t)=p(a)\, p_a(t), \tag{57}$$

представляющему собою полную аналогию соотношению (20) для случая непрерывно меняющихся величин.

Подставляя выражение (57) в (56), мы получаем:

$$p(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(a)\, p_a(t)\, dt, \tag{58}$$

что в точности аналогично формуле (21).

5. Наконец, если бы мы начали с того вертикального слоя, для которого t заключено между t и $t+dt$, то получили бы:

$$p(a, t) = p(t)\, p_t(a);$$

сопоставляя это с соотношением (57), мы находим:

$$p_t(a) = \frac{p(a)\, p_a(t)}{p(t)} \tag{59}$$

или, в силу (58),

$$p_t(a) = \frac{p(a)\, p_a(t)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(a)\, p_a(t)\, da}. \tag{60}$$

Эти формулы аналогичны формулам (53) и (54) и содержат в себе теорему Бейеса для случая непрерывно меняющихся величин.

Очевидно, что значения „толщина“ и „площадь“, которые мы придали величинам t и a, несущественны в этом выводе и что формулы имеют общую значимость. Точно так же наш метод не ограничивается случаем двух переменных; совершенно подобные формулы могли бы быть написаны для любого числа переменных. Так, например, скорость газовой молекулы может быть определена своими тремя проекциями на направления координатных осей x, y, z. Несомненно, имеется определенная вероятность того, что молекула будет иметь такую-то определенную скорость[1]). Обозначим эту вероятность через $p(u, v, w)$, где u, v и w — компоненты скорости, о которых мы только что говорили.

Разумеется, мы хотим этим сказать, что вероятность попадания трех компонент скорости соответственно в границы $(u, u+du)$, $(v, v+dv)$ и $(w, w+dw)$ равна $p(u, v, w)\; du\, dv\, dw$. Однако геометрическая иллюстрация здесь не так проста, как в предыдущем случае: нам нужны три измерения, чтобы изобразить u, v и w, и *четвертое* измерение для изображения p. Так как представить себе четырехмерного пространства мы не можем, то нам остается действовать по аналогии; а в этом направлении нам проще говорить об „интеграции функции p по некоторому объему“, чем пытаться представить себе четвертое измерение. Так, возвращаясь к случаю двух переменных, формула, установленная в пункте 2, учит нас, что $p(a)\, da$ является результатом „интеграции функции $p(a, t)$ по полосе, ограниченной прямыми a и $a+da$“. В этом же смысле мы говорим, что вероятность попадания точки (u, v, w) внутрь некоторого объема получается интегрированием функции $p(u, v, w)$ по этому объему. Совсем не обязательно, чтобы этот объем был ограничен плоскостями, параллельными координатным. Это может быть совершенно произвольный объем.

---

[1]) Здесь слово „скорость“ понимается в его научном смысле, т. е. соединяет в себе понятия быстроты и направления. Иначе говоря, мы мыслим скорость как вектор.

§ 58. Примеры замены переменных в функциях распределения. При изучении молекул газа нас не всегда интересует их скорость. Мы хотим иногда исследовать их быстроту[1]), направление, количество движения, энергию и т. п. Но так как все эти величины всецело определяются скоростью[2]) молекулы, то мы как будто должны иметь возможность выразить вероятность для любой из них через $p(u, v, w)$. И действительно, мы можем это сделать.

Пусть, например, мы хотим найти вероятность того, что быстрота некоторой определенной молекулы меньше, чем s. Для этого u, v и w должны иметь такие значения, чтобы $u^2+v^2+w^2<s^2$; иначе говоря, точка (u, v, w) должна лежать внутри сферы радиуса s с центром в начале. Таким образом

$$p(<s)=\iiint p(u, v, w)\, du\, dv\, dw,$$

где интеграл распространен на объем только что упомянутой сферы.

В нашей двухмерной задаче мы искали вероятность того, что вес w будет лежать в пределах от w_0 до w_0+dw. Мы заметили уже, что[3]) $w=ta$. Значит, t и a должны лежать внутри полосы, ограниченной кривыми

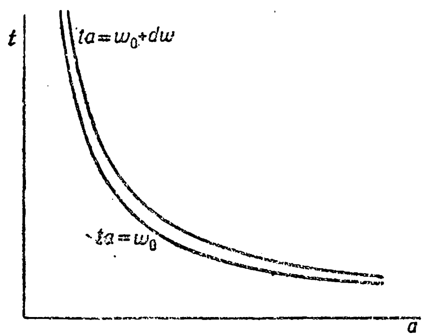
$$ta=w_0$$

и

$$ta=w_0+dw.$$

Это — две гиперболы, изображенные на черт. 13. Следовательно:

$$p(w)\, dw=\int_0^\infty da \int_{\frac{w_0}{a}}^{\frac{w_0+dw}{a}} p(a, t)\, dt.$$



Черт. 13.

Мы предполагаем, что dw весьма мало. В этом случае пределы внутренней интеграции весьма близки друг к другу, за исключением тех случаев, когда a само чрезвычайно мало. Но в нашей задаче весьма малое значение a означало бы диск ничтожно малой площади; диски такого рода настолько маловероятны, что мы не сделаем практической ошибки, считая их невозможными. Допустим, что диски площади, меньшей, чем a_0, совсем не встречаются. Тогда пределы внутреннего интеграла *всегда* будут весьма близки друг к другу, если только dw мало.

Далее, если функция $p(a, t)$ непрерывна, то значения ее во всей области внутренней интеграции будут мало отличаться от $p\left(a, \frac{w_0}{a}\right)$.

[1]) Т. е. абсолютное значение скорости.

[2]) И массой, которая обычно предполагается постоянной.

[3]) Мы выбираем единицу веса таким образом, чтобы множитель пропорциональности (т. е. удельный вес) равнялся единице.

Поэтому

$$\int\limits_{\frac{w_0}{a}}^{\frac{w_0+dw}{a}} p(a, t)\,dt = p\left(a, \frac{w_0}{a}\right)\frac{dw}{a}$$

и

$$p(w_0)\,dw = dw\int\limits_0^{\infty} p\left(a, \frac{w_0}{a}\right)\frac{da}{a}.$$

Допущенные здесь погрешности — не ниже второго порядка малости относительно dw, а так как наше определение величины $p(w_0)$ либо предполагает предельный переход, либо содержит в себе погрешность такого же порядка, то поставленные нами знаки равенства являются законными. Наконец, отбрасывая индекс при w_0, не имеющий никакого значения, мы получаем:

$$p(w) = \int\limits_0^{\infty} p\left(a, \frac{w}{a}\right)da. \tag{61}$$

На эту формулу нам придется ссылаться в дальнейшем; сейчас же уместно обратить внимание на одно неправильное рассуждение, жертвой которого мы могли бы стать при некоторой беспечности. Вот оно: для того чтобы w равнялось w_0, необходимо и достаточно, чтобы t равнялось $\frac{w_0}{a}$. Но вероятность этого согласно формуле (56) равна

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\left(a, \frac{w_0}{a}\right)da.$$

Однако это не совпадает с правильным ответом (61). Читатель без труда сам найдет причину ошибки.

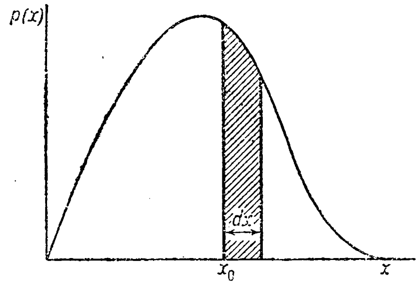
Оба рассмотренных примера принадлежат к области „замены переменных“: от u, v и w мы перенесли наше внимание на s; или от t и a — на w. В обоих случаях мы параллельно с этим уменьшили число переменных, хотя это совсем не обязательно. Мы могли бы, если угодно, искать вероятность данного веса w и данного радиуса r; мы ввели бы таким образом две новых переменных, а не одну, как раньше. Очевидно, такого рода замен переменных естественно ожидать по мере того, как наше внимание с одной стороны проблемы переносится на другую; а так как мы убедились, что простая подстановка новых переменных в старые формулы не приводит к правильным результатам, то мы вынуждены обратиться к подробному исследованию этого вопроса.

§ 59. Замена переменных в функциях распределения. Рассмотрим сначала пример, в котором встречается только одна переменная, и будем рассуждать в духе примеров 37 и 38. Решая пример 38, мы пользовались известным уже нам решением примера 37, мы знали $p(x)$ и соотношение $x = \log y$ и отсюда нашли $p(y)$.

Пусть $p(x)$ изображается кривою черт. 14. В примере 38 это была, конечно, прямая, параллельная оси x-ов; но так как мы здесь хотим получить общий результат, то мы берем график „произвольной функции“. Допустим также, что $p(y)$ тем или иным путем найдено и изображается кривой черт. 15. Пусть, наконец, y связано с x данным соотношением:

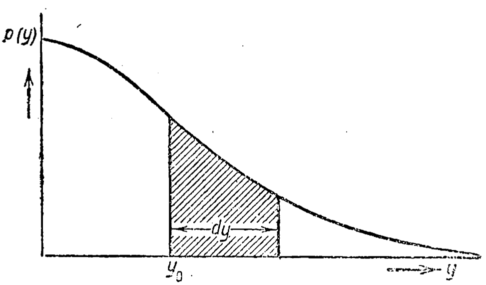
$$y = f(x), \tag{62}$$

подобно тому как в примере 38 мы имели соотношение $y = 10^x$.



Черт. 14.

Вероятность того, что x лежит в пределах от x_0 до $x_0 + dx$, изображается площадью, заштрихованной на черт. 14. Но, где бы x ни помещалось внутри этого промежутка, y также должно быть заключено между определенными границами, именно между $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 + dy = f(x_0 + dx)$, т. е. в пределах заштрихованной части черт. 15. Так как одно из этих двух событий с необходимостью влечет за собою другое, то величины этих двух заштрихованных площадей должны быть одинаковы.



Черт. 15.

Допустим теперь, что dx весьма мало. Тогда и dy должно быть весьма мало, если только $\frac{dy}{dx}$ не обращается в бесконечность. Следовательно, обе заштрихованные площади приблизительно прямоугольны. Обозначая через b и h соответственно основания и высоты этих прямоугольников, мы должны иметь:

$$h_x b_x = h = h_y b_y. \tag{63}$$

Но высоты по определению равны $p(x)$ и $p(y)$, а основания — dx и $f(x_0 + dx) - f(x_0)$, причем последнее приблизительно равно $f'(x_0)\,dx$. Отбрасывая индексы, больше нам не нужные, мы поэтому находим новую функцию распределения в виде[1]):

$$p(y) = \frac{p(x)}{f'(x)}. \tag{64}$$

Разумеется, это соотношение связывает *соответственные* значения x и y. Так, в примере 38 y всегда равно 10^x, и обратно, x всегда

---

[1]) Надо иметь в виду, что в противоположность общей математической традиции автор здесь через $p(x)$ и $p(y)$ обозначает *различные функции. Прим. ред.*

равно $\log y$. Следовательно, для этой частной задачи формула (64) принимает вид:

$$p(y)=\left.\frac{p(x)}{\frac{d}{dx}(10^x)}\right|_{x=\log y},$$

что совпадает с решением, полученным в § 55, если мы вспомним, что

$$p(x)=1 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}(10^x)=\frac{10^x}{\log e}.$$

Подобным же образом в формуле (64) x должно иметь значение, получаемое решением уравнения (62). Так как оно зависит от y, то мы можем обозначить его через $f^{-1}(y)$ и написать формулу (64) в виде:

$$p(y)=\left.\frac{p(x)}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}. \tag{65}$$

Это — общая формула, с помощью которой, зная функцию распределения для переменной x и соотношение, связывающее x с другой переменной y, мы можем получить функцию распределения для y. Она выражает только то единственное условие, что соответствующие элементы площади обеих кривых распределения должны быть одинаковы.

Можно вывести подобные же правила для функций распределения от нескольких переменных. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим сначала случай двух переменных x и y. Для изображения их необходима плоскость; каждая пара значений x и y определяет точку (x, y) этой плоскости, и функция распределения $p(x, y)$ определяется таким образом, чтобы интеграл ее, распространенный на какую-нибудь область dA, давал нам вероятность того, что точка (x, y) попадает внутрь этой области. Если dA достаточно мало, то функция $p(x, y)$ может внутри этой области быть принята за постоянную, и упомянутая вероятность дается формулой[1] $p(x, y)\,dA$.

Пусть мы теперь имеем две других переменных ξ и η, связанных с x и y уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=f(x, y),\\ \eta&=\Phi(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

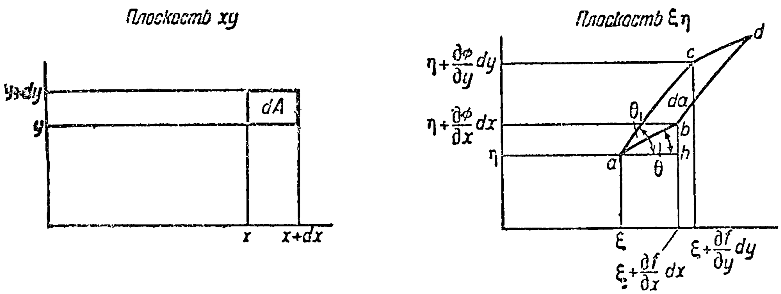
которые соответствуют уравнению $y=f(x)$ для случая одной переменной. Для изображения новых переменных мы берем другую плоскость и ищем новую функцию распределения $p(\xi, \eta)$. Когда точка (x, y) описывает контур площади dA, соответствующая точка (ξ, η) движется по некоторой кривой в своей плоскости. Эта кривая ограничивает неко-

[1]) В частности, если dA есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, то площадь его удобно обозначить череа $dx\,dy$. Тогда вероятность, о которой идет речь, примет вид $p(x,y)\ dx\,dy$. Однако ни в какой мере необязательно, чтобы площадь имела именно такой вид, и потому мы предпочитаем более общее обозначение dA.

торую площадь da, которую мы будем называть „элементом площади, соответствующим dA“. Если точка (x, y) лежит внутри dA, то соответствующая точка (ξ, η) лежит внутри da. Поэтому

$$p(\xi, \eta)\, da = p(x, y)\, dA. \tag{67}$$

Если x и y заданы заранее, то входящие в это соотношение величины ξ и η должны быть получены из уравнений (66). Наоборот, если даны ξ и η, то x и y получаются решением системы (66), подобно тому как для составления формулы (65) мы должны были предполагать уравнение $y = f(x)$ разрешенным относительно x.



Черт. 16.

Как мы уже заметили, dA и da — *соответственные* элементы площади. Для получения $p(\xi, \eta)$ мы должны поэтому помножить $p(x, y)$ на отношение $\dfrac{dA}{da}$, подобно тому как в формуле (64) мы должны были помножить $p(x)$ на отношение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Чтобы найти это отношение, мы примем dA за прямоугольник, ограниченный значениями переменных x, $x + dx$, y и $y + dy$ (черт. 16). Когда точка (x, y) описывает одну из сторон этого прямоугольника, точка (ξ, η) описывает некоторую кривую. Таким образом элемент площади da ограничен элементами четырех кривых, как это и показано на чертеже. Если dx и dy очень малы, то эти элементы так мало отличаются от прямолинейных отрезков, что разность между площадью элемента da и площадью прямолинейного четырехугольника с вершинами в точках a, b, c, d становится ничтожно малой. Таким образом для нашей цели достаточно определить в плоскости $\xi\eta$ положение четырех точек, соответствующих четырем вершинам прямоугольника dA. После этого мы можем соединить их прямыми линиями.

Рассмотрим прежде всего точку, соответствующую точке (x, y), нижней левой вершине прямоугольника dA. Пусть это будет точка a на черт. 16. Координаты ее даются формулами (66). Далее возьмем точку $(x + dx, y)$ — нижнюю правую вершину прямоугольника dA. Соответствующая вершина b элемента da имеет координаты $f(x + dx, y)$ и

$\Phi(x+dx, y)$. Если dx достаточно мало, то вместо этого мы можем написать [1]) соответственно:

$$f(x, y)+\frac{\partial f}{\partial x}dx \quad \text{и} \quad \Phi(x, y)+\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx.$$

Но $f(x, y)=\xi$, а $\Phi(x, y)=\eta$, т. е. эти две величины представляют собою координаты точки a. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx$ соответственно равны горизонтальному и вертикальному катету треугольника ahb.

Рассмотрим далее верхнюю левую вершину $(x, y+dy)$. В плоскости $\xi\eta$ мы получаем соответствующую точку, координаты которой, как легко видеть, равны

$$\xi+\frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \text{и} \quad \eta+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy.$$

Это — точка c черт. 16.

Нам незачем искать координат четвертой точки d, потому что, если dy и dx очень малы, $d\alpha$ по форме почти не отличается от параллелограма, и потому площадь этого элемента в достаточной мере определяется двумя сторонами ab и ac. Эта площадь равна произведению сторон ab и ac на синус угла между ними. Через углы Θ и Θ_1 это может быть выражено так:

$$d\alpha=ab\cdot ac\cdot\sin(\Theta_1-\Theta)=(ab\cos\Theta)(ac\sin\Theta_1)-(ab\sin\Theta)(ac\cos\Theta_1).$$

Но

$$ah=ab\cos\Theta=\frac{\partial f}{\partial x}dx,$$

$$bh=ab\sin\Theta=\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx,$$

$$ac\cos\Theta_1=\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$ac\sin\Theta_1=\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy,$$

откуда

$$d\alpha=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)dA.$$

[1]) Мы имеем здесь дело с частными производными, потому что вдоль этой стороны прямоугольника y остается постоянным.

Это и дает нам отношение $\frac{da}{dA}$. Для нашей цели удобнее записать его в таком виде:

$$da = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix} dA.$$

Так как f и Φ фактически означают соответственно то же самое, что ξ и η [в самом деле, мы могли бы записать вместо формул (66) $\xi = \xi(x, y)$ $\eta = \eta(x, y)$], то этот определитель можно с таким же успехом записать в виде:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{68}$$

Тогда в силу соотношения (67)

$$p(\xi, \eta) = \frac{p(x, y)}{\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}},$$

причем, конечно, подразумевается, что x и y, стоящие в правой части, должны быть выражены через ξ и η при помощи формул (66).

Если бы нам пришлось иметь дело с задачей, в которой участвуют три переменных x, y и z, мы должны были бы говорить об элементах объема вместо элементов площади; и совершенно аналогичным рассуждением мы могли бы найти отношение двух соответственных объемных элементов в пространствах $\xi\eta\zeta$ и xyz. Мы не будем приводить этого рассуждения, так как оно принципиально ничем не отличается от предыдущего. Результат же его гласит:

$$da = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} dA,$$

где da и dA означают два соответственных элементарных объема в пространствах $\xi\eta\zeta$ и xyz.

В общем случае, при любом числе переменных $x, y, z, \ldots, w$, если мы от одной системы переменных переходим к другой, новый диференциальный элемент da выражается через старый dA посредством соотношения:

$$da = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\xi}{\partial w} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\eta}{\partial w} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\zeta}{\partial w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial y} & \frac{\partial\omega}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\omega}{\partial w} \end{vmatrix} dA, \tag{69}$$

или в символическом обозначении

$$da = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}{\partial(x, y, z, \ldots, w)}\, dA.$$

Отсюда

$$p(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega) = \frac{p(x, y, z, \ldots, w)}{\dfrac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}{\partial(x, y, z, \ldots, w)}}. \tag{70}$$

Определитель $\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}{\partial(x, y, z, \ldots, w)}$, элементами которого служат частные производные новых переменных по старым, называется „якобианом" данного преобразования. Геометрическое значение его состоит в той самой концепции, которая нас к нему привела: он равен отношению соответственных диференциальных элементов в двух выбранных системах координат. Мы сделаем относительно него три следующих замечания.

Во-первых, интересно отметить, что тот простейший случай, которым мы занимались в начале настоящего параграфа и где мы имели только одну новую переменную y и одну старую переменную x, находится в полном согласии с нашим общим результатом. Так как новая переменная определяется только *одним соотношением* $y=f(x)$, то в определителе (69) мы должны иметь только *одну строку*; а так как в первоначальной системе имеется только *одна переменная* x, то в данном случае возможна только одна производная функции f, а значит — только *один столбец* в определителе (69). Весь якобиан приводится таким образом к единственному члену $\frac{df}{dx}$, который поэтому и служит отношением старого и нового диференциальных элементов. Именно этот результат и был нами получен.

Во вторую очередь заметим, что между старыми и новыми переменными имеет место полная взаимность. После того как мы нашли функцию $p(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)$, мы можем смотреть на нее как на́ „данную функцию распределения“ и, отправляясь от нее, искать $p(x, y, z, \ldots, w)$ совершенно таким рассуждением, как проведенное выше. Единственным существенным отличием этого нового процесса будет то, что теперь для составления якобиана, вместо того чтобы диференцировать соотношения $\xi = \xi(x, y, z, \ldots, w)$, $\eta = \eta(x, y, z, \ldots, w), \ldots$, нам придется оперировать с обратными соотношениями, выражающими $x, y, z, \ldots, w$ через $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$. Очевидно, что в результате этого обратного процесса мы придем к соотношению:

$$p(x, y, z, \ldots, w) = \frac{p(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}}. \tag{71}$$

Так как в равенствах (70) и (71) обе функции p означают одно и то же, то мы получаем следующее замечательное (впрочем, с геометрической точки зрения очевидное) свойство якобианов: определитель

$$\frac{\partial(x, y, z, \ldots, w)}{\partial(\xi, \eta, z, \ldots, \omega)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial \omega} \end{vmatrix}$$

равен обратной величине определителя

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}{\partial(x, y, z, \ldots, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial \xi}{\partial w} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial \eta}{\partial w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial \omega}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Пусть, например, x и y связаны с ξ и η соотношениями:

$$x = \xi \cos \eta,$$
$$y = \xi \sin \eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \cos \eta & -\xi \sin \eta \\ \sin \eta & \xi \cos \eta \end{vmatrix} = \xi.$$

С другой стороны, разрешая относительно ξ и η, мы находим:

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\eta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

откуда

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\xi}=\frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}}.$$

Третье наше замечание состоит в том, что, так как отношение двух объемов не может быть отрицательным[1]), определитель в формуле (69) всегда должен быть положительным. Однако знак его зависит от порядка, в котором написаны переменные, ибо мы всегда можем изменить знак детерминанта, переставив в нем две строки или два столбца. Если бы мы, например, написали соотношения последнего примера в порядке

$$y=\xi\sin\eta,$$
$$x=\xi\cos\eta,$$

то мы нашли бы:

$$\frac{\partial(y,x)}{\partial(\xi,\eta)}=-\xi.$$

Таким образом знак якобиана нельзя считать существенной его принадлежностью, и потому мы вправе всегда считать его положительным.

В качестве дальнейшего примера рассмотрим еще раз задачу, которую мы решили в § 58. Мы считали там известной функцию распределения для a и t и искали новую функцию распределения для единственной переменной w, связанной с a и t соотношением:

$$w=ta.$$

Попытаемся сначала найти новую функцию распределения для *двух* переменных:

$$w=ta,$$
$$v=a.$$

Мы находим:

$$\frac{\partial(w,v)}{\partial(a,t)}=\begin{vmatrix}t & a\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-a.$$

Отсюда, отбрасывая отрицательный знак, мы переходим к новой функции распределения[2]):

$$P(w,v)=\left.\frac{p(a,t)}{a}\right|_{\substack{a=v\\ t=\frac{w}{v}}}=\frac{p\left(v,\frac{w}{v}\right)}{v}.$$

---

[1]) В других ветвях математики, в частности в топологии, знак якобиана имеет существенное значение. Однако здесь об этом не стоит распространяться, так как для наших целей важна только абсолютная величина якобиана.

[2]) Заглавная буква P здесь выбрана, чтобы избежать возможного смещения с правой частью равенства. (Ср. выноску на стр. 121. *Прим. ред.*)

61

Наконец, на основании формулы (56) мы получаем функцию распределения для единственной переменной w в виде:

$$p(w)=\int_0^\infty P(w, v)\,dv=\int_0^\infty p\left(v, \frac{w}{v}\right)\frac{dv}{v};$$

этот результат отличается от (61) только другим обозначением переменной интеграции.

§ 60. Вывод функции распределения для скорости молекул газа. Одна из важнейших физических проблем, к которым в первую очередь была применена теория вероятностей, и притом фактически единственная, где так называемый „нормальный закон" появляется в результате аргументации, хоть сколько-нибудь физически обоснованной, — это проблема распределения скоростей в совершенном газе. Ниже (в § 143) мы дадим то ее решение, которое, повидимому, представляется наиболее удовлетворительным. Здесь же она нужна нам лишь как иллюстрация тех процессов, какими мы занимались в этой главе, и потому мы удовлетворимся „решением", весьма далеким от строгости.

Мы допустим, что газ состоит из очень большого числа частиц, одинаковых или различных между собою, но находящихся в состоянии оживленного движения. Мы примем далее, что газ заключен в неподвижном сосуде. Вопрос, стоящий перед нами, гласит: какова вероятность того, что данная частица будет иметь такую-то определенную скорость?

Прежде всего следует озаботиться тем, чтобы нам был в точности ясен смысл поставленной задачи. Мы будем понимать ее так: некоторая определенная частица отмечена особым знаком, чтобы мы всегда могли отличить ее от других; выбирается наудачу какой-либо момент наблюдения, и в этот момент регистрируется по величине и направлению скорость отмеченной частицы; какова вероятность того, что компоненты этой скорости будут соответственно лежать между u и $u+du$, v и $v+dv$, w и $w+dw$?

Мы сделаем следующие допущения:

a) Вероятность той или иной скорости не зависит от того, в какой части сосуда находится в данный момент наша частица; т. е. $p^*(u, v, w)$ не зависит от x, y, z [1]).

Это условие фактически нарушается в двух часто встречающихся случаях: 1) когда разные части газа имеют различную температуру и 2) когда они имеют различное давление, — когда газ, например, вытекает из отверстия.

b) Все направления движения одинаково вероятны.

Против этого мы ничего не имеем возразить.

c) Вероятность различных значений компоненты u (в направлении оси x-ов) не зависит от того, какие значения имеют две другие компоненты v и w.

---

[1]) Звездочка поставлена для согласования с обозначениями главы XI.

В этом допущении заключается вся слабость нашей аргументации; ибо ни с математической, ни с физической точек зрения ни в какой мере не очевидно, что это должно быть так. Поэтому наш „вывод“ является не очень убедительным; однако мы будем продолжать его.

Пусть $p^*(u)$ есть функция распределения компоненты u. В силу допущения с)

$$p^*(u, v, w) = p^*(u)\, p^*(v)\, p^*(w),$$

или

$$\log p^*(u, v, w) = \log p^*(u) + \log p^*(v) + \log p^*(w).$$

В силу допущения b) величина $p^*(u, v, w)$ должна быть функцией одной только комбинации $u^2+v^2+w^2$, потому что, если бы мы заменили три компоненты скорости их выражениями через быстроту и направление, то переменные, характеризующие направление, должны были бы сами собою исчезнуть, оставив одну только быстроту. Допустим поэтому, что

$$\log p^*(u, v, w) = f(u^2+v^2+w^2).$$

Сделаем теперь наше последнее допущение: примем, что функция f может быть разложена в степенной ряд, по крайней мере для малых значений быстроты. Мы получим:

$$\begin{aligned} f(u^2+v^2+w^2) &= a_0 + a_1(u^2+v^2+w^2) + a_2(u^2+v^2+w^2)^2 + \ldots = \\ &= \log p^*(u) + \log p^*(v) + \log p^*(w). \end{aligned} \tag{72}$$

Правая часть этих равенств показывает, что $f(u^2+v^2+w^2)$ не может содержать членов, в которых фигурировали бы произведения переменных u, v и w. Но в нашем степенном ряду все члены кроме $a_0+a_1(u^2+v^2+w^2)$ при развертывании приводят к слагаемым, содержащим такие произведения. Следовательно, коэфициенты $a_2, a_3, \ldots$ все должны быть нулями, и мы получаем:

$$\log p^*(u, v, w) = a_0 + a_1(u^2+v^2+w^2),$$

откуда

$$p^*(u, v, w) = Ae^{a_1(u^2+v^2+w^2)}.$$

Это решение содержит две постоянных A и a_1, однако они не совсем произвольны, так как должны удовлетворять соотношению:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^*(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 1,$$

которое требует, чтобы $\pi^3 A^2 = -a_1^3$. Полагая $a_1 = -a$, мы приходим к окончательному результату[1]):

$$p^*(u, v, w) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-a(u^2+v^2+w^2)}. \tag{73}$$

[1]) С исторической точки зрения интересно заметить, что Максвелл в первый раз вывел уравнение (73) именно тем путем, которым мы шли здесь. Однако он сам обратил внимание на недостаточную обоснованность этого рассуждения

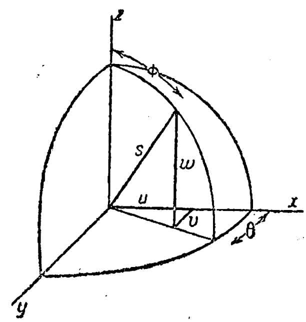
Это — уравнение Максвелла. Оно содержит только одну произвольную постоянную a, и можно показать, что она полностью определяется температурой газа и массой рассматриваемой частицы.

§ 61. Примеры; замена переменных в уравнении Максвелла. В качестве примера, показывающего, какую пользу может иногда принести замена переменных, рассмотрим следующую задачу:

Пример 40. Допуская, что вероятность значений u, v, w для компоненты скорости газовой молекулы дается формулой (73), найти закон распределения скоростей, выраженный в переменных s (быстрота), Φ (дополнение к широте) и Θ (долгота).

Система координат, которая только что перечислена, представляет собою обычную полярную (или сферическую) систему координат. Она изображена на черт. 17, из которого непосредственно очевидны и соотношения между двумя группами переменных:

$$\left.\begin{aligned} u &= s\sin\Phi\cos\Theta, \\ v &= s\sin\Phi\sin\Theta, \\ w &= s\cos\Phi. \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$



Черт. 17.

Зная эти соотношения, мы имеем все данные для преобразования формулы (73) к новым переменным s, Φ и Θ; правда, соотношения (74) случайно выражают старые переменные через новые, а не обратно. Однако это, как мы знаем, не может служить препятствием, так как якобиан одной группы равен обратной величине якобиана другой.

Мы непосредственно получаем:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, \Phi, \Theta)} = \begin{vmatrix} \sin\Phi\cos\Theta & s\cos\Phi\cos\Theta & -s\sin\Phi\sin\Theta \\ \sin\Phi\sin\Theta & s\cos\Phi\sin\Theta & s\sin\Phi\cos\Theta \\ \cos\Phi & -s\sin\Phi & 0 \end{vmatrix} = s^2\sin\Phi;$$

поэтому

$$p^*(s, \Phi, \Theta) = s^2\sin\Phi\, p^*(u, v, w),$$

или, так как $u^2 + v^2 + w^2 = s^2$,

$$p^*(s, \Phi, \Theta) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} s^2\sin\Phi\, e^{-as^2}. \qquad (75)$$

и впоследствии пытался усовершенствовать свой вывод при помощи аргументации, близкой к той, которая будет приведена в § 140. Насколько я могу судить, он считал это второе доказательство безупречным; несколько лет спустя было установлено, что оно опирается на допущение, обоснованность которого немногим больше обоснованности нашего предположения о взаимной независимости трех компонент скорости.

Это уравнение в точности эквивалентно уравнению (73); оно отличается от него только тем, что выражено в полярных компонентах скорости, вместо декартовых.

Последнее уравнение обнаруживает один парадоксальный пункт в нашем рассуждении. В силу допущения b) § 60, все направления должны быть одинаково вероятны; и мы заметили уже, что именно благодаря этому допущению мы были вправе утверждать, что $p^*(u, v, w)$ должно быть функцией одного s^2. Между тем, формула (75) наряду с s^2 содержит также и Φ, благодаря чему на первый взгляд стоит в противоречии с одною из тех предпосылок, на которых основан ее вывод.

Этот парадокс разрешается просто. Краткое выражение „все направления одинаково вероятны" в действительности имеет следующее значение: какое бы направление мы ни выбрали, вероятность того, что скорость нашей частицы образует с этим направлением угол меньший, чем $d\alpha$, будет одна и та же. Или, выражаясь несколько иначе: если в некоторый момент провести через нашу частицу две произвольные прямые и описать вокруг этих прямых два одинаковых конуса, то вероятность того, что направление движения нашей частицы окажется заключенным внутри того или другого конуса, одинакова для обоих конусов.

Если мы теперь из общей вершины этих двух конусов как из центра опишем сферу, то каждый из конусов вырежет на поверхности этой сферы определенную площадь, и очевидно, что эти две площади будут одинаковы. Следовательно, наше допущение b) требует: вероятность того, что направление движения частицы пересечет построенную сферу в точке, лежащей внутри некоторой определенной фигуры, не должна зависеть от того, где именно на сфере помещена эта фигура. Но элемент $d\Phi\, d\Theta$ не во всех пунктах сферы имеет одинаковую площадь; элементом площади служит выражение $r^2 \sin\Phi\, d\Phi\, d\Theta$, где r — радиус сферы; и если мы условимся называть „элементом направления" телесный угол, опирающийся на этот элемент площади, то „элементом направления" будет служить величина $\sin\Phi\, d\Phi\, d\Theta$. Следовательно, если мы запишем соотношение (75) в виде:

$$p^*(s, \Phi, \Theta)\, ds\, d\Phi\, d\Theta = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} s^2 e^{-as^2} ds\, (\sin\Phi\, d\Phi\, d\Theta),$$

то видим, что оно находится в полном согласии с допущением b).

§ 62. Какие заключения можно вывести из формул (73) и (75).

Из формулы (75) мы можем легко найти вероятность того, что *быстрота* молекулы заключена между s и $s + ds$, если нас не интересует вопрос о направлении движения. Для этого надо только проинтегрировать выражение $p^*(s, \Phi, \Theta)\, ds\, d\Phi\, d\Theta$ по всем возможным значениям Θ и Φ, — иначе говоря, просуммировать для всевозможных направлений вероятности того, что молекула имеет желаемую быстроту *именно в данном определенном направлении*. Но чтобы охватить всевозможные направления, мы должны заставить Θ измениться от 0 до 2π, а Φ — от 0 до π. Таким образом

$$p^*(s)\,ds=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} s^2e^{-as^2}ds\int\limits_0^{\pi}d\Phi\int\limits_0^{2\pi}d\Theta\sin\Phi,$$

откуда

$$p^*(s)=4\sqrt{\frac{a^3}{\pi}}\,s^2e^{-as^2}. \tag{76}$$

В этой формуле существенно то, что она дает закон распределения для *быстроты* в отличие от формул (73) и (75), дающих закон распределения для *скорости* (т. е. быстроты, соединенной с направлением).

Возвращаясь теперь к формуле (73), поставим себе следующий вопрос: какова вероятность того, что компонента скорости данной молекулы в направлении оси x-ов равна u, независимо от того, какие значения имеют другие компоненты? Решение этой задачи может быть получено из формулы (73) тем самым путем, которым мы получили выражение (76) из формулы (75). Мы должны просуммировать выражение $p^*(u, v, w)\,du\,dv\,dw$ по всем значениям v и w, какие только могут наблюдаться наряду с данным значением u; это дает:

$$p^*(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dw\,p^*(u, v, w)=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-au^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-av^2}dv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-aw^2}dw.$$

Два последних интеграла совершенно одинаковы; достаточно поэтому найти один из них. Так как e^{-aw^2} — функция четная, то интеграл ее от $-\infty$ до $+\infty$ может быть заменен удвоенным интегралом от 0 до $+\infty$. Подставляя $aw^2=y$, мы находим:

$$2\int\limits_0^{\infty}e^{-aw^2}dw=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_0^{\infty}y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy;$$

последний же интеграл по определению есть $\left(-\frac{1}{2}\right)!$ и потому, как известно, равен $\sqrt{\pi}$. Таким образом каждый из двух подлежащих нашему вычислению интегралов равен $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, а произведение их равно $\frac{\pi}{a}$. Это приводит нас к формуле:

$$p^*(u)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,e^{-au^2}. \tag{77}$$

Так как формула (73) симметрична относительно u, v и w, то функции распределения для двух других компонент могут быть написаны непосредственно:

$$p^*(v) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-av^2},$$

$$p^*(w) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-aw^2}.$$

Если бы в наших интересах не было здесь иллюстрировать формальные операции, с помощью которых совершается переход от одних функций распределения к другим, то формула (77) могла бы быть получена значительно более простым путем из формулы (72). Непосредственно очевидно, что $\log p^*(u)$ должен складываться из a_1u^2 и некоторой константы, причем ту же константу должны содержать также $\log p^*(v)$ и $\log p^*(w)$. Следовательно, эта константа должна равняться $\frac{a_0}{3}$, что немедленно приводит нас к формуле (77).

Другой круг вопросов, часто возникающих в физических задачах, относится к типу молекул, пронизывающих некоторую данную поверхность. Речь может итти, например, о диффузии газа через отверстие в стенке сосуда или о молекулах, пересекающих определенную воображаемую математическую поверхность где-нибудь внутри сосуда. Принципиальное отличие этих двух случаев состоит в том, что в первом молекулы пересекают поверхность только в одном направлении, тогда как во втором полет их совершается в обоих направлениях. Мы рассмотрим здесь второй случай.

Для полной определенности мы поставим вопрос следующим образом: известно, что данная молекула в течение данного небольшого промежутка времени dt пересекает данный элемент поверхности; какова вероятность того, что компоненты ее скорости имеют значения u, v и w?

Очевидно, мы здесь имеем дело с задачей, к которой может быть применена теорема Бейеса; потому что, если мы назовем „событием A“ тот факт, что молекула имеет данную скорость, и „событием B“ факт пересечения молекулой данной поверхности, то наша задача гласит: „зная, что событие B состоялось, найти вероятность того, что оно сопровождалось событием A?“ Мы знаем, что решение дается формулой:

$$p_B^*(u, v, w) = \frac{p^*(u, v, w)\, p_{uvw}(B)}{p(B)}.$$

В правой части $p^*(u, v, w)$ дается формулой (73), а знаменатель может быть вычислен суммированием выражений, подобных числителю, если только нам удастся найти $p_{uvw}(B)$. Таким образом вся задача приводится к отысканию этого последнего выражения.

Выберем оси координат таким образом, чтобы ось x-ов была направлена перпендикулярно к рассматриваемой нами элементарной площадке, которую мы обозначили через dA. Вопрос о том, пересечет или не пересечет данная молекула нашу площадку в течение промежутка времени dt, зависит от ее положения в начале этого промежутка. Простейший путь к ответу на вопрос, где в этот момент должна находиться молекула для того, чтобы пересечение состоялось, состоит в следующем: представим себе, что молекула находится где-нибудь в покое и что элементарная площадка приведена в движение со скоростью, компоненты которой равны $-u$, $-v$ и $-w$. Относительная скорость будет при этом такою же, как в действительности, и молекула пересекла бы площадку в том и только в том случае, если площадка при своем движении пройдет через молекулу. В этом процессе площадка породит своим движением некоторое тело цилиндрической формы, объем которого равен произведению величины площадки на высоту тела. Эта высота, очевидно, равна абсолютному значению произведения $u\,dt$, которое обычным образом обозначается через $|u|\,dt$. Таким образом элемент объема равен $|u|\,dA\,dt$.

Но наша молекула была выбрана безотносительно к ее положению; с одинаковой вероятностью она может оказаться в любой части сосуда. Поэтому, обозначая объем всего сосуда через V, мы будем иметь:

$$p_{uvw}(B) = \frac{|u|\,dA\,dt}{V}.$$

Это — второй множитель нашего числителя.

Чтобы получить $p(B)$ мы должны просуммировать полученную вероятность по всем значениям u, v и w. После сокращения общих множителей это приводит нас к соотношению:

$$p_B^*(u, v, w) = \frac{|u|\,e^{-a(u^2+v^2+w^2)}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u|\,e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw}.$$

Мы уже видели выше, что интегралы по v и w, вместе взятые, дают множитель $\frac{\pi}{a}$. Интеграция по u затрудняется присутствием *абсолютного значения* u в подинтегральном выражении. Замечая, однако, что $|u| = u$, когда u положительно, и $|u| = -u$, когда u отрицательно, мы разбиваем интеграл на две части, каждая из которых легко может быть вычислена. Результат равен $\frac{1}{a}$, так что весь знаменатель обращается в $\frac{\pi}{a^2}$. Таким боразом окончательно

$$p_B^*(u, v, w) = \frac{a^2}{\pi}|u|\,e^{-a(u^2+v^2+w^2)}, \tag{78}$$

что и дает решение задачи.

Здесь мы не будем углубляться далее в кинетическую теорию газов; мы вернемся к ней в главе XI.

§ 63. Примеры; случай более сложного якобиана. В качестве последнего примера применения якобиана к преобразованию функции распределения от одной системы переменных к другой мы рассмотрим следующую задачу, которая кстати нам еще понадобится в дальнейшем.

Пример 41. Шесть новых переменных $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$ выражаются через шесть старых переменных u, v, w, u', v', w' посредством соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= u - \lambda S, & \overline{u'} &= u' - \lambda S, \\ \bar{v} &= v - \mu S, & \overline{v'} &= v' - \mu S, \\ \bar{w} &= w - \nu S, & \overline{w'} &= w' - \nu S, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

где

$$S = \lambda(u - u') + \mu(v - v') + \nu(w - w'),$$

а λ, μ и ν — *постоянные. Найти отношение соответственных элементов объема* $d\bar{A}$ и dA *этих двух многообразий* [1]).

Диференцирование дает нам:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 1 - \lambda \frac{\partial S}{\partial u} = 1 - \lambda^2,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial S}{\partial v} = -\lambda\mu,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial w} = -\lambda \frac{\partial S}{\partial w} = -\lambda\nu$$

и т. д. Полный якобиан имеет вид:

$$\frac{d\bar{A}}{dA} = \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ -\lambda\mu & 1-\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & 1-\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & 1+\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & 1+\mu^2 & \mu\nu \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & 1+\nu^2 \end{vmatrix}.$$

Этот детерминант может быть значительно упрощен несколькими элементарными преобразованиями. Прибавляя четвертый столбец к первому, пятый ко второму и последний к третьему, мы находим:

$$\frac{d\bar{A}}{dA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ 0 & 1 & 0 & \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \\ 1 & 0 & 0 & 1+\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ 0 & 1 & 0 & \lambda\mu & 1+\mu^2 & \mu\nu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda\nu & \mu\nu & 1+\nu^2 \end{vmatrix}.$$

Далее, вычитая первую строку из четвертой, вторую из пятой и третью из шестой, мы получаем:

$$\frac{d\bar{A}}{dA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ 0 & 1 & 0 & \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ 0 & 0 & 1 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

[1]) „Многообразие“ — технический термин, имеющий то же значение, что и часто употребляемое выражение „пространство n измерений“. Каждая из наших систем переменных требует для своего изображения шестимерного пространства или многообразия.

Так как все элементы ниже главной диагонали — нули, то определитель равен произведению элементов, стоящих вдоль главной диагонали, т. е.

$$\frac{d\bar{A}}{dA}=1.$$

Таким образом соответственные элементарные объемы в данных многообразиях равны между собою.

§ 64. Общее значение якобиана. Якобианы представляют интерес не для одной теории вероятностей. Соображения, которые нас к ним привели, можно формулировать примерно так. Мы имели функцию $p\,(x, y, z, \ldots, w)$, которая после умножения на $dA=dx\,dy\,dz\ldots dw$ и интеграции, распространенной на некоторую область изменения переменных, давала нам число, представлявшее для нас интерес. Кроме того, нам было дано несколько соотношений, с помощью которых $x, y, z, \ldots, w$ могли быть выражены через новые переменные $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$. Поэтому мы без труда могли подставить эти выражения в функцию и получить формулу, позволяющую найти значение этой функции в любой точке многообразия, характеризуемого греческими буквами. Но если мы теперь помножим это значение на $da=d\xi\, d\eta\, d\zeta\ldots d\omega$ и возьмем от полученного выражения интеграл, распространенный на соответствующую область *нового* многообразия, то полученное таким образом число будет отличаться от прежнего, потому что соответственные элементы da и dA отличны друг от друга. Чтобы получить наше прежнее число, мы, прежде чем интегрировать, должны *в каждой точке* помножить p на отношение $\frac{dA}{da}$, вычисленное *для этой точки.*

Так, например, для вычисления площади круга, что сводится к интегрированию функции $p\,(x, y)=1$, мы можем пожелать воспользоваться полярными координатами r и θ, определяемыми посредством соотношений:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta,\\ y&=r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Разумеется, функция p, которая в нашем случае от x и y не зависела, не будет зависеть и от r и θ. Однако не верным было бы предполагать, что искомая площадь может быть найдена как интеграл выражения $dr\,d\theta$, распространенный на эту площадь.

Причиною этого служит, как обычно говорят, то обстоятельство, что $dr\,d\theta$ не есть элемент площади. Элементом площади является выражение $r\,dr\,d\theta$. Очевидно, что множитель r представляет собою не что иное, как якобиан данного преобразования.

Подобным же образом, в общем случае „элементом интеграции“ в области переменных $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ является всегда выражение:

$$\frac{\partial\,(x, y, z, \ldots, w)}{\partial\,(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega)}da.$$

Единственное различие между обычной точкой зрения анализа (которая в большинстве исследований оказывается наиболее плодотворной) и той, на которую мы стали в нашем вероятностном исследовании, состоит в том, что для наших целей было удобнее считать якобиан составною частью функции распределения, тогда как обычно бывает проще мыслить его входящим в диференциальный элемент.

Задачи

1. Найти якобиан преобразования (80).
2. Выразить элемент объема в цилиндрических координатах.
3. Формулу излучения Планка

$$p(\nu) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu}-1} \tag{81}$$

можно рассматривать как функцию распределения, в которой переменная есть частота света ν. Это значит, что формула (11) определяет вероятность излучения данной единицы энергии в виде света, частота которого лежит между ν и $\nu + d\nu$. Найти вероятность того, что испускаемая единица энергии имеет длину волны, заключенную между λ и $\lambda + d\lambda$.

4. Найти вероятность того, что энергия данной молекулы газа заключается между W и $W + dW$.

5. Когда газ диффундирует через отверстие наружу, условия равновесия внутри сосуда нарушаются. В этом случае уже нельзя утверждать, что вероятность наличия у данной частицы той или иной скорости не зависит от положения этой частицы. Это обстоятельство не позволяет нам применить к данному случаю то рассуждение, с помощью которого мы определили $p_{uvw}(B)$ в § 62.

В физике иногда представляют себе поведение электронов в металлах совершенно аналогичным поведению газовых молекул. При нагревании металла с его поверхности срываются „термионные" электроны. Число их предполагается обычно столь малым, что они не нарушают равновесия внутри металла. Допустим, что это верно; допустим также, что электрон испускается поверхностью металла в том и только том случае, если компонента его скорости в направлении оси x-ов превосходит некоторое положительное число $\sqrt{E}$.

Если мы проследим историю такого слетевшего с поверхности электрона до момента, непосредственно предшествовавшего испусканию, то какова вероятность, что компоненты его скорости в этот момент были равны u, v, w?

6. Для термионов, о которых шла речь в предыдущей задаче, предполагают обычно, что при испускании компоненты v и w не меняются, но что компонента вдоль оси x-ов получает новое значение u', определяемое соотношением $u^2 - u'^2 = E$.

Допуская, что это так, найти закон распределения скоростей после испускания.

7. Оси x, y, z неизменно связаны с сосудом, содержащим газ и движущимся относительно „неподвижной" системы координат, x' y' z' со скоростью, компоненты которой по осям этой системы равны соответственно U, V, W. С точки зрения принципа относительности это положение вещей ничем не может отличаться от того, когда, напротив, оси x, y, z „неподвижны", а система x', y', z' движется относительно них со скоростью, характеризуемой компонентами $-U$, $-V$, $-W$. Если вообще считать обоснованным рассуждение § 60, то можно применить его поэтому и к нашему сосуду в системе координат x, y, z. Найти вероятность того, что искомая определенная молекула газа имеет компоненты скорости u' v' w' относительно системы x', y', z'.

8. Найти выражение элемента объема в *тороидальных* [1]) координатах, т. е. в такой системе, где точка P, лежащая в плоскости xz, имеет координаты r, θ, 0; если же точка не лежит в этой плоскости, то первые ее две координаты отсчитываются совершенно таким же образом в плоскости, проходящей через данную точку и через ось z, третья же координата есть угол, образуемый этой плоскостью с плоскостью xz (черт. 18).

---

[1]) От слова „тор"; так называется поверхность, определяемая уравнением $r = \text{const}$, и имеющая форму баранки (черт. 18).

9. При стрельбе в мишень (черт. 19), если пуля пролетает небольшое расстояние, мы можем пренебречь искривлением пути и сделать следующие допущения:

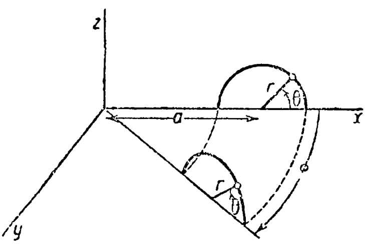
a) Вероятность горизонтальной ошибки h не зависит от того, как велика вертикальная погрешность v.

b) Вероятность попадания в сектор с центральным углом $d\theta$ будет одна и та же, где бы мы ни выбрали этот сектор.

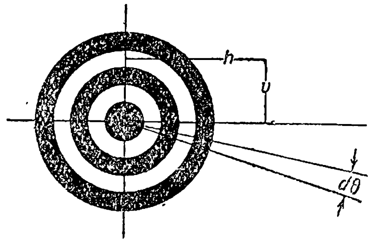
Найти вероятность того, что пуля попадет между

$$(h,\ v) \text{ и } (h+dh,\ v+dv).$$

10. В тех же условиях найти вероятность попадания пули между (r, θ) и $(r+dr, \theta+d\theta)$.



Черт. 18.



Черт. 19.

11. Допустим что в задаче 9 мишень наклонена относительно вертикали под углом α. Найти вероятность того, что пуля попадет между $(h',\ v')$ и $(h'+dh',\ v'+dv')$, причем h' и v' — прямоугольные координаты на поверхности мишени.

12. Если мы в задаче 9 выберем какое-нибудь определенное направление θ, то на некотором расстоянии $r(\theta)$ по этому направлению вероятность попадания пули в данный элемент площади dA будет равна p^*. Для какого-либо другого направления будет справедливо то же самое, только расстояние $r(\theta)$ не обязательно будет тем же самым. Кривые $r = r(\theta)$, во всех точках которых эта вероятность имеет одно и то же значение p^*, называются „кривыми равных вероятностей". Найти уравнение этих кривых.

13. Найти кривые равных вероятностей для задачи 11.

Литература

1. Лахтин, курс теории вероятностей, ч. I, гл. I, § 7.
2. Lévy, Calcul des probabilités, II partie.

ГЛАВА VII

Средние значения

§ 65. Определение среднего значения. *Средним значением данной группы чисел называется такое число, что, если заменить им каждое число данной группы, то сумма этих чисел останется неизменной.*

Так, средний вес данной группы людей есть такой вес, которым должен обладать каждый участник группы для того, чтобы общий вес всей группы остался неизменным. Если группа состоит из трех человек, весящих соответственно 58, 65 и 69 *кг*, то средним весом будет 64 *кг*.

Очевидно, что если данная группа содержит всего m чисел, среди которых имеется n_1 равных a_1, n_2 равных a_2, и т. д., то наше определение равносильно соотношению:

$$m\bar{a}=\sum_j a_j n_j,$$

где $\bar{a}$ есть среднее значение данной группы чисел. Это дает для вычисления среднего значения формулу [1]):

$$\mu_1(a)=\bar{a}=\frac{1}{m}\sum_j a_j n_j. \tag{82}$$

Следующая теорема почти очевидна: *Если $\bar{a}$ есть среднее значение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и $\bar{b}$ — среднее значение чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то средним значением сумм $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ будет $\bar{a}+\bar{b}$.*

§ 66. Математическое ожидание. Допустим, что переменная величина a может принять одно из значений $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ и что вероятность того, что она примет значение a_1, равна p_1, вероятность значения a_2 равна p_2 и т. д. Допустим, наконец, что было предпринято m взаимно независимых испытаний, причем величина a приняла n_1 раз значение a_1, n_2 раз значение a_2 и т. д. Очевидно, что сумма всех полученных значений величины a равна $a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_sn_s$, а среднее значение ее равно

$$\bar{a}=a_1\frac{n_1}{m}+a_2\frac{n_2}{m}+\ldots+a_s\frac{n_s}{m}.$$

---

[1]) $\mu_1(a)$ означает „первый момент величины a“. В § 67 будут даны основания для такой терминологии.

Мы не можем предсказать заранее, чему будет равно это среднее значение, т. е. мы не можем предсказать этого *наверняка*. Единственный путь к его отысканию состоит в том, чтобы произвести требуемый ряд испытаний. Однако мы знаем из теоремы Бернулли, что *вероятность* сколько-нибудь значительного отклонения дроби $\frac{n}{m}$ от p_1 становится все меньше по мере возрастания числа m и что аналогичные утверждения можно сделать и относительно других дробей. Таким образом при большом числе испытаний мало вероятно, чтобы $\bar{a}$ значительно отличалось от $a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_sp_s$. Эту последнюю величину мы будем называть „математическим ожиданием“ величины a.

Определение. *Если величина a может принимать только значения $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и 0, причем соответствующие вероятности равны $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_s)$ и $p(0)$*, то математическое ожидание величины a равно [1])

$$\varepsilon_1(a) = \sum_{j=0}^{s} a_j p(a_j). \tag{83}$$

Следующее предложение очевидно само собою:

Теорема. *Если над величиной a произведен длинный ряд взаимно независимых испытаний, то вероятность того, что среднее значение величины a будет отличаться от ее математического ожидания больше чем на любую наперед заданную величину, будет мала и может быть сделана сколь угодной малой, если мы предпримем достаточно большое число испытаний.*

Строго говоря, теорема эта очевидна только в том случае, когда число возможных значений величины a конечно. Потому что, если сумма содержит бесконечное число слагаемых, то не всегда сумма их пределов совпадает с тем пределом, к которому стремится их сумма. Иначе говоря, для получения предела суммы мы не всегда имеем право брать пределы отдельных слагаемых и складывать их между собою, если только число этих слагаемых не ограничено. Рассмотрим, например, ряд функций

$$\frac{\sin x}{1}, \quad \frac{\sin 3x}{3}, \quad \frac{\sin 5x}{5}, \ldots,$$

каждая из которых стремится к нулю, когда x приближается к π; сумма пределов отдельных членов равна поэтому $0+0+0+\ldots=0$. Но сумма самих функций представляет собою ряд Фурье, изображающий константу $\frac{\pi}{2}$ для всех значений x, заключенных между 0 и π, и константу $-\frac{\pi}{2}$ для всех значений x, заключенных между π и 2π. Поэтому сумма всего бесконечного ряда, по мере того как x стремится к π,

[1]) Смысл индекса 1 при ε выяснится в § 67. В случаях, когда нет опасности смешения, вместо $\mu_1(a)$ и $\varepsilon_1(a)$ пишут просто μ_1 и ε_1.

приближается либо к $\frac{\pi}{2}$, либо к $-\frac{\pi}{2}$, смотря по тому, начинается ли изменение x со значений меньших, чем π, с последующим ростом, или, наоборот, со значений бóльших, чем π, с последующим убыванием. Но ни в каком случае эта сумма не может сремиться к нулю.

Так же обстоит дело и в случае нашей теоремы. Бывают задачи, в которых некоторое определенное весьма малое уклонение опытного среднего значения от математического ожидания остается почти достоверным, как бы мы ни увеличивали число испытаний. Пример такой задачи будет приведен в § 74. Однако я не знаю ни одного случая, где подобного рода задача имела бы практическое значение.

Еще одно замечание. В нашей терминологии „среднее значение" является результатом опыта, а „математическое ожидание" служит его предварительной теоретической оценкой. Это словоупотребление нельзя считать общепринятым. Некоторые авторы пользуются этими терминами, не делая между ними никакого различия; другие говорят о „среднем значении" в обоих случаях, обращаясь к понятию „математического ожидания" только тогда, если изучаемая величина представляет собою денежную сумму.

Мы постараемся различать между собою эти два понятия; мы будем только в дальнейшем для краткости говорить просто „ожидание" вместо более громоздкого термина „математическое ожидание" [1]).

Приведем простой пример, имеющий целью конкретнее показать общее понятие ожидания.

Пример 42. Две игральные кости бросаются одновременно. Если сумма очков составит семь, один из участников игры получает рубль, в противном случае он не получает ничего. Каково ожидание его выигрыша?

В данном случае „величина a" представляет собою денежный выигрыш и может принимать только два значения, 1 и 0. Вероятность первого значения есть вероятность того, что сумма очков окажется равной семи; эта вероятность, как легко подсчитать, равна $\frac{1}{6}$; вероятность второго значения, очевидно, равна $\frac{5}{6}$.

Отсюда

$$\mathcal{E}_1(a) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot 0 = \frac{1}{6}.$$

Ожидание выигрыша равно одной шестой части рубля.

Допустим теперь, что игрок, о котором идет речь, перед каждым бросанием уплачивает определенную сумму A руб. После большого числа бросаний мы найдем среднее значение $\bar{a}$ величины a; если $A > \bar{a}$, наш игрок будет в проигрыше, если $A < \bar{a}$ — в выигрыше. Но мы уже

[1]) Существует еще другое, несколько мистическое, понятие „морального ожидания", о котором мы кратко упомянем в § 79. Оно было введено много лет назад в виде бесплодной попытки объяснить нечто такое, что гораздо легче объяснить без его помощи. И так как в настоящее время никто им не пользуется, то наша терминологическая разгрузка является вполне обоснованной.

знаем, что при большом числе бросаний $\bar{a}$ по всей вероятности окажется весьма близким к ε_1. Поэтому при $A > \varepsilon_1$, т. е. когда игрок платит больше чем $16\frac{2}{3}$ коп. за партию, он в длинном ряду партий почти наверняка проиграет; ибо сколь бы мало его ставка ни превосходила ожидание выигрыша, вероятность того, что такое же превосходство будет иметься и у среднего выигрыша, стремится к нулю по мере возрастания числа бросаний. Обратно, если ставка меньше ожидания, то он почти наверняка окажется в выигрыше.

Очевидно, что в обоих случаях условия игры несправедливы; игра будет справедливой лишь при том условии, если ставка нашего игрока равна его выигрышу.

Допустим поэтому, что он платит по $16\frac{2}{3}$ коп. за каждую партию. После того как монета брошена m раз, он выигрывает определенное число n руб., а чистый его выигрыш составляет (в рублях) $n - \frac{1}{6}m$. В силу первой половины теоремы Бернулли мы знаем, что при достаточно больших значениях m число n почти наверняка будет отличаться от $\frac{1}{6}m$ больше чем на сколь угодно большое наперед заданное число. Значит, если число партий очень велико, то наш игрок может быть почти уверен, что он *либо выиграет, либо проиграет* очень большую сумму; но *что именно* произойдет из этих двух возможностей, этого мы совсем не можем предсказать. В силу второй половины теоремы Бернулли, мы в такой же степени можем быть уверены, что величина $\frac{n}{m} - \frac{1}{6}$ или, что то же, $\bar{a} - \varepsilon_1$, окажется ничтожно малой, т. е. что по всей вероятности *средний* чистый выигрыш, приходящийся на одну партию, будет ничтожно мал.

То, что мы усмотрели в этом частном примере, справедливо и для общего случая: *если мы имеем дело с рядом взаимно независимых партий любой азартной игры, то партнер, уплачивающий за каждую партию сумму, превышающую ожидание его выигрыша, в длинном ряду партий с практической достоверностью окажется в проигрыше, причем средний проигрыш, приходящийся на одну партию, будет близок к разности между ставкой игрока и ожиданием выигрыша. Обратно, если его ставка меньше, чем ожидание выигрыша, то он может с практической достоверностью рассчитывать, что при большом числе партий средний выигрыш его будет близок к соответствующей разности; если же он платит в точности сумму, равную ожиданию его выигрыша, то средний его выигрыш будет по всей вероятности очень мал, но суммарный выигрыш (или проигрыш) — очень велик.*

Выражаясь более кратко, можно сказать: если вы платите слишком много, вы проиграете; если слишком мало, то проиграет ваш партнер; если же вы платите как раз сколько полагается, то один из вас проиграет большую сумму, хотя и не столь большую, как в первых двух случаях.

Страхование, рассматриваемое с точки зрения страховых компаний, очень приближается к условиям только что рассмотренной нами задачи; оно в точности соответствовало бы этим условиям, если бы каждый страховой договор был связан с одним и тем же риском [1]) и одной и той же суммой [2]) и если бы страховой взнос уплачивался единовременно [3]).

Пример 43. Мы произвели повторное бросание монеты. Если герб выпадает в первый раз при n-м бросании, то один из игроков получает n коп., и партия считается оконченной. Каково ожидание выигрыша для этого игрока?

Если герб в первый раз выпадает при первом бросании, то выигрыш равен единице; вероятность этого случая равна $p(1)=\frac{1}{2}$. Если первое выпадение герба происходит при втором бросании, то соответственные числа равны 2 и $p(2)=\frac{1}{4}$. Вообще, вероятность выигрыша в j коп. составляет $p(j)=\frac{1}{2^j}$.

Следовательно,

$$\varepsilon_1(a)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j}.$$

Легко показать, что эта сумма равна 2[4]). Поэтому для справедливости (или, как часто говорят, „безобидности") игры наш игрок должен делать двухкопеечный взнос перед каждой партией.

---

[1]) Т. е., в случае страхования жизни, если бы каждый человек данного определенного возраста имел одну и ту же вероятность умереть в течение определенного времени, по крайней мере насколько это известно страховой компании. Это не соответствует действительности, так как страхуемые подвергаются телесному осмотру.

[2]) Т. е. если бы каждая жизнь была застрахована в одну и ту же сумму.

[3]) Практикующиеся на самом деле ежегодные взносы затрудняют подсчет „ожидания выигрыша" для страховой компании. Однако они ничего не изменяют в том положении вещей, которое нас в данный момент интересует.

[4]) Положим $y=x+2x^2+3x^3+\dots$ Тогда

$$\frac{y}{x}=1+2x+3x^2+\dots$$

и

$$\int\frac{y}{x}\,dx=a_0+1+x+x^2+x^3+\dots,$$

где постоянная интеграции написана в виде a_0+1. Но ряд $1+x+x^2+\dots$ есть геометрическая прогрессия; сумма ее, как известно, равна $\frac{1}{(1-x)}$.

Поэтому

$$\int\frac{y}{x}\,dx=a_0+\frac{1}{1-x},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{d}{dx}\left\{a+\frac{1}{1-x}\right\}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

§ 67. Средние значения и математические ожидания высших степеней. Из всякой группы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ можно, применяя различные арифметические операции, получить сколько угодно других групп. Так, можно построить группы $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_s^2$; $a_1^3, a_2^3, \ldots, a_s^3$ и т. п. Очевидно, что каждая из этих производных групп имеет свое собственное среднее значение и что эти средние значения, так же, как и $\overline{a}$, могут характеризовать собою первоначальную группу. Это — „средний квадрат" величины a, „средний куб" ее и т. д. Мы будем обозначать их либо через $\overline{a^2}, \overline{a^3}, \ldots$, либо через $\mu_2(a), \mu_3(a), \ldots$ Вообще, мы положим:

$$\overline{a^i} = \mu_i(a) = \frac{1}{m} \sum a_j^i n_j. \tag{84}$$

Английская статистическая школа называет эти числа „моментами" данной группы величин a_j. Происхождение этого наименования следующее.

Отметим числа a_j на горизонтальной числовой прямой и в каждой точке с абсциссою a_j поместим массу n_j. Статический момент этих масс относительно точки 0 будет тогда как раз μ_1; „момент инерции" или момент второго порядка будет μ_2; отсюда момент любого порядка i является уже совершенно естественным обобщением.

Сумма i-х степеней чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ останется неизменной, если каждую из этих степеней заменить одним и тем же числом $\overline{a^i}$. Разумеется, мы получили бы тот же результат, если бы каждое a_j еще до возведения его в i-ю степень заменили числом $\sqrt[i]{\overline{a^i}}$; эти числа играют значительную роль в статистике, в особенности $\sqrt{\overline{a^2}}$ — число, называемое „средним квадратическим" данной группы чисел.

Этим „средним i-м степеням" или „моментам порядка i" соответствуют „ожидаемые i-е степени" или „ожидания порядка i". Так, по аналогии с определением (83), мы полагаем:

$$\varepsilon_i(a) = \sum_j a_j^i p(a_j). \tag{85}$$

Множители $p(a_j)$ при этом остаются прежними, так как вероятность события $a^i = a_j^i$ совпадает с вероятностью события $a = a_j$.

§ 68. Средние значения непрерывно меняющихся величин. Все понятия, которыми мы занимаемся в настоящей главе, имеют себе точных аналогов в области непрерывно меняющихся величин. Основное формальное различие состоит в том, что при переходе к величинам, непрерывно меняющимся, суммы заменяются интегралами.

откуда

$$y = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ряд, который мы имеем в тексте, есть частный случай ряда y, получаемый при $x = \frac{1}{2}$. Поэтому сумма его равна 2.

Допустим в первую очередь, что у нас имеется переменная x с данной функцией распределения $p(x)$. Допустим, что вся область изменения этой переменной разбита на элементарные интервалы длины dx; пусть, наконец, над величиною x производится длинный ряд взаимно независимых испытаний. В интервал (x_i, x_i+dx) при этом попадет n_i таких значений; сумму их мы обозначим через s_i. Тогда, очевидно,

$$n_i x_i < s_i < n_i (x_i + dx).$$

Сумму *всех* значений x мы можем получить, складывая между собою суммы, полученные для отдельных интервалов. Обозначим ее через s. Тогда мы будем иметь:

$$\sum n_i x_i < s < \sum n_i (x_i + dx).$$

Среднее значение величины x мы получим, деля s на общее число произведенных испытаний. Таким образом, мы получаем:

$$\sum \frac{n_i}{m} x_i < \bar{x} < \sum \frac{n_i}{m} x_i + dx \sum \frac{n_i}{m}. \tag{86}$$

Когда m становится весьма большим, то отношение $\frac{n_i}{m}$ по всей вероятности весьма близко к вероятности попадания величины x в интервал (x_i, x_i+dx), которая в свою очередь приблизительно равна $p(x_i)\,dx$. Далее если dx мало, то $\sum p(x_i)\, x_i\, dx$ не намного отличается от $\int p(x)\, x\, dx$; наконец, очевидно, $\sum \frac{n_i}{m} = 1$. Таким образом левая часть неравенств (86) мало отличается от величины $\int xp(x)\,dx$, а правая — от той же величины, увеличенной на dx. Поэтому при малом dx левая и правая части почти наверняка близки друг к другу, а значит и $\bar{x}$ по всей вероятности немного отличается от величины

$$\varepsilon_1(x) = \int p(x)\, x\, dx. \tag{87}$$

Эту величину мы будем называть „ожиданием первого порядка величины x“. Очевидно, что „ожиданием порядка i“ будет величина

$$\varepsilon_i(x) = \int p(x)\, x^i\, dx. \tag{88}$$

Что касается самих опытных средних, то о них можно сказать только то, что было уже сказано: для каждого из них вероятность сколько-нибудь значительного отличия от соответствующего математического ожидания чрезвычайно мала, если только число испытаний достаточно велико.

Подобным же образом ожидание любой функции $f(x)$ дается формулой:

$$\varepsilon_1(f) = \int f(x)\, p(x)\, dx; \tag{89}$$

в самом деле, на основании (87)

$$\varepsilon_1(f) = \int f p(f)\, df,$$

что немедленно приводится к выражению (89) в силу соотношения [1]):

$$p(f) = \frac{p(x)}{f'(x)}.$$

В общем случае, когда величина f зависит от сколь угодно большого числа переменных, ее ожидание порядка i всегда дается формулой:

$$\varepsilon_i(f) = \iiint \cdots \int f^i p(x, y, z, \ldots, w)\, dx\, dy\, dz \ldots dw. \tag{90}$$

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве того, что эта формула также вытекает из определения (87).

Рассмотрим, в качестве примера, математическое ожидание энергии газовой молекулы. Эта энергия равна $W = \frac{1}{2} ms^2$; поэтому, в силу формул (89) и (76):

$$\varepsilon_1(W) = \int \frac{1}{2} ms^2 p(s)\, ds = 2m \sqrt{\frac{a^3}{\pi}} \int s^4 e^{-as^2}\, ds.$$

Полагая $as^2 = z$, мы получим:

$$\varepsilon_1(W) = \frac{m}{a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty z^{\frac{3}{2}} e^{-z}\, dz = \frac{m}{a\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3}{4}\frac{m}{a}. \tag{91}$$

Этот результат мы получили, отправляясь от функции распределения для быстроты. С таким же успехом мы могли бы получить его из формулы (73) непосредственным применением формулы (90). Мы имеем:

$$W = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

и следовательно,

$$\varepsilon_1(W) = \iiint \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\, p(u, v, w)\, du\, dv\, dw =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \iiint u^2 e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw + \right.$$

$$+ \iiint v^2 e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw +$$

$$\left. + \iiint w^2 e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\, du\, dv\, dw \right\}.$$

Интеграция во всех случаях простирается от $-\infty$ до $+\infty$.

---

[1]) Для правильного истолкования этой и подобных ей формул читатель должен помнить, что $p(x)\,dx$ всегда означает „вероятность того, что x лежит между x и $x + dx$“, а $p(f)\,df$ — „вероятность того, что f лежит между f и $f + df$. Конечно, *вид* функций $p(x)$ и $p(f)$ может быть совершенно различен.

Первый из трех интегралов в скобках, как легко вычислить, равен $\frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$, и каждый из двух других, очевидно, имеет ту же величину. Таким образом для ожидания энергии мы получаем прежнее значение.

Если бы мы регистрировали энергию нашей отмеченной молекулы много раз подряд (причем только отделяли бы два последовательных наблюдения промежутком времени достаточно большим для того, чтобы эти наблюдения могли считаться взаимно независимыми), мы могли бы получить „среднюю энергию", которая почти наверняка очень мало отличалась бы от $\varepsilon_1(W)$. Подобным же образом, если бы мы одновременно наблюдали все молекулы данной массы газа, это было бы равносильно огромному количеству „испытаний". Если бы эти испытания были взаимно независимы, т. е. если бы вероятность того, что данная молекула обладает определенной данной энергией, не зависела от запасов энергии всех остальных молекул [1]), то полученная этим путем средняя энергия, вероятно, мало отличалась бы от $\varepsilon_1(W)$. По этой причине физики обычно называют величину $\varepsilon_1(W)$ „средней энергией молекул".

§ 69. Медиана. Медианою данной группы чисел называется то из этих чисел, которое занимает в ней центральное положение, когда группа расположена в порядке возрастания (или убывания). Другими словами, группа содержит столько же чисел *меньших*, чем медиана, сколько *бо́льших* ее. Строго говоря, это определение требует, конечно, чтобы данная группа состояла из нечетного числа членов. Если же их — четное число, то за медиану можно принять любое из двух центральных чисел, а еще лучше — их среднее значение. Так как числа расположены в порядке возрастания, то обычно бывает почти безразлично, на каком из этих возможных соглашений мы остановимся.

Так, например, медианою группы чисел

$$-28,\ -8,\ -8,\ -1,\ -1,\ +28,\ +56,\ +56,\ +68$$

служит число -1, так как в ряду имеется четыре числа, бо́льших, чем -1, и четыре числа, меньших (или равных) -1. Средним же значением данной группы чисел является одна девятая их суммы, что дает 18.

Медиане, как экспериментальной характеристике, соответствует своя „ожидаемая медиана". Пусть вероятность того, что a примет значение a_j, равна $p(a_j)$. В результате длинного ряда испытаний мы получим n_1 значений a_1, n_2 значений a_2 и т. д. Расположим эти значения в возрастающем порядке; пусть при этом a_i заняло центральное положение, так что

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}<\frac{m}{2},$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_i>\frac{m}{2}.$$

---

[1]) В действительности это невозможно, потому что сумма энергий всех молекул имеет определенную величину в силу закона сохранения энергии.

Но в длинном ряду испытаний $\frac{n_j}{m}$ по всей вероятности окажется очень близким к $p(a_j)$; поэтому, деля все части последних неравенств на m, мы видим, что почти наверняка будем иметь:

$$p(a_1)+p(a_2)+\ldots+p(a_{i-1})<\frac{1}{2},$$

$$p(a_1)+p(a_2)+\ldots+p(a_i)>\frac{1}{2}.$$

Значение a_i, определяемое этими неравенствами, мы и будем называть *ожидаемой медианой*.

Таким образом *ожидаемой медианой величины a называется такое число a_i, для которого неравенства $a<a_i$* и $a>a_i$ одинаково вероятны.

Так, например, при бросании двух игральных костей вероятности различных возможных сумм очков определяются следующей таблицей

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Следовательно, ожидаемая медиана равна 7, так как вероятность того, что сумма очков окажется меньше семи, равна $\frac{15}{36}$, и в точности такова же вероятность обратного неравенства.

Общая идея медианы: число, относительно которого можно ожидать, что оно фактически окажется столько же раз превзойденным, сколько непревзойденным. Но в случае, когда данная величина имеет лишь дискретный ряд возможных значений, простота такого определения медианы затрудняется тем, что само это срединное значение имеет определенную вероятность быть реализованным. Напротив, в случае, когда наша величина может принимать непрерывный ряд значений, это определение вполне уместно, потому что в этом случае вероятность того, что величина в точности совпадет со своей медианой, равна нулю. Совершенно так же, как в § 68, мы убедимся, что ожидаемая медиана равна тому значению x_m, для которого

$$\int_{x_m}^{\infty} p(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

Разумеется, при этом и

$$\int_{-\infty}^{x_m} p(x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

§ 70. Отклонение. До сих пор мы ввели три основных вероятностных характеристики: „наивероятнейший“ результат, „ожидаемый“ результат и „ожидаемая медиана“; кроме того, мы указали, что можно придумать еще сколько угодно других производных характеристик, среди которых в частности отметили ожидания различных степеней изучаемой величины. Этими производными характеристиками на практике почти всегда пользуются в связи с „отклонениями“ чисел данной группы от их среднего значения.

Группе чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$, повторенных соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_s$ раз, соответствует определенное среднее значение $\bar{a}$ и ряд отклонений от среднего значения:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 - \bar{a}, \\ d_2 &= a_2 - \bar{a}, \\ &\cdots\cdots \\ d_s &= a_s - \bar{a}, \end{aligned} \tag{92}$$

каждое из которых повторяется столько же раз, как соответствующее a_i. Очевидно, что группа чисел d_i имеет свое среднее значение, свою медиану и т. п.

Относительно этих характеристик важно знать два следующих правила.

1. *Среднее значение группы отклонений всегда равно нулю.* В самом деле, $\bar{d}$ или $\mu_1(d)$ по определению равно:

$$\mu_1(d) = \frac{1}{m}\sum d_j n_j.$$

Но из формул (92)

$$\sum d_j n_j = \sum a_j n_j - m\bar{a},$$

а в силу (82)

$$\sum a_j n_j = m\bar{a};$$

следовательно,

$$\mu_1(d) = 0. \tag{93}$$

2. *Среднее значение квадрата отклонения для всякой группы чисел равно среднему значению квадратов этих чисел за вычетом квадрата среднего значения самих этих чисел.*

В самом деле,

$$\mu_2(d) = \frac{1}{m}\sum n_j(a_j - \bar{a})^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum n_j a^2 - \frac{2\bar{a}}{m}\sum n_j a_j + \bar{a}^2.$$

Но в силу (82) и (84) отсюда немедленно следует [1]):

$$\mu_2(d) = \overline{a^2} - \overline{a}^2. \tag{94}$$

Квадратный корень из этой величины μ_2, который мы естественно назовем „средним квадратическим отклонением“, известен в статистике под именем „стандартного отклонения“.

Наконец, если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ есть группа значений величины, ожидание которой равно $\varepsilon_1(a)$, то величины

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_1 - \varepsilon_1, \\ \delta_2 &= a_2 - \varepsilon_1, \\ &\ldots\ldots \\ \delta_s &= a_s - \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{95}$$

будут отклонениями этих значений от ожидания. Так как вероятности этих отклонений совпадают с вероятностями соответствующих значений данной величины, то мы находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\delta) &= \sum p(a_j)(a_j - \varepsilon_1) = \\ &= \sum a_j p(a_j) - \varepsilon_1 \sum p(a_j) = \\ &= \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sum p(a_j). \end{aligned}$$

Так как суммирование распространяется на все возможные значения величины a, то

$$\sum p(a_j) = 1$$

и

$$\varepsilon_1(\delta) = 0. \tag{96}$$

Это соответствует формуле (93).

Подобным образом

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\delta) &= \sum p(a_j)(a_j - \varepsilon_1)^2 = \\ &= \sum a_j^2 p(a_j) - 2\varepsilon_1 \sum a_j p(a_j) + \varepsilon_1^2 \sum p(a_j) = \\ &= \varepsilon_2(a) - [\varepsilon_1(a)]^2, \end{aligned} \tag{97}$$

что соответствует формуле (94).

Очевидно, что все формулы настоящего параграфа справедливы для непрерывно меняющихся величин в такой же мере, как и для величин, способных принимать лишь дискретный ряд значений.

§ 71. Резюме. Большинство понятий, введенных нами в настоящей главе, относятся к величинам, способным принимать различные числовые значения. В известном смысле это является ограничением нашей прежней концепции „события“ и его вероятности, потому что не всякая разновидность „события“ может быть измерена числом. Мы теперь сознательно

---

[1]) Очевидно, что мы могли бы записать это соотношение также в виде:

$$\overline{d^2} = \overline{a^2} - \overline{a}^2 \quad \text{или} \quad \mu_2(d) = \mu_2(a) - [\mu_1(a)]^2.$$

Подобным же образом формулу (93) можно записать в виде $\overline{d} = 0$.

ограничимся такими „измеримыми“ случаями и будем в дальнейшем говорить исключительно о вероятностях таких-то значений такой-то переменной величины. То, что мы до сих пор знаем в этом направлении, можно резюмировать в виде следующей схемы:

Понятия, связанные с результатами опыта	*Понятия, связанные с априорной оценкой*
1) Среди конечной группы чисел то, которое встречается наиболее часто, называется „модой“.	1) Среди конечной группы чисел одно является „наиболее вероятным“ (некоторые авторы его также называют „модой“).
2) Если числа расположены в порядке возрастания, то число, занимающее центральное положение, называется „медианой“.	2) Существует такое значение данной величины, что вероятность оказаться больше него для этой величины не больше $\frac{1}{2}$, а вероятность оказаться не меньше него — не меньше $\frac{1}{2}$. Это значение называется „ожидаемой медианой“.
3) То число, которым можно было бы заменить каждое из чисел данной группы с тем, чтобы сумма их осталась неизменной, называется „средним значением“ данной группы.	3) Если производится m испытаний, то существует число, являющееся наивероятнейшим средним значением результатов этих испытаний. При $m \longrightarrow \infty$ это число стремится к определенному пределу, который называется „ожиданием“ данной величины.
4) Если каждое из чисел данной группы уменьшить на величину среднего значения этой группы, то мы получим группу „отклонений от среднего значения“.	4) Если все возможные значения данной величины уменьшить на величину ее ожидания, то мы получим группу „отклонений от ожидания“.
5) Среднее отклонение равно нулю.	5) „Ожидаемое отклонение“ равно нулю.
6) Если все отклонения данной группы возвести в i-ю степень, то среднее значение всех полученных чисел называется „моментом порядка i“ данных отклонений.	6) Если все возможные отклонения от ожидания возвести в i-ю степень, то новая группа чисел в свою очередь будет иметь определенное ожидание, которое называется „ожиданием степени i“ данных отклонений

72. Примеры; общий случай независимых испытаний. Найдем ожидаемое число появлений события при m взаимно независимых испытаниях, предполагая, что в каждом отдельном испытании вероятность наступления этого события равна p.

Формула для вероятности числа n появлений события такова:

$$p(n) = C_n^m p^n (1-p)^{m-n}.$$

Так как нас интересует число появлений события, то в данном случае $a = n$. Ожидание числа n равно:

$$\varepsilon_1(n) = \sum_{n=0}^{m} np(n) = \sum_{n=0}^{m} nC_n^m p^n (1-p)^{m-n}.$$

Но

$$nC_n^m = mC_{n-1}^{m-1} \quad \text{и} \quad m-n = (m-1)-(n-1).$$

Поэтому

$$\varepsilon_1(n) = mp\sum_{n=0}^{m} C_{n-1}^{m-1} p^{n-1}(1-p)^{(m-1)-(n-1)}.$$

Эта сумма в точности имеет вид[1]) суммы (15), с тою только разницей, что m заменено на $m-1$, а n — на $n-1$. Следовательно, сумма эта равна $\varepsilon_1(n) = mp$. Отсюда следует, что $\varepsilon_1(n) = mp$. *В этом случае ожидаемое и наивероятнейшее значения оказываются одинаковыми*, с тою только разницей, что ожидание может быть и дробным числом, тогда как наивероятнейшее число обязательно целое (см. § 35).

§ 73. Примеры; общий случай взаимно зависимых испытаний типа § 27. В § 27 мы занимались вопросом о появлении p красных и q черных шаров из урны, в которой находится m красных и n черных шаров, причем после каждого тиража шар перед следующим тиражем *не* возвращается обратно. Общий результат был получен в виде:

$$P_{m,n}(p, q) = \frac{C_p^m C_q^n}{C_{p+q}^{m+n}}. \tag{25}$$

Найдем теперь ожидание числа красных шаров, имеющих появиться в случае, когда общее число вынимаемых шаров составляет $p+q=r$.

В этом случае интересующая нас величина есть число красных шаров p, т. е. $a_p = p$. Далее, так как $p+q$ равно постоянному числу r, то q есть функция от p и подлежит всюду замене через $r-p$. Таким образом мы находим:

$$\varepsilon_1(p) = \sum_{p=0}^{r} p\frac{C_p^m C_{r-p}^n}{C_r^{m+n}}.$$

Замечая, что знаменатель C_r^{m+n} — один и тот же во всех членах суммы, и заменяя pC_p^m через mC_{p-1}^{m-1}, мы находим:

$$\varepsilon_1(p) = \frac{m}{C_r^{m+n}}\sum_{p=0}^{r} C_{p-1}^{m-1} C_{r-p}^n.$$

Стоящая в правой части сумма имеет вид (26), как легко убедиться, если вместо C_{r-p}^n писать $C_{(r-1)-(p-1)}^n$. Поэтому

$$\varepsilon_1(p) = m\frac{C_{r-1}^{m+n-1}}{C_r^{m+n}},$$

что равно $\dfrac{mr}{m+n}$.

Как и в предыдущем примере, это число, если только оно целое, является вместе с тем и наивероятнейшим числом красных шаров.

[1]) В ней одним членом больше, но этот член обращается в нуль благодаря множителю $C_{-1}^{m-1} = 0$.

Если же оно дробное, то наивероятнейшим числом красных шаров будет одно из двух соседних с ним целых чисел.

§ 74. Примеры; задача с игральными костями. В примерах, рассмотренных нами в двух последних параграфах, „ожидание" величины либо равнялось, либо было соседним по отношению к ее „наивероятнейшему значению", смотря по тому, было ли оно целым или дробным. Следующий пример имеет целью показать, что дело не всегда обстоит таким образом.

Пример 44. Кость бросается до тех пор, пока на ней не выпадет шестерка. Каково наивероятнейшее и каково ожидаемое число бросаний?

Вероятность того, что шестерка выпадает при первом бросании, равна $p_1 = \frac{1}{6}$. Вероятность того, что она не выпадет при первом, но выпадет при втором бросании, равна $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$; вероятность того, что она не выпадет при двух первых бросаниях, но выпадет при третьем, равна $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$; вообще, вероятность того, что в первый раз она выпадет при n-м бросании, равна $p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)$. Очевидно, что наибольшая из этих вероятностей есть p_1, т. е. что наивероятнейшее число бросаний равно единице.

С другой стороны, ожидаемое число бросаний равно

$$\varepsilon_1(n) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{1}{6}\left[1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots\right].$$

Но мы видели (см. выноску в конце § 66), что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Сравнивая это с полученным выражением для $\varepsilon(n)$, мы легко находим:

$$\varepsilon_1(n) = 6.$$

Иначе говоря, ожидаемое число бросаний равно 6, тогда как наивероятнейшее число равнялось единице.

§ 75. Примеры; парадокс петербургской игры. В качестве последнего примера вычислений этого рода рассмотрим следующую знаменитую задачу, над парадоксальным решением которой ученые ломали голову в течение нескольких поколений.

Пример 45. Монета бросается до тех пор, пока не выпадет герб. Если герб выпадет при первом бросании, то банк выплачивает игроку один рубль. Если герб впервые выпадет при втором бросании, игрок получает два рубля; если герб выпадет впервые при третьем бросании, он получает четыре рубля; если при четвертом — восемь рублей, и т. д. Какую сумму должен игрок уплатить банку перед началом партии, чтобы игра была безобидной?

Вероятность того, что герб впервые выпадет при n-м бросании, равна $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. В этом случае игрок получает $a_n = 2^{n-1}$ руб. Подставляя эти значения в формулу (83), мы находим:

$$\varepsilon_1(a) = \sum p_n a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Эта сумма должна быть распространена на все возможные значения n. Но с логической точки зрения нельзя указать никакой верхней границы для числа бросаний, которое придется проделать, прежде чем появится первый герб. Возможно, что их будет миллион, хотя, конечно, вероятность такого происшествия чрезвычайно мала. Таким образом мы вынуждены включить в нашу сумму бесконечное множество слагаемых и тем самым притти к выводу, что $\varepsilon_1(a) = \infty$. Другими словами, для того чтобы партия для банка была безобидной, игрок должен предварительно уплатить банку бесконечно большую сумму денег.

С точки зрения здравого смысла этот результат является нелепостью. Ни один здравомыслящий человек не заплатил бы банку за партию и ста рублей, не говоря уже о бесконечно большой сумме. И тем не менее, наше математическое рассуждение было правильным. Оно наверняка не вызывает больше сомнений, чем любое другое рассуждение в этой книге. Поэтому, если полученный результат неверен, то он заставляет подвергнуть сомнению все построенное здание теории вероятностей. Вот почему нам крайне важно знать, по какой причине этот результат не согласуется со здравым смыслом.

На этот вопрос был дан целый ряд ответов. Исторически первым было, повидимому, решение, данное Даниилом Бернулли, который различал „математическое“ и „моральное“ [1]) ожидания. Первое он определял так же, как мы; второе же выводил из него посредством психологических соображений следующего рода.

Для нищего рубль представляет несравненно большую ценность, чем для миллионера. В действительности, говорит Бернулли, удовлетворение, получаемое человеком от той или иной причитающейся ему суммы денег, становится все меньше и меньше по мере того, как растет его состояние. Поэтому, если наш игрок выплачивает определенную денежную сумму из своего скромного состояния, то *психологическое* значение этой суммы сравнительно велико. У него есть шансы — хотя и чрезвычайно небольшие — выиграть огромную сумму денег в случае, если герб долго не будет появляться. Допустим, что ему „повезло“ и что он выиграл такую сумму. Теперь он — очень богатый человек; и при определении психологической ценности своих выигрышей он естественно становится на точку зрения, соответствующую его новому имущественному состоянию. Другими словами, его возможный проигрыш, вследствие своей связи с более низким имущественным состоянием, в его представлении значительно превышает возможный выигрыш.

