Р. Ш. ЛИПЦЕР, А. Н. ШИРЯЕВ

СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

517.8
Л 61
УДК 519.21

Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы), Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974.

В монографии дается систематическое изложение теории оптимальной нелинейной фильтрации как для случая дискретного, так и непрерывного времени. Значительное место уделено вопросам применений к задачам последовательного оценивания, к линейной фильтрации (фильтр Калмана — Бьюси), интерполяции и экстраполяции одних компонент случайных процессов по другим. Приводятся основные факты теории мартингалов, на которой существенно основано изложение.

Книга рассчитана как на специалистов по теории вероятностей и математической статистике, так и на круг читателей, применяющих в своей деятельности вероятностно-статистические методы к таким задачам, как выделение сигналов, скрытых в шумах, различение статистических гипотез, оптимальное управление стохастическими объектами по неполным данным.

Роберт Шевилевич Липцер, Альберт Николаевич Ширяев

СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

нелинейная фильтрация и смежные вопросы

(Серия: «Теория вероятностей и математическая статистика»)

М., 1974, 696 стр.

Редактор *М. П. Ершов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректоры *Т. С. Плетнева, Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 10/IX 1973 г. Подписано к печати 8/II 1974 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$, тип. № 2.
Физ. печ. л. 43,5. Условн.-печ. л. 43,5. Уч.-изд. л. 41,13. Тираж 10500 экз. Т-02957.
Цена книги 2 р. 65 к. Заказ № 785

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

$Л\ \dfrac{20203-030}{053\,(01)-74}\ 71\text{-}73$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Значительный круг задач статистики случайных процессов формулируется в рамках следующей схемы.

На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ задан частично наблюдаемый случайный процесс $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $t \geqslant 0$, у которого наблюдаться может лишь вторая компонента $\xi = (\xi_t)$, $t \geqslant 0$. В каждый момент времени t требуется, основываясь на наблюдениях $\xi_0^t = \{\xi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, давать оценку (ненаблюдаемых) значений θ_t. Эта задача *оценивания* (иначе — задача *фильтрации*) θ_t по ξ_0^t и будет изучаться в настоящей книге.

Хорошо известно, что если $\mathsf{M}\theta_t^2 < \infty$, то оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой θ_t по ξ_0^t является апостериорное среднее $m_t = \mathsf{M}(\theta_t | \mathscr{F}_t^\xi)$, где $\mathscr{F}_t^\xi = \sigma\{\omega: \xi_s,\ s \leqslant t\}$ есть σ-алгебра, порожденная величинами ξ_0^t. Таким образом, решение задачи оптимальной (в среднеквадратическом смысле) фильтрации сводится к отысканию условных математических ожиданий $m_t = \mathsf{M}(\theta_t | \mathscr{F}_t^\xi)$.

В принципе, условные математические ожидания $\mathsf{M}(\theta_t | \mathscr{F}_t^\xi)$ могут быть вычислены по формуле Байеса. Однако даже во многих сравнительно простых случаях выражения, полученные с помощью формулы Байеса, являются слишком громоздкими, что сильно затрудняет как практическое использование, так и исследование структуры и свойств найденных таким образом оценок.

С вычислительной же точки зрения желательно, чтобы формулы, определяющие «фильтр» m_t, $t \geqslant 0$, носили рекуррентный характер. Грубо говоря, это означает, что значение $m_{t+\Delta}$, $\Delta > 0$, должно восстанавливаться по значению m_t и наблюдениям $\xi_t^{t+\Delta} = \{\xi_s,\ t \leqslant s \leqslant t+\Delta\}$. В случае дискретного времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ простейшей формой таких рекуррентных соотношений может служить, например, уравнение

$$\Delta m_t = a(t, m_t) + b(t, m_t)(\xi_{t+1} - \xi_t), \tag{1}$$

где $\Delta m_t = m_{t+1} - m_t$. В случае непрерывного времени $t \geqslant 0$ такой формой обладают стохастические дифференциальные уравнения

$$dm_t = a(t, m_t)\,dt + b(t, m_t)\,d\xi_t. \tag{2}$$

Ясно, что без специальных предположений о структуре процессов (θ, ξ) трудно рассчитывать на то, что оптимальные оценки m_t будут удовлетворять рекуррентным соотношениям типа (1) и (2). Поэтому, прежде чем описывать структуру рассматриваемых нами процессов (θ, ξ), для которых в данной книге изучаются задачи фильтрации, начнем с некоторых примеров.

Пусть θ — гауссовская случайная величина с $\mathsf{M}\theta = m$, $\mathsf{D}\theta = \gamma$, что для краткости будем записывать в виде $\theta \sim N(m, \gamma)$. Предположим, что наблюдению подлежит последовательность

$$\xi_t = \theta + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — независимые между собой (и от θ) гауссовские случайные величины с нулевыми средними и единичной дисперсией. Пользуясь теоремой о нормальной корреляции (теорема 13.1)*), легко найти, что оценка $m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_t)$ и ошибка «отслеживания» $\gamma_t = \mathsf{M}(\theta - m_t)^2$ определяются формулами

$$m_t = \frac{m + \sum_{i=1}^{t} \xi_i}{1 + \gamma t}, \qquad \gamma_t = \frac{\gamma}{1 + \gamma t}. \tag{4}$$

Отсюда для m_t и γ_t получаем следующие рекуррентные уравнения:

$$\Delta m_t = \frac{\gamma_t}{1 + \gamma_t}[\xi_{t+1} - m_t], \tag{5}$$

$$\Delta \gamma_t = -\frac{\gamma_t^2}{1 + \gamma_t}, \tag{6}$$

где $\Delta m_t = m_{t+1} - m_t$, $\Delta\gamma_t = \gamma_{t+1} - \gamma_t$.

Усложним рассмотренный пример. Пусть θ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ таковы же, что и в предыдущем примере, а наблюдаемый процесс ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$, определяется соотношениями

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta + \varepsilon_{t+1}, \tag{7}$$

где функции $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$ предполагаются $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\omega\colon \xi_0, \ldots, \xi_t\}$-измеримыми (т. е. $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$ при каждом t зависят лишь от значений $\xi_0, \ldots, \xi_t$).

---

*) В книге принята двойная нумерация теорем, лемм и формул. Первая цифра указывает номер главы, вторая — порядковый номер в данной главе.

Отметим, что необходимость рассмотрения коэффициентов $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$, зависящих от всех «прошлых» значений $(\xi_0, \ldots, \xi_t)$, возникает, например, в задачах управления (§ 3, гл. 14), где эти коэффициенты играют роль «управляющих» воздействий, в задачах теории информации (§ 4, гл. 16), где пара функций $(A_0(t, \xi), A_1(t, \xi))$ трактуется как «кодирование», использующее бесшумную обратную связь.

Оказалось, что для схемы (7) оптимальная оценка $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и условная дисперсия $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ также подчиняются рекуррентным уравнениям (см. § 5, гл. 13):

$$\Delta m_t = \frac{\gamma_t A_1(t, \xi)}{1 + A_1^2(t, \xi)\gamma_t}(\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi) m_t), \quad m_0 = m, \tag{8}$$

$$\Delta \gamma_t = -\frac{A_1^2(t, \xi)\gamma_t^2}{1 + A_1^2(t, \xi)\gamma_t}, \quad \gamma_0 = \gamma. \tag{9}$$

В схемах (3) и (7), по существу, речь шла о традиционной задаче математической статистики — о байесовской оценке случайного параметра по наблюдениям ξ_0^t. Следующий шаг в усложнении схемы (7) состоит в том, чтобы вместо случайной величины θ рассматривать случайный процесс θ_t.

Будем предполагать, что случайный процесс $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, описывается рекуррентными уравнениями

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t + b(t, \xi)\varepsilon_1(t+1), \\ \xi_{t+1} &= A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t + B(t, \xi)\varepsilon_2(t+1), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, — последовательность независимых величин, имеющих нормальное распределение $N(0, 1)$ и не зависящих также от (θ_0, ξ_0). Коэффициенты $a_0(t, \xi), \ldots, B(t, \xi)$ предполагаются $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримыми при каждом $t = 0, 1, \ldots$

Чтобы получить для оценки $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и условной дисперсии $\gamma_t = \mathsf{M}\{[\theta_t - m_t]^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi\}$ рекуррентные уравнения, предположим, что условное распределение $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant x \mid \xi_0)$ является (для почти всех ξ_0) нормальным, $N(m, \gamma)$. Суть этого предположения состоит в том, что оно позволяет доказать (см. гл. 13), что тогда последовательность (θ, ξ), управляемая уравнениями (10), является условно-гауссовской. Это означает, в частности, что условное распределение $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ является (почти наверное) гауссовским. Но такое распределение характеризуется лишь своими двумя условными моментами m_t, γ_t, что дает возможность получить для них следующую замкнутую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
m_{t+1} &= a_0 + a_1 m_t + \frac{a_1 A_1 \gamma_t}{B^2 + A_1^2 \gamma_t}\left[\xi_{t+1} - A_0 - A_1 m_t\right], \qquad m_0 = m, \\
\gamma_{t+1} &= \left[a_1^2 \gamma_t + b^2\right] - \frac{(a_1 A_1 \gamma_t)^2}{B^2 + A_1^2 \gamma_t}, \qquad \gamma_0 = \gamma
\end{aligned} \tag{11}
$$

(у коэффициентов $a_0, \ldots, B$ для простоты записи опущены аргументы t и ξ).

Уравнения (11) выводятся (в несколько более общей ситуации) в тринадцатой главе. Для их вывода ничего, по существу, кроме теоремы о нормальной корреляции, не требуется. В этой же главе выводятся уравнения и для оптимальных оценок в задачах *экстраполяции* (оценивания θ_τ по ξ_0^t, когда $\tau > t$) и *интерполяции* (оценивания θ_τ по ξ_0^t при $\tau < t$). Применениям этих уравнений к разнообразным задачам статистики случайных последовательностей, к задачам управления и к построению псевдорешений линейных алгебраических систем посвящена четырнадцатая глава.

Эти две главы могут читаться независимо от остального материала книги, и именно с них следует начинать читателю, который интересуется проблематикой нелинейной фильтрации, но еще недостаточно знаком с общей теорией случайных процессов.

2. Основной материал книги представляет собой задачи оптимальной фильтрации (а также смежные задачи интерполяции, экстраполяции, последовательного оценивания, различения гипотез и т. п.) для случая *непрерывного* времени. Привлекательность этих задач в случае непрерывного времени объясняется (помимо их собственного интереса) тем, что для них удается получать прозрачные формулировки и компактные формулы. Следует также добавить, что зачастую легче сначала изучить непрерывный аналог задач, сформулированных для дискретного времени, а затем уже использовать полученные результаты в исследовании первоначальных задач.

Отмеченная (для случая непрерывного времени) простота формулировок, естественно, даром не дается — приходится привлекать, и причем довольно сложный, аппарат теории случайных процессов. Конкретнее о методах и аппарате, используемом в этой книге, мы скажем несколько позднее, а сейчас в целях иллюстрации остановимся на некоторых случаях фильтрации, которые будут нами рассмотрены.

Предположим, что частично наблюдаемый случайный процесс $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $t \geqslant 0$, является гауссовским, управляемым стохастическими дифференциальными уравнениями (ср. с системой (10))

$$d\theta_t = a(t)\theta_t\,dt + b(t)\,dw_1(t), \quad d\xi_t = A(t)\theta_t\,dt + B(t)\,dw_2(t), \quad (12)$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$—независимые между собой и от (θ_0, ξ_0) стандартные винеровские процессы, а $B(t) \geqslant C > 0$. Будем считать компоненту $\theta = (\theta_t)$, $t \geqslant 0$, ненаблюдаемой. Рассматриваемая задача фильтрации состоит в том, чтобы в каждый момент времени $t \geqslant 0$ оптимально (в среднеквадратическом смысле) оценивать θ_t по ξ_0^t.

Процесс (θ, ξ) по предположению является гауссовским, поэтому оптимальная оценка $m_t = \mathsf{M}(\theta_t | \mathcal{F}_t^\xi)$ линейным образом зависит от наблюдений $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$. Более точно, существует (лемма 10.1) такая функция $G(t, s)$ с $\int_0^t G^2(t,s)\,ds < \infty$, $t > 0$, что (почти наверное)

$$m_t = m_0 + \int_0^t G(t,s)\,d\xi_s. \quad (13)$$

Если формально продифференцировать это выражение, то получим

$$dm_t = G(t, t)\,d\xi_t + \left(\int_0^t \frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\,ds\right)dt. \quad (14)$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать, если воспользоваться тем, что функция $G(t, s)$ удовлетворяет уравнению Винера—Хопфа (см. (10.25)), которое в рассматриваемом случае сводится к уравнению

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \left[a(t) - \gamma_t \frac{A^2(t)}{B^2(t)}\right] G(t, s), \quad t > s, \quad (15)$$

$$G(s, s) = \frac{\gamma_s A(s)}{B^2(s)}, \quad \gamma_s = \mathsf{M}[\theta_s - m_s]^2. \quad (16)$$

Учитывая (15) и (14), получаем,что оптимальная оценка m_t, $t > 0$, удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$dm_t = a(t)m_t\,dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}[d\xi_t - A(t)m_t\,dt]. \quad (17)$$

В это уравнение входит величина ошибки «отслеживания» $\gamma_t = \mathsf{M}[\theta_t - m_t]^2$, которая в свою очередь является решением уравнения Риккати

$$\dot{\gamma}_t = 2a(t)\gamma_t - \frac{A^2(t)\gamma_t^2}{B^2(t)} + b^2(t). \tag{18}$$

(Уравнение (18) легко получить, применяя формулу замены переменных Ито к квадрату процесса $[\theta_t - m_t]$ с последующим усреднением.)

Остановимся несколько подробнее на уравнении (17), считая для простоты $\xi_0 \equiv 0$. Обозначим

$$\bar{w}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - A(s)\, m_s\, ds}{B(s)}. \tag{19}$$

Тогда уравнение (17) можно переписать в следующем виде:

$$dm_t = a(t)\, m_t\, dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B(t)}\, d\bar{w}_t. \tag{20}$$

Введенный процесс $(\bar{w}_t)$, $t \geqslant 0$, весьма примечателен и играет в задачах фильтрации фундаментальную роль. Дело в том, что этот процесс, во-первых, оказывается винеровским (относительно системы σ-алгебр $(\mathscr{F}_t^\xi)$, $t \geqslant 0$), а во-вторых, он содержит в себе ту же самую «информацию», что и процесс ξ. Более точно, это означает, что для всех $t \geqslant 0$ σ-алгебры $\mathscr{F}_t^{\bar{w}} = \sigma\{\omega\colon \bar{w}_s,\ s \leqslant t\}$ и $\mathscr{F}_t^\xi = \sigma\{\omega\colon \xi_s,\ s \leqslant t\}$ совпадают:

$$\mathscr{F}_t^{\bar{w}} = \mathscr{F}_t^\xi, \qquad t \geqslant 0 \tag{21}$$

(см. теорему 7.16).