---

[1]) У нас часто говорят „нравственное“, что еще хуже, чем „моральное“. Правильнее всего было бы называть его „психологическим“ ожиданием, потому что вопросы морали здесь ни при чем. *Прим. ред.*

Принимая, что закон связи между психологическим и математическим ожиданиями имеет логарифмическую природу, мы можем вычислить требуемую ставку и получить результат, заключающийся в разумных границах. Однако этот результат тоже содержит свою нелепость с точки зрения здравого смысла: согласно ему, ставка, которую игрок должен уплатить банку, зависит не только от условий игры, но и от имущественного состояния игрока, так что при одной и той же игре *с одним и тем же банком* эта ставка будет *различной для различных игроков.* Мы можем довольно ясно себе представить, что по этому поводу скажет банкомет. Так как этот путь решения задачи заведомо неправилен, то нам нет надобности входить в математические подробности, с ним связанные.

Другое объяснение, предпочитаемое многими статистиками, основывается на том факте, что при небольшом видоизменении задачи мы приходим к результату, уже не представляющемуся столь нелепым. Чтобы в этом убедиться, возьмем вместо прежнего ряда чисел $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, ..., $a_n=2^{n-1}$ следующий новый ряд: $a_1=1$, $a_2=x$, $a_3=x^2$, ..., $a_n=x^n$, где $x<2$. Подставляя эти значения (вместе со значениями вероятностей, которые остаются неизменными) в формулу (83), мы получаем:

$$\varepsilon_1(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots=\frac{1}{2-x}.$$

Это — конечное число. Так, если, например, $x=1{,}5$, то наш игрок за свое участие в одной партии должен уплатить банку 2 руб., что представляется довольно естественным. Но по мере того как x приближается к 2, ставка становится все больше и больше, и с математической точки зрения представляет собою величину бесконечно большую.

Вторая попытка объяснения парадокса исходит из этих фактов и заключает, что наша интуиция не способна охватить то огромное различие, которое имеет место между ожиданиями выигрыша в случае $x<2$ и в случае $x=2$, и что поэтому мы не соглашаемся уплатить той суммы, какая с нас причитается из логических соображений. Однако и против этого объяснения может быть сделано возражение. В самом деле, если мы положим $x=1{,}99$, т. е. если в случае, когда герб впервые выпадает при втором бросании, банк выплачивает 1 р. 99 к. вместо 2 руб., то ставка нашего игрока составляет 100 руб.; но ясно, что ни один здравомыслящий человек не станет платить такой суммы за такую партию. Таким образом, если затруднение лежит в нашей интуиции, то выходит, что она отказывается нам служить уже при значениях x, отличающихся от 2 руб. на заметную величину.

Я думаю, что правильное разрешение парадокса совершенно отлично от обоих приведенных нами и основывается на том обстоятельстве, что в действительности мы встречаем только людей с ограниченным состоянием; эти люди не в состоянии были бы выплатить огромных сумм, которые причитались бы с них в том случае, если бы первое выпадение герба наступило только после длинного ряда бросаний. Чтобы посмотреть, какое влияние оказывает на математическое ожидание тот факт, что банковский капитал ограничен, разберем следующий пример.

Пример 46. Какова справедливая ставка игрока в игре, описанной в примере 45, если банк может выплатить не свыше 1 000 000 руб.?

Вероятность того, что герб впервые выпадет при n-м бросании, по-прежнему равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. В этом случае банк выплачивает 2^{n-1} руб., если эта сумма меньше, чем 1 000 000 руб.; в противном случае выплачивает 1 000 000 руб. Другими словами:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2^n}, \\ a_n &= 2^{n-1}, \end{aligned}\right\} \text{ если } 2^{n-1} < 1\,000\,000;$$

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2^n}, \\ a_n &= 1\,000\,000, \end{aligned}\right\} \text{ если } 2^{n-1} > 1\,000\,000.$$

Но известно, что $2^{19} < 1\,000\,000 < 2^{20}$. Следовательно, первая группа условий применяется при $n \leqslant 20$, а вторая при $n > 20$. Таким образом формула (83) принимает вид:

$$\varepsilon_1(a) = \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} + \sum_{n=21}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1\,000\,000.$$

Первая сумма, очевидно, равна 10. Вторая представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна

$$\frac{1\,000\,000}{2^{20}} = 0{,}9536.$$

Поэтому для безобидности игры при миллионном капитале банка ставка игрока должна быть равна 10,95 руб. — результат, находящийся, несомненно, в границах разумного.

Если бы капитал банка составлял миллиард рублей, ставка была бы несколько меньше 16 руб., наконец, если бы банк имел 1 000 000 000 000 руб., т. е. сумму порядка экономической ценности всего мирового имущества, то ставка не превышала бы 21 руб.

Рассмотрим другой крайний случай. Если бы имущество банка составляло 100 руб. [1]), ставка была бы 4 р. 26 к.; при капитале в 10 руб. ставка была бы 2 р. 63 к.; наконец, при капитале в 1 руб. (когда, очевидно, выигрыш составляет 1 руб. независимо от того, когда в первый раз выпадет герб) ставка, конечно, равна 1 руб.

Я полагаю, что именно эти соображения являются правильным объяснением парадокса. Если бы банк был бесконечно богат, ожидание выигрыша также было бы бесконечно большим. Таким образом математика во всех случаях дает верный ответ. Но мы привыкли иметь дело

[1]) Все эти данные относятся к капиталу банка, получившемуся после того, как игрок уплатил свою ставку. В случае миллионного банка это, разумеется, не вносит существенных изменений; однако для некоторых из приведенных ниже цифр это условие существенно.

только с ограниченными количествами и плохо представляем себе количества неограниченные.

Другими словами, в ошибку здесь впадает не теория, а наша интуиция; но происходит это только по той причине, что теория занимается таким материалом, для которого мы не привыкли создавать интуитивных представлений.

§ 76. Математическое ожидание вероятности. Понятие математического ожидания может быть приложено к любой величине, значение которой определяется на основе экспериментальных данных. Но среди этих величин фигурирует и *априорная* вероятность полученного экспериментального результата. Так, например, бросая одновременно две игральные кости, мы получаем определенную сумму очков, заключающуюся в промежутке от 2 до 12; каждая из этих сумм имеет определенную априорную вероятность, как мы знаем из задачи 3, § 44. Эти вероятности даются таблицей:

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероя ость	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Допустим, что наш эксперимент дал сумму очков 4; мы получили, таким образом, разультат, *априорная* вероятность которого равнялась $\frac{3}{36}$; сумма очков, равная 12, была бы событием, *априорная* вероятность которого равнялась только $\frac{1}{36}$.

Эти числа измеряют собою необычность полученного результата: если они очень малы, наш результат чрезвычайно необычен; если они больше, его необычность не так уж велика. Если бы мы проделали большое число испытаний, то мы могли бы найти „среднюю необычность“ наших результатов, составляя среднее значение априорных вероятностей этих результатов.

Подобным же образом мы можем вычислить „ожидание вероятности“, так же как мы вычисляем ожидание любого другого числа, и таким образом получить нечто вроде теоретической оценки того, в какой мере необычного результата следует ожидать от данного эксперимента.

Возьмем в качестве примера вышеприведенные числа. Вероятность получить сумму 2 равна $\frac{1}{36}$; если это случится, то интересующая нас величина (вероятность) также будет равна $\frac{1}{36}$. Таким образом часть математического ожидания, происходящая от этого события, равна $\left(\frac{1}{36}\right)$. Подобным же образом вероятность получить сумму 3 равна $\left(\frac{2}{36}\right)$, что дает второе слагаемое $\left(\frac{2}{36}\right)^2$ искомого ожидания. Вообще, всякое событие, вероятность которого равна p, порождает слагаемое математического ожидания, равное p^2, потому что значение интересующей нас величины в случае наступления этого события равно p, вероятность же этого события также равна p. В нашем частном примере ожидание, следовательно, равно

$$\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{2}{36}\right)^2+\left(\frac{3}{36}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{36}\right)^2+\left(\frac{1}{36}\right)^2=0{,}1126.$$

Другими словами, эксперимент даст нам сумму очков, ожидаемая вероятность которой более $\frac{1}{9}$.

Докажем теперь, что *ожидание вероятности для полной группы событий будет наименьшим в том случае, когда события этой группы равновероятны.*

Пусть группа состоит из s событий, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Тогда ожидание их вероятности равно

$$\varepsilon(p)=p_1^2+p_2^2+\ldots+p_s^2,$$

причем числа p должны удовлетворять условию:

$$p_1+p_2+\ldots+p_s=1,$$

так как группа предположена полной. Решая последнее уравнение относительно p_s и подставляя результат в первое, мы получаем:

$$\varepsilon(p)=p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{s-1}^2+(1-p_1-p_2-\ldots-p_{s-1})^2.$$

В этом выражении все переменные взаимно независимы. Поэтому мы можем найти минимальное значение ε обычным методом диференциального исчисления. Диференцируя поочередно по всем переменным, мы получаем выражения вида:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i}=2p_i-2(1-p_1-p_2-\ldots-p_{s-1})=2(p_i-p_s);$$

для того чтобы все эти выражения равнялись нулю, необходимо, чтобы каждое p_i совпадало с p_s, т. е. чтобы все p_i были равны между собою, что и требовалось доказать.

Пример: те одиннадцать сумм, которые могут выпасть при бросании пары костей, не являются равновероятными. Мы видели, что в этом случае ожидание вероятности равно 0,1126; согласно доказанной теореме, это число должно быть больше, чем то, которое мы получили бы для 11 равновероятных событий. Но в этом последнем случае вероятность каждого отдельного события равна $\frac{1}{11}$; и так как это — единственное значение, которое величина p может принимать, то и $\varepsilon(p)=\frac{1}{11}$, что действительно меньше, чем 0,1126.

Подобную же теорему можно доказать и для случая величин с непрерывным распределением. Она гласит: *ожидание $p(x)$ будет наимень-*

шим в том случае, когда величина x распределена случайно[1]). Мы не будем останавливаться на ее доказательстве.

Вместо этого мы заметим, что все, сказанное выше относительно p, мы могли бы применить и к любой функции от p, ибо всякий эксперимент, дающий нам определенное значение величины p, дает тем самым и определенное значение этой функции. Ниже, когда мы перейдем к кинетической теории газов, мы увидим, что там играет важную роль ожидание *логарифма* величины p, и, предвосхищая то, в чем мы будем нуждаться там, мы можем доказать здесь следующую теорему:

Математическое ожидание величины $\log p(x)$ *будет наименьшим при случайном распределении величины x.*

Для доказательства мы воспользуемся формулой (89), полагая в ней $f(x)=\log p(x)$. Наша задача состоит тогда в том, чтобы получить наименьшее значение для величины

$$\varepsilon_1[\log p(x)] = \int p(x)\log p(x)\,dx$$

при дополнительном условии

$$\int p(x)\,dx = 1.$$

Это — задача вариационного исчисления, и притом так называемого „изопериметрического" типа. Попытка изложить здесь теорию решения таких задач завела бы нас, разумеется, слишком далеко. Мы ограничимся тем, что дадим точную формулировку правила решения задач такого рода и покажем, что в данном случае применение этого правила приводит к той теореме, которую мы хотим доказать.

Правило состоит в следующем: для того чтобы найти функцию $p(x)$, сообщающую наименьшее значение интегралу

$$F=\int f(p)\,dx$$

при условии, что интеграл

$$G=\int g(p)\,dx$$

сохраняет данное постоянное значение, — надо только сообщить наименьшее значение величине

$$F-\lambda G=\int [f(p)-\lambda g(p)]\,dx,$$

без каких бы то ни было ограничительных условий. При этом λ — постоянное число, значение которого обычно удается определить после того, как найден вид функции $p(x)$. В применении к нашей задаче это правило требует, чтобы интегралу

$$I=\int p\cdot[\log p-\lambda]\,dx$$

было придано минимальное значение.

---

1) Тоесть когда равным интервалам соответствуют равные вероятности. *Прим. ред.*

Допустим, что мы каким-либо путем нашли решение этой задачи, и что оно гласит:

$$p = P(x).$$

Так как эта функция сообщает интегралу I минимальное значение, то при любом изменении функции $P(x)$ интеграл I должен увеличиться. В частности, это будет иметь место, если мы положим:

$$p = P(x) + \delta(x).$$

Подставляя это выражение в I, мы получаем:

$$\int [P + \delta][\log(P + \delta) - \lambda]\, dx,$$

что в случае, когда функция δ очень мала, приближенно выражается так:

$$\int P(\log P - \lambda)\, dx + \int (1 \quad P + 1 - \lambda)\, \delta\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{P}\, \delta^2\, dx + \ldots$$

Теперь легко показать, что если только множитель при δ во втором интеграле не обращается в нуль, то все выражение может быть сделано[1]) меньше, чем первый его член (что явно невозможно, ибо первый член по условию дает интегралу наименьшее значение). Чтобы в этом убедиться, заметим, что δ есть совершенно произвольная функция от x. Если мы выберем ее такою, чтобы она всюду имела знак, противоположный знаку величины $\log P + 1 - \lambda$, то второй интеграл, очевидно, будет отрицательным. И если мы позаботимся о том, чтобы δ была достаточно мала, то остальными членами можно будет пренебречь, так что вся сумма действительно будет меньше своего первого члена. Так как это, как мы знаем, невозможно, то

$$\log P = \lambda - 1,$$

т. е. $P(x)$ есть постоянная величина. Это и значит, что величина x распределена случайно, и таким образом теорема доказана.

Задачи

1. В § 72 мы нашли $\varepsilon_1(n)$ для случая независимых испытаний. Посредством преобразований, совершенно подобных примененным там, можно привести суммы, которые определяют $\varepsilon_2(n)$, $\varepsilon_3(n)$, ..., к одному или нескольким членам вида (15). Найти $\varepsilon_2(n)$ и $\varepsilon_3(n)$.
2. Найти $\varepsilon_1(\delta)$, $\varepsilon_2(\delta)$ и $\varepsilon_3(\delta)$.
3. Бросьте монету десять раз подряд и обозначьте через n число выпадений герба. Повторите этот опыт 50 раз. По этим экспериментальным данным найдите среднее значение $\bar{n}$; найдите группу уклонений d_i и вычислите $\mu_1(d)$, $\mu_2(d)$ и $\mu_3(d)$. (Указание: для экономии времени целесообразно взять десять монет и бросать их одновременно.)
4. Найти „ожидание числа n“ и ожидания трех первых степеней δ. (Воспользоваться ответами задачи 2.)

---

[1]) Надлежащим выбором функции δ. *Прим. ред.*

5. Условия игры, описанной в примере 45, § 75, изменены таким образом, что если в течение десяти бросаний не выпадет ни одного герба, то банк присваивает себе все ставки и партия считается оконченной. Каково ожидание выигрыша для игрока при этих условиях?

6. Формула (77) дает „нормальный закон распределения вероятностей". Найти „наивероятнейшую скорость в направлении оси x-ов".

7. Найти σ, „стандартное отклонение" величины u.

8. Примем σ за единицу скорости и будем обозначать через u' скорость, измеренную в этих новых единицах. Найти $p(u)$ (задача, разумеется, относится только к скоростям в направлении оси x-ов).

9. Найти ожидание первых трех степеней величины δ в условиях задачи 8. Показать, что два первых можно определить без всяких вычислений.

10. В примере 45 банк, обладая капиталом в 1 000 000 руб., платит вместо 2^{n-1} только $(1{,}99)^{n-1}$ руб., если первое выпадение герба произойдет при n-м бросании. Какова справедливая ставка игрока? Тот же вопрос, когда банк платит $(1{,}5)^{n-1}$ руб. Сравнить эти результаты с теми, которые мы получили в § 75 в предположении, что имущество банка неограниченно.

11. Десять игральных костей бросаются одновременно. Опыт повторяется 50 раз. Найти ожидание числа таких бросаний, при которых выпадает три шестерки.

12. Если в результате эксперимента мы получаем значения двух величин a и b и если эти значения взаимно независимы, то ожидание произведения ab равно произведению их ожиданий. Доказать это.

13. Из двух колод выброшены все фигурные карты; после этого из каждой колоды вынимают по одной карте. Найти ожидание произведения чисел очков этих двух карт.

14. Если эксперимент дает значение величины a и b, то во всех случаях $\varepsilon_1(a+b) = \varepsilon_1(a) + \varepsilon_1(b)$. Доказать это.

15. Из колоды выброшены все фигурные карты; после этого из нее вынимаются две карты. Найти ожидание суммы чисел очков этих двух карт.

16. Доказать, что ожидание вероятности непрерывно меняющейся величины будет наименьшим при случайном распределении.

Литература

1. Бернштейн, Теория вероятностей, ч. II, гл. IV.
2. Лахтин, Курс теории вероятностей, ч. I, гл. II.
3. Боярский и др., Теория математической статистики, гл. IV и VII.

ГЛАВА VIII

Функции распределения, наиболее часто встречающиеся в инженерном деле

§ 77. Введение. В течение многих лет единственной функцией распределения, с которой приходилось иметь дело ученым, был нормальный закон Гаусса. Для случая одной переменной он в точности дается формулой (77). Существует несколько различных выводов этого закона, но с практической точки зрения ни один из них не является удовлетворительным, потому что все они основаны на допущениях, справедливость которых не поддается проверке. Так, например, весьма часто допускают, что отклонение той или иной величины от ее ожидания происходит вследствие взаимного наложения очень большого числа взаимодействующих факторов, ни один из которых по своей величине не может сравниться с совокупным влиянием всех остальных и которые с одинаковою вероятностью вызывают положительные и отрицательные уклонения. Безнадежно, вообще говоря, было бы пытаться обосновать пользование формулой, основанной на подобных гипотезах; ибо обычно у нас нет сколько-нибудь ясной картины причин происходящих отклонений ни в отношении их числа, ни в отношении их тенденции с одинаковой вероятностью производить противоположные эффекты.

Наряду с этим чисто теоретическим возражением против такого рода доказательств мы должны учесть и тот основной факт, что, как показывает опыт, лишь весьма незначительная часть экспериментальных данных следует этому закону; более того, лишь в редких случаях фактические распределения бывают симметричными. Поэтому, хотя, может быть, и не бесполезно проследить, насколько успешны были попытки оправдать этот освященный традицией закон, мы все же не будем забывать, что, по крайней мере в известном смысле, то уважение, которым он окружен, имеет своей причиной его почтенный возраст. Этот закон имеет свои применения; но не надо думать, будто он самим небом дан для уврачевания всякой статистической беды.

Другие функции распределения, относящиеся к непрерывно меняющимся величинам, находятся с логической точки зрения не в лучшем положении. И только для случая величин, которые по сути дела могут принимать лишь дискретный ряд значений (как, например, число предметов, обладающих данным свойством), было найдено нечто вроде практически применимых гипотез.

Целью настоящей главы является выделить эти два класса функций распределения, и, насколько это возможно, без слишком утомительных теоретических расчетов показать, при каких условиях следует ожидать применимости той или иной отдельной функции. Эти функции могут затем служить руководящей нитью при обработке и оценке такого рода статистического материала, в особенности в случаях, когда попытка найти истинный закон теоретическим путем представляется совершенно безнадежной. В других случаях эту попытку, несомненно, следует предпринять, в особенности если значительность проблемы оправдывает затрачиваемую работу. Этот путь — единственно достоверный.

§ 78. Функции распределения для дискретных переменных; биномиальный закон и различные приближения к нему. Первым законом распределения, имевшим сколько-нибудь общее значение, в порядке наших исследований был закон

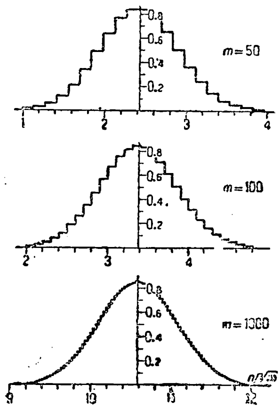
$$P_m(n) = C_n^m p^n (1-p)^{m-n}. \tag{23}$$

Как мы знаем, он представляет собою вероятность того, что событие, вероятность которого при отдельном испытании равна p, наступит n раз при m *взаимно независимых* испытаниях.

Это — совершенно точный закон; мало того, нам в точности известны и те условия, при соблюдении которых он имеет место. Правда, имеется сравнительно немного практических случаев, в которых эти условия удается сохранить неизменными в течение более или менее продолжительного времени; но зато в целом ряде проблем условия настолько приближаются к полной устойчивости, что мы без всяких колебаний считаем возможным принять их за неизменные. Возьмем, например, продукцию пресса для чеканки монет. Несомненно, штамп постоянно изнашивается, что вызывает в продукции тенденцию к совершенно определенному изменению; однако обычно эти изменения бывают столь незначительны, что при не слишком долгом пользовании одним и тем же штампом мы можем ими пренебрегать. Аналогично обстоит дело и с другими моментами процесса: листы имеют несколько различную толщину, несколько меняется температура и т. д. — целый ряд факторов. Тем не менее, если мы распределим все монеты на два сорта — „плохие“ и „хорошие“, то вероятность оказаться в числе хороших для всех монет будет приблизительно одинакова.

Поэтому биномиальный закон имеет широкую область применений. Наиболее неприятная черта его — это трудность вычислений, в особенности когда ищется вероятность того, что число появлений события *превосходит* n (а не *равно* n); в этом случае, если m велико, приходится вычислять и складывать между собою большое число членов. Однако существуют весьма удовлетворительные приближенные формулы, которыми в этих случаях с успехом можно пользоваться и основные пути вывода которых мы наметили уже в § 39 и 40. Теперь мы доведем соответствующие доказательства до конца.

Чтобы получить более ясное представление о том, что мы должны доказать, мы вернемся еще раз к анализу теоремы Бернулли и в частности к связанным с нею черт. 5 и 6. Эти чертежи построены для частного случая $p = \frac{1}{3}$ и изображают функции распределения числа n наступлений события при m испытаниях для нескольких определенных значений m. Мы видели, что при увеличении числа испытаний кривые распределения становятся все более ровными и все далее распространяются вдоль оси n (черт. 5), но что в случае, когда за абсциссу принято $\frac{n}{m}$, они, напротив, становятся выше и простираются на меньшее расстояние по мере того, как m возрастает (черт. 6). Если мы сделаем в этом анализе еще один шаг и построим кривые распределения, принимая за независимую переменную $\frac{n}{\sqrt{m}}$, то мы получим кривые, изображенные на черт. 20. Очевидно, что они очень похожи друг на друга; повидимому, они при безграничном возрастании m стремятся к определенному предельному положению. Поэтому должна существовать некоторая плавная кривая, могущая служить хорошим приближением, по крайней мере для очень больших значений m. Надо, однако, заметить, что для получения той степени взаимного сходства кривых, какую дает черт. 20, мы должны сдвинуть эти кривые таким образом, чтобы вершины их лежали на одной вертикали.



Черт. 20.

Мы начнем с того, что заменим в формуле (23) все факториалы приближенными значениями по формуле Стирлинга. Мы будем иметь:

$$P_m(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi mp(1-p)}}\left(\frac{mp}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{m-mp}{m-n}\right)^{m-n+\frac{1}{2}}f(m,\,n), \tag{98}$$

где $f(m, n)$ есть сокращенное выражение для дроби

$$\frac{1+\frac{1}{12m}+\frac{1}{288m^2}+\ldots}{\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{12(m-n)}+\frac{1}{288(m-n)^2}+\ldots\right)},$$

имеющей своим происхождением формулу (41). Эта дробь равносильна выражению:

$$f(m,\,n)=1-\frac{1}{12}\,\frac{m^2-mn+n^2}{mn(m-n)}+\ldots \tag{99}$$

Далее мы займемся изменением начала отсчета. Правильная подстановка должна сдвинуть все вершины в одну точку (удобнее всего — в начало отсчета). Этого мы можем достигнуть, вводя новую переменную

$$\delta=n-pm.$$

Так как pm есть „ожидание числа n“, то δ является отклонением от этого ожидания. Теперь мы изменим масштаб, полагая

$$x=\frac{\delta}{\sqrt{m}}=\frac{n-pm}{\sqrt{m}}.$$

Вводя эту новую переменную в формулу (98) и делая несколько очевидных преобразований, мы получаем:

$$P_m(n)=\frac{f(m,\,n)}{\sqrt{2\pi mp\,(1-p)}}\left(1+\frac{x}{p\sqrt{m}}\right)^{-pm-x\sqrt{m}-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(1-\frac{x}{(1-p)\sqrt{m}}\right)^{-(1-p)\sqrt{m}+x\sqrt{m}-\frac{1}{2}}. \qquad (100)$$

Две скобки, входящие в это выражение, мы преобразуем теперь по способу § 40. Обозначая произведение их через Z, мы будем иметь:

$$\log Z=-\left(pm+x\sqrt{m}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{p\sqrt{m}}\right)-$$
$$-\left[(1-p)\,m-x\sqrt{m}+\frac{1}{2}\right]\log\left(1-\frac{x}{(1-p)\sqrt{m}}\right).$$

Разлагая логарифмы в ряд и собирая вместе члены с одинаковыми степенями m, мы получим:

$$\log Z=-\frac{x^2}{2p\,(1-p)}+\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{(p-1)^2-p^2}{p^2\,(p-1)^2}\,\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{(p-1)+p}{p\,(p-1)}\,\frac{x}{2\cdot 1}\right]-$$
$$-\frac{1}{m}\left[\frac{(p-1)^3-p^3}{p^3\,(p-1)^3}\,\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{(p-1)^2+p^2}{p^2\,(p-1)^2}\,\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]+\ldots,$$

так что само Z равно числу e, возведенному в такую степень. В этом выражении мы выделим множитель $e^{-\frac{x^2}{2p(1-p)}}$, не зависящий от m, а остающийся множитель разложим в ряд. Мы получим:

$$Z=e^{-\frac{x^2}{2p(1-p)}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{m}\,p\,(1-p)}\,(2p-1)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{p\,(1-p)}\,\frac{x^3}{6}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{m}\,p\,(1-p)}\right)^2\left(\frac{8p^2-8p+3}{8}\,x^2-\frac{7p^2-7p+2}{p\,(1-p)}\,\frac{x^4}{12}+\frac{(2p-1)^2}{p^2\,(1-p)^2}\,\frac{x^6}{72}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{m}\,p\,(1-p)}\right)^3(2p-1)\left(\frac{8p^2-8p+5}{16}\,x^3-\frac{94p^2-94p+37}{p\,(1-p)}\,\frac{x^5}{240}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{10p^2-10p+3}{p^2\,(1-p)^2}\,\frac{x^7}{144}-\frac{(2p-1)^2}{p^3\,(1-p)^3}\,\frac{x^9}{1296}+\ldots\right)\right].$$

Далее, вводя в $f(m,\,n)$ новую переменную x вместо n, мы находим:

$$f(m,\,n)=1-\frac{1-p+p^2}{12mp\,(1-p)}+\frac{x\,(1-2p)}{12m^{\frac{3}{2}}p^2\,(1-p)^2}+\ldots$$

Теперь очевидно, что нам было бы удобнее принять в качестве новой переменной $y=\frac{x}{\sqrt{p\,(1-p)}}$; сделаем эту замену; так как $\sqrt{mp\,(1-p)}=\sigma$

есть для биномиального закона стандартное отклонение, то эта новая переменная может быть выражена так:

$$y = \frac{n - pm}{\sqrt{mp(1-p)}} = \frac{\delta}{\sigma} \tag{101}$$

и потому представляет собою отклонение, измеренное в стандартных единицах. Подставляя это выражение в ряды, полученные нами для Z и f, и перемножая их между собою, мы находим:

$$P_m(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[1 + \frac{1}{\sigma}(2p-1)\left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1-p+p^2}{12} - \frac{3-8p+8p^2}{8} y^2 + \frac{2-7p+7p^2}{12} - \frac{(2p-1)^2}{72} y^6\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sigma^3}(2p-1)\left(\frac{-3+p-p^2}{24} y + \frac{47-74p+74p^2}{144} y^3 - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{37-94p+94p^2}{240} y^5 + \frac{3-10p+10p^2}{144} y^7 - \frac{(2p-1)^2}{1296} y^9\right) - \ldots\right]. \tag{102}$$

Невыписанные члены становятся все более и более сложными.

Эта функция распределения попрежнему дает нам $P_m(n)$, потому что мы не помножили ее на якобиан, соответствующий переходу от n к y. При этом преобразовании $\sqrt{2\pi}\sigma$ заменяется через $\sqrt{2\pi}$ — ничего другого не происходит. Это легко заключить из того, что все абсциссы были помножены на $\frac{1}{\sigma}$, и следовательно, для сохранения прежней площади мы должны помножить все ординаты на σ.

Посмотрим теперь, к каким результатам привели нас эти утомительные выкладки. Пока $\frac{y^3}{\sigma}$ мало, формула (102) дает нам хорошее приближение к биномиальному закону. При малом y^3 (т. е. когда мы сосредоточиваем наше внимание на частях кривой, лежащих в соседстве ее вершины) первый член формулы (102) уже дает хорошую точность. Но этот член, будучи написан для $P_m(y)$, вместо $P_m(n)$, дает:

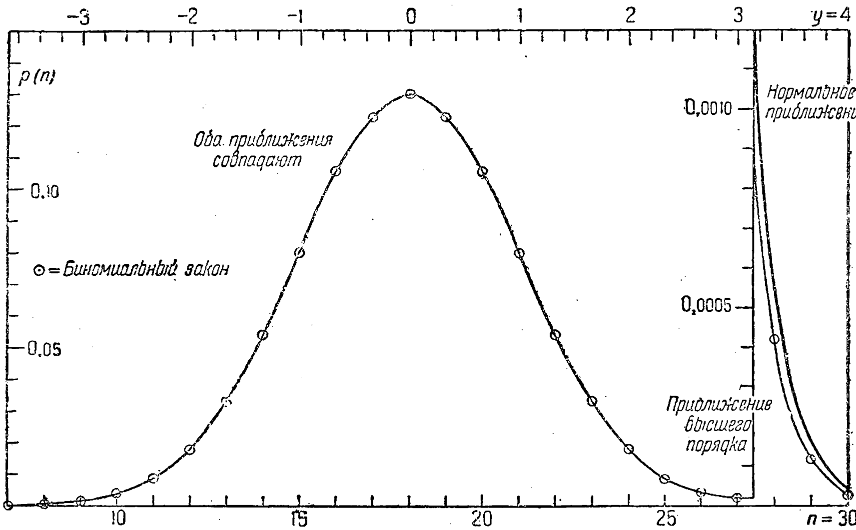
$$P_m(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \tag{103}$$

т. е. как раз *нормальный закон.*

В частном случае, когда $p = \frac{1}{2}$, в формуле (102) все члены нечетного порядка обращаются в нуль, благодаря присутствию множителя $(2p-1)$. Следовательно:

Нормальный закон (103) *служит хорошим приближением биномиального закона, пока* $\frac{y^3}{\sigma}$ *не очень велико. В частном случае, когда* $p = \frac{1}{2}$, *приближение лучше, чем в других случаях. При больших отклонениях формула всегда неудовлетворительна.*

Подобного рода формулировки всегда остаются несколько расплывчатыми, пока мы не иллюстрируем их теми или другими графическими изображениями. На черт. 21 мы даем случай $m=36$, $p=\frac{1}{2}$, а на черт. 22 $p=\frac{1}{10}$ при том же самом значении m. В обоих случаях кружками отмечены точные значения, соответствующие биномиальному закону. Разумеется, отметки сделаны только для целых значений n. Изображенные кривые дают приближения к этим значениям.

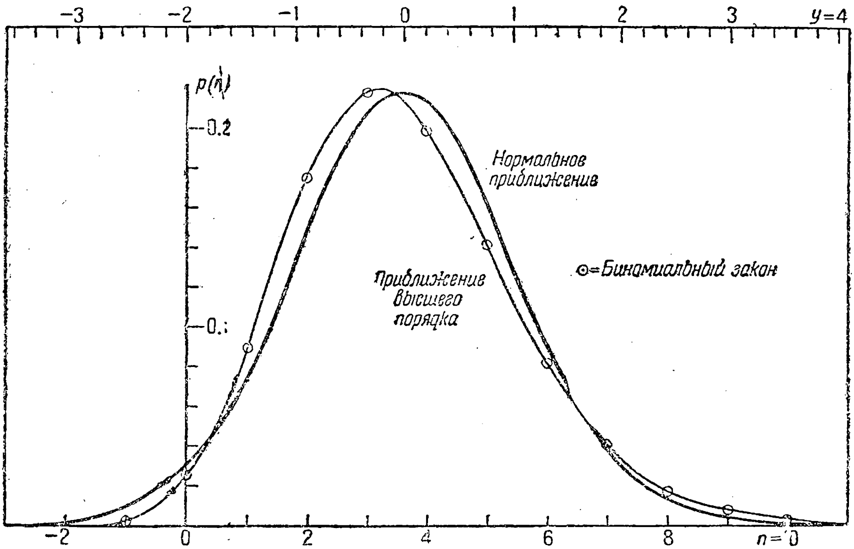


Черт. 21.

Обращаясь сначала к симметричному случаю (черт. 21), мы замечаем, что кривая в точности совпадает с кружками, насколько можно судить по наличной части чертежа. Более того, грубое приближение (103) и более точное (102) так близки друг к другу, что оказалось совершенно невозможным изобразить их отдельно друг от друга. Это оставалось бы справедливым вплоть до $n=36$, если бы мы продолжали пользоваться тем же масштабом. Но если мы в концах масштаб увеличим, как это сделано в правой части нашего чертежа, то мы увидим, что эти две кривые разойдутся, причем более длинная формула даст значительно лучшее приближение к истинным значениям, нежели нормальный закон (103). Так, например, при $n=30$ нормальный закон дает ошибку более чем на 50%, в то время как более высокое приближение при данном масштабе все еще неотличимо от истинного значения.

Обращаясь далее к черт. 22, мы видим, что в этом случае нормальный закон нигде не дает сколько-нибудь хорошей точности, между тем как более высокое приближение дает очень хорошее совпадение на всем протяжении чертежа.

§ 79. Функция распределения для дискретных переменных; закон Пуассона как предельный случай биномиального закона. Второй важной функцией распределения для случая дискретных переменных является так называемый закон Пуассона. Обычно его рассматривают как предельный случай биномиального закона при очень большом числе испытаний m и очень малом p; и так как вывод его, основанный на этой концепции, — самый простой, то мы с него и начнем; но вскоре мы убедимся, что здесь возможна и другая точка зрения, имеющая гораздо большее практическое значение.



Черт. 22.

Мы видели в § 73, что в случае биномиального закона ожидание числа n равно $\varepsilon = mp$. Заменим поэтому в формуле (23) p на $\frac{\varepsilon}{m}$; мы получим:

$$P_m(n) = C_n^m \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^n \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^{m-n}. \tag{104}$$

Это легко приводится к виду:

$$P_m(n) = \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^{-n}\right]\left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^{m}\right]\frac{\varepsilon^n}{n!}.$$

Учитывая теперь, что мы предположили p весьма малым, мы должны заключить, что реальное значение имеют только те n, которые весьма малы по сравнению с m. Поэтому каждая из разностей, входящих в первую квадратную скобку, мало отличается от единицы. То же самое справедливо и для разности $1-\frac{\varepsilon}{m}$, фигурирующей в двух последних квадратных скобках, ибо $\frac{\varepsilon}{m}=p$ весьма мало. Для первых двух скобок, в которых число таких разностей сравнительно невелико, отсюда вытекает, что каждая из них и сама мало отличается от единицы. Но к последней квадратной скобке этого рассуждения применить нельзя, ибо здесь $1-\frac{\varepsilon}{m}$ возводится в чрезвычайно высокую степень. Мы видели в § 40, что выражение этого вида приближенно равно $e^{-\varepsilon}$, так что все выражение (104) приближенно может быть выражено следующей формулой:

$$P_m(n)\approx\frac{e^{-\varepsilon}\varepsilon^n}{n!}. \tag{105}$$

Насколько доброкачественно это приближение — это зависит от того, каковы значения m, n и ε; во всех случаях, разумеется, мы можем усовершенствовать эту формулу до любого предела, проведя ряд рассуждений, аналогичных тем, какими мы пользовались в § 78. Однако получаемый таким образом результат, повидимому, не имеет большого значения и вряд ли заслуживает того, чтобы быть выписанным.

Существенно во всем этом то, что *если p достаточно мало, а m достаточно велико*, то биномиальный закон приближенно сводится к формуле (105), которая представляет собой закон Пуассона. Что иногда эти условия выполняются с точностью, достаточной для того, чтобы оправдать пользование этой упрощенной формулой,— это может легко быть показано посредством одного частного примера, который вследствие своего своеобразного содержания стал почти классическим.

Отчеты некоторых армий, собранные за целый ряд лет, приводят, между прочим, число солдат, убитых ударом лошадиного копыта. В табл. XIII мы приводим собранный материал.

Таблица XIII

Сводка числа солдат, умерших от удара лошадиных копыт

Число смертей	Фактическая частота	Ожидаемая частота
0	109	108,7
1	65	66,3
2	22	20,2
3	3	4,1
4	1	0 6
5	0	0,1
6	0	0,0

Первый столбец содержит числа солдат, убитых указанным образом в течение одного года в составе одного армейского корпуса, а второй столбец показывает, как часто это число встречалось среди тех данных, которые входят в наш материал.

Но в году много дней, и вероятность того, что несчастный случай произойдет в данный определенный день, ничтожно мала. При этом мы можем смотреть на каждый такой день как на некое независимое „испытание“, так что у нас есть некоторые основания ожидать, что данные табл. XIII будут следовать формуле (105) довольно точно. Для проверки этой гипотезы в третьем столбце таблицы приведены числа, дающие ожидание числа наступлений каждого из результатов первого столбца, вычисленное по формуле Пуассона при $\varepsilon = 0{,}61$. В данный момент у нас нет лучшего средства оценить, насколько близки друг к другу числа второго и третьего столбцов, чем простое констатирование отсутствия между ними серьезных расхождений. Ниже, в гл. IX, когда мы научимся количественно измерять такого рода близость, мы убедимся, что в данном случае совпадение имеется действительно хорошее.

§ 80. Определение терминов „случайность в индивидуальном смысле“ и „случайность в коллективном смысле“. Однако из этого примера мы можем извлечь больше пользы, чем простое констатирование того факта, что опытные данные иногда следуют закону Пуассона. Мы воспользуемся им для изучения тех условий, при которых закон Пуассона может быть применяем *точно*, а не только *приближенно*.

Заметим прежде всего, что те моменты, в которые были зарегистрированы приведенные смертные случаи, определяют собою некоторые точки на оси времени. Если мы рассмотрим одну индивидуальную смерть, то у нас нет оснований допускать, что наступление ее в различные моменты имеет разные вероятности[1]. Иначе говоря, она может произойти в течение данного промежутка времени с такою же вероятностью, как и в течение любого другого промежутка той же продолжительности; или, выражаясь в духе § 51, она „случайно“ располагается на оси.

К этому присоединяется то обстоятельство, что на число смертей в данном промежутке времени не оказывает никакого влияния то, что имело место в течение других промежутков времени. Мы не хотим сказать, чтобы между этими промежутками вообще не было никакой связи; несомненно, что существует хотя бы та связь, которая выражается словами „все интервалы равной длины одинаково вероятны“. Пожалуй, нашу мысль лучше всего будет иллюстрировать примером противоположного положения вещей. Пусть нам сообщено, что в течение определенного года убито трое, и пусть, проглядывая сводки, мы за первое полугодие нашли два смертных случая интересующего нас типа. Очевидно, что эти сведения оказывают совершенно определенное влияние на наше суждение о числе убитых во второе полугодие: мы знаем, что там имеется *ровно один* убитый. Однако, если бы мы находились в положении статистика, который, принимая сводки, просто констатировал бы, что

[1]) Не надо, конечно, относиться слишком критически к этому утверждению. Некоторые точки на оси времени соответствуют моментам, когда данный человек спит, и совершенно невероятно, чтобы лошадь убила его именно в это время. Далее надо полагать, что для праздничных дней мы имеем иную вероятность, нежели для будней, и это обстоятельство также способно придать различные вероятности одинаковым промежуткам времени, помещенным в разных местах оси. Тот факт, что высказанное нами утверждение при слишком детальном рассмотрении оказывается неверным, должен, однако, еще ярче подчеркнуть основную идею, которую мы в данном случае хотим внушить читателю.

в первое полугодие такого-то года число убитых несколько превышает обычную норму, то мы отсюда ровно ничего не могли бы заключить относительно второго полугодия. Там может оказаться как избыток, так и недостаток; все — дело случая[1]).

Положения, в которых можно сделать совершенно подобные наблюдения, встречаются весьма часто. В главе X, занимаясь некоторыми проблемами связи, мы должны будем вновь и вновь к ним возвращаться. Поэтому мы установим теперь несколько определений, которые в сжатом виде будут резюмировать сущность того, что мы только что наблюдали.

Группа точек располагается на отрезке „случайно в индивидуальном смысле", если каждая из этих точек расположена случайно, независимо от остальных.

Группа точек расположена на отрезке „случайно в коллективном смысле", если вероятность того, что в некотором интервале dx содержится n точек, не зависит от числа точек в любом другом интервале, ни полностью, ни частично не содержащемся внутри dx.

Мы уже заметили, что группа, содержащая точно определенное число точек, не может быть расположена на отрезке случайно в коллективном смысле, потому что в этих условиях избыток точек в одном интервале с необходимостью понижает шансы избытка и повышает шансы недостатка точек во всех других частях отрезка, что, очевидно, нарушает требование „коллективной случайности".

Столь же легко указать пример случая, в котором точки расположены случайно в „коллективном", но не в „индивидуальном" смысле. Пусть, например, мы регистрируем всех проходящих через какой-нибудь мост, отмечая моменты их появления в некоторой определенной точке этого моста. Некоторые из этих людей проходят пешком, другие проезжают в автомобилях; иногда проезжает сразу большая группа в вагоне трамвая. Если мы условимся в порядке идеализации пренебрегать размерами экипажей, то мы можем сказать, что некоторые из путешественников минуют наш пункт поодиночке, а другие — целыми группами одновременно. На оси времени мы получаем ряд точек, расположенных так, что вероятность попадания m точек в данный интервал — одна и та же для всех интервалов одинаковой длины[2]). Далее знание числа миновав-

[1]) Это утверждение по всей вероятности тоже неверно. Избыток несчастных случаев, подмеченный статистиком среди года, должен был бы привести, при достаточно серьезном отношении к этому делу, к своего рода „кампании борьбы за безопасность", целью которой было бы понизить шансы несчастных случаев в дальнейшем. Если бы сами заинтересованные знали об этом избытке, они, вероятно, повысили бы осторожность, вследствие чего на ближайший отрезок времени вероятность несчастного случая должна была бы снизиться.

Именно такого рода влияния мы в дальнейшем хотим исключить.

[2]) Разумеется, читатель не должен относиться к приводимому примеру с излишней придирчивостью; ему придется забыть о существовании таких вещей, как, например, регулирование уличного движения, которое может вызвать скопление экипажей, или как расписание движения трамваев, автобусов и т. п., вносящее известную долю регулярности в поток проезжающих. Наш пример весьма далек от совершенства, и тем не менее он иллюстрирует основную идею лучше, чем какой-нибудь искусственный, специально для этой цели придуманный, случай.

Такова уже судьба абстрактно-логических идей — они в чистом виде никогда не находят себе воплощения в действительной жизни.

ших наш пункт, например за последнюю минуту, не оказывает никакого влияния на ожидаемое число тех, которые пройдут мимо него в ближайшую следующую минуту. Поэтому точки располагаются „случайно в коллективном смысле". Но о „случайности в индивидуальном смысле" здесь не может быть и речи, потому что точка, соответствующая пассажиру трамвая, располагается, очевидно, вместе с точками, соответствующими другим пассажирам того же вагона, и потому не может быть независимой от них.

Таким образом до сих пор мы имеем примеры: a) точек, расположенных случайно *в индивидуальном, но не в коллективном смысле*, и b) точек, расположенных случайно *в коллективном, но не в индивидуальном смысле.*

Для завершения этого круга идей нам было бы теперь полезно указать пример, в котором точки не располагались бы случайно *ни в индивидуальном, ни в коллективном смысле.* Допустим, что движение через наш мост подчинено такому правилу: два трамвайных поезда, вступающих на мост, должны быть отделены друг от друга промежутком времени по меньшей мере в одну минуту. Тогда, если нам известно, что в течение последней полуминуты по мосту прошел трамвай, то вероятность появления трамвая в течение следующей полуминуты равна нулю. Это, очевидно, противоречит определению „случайности в коллективном смысле", а так как „случайность в индивидуальном смысле" попрежнему в этом примере не имеет места, то движение не будет случайно распределенным ни в том, ни в другом смысле.

Теперь мы приведем еще один пример группы точек, расположенных случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле; на этот раз это будет пример, который не может быть дискредитирован соображениями о том или ином человеческом поведении, как это было с первым примером настоящего параграфа; правда, и у нового примера есть свои недостатки.

Испускание β-лучей[1]) радиоактивными веществами происходит, повидимому, совершенно самопроизвольно; это значит, что данное ядро побуждается к испусканию электрона не окружающими обстоятельствами, а чисто внутренними причинами, не охваченными еще нашей теорией. Если мы выбираем определенный атом и следим за ним в течение промежутка времени dt, то имеется совершенно определенная вероятность того, что в течение этого промежутка он испустит электрон. Так как эта вероятность совершенно не зависит ни от того, где мы выбрали интервал dt, ни от поведения других атомов, то мы можем утверждать, что эти эмиссии расположены „случайно в индивидуальном смысле".

Точно так же, если мы наблюдаем за группой из m атомов, то вероятность того, что она в течение интервала dt испустит n электронов, совершенно не зависит от того, что происходило в какие бы то ни

---

[1]) Под именем „β-лучей" подразумевают электроны, самопроизвольно испускаемые атомными ядрами. При испускании электрона сама испускающая субстанция переходит в другой химический элемент, свойства которого могут быть совершенно отличны от свойств первоначального элемента. Он может также быть радиоактивным. Но так как это — уже другой элемент, то мы вправе считать, что каждый атом только один раз испускает электрон.

было предшествующие времена [1]), ибо, как мы сказали, испускание β-лучей не зависит от событий, происходящих вне ядра.

Таким образом точки, отмечаемые на временной оси при последовательных испусканиях электронов, расположены случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле.

§ 81. Второй вывод закона Пуассона. Мы убедились, что можно привести примеры групп точек, располагающихся на данном отрезке: 1) случайно в обоих вышеуказанных смыслах, 2) случайно в одном (любом) и только в одном из них и 3) не случайно ни в том, ни в другом смысле [2]). Мы хотим теперь доказать, что всякая группа, которая располагается случайно в обоих смыслах, будет в своем распределении следовать закону Пуассона. Именно, мы докажем следующую теорему:

Если некоторое множество точек расположено на отрезке (a, b) *случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле, то вероятность того, что некоторый интервал длины* x *будет содержать* n *из этих точек, разна*

$$P(n, x) = \frac{(kx)^n}{n!} e^{-kx},$$

где kx *— ожидаемое число точек в данном интервале.*

Доказательство будет состоять из четырех частей:

1. Сперва мы покажем, что вероятность попадания ровно одной точки в бесконечно малый интервал длины dx есть бесконечно малая порядка dx, вероятности же попадания в этот интервал большего числа точек будут бесконечно малыми высших порядков.

2. Далее мы покажем, что вероятность попадания n точек в интервал длины x есть некоторая *диференцируемая* функция от x.

3. Затем мы убедимся, что эта вероятность имеет то значение, которого требует наша теорема.

4. Наконец, мы покажем, что kx есть ожидаемое число точек в интервале длины x.

1. По определению, вероятность того, что данный интервал содержит n точек, одна и та же для всех интервалов одинаковой длины и совершенно не зависит от того, что происходит в других интервалах, внеположных данному. Это верно как для $n = 0$, так и для любого положительного значения n.

Если мы разобьем интервал x на элементы длины dx, то интервал x будет свободен от точек данного множества тогда и только тогда, если от них будет свободен каждый из этих элементарных интервалов. Сле-

[1]) Если мы берем определенную массу нашего вещества и наблюдаем за нею, то составляющие ее атомы постепенно превращаются в атомы другого вещества, так что с течением времени число их постепенно уменьшается. Ниже мы учтем это обстоятельство. Здесь же мы можем допустить, что взамен каждого переродившегося атома так или иначе появляется новый.

[2]) Можно даже указать пример множества точек, расположенных на отрезке (a, b), но подчиненных различным условиям в частях (a, c) и (c, b) этого отрезка $(a < c < b)$. Простой пример можно получить, отмечая на оси времени моменты вылета электрона из данной массы радиоактивного вещества и удаляя часть взятого вещества в момент c.

довательно, вероятность того, что интервал x будет „пустым“ (в отношении точек данного множества), совпадает с вероятностью того, что все эти элементарные интервалы будут „пустыми“.

Обозначим через $P(0, x)$ вероятность пустоты интервала x, через $P(0, dx)$ вероятность пустоты интервала dx и через $P(>0, dx)$ вероятность того, что интервал dx не пуст. Тогда

$$P(0, dx) = 1 - P(>0, dx),$$

и, так как число всех элементов равно $\frac{x}{dx}$,

$$P(0, x) = [P(0, dx)]^{\frac{x}{dx}} = [1 - P(>0, dx)]^{\frac{x}{dx}}.$$

Это уравнение выражает символически тот самый факт, который словами был выражен выше: что интервал x пуст тогда и только тогда, если пусты все интервалы dx. Логарифмируя обе части, мы находим:

$$\log P(0, x) = \frac{x}{dx}\log[1 - P(>0, dx)] =$$
$$= -x\left[\frac{P(>0, dx)}{dx} + \frac{[P(>0, dx)]^2}{2dx} + \ldots\right]. \tag{106}$$

Мы должны рассмотреть три возможности:

a) Когда $dx \to 0$, то и

$$\frac{P(>0, dx)}{dx} \to 0.$$

В этом случае все члены в скобках стремятся к нулю, а потому мы получаем[1]):

$$\log P(0, x) = 0$$

или

$$P(0, x) = 1,$$

независимо от значения величины x. Это означало бы, что при любой длине интервала вероятность попадания в него хотя бы одной точки равна нулю. Это может иметь место только для бесконечно больших расстояний между точками. Конечно, мы должны отбросить это допущение.

b) Допустим теперь, что $\frac{P(>0, dx)}{dx}$ безгранично возрастает. Тогда в правой части равенства (106) каждый член в скобках есть бесконечно большая величина, вследствие чего $P(0, x) = 0$. Это означало бы, что сколь угодно малый интервал обязательно должен содержать хотя бы одну точку, что также явно неудовлетворительно.

c) Остается последняя возможность — отношение $\frac{P(>0, dx)}{dx}$ стремится к пределу k, который отличен от 0 и ∞. В этом случае

---

[1]) Как известно, при достаточно малых значениях $P(>0, dx)$ ряд сходится равномерно, а потому мы вправе заключить, что из стремления к нулю каждого члена следует стремление к нулю всей суммы.

$P(>0, dx)$ приближается к $k\,dx$, а его высшие степени близки к соответствующим степеням величины $k\,dx$, так что в скобках формулы (106) все члены кроме первого в пределе исчезают. Это дает:

$$\log P(0, x) = -kx$$

или

$$P(0, x) = e^{-kx}.$$

Из наших трех гипотез последняя — единственная, приводящая к допустимому значению для $P(0, x)$. Поэтому она должна быть верной, т. е. вероятность попадания *хотя бы одной точки* в элемент dx должна быть бесконечно малой первого порядка относительно dx.

Однако это не совсем то, что мы хотим доказать, потому что отсюда еще не следует, что вероятность попадания в данный элемент *более чем одной точки* есть бесконечно малая высшего порядка относительно dx; отсюда не следует даже и того, что $P(1, dx)$ есть бесконечно малая первого порядка. Пока мы можем только заключить, что *по крайней мере* одна из величин P должна иметь первый порядок относительно dx и что порядок всех остальных — не ниже первого. Однако если нам удастся показать, что вероятность попадания в элемент dx двух или более точек есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с вероятностью попадания в него одной или более точек, то тем самым будет установлено, что величина $P(1, dx)$, *и только она*, есть бесконечно малая первого порядка относительно dx.

Доказать это очень нетрудно. В самом деле, событие „данный интервал содержит более чем одну точку" логически равносильно двум событиям: „интервал содержит по крайней мере одну точку" и „он содержит по крайней мере еще одну точку". Вероятности этих трех событий в наших обозначениях соответственно выражаются символами:

$$P(>1, dx), \quad P(>0, dx) \quad \text{и} \quad P_{>0}(>1, dx);$$

последняя есть условная вероятность „еще одной точки" в предположении, что одна точка уже имеется. Поэтому, пользуясь формулой (20), мы непосредственно находим:

$$P(>1, dx) = P(>0, dx)\, P_{>0}(>1, dx),$$

или

$$P_{>0}(>1, dx) = \frac{P(>1, dx)}{P(>0, dx)}.$$

Построим теперь интервал длины dx вокруг одной из наших точек. Вероятность того, что он содержит кроме нее еще другие точки, как раз равна $P_{>0}(>1, dx)$. Рассмотрим предел этой вероятности при $dx \longrightarrow 0$. Очевидно, этот предел есть вероятность того, что найдется вторая точка, в точности совпадающая с первой; но мы уже видели, что эта вероятность должна равняться нулю, если точки располагаются случайно в индивидуальном смысле. Следовательно, $P_{>0}(>1, dx)$ должна стремиться к нулю вместе с dx.

Заметим, наконец, что

$$P(1, dx) = P(>0, dx) - P(>1, dx) = \\ = P(>0, dx)\,[1 - P_{>0}(>1, dx)],$$

откуда в пределе

$$P(1, dx) = P(>0, dx) = k\,dx,$$

что завершает доказательство части (1).

2. Во вторую очередь мы должны доказать, что функция $P(n, x)$ диференцируема относительно x. С этой целью мы рассмотрим два смежных интервала, один длины x и другой длины dx, образующих, следовательно, если взять их вместе, интервал длины $x + dx$. Очевидно, что если этот объединенный интервал содержит n точек, то они должны распределяться между соответствующими интервалами согласно одной из следующих комбинаций:

$$\begin{array}{cccccc} n & \text{в } x & \text{и} & 0 & \text{в } dx, \\ n-1 & \text{в } x & \text{и} & 1 & \text{в } dx, \\ n-2 & \text{в } x & \text{и} & 2 & \text{в } dx, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \text{в } x & \text{и} & n & \text{в } dx. \end{array}$$

Так как вероятность попадания того или другого числа точек в какой-нибудь один из составляющих интервалов не зависит от судьбы другого, то

$$P(n, x + dx) = P(n, x)\,P(0, dx) + P(n-1, x)\,P(1, dx) + \dots \\ \dots + P(0, x)\,P(n, dx).$$

Но $P(0, dx)$ должно удовлетворять условию:

$$P(0, dx) = 1 - P(1, dx) - P(2, dx) - \dots$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, мы после простых преобразований получаем:

$$\frac{P(n, x + dx) - P(n, x)}{dx} = [P(n-1, x) - P(n, x)]\frac{P(1, dx)}{dx} + \\ + [P(n-2, x) - P(n, x)]\frac{P(2, dx)}{dx} + \dots$$

Мы знаем уже, что дробь $\frac{P(1, dx)}{dx}$ имеет своим пределом некоторое положительное число k, когда dx стремится к нулю, и что дроби

$$\frac{P(2, x)}{dx}, \quad \frac{P(3, x)}{dx}, \dots$$

стремятся при этом к нулю. Следовательно, вся правая часть имеет определенный предел; а значит, то же самое справедливо и для левой части. Но это и значит, что функция $P(n, x)$ имеет производную.

Это рассуждение не только доказывает нам существование производной, но и прямо дает ее величину; мы получаем в пределе [1]):

$$\frac{dP(n)}{dx} = k[P(n-1) - P(n)]. \tag{107}$$

3. Теперь мы можем перейти к третьей части нашего доказательства, т. е. к выводу формулы для $P(n)$. Соотношение (107) представляет собою линейное диференциальное уравнение [2]); его решением будет поэтому

$$P(n) = c_n e^{-kx} + k e^{-kx} \int_0^x e^{kx} P(n-1)\, dx. \tag{108}$$

Здесь c_n есть постоянная интеграции, которая должна быть определена в согласии с данными нашей задачи. Но мы видели, что при $n > 0$ $P(n)$ обращается в нуль вместе с x; с другой стороны, при $x = 0$ пределы интеграла совпадают между собою, так что интеграл также обращается в нуль. Поэтому в нуль обращаются все члены формулы кроме $c_n e^{-kx}$; отсюда мы заключаем, что должно быть $c_n = 0$.

Теперь мы можем постепенно найти все P. Из первой части нашего доказательства мы знаем, что

$$P(0) = e^{-kx}.$$

---

[1]) Так как мы в дальнейшем не будем больше пользоваться никакими символами, содержащими dx, то мы можем, не опасаясь смешения, писать $P(n)$ вместо $P(n, x)$.

[2]) Всякое диференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + f_1(x) y = f_2(x)$$

называется „линейным диференциальным уравнением первого порядка". Уравнение такого рода всегда допускает решение; общая формула для его решения такова:

$$y = e^{-\int_0^x f_1(x)\,dx} \left[C + \int_0^x e^{\int_0^x f_1(x)\,dx} f_2(x)\, dx \right],$$

где C — постоянная интеграции. Здесь мы не будем заниматься вопросом о том, как находится это решение.

В нашем случае

$$y = P(n), \quad f_1(x) = k \quad \text{и} \quad f_2(x) = kP(n-1);$$

значит,

$$\int_0^x f_1(x)\, dx = kx,$$

откуда и вытекает формула (108).

Полагая в формуле (108) n последовательно равным 1, 2 и 3, мы получаем:

$$P(1) = kxe^{-kx},$$

$$P(2) = \frac{(kx)^2}{2} e^{-kx},$$

$$P(3) = \frac{(kx)^3}{6} e^{-kx}.$$

Эти результаты явно наводят на мысль об общем законе

$$P(n) = \frac{(kx)^n}{n!} e^{-kx}. \tag{109}$$

Доказать правильность этой догадки мы можем, показав, что она верна для числа n, если верна для числа $n-1$. Подставляя выражение

$$P(n-1) = \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-kx}$$

в формулу (108) и интегрируя, мы как раз получаем выражение (109). Таким образом, если это выражение справедливо для какого-нибудь значения n, то оно должно быть верным и для ближайшего следующего значения. Но для $n = 1, 2, 3$ оно верно; значит, оно должно быть верным для любого целого положительного числа.

4. Мы должны показать, наконец, что kx есть ожидание числа точек в интервале длины x. По определению, это ожидание равно

$$\varepsilon_1(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{(n-1)!} e^{-kx} = kxe^{-kx}\left[1 + kx + \frac{(kx)^2}{2} + \ldots\right].$$

Но ряд в скобках есть разложение функции e^{kx}; поэтому $\varepsilon_1(n) = kx$. Этим наше доказательство завершено, потому что в силу последнего результата формула (109) приводится к виду (105).

§ 82. Исследование закона Пуассона; задачи, решением которых он может служить. Мы вывели закон Пуассона двумя различными методами, и будет не лишним подчеркнуть еще раз сущность различий, имеющихся между ними. В первую очередь, согласно методу § 79, закон этот был выведен как приближенный, которым с уверенностью можно пользоваться, когда известно, что имеющийся материал распределен по биномиальному закону и что m весьма велико по сравнению с ε. При втором выводе закон был получен в качестве *точного решения, а не приближения*. В этом случае ничего не говорится о величине чисел x и n и не требуется никаких допущений относительно числа точек в каком бы то ни было, большом или малом интервале. Вместо этого второй вывод требует некоторых общих допущений о вероятностях того, каким образом эти точки следуют друг за другом, и утверждающих: 1) что вероятность попадания одной или большего числа точек в данный определенный интервал совершенно не зависит от числа точек, попавших в другие интервалы, и 2) что любая точка в любом таком интервале располагается случайно, независимо от всех остальных точек.

Второй способ вывода часто представляет большие удобства; мы можем убедиться в этом, рассматривая чередования вызовов абонентами телефонной станции. Несомненно, эти вызовы не могут располагаться случайно в коллективном смысле, если рассматривать их в течение сколько-нибудь продолжительного времени, ибо вероятность большого числа вызовов в течение одной минуты в три часа ночи, несомненно, гораздо меньше, чем в три часа дня. Если бы мы в течение целых суток отмечали на оси времени моменты вызовов, то, без сомнения, в одних местах точки легли бы чрезвычайно густо, а в других — сравнительно редко. Но если мы выберем промежуток в четверть часа, примыкающий к моменту наибольшей нагрузки сети (или взятый где угодно, только не в такое время дня, когда нагрузка имеет тенденцию к быстрому изменению), то приблизительно можно утверждать, что для любого малого интервала, входящего в этот промежуток, вероятность попадания в этот интервал ровно n точек будет такова же, как и для любого другого интервала той же длины, входящего в этот промежуток.

Далее взаимная зависимость между определенными вызовами чрезвычайно слаба. Поэтому в течение данной четверти часа распределение вызовов оказывается в основном случайным как в индивидуальном, так и в коллективном смысле. Отсюда мы заключаем, что *формула Пуассона допускает применение к любому промежутку времени, лежащему внутри данной четверти часа*, в том числе и к самой этой четверти часа.

Это мы можем заключить на основании нашего второго вывода. Первый же вывод позволяет только заключить, что закон Пуассона может быть применен к интервалам, достаточно малым по сравнению с нашей четвертью часа [1]), причем у нас нет никакого критерия, позволяющего судить о том, что означают в данном случае слова „достаточно малым“.

Задач этого общего типа встречается очень много. Мы говорили уже выше об испускании β-лучей радиоактивными веществами. Это, по всей вероятности, самый лучший из физических примеров вследствие полной, повидимому, взаимной независимости актов эмиссии. Но имеется и целый ряд других случаев, в которых формула может быть применена по крайней мере с таким же успехом, как в нашем примере с телефоном. Мы перечислим здесь только несколько наиболее типичных.

Электроны, испускаемые нагретым металлом (термионы) или светочувствительной поверхностью под действием света (фотоэлектроны), вылетают, повидимому, с достаточной взаимной независимостью, чтобы мы с полным успехом могли рассчитывать по формуле Пуассона число электронов, испускаемых в данный промежуток времени. К этому же классу величин принадлежит, несомненно, число колебаний в силовых переда-

---

[1]) Если бы мы знали, что на протяжении четверти часа располагается ровно m точек, и если бы они располагались случайно в индивидуальном смысле, то для каждой из них вероятность попасть в данный интервал длины x равнялась бы $p = \frac{x}{15}$ (если принять минуту в качестве единицы времени). Вероятность того, что в данный интервал попадает ровно n точек, давалась бы биномиальной формулой, к которой формула Пуассона может служить достаточным приближением *только в случае малых значений p*.

чах, вследствие непрерывных включений и выключений абонентов: сюда же, повидимому, относится и число тресков в радиоприемниках, вызываемых атмосферными электромагнитными возмущениями. То же самое справедливо и для числа заявляемых требований на обслуживание различного рода, например, обращений к кассиру универсальных магазинов, к запасному приказчику торгового учреждения или аналогичному должностному лицу, если только в этот процесс искусственным путем не внесена какая-либо регулярность.

Выходит, таким образом, что закон Пуассона является основою для решения большинства таких задач, где ищется число служащих или количество аппаратуры, необходимое для обслуживания данного вида запросов. Превосходными примерами являются число телефонисток на телефонной станции или число турникетов на станции подземной железной дороги. Мы все еще не дошли до такого пункта, где уместно было бы предпринять систематическое исследование задач такого рода [1]), но в данный момент мы с пользою можем рассмотреть одну очень простую задачу, которая, несмотря на эту свою простоту, так похожа на целый ряд практических задач, что очень поможет нам потом в них ориентироваться.

Пример 47. Розничная лавка с ограниченными возможностями хранения продуктов продает в среднем 10 пакетов галет в неделю. Запас обычно возобновляется каждый понедельник утром. Требуется установить такой стандарт еженедельного пополнения запаса, чтобы не более 1% заявляемых требований встречали отказ.

Если в начале каждой недели в запасе имеется n пакетов, то ни одно требование не встретит отказа, пока число требований, заявляемых в течение недели, не превысит n. Но вероятность того, что будет потребовано j пакетов, равна

$$P(j)=\frac{10^j e^{-10}}{j!},$$

потому что это как раз — вероятность попадания j точек (покупателей) в единицу времени (неделю), в предположении, что ожидание этого числа точек равно 10.

Ожидаемое число отказов в неделю равно

$$\varepsilon=\sum_{j=n}^{\infty}(j-n)\,P(j),$$

в то время как ожидаемое число покупателей равно 10. Если мы соберем сводку за большее число m недель, то число проданных пакетов будет близко к $10m$, а число отказов близко к εm, так что в течение данного промежутка времени относительное число неудовлетворенных требований будет очень близко к [2])

$$\frac{\varepsilon}{10}=\frac{1}{10}\sum_{j=n}^{\infty}(j-n)\,P(j).$$

---

[1]) Мы займемся ими в главе X.

[2]) В этом пункте нашего рассуждения заложен замечательный соблазн для ошибочного заключения. Дело в том, что имеется предательская разница между

Чтобы решить пример 47, мы должны найти наименьшее значение n, при котором это выражение меньше чем 0,01. Это лучше всего проделать посредством последовательного вычисления; однако, прежде чем перейти к арифметическим действиям, полезно привести формулу к несколько иному виду. Очевидно, что наша формула для $\frac{\varepsilon}{10}$ равносильна такой:

$$\frac{\varepsilon}{10}=\frac{1}{10}\sum_{n}^{\infty} j P(j)-\frac{n}{10}\sum_{n}^{\infty} P(j). \tag{110}$$

Но

$$\sum_{n}^{\infty} jP(j)=\sum_{n}^{\infty}\frac{e^{-10}10^{j}}{(j-1)!}=10\sum_{n}^{\infty} P(j-1).$$

„ожиданием относительного числа отказов за долгий период времени" и „ожиданием относительного числа отказов в течение одной недели".

В этом легче всего убедиться на числовом примере. Допустим, что распределение покупателей, вместо закона Пуассона, подчинено следующему правилу: каждую неделю является либо 8, либо 12 покупателей, причем вероятности обеих возможностей одинаковы. Пусть каждый понедельник утром закупается 11 пакетов. Тогда половина всех недель будет протекать без отказов покупателям, а другая половина будет давать один отказ на 12 заявок в неделю. Поэтому ожидание относительного числа отказов в неделю будет $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 0=\frac{1}{24}$.

С другой стороны, в течение долгого периода времени (m недель) мы будем иметь примерно $10m$ покупателей и $\frac{m}{2}$ отказов; относительное число отказов будет поэтому $\frac{m}{2} : 10m=\frac{1}{20}$. Очевидно, что полученные результаты не совпадают между собою.

Трудность заключается здесь не в отыскании правильного ответа (оба расчета очень просты), а в том, чтобы в точности понять, что именно мы стараемся найти. В данной задаче „иметь 1% отказов" означает, что если мы соберем сводку за очень долгое время, то число отказов будет составлять около 1% числа заявленных требований; такая постановка, очевидно, не имеет ничего общего со средним значением относительного числа отказов, приходящихся на одну неделю. Однако если бы мы интересовались именно этим средним значением, то мы могли бы найти его так: при заявке j требований в неделю относительное число отказов равно $\frac{(j-n)}{j}$; вероятность такого числа требований равна $P(j)$; значит искомое ожидание равно:

$$\varepsilon=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{j-n}{j}P(j).$$

Эта формула соответствует ответу $\frac{1}{24}$ в нашем числовом примере, тогда как формула, приведенная в тексте, соответствует ответу $\frac{1}{20}$.

Полагая поэтому $j-1=j'$, мы находим:

$$\sum_{n}^{\infty} jP(j)=10\sum_{n-1}^{\infty} P(j').$$

Подставляя это в формулу (110) и возвращаясь к старым обозначениям, мы получаем:

$$\frac{\varepsilon}{10}=\sum_{n-1}^{\infty} P(j)-\frac{n}{10}\sum_{n}^{\infty} P(j)=P(n-1)+\left(1-\frac{n}{10}\right)\sum_{n}^{\infty} P(j).$$

Ход вычислений показан в табл. XIV. Второй столбец содержит значения величины $P(n-1)$, взятые из таблиц функции Пуассона (Приложение VI). Третий столбец представляет собою ряд последовательных частичных сумм чисел второго столбца, остальные вычисления самоочевидны.

Наименьший надежный запас, при данных условиях задачи, составляет 16 пакетов.

Таблица XIV

n	$P(n-1)$	$\sum_{n}^{\infty} P(j)$	$\left(1-\frac{n}{10}\right)\sum_{n}^{\infty} P(j)$	$\frac{\varepsilon}{10}$
10	0,12511	0,54207	—0,00000	0,12511
11	0,12511	0,41695	—0,04170	0,08341
12	0,11374	0,30332	—0,06064	0,05310
13	0,09478	0,20844	—0,06253	0,03225
14	0,07291	0,13553	—0,05421	0,01870
15	0,05208	0,08346	—0,04173	0,01035
16	0,03472	0,04874	—0,02927	0,00545
17	0,02170	0,02704	—0,01893	0,00277
18	0,01276	0,01428	—0,01142	0,00134
19	0,00709	0,00719	—0,00647	0,00062
20	0,00373	0,00345	—0,00345	0,00028
21	0,00187	0,00159	—0,00175	0,00012
22	0,00089	0,00070	—0,00084	0,00005
23	0,00040	0,00030	—0,00039	0,00001
24	0,00018	0,00012	—0,00017	0,00001
25	0,00007	0,00005	—0,00007	0,00000

§ 83. Исследование закона Пуассона; переменная плотность нагрузки телефонной сети. Как сам закон Пуассона, так и математическая аргументация, с помощью которой мы вывели его в § 81, имеют более широкое значение, чем можно было там предполагать. В действительности и закон, и метод его обоснования могут быть применены и к тому случаю, когда густота расположения точек имеет тенденцию быть больше в одних частях отрезка и меньше в других, лишь бы только природа всех этих различий была нам в достаточной мере известна. Мы можем иллюстрировать это примером, не лишенным практического значения, — чередованием вызовов в телефонной сети в период быстрого изменения нагрузки.

Чтобы точнее уяснить себе, что именно мы здесь имеем в виду, представим себе, в порядке идеализации, что до 9 час. утра вообще не происходит телефонных разговоров, а затем нагрузка сети постепенно растет, достигая своего максимума в полдень. Допустим, что это происходит не вследствие склонности абонентов к перенесению своих разговоров на более поздние утренние часы, а по той причине, что до 9 час. ни один из абонентов не прибыл еще к месту своей работы, а многие прибывают и значительно позже. Пусть, наконец, у нас есть основание предполагать, что число абонентов, уже приступивших к работе, растет равномерно, так что число работающих выражается линейной функцией от времени. При всех этих в высшей степени искусственных допущениях мы вправе считать, что вероятность вызова в промежутке времени $(t, t+dt)$ пропорциональна числу абонентов, приступивших уже в это время к работе, а следовательно, пропорциональна t, если мы примем 9 час. утра за начало отсчета времени.

Но мы вовсе не хотим ограничиться столь частным случаем. Мы допустим только, что вероятность вызова в течение промежутка времени $(t, t+dt)$ равна $k(t)\,dt$, где $k(t)$ — некоторая данная функция от времени, которую мы нашли каким угодно путем [1]), и что вероятность двух или большего числа вызовов за тот же промежуток времени есть бесконечно малая высшего порядка относительно $k(t)\,dt$. Мы убедимся, что эти два допущения, которые, очевидно, аналогичны нашим прежним требованиям „случайности в индивидуальном и коллективном смысле", хотя и гораздо менее стеснительны, снова приводят к закону Пуассона.

Рассмотрим вероятность того, что в течение промежутка времени длины τ, начинающегося в момент t, последует ровно n вызовов. Мы обозначим ее через $p(n, \tau, t)$. Прибавляя к концу промежутка τ весьма короткий интервал $d\tau$, мы приходим к очевидному соотношению:

$$\begin{aligned} p(n, \tau+d\tau, t) = p(n, \tau, t)\, p(0, d\tau, t+\tau) &+ \\ + p(n-1, \tau, t)\, p(1, d\tau, t+\tau) &+ \\ + p(n-2, \tau, t)\, p(2, d\tau, t+\tau) &+ \ldots \end{aligned}$$

Это уравнение следует из того единственного предположения, что вероятность данного определенного числа вызовов за данный промежуток времени зависит только от начального момента и длины этого промежутка и не зависит от того, что происходило раньше. Далее мы, несомненно, должны иметь:

$$p(0, d\tau, t+\tau) = 1 - p(1, d\tau, t+\tau) - p(2, d\tau, t+\tau) - \ldots;$$

---

[1]) Это выражение $k(t)\,dt$ в настоящем рассуждении будет играть ту же роль, как величина $k\,dx$ в § 81. Там k было ожидаемым числом точек на единицу длины; аналогичную роль „мгновенной частоты вызовов" играет здесь $k(t)$.

подставляя это выражение в предыдущее уравнение, мы после небольших преобразований получаем:

$$\frac{p(n, \tau+d\tau, t)-p(n, \tau, t)}{d\tau}=[p(n-1, \tau, t)-p(n, \tau, t)]\frac{p(1, d\tau, t+\tau)}{d\tau}+$$
$$+[p(n-2, \tau, t)-p(n, \tau, t)]\frac{p(2, d\tau, t+\tau)}{d\tau}+\ldots$$

Если мы теперь заставим $d\tau$ стремиться к нулю, то $p(1, d\tau, t+\tau)$ по предположению должно приближаться к $k(t+\tau)\,d\tau$, потому что это есть вероятность нового вызова в течение промежутка времени длины $d\tau$, начинающегося с момента $t+\tau$; аналогичные же выражения для двух и более вызовов будут бесконечно малыми высшего порядка относительно $d\tau$. Поэтому мы находим:

$$\frac{d}{d\tau}p(n, \tau, t)=[p(n-1, \tau, t)-p(n, \tau, t)]\,k(t+\tau). \tag{111}$$

Этот вывод относится к случаю $n=0$ в такой же мере, как к положительным значениям n, с тою только разницей, что при $n=0$ $p(n-1, \tau, t)$ не имеет смысла и отпадает. Таким образом мы получаем:

$$\frac{d}{dt}p(0, \tau, t)=-p(0, \tau, t)\,k(t+\tau),$$

откуда

$$p(0, \tau, t)=c_0e^{-K(\tau, t)},$$

где $K(\tau, t)$ означает

$$K(\tau, t)=\int_0^\tau k(t+\tau)\,d\tau.$$

Возвращаясь к общему уравнению (111), мы видим, что оно, подобно уравнению (107), есть линейное диференциальное уравнение и имеет решение:

$$p(n, \tau, t)=c_ne^{-K(\tau, t)}+e^{-K(\tau, t)}\int_0^\tau e^{K(\tau, t)}p(n-1, \tau, t)\,k(t+\tau)\,d\tau.$$

Те соображения, с помощью которых мы в § 81 нашли значения постоянных интеграции, в равной мере применимы и здесь и снова приводят к тому заключению, что все $c_n=0$, за исключением c_0, которое равно единице. Таким образом для завершения решения достаточно выполнить последовательные интеграции. Рассмотрим сначала

$$p(1, \tau, t)=e^{-K(\tau, t)}\int_0^\tau k(t+\tau)\,d\tau;$$

так как $k\,d\tau=dK$, то

$$p(1, \tau, t)=e^{-K}\int_0^K dK=Ke^{-K}.$$

Подобным образом

$$p(2, \tau, t) = e^{-K}\int_0^K e^K p(1, \tau, t)\,dK = \frac{K^2 e^{-K}}{2!},$$

и вообще

$$p(n, \tau, t) = \frac{K^n e^{-K}}{n!}. \tag{112}$$

Это и есть решение нашей задачи.

Величина K в этой формуле имеет весьма простое значение, подобное значению величины kx в формуле (109). Там kx означало „ожидаемое число точек на протяжении x“. Точно так же и здесь K есть „ожидаемое число вызовов за промежуток времени длины τ“; ибо легко показать, что

$$\sum nP(n, \tau, t) = K.$$

Очевидно, таким образом, что закон Пуассона имеет область применений гораздо более широкую, чем та, на какую можно было рассчитывать в результате рассуждений § 81. Однако мы должны остеречься от впадения в противоположную крайность и не думать, будто закон Пуассона имеет универсальное значение и может быть применяем всюду, где мы имеем распределение, „случайное“ в обыденном, разговорном смысле этого слова. Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий собою типичный случай неприложимости этого закона.

§ 84. Исследование закона Паруссона; общая проблема испускания β-лучей. В § 80 (см. выноску) мы обратили внимание читателя на тот факт, что при испускании β-лучей данное вещество преобразуется в некоторый новый элемент, и таким образом первоначально взятая для наблюдения масса данного вещества постепенно уменьшается. Этот процесс в физике обычно характеризуется термином „распад“. Решим теперь следующую задачу:

Пример 48. Допустим, что вероятность распада данной молекулы в течение элемента времени dt равна $kn(t)\,dt$, где $n(t)$ — число нераспавшихся молекул[1]; предполагая, что в момент $t=0$ имелось N молекул, найти вероятность того, что в промежутке между моментами t и $t+\tau$ произойдет ровно j распадов.

Эта задача, подобно той, которую мы рассмотрели в § 83, имеет дело с множеством событий, густота расположения которых с течением времени определенным и заметным образом изменяется; однако между этими двумя задачами имеется весьма существенное различие. В то время как в предыдущем случае вероятность наступления события в промежутке $(t, t+dt)$ зависела исключительно от t и dt и совершенно не зависела от того, что происходило в прошлом, — в настоящем случае она целиком зависит от истории нашей системы, и зависит от t только в той мере, в какой история минувшего сама по себе различна для различных моментов. Ибо в настоящем примере вероятность эта целиком определяется

[1]) При этом в сущности подразумевается, что продукты распада сами не радиоактивны.

наличным числом нераспавшихся молекул, которое в свою очередь зависит исключительно от числа молекул, подвергшихся уже распаду до настоящего момента. Однако решить эту задачу не труднее, чем рассмотренную нами в примере 47.

Мы начнем с исследования вероятности испускания ровно n электронов в промежутке $(0, t)$. Это проще всего сделать, учитывая число нераспавшихся молекул в оба момента, а именно N в момент 0 и $N-n$ в момент t.

Пусть теперь интервал увеличился до $t+dt$. Тогда мы будем иметь:

$$p(n, t+dt, 0)=p(n, t, 0)[1-(N-n)k\,dt]+\\+p(n-1, t, 0)(N-n+1)k\,dt+\ldots,$$

причем остальными членами можно пренебречь. В частности, для $n=0$ это уравнение получает более простой вид:

$$p(0, t+dt, 0)=p(0, t, 0)(1-Nk\,dt).$$

Эти соотношения легко приводят нас к паре линейных диференциальных уравнений, решения которых таковы:

$$p(0, t, 0)=e^{-Nkt},$$

$$p(n, t, 0)=e^{-(N-n)kt}\int_0^t e^{(N-n)kt}p(n-1, t, 0)(N-n+1)k\,dt.$$

Из последней рекуррентной формулы легко последовательно найти выражение для

$$p(1, t, 0), \quad p(2, t, 0), \ldots$$

Общая формула такова:

$$p(n, t, 0)=C_n^N e^{-Nkt}[e^{kt}-1]^n. \tag{113}$$

Это дает решение задачи для интервала, в начальный момент которого имеется N молекул. Что же отсюда следует для интервала $(t, t+dt)$, о котором спрашивается в нашей задаче?

В момент t мы имеем то или иное число молекул, способных к распаду; вероятность того, что это число равно $N-n$, как раз дается формулой (113). *Если* число их таково, то вероятность того, что в течение интервала τ произойдет n' распадов, очевидно, получится, если в формуле (113) величины N, n и t заменить соответственно величинами $N-n$, n' и τ. Пользуясь формулой для альтернативных сложных событий, мы получаем поэтому:

$$p(n', \tau, t)=\sum_{n=0}^{N-n'} C_n^N e^{-Nkt}(e^{kt}-1)^n C_{n'}^{N-n}e^{-(N-n)k\tau}(e^{k\tau}-1)^{n'}.$$

Замечая, что

$$C_n^N C_{n'}^{N-n} = C_{n'}^N C_n^{N-n'},$$

и производя несколько других самоочевидных преобразований, мы находим:

$$p(n', \tau, t) = C_{n'}^N e^{-Nk(t+\tau)} (e^{k\tau} - 1)^{n'} \sum_{n=0}^{N-n'} C_n^{N-n'} (e^{k(t+\tau)} - e^{k\tau})^n.$$

Теперь сумма имеет вид (15) и поэтому равна $(1 - e^{k\tau} + e^{k(t+\tau)})^{N-n'}$. Производя еще несколько самоочевидных преобразований, мы приходим к окончательному выводу:

$$p(n', \tau, t) = C_{n'}^N \left(\frac{1-e^{-k\tau}}{e^{kt}}\right)^{n'} \left(1 - \frac{1-e^{-k\tau}}{e^{kt}}\right)^{N-n'}. \tag{114}$$

Это и есть общее решение нашей задачи. *Оно не имеет формы закона Пуассона и не может быть приведено к этой форме по той причине, что вероятность испускания β-частицы за данный интервал времени существенно зависит от числа испусканий в предшествующих интервалах.*

Только в случае, когда N очень велико, а „быстрота распада" k очень мала (так что Nk имеет умеренную величину), это решение приближенно приводится к виду закона Пуассона. При этих условиях число молекул, оставшихся по истечении доступного наблюдению времени t, не намного отличается от N, так что вероятность распада в промежутке $(t, t+dt)$ в действительности не зависит от t.

§ 85. Об одном приближении к закону Пуассона. Можно показать, что при известных условиях нормальный закон может играть роль приближения к закону Пуассона. Мы будем исходить из формулы (105), откинув только индекс m, потому что теперь для нас несущественно, что эта формула дает приближенное выражение биномиального закона. Таким образом мы имеем:

$$P(n) = \frac{\varepsilon^n e^{-\varepsilon}}{n!}. \tag{115}$$

Мы будем, как всегда, обозначать через δ отклонение от математического ожидания и через σ стандартное отклонение. Простым вычислением легко убедиться, что $\sigma^2 = \varepsilon$.

Начиная с этого места, наше рассуждение пойдет аналогично проведенному в § 78. Заменим прежде всего число n новой переменной

$$y = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{n-\sigma^2}{\sigma},$$

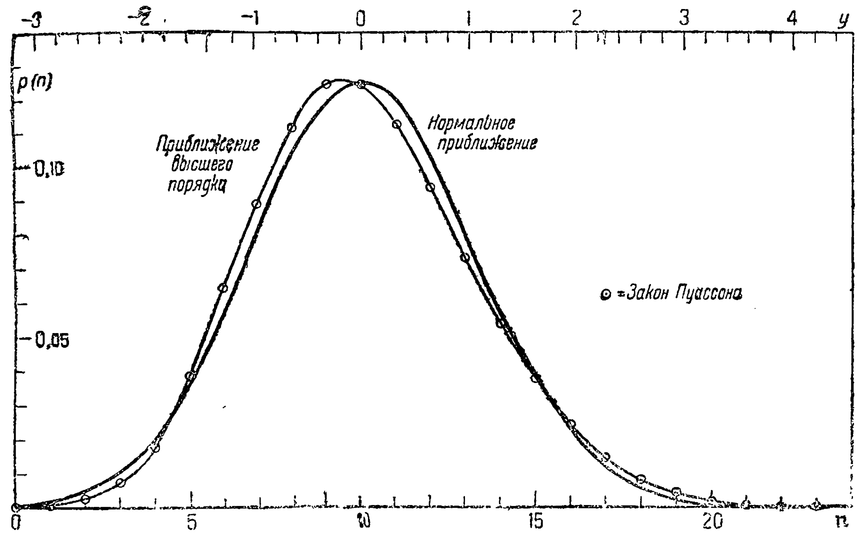
представляющей собой отклонение, выраженное в стандартных единицах. Мы находим:

$$P(n) = \frac{\sigma^{2\sigma^2+2\sigma y}}{(\sigma^2+\sigma y)!} e^{-\sigma^2}.$$

Здесь мы заменим факториал его приближенным выражением по формуле Стирлинга и применим к отдельным членам полученного таким образом выражения разложение в ряд. Окончательный результат, после длинного ряда довольно утомительных выкладок, гласит:

$$P(y)=\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{y}{2}-\frac{y^3}{6}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{12}-\frac{3y^2}{8}+\frac{y^4}{6}-\frac{y^6}{72}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{y}{8}-\frac{47y^3}{144}+\frac{37y^5}{240}-\frac{y^7}{48}+\frac{y^9}{1296}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{1}{288}-\frac{5y^2}{32}+\frac{347y^4}{1152}-\frac{617y^6}{4326}+\frac{23y^8}{960}-\frac{y^{10}}{648}+\frac{y^{12}}{31104}\right)+\ldots\right]. \quad (116)$$

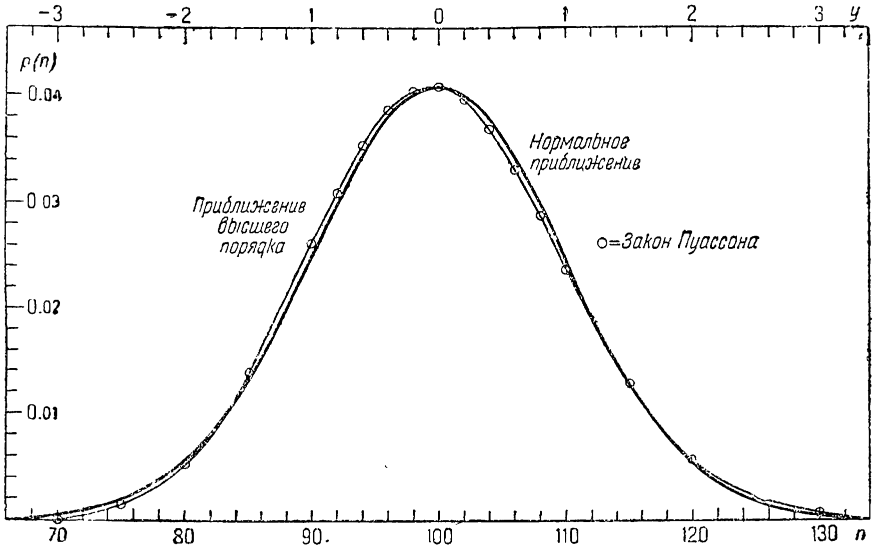
Первый член этого ряда в точности совпадает с первым членом разложения (102) для биномиального закона. Отсюда следует, что



Черт. 23.

нормальный закон (103) *может служить достаточным приближением к закону Пуассона, если только* $\frac{y^3}{\sigma}$ *не слишком велико.*

Чтобы детальнее выяснить доброкачественность этого приближения, обратимся к черт. 23 и черт. 24, где значения вероятности, получаемые по закону Пуассона, обозначены кружками, а нормальный закон и более полное приближение (116) изображены в виде непрерывных кривых. На черт. 23 $\varepsilon=10$, на черт. 24 $\varepsilon=100$. В обоих случаях различия между истинными значениями и теми, какие дает нормальный закон, вполне ощутимы; для меньшего значения ε они в то же время гораздо заметнее, чем для большего. Однако в средней части чертежа — там, где вероятности сравнительно велики — процент ошибки все же еще для многих целей является вполне терпимым. В области же малых вероятностей относительная ошибка весьма велика. Поэтому в этих областях полученным приближением никогда не следует пользоваться. С другой стороны, более



Черт. 24.

полное приближение (116) очень хорошо совпадает с истинным течением вероятности на всем протяжении чертежа, даже при меньшем значении ε.

Задачи

1. Допустим, что телефонные разговоры все имеют одну и ту же продолжительность T и что они располагаются случайно в индивидуальном и коллективном смысле, причем в среднем происходит n вызовов в единицу времени. Найти вероятность того, что в данный момент t происходит *ровно* j разговоров.

2. Какова вероятность того, что в данный момент ведется *более чем* j разговоров?

3. Какова вероятность того, что в промежуток времени dt попадет два или более вызовов? Если за каждым вызовом следует „опасный интервал“, т. е. интервал продолжительности dt, в течение которого всякий другой вызов, если он последует, будет мешать первому, то какова вероятность того, что данный вызов в течение своего „опасного интервала“ действительно претерпит такую помеху? Почему эти два ответа оказались различными?

4. Наблюдатель начал регистрировать вызовы в момент 0; какова вероятность того, что *первый* вызов будет зарегистрирован в промежутке $(t, t+dt)$?

5. Какова вероятность того, что промежуток времени, протекающий между данным вызовом и непосредственно за ним следующим, будет заключаться между t и $t+dt$?

6. Найти ожидаемое время до появления первого вызова в задаче 4 и ожидаемый промежуток времени в задаче 5.

7. По поводу задачи 6 можно рассуждать следующим образом. Момент $t=0$, служащий началом наблюдений, попадает между какими-то двумя последовательными вызовами. Он с такой же вероятностью может попасть в начало этого

промежутка, как и в конец его. Иначе говоря, его среднее ожидаемое положение приходится на середину такого промежутка. Следовательно, среднее время ожидания для нашего наблюдателя должно составлять половину среднего промежутка между двумя вызовами.

Правильные ответы задачи 6 не удовлетворяют этому условию. Требуется объяснить причину этого парадокса.

8. Допустим, что телефонная сеть приступает к работе внезапно, в час наибольшей нагрузки, в момент $t=0$. При отрицательных значениях t, разумеется, никаких вызовов не происходит, при $t>0$ происходит (в среднем) n вызовов в единицу времени; таким образом формула Пуассона может быть применена к любому промежутку времени, целиком лежащему в области положительных t. Но для промежутка, начинающегося в момент $t<0$ и кончающегося в момент $t+\tau>0$, частота вызовов не постоянна. Какова вероятность того, что в течение такого промежутка будет произведено ровно j вызовов?

9. Возьмем в задаче 8 значения $n=3$, $\delta=1$; требуется провести кривые для $P_j(\tau, t)$ на участке изменения t от -2 до $+1$ для следующих значений j: 0, 1, 2, 3; рассмотреть основные черты этих кривых, в частности — их наибольшие значения.

10. В задаче 5 найти наивероятнейшее значение интервала и среднее квадратическое его значение.

11. В задаче § 84 найти ожидаемое количество вещества, остающегося нераспавшимся по истечении t секунд.

12. Какая доля наличного в момент t количества вещества распадается в течение ближайшей секунды? Обратите внимание, что ответ не зависит от t.

13. Найти ожидаемый момент испускания первой β-частицы.

§ 86. Нормальный закон. До сих пор мы в настоящей главе имели дело с двумя законами распределения, вытекающими из различных групп допущений, к которым нас часто приводят задачи инженерного дела или от которых, по крайней мере, условия этих задач отличаются не слишком разительно. Теперь мы переходим к рассмотрению совершенно иного класса функций распределения — хотя и не менее важного, но оправдываемого исключительно испытанной полезностью этих функций и ни в какой мере не обоснованного теоретически.

Самым важным в этом классе является нормальный закон (103). Может показаться странным, что мы обращаемся к нему в этой связи, после того как мы уже дважды указывали на его особое значение — сперва, как на точный закон при условиях, аналогичных условиям распределения скоростей газовых молекул, а затем — как на приближенное выражение биномиального закона или закона Пуассона. Но дело в том, что область применения нормального закона не ограничивается этими случаями. Встречается много задач, в которые входят неизвестные функции распределения — к этому типу принадлежат, например, все случаи уклонения промышленной продукции от стандартных свойств, которыми она должна обладать,— и обычно нам при этих обстоятельствах не остается ничего лучшего, как выбрать несколько функций, обладающих, повидимому, важнейшими из присущих таким распределениям свойств, и затем произвольным образом подгонять их к статистическим данным. В подобных случаях нормальный закон играет роль чисто эмпирической формулы.

Неоднократно делались попытки оправдать его применение на этом поприще, но замечательным образом все они оказывались несостоятельными в двух отношениях: во-первых, как показывает опыт, бо́льшая часть фактически полученных распределений даже в основных, крупных чертах отклоняется от нормального закона; и во-вторых, те допущения, на которых базируются эти попытки обоснования, имеют столь неосязательный характер, что мы никогда заранее не можем сказать, выполнены ли они в той или другой конкретной научной ситуации. Для представителя точной науки выводы, основанные на постулатах, не имеющих конкретного физического истолкования, не могут иметь большого значения. Мы не станем поэтому заниматься ими [1]).

Перечислим теперь основные свойства нормального закона, потому что, если мы не можем заранее решить вопрос о том, должны ли подчиняться этому закону те или другие статистические данные, то мы по крайней мере имеем возможность — после того, как эти данные собраны — проверить, дают ли они тип распределения, существенно отличный от нормального. Основные свойства следующие:

1. Нормальный закон симметричен. Положительные и отрицательные отклонения равной величины равновероятны.

2. Нормальный закон приписывает определенную положительную вероятность любому отклонению. Заранее исключенных случаев не имеется.

3. В случае нормального закона имеется одно определенное наивероятнейшее значение, совпадающее с математическим ожиданием данной величины.

Всякий статистический материал, распределенный согласно нормальному закону, должен обязательно обладать этими тремя свойствами; но достаточно небольшого размышления, чтобы убедиться, что это совсем не всегда так бывает. Возьмем, например, человеческий рост. Нелепо говорить о людях отрицательного роста: такого рода вещь не только „весьма невероятна" — она просто невозможна. А между тем, если бы рост был распределен согласно нормальному закону, то в силу второго свойства каждое отрицательное значение его должно было бы иметь определенную, отличающуюся от нуля вероятность. Или рассмотрим еще вопрос о длительности телефонных разговоров. Здесь также отрицательные значения переменной лишены реального смысла; но более того, опыт показывает, что наиболее часто встречающаяся длительность разговора очень мала — во всяком случае значительно меньше, чем средняя длительность. Поэтому функция распределения, описывающая длины телефонных разговоров, не может обладать ни одним из трех свойств, перечисленных нами выше [2]).

Неизбежным следствием всего этого является то, что если мы вообще хотим придать статистическим исследованиям какую бы то ни было степень общности, то мы должны вооружить их и рядом других законов распределения; и в нескольких последних параграфах настоящей главы мы кратко приведем некоторые из наиболее успешных попыток, имевших целью расширить арсенал тех орудий, которыми

---

[1]) Я не хочу утверждать, что изучение такого рода выводов непременно будет потерей времени; я хочу сказать, что (если только оно не способствует прогрессу логики или математики как таковых, что нас здесь не должно интересовать) оно принадлежит скорее к категории математических развлечений, чем к разряду целеустремленной работы. Учащийся, который этим вопросом заинтересуется, найдет выводы нормального закона в источниках, указанных в конце настоящей главы.

[2]) Повидимому, для этого частного случая гораздо более подходящим оказывается закон $P(T) = ae^{-bT}$ $(T > 0)$. См. по этому поводу статью E. C. Molina в *Bell System Technical Journal*, июль 1927.

работает статистик. Но прежде чем к этому перейти, мы должны остановиться еще на мгновенье на вопросе о том, в чем же лежит особая важность нормального закона. Мы сказали выше, что выводы его как точного закона практически нереальны и что в качестве эмпирического закона он также имеет свои специфические особенности, которым редко следуют конкретные данные; поэтому могло показаться, что для его применимости вообще не остается места. Однако такое заключение было бы весьма несправедливым, потому что все же этот закон обладает очень значительными достоинствами. Прежде всего, он зависит только от одной переменной y и потому допускает очень простое табулирование. В противоположность этому биномиальный закон зависит от двух переменных m и n, закон Пуассона — от ε и n, а закон (25) — от m, n, p, и q. И это — немалое преимущество, потому что это означает, что нормальный закон во всех тех случаях, где он находит себе применение, является самым простым из всех, с какими мы могли бы оперировать. Это преимущество нормального закона обеспечивает ему фактически широкое применение во многих случаях, где, несомненно, могло бы быть получено лучшее приближение к истинному распределению, но где легко достижимая грубая оценка оказывается предпочтительнее более точной, но требующей затраты значительного труда.

Далее, как мы увидим это при рассмотрении ряда Грама-Шарлье, многие распределения, не обладающие тремя вышеперечисленными свойствами, можно выразить через нормальный закон и его последовательные производные; и так как для этих производных тоже построены таблицы, то это позволяет достигать большей точности.

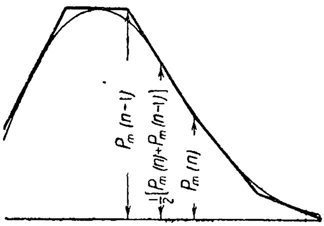
Наконец, мы видим, что и биномиальный закон и закон Пуассона при известных условиях имеют нормальный закон своим пределом. В § 97 мы установим аналогичную теорему гораздо более общего характера; в действительности показано, что весьма широкий класс различных распределений имеет нормальный закон чем-то вроде общего предела, к которому стремятся все эти распределения. Повидимому, это его свойство — самое важное из всех, потому что, хотя оно и ничего не дает нам для практических расчетов, все же оно утверждает, что нормальный закон как бы резюмирует собою, содержит в себе в сжатом виде те элементы случайных распределений, которые обнаруживаются *при всех обстоятельствах*. В известном смысле его можно назвать „центром перспективы" всей теории вероятностей.

§ 87. Эмпирические семейства кривых; кривые Пирсона. Среди всех семейств кривых, которые были предложены с целью дать статистикам возможность математической обработки различного рода данных, наиболее эмпирическим характером обладают кривые Пирсона; попытки их обоснования могут в лучшем случае иметь только значение эвристических приемов. Такое обоснование состоит обычно в том замечании, что, в некотором приближенном смысле, как мы скоро увидим, и нормальный закон, и биномиальный, и закон Пуассона, и закон (25) повторных зависимых испытаний — все удовлетворяют диференциальному уравнению вида:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}=\frac{a+x}{b+cx+dx^2} \tag{117}$$

при тех или иных значениях постоянных a, b, c и d. Поэтому в качестве искомого семейства функций распределения выбирают определенный класс решений этого уравнения, отличающийся главным образом своей простотою.

Возьмем, например, уравнение (23), графическое изображение которого дано на черт. 4. Если мы вершины последовательных ординат соединим прямыми линиями, как показано на черт. 25, то мы получим некоторую ломаную линию. По самому происхождению биномиального закона мы, конечно, можем приписать реальный смысл только тем значениям n, которым соответствуют угловые точки этой ломаной; но мы постараемся временно забыть об этом обстоятельстве и смотреть на нашу ломаную только как на геометрическую диаграмму. Очевидно, что если бы нам удалось провести плавную кривую, проходящую не через вершины, а через середины сторон нашей ломаной и касающуюся этих сторон в их серединах, то мы получили бы геометрический образ, основные свойства которого совпадали бы со свойствами нашей ломаной. Мы можем все это проделать аналитически, замечая, что абсцисса и ордината середины звена ломаной соответственно равны



Черт. 25.

$$x=n-\frac{1}{2}$$

и

$$P=\frac{1}{2}\Big[P_m(n)+P_m(n-1)\Big]$$

и что подъем этого звена равен

$$P_m(n)-P_m(n-1).$$

Отсюда мы легко находим, что в середине каждого звена наша плавная кривая должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}=2\frac{P_m(n)-P_m(n-1)}{P_m(n)+P_m(n-1)};$$

если мы здесь заменим $P_m(n)$ и $P_m(n-1)$ их выражениями по формуле (23) и введем x вместо n в качестве независимой переменной, то мы получим:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}=\frac{\left(\frac{1}{2}-mp-p\right)+x}{\left(-\frac{1}{4}-\frac{mp}{2}\right)+\left(p-\frac{1}{2}\right)x+(0)\ x^2}.$$

Это уравнение имеет в точности вид (117), причем мы заключили в скобки величины, соответствующие постоянным a, b, c, d.

В этом приближенном смысле можно утверждать, что биномиальный закон удовлетворяет уравнению (117).

Между прочим, интересно отметить, что в случае $p=\frac{1}{2}$, когда биномиальный закон становится симметричным, подстановка

$$y=\frac{x-pm}{\sqrt{(m+1)p(1-p)}},$$

очень похожая на ту, которой мы пользовались в формуле (92), приводит наше уравнение к виду:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}=-y,$$

решением которого как раз служит нормальный закон [1])

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}.$$

В случае закона (25) мы придем к уравнению (117), если мы зафиксируем числа m, n и $p+q$ и будем считать переменным только p. Но в этом случае ни одна из постоянных не обратится в нуль. Они будут иметь значения:

$$a=-\frac{2mr+m+2r-n}{2(2+m+n)},$$

$$b=-\frac{2mr+m+n+1}{4(2+m+n)},$$

$$c=\frac{2r+m-n}{2(2+m+n)},$$

$$d=-\frac{1}{2+m+n}.$$

Доказательство того, что и закон Пуассона, в том же самом приближенном смысле, удовлетворяет уравнению (117), читателю предоставляется провести самостоятельно в качестве упражнения.

Таким образом в некотором, не совсем точном смысле уравнение (117) является общей характеристикой всех этих четырех важнейших типов распределения, и потому естественно ожидать, что эмпирическое семейство кривых, члены которого подчиняются этому уравнению, может иметь известное преимущество перед другими семействами, логическое обоснование которых еще более скудно. Примерно такими соображениями руководился Пирсон, когда он предпринял систематическое изучение решений уравнения (117) с целью узнать, какого рода статистический материал они могут собою представлять.

---

[1]) Постоянная интеграции должна равняться $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ для того, чтобы площадь под кривою оказалась равной единице.

Эти решения будут иметь различный вид, смотря по знаку выражения c^2-4bd. В случае, когда $c^2-4bd>0$,

$$\text{I—II.} \qquad P=k(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}; \tag{118}$$

в случае $c^2-4bd<0$,

$$\text{IV.} \qquad P=k[(x-a)^2+\beta^2]^m e^{-\gamma \operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}}; \tag{119}$$

при $c^2-4bd=0$,

$$P=k(x-a)^m e^{-\frac{a+\alpha}{x-\alpha}}. \tag{120}$$

Наконец, имеются еще случаи вырождения: при $d=0$,

$$\text{III.} \qquad P=k(x-a)^m e^{-\beta x}; \tag{121}$$

при $c=d=0$,

$$P=ke^{-\beta(x-\alpha)^2}. \tag{122}$$

Едва ли нужно упоминать, что все постоянные, входящие в эти уравнения, за исключением постоянной интеграции k, написаны вместо тех или иных комбинаций величин a, b, c, d, а потому вместе с этими величинами являются совершенно произвольными. Что касается k, то оно во всех случаях должно быть выбрано с таким расчетом, чтобы площадь под кривою равнялась единице.

Пирсон называет первую из полученных нами кривых „типом II" при $m_1=m_2$ и „типом I" при $m_1 \neq m_2$; следующую он называет „типом IV" в случае, когда $m=-1$; „типом III" он называет кривую (121). Он рассматривает еще несколько случаев, но для наших целей совершенно достаточно тех, которые мы перечислили.

Посмотрим теперь, чем характеризуются эти различные типы.

Рассмотрим сперва тип II; очевидно, что при $x=a_1$ и $x=a_2$ величина P либо обращается в нуль, либо становится бесконечно большою; какой именно из этих двух случаев будет фактически иметь место, — это зависит от того, какой знак имеет показатель; но во всяком случае поведение P должно быть одинаково при $x=a_1$ и $x=a_2$, потому что, как сказано выше, тип II именно характеризуется одинаковыми показателями при $x-a_1$ и $x-a_2$. Эти показатели не могут быть меньше чем -1, потому что в этом случае площадь, лежащая под кривою, была бы бесконечно велика[1]).

---

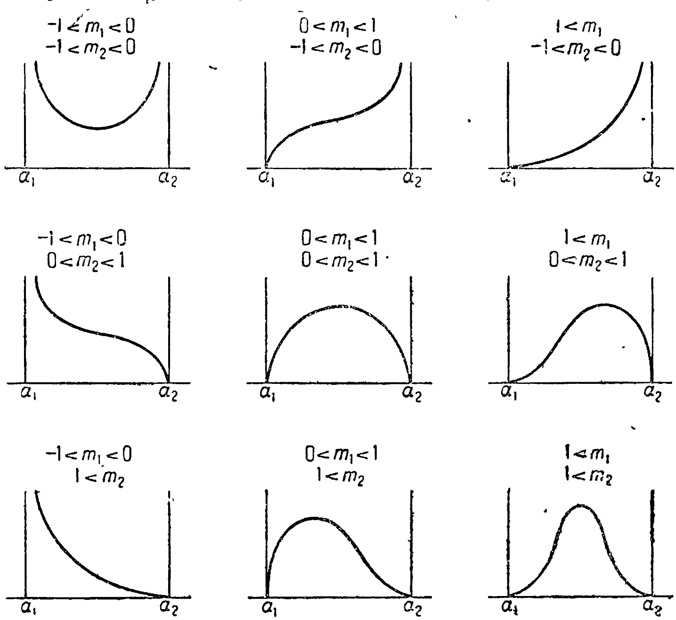
[1]) Необходимо напомнить, что интегралы, в которых на участке интеграции подинтегральная функция обращается в бесконечность — обычно их называют „несобственными интегралами", — определяются как пределы интегралов, не содержащих критической точки. Так,

$$y=\int_0^a \frac{dx}{x^m}$$

по определению означает

$$y=\lim_{b\to 0}\int_b^a \frac{dx}{x^m}.$$

Те же самые замечания относятся и к типу I, за исключением того, что поведение кривой в двух конечных точках теперь может быть различным; вполне возможно, что один из двух показателей положителен, а другой отрицателен, так что функция в одном конце обращается в нуль, а в другом становится бесконечно большою. Далее, кривые обоих типов имеют совершенно различный характер, смотря по тому, лежат ли показатели в промежутке $-1 < m < 0$, $0 < m < 1$ или $1 < m$. В первом случае кривая в соответствующей конечной точке



Черт. 26.

уходит в бесконечность; во втором случае она обращается в нуль, круто спадая к оси; в третьем случае она также обращается в нуль, но спускается к оси медленно, постепенно. Так как любой из этих трех случаев в одном конце участка может комбинироваться с любым из них в другом конце, то всего мы можем получить девять различных типов, как показано на черт. 26.

Но

$$\int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{1-m}\, x^{1-m};$$

следовательно,

$$y = \lim_{b \to 0} \frac{a^{1-m} - b^{1-m}}{1-m},$$

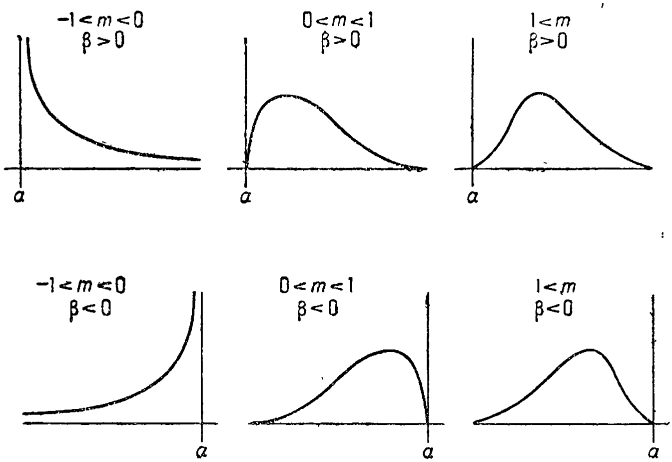
что равно $\frac{a^{1-m}}{1-m}$ или ∞, смотря по тому, имеем ли мы $m < 1$ или $m > 1$.

То же самое можно применить и к интеграции выражения (118); если m_1 или m_2 меньше чем -1, то площадь под кривою становится бесконечно большой, какое бы значение мы ни дали постоянной k.

Понятно, что кривые типа II представляют собою *симметричные* частные случаи соответствующих кривых типа I.

Очевидно, что этими типами охватывается довольно много разнообразных видов кривых. У них имеется, однако, то общее свойство, что все области вне участка (a_1, a_2) совсем выбрасываются из рассмотрения. Между тем нам понадобятся как кривые, обрывающиеся в одну сторону и простирающиеся бесконечно в другую, так и бесконечно простирающиеся в обе стороны.

Кривые первого рода дает нам тип III [1]). Мы снова должны различать здесь значения m, заключенные в промежутках $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$, а также положительные и отрицательные значения β. Различные виды кривых этого типа показаны на черт. 27.



Черт. 27.

Наконец, кривые, даваемые уравнением (119), в обе стороны простираются в бесконечность. Но конечную площадь они дают только при $m < -\frac{1}{2}$. Пирсон полагает $m = -1$ и получает уравнение [2]):

$$P = \frac{ke^{-\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\beta}\right)}}{1 + \frac{x^2}{\beta^2}}.$$

Это значение m особенно удобно потому, что

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{x}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\beta^2}}.$$

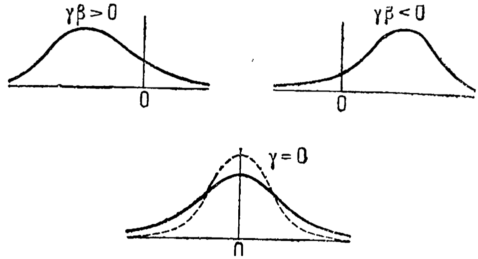
---

[1]) Пирсон полагает $m = -\beta a$; это на первый взгляд как будто накладывает на m некоторое ограничение, однако на самом деле это не так, ибо простым переносом любую кривую типа (121) можно преобразовать в такую, для которой $m = -\beta a$.

[2]) И здесь посредством простого переноса уравнение (119) можно преобразовать в уравнение, не содержащее a.

Те два вида кривых, которые охватываются этим типом, получаются: 1) в случае, когда γ и β имеют одинаковые знаки ($\gamma\beta > 0$), и 2) когда знаки их различны ($\gamma\beta < 0$). Они показаны на черт. 28.

Ни тот, ни другой не обладают симметрией; имеется, однако, и симметричный случай, получающийся при $\gamma = 0$; он также показан на черт. 28 в сравнении с нормальной кривой, изображенной пунктиром. Очевидно, что кривая Пирсона типа IV дает значительно бо́льшую вероятность крупных отклонений, чем нормальный закон.



Черт. 28.

Непосредственно очевидно, что кривые Пирсона охватывают собою огромное число различных возможных распределений, и опыт показал, что они поразительно хорошо согласуются с большинством статистических данных. Способ их применения мы рассмотрим в главе IX. Теперь же мы обратимся к другим семействам кривых.

§ 88. Эмпирические семейства кривых; ряд Грама-Шарлье. Мы переходим теперь к рассмотрению совершенно иного способа получения функции распределения, которая должна представлять данный эмпирический материал; этот способ основан на соображениях, которые в гораздо большей степени логически обоснованы, чем те, которые лежат в основании кривых Пирсона.

Мы будем исходить из нормального закона (103), который теперь будем писать в виде:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

чтобы установить согласие с обозначениями, которые в этом методе приняли более или менее стандартный характер. Очень легко показать, что последовательные производные этой функции имеют вид:

$$\Phi'(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} y,$$

$$\Phi''(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (y^2 - 1),$$

$$\Phi'''(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (y^3 - 3y),$$

или вообще

$$\Phi^{(i)}(y) = \frac{(-1)^i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} H_i(y),$$

где $H_i(y)$ означает „полином Эрмита“:

$$H_i(y) = y^i - 1 \cdot C_2^i y^{i-2} + 1 \cdot 3 C_4^i y^{i-4} - 1 \cdot 3 \cdot 5 C_6^i y^{i-6} + \ldots$$

Функции H и Φ обладают тем замечательным свойством, что интеграл произведения $H_i(y)\,\Phi^{(j)}(y)$, взятый в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, равен нулю, каковы бы ни были числа i и j, лишь бы только они были различны между собою. Это свойство, называемое в математике „биортогональностью", всегда бывает чрезвычайно ценным, потому что позволяет нам при помощи весьма простого приема разлагать произвольную функцию $f(y)$ в ряд вида:

$$f(x) = c_0\,\Phi(y) + c_1\,\Phi'(y) + c_2\,\Phi''(y) + \ldots \tag{123}$$

Чтобы это показать, помножим обе части написанного равенства на $H_i(y)$ и проинтегрируем результат почленно от $-\infty$ до $+\infty$. В силу свойства биортогональности наших функций при этом все члены правой части обратятся в нуль, за исключением только одного члена, в котором оба индекса совпадают между собою; таким образом мы приходим к соотношению:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(y) f(y)\,dy = c_i \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(y)\,\Phi^{(i)}(y)\,dy,$$

или

$$c_i = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(y) f(y)\,dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} H_i(y)\,\Phi^{(i)}(y)\,dy}.$$

Последовательной интеграцией можно показать, что знаменатель этой дроби равен $(-1)^i \cdot i!$, так что

$$c_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(y) f(y)\,dy.$$

Другими словами, *коэфициенты ряда, изображающего функцию* $f(y)$, *представляют собою произведения простых числовых множителей на интегралы, в пределах от* $-\infty$ *до* $+\infty$, *произведений полиномов Эрмита на функцию* $f(y)$.

Разумеется, все сказанное имеет силу только при условии, что функция $f(y)$ *допускает* разложение в подобного рода ряд; и, понятно, весь этот процесс может оказаться целесообразным лишь в том случае, если мы умеем вычислять получающиеся интегралы. Поэтому будет нелишним несколько остановиться на этих двух сторонах вопроса.

Что касается первого соображения, то можно показать, что всякая функция $f(y)$, непрерывная вместе со своими производными двух первых порядков, может быть представлена посредством такого ряда, если только в бесконечности все ее производные обращаются в нуль. Повидимому, эти условия достаточно широки для того, чтобы охватить собою бо́льшую часть функций, встречающихся в статистике.

Что касается второго условия, то тут прежде всего очевидно следующее: мы не можем вычислить нужных нам интегралов, пока мы не знаем, что представляет собою функция $f(y)$; и между тем, *в статистических исследованиях мы почти никогда этого не знаем.* Мы знаем обычно только то, что такие-то наблюдения дали нам такие-то результаты. Эти результаты, по всей вероятности, не в точности соответствуют искомой функции распределения; но кроме них у нас нет ничего, и задача состоит в том, чтобы сделать из них наилучшее возможное употребление. При этом нас, разумеется, гораздо больше удовлетворит такой результат, который не будет иметь с нашими данными бросающихся в глаза расхождений, нежели такой, который, как бы он ни был обоснован теоретически, при наилучшем использовании все же приводит к значительным погрешностям.

Мы можем, впрочем, несколько нагляднее иллюстрировать эту мысль, обращаясь к более привычному типу разложений. Хорошо известно, что функция e^{-x^2} при любом значении x может быть изображена с помощью ряда Тейлора. Однако если бы в наших руках оказались данные, для которых e^{-x^2} служила бы функцией распределения, причем этот факт был бы нам неизвестен, и если бы эти данные были достаточно многочисленны для того, чтобы с их помощью мы могли определить три первых коэфициента этого ряда Тейлора, то этим путем нам едва ли удалось бы получить ряд, обладающий хотя бы важнейшими свойствами нашей функции. Этого, несомненно, не мог бы сделать никакой трехчленный полином. Напротив, с помощью функции $a\operatorname{arcctg}(b+cx^2)$, которая никакими теоретическими соображениями нам не навязывается, мы могли бы добиться практически полезных результатов.

Совершенно такое же общее положение имеет место по отношению к ряду Грама-Шарлье. Поскольку речь идет об его применениях к статистическому материалу, тончайшие исследования, касающиеся его сходимости и т. п., представляются следствием переоценки; ибо обычно удается определить в лучшем случае три или четыре коэфициента, и практически задача сводится к тому, чтобы установить, могут ли получаемые таким путем простые аналитические выражения представлять данный статистический материал.

Но если этот ряд не имеет прочного теоретического обоснования, то, поскольку речь идет о его применении к представлению эмпирических данных, он имеет весьма существенные заслуги иного рода. Ибо, прежде всего, опыт показал, что даже те немногие члены, которые нам удается вычислить, способны представлять многообразный статистический материал совершенно удовлетворительным образом; далее, самое вычисление этих членов не вызывает затруднений, ибо, как мы заметили уже при рассмотрении нормального закона, мы можем опираться при этом на имеющиеся подробные таблицы функций $\Phi^{(i)}(y)$ [1].

---

[1] Отметим также, что ряд Грама-Шарлье иногда выводят, основываясь на известных допущениях, касающихся „элементарных ошибок“, т. е. допущениях, аналогичных тем, какие приводят к нормальному закону; поэтому этот ряд обладает всеми преимуществами, свойственными такого рода выводу.

Напротив, типы Пирсона в этом отношении оказываются иногда чрезвычайно громоздкими.

В глава IX будет выяснено, каким образом вычисляются коэфициенты при таком эмпирическом пользовании рядом. В данный же момент мы возвращаемся в область, где может быть применено теоретическое обоснование ряда — в область, где истинный закон распределения известен заранее.

§ 89. Приближенные выражения Грама-Шарлье для биномиального закона и закона Пуассона. В § 78, поставив себе целью вывести формулу, которая приближенно выражала бы биномиальный закон, мы пришли к способному внушить ужас ряду (102), вычисление которого в каждом отдельном случае кажется чрезвычайно утомительным. Но сравнивая коэфициенты этого ряда с известными выражениями полиномов Эрмита [1]), мы легко можем привести его к виду:

$$P_m(y) = \Phi + \frac{2p-1}{6\sigma}\Phi''' + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{6p^2-6p+1}{24}\Phi^{\mathrm{IV}} + \frac{4p^2-4p+1}{72}\Phi^{\mathrm{VI}}\right) + \frac{2p-1}{\sigma^3}\left(\frac{12p^2-12p+1}{120}\Phi^{\mathrm{V}} + \frac{6p^2-6p+1}{144}\Phi^{\mathrm{VII}} + \frac{4p^2-4p+1}{1296}\Phi^{\mathrm{IX}}\right) + \ldots \tag{124}$$

Этот ряд принадлежит к типу рядов Грама-Шарлье и гораздо легче доступен для вычисления, чем ряд (102), вследствие той помощи, которую могут при этом оказать таблицы, подобные приведенным в приложении IV. В особенности он удобен для вычисления вероятности того, что n заключено между двумя заданными границами n_1 и n_2. Чтобы в этом убедиться, мы вернемся к черт. 22, на котором кружки изображают фактические значения $P_m(n)$, а проходящая через них плавная кривая дает приближенное значение величины (102) или, что то же,

---

Я не думаю, чтобы это соображение устанавливало логическое преимущество ряда Грама в качестве средства для изображения статистических данных. Но если колебания какой-либо переменной могут быть с хорошей точностью изображены одним или двумя членами ряда Грама, то вызывающие их причины *имеют тот же эффект*, как если бы они действительно были „элементарными ошибками". При таком положении вещей мы ничего не узнаем об индивидуальных причинах колебаний, сколько бы данных мы ни собирали; напротив, если это не так, то у нас остается надежда что-либо узнать об этих причинах и устранить их, если соответствующие колебания нежелательны.

[1]) В § 88 мы уже дали общую формулу для полиномов Эрмита. Здесь мы даем таблицу первых тринадцати из них:

$H_0 = 1,$ $\quad H_5 = y^5 - 10y^3 + 15y,$

$H_1 = y,$ $\quad H_6 = y^6 - 15y^4 + 45y^2 - 15,$

$H_2 = y^2 - 1,$ $\quad H_7 = y^7 - 21y^5 + 105y^3 - 105y,$

$H_3 = y^3 - 3y,$ $\quad H_8 = y^8 - 28y^6 + 210y^4 - 420y^2 + 105,$

$H_4 = y^4 - 6y^2 + 3,$ $\quad H_9 = y^9 - 36y^7 + 378y^5 - 1260y^3 + 945y,$

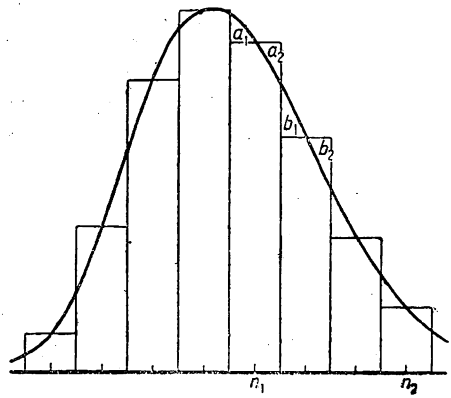
$H_{10} = y^{10} - 45y^8 + 630y^6 - 3150y^4 + 4725y^2 - 945,$

$H_{11} = y^{11} - 55y^9 + 990y^7 - 6930y^5 + 17\,325y^3 - 10\,395y,$

$H_{12} = y^{12} - 66y^{10} + 1485y^8 - 13\,860y^6 + 51\,975y^4 - 62\,370y^2 + 10\,395.$

значение ряда Грама-Шарлье. Мы воспроизводим часть этого чертежа на черт. 29, где только истинные значения $P_m(n)$ изображены не кружками, а высотами прямоугольников, подобно черт. 5.

Очевидно, что площадь, лежащая под плавной кривою и ограниченная ординатами, проведенными в точках n_1 и n_2, меньше суммы площадей соответствующих прямоугольников, потому что прямоугольники с обеих сторон выступают за пределы этих ординат на половину принятой единицы длины. С другой стороны, площадь, лежащая под кривою и ограниченная ординатами в точках $n_1 - \frac{1}{2}$ и $n_2 + \frac{1}{2}$, служит превосходным приближением для суммы площадей прямоугольников, потому что маленькие треугольные площадки a_1, a_2; b_1, b_2; ... почти совершенно компенсируют друг друга попарно.



Черт. 29.

Поэтому очень хорошее приближенное выражение для вероятности того, что n окажется заключенным между n_1 и n_2, мы получим, интегрируя выражение (124) и беря в качестве пределов интеграции не значения y_1 и y_2, соответствующие n_1 и n_2, а те значения, которые соответствуют значениям $n_1 - \frac{1}{2}$ и $n_2 + \frac{1}{2}$ переменной n. Из соотношения (101), связывающего между собою n и y, мы легко находим эти пределы и получаем таким образом формулу:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} P_m(n) \approx \int\limits_{y_1 - \frac{1}{2\sqrt{mp(1-p)}}}^{y_2 + \frac{1}{2\sqrt{mp(1-p)}}} P_m(y)\, dy. \tag{125}$$

Мы условились определять $P_m(y)$ формулой (124), но наша аргументация, разумеется, осталась бы в силе и при любом другом формальном выражении этой величины. В частности, мы могли бы воспользоваться и рядом (102), который лишь с формальной стороны отличается от ряда (124). Но хотя подобного рода подстановка ничего не изменила бы в справедливости полученной формулы, зато она, несомненно, повредила бы той легкости и простоте, с которыми мы можем пользоваться этой формулой для конкретных расчетов.

Чтобы в этом убедиться, заметим, что, интегрируя ряд (102), мы получили бы другой ряд, также содержащий различные степени переменной y. Поэтому для вычисления величины (125) нам придется вычислить эти степени для обоих пределов интеграции и затем составить надлежащую алгебраическую сумму. С другой стороны, тот факт, что в формуле (124) функции Φ представляют собою производные различных порядков от нормального закона, позволяет нам при интеграции просто уменьшать на единицу их индексы, так как интеграл от $\Phi'''(y)$ есть $\Phi''(y)$, интеграл от $\Phi^{\text{VI}}(y)$ есть $\Phi'''(y)$ и т. д.

Но все эти функции могут быть взяты прямо из приложения V, где дан даже интеграл функции $\Phi(y)$ под рубрикой $\Phi_{-1}(y)$. Поэтому вычисление величины (125) становится совсем простой задачей.

В качестве числового примера мы рассмотрим задачу о вероятности того, что событие, вероятность которого равна 0,1, наступит n раз при 100 испытаниях. В этом случае $p=0,1$, $m=100$, $\sigma=3$, так что формула (124) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} P_{100}(y) = \Phi - \frac{2}{45}\Phi''' + \left(\frac{23}{10\,800}\Phi^{\text{IV}} + \frac{2}{2\,025}\Phi^{\text{VI}}\right) + \\ + \left(\frac{1}{50\,625}\Phi^{\text{V}} - \frac{23}{243\,000}\Phi^{\text{VII}} - \frac{4}{273\,375}\Phi^{\text{IX}}\right) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

Табл. XV показывает степень точности, которой можно ожидать от этой формулы; однако эта таблица требует некоторых пояснений.

Таблица XV

Биномиальный закон $C_n^{100}(0,1)^n(0,9)^{100-n}$ и его приближенные выражения по формуле Грама-Шарлье

n	Истинное значение	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0	0,00003	+0,00048	—0,00013	—0,00006	—0,00002
1	0,00030	+ 118	— 0	— 5	— 2
2	0,00162	+ 218	+ 32	+ 6	+ 1
3	0,00589	+ 285	+ 64	+ 18	+ 5
4	0,01587	+ 212	+ 52	+ 14	+ 3
5	0,03387	— 71	— 16	— 7	— 3
6	0,05958	— 491	— 95	— 22	— 5
7	0,08890	— 824	— 107	— 14	— 1
8	0,11482	— 834	— 31	+ 4	— 1
9	0,13042	— 462	+ 76	+ 12	+ 1
10	0,13187	+ 111	+ 111	— 1	— 1
11	0,11988	+ 592	+ 53	— 14	+ 1
12	0,09879	+ 770	— 33	— 2	+ 2
13	0,07430	+ 635	— 82	+ 12	— 1
14	0,05130	+ 370	— 59	+ 14	— 3
15	0,03268	+ 48	— 7	+ 2	— 1
16	0,01929	— 130	+ 30	— 8	+ 2
17	0,01059	— 185	+ 37	— 9	+ 3
18	0,00543	— 163	+ 22	— 4	+ 1
19	0,00260	— 113	+ 6	+ 1	— 1
20	0,00117	— 66	— 4	+ 3	— 1
21	0,00050	— 34	— 6	+ 2	— 0
22	0,00020	- 0,00015	—0,00005	+0,00001	+0,00000

Заметим прежде всего, что формула (126) дает значения величины $P_{100}(y)$, а не $P_{100}(n)$. Чтобы получить последнюю, надо ввести соответствующий якобиан, который, как мы знаем, равен $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{3}$. Поэтому числа, лежащие в основе таблицы, получаются не непосредственно из формулы (126), а только после деления на 3 всех ее значений.

Далее, в то время как истинное значение биномиальной формулы дано во втором столбце, приближенные значения, получаемые по формуле Грама-Шарлье, в таблице не указаны; вместо них даются их погрешности, в которых мы собственно главным образом и заинтересованы.

Четыре столбца отклонений, указанных в таблице, соответствуют: 1) нормальному закону, представляемому первым членом формулы (124); 2) второму приближению, которое получается присоединением члена, содержащего первую степень σ в знаменателе; 3) приближению, содержащему сверх того еще член с σ^{-2}, и 4) полному выражению, выписанному в нашей формуле. Быстрое уменьшение отклонений Δ показывает, что ряд сходится достаточно хорошо [1]).

---

[1]) К этому мы присоединим несколько замечаний, которые, впрочем, представят, вероятно, больше интереса для знатока, чем для начинающего.

Прежде всего, целый ряд авторов [наиболее известный среди них — Эджворс (Edgeworth)] обратили внимание на то, что для получения с помощью ряда Грама-Шарлье наилучшего результата приходится группировать его члены в порядке, отличном от „натурального“. В частности, член нулевого порядка надо брать либо совсем отдельно, либо в одной из следующих комбинаций:

0, 3,
0, 3, 4, 6,
0, 3, 4, 6; 5, 7, 9.

Но это именно те группировки, которые сами собою сложились в формулах (124) и (126); и мы видим, что это правило (по меньшей мере для разложений биномиальных формул) является непосредственным следствием того, что мы располагаем члены по нисходящим степеням величины σ.

Общим правилом является, далее, то, что коэфициент члена шестого порядка приблизительно равен половине квадрата коэфициента при члене третьего порядка. В случае формул (121) и (126) имеет место точное равенство, если под „членом шестого порядка“ мы будем подразумевать член, содержащий $\Phi^{VI}(y)$ в выписанной части формул. Однако это не есть еще полный член шестого порядка, потому что первый из невыписанных нами членов формулы (124) также содержит Φ^{VI}; но так как в его знаменатель σ входит в более высокой степени, то он, вообще говоря, будет мал по сравнению с главным членом, полученным по общему правилу.

Следует поэтому заключить, что для получения наилучшего результата с помощью ряда Грама-Шарлье надлежит пользоваться *некоторым* порядком, отличным от натурального. Является ли порядок, указанный Эджворсом, „вообще говоря, наилучшим“, — это в широкой мере зависит от того, как мы будем толковать эти слова. Во всяком случае не следует ожидать, что существует такой порядок, который во всех без исключения случаях был бы наилучшим; в частных случаях всегда может найтись такое расположение, которое окажется исключительно удобным именно для этих случаев.

Чтобы показать, что удачная группировка членов действительно иногда способна вызвать значительный эффект, сравним полученные нами приближения с теми, которые приведены Арне Фишером в его известной книге *„Mathematical Theory of Probabilities“*, на стр. 268. Приведенные там приближения получены с помощью всех членов до содержащих Φ^{IV} включительно, в их естественном по-

Этот же пример может показать нам, какой степени точности мы можем достигнуть, если будем пользоваться интегралами этих рядов как приближенными выражениями для суммы членов биномиального ряда. Табл. XVI содержит в своем втором столбце результаты суммирования нашего биномиального ряда от n_1 до 100; другими словами, здесь даются вероятности того, что при 100 испытаниях событие состоится не менее n_1 раз. Остальные столбцы содержат результаты интеграции выражения (126) от $y_1 - \frac{1}{2\sigma}\left(\text{что соответствует } n_1 - \frac{1}{2}\right)$ до бесконечности. Точность не так хороша, как в таблице XV, но для большинства приложений все же совершенно достаточна.

рядке, и потому занимают положение промежуточное между нашими столбцами Δ_1 и Δ_2; в самом деле, даваемые нами приближения либо вовсе не содержат функции четвертого порядка, либо вместе с нею включают и Φ^{VI}. Поэтому целесообразнее всего будет сравнить результаты Фишера именно с данными этих двух столбцов.

Если мы примем за сводную характеристику наших отклонений их среднее квадратическое, то для результатов Фишера эта величина составляет 8 единиц четвертого десятичного знака (его данные приведены вообще с точностью только до четвертого знака), в то время как для нашего второго приближения она равна 5, а для третьего 1 (единице того же знака). Другими словами, надлежащей группировкой членов мы получили второе приближение, дающее более точные результаты, чем приближение, полученное Фишером с помощью натурального порядка и *содержащее одним членом более.*

Несомненно, что сам Фишер прекрасно осведомлен о той пользе, какую может принести удачная группировка. В самом деле, в письме, адресованном издателю *Bell System Technical Journal* (т. 6, 1927, стр. 172—180), он замечает, что существует определенная связь между порядком величины так называемых „элементарных ошибок" и расположением членов ряда Грама-Шарлье. Фишер сообщает мне, что 7 первых приближений содержатся в следующих комбинациях, которые впервые были указаны Шарлье и Иоргенсеном:

0,
0, 3;
0, 3, 4, 6;
0, 3, 4, 6, 5, 7, 9;
0, 3, 4, 6, 5, 7, 9, 8, 10, 12, 11, 13, 15;
0, 3, 4, 6, 5, 7, 9, 8, 10, 12, 11, 13, 15, 14, 16, 18.

Они отличаются от наших группировок только тем, что содержат все члены каждого данного порядка на том месте, на котором в нашем случае появляется первый из них; в наших формулах эти члены разбиты на отдельные части соответственно тем степеням величины σ, которые они содержат. Например для седьмого приближения мы имели бы:

0; 3; 4, 6; 5, 7, 9; 6, 8, 10, 12; 7, 9, 11, 13, 15; 8, 10, 12, 14, 16, 18;

знак „;" отделяет здесь друг от друга группы членов, содержащих одинаковые степени σ. Закон составления ясен в обоих случаях.

В своем письме Фишер пользуется третьей из вышеприведенных комбинаций и присоединяет таким образом член шестого порядка к тем значениям, которые даются в его *„Mathematical Theory of Probabilities"*. Полученные этим путем результаты тождественны с числами Δ_2 табл. XV.

Таблица XVI

Приближения по формуле Грама-Шарлье к суммам биноминального ряда

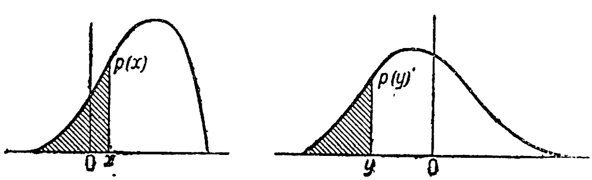
n_1	Истинное значение	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0	1,00000	−0,00023	+0,00020	+0,00002	−0,00001
5	0,97629	− 967	− 187	− 99	− 81
10	0,54871	+ 1747	+ 47	− 7	− 6
15	0,07257	− 576	+ 143	+ 65	+ 80
20	0,00198	−0,00121	−0,00015	+0,00011	+0,00009

Подобного же рода рассуждение можно провести и для ряда (116), который был нами получен в качестве приближения к закону Пуассона. Мы легко найдем, что он приводится к следующему ряду Грама-Шарлье:

$$P(y)=\Phi-\frac{1}{\sigma}\frac{\Phi'''}{6}+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\Phi^{IV}}{24}+\frac{\Phi^{VI}}{72}\right)-\frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{\Phi^{V}}{120}+\frac{\Phi^{VII}}{144}+\frac{\Phi^{IX}}{1296}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma^4}\left(\frac{\Phi^{VI}}{720}+\frac{13\Phi^{VIII}}{5760}+\frac{\Phi^{X}}{1728}+\frac{\Phi^{XII}}{31\,104}\right)+\ldots,$$

который легко позволяет вычислить как вероятность каждого отдельного значения n, так и вероятность того, что оно окажется заключенным в тех или иных границах. Однако, в силу особенной важности закона Пуассона, существуют таблицы не только для $P(n)=\frac{\varepsilon^n e^{-\varepsilon}}{n!}$, но также и для функции $\Pi(n)=\sum_{n}^{\infty}P(n)$, выражающей собою вероятность того, что n окажется не меньше некоторого определенного числа. Приложения VI и VII содержат краткие таблицы этого рода; однако имеются и гораздо более подробные, ввиду чего у нас нет надобности в каком бы то ни было разложении формулы Пуассона в ряд.

§ 90. Эмпирические семейства кривых; преобразование переменных. Рассмотрим какую-нибудь пару кривых распределения, например тех, которые изображены на черт. 30. Они, несомненно, различны между собою; но так как обе — кривые распределения, то площади их одинаковы. Допустим теперь, что мы, начиная от левого конца, отсечем от обеих кривых по одинаковой площади A (на чертеже эти площади заштрихованы). Условимся, наконец, называть „соответственными“ значения переменных x и y, соответствующие правым концам их двух площадей.

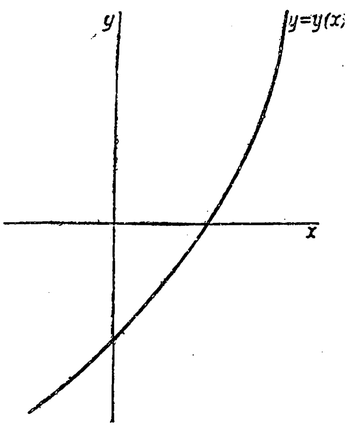


Черт. 30.

Мы можем, очевидно, проделать эту операцию для любого A (для любого x), определяя таким образом y как функцию от x. Пусть эта функция изображена графически на черт. 31. Мы получим таким образом функцию величины x, закон распределения которой в точности изображается второю кривою черт. 30.

Другими словами, *каково бы ни было распределение величины x, мы всегда можем найти такую функцию $y(x)$ этой величины, распределение которой будет подчиняться любому наперед заданному закону*. Так, например, мы могли бы заставить y следовать закону, изображаемому прямой линией, т. е. добиться того, чтобы равным интервалам изменения y соответствовали одинаковые вероятности.

По вопросу о том, насколько такими преобразованиями можно пользоваться для вывода законов распределения на основании эмпирических данных, почти ничего не сделано; но от времени до времени ими все же пользуются для сведения необычных типов распределения к употребительным эмпирическим кривым.



Черт. 31.

В известном смысле это также является способом для получения семейства кривых; однако такое семейство включало бы в себя любую кривую, какую только мы можем себе представить. От небольшого числа типов, выведенных из данного диференциального уравнения и содержащих небольшое число параметров, через более широкое семейство с бо́льшим числом параметров и допускающее потому более тонкие теоретические градации, мы перешагнули к методу, который (по крайней мере при широком его понимании) охватывает все, что только может оказаться кривою распределения. Но это продвижение в сторону все большей и большей гибкости сопровождается потерею определенности применяемого типа, и эта потеря обесценивает собою все преимущества, какими мог бы располагать этот процесс обобщения. В конце концов, статистические данные не бывают точными; роль их — чисто репрезентативная, и потому все, что мы можем надеяться с ними сделать, это — если позволено будет употребить выражение, которое может показаться несколько преувеличенным — найти тот тип, к которому они принадлежат.

Задачи

1. Показать, что закон Пуассона приводит к диференциальному уравнению (117).
2. Найти значение k в формуле (118).
3. Найти ожидания первых двух степеней $x-a$ в случае формулы (118).
4. Найти общее выражение для ожидания $(x-\alpha)^i$ в случае формулы (121).
5. Пусть в случае формулы (121) δ есть отклонение величины x от ее ожидания, причем за единицу принято стандартное отклонение. Написать формулу для $P(\delta)$.

Литература

I. Нормальный закон

1. Бернштейн, Теория вероятностей, ч. IV.
2. Лахтин. Курс теории вероятностей, ч. III, гл. I.
3. Levy, Calcul des probabilités, partie I, chap. IV и partie II, chap. IV и V.

II. Кривые Пирсона

4. Лахтин, Кривые распределения.
5. Pearson, Mathematical Contributions to the Theory of Evolution, Philosophical Transactions, A, vol. 186 (1895), pp. 343—414; vol. 197 (1901), pp. 443—459; vol. 216 (1916), pp. 429—457.

III. Ряд Грама-Шарлье

6. Arne Fisher, The mathematical Theory of Probabilities, ch. XIII и XIV.

IV. Таблицы

7. Pearson, Tables for Biometricians and Statisticians, Cambridge University Press.
8. Jörgensen, Mathematical Statistical Tables D. Van-Nostrand, New York.
9. Glover, Tables of Applied Mathematics in Finance Insurance and Statistics, Wahr Publishing Co., Ann. Arbor, Mich.

ГЛАВА IX

Подбор кривых распределения

§ 91. Подстановка задачи. Мы уже заметили, что во многих случаях искомых вероятностей не удается найти, опираясь на основное определение, и что в таких случаях эксперимент бывает нашим лучшим помощником. Мы видели также при исследовании теоремы Бернулли, чего мы можем ожидать от этого эксперимента: в лучшем случае он позволяет нам утверждать, что *большие* уклонения истинных вероятностей от даваемых им результатов *мало правдоподобны*. Понятно, что нам желательно знать, *сколь большие* и *сколь мало правдоподобны*. Эти две оценки тесно связаны друг с другом — имеется определенная вероятность того, что расхождение превзойдет такую-то определенную величину; таким образом задача естественно приводится к тому, чтобы искать зависимость между этими двумя величинами.

В случае, когда мы располагаем достаточными данными, теорема Бейеса показывает нам, в какой мере мы можем доверять оценке, даваемой нашим экспериментом. Но для этого нужно, чтобы мы знали вероятность, которою эта оценка обладала до нашего эксперимента, а этих сведений обычно у нас не имеется. Поэтому теорема Бейеса редко приходит нам на помощь. Практически нам необходим метод, который позволял бы судить о доброкачественности нашей оценки, не зная той *априорной* вероятности, которую она имела до произведенного нами эксперимента. Настоящая глава в основном посвящена рассмотрению методов, которые были предложены с этой целью.

Однако мы с самого начала должны твердо усвоить себе следующее: то, что теорема Бейеса учитывает априорную вероятность события, есть ее *достоинство*, а не *недостаток*.

Мы должны считаться с тем несомненным фактом, что наше доверие к результату того или иного эксперимента обусловливается не только точностью этого эксперимента, но и правдоподобностью самого результата. Поэтому ни одна попытка замены теоремы Бейеса таким методом, который не требовал бы знания априорных *вероятностей, неспособна дать нам и* апостериорные *вероятности.*

Таким образом мы не можем получить математической меры той степени доверия, какой заслуживает наша оценка, потому что у нас нет математической меры ее априорной вероятности; нам не остается ничего лучшего, как поискать какого-нибудь суррогата такой меры. К счастью, этот суррогат будет все же в известном смысле удовлетворителен, если только надлежащим образом понимать его смысл: но мы должны еще раз подчеркнуть, что *он не может ответить нам на вопрос* *о вероятности нашей оценки. На этот вопрос можно ответить только учитывая априорные вероятности.*

Обращаясь к этому исследованию, мы сразу вступаем в область анализа статистических методов. Мы не можем надеяться провести этот анализ во всей полноте, потому что одно только описание употребительных способов вычисления заняло бы целую книгу, а соответствующее исследование аналитических предпосылок, на которых основаны эти методы, потребовало бы нескольких книг. Нашей целью должно быть: во-первых, дать ясную картину того, чему мы можем надеяться научиться при этих статистических исследованиях; во-вторых, довести изучающего до первоисточников, из которых он в случае надобности наилучшим образом почерпнет нужные ему детали, и в-третьих, пояснить значение наиболее важных технических терминов, для того чтобы эти первоисточники не показались ему непонятными.

§ 92. Гипотетическая „генеральная совокупность“ и „выборка“. При каждом производимом нами эксперименте мы в сущности выделяем какую-либо одну из группы различных имеющихся возможностей. Так, если при бросании монеты выпадает герб, то тем самым выделяется одна из *двух* имеющихся возможностей; при измерении сопротивления электрической установки мы выделяем одну из бесконечного множества возможностей. Этим я хочу подчеркнуть не то, что эта установка в действительности может иметь любое сопротивление и что мы определяем фактическую величину его; я хочу отметить то, что благодаря неточности измерения мы *могли бы* получить и другой результат; иначе говоря, что наша ошибка измерения есть только одна из множества возможных ошибок. Теоретически мы можем мыслить это множество бесконечным, хотя фактически это не соответствует действительности, так как наш инструмент необходимо имеет известный предел точности.

При каждом нажиме штамповочного пресса получается отпечаток, являющийся одним из множества отпечатков, которые *могли бы* получиться.

Когда человек умирает, то возраст его есть один из множества тех возрастов, в которых он *мог бы* умереть.

Каждое из этих событий в известном смысле представляет собою „эксперимент“. Однако эксперименты не всегда бывают так просты. Суточная продукция штамповочного пресса представляет собою целое множество данных; это множество есть, однако, только одно из тех, которые *могли бы* быть получены. Оно тоже представляет собою „эксперимент“, который мог бы иметь и другой исход. Число гербов, выпавших при n бросаниях монеты, также есть только один из множества возможных результатов и т. д.

Размышляя в этом направлении, мы совершенно естественно приходим к представлению об обширном „складе“ возможностей, из которых одна в силу нашего эксперимента выбирается наудачу. Этот гипотетический „склад“ мы будем называть „генеральной совокупностью“ или „населением“, из которого наш эксперимент выделяет некоторый „образец“ или „выборку“. Разумеется, мы должны предположить, что в этой „генеральной совокупности“ различные возможные результаты представлены пропорционально их вероятностям, что, вообще говоря, заставляет нас мыслить наш „склад“ состоящим из бесконечного множества предметов (или „население“ — из бесконечного множества „индивидуумов“). Далее, как мы уже заметили, отдельный предмет может сам по себе быть очень сложным. Так, индивидуумом нашей генеральной совокупности может быть „выпадение n гербов“, если мы имеем дело с совокупностью всех возможных исходов, какие могут иметь место при m бросаниях монет.

Эти выражения: „генеральная совокупность“, или „население“, „индивидуум“ и „образец“, или „выборка“ весьма употребительны в статистической литературе, и они действительно чрезвычайно удобны, потому что позволяют нам совершенно абстрактно говорить о столь различных по своей природе событиях, что никаких других достаточно общих выражений для них и невозможно найти. Мы ввели их для описания некоего гипотетического „склада“, содержимое которого определяется — известными или неизвестными нам — вероятностями, лежащими в основании нашего эксперимента. Исторически эти понятия создались совершенно иначе. Они явились измышлением статистической школы, которая, если и не отрицает полностью существования доопытной вероятности, то во всяком случае считает эксперимент единственным средством ее познания. Если я верно передаю их мысль, то приверженцы этой школы приписывают такому „населению“ бо́льшую степень логической реальности, нежели абстрактным „вероятностям“. Для них эта гипотетическая генеральная совокупность, или „население“, является действительностью, в то время как „вероятность“ — только сокращенный термин, означающий „относительная частота одинаковых между собою индивидуумов данного населения“.

Хотя я и не отрицаю практического значения понятия „населения“, несомненно, стимулирующего наше воображение, я все же не могу понять, каким образом хотят добиться логического усовершенствования теории путем замены абстрактного понятия вероятности тем видом квази-конкретности, которым обладают сновидения: воображаемым „населением“, которое было бы, конечно, достаточно конкретным, если бы только оно существовало в действительности, но которое никогда не существует фактически, а во многих случаях и принципиально не может существовать.

§ 93. Критерий согласованности. Мы можем теперь формулировать то решение поставленной задачи, которое обычно принимается в качестве замены теоремы Бейеса. Оно состоит в том, что

a) данные нашего эксперимента используются для более или менее правдоподобной оценки тех вероятностей, для измерения которых этот эксперимент был поставлен, и

b) вычисляется вероятность того, что другой эксперимент, поставленный так, что участвующие в нем вероятности в точности соответствуют принятым оценкам, приведет к результату, вероятность которого не превышает вероятности фактически полученного результата.

То же самое можно выразить иначе, в терминах, более употребительных среди статистиков, следующим образом:

a) Мы изучаем результаты нашего эксперимента и оцениваем на этом основании те отношения, в которых индивидуумы различного рода входят в „население“, и

b) мы находим вероятность того, что другой образец, взятый из этого гипотетического „населения“, будет содержать индивидуумы различного рода в отношениях не более вероятных, чем те, которые имели место в нашем первом образце.

Рассмотрим простой пример, с целью сделать эти процессы более наглядными. Пусть мы хотим измерить вероятность наступления некоторого события и с этой целью поставили эксперимент, который при 50 испытаниях дал 20 случаев наступления этого события. Пусть, далее, в силу целого ряда побочных соображений, которых мы здесь рассматривать не будем, мы пришли к заключению, что у нас есть основание предполагать искомую вероятность равной $\frac{1}{3}$. Табл. X показывает, что *если эта оценка верна*, то вероятность 20 наступлений при 50 испытаниях составляет всего 0,0704. Таким образом фактически полученный нами результат обладает лишь небольшой вероятностью. Однако достаточно бегло окинуть взглядом нашу таблицу, чтобы убедиться, что ни один другой результат не мог бы иметь вероятности значительно большей и что, с другой стороны, существует много возможных результатов, вероятности которых еще меньше. Очевидно, что при таком положении вещей было бы необоснованно утверждать, что наша оценка несостоятельна. Здесь сам собою возникает вопрос: какова вероятность получения такого результата, вероятность которого не превосходила бы 0,0704. Чтобы ответить на этот вопрос, надо, очевидно, сложить между собою вероятности всех возможных результатов, за исключением чисел от 14 до 19 включительно, что дает 0,368. Очевидно, что вероятность получения результата, по меньшей мере столь же невероятного, как 20 наступлений нашего события при 50 испытаниях, достаточно велика, чтобы мы могли на этом основании признать нашу оценку допустимой.

Или, беря другой пример, допустим, что мы сдаем колоду карт и регистрируем порядок, в котором они появляются. Допустим, что в силу некоторого *априорного* рассуждения мы считаем все порядки одинаково вероятными. На основании этой оценки мы вычисляем вероятность наступления фактически осуществившегося порядка и находим $\frac{1}{52!}$, т. е. невообразимо малую величину. Дает ли это нам повод для отбрасывания нашей гипотезы? Разумеется, нет, ибо всякий другой порядок был бы столь же мало вероятным. Существенно здесь то, что при нашей гипотезе мы *наверняка* не можем получить порядка более вероятного, чем тот, который наступил фактически.

Принятое нами решение задачи не дает нам, таким образом, ни вероятности того, что наша оценка правильна, ни даже вероятности фактически полученного нами результата в предположении, что наша оценка правильна. Оно дает нам только вероятность получения результата, по меньшей мере столь же невероятного, как фактически полученный, в предположении правильности нашей оценки

Первый шаг нашего процесса — составление оценки искомых вероятностей — уже сам по себе протекает весьма разнообразно. Иногда он требует оценки только одной вероятности, как в первом из вышеприведенных примеров; иногда же приходится сразу оценивать целый ряд вероятностей, как это было в примере с картами, где мы фактически оценили 52! вероятности, условившись принять их равными между собою; иногда число их бывает даже бесконечным, как, например, при исследовании отклонений от стандарта в какой-нибудь промышленной продукции. В последнем случае от нас в сущности требуется даже не таблица вероятностей отдельных значений, а уравнение кривой распределения.

Разумеется, способы получения оценок всех этих вероятностей изменяются в весьма широких пределах в зависимости не только от числа вероятностей, с которыми мы имеем дело, но также и от характера тех побочных сведений, какими мы можем располагать и какие оказывают существенное влияние на нашу оценку. Для этой части нашей работы мы в качестве основного инструментария широко используем тот запас функций распределения, который составлен нами в главе VIII.

После того, как оценки нами получены, остальная часть процесса протекает в основном совершенно одинаково, имеем ли мы дело с отдельною вероятностью или целой кривой распределения. Мы постараемся, насколько это возможно, вести изложение так, чтобы это основное единство было достаточно ясно видно сквозь толщу математических выкладок, которых мы не можем полностью избежать. Этой цели мы лучше всего достигнем посредством ряда примеров, расположенных в порядке возрастающей сложности.

§ 94. Примеры; неправильная кость.

Пример 49. Игральная кость была брошена 315 672 раза, причем 106 602 раза выпало либо 5, либо 6 очков. Была ли кость правильной, а если нет, то какова была вероятность выпадения пятерки или шестерки?

Если бы кость была правильной, то ожидаемое число выпадений пятерки или шестерки составляло бы в точности одну треть числа бросаний, т. е. 105 224. Отклонение не очень велико — примерно $1\frac{1}{3}\%$; несомненно, оно не столь велико, чтобы сразу убедить нас в неправильности нашей кости. Поэтому мы начнем с предположения, что она — правильная, и постараемся установить, насколько правдоподобно это допущение. С этою целью мы применим наш критерий согласованности и вычислим вероятность того, что наш эксперимент, *будучи проделан с помощью правильной кости*, приведет к результату по меньшей мере столь же невероятному, как 106 602 пятерки и шестерки.

Это не очень сложно. В самом деле, мы имеем дело со случаем, к которому непосредственно может быть приложен биномиальный закон, причем число испытаний равно 315 672, а (предполагаемая) вероятность $\frac{1}{3}$. Но, как мы знаем, при столь большом числе испытаний биномиальный закон превосходно аппроксимируется нормальным, если мы надлежащим образом выберем единицу масштаба. С этою целью мы должны сперва найти отклонения нашего результата от его математического ожидания, что составляет 1378, а затем выразить это число в стандартных отклонениях. Но в § 78 мы видели, что для биномиального закона стандартное отклонение равно $\sqrt{mp(1-p)}$, что в нашем случае составляет 264,9. Если принять это за единицу, то наше фактическое отклонение будет равно $y=5{,}20$. Очевидно, что отклонения, большие чем y, имеют меньшую вероятность, и обратно — меньшие отклонения более вероятны; таким образом наша задача сводится к тому, чтобы найти вероятность отклонения, не меньшего чем 5,20.

Но это — в точности та же самая задача, с которою мы встретились в § 89, с тою только разницей, что в данном случае нам не требуется очень большой точности, так что первый член ряда (124), который и представляет собой нормальный закон, совершенно достаточен. Сверх того мы можем совершенно пренебречь небольшим поправочным членом $\frac{1}{2}\sqrt{mp(1-p)}$, стоящим в пределах интеграла (125). Таким образом с точностью, совершенно достаточной для нашей цели, мы можем утверждать, что вероятность отклонения, превышающего 5,20, равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{5,20}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \Phi_{-1}(\infty) - \Phi_{-1}(5{,}20),$$

где $\Phi_{-1}(y)$, как и в § 89, означает функцию, таблица которой дана в приложении V.

Этим путем мы учитываем отклонения, которые положительны и превышают 5,20. Однако поскольку нормальный закон нами используется как приближенное выражение для закона биномиального, мы должны учитывать и отрицательные отклонения с соответственно такими же вероятностями. Поэтому полная вероятность получения результата, менее вероятного чем фактически наступивший, вдвое больше только что выписанного выражения.

Мы могли бы, конечно, найти эту величину с помощью таблицы приложения V. Однако интеграл

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{127}$$

встречается так часто, что заслуживает самостоятельной таблицы, которая и дана в приложении IV; эта таблица показывает, что искомая вероятность $\Phi(5{,}20)$ меньше чем 0,0001. Более обширная таблица показала бы нам, что эта величина равна 0,000 000 2. Значит, *вероятность того, что правильная кость даст столь маловероятный результат, как фактически полученный нами, составляет всего около одной пятимиллионной*. Поэтому весьма вероятно, что кость асимметрична, *если только у нас нет достаточно сильного априорного основания, чтобы полагать иначе*. Так как в данном случае у нас такого предубеждения нет, то мы признаем нашу первую оценку величины p неправдоподобной и поищем другой, более удовлетворительной оценки.

Допустим, что в качестве второй оценки искомой вероятности мы примем относительное число появления пятерок и шестерок в нашем эксперименте; ведь мы знаем из теоремы Бернулли, что это число по всей вероятности мало отличается от истинной величины p. Это дает нам $p = 0{,}337\,699$. При этом допущении $y = 0$, и очевидно, что ни один эксперимент не мог бы дать меньшего уклонения; иначе говоря, в этом случае $\Phi(y) = 1$. Однако это отнюдь не значит, что наша новая оценка является абсолютно точной. Полученный результат является простым следствием того, что мы искусственно форсировали согласованность оценки с экспериментом, произведя эту оценку на базе данного эксперимента.

Ниже, при рассмотрении более сложных примеров, мы убедимся, что всякое форсирование подобного рода требует определенной компенсации, и мы рекомендуем читателю сохранить в памяти до того времени настоящий пример, в котором нелепость допущения некомпенсированной величины $\Phi(y)$ сама собою очевидна. Однако благодаря исключительной простоте нашего примера нам нецелесообразно анализировать этот второй вопрос здесь. Мы постараемся обойти трудность посредством другого подхода.

Мы хотим знать, в какой мере заслуживает доверия полученная нами экспериментальным путем оценка вероятности. Несомненно, последняя девятка в числе 0,337 699 совершенно ненадежна, потому что если бы мы бросили кость еще ровно один раз, то полученное относительное число обязательно равнялось бы либо 0,337 696, либо 0,337 702. С другой стороны, написать 0,33 было бы мало интересно: мы ведь знаем, что отличие нашей вероятности от 0,333 333 почти наверняка довольно значительно и что это отличие начинается только с третьего десятичного знака.

Мы решим эту задачу, допуская для искомой вероятности различные значения, подобно тому как мы уже предполагали ее равной сначала $\frac{1}{3}$,

Таблица XVII

Предполаг. значение	Ожидаемое число пятерок и шестерок	Отклонение	Стандартное отклонение	y	$\Phi(y)$
0,333	105 119	+ 1483	264,9	+ 5,699	0,0000
0,335	105 750	+ 852	265,2	+ 3,213	0,0013
0,337	106 382	+ 220	265,6	+ 0,828	0,4076
0,339	107 013	— 411	266,0	— 1,545	0,1224
0,341	107 645	— 1043	266,4	— 3,915	0,0001

а затем 0,337 699, и исследуя, могут ли быть признаны значительными отклонения экспериментальных результатов от этих гипотетических вероятностей. Вычисления приведены выше в табл. XVII.

Очевидно, что полученных нами результатов можно было бы ожидать при $p=0{,}337$ или $0{,}339$, что они были бы весьма невероятными при $p=0{,}335$ и совершенно исключительно неправдоподобными при всех других значениях p. Поэтому, если у нас только нет какой-либо иной основательной причины для сомнений, мы вынуждены считать, что p по всей вероятности заключено между 0,335 и 0,340.

Таков один из путей решения поставленной задачи — в действительности это единственный доступный нам путь; однако мы сделали необходимые вычисления излишне громоздкими, как мы теперь убедимся на основании следующих двух замечаний. Во-первых, выписывая вероятность из приложения IV, мы не обращали внимания на знак величины y. Поэтому значения y, одинаковые по величине и противоположные по знаку — или, что для нас важнее, соответствующие им отклонения — одинаково вероятны. Почему же в таком случае нам не выбрать сначала такого значения Φ, которое мы условились бы считать отмечающим границу между допустимыми и недопустимыми значениями p, не найти затем соответствующего значения y, и наконец — искомого пограничного значения p? Другими словами, почему бы нам не пойти *обратным путем* от Φ к p?

Чрезмерно строгий ответ гласил бы, что для получения отклонений по данным значениям величины y нам пришлось бы помножать эти значения на некоторые стандартные отклонения, соответствующие как раз искомым, и в данной стадии процесса нам еще не известным значениям p. Но второе замечание выручает нас из этого затруднения: стандартные отклонения почти одинаковы между собою для всех рассматриваемых значений p. Поэтому в достаточной степени безразлично, каким из них мы будем пользоваться в каждом отдельном случае. В частности, мы можем взять значение, соответственное экспериментальной относительной частоте 0,337 699.

Проделаем это вычисление.

Условимся считать правдоподобными те значения p, для которых $\Phi(y)$ превосходит 0,01. Из приложения IV мы находим, что соответствующее значение y равно 2,576. Далее мы находим приближенную величину стандартного отклонения, беря для p округленное экспериментальное значение 0,3377. Результат составляет 265,7. Умножая это на $y=2{,}576$, мы находим, что допустимые границы отклонения равны ± 684. Это значит, что границы для математического ожидания даются формулой $106\,602 \pm 684$, а следовательно, границы для p — формулой:

$$\frac{106\,602 \pm 684}{315\,672} = 0{,}3377 \pm 0{,}0022.$$

Если p меньше чем 0,3355 или больше чем 0,3399, то вероятность того, что при повторном эксперименте мы получим отклонение от ожидаемого результата не меньшее, чем при нашем первом опыте, будет меньше чем 0,01.

Мы могли бы даже еще более упростить расчеты, принимая за „пограничное“ не то значение p, для которого $\Phi(y)=0{,}01$, а просто то, которому соответствует $y=1$ [при этом $\Phi(y)$ равно 0,3176]. Этим путем мы избавляем себя от необходимости искать значение y в приложении IV и от одного лишнего умножения, так как добавочный член теперь прямо получается разделением стандартного отклонения на число испытаний; в нашем случае это дает $\frac{265,7}{315\,672}=0,00\,084$.

Этот последний путь и является обычным для практики, причем ответ дается в виде $0,3377 \pm 0,00\,084$. Без дальнейших пояснений читатель должен понимать, что член с двойным знаком соответствует $y=1$, и на этом строить свое суждение. В частности, если он хочет найти для p такие границы, чтобы в случае, когда p лежит вне этих границ, вероятность получения результата, по меньшей мере столь же невероятного, как фактически наступивший, была меньше чем 0,001, то он должен найти в приложении IV значение 3,291, соответствующее $\Phi=0,001$, и помножить на него член со знаком $\pm$, получая таким образом $0,3377 \pm 0,0027$.

§ 95. Анализ примера 49. По поводу рассуждений последнего параграфа необходимо сделать ряд замечаний.

Прежде всего следует отметить, что в ходе этих рассуждений мы ставили себе две совершенно различных задачи. Сначала мы пытались ответить на вопрос, „является ли $\frac{1}{3}$ допустимым значением для p?“ или „является ли 0,337 699 допустимым значением для p?“. Потом же мы стали спрашивать о том, „в какие пределы нам удалось заключить величину p на основании нашего эксперимента?“ В первом случае мы спрашиваем о законности нашей догадки, во втором — о точности нашего эксперимента; обе установки при дальнейшем развитии приводят к ветвям теории вероятностей, достаточно мощным и значительным, чтобы служить достойным предметом научного исследования. Первая ведет к обобщенным понятиям, связанным с оценкой степени согласованности, а вторая — к теории ошибок и точности измерений.

В настоящей книге мы не имеем в виду заниматься вопросом о точности измерений; но раз уж мы привели этот простой пример, то целесообразно будет по крайней мере отметить те основания, которые послужили нам для различных этапов его решения. Прежде всего мы были уверены, что имеем дело со случаем взаимно независимых испытаний, происходящих при совершенно одинаковых условиях, и что поэтому наш материал подчиняется биномиальному закону. Нормальный закон был нами введен лишь как приближение к биномиальному. В § 78, анализируя подобные применения нормального закона, мы видели, что это приближение оказывается пригодным при малых значениях величины $\frac{y^3}{\sigma}$. Это, повидимому, оправдывает его применение в данном случае, так как во всех наших расчетах $\frac{y^3}{\sigma}$ не превосходит 0,7. Далее мы воспользовались тем обстоятельством, что стандартное отклонение было почти постоянным на всем интересовавшем нас участке изменения величины p, причем основывали мы это утверждение на том, что вычисленные уже нами по табл. XVII несколько стандартных отклонений почти не отличались друг от друга.

Однако легко можно было бы привести примеры, в которых все эти приближенные допущения далеко не так хорошо оправдываются; и значит, пользоваться этими методами целесообразно только при том условии, если твердо помнить, при каких предпосылках они могут быть применяемы. Читатель, склонный заинтересоваться всеми этими вопросами, может обратиться к источникам, которые мы указываем в перечне литературы.

Наконец, по поводу первой части нашего рассуждения, где речь шла о том, допустима ли такая гипотеза, как $p=\frac{1}{3}$ или $p=0{,}337\,669$, мы снова должны повторить, что получаемое нами большое значение функции Ф сколько-нибудь показательно только в том случае, если 1) это значение не получено искусственно, посредством использования данных нашего эксперимента для определения p, и если 2) не имеется каких-либо *априорных* соображений против рассматриваемого значения p. В дальнейшем течении настоящей главы мы увидим, как может быть компенсировано то влияние, которое вносит в оценку вероятностей использование данных эксперимента; однако мы не можем указать никаких общих приемов для учета априорной правдоподобности тех или иных значений этих вероятностей. Поэтому, если уж вообще рассматривать эту априорную правдоподобность, то каждый исследователь должен составить себе сам определенное мнение о ней, прежде чем приступать к обработке своего материала.

§ 96. Примеры; опытные данные Уэлдона. Числа, приведенные нами в примере 49, представляли собою суммарный итог некоторого опыта, поставленного английским биологом Уэлдоном (Weldon), и условия которого несколько отличались от приведенных нами. Уэлдон пользовался не одною, а двенадцатью костями, бросая их одновременно и регистрируя число выпавших пятерок и шестерок. Мы будем теперь понимать его результаты именно в этом смысле и в частности рассмотрим два следующих примера.

Пример 50. Совместимы ли приведенные в табл. XVIII результаты Уэлдона с предположением, что все двенадцать костей правильны?

Пример 51. Совместимы ли приведенные в табл. XVIII результаты Уэлдона с предположением, что для каждой из двенадцати костей вероятность выпадения пятерки или шестерки равна 0,3377 [1])?

---

[1]) Если мы допустим, что кости по всей вероятности различны между собою, и обозначим вероятности выпадения пятерки или шестерки соответственно через p', p'', ..., $p^{(12)}$, то мы можем определить эти вероятности так, чтобы все полученные Уэлдоном числа совпадали со своими математическими ожиданиями. Это было бы в точности аналогично тому, что мы проделали во второй половине § 94. Однако, чтобы придать нашим результатам известную надежность, нам пришлось бы еще найти, в каких пределах должна заключаться каждая из этих величин для того, чтобы фактически полученный нами результат не оказался слишком невероятным. Иначе говоря, нам пришлось бы оценить точность этого экспериментального определения величин p.

Повидимому, этот путь в логическом отношении более совершенен, чем все другие пути, которые нами применены при решении примеров в тексте; к несчастию, он требует очень сложных вычислений для получения первоначальных оценок величин p, а также более сложного вида условий для тех границ, в кото-

Мы убедимся, что целесообразнее всего решать эти две части задачи совместно, потому что большинство замечаний, которые мы будем делать по поводу одной из них, будут в равной мере относиться и к другой.

Таблица XVIII

Опытные данные Уэлдона

Число пятерок и шестерок	Наблюдавшаяся частота	Относительная частота
0	185	0,007033
1	1149	0,043678
2	3265	0,124116
3	5475	0,208127
4	6114	0,232418
5	5194	0,197445
6	3067	0,116589
7	1331	0,050597
8	403	0,015320
9	105	0,003991
10	14	0,000532
11	4	0,000152
12	0	0,000000
	Всего 26 306	

Заметим прежде всего, что при бросании 12 костей вероятность выпадения j пятерок или шестерок дается в обоих случаях биномиальным законом [1]):

$$p_j = C_j^{12}\, p^j (1-p)^{12-j};$$

единственное различие состоит в том что p в одном случае равно $\frac{1}{3}$, а в другом 0,3377. Вторые столбцы табл. XIX и XX получены непосредственным вычислением по этой формуле.

Теперь мы должны напомнить, что каждое из произведенных Уэлдоном 26 306 бросаний было одним из взаимно независимых испытаний, и что поэтому ожидаемое число таких бросаний, при которых число выпавших пятерок и шестерок равно j, составляет 26 306 p_j. Эти ожидаемые частоты помещены в четвертых столбцах обеих таблиц. Третьи столбцы содержат фактически наблюдавшиеся частоты, взятые прямо из табл. XVIII, а в пятых столбцах помещены уклонения δ_j от ожиданий.

рых должны быть заключены эти величины. На практике этот метод никогда не применяется, если только задача по своей особой важности не оправдывает затрачиваемого при этом труда.

С другой стороны, те вопросы, которые мы формулировали, не представляют с вычислительной точки зрения никаких затруднений, хотя и приводят к некоторым не совсем легким теоретическим проблемам.

[1]) Мы пишем p_j вместо обычного $P(j)$, потому что в данном случае нам удобнее иметь более краткий символ.

Таблица XIX

Число пятерок и шестерок	Вероятность	Наблюдавшаяся частота	Ожидаемая частота	Отклонение	x_j^2
j	p_j	n_j	$\varepsilon(n_j)$	δ_j	$\frac{\delta_j^2}{\varepsilon(n_j)}$
0	0,007707	185	202,75	− 17,75	1,554
1	0,046244	1149	1216,50	− 67,50	3,745
2	0,127171	3265	3345,37	− 80,37	1,931
3	0,211952	5475	5575,61	− 100,61	1,815
4	0,238446	6114	6272,56	− 158 56	4,008
5	0,190757	5194	5018,05	+ 175,95	6,169
6	0,111275	3067	2927,20	+ 139,80	6,677
7	0,047689	1331	1254,51	+ 76.49	4,664
8	0,014903	403	392,04	+ 10,96	0,306
9	0,003312	105	87,12	+ 17,88	3,670
10	0,000497	14	13,07	+ 0,93	0,066
11	0,000045	4	1,19	+ 2,81	6,143
12	0,000002	0	0,05	− 0,05	
			26306,02		$\chi^2 = 40,784$

Таблица XX

Число пятерок и шестерок	Вероятность	Наблюдавшаяся частота	Ожидаемая частота	Отклонение	x_j
j	p_j	n_j	$\varepsilon(n_j)$	δ_j	$\frac{\delta_j^2}{\varepsilon(n_j)}$
0	0,007123	185	187,38	− 2,38	0,030
1	0,043584	1149	1146,51	+ 2,49	0,005
2	0,122225	3265	3215,24	+ 49,76	0,770
3	0,207736	5475	5464,70	+ 10,30	0,019
4	0,238324	6114	6269,35	− 155,35	3,849
5	0,194429	5194	5144,65	+ 79,35	1,231
6	0,115660	3067	3042,54	+ 24,46	0,197
7	0,050549	1331	1329,73	+ 1,27	0,001
8	0,016109	403	423,76	− 20,76	1,017
9	0,003650	105	96,03	+ 8,97	0,838
10	0,000558	14	14,69	− 0,69	0,032
11	0,000052	4	1,36	+ 2,64	4,688
12	0,000002	0	0,06	− 0,06	
			26306,00		$\chi^2 = 12,677$

Этим заканчивается та часть анализа примеров 50 и 51, которая имела своею целью оценку величин встречающихся вероятностей. Теперь попытаемся установить, в какой мере правдоподобны эти оценки.

§ 97. Приближенное выражение для полиномиального закона. В примере 50 мы имеем дело с полной группой взаимно несовместимых событий, потому что при каждом отдельном бросании двенадцати костей мы можем иметь число „удач" (т. е. пятерок или шестерок), равное нулю, единице и т. д., вплоть до двенадцати. Далее 26 306 бросаний, проделанных Уэлдоном, представляют собою ряд взаимно независимых испытаний в точности того типа, какие мы рассматривали в § 26. Поэтому вероятность того, что тот или иной результат наступит такое-то определенное число раз, может быть получена по формуле (24). В частности, мы могли бы при желании вычислить вероятность того, что новый ряд из 26 306 бросаний, проделанных при точно таких же условиях, дает в точности тот же результат, какой был получен Уэлдоном. Однако это не совсем то, что нам нужно. Нас интересует, какова вероятность того, что такой эксперимент даст результат не более вероятный, чем результат Уэлдона, а это, очевидно, требует сложения большого числа выражений вида (24). Поэтому мы должны постараться найти приближенное выражение, которое играло бы для полиномиального закона (24) такую же роль, как нормальный закон по отношению к биномиальному.

В примере 51 мы также имеем дело с полной группой взаимно несовместимых событий, и в этом смысле он ничем не отличается от предыдущего. Различие их начинается в том самом, весьма существенном пункте, в котором наша вторая трактовка примера 49 отличается от первой: в примере 51 сравнительная правдоподобность результатов Уэлдона искусственно форсирована тем, что самое число 0,3377 взято на основе этих результатов. Говоря точно, мы искусственно создали совпадение среднего значения числа „удач" с его математическим ожиданием, так что имеет место соотношение:

$$\frac{1}{m}\sum jn_j = \sum jp_j,$$

или

$$\sum jn_j = m\sum jp_j. \tag{128}$$

Было бы поэтому неправильным считать безусловную вероятность получения результата, по меньшей мере столь же невероятного, как результат Уэлдона, подходящим критерием правдоподобности сделанного допущения. Вместо этого мы должны найти условную вероятность того, что эксперимент, проведенный с теми вероятностями, какие указаны в табл. XX, и *подчиненный еще дополнительному требованию в виде соотношения* (128), даст результат, по меньшей мере столь же невероятный, как результат Уэлдона.

Если бы мы для получения наших оценок пользовались формулами, более сложными, чем биномиальная,— если бы мы, например, допустили, что кости могут быть различными между собою, — то мы могли бы достигнуть еще более полного согласия между нашей оценкой и экспериментом, и в этом случае нашим критерием доброкачественности оценки должна была бы служить *условная вероятность, вычисленная в предположении, что результат нашего нового испытания будет удовлетворять всем тем дополнительным условиям, которыми мы воспользовались при составлении нашей оценки.* Таким образом для дальнейших целей нашего исследования нам понадобилось бы приближенное выражение не только для формулы (24), но также еще и для некоторой условной вероятности. Однако мы увидим, что нахождение этой условной вероятности не представит никаких затруднений после того, как безусловная вероятность будет уже получена.

Рассмотрим теперь группу из s взаимно несовместимых событий, вероятности которых при отдельном испытании соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Если произведено m взаимно независимых испытаний, то вероятность того, что первое событие при этом наступит m_1 раз, второе — m_2 раз, и т. д., в силу формул (24) и (5), равна:

$$P_m(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_s!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}, \tag{129}$$

причем, разумеется,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = m. \tag{130}$$

Будем теперь считать числа n_j столь большими, что мы, не делая большой ошибки, можем заменить все факториалы их приближенными выражениями по формуле Стирлинга. Вводя их, мы после ряда простых преобразований получаем:

$$P = \frac{1}{(\sqrt{2\pi m})^{s-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_s}} \left(\frac{mp_1}{n_1}\right)^{n_1+\frac{1}{2}} \left(\frac{mp_2}{n_2}\right)^{n_2+\frac{1}{2}} \ldots \left(\frac{mp_s}{n_s}\right)^{n_s+\frac{1}{2}}. \tag{131}$$

Теперь мы введем вместо каждого n_j соответствующее отклонение, выраженное в своих стандартных единицах. Другими словами, мы положим:

$$y_j = \frac{\delta_j}{\sigma_j} = \frac{n_j - mp_j}{\sigma_j},$$

где

$$\sigma_j^2 = mp_j(1 - p_j).$$

Эта подстановка преобразует каждый множитель выражения (131) в новый множитель вида:

$$\left(1 + \frac{\sigma_j y_j}{mp_j}\right)^{-mp_j - \sigma_j y_j - \frac{1}{2}}$$

и мы найдем приближенное значение для этого выражения при больших значениях m.