Именно эти свойства процесса $\bar{w}$ послужили основанием называть его *обновляющим* процессом (innovation process).

Совпадение σ-алгебр $\mathscr{F}_t^\xi$ и $\mathscr{F}_t^{\bar{w}}$ наталкивает на мысль, что для m_t справедливо не только равенство (13), но и представление

$$m_t = m_0 + \int_0^t F(t, s)\, d\bar{w}_s, \tag{22}$$

где $\bar{w} = (\bar{w}_t)$, $t \geqslant 0$, — обновляющий процесс, а функции $F(t, s)$ таковы, что $\int_0^t F^2(t, s)\, ds < \infty$. В основном тексте (теорема 7.16) показывается, что представление (22) в самом деле можно получить из общих результатов (о структуре функционалов от процессов диффузионного типа). Отправляясь же от представления (22), уравнение (20) можно вывести более простым путем, нежели исходя из представления (13). Правда, следует заметить, что доказательство представления (22) требует в свою очередь большего труда, чем установление справедливости представления (13).

В рассмотренном примере, восходящем к Калману и Бьюси, оптимальная фильтрация была линейной, что явилось следствием предположения гауссовости процесса (θ, ξ). Приведем теперь пример, в котором оптимальная фильтрация является нелинейной.

Пусть (θ_t), $t \geqslant 0$ — марковский процесс, выходящий из нуля, с двумя состояниями 0 и 1 и единственным переходом $0 \to 1$ в случайный момент σ, который распределен (в силу предполагаемой марковости) экспоненциальным образом: $\mathsf{P}(\sigma > t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Предположим, что наблюдаемый процесс $\xi = (\xi_t)$, $t \geqslant 0$, имеет дифференциал

$$d\xi_t = \theta_t\, dt + dw_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{23}$$

где $w = (w_t)$, $t \geqslant 0$—винеровский процесс, не зависящий от процесса $\theta = (\theta_t)$, $t \geqslant 0$.

Будем трактовать переход процесса θ из «нулевого» состояния в «единичное» как появление «разладки» (в момент σ). Возникает следующая задача: в каждый момент времени $t > 0$ по наблюдениям ξ_0^t определить, произошла ли до этого момента «разладка» или нет.

Обозначим $\pi_t = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \mathsf{P}(\sigma \leqslant t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Ясно, что $\pi_t = m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Поэтому апостериорная вероятность π_t, $t \geqslant 0$, является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой состояния ненаблюдаемого процесса $\theta = (\theta_t)$, $t \geqslant 0$.

Для апостериорной вероятности π_t, $t \geqslant 0$, можно вывести (используя, например, формулу Байеса и результаты относительно производной меры, отвечающей процессу ξ, по винеровской мере) следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\pi_t = \lambda(1 - \pi_t)\, dt + \pi_t(1 - \pi_t)[d\xi_t - \pi_t\, dt], \quad \pi_0 = 0. \tag{24}$$

Важно подчеркнуть, что если в схеме Калмана — Бьюси оптимальный «фильтр» был линейным, то уравнение (24) является существенно нелинейным. Таким образом, уравнение (24) определяет оптимальную нелинейную фильтрацию.

Как и в предшествующем примере (обновляющий) процесс

$$\bar{w}_t = \int_0^t [d\xi_s - \pi_t\, ds], \qquad t \geqslant 0,$$

оказывается винеровским и $\mathscr{F}_t^{\bar{w}}=\mathscr{F}_t^{\xi}$, $t\geqslant 0$. Следовательно, уравнение (24) может быть записано также в следующем эквивалентном виде:

$$d\pi_t=\lambda(1-\pi_t)\,dt+\pi_t(1-\pi_t)\,d\bar{w}_t,\qquad \pi_0=0. \tag{25}$$

3. Оказывается, что все эти примеры укладываются в рамки следующей общей схемы, принятой в данной книге.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$ $(\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F},\ s\leqslant t)$. На этом вероятностном пространстве предполагаются заданными частично наблюдаемый процесс (θ_t, ξ_t), $t\geqslant 0$, и оцениваемый процесс (h_t), $t\geqslant 0$, зависящий, вообще говоря, как от ненаблюдаемого процесса θ_t, $t\geqslant 0$, так и наблюдаемой компоненты (ξ_t), $t\geqslant 0$.

Относительно наблюдаемого процесса *) $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ будет предполагаться, что он допускает стохастический дифференциал

$$d\xi_t=A_t(\omega)\,dt+dw_t,\qquad \xi_0=0, \tag{26}$$

где $w=(w_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — стандартный винеровский процесс (т. е. квадратично интегрируемый мартингал с непрерывными траекториями с $\mathsf{M}[(w_t-w_s)^2\,|\,\mathscr{F}_s]=t-s$ при $t\geqslant s$ и $w_0=0$), а $A=(A_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — некоторый интегрируемый случайный процесс **).

Структура ненаблюдаемого процесса $\theta=(\theta_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, непосредственно не конкретизируется, зато предполагается, что оцениваемый процесс $h=(h_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, допускает следующее представление:

$$h_t=h_0+\int_0^t a_s(\omega)\,ds+x_t,\qquad t\geqslant 0, \tag{27}$$

где $a=(a_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — некоторый интегрируемый процесс, $x=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — квадратично интегрируемый мартингал.

Для всякого интегрируемого процесса $g=(g_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, обозначим $\pi_t(g)=\mathsf{M}\left[g_t\,|\,\mathscr{F}_t^{\xi}\right]$. Тогда, если $\mathsf{M}g_t^2<\infty$, то $\pi_t(g)$ будет оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой g_t по $\xi_0^t=\{\xi_s,\ s\leqslant t\}$.

---

*) Запись $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ подразумевает, что величины ξ_t являются $\mathscr{F}_t$-измеримыми при каждом $t\geqslant 0$.

**) На самом деле в книге рассматриваются процессы ξ несколько более общего вида (см. гл. 8).

Один из основных результатов книги (теорема 8.1) утверждает, что для $\pi_t(h)$ справедливо следующее представление:

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(a)\,ds + \int_0^t \pi_s(D)\,d\bar{w}_s + \\ + \int_0^t [\pi_s(hA) - \pi_s(h)\pi_s(A)]\,d\bar{w}_s. \qquad (28)$$

Здесь $\bar{w} = (\bar{w}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс (ср. с обновляющим процессом в предыдущих двух примерах), а процесс $D = (D_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, характеризует «корреляцию» между винеровским процессом $w = (w_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, и мартингалом $x = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$. Точнее, процесс

$$D_t = \frac{d\langle x, w\rangle_t}{dt}, \quad t \geqslant 0, \qquad (29)$$

где $\langle x, w\rangle_t$ — случайный процесс, участвующий в разложении Дуба — Мейера произведения мартингалов x и w:

$$\mathsf{M}[x_t w_t - x_s w_s \mid \mathscr{F}_s] = \mathsf{M}[\langle x, w\rangle_t - \langle x, w\rangle_s \mid \mathscr{F}_s]. \qquad (30)$$

Представление (28) мы называем *основным уравнением* (оптимальной нелинейной) *фильтрации*. Большинство известных результатов (в рамках предположений (26), (27)) может быть выведено из этого уравнения.

Покажем, например, как из (28) выводятся уравнения фильтрации (17), (18) в схеме Калмана — Бьюси, считая для простоты $b(t) \equiv B(t) \equiv 1$.

Сравнивая (12) с (26) и (27), видим, что $A_t(\omega) = A(t)\theta_t$, $w_t = w_2(t)$. Положим $h_t = \theta_t$. Тогда в силу (12)

$$h_t = h_0 + \int_0^t a(s)\theta_s\,ds + w_1(t). \qquad (31)$$

Процессы $w_1 = (w_1(t))$ и $w_2 = (w_2(t))$, $t \geqslant 0$, являются независимыми квадратично интегрируемыми мартингалами, поэтому для них $D_t \equiv 0$ (P-п. н.). Тогда в силу (28) $\pi_t(\theta)$ имеет дифференциал

$$d\pi_t(\theta) = a(t)\pi_t(\theta)\,dt + A(t)\left[\pi_t(\theta^2) - \pi_t^2(\theta)\right]d\bar{w}_t, \qquad (32)$$

т. е.

$$dm_t = a(t)\,m_t\,dt + A(t)\,\gamma_t\,d\bar{w}_t, \qquad (33)$$

где мы воспользовались тем, что в силу гауссовости процесса (θ, ξ), P-п. н.

$$\pi_t(\theta^2) - \pi_t^2(\theta) = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\theta_t - m_t\right]^2 = \gamma_t.$$

Чтобы вывести из (28) уравнение для γ_t, возьмем $h_t=\theta_t^2$. Тогда из первого уравнения системы (12) по формуле замены переменных Ито (теорема 4.4) получаем

$$\theta_t^2=\theta_0^2+\int_0^t a_s(\omega)\,ds+x_t, \tag{34}$$

где

$$a_s(\omega)=2a(s)\,\theta_s^2+b^2(s) \quad \text{и} \quad x_t=\int_0^t 2b(s)\,\theta_s\,dw_1(s).$$

Поэтому согласно (28)

$$d\pi_t(\theta^2)=[2a(t)\,\pi_t(\theta^2)+b^2(t)]\,dt+A(t)[\pi_t(\theta^3)-\pi_t(\theta)\,\pi_t(\theta^2)]\,d\bar{w}_t. \tag{35}$$

Из (32) и (35) видно, что при использовании основного уравнения фильтрации (28) мы сталкиваемся с той трудностью, что для нахождения условных младших моментов требуется знание старших моментов. Так, при отыскании уравнений для $\pi_t(\theta^2)$ требуется знание третьего апостериорного момента $\pi_t(\theta^3)=\mathsf{M}\left(\theta_t^3\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$. В рассматриваемом случае эта трудность легко преодолевается, поскольку в силу гауссовости процесса (θ, ξ) моменты $\pi_t(\theta^n)=\mathsf{M}\left(\theta_t^n\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$ для всех $n\geqslant 3$ выражаются через $\pi_t(\theta)$ и $\pi_t(\theta^2)$. В частности, $\pi_t(\theta^3)-\pi_t(\theta)\,\pi_t(\theta^2)=$ $=\mathsf{M}\left[\theta_t^2(\theta_t-m_t)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]=2m_t\gamma_t$, и, значит,

$$d\pi_t(\theta^2)=[2a(t)\,\pi_t(\theta^2)+b^2(t)]\,dt+2A(t)\,m_t\gamma_t\,d\bar{w}_t. \tag{36}$$

По формуле замены переменных Ито из (33) находим, что

$$dm_t^2=2m_t\left[a(t)\,m_t\,dt+A(t)\,\gamma_t m_t\,d\bar{w}_t\right]+A^2(t)\,\gamma^2(t)\,dt.$$

Вместе с уравнением (36) это соотношение дает искомое уравнение (18) для $\gamma_t=\pi_t(\theta^2)-m_t^2$.

Описанный вывод уравнений (17), (18) поучителен в том смысле, что из него видно, что для получения замкнутой системы уравнений, определяющих оптимальную фильтрацию, надо привлекать дополнительные сведения о соотношениях между старшими условными моментами.

В настоящей книге существенное внимание уделяется так называемым *условно-гауссовским* процессам (θ, ξ), для которых оказалось возможным получить замкнутую систему уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. Тем самым выделен широкий класс случайных процессов (включающий в себя процессы, описываемые схемой Калмана — Бьюси), для которых удается эффективным образом решить задачу построения оптимального нелинейного фильтра. Этот класс процессов (θ, ξ) описывается следующим образом.

Предположим, что процесс (θ, ξ) является процессом диффузионного типа с дифференциалом

$$\begin{aligned} d\theta_t &= [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + b_1(t, \xi)\,dw_1(t) + b_2(t, \xi)\,dw_2(t), \\ d\xi_t &= [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + B_1(t, \xi)\,dw_1(t) + B_2(t, \xi)\,dw_2(t), \end{aligned} \tag{37}$$

где каждый из функционалов $a_0(t, \xi), \ldots, B_2(t, \xi)$ является $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримым для всякого $t \geqslant 0$ (ср. с системой (10)). Подчеркнем, что ненаблюдаемая компонента θ_t входит в (37) линейно, тогда как наблюдаемый процесс ξ может входить в коэффициенты любым («$\mathcal{F}_t^\xi$-измеримым») образом. Входящие в (37) винеровские процессы $w_1 = (w_1(t))$, $w_2 = (w_2(t))$, $t \geqslant 0$, и случайный вектор (θ_0, ξ_0) предполагаются независимыми.

Будет доказано (теорема 11.1), что если условное распределение $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant x \mid \xi_0)$ (для почти всех ξ_0) является гауссовским, $N(m_0, \gamma_0)$, где $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0)$, $\gamma_0 = \mathsf{M}[(\theta_0 - m_2)^2 \mid \xi_0]$, то процесс (θ, ξ), управляемый системой (37), будет условно-гауссовским в том смысле, что при каждом $t \geqslant 0$ условные распределения $\mathsf{P}\left(\theta_{t_0} \leqslant x_0, \ldots, \theta_{t_k} \leqslant x_k \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant k$, являются гауссовскими. Поэтому, в частности, распределение $\mathsf{P}\left(\theta_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$ также (почти наверное) является гауссовским, $N(m_t, \gamma_t)$, с параметрами $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$, $\gamma_t = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi\right]$.

Для условно-гауссовского случая (как и в схемах Калмана — Бьюси) старшие моменты $\mathsf{M}\left(\theta_t^n \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$ выражаются через m_t, γ_t. Это и позволяет (из основного уравнения фильтрации) получить для m_t и γ_t замкнутую систему уравнений (теорема 12.1):

$$\begin{aligned} dm_t &= [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\,m_t]\,dt + \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^{2} b_i(t, \xi)\,B_i(t, \xi) + \gamma_t A_1(t, \xi)}{\sum_{i=1}^{2} B_i^2(t, \xi)}\,[d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,m_t)\,dt], \end{aligned} \tag{38}$$

$$\dot{\gamma}_t = 2a_1(t, \xi)\,\gamma_t + \sum_{i=1}^{2} b_i^2(t, \xi) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{2} b_i(t, \xi)\,B_i(t, \xi) + \gamma_t A_1(t, \xi)\right]^2}{\sum_{i=1}^{2} B_i^2(t, \xi)}. \tag{39}$$

Заметим, что, в отличие от (18), уравнение (39) для γ_t является уравнением со случайными коэффициентами, зависящими от наблюдаемых данных.

Оптимальной линейной фильтрации (в схеме (12)) и оптимальной нелинейной фильтрации для условно-гауссовских процессов (в схеме (37)) посвящены главы 10, 11 и 12. Здесь же, помимо фильтрации, изложены соответствующие результаты для задач интерполяции и экстраполяции.