Мы уже столь часто проделывали подробного рода вычисления, что можем на этот раз обойтись без подробных объяснений. Мы прологарифмируем все произведение, разложим в ряд логарифм каждого множителя и соберем подобные члены, располагая их по убывающим степеням m. Окончательным результатом будет:

$$\log\left[(\sqrt{2\pi m})^{s-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_s}\,P\right]=$$
$$=-\sum\left\{\sigma_j y_j+\frac{\sigma_j^2 y_j^2}{2mp_j}+\text{члены высших порядков относительно }\frac{1}{m}\right\}. \quad (132)$$

Вернемся теперь к соотношению (130) и выразим все n через соответствующие y. Мы получим:

$$\sum\sigma_j y_j+m\sum p_j=m,$$

откуда, в силу $\sum p_j=1$, мы находим $\sum\sigma_j y_j=0$. Поэтому, припоминая значение σ_j^2, мы из формулы (132) получаем:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_s)\approx\frac{1}{(\sqrt{2\pi m})^{s-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_s}}\,e^{-\frac{1}{2}\sum y_i^2(1-p_i)}. \quad (133)$$

Тот вид показателя, к которому мы пришли, естественно наводит нас на мысль ввести новую переменную $x_j=y_j\sqrt{1-p_j}$ вместо y_j. Ниже мы разберемся в конкретном значении этой новой переменной, в данный же момент нам необходимо сосредоточить все наше внимание на математической стороне дела. Подставляя x_j вместо y_j, мы находим:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_s)\approx\frac{1}{(\sqrt{2\pi m})^{s-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_s}}\,e^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}, \quad (134)$$

где

$$x_1=\frac{n_1-mp_1}{\sqrt{mp_1}},\ x_2=\frac{n_2-mp_2}{\sqrt{mp_2}},\ \ldots,\ x_s=\frac{n_s-mp_s}{\sqrt{mp_s}}. \quad (135)$$

Это и есть то приближенное выражение формулы (129), которого мы искали. Прежде чем мы приступим к его использованию, рассмотрим теперь тот вопрос, который мы поставили себе в начале настоящего параграфа: какие изменения должны мы внести в полученный результат, если мы хотим иметь дело с условными вероятностями, вычисленными в предположении дополнительных условий вроде (128)?

Сколько бы этих условий ни было, назовем „событием B“ тот факт, что все они удовлетворены. Мы ищем условную вероятность значений $n_1, n_2, \ldots n_s$, *при условии, что событие B наступило*. Теорема Бейеса непосредственно дает нам соотношение:

$$P_B(n_1, n_2, \ldots, n_s)=\frac{P(n_1, n_2, \ldots, n_s)\,P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}(B)}{\sum P(n_1, n_2, \ldots, n_s)\,P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}(B)},$$

причем, конечно, подразумевается, что суммирование должно быть распространено на все возможные значения чисел n. Если мы сумеем найти условные вероятности, стоящие в правой части этого равенства, то наша задача, очевидно, будет решена. Но это — дело очень не-сложное. Любая группа значений чисел n либо удовлетворяет, либо не удовлетворяет дополнительным условиям. В первом случае $P_{n_1, n_2, \ldots, n_s}(B)$ равно единице, а во втором — нулю. Поэтому мы приходим к более простому выражению:

$$P_B(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \frac{P(n_1, n_2, \ldots, n_s)}{\sum P(n_1, n_2, \ldots, n_s)},$$

где суммирование распространяется уже только на значения, удовлетворяющие условиям B.

Но какую бы группу значений чисел n мы ни выбрали, знаменатель этой дроби всегда сохраняет одно и то же значение. Он представляет собою таким образом постоянную величину, обладающую тем свойством, что если разделить на нее *безусловную* вероятность какой-либо из допустимых групп значений чисел n, то в результате получается *условная* вероятность той же самой группы. Мы можем поэтому просто написать:

$$P_B(n_1, n_2, \ldots, n_s) = KP(n_1, n_2, \ldots, n_s),$$

где K всегда может быть, в случае надобности, определено из того условия, что сумма таких выражений, распространенная на все *допустимые* (т. е. согласные с условиями B) системы значений чисел n, должна равняться единице.

Это вносит в нашу задачу весьма значительное упрощение, потому что это означает, что с точностью до некоторого постоянного множителя наши вероятности будут иметь одинаковые значения, независимо от того, подчиним ли мы их каким-либо дополнительным условиям или нет. По этой причине мы можем записать приближенное выражение (134) просто в виде:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_s) = Ke^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2}, \tag{136}$$

который одинаково пригоден *во всех случаях*, если только мы дадим надлежащее значение числу K; а таким надлежащим значением во всех случаях будет то, при котором сумма всех вероятностей оказывается равной единице.

§ 98. Определение величины $P(>\chi^2)$. В связи с табл. XIX и XX мы интересовались значениями тринадцати переменных, которые мы обозначали через $n_0, n_1, \ldots, n_{12}$; однако в данный момент нам будет целесообразнее остановиться на случае только трех переменных n_1, n_2, n_3; это позволит нам создать геометрическую иллюстрацию. Допустим, таким образом, что у нас имеется только три переменных n_1, n_2, n_3, так что формула (136) получает вид:

$$P(n_1, n_2, n_3) = Ke^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}.$$

Две системы значений наших переменных будут равновероятны тогда и только тогда, если совпадают между собою показательные множители в выражениях их вероятностей, т. е. если обе они удовлетворяют одному и тому же соотношению:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2. \tag{137}$$

Это соотношение может быть записано также в виде:

$$\frac{(n_1 - mp_1)^2}{mp_1} + \frac{(n_2 - mp_2)^2}{mp_2} + \frac{(n_3 - mp_3)^2}{mp_3} = r^2. \tag{138}$$

Если бы мы стали изображать системы значений переменных n_1, n_2, n_3 точками в трехмерном пространстве, то соотношение (138) было бы уравнением некоторого эллипсоида, и все точки этого эллипсоида имели бы одну и ту же вероятность

$$P = Ke^{-\frac{r^2}{2}};$$

чем меньше значение r^2, тем *меньше* размеры эллипсоида и тем *больше* соответствующая вероятность.

Таким образом мы получаем целое семейство эллипсоидов (138), соответствующих различным значениям r, имеющих общий центр в точке (mp_1, mp_2, mp_3) и попарно не пересекающихся между собою. Эти эллипсоиды как бы вложены друг в друга, причем вероятность P непрестанно уменьшается по мере того, как мы продвигаемся наружу от общего центра всех этих эллипсоидов.

Пусть теперь эксперимент дал нам определенные значения наших трех переменных; пусть мы нашли сумму квадратов соответствующих величин x_1, x_2, x_3, и она оказалась равной χ^2. Пусть далее мы так или иначе оценили вероятности, лежащие в основании нашего эксперимента, и хотим теперь проверить доброкачественность наших оценок посредством критерия, установленного нами в § 93. С этою целью мы должны сложить между собою вероятности всех тех систем значений, которые менее вероятны, чем система, полученная в результате нашего эксперимента. Но мы знаем, что соответствующие этим системам точки все расположены вне того эллипсоида, для которого $r = \chi$. Таким образом для проверки допустимости нашей оценки мы должны сложить между собою вероятности всех тех допустимых точек, для которых $r > \chi$.

Для выполнения этой операции мы заменим суммирование интеграцией, подобно тому как в § 89 мы заменили интегралом сумму по одной переменной. Для этого нам придется, однако, сначала помножить выражение (136) на якобиан преобразования, переводящего систему чисел n в систему чисел x, чтобы таким образом получить выражение для $P(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Пользуясь соотношениями (135), мы легко находим, что якобиан этот равен

$$(\sqrt{m})^{s-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_s}.$$

Это — величина, не зависящая от чисел x; произведение ее на имеющуюся уже в выражении (136) постоянную K дает новую постоянную, которую нам незачем обозначать как-нибудь иначе. Поэтому мы можем написать:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_s) = Ke^{-\frac{r^2}{2}}, \tag{139}$$

где для краткости мы пишем r^2 вместо $\sum x_i^2$.

Возвращаясь к нашему трехмерному случаю, мы замечаем, что эллипсоиду (138) в пространстве чисел n соответствует в пространстве чисел x сфера (137) радиуса r, с центром в начале координат. Это, конечно, и было смыслом введения чисел x в формулу (133) с целью ее упрощения: эта величина представляет собою отклонения, измеренные в таких единицах, что все отклонения, геометрически изображаемые векторами равной длины, равновероятны между собою, независимо от направления.

Поэтому наша интеграция должна быть распространена на все допустимые значения, лежащие вне сферы радиуса χ. Но прежде чем ее выполнить, мы должны установить, какие области содержат эти допустимые значения. С этой целью мы вернемся к соотношениям (128) и (130) и заметим себе, что оба они имеют вид:

$$\sum a_j n_j = m \sum a_j p_j. \tag{140}$$

В соотношении (130) $a_j = 1$, в соотношении (128) $a_j = j$. Ниже, при рассмотрении способов получения эмпирических формул для представления статистического материала, мы убедимся, что при всех наших оценках мы неизменно пользуемся соотношениями такого вида. Поэтому при изучении дополнительных условий мы ограничимся условиями именно этого типа, которые, будучи выражены в переменных x_j, имеют вид:

$$\sum b_j x_j = 0,$$

где числа b_j — постоянные, связанные с коэфициентами a_j формулы (140) соотношениями:

$$b_j = a_j \sqrt{mp_j}.$$

В нашем трехмерном случае каждое такое уравнение имеет вид:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

и выражает собою плоскость, проходящую через начало координат. Если имеется только одно такое условие, то все допустимые точки должны лежать в соответствующей плоскости; мы имеем дело не с объемным, а с поверхностным интегралом, распространенным на часть плоскости, лежащую вне известной окружности. Если таких условий имеется два, то допустимые точки должны лежать *в обеих* соответствующих плоскостях, а значит, — на линии их пересечения. В этом случае интеграл выражения (139) распространяется на область некоторой прямой, лежащую вне данного экспериментально определяемого отрезка.

То же самое мы имеем и в общем случае. При одном дополнительном условии [а одно условие всегда имеется, потому что соотношение (130) во всех случаях должно быть выполнено] мы от пространства s измерений должны перейти к пространству $s-1$ измерений и интегрировать выражение (139), распространяя интеграцию на всю область этого пространства, отстоящую от начала координат больше чем на некоторую определенную величину χ. При q дополнительных условиях мы имеем дело с пространством $s-q$ измерений, и интеграция снова должна быть распространена на часть этого пространства, лежащую вне гиперсферы радиуса χ. Поэтому, поскольку речь идет о вычислениях, нас должна интересовать только интеграция выражения $Ke^{-\frac{r^2}{2}}$ в пространстве $S' = s - q$ измерений.

Некоторые указания относительно пути к этой интеграции мы получим, рассматривая случаи одного, двух и трех измерений. В одном измерении мы, конечно, непосредственно получаем:

$$2K\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr.$$

В двух измерениях, воспользовавшись тем, что подинтегральная функция зависит только от r, мы можем написать наш интеграл в виде:

$$2\pi K\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr,$$

а в трех измерениях — в виде:

$$4\pi K\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^2\,dr.$$

Ясно, что в случае пространства s' измерений подинтегральное выражение будет иметь вид $e^{-\frac{r^2}{2}}r^{s'-1}\,dr$, причем оно будет еще помножено на постоянный множитель, закон построения которого пока еще не ясен [1]). Но нам нет надобности знать его величину, потому что мы можем включить его в постоянную K, значение которой мы так или иначе все равно должны определить. Таким образом мы приходим к результату:

$$P_{s'}(>\chi^2) = K\int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^{s'-1}\,dr. \tag{141}$$

Теперь мы можем определить величину K. Как мы уже заметили, эта величина должна быть такова, чтобы сумма *всех* допустимых вероятностей равнялась единице. Но эта сумма, очевидно, равна интегралу (141), распространенному только от нуля до бесконечности. Таким образом мы должны иметь:

$$1 = K\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^{s'-1}\,dr,$$

---

[1]) Эта постоянная равна $\dfrac{(\sqrt{2\pi})^{s'}}{\left(\frac{1}{2}s'\right)!}$, как мы легко могли бы показать, вводя гиперсферические координаты. Однако для наших целей нам нет надобности вводить этой, по всей вероятности незнакомой читателю, системы координат.

что посредством подстановки $\frac{r^2}{2} = u$ легко приводится к виду:

$$1 = K\int_0^\infty e^{-u}(2u)^{\frac{1}{2}s'-1}\,du.$$

Сравнивая это с формулой (6), мы находим:

$$K = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}s'-1}\left(\frac{1}{2}s'-1\right)!}.$$

Подставляя это в формулу (141), мы окончательно получаем:

$$P_{s'}(>\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}s'-1}\left(\frac{1}{2}s'-1\right)!}\int_\chi^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^{s'-1}\,dr. \tag{142}$$

Для этой формулы, подобно многим другим, были составлены таблицы, одну из которых мы приводим в приложении VIII. Значения P даны в заглавиях столбцов, а значения χ^2 — внизу таблицы. Поэтому для нахождения вероятности какой-нибудь оценки достаточно определить s' и χ^2, после чего приближенное значение P можно взять непосредственно из таблицы.

§ 99. Решение примеров 50 и 51. Теперь мы можем вернуться к рассмотрению опытных данных Уэлдона с непосредственной целью определить, побуждает ли нас приведенное в табл. XVIII распределение этих результатов к тому заключению, что кости по всей вероятности были неправильны.

Наши теоретические исследования показали нам, что ключом к этой задаче являются размеры той величины, которую мы обозначили через χ^2. Поэтому мы прежде всего должны посмотреть, как можно ее вычислить.

Заметим, что x_j^2 по определению равно

$$x_j^2 = (1-p_j)\,y_j^2 = \frac{\delta_j^2}{\varepsilon(n_j)}.$$

Для получения χ^2 мы должны поэтому разделить квадрат каждого отклонения на математическое ожидание соответствующей величины и сложить между собою все полученные результаты.

Это было проделано с данными табл. XIX и XX, причем результаты приведены в последних столбцах. Единственное, что может при этом показаться непонятным, это то, что два последних числа при этом сгруппированы вместе и таким образом использованы, как если бы вместо двух мы имели только одно число. Причину этого следует искать в самом выводе нашего критерия; дело в том, что в случае, когда n_j становится слишком малым, пользование формулой Стирлинга перестает быть законным. Но то или иное подразделение полученных результатов всецело является делом нашего усмотрения, и ничто не мешает нам во всех случаях производить его таким образом, чтобы каждая группа содержала достаточное число наблюдений.

В предположении, что все кости — правильные (пример 50), мы получаем $\chi^2=40{,}75$. Благодаря соединению двух последних данных табл. XIX, у нас имеется ровно 12 переменных; а так как они должны удовлетворять соотношению (130), то только 11 из них являются независимыми. Поэтому, обращаясь к приложению VIII для отыскания соответствующей вероятности, мы должны положить $s'=s-q=11$. Мы видим что число 40,75 располагается далеко за пределами правого края таблицы; следовательно, вероятность такого рода результата в случае правильных костей значительно меньше чем 0,01. Более подробная таблица дала бы для этой вероятности значение 0,000 03. Мы видели в § 96, что при суммарной оценке результат Уэлдона обладал еще меньшею вероятностью; во всяком случае, с обеих точек зрения мы должны признать весьма вероятным, что кости были неправильными.

Переходя теперь к случаю примера 51, мы находим $\chi^2=12{,}68$. Но при вычислении этой таблицы мы предполагали между числами n_j два линейных соотношения: (128) и (130). Поэтому теперь при пользовании таблицей приложения VIII мы должны положить $s'=10$. Это дает $P=0{,}25$. Таким образом при одинаково неправильных костях, для каждой из которых вероятность выпадения пятерки или шестерки равна 0,3377, результат подобный (т. е. не более вероятный) фактически наступившему можно было бы ожидать получить в одном из каждых четырех экспериментов.

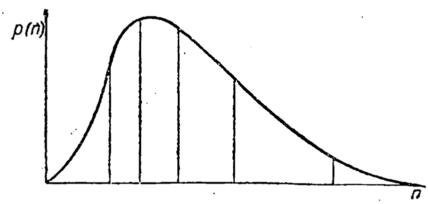
§ 100. Резюме. Вывод и обсуждение критерия согласованности оценки с опытным материалом заняли у нас так много места и заставили читателя принять такую дозу не слишком привычной ему, по всей вероятности, математики, что будет, пожалуй, целесообразно, прежде чем мы со всем этим расстанемся, кратко напомнить основные полученные нами результаты.

Мы начнем с того во всяком случае не лишенного смысла постулата, что для каждого эксперимента имеется некоторая априорная вероятность того или иного результата. Мы можем не знать величины этой вероятности — если бы мы знали ее, то в большинстве случаев нам незачем было бы испытывать доброкачественность нашей оценки; но во всяком случае эта вероятность существует. Так как возможных результатов существует несколько, то при данных условиях эксперимента мы имеем целую группу вероятностей — свою для каждого из возможных результатов; вместе взятые, они образуют некоторую функцию распределения.

Стоящая перед нами трудность в том именно и состоит, что мы не знаем этих вероятностей и пытаемся экспериментальным путем определить их. Допустим, однако, забывая на мгновение об этой трудности, что эти вероятности изображаются кривой распределения, помещенной на черт. 32, и попытаемся оценить, в какой мере результат нашего эксперимента является невероятным.

Характер этого эксперимента может быть либо таков, что он допускает только дискретную группу различных возможных исходов, — как это было в случае рассмотренной нами задачи о костях, — либо он имеет дело с такими переменными, как длина, которые допускают непрерывный ряд значений. Как бы то ни было, мы всегда можем разделить всю область изменения переменной на интервалы (или классы), как это показано на черт. 32. Если переменная может принимать лишь конечное число значений, то часто бывает естественно рассматривать каждое из этих значений как особый класс; в нашем примере с костями мы именно так и поступали, за исключением только значений 11 и 12, которые ввиду их редкого появления мы объединили в один класс. Однако такой подход совсем не обязателен. Мы можем классифицировать наш материал так, как мы это считаем целесообразным; необязательно даже, чтобы классы имели одинаковый между собою объем, — чтобы подчеркнуть это, мы нарочно наметили на чертеже интервалы разной длины.

Каждому из этих классов соответствует совершенно определенная вероятность. Это позволяет нам вычислить вероятность того, что m событий распределяется между этими классами некоторым определенным образом, так что класс номера j будет содержать некоторое определенное число n_j событий. Результатом является полиномиальный закон (129), слишком сложный для вычислительных целей. Мы убеждаемся, однако, что он может быть в качестве хорошего приближения заменен нормальным законом, если только ни одно из чисел n_j не слишком мало. Этот обобщенный нормальный закон имеет в качестве единственной независимой переменной величину r^2, которая представляет собою сумму квадратов чисел x_j; каждое x_j равно отклонению соответствующего n_j от его математического ожидания, разделенному на квадратный корень из этого ожидания.



Черт. 32.

Таково наше априорное построение. Однако при постановке эксперимента мы обычно не знаем точного вида функции распределения, изображенной на черт. 32. Напротив, часто мы именно ее и ищем. Получив наши экспериментальные результаты, мы пытаемся наилучшим возможным образом угадать вид функции распределения и найти какие-либо оценки вероятностей, связанных с различными интервалами (классами) на черт. 32. Затем мы естественно стараемся проверить основательность наших гипотетических оценок; этим путем мы приходим к мысли — определить вероятность того, что эксперимент, поставленный в наших предполагаемых условиях, приведет к результату по меньшей мере столь же невероятному, как тот, который мы фактически получили.

С этой целью мы вычисляем то значение r^2, которое соответствует нашим экспериментальным данным, и обозначаем его через χ^2; затем мы ищем вероятность того, что новый эксперимент, поставленный в наших гипотетических условиях, даст $r^2 > \chi^2$. Для решения этой задачи необходимо взять интеграл выражения (138), распространенный на все значения $r > \chi$; результат дается формулой (142), а для практических целей — таблицей приложения VIII. Найдя таким образом величину $P\ (>\chi^2)$, мы, в случае если она не слишком мала, заключаем, что наша гипотетическая функция распределения является правдоподобной, *в том смысле, что если бы она соответствовала действительности, результат нашего эксперимента был бы более или менее естественным*; если же эта вероятность оказывается очень малой, то мы заключаем, что эксперимент, повидимому, протекал при условиях, существенно отличных от предположенных нами. Однако в обоих случаях наше доверие к данному заключению в известной степени должно считаться и с априорной его правдоподобностью. Мы не должны, например, признавать какое-нибудь явно нелепое суждение обоснованным только потому, что мы получили для него большое значение величины P; точно так же, заключение почти достоверное не может быть отброшено только на том основании, что P для него оказалось малым; ибо малое значение величины P показывает только, что результат был маловероятным, а не утверждает, что он был бы невозможен.

При вычислении P мы убеждаемся, что эта величина получает разные значения в зависимости от того, на сколько классов мы разобьем возможные исходы эксперимента; таблица, дающая нам значение величины P, дает эту величину как функцию двух переменных — χ^2 и „числа классов“ s'. Мы убеждаемся далее, что это число s' не совпадает с полным числом классов s, а дает нам, в зависимости от условий задачи, число тех классов, запас элементов которых может оказаться произвольным; мы можем назвать его числом *независимых* классов. Так как сумма всех чисел n_j всегда должна равняться общему числу событий, то произвольными из них могут быть не более $s-1$; а если сверх того мы пользуемся еще нашими данными для составления оценок, как мы, например, воспользовались ими в случае табл. XX для отыскания подходящего значения p, то мы должны уменьшить число классов еще на столько единиц, сколько мы ввели дополнительных условий. Это составляет единственную трудность в применении нашего критерия; его обоснование, как мы знаем, — совсем другое дело.

В нижеследующих параграфах мы дадим еще ряд примеров его применения.

§ 101. Примеры; эксплоатация телефонной сети. Как мы убедились в главе X, у нас есть основания полагать, что вероятность одновременной занятости ровно n телефонных аппаратов для каждого данного момента определяется по формуле Пуассона. В частности, особенно хорошо должна, повидимому, применяться эта формула к случаю автоматического прибора, известного под именем „регистра“ (sender). Поэтому мы в качестве второго примера рассмотрим данные, приведенные в табл. XXI и охватывающие 3754 наблюдений числа занятых регистров на автоматической телефонной станции панельной системы.

Закон Пуассона полностью определяется величиною математического ожидания ε. В случае наших данных среднее число занятых регистров равно 10,44, и если мы примем его за ε, формула Пуассона дает нам значения, помещенные в третьем столбце под рубрикой „Ожидаемая частота“. Отклонения от ожидаемых частот даны в четвертом столбце; пятый столбец содержит величины x_j^2, а внизу его дана их сумма χ^2.

Все рассматриваемые частоты достаточно велики для того, чтобы представлять собою самостоятельные классы, за исключением двух верхних (для 0 и 1), которые мы поэтому соединяем вместе. Таким образом всего у нас получается 22 класса. Но так как мы определили величину ε на основе опытных данных, то независимых среди этих классов будет только 20, так как все частоты, с которыми нам предстоит сравнивать наши данные, должны иметь сумму 3754 и давать среднее число занятых регистров 10,44. Мы ищем поэтому число 43,43 в той строке таблицы приложения VIII, которая соответствует $s' = 20$, и находим, что оно помещается за пределами правого края таблицы, примерно против $P = 0{,}005$.

Таблица XXI

Число занятых	Наблюдавшаяся частота	Ожидаемая частота	Отклонение δ	x_j^2
0	0	0,11	+ 3,74	11,01
1	5	1,15		
2	14	5,98	+ 8,02	10,76
3	24	20,82	+ 3,18	10,49
4	57	54,33	+ 2,67	10,13
5	111	113,44	— 2,44	10,05
6	197	197,38	— 0,38	10,00
7	278	294,38	—16,38	10,91
8	378	384,16	— 6,16	10,10
9	418	445,63	—27,63	1,71
10	461	465,24	— 4,24	1,03
11	433	441,56	— 8,56	1,17
12	413	384,15	+ 28,85	2,17
13	358	308,50	+ 49,50	7,94
14	219	230,05	—11,05	7,53
15	145	160,11	—15,11	1,43
16	109	104,47	+ 4,53	1,20
17	57	64,16	— 7,16	1,80
18	43	37,21	+ 5,79	1,90
19	16	20,45	— 4,45	1,97
20	7	10,67	— 3,67	1,26
21	8	5,31	+ 3,69	1,36
22	3	4,51	— 1,51	1,51
		3753,77	+ 0,23	$\chi^2 = 43{,}43$

Согласие не слишком хорошее; и по всей вероятности, мы отбросили бы наше решение как неподходящее, если бы формула Пуассона не имела за себя веских теоретических оснований, с которыми мы тоже в известной мере должны считаться.

§ 102. Примеры; выборка из генеральной совокупности, распределенной нормально. В следующем примере условия эксперимента созданы искусственно, так что заранее известно, какому закону подчиняются результаты.

Пример 52. В приложении V мы можем усмотреть, что если какая-нибудь величина подчинена нормальному закону, то для нее вероятность быть заключенной в интервале от — 0,25 до + 0,25 равна 0,1074, вероятность быть заключенной в интервале от — 0,25 до — 0,75 равна 0,1747, и т. д. Эти числа даны в третьем столбце табл. XXII. Эксперимент был поставлен следующим образом: сначала было заготовлено 197 билетиков с надписью 0, затем по 175 с надписями — 0,5 и + 0,5, и т. д., так что число билетиков каждого типа определялось первыми тремя цифрами после запятой в выражении вероятности соответствующего интервала эти билетики складывались в урну, тщательно перемешивались, после чего один из них вынимался; его пометка регистрировалась, после чего его клали обратно, все билеты снова тщательно перемешивались, и производился второй тираж. Результаты 1000 таких тиражей оказались распределенными так, как показано во втором столбце табл. XXII.

Найти вероятность того, что второй подобный эксперимент даст результат, отклоняющийся от ожидаемого не меньше, чем первый.

Таблица XXII

Отметка	Наблюдавшееся число	Теоретическая вероятность	Ожидаемое число	Отклонение	x_j^2
—3,0	5	0,0024	2,4	+ 2,6	2,82
—2,5	9	0,0093	9,3	— 0,3	0,01
—2,0	36	0,0278	27,8	+ 8,2	2,42
—1,5	55	0,0656	65,6	—10,6	1,71
—1,0	123	0,1210	121,0	+ 2,0	0,03
—0,5	165	0,1747	174,7	— 9,7	0,54
0,0	203	0,1974	197,4	+ 5,6	0,16
+0,5	172	0,1747	174,7	— 2,7	0,04
+1,0	123	0,1210	121,0	+ 2,0	0,03
+1,5	68	0,0656	65,6	+ 2,4	0,09
+2,0	31	0,0278	27,8	+ 3,2	0,37
+2,5	8	0,0093	9,3	— 1,3	0,18
+3,0	2	0,0024	2,4	— 0,4	0,07
	1 000	0,9990	999,0	+ 1,0	$\chi^2 = 8,47$ $n = 12$ $P = 0,74$

Весь ход вычислений показан в табл. XXII. Ожидаемые числа (четвертый столбец) ро́вно в 1000 раз превосходят соответствующие ожидаемые частоты; единственное условие, налагаемое на наши теоретические числа, состоит в том, чтобы сумма их равнялась общему числу произведенных тиражей; первоначально имеется 13 классов, так что 12 из них независимы, и мы ищем наше χ^2 в таблице приложения VIII при $s' = 12$. Ответ задачи составляет поэтому 0,74. Это — очень большая вероятность; наши данные следуют нормальному закону лучше, чем можно было ожидать.

§ 103. Определение подходящей функции распределения в случае, когда мы не имеем никакой теоретической формулы. Теперь мы обладаем методом, позволяющим устанавливать, насколько то или иное предполагаемое распределение согласуется с экспериментальными данными; но до сих пор мы применяли этот метод только к такому опытному материалу, относительно которого мы имели основания полагать, что он подчиняется одному из хорошо известных нам законов. Но часто бывает, что таких предварительных сведений у нас нет, и потому мы вынуждены выбрать кривую распределения чисто эмпирическим путем. Наша ближайшая задача будет состоять в том, чтобы выработать систематический метод для решения подобного рода задач.

Прежде всего мы должны напомнить аналогию, имеющую место между моментами, с одной стороны, и математическими ожиданиями — с другой: моменты вычисляются непосредственно по статистическим данным, а ожидания представляют собою аналогичные величины, вычисленные с помощью функций распределения. Весьма мало вероятно, чтобы фактический эксперимент дал нам моменты, в точности равные соответствующим ожиданиям; однако мы видели в главе VII, что в случае достаточно экстенсивного (т. е. дающего достаточное количество материала) эксперимента вероятность сколько-нибудь значительного расхождения между ними становится малой. Поэтому, если мы заранее ничего не знаем о природе данного распределения, то естественно допустить, что функция распределения имеет ожидания, равные соответствующим моментам наших статистических данных. Разумеется, это допущение неверно; однако оно по всей вероятности ближе к истине, чем всякое другое, которое мы могли бы сделать.

Первым шагом нашего процесса математического описания статистического материала будет в этом случае отыскание такого типа распределения, который при подходящем выборе входящих в его аналитическое выражение параметров мог бы дать требуемую группу математических ожиданий.

При отыскании такого подходящего типа нам могут оказать существенную помощь характеристики, обычно называемые „скошенностью“[1] и „куртозисом“.

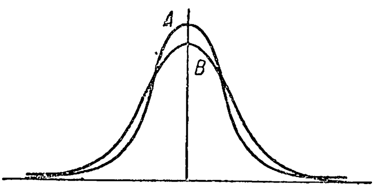
Для симметричной функции распределения все ожидания нечетного порядка равны нулю, потому что положительные и отрицательные отклонения равной величины имеют равные вероятности, так что соответствующие элементы ожиданий взаимно уничтожаются. Поэтому естественно измерять асимметрию именно с помощью этих ожиданий нечетного порядка. Но ожиданием первого порядка воспользоваться нельзя, так как оно по определению равно нулю; поэтому обычно пользуются ожиданием третьего порядка. Если мы при этом хотим получить величину, характеризующую форму кривой распределения независимо от того или иного масштаба, то необходимо установить некоторую стандартную шкалу; удобнее всего выставить требование, чтобы каждое отклонение измерялось в своих стандартных единицах. Таким образом мы приходим к следующему определению.

[1] Или „асимметрией“.

Ожидание третьего порядка отклонения величины n, выраженного в стандартных единицах, называется асимметрией (скошенностью) той функции распределения, которой подчиняется величина n. Обозначается асимметрия через $\sqrt{\beta_1}$.

Но наряду с этой мерой асимметрии нам нужна также и мера некоторого другого свойства кривой. Рассмотрим черт. 33, на котором обе изображенные кривые симметричны и имеют одинаковое стандартное отклонение, хотя по своей форме они весьма существенно отличаются друг от друга.

Части площади, расположенные вне кривой A, но внутри кривой B, в своей совокупности должны в точности равняться частям, лежащим внутри A и вне B, так как иначе обе кривые не могли бы ограничивать собою одинаковых площадей; и форма этих кривых такова, что ожидания второго порядка для них одинаковы. Но ожидание четвертого порядка для кривой A, очевидно, больше, чем для кривой B, так как большая протяженность кривой A оказывает тем большее влияние, чем выше порядок рассматриваемого ожидания. Таким образом ожидание четвертого порядка дает нам возможность учесть те особенности формы кривой, которые находят себе выражение на черт. 33.



Черт. 33.

Ожидание четвертого порядка отклонения величины n, выраженного в стандартных единицах, мы будем называть куртозисом той функции распределения, которой подчиняется величина n. Обозначается куртозис через β_2.

Мы должны тотчас же заметить, что при вычислении асимметрии и куртозиса нам совсем нет надобности трудиться над выражением всех данных в тех единицах, какие требуются нашими определениями. Ожидание третьего порядка есть сумма ряда величин, каждая из которых представляет собою произведение некоторой вероятности на куб некоторого отклонения. Так как вероятность — отвлеченное число, то ожидание третьего порядка обратно пропорционально кубу той единицы, с помощью которой мы измеряем отклонения. Это означает, что ожидание третьего порядка мы можем вычислить в каком угодно масштабе, но потом должны разделить полученный результат на σ^3. Аналогично, куртозис получается делением ожидания четвертого порядка на σ^4.

Совершенно аналогичные понятия мы можем построить для экспериментальных данных, с тою только разницей, что здесь вместо ожиданий мы будем иметь дело с моментами. Мы перечислим основные из этих понятий в виде следующего параллельного резюме:

Характеристики функций распределения	*Характеристики опытных данных*
Ожидание первого порядка величины n определяется формулой (83).	Первый момент системы опытных данных определяется как их *среднее значение* и дается формулой (82).
Отклонения δ отсчитываются от этого ожидания.	Отклонения d отсчитываются от этого среднего значения.

Первое ожидание ε_1 величины δ поэтому равно нулю [см. (96)].	Первый момент μ системы отклонений d поэтому равен нулю [см. (93)].
Квадратный корень из второго ожидания величины δ[1]) называется „стандартным отклонением" $\sigma = \sqrt{\varepsilon_2}$.	Квадратный корень из второго момента системы отклонений называется „стандартным отклонением" $\sigma = \sqrt{\mu_2}$.
Асимметрией называется третье ожидание, если за единицу отклонения принята величина σ. В общем случае асимметрия определяется формулой $\sqrt{\beta_1} = \frac{\varepsilon_3}{\sigma^3}$.	Асимметрией называется третий момент, если за единицу отклонения принята величина σ. В общем случае асимметрия определяется формулой $\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.
Куртозисом называется четвертое ожидание, если за единицу отклонения принята величина σ. В общем случае куртозис определяется формулой $\beta_2 = \frac{\varepsilon_4}{\sigma^4}$.	Куртозисом называется четвертый момент, если за единицу отклонения принята величина σ. В общем случае куртозис определяется формулой: $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$.

Наряду с этими характеристиками имеются и другие с менее ярко выраженным геометрическим значением, которые также оказались полезными при выборе наиболее подходящего для данного опытного материала типа кривых. Мы рассмотрим только одну из них, именно комбинацию

$$J = 3\beta_1 - 2\beta_2 + 6,$$

которую мы будем называть „типовым критерием". Для некоторых типов кривых распределения эта величина всегда положительна, для других — отрицательна, для третьих — равна нулю. Поэтому полезно иметь ее в своем распоряжении.

В приложении XI мы приводим формулы законов нормального и биномиального, закона Пуассона, ряда Грама-Шарлье и четырех рассмотренных нами типов кривых Пирсона; под каждой из них даются соответствующие формулы для величин $\varepsilon_1(n)$, ε_2, ε_3, ε_4 σ, $\sqrt{\beta_1}$ и β_2, а также указывается знак „типового критерия" J. Это приложение XI служит, таким образом, кратким справочником по всем основным вопросам, связанным с подбором кривых распределения для данного статистического материала.

Однако мы можем достигнуть и большего. Надлежащими исследованиями мы можем установить, что среди этих кривых только кривые Пирсона типа IV и ряды Грама-Шарлье могут одновременно иметь $\beta_1 = 0$ и $J < 0$. Подобным же образом, условия $\beta_1 = J = 0$ могут быть выполнены только для нормального закона и рядов Грама-Шарлье. Этим путем мы можем поочередно рассмотреть всевозможные комбинации значений β_1 и J. Результаты этого исследования схематически приведены в таблице приложения X[2]).

---

[1]) Т. е. из ожидания величины δ^2.

[2]) Необходимо напомнить, что β_1 есть *квадрат* асимметрии, и потому никогда не может быть отрицательным.

Пусть мы теперь имеем систему статистических данных, к которым мы хотим подобрать подходящую кривую распределения. Мы легко находим для нашего материала моменты различных порядков, а с помощью их вычисляем пять следующих величин: $\bar{n}$ — среднее значение, σ — стандартное отклонение, $\sqrt{\beta_1}$ — асимметрия, β_2 — куртозис, J — типовой критерий.

Далее, пользуясь таблицей приложения X, мы по найденным значениям β_2 и J выбираем несколько типов, которые кажутся подходящими для наших целей. Наконец, мы в выбранной формуле определяем параметры таким образом, чтобы математические ожидания функции распределения совпадали с соответствующими моментами наших данных [1]).

Бóльшая часть работы, связанной с этим последним шагом, может быть проделана раз навсегда алгебраическим путем; мы приходим таким образом к формулам, в которые остается только подставить найденные нами значения $\bar{n}$, σ, β_1 и β_2, чтобы непосредственно определить входящие в формулу параметры.

Приложение XI содержит необходимые для этой цели уравнения под рубрикой „Уравнения для определения постоянных".

Таким образом приложения X и XI содержат все то, что нам необходимо для определения искомой функции распределения, в предположении, конечно, что вообще хоть один из приводимых нами восьми типов годится для этой цели.

В дальнейшем мы поступим лучше всего, если рассмотрим задачу „подбора кривых" на ряде примеров.

§ 104. Примеры; вторичный анализ результатов Уэлдона. В качестве первого примера вернемся к тем данным, которые приведены в табл. XVII. Если мы забудем об их происхождении, то мы можем поставить вопрос об отыскании для них подходящего закона распределения. Мы начнем с вычисления моментов числа n, как показано в табл. XXIII. Затем, пользуясь формулами [2]):

$$\mu_2(d) = \mu_2(n) - \bar{n}^2,$$
$$\mu_3(d) = \mu_3(n) - 3\mu_2(d)\bar{n} - \bar{n}^3,$$
$$\mu_4(d) = \mu_4(n) - 4\mu_3(d)\bar{n} - 6\mu_2(d)\bar{n}^2 - \bar{n}^4,$$

мы вычислим моменты отклонений, а затем, в последовательном порядке — стандартное отклонение, асимметрию и куртозис. В результате

---

[1] Этот процесс приводит нас к уравнениям, которые имеют в точности вид соотношения (140), ибо ожидание порядка i данной величины, которую в § 120 мы обозначали через j, равно

$$\varepsilon_i(j) = \Sigma j^i p(j);$$

в то же время момент порядка i равен

$$\mu_i(j) = \Sigma j^i n_j.$$

Приравнивая друг другу эти две величины, мы приходим к соотношению вида (140), где $a_j = j^i$.

[2]) Первая из них тождественна с формулой (94); остальные получаются тем же путем, как (94).

всех этих вычислений оказывается, что β_1 и J оба положительны. Обращаясь к приложению X, мы находим, что условиям нашей задачи (кроме ряда Грама-Шарлье, который может быть применен к любым данным) удовлетворяют: кривая Пирсона типа I, биномиальный закон и закон Пуассона. Попытаемся поэтому обработать наши данные всеми этими способами (кроме кривой Пирсона, с которой связаны очень сложные вычисления) и посмотрим, какой из них приводит к наилучшему совпадению. Если бы мы знали происхождение данных Уэлдона, то это, конечно, заставило бы нас ожидать, что наиболее подходящим окажется биномиальный закон; но мы условились, что мы ничего не знаем об этом, и должны рассматривать наши данные без каких бы то ни было теоретических догадок.

Таблица XXIII

n	Наблюдавшаяся частота f	nf	n^2f	n^3f	n^4f
0	185	0	0	0	0
1	1149	1 149	1 149	1 149	1 149
2	3265	6 530	13 060	26 120	52 240
3	5475	16 425	49 275	147 825	443 475
4	6114	24 456	97 824	391 296	1 565 184
5	5194	25 970	129 850	649 250	3 246 250
6	3067	18 402	110 412	662 472	3 974 832
7	1331	9 317	65 219	456 533	3 195 731
8	403	3 224	25 792	206 336	1 650 688
9	105	945	8 505	76 545	688 905
10	14	140	1 400	14 000	140 000
11	4	44	484	5 324	58 564
12	0	0	0	0	0
	26 306 = m	106 599	502 970	2 636 850	15 017 018

$$\bar{n} = 4{,}0522694 \qquad \sqrt{\beta_1} = 0{,}19912$$

$$\mu_2(n) = 19{,}119972 \qquad \beta_2 = \frac{\mu_4(d)}{[\mu_2(d)]^2} = 2{,}87782$$

$$\mu_3(n) = 100{,}23759 \qquad J = 0{,}36331$$

$$\mu_4(n) = 570{,}85904$$

$$\mu_2(d) = \mu_2(n) - \bar{n}^2 = 2{,}699085$$

$$\mu_3(d) = \mu_3(n) - 3\mu_2(d)\,\bar{n} - \bar{n}^3 = 0{,}88347$$

$$\mu_4(d) = \mu_4(n) - 4\mu_3(d)\,\bar{n} - 6\mu_2(d)\,\bar{n}^2 - \bar{n}^4 = 20{,}9651$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2(d)} = 1{,}642889$$

$$\beta_1 = \frac{[\mu_3(d)]^2}{[\mu_2(d)]^3} = 0{,}039650$$

Обратимся сначала к биномиальному закону. Приложение XI показывает нам, что входящие в форму постоянные должны быть определены из соотношений:

$$p = 1 - \frac{\sigma^2}{\bar{n}},$$

$$m = \frac{\bar{n}}{p}.$$

Это дает $p = 0{,}339\,325$ и $m = 12{,}135\,00$. С помощью этих значений наша эмпирическая функция распределения может быть написана в виде:

$$p(n) = C_n^{12{,}135}(0{,}339\,325)^n(0{,}660\,675)^{12{,}135-n}.$$

По этой формуле вычислены числа третьего столбца таблицы XXIV [1]).

Для получения ожидаемых частот надо только помножить каждую вероятность на 26 306. Наконец, вычисление x_j^2 происходит обычным путем.

Мы получаем $\chi^2 = 11{,}59$. Это несколько меньше, чем результат, полученный нами в § 96. Однако это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение. Прежде всего, теоретическое обоснование биномиального закона требует, чтобы m было целым числом, так что пользование числом 12,135 вместо 12 уже вызывает сомнения, в особенности если мы вспомним, что на самом деле имелось *двенадцать* костей. Далее, в § 96 мы требовали согласия нашей формулы с опытными данными только в *двух* отношениях: чтобы $p = 0{,}3377$ и чтобы ожидаемое число наступлений события совпадало с фактическим. Здесь же мы сверх того требуем еще совпадения стандартных отклонений. Поэтому при пользовании таблицей приложения VIII мы, чтобы найти $P(>\chi^2)$, должны в данном примере искать χ^2, в строке, соответствующей $s' = 9$ (а не 10, как раньше). В результате всего этого мы получаем $P(>\chi^2) = 0{,}24$, тогда как прежде мы имели $P(>\chi^2) = 0{,}25$. Таким образом даже с фор-

---

1) Процесс вычисления слагается следующим образом: сперва с помощью таблиц логарифмов было найдено значение $p(0) = (0{,}660\,675)^{12{,}135}$. Далее мы воспользовались тем, что

$$\frac{p(n)}{p(n-1)} = \left(\frac{12{,}135}{n} - 1\right)\left(\frac{0{,}339\,325}{0{,}660\,675}\right).$$

С помощью счетной машины легко найти значение этого отношения для любого значения n. Обозначим его через r_n. Тогда остальные вероятности находятся (и фактически были найдены) по формулам:

$$p(1) = r_1 p(0),$$
$$p(2) = r_2 p(1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$p(n) = r_n p(n-1$$

мальной стороны наш новый результат будет не лучше прежнего, если только мы будем правильно применять наш критерий.

Обращаясь теперь к формуле Пуассона, мы видим в приложении XI, что единственная постоянная ε, от которой зависит эта формула, равна n. Пользуясь этим значением, мы получаем [1]) ряд вероятностей, приведен-

Таблица XXIV

n	Наблюдавшаяся частота	Эмпирический биномиальный закон		
		вероятность	частота	χ_j^2
0	185	0,007 218	189,9	0,13
1	1149	0,043 911	1155,1	0,03
2	3265	0,122 567	3224,2	0,52
3	5475	0,207 594	5461,0	0,04
4	6114	0,237 687	6252,6	3,07
5	5194	0,193 880	5100,2	1,73
6	3067	0,115 589	3040,7	0,23
7	1331	0,050 790	1336,1	0,02
8	403	0,016 345	430,0	1,70
9	105	0,003 765	99,0	0,36
10	14	0,000 592	15,6	0,16
11	4	0,000 058	1,5	3,60
12	0	0,000 003	0,1	
	26 306	0,999 999	26 306,0	$\chi^2 = 11,59$

ных в третьем столбце табл. XXV, а из них уже известным путем находим числа, стоящие в двух следующих столбцах.

---

[1]) Вычисления производились следующим образом: формула имеет вид:

$$p(n) = \frac{(4{,}052\,269\,4)^n e^{-4{,}052\,269\,4}}{n!}$$

и при $n = 0$ обращается в $e^{-4{,}052\,269\,4}$. Эту величину можно найти с помощью таблиц логарифмов. Затем мы замечаем, что

$$\frac{p(n)}{p(n-1)} = \frac{4{,}052\,269\,4}{n};$$

эти величины непосредственно вычисляются; обозначим их через r_n. Тогда числа p находятся последовательным умножением на эти величины r_n, точь в точь, как в случае тех вычислений, которые привели нас к табл. XXIV.

В этом случае закон Пуассона дает для $p(n)$ заметные значения и при $n > 12$. Поэтому мы под рубрикой 12 поместим данные, которые собственно относятся к случаю $n \geqslant 12$; так, в частности, число 0,001 02 в третьем столбце таблицы означает вероятность „двенадцати или больше“ наступлений события, вычисленную по формуле Пуассона.

В этом случае мы к нашей формуле в отношении ее согласия с эмпирическими данными предъявили только два требования: совпадение в суммарном и в среднем числе наступлений события. Поэтому при

Таблица XXV

n	Наблюдавшаяся частота	Эмпирический закон Пуассона		
		вероятность	частота	χ_j^2
0	185	0,017 38	457,2	162,1
1	1149	0,070 44	1853,0	267,5
2	3265	0,142 72	3754,4	63,8
3	5475	0,192 78	5071,3	32,1
4	6114	0,195 30	5137,6	185,6
5	5194	0,158 28	4163,7	254,9
6	3067	0,106 90	2812,1	23,1
7	1331	0,161 88	1627,8	54,1
8	403	0,031 35	824,7	215,6
9	105	0,014 11	371,2	190,9
10	14	0,005 72	150,5	123,8
11	4	0,002 11	55,5	74,5
12	0	0,001 02	26,8	
	26 306	0,999 99	26 305,8	$\chi^2 = 1648,0$

пользовании таблицей приложения VIII мы должны взять строку, соответствующую $s' = 10$. Но в нашем случае $\chi^2 = 1648$ так велико, что соответствующее значение P чрезвычайно мало. Значит, совпадение должно быть признано очень плохим, и мы вправе утверждать, что наши данные не подчиняются закону Пуассона.

Если мы, наконец, воспользуемся рядом Грама-Шарлье, то из приложения XI мы будем иметь соотношения:

$$a = \bar{n} = 4{,}052\,269\,4,$$

$$\sigma = 1{,}642\,889, \qquad A_3 = -\frac{\sqrt{\beta_1}}{6} = -0{,}033\,187,$$

$$A_1 = 0, \qquad A_4 = \frac{\beta_2 - 3}{24} = -0{,}005\,090\,83.$$

$$A_2 = 0,$$

Поэтому наш эмпирический ряд принимает вид:

$$p^*(n) = \frac{1}{1{,}642\,889}\left(\Phi - 0{,}033\,187\,\Phi''' - 0{,}005\,090\,83\,\Phi^{\mathrm{IV}}\right), \qquad (143)$$

причем аргументом функции Φ и ее производных во всех случаях служит величина

$$\frac{n - 4{,}052\,269\,4}{1{,}642\,889}.$$

С помощью этой формулы[1]) вычислены вероятности, помещенные в третьем столбце табл. XXVI и служащие основою для вычисления всех дальнейших чисел этой таблицы. Для χ^2 получается значение 41,08.

Таблица XXVI

n	Наблюдавшаяся частота	Эмпирический закон Грама-Шарлье		
		вероятность	частота	χ_j^2
0	185	0,009 89	260,2	21,73
1	1149	0,045 21	1189,3	1,37
2	3265	0,120 76	3176,7	2,45
3	5475	0,205 47	5405,1	0,90
4	6114	0,236 30	6216,1	1,68
5	5194	0,192 57	5065,7	3,25
6	3067	0,115 45	3037,0	0,30
7	1331	0,052 09	1370,3	1,13
8	403	0,017 32	455,6	6,07
9	105	0,004 15	109,2	0,16
10	14	0,000 69	18,2	0,97
11	4	0,000 09	2,4	1,07
12	0			
	26 306	0,999 99	26 305,8	$\chi^2 = 41,08$

[1]) В противоположность двум прежде рассмотренным законам распределения в формуле Грама-Шарлье независимая переменная может изменяться непрерывно. То же самое имеет место и для кривых Пирсона различных типов, к которым поэтому также относятся последующие замечания.

Когда нам приходится иметь дело с экспериментальными данными, которые показывают нам фактически наблюдавшуюся частоту каждого из некоторой *конечной группы значений* величины n (потому ли, что n не может принимать других значений, или просто потому, что собранный материал классифицирован именно таким образом), то мы вынуждены и нашу теоретическую кривую распределения разбивать на ряд участков, наилучшим возможным образом соответствующих тем классам, на которые разбит экспериментальный материал. В нашем примере экспериментальные данные указаны для целых значений n, заключенных между 0 и 12; поэтому мы предпринимаем аналогичное разделение для ряда Грама-Шарлье. Значению $n=1$ мы ставим в соответствие $0,5 < n < 1,5$; значению $n=2$ — интервал $1,5 < n < 2,5$ и т. д. Этот выбор не вызывает никаких затруднений и представляется совершенно естественным в связи с рассуждениями § 69. Не так просто, однако, обстоит дело с конечными значениями, $n=0$ и $n=12$, потому что наш ряд сохраняет смысл для сколь угодно малых и сколь угодно больших значений n. Если бы мы и этим двум значениям поставили в соответствие интервалы длины 1, то этим мы бы совершенно исключили из рассмотрения отдаленные области нашей кривой, что вряд ли законно, потому что при вычислении формул приложения XI мы эти области существенным образом учитывали. Поэтому мы сделаем то единственное, что нам остается сделать: мы этим конечным значениям поставим в соответствие интервалы от $-\infty$ до 0,5 и от 11,5 до $+\infty$.

При отыскании соответствующей вероятности необходимо учитывать, что мы требовали согласия нашего эмпирического закона с опытными данными в пяти различных пунктах: в общем числе наступлений события и в первых четырех моментах величины n. Таким образом из двенадцати классов, на которые разбит наш материал, только семь могут считаться независимыми. Мы находим, что $P(>\chi^2)$ действительно очень мало (более полная таблица дала бы нам приблизительно 0,000 001).

Чему же учат нас итоги всех этих вычислений? Мы видели, что полученные нами значения величины β_1 и J автоматически исключают из рассмотрения все наши многочисленные эмпирические законы кроме четырех. Мы видели также, как для трех из этих четырех законов могут быть произведены соответствующие вычисления и как можно испытывать доброкачественность того согласия с опытными данными, какое

Вероятность, соответствующая каждому определенному значению n, представляется теперь участком площади, лежащим под кривою распределения, вроде того, как мы это видели на черт. 35. Очевидно, что ввиду слишком быстрого изменения функции было бы весьма неточно принимать ординату в середине каждого отрезка за приближенное значение соответствующей площади. Поэтому мы вынуждены фактически проводить интеграцию для вычисления вероятностей, помещенных в третьем столбце табл. XXVI. Но интеграл выражения (143) равен:

$$P(n)=\int p^*(n)\,dn=\Phi_{-1}-0{,}033\,187\Phi''-0{,}005\,090\,83\,\Phi'''.$$

Это — неопределенный интеграл; с его помощью искомые площади могут быть выражены так:

$$p(0)=P(0{,}5)-P(-\infty),\qquad p(1)\;=P(1{,}5)-P(0{,}5),$$
$$p(2)=P(2{,}5)-P(1{,}5),\ldots,\qquad p(12)=P(\infty)-P(11{,}5).$$

Для пояснения дальнейшего хода этого вычислительного процесса мы приводим табл. XXVII, где все вычисления показаны в том порядке, в каком они фактически производились.

Таблица XXVII

n_j	$n_j-\alpha$	$\dfrac{n_j-\alpha}{\sigma}$	Φ_{-1}	Φ''	Φ'''
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0,000 000	0,000 000	0,000 000
0,5	— 3,552 269	— 2,162 209	0,015 302	0,141 575	0,139 522
1,5	— 2,552 269	— 1,553 525	0,060 151	0,168 692	— 0,108 767
2,5	— 1,552 269	— 0,944 841	0,172 373	— 0,027 393	— 0,508 300
3,5	— 0,552 269	— 0,336 157	0,368 378	— 0,334 412	— 0,365 878
4,5	0,447 731	0,272 526	0,607 390	— 0,355 840	0,306 482
5,5	1,447 731	0,881 210	0,810 897	— 0 060 467	0,530 140
6,5	2,447 731	1,489 894	0,931 874	0,160 388	0,152 848
7,5	3,447 731	2,098 578	0,982 072	0 150 168	— 0,129 979
8,5	4,447 731	2,707 262	0,996 608	0,064 676	— 0,119 762
9,5	5,447 731	3,315 945	0,999 543	0,016 334	— 0,043 325
10,5	6,447 731	3,924 629	0,999 957	0,002 599	— 0,008 782
11,5	7,447 731	4,533 313			
∞	∞	∞	1,000 000	0,000 000	0,000 000

Первые три столбца ясны непосредственно. Следующие три содержат числа, взятые из приложения V. При этом для положительных значений аргумента дается каждым из них. Мы убедились, наконец, что если бы мы даже не знали заранее истинного закона, то наш процесс все равно обнаружил бы его в качестве закона, который значительно правдоподобнее всех остальных; при этом мы, конечно, не должны забывать, что такого рода заключение мы можем считать законным лишь при условии, если у нас нет никаких косвенных (т. е. независимых от наших вычислений) причин для отвода данного закона.

§ 105. Поправки Шеппарда к моментам, вычисленным с помощью классифицированных данных. В приведенных нами примерах мы старательно избегали пользоваться такими данными, которые по сути дела имели бы непрерывное распределение, все время занимаясь только материалом, который допускал естественное распадение на отдельные классы. Мы хотели при этом избежать одного затруднения, с которым мы неизбежно встречаемся при вычислении моментов непрерывно распределенного материала, если он предварительно подвергнут искусственной классификации.

Чтобы усмотреть природу этого затруднения, обратимся к кривой распределения, изображенной на черт. 34, и в частности к отмеченному на нем „классу" значений между n_1 и n_2. С теоретической точки зрения этот класс при вычислении *математического ожидания* порядка i должен дать в общую сумму слагаемое, равное

$$\int_{n_1}^{n_2} n^i p(n)\,dn.$$

числа берутся непосредственно, а для отрицательных приходится пользоваться тем, что Φ'' — четная, а Φ''' — нечетная функция, а также тем, что $\Phi_{-1}(-n) = 1 - \Phi_{-1}(n)$.

Таблица XXVII (продолжение)

n_j	$A_3\Phi''$	$A_4\Phi'''$	$P(n_j)$	$p(n)$	n
$-\infty$	0,000 000	0,000 000	0,000 000		0
0,5	— 0,004 698	— 0,000 710	0,009 893	0,009 89	1
1,5	— 0,005 598	0,000 554	0,055 106	0,045 21	2
2,5	0,000 909	0,002 588	0,175 870	0,120 76	3
3,5	0,011 098	0,001 863	0,381 331	0,205 47	4
4,5	0,011 809	— 0,001 560	0,617 639	0,236 30	5
5,5	0,002 007	— 0,002 699	0,810 205	0,192 57	6
6,5	— 0,005 439	— 0,000 778	0,925 657	0,115 45	7
7,5	— 0,004 984	0,000 662	0,977 750	0,052 09	8
8,5	— 0,002 146	0,000 610	0,995 071	0,017 32	9
9,5	— 0,000 542	0,000 221	0,999 222	0,004 15	10
10,5	— 0,000 086	0,000 045	0,999 915	0,000 69	$\begin{cases}11\\12\end{cases}$
11,5					
∞	0,000 000	0,000 000	1,000 000	0,000 09	

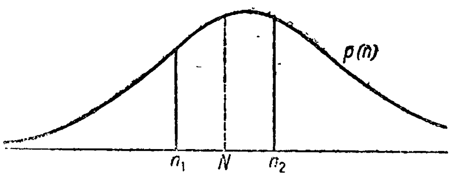
После того, как выписаны эти три столбца, содержащиеся в них числа должны быть помножены на соответствующие множители для получения величин $A_3\Phi''$ и $A_4\Phi'''$; наконец, сложением мы получаем $P(n_j)$. После этого для вычисления $p(n)$ остается только из каждого P вычесть непосредственно за ним следующее.

Если же мы все числа этого класса заменяем одним и тем же числом N (серединою отрезка n_1n_2), то вместо этого мы получаем:

$$N^l\int_{n_1}^{n_2} p(n)\,dn,$$

а это — совсем другое, если только интервал n_1n_2 не настолько мал, чтобы мы могли считать функции $p(n)$ и n^l постоянными на всем его протяжении.

Это замечание, сделанное нами для теоретической кривой, в равной мере справедливо и для любых экспериментальных данных, поскольку они подвергаются подобной классификации; помимо *случайных* отклонений этих моментов от соответствующих теоретических ожиданий, имеется еще *систематическая* ошибка, вызываемая классификацией экспериментального материала; таким образом, если бы даже по капризу случая опытные данные оказались таковы, что их моменты в точности совпадали бы с соответствующими ожиданиями, то процесс классификации этих данных расстроил бы это согласие.



Черт. 34.

Изучая эту проблему методами теории механических квадратур, Шеппард пришел к заключению, что часть вводимых таким образом погрешностей может быть исключена, если пользоваться нижеприведенными формулами. При этом величины без звездочек означают „классифицированные“ или „грубые“ моменты, величины со звездочками — „исправленные“ моменты; h есть длина интервала — „класса“, т. е. $h=n_2-n_1$.

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1^*(n)=\mu_1(n),\\
&\mu_2^*(d)=\mu_2(d)-\frac{1}{12}h^2,\\
&\mu_3^*(d)=\mu_3(d),\\
&\mu_4^*(d)=\mu_4(d)-\frac{1}{2}h^2\mu_2(d)-\frac{1}{80}h^4.
\end{aligned}\right\}\qquad(144)$$

Трудно сколько-нибудь точно оценить преимущества, даваемые этими поправками. Не представляет никаких затруднений построить такие примеры, когда эти поправки, вместо того, чтобы улучшить найденные значения моментов, еще увеличивают содержащуюся в них погрешность. Приходится, однако, признать, что подобного рода примеры всегда имеют несколько искусственный характер и что, когда мы имеем дело с обычными случаями, исправленные моменты по большей части оказываются точнее, чем „грубые“. Специалисты сходятся, повидимому, в том, что в большинстве случаев эти поправки несколько улучшают результат и что поэтому они заслуживают употребления. Несомненно, что та погрешность, для исключения которой они предназначены, в достаточной мере реальна; единственное, что может тут вызвать сомнение, это — возможно ли исправить эту погрешность, не заставляя переменную изменяться непрерывно (чего мы фактически не можем достигнуть вследствие ограниченной точности наших инструментов).

В качестве примера мы можем взять данные, приведенные в табл. XXII; если вычислить „грубые" моменты этого распределения, то второй и четвертый (т. е. те, к которым относятся поправки Шеппарда) оказываются равными соответственно 1,044 и 3,190; между тем как исправленные моменты равны 1,023 и 3,062. Так как те математические ожидания, которым эти величины соответствуют, составляют 1 и 3, то в этом случае поправки Шеппарда, очевидно, существенно улучшают результат.

§ 106. Законы распределения сводных характеристик. Каждая из величин, приведенных в приложении XI, называется „характеристикой", точнее „сводной характеристикой" соответствующего закона распределения. Таким образом „характеристика" есть общее понятие, включающее в себя и „моменты", и „ожидания", и „средние значения", „асимметрию", „куртозис", — вообще любую величину, вычисленную на основе некоторого закона распределения или каких-либо опытных данных.

Пусть теперь мы вычислили некоторую характеристику на базе опытных данных; для определенности положим, что мы взяли среднее значение 50 чисел, полученных из опыта. Найденная таким образом величина не представляет собою абсолютного и неизменного числа, которое мы могли бы воспроизвести заново, повторяя наш эксперимент; напротив, второй эксперимент, по всей вероятности, привел бы нас к другому результату. Однако не все такие результаты одинаково вероятны. Различные возможные величины интересующего нас среднего значения имеют различные вероятности, как это бывает для всякой случайной величины. Это среднее значение имеет свой собственный закон распределения, со своим стандартным отклонением, асимметрией, куртозисом. То же самое имеет место и для любой другой „характеристики".

Поэтому можно поставить вопрос о том, в каких пределах и согласно какому закону будет изменяться такая характеристика. Подробно входить в обсуждение этого вопроса означало бы для нас предпринять систематическое исследование вопроса о „точности измерений", что выходит за рамки настоящей книги. Мимоходом заметим только, что четыре основные характеристики — среднее значение, стандартное отклонение, асимметрия и куртозис — подчиняются законам, которые, как можно показать, очень близки к нормальному [1]). Поэтому, так как нормальный закон всецело определяется своим стандартным отклонением, мы можем, зная стандартное отклонение той или другой из этих характеристик, получить очень хорошую оценку того доверия, которого заслуживают с нашей стороны полученные из опыта значения этой характеристики. В табл. XXVIII и в приложении IX мы даем стандартное

---

[1]) Эти законы будут *в точности* нормальными, если сами данные распределены по нормальному закону, и *приближенно* нормальными в других случаях

отклонение каждой из этих характеристик, причем N означает число данных, из которых данная характеристика получена.

В качестве примера применения этих формул мы можем найти стандартные отклонения характеристик, вычисленных нами для данных Уэлдона и приведенных в табл. XXIII. Формула для стандартного отклонения от среднего значения имеет, согласно табл. XXVIII вид:

$$\sigma(\bar{n}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

что в данном случае дает:

$$\sigma(\bar{n}) = \frac{1{,}642\,889}{\sqrt{26\,306}} = 0{,}010\,13.$$

Поэтому, в соответствии с обычным способом указания „точности" наших характеристик, мы можем написать:

$$\bar{n} = 4{,}0523 \pm 0{,}0101,$$

как пояснено в конце § 94.

Любопытно отметить, что это совпадает с тем значением точности величины p, которое было нами получено в § 94. В самом деле, так как границы изменения p должны быть в двенадцать раз меньше соответствующих границ для n, то мы получаем:

$$p = 0{,}3377 \pm 0{,}0084,$$

как и прежде.

Рассмотрим теперь стандартное отклонение. Табл. XXVIII показывает, что $\sigma(\sigma)$ дается формулой:

$$\sigma(\sigma) = \sqrt{\frac{\mu_4(d) - [\mu_2(d)]^2}{4N\mu_2(d)}},$$

откуда мы легко находим $\sigma(\sigma) = 0{,}007\,03$. Поэтому в табл. XXIII мы могли бы записать результат вычислений в виде $\sigma = 1{,}6499 \pm 0{,}0070$.

Для величин $\sigma(\sqrt{\beta_1})$ и $\sigma(\beta_2)$ общих формул в табл. XXVIII не дано. Но обычно формулы, данные для нормального закона, оказываются с хорошим приближением годными и в других случаях; в частности, для нашего примера это несомненно так, потому что наши данные распределены согласно биномиальному закону, который в своих основных чертах не отличается от нормального. Пользуясь, таким образом, выражениями:

$$\sqrt{\frac{6}{N}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{24}{N}},$$

мы получаем:

$$\sqrt{\beta_1} = 0{,}1991 \pm 0{,}0151 \quad \text{и} \quad \beta_2 = 2{,}8778 \pm 0{,}0302.$$

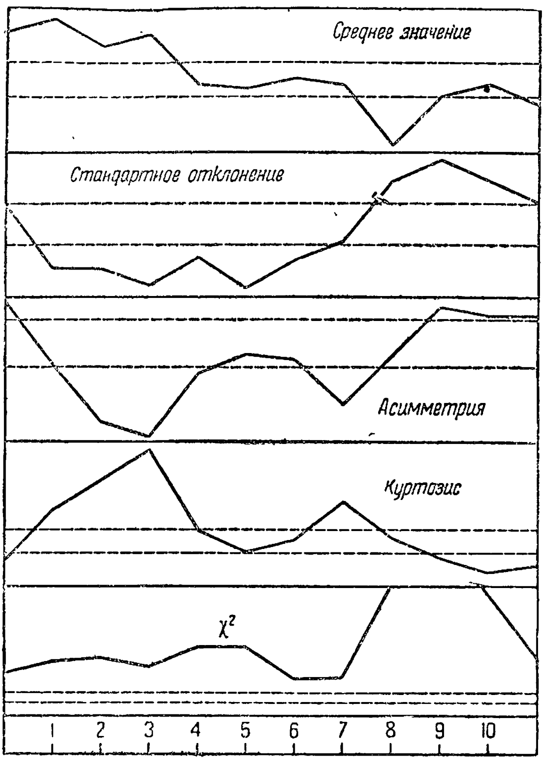
Таблица XXVIII

Стандартные отклонения важнейших характеристик

Характеристика		Стандартное отклонение				
				Специальная формула для		
Наименование	Обозначение	Обозначение	Общая формула	нормального закона	закона Пуассона	биномиального закона
Среднее значение . . .	$\bar{n}$	$\sigma(\bar{n})$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}$	$\sqrt{\frac{mp(1-p)}{N}}$
Стандартное отклонение	σ	$\sigma(\sigma)$	$\sqrt{\frac{\mu_4(d)-[\mu_2(d)]^2}{4N\mu_2(d)}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$	$\sqrt{\frac{2\varepsilon+1}{4N}}$	$\sqrt{\frac{2(m-1)p(1-p)+(2p-1)^2}{4N}}$
Асимметрия	$\sqrt{\beta_1}$	$\sigma(\sqrt{\beta_1})$		$\sqrt{\frac{6}{N}}$		
Куртозис	β_2	$\sigma(\beta_2)$		$\sqrt{\frac{24}{N}}$		

§ 107. Контрольные диаграммы. Эти сведения о природе тех законов распределения, которым подчиняются различные характеристики статистических данных, были использованы с чрезвычайным изяществом для построения так называемых „контрольных диаграмм", целью которых является позволить нам единым взглядом решать вопрос о том, имеет ли генеральная совокупность, из которой сделана данная выборка, тот или иной предположительный тип распределения.

Рассмотрим, например, выборку, состоящую из 100 элементов и взятую из генеральной совокупности, которую мы предполагаем нормально распределенной, с центром (средним значением) 0 и стандартным отклонением 2,6. Мы уже заметили, что в этом случае каждая из четырех величин $\overline{n}$, σ, $\sqrt{\beta_1}$ и β_2 в свою очередь распределена нормально; а табл. XXVIII показывает, что стандартные отклонения этих величин при данном объеме выборки будут:



Черт. 35.

$$\sigma(\overline{n}) = 0{,}260,$$
$$\sigma(\sigma) = 0{,}184,$$
$$\sigma(\sqrt{\beta_1}) = 0{,}245,$$
$$\sigma(\beta_2) = 0{,}490.$$

Так как вероятность отклонения, превосходящего стандартное отклонение более чем в 2,5 раза, составляет около 0,01, то мы можем, имея 100 шансов против одного, утверждать, что экспериментальное среднее значение будет заключено в пределах $\pm 0{,}65$, стандартное отклонение — в пределах $2{,}6 \pm 0{,}46$, асимметрия — в пределах $0{,}0 \pm 0{,}61$ и куртозис — в пределах $3{,}00 \pm 1{,}23$, *если только наши экспериментальные данные действительно взяты из генеральной совокупности предположенного типа.*

Допустим теперь, что мы встретились с задачей: определить, какие из имеющихся у нас в большом числе систем данных представляют собою выборки из подобного рода совокупностей, и какие — нет. Пусть имеющиеся у нас системы занумерованы в последовательном порядке, и для каждой из них вычислены все вышеперечисленные характеристики. Пусть, наконец, полученные результаты нанесены на диаграмму, подобную изображенной на черт. 35. Каждой характеристике соответствует своя ломаная линия (абсциссы означают номера взятых систем данных). Очевидно, у нас нет никаких оснований сомневаться в тех системах, все характеристики которых лежат близко к своим ожидаемым значениям, в особенности если они попадают внутрь полосы, ограниченной пунктирными прямыми: вероятность попадания соответствующей характеристики в область, лежащую вне такой полосы, составляет около 0,01. С другой стороны, система, для которой некоторые из характеристик лежали бы вне этой полосы, была бы в исследуемом смысле по меньшей мере сомнительной; а система, для которой *все* характеристики лежат вне соответствующих полос, как для системы 3 в нашем примере, почти наверняка не является выборкой из нормально распределенной совокупности.

Диаграммы подобного рода называются контрольными диаграммами. Они употребляются главным образом при техническом контроле и в других подобных областях, когда желательно единым взглядом оценить, вызывает ли то или иное внешнее воздействие значительные отклонения от стандарта. Тот тип проверки, который нами описан, требует лишь немногих вычислений. Однако при желании можно добавить еще несколько характеристик. Так, например, более чувствительный контроль получается при пользовании величиной χ^2, — характеристикой, функция распределения которой нам хорошо известна: это есть величина $P(>\chi^2)$, таблица которой дана в приложении VIII.

Задачи

1. Некоторый товар реклáмируется путем массовой рассылки персональных предложений предполагаемым покупателям. Выборка численностью в 1000 извещений дала 19 благоприятных результатов. Предполагая, что положение вещей достаточно хорошо охватывается биномиальным законом, требуется найти нижний и верхний пределы ожидаемого числа ответов на 100 000 извещений, причем эти пределы должны быть таковы, чтобы в случае, если истинная величина ожидания лежит вне определяемого ими интервала, вероятность девятнадцати ответов на тысячу предложений была меньше чем 0,01.

2. Какова должна быть в задаче 1 численность выборки, чтобы для последующей партии из 100 000 извещений разность между ожидаемыми пределами не превышала числа 100?

3. Каково наименьшее число благоприятных ответов в задаче 1, гарантирующее, что нижний предел ожидаемого числа ответов будет не меньше 2%?

4. Способ рекламы, описанный в задаче 1, оказывается выгодным, если на 2% предложений следует благоприятный ответ. Предполагая, что в качестве предварительного испытания разослано 1 000 предложений, ответить на следующие вопросы: a) При каком числе благоприятных ответов можно быть уверенным в выгодности данной рекламной кампании? b) При каком числе можно быть уверенным в ее невыгодности? c) Что вы рекомендуете делать в сомнительных случаях?

5. Результаты двадцати семи взаимно независимых решений задачи 3 § 76 приведены в следующей таблице на стр. 252.

Согласуются ли результаты, приведенные под рубрикой „Итог" с предположением, что все монеты правильные?

6. Каждый столбец этой таблицы можно рассматривать как эксперимент, определяющий среднее значение числа выпавших гербов. Эти средние значения даны внизу соответствующих столбцов. Найти вероятность полученной серии средних в предположении, что все монеты правильны.

Число гербов	Частота появлений в отдельных испытаниях									
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
2	1	2	2	0	1	2	0	2	0	1
3	5	6	8	6	4	4	7	7	4	4
4	13	10	6	10	14	10	9	9	13	9
5	11	11	8	6	10	13	10	13	15	10
6	13	12	14	11	12	12	9	12	10	16
7	4	7	7	11	7	7	8	4	5	7
8	2	1	2	5	2	1	6	3	2	3
9	1	1	2	0	0	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Среднее	5,10	5,10	5,20	5,42	5,14	5,02	5,48	5,00	5,18	5,38

Число гербов	Частота появлений в отдельных испытаниях									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	1	1	0	0	1	0	0
2	1	3	2	3	4	2	3	1	3	3
3	7	12	3	11	3	8	9	7	6	4
4	16	7	9	7	8	8	7	7	7	7
5	10	6	20	10	11	12	8	13	14	15
6	7	11	7	8	11	11	12	9	12	11
7	4	6	7	5	8	8	5	8	4	6
8	2	4	2	5	4	1	5	3	1	4
9	1	0	0	0	0	0	1	1	3	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Среднее	4,68	4,82	5,12	5,82	5,18	5,00	5,14	5,20	5,14	5,22

Число гербов	Частота появлений в отдельных испытаниях							Итог	Итог первых 24	Итог последних 3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	2	0	0	1	0	12	11	1
2	2	1	1	1	2	2	1	46	41	5
3	4	6	4	5	10	6	5	165	144	21
4	11	13	16	10	12	12	7	267	236	31
5	9	8	10	14	12	12	15	306	267	39
6	14	14	7	12	7	11	8	293	267	26
7	7	5	7	7	5	5	11	175	154	21
8	2	2	3	1	2	1	1	70	66	4
9	0	1	0	0	0	0	2	15	13	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Среднее	5,10	5,12	4,90	5,12	4,70	4,80	5,42	5,092	5,107	4,873

7. Какова вероятность того, что суммарные результаты трех последних столбцов получены из той же генеральной совокупности, что и результат первых двадцати четырех столбцов?

8. Найти вероятность полученной системы результатов, стоящих под рубрикой „Итог“, в предположении, что благодаря неправильности монет ожидаемое среднее значение равно 5,092.

9. При том же условии найти вероятность полученной системы средних.

10. Оценить степень согласия, получаемого при описании данных табл. XIII, 79, с помощью закона Пуассона.

Литература

I. Общая теория

1. Боярский и др., Теория математической статистики.
2. Лахтин, Кривые распределения.
3. Rietz, Mathematical Statistics.
4. R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers.
5. Arne Fisher, Mathematical Theory of Probabilities.

II. Оценка согласованности

6. Pearson, On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of variables is Such that it can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling, „Phil. Mag.“, Series V, Vol. 50 (1900), pp. 157—175.

7. R. A. Fisher, On the interpretation of χ^2 from Contingency Tables, and the calculation of P, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 85 (1922), pp. 87—94; The Conditions under which χ^2 Measures the Discrepancy between Observation and Hypothesis, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 87 (1924), pp. 442—450.

III. Поправки Шеппарда

8. Sheppard, On the calculation of the Most Probable Values of Frequency Constants, for Data Arranged According to Equidistant Divisions of a scale, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 29 (1898), pp. 353—380.

IV. Точность сводных характеристик

9. Pearson, On the Probable Errors of Frequency Constants, Biometrika, Vol 2 (1903), pp. 273—281; On the Probable Errors of Frequency Constants: Part. II, Biometrika, Vol. 9 (1913), p. 1. On the Distribution of the Standard Deviation of Small Samples, Biometrika, Vol. 10 (1915), p. 522.

10. „Student“, The Probable Error of a Mean, Biometrika, Vol. 6 (1908), pp. 1—25.

11. R. A. Fisher, Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population, Biometrika, Vol. 10 1915), pp. 507—521.

V. Контрольные диаграммы

12. Shewhart, The Application of Statistics as an Aid in Maintaining Quality of a Manufactured Product, Journal of American Statistical Association, Vol. 20 (1925), pp. 546—548; Quality Control Charts, Bell System Technical Journal, Vol. 5 (1926), pp. 593—603.

ГЛАВА X

Приложения теории вероятностей к проблемам скученности

§ 108. Введение. „Проблемы скученности" возникают в любой области общественной жизни, где спрос на обслуживание исходит от множества источников, действующих более или менее независимо друг от друга. Так, например, турникетами, сквозь которые пассажиры проходят на платформу подземной железной дороги, пользуется большое число пассажиров, действующих в значительной степени независимо друг от друга; впрочем, общность рабочего времени заставляет их ездить преимущественно в определенные „часы наибольшей нагрузки". В большом универсальном магазине спрос на работу касс исходит от множества покупателей, которые действуют независимо друг от друга в том же самом приближенном смысле, хотя, очевидно, и здесь часы наиболее интенсивной торговли оказывают свое влияние.

Мы уже имели выше один пример этого рода. В § 82 мы исследовали, какой запас галет должен быть при определенных условиях завезен в бакалейную лавку. Этот тип задач, которые мы в дальнейшем для краткости будем называть просто „лавочными задачами", представляет собою, в самом деле, простейшую из всех „проблем скученности". Единственный вопрос, который здесь ставится, гласит: „Сколько требований будет заявлено в течение данного времени?". Очевидно, вопрос этот входит как часть и в каждую из двух вышеприведенных задач (турникеты и магазинные кассы); однако там он не исчерпывает собою проблемы. Ибо пассажир, пользующийся турникетом, не уносит его с собою, а оставляет следующим пассажирам, в противоположность покупателю галет. Турникет „возвращается к обслуживанию" *после некоторого определенного промежутка времени.* Этот „промежуток занятости" и является новым элементом в описываемом положении вещей.

Основная задача связанная с турникетом, формулируется поэтому так: „Зная ожидаемое число требований в единицу времени и ожидаемый промежуток занятости, найти, сколько проходов (а значит и турникетов) должно быть устроено, чтобы процент потребителей, потерпевших неудобства, не превзошел некоторой заранее установленной нормы".

Однако в таком виде задача совершенно неопределенна, потому что слова „потерпевших неудобства" могут, смотря по обстоятельствам, иметь самое различное значение. В случае турникета или кассы, несомненно, потерпевшим неудобство будет тот, кому придется дожидаться очереди; ибо в этих случаях потребитель не уходит, если все приспособления заняты. Но если мы будем говорить, например, о числе кресел в парикмахерской, то здесь промежуток скученности по всей вероятности повлек бы за собою коммерческие убытки; в таких случаях скученность как бы сама себя изживает, ибо, очевидно, что промежутки скученности здесь длятся меньше, чем если бы все посетители оставались дожидаться своей очереди. Может быть для парикмахера это и плохое утешение, однако мы — как и он — обязаны смотреть фактам прямо в глаза.

Я не думаю, чтобы моим читателям пришлось прилагать свои знания к оборудованию парикмахерских; однако существует много случаев, когда и инженеру приходится встречаться с совершенно аналогичными проблемами. Так, например, две телефонные станции соединяются определенным числом магистральных линий, и если все эти линии заняты, то абонент, получив соответствующее уведомление, вешает свою трубку, и лишь через некоторое время возобновляет свой вызов. Это не есть случай „потерянной практики", потому что, по всей вероятности, вызов будет повторен; однако если только абонент не повторяет вызова очень скоро, — пока скученность еще не совсем рассеялась, — то длина таких периодов получается почти такая же, как если бы он совсем отходил прочь от аппарата.

Таким образом проблема скученности может иметь две основные формы: форму „задержанной (отсроченной, запоздавшей), практики (обслуживания)" и форму „потерянной практики". Задачею настоящей главы является показать, как теория вероятностей может быть приложена к этим двум проблемам, а также к двум другим, которые мы формулируем в дальнейшем.

Так как методы решения не зависят от того, какие именно технические приложения имеются в виду, то почти безразлично, в терминах какой технической задачи мы будем излагать наши исследования. Мы выберем телефонию как область, дающую примеры условий и положений весьма различного типа; и чтобы сделать изучение возможно более доступным, мы начнем с общего пояснения тех специальных терминов, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем [1]).

Когда абонент делает вызов, то этот вызов адресуется некоторому определенному лицу и потому должен быть к этому лицу направлен либо посредством человеческого вмешательства (как в ручной телефонии), либо с помощью машины (автоматическая телефония). То, что выполняет эту направляющую функцию (будь это рука человека или механизм), мы будем называть „коммутатором".

Очевидно, роль коммутатора состоит в том, чтобы передать вызов какому-либо другому приспособлению; это новое приспособление условимся называть „линией". Обычно такого рода линия является одною из „группы" линий, выполняющих тождественные функции, т. е. любая из них могла бы принять наш вызов. Может быть, имеются еще другие линии, к которым наш вызов был бы направлен, если бы он имел какое-нибудь другое назначение; однако эти не составляют части нашей „группы". С другой стороны, существуют, быть может, и такие линии,

---

[1]) Разумеется, здесь не имеется в виду давать описания эксплоатации телефонных сетей.

которые ведут в нужное нам место и которые доступны другим абонентам, но недоступны нам. Эти тоже не входят в нашу „группу". Когда мы будем говорить о „группе линий", мы всегда будем иметь в виду группу, каждый член которой способен выполнять в точности те же функции по отношению к тем же вызовам, что и каждой другой.

Обычно эти вызовы могут исходить от целого ряда источников. Например, если данная группа линий обслуживает вызовы, исходящие непосредственно от абонентов, то обычно имеется целый комплекс абонентов, могущих пользоваться любою из линий данной группы в точности одинаковым образом [1]). Это — „группа источников", соответствующая данной „группе линий". В таких случаях должно существовать приспособление, отыскивающее подходящую линию и соединяющее с ним вызывающий источник. Это приспособление мы выше условились называть коммутатором.

Никаких иных сведений из области телефонии в дальнейшем не потребуется.

§ 109. Обозначения. Главные обозначения, которыми мы будем пользоваться, следующие:

n — частота вызовов, т. е. математическое ожидание числа вызовов, приходящихся *на один источник и на один час.*

T — математическое ожидание продолжительности вызова (разговора), измеренное в часах.

λ — число источников в данной группе.

p — вероятность того, что некоторый данный источник (иногда — данная линия) занят в случайно выбранный момент наблюдения.

ν — число линий в данной группе.

$P(j)$ — вероятность того, что регистрируя в случайно выбранный момент состояние некоторой группы, мы найдем в ее составе ровно j занятых членов.

Π — вероятность того, что вызов будет потерян (встретит отказ) вследствие недостаточности оборудования.

ε — математическое ожидание плотности нагрузки данной группы, т. е. математическое ожидание числа занятых источников (или линий).

§ 110. Предположения общего характера. Относительно природы занимающей нас проблемы мы раз навсегда делаем следующие допущения:

Допущение I. *Рассматриваемая система находится в статистическом равновесии; другими словами, вероятность найти ее в том или ином состоянии не зависит от момента времени, в который система подвергается обследованию.*

Несомненно, телефонная практика никогда в действительности не удовлетворяет условию статистического равновесия. Ее интенсивность вырастает от (ночного) минимума до некоторого кульминационного пункта (днем) и затем снова падает. В течение периода возрастания нагрузки возрастает и вероятность большого числа занятых проводов;

---

[1]) Но под „источником" не всегда подразумевается абонент.

эта вероятность меняется, таким образом, с течением времени. С другой стороны, в период убывания нагрузки и вероятность „потери" вызова точно так же убывает. Нетрудно убедиться, что вероятность потери в своих изменениях всегда несколько отстает от нагрузки, имея и свой максимум, и свой минимум несколько позади соответствующих моментов для нагрузки. Простую иллюстрацию этого явления мы видели в задачах 8 и 9 в § 89. Но если периодические колебания нагрузки достаточно малы, то максимальное значение вероятности практически совпадает с вероятностью потери, вычисленной на основе статистического равновесия с помощью максимальной плотности нагрузки; и в таких случаях можно без опасений сделать вышеприведенное допущение, применяя его к условиям часов наибольшей нагрузки.

Допущение 2. *Соединения источников с линиями, а также и разъединения их происходят мгновенно.*

Это допущение вполне законно, если только время, затрачиваемое на соединение и разъединение, мало в сравнении со средней продолжительностью разговора. В противоположном случае необходимо специальное исследование; однако, учитывая усложнения столь второстепенного характера, мы только затемнили бы основную цель настоящего изложения.

Допущение 3. *Математическое ожидание плотности нагрузки одинаково для всех источников.*

Это допущение оправдывается исключительно тем, что трудно придумать другое, которое в большей мере согласовалось бы с практическими условиями. Оно не означает, что все абоненты производят одно и то же число вызовов. Оно означает, что математическое ожидание числа секунд, в течение которых данный источник в час наибольшей нагрузки бывает занят, одно и то же для всех источников.

Очевидно, что это допущение на практике не осуществляется и что желательно иметь какие-либо указания относительно характера тех ошибок, к которым оно приводит. В своей статье „The Theory of Telephone probabilities applied to trunking Problems", помещенной в „Belo System Technical Journal" за ноябрь 1922 г., E. C. Molina показал, что наше допущение не должно вызывать опасений, по меньшей мере для случаев, когда вероятность скученности мала, как это практически бывает.

Допущение 4. *Занятые источники не вызывают.*

Если не учитывать этого допущения, то получаются формулы, дающие одну и ту же вероятность потерь при одной и той же величине нагрузки, независимо от того, будет ли число источников больше или меньше числа доступных линий. В качестве примера рассмотрим случай двадцати источников, каждый из которых производит пять вызовов в час, и обратный случай пяти источников, каждый из которых вызывает двадцать раз в час, причем средняя длительность разговора в обоих случаях равна двум минутам. Если в распоряжении каждой из этих двух групп имеется по десять линий, то такая формула утверждала бы, что процент потерянных вызовов должен был бы быть одинаков в обоих случаях. Однако здравый смысл непосредственно говорит нам, что пять источников не могут загрузить более чем пять линий.

Таким образом во втором случае вообще не может наступить потери, тогда как в первом вполне возможно, что двадцать источников одновременно потребуют свыше десяти линий.

Допущение 5. *Либо каждая линия, котора может обслуживать источник S_1, доступна также и источнику S_2, либо ни одна линия не может обслуживать оба источника.*

Это допущение мы ввели уже в порядке пояснений в § 108. В телефонной практике имеются случаи (хорошим примером служит так называемое ступенчатое включение), когда оно нарушается.

Допущение 6. *Число занятых линий данной группы равно числу занятых членов соответствующей группы источников. Исключение может наступить только тогда, когда потерянные вызовы погашаются не моментально; в этих условиях число занятых источников может оказаться более числа занятых линий. Для наступления этого положения все линии должны быть заняты.*

Это допущение нарушается всякий раз, когда данная группа линий ведет лишь в одном из различных возможных направлений, к которым ее источники имеют доступ; ибо при этом, очевидно, может случиться, что ряд источников занят разговорами по другим проводам. В других областях техники это допущение нарушается реже.

§ 111. Задачи, связанные с потерями. В качестве иллюстрации введенных нами общих принципов мы выведем теперь шесть формул, каждая из которых дает вероятность того, что вызов будет потерян (встретит отказ). Эти формулы прекрасно показывают, сколь тщательно необходимо различать при постановке задачи оттенки, возникающие, с одной стороны, из трех слегка отличных друг от друга допущений, касающихся порядка возникновения вызовов, а с другой — из двух, касающихся того, что происходит при потере вызова. Три альтернативных допущения, которые касаются возникновения вызовов, мы формулируем так:

Допущение 7. *Вероятность того, что данный определенный источник произведет вызов в течение данного промежутка времени, одинакова для всех промежутков одинаковой длины, начинающихся в такие моменты, когда данный источник свободен. Эта вероятность ни в какой мере не зависит от состояния соответствующей группы линий.* (Допущение, альтернативное к допущениям 8 и 9.)

Допущение 8. *Вызовы, претендующие на данную группу линий, распределены случайно в индивидуальном и коллективном смысле* [1]. *Иными словами, вероятность того, что в течение данного промежутка времени данная группа линий получит вызов, не зависит ни от состояния группы линий, ни от состояния группы источников.* (Допущение, альтернативное к допущениям 7 и 9.)

Различие между этими допущениями можно показать так: если группа из десяти проводов обслуживает пятнадцать абонентов (и только

[1]) В связи с этим см. выноску по поводу определения „случайности в коллективном смысле“ в § 80.

их), то вряд ли допустимо будет утверждать, что вероятность вызова в течение данной секунды будет одна и та же как в случае, когда в начале этой секунды все провода заняты, так и в случае, когда они все свободны; ибо во втором случае возможных источников втрое больше, чем в первом. Сделать допущение такого рода означало бы признать, что отдельные абоненты склонны вызывать преимущественно тогда, когда вся группа проводов занята; но это требует, чтобы состояние группы было им заранее известно. Между тем именно это утверждение содержится в допущении 8. Хотя в свете этого резкого примера оно и кажется недопустимым, однако на самом деле оно часто бывает довольно близко к истине, если источниками вызовов служат не непосредственно абоненты, но промежуточные магистрали, и т. п.

В случае, когда источником является абонент, более правдоподобным будет допустить, что вероятность вызова в течение небольшого промежутка времени пропорциональна числу свободных абонентов; в нашем примере это означало бы, что вероятность вызова в три раза больше, когда все линии свободны, нежели тогда, когда все они заняты. Именно это утверждение содержится в допущении 7. Оно также иногда весьма близко к истине, даже если источниками не являются сами абоненты.

Допущение 9. *Вероятность того, что данная группа линий получит вызов от одного из своих источников, не зависит от состояния той или другой группы, за исключением случая, когда все источники заняты; в этом случае она равна нулю. Другими словами: вызовы распределяются случайно в индивидуальном и коллективном смысле, причем только не происходит вызовов в периоды, когда все источники заняты.* (Допущение, альтернативное к допущениям 7 и 8.)

Расхождения между выводами, к которым соответственно приводят допущения 7 и 8, настолько велики при практически встречающихся плотностях нагрузки, что пользование неверной формулой привело бы либо к недостаточному, либо к избыточному оборудованию. Выводы же из допущений 8 и 9, вообще говоря, столь близки друг к другу, что практически можно не делать между ними различия. Основное различие состоит в том, что, в то время как допущение 8 в крайних случаях требует линий больше, чем источников, допущение 9 свободно от этого затруднения. Однако такой вывод сам по себе настолько нелеп, что вряд ли кто-нибудь ему бы поверил; так что преимущество, которое имеет в этом отношении, на первый взгляд, допущение 9, сомнительно по своей ценности.

Допущения, относящиеся к тому, что происходит в случае потери вызова, возможны следующие:

Допущение 10. *Если вызов потерян благодаря отсутствию свободной линии, то сделавший его источник продолжает требовать обслуживания. Если в течение этого времени освобождается какая-либо линия, то данный источник захватывает ее и делает недоступной другим источникам до того самого момента времени, до которого длился бы разговор, если бы вызов был удачным (причем вызов все же считается потерянным).* (Допущение, альтернативное к допущению 11.)

Допущение 11. *Если вызов потерян благодаря недостаточности оборудования, то продолжительность разговора равна нулю.* (Допущение, альтернативное к допущению 10.)

Допущение 10, конечно, не соответствует тому, что на самом деле имеет место в телефонной практике. Если вызов не удался, и в особенности, если абонент об этом информирован, то он всего вероятнее немедленно повесит свою трубку. Существуют, однако, проблемы, к которым, повидимому, допущение 10 может быть применено со всею строгостью. Насколько мне известно, некоторые типы пожарно-сигнальных аппаратов устроены так, что механизм, посылающий тревожный сигнал, продолжает свои попытки сигнализации в течение строго фиксированного периода времени, независимо от того, имеется или нет свободный путь.

Чтобы избежать длинных повторений, мы будем в дальнейшем коротко характеризовать эти два допущения соответственно словами „потерянные вызовы сохраняются“ и „потерянные вызовы погашаются“ и каждый из этих двух случаев выделять особо, помечая это в заглавиях соответствующих параграфов [1]).

§ 112. Элементарные вероятности; потерянные вызовы сохраняются. В телефонной системе два наиболее важных события — начало вызова (разговора) и окончание его. Если вероятность наступления каждого из этих двух событий известна при всех обстоятельствах, то можно в точности определить необходимое количество оборудования. Поэтому мы начнем исследование с вычисления этих вероятностей и при этом в начале выберем допущения 7 и 10 в качестве одной из возможных пар альтернатив.

Пусть некоторый источник подвергается наблюдению в определенный момент времени и в течение примыкающего к этому моменту короткого промежутка dt. В начальный момент этого промежутка источник либо свободен, либо занят. Вероятность того, что он занят, мы условились обозначать через p; поэтому вероятность того, что он свободен есть $1-p$. Если источник занят в начале промежутка, то, для того чтобы в течение этого промежутка он мог сделать вызов, он должен закончить тот разговор, который он ведет, и начать новый. Вероятность того, что это случится, может быть сделана ничтожно малой, если выбрать промежуток dt достаточно коротким. Поэтому мы можем считать, что источник, который занят в начале промежутка dt, лишен возможности производить вызовы в течение этого промежутка.

Обозначим через $p_i(b)$ вероятность того, что источник, свободный в начале промежутка dt, окажется занятым в течение этого промежутка, и через $p(b)$ — вероятность того, что произведет вызов в течение промежутка dt источник, про состояние которого в начале этого промежутка ничего неизвестно. Тогда формула полной вероятности приводит к соотношению:

$$p(b)=(1-p)p_i(b)+p\cdot p_b(b). \tag{145}$$

[1]) Случай „потерянные вызовы сохраняются“ необходимо отличать от случая „задержанных вызовов“, ибо в последнем случае источник, дождавшись обслуживания, *только после этого начинает нужный для данного разговора промежуток времени.* Так обстояло бы дело в сигнализирующем механизме, если бы сигнал начинался лишь после освобождения пути.

Эта формула выражает тот очевидный факт, что вероятность произвести вызов в течение промежутка dt для каждого данного источника слагается из вероятности быть свободным и, будучи свободным, стать занятым и вероятности быть занятым и, будучи занятым, стать занятым вторично. Вторая из этих вероятностей может, как мы уже видели, рассматриваться как бесконечно малая высшего порядка в сравнении с dt; согласно результатам § 81, очевидно, вероятность того, что в течение промежутка dt выбранный наудачу источник произведет вызов, равна $p(b) = n\,dt$ с такою же степенью точности. Внося эти значения в уравнение (145), мы находим:

$$p_i(b) = \frac{n\,dt}{1-p}. \tag{146}$$

Это одна из элементарных вероятностей. Точно так же, пытаясь оценить вероятность *освобождения* некоторого источника в течение промежутка dt, мы приходим к соотношению:

$$p(i) = (1-p)\,p_i(i) + p \cdot p_b(i), \tag{147}$$

выражающему тот факт, что наш источник, чтобы получить освобождение в течение промежутка dt, должен либо быть свободным вначале, потом стать занятым и затем снова освободиться (соответствующая вероятность ничтожно мала), либо быть занятым вначале, а затем освободиться. Но, очевидно, источник столько же раз переходит от свободного состояния к занятому, сколько обратно, и потому, если ничего не известно про его состояние в начальный момент промежутка dt, то вероятность вызова в течение этого промежутка для него совпадает с вероятностью освобождения, т. е. $p(i) = p(b) = n\,dt$. Подставляя это в равенство (147) и пренебрегая величиной $p_i(i)$, находим:

$$p_b(i) = \frac{n\,dt}{p}. \tag{148}$$

Если вместо одного источника мы будем вести наблюдение над целой группой из λ источников, и если в начале промежутка j из этих источников были заняты, то вероятность того, что какой-нибудь из них освободится в течение промежутка dt, ровно в j раз больше соответствующей вероятности для одного источника. Точно так же, если мы примем допущение 7, то вероятность того, что какой-либо один из $\lambda - j$ свободных источников окажется *занятым*, ровно в $\lambda - j$ раз больше, чем для одного источника. Эти последние вероятности будут, следовательно [1]), соответственно равны

$$\frac{j\,n\,dt}{p} \tag{149}$$

и

$$\frac{(\lambda - j)\,n\,dt}{p}. \tag{150}$$

---

[1]) Здесь уместно сделать по поводу этих элементарных вероятностей два замечания отрицательного характера. Во-первых, переходя от (146) к (150), мы *не предполагали, что частота вызовов одна и та же для всех источников*. Правда, если j источников, занятых в начале промежутка dt, случайно окажутся

В обеих формулах p означает вероятность того, что источник окажется занятым в случайно выбранный момент наблюдения; очевидно, она равна математическому ожиданию той доли часа, в течение которой данный источник занят, т. е. равна nT (см. § 51—53).

§ 113. Применение принципа статистического равновесия; потерянные вызовы сохраняются. Теперь мы можем ввести условие, постулированное нами в допущении 1, и утверждать, что *вероятность* пребывания нашей системы в том или ином определенном состоянии будет одна и та же в начале и в конце промежутка dt.

Рассмотрим сначала момент, в котором все источники свободны. Вероятность такого состояния может быть при известных условиях очень мала, но во всяком случае она отлична от нуля, так что это состояние *может* осуществиться. Обозначим его вероятность через ${}^{\lambda}P'(0)$, где штрих символизирует собою условие „потерянные вызовы сохраняются", λ и 0 соответственно означают общее число источников и число занятых в данный момент. Так как имеется λ свободных источников, то вероятность того, что какой-нибудь из них окажется занятым в течение промежутка dt, равна $\frac{\lambda n\,dt}{1-p}$, а вероятность того, что ни один из них не будет занят в течение этого промежутка, выразится формулой:

$$1-\frac{\lambda n\,dt}{1-p}.$$

Отсюда вероятность того, что все источники окажутся свободными как в начальный, так и в конечный момент промежутка dt, равна

$$\left(1-\frac{\lambda n\,dt}{1-p}\right){}^{\lambda}P'(0).$$

Это не есть еще, однако, полная вероятность того, что все источники свободны в конце промежутка dt, потому что может случиться, что в начале этого интервала один из источников был занят, а к концу его освободился. Обозначая через ${}^{\lambda}P'(1)$ вероятность того, что занят в точности один источник, и замечая, что вероятность освобождения этого источника в течение промежутка dt равна, согласно

наиболее редко вызывающими, то вероятность того, что на протяжении промежутка dt последует вызов, будет больше того, что дает формула (150); если же они окажутся наиболее часто вызывающими, то наступит обратное явление. Однако для осуществления подобных случаев мы должны иметь специальные сведения относительно тех источников, которые в данный момент заняты, что, разумеется, недопустимо. Взяв надлежащим образом взвешенную среднюю этих вероятностей, мы получим ту же формулу (150).

Во вторую очередь заметим, что *мы нигде не предполагали все разговоры одинаково длительными.* Мы предполагали только то, что выражено в допущении 3, — что p одинаково для всех источников. Хотя весь проведенный нами вывод свободен от допущения одинаковой длительности всех разговоров, мы все же считаем нужным особо подчеркнуть это, потому что это допущение постоянно делается различными авторами, даже в тех случаях, когда их результаты с таким же успехом могли бы быть получены и без него.

формуле (148), $\frac{dt}{T}$, мы легко приходим к следующему заключению: вероятность того, что в точности один источник занят в начале промежутка dt и что он свободен в конце этого промежутка, равна

$$\frac{dt}{T}\,{}^{\lambda}P'(1).$$

В течение промежутка dt могут, теоретически говоря, произойти и другие события, имеющие своим последствием освобождение всех источников к концу этого промежутка. Может, например, случиться, что в начале промежутка заняты два источника, которые к концу его освобождаются. Но если вероятность освобождения одного определенного занятого источника равна $\frac{dt}{T}$, то вероятность освобождения *двух* равна квадрату этого числа, и потому будет бесконечно малой второго порядка относительно dt. Вообще, легко усмотреть, что вероятность любого индивидуального изменения в нашей системе есть малая первого порядка относительно dt, вероятность любых двух перемен есть малая второго порядка и т. д. Так как мы условились пренебрегать малыми порядка выше первого, то нам нет надобности рассматривать здесь те случаи, в которых происходит более одной перемены. Таким образом, с точностью до малых высшего порядка, вероятность того, что в конце промежутка dt все источники свободны, есть сумма двух вероятностей: 1) вероятности того, что все источники были свободны в начале dt и остались таковыми до конца, и 2) вероятности того, что в начале dt один из источников был занят, но к концу dt освободился. Эти две вероятности нами уже найдены. Таким образом вероятность того, что все источники свободны в конце промежутка dt, выразится формулой:

$$\left(1-\frac{\lambda n\,dt}{1-p}\right){}^{\lambda}P'(0)+\frac{dt}{T}\,{}^{\lambda}P'(1).$$

В силу принципа статистического равновесия она должна совпадать с ${}^{\lambda}P'(0)$. Это приводит к соотношению

$$\frac{\lambda n}{1-p}\,{}^{\lambda}P'(0)=\frac{1}{T}\,{}^{\lambda}P'(1). \tag{151}$$

Подобное же рассуждение может быть проведено и для случая, когда все источники заняты. Вероятность освобождения какого-нибудь одного из них равна $\frac{\lambda\,dt}{T}$, а следовательно, вероятность того, что ни один из них не освободится, равна $1-\frac{\lambda\,dt}{T}$. Поэтому, обозначая через ${}^{\lambda}P'(\lambda)$ вероятность того, что в начале dt все источники заняты, мы для вероятности того, что все источники заняты и в начале и в конце dt, получим формулу:

$$\left(1-\frac{\lambda\,dt}{T}\right){}^{\lambda}P'(\lambda). \tag{152}$$

Если мы хотим попрежнему ограничиться рассмотрением случаев, в которых за время dt происходит не более одной перемены, то нам остается исследовать еще только один возможный случай — именно тот, когда в начале промежутка dt заняты $\lambda - 1$ источников, а к концу этого промежутка становится занятым и последний. Вероятность этого случая, очевидно, составится как произведение ${}^{\lambda}P'(\lambda - 1)$ на вероятность $\frac{n\,dt}{1-p}$ того, что и последний источник окажется занятым к концу dt. Складывая это произведение с выражением (152) и замечая, что в силу принципа статистического равновесия сумма должна равняться ${}^{\lambda}P'(\lambda)$, мы находим:

$$\frac{n}{1-p}\,{}^{\lambda}P'(\lambda - 1) = \frac{\lambda}{T}\,{}^{\lambda}P'(\lambda). \tag{153}$$

В общем случае положение, при котором к концу промежутка dt равно j источников оказываются занятыми, может наступить тремя различными способами:

a) В начале промежутка имеется j занятых источников, в течение промежутка ни один источник не вызывает и не освобождается; вероятность этого равна

$$\left(1 - \frac{\lambda - j}{1-p}\,n\,dt - \frac{j}{T}\,dt\right){}^{\lambda}P'(j).$$

b) В начале промежутка имеется $j - 1$ занятых источников, в течение промежутка происходит один вызов; вероятность этого есть

$$\frac{\lambda - j + 1}{1-p}\,n\,dt\,{}^{\lambda}P'(j - 1).$$

c) В начале промежутка заняты $j + 1$ источников, в течение промежутка один из них освобождается; вероятность этого равна

$$\frac{j+1}{T}\,dt\,{}^{\lambda}P'(j + 1).$$

Сумма этих трех вероятностей дает нам вероятность того, что к концу промежутка dt окажется ровно j занятых источников.

Приравнивая эту вероятность к ${}^{\lambda}P'(j)$, мы получаем:

$$\left(\frac{\lambda - j + 1}{1-p}\,n\right){}^{\lambda}P'(j-1) - \left(\frac{\lambda - j}{1-p}\,n + \frac{j}{T}\right){}^{\lambda}P'(j) + \\ + \left(\frac{j+1}{T}\right){}^{\lambda}P'(j + 1) = 0. \tag{154}$$

§ 114. Формулы вероятностей, соответствующие допущениям 7 и 10. Уравнения (151), (153), (154) дают систему $\lambda + 1$ уравнений со столькими же неизвестными; все уравнения линейны и однородны; это показывает, что они не могут быть независимы, и действительно легко проверить, что, например, (151) есть следствие (153) и (154).

Таким образом эти уравнения дают возможность определить отношения неизвестных. Чтобы найти значения самих неизвестных, необходимо добавить очевидное неоднородное (нормирующее) соотношение:

$$\sum_{j=0}^{\lambda} {}^{\lambda}P'(j) = 1. \tag{155}$$

Решая эти уравнения с помощью детерминантов, мы находим [1]):

$${}^{\lambda}P'(j) = C_j^{\lambda} p^j (1-p)^{\lambda-j}. \tag{156}$$

Эта формула с абсолютной точностью дает вероятность того, что из общего числа λ источников ровно j окажутся занятыми в произвольно выбранный момент наблюдения, при условии справедливости допущений 7 и 10. Это есть, таким образом, вероятность того, что ровно j абонентов одновременно пожелают пользоваться данной группой линий.

Полученная формула представляет собою обычный биномиальный закон, дающий вероятность того, что событие наступит j раз при λ независимых испытаниях, если вероятность его в отдельном испытании равна p. Мы могли бы всю задачу поставить так, что ответ стал бы очевидным с самого начала; мы выбрали более длинный путь потому, что он яснее подчеркивает положенные в основание гипотезы и не оставляет никаких сомнений относительно точного смысла полученного ответа.

Чтобы найти вероятность потери данного вызова, мы воспользуемся следующим рассуждением. Выбирая произвольный промежуток времени и наблюдая нашу систему в течение этого промежутка, мы встречаемся с двумя возможностями: либо вызов произойдет, либо нет. Если он произойдет, то он либо будет потерян, либо нет; но если наш промежуток был выбран случайно, без учета состояния системы, то „вероятность того, что вызов будет потерян, если он произойдет", есть в точности то, что мы хотим выразить более кратко словами „вероятность потери".

Но согласно этому определению искомая вероятность есть условная вероятность; к ней можно применить формулу (20), приписывая символу AB значение „вызов происходит и претерпевает потерю", символу A — „происходит вызов", и символу B — „он претерпевает потерю".

Что касается вероятности $P(AB)$ того, что вызов происходит и претерпевает потерю, то она равна

$$\sum_{j=\nu}^{\lambda} {}^{\lambda}P'(j)\,\frac{(\lambda-j)\,n\,dt}{1-p} = \lambda n\,dt \sum_{j=\nu}^{\lambda-1} C_j^{\lambda-1} p^j (1-p)^{\lambda-j-1}, \tag{157}$$

ибо если более нежели ν источников заняты в течение нашего промежутка dt, и при этом происходит вызов, то он необходимо претерпе-

[1]) Другой способ решения состоит в следующем: из (151) выражаем ${}^{\lambda}P'(1)$ через ${}^{\lambda}P'(0)$, затем, полагая в (154) $j=1$, выражаем ${}^{\lambda}P'(2)$ через ${}^{\lambda}P'(0)$; далее, полагая в (154) $j=2$, выражаем $P'(3)$ через ${}^{\lambda}P'(0)$ и т. д. После того как все ${}^{\lambda}P'(j)$ выражены таким образом, ${}^{\lambda}P'(0)$ может быть найдено из (155).

вает потерю. С другой стороны, $P(A)$, очевидно, равно $\lambda n\,dt$. Подставляя эти значения в формулу (20), мы после небольших преобразований найдем:

$$P(B) \doteq {}^{\lambda}\Pi'_{\nu} = \left(\frac{\lambda-\varepsilon}{\lambda}\right)^{\lambda-1} \sum_{j=\nu}^{\lambda-1} C_j^{\lambda-1} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\right)^j, \tag{158}$$

где $\varepsilon = \lambda p$ есть математическое ожидание плотности нагрузки в данной группе.

§ 115. Формулы вероятностей, соответствующие допущениям 8 и 10. Формулы (156) и (158) более сложны, чем это является необходимым для многих целей, ибо часто общая нагрузка происходит от очень большого числа источников, каждый из которых занят лишь в течение небольшой доли рассматриваемого времени. В таких случаях число свободных источников — а потому и вероятность нового вызова — практически не меняется с течением времени, и мы можем надеяться получить более простые формулы. В самом деле, заставляя λ безгранично возрастать и сохраняя ν и ε неизменными, мы в пределе получаем вместо формулы (158) формулу:

$${}^{\infty}\Pi'_{\nu} = e^{-\varepsilon} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!}. \tag{159}$$

Эту формулу часто применяют для расчета числа соединительных линий.

Соответствующая формула для вероятности того, что число занятых источников в точности равно j, получается предельным переходом из формулы (156); в результате, как, впрочем, мы видели уже в § 79, мы находим:

$${}^{\infty}P'(j) = \frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!}, \tag{160}$$

т. е. известную нам формулу Пуассона. Способ, которым была выведена формула (159), дает повод предположить, что формула эта верна лишь в тех случаях, когда число источников значительно превосходит число доступных им линий. На самом деле это так и есть, если только каждый источник не зависит от остальных, как этого требует допущение 7. Однако область применения формулы (159) в действительности гораздо шире, как это можно показать, давая ей несколько иное обоснование.

Так как $\varepsilon = \lambda n T = \lambda p$, то при безграничном возрастании λ и неизменном ε величина $p = nT$ должна убывать по закону $nT = p = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Подставляя это выражение в формулу (150), мы находим, что вероятность вызова при j занятых источниках равна

$$\left(1 - \frac{j}{\lambda}\right) \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}} \frac{dt}{T},$$

т. е. стремится к $\frac{\varepsilon\,dt}{T}$, когда λ безгранично возрастает. Так как этот предел не зависит от j, то *формула* (159) *соответствует допущению* 8, *т. е. тому случаю, когда вызовы распределяются случайно в индивидуальном и коллективном смысле.*

С практической точки зрения допущение 8 несовместимо с конечным числом источников, ибо на практике обязательно должно выполняться требование, что в случае, когда все источники заняты, вероятность нового вызова равна нулю; таким образом эта вероятность непременно должна зависеть от числа занятых источников.

Теоретически это практическое затруднение находит себе отражение в том, что совокупность допущений 8 и 10 несовместима с допущением 4, если только число источников конечно. Поэтому в пределах этого параграфа мы должны отказаться от допущения 4. Этого затруднения не будет, когда мы станем комбинировать допущения 8 и 11, если только число линий не окажется по меньшей мере столь же большим, как число источников.

С практической точки зрения эти трудности в согласовании наших допущений не имеют существенного значения, если только не очень велика вероятность того, что все источники окажутся занятыми одновременно. Более того, в действительности формулы (159) и (160) оказываются чрезвычайно ценными во многих случаях, когда число источников превышает число линий на достаточно большую величину.

§ 116. Формулы вероятностей, соответствующие допущениям 9 и 10. Практической аналогией допущения 8 является случай конечного числа источников в допущении 9, которое утверждает, что, пока имеются свободные источники, вероятность нового вызова не зависит от их числа, но что, как только все источники оказываются занятыми, эта вероятность сразу падает до нуля. Если к новой совокупности допущений применить те же выкладки, которые привели нас к формуле (158), то мы получим:

$$P'(j)=\frac{\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\lambda}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}} \tag{161}$$

и

$$\Pi'_\nu=\frac{\sum\limits_{j=\nu}^{\lambda-1}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\lambda}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}. \tag{162}$$

Можно показать, что в большинстве случаев эти формулы приводят приблизительно к тем же значениям, что (159) и (160). Обычно практические условия требуют, чтобы вероятность потери была мала. Это означает, разумеется, что слагаемые числителя формулы (162) должны быть малы, и легко убедиться, что, если это выполнено, то разность между знаменателем и подобною же суммою, распространенною до бесконечности, ничтожно мала; но последнее выражение есть e^{ε}. Подставляя вместо знаменателя это приближенное значение, мы тем самым заменяем формулу (161) формулой (160).

Подобным же образом, если λ значительно превосходит ν, то разность между числителем формулы (162) и подобною же суммою, распространенной от ν до бесконечности, становится ничтожно малой, и формула (162) практически совпадает с формулой (159). Иначе говоря, в практических условиях формулы (161) и (160) существенным образом совпадают, а формула (162) приближенно совпадает с (159), за исключением случая, когда число источников почти равно числу линий. В § 122 и 123 мы дадим количественное подтверждение этим замечаниям, которые здесь носят чисто качественный характер.

Единственное существенное различие между формулами (162) и (159) состоит в том, что выражение (159) совсем не зависит от λ и потому дает положительную вероятность потери даже в том случае, когда число линий больше числа источников — нелепый вывод, к которому не приводит формула (162).

Эта нелепость есть только практическое проявление замечания, сделанного нами в § 115: что допущение 8 не может быть в точности справедливым, если число источников конечно.

Настоящий параграф, так же как и два предыдущих, содержит формулы, соответствующие случаю „потерянные вызовы сохраняются", как в предположении взаимной независимости источников, так и в предположении такой их зависимости, в силу которой вероятность вызова не зависит от числа занятых источников. Теперь нам необходимо получить аналогичные результаты для случая, когда „потерянные вызовы погашаются".

§ 117. Элементарные вероятности; потерянные вызовы погашаются. Внимательное рассмотрение вывода формулы (146) показывает, что она сохраняет силу и в предположении немедленного погашения потерянных вызовов. Но величина p при этом несколько изменяется благодаря тому, что неудачные вызовы ничего не прибавляют к периоду занятости источников. Легко видеть, что вместо $p = nT$ мы теперь должны иметь $p = (1 - \Pi)\, nT$.

Напротив, при выводе второй элементарной вероятности мы теперь уже не имеем права пренебрегать величиною $p_i(i)$ в формуле (147): эта величина, выражающая вероятность того, что источник, в данный момент свободный, в течение промежутка dt успеет сделать вызов и снова освободиться, на этот раз уже не будет бесконечно малой высшего порядка; дело в том, что теперь нашему источнику достаточно сделать вызов в неудачный момент (когда заняты все провода), чтобы освободиться *моментально*. Величина $p_i(i)$ выражает теперь вероятность того, что в течение промежутка dt все провода окажутся занятыми, и что вместе с тем наш источник, который свободен, произведет вызов. Мы находим:

$$p_i(i) = \Pi \frac{n\, dt}{1 - p}.$$

Вставляя это в (147), мы получаем:

$$p_b(i) = \frac{(1 - \Pi)\, n\, dt}{p};$$

замечая же, что теперь $p = (1 - \Pi)\, nT$, мы снова приходим к прежнему выражению $\frac{dt}{T}$.

Непосредственно очевидно, что после того как вызов оказался удачным и соединение установлено, дальнейшая судьба разговора ни в какой мере не зависит от могущих последовать потерянных вызовов. В частности, вероятность окончания разговора и математическое ожидание его продолжительности не изменяются, что бы ни происходило с неудачными вызовами. Поэтому представляется очевидным, что если вероятность освобождения занятого источника выражена только через величины dt и T, то полученная формула должна быть справедливой независимо от того, сохраняются или погашаются потерянные вызовы. Этими соображениями можно было бы установить справедливость формулы (148) даже в том случае, если бы первоначальный вывод этой формулы опирался на допущение 10.

§ 118. Формулы вероятностей, соответствующие допущениям 7 и 11. Заметив, что обе элементарные вероятности выражаются теми же формулами, что и раньше, мы можем немедленно заключить отсюда, что форма уравнений (151) и (154) также остается неизмененной. Это заключение подтверждается и независимым исследованием.

Однако в положении вещей имеется следующее различие: в то время как прежде наибольшее возможное число одновременно занятых источников равнялось λ, теперь оно, очевидно, равно ν. Поэтому уравнения (153) и (155) подлежат пересмотру.

Пусть ${}^{\lambda}P''(\nu)$ означает вероятность того, что ровно ν линий занято одновременно, причем λ и ν имеют прежнее значение, а двойной штрих символизирует наш второй случай (т. е. немедленное погашение потерянных вызовов). Если мы требуем, чтобы в этом состоянии система оказалась в конце короткого промежутка dt, то для этого она должна либо быть в этом состоянии в начале dt и остаться в нем до конца dt, либо иметь в начале dt одну свободную линию, которая к концу dt также оказывается занятою. Учитывая обе возможности и применяя принцип статистического равновесия так же, как мы это делали раньше, мы легко убеждаемся, что уравнение (153) должно быть заменено уравнением:

$$\frac{\nu^{\nu}}{T} P''(\nu) = \frac{\lambda - \nu + 1}{1 - p}\, n\, {}^{\lambda}P''(\nu - 1).$$

С другой стороны, очевидно, что на место (155) теперь должно стать уравнение

$$\sum_{j=0}^{\nu} {}^{\lambda}P''(j) = 1.$$

Получив таким образом нужную нам систему уравнений, мы легко решаем ее с помощью детерминантов и получаем:

$$ {}^{\lambda}P''(j)=\frac{C_j^{\lambda}\left(\frac{nT}{1-p}\right)^j}{\sum_{j=0}^{\nu} C_j^{\lambda}\left(\frac{nT}{1-p}\right)^j}. \tag{163} $$

Желательно выразить эту вероятность через плотность использования данной группы; эта плотность, как и прежде, равна $\lambda nT=\varepsilon$, откуда

$$ p=\frac{(1-\Pi)\,\varepsilon}{\lambda}. $$

Таким образом формула (163) принимает вид:

$$ {}^{\lambda}P''(j)=\frac{C_j^{\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\,\varepsilon}\right)^j}{\sum_{j=0}^{\nu} C_j^{\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\,\varepsilon}\right)^j}. \tag{164} $$

Вероятность потери получается отсюда в точности тем же путем, как в § 114. Вероятность того, что в течение промежутка dt произойдет вызов, попрежнему равна $\lambda n\,dt$. Вероятность же потерянного вызова теперь выражается значительно проще, ибо теперь более чем ν источников не могут быть одновременно занятыми. Она равна

$$ {}^{\lambda}P''(\nu)\,\frac{\lambda-\nu}{1-p}\,n\,dt. $$

Отношение этих двух величин и есть вероятность потери произведенного вызова; очевидно, она равна

$$ {}^{\lambda}\Pi''_{\nu}=\left(\frac{\lambda-\nu}{\lambda}\right)\frac{{}^{\lambda}P''(\nu)}{1-p}=\frac{1}{1-p}\,\frac{C_{\nu}^{\lambda-1}\left(\frac{nT}{1-p}\right)^{\nu}}{\sum_{j=0}^{\nu} C_j^{\lambda}\left(\frac{nT}{1-p}\right)^j}. $$

Другой вид этой формулы, более удобный для вычислений, есть

$$ {}^{\lambda}\Pi''_{\nu}=\frac{C_{\nu}^{\lambda-1}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\,\varepsilon}\right)^{\nu}}{\sum_{j=0}^{\nu} C_j^{\lambda-1}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\,\varepsilon}\right)^j}. \tag{165} $$

§ 119. Формулы вероятностей, соответствующие допущениям 8 и 11. Формулы (164) и (165) аналогичны формулам (156) и (158). Из них могут быть выведены новые формулы, пригодные для случаев, когда источники взаимно независимы и число их значительно превосходит число линий или когда источники, хотя бы и не очень многочисленные, так между собою связаны, что, по мере увеличения числа занятых среди них, вероятность вызова со стороны оставшихся свободными растет как раз в таком отношении, что этот рост нейтрализует собою уменьшение числа. Это можно сделать, заставляя λ безгранично возрастать в формулах (164) и (165), точь-в-точь как мы это делали в § 115. Таким путем получаются формулы:

$$
{}_{\infty}P''(j) = \frac{\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu} \dfrac{\varepsilon^j}{j!}} \tag{166}
$$

и

$$
{}_{\infty}\Pi''_{\nu} = \frac{\dfrac{\varepsilon^\nu}{\nu!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu} \dfrac{\varepsilon^j}{j!}}, \tag{167}
$$

аналогичные формулам (159) и (160). Как в свое время было замечено, допущение (8) несостоятельно при условии, что все источники могут быть одновременно заняты, ибо в этом случае не остается источников, которые могли бы производить вызовы. Это сказывается само собою в том, что формула (167) дает положительную вероятность потери даже при $\lambda < \nu$. По этой причине при выводе формулы (167) в случае $\lambda \leqslant \nu$ мы вынуждены отказаться от допущения 4.

§ 120. Формулы вероятностей, соответствующих допущениям 9 и 11. Если $\lambda < \nu$, то в формулах (166) и (167) не произойдет никаких изменений при переходе от допущения 8 к допущению 9. Но если $\lambda \leqslant \nu$, то эти формулы перейдут в следующие:

$$
P''(j) = \frac{\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu} \dfrac{\varepsilon^j}{j!}} \tag{168}
$$

и

$$
\Pi''_{\nu} = 0. \tag{169}
$$

Эти формулы тождественны с формулами (161) и (162)[1]; это и можно было предвидеть, так как в случае, когда потери невозможны, формулы не могут, понятно, зависеть от судьбы потерянных вызовов.

---

[1]) При $\lambda \leqslant \nu$ верхний индекс суммирования в числителе формулы (162) меньше нижнего, так что формула в том виде, как она помещена в § 116, теряет смысл. Ее истинное значение, однако, равно нулю, как это отмечено дальше в табл. XXX.

§ 121. Сводка формул. Теперь мы получили формулы для каждой из шести возможных пар допущений, и желательно сопоставить их для сравнения и для справок. Это мы делаем в табл. XXIX и XXX.

Таблица XXIX

Схема обозначений

Допущения, касающиеся порядка возникновения вызовов	Допущения, касающиеся судьбы потерянных вызовов: Потерянные вызовы погашаются (допущение 11)	Допущения, касающиеся судьбы потерянных вызовов: Потерянные вызовы сохраняются (допущение 10)
Источники взаимно независимы (допущение 7)	I ${}^{\lambda}P''(j)$ ${}^{\lambda}\Pi''_{\nu}$	II ${}^{\lambda}P'(j)$ ${}^{\lambda}\Pi'_{\nu}$
Вызовы распределяются случайно в индивидуальном и коллективном смысле (допущение 8)	III ${}^{\infty}P''(j)$ ${}^{\infty}\Pi''_{\nu}$	IV ${}^{\infty}P'(j)$ ${}^{\infty}\Pi'_{\nu}$
То же с добавлением, что вызовы не происходят, когда все источники заняты (допущение 9)	V $P''(j)$ Π''_{ν}	VI $P'(j)$ Π'_{ν}

Примечание. Римские цифры приведены для справок и связаны с графическими изображениями в дальнейшем.

Формулы I, III и IV соответственно связаны с именами Энгсета, Эрланга и Пуассона.

Таблица XXIX схематически показывает взаимоотношение между различными формулами и теми комбинациями допущений, на которых они основаны; таблицы же XXX и XXXI дают самые формулы.

Когда мы на последних страницах находили значения этих вероятностей, у нас не было необходимости явно выписывать те обстоятельства, при наличии которых вероятности обращаются в нуль; это было ясно на основании контекста. Но в таблицах эти условия всякий раз обозначены, чтобы избежать каких-либо неясностей.

§ 122. Численное сравнение формул; зависимость вероятности потери от числа источников при неизменной плотности нагрузки. Чтобы составить себе некоторое представление о величине и характере взаимных различий этих формул, желательно привести несколько примеров, иллюстрирующих их наиболее существенные черты.

Таблица XXX

Вероятности потерь

Допущения [1]	Ф О Р М У Л Ы		Номера в тексте
7 и 11	${}^{\lambda}\Pi''_{\nu}=0$	$\lambda\leqslant\nu$	(165)
	${}^{\lambda}\Pi''_{\nu}=\dfrac{C_{\nu}^{\lambda-1}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\varepsilon}\right)^{\nu}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu}C_{j}^{\lambda-1}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-(1-\Pi)\varepsilon}\right)^{j}}$	$\lambda>\nu$	
7 и 10	${}^{\lambda}\Pi'_{\nu}=0$	$\lambda\leqslant\nu$	(158)
	${}^{\lambda}\Pi'_{\nu}=\left(\dfrac{\lambda-\varepsilon}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\sum\limits_{j=\nu}^{\lambda-1}C_{j}^{\lambda-1}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\right)^{j}$	$\lambda>\nu$	
8 и 11 (4 недействительно при $\lambda\leqslant\nu$)	${}^{\infty}\Pi''_{\nu}=\dfrac{\dfrac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu}\dfrac{\varepsilon^{j}}{j!}}$	$\lambda\geqslant0$	(167)
8 и 10 (4 недействительно при конечном λ)	${}^{\infty}\Pi'_{\nu}=e^{-\varepsilon}\sum\limits_{j=\nu}^{\infty}\dfrac{\varepsilon^{j}}{j!}$	$\lambda\geqslant0$	(159)
9 и 11	$\Pi''_{\nu}=0$	$\lambda\leqslant0$	(169)
	$\Pi''_{\nu}={}^{\infty}\Pi''_{\nu}$	$\lambda>\nu$	
9 и 10	$\Pi'_{\nu}=0$	$\lambda\leqslant\nu$	(162)
	$\Pi'_{\nu}=\dfrac{\sum\limits_{j=\nu}^{\lambda-1}\dfrac{\varepsilon^{j}}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\lambda}\dfrac{\varepsilon^{j}}{j!}}$	$\lambda>\nu$	

[1]) Допущения 1—6 принимаются во всех случаях, где нет специальных оговорок по этому поводу.

Таблица XXXI

Вероятности числа j занятых источников

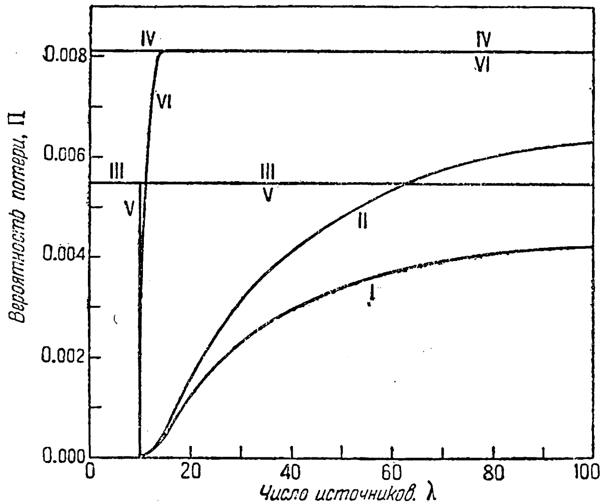
Допущения [1])	Формулы		Номера в тексте
7 и 11	${}^{\lambda}P''(j)=\dfrac{C_j^{\lambda}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-(1-\text{II})\varepsilon}\right)^j}{\sum\limits_{j=0}^{\nu} C_j^{\lambda}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-(1-\text{II})\varepsilon}\right)^j}$ ${}^{\lambda}P''(j)=0$	$j\leqslant\nu$ $j>\nu$	(164)
7 и 10	${}^{\lambda}P'(j)=\left(\dfrac{\lambda-\varepsilon}{\lambda}\right)^{\lambda} C_j^{\lambda}\left(\dfrac{\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\right)^j$	$j\geqslant 0$	(156)
8 и 11 (4 недействительно при $\lambda<\nu$)	${}^{\infty}P''(j)=\dfrac{\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}$ ${}^{\infty}P''(j)=0$	$j\leqslant\nu$ $j>\nu$	(166)
8 и 10 (4 недействительно при конечном λ)	${}^{\infty}P'(j)=e^{-\varepsilon}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}$	$j\geqslant 0$	(160)
9 и 11	$P''(j)=P'(j)$ $P''(j)={}^{\infty}P''(j)$	$\lambda\leqslant\nu$ $\lambda\geqslant\nu$	(168)
9 и 10	$P'(j)=\dfrac{\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\lambda}\dfrac{\varepsilon^j}{j!}}$ $P'(j)=0$	$j\leqslant\lambda$ $j>\lambda$	(161)

[1]) Допущения 1—6 принимаются во всех случаях, где нет специальных оговорок по этому поводу.

Рассмотрим в первую очередь, в какой мере они зависят от числа источников. Для иллюстрации возьмем группу из десяти линий [1]) и допустим, что эта группа получает свою нагрузку иногда от небольшого числа весьма занятых, иногда же от большого числа сравнительно свободных источников, но всегда так, что плотность использования ее равна 4. Соответствующие вероятности потерь как функции числа источников λ изображены на черт. 36, причем каждая кривая соответствует одной из формул табл. XXX.

Две формулы, соответствующие допущению взаимной независимости источников (верхний ряд схемы табл. XXIX), дают кривые *I* и *II*. Они совпадают с осью λ, покуда $\lambda \leqslant \nu$, а вправо от этой точки постепенно возрастают.

Формулы, соответствующие допущению 8, дают горизонтальные прямые, как и следовало ожидать ввиду того, что самое допущение требует независимости от λ. Эти прямые обозначены цифрами *III* и *IV*. Они служат асимптотами соответственно для кривых *I* и *II*; это очевидно из того, что формулы (167) и (159) соответственно получаются в пределе из формул (165) и (158). Они не приближаются к оси λ даже при $\lambda < \nu$, что является только графическим выражением уже установленного нами факта: они дают положительную вероятность потери даже в том случае, когда число линий превосходит число источников.



Черт. 36.

Линии *V* и *VI*, соответствующие третьему ряду табл. XXIX, занимают промежуточное положение. Они совпадают с осью λ при $\lambda < \nu$ и таким образом избегают нелепого результата, к которому приводят формулы (167) и (159). Разумеется, целью той модификации допущения 8, которую составляет допущение 9, и было как раз избежание этой нелепости.

Для всех $\lambda > \nu$ кривая *V* совпадает с кривою *III*. Это, разумеется, так и должно быть, потому что в этом случае одновременная занятость

[1]) Следует обратить внимание на то, что в настоящем и ближайших параграфах числовые данные подобраны так, чтобы различия между формулами получились вполне заметные. Но ошибочно было бы заключить, что эти различия всегда имеют подобные размеры. В действительности они могут быть и больше и меньше. В качестве приблизительного общего правила — хотя это правило, подобно многим другим, имеет свои исключения — можно установить, что там, где группы линий многочисленны, различия становятся меньше тех, с какими мы встречаемся здесь, и обратно.

всех источников невозможна, и допущение 9 ничем не отличается от допущения 8. С другой стороны, кривая *VI*, хотя и поднимается круче, чем кривая *II*, все же не делает внезапного скачка от нуля до своей максимальной высоты, но приближается к последней асимптотически.

Причина этого лежит в том, что в случае, когда потерянные вызовы сохраняются, число одновременно занятых источников может быть больше ν. Когда это так, то прежде чем сможет последовать удачный вызов, должны освободиться два или большее число источников. Таким образом неудачные вызовы продолжают „нависать" и тем уменьшают шансы последующих вызовов. Этот эффект „нависания" все усиливается по мере увеличения числа источников. Разумеется, именно этот эффект является причиною того, что все кривые, соответствующие второму столбцу табл. XXIX, дают бо́льшие вероятности потерь, чем аналогичные кривые, относящиеся к первому столбцу.

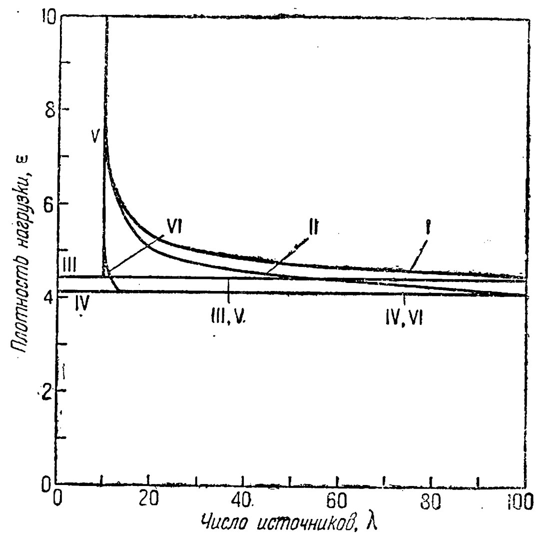
На первый взгляд может вызвать удивление, что этот эффект „нависания" всегда дает столь большое увеличение числа потерянных вызовов, какое должно иметь место согласно имеющейся разнице кривых *III* и *IV*. В самом деле, кривая *III* показывает, что по погашении потерянных вызовов теряется только около $0{,}5\%$ вызовов; а на основании кривой *IV* мы видим, что при сохранении потерянных вызовов эта доля может увеличиться на 50%. В связи с этим необходимо напомнить, что вызовы теряются только тогда, если они происходят в период уже имеющейся скученности системы. Поэтому, если только они быстро не ликвидируются, то весьма небольшое число их может значительно удлинить период скученности и соответственно увеличить долю потерянных вызовов.

Непосредственно очевидно, что эффект „нависания" отсутствует в случае, когда $\lambda = \nu + 1$. В этом случае модифицированное допущение 8 должно дать одни и те же результаты, независимо от того, сохраняются или погашаются потерянные вызовы. Другим словами, кривые *III*, *V* и *VI* должны пересекаться при $\lambda = 11$. Что это действительно так, можно усмотреть и из чертежа, и из того, что при этом формулы (167), (169) и (162) совпадают.

§ 123. Численное сравнение формул; зависимость плотности использования от числа источников, при неизменной вероятности потери. Кривые черт. 36 весьма наглядно показывают наиболее существенные различия, к которым приводят наши различные комбинации допущений. Однако им можно сделать тот упрек, что они дают преувеличенное представление о практическом значении этих различий. Обычно в роятностные формулы используются не для того (как это делается здесь), чтобы вычислять вероятность потери, соответствующую заранее заданной интенсивности использования, но как раз для обратной задачи: найти наибольшую возможную плотность нагрузки, зная допустимый процент потерь. Так как небольшие изменения в плотности использования вызывают значительные изменения числа потерь, то формулы, дававшие заметно расходящиеся результаты при первом способе использования, могут неожиданно хорошо согласоваться при втором способе.

Для того чтобы не оставить у читателя этих ошибочных представлений, мы приводим на черт. 37 кривые, показывающие, как зависит от числа источников плотность нагрузки, если вероятность потери составляет $1^0/_0$. Как и прежде, предполагается, что имеются 10 линий, а число источников изменяется от 0 до 100. Различные кривые соответствуют шести формулам табл. XXX.

Формулы (167) и (159) и здесь приводят к прямым *III* и *IV*, не нарушающим своего течения даже при $\lambda < 10$. Формула (169) приводит к кривой *V*, совпадающей с *III* при $\lambda > 10$. Подобным же образом формула (162) приводит к кривой, пересекающей кривые *III* и *V* при $\lambda = 11$, и для всех больших значений λ практически совпадает с кривой *IV*. Вообще с практической точки зрения все эти четыре кривые достаточно близки друг к другу для того, чтобы любая из них могла заменять любую другую.



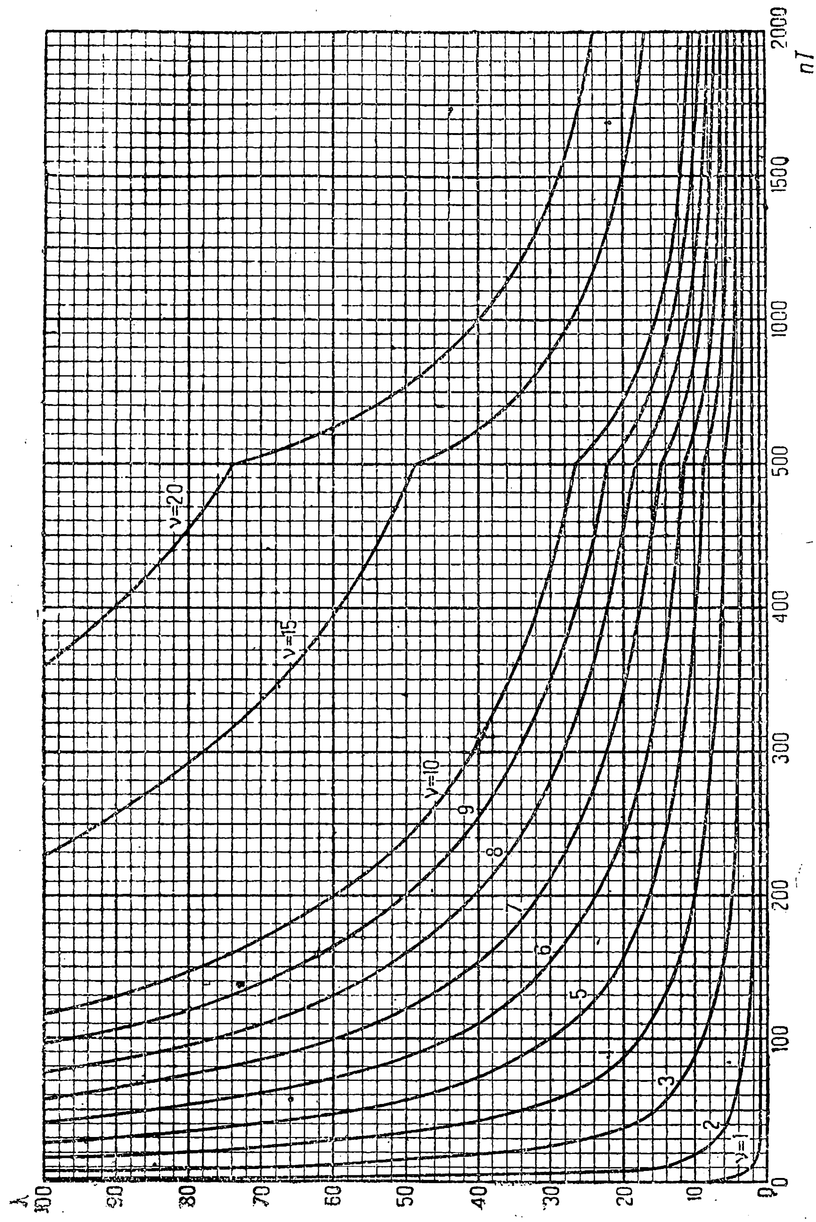
Черт. 37.

Но кривые *I* и *II*, которые получены из формул (165) и (158) и поэтому соответствуют первому ряду табл. XXIX, отличаются от других кривых на величины, имеющие уже техническое значение. Так, например, в случае 15 источников эти кривые допускают использование, примерно на $20^0/_0$ большее, чем остальные формулы.

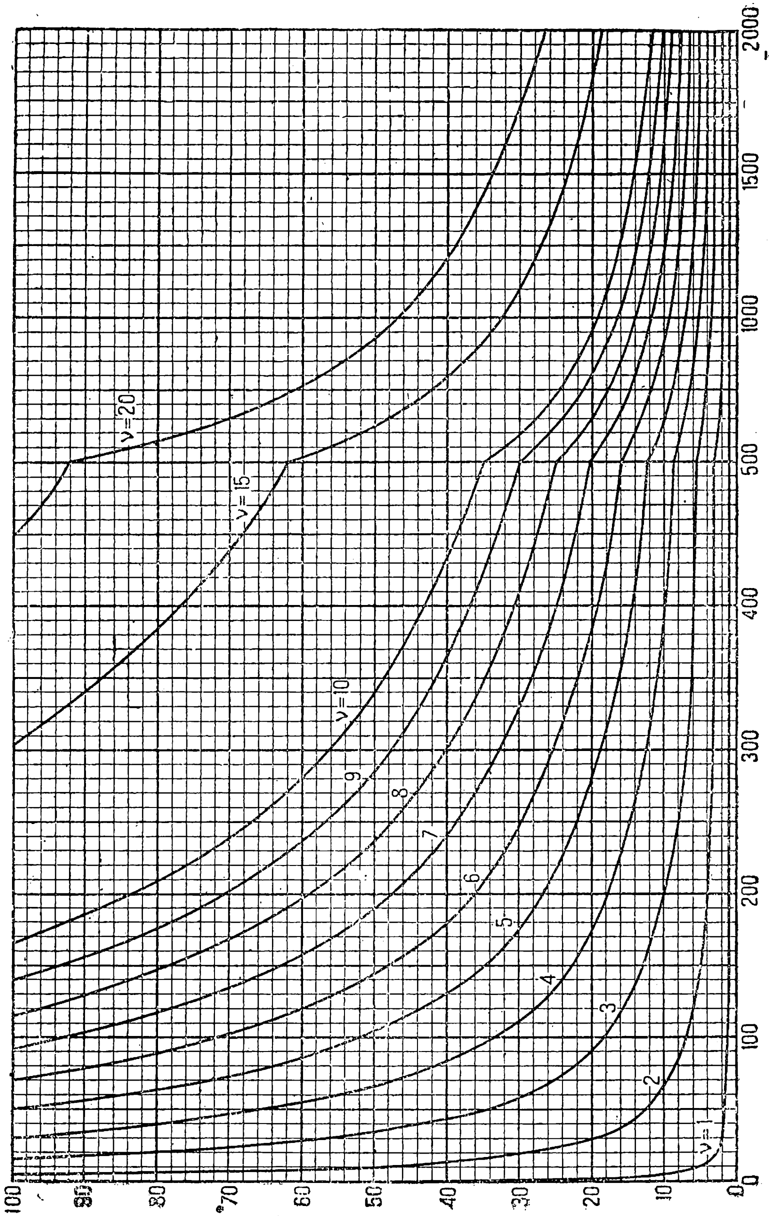
Другими словами, переходя от допущения „потерянные вызовы сохраняются“ к допущению „потерянные вызовы погашаются“, или от допущения 8 к его модифицированной форме 9, мы вводим в наши результаты такие изменения, которые не имеют большого практического значения. *Единственное различие, имеющее существенное практическое значение, происходит от пользования, с одной стороны, допущением взаимной независимости источников (допущение 7), а с другой — допущением, что вероятность возникновения нового вызова в течение небольшого промежутка наблюдения не зависит от того состояния, в котором находится система в начале этого промежутка (допущение 8 или 9).*

§ 124. Расчетные диаграммы.

Так как все формулы табл. XXX сами собою разделяются на два класса таким образом, что формулы одного и того же класса дают весьма близкие результаты, в то время как формулы различных классов не столь хорошо согласуются между собою, то как для целей дальнейшего изучения, так и для большинства


λ
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
100
200
300
400
500
1000
1500
2000
nT
ν=20
ν=15
ν=10
9
8
7
6
5
4
3
2
ν=1

Черт. 38.



ν=20
ν=15
ν=10
9
8
7
6
5
4
3
2
ν=1
0
100
200
300
400
500
1000
1500
2000
nT
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Черт. 39.

практических приложений достаточно сосредоточить наше внимание на одной типической паре. Мы выбираем пару, соответствующую крайним условиям, изображенным кривыми *I* и *IV* на черт. 36 и 37. Все другие формулы дают результаты промежуточные между этими двумя, и притом примыкают к какой-либо одной из них настолько близко, что отклонениями этими можно, вообще говоря, пренебрегать.

Черт. 38 представляет собою рабочую диаграмму, рассчитанную согласно уравнению (165). Весь чертеж составлен применительно к случаю одной потери на тысячу вызовов. Каждая кривая соответствует группе проводов, численность которой указана в виде пометки. По вертикальному направлению отложены числа источников, по горизонтальному — значения величины 3600ε (произведения частоты n вызовов, рассчитанной на один час, на среднюю длительность T разговора, выраженную в секундах [1]).

В качестве иллюстрации применения этой диаграммы допустим, что с группой из десяти линий желательно соединить группу источников, каждый из которых в среднем производит в час три вызова продолжительностью в 100 сек. Тогда $nT = 300$. Обращаясь к диаграмме, мы находим для кривой $\nu = 10$ соответствующую ординату $\lambda = 41$. Таким образом наша группа из 10 линий может обслужить группу в 41 источник.

В качестве второго примера допустим, что 200 источников надо обслужить коммутаторами, каждый из которых имеет в своем распоряжении 10 линий. Допустим, что в среднем каждый из этих источников производит в час 2 вызова средней продолжительности 140 сек. и что ставится вопрос о том, каким образом надлежит сгруппировать эти источники. Здесь $nT = 280$. Обращаясь к диаграмме, мы находим, что каждая группа из 10 линий при этих условиях может обслужить 43 источника. Таким образом требуются 4 полных группы линий. Тогда остаются 28 источников, которые могут быть обслужены добавочной группой. Точка диаграммы с координатами $\lambda = 28$ и $3600\varepsilon = 280$ лежит между кривыми с пометками 7 и 8. Таким образом для добавочной группы нам достаточно иметь 8 линий. Группировка источников поэтому должна быть следующая: 4 группы по 43 и 1 группа в 28 источников; соответственно мы имеем 4 группы по 10 линий и одну группу в 8 линий, так что общее число линий составляет 48.

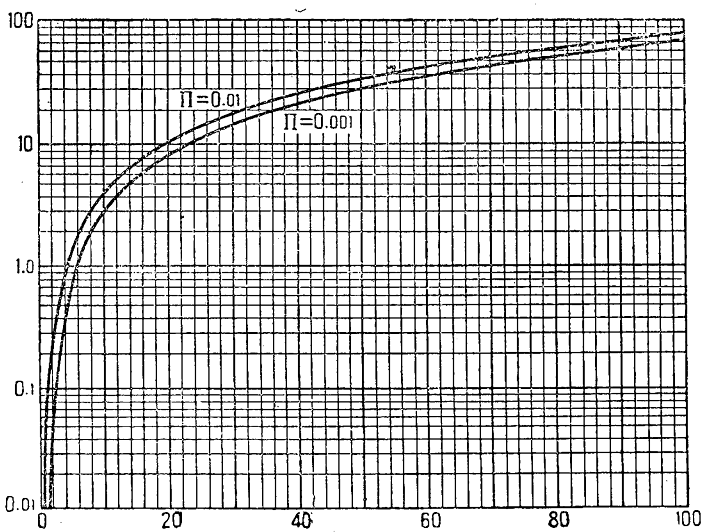
Черт. 39 представляет собою такую же диаграмму, составленную для случая одной потери на каждые 100 вызовов. Способ ее употребления тот же, как и диаграммы черт. 38.

На черт. 40 даны кривые, соответствующие формуле (159). Способ употребления этой диаграммы несколько отличается от предыдущих. Численность группы линий служит теперь абсциссою, а не пометкою кривой, в то время как каждая кривая соответствует определенному значению вероятности потери. На чертеже даны кривые для $\Pi = 0{,}01$ и $\Pi = 0{,}001$. По вертикальной оси теперь откладываются наибольшие допустимые плотности использования, из которых и приходится определять число источников, ибо явно λ чертежом не дается.

[1]) Такова традиция телефонной практики.

Применение этой диаграммы мы иллюстрируем решением тех же самых примеров, что и раньше. В первом случае имеется группа из 10 линий. Обращаясь к диаграмме и фиксируя, например, $\Pi = 0{,}001$, мы находим, что плотность нагрузки в такой группе может доходить до $\varepsilon = 2{,}96$. Число источников, которое может обслужить данная группа, есть наибольшее число, при котором плотность нагрузки не превосходит этой величины. Для отдельного источника плотность нагрузки равна $nT = 0{,}0833$.

Отсюда число источников, которое может быть надежно обслужено данной группой, равно $\frac{2{,}96}{0{,}0833} = 35$.



Черт. 40.

Это число соответствует числу 41, полученному при помощи черт. 38.

Во втором примере требовалось обслужить 200 источников, каждый из которых в среднем производит 2 вызова средней длительности 140 сек.; средняя плотность нагрузки для отдельного источника равна $nT = 0{,}0778$. Так как плотность нагрузки каждой группы может доходить до 2,96, то число источников, которое такою группой может быть обслужено, равно $\frac{2{,}96}{0{,}0778} = 38$. Таким образом требуются 5 полных групп, каждая по 10 линий, и одна добавочная группа, которая могла бы справиться с нагрузкою остающихся 10 источников. Эти 10 источников дают плотность нагрузки $0{,}0778 \cdot 10 = 0{,}778$. Обращаясь к диаграмме, мы находим, что число линий, потребное для этой добавочной группы, равно 5. Полное число линий, таким образом, равно 55. Разница между этим результатом и тем, который получен с помощью черт. 38, составляет около 14 %.

При помощи подобного рода диаграмм легко производить выкладки, не затрачивая на это ненужного количества времени. Таким образом сложные формулы табл. XXX могут быть на практике заменены инструментом, который делает возможным их практическое применение. Наши черт. 38, 39 и 40 еще не удовлетворяют этому условию — они не охватывают достаточно больших промежутков изменения переменных: и, разумеется, было бы трудно на страницах такого формата поместить диаграммы со шкалами, достаточно широкими для практических нужд. Однако очевидно, что построение подобных диаграмм возможно; и так как строить их приходится раз навсегда, то утомительные выкладки, с которыми сопряжено их построение, не имеют большого значения.

Задачи

1. На железнодорожной станции имеется камера для чистки обуви. Среднее число посетителей в часы наибольшей нагрузки составляет 75 человек в час. Чистка пары ботинок в среднем занимает 4 минуты. Допустим, что клиент в случае, если все стулья заняты, только заглядывает в дверь и проходит мимо. Допустим далее, что появление клиентов распределено во времени случайно в индивидуальном и коллективном смысле. Какой формулой следует воспользоваться, чтобы найти число стульев, необходимое для предотвращения потери свыше 1 % клиентов?

2. Воспользуйтесь формулой Пуассона, чтобы найти в первом приближении число стульев, требуемое в предыдущем примере. Найдите затем настоящее число, производя расчеты вблизи соседних значений ν.

3. При помощи регистрирующего хронографа измеряют число тресков в секунду, вызываемых в радиоприемнике атмосферными электромагнитными возмущениями. Математическое ожидание этого числа равно $n = 1,7$, средняя продолжительность треска $T = 0,3$ сек. Требуется найти, какая доля тресков не будет давать раздельных сигналов?

(Допускается, что в случае перекрытия нескольких тресков хронограф регистрирует только один из них; трески распределяются во времени случайно в индивидуальном и коллективном смысле.)

4. Запись хронографа состоит из некоторого числа раздельных черточек, продолжительность каждой из которых может быть измерена. Таким образом можно непосредственно найти число отдельных черточек n^* и их среднюю продолжительность T^*. Однако вследствие перекрытий эти числа не совпадают с числами n и T. Выведите формулы, выражающие n и T через n^* и T^*.

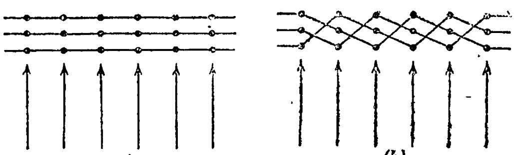
5. В течение часа хронограф зарегистрировал 18 241 отдельных черточек общей продолжительностью 2977 сек. Какие заключения можно отсюда вывести относительно частоты и продолжительности самих тресков?

§ 125. Задачи на время искания. Теперь мы обращаемся к задачам иного рода — к задачам, в которых речь идет о том, сколько должен пропутешествовать „коммутатор“, чтобы направить полученный вызов по надлежащему пути. Важность таких задач обусловливается двумя причинами: прежде всего, быстрота износа коммутатора существенным образом зависит от того, сколько ему приходится двигаться; и далее, во многих случаях время искания соответственным образом увеличивает собою продолжительность всей операции соединения. А здесь мы выберем несколько типичных задач, имеющих целью обрисовать в основных чертах методы решения, не входя в объяснение технических деталей телефонии.

Прежде всего мы должны заметить, что сами „коммутаторы" могут быть двух различных типов. Каждый коммутатор может быть связан с определенным источником, так что назначением его является отыскание, в случае заявленного требования, свободной линии для этого источника.

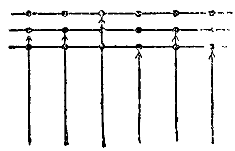
Такие коммутаторы в технике называют „предъискателями". Но коммутатор может быть и неизменно связан с определенной линией, так что в случае, когда один из источников, обслуживаемых данным коммутатором, заявляет требование, этот коммутатор отправляется его разыскивать. В технике такие коммутаторы называют „искателями вызовов". Конечно, в обоих случаях „группа коммутаторов" в точности совпадает с той или другой из двух групп, о которых мы только что говорили, т. е. группа предъискателей — с группой источников, а группа искателей вызовов — с группой линий. В данном исследовании нам в обоих случаях удобнее иметь дело с самими коммутаторами.

Второе, на что мы должны здесь обратить внимание, заключается в следующем. Хотя мы считаем, что все коммутаторы одинаковы и обслуживают одну и ту же группу, но это не значит, что различные члены



(a) (b)

Черт. 41.



Черт. 42.

группы достигаются всеми коммутаторами в одном и том же порядке. Представим себе, например, группу из шести предъискателей, схематически изображенных стрелками на черт. 41; пусть в их распоряжении находятся три линии, изображенные горизонтальными прямыми. До сих пор наше описание в одинаковой мере относилось к случаям (*a*) и (*b*). Но в случае установки (*a*) все шесть предъискателей достигают сначала первой линии, затем второй, наконец, третьей; в случае же установки (*b*) каждая из трех линий оказывается для двух предъискателей в „предпочтительном" (первоочередном) положении, для двух — в положении второй очереди и для последних двух — в наименее благоприятном положении (третьей очереди). Случай (*a*) в технике называют „прямым включением", а случай (*b*) — „сдвинутым включением" [1]).

Третье, на чем мы должны остановиться, — это поведение коммутатора после того, как он выполнил свою функцию. Обычно он при этом делает одно из двух: а) возвращается к некоторому „исходному положению", так что все свободные коммутаторы располагаются в точности на одной прямой, как это показано на черт. 41; или b) он остается там, где он находится, так что свободные коммутаторы располагаются „где попало" (черт. 42).

[1]) Не все сдвинутые включения построены по принципу (*b*), но мы будем пользоваться этим термином только для нашего простейшего типа.

Наконец, в четвертую очередь заметим, что коммутаторы, могут отправляться в свои поиски либо поодиночке, либо целыми группами. В последнем случае первый коммутатор, нашедший искомый объект, берет на себя исполнение соответствующего поручения, а все остальные прекращают свои поиски.

Понятно, что различия в каждом из этих четырех весьма существенных отношений могут значительно повлиять на продолжительность поисков; таким образом каждая из перечисленных разновидностей требует, вообще говоря, отдельного исследования.

§ 126. Искание индивидуальное, коммутаторы отправляются от нормального положения. *Один искатель вызовов отправляется от нормального исходного положения. Прямое включение.* Самая простая задача возникает в случае одного искателя вызовов и прямого включения. Очевидно, что продолжительность путешествия определяется всецело положением вызывающего источника. Если всего имеется ν источников и вероятность вызова для всех одинакова, то ожидаемое число шагов, которые коммутатору придется пройти, равно

$$\varepsilon(k) = \frac{\nu + 1}{2}; \tag{170}$$

вероятность же того, что ему придется пройти более чем k шагов, равна

$$p(>k) = 1 - \frac{k}{\nu}. \tag{171}$$

Один искатель вызовов отправляется от нормального исходного положения. Сдвинутое включение. Если включение не „прямое“, а „сдвинутое“, то формулы (170) и (171) остаются неизменными. Основное различие между этим случаем и предшествующим сводится к тому, что в данном случае все источники обслуживаются в одинаковой степени, так как одинаково часто оказываются в благоприятном положении, в то время как в первом случае, несомненно, источники, расположенные ближе к нормальному исходному положению, обслуживаются лучше, чем остальные. Средняя же доброкачественность обслуживания для всех источников, очевидно, в обоих случаях одинакова.

Один предъискатель отправляется от нормального исходного положения. Прямое включение. Условия нашей второй задачи формулируются следующим образом.

Каждая линия находится в одинаковом положении по отношению ко всем коммутаторам; все коммутаторы отправляются от одного и того же исходного положения; в случае, если все линии заняты, коммутатор не отправляется в новые поиски, а возвращается к исходному положению и ликвидирует вызов (т. е. сообщает отказ своему источнику). Очевидно, что при этих условиях разные линии используются не в одинаковой мере; та, которая расположена ближе всего к предъискателям, будет чаще находиться в употреблении, чем другая, расположенная дальше от них. Однако неправильно было бы заключать отсюда, что если, например, занято шесть линий, то это обязательно те шесть, которые ближе всего расположены к предъискателям. В самом деле, могло случиться, что в тот момент, когда происходило последнее из наличных шести соединений, шесть первых линий были все заняты, так что по данному вызову пришлось использовать седьмую линию; но между этим моментом и настоящим одно из шести прежде установленных соединений могло прекратить свое действие. В таком случае к настоящему моменту осталось бы ровно шесть занятых линий, но это не были бы шесть первых, так что при новом вызове предъискателю не пришлось бы путешествовать семь шагов. Если, например, прервалось то соединение, в котором участвовала первая линия, то в случае нового вызова предъискатель, сделав вместо семи всего один шаг, уже нашел бы линию, готовую к услугам.

Наша цель — найти вероятность того, что *первые k линий заняты, а следующая — свободна*. Мы можем легко сделать это, сообразив, что произойдет, если по какой-либо причине каждый вызов, который не может быть обслужен этими линиями, будет немедленно погашаться. Очевидно, что на загруженность первых k линий это не окажет ровно никакого влияния. Поэтому вероятность того, что первые k линий окажутся занятыми, совпадает с вероятностью того, что при наличии только k линий все они окажутся занятыми; а эта вероятность может быть вычислена по формуле [1]) (167).

Таким образом мы получаем [2]):

$$_{[k]}P = {}^{\infty}\Pi''_k = \frac{\frac{\varepsilon^k}{k!}}{1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2!}+\ldots+\frac{\varepsilon^k}{k!}}. \tag{172}$$

Искомая вероятность, т. е. $_{[k]}P_{k+1}$, может быть получена, если мы вычтем из только что найденного выражения вероятность того, что первые $k+1$ линий окажутся занятыми. Но эта последняя вероятность есть $_{[k+1]}P$ и может быть выражена совершенно аналогичной формулой. Поэтому вероятность того, что предъискателю придется пройти ровно $k+1$ шагов, равна

$$p(k+1) = {}_{[k]}P - {}_{[k+1]}P. \tag{173}$$

Подобным же образом, вероятность того, что будет пройдено k шагов, составляет:

$$p(k) = {}_{[k-1]}P - {}_{[k]}P = {}^{\infty}\Pi''_{k-1} - {}^{\infty}\Pi''_k. \tag{174}$$

---

[1]) Мы допускаем при этом, что вызовы распределены случайно в индивидуальном и коллективном смысле. Можно было бы легко учесть и другие допущения, но в данный момент для нас совершенно достаточно и этого.

[2]) Значение символов следующее: $_1P$ означает: „первая линия занята"; $_{1,3}P_2$ означает: „первая линия и третья заняты, вторая свободна"; $_{[4]}P_5$ означает: „четыре первых заняты; пятая свободна"; $_6P_{[5]}$ означает: „первые пять свободны, шестая занята". Я полагаю, что закон ясен.

При этих условиях ожидание числа шагов будет:

$$\varepsilon(k)=\sum_{k=1}^{\nu} kp(k).$$

Это можно записать в виде:

$$\varepsilon(k)=\sum_{k=0}^{\nu-1} {}_{[k]}P(k), \tag{175}$$

более удобном для практических вычислений.

Один предъискатель отправляется от нормального исходного положения. Сдвинутое включение. Если соединение устроено так, что каждая линия одинаково часто оказывается во всех возможных положениях, то мы имеем дело с совершенно иной ситуацией. В этом случае занятые линии будут располагаться на всем протяжении совершенно случайно, вместо того чтобы скопляться к одному концу и вероятность получить свободную линию после небольшого числа шагов будет значительно больше, чем в предыдущем примере. Решение задачи находится следующим образом.

Обозначим через[1]) $P(j)$ вероятность того, что в точности j линий окажутся занятыми. Если эти j линий случайно распределены на всем протяжении, то вероятность того, что первые k линий, с которыми встретится данный предъискатель, окажутся занятыми, равна

$$[k]\,P=\frac{C_k^j}{C_k^\nu}. \tag{176}$$

Вероятность того, что предъискателю придется пройти более чем k шагов, мы найдем, складывая между собою произведения этих двух величин, составленные для всевозможных значений j. Это дает формально:

$$p(>k)=\sum_{j=k}^{\nu} {}_{[k]}P\cdot P(j).$$

Пользуясь для нахождения $P(j)$ формулой (166), мы получаем:

$$p(>k)=\frac{(\nu-k)!}{\nu!\sum\limits_{i=0}^{\nu}\frac{\varepsilon^i}{i!}}\sum_{j=k}^{\nu}\frac{\varepsilon^j}{(j-k)!}.$$

Если мы теперь обозначим $j-k$ новым символом (мы можем в качестве такого символа взять i, так как обе суммы совершенно

1) При наших условиях эта вероятность должна быть вычислена по формуле для ${}^{\infty}P''(j)$; при иных условиях могли бы потребоваться другие формулы.

независимы друг от друга), то мы получим[1]):

$$p\,(>k)=\varepsilon^k\frac{(\nu-k)!}{\nu!}\frac{\sum\limits_{i=0}^{\nu-k}\frac{\varepsilon^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{\nu}\frac{\varepsilon^i}{i!}}=\frac{{}^{\infty}\Pi''_{\nu}}{{}^{\infty}\Pi''_{\nu-k}} \tag{177}$$

Как и прежде,

$$p\,(k)=p\,(>k-1)-p\,(>k). \tag{178}$$

Мы можем также найти ожидание числа шагов, которое равно

$$\varepsilon\,(k)=\sum_{k=0}^{\nu}kp\,(k).$$

Однако это выражение целесообразно привести к другому виду, значительно более удобному для вычислений. С этою целью заметим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon\,(k)=p\,(>0)-p\,(>1)&+\\ +2p(>1)-2p\,(>2)&+\\ +3p\,(>2)-\ldots&\\ \ldots-(\nu-1)\,p\,(>\nu-1)&+\\ +\nu p\,(>\nu-1)&,\end{aligned}$$

что, очевидно, равно

$$\varepsilon\,(k)=\sum_{k=0}^{\nu-1}p\,(>k). \tag{179}$$

Чтобы показать, в какой степени среднее значение времени искания уменьшается введением сдвинутых включений, мы приведем результат одного расчета, проведенного для каждой из двух полученных нами формул. Мы возьмем случай, в котором число линий $n=100$, а ожидаемое число занятых равно $\varepsilon=34{,}49$. В случае, когда каждая линия занимает одинаковое положение по отношению ко всем предъискателям, среднее число шагов, для предъискателя равно 19,6; если же включение сделано сдвинутым, то это число составляет только 1,53.

§ 127. Искание индивидуальное; коммутаторы остаются на месте. При изучении этой проблемы мы будем предполагать, что коммутатор, с какого бы положения ни начиналось его движение, может в процессе искания обойти всю группу линий, но что в случае, если все линии окажутся занятыми, он прекращает поиски, а не возобновляет их. В противном случае число шагов, необходимых для отыска-

---

[1]) За исключением случая $k=\nu$. Очевидно, что путь предъискателя не может составлять больше чем ν шагов; поэтому $p\,(>\nu)=0$. Формула не может приводить к этому результату, потому что в случае, когда все линии заняты, предъискатель, претерпев неудачу при первых ν испытаниях, должен был бы обязательно подвергнуться $(\nu+1)$-му для наступления требуемого по смыслу формулы результата.

ния свободной линии, зависело бы от того, сколько времени пройдет до освобождения одной из занятых линий, а также от быстроты движения коммутатора, одним словом, от ряда вопросов, которых мы пока сознательно избегаем.

Один предъискатель, остающийся на месте. Включение прямое. Мы рассмотрим только случай предъискателей, так как для искателей вызовов задача становится тривиальной. Очевидно, что после того как вся система в течение некоторого времени находилась в действии, коммутаторы будут случайно распределены на всем протяжении. Так как занятые линии также, по всей вероятности, распределяются случайно, то положение их относительно любого определенного коммутатора также будет случайным. Таким образом в этом случае дело обстоит совершенно так же, как если бы коммутаторы отправлялись от некоторого нормального исходного положения, а включение было сдвинутым. Поэтому здесь могут быть применены формулы (177) и (178).

Один предъискатель, остающийся на месте. Включение сдвинутое. Так как положения занятых линий распределяются случайно по отношению к любому предъискателю даже в случае прямого включения, то введение сдвинутого включения не дает здесь ничего нового, и формулы (177) и (178) и в этом случае находят себе применение.

§ 128. Искание групповое; коммутаторы остаются на месте. Это общее заглавие обнимает собою два различных случая: если данная группа коммутаторов одновременно отправляется на поиски, то может случиться, что в первую очередь требуемого пункта[1]) достигает не один какой-нибудь коммутатор, а два или более одновременно; тогда встает вопрос, что с ними делать, потому что явно нежелательно все их соединять с данным пунктом; имеются две возможности: либо заставить какой-нибудь один из коммутаторов связаться с этим пунктом, либо все пропустить мимо, дожидаясь момента, когда нашего пункта коснется новый, одиноко путешествующий коммутатор.

Группа искателей, остающихся на месте. Прямое включение. В случае одновременного прихода двух искателей, один из них принимает поручение. В первом случае, если, при прямом включении, λ коммутаторов отправляются на поиски, то решение задачи легко находится из следующих соображений: данный определенный коммутатор может с одинаковою вероятностью находиться в любом пункте, совершенно независимо от того, где находятся другие коммутаторы. Пусть жирная прямая на черт. 43 изображает вызывающий источник, причем всего имеется ν источников и λ искателей. Вероятность того, что данный определенный искатель находится в одном из k отмеченных пунктов, равна $\frac{k}{\nu}$; вероятность же того, что он где-нибудь в другом месте, равна $1-\frac{k}{\nu}$; так как положения различных искателей взаимно независимы, то вероятность того, что ни один из λ искателей не попадет

[1]) Здесь и в дальнейшем общее выражение „пункт" может означать „источник" или „линия", в зависимости от того, имеем ли мы дело с искателями вызовов или предъискателями.

в отмеченную область, равна $\left(1-\frac{k}{\nu}\right)^{\lambda}$. Но это как раз есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы нашей группе искателей пришлось сделать *более* k шагов, прежде чем она достигнет вызывающего источника. Поэтому мы имеем:

$$p(>k)=\left(1-\frac{k}{\nu}\right)^{\lambda}. \tag{180}$$

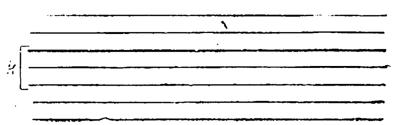
Подобно предыдущему,

$$p(k)=p(>k-1)-p(>k)=\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(1-\frac{k}{\nu}\right)^{\lambda}. \tag{181}$$

Ожидание числа k, т. е. ожидаемое число шагов, которое придется проделать нашим искателям до встречи с вызывающими источниками, равно

$$\varepsilon_1(k)=\sum kp(k)=\frac{1^{\lambda}+2^{\lambda}+3^{\lambda}+\ldots+\nu^{\lambda}}{\nu^{\lambda}}. \tag{182}$$

Группа искателей, остающихся на месте. Прямое включение. В случае одновременного прибытия двух или более искателей ни один из них не принимает поручения. Во втором из упомянутых нами выше случаев формула значительно сложнее и требует для своего вывода применения принципа сложных альтернативных событий. Мы начнем со следующего рассуждения.



Черт. 43.

Если из всех искателей ровно i' находится в той области, которая отмечена скобкой на черт. 43, то вероятность того, что в пункте, лежащем непосредственно перед (на черт. 43 — ниже) этой областью, сосредоточено ровно i искателей, дается формулой:

$$_kp_{i'}(i)=C_i^{\lambda-i'}\left(\frac{1}{\nu-k}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{\nu-k}\right)^{\lambda-i'-i}.$$

Очевидно при этом, что если попавшие в отмеченную область i' искателей размещаются в ней так, что ни на один источник не приходится ровно одного искателя, то число шагов, которое понадобится пройти группе искателей, будет больше чем k. Оно равно $k+1$, если $i=1$, и больше, чем $k+1$, если $i\neq 1$. Поэтому, если бы мы знали вероятность того, что в отмеченной области найдется i' искателей, размещенных так, что среди них нет ни одного одинокого, то мы без затруднений нашли бы вероятность любой продолжительности искания, воспользовавшись надлежащим образом формулой для альтернативных сложных событий. В данный момент мы удовольствуемся введением символа, обозначающего эту вероятность, не теряя надежды, что в дальнейшем нам удастся найти для нее и формулу. С этою целью мы выберем обозначение $_kP(i')$, где индекс k, так же как и в выражении ${}_kp_{i'}(i)$, должен напоминать нам о числе шагов, которое мы предполагаем рассматривать. Тогда в качестве формального решения нашей задачи мы непосредственно получаем:

$$p(k+1)=\sum_{i'=0}^{\lambda-1}{}_kP(i')\,{}_kp_{i'}(i). \tag{183}$$

Для определения выражения ${}_kP(i')$ мы заметим, что если i' искателей занимают $k+1$ источников и если они локализованы вышеописанным образом, то либо все они помещаются на первых k источниках, а на последнем $(k+1)$-м нет ни одного; либо на первых k помещаются все, кроме *двух*, а эти два — на последнем; либо все, кроме трех, и т. д. Единственные два случая, которые невозможны, — это когда все искатели, кроме одного, помещаются на первых k источниках и когда, обратно, все, кроме одного, помещаются на последнем, $(k+1)$-м, источнике, потому что в каждом из этих двух случаев обязательно имелся бы одинокий искатель. Это приводит нас к рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned}{}_{(k+1)}P(i')&={}_kP(i')\,{}_kp_{i'}(0)+{}_kP(i'-2)\,{}_kp_{i'-2}(2)+\\&+{}_kP(i'-3)\,{}_kp_{i'-3}(3)+\ldots=\sum_{i=0}^{i'}{}_kP(i'-i)\,{}_kp_{i'-i}(i),\end{aligned}$$

причем подразумевается, что значения $i=1$ и $i=i'-1$ не входят в область суммирования. Эта рекуррентная формула позволяет, зная ${}_kP(i')$, найти ${}_{(k+1)}P(i')$, так что, зная значения этой функции при каком-нибудь k, мы найдем значения ее и для любого k. Но непосредственно очевидно, что

$${}_1P(i')=C_{i'}^{\lambda}\,\frac{(\nu-1)^{\nu-i'}}{\nu^{\lambda}}.$$

Отправляясь от этой формулы, мы простыми алгебраическими выкладками находим[1]):

$${}_2P(i')=C_{i'}^{\lambda}\,\frac{(\nu-2)^{\lambda-i'}}{\nu^{\lambda}}\,(2^{i'}-2i'+i'C_{i'-2}^{0}),$$

$${}_3P(i')=C_{i'}^{\lambda}\,\frac{(\nu-3)^{\lambda-i'}}{\nu^{\lambda}}\,[3^{i'}-3i'\,2^{i'-1}+3i'(i'-1)-i'(i'-1)\,C_{i'-3}^{0}],$$

и вообще

$${}_kP(i')=C_{i'}^{\lambda}\,\frac{(\nu-k)^{\lambda-i'}}{\nu^{\lambda}}\left\{\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^hC_h^k\,\frac{i'!}{(i'-h)!}\,(k-h)^{i'-h}+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\,\frac{i'!}{(i-k+1)!}\,C_{i'-k}^{0}\right\}.$$

---

[1]) Эти выражения имеют различное значение в зависимости от того, будет ли $i'=k$ или нет. Это учтено нами с помощью тех членов, которые содержат множители $C_{i'-k}^{0}$, обращающиеся в нуль для всех значений i', кроме $i'=k$.

Теперь у нас заготовлены формулы как для ${}_kP(i')$, так и для ${}_kp_{i_i}(i)$, и мы можем подставить их в выражение (183). После сравнительно сложных выкладок мы получаем:

$$p(k+1)=\sum_{h=0}^{k}(-1)^h\frac{\lambda!}{(\lambda-h-1)!}C_h^k\frac{(\nu-h-1)^{\lambda-h-1}}{\nu^\lambda}, \qquad (184a)$$

если $k+1<\nu$, и

$$p(\nu)=\sum_{h=0}^{\nu-1}(-1)^h\frac{\lambda!}{(\lambda-h)!}C_h^{\nu-1}\frac{(\nu-h)^{\lambda-h}}{\nu^\lambda}. \qquad (184b)$$

Для полноты мы выпишем также ожидаемое число шагов:

$$\varepsilon_1(k)=\frac{\lambda!}{\nu^\lambda}\sum_{h=0}^{\nu-1}(-1)^hC_{h+1}^{\nu}\frac{(\nu-h)^{\lambda-h}}{(\lambda-h)!}. \qquad (185)$$

Единственная полезная цель, которой, повидимому, могут для нас служить эти формулы, — это демонстрация того, к каким сложным результатам иногда могут приводить общие проблемы рассматриваемого типа.

Метод, с помощью которого были выведены формулы (180) и (181), без всяких изменений может быть применен и к случаю сдвинутого включения. Следовательно, те же формулы мы будем иметь и для этого случая. То же самое справедливо и для формул (184) и (185). В обоих случаях та картина, которая служит наглядной базою вывода, требует некоторого изменения; но последовательные шаги самого вывода и результаты его остаются в точности теми же.

Группа предъискателей, остающихся на месте. Прямое включение. В случае одновременного прибытия нескольких один из них выполняет поручение. Если бы вместо искателей вызовов мы имели дело с предъискателями, то продолжительность искания во всех случаях должна была бы уменьшится. Если, в случае одновременного прибытия нескольких предъискателей, один из них выполняет поручение, то формулу, выражающую результат, получить не очень трудно. Вернемся к случаю, когда имеется только один предъискатель и когда решение дается формулами (177) и (178). Очевидно, что любой из предъискателей рассматриваемой нами теперь группы может быть тем *единственным предъискателем*, о котором там шла речь. Значит, каждый предъискатель этой группы должен подчиняться тем законам, которые нами там были установлены. Следовательно, вероятность того, что i предъискателей должны будут пройти по k шагов каждый, а каждый из остальных $\lambda-i$ больше, чем k шагов, выразится формулой:

$$C_i^\lambda\,[p_1(k)]^i\,[p_1(>k)]^{\lambda-i},$$

где $p_1(k)$ дается формулой (178), а $p_1(>k)$ — формулой (177). Отсюда вероятность того, что поиски будут продолжаться k шагов, получает выражение[1]):

$$p_\lambda(k)=\sum_{l=1}^{\lambda} C_l^\lambda [p_1(k)]^l [p_1(>k)]^{\lambda-l}=$$

$$=[p_1(k)+p_1(>k)]^\lambda-[p_1(>k)]^\lambda=[p_1(>k-1)]^\lambda-[p_1(>k)]^\lambda=$$

$$=\left(\frac{{}^{\infty}\Pi''_{\nu}}{{}^{\infty}\Pi''_{\nu-k+1}}\right)^\lambda-\left(\frac{{}^{\infty}\Pi''_{\nu}}{{}^{\infty}\Pi''_{\nu-k}}\right)^\lambda \tag{186}$$

Вероятность того, что число шагов окажется бо́льшим, чем k, равна

$$p_\lambda(>k)=[p_1(>k)]^\lambda=\left(\frac{{}^{\infty}\Pi''_{\nu}}{{}^{\infty}\Pi''_{\nu-k}}\right)^\lambda, \tag{187}$$

а ожидаемое число шагов

$$\varepsilon_1(k)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(\frac{{}^{\infty}\Pi''_{\nu}}{{}^{\infty}\Pi''_{\nu-k}}\right)^\lambda. \tag{188}$$

Чтобы показать, насколько групповое искание может сократить среднюю продолжительность поисков, мы обратимся к нашему прежнему примеру.

Мы видели, что при прямом включении и в случае, когда коммутатор отправляется от нормального исходного положения, среднее число пройденных шагов было 19,6. С помощью остающихся на месте коммутаторов или сдвинутого включения это число уменьшается до 1,53. Если же коммутаторы остаются на месте и отправляются в поиски группами по два, три, четыре или пять, то результаты будут соответственно 1,14, 1,04, 1,014 и 1,005. Если мы сообразим, что 1 есть наименьшее мыслимое число шагов, то увидим, что соединение коммутаторов в группы весьма существенным образом сокращает время искания.