4. Приведенные примеры и результаты, вошедшие в главы 8—12, показывают, что в книге существенно используются такие понятия теории случайных процессов, как винеровский процесс, стохастические дифференциальные уравнения, мартингалы, квадратично интегрируемые мартингалы и т. п. Стремление авторов давать полные доказательства всех приводимых результатов теории нелинейной фильтрации привело к необходимости довольно подробно изложить теорию мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений (главы 2—6). Мы надеемся, что материал этих глав может оказаться полезным и для тех читателей, которые просто пожелают ознакомиться с результатами теории мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений.

Вместе с тем мы хотим еще раз подчеркнуть, что без этого материала не представляется возможным дать сколько-нибудь удовлетворительное изложение теории оптимальной нелинейной фильтрации и смежных с ней вопросов.

В седьмой главе излагаются существенно используемые в дальнейшем результаты об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам Ито и процессам диффузионного типа.

В главах 15—17 даются применения теории фильтрации к разнообразным задачам статистики случайных процессов. Здесь подробно рассмотрены задачи линейного оценивания (гл. 15), даются применения к некоторым задачам управления, теории информации (гл. 16). В гл. 17 даны применения к небайесовским задачам статистики (оценки максимального правдоподобия для коэффициентов линейной регрессии, последовательное оценивание и последовательное различение статистических гипотез).

Дополнительное представление об излагаемом в книге материале читатель может почерпнуть из приведенного выше оглавления и примечаний, помещенных в конце книги. В примечаниях указаны также источники излагаемых результатов.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность и признательность коллегам и друзьям за помощь и советы. Особо нам хочется поблагодарить Р. З. Хасьминского и М. П. Ершова. Ознакомившись с рукописью книги, они сделали ряд существенных замечаний, которые мы постарались учесть.

ГЛАВА 1

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Основные понятия теории вероятностей

1. Вероятностное пространство. Согласно аксиоматике Колмогорова первоначальным объектом теории вероятностей является *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Здесь $(\Omega, \mathcal{F})$—измеримое пространство, т. е. множество Ω, состоящее из элементарных событий ω, с выделенной на нем системой $\mathcal{F}$ его подмножеств (событий), образующих σ-алгебру, а P — вероятностная мера (вероятность), определенная на множествах из $\mathcal{F}$.

Напомним, что система $\mathcal{F}$ подмножеств пространства Ω образует *алгебру*, если $\Omega \in \mathcal{F}$, $\bar{A} \equiv \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ и $A \cup B \in \mathcal{F}$ для любых $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. Алгебра $\mathcal{F}$ образует *σ-алгебру*, если вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих $\mathcal{F}$, сумма $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. Функция $\mathsf{P}(A)$, определенная на множествах A из σ-алгебры $\mathcal{F}$, называется *вероятностной мерой*, если она обладает следующими свойствами:

$$\mathsf{P}(A) \geqslant 0, \quad A \in \mathcal{F} \quad \text{(неотрицательность);}$$

$$\mathsf{P}(\Omega) = 1 \quad \text{(нормированность);}$$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{l=i}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i) \quad \text{(счетная, или } \sigma\text{-аддитивность),}$$

где $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\varnothing$ — пустое множество.

Система множеств $\mathcal{F}^{\mathsf{P}}$ называется *пополнением* σ-алгебры $\mathcal{F}$ по мере P, если $\mathcal{F}^{\mathsf{P}}$ принадлежат все те множества $A \subseteq \Omega$, для которых найдутся такие множества $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, что $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ и $\mathsf{P}(A_2 \setminus A_1) = 0$. Система множеств $\mathcal{F}^{\mathsf{P}}$ является σ-алгеброй, и мера P однозначно продолжается на множества из $\mathcal{F}^{\mathsf{P}}$. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ называется *полным*, если $\mathcal{F}^{\mathsf{P}}$ совпадает с $\mathcal{F}$. Согласно общему духу теории вероятностей, пренебрегающей событиями нулевой вероятности, все рассматриваемые далее вероятностные пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ будут предполагаться (часто без дополнительного на то указания) полными.

2. Случайные элементы и величины. Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ и $(E, \mathscr{B})$ — два измеримых пространства. Функция $\xi=\xi(\omega)$, определенная на $(\Omega, \mathscr{F})$ со значениями в E, называется *$\mathscr{F}/\mathscr{B}$-измеримой*, если множество $\{\omega: \xi(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$ для всякого $B\in\mathscr{B}$. В теории вероятностей такие функции называют *случайными элементами* со значениями в E. В том случае, когда $E=R$ — действительная прямая, а $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R, $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-измеримые функции $\xi=\xi(\omega)$ называют (действительными) *случайными величинами*. В этом специальном случае $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-измеримые функции для краткости называют просто $\mathscr{F}$-измеримыми.

Говорят, что две случайные величины ξ и η совпадают с вероятностью 1, или почти наверное (п. н.), если $\mathsf{P}(\xi=\eta)=1$. В этом случае пишут: $\xi=\eta$ (P-п. н.). Аналогично, запись $\xi\geqslant\eta$ (P-п. н.) означает, что $\mathsf{P}(\xi\geqslant\eta)=1$. Запись $\xi=\eta$ (A; P-п. н.) применяется для обозначения того, что $\xi=\eta$ почти наверное на множестве A относительно меры P, т. е. $\mathsf{P}(A\cap(\xi\neq\eta))=0$. Аналогичный смысл придается выражению «$\xi\geqslant\eta$ (A; P-п. н.)».

Для краткости слова «P-п. н.» в дальнейшем часто будут опускаться.

3. Математическое ожидание. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\xi=\xi(\omega)$ — неотрицательная случайная величина. Ее *математическое ожидание* (обозначаемое $\mathsf{M}\xi$) есть интеграл Лебега *) $\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, по определению равный

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} i\cdot 2^n\mathsf{P}\left\{i\cdot 2^{-n}<\xi\leqslant(i+1)2^{-n}\right\}+n\mathsf{P}\{\xi>n\}\right],$$

где $\left\{i\cdot 2^{-n}<\xi\leqslant(i+1)2^{-n}\right\}$ обозначает множество точек $\omega\in\Omega$, для которых $i\cdot 2^{-n}<\xi(\omega)\leqslant(i+1)\cdot 2^{-n}$. Аналогично определяется множество $\{\xi>n\}$. В силу предположения $\xi(\omega)\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, интеграл $\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$ определен, хотя, быть может, и принимает значение $+\infty$.

В случае произвольной случайной величины $\xi=\xi(\omega)$ математическое ожидание (также обозначаемое $\mathsf{M}\xi$) определяется только в том случае, когда одно из математических ожида-

---

*) Для этого интеграла будут использоваться также обозначения $\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,d\mathsf{P}$, $\int\limits_{\Omega}\xi\,d\mathsf{P}$, $\int\xi(\omega)\,d\mathsf{P}$, $\int\xi\,d\mathsf{P}$.

ний $\mathsf{M}\xi^+$ или $\mathsf{M}\xi^-$ конечно (здесь $\xi^+ = \max(\xi, 0)$, $\xi^- = -\min(\xi, 0)$) и полагается равным $\mathsf{M}\xi^+ - \mathsf{M}\xi^-$.

Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ называется *интегрируемой*, если $\mathsf{M}|\xi| = \mathsf{M}\xi^+ + \mathsf{M}\xi^- < \infty$.