§ 129. Задача о двойном соединении. В случаях, когда одно и то же приспособление призвано обслуживать целый ряд различных потребителей, часто возникает вопрос о том, как воспрепятствовать захвату одним из потребителей того оборудования, которое в данный момент находится уже в пользовании другого. Обычно эта цель достигается с помощью специального механизма, прекращающего доступ к той или иной линии. Но ясно, что такое блокирующее приспособление требует некоторого времени, чтобы вступить в действие, и по крайней мере в течение этого времени любой другой источник имеет возможность захватить линию, уже занятую первым, создавая таким образом то, что в технике называют „двойным соединением". Нас интересует вопрос об ожидаемой доле тех вызовов, которым предстоит претерпеть это бедствие.

---

[1]) За исключением случая $k=\nu$, когда формула лишена отрицательного члена.

Задачи этого рода возникают обычно при проверке того, насколько та или иная предложенная система удовлетворяет определенному стандарту, и так как при изучении таких задач мы можем допустить ошибки значительно бо́льшие, чем при изучении потерь, то мы на этот раз будем менее требовательны к точности наших предпосылок. В частности, мы допустим, что вызовы распределяются случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле, и что при соединении линии с вызывающим источником эта линия также выбирается чисто случайно. Как всегда, мы будем обозначать через ν число линий, через n — частоту вызовов и через T — ожидаемую продолжительность разговора.

Допустим, что мы наблюдаем нашу группу в течение небольшого промежутка времени dt, в начале которого занято ровно j линий. Очевидно, вероятность того, что в течение этого промежутка произойдет вызов, равна $n\lambda\,dt$; а если вызов состоится, то вероятность того, что вызывающий источник будет соединен с некоторой определенной выбранной нами линией, равна $\dfrac{n\lambda\,dt}{(\nu-j)}$.

Пользуясь принципом альтернативных сложных событий, мы найдем теперь вероятность $p(b)$ того, что эта выбранная нами линия окажется захваченной в течение промежутка времени at, предполагая, что число линий, занятых в начале этого промежутка, нам неизвестно. Обозначая через $P(j)$ вероятность того, что ровно j линий заняты в начальный момент промежутка dt, мы получаем:

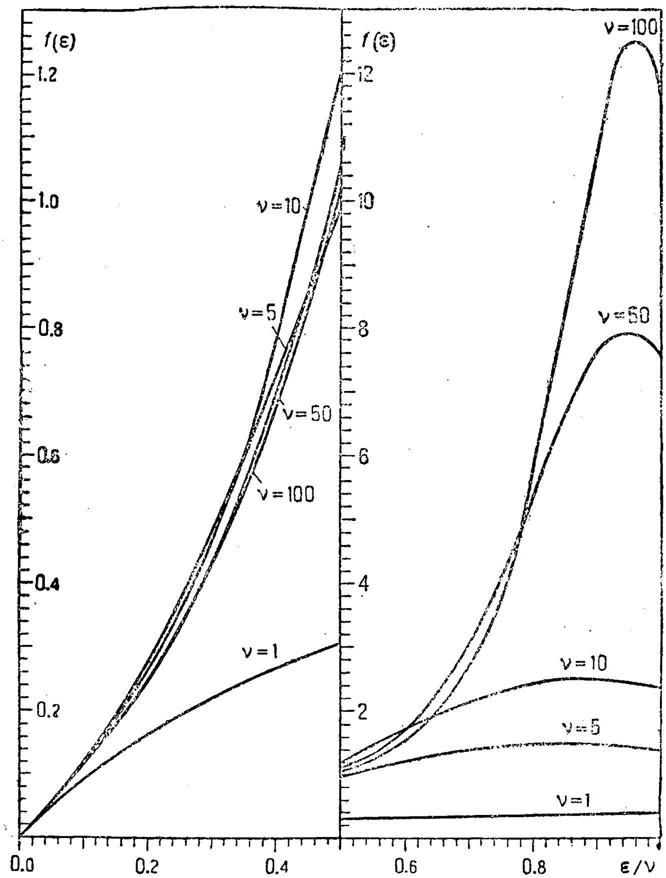
$$p(b)=\sum_{j=0}^{\nu-1} P(j)\,\frac{n\lambda\,dt}{\nu-j}=n\lambda\,dt\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{P(j)}{\nu-j}. \tag{189}$$

Если мы допустим, что потерянные вызовы погашаются немедленно, то $P(j)$ определяется по формуле (166), и выражение (189) принимает вид:

$$\frac{dt}{T}\,\frac{\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\dfrac{\varepsilon^{j+1}}{(\nu-j)\,j!}}{\sum\limits_{j=0}^{\nu}\dfrac{\varepsilon^{j}}{j!}}. \tag{190}$$

Мы будем записывать это выражение кратко в виде: $\dfrac{f(\varepsilon)\,dt}{T}$.

Нам остается установить связь между этим результатом и вероятностью двойного соединения. Последняя формула выражает вероятность того, что некоторая определенная линия, свободная в начале промежутка времени dt, получит нагрузку в течение этого промежутка. Чтобы узнать, осуществится ли это событие на самом деле, мы могли бы, произведя вызов, связаться с какой-нибудь линией и затем наблюдать, вмешается ли в наше соединение в течение промежутка dt какой-нибудь новый вызов. Отсюда следует, что выражение $\dfrac{f(\varepsilon)\,dt}{T}$ может быть понимаемо как вероятность того, что некоторый вызов попадет в положение двойного соединения благодаря захвату той же самой линии некоторым другим вызовом, *последовавшим после него*. Но очевидно, что интерференция с последующим для данного вызова имеет в точности такую же вероятность, как интерференция с предыдущим. Поэтому $\frac{f(\varepsilon)\,dt}{T}$ выражает собою половину вероятности того, что данный



Черт. 44.

вызов окажется в состоянии двойного соединения; обозначая эту вероятность через $p(dc)$, мы получаем:

$$p(dc) = 2p(b) = \frac{2dt}{T} f(\varepsilon). \tag{191}$$

Для облегчения вычислений были составлены диаграммы функции $f(\varepsilon)$ для большого числа значений ν между 1 и 100.

На черт. 44 представлены эти диаграммы, причем за абсциссу вместо ε принята для удобства чертежа величина $\frac{\varepsilon}{\nu}$. Применение этих диаграмм мы покажем на следующем простом примере.

Допустим, что мы имеем 10 линий, обслуживающих 144 вызова в час, при средней продолжительности разговора в 100 сек. Тогда

$$T = 100, \quad n\lambda = \frac{144}{3600} = 0{,}04, \quad \varepsilon = n\lambda T = 4 \quad \text{и} \quad \nu = 10,$$

так что

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = 0{,}4.$$

Обращаясь к черт. 44, мы находим, что для этого случая $f(\varepsilon) = 0{,}78$ [1]). Если длительность незащищенного интервала составляет 0,05 сек., то вероятность двойного соединения равна

$$p(dc) = \frac{2 \times 0{,}05}{100}\, 0{,}78 = 0{,}00078.$$

Это значит, что при данных условиях из каждых 10 000 вызовов около 78 попадут в положение двойного соединения; при подсчете самих двойных соединений не надо забывать, что каждое из них обнимает два вызова.

Аналогичным образом мы можем решать и другие задачи на двойные соединения, беря значение функции $f(\varepsilon)$ из соответствующей диаграммы черт. 44.

§ 130. Задержки при ожидании обслуживания. Из всех задач, с которыми приходится иметь дело связисту-статистику, самыми трудными являются задачи, связанные с такими системами, где вызов, в случае отсутствия свободной аппаратуры для его немедленного обслуживания, не погашается, а только задерживается до тех пор, пока не освободится нужное ему приспособление. Причин для такой особой трудности этих задач имеется несколько.

В первую очередь, при изучении вероятностей потерь мы видели, что наши результаты совершенно не зависят от продолжительности отдельных разговоров. Они будут совершенно одинаковы для всех систем с одной и той же средней плотностью нагрузки, независимо от того, составляется ли эта нагрузка из большого числа коротких разговоров или небольшого числа длинных, и независимо от того, будут ли все разговоры иметь одинаковую или различную длительность. Если же мы переходим к задачам, связанным с задержкой обслуживания, то дело принимает другой оборот. Можно, например, непосредственно убедиться, что в случае, когда все разговоры имеют одинаковую длительность, задержки будут увеличиваться с увеличением этой длительности. Таким образом две системы, из которых одна обслуживает (в среднем) три двадцатиминутных разговора в час, другая — шестьдесят минутных разговоров, будут в отношении вероятностей потерь вести себя совер-

[1]) Это число дано с точностью, какую может дать эскизная диаграмма черт. 44.

шенно одинаково. Но уже из соображений здравого смысла ясно, что абонент, требующий обслуживания и не находящий свободной аппаратуры, в первом случае вынужден будет, вообще говоря, дожидаться гораздо дольше, нежели во втором. Не так легко непосредственно убедиться в том, что распределение продолжительности разговоров, — т. е. вопрос о том, будут ли все они одинаково длительны, а если нет, то насколько они разнятся между собою, — также существенным образом влияет на решение задачи; однако при формулировке наших результатов мы убедимся, что это действительно так.

Во вторую очередь, имея дело с вероятностями потерь, мы могли утверждать, что как окончания, так и начальные моменты разговоров распределяются случайно. Но для систем с ожиданием это перестает быть верным. Так, например, если длительность каждого разговора равна единице и если имеется ровно пять линий, то в каждый данный момент может происходить не более пяти разговоров, и следовательно, в течение одной единицы времени не более пяти разговоров могут быть закончены. Начальные моменты разговоров могут быть распределены случайно, но те задержки, которым подвергаются некоторые из них, выравнивают, сглаживают распределение моментов их окончаний. Именно с этим обстоятельством и связана бóльшая часть возникающих математических затруднений.

В третью очередь, в системе с потерями каждый абонент, если он вообще пострадает, пострадает в точности в такой же мере, как и всякий другой, т. е. его вызов будет просто погашен, ликвидирован. В системе же с ожиданием одному приходится ждать ничтожно мало, а другому — очень долго. Стандартное качество обслуживания нельзя здесь описать простым указанием процента задержанных вызовов: вместо этого мы вынуждены говорить о том, какой процент вызовов задерживается на срок, превышающий такой-то определенный промежуток времени. Это вносит в задачу еще одно лишнее осложнение.

Вследствие всех этих затруднений имеются только две связанные с задержкою задачи, решение которых достаточно просто для того, чтобы стоило помещать их в таком руководстве, как наше. Что касается остальных проблем этого рода, то они до сих пор исследованы лишь в грубом приближении, так что об их „решении“ можно говорить лишь в том смысле, что имеется определенная рецептура, приводящая к результату, степень надежности которого есть основание считать достаточной, хотя мы и не можем точно оценить ее. Эти два решения мы приводим исключительно как иллюстрации простейших методов подхода к данному кругу задач.

Прежде всего, точное решение может быть найдено в случае, когда для обслуживания всех вызовов имеется одна единственная линия, и все разговоры имеют одинаковую длительность. Мы будем говорить в этом случае об „одиночных линиях“.

Далее, если длительности разговоров подчиняются показательному закону распределения (благодаря чему моменты окончания оказываются „случайно“ распределенными, несмотря на тенденцию системы к их выравниванию), то общее решение может быть получено даже в случае, когда мы имеем дело не с одной линией, а с целою группой.

§ 131. Разговоры одинаковой продолжительности в случае одиночных линий. Вероятность j одновременно занятых источников. Мы предположим, что вызовы происходят случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле, и что в случае, когда несколько абонентов дожидаются свободной линии, они затем обслуживаются в том самом порядке, в каком чередовались их вызовы. Как и в случае задачи о потерях, мы обозначим через $P(j)$ вероятность того, что в данный момент имеется в точности j абонентов, либо уже ведущих разговор, либо дожидающихся своей очереди, говоря иными словами, вероятность того, что „скученность" измеряется числом j. Мы допустим также, как всегда, что система находится в статистическом равновесии, так что все эти вероятности не зависят от времени.

Пусть n — частота вызовов и T — средняя длительность разговора. Тогда, так как несколько разговоров не могут происходить одновременно, ожидаемая доля времени занятости нашего единственного провода будет равна nT, а ожидаемая доля его простоя $1 - nT$. Очевидно, что эта последняя величина равна $P(0)$. Поэтому, полагая, как и ранее, $nT = \varepsilon$, мы можем написать:

$$P(0) = 1 - \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь промежуток времени длины T и спросим себя, какова вероятность того, что в конце этого интервала занятых источников окажется в точности j. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы либо в начале этого промежутка не было ни одного занятого источника, а в течение промежутка последовало ровно j вызовов; либо чтобы в начале промежутка занят был один источник, а в течение промежутка прибавилось j вызовов (не $j-1$, потому что первый в течение промежутка обязательно заканчивает разговор); либо чтобы в начале было 2, а прибавилось $j-1$, и т. д. Так как система, по предположению, находится в статистическом равновесии, то вероятность любого состояния в начале и в конце промежутка — одна и та же, и следовательно, мы получаем:

$$P(j) = [P(0) + P(1)]\frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!} + P(2)\frac{\varepsilon^{j-1}e^{-\varepsilon}}{(j-1)!} + \\ + P(3)\frac{\varepsilon^{j-2}e^{-\varepsilon}}{(j-2)!} + \ldots + P(j+1)e^{-\varepsilon}. \qquad (192)$$

Выпишем несколько первых из этих уравнений:

$$P(0) = [P(0) + P(1)]e^{-\varepsilon},$$

$$P(1) = [P(0) + P(1)]\varepsilon e^{-\varepsilon} + P(2)e^{-\varepsilon}.$$

$$P(2) = [P(0) + P(1)]\frac{\varepsilon^2}{2}e^{-\varepsilon} + \\ + P(2)\varepsilon e^{-\varepsilon} + P(3)e^{-\varepsilon}.$$

Эти уравнения легко могут быть решены последовательно [если мы вспомним, что $P(0)=1-\varepsilon$] и дают:

$$P(1)=(1-\varepsilon)(e^{\varepsilon}-1),$$
$$P(2)=(1-\varepsilon)\left[e^{2\varepsilon}-e^{\varepsilon}(1+\varepsilon)\right],$$
$$P(3)=(1-\varepsilon)\left[e^{3\varepsilon}-e^{2\varepsilon}(1+2\varepsilon)+e^{\varepsilon}\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right];$$

общий закон, как можно показать при более обстоятельном исследовании, состоит в том, что $P(j)$ всегда является произведением двух множителей, первый из которых равен $1-\varepsilon$, а второй представляет собою ряд из показательных членов с соответственными коэфициентами. Эти коэфициенты для всех членов, кроме первого, состоят из двух членов степенного разложения той показательной функции, на которую они помножаются; именно, это будут, в последовательном порядке, первый и второй члены, второй и третий, третий и четвертый и т. д., так что в общем случае мы получаем:

$$P(j)=(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}e^{k\varepsilon}\left[\frac{(k\varepsilon)^{j-k}}{(j-k)!}+\frac{(k\varepsilon)^{j-k-1}}{(j-k-1)!}\right]. \qquad (193)$$

§ 132. Разговоры одинаковой длительности в случае одиночных линий; ожидаемая продолжительность задержки. Нашей ближайшей целью будет определение математического ожидания задержки $\varepsilon(\tau)$. Непосредственно очевидно, что сумма $0P(0)+1P(1)+2P(2)+\ldots$ представляет собою суммарную ожидаемую длительность всех разговоров в единицу времени; при этом мы имеем в виду продолжительность не только самих разговоров, но и всех предшествующих им промежутков ожидания. Но сумма длин всех разговоров равна ε. Сумма всех промежутков ожидания получается умножением ожидаемого числа вызовов на ожидаемую величину задержки. Таким образом мы приходим к соотношению:

$$\varepsilon+n\varepsilon(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}jP(j). \qquad (194)$$

Из этого уравнения мы можем определить $\varepsilon(\tau)$, если только нам удастся выполнить суммирование в правой части. С этой последней целью мы возвратимся к равенству (192), которое нам здесь удобно будет переписать в виде:

$$P(j)=\sum_{k=0}^{j}P(j+1-k)\frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}+P(0)\frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!}.$$

Подставить это выражение в формулу (194) и вычислить отсюда величину $\varepsilon(\tau)$ не имело бы смысла, ибо это привело бы нас к лишенному всякой ценности формальному тождеству. Однако мы можем достигнуть нашей цели другим, несколько искусственным путем.

Если мы вместо суммы $\sum jP(j)$ составим сумму $\sum j^2P(j)$ и затем обычным приемом переставим порядок суммирования по k и j, то мы придем к соотношению:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2P(j) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^2P(j+1-k)\frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!} + P(0)\sum_{j=0}^{\infty} j^2\frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!}. \quad (195)$$

Непосредственным вычислением мы находим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2\frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!} = \varepsilon(\varepsilon+1). \quad (196)$$

Таким образом последний член формулы (195) определен.

Что касается двойной суммы, то ее можно упростить, заменяя индекс суммирования j новым индексом $h = j - k + 1$. Так как

$$j^2 = h^2 + 2h(k-1) + (k-1)^2,$$

то двойная сумма распадается на три следующих суммы:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}\sum_{h=1}^{\infty} h^2P(h),$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}\sum_{h=1}^{\infty} hP(h),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)^2\frac{\varepsilon^k e^{-\varepsilon}}{k!}\sum_{h=1}^{\infty} P(h).$$

Во всех трех случаях суммирования по h и по k протекают независимо друг от друга и потому легко могут быть выполнены. Суммы по k соответственно равны 1, $\varepsilon - 1$ и $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$; что касается сумм по h, то первая из них совпадает с левой частью равенства (195) [1]), а последняя равна $1 - P(0)$. Поэтому, подставляя все эти значения, а также и выражение (196) в формулу (195), мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k) = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}. \quad (197)$$

---

[1]) Разница в нижнем пределе суммирования не имеет значения, ибо член, соответствующий $j = 0$, равен нулю.

Вернемся теперь к формуле (194) и заметим, что, так как $nT = \varepsilon$, левая часть ее может быть написана в виде $\left[1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{T}\right]\varepsilon$. Сопоставляя формулы (194) и (197), мы окончательно находим:

$$\frac{\varepsilon(\tau)}{T} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{198}$$

§ 133. Показательное распределение длительности разговоров. При исследовании вероятностей потерь мы видели — и для наших настоящих исследований это полностью сохраняет силу, — что вся задача может быть сведена к изучению двух „элементарных вероятностей“: вероятности того, что новый вызов последует в течение промежутка времени dt, в начале которого занято j источников, и вероятности того, что один из ведущихся разговоров закончится в течение этого промежутка. Так как мы предположили, что вызывающий источник ничего не знает о состоянии системы и потому не подвергается со стороны этого состояния никакому воздействию до того момента, когда он производит вызов, то первая из этих элементарных вероятностей в нашем случае в точности такова же, как и в задаче о потерях. Все различия, имеющие место между этими двумя типами проблем, должны поэтому быть основаны на разнице между элементарными вероятностями второго рода. Остановимся, в связи с этим, на вероятности того, что некоторый происходящий в момент $t = 0$ разговор окончится ранее момента $t = dt$.

Наша новая постановка задачи не изменяет условий, в которых протекает уже начавшийся разговор. Поэтому, если какой-нибудь разговор зарегистрирован как уже ведущийся, то это означает только, что он должен закончиться в течение промежутка времени, равного его собственной длительности, а потому вероятность того, что он закончится в течение промежутка dt, равна, как и прежде, $\frac{dt}{T}$, *если только мы не имеем каких-либо сведений, позволяющих сделать заключение о моменте начала наблюдаемого разговора.* Но если нам известна степень скученности (число занятых источников), то эта вероятность необходимо должна измениться, потому что иначе, как мы уже заметили, обе элементарные вероятности, а значит и $P(j)$, должны были бы быть те же, как в задаче с потерями. Следовательно, *степень скученности должна, по крайней мере косвенно, указывать нам на время начала данного разговора* [1]).

[1]) Это заключение несомненно правильно, как показывает наша аргументация, и притом независимо от того, как распределены продолжительности разговоров. Я часто пытался найти прямое рассуждение, которое могло бы заменить собою приведенное в тексте *reductio ad absurdum*. Такое рассуждение дало бы нам значение элементарной вероятности окончания разговора при условии, что занято j источников, а это, в свою очередь, позволило бы легко сформулировать общее решение задачи. Однако такого прямого пути до сих пор не найдено,

И вот, показательное распределение длительности разговоров обладает тем особым свойством, что даже точное знание момента начала разговора ничего не изменяет в вероятности его окончания в течение промежутка dt; а в таком случае, разумеется, никакие косвенные сведения и подавно не могут изменить этой вероятности. Именно по этой причине проблема длительности задержки так легко решается в предположении такого распределения.

Показать, что момент начала разговора совершенно не влияет на шансы его окончания, если длительности разговоров распределены по закону [1]):

$$p(T)=\frac{1}{\overline{T}}e^{-\frac{T}{\overline{T}}}, \tag{199}$$

очень легко. Пусть известно, что разговор уже длится ровно t секунд. В таком случае длительность его должна быть не меньше чем t секунд, вероятность чего равна

$$p(>t)=\int_t^\infty p(T)\,dT=e^{-\frac{t}{\overline{T}}}.$$

Если этот разговор заканчивается в течение промежутка dt, то длительность его должна быть заключена между t и $t+dt$, вероятность чего равна

$$p(t)\,dt=\frac{dt}{\overline{T}}e^{-\frac{t}{\overline{T}}}. \tag{200}$$

Отношение этих двух величин [2]) есть вероятность того, что разговор окончится в промежутке dt; она равна, следовательно, $\frac{dt}{\overline{T}}$ и не зависит от t, что и требовалось доказать.

§ 134. Показательное распределение длительности разговоров; вероятность одновременной занятости j источников. Пусть мы имеем ν линий, обслуживающих λ источников, каждый из которых в среднем производит n вызовов в единицу времени. Пусть длительности разговоров распределены согласно показательному закону (199).

---

[1]) Мы пишем $\overline{T}$ вместо $\varepsilon(T)$, чтобы упростить внешний вид наших уравнений.

[2]) Очевидно, что $p(t)\,dt$ (вероятность того, что разговор окончится в течение промежутка dt) равна вероятности того, что он продолжается в момент $t=0$ [эта вероятность есть $p(>t)$], умноженной на условную вероятность того, что он не будет продолжаться дольше, чем $t+dt$ [что можно записать: $p_{>t}(<t+dt)$]. Первые две вероятности мы вычислили, а последнюю как раз ищем.

Тогда принцип статистического равновесия приводит к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(1-\lambda a\,dt)\,P(0)+\frac{dt}{\bar{T}}\,P(1)=P(0),\\
&(\lambda a\,dt)\,P(0)+\left[1-(\lambda-1)\,a\,dt-\frac{dt}{\bar{T}}\right]P(1)+\\
&\qquad\qquad+\frac{2\,dt}{\bar{T}}\,P(2)=P(1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(\lambda-\nu+1)\,a\,dt\,P(\nu-1)+\left[1-(\lambda-\nu)\,a\,dt-\frac{\nu\,dt}{\bar{T}}\right]P(\nu)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\nu\,dt}{\bar{T}}\,P(\nu+1)=P(\nu),\\
&(\lambda-\nu)\,a\,dt\,P(\nu)+\left[1-(\lambda-\nu-1)\,a\,dt-\frac{\nu\,dt}{\bar{T}}\right]P(\nu+1)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\nu\,dt}{\bar{T}}\,P(\nu+2)=P(\nu+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a\,dt\,P(\lambda-1)+\left[1-\frac{\nu\,dt}{\bar{T}}\right]P(\lambda)=P(\lambda),
\end{aligned}\right\}\tag{201}$$

где

$$a=\frac{n}{1-n\bar{T}-n\bar{\tau}}.$$

Эти уравнения отличаются от полученных нами в § 112 в двух отношениях: во-первых, теперь источник, произведший вызов, действительно занят — либо он уже обслуживается, либо дожидается обслуживания. Поэтому величина p в выражении (146) принимает вид: $n(\bar{T}+\bar{\tau})$, а дробь $\dfrac{n}{(1-p)}$ обращается в величину, которую мы обозначили через a. Во второй же экспериментальной вероятности (148) p попрежнему имеет значение $n\bar{T}$, потому что разговор может окончиться в течение промежутка dt только в том случае, если в начале этого промежутка данный источник уже говорит (а не дожидается).

Во-вторых, когда скученность превосходит наличное число линий, то число ведущихся разговоров равно ν, а не j. Значит, вместо выражения (149) мы теперь должны писать $\dfrac{j\,dt}{\bar{T}}$ при $j\leqslant\nu$ и $\dfrac{\nu\,dt}{\bar{T}}$ при $j>\nu$.

Из первого уравнения системы (201) мы можем выразить $P(1)$ через $P(0)$. Затем из второго уравнения $P(2)$ может быть выражено через $P(0)$, и т. д. [1]). Как легко предвидеть, результат принимает различный

[1]) Решение системы (201) гораздо легче производится с помощью детерминантов, нежели тем путем, который указан в тексте.

вид в зависимости от того, будем ли мы иметь $j \leqslant \nu$ или $j \geqslant \nu$. Мы находим:

$$\left.\begin{aligned} P(j) &= C_j^\lambda \beta^j P(0), & j \leqslant \nu, \\ P(j) &= \frac{j!}{\nu!} \nu^{\nu - j} C_j^\lambda \beta^j P(0), & j \geqslant \nu, \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

где через β кратко обозначена величина

$$\beta = \frac{n\overline{T}}{1 - n\overline{T} - n\overline{\tau}}. \tag{203}$$

До сих пор постоянная $P(0)$ в этих уравнениях была произвольной; но она может быть определена с помощью соотношения:

$$\sum_0^\lambda P(j) = 1,$$

и, как нетрудно подсчитать, определяется уравнением:

$$\frac{1}{P(0)} = (1 + \beta)^\lambda + \sum_{j = \nu + 1}^{\lambda} C_j^\lambda \beta^j \left[\frac{j!}{\nu!} \nu^{\nu - j} - 1 \right]. \tag{204}$$

Эти формулы применяются в случаях, когда число источников ограничено и когда эти источники взаимно независимы. Если же вызовы располагаются случайно в индивидуальном и коллективном смысле, то решения принимают несколько более простой вид, который может быть получен, полагая λ бесконечно большим в вышеприведенных формулах. Мы находим:

$$\left.\begin{aligned} P(j) &= \frac{\varepsilon^j}{j!} P(0), & j \leqslant \nu, \\ P(j) &= \frac{\varepsilon^j}{\nu!} \nu^{\nu - j} P(0), & j \geqslant \nu, \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

где ε есть ожидаемая плотность нагрузки, вычисленная без какого бы то ни было учета задержек и где $P(0)$ определяется уравнением:

$$\frac{1}{P(0)} = e^\varepsilon + \frac{1}{\nu - \varepsilon} \frac{\varepsilon^\nu}{(\nu - 1)!} - \sum_{j = \nu}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!}. \tag{206}$$

§ 135. Показательное распределение длительности разговоров; ожидание величины задержки. Вероятность $P(j)$ представляет собою долю времени, в течение которого имеется j занятых источников, обслуживаемых или дожидающихся обслуживания. Если j не больше чем ν, то все занятые источники обслуживаются; при $j > \nu$ из этих j источников ν уже обслуживаются, а остальные дожидаются свободной линии. Отсюда следует, что суммарная продолжительность всех разговоров в единицу времени равна

$$\sum_{j=0}^{\nu} jP(j)+\sum_{j=\nu+1}^{\lambda} \nu P(j),$$

а суммарная длительность всех задержек за то же время равна

$$\sum_{j=\nu+1}^{\lambda}(j-\nu)\,P(j).$$

Если разделить это последнее выражение на ожидаемое в единицу времени число вызовов, то мы получим ожидание величины задержки $\bar{\tau}$. Но среднее число вызовов равно $\lambda n=\frac{\varepsilon}{T}$. Поэтому мы получаем:

$$\frac{\bar{\tau}}{T}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=\nu+1}^{\lambda}(j-\nu)\,P(j). \tag{207}$$

Это можно записать также в виде [1]):

$$\frac{\bar{\tau}}{T}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\nu^{\nu}}{\nu!}\,\frac{P(0)}{{}^{\infty}P'(\lambda)^{*}}\left[\left(\lambda-\nu-\frac{\nu}{\beta}\right)\left(1-{}^{\infty}\Pi'^{*}_{\lambda-\nu}\right)+\frac{\nu}{\beta}\,{}^{\infty}P'(\lambda-\nu+1)^{*}\right], \tag{208}$$

где следующая за каким-нибудь символом P или Π звездочка означает, что этот символ следует вычислять, считая ожидание плотности нагрузки равным $\frac{\nu}{\beta}$.

Из этого уравнения $\bar{\tau}$ может быть определено, хотя и содержится неявно в правой части благодаря соотношению (203). Процесс вычисления состоит в том, что мы даем β любые значения, вычисляем по формуле (208) соответствующие значения $\bar{\tau}$, а затем находим n по формуле (203). Таким путем составлена таблица взаимно соответствующих значений n и $\bar{\tau}$, с помощью которой мы интерполированием можем найти величину задержки, соответствующую любой частоте вызовов n.

Вычисления не совсем просты; однако, если речь идет о решении задач, важность которых оправдывает надлежащую затрату сил, то эти вычисления все же могут быть произведены. Во многих случаях мы можем без существенной погрешности допустить, что вызовы располагаются случайно в индивидуальном и коллективном смысле; в этом случае формула значительно упрощается; она выводится посредством совершенно аналогичной цепи рассуждений и имеет вид:

$$\frac{\bar{\tau}}{T}=\frac{1}{(\nu-\varepsilon)^{2}}\,\frac{\varepsilon^{\nu}}{(\nu-1)!}\,P(0). \tag{209}$$

---

1) В данном случае, как иногда и в дальнейшем, мы не поясняем, каким образом один вид формулы переходит в другой. Во всех таких случаях дело идет об элементарных алгебраических преобразованиях, не представляющих никакого интереса с точки зрения теории вероятностей.

§ 136. Показательное распределение длительности разговоров; вероятность задержки τ при условии, что вызовы обслуживаются в порядке их появления. Если некоторый пробный вызов производится в момент, когда занято j источников, то задержка, которой он подвергается, будет иметь длительность τ в том и только в том случае, если число разговоров, прекратившихся за это время τ, не будет превышать $j-\nu$. Если j известно, то для оценки вероятности задержки $>\tau$ мы должны поэтому уметь находить вероятность того, что данное определенное число разговоров окончится за промежуток времени τ. Это и будет нашей ближайшей задачей.

Если мы возьмем промежуток времени dt, в начале которого все линии заняты, то, как мы знаем из § 134, вероятность того, что какой-нибудь разговор окончится в течение этого промежутка, равна $\frac{\nu\,dt}{T}$. Из § 133 мы знаем, что вероятность окончания разговора в течение этого промежутка совершенно не зависит от того, что́ происходило в другие промежутки времени. Таким образом эти моменты окончания распределяются во времени случайно как в индивидуальном, так и в коллективном смысле, причем в среднем их приходится $\frac{\nu}{T}$ в единицу времени, и вероятность того, что в течение промежутка τ таких моментов будет i, равна

$$\left(\frac{\nu\tau}{T}\right)\frac{e^{-\frac{\nu\tau}{T}}}{i!},\tag{210}$$

эту величину мы будем обозначать через ${}^{\infty}P'(i)^{**}$, причем двойная звездочка означает, что вероятность должна быть вычислена, принимая ожидаемую плотность нагрузки равной $\frac{\nu\tau}{T}$. Вероятность того, что в течение этого времени закончится не более чем $j-\nu$ разговоров (или, что сводится к тому же, вероятность задержки $>\tau$), равна

$$p_j(>\tau)=\sum_{i=0}^{j-\nu}{}^{\infty}P'(i)^{**}=1-{}^{\infty}\Pi'^{**}_{j-\nu+1}.$$

Все это справедливо только в том случае, если в момент, когда производится наш пробный вызов, имеется ровно j занятых (говорящих или ожидающих) источников. Но в течение доли времени, характеризуемой числом $P(j)$, мы имеем ровно j занятых источников, а частота вызовов для таких промежутков времени составляет $(\lambda-j)\alpha$ вызовов в единицу времени. Отсюда следует, что число вызовов, производимых в единицу времени, падающих на такие промежутки времени, когда число занятых источников равно j, и подвергающихся задержке $>\tau$, равно

$$(\lambda-j)\,\alpha P(j)\,p_j(>\tau).$$

Эта формула, очевидно, пригодна для любого значения j; а так как всякий вызов, для которого время ожидания превышает τ, очевидно, происходит в момент, когда *некоторое* число j занятых источников уже имеется, то ожидаемое число вызовов, происходящих в единицу времени и подвергающихся задержке $>\tau$, мы можем получить, складывая такого рода выражения для всех значений j, при которых вообще возникают задержки. Мы получаем:

$$\sum_{j=\nu}^{\lambda} (\lambda - j)\, aP(j)\, p_j(>\tau).$$

Деля это выражение на λn (т. е. на ожидаемое число вызовов в единицу времени), мы получаем вероятность того, что наш пробный вызов подвергнется задержке длительности $>\tau$.

Для вычислительных целей эта формула может быть приведена к следующему более удобному виду:

$$P(>\tau) = \frac{\nu^{\nu}}{\varepsilon(\nu-1)!}\,\frac{P(0)}{{}^{\infty}P'(\lambda)^{*}} \sum_{j=\nu}^{\lambda-1} {}^{\infty}P'(\lambda - j - 1)^{*}\left(1 - {}^{\infty}\Pi'^{**}_{j-\nu+1}\right). \qquad (211)$$

Как и во всех аналогичных случаях, эта формула получит гораздо более простой вид, если мы допустим, что вызовы распределяются случайно в индивидуальном и коллективном смысле. В этом случае мы будем иметь:

$$P(>\tau) = P(0)\,\frac{\varepsilon^{\nu}}{(\nu-\varepsilon)(\nu-1)!}\, e^{\frac{(\varepsilon-\nu)\tau}{\overline{T}}}. \qquad (212)$$

Необходимо помнить, что *все эти результаты имеют силу только в том случае, когда вызовы обслуживаются в порядке их возникновения.* Если имеющееся оборудование этому требованию не удовлетворяет, то распределение длительности задержек будет иным. Однако результаты § 135, 137 и 138 не зависят от этого допущения.

§ 137. Показательное распределение длительности разговоров; относительное число задержанных вызовов. Полагая в выражении $P(>\tau)$ $\tau = 0$, мы получим относительное число задержанных вызовов; формула (211) дает:

$$P(>0) = \frac{\nu^{\nu}}{\varepsilon(\nu-1)!}\, P(0)\, \frac{1 - {}^{\infty}\Pi'^{*}_{\lambda-\nu}}{{}^{\infty}P'(\lambda)^{*}}; \qquad (213)$$

звездочки здесь имеют обычное значение. Формула (212) дает более простое выражение:

$$P(>0) = P(0)\,\frac{\varepsilon^{\nu}}{(\nu-\varepsilon)(\nu-1)!}. \qquad (214)$$

§ 138. Показательное распределение длительности разговоров; ожидаемая величина задержки для заведомо задержанного вызова. Ожидаемая величина задержки $\overline{\tau}$, полученная в § 135, есть теоретический аналог того результата, который мы получили бы, если бы произвели большое число пробных вызовов, отметили для каждого из них время ожидания, сложили все эти данные между собою и разделили полученную сумму на число произведенных вызовов. Но многие из этих вызовов не подвергнутся вообще никакой задержке, так что, составляя среднюю величину задержки только что описанным путем, мы распределяем суммарное время ожидания как между задержанными, так и между не задержанными вызовами.

Если же мы хотим знать не эту ожидаемую величину задержки $\bar{\tau}$, а ту задержку $\bar{\tau}_\delta$, какой следует ожидать для вызова *заведомо задержанного*, то мы должны разделить $\bar{\tau}$ на относительное число задержанных вызовов, т. е. на $p(>0)$. Это дает нам:

$$\frac{\bar{\tau}_\delta}{\bar{T}} = \frac{1}{\nu} \frac{\left(\lambda - \nu - \frac{\nu}{\beta}\right)\left(1 - {}^{\infty}\Pi'^{*}_{\lambda-\nu}\right) + \frac{\nu}{\beta}{}^{\infty}P'(\lambda-\nu+1)^{*}}{1 - {}^{\infty}\Pi'^{*}_{\lambda-\nu}}; \qquad (215)$$

в случае же, если вызовы распределяются случайно в индивидуальном и коллективном смысле, мы получаем:

$$\frac{\bar{\tau}_\delta}{\bar{T}} = \frac{1}{\nu - \varepsilon}. \qquad (216)$$

Этими результатами мы заканчиваем наше исследование. Очевидно, мы могли бы, варьируя наши предпосылки, продолжать его безгранично и притом все время оставаться в области таких условий, для которых легко найти аналогичные положения на практике. Однако и то, что нами проделано, показало по всей вероятности читателю те два момента, ради которых оно было предпринято: чрезвычайную сложность тех задач, к которым приводят в общем случае подобного рода исследования, и кое-что (далеко не все) из тех методов, с помощью которых удается преодолевать встречающиеся здесь трудности. Если мы при этом нарисовали картину несколько громоздкую, то в этом еще нет большой беды, ибо в конце концов только древним мастерам боги даровали девственное поле, предоставив им самим создавать орудия для возделывания наиболее легких его участков; нам же, унаследовавшим от них все орудия обработки, не подобает жаловаться, если поле требует все большей затраты усилий.

Задачи

1. Доказать соотношения (170) и (171).

2. Какова вероятность того, что поиски будут длиться более чем k шагов, в случае одного предъискателя, отправляющегося от нормального положения, и при прямом включении? Какова при тех же условиях вероятность того, что длительность поисков превысит ν шагов?

3. Доказать, что показательный закон есть единственное распределение длительности разговоров, обладающее тем свойством, о котором говорится в § 133

Указание. Выражая величину $p(>t)$ через $p(t)$, мы можем найти формулу для $p_{>t}(>t+\Delta t)$, которая верна при любой функции $p(t)$. То свойство, о котором говорится в задаче, требует, чтобы эта величина не зависела от t, что приводит к диференциальному уравнению.

4. Найти вероятность того, что вызов будет задержан, в случае одиночной линии.

5. Величина $\varepsilon(\tau)$, даваемая формулой (198), есть „безусловное" ожидание величины задержки. Она аналогична „средней задержке", составленной для большого числа вызовов, некоторые из которых вообще никакой задержке не подвергаются. Мы могли бы, однако, устранить из этой группы все вызовы, не подвергающиеся задержке, оставляя, таким образом, только „задержанные вызовы"; и мы могли бы затем воспользоваться этой оставшейся группой для составления „средней задержки задержанных вызовов". Такой средней соответствует некоторое „условное ожидание", именно „ожидание величины задержки, если известно, что вызов задержан", которое мы будем обозначать через $\varepsilon_\delta(\tau)$. Найти $\varepsilon_\delta(\tau)$ для случая одиночной линии.

Литература

I. Исследования общего характера

1. Rückle-Lubberger, Der Fernsprechverkehr als Massenerscheinung mit starken Schwankungen.

2. Erlang, Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in the Automatic Telephone Exchanges, „Post Office Electrical Engineers' Journal", Vol. 10 (1918), pp. 189—197; Telephone — Ventetider Et Stykke Sandsynlighedsregning, „Matematisk Tidsskrift" (1920), pp. 25—42.

3. Engset, Die Wahrscheinlichkeitrechnung zur Bestimmung der Wählerzahl in automatischen Fernsprechämtern, „Elektrotechnische Zeitung" 1918), S. 304—305.

4. O'Dell, Theoretical Principles ot the Traffic capacity of Automatic Switches, „Poct Office Electrical Engineers' Journal", Vol. 13 (1920), pp. 209—223.

II. Методы расчета

5. Molina, Computation Formula for the Probability of an Event Happening at Least *C* Times in *N* Trials, „American Mathematical Monthly", Vol. 20 (1913), pp. 190—193; An Interpolation Formula for Poisson's Exponential Binomial Limit, „American Mathematical Monthly", Vol. 22 (1915), pp. 223—224.

6. Campbell, Probability Curves Showing Poisson's Exponential Summation, „Bell System Technical Journal", Vol. 2 (1923), pp. 95—113.

ГЛАВА XI

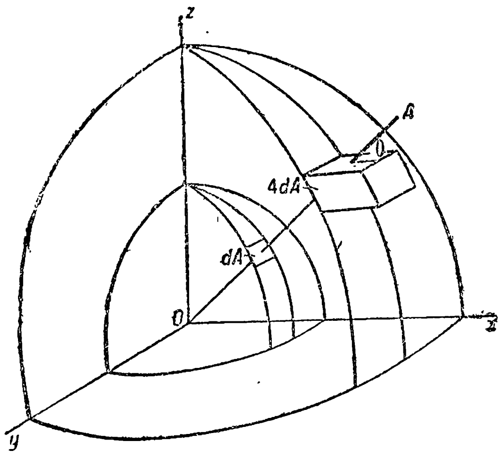
Флуктуации в физических явлениях

§ 139. Предварительные замечания; обозначения. Среди многочисленных важных приложений теории вероятностей к научным проблемам особый класс составляют те, которые связаны с кинетической теорией газов и другими статистическими явлениями, происходящими вследствие молекулярной структуры вещества и известными в физике под общим именем „флуктуаций". Несколько простых примеров подобного рода исследований мы уже имели в § 60, 61, 62 и 84. В настоящей главе мы имеем в виду привести еще целый ряд результатов, имеющих целью иллюстрировать те методы научного подхода, какие свойственны этой области.

В первую очередь мы дадим представляющееся нам наиболее удовлетворительным доказательство теоремы Максвелла о том, что скорости газовых молекул распределяются согласно нормальному закону. Это доказательство, подобно приведенному нами в § 60, основано на идее, которая принадлежит самому Максвеллу; и хотя оно, как мы убедимся, не во всех отношениях удовлетворительно, но зато по крайней мере имеет то преимущество, что приводит к ряду чрезвычайно важных физических и термодинамических выводов. Однако, прежде чем к нему перейти, мы должны остановиться на некоторых предложениях динамики, которые, может быть, недостаточно знакомы читателю.

Мы будем обозначать через x, y, z координаты точки в пространстве и через u, v, w — компоненты скорости в направлениях координатных осей. Чтобы избежать постоянных повторений, мы часто вместо троек x, y, z и u, v, w будем писать соответственно X и U; точно так же мы будем писать dX и dU вместо соответственных более громоздких произведений $dx\,dy\,dz$ и $du\,dv\,dw$. Так, например, мы будем говорить, что данная молекула находится внутри элемента dX, подразумевая при этом, что она помещается внутри элементарного куба, границы которого определяются значениями координат x и $x+dx$, y и $y+dy$, z и $z+dz$. Точно так же мы будем говорить, что данная молекула „принадлежит к классу U", подразумевая под этим, что компоненты ее скорости лежат в элементарной области $du\,dv\,dw$, окружающей точку u, v, w.

§ 140. Динамика столкновений. Рассмотрим две одинаковые, совершенно твердые, совершенно упругие и идеально гладкие сферы, движущиеся соответственно со скоростями U и U'. Пусть одна из них изображается внутренней сферой на черт. 45, а другая соударяется с нею так, что точка соприкосновения лежит где-нибудь внутри элементарной площадки dA. В момент столкновения центр второй сферы должен находиться на поверхности внешней сферы черт. 45; другими словами, в этот момент расстояние между центрами движущихся сфер должно равняться диаметру каждой из них. Далее центр второй сферы обязательно должен помещаться внутри элементарной площадки величины $4dA$, которая соответствует площадке dA внутренней сферы. Мы хотим найти при этих условиях скорости $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ и $\overline{u'}, \overline{v'}, \overline{w'}$ наших двух сфер после столкновения.



Черт. 45.

В силу принципа сохранения количества движения, одна из сфер приобретает при столкновении такое же количество движения, какое теряет другая. Поэтому мы должны иметь:

$$\left.\begin{aligned} \overline{u} - u &= u' - \overline{u'} = g_u, \\ \overline{v} - v &= v' - \overline{v'} = g_v, \\ \overline{w} - w &= w' - \overline{w'} = g_w, \end{aligned}\right\} \qquad (217)$$

где g_u, g_v, g_w введены для сокращения обозначения.

Если поверхность сфер идеально гладкая, то в момент столкновения ускорение должно быть направлено вдоль линии центров OA. Обозначим через λ, μ, ν направляющие косинусы этой прямой; тогда мы будем иметь:

$$\frac{g_u}{\lambda} = \frac{g_v}{\mu} = \frac{g_w}{\nu} = S, \qquad (218)$$

где S снова введено для сокращения обозначений.

Наконец, в силу закона сохранения энергии

$$\overline{u}^2 + \overline{v}^2 + \overline{w}^2 + \overline{u}'^2 + \overline{v}'^2 + \overline{w}'^2 = u^2 + v^2 + w^2 + u'^2 + v'^2 + w'^2. \qquad (219)$$

Перепишем теперь шесть уравнений (217) в виде:

$$\overline{u} = u + g_u,$$
$$\overline{u'} = u' - g_u,$$
$$\cdots\cdots$$

возведем их почленно в квадрат, сложим между собою и из полученного равенства вычтем почленно соотношение (219). Мы получим:

$$2\left(g_u^2 + g_v^2 + g_w^2\right) = 2\left[(u' - u)\,g_u + (v' - v)\,g_v + (w' - w)\,g_w\right],$$

или, пользуясь соотношениями (218) и помня, что сумма квадратов направляющих косинусов для любого направления равна единице:

$$2S^2 = 2S\left[\lambda(u' - u) + \mu(v' - v) + \nu(w' - w)\right].$$

Отсюда следует, что S либо обращается в нуль, либо принимает значение

$$S = \lambda(u' - u) + \mu(v' - v) + \nu(w' - w). \tag{220}$$

В обоих случаях сопоставление формул (217) и (218) дает нам:

$$\begin{aligned} \overline{u} &= u + \lambda S, & \overline{u'} &= u' - \lambda S, \\ \overline{v} &= v + \mu S, & \overline{v'} &= v' - \mu S, \\ \overline{w} &= w + \nu S, & \overline{w'} &= w' - \nu S. \end{aligned} \tag{221}$$

Очевидно, что значение $S = 0$ не соответствует действительности, потому что при нем скорости после столкновения остаются теми же, акими они были до столкновения.

Мы вывели таким образом соотношения, определяющие новые скорости через старые и через направляющие косинусы линии центров в момент столкновения. Но нам желательно знать еще геометрический смысл величины S. С этою целью заметим, что скорость сферы „класса U'" относительно сферы „класса U" имеет компоненты $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$. Абсолютная величина этой относительной скорости равна поэтому

$$R = \sqrt{(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2},$$

а направляющими косинусами ее служат соответственно отношения ее компонент к этой величине R. Обозначая эти направляющие косинусы через λ_R, μ_R, ν_R и подставляя их в выражение (220), мы находим:

$$S = [\lambda\lambda_R + \mu\mu_R + \nu\nu_R]\,R.$$

Но согласно одной из элементарных теорем аналитической геометрии, стоящая в квадратных скобках комбинация направляющих косинусов двух прямых равна косинусу угла между этими прямыми, т. е. между линией центров в момент столкновения и относительной скоростью. Обозначая этот угол через θ, мы можем поэтому написать:

$$S = R\cos\theta. \tag{222}$$

Таким образом S представляет собою проекцию относительной скорости на направление линии центров.

Мы теперь убедимся, что если бы скорости наших сфер до столкновения равнялись соответственно $\overline{U}$ и $\overline{U'}$ (т. е. тем скоростям, которые они фактически имеют после столкновения) и если бы в момент удара линия центров занимала такое же положение, как раньше, то после соударения сферы получили бы скорости U и U' (т. е. те, которыми они фактически обладают до столкновения).

Так как вывод формул (221) имел совершенно общий характер, то компоненты скоростей наших новых сфер после соударения должны определяться формулами:

$$\overline{\overline{u}} = \overline{u} + \lambda\overline{S}, \quad \overline{\overline{u'}} = \overline{u'} - \lambda\overline{S}, \ldots, \tag{223}$$

где символы типа $\overline{\overline{u}}$ означают искомые скорости после удара, а $\overline{S}$ играет такую же роль по отношению к этим новым скоростям, какую S играло по отношению к старым. Так как линия центров по условию сохраняет прежнее положение, то направляющие косинусы остаются неизменными.

Центральным пунктом нашего рассуждения является величина $\overline{S}$. Внося в соотношение (220) изменения соответственно нашему новому положению вещей, мы находим:

$$\overline{S}=\lambda\left(\overline{u'}-\overline{u}\right)+\mu\left(\overline{v'}-\overline{v}\right)+\nu\left(\overline{w'}-\overline{w}\right).$$

Но формулы (221) дают нам $\overline{u'}-\overline{u}=u'-u-2\lambda S$ и аналогичные соотношения для $\overline{v}$ и $\overline{w}$. Пользуясь ими, мы легко приведем формулу, определяющую $\overline{S}$, к виду:

$$\overline{S}=\lambda(u'-u)+\mu(v'-v)+\nu(w'-w)-2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)S,$$

что, очевидно, равносильно соотношению $\overline{S}=-S$.

Подставляя теперь это значение $\overline{S}$ в формулы (223) и сравнивая получившиеся уравнения с соотношениями (221), мы убеждаемся, что U и U' действительно соответственно равны $\overline{\overline{U}}$ и $\overline{\overline{U'}}$, что и требовалось доказать.

§ 141. Поток сквозь поверхность. Рассмотрим теперь множество сфер, движущихся так, как движутся молекулы согласно представлениям кинетической теории газов. Мы предположим, что эти сферы (молекулы) идеально гладки, тверды и упруги, подобно сферам § 140; мы условимся далее обозначать через $p\ (u, v, w, x, y, z, t)\ du\,dv\,dw\,dx\,dy\,dz$ вероятность того, что какая-нибудь молекула в момент t будет находиться внутри параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x, x+dx$; $y, y+dy$; $z, z+dz$, и будет иметь компоненты скорости, заключенные соответственно между u и $u+du$, v и $v+dv$, w и $w+dw$. Нашей целью является, разумеется, найти вид этой функции; однако мы пойдем к этой цели обходным путем, так что в данный момент нам достаточно как-нибудь обозначить искомую функцию. Следует заметить, что мы не ставим требования, чтобы вероятности попадания молекулы в одинаковые объемы обязательно были одинаковы; поэтому мы в нашем обозначении отметим, что величина p может зависеть от x, y, z; точно так же, допуская, что p может зависеть от времени, мы тем самым не требуем, чтобы газ находился в состоянии статистического равновесия.

Итак, мы обозначаем через $p(U, X, t)\,dU\,dX$ вероятность того, что внутри элемента dX в момент t будет находиться молекула класса U, и будем прежде всего искать вероятность того, что такого рода молекула покинет данный объем в течение промежутка времени $(t, t+dt)$, где dt предполагается бесконечно малым. Эту вероятность мы будем обозначать через $P(\overline{X})\,dU\,dX\,dt$.

Обратимся к черт. 46 и заметим, что если какая-нибудь из наших сфер в своем полете пересекает поверхность элементарного параллелепипеда dX, то она должна пересечь какую-нибудь из его шести граней. Поэтому мы найдем искомую вероятность, рассматривая каждую из этих граней в отдельности. Рассмотрим сначала пару граней, перпендикулярных к оси x-ов. Если $u>0$, то молекула класса U не может покинуть данного объема через левую грань, а если $u < 0$, то она не может покинуть его через правую. Поэтому вероятность того, что молекула в течение промежутка dt вылетит через одну из этих граней, в точности совпадает с вероятностью того, что она в момент t будет находиться внутри некоторого слоя dV_2, если $u > 0$, или слоя dV_1, если $u < 0$. Мы находим, таким образом, что вероятность вылета молекулы через одну из двух рассматриваемых граней в течение промежутка dt равна

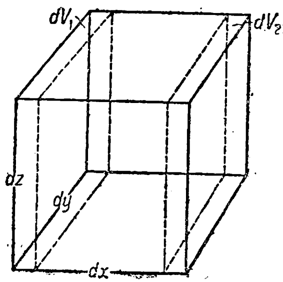
$$p(u, v, w, x+dx, y, z, t)\, du\, dv\, dw\, (u\, dt)\, dy\, dz,$$

если $u > 0$, и

$$p(u, v, w, x, y, z, t)\, du\, dv\, dw\, (-u\, dt)\, dy\, dz,$$

если $u < 0$, причем в первом выражении стоит $x+dx$ вместо x, потому что в этом случае слой примыкает к правой грани dX.

Разумеется, для вероятностей вылета молекулы через две другие пары граней мы получаем совершенно аналогичные выражения, а суммированием всех этих выражений мы могли бы получить $P(\overline{X})$. Однако результат получился бы при этом довольно сложный, так как он должен был бы иметь особый вид для каждой из восьми комбинаций знаков величин u, v, w. Но, к счастью, нам нет надобности выполнять этой операции; нам надо теперь, в точности тем же путем, найти вероятность того, что какая-либо молекула в течение промежутка dt войдет в объем dX; эту вероятность мы обозначим через $P(X)\, dU\, dX\, dt$.



Черт. 46.

Рассуждение для этого случая ничем существенным не отличается от предыдущего; единственное различие состоит в том, что тот слой, в котором должна лежать молекула, чтобы в течение промежутка dt проникнуть в объем dX, лежит теперь *вне* этого объема. Отсюда следует, что вероятность проникновения через одну из двух рассматриваемых граней равна

$$p(u, v, w, x, y, z, t)\, du\, dv\, dw\, (u\, dt)\, dy\, dz,$$

если $u > 0$, и

$$p(u, v, w, x+dx, y, z, t)\, du\, dv\, dw\, (-u\, dt)\, dy\, dz,$$

если $u < 0$.

Нас интересуют не столько величины $P(X)$ и $P(\overline{X})$, взятые в отдельности, сколько их разность $P(X) - P(\overline{X})$, которую легко найти, рассматривая сперва каждую пару граней особо, а затем складывая результаты. Для той пары, которую мы рассматривали выше, мы легко находим, что разность равна

$$[p(u, v, w, x, y, z, t) - p(u, v, w, x+dx, y, z, t)]\, u\, du\, dv\, dw\, dy\, dz\, dt,$$

независимо от знака величины u. Так как dx бесконечно мало, то это можно записать в виде:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} u\, dU\, dX\, dt.$$

Очевидно, что аналогичные вероятности для двух других пар граней соответственно равны

$$-\frac{\partial p}{\partial y} v\, dU\, dX\, dt \quad \text{и} \quad -\frac{\partial p}{\partial z} w\, dU\, dX\, dt,$$

откуда в качестве окончательного результата мы получаем:

$$P(X) - P(\overline{X}) = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right), \tag{224}$$

где обеим частям соответствуют диференциальные элементы $dU\,dX\,dt$.

§ 142. Изменение класса скорости. В целях дальнейших исследований нам нужно найти еще вероятность того, что молекула класса U в течение промежутка dt получит некоторую другую скорость, а также и вероятность обратного перехода.

Вероятность того, что в момент t молекула класса U находится внутри элементарного объема dX, равна $p(U, X, t)\, dU\, dX$. Если в течение промежутка dt эта молекула испытывает столкновение с некоторой другой молекулой класса U', то эта последняя в начальный момент промежутка dt должна была находиться внутри некоторого совершенно определенного элементарного объема. Именно внутри того, который пронизала бы площадь $4dA$ (черт. 45), если бы она двигалась в течение промежутка dt со скоростью, равной относительной скорости R молекулы класса U по отношению к молекуле класса U'.

Нетрудно убедиться, что этот элементарный объем равен $4R\cos\theta\, dA\, dt$, где θ — угол между относительной скоростью R и направлением линии центров в момент столкновения. Формула (222) непосредственно показывает, что величину этого объема мы можем также записать в виде $4S\, dA\, dt$.

Вероятность столкновения рассматриваемого типа равна произведению вероятности того, что молекула класса U находится внутри объема dX (эта вероятность нам известна), на *условную* вероятность того, что в вышеописанном другом объеме найдется молекула класса U', если *известно, что в объеме dX имеется молекула класса U.* Этой условной вероятности мы не знаем. Более того, неизвестно никакого пути, который позволил бы найти ее без предварительного знания функции распределения $p(U, X, t)$, которая, разумеется, нам неизвестна[1]).

---

[1]) Джинс в своей известной книге „Dynamical Theory of Gases“ дает вывод закона Максвелла, который он считает свободным от этого недостатка. Доказательство проводится им в терминах статистической механики, и хотя он действительно обходится без нашего допущения в той точной форме, в какой мы его вводим, мне все же кажется, что, требуя равномерного распределения „точечной пыли“ в своем $6N$-мерном статистическом пространстве, он тем самым в неявном виде вводит некоторое аналогичное допущение.

Таким образом всякое дальнейшее продвижение для нас, повидимому, закрыто. Если мы, однако, допустим, что соседство молекул класса U ни в какой мере не влияет на появление в данном элементе объема молекулы класса U' — если мы, другими словами, постулируем взаимную независимость этих двух событий, — то мы можем воспользоваться безусловной вероятностью наличности молекулы класса U' в элементе $4S\,dA\,dt$ и решить поставленную задачу; эта безусловная вероятность равна

$$p(U', X', t)\,dU'\,4S\,dA\,dt,$$

где X' есть некоторая точка элемента $4S\,dA\,dt$. Поэтому вероятность столкновения двух таких молекул равна

$$4S\,p(U, X, t)\,p(U'\,X'\,t)\,dU\,dX\,dU'\,dA\,dt. \tag{225}$$

Это — вероятность столкновения некоторого определенного типа. Мы не должны, однако, забывать, что мы ищем вероятность перехода молекулы из класса U в какой-либо другой класс, а такой переход может явиться следствием любого столкновения[1]). Поэтому мы должны взять сумму выражений (225) по всем классам, с какими наша молекула класса U может испытать столкновение. Мы получаем:

$$P(\overline{U})\,dU\,dX\,dt = 4dU\,dX\,dt \int dU' \int dA S p(U, X, t)\,p(U', X', t). \tag{226}$$

Это и есть вероятность того, что молекула вследствие столкновения перейдет из класса U в некоторый другой класс. Что касается вероятности обратного перехода молекул в класс U из некоторого другого класса, то ее проще всего вычислить следующим образом. В § 140 мы видели, что если бы соударяющиеся молекулы имели соответственно скорости $\overline{U}$ и $\overline{U'}$, и линия центров имела бы в момент столкновения надлежащее направление, то новые скорости равнялись бы соответственно U и U'. Поэтому, чтобы найти вероятность попадания молекулы в класс U именно этим путем, достаточно перемножить между собою вероятности того, что эти молекулы до столкновения будут иметь скорости, лежащие в таких областях, к каким могут привести столкновения двух молекул классов U и U'. Обозначим эти области соответственно через $d\overline{U}$ и $d\overline{U'}$. Тогда для вероятности столкновения вышеописанного типа мы непосредственно получаем выражение:

$$4Sp(\overline{U}, X, t)\,p(\overline{U'}, \overline{X'}, t)\,d\overline{U}\,dX\,d\overline{U'}\,dA\,dt;$$

С другой стороны, Джинс показал, что если газ очень разрежен и распределен согласно закону Максвелла, то вероятность появления молекулы класса U' в каком-либо элементе не зависит от состояния соседних элементов, что как будто бы *a posteriori* подтверждает аргументацию Максвелла для таких разреженных газов. Для газов, в которых молекулы занимают заметную часть доступного им пространства, условие независимости, как он показал, не выполняется.

[1]) Пока диференциальный элемент dU сохраняет конечные размеры, существуют столкновения, изменяющие скорость нашей молекулы так мало, что она не выходит за пределы класса U. Однако вероятность такого столкновения стремится к нулю вместе с dU, так что наше утверждение остается в силе.

отсюда вероятность попадания молекулы в класс $\overline{U}$ посредством какого бы то ни было столкновения равна

$$P(U)\,dU\,dX\,dt = 4d\overline{U}\,dX\,dt\int d\overline{U'}\int dA\,\overline{S}\,p(\overline{U}, X, t)\,p(\overline{U'}, \overline{X'}, t). \tag{227}$$

Но в § 140 мы видели, что $S = -\overline{S}$, а в § 64 мы убедились, что якобиан преобразования (221) равен единице, вследствие чего

$$dU\,dU' = d\overline{U}\,d\overline{U'}.$$

Отсюда мы непосредственно заключаем, что формула (227) может быть переписана в виде [1]):

$$P(U)\,dU\,dX\,dt = 4dU\,dX\,dt\int dU'\int dA\,S\,p(\overline{U}, X, t)\,p(\overline{U'}, \overline{X'}, t). \tag{228}$$

Как и в § 141, нас интересуют не столько $P(U)$ и $P(\overline{U})$, взятые в отдельности, сколько их разность. Почленное вычитание формулы (226) из формулы (228) дает:

$$P(U) - P(\overline{U}) = 4\int dU'\int dA\,S\,[\overline{p}\,\overline{p'} - p\,p']. \tag{229}$$

Строго говоря, в этой формуле символы $\overline{p}$ и p относятся к элементарному объему, расположенному у точки X, а $\overline{p'}$ и p' — к точкам, расположенным на расстоянии молекулярного диаметра от X. Это явствует из черт. 45. Однако в силу чрезвычайной малости молекул величины $p(U', X', t)$ и $p(\overline{U'}, \overline{X'}, t)$, вообще говоря, мало будут отличаться от величин $p(U', X, t)$ и $p(\overline{U'}, X, t)$. Поэтому во всем дальнейшем мы будем считать все символы формулы (229) относящимися к точке X.

§ 143. Основное уравнение кинетической теории газов. У нас теперь подготовлено все для вывода интегродиференциального уравнения, которое составляет математическую основу всей кинетической теории газов. Предположим, что в момент t мы начинаем наблюдение над элементарным объемом dX и продолжаем это наблюдение до момента $t + dt$. Мы хотим найти вероятность того, что в *конце* этого промежутка наш объем будет содержать молекулу, движущуюся со скоростью U. Другими словами, мы хотим найти $p(U, X, t + dt)\,dU\,dX$.

Мы можем представить эту вероятность как алгебраическую сумму пяти [2]) вероятностей, которые нами уже найдены, а именно:

---

[1]) Мы опускаем знак при S по той же причине, по какой мы не считаемся со знаком якобиана. Он зависит от тех соглашений, какие будут сделаны относительно положительных направлений. Нам нет ни малейшей надобности входить в его обсуждение — для нас вопрос решается тем, что в результате интеграции должна получиться положительная величина.

[2]) Если молекулы подвержены действию внешних сил, как, например, тяготения, то та или иная молекула может вступить в класс U или, наоборот, выйти из него, благодаря присущему ей ускорению, без всяких столкновений. Если бы мы хотели учесть эту возможность, то вместо пяти членов мы получили бы семь. В результате нам пришлось бы приписать к левой части уравнения (230) еще три добавочных члена:

$$F_x\frac{\partial p}{\partial u} + F_y\frac{\partial p}{\partial v} + F_z\frac{\partial p}{\partial w},$$

1. Вероятность того, что молекула класса U находилась в объеме dX в момент t. Она, разумеется, равна $p(U, X, t)\, dU dX$.

2. Вероятность того, что такая молекула находилась внутри dX в момент t, но покинула этот объем в течение промежутка dt. Мы обозначили ее через $P(\overline{X})\, dU dX dt$.

3. Вероятность того, что такая молекула находилась внутри dX в момент t, но претерпела столкновение и потому изменила свою скорость. Эту вероятность мы обозначили через $P(\overline{U})\, dU dX dt$.

4. Вероятность того, что молекула класса U в течение промежутка dt вступила внутрь объема dX. Ее мы обозначили через $P(X)\, dU dX dt$.

5. Вероятность того, что молекула класса, отличного от U, в момент t находилась внутри dX и в течение промежутка dt претерпела столкновение, в результате которого стала молекулой класса U. Эту вероятность мы обозначили через $P(U)\, dU dX dt$.

Соединяя эти пять вероятностей, пользуясь формулами (229) и (224) и замечая, что

$$p(U, X, t+dt) - p(U, X, t) = \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

мы приходим к формуле:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = 4\int dU' \int dAS\, [\overline{p}\overline{p}' - pp']. \tag{230}$$

Это — основное уравнение кинетической теории. Оно представляет собою интегродиференциальное уравнение, среди решений которого должна находиться функция распределения $p(U, X, t)$, которую мы ищем и которая дает нам распределение скоростей молекул газа в состоянии статистического равновесия. Однако это уравнение имеет смысл гораздо более широкий, чем тот результат, который мы из него извлечем; ибо, как мы заметили уже в самом начале, мы все время учитывали возможность изменений во времени. Поэтому если мы выведем газ из состояния равновесия и предоставим его самому себе, то функция распределения, рисующая нам постепенный возврат нашего газа к состоянию равновесия, дается одним из решений уравнения (230). Это уравнение может, таким образом, дать нам целый ряд сведений о подобного рода восстановительных процессах, и оно действительно оказалось в этом отношении чрезвычайно полезным; однако задачи такого рода настолько специальны, что мы не можем уделить им места в настоящем общем курсе.

где F_x, F_y и F_z представляют собою компоненты внешней силы в направлениях координатных осей. Это привело бы к известному аналитическому усложнению и дало бы нам другую функцию распределения Так, например, газ, заключенный в высокий сосуд, имеет внизу этого сосуда большую плотность, чем в его верхней части; если бы притяжение земли отсутствовало, то во всем сосуде установилась бы некоторая средняя плотность. Однако это усложнение не прибавило бы к существующему положению вещей ничего статистически нового, и потому здесь не место его рассматривать. Мы допустим поэтому, что наш газ не подвержен действию внешних сил.

§ 144. Функция *H*. До сих пор мы говорили только о вероятности того, что данный элемент объема содержит молекулу данного определенного типа. Теперь мы ставим вопрос о вероятности того, что данная молекула в данный момент времени будет находиться в некотором определенном состоянии. Допустим, что в сосуде находится N молекул и что мы так или иначе умеем отличать их друг от друга. Допустим далее, что вероятность оказаться в момент t в классе U и в объеме dX для всех этих молекул одинакова.

Обозначим через $p^*(U, X, t)$ вероятность того, что данная определенная молекула в момент t находится в данном месте и в данном состоянии. Тогда, очевидно,

$$p^*(U, X, t) = \frac{1}{N} p(U, X, t). \tag{231}$$

Эта вероятность, разумеется, для всех молекул одинакова.

Вычислим теперь математическое ожидание логарифма этой вероятности по способу, которым мы пользовались в § 76. Мы получаем:

$$\varepsilon_1(\log p^*) = \int dU \int dX\, p^*(U, X, t) \log p^*(U, X, t).$$

Пользуясь формулой (231) и замечая, что интеграл функции $p^*(U, X, t)$, распространенный на всевозможные положения и скорости, необходимо должен равняться единице, мы можем легко привести эту формулу к виду [1]):

$$H(t) = N\varepsilon_1(\log p^*) = -N \log N + \int dU \int dX\, p \log p. \tag{232}$$

Если бы вместо момента t мы выбрали момент $t + dt$, то мы получили бы совершенно аналогичный результат, с тою единственной разницей, что в каждом элементе интеграла t имело бы другое, новое значение. Отсюда следует, что функция $H(t)$ должна удовлетворять диференциальному уравнению:

$$\frac{dH}{dt} = \int dU \int dX \frac{\partial p}{\partial t} (\log p + 1), \tag{233}$$

получаемому почленным диференцированием уравнения (232).

Выражение $\frac{\partial p}{\partial t}$ мы уже имели в § 143; подставляя это выражение в формулу (233), мы получаем:

$$\frac{dH}{dt} = 4 \int dU \int dX \int dU' \int dAS\,(\overline{pp'} - pp')(\log p + 1) -$$
$$- \int dU \int dX \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}\right)(\log p + 1). \tag{234}$$

---

[1]) Это формальное определение функции H, и в особенности самый факт пользования ожиданием логарифма вероятности, составляет собою классическую традицию кинетической теории газов. Напротив, даваемое нами истолкование этой функции отличается от традиционного; последнее читатель может найти в любом хорошем курсе кинетической теории.

Последний член правой части, как легко сообразить, можно переписать в виде:

$$-\int dU\int dX\left(u\frac{\partial}{dx}+v\frac{\partial}{dy}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(p\log p),$$

а этот интеграл, согласно известной формуле Грина, равен интегралу произведения нормальной компоненты скорости U на величину $p\log p$, распространенному на всевозможные значения скорости и на всю поверхность сосуда, в котором заключен газ. Но на поверхности сосуда функция $p\log p$ должна иметь одинаковые значения для положительного и отрицательного направления нормали, потому что в случае неподвижного сосуда каждая молекула, ударяющаяся о стенку, меняет знак нормальной компоненты своей скорости. Поэтому все подинтегральное выражение является нечетной функцией этой нормальной компоненты и при суммировании по возможным значениям U должно давать нуль.

Таким образом мы приходим к выводу, что $\frac{dH}{dt}$ может быть представлено посредством одного только первого члена формулы (234).

Заметим, наконец, что если бы мы с самого начала стали говорить о молекуле класса U' (вместо U), то мы получили бы совершенно такое же выражение, с тою только разницей, что вместо $\log p+1$ теперь стояло бы $\log p'+1$. Если бы речь шла о молекуле класса $\overline{U}$, то мы получили бы:

$$\frac{dH}{dt}=4\int d\overline{U}\int dX\int d\overline{U'}\int dA\overline{S}\,(pp'-\overline{p}\,\overline{p'})\,(\log\overline{p}+1).$$

Но так как

$$\overline{S}\,d\overline{U}\,d\overline{U'}=S\,dU\,dU'$$

(как мы видели в § 142), то это можно переписать в виде:

$$\frac{dH}{dt}=-4\int dU\int dX\int dU'\int dAS\,(\overline{p}\,\overline{p'}-pp')\,(\log\overline{p}+1).$$

Можно было бы вывести еще одно аналогичное выражение, если бы за отправную точку мы взяли молекулу класса $\overline{U'}$. Нам пришлось бы только вместо $\log\overline{p}+1$ писать в последнем выражении $\log\overline{p'}+1$. Складывая между собою четыре полученных таким образом выражения величины $\frac{dH}{dt}$ и деля сумму на 4, мы приходим к следующей более симметричной формуле:

$$\frac{dH}{dt}=\int dU\int dX\int dU'\int dAS\,(\overline{p}\overline{p'}-pp')\left(\log pp'-\log\overline{p}\overline{p'}\right). \qquad (235)$$

Заметим теперь, что если $\overline{pp'}$ превышает pp', то и $\log\overline{pp'}$ превышает $\log pp'$, и наоборот. Поэтому две скобки, стоящие под знаком интеграла, всегда имеют противоположные знаки, если только они не обращаются в нуль. Отсюда следует, что весь интеграл необходимо должен быть отрицательным, потому что S положительно по определению. Исключением может явиться только тот случай, когда выражение $\overline{pp'} - pp'$ тождественно обращается в нуль.

Отсюда мы заключаем, что $\frac{dH}{dt}$, т. е. $\frac{d}{dt}\varepsilon_1(\log p^*)$, никогда не может быть положительным. Другими словами, *для любой динамической системы „молекул" рассматриваемого нами типа математическое ожидание величины* $\log p^*(U, X, t)$ *есть убывающая или, по меньшей мере, невозрастающая функция от времени.*

Но мы видели в § 76, что ожидание величины $\log p$ получает наименьшее значение при совершенно случайном распределении переменной. Поэтому то обстоятельство, что $\varepsilon_1(\log p^*)$ непрестанно убывает, свидетельствует о тенденции газа, в случае когда он предоставлен самому себе, все более и более приближаться к состоянию такого совершенно случайного распределения. Мы могли бы даже принять величину H за меру „отклонения от случайного распределения"; ибо когда H принимает свое минимальное значение, то газ подходит так близко к состоянию совершенно случайного распределения, как только это допускают динамические условия, которым он подчинен.

§ 145. Закон распределения скоростей Максвелла. Посмотрим теперь, каково то наиболее близкое к случайному распределение скоростей и положений молекул, которое допускают динамические условия нашей задачи. Из этих динамических условий существенными являются два: неизменность общего числа молекул и неизменность полной энергии системы. В силу первого из них математическое ожидание числа молекул, очевидно, всегда должно равняться N, т. е. мы должны иметь:

$$N = \int dU \int dXp. \tag{236}$$

В силу второго условия математическое ожидание полной энергии также должно равняться некоторому постоянному числу. В физике обычно обозначают это число через $\frac{3}{2}kNT$, где N — число молекул, T — температура, а k — постоянная, выражающаяся через механический эквивалент теплоты. При этом обозначении наша функция p должна удовлетворять соотношению:

$$W = \frac{3}{2}kNT = \frac{m}{2}\int dU \int dX(u^2 + v^2 + w^2)\,p, \tag{237}$$

где m — масса молекулы.

Наша задача состоит теперь в отыскании минимума интеграла

$$H = \int dU \int dXp\log p,$$

при условии что N и W сохраняют неизменное значение. Следуя методу, указанному в § 76, мы сводим эту задачу к отысканию наименьшего значения интеграла

$$\int dU \int dXp\,[\log p - \lambda - \mu(u^2 + v^2 + w^2)],$$

без всяких дополнительных условий. Если мы заменим p через $p+\delta$ и потребуем, чтобы интеграл, содержащий δ в первой степени, тождественно обращался в нуль, то мы получим:

$$\log p = \lambda - 1 + \mu(u^2 + v^2 + w^2), \tag{238}$$

или

$$p = Ce^{\mu(u^2+v^2+w^2)}. \tag{239}$$

Остается определить постоянные интеграции C и μ. Для этого мы имеем соотношения (236) и (237), которым должна удовлетворять наша функция. Подставляя выражение (239) в формулу (236), мы непосредственно видим, что интеграл может иметь конечную величину только в том случае, если μ отрицательно. В этом случае каждая из трех интеграций по u, v и w дает один и тот же результат $\sqrt{-\frac{\pi}{\mu}}$, так что мы получаем:

$$N = C\left(-\frac{\pi}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \int dX.$$

Так как интеграл выражения dX, распространенный на все возможные положения, дает нам объем сосуда, то в качестве первого условия мы получаем:

$$\frac{N}{V} = C\left(-\frac{\pi}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставляя выражение (239) в формулу (237) и выполняя совершенно аналогичный ряд интеграций, мы получаем второе условие:

$$\frac{N}{V}kT = \frac{m}{2}C\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(-\mu)^{\frac{5}{2}}}.$$

Решая эти уравнения и обозначая через ν величину $\frac{N}{V}$, которая представляет собою число молекул в единице объема, мы находим:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{m}{2kT} = -a, \\ C &= \nu\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} = \nu\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Убедимся теперь, что полученное решение действительно удовлетворяет уравнению (230), ибо мы не должны забывать, что мы получили его не решением этого уравнения, а совсем другим путем. Сопоставляя соотношения (238) и (219), мы легко находим:

$$\log p + \log p' = \log \overline{p} + \log \overline{p'},$$

откуда

$$pp' = \overline{pp'};$$

следовательно, правая часть уравнения (230) обращается в нуль. Левая же его часть, очевидно, также равна нулю, так как p не зависит ни от x, y, z, ни от t.

Сравним, наконец, наше решение с формулой (73). Вспомним прежде всего, что выражение (73) дает нам вероятность того, что молекула находится в данном определенном состоянии (символически на это указывает звездочка). Точнее, оно представляет собою вероятность того, что скорость молекулы равна U, *независимо от того, где находится эта молекула*; величина же $p^*(U, X, t)$ в формуле (231) дает вероятность того, что молекула занимает определенное положение и имеет определенную скорость. Очевидно, что эти два выражения должны быть связаны соотношением:

$$p^*(u, v, w) = \int p^*(U, X, t)\, dX = \frac{V}{N} p(U, X, t).$$

Поэтому формулы (239) и (240) дают нам:

$$p^*(u, v, w) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(u^2+v^2+w^2)}, \tag{241}$$

что, очевидно, совпадает с выражением (73), если мы положим $a = \frac{m}{2kT}$, как мы это уже сделали в формуле (240).

§ 146. Давление. Когда молекула ударяется о стенку сосуда, то нормальная компонента ее количества движения меняет знак. Это явление должно быть обусловлено некоторой силой, действующей на данную молекулу; и очевидно, что молекула с такою же силою должна действовать на стенку. Говоря теоретически, мы должны считать изменение количества движения происходящим мгновенно, так как мы предположили и молекулы и стенки идеально твердыми; действующие силы при этом должны быть бесконечно большими. Таким образом в момент столкновения со стенкой сосуда молекула подвергается действию бесконечно большой силы; во все остальное время никакие силы на нее не действуют.

Обычно мы представляем себе давление газа совсем иначе. Нам кажется, например, что игрушечный воздушный шар натягивается равномерным действием некоторой неизменной силы, приложенной к каждому элементу его поверхности. Но в кинетической теории упругость газа мыслится именно как совокупное действие всех таких ударов, которое представляется нам равномерным только потому, что мы не можем наблюдать отдельных импульсов. Другими словами, в кинетической теории мы должны определять „давление“ как математическое ожидание силы, действующей на единицу площади.

Мы можем притти к нашей цели следующим образом. Если переменная сила f действует в течение промежутка времени T, то средним ее значением называется по определению величина

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dT.$$

Пусть теперь подобного рода сила действует на некоторое тело массы m в направлении оси x-ов. Тогда соотношение между силой и ускорением дает нам:

$$f = m\frac{du}{dt},$$

откуда мы легко находим:

$$\bar{f}T = mu_T - mu_0,$$

где u_0 и u_T соответственно представляют собою скорости данной частицы в начале и в конце промежутка T.

Этот результат можно формулировать так: „Среднее значение переменной силы равно изменению колич ства движения, вызванному ею за промежуток времени T, разделенному на T“. Аналогичная теоретическая формулировка, оперирующая с ожиданиями вместо средних значений, гласит в нашем случае:

„Давление газа на стенки сосуда равно математическому ожиданию изменения количества движения в единицу времени и на единицу площади“.

Так как давление во всех направлениях одинаково, то мы можем ограничиться рассмотрением элементарной площадки, перпендикулярной к оси x-ов. Вероятность того, что за промежуток времени dt о такую площадку ударится молекула со скоростью U, очевидно, равна

$$p(U, X, t)\,u\,dA\,dt,$$

где dA — площадь данного элемента; мы можем ограничиться рассмотрением одних только положительных значений u, так как газ имеется лишь по одну сторону стенки. Каждая такая молекула претерпевает изменение количества движения, равное $2mu$. Произведение этого значения на его вероятность равно, таким образом,

$$2mu^2 p(U, X, t)\,dA\,dt.$$

Суммируя это выражение по всем возможным значениям U (т. е. по всем таким, для которых $u > 0$), мы получаем:

$$P\,dA\,dt = 2m\nu\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} dA\,dt\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} dv\int_{-\infty}^{\infty} dw\,u^2 e^{-\frac{m}{2kT}(u^2+v^2+w^2)},$$

что после вычисления дает $P = \nu kT$.

Заменяя ν его значением $\frac{N}{V}$, мы получаем хорошо известное уравнение состояния совершенного газа:

$$PV = kNT$$

—„произведение упругости на объем пропорционально (абсолютной) температуре".

§ 147. Ожидаемый пробег молекулы. С помощью формулы (76), выражающей вероятность того, что молекула имеет данную быстроту (т. е. абсолютную величину скорости), мы легко можем вычислить ожидание того пути, который молекула пройдет за время dt. В самом деле, этот путь равен $s\,dt$, если быстрота молекулы равна s. Поэтому ожидание пробега равно

$$4dt\,\frac{a^3}{\pi}\int\limits_0^\infty s^3 e^{-as^2} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi a}}\,dt.$$

Так как это ожидание, очевидно, пропорционально соответствующему промежутку времени, какова бы ни была его длительность, то нет необходимости рассматривать величину dt как бесконечно малую. Поэтому мы можем сказать, что математическое ожидание пути, проходимого молекулой в единицу времени, равно

$$D = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \tag{242}$$

§ 148. Число столкновений. В § 142 мы видели, что вероятность столкновения между молекулой класса U и какой-либо другой молекулой в элементарном объеме dX за время dt дается формулой (226). Поэтому ожидаемое число всех столкновений в сосуде за время dt равно интегралу этого выражения, распространенному на всевозможные значения U и X. Однако, вычисляя этот интеграл, мы каждое столкновение считаем дважды, ибо, если U_1 и U_2 — два любых значения скорости, то мы учитываем не только комбинацию $U = U_1$, $U' = U_2$, но и комбинацию $U = U_2$, $U' = U_1$. Поэтому правильную величину искомого ожидания мы получим, беря половину упомянутого интеграла, т. е.

$$\varepsilon = 2dt\int dU\int dX\int dU'\int dA\,Sp\,(U, X, t)\,p'\,(U', X', t).$$

Вычисление этого интеграла довольно сложно; мы ограничимся тем, что приведем окончательный результат, который равен

$$8\nu^2\rho^2 V\sqrt{\frac{\pi kT}{m}}, \tag{243}$$

где ρ — радиус молекулы.

Это — ожидаемое общее число столкновений во всем объеме V. Чтобы найти ожидаемое число столкновений, в которых принимает участие некоторая определенная молекула, мы заметим, что, если бы в каждом столкновении участвовала только *одна* молекула, то это число, очевидно, могло бы быть получено делением на N выражения (243). Но так как в каждом столкновении участвуют *две* молекулы, то правильный результат должен быть вдвое больше. Таким образом ожидаемое число столкновений, которым в единицу времени подвергается одна молекула, равно

$$16\nu\rho^2\sqrt{\frac{\pi kT}{m}}. \tag{244}$$

§ 149. Ожидаемый („средний") свободный пробег. Мы найдем теперь ожидаемую длину пути молекулы между двумя последовательными столкновениями. Так как мы уже нашли ожидаемую длину пути, проходимого молекулой в единицу времени, и ожидаемое число столкновений за это время, то ожидаемый свободный пробег легко может быть получен делением выражения (242) на выражение (244). Таким образом мы получаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi\nu\rho^2}.$$

Этим исчерпывается приблизительно все то, что можно изложить из области кинетической теории газов в элементарном курсе. В сущности, нам удалось ввести большую часть математических понятий, лежащих в ее основании. В своем дальнейшем развитии эта теория содержит, главным образом, приложения к исследованию различных специальных физических систем. Поэтому мы расстанемся теперь с кинетической теорией и обратимся к рассмотрению задач несколько иного рода.

§ 150. Флуктуации плотности. Проблемы, связанные с кинетической теорией, встречаются в самых различных областях науки. Одним из самых простых типов этих задач служат так называемые „флуктуации плотности", с которыми приходится иметь дело во многих случаях.

Так, например, если мы будем наблюдать какой-либо элементарный объем внутри данной массы газа, то одни молекулы будут его покидать, другие, напротив, вступать в него, так что число молекул, а значит, и плотность газа в данном объеме претерпевают непрестанные изменения, флуктуации.

Если мы в сосуд, наполненный газом, введем мелко распыленные частицы какого-либо вещества, то вследствие ударов, получаемых ими от молекул газа, эти частицы будут находиться в состоянии хаотического движения. Число частиц, а значит и плотность „пыли" в данном элементарном объеме, также будет меняться с течением времени.

Наблюдая под микроскопом тонкую пленку жидкости, мы можем заметить движущиеся в ней коллоидальные частицы или живые организмы. Число их в данной определенной области поля зрения претерпевает флуктуации.

Мы так часто встречаемся с этими явлениями, что естественно в общей форме поставить вопрос о природе флуктуаций. В частности, мы постараемся найти вероятность того, что наудачу выбранное наблюдение обнаружит в данной области ровно j частиц.

Для решения этой задачи мы обозначим через $p_j\,dt$ вероятность вступления частицы в данную область за время dt и через $\bar{p}_j\,dt$ — вероятность выхода частицы из той же области за то же время, причем индекс j должен означать, что обе вероятности вычислены в предположении наличности ровно j частиц в данной области в начале промежутка dt. Тогда, обозначая через $P(j, t)$ вероятность того, что в момент t наша область содержит ровно j частиц, легко приходим к системе уравнений:

$$P(0, t+dt) = P(0, t)(1 - p_0\,dt) + P(1, t)\,\bar{p}_1\,dt,$$
$$P(j, t+dt) = P(j-1, t)\,p_{j-1}\,dt + P(j, t)(1 - p_j\,dt - \bar{p}_j\,dt) + P(j+1, t)\,\bar{p}_{j+1}\,dt,$$
$$P(\lambda, t+dt) = P(\lambda-1, t)\,p_{\lambda-1}\,dt + P(\lambda, t)(1 - \bar{p}_\lambda\,dt);$$

последнее уравнение написано в предположении, что всего имеется λ частиц, так что вероятность большего числа частиц обращается в нуль. Если мы считаем запас частиц безграничным, то последнее уравнение следует откинуть.

Эти уравнения легко приводят нас к системе диференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP(0)}{dt} &= -p_0 P(0) + \bar{p}_1 P(1),\\
\frac{dP(j)}{dt} &= p_{j-1} P(j-1) - (p_j + \bar{p}_j) P(j) + \bar{p}_{j+1} P(j+1),\\
\frac{dP(\lambda)}{dt} &= p_{\lambda-1} P(\lambda-1) - \bar{p}_\lambda P(\lambda).
\end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Здесь нам уже нет надобности явно выписывать время как независимую переменную, потому что нам больше не придется иметь дела с моментом $t+dt$.

Если мы теперь допустим, что наша система находится в статистическом равновесии, то производные в уравнениях (245) обращаются в нуль, и мы приходим к системе линейных уравнений, которую очень легко решить. Мы находим:

$$P(j) = \frac{\Delta_j}{\Sigma \Delta_j}, \tag{246}$$

где

$$\Delta_j = \frac{p_0 p_1 \ldots p_{j-1}}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_j},$$

и суммирование распространяется на все возможные значения j.

Мы получили таким образом совершенно общую формулу, которая может быть приложена ко всем задачам подобного рода, независимо от формы области и независимо от того, влияет ли уже имеющееся число молекул на вероятность появления новых и убыли старых; в самом деле, так как относительно формы области никаких предположений сделано не было, то никакой особый вид ее не может нарушить справедливости наших рассуждений; точно так же, мы учли возможность того, что вероятности p и $\overline{p}$ могут быть различными для разных значений j.

Перейдем теперь к более частному случаю газа, молекулы которого подчиняются закону Максвелла. Предположим, что мы имеем дело с элементом совершенно произвольной формы, объем которого равен V, а величина поверхности A. Молекула, находящаяся в момент t внутри этого элемента, покинет его к моменту $t+dt$, если расстояние ее от поверхности не превышает $u\,dt$, а нормальная компонента скорости равна u. Разумеется, мы не можем заранее установить направления нормали, так как по нашему условию выбранный нами элемент может иметь совершенно произвольную форму; однако это не имеет никакого значения, потому что вероятность данного значения u компоненты скорости, как мы знаем, одинакова для всех направлений. Она дается формулой (77). Что касается вероятности попадания молекулы в надлежащую часть элементарного объема, то она, очевидно, равна отношению величины этой части к величине всего объема, т. е. $\frac{Au\,dt}{V}$. Таким образом вероятность того, что молекула, находящаяся внутри нашего элемента в начальный момент промежутка, покинет его в течение данного промежутка, выражается формулой:

$$\frac{A\,dt}{V}\int\limits_0^{\infty} up^*(u)\,du = \frac{A\,dt}{2V\sqrt{a\pi}}.$$

Очевидно, что если в начальный момент промежутка dt наш объем содержит j молекул, то вероятность того, что одна из них покинет его в течение этого промежутка, в j раз превосходит эту величину. Таким образом мы получаем:

$$\overline{p}_j\,dt = \frac{jA\,dt}{2V\sqrt{a\pi}}. \tag{247}$$

Что касается вероятности *вступления* молекулы в область V, то, для того чтобы это произошло, молекула должна лежать вне этой области, на расстоянии, не превышающем $u\,dt$, где u — нормальная компонента ее скорости. Но в силу формул (239) и (240) вероятность того, что молекула попадет в этот слой и будет иметь скорость U, выражается формулой:

$$\nu\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-a(u^2+v^2+w^2)}\,Au\,dt,$$

откуда, интегрируя по всевозможным значениям тангенциальных компонент v и w и по тем значениям компоненты u, которые направлены *в сторону нашего элемента*, мы получаем:

$$p\,dt = \nu A\,dt\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\infty} du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dw\,e^{-a(u^2+v^2+w^2)} = \frac{\nu A\,dt}{2\sqrt{a\pi}}. \tag{248}$$

Подставляя эти результаты в формулу (246) и замечая, что νV есть как раз ожидаемое число частиц в объеме V, мы находим:

$$\Delta_j = \frac{(\nu V)^j}{j!} = \frac{\varepsilon^j}{j!}.$$

Знаменатель же, если считать λ бесконечно большим, получает вид[1]):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} = e^{-\varepsilon},$$

откуда

$$P(j) = \frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!},$$

т. е. мы приходим к хорошо известному нам закону Пуассона.

Интересно воспользоваться этим результатом, чтобы посмотреть, каких размеров могут достигать флуктуации в небольшой части объема газа. Плотность газа пропорциональна, разумеется, числу молекул j. Если поэтому какой-либо элемент содержит $\varepsilon + \delta$ молекул при ожидаемом числе ε, то плотность его ровно в $\frac{j}{\varepsilon} = 1 + \frac{\delta}{\varepsilon}$ раз превосходит свое математическое ожидание.

Мы рассмотрим куб с ребром в 0,01 *см*, помещающийся внутри газа при комнатной температуре и атмосферном давлении. Известно, что при этих условиях на каждый кубический сантиметр приходится около $2{,}5 \cdot 10^{19}$ молекул. Это соответствующее нашему случаю значение ν. Так как $V = 10^{-6}$, то ожидаемое в этом малом объеме число молекул равно $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{13}$. Какой же величины флуктуаций этого числа нам следует ожидать?

Когда мы занимались сводными характеристиками статистического материала, мы привыкли видеть в стандартном отклонении меру рассеяния для данной функции распределения. Согласно приложению X стандартное отклонение в случае формулы Пуассона составляет $\sqrt{\varepsilon}$. В нашем примере это дает около 5 000 000. Таким образом значения величины δ порядка пяти миллионов мы должны рассматривать как вполне естественные. Но такого рода отклонение от ожидаемого числа молекул в данном элементе объема приводит к плотности, которая только в 1,0000002 раза превышает нормальную[2]). Таким образом в элементах рассматриваемого типа мы можем ожидать лишь весьма незначительных колебаний плотности.

---

[1]) Собственно говоря, мы скрытым образом уже при выводе формулы для p предполагали число молекул бесконечным. Ибо если имеется только λ молекул, то присутствие j из них внутри данного элемента очевидным образом влияет на вероятность наличия молекулы в той зоне, из которой она может вступить в данный элемент. Читатель без затруднения может самостоятельно пересмотреть и переделать формулу применительно к этому случаю.

[2]) Это число надо заменить его обратной величиной, если $\delta < 0$.

Но если бы мы рассмотрели куб, измерения которого имеют порядок длины световой волны, то мы нашли бы для него довольно заметные размеры флуктуаций, а при рассмотрении жидкости, в которой суспендированы коллоидальные частицы, значительных флуктуаций можно ожидать и в гораздо больших объемах. Флуктуации такого рода обычно считают причиною оптического явления, известного под именем опалесценции.

§ 151. Быстрота флуктуаций плотности. Может показаться странным, что результаты последнего параграфа совершенно не зависят от формы рассматриваемого элемента объема, ибо вероятность как вхождения, так и выхода молекулы из этого элемента пропорциональна величине его поверхности. В самом деле, согласно нашему результату, если бы мы погрузили в большой сосуд с газом кубическую коробку, имеющую лишь ничтожное отверстие в одной из стенок, то заметные отклонения от средней плотности имели бы в точности такую же вероятность, как если бы наш куб имел только воображаемые стенки, через которые молекулы могут проникать совершенно свободно. Однако *какое-то* различие между этими двумя случаями все же должно существовать, и целью настоящего параграфа является обнаружить, в чем оно состоит.

Вернемся к общему уравнению (245) и подставим в него значения $\bar{p}$ и p, даваемые соответственно формулами (247) и (248). Обозначая через $\frac{1}{a}$ дробь $\frac{\nu A}{2\sqrt{a\pi}}$, так что

$$p_j = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \bar{p}_j = \frac{j}{a\varepsilon},$$

мы будем иметь:

$$\frac{dP(j)}{dt} = \frac{1}{a}P(j-1) - \frac{1}{a}\left(1 + \frac{j}{\varepsilon}\right)P(j) + \frac{1}{a}\frac{j+1}{\varepsilon}P(j+1).$$

Этому диференциальному уравнению должна удовлетворять наша система в течение того периода, когда она возвращается к нормальному состоянию, после того как ее статистическое равновесие так или иначе было нарушено. Мы должны поэтому иметь возможность установить с помощью этого уравнения, с какою быстротою совершается этот возврат к нормальному состоянию.

Все члены правой части этого уравнения содержат a в знаменателе; если бы мы ввели новую единицу времени, определив ее соотношением

$$t = a\tau,$$

то мы пришли бы к уравнению (а значит и к решению), совершенно не зависящему от a. Иными словами, если бы мы имели дело с *двумя* элементами объема, для каждого из которых ожидаемое число молекул равнялось бы ε, но поверхности которых имели бы различную площадь, так что и значение a для них было бы различно, и если бы при исследовании процессов, происходящих в первом элементе, мы за единицу времени взяли a_1 секунд, а во втором — a_2 секунд, то мы получили бы, что первая система вернется в нормальное состояние в течение такого же числа единиц времени, как и вторая. Но это, разумеется, означает, что та из двух систем, у которой единица времени больше, потребует для этого процесса большего числа секунд, и притом в отношении соответствующих значений a. Принимая во внимание определение величины a, мы можем формулировать это следующим образом:

Хотя величина статистических колебаний плотности зависит только от ожидаемой плотности и не обусловлена ни формой данного элемента объема, ни величиною той поверхности, через которую могут проникать молекулы, но продолжительность этих колебаний обратно пропорциональна площади этой ограничивающей поверхности.

Таким образом от формы границы данного элемента зависит не величина флуктуаций, а их продолжительность. Возвращаясь к нашему примеру с двумя кубическими элементами, из которых один окаймлен материальной коробкой, продырявленной только в одном месте, а другой — математической поверхностью, и предполагая, что в некоторый момент оба куба совершенно пусты, мы легко поймем, что „математический" куб наполнится значительно быстрее „физического", потому что эффективная площадь его поверхности во много раз больше. Это вполне согласуется со здравым смыслом. Но если, после того как оба элемента пришли в нормальное состояние, мы произведем над каждым из них длинный ряд наблюдений в случайно выбранные моменты, то следует ожидать, что относительное число наблюдений, дающих то или иное определенное отклонение от нормы, будет в обоих случаях одинаково.

До сих пор мы не нашли еще способа определять, сколько времени надо той или иной системе, чтобы вернуться в состояние равновесия; это весьма нелегкая задача, и причин этой трудности имеется две. Во-первых, возврат к состоянию равновесия имеет асимптотический характер, так что нелегко определить, какой момент следует признать „окончанием" этого процесса. Во-вторых, точный ответ на поставленный вопрос потребовал бы решения системы (245), что далеко не просто.

Однако мы все же можем узнать кое-что по интересующему нас вопросу. Заметим, что решение системы (245) мы можем получить в виде:

$$P(j)=\frac{\varepsilon^j e^{-\varepsilon}}{j!}\left[1+c_0e^{-\alpha t}+c_1e^{-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\alpha t}+c_2e^{-\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)\alpha t}+\ldots\right].$$

Разумеется, полное решение содержит столько таких формул, сколько имеется различных значений j, причем коэфициенты c различны для различных формул. Эти коэфициенты будут зависеть и от того исходного статистического состояния, от которого данная система возвращается к состоянию равновесия. Но природа показательных множителей всегда одна и та же, независимо от значения j и начального состояния системы. Следовательно, множители при коэфициентах c убывают по показательному закону таким образом, что каждый из них по прошествии не более чем $\frac{1}{a}$ секунд составляет лишь $\frac{1}{e}$ своего первоначального значения; отсюда легко найти, что требуется приблизительно в пять раз больше времени, чтобы такой множитель составлял уже всего 1% своего первоначального значения. Поэтому, если только природа того отклонения от нормального состояния, которое претерпела наша система, не приводит к исключительно большим значениям коэфициентов c (в чем можно убедиться только фактическим решением уравнений), то продолжительность восстановительного процесса будет лишь в небольшое число раз превосходить $\frac{1}{a}$. Это все, что мы можем заключить, если не хотим предпринимать громоздких вычислений.

§ 152. Эффект Шоттки (Schottky). В электронной лампе ток, идущий от нити к аноду, представляет собою движение отдельных частиц, которое только в статистическом смысле является равномерным. Как дискретный характер движения частиц, так и неодинаковость отделяющих их друг от друга промежутков времени были бы достаточны для воздействия на любой приемник, способный отличать постоянный ток от переменного. Правда, интенсивность эффекта была бы невелика; однако при надлежащем усилении можно было бы добиться воздействия на слуховую трубку телефона и тем самым достигнуть непосредственной слышимости.

Если бы какое-нибудь другое колебание, например ослабленная телефонная передача, налагалось на первоначальный ток, то оно подвергалось бы усилению в той же степени, как эти статистические флуктуации, и тоже стало бы слышимым. Вероятность такого рода передачи зависела бы тогда от отношения амплитуды данного сигнала к амплитуде статистических колебаний. Если это отношение слишком мало, то шум, вызываемый флуктуациями, заглушит сигналы, и передача ничего не выиграет. Другими словами, даже при наиболее совершенных усилителях существует нижняя граница интенсивности, ниже которой электрические сигналы не могут улавливаться электронными лампами вследствие заглушения их током в первой лампе.

В качестве заключительного примера явлений флуктуации мы рассмотрим эту задачу, имея в виду установить, насколько больше электрической энергии рассеивается в измерительной цепи благодаря этим статистическим колебаниям, чем если бы мы имели дело с совершенно равномерным течением.

Мы допустим:

a) что система подчиняется „правилу суперпозиции", т. е. что ток, вызываемый суммою двух совместно приложенных электродвижущих сил, равен сумме тех двух токов, которые получились бы от двух сил при их раздельном действии;

b) что испускающая и воспринимающая системы находятся в состоянии статистического равновесия;

c) что моменты испускания электронов располагаются во времени случайно в индивидуальном и коллективном смысле;

d) что величина эффекта Шоттки определяется как разность между ожидаемой энергией в измерительной установке и энергией, которая имела бы место в случае, если бы все неправильности в движении электронов были сглажены.

Рассмотрим промежуток времени T, достаточно большой для того, чтобы ток и электродвижущая сила, накопившиеся к его начальному моменту от тех электронов, которые вылетели до этого момента, успели практически обратиться в нуль к моменту его окончания [1]). В момент этого окончания в измерительной установке имеется определенная энергия EI. Величина ее, разумеется, неизвестна; однако мы убедимся, что сможем найти ее *математиче кое ожидание*.

Обозначим через $p(n)$ вероятность того, что в течение промежутка T вылетит ровно n электронов. В силу допущения с) мы непосредственно можем написать:

$$p(n)=\frac{e^{-\nu T}(\nu T)^n}{n!},$$

где ν — интенсивность испускания. Обозначим далее через $P_n(EI)$ условную вероятность того, что в конце интервала T энергия равна EI, если в течение этого интервала вылетело ровно n электронов. Тогда ожидаемая энергия, очевидно, выразится так:

$$\varepsilon(EI)=\sum EIp(n)P_n(EI),$$

где сумма должна быть распространена на всевозможные значения как n, так и EI. Так как E и I изменяются непрерывно, а n — дискретно, то фактически здесь приходится применять как интеграцию, так и алгебраическое суммирование, так что в более подробном виде мы получаем:

$$\varepsilon(EI)=\sum_0^{\infty} p(n)\int_0^{\infty} dE\int_0^{\infty} dIEIP_n(EI). \tag{249}$$

Мы сначала в отдельности рассмотрим входящий в эту формулу интеграл; так как он представляет собою в известном смысле „условное математическое ожидание“, то мы обозначим его через [2]) $\varepsilon_n(EI)$.

Мы знаем, что если мы имеем систему из s точек, случайно расположенных на некотором отрезке, и присоединим к ним еще s' точек также случайно расположенных, то в результате получим случайно расположенную систему $s+s'$ точек. Иначе говоря, взаимоналожение двух случайных систем на одном и том же отрезке дает нам не что иное, как новую расширенную случайно расположенную систему. Мы можем, в частности, отправляясь от системы из $n-1$ точек, добавить еще одну точку; если в обоих случаях расположение точек было случайным, то в результате мы получим случайно расположенную группу из n точек. Обратно, всякую такую группу из n точек мы можем считать полученной именно этим путем.

---

[1]) Заметим между прочим, что (в математическом смысле) нерассеивающие измерительные установки этим условием исключаются; но физики такими установками и не пользуются. Даже те идеальные нерассеивающие цепи, с которыми они имеют дело, представляют собою предельные случаи, к которым приближаются рассеивающие цепи по мере того, как рассеяние стремится к нулю. Такие цепи могут быть исследуемы развиваемыми здесь методами.

[2]) Мы можем не опасаться при этом смешения с ожиданиями высших степеней, так как при рассмотрении данной задачи мы будем иметь дело исключительно с ожиданиями первых степеней.

Условимся поэтому рассматривать те n электронов, вылет которых падает на промежуток T, как соединение двух групп, из которых первая содержит $n-1$ электронов, а вторая — один электрон. Электродвижущие силы и напряжения тока для этих двух групп мы обозначим соответственно через E_1, I_1 и E_2, I_2, а их вероятности — через $P_{n-1}(E_1, I_1)$ и $P_1(E_2, I_2)$. На основании допущения а), сила тока и электродвижущая сила для всей группы из n электронов равны соответственно I_1+I_2 и E_1+E_2, вследствие чего мгновенная энергия должна быть равна

$$(E_1+E_2)(I_1+I_2).$$

Пользуясь этими замечаниями, мы непосредственно получаем следующую формулу:

$$\varepsilon_n(EI)=\int dE_1\int dE_2\int dI_1\int dI_2[E_1I_1+E_2I_1+E_1I_2+E_2I_2]\,P_{n-1}(E_1, I_1)\,P_1(E_2, I_2),$$

причем пределы интеграции во всех случаях одинаковы: от $-\infty$ до $+\infty$.

Исследуем теперь в отдельности четыре слагаемых этого интеграла. В первом из них E_2 и I_2 входят только в выражение $P_1(E_2, I_2)$, интеграл которого, распространенный на всевозможные значения обоих переменных, очевидно, должен быть равен единице. Поэтому весь первый интеграл приводится к виду:

$$\int dE_1\int dI_1E_1I_1P_{n-1}(E_1I_1),$$

что, очевидно, равно $\varepsilon_{n-1}(EI)$, ибо значки при E_1 и I_1 имели целью только отличить эти величины от E_2 и I_2.

Подобным же образом четвертое слагаемое сразу приводится к $\varepsilon_1(EI)$.

Что касается второго слагаемого, то оно может быть представлено как произведение выражений:

$$\int dE_2\int dI_2E_2P_1(E_2, I_2)$$

и

$$\int dE_1\int dI_1I_1P_{n-1}(E_1, I_1),$$

которые, очевидно, представляют собой, соответственно, ожидаемую величину E в конце интервала, в течение которого испускается только один электрон, и ожидаемую величину I в конце интервала, в течение которого испускаются $n-1$ электронов. Мы обозначим эти величины соответственно через $\varepsilon_1(E)$ и $\varepsilon_{n-1}(I)$.

Совершенно аналогичным образом третье слагаемое приводится к произведению величин $\varepsilon_1(I)$ и $\varepsilon_{n-1}(E)$.

Сопоставляя все полученные результаты, мы находим:

$$\varepsilon_n(EI)=\varepsilon_{n-1}(EI)+\varepsilon_1(E)\,\varepsilon_{n-1}(I)+\varepsilon_{n-1}(E)\,\varepsilon_1(I)+\varepsilon_1(EI). \tag{250}$$

Но в силу допущения а) мы должны иметь:

$$\varepsilon_{n-1}(E) = (n-1)\,\varepsilon_1(E),$$
$$\varepsilon_{n-1}(I) = (n-1)\,\varepsilon_1(I);$$

поэтому формула (250) принимает вид:

$$\varepsilon_n(EI) = \varepsilon_{n-1}(EI) + \varepsilon_1(EI) + 2(n-1)\,\varepsilon_1(E)\,\varepsilon_1(I);$$

отсюда, полагая последовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$, мы выводим легко общую формулу:

$$\varepsilon_n(EI) = n\varepsilon_1(EI) + n(n-1)\,\varepsilon_1(E)\,\varepsilon_1(I). \qquad (251)$$

Теперь мы можем вычислить $\varepsilon(EI)$. Подставляя в формулу (249) вместо входящего в нее интеграла найденное нами его значение (251) и производя суммирование, мы в конечном итоге получаем:

$$\varepsilon(EI) = (\nu T)\,\varepsilon_1(EI) + (\nu T)^2\varepsilon_1(E)\,\varepsilon_1(I). \qquad (252)$$

Это соотношение содержит в себе решение нашей задачи: нам остается только истолковать его надлежащим образом. Это мы легко можем сделать, замечая, что момент окончания нашего интервала мы можем считать за случайно выбранный момент наблюдения. Пусть мы имеем любую функцию от времени $f(t)$; выбирая наудачу момент в интервале T, мы с одинаковой вероятностью можем взять его в любом элементарном промежутке dt; следовательно, ожидаемое значение функции $f(t)$ в выбранный нами момент будет:

$$\varepsilon(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

что в точности равно высоте прямоугольника, площадь которого совпадает с площадью, лежащей под графиком $f(t)$ на участке от 0 до T. Иначе говоря, $\varepsilon(f)$ е ть то значение, которое имела бы функция $f(t)$, если бы все ее флуктуации были выравнены.

В случае функций EI, E и I формулы (252), где T значительно превышает продолжительность колебания, вызываемого одним электроном, интеграл от 0 до T охватывает всю площадь соответствующей кривой. Иначе говоря, величина $T\varepsilon_1(EI)$, равна полной энергии, которая рассеивалась бы одним электроном, если бы не вы етало других, и которую мы обозначим через w_1; величины же $\nu T\varepsilon_1(E)$ и $\nu T\varepsilon_1(I)$ представляют собою соответственно вольтаж и силу тока, вызываемые испусканием νT электронов, в предположении, что все флуктуации выравнены; произведение же их равно той постоянной энергии, какую мы имели бы при этих условиях. Мы обозначим ее через W_0 и будем таким образом иметь:

$$\varepsilon(EI) = \nu w_1 + W_0.$$

Согласно определению, установленному нами в допущении d), разность между этой ожидаемой энергией и величиною W_0 представляет собою как раз меру эффекта Шоттки, которую мы ищем. Таким образом мы имеем:

$$S = \nu w_1.$$

Этот простой результат можно формулировать следующим образом: *Если воспринимающая цепь такова, что испускание одного электрона вызвало бы в ней, в отсутствии каких бы то ни было других электронов, рассеяние w_1 единиц энергии, и если испускание происходит с интенсивностью ν электронов в единицу времени, то энергия в цепи превосходит на величину νw_1 ту энергию, какая имела бы место при совершенно равномерном течении электричества.*

Этот результат замечательно прост в сравнении со столь сложным рассуждением; вместе с тем он превосходно удовлетворяет тем экспериментальным требованиям, какие физик предъявляет к подобного рода законам, ибо для измерения величины w_1 достаточно сообщить воспринимающей цепи импульс, подобный тому, какой был бы вызван отдельным электроном, но только более сильный, и измерить всю рассеянную в результате энергию. Сделав затем приведение к одному электрону и умножив на интенсивность испускания ν, мы непосредственно получаем величину эффекта Шоттки.

Литература

I. *Кинетическая теория*

1. А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи.
2. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie.
3. Jeans, The dynamical Theory of Gases.
4. Borel, Mécanique statistique classique.
5. Fowler, Statistical Mechanics.

II. *Общая теория флуктуаций*

6. Fürth, Schwankungserscheinungen in der Physik.

III. *Эффект Шоттки*

7. Schottky, Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitäts eitern, „Annalen der Physik", B. 57 (19 8), S. 541 - 567.
8. Fürth, Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren, „Physikalische Zeitschrift", B. 23 (1922), S. 354—362.
9. Fry, The Theory of the Schroteffekt, „Journal of the Franklin Institute", Vol. 199 (1925), pp. 203—220.

ДОПОЛНЕНИЕ

I. ФАКТОРИАЛЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
1	1	36	3,719 9333 ^{41}	71	8,504 7859 ^{101}
2	2	37	1,376 3753 ^{43}	72	6,123 4458 ^{103}
3	6	38	5,230 2262 ^{44}	73	4,470 1155 ^{105}
4	2,4 ^{1}	39	2,039 7882 ^{46}	74	3,307 8854 ^{107}
5	1,20 ^{2}	40	8,159 1528 ^{47}	75	2,480 9141 ^{109}
6	7,20 ^{2}	41	3,345 2527 ^{49}	76	1,885 4947 ^{111}
7	5,040 ^{3}	42	1,405 0061 ^{51}	77	1,451 8309 ^{113}
8	4,032 0 ^{4}	43	6,041 5263 ^{52}	78	1,132 4281 ^{115}
9	3,628 80 ^{5}	44	2,658 2716 ^{54}	79	8,946 1821 ^{116}
10	3,628 800 ^{6}	45	1,196 2222 ^{56}	80	7,156 9457 ^{118}
11	3,991 6800 ^{7}	46	5,502 6222 ^{57}	81	5,797 1260 ^{120}
12	4,790 0160 ^{8}	47	2,586 2324 ^{59}	82	4,753 6433 ^{122}
13	6,227 0208 ^{9}	48	1,241 3916 ^{61}	83	3,945 5240 ^{124}
14	8,717 8291 ^{10}	49	6,082 8186 ^{62}	84	3,314 2401 ^{126}
15	1,307 6744 ^{12}	50	3,041 4093 ^{64}	85	2,817 1041 ^{128}
16	2,092 2790 ^{13}	51	1,551 1188 ^{66}	86	2,422 7095 ^{130}
17	3,556 8743 ^{14}	52	8,065 8175 ^{67}	87	2,107 7573 ^{132}
18	6,402 3737 ^{15}	53	4,274 8833 ^{69}	88	1,854 8264 ^{134}
19	1,216 4510 ^{17}	54	2,308 4370 ^{71}	89	1,650 7955 ^{136}
20	2,432 9020 ^{18}	55	1,269 6403 ^{73}	90	1,485 7160 ^{138}
21	5,109 0942 ^{19}	56	7,109 9859 ^{74}	91	1,352 0015 ^{140}
22	1,124 0007 ^{21}	57	4,052 6920 ^{76}	92	1,243 8414 ^{142}
23	2,585 2017 ^{22}	58	2,350 5613 ^{78}	93	1,156 7725 ^{144}
24	6,204 4840 ^{23}	59	1,386 8312 ^{80}	94	1,087 3662 ^{146}
25	1,551 1210 ^{25}	60	8,320 9871 ^{81}	95	1,032 9978 ^{148}
26	4,032 9146 ^{26}	61	5,075 8021 ^{83}	96	9,916 7793 ^{149}
27	1,088 8869 ^{28}	62	3,146 9973 ^{85}	97	9,619 2760 ^{151}
28	3,048 8834 ^{29}	63	1,982 6083 ^{87}	98	9,426 8904 ^{153}
29	8,841 7620 ^{30}	64	1,268 8693 ^{89}	99	9,332 6215 ^{155}
30	2,652 5286 ^{32}	65	8,247 6506 ^{90}	100	9,332 6215 ^{157}
31	8,222 8387 ^{33}	66	5,443 4494 ^{92}	101	9,425 9478 ^{159}
32	2,631 3084 ^{35}	67	3,647 1111 ^{94}	102	9,614 4667 ^{161}
33	8,683 3176 ^{36}	68	2,480 0355 ^{96}	103	9,902 9007 ^{163}
34	2,952 3280 ^{38}	69	1,711 2245 ^{98}	104	1,029 9017 ^{166}
35	1,033 3148 ^{40}	70	1,197 8572 ^{100}	105	1,081 3968 ^{168}

I. ФАКТОРИАЛЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

n	$n!$	r	$n!$	n	$n!$
106	1,146 2806 ^{170}	141	1,898 1438 ^{243}	176	1,979 0311 ^{320}
107	1,226 5202 ^{172}	142	2,695 3641 ^{245}	177	3,502 8851 ^{322}
108	1,324 6418 ^{174}	143	3,854 3707 ^{247}	178	6,235 1354 ^{324}
109	1,443 8596 ^{176}	144	5,550 2938 ^{249}	179	1,116 0892 ^{327}
110	1,588 2455 ^{178}	145	8,047 9261 ^{251}	180	2,008 9606 ^{329}
111	1,762 9526 ^{180}	146	1,174 9972 ^{254}	181	3,636 2187 ^{331}
112	1,974 5069 ^{182}	147	1,727 2459 ^{256}	182	6,617 9181 ^{333}
113	2,231 1927 ^{184}	148	2,556 3239 ^{258}	183	1,211 0790 ^{336}
114	2,543 5597 ^{186}	149	3,808 9226 ^{260}	184	2,228 3854 ^{338}
115	2,925 0937 ^{188}	150	5,713 3840 ^{262}	185	4,122 5130 ^{340}
116	3,393 1087 ^{190}	151	8,627 2098 ^{264}	186	7,667 8741 ^{342}
117	3,969 9372 ^{192}	152	1,311 3359 ^{267}	187	1,433 8925 ^{345}
118	4,684 5258 ^{194}	153	2,006 3439 ^{269}	188	2,695 7178 ^{347}
119	5,574 5858 ^{196}	154	3,089 7696 ^{271}	189	5,094 9067 ^{349}
120	6,689 5029 ^{198}	155	4,789 1429 ^{273}	190	9,680 3227 ^{351}
121	8,094 2985 ^{200}	156	7,471 0629 ^{275}	191	1,848 9416 ^{354}
122	9,875 0442 ^{202}	157	1,172 9569 ^{278}	192	3,549 9679 ^{356}
123	1,214 6304 ^{205}	158	1,853 2719 ^{280}	193	6,851 4381 ^{358}
124	1,506 1417 ^{207}	159	2,946 7023 ^{282}	194	1,329 1790 ^{361}
125	1,882 6772 ^{209}	160	4,714 7236 ^{284}	195	2,591 8990 ^{363}
126	2,372 1732 ^{211}	161	7,590 7051 ^{286}	196	5,080 1221 ^{365}
127	3,012 6600 ^{213}	162	1,229 6942 ^{289}	197	1,000 7841 ^{368}
128	3,856 2048 ^{215}	163	2,004 4016 ^{291}	198	1,981 5524 ^{370}
129	4,974 5042 ^{217}	164	3,287 2186 ^{293}	199	3,943 2893 ^{372}
130	6,466 8555 ^{219}	165	5,423 9107 ^{295}	200	7,886 5787 ^{374}
131	8,471 5807 ^{221}	166	9,003 6917 ^{297}		
132	1,118 2487 ^{224}	167	1,503 6165 ^{300}		
133	1,487 2707 ^{226}	168	2,526 0757 ^{302}		
134	1,992 9427 ^{228}	169	4,269 0680 ^{304}		
135	2,690 4727 ^{230}	170	7,257 4156 ^{306}		
136	3,659 0429 ^{232}	171	1,241 0181 ^{309}		
137	5,012 8887 ^{234}	172	2,134 5511 ^{311}		
138	6,917 7865 ^{236}	173	3,692 7734 ^{313}		
139	9,615 7232 ^{238}	174	6,425 4257 ^{315}		
140	1,346 2012 ^{241}	175	1,124 4495 ^{318}		

$\frac{1}{2}! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$; $(n+\frac{1}{2})! = (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
1	0,000 000 0000	41	49,524 428 9249	81	120,763 212 7414
2	0,301 029 9957	42	51,147 678 2153	82	122,677 026 5938
3	0,778 151 2504	43	52,781 146 6709	83	124,596 104 6861
4	1,380 211 2417	44	54,424 599 3473	84	126,520 383 9722
5	2,079 181 2460	45	56,077 811 8611	85	128,449 802 8979
6	2,857 332 4964	46	57,740 569 6928	86	130,384 301 3492
7	3,702 430 5364	47	59,412 667 5507	87	132,323 820 6018
8	4,605 520 5234	48	61,093 908 7881	88	134,268 303 2739
9	5,559 763 0329	49	62,784 104 8681	89	136,217 693 2806
10	6,559 763 0329	50	64,483 074 8725	90	138,171 935 7900
11	7,601 155 7180	51	66,190 645 0486	91	140,130 977 1823
12	8,680 336 9641	52	67,906 648 3922	92	142,094 765 0097
13	9,794 280 3164	53	69,630 924 2618	93	144,063 247 9582
14	10,940 408 3521	54	71,363 318 0216	94	146,036 375 8118
15	12,116 499 6111	55	73,103 680 7111	95	148,014 099 4171
16	13,320 619 5938	56	74,851 868 7381	96	149,996 370 6502
17	14,551 068 5152	57	76,607 743 5938	97	151,983 142 3844
18	15,806 341 0203	58	78,371 171 5874	98	153,974 368 4601
19	17,085 094 6212	59	80,142 023 5990	99	155,970 003 6547
20	18,386 124 6169	60	81,920 174 8494	100	157,970 003 6547
21	19,708 343 9116	61	83,705 504 6844	101	159,974 325 0285
22	21,050 766 5924	62	85,497 896 3739	102	161,982 925 2003
23	22,412 494 4285	63	87,297 236 9234	103	163,995 762 4250
24	23,792 705 6702	64	89,103 416 8973	104	166,012 795 7643
25	25,190 645 6788	65	90,916 330 2540	105	168,033 985 0633
26	26,605 619 0268	66	92,735 874 1895	106	170,059 290 9286
27	28,036 982 7910	67	94,561 948 9922	107	172,088 674 7063
28	29,484 140 8223	68	96,394 457 9049	108	174,122 098 4618
29	30,946 538 8202	69	98,233 306 9957	109	176,159 524 9597
30	32,423 660 0749	70	100,078 405 0357	110	178,200 917 6449
31	33,915 021 7688	71	101,929 663 3844	111	180,246 240 6237
32	35,420 171 7471	72	103,786 995 8808	112	182,295 458 6463
33	36,938 685 6870	73	105,650 318 7410	113	184,348 537 0898
34	38,470 164 6040	74	107,519 550 4607	114	186,405 441 9411
35	40,014 232 6484	75	109,394 611 7241	115	188,466 139 7815
36	41,570 535 1491	76	111,275 425 3164	116	190,530 597 7707
37	43,138 736 8732	77	113,161 916 0415	117	192,598 783 6325
38	44,718 920 4698	78	115,054 010 6442	118	194,670 665 6398
39	46,309 585 0768	79	116,951 637 7355	119	196,746 212 6012
40	47,911 645 0682	80	118,854 727 7225	120	198,825 393 8472

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
121	200,908 179 2175	161	286,880 282 1167	201	377,200 084 6975
122	202,994 539 0482	162	289,089 797 1313	202	379,505 436 0669
123	205,084 444 1597	163	291,301 984 7357	203	381,812 932 1048
124	207,177 865 8448	164	293,516 828 5837	204	384,122 562 2722
125	209,274 775 8578	165	295,734 312 5279	205	386,434 316 1333
126	211,375 146 4029	166	297,954 420 6160	206	388,748 183 3537
127	213,478 950 1239	167	300,177 137 0871	207	391,064 153 6991
128	215,586 160 0935	168	302,402 446 0688	208	393,382 217 0341
129	217,696 749 8038	169	304,630 333 0735	209	395,702 363 3202
130	219,810 693 1561	170	306,860 781 9948	210	398,024 582 6149
131	221,927 964 4518	171	309,093 778 1052	211	400,348 865 0702
132	224,048 538 3830	172	311,329 306 5521	212	402,675 200 9312
133	226,172 390 0240	173	313,567 352 6553	213	405,003 580 5346
134	228,299 494 8223	174	315,807 901 9035	214	407,333 994 3080
135	230,429 828 5908	175	318,050 939 9522	215	409,666 432 7679
136	232,563 367 4992	176	320,296 452 6200	216	412,000 886 5190
137	234,700 088 0664	177	322,544 425 8864	217	414,337 346 2529
138	236,839 967 1528	178	324,794 845 8887	218	416,675 802 7465
139	238,982 981 9530	179	327,047 698 9197	219	419,016 246 8613
140	241,129 109 9887	180	329,302 971 4248	220	421,358 669 5421
141	243,278 329 1014	181	331,560 649 9997	221	423,703 061 8158
142	245,430 617 4457	182	333,820 721 3876	222	426,049 414 7903
143	247,585 953 4832	183	336,083 172 4774	223	428,397 719 6533
144	249,744 315 9753	184	338,347 990 3004	224	430,747 967 6717
145	251,905 683 9775	185	340,615 162 0288	225	433,100 150 1898
146	254,070 036 8333	186	342,884 674 9730	226	435,454 258 6289
147	256,237 354 1681	187	345,156 516 5795	227	437,810 284 4861
148	258,407 615 8835	188	347,430 674 4288	228	440,168 219 3331
149	260,580 802 1519	189	349,707 136 2330	229	442,528 054 8154
150	262,756 893 4109	190	351,985 889 8339	230	444,889 782 6515
151	264,935 870 3582	191	354,266 923 2012	231	447,253 394 6314
152	267,117 713 9462	192	356,550 224 4299	232	449,618 882 6162
153	269,302 405 3770	193	358,835 781 7389	233	451,986 238 5373
154	271,489 926 0978	194	361,123 583 4688	234	454,355 454 3947
155	273,680 257 7960	195	363,413 618 0802	235	456,726 522 2570
156	275,873 382 3943	196	365,705 874 1515	236	459,099 434 2599
157	278,069 282 0468	197	368,000 340 3777	237	461,474 182 6059
158	280,267 939 1337	198	370,297 005 5680	238	463,850 759 5630
159	282,469 336 2580	199	372,595 858 6444	239	466,229 157 4639
160	284,673 456 2407	200	374,896 888 6400	240	468,609 368 7056

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
241	470,991 385 7482	281	567,673 298 3669	321	666,832 041 9066
242	473,375 201 1142	282	570,123 547 4752	322	669,339 897 7783
243	475,760 807 3878	283	572,575 333 9108	323	671,849 100 3006
244	478,148 197 2141	284	575,028 652 2508	324	674,359 645 3108
245	480,537 363 2985	285	577,483 497 1108	325	676,871 528 6718
246	482,928 298 4056	286	579,939 863 1439	326	679,384 746 2718
247	485,320 995 3589	287	582,397 745 0407	327	681,899 294 0245
248	487,715 447 0397	288	584,857 137 5284	328	684,415 167 8682
249	490,111 646 3868	289	587,318 035 3712	329	686,932 363 7662
250	492,509 586 3955	290	589,780 433 3691	330	689,450 877 7060
251	494,909 260 1169	291	592,244 326 3581	331	691,970 705 6998
252	497,310 660 6577	292	594,709 709 2095	332	694,491 843 7835
253	499,713 781 1789	293	597,176 576 8299	333	697,014 288 0170
254	502,118 614 8955	294	599,644 924 1603	334	699,538 034 4838
255	504,525 155 0760	295	602,114 746 1763	355	702,063 079 2909
256	506,933 395 0413	296	604,586 037 8873	336	704,589 418 5683
257	509,343 328 1646	297	607,058 794 3367	337	707,117 048 4691
258	511,754 947 8706	298	609,533 010 6007	338	709,645 965 1694
259	514,168 247 6346	299	612,008 681 7891	339	712,176 164 8676
260	516,583 220 9826	300	614,485 803 0438	340	714,707 643 7847
261	518,999 861 4900	301	616,964 369 5394	341	717,240 398 1636
262	521,418 162 7813	302	619,444 376 4823	342	719,774 424 2697
263	523,838 118 5298	303	621,925 819 1108	343	722,309 718 3897
264	526,259 722 4566	304	624,408 692 6944	344	724,846 276 8323
265	528,682 968 3306	305	626,892 992 5338	345	727,384 095 9274
266	531,107 849 9672	306	629,378 713 9603	346	729,923 172 0262
267	533,534 361 2286	307	631,865 852 3357	347	732,463 501 5010
268	535,962 496 0226	308	634,354 403 0522	348	735,005 080 7449
269	538,392 248 3026	309	636,844 361 5317	349	737,547 906 1719
270	540,823 612 0668	310	639,335 723 2255	350	740,091 974 2162
271	543,256 581 3576	311	641,828 483 6145	351	742,637 281 3327
272	545,691 150 2617	312	644,322 638 2085	352	745,183 823 9962
273	548,127 312 9087	313	646,818 182 5461	353	747,731 598 7016
274	550,565 063 4715	314	649,315 112 1942	354	750,280 601 9636
275	553,004 396 1654	315	651,813 422 7480	355	752,830 830 3166
276	555,445 305 2474	316	654,313 109 8306	356	755,382 280 3146
277	557,887 785 0165	317	656,814 169 0928	357	757,934 948 5307
278	560,331 829 8124	318	659,316 596 2128	358	760,488 831 5574
279	562,777 434 0157	319	661,820 386 8958	359	763,043 926 0060
280	565,224 592 0470	320	664,325 536 8742	360	765,600 228 5067

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
361	768,157 735 7086	401	871,409 558 5503	441	976,394 942 7311
362	770,716 444 2792	402	874,013 784 6034	442	979,040 365 0005
363	773,276 350 9042	403	876,619 089 6496	443	981,686 768 7267
364	775,837 452 2878	404	879,225 471 0147	444	984,334 151 6968
365	778,399 745 1523	405	881,832 926 0379	445	986,982 511 7078
366	780,963 226 2377	406	884,441 452 0715	446	989,631 846 5665
367	783,527 892 3019	407	887,051 046 4807	447	992,282 154 0896
368	786,093 740 1206	408	889,661 706 6438	448	994,933 432 1036
369	788,660 766 4868	409	892,273 429 9518	449	997,585 678 4446
370	791,228 968 2108	410	894,886 213 8085	450	1000,238 890 9584
371	793,798 342 1205	411	897,500 055 6304	451	1002,893 067 5003
372	796,368 885 0603	412	900,114 952 8464	452	1005,548 205 9351
373	798,940 593 8922	413	902,730 902 8981	453	1008,204 304 1371
374	801,513 465 4944	414	905,347 903 2392	454	1010,861 359 9900
375	804,087 496 7621	415	907,965 951 3359	455	1013,519 371 3866
376	806,662 684 6070	416	910,585 044 6665	456	1016,178 336 2293
377	809,239 025 9572	417	913,205 180 7215	457	1018,838 252 4293
378	811,816 517 7571	418	915,826 357 0033	458	1021,499 117 9074
379	814,395 156 9670	419	918,448 571 0263	459	1024,160 930 5929
380	816,974 940 5636	420	921,071 820 3167	460	1026,823 688 4246
381	819,555 865 5393	421	923,696 102 4125	461	1029,487 389 3500
382	822,137 928 9022	422	926,321 414 8635	462	1032,152 031 3255
383	824,721 127 6762	423	928,947 755 2308	463	1034,817 612 3165
384	827,305 458 9006	424	931,575 121 0874	464	1037,484 130 2971
385	829,890 919 6301	425	934,203 510 0175	465	1040,151 583 2500
386	832,477 506 9347	426	936,832 919 6166	466	1042,819 969 1667
387	835,065 217 8998	427	939,463 347 4916	467	1045,489 286 0472
388	837,654 049 6254	428	942,094 791 2606	468	1048,159 531 9003
389	840,243 999 2267	429	944,727 248 5528	469	1050,830 704 7430
390	842,835 063 8337	430	947,360 717 0084	470	1053,502 802 6010
391	845,427 240 5911	431	949,995 194 2785	471	1056,175 823 5081
392	848,020 526 6581	432	952,630 678 0254	472	1058,849 765 5067
393	850,614 919 2085	433	955,267 165 9217	473	1061,524 626 6475
394	853,210 415 4303	434	957,904 655 6512	474	1064,200 404 9891
395	855,807 012 5259	435	960,543 144 9082	475	1066,877 098 5988
396	858,404 707 7119	436	963,182 631 3974	476	1069,554 705 5515
397	861,003 498 2186	437	965,823 112 8344	477	1072,233 223 9305
398	863,603 381 2907	438	968,464 586 9449	478	1074,912 651 8271
399	866,204 354 1864	439	971,107 051 4652	479	1077,592 987 3405
400	868,806 414 1777	440	973,750 504 1416	480	1080,274 228 5779

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
481	1082,956 373 6543	521	1190,962 607 0282	561	1300,302 596 6937
482	1085,639 420 6925	522	1193,680 277 5312	562	1303,052 333 0093
483	1088,323 367 8233	523	1196,398 779 2200	563	1305,802 841 4042
484	1091,008 213 1849	524	1199,118 110 5070	564	1308,554 120 5081
485	1093,693 954 9235	525	1201,838 269 8104	565	1311,306 168 9560
486	1096,380 591 1928	526	1204,559 255 5546	566	1314,058 985 3871
487	1099,068 120 1540	527	1207,281 066 1698	567	1316,812 568 4460
488	1101,756 539 9760	528	1210,003 700 0923	568	1319,566 916 7818
489	1104,445 848 8351	529	1212,727 155 7644	569	1322,322 029 0481
490	1107,136 044 9152	530	1215,451 431 6340	570	1325,077 903 9038
491	1109,827 126 4073	531	1218,176 526 1550	571	1327,834 540 0121
492	1112,519 091 5101	532	1220,902 437 7873	572	1330,591 936 0409
493	1115,211 938 4293	533	1223,629 164 9964	573	1333,350 090 6628
494	1117,905 665 3783	534	1226,356 706 2534	574	1336,109 002 5552
495	1120,600 270 5772	535	1229,085 060 0354	575	1338,868 670 3999
496	1123,295 752 2537	536	1231,814 224 8251	576	1341,629 092 8833
497	1125,992 108 6424	537	1234,544 199 1108	577	1344,390 268 6965
498	1128,689 337 9852	538	1237,274 981 3865	578	1347,152 196 5349
499	1131,387 438 5308	539	1240,006 570 1517	579	1349,914 875 0986
500	1134,086 408 5351	540	1242,738 963 9115	580	1352,678 303 0922
501	1136,786 246 2610	541	1245,472 161 1766	581	1355,442 479 2246
502	1139,486 949 9781	542	1248,206 160 4631	582	1358,207 402 2092
503	1142,188 517 9632	543	1250,940 960 2927	583	1360,973 070 7640
504	1144,890 948 4996	544	1253,676 559 1924	584	1363,739 483 6111
505	1147,594 239 8778	545	1256,412 955 6947	585	1366,506 639 4772
506	1150,298 390 3946	546	1259,150 148 3374	586	1369,274 537 0932
507	1153,003 398 3539	547	1261,888 135 6637	587	1372,043 175 1945
508	1155,709 262 0662	548	1264,626 916 2222	588	1374,812 552 5205
509	1158,415 979 8486	549	1267,366 488 5667	589	1377,582 667 8153
510	1161,123 550 0247	550	1270,106 851 2562	590	1380,353 519 8270
511	1163,831 970 9248	551	1272,848 002 8550	591	1383,125 107 3079
512	1166,541 240 8858	552	1275,589 941 9327	592	1385,897 429 0146
513	1169,251 358 2509	553	1278,332 667 0640	593	1388,670 483 7079
514	1171,962 321 3699	554	1281,076 176 8288	594	1391,444 270 1529
515	1174,674 128 5989	555	1283,820 469 8119	595	1394,218 787 1186
516	1177,386 778 3005	556	1286,565 544 6035	596	1396,994 033 3784
517	1180,100 268 8436	557	1289,311 399 7987	597	1399,770 007 7095
518	1182,814 598 6034	558	1292,058 033 9976	598	1402,546 708 8935
519	1185,529 765 9612	559	1294,805 445 8055	599	1405,324 135 7159
520	1188,245 769 3049	560	1297,553 633 8325	600	1408,102 286 9663

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
601	1410,881 161 4383	641	1522,615 809 4311	681	1635,434 357 6708
602	1413,660 757 9295	642	1525,423 344 4591	682	1638,268 142 0455
603	1416,441 075 2417	643	1528,231 555 4320	683	1641,102 562 7492
604	1419,222 112 1803	644	1531,040 441 2994	684	1643,937 618 8509
605	1422,003 867 5550	645	1533,850 001 0140	685	1646,773 309 4224
606	1424,786 340 1791	646	1536,660 233 5320	686	1649,609 633 5381
607	1427,569 528 8702	647	1539,471 137 8127	687	1652,446 590 2752
608	1430,353 432 4495	648	1542,282 712 8186	688	1655,284 178 7134
609	1433,138 049 7421	649	1545,094 957 5154	689	1658,122 397 9353
610	1435,923 379 5771	650	1547,907 870 8720	690	1660,961 247 0260
611	1438,709 420 7874	651	1550,721 451 8606	691	1663,800 725 0734
612	144 ,496 172 2095	652	1553,535 699 4563	692	1666,640 831 1679
613	1444,283 632 6840	653	1556,350 612 6376	693	1669,481 564 4025
614	1447,071 801 0552	654	1559,166 190 3859	694	1672,322 923 8729
615	1449,860 676 1709	655	1561,982 431 6859	695	1675,164 908 6775
616	1452,650 256 8831	656	1564,799 335 5253	696	1678,007 517 9171
617	1455,440 542 0471	657	1567,616 900 8948	697	1680,850 750 6952
618	1458,231 530 5222	658	1570,435 126 7885	698	1683,694 606 1179
619	1461,023 221 1712	659	1573,254 012 2031	699	1686,539 083 2936
620	1463,815 612 8607	660	1576,073 556 1386	700	1689,384 181 3336
621	1466,608 704 4609	661	1578,893 757 5931	701	1692,229 899 3516
622	1469,402 494 8456	662	1581,714 615 5875	702	1695,076 236 4637
623	1472,196 982 8923	663	1584,536 129 1159	703	1697,923 191 7887
624	1474,992 167 4819	664	1587,358 297 1953	704	1700,770 764 4479
625	1477,788 047 4993	665	1590,181 118 8406	705	1703,618 953 5649
626	1430,584 621 8325	666	1593,004 593 0698	706	1706,467 758 2659
627	1483,381 889 3733	667	1595,828 718 9037	707	1709,317 177 6797
628	1486,179 849 0171	668	1598,653 495 3662	708	1712,167 210 9374
629	1488,978 499 6625	669	1601,478 921 4839	709	1715,017 857 1726
630	1491,777 840 2120	670	1604,304 996 2866	710	1717,869 115 5213
631	1494,577 869 5712	671	1607,131 718 8068	711	1720,720 985 1220
632	1497,378 586 6495	672	1609,959 088 0798	712	1723,573 465 1157
633	1500,179 990 3595	673	1612,787 103 1441	713	1726,426 554 6455
634	1502,982 079 6174	674	1615,615 763 0406	714	1729,280 252 8573
635	1505,784 853 3427	675	1618,445 066 8134	715	1732,134 558 8991
636	1508,588 310 4583	676	1621,275 013 5094	716	1734,989 471 9214
637	1511,392 449 8907	677	1624,105 602 1781	717	1737,844 991 0771
638	1514,197 270 5694	678	1626,936 831 8719	718	1740,701 115 5213
639	1517,002 771 4275	679	1629,768 701 6462	719	1743,557 844 4117
640	1519,808 951 4015	680	1632,601 210 5589	720	1746,415 176 9081

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	log n!	n	log n!	n	log n!
721	1749,273 112 1728	761	1864,075 452 8940	801	1979,790 716 7537
722	1752,131 649 3704	762	1866,957 407 8654	802	1982,694 891 1220
723	1754,990 787 6677	763	1869,839 932 4033	803	1985,599 606 6673
724	1757,850 526 2339	764	1872,723 025 7619	804	1988,504 862 7160
725	1760,710 864 2405	765	1875,606 687 1971	805	1991,410 658 5964
726	1763,571 800 8612	766	1878,490 915 9667	806	1994,316 993 6382
727	1766,433 335 2720	767	1881,375 711 3306	807	1997,223 867 1729
728	1769,295 466 6514	768	1884,261 072 5507	808	2000,131 278 5337
729	1772,158 194 1797	769	1887,146 998 8905	809	2003,039 227 0553
730	1775,021 517 0398	770	1890,033 489 6156	810	2005,947 712 0742
731	1777,885 434 4167	771	1892,920 543 9937	811	2008,856 732 9284
732	1780,749 945 4978	772	1895,808 161 2940	812	2011,766 288 9576
733	1783,615 049 4724	733	1898,696 340 7879	813	2014,676 379 5032
734	1786,480 745 5324	774	1901,585 081 7486	814	2017,587 003 9081
735	1789,347 032 8714	775	1904,474 383 4511	815	2020,498 161 5169
736	1792,213 910 6858	776	1907,364 245 1724	816	2023,409 851 6756
737	1795,081 378 1736	777	1910,254 666 1912	817	2026,322 073 7322
738	1797,949 434 5355	778	1913,145 645 7882	818	2029,234 827 0358
739	1800,818 078 9739	779	1916,037 183 2459	819	2032,148 110 9376
740	1803,687 310 6936	780	1918,929 277 8485	820	2035,061 924 7900
741	1806,557 128 9016	781	1921,821 928 8824	821	2037,976 267 9471
742	1809,427 532 8069	782	1924,715 135 6355	822	2040,891 139 7646
743	1812,298 521 6206	783	1927,608 897 3975	823	2043,806 539 5998
744	1815,170 094 5562	784	1930,503 213 4602	824	2046,722 466 8115
745	1818,042 250 8289	785	1933,398 083 1170	825	2049,638 920 7601
746	1820,914 989 6564	786	1936,293 505 6630	826	2052,555 900 8074
747	1823,788 310 2582	787	1939,189 480 3954	827	2055,473 406 3170
748	1826,662 211 8561	788	1942,086 006 6129	828	2058,391 436 6537
749	1829,536 693 6738	789	1944,983 083 6161	829	2061,309 991 1843
750	1832,411 754 9372	790	1947,880 710 7074	830	2064,229 069 2767
751	1835,287 394 8742	791	1950,778 887 1909	831	2067,148 670 3005
752	1838,163 612 7147	792	1953,677 612 3724	832	2070,068 793 6267
753	1841,040 407 6909	793	1956,576 885 5598	833	2072,989 438 6282
754	1843,917 779 0368	794	1959,476 706 0622	834	2075,910 604 6788
755	1846,795 725 9884	795	1962,377 073 1908	835	2078,832 291 1543
756	1849,674 247 7839	796	1965,277 986 2586	836	2081,754 497 4317
757	1852,553 343 6634	797	1968,179 444 5800	837	2084,677 222 8897
758	1855,433 012 8691	798	1971,081 447 4713	838	2087,600 466 9083
759	1858,313 254 6450	799	1973,983 994 2506	839	2090,524 228 8692
760	1861,194 068 2373	800	1976,887 084 2376	840	2093,448 508 1552

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
841	2096,373 304 1510	881	2213,781 955 7223	921	2331,979 160 6232
842	2099,298 616 2425	882	2216,727 424 3075	922	2334,943 891 5443
843	2102,224 443 8171	883	2219,673 385 0110	923	2337,909 093 2453
844	2105,150 786 2638	884	2222,619 837 2760	924	2340,874 765 2165
845	2108,077 642 9727	885	2225,566 780 5467	925	2343,840 906 9493
846	2111,005 013 3358	886	2228,514 214 2686	926	2346,807 517 9360
847	2113,932 896 7461	887	2231,462 137 8885	927	2349,774 597 6701
848	2116,861 292 5984	888	2234,410 550 8542	928	2352,742 145 6463
849	2119,790 200 2886	889	2237,359 452 6152	929	2355,710 161 3603
850	2122,719 619 2143	890	2240,308 842 6219	930	2358,678 644 3089
851	2125,649 548 7744	891	2243,258 720 3259	931	2361,647 593 9898
852	2128,579 988 3692	892	2246,209 085 1803	932	2364,617 009 9022
853	2131,510 937 4003	893	2249,159 936 6392	933	2367,586 891 5459
854	2134,442 395 2710	894	2252,111 274 1580	934	2370,557 238 4222
855	2137,374 361 3857	895	2255,063 097 1933	935	2373,528 050 0331
856	2140,306 835 1504	896	2258,015 405 2029	936	2376,499 325 8818
857	2143,239 815 9723	897	2260,968 197 6460	937	2379,471 065 4727
858	2146,173 303 2602	898	2263,921 473 9826	938	2382,443 268 3111
859	2149,107 296 4240	899	2266,875 233 6744	939	2385,415 933 9033
860	2152,041 794 8753	900	2269,829 476 1838	940	2388,389 061 7569
861	2154,976 798 0267	901	2272,784 200 9748	941	2391,362 651 3803
862	2157,912 305 2925	902	2275,739 407 5123	942	2394,336 702 2831
863	2160,848 316 0883	903	2278,695 095 2626	943	2397,311 213 9759
864	2163,784 829 8307	904	2281,651 263 6931	944	2400,286 185 9702
865	2166,721 845 9382	905	2284,607 912 2723	945	2403,261 617 7787
866	2169,659 363 8302	906	2287,565 040 4700	946	2406,237 508 9151
867	2172,597 382 9277	907	2290,522 647 7571	947	2409,213 858 8941
868	2175,535 902 6529	908	2293,480 733 6056	948	2412,190 667 2314
869	2178,474 922 4293	909	2296,439 297 4888	949	2415,167 933 4439
870	2181,414 441 6819	910	2299,398 338 8811	950	2418,145 657 0491
871	2184,354 459 8370	911	2302,357 857 2581	951	2421,123 837 5661
872	2187,294 976 3219	912	2305,317 852 0964	952	2424,102 474 5145
873	2190,235 990 5656	913	2308,278 322 8740	953	2427,081 567 4151
874	2193,177 501 9982	914	2311,239 269 0697	954	2430,061 115 7898
875	2196,119 510 0512	915	2314,200 690 1638	955	2433,041 119 1614
876	2199,062 014 1574	916	2317,162 585 6374	956	2436,021 577 0537
877	2202,005 013 7508	917	2320,124 954 9731	957	2439,002 488 9914
878	2204,948 508 2667	918	2323,087 797 6543	958	2441,983 854 5005
879	2207,892 497 1418	919	2326,051 113 1657	959	2444,965 673 1077
880	2210,836 979 8139	920	2329,014 900 9930	960	2447,947 944 3407

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
961	2450,930 667 7284	1001	2570,605 078 2996	1041	2690,973 503 8239
962	2453,913 842 8004	1002	2573,605 946 0211	1042	2693,991 371 5429
963	2456,897 469 0876	1003	2576,607 246 9542	1043	2697,009 655 8513
964	2459,881 546 1215	1004	2579,608 980 6670	1044	2700,028 356 3500
965	2462,866 073 4348	1005	2582,611 146 7287	1045	2703,047 472 6404
966	2465,851 050 5612	1006	2585,613 744 7094	1046	2706,067 004 3250
967	2468,836 477 0353	1007	2588,616 774 1800	1047	2709,086 951 0066
968	2471,822 352 3926	1008	2591,620 234 7121	1048	2712,107 312 2893
969	2474,808 676 1697	1009	2594,624 125 8783	1049	2715,128 087 7775
970	2477,795 447 9039	1010	2597,628 447 2521	1050	2718,149 277 0765
971	2480,782 667 1338	1011	2600,633 198 4077	1051	2721,170 879 7926
972	2483,770 333 3988	1012	2603,638 378 9202	1052	2724,192 895 5324
973	2486,758 446 2390	1013	2606,643 988 3656	1053	2727,215 323 9036
974	2489,747 005 1959	1014	2609,650 026 3206	1054	2730,238 164 5145
975	2492,736 009 8116	1015	2612,656 492 3628	1055	2733,261 416 9741
976	2495,725 459 6293	1016	2615,663 386 0708	1056	2736,285 080 8923
977	2498,715 354 1930	1017	2618,670 707 0237	1057	2739,309 155 8796
978	2501,705 693 0478	1018	2621,678 454 8017	1058	2742,333 641 5473
979	2504,696 475 7396	1019	2624,686 628 9857	1059	2745,358 537 5074
980	2507,687 701 8153	1020	2627,695 229 1575	1060	2748,383 843 3727
981	2510,679 370 8227	1021	2630,704 254 8996	1061	2751,409 558 7566
982	2513,671 482 3105	1022	2633,713 705 7954	1062	2754,435 683 2733
983	2516,664 035 8283	1023	2636,723 581 4291	1063	2757,462 216 5378
984	2519,657 030 9267	1024	2639,733 881 3857	1064	2760,489 158 1658
985	2522,650 467 1572	1025	2642,744 605 2511	1065	2763,516 507 7736
986	2525,644 344 0722	1026	2645,755 752 6119	1066	2766,544 264 9783
987	2528,638 661 2248	1027	2648,767 323 0555	1067	2769,572 429 3977
988	2531,633 418 1694	1028	2651,779 316 1701	1068	2772,601 000 6504
989	2534,628 614 4610	1029	2654,791 731 5449	1069	2775,629 978 3556
990	2537,624 249 6556	1030	2657,804 568 7696	1070	2778,659 362 1333
991	2540,620 323 3101	1031	2660,817 827 4349	1071	2781,689 151 6041
992	2543,616 834 9822	1032	2663,831 507 1322	1072	2784,719 346 3895
993	2546,613 784 2307	1033	2666,845 607 4537	1073	2787,749 946 1114
994	2549,611 170 6151	1034	2669,860 127 9925	1074	2790,780 950 3928
995	2552,608 993 6959	1035	2672,875 068 3422	1075	2793,812 358 8570
996	2555,607 253 0343	1036	2675,890 428 0977	1076	2796,844 171 1284
997	2558,605 948 1926	1037	2678,906 206 8540	1077	2799,876 386 8317
998	2561,605 078 7339	1038	2681,922 404 2076	1078	2802,909 005 5925
999	2564,604 644 2221	1039	2684,939 019 7551	1079	2805,942 027 0372
1000	2567,604 644 2221	1040	2687,956 053 0944	1080	2808,975 450 7927

II. ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ

n	$\log n!$	n	$\log n!$	n	$\log n!$
1081	2812,009 276 4866	1121	2933,687 702 5306	1161	3055,985 850 8433
1082	2815,043 503 7474	1122	2936,737 695 3876	1162	3059,051 056 9714
1083	2818,078 132 2040	1123	2939,788 075 1438	1163	3062,116 636 6861
1084	2821,113 161 4862	1124	2942,838 841 4551	1164	3065,182 589 6664
1085	2824,148 591 2244	1125	2945,889 993 9775	1165	3068,248 915 5918
1086	2827,184 421 0497	1126	2948,941 532 3680	1166	3071,315 614 1422
1087	2830,220 650 5938	1127	2951,993 456 2841	1167	3074,382 684 9982
1088	2833,257 279 4891	1128	2955,045 765 3837	1168	3077,450 127 8410
1089	2836,294 307 3689	1129	2958,098 459 3256	1169	3080,517 942 3522
1090	2839,331 733 8668	1130	2961,151 537 7691	1170	3083,586 128 2139
1091	2842,369 558 6174	1131	2964,205 000 3741	1171	3086,654 685 1090
1092	2845,407 781 2558	1132	2967,258 846 8009	1172	3089,723 612 7207
1093	2848,446 401 4177	1133	2970,313 076 7108	1173	3092,792 910 7328
1094	2851,485 418 7397	1134	2973,367 689 7653	1174	3095,862 578 8297
1095	2854,524 832 8589	1135	2976,422 685 6269	1175	3098,932 616 6963
1096	2857,564 643 4131	1136	2979,478 063 9582	1176	3102,003 024 0180
1097	2860,604 850 0406	1137	2982,533 824 4229	1177	3105,073 800 4809
1098	2863,645 452 3807	1138	2985,589 966 6850	1178	3108,144 945 7713
1099	2866,686 450 0732	1139	2988,646 490 4091	1179	3111,216 459 5764
1100	2869,727 842 7583	1140	2991,703 395 2604	1180	3114,208 341 5837
1101	2872,769 630 0773	1141	2994,760 680 9048	1181	3117,360 591 4813
1102	2875,811 811 6718	1142	2997,818 347 0087	1182	3120,433 208 9579
1103	2878,854 387 1843	1143	3000,876 393 2391	1183	3123,506 193 7025
1104	2881,897 356 2576	1144	3003,934 819 2636	1184	3126,579 545 4049
1105	2884,940 718 5357	1145	3006,993 624 7502	1185	3129,653 263 7553
1106	2887,984 473 6626	1146	3010,052 809 3679	1186	3132,727 348 4443
1107	2891,028 621 2835	1147	3013,112 372 7858	1187	3135,801 799 1632
1108	2894,073 161 0439	1148	3016,172 314 6738	1188	3138,876 615 6039
1109	2897,118 092 5901	1149	3019,232 634 7025	1189	3141,951 797 4585
1110	2900,163 415 5688	1150	3022,293 332 5429	1190	3145,027 344 4199
1111	2903,209 129 6278	1151	3025,354 407 8665	1191	3148,103 256 1814
1112	2906,255 234 4150	1152	3028,415 860 3456	1192	3151,179 532 4368
1113	2909,301 729 5794	1153	3031,477 689 6529	1193	3154,256 172 8805
1114	2912,348 614 7702	1154	3034,539 895 4617	1194	3157,333 177 2072
1115	2915,395 889 6376	1155	3037,602 477 4459	1195	3160,410 545 1125
1116	2918,443 553 8322	1156	3040,665 435 2800	1196	3163,488 276 2922
1117	2921,491 607 0053	1157	3043,728 768 6390	1197	3166,566 370 4426
1118	2924,540 048 8089	1158	3046,792 477 1984	1198	3169,644 827 2606
1119	2927,588 878 8954	1159	3049,856 560 6343	1199	3172,723 646 4437
1120	2930,638 096 9181	1160	3052,921 018 6236	1200	3175,802 827 6898

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2			1	3	6	10	15	21	28	36	45
3				1	4	10	20	35	56	84	120
4					1	5	15	35	70	126	210
5						1	6	21	56	126	252
6							1	7	28	84	210
7								1	8	36	120
8									1	9	45
9										1	10
10											1

n	$m=11$	$m=12$	$m=13$	$m=14$	$m=15$	$m=16$	$m=17$	$m=18$	$m=19$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	55	66	78	91	105	120	136	153	171
3	165	220	286	364	455	560	680	816	969
4	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876
5	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628
6	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132
7			1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
8					6435	12870	24310	43758	75582
9							24310	48620	92378
10									92378

n	$m=20$	$m=21$	$m=22$	$m=23$	$m=24$	$m=25$
1	$2{,}0^{1}$	$2{,}1^{1}$	$2{,}2^{1}$	$2{,}3^{1}$	$2{,}4^{1}$	$2{,}5^{1}$
2	$1{,}90^{2}$	$2{,}10^{2}$	$2{,}31^{2}$	$2{,}53^{2}$	$2{,}76^{2}$	$3{,}00^{2}$
3	$1{,}140^{3}$	$1{,}330^{3}$	$1{,}540^{3}$	$1{,}771^{3}$	$2{,}024^{3}$	$2{,}300^{3}$
4	4,845	5,985	7,315	8,855	$1{,}0626^{4}$	$1{,}2650^{4}$
5	$1{,}5504^{4}$	$2{,}0349^{4}$	$2{,}6334^{4}$	$3{,}3649^{4}$	4,2504	5,3130

Так как $C_0^m = 1$ для всех m, то мы не помещаем его в таблице для $m \geqslant 20$.

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m=20$	$m=21$	$m=22$	$m=23$	$m=24$	$m=25$
6	3,876 0^{4}	5,426 4^{4}	7,461 3^{4}	1,009 47^{5}	1,345 96^{5}	1,771 00^{5}
7	7,752 0	1,162 80^{5}	1,705 44^{5}	2,451 57	3,461 04	4,807 00
8	1,259 70^{5}	2,034 90	3,197 70	4,903 14	7,354 71	1,081 575^{6}
9	1,679 60	2,939 30	4,974 20	8,171 90	1,307 504^{6}	2,042 975
10	1,847 56	3,527 16	6,466 46	1,144 066^{6}	1,961 256	3,268 760
11		3,527 16	7,054 32	1,352 078	2,496 144	4,457 400
12				1,352 078	2,704 156	5,200 300
13						5,200 300

n	$m=26$	$m=27$	$m=28$	$m=29$	$m=30$
1	2,6^{1}	2,7^{1}	2,8^{1}	2,9^{1}	3,0^{1}
2	3,25^{2}	3,51^{2}	3,78^{2}	4,06^{2}	4,35^{2}
3	2,600^{3}	2,925^{3}	3,276^{3}	3,654^{3}	4,060^{3}
4	1,495 0^{4}	1,755 0^{4}	2,047 5^{4}	2,375 1^{4}	2,740 5^{4}
5	6,578 0	8,073 0	9,828 0	1,187 55^{5}	1,425 06^{5}
6	2,302 30^{5}	2,960 10^{5}	3,767 40^{5}	4,750 20	5,937 75
7	6,578 00	8,880 30	1,184 040^{6}	1,560 780^{6}	2,035 800^{6}
8	1,562 275^{6}	2,220 075^{6}	3,108 105	4,292 145	5,852 925
9	3,124 550	4,686 825	6,906 900	1,001 5005^{7}	1,430 7150^{7}
10	5,311 735	8,436 285	1,312 3110^{7}	2,003 0010	3,004 5015
11	7,726 160	1,303 7895^{7}	2,147 4180	3,459 7290	5,462 7300
12	9,657 700	1,738 3860	3,042 1755	5,189 5935	8,649 3225
13	1,040 0600^{7}	2,005 8300	3,744 2160	6,786 3915	1,197 5985^{8}
14		2,005 8300	4,011 6600	7,755 8760	1,454 2268
15				7,755 8760	1,551 1752

n	$m=31$	$m=32$	$m=33$	$m=34$	$m=35$
1	3,1^{1}	3,2^{1}	3,3^{1}	3,4^{1}	3,5^{1}
2	4,65^{2}	4,96^{2}	5,28^{2}	5,61^{2}	5,95^{2}
3	4,495^{3}	4,960^{3}	5,456^{3}	5,984^{3}	6,545^{3}
4	3,146 5^{4}	3,596 0^{4}	4,092 0^{4}	4,637 6^{4}	5,236 0^{4}
5	1,699 11^{5}	2,013 76^{5}	2,373 36^{5}	2,782 56^{5}	3,246 32^{5}
6	7,362 81	9,061 92	1,107 568^{6}	1,344 904^{6}	1,623 160^{6}
7	2,629 575^{6}	3,365 856^{6}	4,272 048	5,379 616	6,724 520
8	7,888 725	1,051 8300^{7}	1,388 4156^{7}	1,815 6204^{7}	2,353 5820^{7}
9	2,016 0075^{7}	2,804 8800	3,856 7100	5,245 1256	7,060 7460
10	4,435 2165	6,451 2240	9,256 1040	1,311 2814^{8}	1,835 7940^{8}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 31$	$m = 32$	$m = 33$	$m = 34$	$m = 35$
11	8,467 2315 ^{7}	1,290 2448 ^{8}	1,935 3672 ^{8}	2,860 9776 ^{8}	4,172 2590 ^{8}
12	1,411 2053 ^{8}	2,257 9284	3,548 1732	5,483 5404	8,344 5180
13	2,062 5308	3,473 7360	5,731 6644	9,279 8376	1,476 3378 ^{9}
14	2,651 8253	4,714 3560	8,188 0920	1,391 9756 ^{9}	2,319 9594
15	3,005 4020	5,657 2272	1,037 1583 ^{9}	1,855 9675	3,247 9432
16	3,005 4020	6,010 8039	1,166 8031	2,203 9644	4,059 9290
17			1,166 8031	2,333 6062	4,537 5677
18					4,537 5677

n	$m = 36$	$m = 37$	$m = 38$	$m = 39$	$m = 40$
1	3,6 ^{1}	3,7 ^{1}	3,8 ^{1}	3,9 ^{1}	4,0 ^{1}
2	6,30 ^{2}	6,66 ^{2}	7,03 ^{2}	7,41 ^{2}	7,80 ^{2}
3	7,140 ^{3}	7,770 ^{3}	8,436 ^{3}	9,139 ^{3}	9,880 ^{3}
4	5,890 5 ^{4}	6,604 5 ^{4}	7,381 5 ^{4}	8,225 1 ^{4}	9,139 0 ^{4}
5	3,769 92 ^{5}	4,358 97 ^{5}	5,019 42 ^{5}	5,757 57 ^{5}	6,580 08 ^{5}
6	1,947 792 ^{6}	2,324 784 ^{6}	2,760 681 ^{6}	3,262 623 ^{6}	3,838 380 ^{6}
7	8,347 680	1,029 5472 ^{7}	1,262 0256 ^{7}	1,538 0937 ^{7}	1,864 3560 ^{7}
8	3,026 0340 ^{7}	3,860 8020	4,890 3492	6,152 3748	7,690 4685
9	9,414 3280	1,244 0362 ^{8}	1,630 1164 ^{8}	2,119 1513 ^{8}	2,734 3888 ^{8}
10	2,541 8686 ^{8}	3,483 3014	4,727 3376	6,357 4540	8,476 6053
11	6,008 0530	8,549 9215	1,203 3223 ^{9}	1,676 0560 ^{9}	2,311 8014 ^{9}
12	1,251 6777 ^{9}	1,852 4830 ^{9}	2,707 4751	3,910 7974	5,586 8535
13	2,310 7896	3,562 4673	5,414 9503	8,122 4254	1,203 3223 ^{10}
14	3,796 2972	6,107 0868	9,669 5541	1,508 4504 ^{10}	2,320 6930
15	5,567 9026	9,364 1998	1,547 1287 ^{10}	2,514 0841	4,022 5345
16	7,307 8721	1,287 5775 ^{10}	2,223 9974	3,771 1261	6,285 2102
17	8,597 4966	1,590 5369	2,878 1143	5,102 1118	8,873 2379
18	9,075 1353	1,767 2632	3,357 8001	6,235 9144	1,133 8026 ^{11}
19		1,767 2632	3,534 5264	6,892 3264	1,312 8241
20				6,892 3264	1,378 4653

n	$m = 41$	$m = 42$	$m = 43$	$m = 44$	$m = 45$
1	4,1 ^{1}	4,2 ^{1}	4,3 ^{1}	4,4 ^{1}	4,5 ^{1}
2	8,20 ^{2}	8,61 ^{2}	9,03 ^{2}	9,46 ^{2}	9,90 ^{2}
3	1,066 0 ^{4}	1,148 0 ^{4}	1,234 1 ^{4}	1,324 4 ^{4}	1,419 0 ^{4}
4	1,012 70 ^{5}	1,119 30 ^{5}	1,234 10 ^{5}	1,357 51 ^{5}	1,489 95 ^{5}
5	7,493 98	8,506 68	9,625 98	1,086 008 ^{6}	1,221 759 ^{6}
6	4,496 388 ^{6}	5,245 786 ^{6}	6,096 454 ^{6}	7,059 052	8,145 060
7	2,248 1940 ^{7}	2,697 8328 ^{7}	3,222 4114 ^{7}	3,832 0568 ^{7}	4,537 9620 ^{7}
8	9,554 8245	1,180 3019 ^{8}	1,450 0851 ^{8}	1,772 3263 ^{8}	2,155 5320 ^{8}
9	3,503 4357 ^{8}	4,458 9181	5,639 2200	7,089 3051	8,861 6314
10	1,121 0994 ^{9}	1,471 4430 ^{9}	1,917 3348 ^{9}	2,481 2568 ^{9}	3,190 1873 ^{9}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 41$	$m = 42$	$m = 43$	$m = 44$	$m = 45$
11	3,159 4620 ^{9}	4,280 5614 ^{9}	5,752 0043 ^{9}	7,669 3391 ^{9}	1,015 0596 ^{10}
12	7,898 6549	1,105 8117 ^{10}	1,533 8678 ^{10}	2,109 0683 ^{10}	2,876 0022
13	1,762 0076 ^{10}	2,551 8731	3,657 6848	5,191 5526	7,300 6209
14	3,524 0153	5,286 0229	7,837 8960	1,149 5581 ^{11}	1,668 7133 ^{11}
15	6,343 2275	9,867 2428	1,515 3266 ^{11}	2,299 1162	3,448 6743
16	1,030 7745 ^{11}	1,665 0972 ^{11}	2,651 8215	4,167 1481	6,466 2642
17	1,515 8448	2,546 6193	4,211 7165	6,863 5380	1,103 0686 ^{12}
18	2,021 1264	3,536 9712	6,083 5905	1,029 5307 ^{12}	1,715 8845
19	2,446 6267	4,467 7531	8,004 7243	1,408 8315	2,438 3622
20	2,691 2894	5,137 9161	9,605 6692	1,761 0394	3,169 8708
21	2,691 2894	5,382 5787	1,052 0495 ^{12}	2,012 6164	3,773 6558
22			1,052 0495	2,104 0990	4,116 7154
23					4,116 7154

n	$m = 46$	$m = 47$	$m = 48$	$m = 49$	$m = 50$
1	4,6 ^{1}	4,7 ^{1}	4,8 ^{1}	4,9 ^{1}	5,0 ^{1}
2	1,035 ^{3}	1,081 ^{3}	1,128 ^{3}	1,176 ^{3}	1,225 ^{3}
3	1,518 0 ^{4}	1,621 5 ^{4}	1,729 6 ^{4}	1,842 4 ^{4}	1,960 0 ^{4}
4	1,631 85 ^{5}	1,783 65 ^{5}	1,945 80 ^{5}	2,118 76 ^{5}	2,303 00 ^{5}
5	1,370 754 ^{6}	1,533 939 ^{6}	1,712 304 ^{6}	1,906 884 ^{6}	2,118 760 ^{6}
6	9,366 819	1,073 7573 ^{7}	1,227 1512 ^{7}	1,398 3816 ^{7}	1,589 0700 ^{7}
7	5,352 4680 ^{7}	6,289 1499	7,362 9072	8,590 0584	9,988 4400
8	2,609 3282 ^{8}	3,144 5750 ^{8}	3,773 4899 ^{8}	4,509 7807 ^{8}	5,368 7865 ^{8}
9	1,101 7163 ^{9}	1,362 6491 ^{9}	1,677 1066 ^{9}	2,054 4556 ^{9}	2,505 4337 ^{9}
10	4,076 3504	5,178 0668	6,540 7159	8,217 8225	1,027 2278 ^{10}
11	1,334 0783 ^{10}	1,741 7134 ^{10}	2,259 5200 ^{10}	2,913 5916 ^{10}	3,735 3739
12	3,891 0618	5,225 1401	6,966 8534	9,226 3735	1,213 9965 ^{11}
13	1,017 6623 ^{11}	1,406 7685 ^{11}	1,929 2825 ^{11}	2,625 9678 ^{11}	3,548 6052
14	2,398 7754	3,416 4377	4,823 2062	6,752 4887	9,378 4566
15	5,117 3876	7,516 1630	1,093 2601 ^{12}	1,575 5807 ^{12}	2,250 8296 ^{12}
16	9,914 9385	1,503 2326 ^{12}	2,254 8489	3,348 1090	4,923 6897
17	1,749 6950 ^{12}	2,741 1889	4,244 4215	6,499 2704	9,847 3794
18	2,818 9531	4,568 6481	7,309 8370	1,155 4258 ^{13}	1,805 3529 ^{13}
19	4,154 2467	6,973 1998	1,154 1848 ^{13}	1,885 1685	3,040 5943
20	5,608 2330	9,762 4797	1,673 5679	2,827 7527	4,712 9212
21	6,943 5266	1,255 1760 ^{13}	2,231 4239	3,904 9919	6,732 7446
22	7,890 3711	1,483 3898	2,738 5657	4,969 9897	8,874 9815
23	8,233 4307	1,612 3802	3,095 7700	5,834 3357	1,080 4325 ^{14}
24		1,612 3802	3,224 7604	6,320 5303	1,215 4866
25				6,320 5303	1,264 1061

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 51$	$m = 52$	$m = 53$	$m = 54$	$m = 55$
1	5,1 ^{1}	5,2 ^{1}	5,3 ^{1}	5,4 ^{1}	5,5 ^{1}
2	1,275 ^{3}	1,326 ^{3}	1,378 ^{3}	1,431 ^{3}	1,485 ^{3}
3	2,082 5 ^{4}	2,210 0 ^{4}	2,342 6 ^{4}	2,480 4 ^{4}	2,623 5 ^{4}
4	2,499 00 ^{5}	2,707 25 ^{5}	2,928 25 ^{5}	3,162 51 ^{5}	3,410 55 ^{5}
5	2,349 060 ^{6}	2,598 960 ^{6}	2,869 685 ^{6}	3,162 510 ^{6}	3,478 761 ^{6}
6	1,800 9460 ^{7}	2,035 8520 ^{7}	2,295 7480 ^{7}	2,582 7165 ^{7}	2,898 9675 ^{7}
7	1,157 7510 ^{8}	1,337 8456 ^{8}	1,541 4308 ^{8}	1,771 0056 ^{8}	2,029 2773 ^{8}
8	6,367 6305	7,525 3815	8,863 2271	1,040 4658 ^{9}	1,217 5664 ^{9}
9	3,042 3124 ^{9}	3,679 0754 ^{9}	4,431 6136 ^{9}	5,317 9363	6,358 4021
10	1,277 7712 ^{10}	1,582 0024 ^{10}	1,949 9100 ^{10}	2,393 0713 ^{10}	2,924 8649 ^{10}
11	4,762 6017	6,040 3729	7,622 3753	9,572 2853	1,196 5357 ^{11}
12	1,587 5339 ^{11}	2,063 7941 ^{11}	2,667 8314 ^{11}	3,430 0689 ^{11}	4,387 2974
13	4,762 6017	6,350 1356	8,413 9297	1,108 1761 ^{12}	1,451 1830 ^{12}
14	1,292 7062 ^{12}	1,768 9663 ^{12}	2,403 9799 ^{12}	3,245 3729	4,353 5490
15	3,188 6752	4,481 3814	6,250 3478	8,654 3277	1,189 9701 ^{13}
16	7,174 5193	1,036 3195 ^{13}	1,484 4576 ^{13}	2,109 4924 ^{13}	2,974 9251
17	1,477 1069 ^{13}	2,194 5588	3,230 8783	4,715 3359	6,824 8282
18	2,790 0908	4,267 1977	6,461 7566	9,692 6349	1,440 7971 ^{14}
19	4,845 9472	7,636 0381	1,190 3236 ^{14}	1,836 4992 ^{14}	2,805 7627
20	7,753 5156	1,259 9463 ^{14}	2,023 5501	3,213 8737	5,050 3729
21	1,144 5666 ^{14}	1,919 9181	3,179 8644	5,203 4145	8,417 2882
22	1,560 7726	2,705 3392	4,625 2573	7,805 1218	1,300 8536 ^{15}
23	1,967 9307	3,528 7033	6,234 0425	1,085 9300 ^{15}	1,866 4422
24	2,295 9191	4,263 8498	7,792 5531	1,402 6596	2,488 5895
25	2,479 5927	4,775 5118	9,039 3616	1,683 1915	3,085 8510
26	2,479 5927	4,959 1853	9,734 6971	1,877 4059	3,560 5973
27			9,734 6971	1,946 9394	3,824 3453
28					3,824 3453

n	$m = 56$	$m = 57$	$m = 58$	$m = 59$	$m = 60$
1	5,6 ^{1}	5,7 ^{1}	5,8 ^{1}	5,9 ^{1}	6,0 ^{1}
2	1,540 ^{3}	1,596 ^{3}	1,653 ^{3}	1,711 ^{3}	1,770 ^{3}
3	2,772 0 ^{4}	2,926 0 ^{4}	3,085 6 ^{4}	3,250 9 ^{4}	3,422 0 ^{4}
4	3,672 90 ^{5}	3,950 10 ^{5}	4,242 70 ^{5}	4,551 26 ^{5}	4,876 35 ^{5}
5	3,819 816 ^{6}	4,187 106 ^{6}	4,582 116 ^{6}	5,006 386 ^{6}	5,461 512 ^{6}
6	3,246 8436 ^{7}	3,628 8252 ^{7}	4,047 5358 ^{7}	4,505 7474 ^{7}	5,006 3860 ^{7}
7	2,319 1740 ^{8}	2,643 8584 ^{8}	3,006 7409 ^{8}	3,411 4945 ^{8}	3,862 0692 ^{8}
8	1,420 4941 ^{9}	1,652 4115 ^{9}	1,916 7973 ^{9}	2,217 4714 ^{9}	2,558 6208 ^{9}
9	7,575 9684	8,996 4625	1,064 8874 ^{10}	1,256 5671 ^{10}	1,478 3143 ^{10}
10	3,560 7051 ^{10}	4,318 3020 ^{10}	5,217 9482	6,282 8356	7,539 4028

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 56$	$m = 57$	$m = 58$	$m = 59$	$m = 60$
11	1,489 0222 ^{11}	1,845 0927 ^{11}	2,276 9229 ^{11}	2,798 7177 ^{11}	3,427 0013 ^{11}
12	5,583 8331	7,072 8552	8,917 9479	1,119 4871 ^{12}	1,399 3588 ^{12}
13	1,889 9127 ^{12}	2,448 2960 ^{12}	3,155 5816 ^{12}	4,047 3764	5,166 8634
14	5,804 7320	7,694 6447	1,014 2941 ^{13}	1,329 8522 ^{13}	1,734 5899 ^{13}
15	1,625 3249 ^{13}	2,205 7981 ^{13}	2,975 2626	3,989 5567	5,319 4089
16	4,164 8952	5,790 2201	7,996 0183	1,097 1281 ^{14}	1,496 0838 ^{14}
17	9,799 7534	1,396 4649 ^{14}	1,975 4869 ^{14}	2,775 0887	3,872 2168
18	2,123 2799 ^{14}	3,103 2552	4,499 7201	6,475 2070	9,250 2957
19	4,246 5598	6,369 8397	9,473 0949	1,397 2815 ^{15}	2,044 8022 ^{15}
20	7,856 1356	1,210 2695 ^{15}	1,847 2535 ^{15}	2,794 5630	4,191 8445
21	1,346 7661 ^{15}	2,132 3797	3,342 6492	5,189 9027	7,984 4657
22	2,142 5824	3,489 3485	5,621 7282	8,964 3774	1,415 4280 ^{16}
23	3,167 2958	5,309 8782	8,799 2268	1,442 0955 ^{16}	2,338 5332
24	4,355 0317	7,522 3275	1,283 2206 ^{16}	2,163 1432	3,605 2387
25	5,574 4406	9,929 4723	1,745 1800	3,028 4005	5,191 5438
26	6,646 4484	1,222 0889 ^{16}	2,215 0361	3,960 2161	6,988 6167
27	7,384 9427	1,403 1391	2,625 2280	4,840 2641	8,800 4802
28	7,648 6906	1,503 3633	2,906 5024	5,531 7304	1,037 1995 ^{17}
29	·	1,503 3633	3,006 7266	5,913 2291	1,149 4960
30	·			5,913 2291	1,182 6458

n	$m = 61$	$m = 62$	$m = 63$	$m = 64$	$m = 65$
1	6,1 ^{1}	6,2 ^{1}	6,3 ^{1}	6,4 ^{1}	6,5 ^{1}
2	1,830 ^{3}	1,891 ^{3}	1,953 ^{3}	2,016 ^{3}	2,080 ^{3}
3	3,599 0 ^{4}	3,782 0 ^{4}	3,971 1 ^{4}	4,166 4 ^{4}	4,368 0 ^{4}
4	5,218 55 ^{5}	5,578 45 ^{5}	5,956 65 ^{5}	6,353 76 ^{5}	6,770 40 ^{5}
5	5,949 147 ^{6}	6,471 002 ^{6}	7,028 847 ^{6}	7,624 512 ^{6}	8,259 888 ^{6}
6	5,552 5372 ^{7}	6,147 4519 ^{7}	6,794 5521 ^{7}	7,497 4368 ^{7}	8,259 8880 ^{7}
7	4,362 7078 ^{8}	4,917 9615 ^{8}	5,532 7067 ^{8}	6,212 1619 ^{8}	6,961 9056 ^{8}
8	2,944 8278 ^{9}	3,381 0985 ^{9}	3,872 8947 ^{9}	4,426 1654 ^{9}	5,047 3816 ^{9}
9	1,734 1764 ^{10}	2,028 6591 ^{10}	2,366 7690 ^{10}	2,754 0585 ^{10}	3,196 6750 ^{10}
10	9,017 7170	1,075 1893 ^{11}	1,278 0553 ^{11}	1,514 7321 ^{11}	1,790 1380 ^{11}
11	4,180 9415 ^{11}	5,082 7132	6,157 9026	7,435 9578	8,950 6900
12	1,742 0590 ^{12}	2,160 1531 ^{12}	2,668 4244 ^{12}	3,284 2147 ^{12}	4,027 8105 ^{12}
13	6,566 2223	8,308 2812	1,046 8434 ^{13}	1,313 6859 ^{13}	1,642 1074 ^{13}
14	2,251 2762 ^{13}	2,907 8984 ^{13}	3,738 7266	4,785 5700	6,099 2559
15	7,053 9988	9,305 2750	1,221 3173 ^{14}	1,595 1900 ^{14}	2,073 7470 ^{14}
16	2,028 0247 ^{14}	2,733 4245 ^{14}	3,663 9520	4,885 2694	6,480 4594
17	5,368 3005	7,396 3252	1,012 9750 ^{15}	1,379 3702 ^{15}	1,867 8971 ^{15}
18	1,312 2512 ^{15}	1,849 0813 ^{15}	2,588 7138	3,601 6888	4,981 0590
19	2,969 8318	4,282 0830	6,131 1643	8,719 8781	1,232 1567 ^{16}
20	6,236 6467	9,206 4785	1,348 8561 ^{16}	1,961 9726 ^{16}	2,833 9604 ^{16}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 61$	$m = 62$	$m = 63$	$m = 64$	$m = 65$
21	1,217 6310^{16}	1,841 2957^{16}	2,761 9435^{16}	4,110 7997^{16}	6,072 7723^{16}
22	2,213 8746	3,431 5056	5,272 8013	8,034 7448	1,214 5545^{17}
23	3,753 9613	5,967 8358	9,399 3415	1,467 2143^{17}	2,270 6888
24	5,943 7720	9,697 7332	1,566 5569^{17}	2,506 4911	3,973 7053
25	8,796 7825	1,474 0555^{17}	2,443 8288	4,010 3857	6,516 8767
26	1,218 0160^{17}	2,097 6943	3,571 7498	6,015 5785	1,002 5964^{18}
27	1,578 9097	2,796 9257	4,894 6200	8,466 3698	1,448 1948
28	1,917 2475	3,496 1572	6,293 0829	1,118 7703^{18}	1,965 4073
29	2,181 6954	4,098 9429	7,595 1000	1,388 8183	2,507 5886
30	2,327 1418	4,508 8372	8,607 7801	1,620 2880	3,009 1063
31	2,327 1418	4,654 2835	9,163 1207	1,777 0901	3,397 3781
32			9,163 1207	1,832 6241	3,609 7142
33					3,609 7142

n	$m = 66$	$m = 67$	$m = 68$	$m = 69$	$m = 70$
1	6,6^{1}	6,7^{1}	6,8^{1}	6,9^{1}	7,0^{1}
2	2,145^{3}	2,211^{3}	2,278^{3}	2,346^{3}	2,415^{3}
3	4,576 0^{4}	4,790 5^{4}	5,011 6^{4}	5,239 4^{4}	5,474 0^{4}
4	7,207 20^{5}	7,664 80^{5}	8,143 85^{5}	8,645 01^{5}	9,168 95^{5}
5	8,936 928^{6}	9,657 648^{6}	1,042 4128^{7}	1,123 8513^{7}	1,210 3014^{7}
6	9,085 8768^{7}	9,979 5696^{7}	1,094 5334^{8}	1,198 7747^{8}	1,311 1599^{8}
7	7,787 8944^{8}	8,696 4821^{8}	9,694 4390	1,078 8972^{9}	1,198 7747^{9}
8	5,743 5721^{9}	6,522 3616^{9}	7,392 0098^{9}	8,361 4537	9,440 3509
9	3,701 4131^{10}	4,275 7704^{10}	4,928 0065^{10}	5,667 2075^{10}	6,503 3529^{10}
10	2,109 8055^{11}	2,479 9468^{11}	2,907 5238^{11}	3,400 3245^{11}	3,967 0452^{11}
11	1,074 0828^{12}	1,285 0633^{12}	1,533 0580^{12}	1,823 8104^{12}	2,163 8429^{12}
12	4,922 8795	5,996 9623	7,282 0256	8,815 0836	1,063 8894^{13}
13	2,044 8884^{13}	2,537 1763^{13}	3,136 8726^{13}	3,865 0751^{13}	4,746 5835
14	7,741 3632	9,786 2516	1,232 3428^{14}	1,546 0301^{14}	1,932 5376^{14}
15	2,683 6726^{14}	3,457 8089^{14}	4,436 4341	5,668 7769	7,214 8069
16	8,554 2064	1,123 7879^{15}	1,469 5688^{15}	1,913 2122^{15}	2,480 0899^{15}
17	2,515 9430^{15}	3,371 3637	4,495 1516	5,964 7204	7,877 9326
18	6,848 9561	9,364 8991	1,273 6263^{16}	1,723 1414^{16}	2,319 6135^{16}
19	1,730 2626^{16}	2,415 1582^{16}	3,351 6481	4,625 2744	6,348 4158
20	4,066 1171	5,796 3797	8,211 5379	1,156 3186^{17}	1,618 8460^{17}
21	8,906 7327	1,297 2850^{17}	1,876 9229^{17}	2,698 0767	3,854 3953
22	1,821 8317^{17}	2,712 5049	4,009 7899	5,886 7129	8,584 7896
23	3,485 2432	5,307 0749	8,019 5798	1,202 9370^{18}	1,791 6083^{18}
24	6,244 3941	9,729 6373	1,503 6712^{18}	2,305 6292	3,508 5662
25	1,049 0582^{18}	1,673 4976^{18}	2,646 4613	4,150 1326	6,455 7618