Пусть $\Omega = R^1$ — действительная прямая, $\mathscr{F}$ — система борелевских множеств на ней. Предположим, что мера P на $\mathscr{F}$ порождается некоторой функцией распределения $F(\lambda)$ (т. е. неубывающей, непрерывной справа и такой, что $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$) по правилу $\mathsf{P}\{(a, b]\} = F(b) - F(a)$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b \xi(x)\mathsf{P}(dx)$ обозначается $\int\limits_a^b \xi(x)\,dF(x)$ и называется интегралом Лебега — Стилтьеса. Этот интеграл можно свести к интегралу по мере Лебега $\mathsf{P}(dt) = dt$. А именно, пусть $\xi(x) \geqslant 0$ и $c(t) = \inf(x\colon F(x) > t)$. Тогда

$$\int\limits_a^b \xi(x)\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} \xi(c(t))\,dt.$$

4. Условные математические ожидания и вероятности. Пусть $\mathscr{G}$ — некоторая σ-подалгебра *) $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ и $\xi = \xi(\omega)$ — неотрицательная случайная величина. Условное *математическое ожидание* ξ относительно $\mathscr{G}$ (обозначается $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G})$) по определению есть любая $\mathscr{G}$-измеримая функция $\eta = \eta(\omega)$, для которой определено $\mathsf{M}\eta$, такая, что для любого $\Lambda \in \mathscr{G}$

$$\int\limits_\Lambda \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \int\limits_\Lambda \eta(\omega)\mathsf{P}(d\omega).$$

Интеграл Лебега $\int\limits_\Lambda \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$ по множеству $\Lambda \in \mathscr{F}$ есть по определению $\int\limits_\Omega \xi(\omega)\chi_\Lambda(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, где $\chi_\Lambda(\omega)$ — *характеристическая функция множества* Λ:

$$\chi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Lambda, \\ 0, & \omega \notin \Lambda. \end{cases}$$

Интеграл $\int\limits_\Lambda \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$ (если только он определен, т. е. конечен один из двух интегралов $\int\limits_\Lambda \xi^+(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$, $\int\limits_\Lambda \xi^-(\omega)\mathsf{P}(d\omega)$) будет обозначаться $\mathsf{M}(\xi;\ \Lambda)$.

---

*) Правильнее было бы говорить под-σ-алгебра.

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ заданы две вероятностные меры P и Q. Говорят, что мера P *абсолютно непрерывна относительно меры* Q $(\mathsf{P} \ll \mathsf{Q})$, если $\mathsf{P}(A) = 0$ для всякого $A \in \mathscr{F}$, для которого $\mathsf{Q}(A) = 0$.

Теорема Радона — Никодима. *Если* $\mathsf{P} \ll \mathsf{Q}$, *тогда существует такая неотрицательная случайная величина* $\xi = \xi(\omega)$, *что для каждого* $A \in \mathscr{F}$

$$\mathsf{P}(A) = \int_A \xi(\omega)\, \mathsf{Q}(d\omega).$$

$\mathscr{F}$*-измеримая функция* $\xi = \xi(\omega)$ *единственна с точностью до стохастической эквивалентности* (*т. е. если также* $\mathsf{P}(A) = \int_A \eta(\omega)\, \mathsf{Q}(d\omega)$, $A \in \mathscr{F}$, *то* $\xi = \eta$ (Q-п. н.)).

Случайная величина $\xi(\omega)$ называется *плотностью* одной меры (P) по другой (Q) или *производной Радона — Никодима*. В связи с этим определением используют обозначение $\xi(\omega) = \frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}(\omega)$. По теореме Радона — Никодима, при условии $\mathsf{P} \ll \mathsf{Q}$, плотность $\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}$ всегда существует.

Если $\xi(\omega) = \chi_A(\omega)$ — характеристическая функция множества $A \in \mathscr{F}$ (иначе — *индикатор* множества A), то $\mathsf{M}(\chi_A(\omega) \mid \mathscr{G})$ обозначается $\mathsf{P}(A \mid \mathscr{G})$ и называется *условной вероятностью события A относительно* $\mathscr{G}$. Так же, как и $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G})$, условная вероятность $\mathsf{P}(A \mid \mathscr{G})$ определяется однозначно с точностью до множеств P-меры нуль (зависящих, быть может, от A).

Функция $\mathsf{P}(A, \omega)$, $A \in \mathscr{F}$, $\omega \in \Omega$, удовлетворяющая условиям:

1) при каждом фиксированном ω она является вероятностной мерой на множествах $A \in \mathscr{F}$,

2) для каждого $A \in \mathscr{F}$ она является $\mathscr{G}$-измеримой,

3) с вероятностью 1 для каждого $A \in \mathscr{F}$

$$\mathsf{P}(A, \omega) = \mathsf{P}(A \mid \mathscr{G}),$$

называется *условным распределением вероятностей относительно* $\mathscr{G}$ или *регулярной условной вероятностью*.

Существование такой функции означает, что условные вероятности могут быть так определены, чтобы для *каждого* ω они задавали вероятностную меру на $A \in \mathscr{F}$.

В регулярном случае условные математические ожидания могут быть найдены как интегралы по условным вероятностям:

$$\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) = \int_\Omega \xi(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega \mid \mathscr{G}).$$

Если $\xi = \xi(\omega)$ — произвольная случайная величина для которой $\mathsf{M}\xi$ существует (т. е. $\mathsf{M}\xi^+ < \infty$ или $\mathsf{M}\xi^- < \infty$), то условное математическое ожидание определяется формулой

$$\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) = \mathsf{M}(\xi^+ \mid \mathscr{G}) - \mathsf{M}(\xi^- \mid \mathscr{G}).$$

Если $\mathscr{A}$ — некоторая система подмножеств пространства Ω, то через $\sigma(\mathscr{A})$ обозначается σ-алгебра, порожденная системой $\mathscr{A}$, т. е. наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathscr{A}$. Если $\eta = \eta(\omega)$ — некоторая $\mathscr{F}/\mathscr{B}$-измеримая функция со значениями в E, то через $\sigma(\eta)$ (или $\mathscr{F}^\eta$) обозначается наименьшая σ-алгебра, относительно которой измерим случайный элемент $\eta(\omega)$. Иначе говоря, $\sigma(\eta)$ есть σ-алгебра, состоящая из множеств вида $\{\omega: \eta^{-1}(B), B \in \mathscr{B}\}$. Для краткости условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{F}^\eta)$ обозначается $\mathsf{M}(\xi \mid \eta)$. Аналогично, для $\mathsf{P}(A \mid \mathscr{F}^\eta)$ используется обозначение $\mathsf{P}(A \mid \eta)$. В частности, если случайный элемент $\eta(\omega)$ является n-мерным вектором случайных величин $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, то для $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{F}^\eta)$ используется обозначение $\mathsf{M}(\xi \mid \eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Отметим основные свойства условных математических ожиданий:

1. $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) \geqslant 0$, если $\xi \geqslant 0$ (P-п. н.).
2. $\mathsf{M}(1 \mid \mathscr{G}) = 1$ (P-п. н.).
3. $\mathsf{M}(\xi + \eta \mid \mathscr{G}) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) + \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{G})$ (P-п. н.), если только выражение $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) + \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{G})$ определено.
4. $\mathsf{M}(\xi\eta \mid \mathscr{G}) = \xi \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{G})$, если $\mathsf{M}\xi\eta$ существует и ξ $\mathscr{G}$-измерима.
5. Если $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$, то P-п. н. $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}_1) = \mathsf{M}[\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}_2) \mid \mathscr{G}_1]$.
6. Если σ-алгебры $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}^\xi$ независимы (т. е. $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ для любых $A \in \mathscr{G}$, $B \in \mathscr{F}^\xi$), то P-п. н. $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) = \mathsf{M}\xi$. В частности, если $\mathscr{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G}) = \mathsf{M}\xi$ (P-п. н).

5. Сходимость случайных величин. Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания. Говорят, что последовательность случайных величин ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по вероятности к случайной величине* ξ (используя при этом запись $\xi_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ или $\xi = \mathsf{P}\text{-}\lim\limits_n \xi_n$), если для каждого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0$.

Последовательность случайных величин ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся к случайной величине* ξ *с вероятностью единица* или *почти наверное* (и пишется: $\xi_n \to \xi$ или $\xi_n \to \xi$ (P-п. н.)), если множество $\{\omega: \xi_n(\omega) \not\to \xi(\omega)\}$ имеет P-меру нуль. Заметим, что

$$\{\omega: \xi_n \to \xi\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ |\xi_k - \xi| < \frac{1}{r} \right\},$$

откуда, в частности, вытекает, что сходимость с вероятностью 1 влечет за собой сходимость по вероятности.

Будем писать $\xi_n \uparrow \xi$ или $\xi_n \uparrow \xi$ (**P**-п. н.), если $\xi_n \to \xi$ (**P**-п. н.) и $\xi_n \leqslant \xi_{n+1}$ (**P**-п. н.) для всех $n=1, 2, \ldots$ Аналогично определяется и сходимость $\xi_n \downarrow \xi$. Говорят также, что $\xi_n \to \xi$ на множестве $A \in \mathcal{F}$, если $\mathsf{P}(A \cap (\xi_n \not\to \xi)) = 0$.

Последовательность случайных величин ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, называется *сходящейся в среднем квадратическом* к ξ (обозначается: $\xi = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_n$), если $\mathsf{M}\xi_n^2 < \infty$, $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$ и $\mathsf{M}|\xi_n - \xi|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Последовательность случайных величин ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, с $\mathsf{M}|\xi_n| < \infty$ называется *слабо сходящейся к случайной величине* ξ с $\mathsf{M}|\xi| < \infty$, если для любой ограниченной случайной величины $\eta = \eta(\omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\xi_n\eta = \mathsf{M}\xi\eta.$$

Приведем основные теоремы о предельном переходе под знаком условного математического ожидания, систематически используемые в дальнейшем.

Теорема 1.1 (о монотонной сходимости). *Пусть σ-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

Если $\xi_n \uparrow \xi$ (**P**-п. н.) *и* $\mathsf{M}\xi_1^- < \infty$, *то* $\mathsf{M}(\xi_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathsf{M}(\xi|\mathcal{G})$ (**P**-п. н.).

Если $\xi_n \downarrow \xi$ (**P**-п. н.) *и* $\mathsf{M}\xi_1^+ < \infty$, *то* $\mathsf{M}(\xi_n|\mathcal{G}) \downarrow \mathsf{M}(\xi|\mathcal{G})$ (**P**-п. н.).

Для формулировки других критериев необходимо ввести понятие равномерной интегрируемости.

Семейство случайных величин $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \int_{\{|\xi_\alpha|>x\}} |\xi_\alpha|\, d\mathsf{P} = 0. \tag{1.1}$$

Условие (1.1) эквивалентно следующим двум условиям:

$$\sup_\alpha \mathsf{M}|\xi_\alpha| < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{\mathsf{P}(A)\to 0} \sup_\alpha \int_A |\xi_\alpha|\, d\mathsf{P} = 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Теорема 1.2 (лемма Фату). *Если последовательность случайных величин ξ_n^+, $n=1, 2, \ldots$, равномерно интегрируема и $\mathsf{M}(\limsup_n \xi_n)$ существует, то*

$$\mathsf{M}(\limsup_n \xi_n|\mathcal{G}) \geqslant \limsup_n \mathsf{M}(\xi|\mathcal{G}) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{1.2}$$

где *) $\limsup_n \xi_n = \inf_n \sup_{m\geqslant n} \xi_m$.

---

*) Для верхнего предела $\limsup_n \xi_n$ используется также обозначение $\overline{\lim_n}\, \xi_n$. Соответственно нижний предел $\liminf_n \xi_n$ обозначается $\underline{\lim_n}\, \xi_n$.

В частности, если для последовательности ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, *существует интегрируемая случайная величина* ξ *такая, что* $\xi_n \leqslant \xi$, *то справедливо неравенство* (1.2).

Теорема 1.3. *Пусть* $0 \leqslant \xi_n \to \xi$ (**P**-п. н.) *и* $\mathsf{M}\xi_n < \infty$, $n=1, 2, \ldots$ *Для того чтобы*

$$\mathsf{M}(\xi_n \mid \mathcal{G}) \to \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{G}) < \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, *была равномерно интегрируемой.*

Из теорем 1.2 и 1.3 вытекает следующее полезное

Следствие. *Если* $\xi_n \to \xi$ (**P**-п. н.) *и последовательность* ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно интегрируема, то*

$$\mathsf{M}(|\xi_n - \xi| \mid \mathcal{G}) \to 0, \quad n \to \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{1.4}$$

Теорема 1.4 (теорема Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть* $\xi_n \to \xi$ (**P**-п. н.) *и существует такая интегрируемая случайная величина* η, *что* $|\xi_n| \leqslant \eta$. *Тогда*

$$\mathsf{M}(|\xi_n - \xi| \mid \mathcal{G}) \to 0, \quad n \to \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Замечание 1. Теорема 1.3, ее следствие и теорема 1.4 сохраняет свою силу, если сходимость $\xi_n \to \xi$ (**P**-п. н.) заменить на сходимость по вероятности: $\xi = \mathsf{P}\text{-}\lim\limits_n \xi_n$.

Замечание 2. Беря в теоремах 1.1 — 1.4 в качестве $\mathcal{G}$ тривиальную σ-алгебру $\{\varnothing, \Omega\}$, получаем обычные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, поскольку в этом случае $\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{G}) = \mathsf{M}\eta$.

Пусть теперь $\ldots, \mathcal{F}_{-2}, \mathcal{F}_{-1}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ — неубывающая $(\ldots, \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots)$ последовательность σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Обозначим $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_n \mathcal{F}_n\right)$ минимальную σ-алгебру, содержащую алгебру событий $\bigcup\limits_n \mathcal{F}_n$, и положим $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_n \mathcal{F}_n$.

Теорема 1.5 (Леви). *Пусть* ξ — *случайная величина с* $\mathsf{M}|\xi| < \infty$. *Тогда с вероятностью* 1

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_n) \to \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_\infty), \quad n \to \infty, \\ &\mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_n) \to \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_{-\infty}), \quad n \to -\infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Следующее предложение содержит в себе утверждение как теоремы 1.4, так и теоремы 1.5.

Теорема 1.6. *Пусть* $\xi_m \to \xi$ (**P**-п. н.) *и существует такая интегрируемая случайная величина* η, *что* $|\xi_m| \leqslant \eta$. *Пусть, далее,* $\ldots, \mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots$ — *неубывающая последовательность* σ-*подалгебр* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_n \mathcal{F}_n\right)$, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_n \mathcal{F}_n$.

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \mathsf{M}(\xi_m \mid \mathscr{F}_n) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{F}_\infty),$$
$$\lim_{n,\, m \to \infty} \mathsf{M}(\xi_m \mid \mathscr{F}_{-n}) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{F}_{-\infty}). \tag{1.6}$$

Теорема 1.7 (критерий компактности Данфорда — Петтиса). *Для того чтобы семейство случайных величин* $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *с* $\mathsf{M}|\xi_\alpha| < \infty$ *было слабо компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно интегрируемым*. (Напомним, что *слабая компактность* семейства $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ означает, что каждая последовательность ξ_{α_i}, $\alpha_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.)

В заключение этого пункта приведем одно необходимое и достаточное условие равномерной интегрируемости.