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 66$	$m = 67$	$m = 68$	$m = 69$	$m = 70$
26	1,654 2841^{18}	2,703 3234^{18}	4,376 8399^{18}	7,023 3013^{18}	1,117 3434^{19}
27	2,450 7913	4,105 0753	6,808 4177	1,118 5258^{19}	1,820 8559
28	3,413 6021	5,864 3934	9,969 4687	1,677 7886	2,796 3144
29	4,472 9959	7,886 5980	1,375 0991^{19}	2,372 0460	4,049 8346
30	5,516 6949	9,989 6908	1,787 6289	3,162 7280	5,534 7740
31	6,406 4844	1,192 3179^{19}	2,191 2870	3,978 9159	7,141 6438
32	7,007 0923	1,341 3577	2,533 6756	4,724 9626	8,703 8785
33	7,219 4284	1,422 6521	2,764 0097	5,297 6853	1,002 2648^{20}
34		1,422 6521	2,845 3041	5,609 3139	1,040 6999
35				5,609 3139	1,121 8628

n	$m = 71$	$m = 72$	$m = 73$	$m = 74$	$m = 75$
1	7,1^{1}	7,2^{1}	7,3^{1}	7,4^{1}	7,5^{1}
2	2,485^{3}	2,556^{3}	2,628^{3}	2,701^{3}	2,775^{3}
3	5,715 5^{4}	5,964 0^{4}	6,219 6^{4}	6,482 4^{4}	6,752 5^{4}
4	9,716 35^{5}	1,028 790^{6}	1,088 430^{6}	1,150 626^{6}	1,215 450^{6}
5	1,301 9909^{7}	1,399 1544^{7}	1,502 0334^{7}	1,610 8764^{7}	1,725 9390^{7}
6	1,432 1900^{8}	1,562 3891^{8}	1,702 3045^{8}	1,852 5079^{8}	2,013 5955^{8}
7	1,329 8907^{9}	1,473 1097^{9}	1,629 3486^{9}	1,799 5791^{9}	1,984 8299^{9}
8	1,063 9126^{10}	1,196 9016^{10}	1,344 2126^{10}	1,507 1475^{10}	1,687 1054^{10}
9	7,447 3879	8,511 3005	9,708 2021	1,105 2415^{11}	1,255 9562^{11}
10	4,617 3805^{11}	5,362 1193^{11}	6,213 2494^{11}	7,184 0696	8,289 3111
11	2,560 5474^{12}	3,022 2854^{12}	3,558 4974^{12}	4,179 8223^{12}	4,898 2293^{12}
12	1,280 2737^{13}	1,536 3284^{13}	1,838 5570^{13}	2,194 4067^{13}	2,612 3889^{13}
13	5,810 4729	7,090 7466	8,627 0750	1,046 5632^{14}	1,266 0039^{14}
14	2,407 1959^{14}	2,988 2432^{14}	3,697 3179^{14}	4,560 0254	5,606 5886
15	9,147 3445	1,155 4540^{15}	1,454 2784^{15}	1,824 0101^{15}	2,280 0127^{15}
16	3,201 5706^{15}	4,116 3050	5,271 7591	6,726 0374	8,550 0476
17	1,035 8022^{16}	1,355 9593^{16}	1,767 5898^{16}	2,294 7657^{16}	2,967 3695^{16}
18	3,107 4067	4,143 2090	5,499 1683	7,266 7581	9,561 5238
19	8,668 0293	1,177 5436^{17}	1,591 8645^{17}	2,141 7813^{17}	2,868 4571^{17}
20	2,253 6876^{17}	3,120 4906	4,298 0342	5,889 8987	8,031 6800
21	5,473 2414	7,726 9290	1,084 7420^{18}	1,514 5454^{18}	2,103 5352^{18}
22	1,243 9185^{18}	1,791 2426^{18}	2,563 9355	3,648 6775	5,163 2228
23	2,650 0872	3,894 0057	5,685 2483	8,249 1839	1,189 7861^{19}
24	5,300 1744	7,950 2617	1,184 4267^{19}	1,752 9516^{19}	2,577 8700
25	9,964 3279	1,526 4502^{19}	2,321 4764	3,505 9031	5,258 8547
26	1,762 9196^{19}	2,759 3524	4,285 8026	6,607 2790	1,011 3182^{20}
27	2,938 1993	4,701 1188	7,460 4712	1,174 6274^{20}	1,835 3553
28	4,617 1703	7,555 3695	1,225 6488^{20}	1,971 6960	3,146 3233
29	6,846 1490	1,146 3319^{20}	1,901 8689	3,127 5177	5,099 2137
30	9,584 6086	1,643 0758	2,789 4077	4,691 2766	7,818 7943

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 71$	$m = 72$	$m = 73$	$m = 74$	$m = 75$
31	1,267 6418 ^{20}	2,226 1027 ^{20}	3,869 1784 ^{20}	6,658 5861 ^{20}	1,134 9863 ^{21}
32	1,584 5522	2,852 1940	5,078 2967	8,947 4751	1,560 6061
33	1,872 6526	3,457 2049	6,309 3989	1,138 7696 ^{21}	2,033 5171
34	2,092 9647	3,965 6174	7,422 8222	1,373 2221	2,511 9917
35	2,212 5627	4,305 5274	8,271 1448	1,569 3967	2,942 6188
36	2,212 5627	4,425 1254	8,730 6528	1,700 1798	3,269 5765
37			8,730 6528	1,746 1306	3,446 3103
38					3,446 3103

n	$m = 76$	$m = 77$	$m = 78$	$m = 79$	$m = 80$
1	7,6 ^{1}	7,7 ^{1}	7,8 ^{1}	7,9 ^{1}	8,0 ^{1}
2	2,850 ^{3}	2,926 ^{3}	3,003 ^{3}	3,081 ^{3}	3,160 ^{3}
3	7,030 0 ^{4}	7,315 0 ^{4}	7,607 6 ^{4}	7,907 9 ^{4}	8,216 0 ^{4}
4	1,282 975 ^{6}	1,353 275 ^{6}	1,426 425 ^{6}	1,502 501 ^{6}	1,581 580 ^{6}
5	1,847 4840 ^{7}	1,975 815 ^{7}	2,111 1090 ^{7}	2,253 7515 ^{7}	2,404 0016 ^{7}
6	2,186 1894 ^{8}	2,370 9378 ^{8}	2,568 5160 ^{8}	2,779 6269 ^{8}	3,005 0020 ^{8}
7	2,186 1894 ^{9}	2,404 8083 ^{9}	2,641 9021 ^{9}	2,898 7537 ^{9}	3,176 7164 ^{9}
8	1,885 5884 ^{10}	2,104 2073 ^{10}	2,344 6881 ^{10}	2,608 8783 ^{10}	2,898 7537 ^{10}
9	1,424 6668 ^{11}	1,613 2256 ^{11}	1,823 6463 ^{11}	2,058 1151 ^{11}	2,319 0030 ^{11}
10	9,545 2673	1,096 9934 ^{12}	1,258 3160 ^{12}	1,440 6806 ^{12}	1,646 4921 ^{12}
11	5,727 1604 ^{12}	6,681 6871	7,778 6805	9,036 9965	1,047 7677 ^{13}
12	3,102 2119 ^{13}	3,674 9279 ^{13}	4,343 0966 ^{13}	5,120 9647 ^{13}	6,024 6643
13	1,527 2428 ^{14}	1,837 4640 ^{14}	2,204 9567 ^{14}	2,639 2664 ^{14}	3,151 3629 ^{14}
14	6,872 5924	8,399 8352	1,023 7299 ^{15}	1,244 2256 ^{15}	1,508 1522 ^{15}
15	2,840 6715 ^{15}	3,527 9308 ^{15}	4,367 9143	5,392 5442	6,635 8698
16	1,083 0060 ^{16}	1,367 0732 ^{16}	1,719 8663 ^{16}	2,156 6577 ^{16}	2,695 8221 ^{16}
17	3,822 3742	4,905 3802	6,272 4534	7,992 3197	1,014 8977 ^{17}
18	1,252 8893 ^{17}	1,635 1267 ^{17}	2,125 6648 ^{17}	2,752 9101 ^{17}	3,552 1421
19	3,824 6095	5,077 4988	6,712 6256	8,838 2904	1,159 1200 ^{18}
20	1,090 0137 ^{18}	1,472 4747 ^{18}	1,980 2245 ^{18}	2,651 4871 ^{18}	3,535 3161
21	2,906 7032	3,996 7169	5,469 1916	7,449 4162	1,010 0903 ^{19}
22	7,266 7581	1,017 3461 ^{19}	1,417 0178 ^{19}	1,963 9370 ^{19}	2,708 8786
23	1,706 1084 ^{19}	2,432 7842	3,450 1304	4,867 1482	6,831 0852
24	3,767 6561	5,473 7645	7,906 5487	1,135 6679 ^{20}	1,622 3827 ^{20}
25	7,836 7247	1,160 4381 ^{20}	1,707 8145 ^{20}	2,498 4694	3,634 1373
26	1,537 2037 ^{20}	2,320 8762	3,481 3142	5,189 1288	7,687 5982
27	2,846 6735	4,383 8772	6,704 7533	1,018 6068 ^{21}	1,537 5196 ^{21}
28	4,981 6786	7,828 3521	1,221 2229 ^{21}	1,891 6983	2,910 3050
29	8,245 5370	1,322 7216 ^{21}	2,105 5568	3,326 7797	5,218 4780
30	1,291 8008 ^{21}	2,116 3545	3,439 0761	5,544 6328	8,871 4125

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 76$	$m = 77$	$m = 78$	$m = 79$	$m = 80$
31	1,916 8657 ^{21}	3,208 6665 ^{21}	5,325 0210 ^{21}	8,764 0971 ^{21}	1,430 8730 ^{22}
32	2,695 5924	4,612 4581	7,821 1246	1,314 6146 ^{22}	2,191 0243
33	3,594 1232	6,289 7156	1,090 2174 ^{22}	1,872 3298	3,186 9444
34	4,545 5087	8,139 6319	1,442 9348	2,533 1521	4,405 4819
35	5,454 6105	1,000 0119 ^{22}	1,813 9751	3,256 9099	5,790 0620
36	6,212 1953	1,166 6806	2,166 6925	3,980 6676	7,237 5775
37	6,715 8868	1,292 8082	2,459 4888	4,626 1813	8,606 8489
38	6,892 6206	1,360 8507	2,653 6589	5,113 1477	9,739 3290
39		1,360 8507	2,721 7015	5,375 3604	1,048 8508 ^{23}
40				5,375 3604	1,075 0721

n	$m = 81$	$m = 82$	$m = 83$	$m = 84$	$m = 85$
1	8,1 ^{1}	8,2 ^{1}	8,3 ^{1}	8,4 ^{1}	8,5 ^{1}
2	3,240 ^{3}	3,321 ^{3}	3,403 ^{3}	3,486 ^{3}	3,570 ^{3}
3	8,532 0 ^{4}	8,856 0 ^{4}	9,188 1 ^{4}	9,528 4 ^{4}	9,877 0 ^{4}
4	1,663 740 ^{6}	1,749 060 ^{6}	1,837 620 ^{6}	1,929 501 ^{6}	2,024 785 ^{6}
5	2,562 1596 ^{7}	2,728 5336 ^{7}	2,903 4396 ^{7}	3,087 2016 ^{7}	3,280 1517 ^{7}
6	3,245 4022 ^{8}	3,501 6181 ^{8}	3,774 4715 ^{8}	4,064 8154 ^{8}	4,373 5356 ^{8}
7	3,477 2166 ^{9}	3,801 7568 ^{9}	4,151 9186 ^{9}	4,529 3658 ^{9}	4,935 8473 ^{9}
8	3,216 4254 ^{10}	3,564 1470 ^{10}	3,944 3227 ^{10}	4,359 5146 ^{10}	4,812 4511 ^{10}
9	2,608 8783 ^{11}	2,930 5209 ^{11}	3,286 9356 ^{11}	3,681 3679 ^{11}	4,117 3193 ^{11}
10	1,878 3924 ^{12}	2,139 2802 ^{12}	2,432 3323 ^{12}	2,761 0259 ^{12}	3,129 1627 ^{12}
11	1,212 4169 ^{13}	1,400 2562 ^{13}	1,614 1842 ^{13}	1,857 4174 ^{13}	2,133 5200 ^{13}
12	7,072 4320	8,284 8489	9,685 1051	1,129 9289 ^{14}	1,315 6707 ^{14}
13	3,753 8293 ^{14}	4,461 0725 ^{14}	5,289 5574 ^{14}	6,258 0679	7,387 9968
14	1,823 2885 ^{15}	2,198 6714 ^{15}	2,644 7787 ^{15}	3,173 7344 ^{15}	3,799 5412 ^{15}
15	8,144 0220	9,967 3106	1,216 5982 ^{16}	1,481 0761 ^{16}	1,798 4495 ^{16}
16	3,359 4091 ^{16}	4,173 8113 ^{16}	5,170 5424	6,387 1406	7,868 2166
17	1,284 4799 ^{17}	1,620 4206 ^{17}	2,037 8020 ^{17}	2,554 8562 ^{17}	3,193 5703 ^{17}
18	4,567 0398	5,851 5198	7,471 9406	9,509 7426	1,206 4599 ^{18}
19	1,514 3343 ^{18}	1,971 0382 ^{18}	2,556 1902 ^{18}	3,303 3843 ^{18}	4,254 3585
20	4,694 4362	6,208 7704	8,179 8087	1,073 5999 ^{19}	1,403 9383 ^{19}
21	1,363 6219 ^{19}	1,833 0656 ^{19}	2,453 9426 ^{19}	3,271 9235	4,345 5234
22	3,718 9689	5,082 5909	6,915 6564	9,369 5990	1,264 1523 ^{20}
23	9,539 9638	1,325 8933 ^{20}	1,834 1524 ^{20}	2,525 7180 ^{20}	3,462 6779
24	2,305 4912 ^{20}	3,259 4876	4,585 3809	6,419 5333	8,945 2513
25	5,256 5200	7,562 0113	1,082 1499 ^{21}	1,540 6880 ^{21}	2,182 6413 ^{21}
26	1,132 1735 ^{21}	1,657 8256 ^{21}	2,414 0267	3,496 1766	5,036 8646
27	2,306 2794	3,438 4530	5,096 2785	7,510 3052	1,100 6482 ^{22}
28	4,447 8246	6,754 1041	1,019 2557 ^{22}	1,528 8836 ^{22}	2,279 9141
29	8,128 7830	1,257 6608 ^{22}	1,933 0712	2,952 3269	4,481 2104
30	1,408 9890 ^{22}	2,221 8673	3,479 5281	5,412 5993	8,364 9262

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 81$	$m = 82$	$m = 83$	$m = 84$	$m = 85$
31	2,318 0142 ^{22}	3,727 0032 ^{22}	5,948 8706 ^{22}	9,428 3988 ^{22}	1,484 0998 ^{23}
32	3,621 8973	5,939 9115	9,666 9148	1,561 5785 ^{23}	2,504 4184
33	5,377 9687	8,999 8659	1,493 9777 ^{23}	2,460 6692	4,022 2478
34	7,592 4263	1,297 0395 ^{23}	2,197 0261	3,691 0038	6,151 6730
35	1,019 5544 ^{23}	1,778 7970	3,075 8365	5,272 8626	8,963 8664
36	1,302 7639	2,322 3183	4,101 1154	7,176 9519	1,244 9815 ^{24}
37	1,584 4426	2,887 2066	5,209 5249	9,310 6403	1,648 7592
38	1,834 6178	3,419 0604	6,306 2670	1,151 5792 ^{24}	2,082 6432
39	2,022 7837	3,857 4015	7,276 4619	1,358 2729	2,509 8520
40	2,123 9229	4,146 7066	8,004 1081	1,528 0570	2,886 3299
41	2,123 9229	4,247 8458	8,394 5524	1,639 8661	3,167 9231
42			8,394 5524	1,678 9105	3,318 7765
43					3,318 7765

n	$m = 86$	$m = 87$	$m = 88$	$m = 89$	$m = 90$
1	8,6 ^{1}	8,7 ^{1}	8,8 ^{1}	8,9 ^{1}	9,0 ^{1}
2	3,655 ^{3}	3,741 ^{3}	3,828 ^{3}	3,916 ^{3}	4,005 ^{3}
3	1,023 40 ^{5}	1,059 95 ^{5}	1,097 36 ^{5}	1,135 64 ^{5}	1,174 80 ^{5}
4	2,123 555 ^{6}	2,225 895 ^{6}	2,331 890 ^{6}	2,441 626 ^{6}	2,555 190 ^{6}
5	3,482 6302 ^{7}	3,694 9857 ^{7}	3,917 5752 ^{7}	4,150 7642 ^{7}	4,394 9268 ^{7}
6	4,701 5508 ^{8}	5,049 8138 ^{8}	5,419 3124 ^{8}	5,811 0699 ^{8}	6,226 1463 ^{8}
7	5,373 2009 ^{9}	5,843 3560 ^{9}	6,348 3373 ^{9}	6,890 2686 ^{9}	7,471 3756 ^{9}
8	5,306 0359 ^{10}	5,843 3560 ^{10}	6,427 6916 ^{10}	7,062 5253 ^{10}	7,751 5521 ^{10}
9	4,598 5644 ^{11}	5,129 1680 ^{11}	5,713 5036 ^{11}	6,356 2728 ^{11}	7,062 5253 ^{11}
10	3,540 8946 ^{12}	4,000 7510 ^{12}	4,513 6678 ^{12}	5,085 0182 ^{12}	5,720 6455 ^{12}
11	2,446 4363 ^{13}	2,800 5257 ^{13}	3,200 6008 ^{13}	3,651 9676 ^{13}	4,160 4694 ^{13}
12	1,529 0227 ^{14}	1,773 6663 ^{14}	2,053 7189 ^{14}	2,373 7790 ^{14}	2,738 9757 ^{14}
13	8,703 6675	1,023 2690 ^{15}	1,200 6356 ^{15}	1,406 0075 ^{15}	1,643 3854 ^{15}
14	4,538 3409 ^{15}	5,408 7077	6,431 9767	7,632 6123	9,038 6199
15	2,178 4036 ^{16}	2,632 2377 ^{16}	3,173 1085 ^{16}	3,816 3062 ^{16}	4,579 5674 ^{16}
16	9,666 6661	1,184 5070 ^{17}	1,447 7308 ^{17}	1,765 0416 ^{17}	2,146 6722 ^{17}
17	3,980 3919 ^{17}	4,947 0586	6,131 5655	7,579 2963	9,344 3379
18	1,525 8169 ^{18}	1,923 8561 ^{18}	2,418 5620 ^{18}	3,031 7185 ^{18}	3,789 6481 ^{18}
19	5,460 8184	6,986 6353	8,910 4914	1,132 9053 ^{19}	1,436 0772 ^{19}
20	1,829 3742 ^{19}	2,375 4560 ^{19}	3,074 1195 ^{19}	3,965 1687	5,098 0740
21	5,749 4617	7,578 8358	9,954 2919	1,302 8411 ^{20}	1,699 3580 ^{20}
22	1,698 7046 ^{20}	2,273 6508 ^{20}	3,031 5343 ^{20}	4,026 9635	5,329 8047
23	4,726 8302	6,425 5347	8,699 1855	1,173 0720 ^{21}	1,575 7683 ^{21}
24	1,240 7929 ^{21}	1,713 4759 ^{21}	2,356 0294 ^{21}	3,225 9480	4,399 0199
25	3,077 1664	4,317 9593	6,031 4353	8,387 4647	1,161 3413 ^{22}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 86$	$m = 87$	$m = 88$	$m = 89$	$m = 90$
26	7,219 5059 ^{21}	1,029 6672 ^{22}	1,461 4632 ^{22}	2,064 6067 ^{22}	2,903 3532 ^{22}
27	1,604 3346 ^{22}	2,326 2852	3,355 9524	4,817 4156	6,882 0223
28	3,380 5623	4,984 8969	7,311 1821	1,066 7135 ^{23}	1,548 4550 ^{23}
29	6,761 1245	1,014 1687 ^{23}	1,512 6584 ^{23}	2,243 7766	3,310 4900
30	1,284 6137 ^{23}	1,960 7261	2,974 8948	4,487 5532	6,731 3297
31	2,320 5924	3,605 2061	5,565 9322	8,546 8270	1,302 8380 ^{24}
32	3,988 5182	6,309 1106	9,914 3167	1,548 0249 ^{24}	2,402 1076
33	6,526 6662	1,051 5184 ^{24}	1,682 4295 ^{24}	2,673 8612	4,221 8861
34	1,017 3921 ^{24}	1,670 0587	2,721 5771	4,404 0066	7,077 8678
35	1,511 5539	2,528 9460	4,199 0047	6,920 5819	1,132 4589 ^{25}
36	2,141 3681	3,652 9220	6,181 8681	1,038 0873 ^{25}	1,730 1455
37	2,893 7407	5,035 1088	8,688 0308	1,486 9899	2,525 0772
38	3,731 4024	6,625 1431	1,166 0252 ^{25}	2,034 8283	3,521 8182
39	4,592 4952	8,323 8977	1,494 9041	2,660 9293	4,695 7575
40	5,396 1819	9,988 6771	1,831 2575	3,326 1616	5,987 0908
41	6,054 2530	1,145 0435 ^{25}	2,143 9112	3,975 1687	7,301 3302
42	6,486 6996	1,254 0953	2,399 1387	4,543 0499	8,518 2186
43	6,637 5531	1,312 4253	2,566 5205	4,965 6593	9,508 7092
44		1,312 4253	2,624 8505	5,191 3711	1,015 7030 ^{26}
45				5,191 3711	1,038 2742

n	$m = 91$	$m = 92$	$m = 93$	$m = 94$	$m = 95$
1	9,1 ^{1}	9,2 ^{1}	9,3 ^{1}	9,4 ^{1}	9,5 ^{1}
2	4,095 ^{3}	4,186 ^{3}	4,278 ^{3}	4,371 ^{3}	4,465 ^{3}
3	1,214 85 ^{5}	1,255 80 ^{5}	1,297 66 ^{5}	1,340 44 ^{5}	1,384 15 ^{5}
4	2,672 670 ^{6}	2,794 155 ^{6}	2,919 735 ^{6}	3,049 501 ^{6}	3,183 545 ^{6}
5	4,650 4458 ^{7}	4,917 7128 ^{7}	5,197 1283 ^{7}	5,489 1018 ^{7}	5,794 0519 ^{7}
6	6,665 6390 ^{8}	7,130 6836 ^{8}	7,622 4548 ^{8}	8,142 1677 ^{8}	8,691 0779 ^{8}
7	8,093 9902 ^{9}	8,760 5541 ^{9}	9,473 6224 ^{9}	1,023 5868 ^{10}	1,105 0085 ^{10}
8	8,498 6897 ^{10}	9,308 0887 ^{10}	1,018 4144 ^{11}	1,113 1506 ^{11}	1,215 5093 ^{11}
9	7,837 6805 ^{11}	8,687 5495 ^{11}	9,618 3583	1,063 6773 ^{12}	1,174 9923 ^{12}
10	6,426 8980 ^{12}	7,210 6661 ^{12}	8,079 4210 ^{12}	9,041 2569	1,010 4934 ^{13}
11	4,732 5340 ^{13}	5,375 2238 ^{13}	6,096 2904 ^{13}	6,904 2325 ^{13}	7,808 3582
12	3,155 0227 ^{14}	3,628 2761 ^{14}	4,165 7984 ^{14}	4,775 4275 ^{14}	5,465 8507 ^{14}
13	1,917 2830 ^{15}	2,232 7853 ^{15}	2,595 6129 ^{15}	3,012 1927 ^{15}	3,489 7355 ^{15}
14	1,068 2005 ^{16}	1,259 9288 ^{16}	1,483 2074 ^{16}	1,742 7686 ^{16}	2,043 9879 ^{16}
15	5,483 4294	6,551 6299	7,811 5587	9,294 7661	1,103 7535 ^{17}
16	2,604 6290 ^{17}	3,152 9719 ^{17}	3,808 1349 ^{17}	4,589 2908 ^{17}	5,518 7674
17	1,149 1010 ^{18}	1,409 5639 ^{18}	1,724 8611 ^{18}	2,105 6746 ^{18}	2,564 6037 ^{18}
18	4,724 0819	5,873 1829	7,282 7468	9,007 6079	1,111 3283 ^{19}
19	1,815 0420 ^{19}	2,287 4502 ^{19}	2,874 7685 ^{19}	3,603 0432 ^{19}	4,503 8040
20	6,534 1512	8,349 1932	1,063 6643 ^{20}	1,351 1412 ^{20}	1,711 4455 ^{20}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 91$	$m = 92$	$m = 93$	$m = 94$	$m = 95$
21	2,209 1654 ^{20}	2,862 5805 ^{20}	3,697 4999 ^{20}	4,761 1642 ^{20}	6,112 3054 ^{20}
22	7,029 1627	9,238 3281	1,210 0909 ^{21}	1,579 8408 ^{21}	2,055 9573 ^{21}
23	2,108 7488 ^{21}	2,811 6651 ^{21}	3,735 4979	4,945 5887	6,525 4296
24	5,974 7883	8,083 5371	1,089 5202 ^{22}	1,463 0700 ^{22}	1,957 6289 ^{22}
25	1,601 2433 ^{22}	2,198 7221 ^{22}	3,007 0758	4,096 5960	5,559 6660
26	4,064 6944	5,665 9377	7,864 6598	1,087 1736 ^{23}	1,496 8332 ^{23}
27	9,785 3755	1,385 0070 ^{23}	1,951 6008 ^{23}	2,738 0667	3,825 2403
28	2,236 6572 ^{23}	3,215 1948	4,600 2018	6,551 8025	9,289 8693
29	4,858 9451	7,095 6023	1,031 0797 ^{24}	1,491 0999 ^{24}	2,146 2801 ^{24}
30	1,004 1820 ^{24}	1,490 0765 ^{24}	2,199 6367	3,230 7164	4,721 8163
31	1,975 9710	2,980 1530	4,470 2295	6,669 8662	9,900 5826
32	3,704 9456	5,680 9166	8,661 0696	1,313 1299 ^{25}	1,980 1165 ^{25}
33	6,623 9937	1,032 8939 ^{25}	1,600 9856 ^{25}	2,467 0925	3,780 2224
34	1,129 9754 ^{25}	1,792 3748	2,825 2687	4,426 2543	6,893 3468
35	1,840 2456	2,970 2210	4,762 5958	7,587 8645	1,201 4119 ^{26}
36	2,862 6043	4,702 8500	7,673 0710	1,243 5667 ^{26}	2,002 3531
37	4,255 2226	7,117 8270	1,182 0677 ^{26}	1,949 3748	3,192 9415
38	6,046 8953	1,030 2118 ^{26}	1,741 9945	2,924 0622	4,873 4370
39	8,217 5757	1,426 4471	2,456 6589	4,198 6534	7,122 7156
40	1,068 2848 ^{26}	1,890 0424	3,316 4895	5,773 1484	9,971 8018
41	1,328 8421	2,397 1269	4,287 1694	7,603 6589	1,337 6807 ^{27}
42	1,581 9549	2,910 7970	5,307 9240	9,595 0934	1,719 8752
43	1,802 6928	3,384 6477	6,295 4447	1,160 3369 ^{27}	2,119 8462
44	1,966 5740	3,769 2667	7,153 9144	1,344 9359	2,505 2728
45	2,053 9772	4,020 5512	7,789 8179	1,494 3732	2,839 3092
46	2,053 9772	4,107 9545	8,128 5057	1,591 8324	3,086 2056
47			8,128 5057	1,625 7011	3,217 5335
48					3,217 5335

n	$m = 96$	$m = 97$	$m = 98$	$m = 99$	$m = 100$
1	9,6 ^{1}	9,7 ^{1}	9,8 ^{1}	9,9 ^{1}	1,00 ^{2}
2	4,560 ^{3}	4,656 ^{3}	4,753 ^{3}	4,851 ^{3}	4,950 ^{3}
3	1,428 80 ^{5}	1,474 40 ^{5}	1,520 96 ^{5}	1,568 49 ^{5}	1,617 00 ^{5}
4	3,321 960 ^{6}	3,464 840 ^{6}	3,612 280 ^{6}	3,764 376 ^{6}	3,921 225 ^{6}
5	6,112 4064 ^{7}	6,444 6024 ^{7}	6,791 0864 ^{7}	7,152 3144 ^{7}	7,528 7520 ^{7}
6	9,270 4830 ^{8}	9,881 7237 ^{8}	1,052 6184 ^{9}	1,120 5293 ^{9}	1,192 0524 ^{9}
7	1,191 9192 ^{10}	1,284 6241 ^{10}	1,383 4413 ^{10}	1,488 7032 ^{10}	1,600 7561 ^{10}
8	1,326 0102 ^{11}	1,445 2021 ^{11}	1,573 6645 ^{11}	1,712 0086 ^{11}	1,860 8789 ^{11}
9	1,296 5433 ^{12}	1,429 1443 ^{12}	1,573 6645 ^{12}	1,731 0309 ^{12}	1,902 2318 ^{12}
10	1,127 9926 ^{13}	1,257 6470 ^{13}	1,400 5614 ^{13}	1,557 9279 ^{13}	1,731 0309 ^{13}

III. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦИЕНТЫ C_n^m

n	$m = 96$	$m = 97$	$m = 98$	$m = 99$	$m = 100$
11	8,818 8516 ^{13}	9,946 8442 ^{13}	1,120 4491 ^{14}	1,260 5053 ^{14}	1,416 2980 ^{14}
12	6,246 6865 ^{14}	7,128 5717 ^{14}	8,123 2561	9,243 7052	1,050 4211 ^{15}
13	4,036 3205 ^{15}	4,660 9892 ^{15}	5,373 8464 ^{15}	6,186 1720 ^{15}	7,110 5425
14	2,392 9615 ^{16}	2,796 5935 ^{16}	3,262 6924 ^{16}	3,800 0771 ^{16}	4,418 6943 ^{16}
15	1,308 1523 ^{17}	1,547 4484 ^{17}	1,827 1078 ^{17}	2,153 3770 ^{17}	2,533 3847 ^{17}
16	6,622 5208	7,930 6731	9,478 1215	1,130 5229 ^{18}	1,345 8606 ^{18}
17	3,116 4804 ^{18}	3,778 7325 ^{18}	4,571 7998 ^{18}	5,519 6119	6,650 1349
18	1,367 7886 ^{19}	1,679 4367 ^{19}	2,057 3099 ^{19}	2,514 4899 ^{19}	3,066 4511 ^{19}
19	5,615 1322	6,982 9208	8,662 3575	1,071 9667 ^{20}	1,323 4157 ^{20}
20	2,161 8259 ^{20}	2,723 3391 ^{20}	3,421 6312 ^{20}	4,287 8670	5,359 8337
21	7,823 7509	9,985 5768	1,270 8916 ^{21}	1,613 0547 ^{21}	2,041 8414 ^{21}
22	2,667 1878 ^{21}	3,449 5629 ^{21}	4,448 1206	5,719 0122	7,332 0669
23	8,581 3869	1,124 8575 ^{22}	1,469 8138 ^{22}	1,914 6258 ^{22}	2,486 5270 ^{22}
24	2,610 1718 ^{22}	3,468 3105	4,593 1680	6,062 9817	7,977 6076
25	7,517 2949	1,012 7467 ^{23}	1,359 5777 ^{23}	1,818 8945 ^{23}	2,425 1927 ^{23}
26	2,052 7998 ^{23}	2,804 5292	3,817 2759	5,176 8536	6,995 7482
27	5,322 0734	7,374 8732	1,017 9402 ^{24}	1,399 6678 ^{24}	1,917 3532 ^{24}
28	1,311 5110 ^{24}	1,843 7183 ^{24}	2,581 2056	3,599 1459	4,998 8137
29	3,075 2671	4,386 7780	6,230 4963	8,811 7019	1,241 0848 ^{25}
30	6,868 0965	9,943 3635	1,433 0142 ^{25}	2,056 0638 ^{25}	2,937 2340
31	1,462 2399 ^{25}	2,149 0495 ^{25}	3,143 3859	4,576 4000	6,632 4638
32	2,970 1748	4,432 4147	6,581 4642	9,724 8501	1,430 1250 ^{26}
33	5,760 3390	8,730 5137	1,316 2928 ^{26}	1,974 4393 ^{26}	2,946 9243
34	1,067 3569 ^{26}	1,643 3908 ^{26}	2,516 4422	3,832 7350	5,807 1743
35	1,890 7466	2,958 1035	4,601 4943	7,117 9365	1,095 0672 ^{27}
36	3,203 7650	5,094 5115	8,052 6150	1,265 4109 ^{27}	1,977 2046
37	5,195 2946	8,399 0596	1,349 3571 ^{27}	2,154 6186	3,420 0295
38	8,066 3784	1,326 1673 ^{27}	2,166 0733	3,515 4304	5,670 0490
39	1,199 6153 ^{27}	2,006 2531	3,332 4204	5,498 4937	9,013 9240
40	1,709 4517	2,909 0670	4,915 3201	8,247 7405	1,374 6234 ^{28}
41	2,334 8609	4,044 3126	6,953 3796	1,186 8700 ^{28}	2,011 6440
42	3,057 5560	5,392 4169	9,436 7295	1,639 0109	2,825 8809
43	3,839 7214	6,897 2774	1,228 9694 ^{28}	2,172 6424	3,811 6533
44	4,625 1190	8,464 8404	1,536 2118	2,765 1812	4,937 8236
45	5,344 5820	9,969 7009	1,843 4541	3,379 6659	6,144 8471
46	5,925 5148	1,127 0097 ^{28}	2,123 9798	3,967 4339	7,347 0998
47	6,303 7391	1,222 9254	2,349 9351	4,473 9148	8,441 3487
48	6,435 0670	1,273 8806	2,496 8060	4,846 7411	9,320 6559
49		1,273 8806	2,547 7612	5,044 5672	9,891 3083
50				5,044 5672	1,008 9134 ^{29}

IV. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОГРЕШНОСТЕЙ

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
0,00	1,0000	0,40	0,6892	0,80	0,4237
,01	,9920	,41	,6818	,81	,4179
,02	,9840	,42	,6745	,82	,4122
,03	,9761	,43	,6672	,83	,4065
,04	,9681	,44	,6599	,84	,4009
0,05	0,9601	0,45	0,6527	0,85	0,3953
,06	,9522	,46	,6455	,86	,3898
,07	,9442	,47	,6384	,87	,3843
,08	,9362	,48	,6312	,88	,3789
,09	,9283	,49	,6241	,89	,3735
0,10	0,9203	0,50	0,6171	0,90	0,3681
,11	,9124	,51	,6101	,91	,3628
,12	,9045	,52	,6031	,92	,3576
,13	,8966	,53	,5961	,93	,3524
,14	,8887	,54	,5892	,94	,3472
0,15	0,8808	0,55	0,5823	0,95	0,3421
,16	,8729	,56	,5755	,96	,3371
,17	,8650	,57	,5687	,97	,3321
,18	,8572	,58	,5619	,98	,3271
,19	,8493	,59	,5552	,99	,3222
0,20	0,8415	0,60	0,5485	1,00	0,3173
,21	,8337	,61	,5419	,01	,3125
,22	,8259	,62	,5353	,02	,3077
,23	,8181	,63	,5287	,03	,3030
,24	,8103	,64	,5222	,04	,2984
0,25	0,8026	0,65	0,5157	1,05	0,2937
,26	,7949	,66	,5093	,06	,2891
,27	,7872	,67	,5029	,07	,2846
,28	,7795	,68	,4965	,08	,2802
,29	,7718	,69	,4902	,09	,2757
0,30	0,7642	0,70	0,4839	1,10	0,2713
,31	,7566	,71	,4777	,11	,2670
,32	,7490	,72	,4715	,12	,2627
,33	,7414	,73	,4654	,13	,2585
,34	,7339	,74	,4593	,14	,2543
0,35	0,7263	0,75	0,4533	1,15	0,2502
,36	,7189	,76	,4473	,16	,2460
,37	,7114	,77	,4413	,17	,2420
,38	,7039	,78	,4354	,18	,2380
,39	,6965	,79	,4295	,19	,2341

Функция $\Phi(y)$ определяется формулой $\Phi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$

IV. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОГРЕШНОСТЕЙ

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
1,20	0,2301	1,60	0,1096	2,00	0,0455
,21	,2263	,61	,1074	,01	,0444
,22	,2225	,62	,1052	,02	,0434
,23	,2187	,63	,1031	,03	,0424
,24	,2150	,64	,1010	,04	,0414
1,25	0,2113	1,65	0,0989	2,05	0,0404
,26	,2077	,66	,0969	,06	,0394
,27	,2041	,67	,0949	,07	,0385
,28	,2006	,68	,0930	,08	,0375
,29	,1971	,69	,0910	,09	,0366
1,30	0,1936	1,70	0,0891	2,10	0,0357
,31	,1902	,71	,0873	,11	,0349
,32	,1868	,72	,0854	,12	,0340
,33	,1835	,73	,0836	,13	,0332
,34	,1803	,74	,0819	,14	,0324
1,35	0,1770	1,75	0,0801	2,15	0,0316
,36	,1738	,76	,0784	,16	,0308
,37	,1707	,77	,0767	,17	,0300
,38	,1676	,78	,0751	,18	,0293
,39	,1645	,79	,0735	,19	,0285
1,40	0,1615	1,80	0,0719	2,20	0,0278
,41	,1585	,81	,0703	,21	,0271
,42	,1556	,82	,0688	,22	,0264
,43	,1527	,83	,0673	,23	,0257
,44	,1499	,84	,0658	,24	,0251
1,45	0,1471	1,85	0,0643	2,25	0,0244
,46	,1443	,86	,0629	,26	,0238
,47	,1416	,87	,0615	,27	,0232
,48	,1389	,88	,0601	,28	,0226
,49	,1362	,89	,0588	,29	,0220
1,50	0,1336	1,90	0,0574	2,30	0,0214
,51	,1311	,91	,0561	,31	,0209
,52	,1285	,92	,0549	,32	,0203
,53	,1260	,93	,0536	,33	,0198
,54	,1236	,94	,0524	,34	,0193
1,55	0,1211	1,95	0,0512	2,35	0,0188
,56	,1188	,96	,0500	,36	,0183
,57	,1164	,97	,0488	,37	,0178
,58	,1141	,98	,0477	,38	,0173
,59	,1118	,99	,0466	,39	,0168

IV. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОГРЕШНОСТЕЙ

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
2,40	0,0164	2,70	0,0069	3,00	0,0027
,41	,0160	,71	,0067	,10	,0019
,42	,0155	,72	,0065	,20	,0014
,43	,0151	,73	,0063	,30	,0010
,44	,0147	,74	,0061	,40	,0007
2,45	0,0143	2,75	0,0060	,50	0,0005
,46	,0139	,76	,0058	,60	,0003
,47	,0135	,77	,0056	,70	,0002
,48	,0131	,78	,0054	,80	,0001
,49	,0128	,79	,0053	,90	,0001
2,50	0,0124	2,80	0,0051	4,00	0,0001
,51	,0121	,81	,0050		
,52	,0117	,82	,0048		
,53	,0114	,83	,0047		
,54	,0111	,84	,0045		
2,55	0,0108	2,85	0,0044		
,56	,0105	,86	,0042		
,57	,0102	,87	,0041		
,58	,0099	,88	,0040		
,59	,0096	,89	,0039		
2,60	0,0093	2,90	0,0037		
,61	,0091	,91	,0036		
,62	,0088	,92	,0035		
,63	,0085	,93	,0034		
,64	,0083	,94	,0033		
2,65	0,0081	2,95	0,0032	1,645	0,1
,66	,0078	,96	,0031	2,576	,01
,67	,0076	,97	,0030	3,291	,001
,68	,0074	,98	,0029	3,890	,0001
,69	,0071	,99	,0028	4,417	,00001
				4,892	,000001

V. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН, ЕГО ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ ДО ВТОРОГО ПОРЯДКА

y	$\varphi_{-1}(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi'(y)$	$\varphi''(y)$
0,0	+0,50000	+0,39894	−0,00000	−0,39894
0,1	0,53983	0,39695	0,03970	0,39298
0,2	0,57926	0,39104	0,07821	0,37540
0,3	0,61791	0,38139	0,11442	0,34706
0,4	0,65542	0,36827	0,14731	0,30935
0,5	+0,69146	+0,35207	−0,17603	−0,26405
0,6	0,72575	0,33322	0,19993	0,21326
0,7	0,75804	0,31225	0,21858	0,15925
0,8	0,78814	0,28969	0,23175	0,10429
0,9	0,81594	0,26609	0,23948	−0,05056
1,0	+0,84134	+0,24197	−0,24197	+0,00000
1,1	0,86433	0,21785	0,23964	0,04575
1,2	0,88493	0,19419	0,23302	0,08544
1,3	0,90320	0,17137	0,22278	0,11824
1,4	0,91924	0,14973	0,20962	0,14374
1,5	+0,93319	+0,12952	−0,19428	+0,16190
1,6	0,94520	0,11092	0,17747	0,17304
1,7	0,95543	0,09405	0,15988	0,17775
1,8	0,96407	0,07895	0,14211	0,17685
1,9	0,97128	0,06562	0,12467	0,17126
2,0	+0,97725	+0,05399	−0,10798	+0,16197
2,1	0,98214	0,04398	0,09237	0,14998
2,2	0,98610	0,03547	0,07804	0,13622
2,3	0,98928	0,02833	0,06515	0,12152
2,4	0,99180	0,02239	0,05375	0,10660
2,5	+0,99379	+0,01753	−0,04382	+0,09202
2,6	0,99534	0,01358	0,03532	0,07824
2,7	0,99653	0,01042	0,02814	0,06555
2,8	0,99744	0,00792	0,02216	0,05414
2,9	0,99813	0,00595	0,01726	0,04411
3,0	+0,99865	+0,00443	−0,01330	+0,03545
3,1	0,99903	0,00327	0,01013	0,02813
3,2	0,99931	0,00238	0,00763	0,02203
3,3	0,99952	0,00172	0,00568	0,01704
3,4	0,99966	0,00123	0,00419	0,01301
3,5	+0,99977	+0,00087	−0,00305	+0,00982
3,6	0,99984	0,00061	0,00220	0,00732
3,7	0,99989	0,00042	0,00157	0,00539
3,8	0,99993	0,00029	0,00111	0,00392
3,9	0,99995	0,00020	0,00077	0,00282
4,0	+0,99997	+0,00013	−0,00054	+0,00201

Обозначения: $\Phi(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$; $\Phi_1(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\Phi(y)\,dy$; $\Phi^i(y)=\dfrac{d^i\Phi(y)}{dy^i}$.

V. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН, ЕГО ПРОИЗВОДНЫЕ ДО ШЕСТОГО ПОРЯДКА

y	$\Phi'''(y)$	$\Phi^{iv}(y)$	$\Phi^{v}(y)$	$\Phi^{vi}(y)$
0,0	+0,00000	+1,19683	−0,00000	−5,98413
0,1	0,11869	1,16708	0,59146	5,77625
0,2	0,23150	1,07990	1,14197	5,17112
0,3	0,33295	0,94130	1,61420	4,22226
0,4	0,41835	0,76070	1,97770	3,01221
0,5	+0,48409	+0,55010	−2,21141	−1,64481
0,6	0,52783	0,32309	2,30517	−0,23237
0,7	0,54863	+0,09371	2,26012	+1,11354
0,8	0,54694	−0,12468	2,08800	2,29382
0,9	0,52445	0,32034	1,80951	3,23026
1,0	+0,48394	−0,48394	−1,45182	+3,87153
1,1	0,42895	0,60909	1,04580	4,19585
1,2	0,36352	0,69255	0,62301	4,21034
1,3	0,29184	0,73413	−0,21300	3,94753
1,4	0,21800	0,73642	+0,15897	3,45953
1,5	+0,14571	−0,70425	+0,47355	+2,81094
1,6	0,07809	0,64405	0,71813	2,07125
1,7	+0,01759	0,56316	0,88702	1,30785
1,8	−0,03411	0,46915	0,98090	+0,58014
1,9	0,07605	0,36928	1,00583	−0,06467
2,0	−0,10798	−0,26996	+0,97184	−0,59390
2,1	0,13024	0,17646	0,89150	0,98987
2,2	0,14360	0,09274	0,77844	1,24885
2,3	0,14920	−0,02141	0,64604	1,37883
2,4	0,14834	+0,03623	0,50642	1,39654
2,5	−0,14242	+0,07997	+0,36974	−1,32421
2,6	0,13279	0,11053	0,24376	1,18645
2,7	0,12071	0,12926	0,13381	1,00761
2,8	0,10727	0,13793	+0,04287	0,80970
2,9	0,09339	0,13850	−0,02810	0,61102
3,0	−0,07977	+0,13296	−0,07977	−0,42546
3,1	0,06694	0,12313	0,11395	0,26242
3,2	0,05523	0,11066	0,13319	0,12712
3,3	0,04435	0,09690	0,14036	−0,02130
3,4	0,03586	0,08290	0,13840	+0,05607
3,5	−0,02825	+0,06943	−0,13000	+0,10784
3,6	0,02194	0,05703	0,11755	0,13802
3,7	0,01680	0,04599	0,10297	0,15102
3,8	0,01269	0,03646	0,08777	0,15124
3,9	0,00946	0,02842	0,07302	0,14264
4,0	−0,00696	+0,02181	−0,05942	+0,12861

Обозначения: $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$; $\Phi^i(y) = \frac{d^i \Phi(y)}{dy^i}$

VI. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ $^{\infty}P'(j)$

j	$\epsilon = 0,1$	$\epsilon = 0,2$	$\epsilon = 0,3$	$\epsilon = 0,4$	$\epsilon = 0,5$
0	$9,0484^{-1}$	$8,1873^{-1}$	$7,4082^{-1}$	$6,7032^{-1}$	$6,0653^{-1}$
1	$9,0484^{-2}$	$1,6375$	$2,2225$	$2,6813$	$3,0327$
2	$4,5242^{-3}$	$1,6375^{-2}$	$3,3337^{-2}$	$5,3626^{-2}$	$7,5816^{-2}$
3	$1,5081^{-4}$	$1,0916^{-3}$	$3,3337^{-3}$	$7,1501^{-3}$	$1,2636$
4	$3,7702^{-6}$	$5,4582^{-5}$	$2,5003^{-4}$	$7,1501^{-4}$	$1,5795^{-3}$
5		$2,1833^{-6}$	$1,5002^{-5}$	$5,7201^{-5}$	$1,5795^{-4}$
6				$3,8134^{-6}$	$1,3163^{-5}$

j	$\epsilon = 0,6$	$\epsilon = 0,7$	$\epsilon = 0,8$	$\epsilon = 0,9$
0	$5,4881^{-1}$	$4,9659^{-1}$	$4,4933^{-1}$	$4,0657^{-1}$
1	$3,2929$	$3,4761$	$3,5946$	$3,6591$
2	$9,8786^{-2}$	$1,2166$	$1,4379$	$1,6466$
3	$1,9757$	$2,8388^{-2}$	$3,8343^{-2}$	$4,9398^{-2}$
4	$2,9636^{-3}$	$4,9679^{-3}$	$7,6685^{-3}$	$1,1115$
5	$3,5563^{-4}$	$6,9551^{-4}$	$1,2270$	$2,0006^{-3}$
6	$3,5563^{-5}$	$8,1143^{-5}$	$1,6360^{-4}$	$3,0009^{-4}$
7	$3,0483^{-6}$	$8,1143^{-6}$	$1,8697^{-5}$	$3,8584^{-5}$
8			$1,8697^{-6}$	$4,3406^{-6}$

j	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 2$	$\epsilon = 3$	$\epsilon = 4$	$\epsilon = 5$
0	$3,6788^{-1}$	$1,3534^{-1}$	$4,9787^{-2}$	$1,8316^{-2}$	$6,7379^{-3}$
1	$3,6788$	$2,7067$	$1,4936^{-1}$	$7,3263$	$3,3690^{-2}$
2	$1,8394$	$2,7067$	$2,2404$	$1,4653^{-1}$	$8,4224$
3	$6,1313^{-2}$	$1,8045$	$2,2404$	$1,9537$	$1,4037^{-1}$
4	$1,5328$	$9,0224^{-2}$	$1,6803$	$1,9537$	$1,7547$

VI. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ ${}^{\infty}P'(j)$

j	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 2$	$\epsilon = 3$	$\epsilon = 4$	$\epsilon = 5$
5	3,0657^{-3}	3,6089^{-2}	1,0082^{-1}	1,5629^{-1}	1,7547^{-1}
6	5,1094^{-4}	1,2030	5,0409^{-2}	1,0420	1,4622
7	7,2992^{-5}	3,4371^{-3}	2,1604	5,9540^{-2}	1,0444
8	9,1240^{-6}	8,5927^{-4}	8,1015^{-3}	2,9770	6,5278^{-2}
9	1,0138	1,9095	2,7005	1,3231	3,6266
10		3,8190^{-5}	8,1015^{-4}	5,2925^{-3}	1,8133
11		6,9436^{-6}	2,2095	1,9245	8,2422^{-3}
12		1,1573	5,5238^{-5}	6,4151^{-4}	3,4342
13			1,2747	1,9739	1,3209
14			2,7315^{-6}	5,6397^{-5}	4,7174^{-4}
15				1,5039	1,5725
16				3,7598^{-6}	4,9139^{-5}
17					1,4453
18					4,0146^{-6}
19					1,0565

j	$\epsilon = 6$	$\epsilon = 7$	$\epsilon = 8$	$\epsilon = 9$	$\epsilon = 10$
0	2,4788^{-3}	9,1188^{-4}	3,3546^{-4}	1,2341^{-4}	4,5400^{-5}
1	1,4873^{-2}	6,3832^{-3}	2,6837^{-3}	1,1107^{-3}	4,5400^{-4}
2	4,4618	2,2341^{-2}	1,0735^{-2}	4,9981	2,2700^{-3}
3	8,9235	5,2129	2,8626	1,4994^{-2}	7,5667
4	1,3385^{-1}	9,1226	5,7252	3,3737	1,8917^{-2}
5	1,6062	1,2772^{-1}	9,1604	6,0727	3,7833
6	1,6062	1,4900	1,2214^{-1}	9,1090	6,3055
7	1,3768	1,4900	1,3959	1,1712^{-1}	9,0079
8	1,0326	1,3038	1,3959	1,3176	1,1260^{-1}
9	6,8838^{-2}	1,0140	1,2408	1,3176	1,2511
10	4,13	7,0983^{-2}	9,9262^{-2}	1,1858	1,2511
11	2,2529	4,5171	7,2190	9,7020^{-2}	1,1374
12	1,1264	2,6350	4,8127	7,2765	9,4780^{-2}
13	5,1990^{-3}	1,4188	2,9616	5,0376	7,2908
14	2,2281	7,0942^{-3}	1,6924	3,2384	5,2077
15	8,9126^{-4}	3,3106	9,0260^{-3}	1,9431	3,4718
16	3,3422	1,4484	4,5130	1,0930	2,1699
17	1,1796	5,9640^{-4}	2,1238	5,7863^{-3}	1,2764
18	3,9320^{-5}	2,3193	9,4389^{-4}	2,8932	7,0911^{-3}
19	1,2417	8,5449^{-5}	3,9743	1,3704	3,7322

VI. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ $^{\infty}P'(j)$

j	$\epsilon = 6$	$\epsilon = 7$	$\epsilon = 8$	$\epsilon = 9$	$\epsilon = 10$
20	$3{,}7251^{-6}$	$2{,}9907^{-5}$	$1{,}5897^{-4}$	$6{,}1670^{-4}$	$1{,}8661^{-3}$
21	$1{,}0643$	$9{,}9690^{-6}$	$6{,}0561^{-5}$	$2{,}6430$	$8{,}8861^{-4}$
22		$3{,}1720$	$2{,}2022$	$1{,}0812$	$4{,}0391$
23			$7{,}6598^{-6}$	$4{,}2309^{-5}$	$1{,}7561$
24			$2{,}5533$	$1{,}5866$	$7{,}3173^{-5}$
25				$5{,}7117^{-6}$	$2{,}9269$
26				$1{,}9771$	$1{,}1257$
27					$4{,}1694^{6}$
28					$1{,}4891$

j	$\epsilon = 11$	$\epsilon = 12$	$\epsilon = 13$	$\epsilon = 14$	$\epsilon = 15$
0	$1{,}6702^{-5}$	$6{,}1442^{-6}$	$2{,}2603^{-6}$		
1	$1{,}8372^{-4}$	$7{,}3731^{-5}$	$2{,}9384^{-5}$	$1{,}1641^{-5}$	$4{,}5885^{-6}$
2	$1{,}0105^{-3}$	$4{,}4238^{-4}$	$1{,}9100^{-4}$	$8{,}1490$	$3{,}4414^{-5}$
3	$3{,}7050$	$1{,}7695^{-3}$	$8{,}2766$	$3{,}8029^{-4}$	$1{,}7207^{-4}$
4	$1{,}0189^{-2}$	$5{,}3086$	$2{,}6899^{-3}$	$1{,}3310^{-3}$	$6{,}4526$
5	$2{,}2415$	$1{,}2741^{-2}$	$6{,}9937$	$3{,}7268$	$1{,}9358^{-3}$
6	$4{,}1095$	$2{,}5481$	$1{,}5153^{-2}$	$8{,}6959$	$4{,}8395$
7	$6{,}4577$	$4{,}3682$	$2{,}8141$	$1{,}7392$	$1{,}0370^{-2}$
8	$8{,}8794$	$6{,}5523$	$4{,}5730$	$3{,}0436$	$1{,}9444$
9	$1{,}0853^{-1}$	$8{,}7364$	$6{,}6054$	$4{,}7344$	$3{,}2407$
10	$1{,}1938$	$1{,}0484^{-1}$	$8{,}5870$	$6{,}6282$	$4{,}8611$
11	$1{,}1938$	$1{,}1437$	$1{,}0148^{-1}$	$8{,}4359$	$6{,}6287$
12	$1{,}0943$	$1{,}1437$	$1{,}0994$	$9{,}8418$	$8{,}2859$
13	$9{,}2595^{-2}$	$1{,}0557$	$1{,}0994$	$1{,}0599^{-1}$	$9{,}5607$
14	$7{,}2753$	$9{,}0489^{-2}$	$1{,}0209$	$1{,}0599$	$1{,}0244^{-1}$
15	$5{,}3352$	$7{,}2391$	$8{,}8475^{-2}$	$9{,}8923^{-2}$	$1{,}0244$
16	$3{,}6680$	$5{,}4293$	$7{,}1886$	$8{,}6558$	$9{,}6034^{-2}$
17	$2{,}3734$	$3{,}8325$	$5{,}4972$	$7{,}1283$	$8{,}4736$
18	$1{,}4504$	$2{,}5550$	$3{,}9702$	$5{,}5442$	$7{,}0613$
19	$8{,}3971^{-3}$	$1{,}6137$	$2{,}7164$	$4{,}0852$	$5{,}5747$
20	$4{,}6184$	$9{,}6820^{-3}$	$1{,}7657$	$2{,}8597$	$4{,}1810$
21	$2{,}4192$	$5{,}5326$	$1{,}0930$	$1{,}9064$	$2{,}9865$
22	$1{,}2096$	$3{,}0178$	$6{,}4589^{-3}$	$1{,}2132$	$2{,}0362$
23	$5{,}7849^{-4}$	$1{,}5745$	$3{,}6507$	$7{,}3846^{-3}$	$1{,}3280$
24	$2{,}6514$	$7{,}8725^{-4}$	$1{,}9775$	$4{,}3077$	$8{,}2998^{-3}$

VI. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ $^{\infty}P^{i}(j)$

j	$\epsilon = 11$	$\epsilon = 12$	$\epsilon = 13$	$\epsilon = 14$	$\epsilon = 15$
25	$1{,}1666^{-4}$	$3{,}7788^{-4}$	$1{,}0283^{-3}$	$2{,}4123^{-3}$	$4{,}9799^{-3}$
26	$4{,}9357^{-5}$	$1{,}7441$	$5{,}1414^{-4}$	$1{,}2989$	$2{,}8730$
27	$2{,}0109$	$7{,}7513^{-5}$	$2{,}4755$	$6{,}7352^{-4}$	$1{,}5961$
28	$7{,}8998^{-6}$	$3{,}3220$	$1{,}1493$	$3{,}3676$	$8{,}5506^{-4}$
29	$2{,}9965$	$1{,}3746$	$5{,}1522^{-5}$	$1{,}6257$	$4{,}4227$
30	$1{,}0987$	$5{,}4985^{-6}$	$2{,}2326$	$7{,}5868^{-5}$	$2{,}2114$
31		$2{,}1284$	$9{,}3625^{-6}$	$3{,}4263$	$1{,}0700$
32			$3{,}8035$	$1{,}4990$	$5{,}0157^{-5}$
33			$1{,}4984$	$6{,}3594^{-6}$	$2{,}2799$
34				$2{,}6186$	$1{,}0058$
35				$1{,}0474$	$4{,}3107^{-6}$
36					$1{,}7961$

j	$\epsilon = 16$	$\epsilon = 17$	$\epsilon = 18$	$\epsilon = 19$	$\epsilon = 20$
0					
1	$1{,}8006^{-6}$				
2	$1{,}4405^{-5}$	$5{,}9822^{-6}$	$2{,}4673^{-6}$	$1{,}0113^{-6}$	
3	$7{,}6824$	$3{,}3899^{-5}$	$1{,}4804^{-5}$	$6{,}4049$	$2{,}7482^{-6}$
4	$3{,}0730^{-4}$	$1{,}4407^{-4}$	$6{,}6616$	$3{,}0423^{-5}$	$1{,}3741^{-5}$
5	$9{,}8335$	$4{,}8984$	$2{,}3982^{-4}$	$1{,}1561^{-4}$	$5{,}4964$
6	$2{,}6223^{-3}$	$1{,}3879^{-3}$	$7{,}1945$	$3{,}6610$	$1{,}8321^{-4}$
7	$5{,}9937$	$3{,}3706$	$1{,}8500^{-3}$	$9{,}9369$	$5{,}2347$
8	$1{,}1987^{-2}$	$7{,}1625$	$4{,}1625$	$2{,}3600^{-3}$	$1{,}3087^{-3}$
9	$2{,}1311$	$1{,}3529^{-2}$	$8{,}3251$	$4{,}9822$	$2{,}9082$
10	$3{,}4098$	$2{,}3000$	$1{,}4985^{-2}$	$9{,}4662$	$5{,}8163$
11	$4{,}9597$	$3{,}5545$	$2{,}4521$	$1{,}6351^{-2}$	$1{,}0575^{-2}$
12	$6{,}6129$	$5{,}0355$	$3{,}6782$	$2{,}5889$	$1{,}7625$
13	$8{,}1389$	$6{,}5849$	$5{,}0929$	$3{,}7837$	$2{,}7116$
14	$9{,}3016$	$7{,}9960$	$6{,}5480$	$5{,}1351$	$3{,}8737$
15	$9{,}9218$	$9{,}0621$	$7{,}8576$	$6{,}5044$	$5{,}1649$
16	$9{,}9218$	$9{,}6285$	$8{,}8397$	$7{,}7240$	$6{,}4561$
17	$9{,}3381$	$9{,}6285$	$9{,}3597$	$8{,}6327$	$7{,}5954$
18	$8{,}3006$	$9{,}0935$	$9{,}3597$	$9{,}1123$	$8{,}4394$
19	$6{,}9899$	$8{,}1363$	$8{,}8671$	$9{,}1123$	$8{,}8835$

VI. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ ${}^{\infty}P'(j)$

j	$\epsilon = 16$	$\epsilon = 17$	$\epsilon = 18$	$\epsilon = 19$	$\epsilon = 20$
20	5,5920^{-2}	6,9159^{-2}	7,9804^{-2}	8,6567^{-2}	8,8835^{-2}
21	4,2605	5,5986	6,8403	7,8323	8,4605
22	3,0986	4,3262	5,5966	6,7642	7,6914
23	2,1555	3,1976	4,3800	5,5878	6,6881
24	1,4370	2,2650	3,2850	4,4237	5,5735
25	9,1969^{-3}	1,5402	2,3652	3,3620	4,4588
26	5,6596	1,0070	1,6374	2,4569	3,4298
27	3,3539	6,3406^{-3}	1,0916	1,7289	2,5406
28	1,9165	3,8497	7,0176^{-3}	1,1732	1,8147
29	1,0574	2,2567	4,3558	7,6864^{-3}	1,2515
30	5,6393^{-4}	1,2788	2,6135	4,8680	8,3435^{-3}
31	2,9106	7,0128^{-4}	1,5175	2,9836	5,3829
32	1,4553	3,7255	8,5359^{-4}	1,7715	3,3643
33	7,0561^{-5}	1,9192	4,6559	1,0200	2,0390
34	3,3205	9,5961^{-5}	2,4649	5,6998^{-4}	1,1994
35	1,5179	4,6609	1,2677	3,0942	6,8537^{-4}
36	6,7464^{-6}	2,2010	6,3383^{-5}	1,6330	3,8076
37	2,9174	1,0113	3,0835	8,3859^{-5}	2,0582
38	1,2284	4,5241^{-6}	1,4606	4,1930	1,0833
39		1,9720	6,7413^{-6}	2,0427	5,5551^{-5}
40			3,0336	9,7030^{-6}	2,7776
41			1,3318	4,4965	1,3549
42				2,0341	6,4520^{-6}
43					3,0009
44					1,3641

VII. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ $^{\infty}\Pi'_{\nu}$

ν	$e = 0,1$	$e = 0,2$	$e = 0,3$	$e = 0,4$	$e = 0,5$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$9,5163^{-2}$	$1,8127^{-1}$	$2,5918^{-1}$	$3,2968^{-1}$	$3,9347^{-1}$
2	$4,6788^{-3}$	$1,7523^{-2}$	$3,6936^{-2}$	$6,1552^{-2}$	$9,0204^{-2}$
3	$1,5465^{-4}$	$1,1485^{-3}$	$3,5995^{-3}$	$7,9263^{-3}$	1,4388
4	$3,8468^{-6}$	$5,6840^{-5}$	$2,6581^{-4}$	$7,7625^{-4}$	$1,7516^{-3}$
5		$2,2582^{-6}$	$1,5785^{-5}$	$6,1243^{-5}$	$1,7212^{-4}$
6				$4,0427^{-6}$	$1,4165^{-5}$
7					$1,0024^{-6}$

ν	$\epsilon = 0,6$	$\epsilon = 0,7$	$\epsilon = 0,8$	$\epsilon = 0,9$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$4,5119^{-1}$	$5,0341^{-1}$	$5,5067^{-1}$	$5,9343^{-1}$
2	1,2190	1,5580	1,9121	2,2752
3	$2,3115^{-2}$	$3,4142^{-2}$	$4,7423^{-2}$	$6,2857^{-2}$
4	$3,3581^{-3}$	$5,7535^{-3}$	$9,0799^{-3}$	1,3459
5	$3,9449^{-4}$	$7,8554^{-4}$	1,4113	$2,3441^{-3}$
6	$3,8856^{-5}$	$9,0026^{-5}$	$1,8434^{-4}$	$3,4349^{-4}$
7	$3,2931^{-6}$	$8,8836^{-6}$	$2,0747^{-5}$	$4,3401^{-5}$
8			$2,0502^{-6}$	$4,8172^{-6}$

ν	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 2$	$\epsilon = 3$	$\epsilon = 4$	$\epsilon = 5$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$6,3212^{-1}$	$8,6466^{-1}$	$9,5021^{-1}$	$9,8168^{-1}$	$9,9326^{-1}$
2	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
3	$8,0301^{-2}$	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
4	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497

VII. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ ${}^{\infty}\Pi'_{\nu}$

	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 2$	$\epsilon = 3$	$\epsilon = 4$	$\epsilon = 5$
5	$3{,}6593^{-3}$	$5{,}2653^{-2}$	$1{,}8474^{-1}$	$3{,}7116^{-1}$	$5{,}5951^{-1}$
6	$5{,}9418^{-4}$	1,6564	$8{,}3918^{-2}$	2,1487	3,8404
7	$8{,}3241^{-5}$	$4{,}5338^{-3}$	3,3509	1,1067	2,3782
8	1,0249	1,0967	1,1905	$5{,}1134^{-2}$	1,3337
9	$1{,}1252^{-6}$	$2{,}3745^{-4}$	$3{,}8030^{-3}$	2,1363	$6{,}8094^{-2}$
10		$4{,}6498^{-5}$	1,1025	$8{,}1322^{-3}$	3,1828
11		$8{,}3082^{-6}$	$2{,}9234^{-4}$	2,8398	1,3695
12		1,3646	$7{,}1387^{-5}$	$9{,}1523^{-4}$	$5{,}4531^{-3}$
13			1,6149	2,7372	2,0189
14			$3{,}4019^{-6}$	$7{,}6328^{-5}$	$6{,}9799^{-4}$
15				1,9932	2,2625
16				$4{,}8926^{-6}$	$6{,}9008^{-5}$
17				1,1328	1,9869
18					$5{,}4163^{-6}$
19					1,4017

ν	$\epsilon = 6$	$\epsilon = 7$	$\epsilon = 8$	$\epsilon = 9$	$\epsilon = 10$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$9{,}9752^{-1}$	$9{,}9909^{-1}$	$9{,}9966^{-1}$	$9{,}9988^{-1}$	$9{,}9995^{-1}$
2	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
3	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
4	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
5	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
6	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
7	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
8	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
9	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
10	$8{,}3924^{-2}$	1,6950	2,8338	4,1259	5,4207
11	4,2621	$9{,}8521^{-2}$	1,8411	2,9401	4,1696
12	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
13	$8{,}8275^{-3}$	2,7000	$6{,}3797^{-2}$	1,2423	2,0844
14	3,6285	1,2811	3,4181	$7{,}3851^{-2}$	1,3554
15	1,4004	$5{,}7172^{-3}$	1,7257	4,1466	$8{,}3458^{-2}$
16	$5{,}0910^{-4}$	2,4066	$8{,}2310^{-3}$	2,2036	4,8740
17	1,7488	$9{,}5818^{-4}$	3,7180	1,1106	2,7042
18	$5{,}6917^{-5}$	3,6178	1,5943	$5{,}3196^{-3}$	1,4278
19	1,7597	1,2985	$6{,}5037^{-4}$	2,4264	$7{,}1865^{-3}$

VII. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ ${}^{\infty}\Pi'_{\nu}$

ν	$\epsilon = 6$	$\epsilon = 7$	$\epsilon = 8$	$\epsilon = 9$	$\epsilon = 10$
20	5,1802^{-6}	4,4402^{-5}	2,5294^{-3}	1,0560^{-3}	3,4543^{-4}
21	1,4551	1,4495	9,3968^{-5}	4,3925^{-4}	1,5883
22		4,5263^{-6}	3,3407	1,7495	6,9965^{-4}
23		1,3543	1,1385	6,6828^{-5}	2,9574
24			3,7255^{-6}	2,4519	1,2012
25			1,1722	8,6531^{-6}	4,6949^{-5}
26				2,9414	1,7680
27					6,4229^{-6}
28					2,2535

ν	$\epsilon = 11$	$\epsilon = 12$	$\epsilon = 13$	$\epsilon = 14$	$\epsilon = 15$
0	1,0000	1,0000			
1	9,9998^{-1}	9,9999^{-1}	1,0000	1,0000	
2	9,9980	9,9992	9,9997^{-1}	9,9999^{-1}	1,0000
3	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	9,9996^{-1}
4	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
5	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
6	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
7	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
8	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
9	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
10	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
11	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
12	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
13	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
14	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
15	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
16	9,2604^{-2}	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
17	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
18	3,2191	6,2966^{-2}	1,0954	1,7280	2,5114
19	1,7687	3,7416	6,9833^{-2}	1,1736	1,8053
20	9,2895^{-3}	2,1280	4,2669	7,6505^{-2}	1,2478
21	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	8,2972^{-2}
22	2,2519	6,0651^{-3}	1,4081	2,8844	5,3106
23	1,0423	3,0474	7,6225^{-3}	1,6712	3,2744
24	4,6386^{-4}	1,4729	3,9718	9,3276^{-3}	1,9465

VII. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ $^{\infty}\Pi'_{\nu}$

ν	$\epsilon = 11$	$\epsilon = 12$	$\epsilon = 13$	$\epsilon = 14$	$\epsilon = 15$
25	1,9871^{-4}	6,8563^{-4}	1,9943^{-3}	5,0199^{-3}	1,1165^{-2}
26	8,2050^{-5}	3,0776	9,6603^{-4}	2,6076	6,1849^{-3}
27	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
28	1,2584	5,5836^{-5}	2,0435	6,3513^{-4}	1,7158
29	4,6847^{-6}	2,2616	8,9416^{-5}	2,9837	8,6072^{-4}
30	1,6882	8,8701^{-6}	3,7894	1,3580	4,1845
31		3,3716	1,5568	5,9928^{-5}	1,9731
32		1,2432	6,2052^{-6}	2,5665	9,0312^{-5}
33			2,4017	1,0675	4,0155
34				4,3154^{-6}	1,7356
35				1,6968	7,2978^{-6}
36					2,9871
37					1,1910

ν	$\epsilon = 16$	$\epsilon = 17$	$\epsilon = 18$	$\epsilon = 19$	$\epsilon = 20$
0					
1					
2	1,0000	1,0000			
3	9,9998^{-1}	9,9999^{-1}	1,0000	1,0000	
4	9,9991	9,9996	9,9998^{-1}	9,9999^{-1}	1,0000
5	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	9,9998^{-1}
6	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
7	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
8	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
9	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
10	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
11	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
12	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
13	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
14	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
15	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
16	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
17	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
18	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
19	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858

VII. ФОРМУЛА ПУАССОНА ДЛЯ ${}^{\infty}\Pi'_{\nu}$.

ν	$\epsilon = 16$	$\epsilon = 17$	$\epsilon = 18$	$\epsilon = 19$	$\epsilon = 20$
20	$1,8775^{-1}$	$2,6368^{-1}$	$3,4908^{-1}$	$4,3939^{-1}$	$5,2974^{-1}$
21	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
22	$8,9227^{-2}$	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
23	5,8241	$9,5272^{-2}$	1,4491	2,0687	2,7939
24	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
25	2,2315	4,0646	$6,8260^{-2}$	1,0675	1,5677
26	1,3119	2,5245	4,4608	$7,3126^{-2}$	1,1218
27	$7,4589^{-3}$	1,5174	2,8234	4,8557	$7,7887^{-2}$
28	4,1051	$8,8335^{-3}$	1,7318	3,1268	5,2481
29	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334
30	1,1312	2,7272	$5,9443^{-3}$	1,1850	2,1818
31	$5,6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6,9819^{-3}$	1,3475
32	2,7620	$7,4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8,0918^{-3}$
33	1,3067	3,7453	$9,5975^{-4}$	2,2267	4,7274
34	$6,0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
35	2,6903	$8,6644^{-5}$	2,4767	$6,3674^{-4}$	1,4890
36	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8,0366^{-4}$
37	$4,9772^{6}$	1,8025	$5,7519^{-5}$	1,6401	4,2290
38	2,0599	$7,9123^{-6}$	2,6684	$8,0154^{-5}$	2,1708
39		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
40		1,4162	$5,3365^{-6}$	1,7797	$5,3202^{-5}$
41			2,3030	$8,0940^{-6}$	2,5426
42				3,5975	1,1877
43				1,5634	$5,4252^{-6}$
44					2,4243
45					1,0603

VIII. КРИТЕРИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ ПИРСОНА $P\ (>\chi^2)$

s'	$P=,99$	$P=,98$	$P=,95$	$P=,90$	$P=,80$	$P=,70$
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508

Для бо́льших значений s' можно пользоваться приложением V, полагая

$$y=\sqrt{2s'-1}-\sqrt{2\chi^2} \text{ и } P=\Phi_1(y)$$

VIII. КРИТЕРИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ ПИРСОНА $P(>\chi^2)$

s'	$P=,50$	$P=,30$	$P=,20$	$P=,10$	$P=,05$	$P=,02$	$P=,01$
1	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Для бо́льших значений s' можно пользоваться приложением V, полагая

$$y=\sqrt{2s'-1}-\sqrt{2\chi^2} \text{ и } P=\Phi_1(y)$$

IX. СТАНДАРТНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ ВАЖНЕЙШИХ ХАРАКТЕРИСТИК

N означает число данных, на основе которых получена характеристика

Характеристика		Стандартное отклонение характеристики				
				Специальная формула для		
Наименование	Обозначение	Обозначение	Общая формула	норм. закона	закона Пуассона	биномиального закона
Среднее значение	$\bar{n}$	$\sigma(\bar{n})$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	$\sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}$	$\sqrt{\frac{mp(1-p)}{N}}$
Стандартное отклонение	σ	$\sigma(\sigma)$	$\sqrt{\frac{\mu_4(d)-[\mu_2(d)]^2}{4N\mu_2(d)}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$	$\sqrt{\frac{2\varepsilon+1}{4N}}$	$\sqrt{\frac{2(m-1)p(1-p)+(2p-1)^2}{4N}}$
Асимметрия	$\sqrt{\beta_1}$	$\sigma(\sqrt{\beta_1})$		$\sqrt{\frac{6}{N}}$		
Куртозис	β_2	$\sigma(\beta_2)$		$\sqrt{\frac{24}{N}}$		

X. КРИТЕРИИ ДЛЯ ПОДБОРА КРИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ [1]

	$J < 0$	$J = 0$	$J > 0$
$\beta_1 = 0$	IV	нормальный	II
$\beta_1 > 0$	IV	III	I биномиальн. Пуассона

[1]) Ряд Грама-Шарлье годится для всех случаев.

	Обозначение	Нормальный закон	Закон Пуассона	Биномиальный закон
Выражение закона распределения		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(n-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{\varepsilon^n e^{-\varepsilon}}{n!}$	$C_n^m p^n (1-p)^{m-n}$
I ожидание n	$\varepsilon_1(n)$	α	ε	mp
II ожидание δ	ε_2	σ^2	ε	$mp(1-p)$
III ожидание δ	ε_3	0	ε	$mp(1-p)(1-2p)$
IV ожидание δ	ε_4	$3\sigma^4$	$\varepsilon+3\varepsilon^2$	$mp(1-p)+3m(m-2)p^2$
Стандартное отклонение	σ	σ	$\sqrt{\varepsilon}$	$\sqrt{mp(1-p)}$
Асимметрия (скошенность)	$\sqrt{\beta_1}$	0	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\frac{1-2p}{\sqrt{mp(1-p)}}$
Куртозис	β_2	3	$3+\frac{1}{\varepsilon}$	$3\frac{m-2}{m}+\frac{1}{mp(1-p)}$
$3\beta_1-2\beta_2+6$	J	0	>0	>0
Уравнения для определения постоянных		$\alpha=\bar{n}$ $\sigma=\sigma$	$\varepsilon=\bar{n}$	$p=1-\frac{\sigma^2}{\bar{n}}$ $m=\frac{\bar{n}}{p}$

Кривые Пирсона, I тип	Кривые Пирсона, II тип
$\frac{(m_1+m_2-1)!}{(m_1-1)!\,(m_2-1)!}\ \frac{(n-\alpha_1)^{m_1-1}(\alpha_2-n)^{m_2-1}}{(\alpha_2-\alpha_1)^{m_1+m_2-1}}$	$\frac{(2m-1)!}{[(m-1)!]^2}\ \frac{[(n-\alpha_1)(\alpha_2-n)]^{m-1}}{(\alpha_2-\alpha_1)^{2m-1}}$
$\frac{m_2\alpha_1+m_1\alpha_2}{m_1+m_2}$ $\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2+1)}\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{m_1+m_2}\right)^2$ $\frac{2m_1m_2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2+2)(m_1+m_2+1)}\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{m_1+m_2}\right)^3$ $\frac{3m_1^2m_2^2(m_1+m_2)+6m_1m_2(m_1^2-m_1m_2+m_2^2)}{(m_1+m_2+3)(m_1+m_2+2)(m_1+m_2+1)}\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{m_1+m_2}\right)$	$\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}$ $\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{4(2m+1)}$ 0 $\frac{3(\alpha_2-\alpha_1)^4}{16(2m+3)(2m+1)}$
$\sqrt{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2+1}}\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{m_1+m_2}\right)$ $\sqrt{\frac{m_1+m_2+1}{m_1m_2}}\ \frac{2(m_2-m_1)}{m_1+m_2+2}$ $3+6\,\frac{(m_1+m_2)(m_1^2-3m_1m_2+m_2^2+m_1+m_2)-6m_1m_2}{m_1m_2(m_1+m_2+3)(m_1+m_2+2)}$	$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2\sqrt{2m+1}}$ 0 $3-\frac{6}{2m+3}$
>0	>0
См. Philosophical Transactions, Vol. 186, *A*, pp. 367—371	$2m=3\left(\frac{5-\beta_2}{\beta_2-3}\right)$ $\alpha_1=\bar{n}-\sqrt{2m+1}\,\sigma$ $\alpha_2=\bar{n}+\sqrt{2m+1}\,\sigma$

Кривые Пирсона, III тип	Кривые Пирсона, IV тип
$\frac{\gamma^m (n-a)^{m-1} e^{-\gamma(n-a)}}{(m-1)!}$	$\frac{\gamma[\gamma^2+2^2][\gamma^2+4^2]\ldots[\gamma^2+(2m)^2]\beta^{2m+1}}{2(2m)!\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-\gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{n-a}{\beta}}}{[(n-a)^2+\beta^2]^{m+1}}$
$a+\frac{m}{\gamma}$ $\frac{2m}{\gamma^3}$ $\frac{m}{\gamma^2}$ $3\,\frac{m(m+2)}{\gamma^4}$	$a-\frac{\beta\gamma}{2m-1}$ $\frac{\beta^2\gamma^2}{(2m-2)(2m-1)^2}+\frac{\beta^2}{2m-2}$ $-\frac{4\beta^3\gamma^3}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)^3}-\frac{4\beta^3\gamma}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)}$ $\frac{3\beta^4\gamma^4(2m+5)}{(2m-4)(2m-3)(2m-2)(2m-1)^4}+\frac{6\beta^4\gamma^4(2m+1)}{(2m-4)(2m-3)(2m-2)(2m-1)^2}+$
$\frac{\sqrt{m}}{\gamma}$ $\frac{2}{\sqrt{m}}$ $3+\frac{6}{m}$	$\frac{\beta}{2m-1}\sqrt{\frac{\gamma^2+(2m-1)^2}{2m-2}}$ $\frac{-4\gamma}{2m-3}\sqrt{\frac{2m-2}{\gamma^2+(2m-1)^2}}$ $3\,\frac{(2m+5)(2m-2)}{(2m-3)(2m-4)}-\frac{24}{\gamma^2+(2m-1)^2}\,\frac{(2m-2)(2m-1)^2}{(2m-3)(2m-4)}$
0	<0
$m=\frac{4}{\beta_1}$ $\gamma=\frac{2}{\sigma\sqrt{\beta_1}}$ $a=\bar{n}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\beta_1}}$	$4m^2\left(\beta_2+\frac{3}{2}\beta_1-3\right)-2m(7\beta_2-9\beta_1-15)+\left(12\beta_2-\frac{27}{2}\beta_1-18\right)$ $\gamma^2=\frac{(2m-1)^2(2m-3)^2\beta_1}{16(2m-2)-(2m-3)^2\beta_1}$ $\beta=-\frac{(2m-1)(2m-3)\sqrt{\beta_1}\,\sigma}{4\gamma}$ $a=\bar{n}-\frac{(2m-3)\sqrt{\beta_1}\,\sigma}{4}$

Кривые Пирсона, IV тип

$$\frac{\gamma\,[\gamma^2+2^2]\,[\gamma^2+4^2]\ldots[\gamma^2+(2m)^2]\,\beta^{2m+1}}{2\,(2m)!\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\gamma\pi}{2}}\;\frac{e^{-\gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{n-\alpha}{\beta}}}{[(n-\alpha)^2+\beta^2]^{m+1}}$$

$$\alpha-\frac{\beta\gamma}{2m-1}$$

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{(2m-2)(2m-1)^2}+\frac{\beta^2}{2m-2}$$

$$-\frac{4\beta^3\gamma^3}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)^3}-\frac{4\beta^3\gamma}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)}$$

$$\frac{3\beta^4\gamma^4(2m+5)}{(2m-4)(2m-3)(2m-2)(2m-1)^4}+\frac{6\beta^4\gamma^4(2m+1)}{(2m-4)(2m-3)(2m-2)(2m-1)^2}+\frac{3\beta^4}{(2m-4)(2m-2)}$$

$$\frac{\beta}{2m-1}\sqrt{\frac{\gamma^2+(2m-1)^2}{2m-2}}$$

$$\frac{-4\gamma}{2m-3}\sqrt{\frac{2m-2}{\gamma^2+(2m-1)^2}}$$

$$3\,\frac{(2m+5)(2m-2)}{(2m-3)(2m-4)}-\frac{24}{\gamma^2+(2m-1)^2}\;\frac{(2m-2)(2m-1)^2}{(2m-3)(2m-4)}$$

$$<0$$

$$4m^2\left(\beta_2+\frac{3}{2}\beta_1-3\right)-2m\,(7\beta_2-9\beta_1-15)+\left(12\beta_2-\frac{27}{2}\beta_1-18\right)=0$$

$$\gamma^2=\frac{(2m-1)^2(2m-3)^2\beta_1}{16\,(2m-2)-(2m-3)^2\beta_1}$$

$$\beta=-\frac{(2m-1)(2m-3)\sqrt{\beta_1}\,\sigma}{4\gamma}$$

$$\alpha=\bar{n}-\frac{(2m-3)\sqrt{\beta_1}\,\sigma}{4}$$

Ряд Грама-Шарлье
$\frac{1}{\sigma}\left[\Phi_0\left(\frac{n-\alpha}{\sigma}\right)+A_1\Phi_1\left(\frac{n-\alpha}{\sigma}\right)+\ldots+A_4\Phi_4\left(\frac{n-\alpha}{\sigma}\right)\right]$
$\alpha-\sigma A_1$ $\sigma^2(1+2A_2-A_1^2)$ $\sigma^3(-6A_3+6A_1A_2-2A_1^3)$ $\sigma^4(3-6A_1^2+12A_2+24A_4-24A_1A_3+12A_1^2A_2-3A_1^4)$
$\sigma\sqrt{1+2A_2-A_1^2}$ $\frac{-6A_3+6A_1A_2-2A_1^3}{(1+2A_2-A_1^2)^{\frac{3}{2}}}$ $3+6\frac{4A_4-4A_1A_3-2A_2^2+4A_1^2A_2-A_1^4}{(1+2A_2-A_1^2)^2}$
. . .
$A_1=0$ [1] $\quad\quad \sigma=\sigma$ $A_2=0$ [1] $\quad\quad 6A_3=-\sqrt{\beta_1}$ $\alpha=\overline{n}$ $\quad\quad 24A_4=\beta_2-3$

[1]) Из шести постоянных σ, α, A_1, A_2, A_3, A_4 две могут быть выбраны произвольно. Обычно полагают $A_1=A_2=0$, что приводит к простейшей системе уравнений

УКАЗАТЕЛЬ