Теорема 1.8 (Валле-Пуссен). *Для того чтобы последовательность* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *интегрируемых случайных величин была равномерно интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $G(t)$, $t \geqslant 0$, *положительная, возрастающая и выпуклая книзу, такая, что*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, \tag{1.7}$$

$$\sup_n \mathsf{M} G(|\xi_n|) < \infty. \tag{1.8}$$

6. Основные неравенства для математических ожиданий.

Неравенство Гёльдера. Если $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\mathsf{M}|\xi\eta| \leqslant (\mathsf{M}|\xi|^p)^{1/p} (\mathsf{M}|\eta|^q)^{1/q}. \tag{1.9}$$

В качестве частных случаев (1.9) получаем следующие два неравенства.

Неравенство Коши — Буняковского:

$$\mathsf{M}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathsf{M}\xi^2 \mathsf{M}\eta^2}. \tag{1.10}$$

Неравенство Минковского. Если $p \geqslant 1$, то

$$(\mathsf{M}|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leqslant (\mathsf{M}|\xi|^p)^{1/p} + (\mathsf{M}|\eta|^p)^{1/p}. \tag{1.11}$$

Неравенство Иенсена. Пусть $f(x)$ — непрерывная выпуклая (книзу) функция одного переменного и ξ — интегрируемая случайная величина ($\mathsf{M}|\xi| < \infty$) такая, что $\mathsf{M}|f(\xi)| < \infty$. Тогда

$$f(\mathsf{M}\xi) \leqslant \mathsf{M} f(\xi). \tag{1.12}$$

Замечание. Все указанные неравенства остаются справедливыми, если операцию математического ожидания $\mathsf{M}(\cdot)$

заменить на условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot\,|\,\mathscr{G})$, где $\mathscr{G}$ — σ-подалгебра $\mathscr{F}$ основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

Неравенство Чебышева. Если $\mathsf{M}|\xi| < \infty$, то для всякого $a > 0$

$$\mathsf{P}\{|\xi| > a\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\xi|}{a}.$$

7. Лемма Бореля — Кантелли служит основным средством при исследовании свойств, выполняющихся «с вероятностью 1».

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность множеств из $\mathscr{F}$. Множество A^* называется *верхним пределом последовательности множеств* $A_1, A_2, \ldots$ и обозначается $A^* = \lim_n \sup A_n$, если A^* состоит из всех тех точек ω, каждая из которых принадлежит бесконечно многим A_n. Отправляясь от этого определения, нетрудно показать, что

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Часто также пишут $A^* = \{A_n \text{ б. ч.}\}$.

Множество A_* называется *нижним пределом последовательности множеств* $A_1, A_2, \ldots$ и обозначается $A_* = \lim_n \inf A_n$, если A_* состоит из точек ω, каждая из которых принадлежит всем A_n, за исключением, самое большее, конечного их числа. В соответствии с этим определением

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Лемма Бореля — Кантелли. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, *то* $\mathsf{P}(A^*) = 0$. *Если же* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty$ *и множества* $A_1, A_2, \ldots$ *независимы* (*т. е.* $\mathsf{P}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \ldots \mathsf{P}(A_{i_k})$ *для любых различных* $i_1, \ldots, i_k$), *то* $\mathsf{P}(A^*) = 1$.

8. Гауссовские системы. Случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, называется *гауссовской* (или *нормальной*), если ее характеристическая функция

$$\varphi(t) \equiv \mathsf{M}e^{it\xi} = e^{itm - \frac{\sigma^2}{2} t^2}, \tag{1.13}$$

где $-\infty < m < \infty$, $\sigma^2 < \infty$. В невырожденном случае $(\sigma^2 > 0)$ у функции распределения

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\omega:\ \xi(\omega) \leqslant x\} \tag{1.14}$$

существует плотность

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.15}$$

В вырожденном случае ($\sigma^2 = 0$), очевидно, $\mathsf{P}\{\xi = m\} = 1$.

Параметры m и σ^2 нормального распределения, задаваемого характеристической функцией (1.13), имеют простой смысл: $m = \mathsf{M}\xi$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi$, где $\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$ — дисперсия случайной величины ξ.

Если $m = 0$, то $\mathsf{M}\xi^{2n} = (2n-1)!!\,\sigma^{2n}$.

В дальнейшем часто будет использоваться запись *) $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, означающая, что ξ является гауссовской величиной с параметрами m и σ^2.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, состоящий из случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, называется *гауссовским* (или *нормальным*), если его характеристическая функция

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{i(t,\xi)}, \qquad t = (t_1, \ldots, t_n), \qquad t_j \in R^1 \qquad (t, \xi) = \sum_{j=1}^n t_j \xi_j,$$

задается формулой

$$\varphi(t) = e^{i(t, m) - \frac{1}{2}(Rt, t)}, \tag{1.16}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m_j| < \infty$, $(Rt, t) = \sum_{k, j} r_{k, j} t_k t_j$ и $R = \| r_{kj} \|$ — неотрицательно определенная симметрическая матрица:

$$\sum_{k, j} r_{kj} t_k t_j \geqslant 0, \qquad t_j \in R^1, \qquad r_{kj} = r_{jk}.$$

В невырожденном случае (когда матрица R положительно определенная и, следовательно, $|R| = \det R > 0$) у функции распределения $F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\omega\colon \xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\}$ вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ существует плотность

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i, j} a_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\}, \tag{1.17}$$

где $A = \| a_{ij} \|$ — матрица, обратная к R $(A = R^{-1})$, $|A| = \det A$.

Пользуясь введенными выше обозначениями, плотность $f_\xi(x_1, \ldots, x_n)$ можно (в невырожденном случае) переписать

---

*) Заметим, что обычно пишут $\xi \sim N(m, \sigma)$. Нам удобно, однако, использовать запись $\xi \sim N(m, \sigma^2)$.

в таком виде *):

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(A(x-m), (x-m))\right\},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$.

Как и в одномерном случае ($n = 1$), вектор $m = (m_1, \ldots, m_n)$ и матрица $R = \|r_{ij}\|$ допускают простую и наглядную интерпретацию:

$$m_i = \mathsf{M}\xi_i, \quad r_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathsf{M}(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j). \tag{1.18}$$

Иначе говоря, m есть вектор средних значений, а R есть матрица ковариаций вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Система случайных величин $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое конечное или бесконечное множество, называется *гауссовской*, если любая линейная комбинация

$$c_{\alpha_1}\xi_{\alpha_1} + \ldots + c_{\alpha_n}\xi_{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathfrak{A}, \; c_{\alpha_i} \in R^1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

является гауссовской случайной величиной. Иногда удобно пользоваться иным, но эквивалентным данному, определением гауссовской системы. Согласно этому определению система случайных величин $\xi = \{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется гауссовской, если для любого n и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{A}$ случайный вектор $(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_n})$ является гауссовским.

§ 2. Случайные процессы. Основные понятия

1. Определения. Свойства измеримости. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\boldsymbol{T} = [0, \infty)$. Семейство $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, случайных величин $\xi_t = \xi_t(\omega)$ называется (действительным) *случайным процессом* с непрерывным временем $t \in \boldsymbol{T}$. В том случае, когда временной параметр t пробегает множество $\boldsymbol{N} = \{0, 1, \ldots,\}$, семейство $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{N}$, называют *случайной последовательностью* или случайным процессом с дискретным временем.

При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция времени $\xi_t(\omega)$ ($t \in \boldsymbol{T}$ или $t \in \boldsymbol{N}$) называется *траекторией* или реализацией, отвечающей элементарному исходу ω.

С каждым случайным процессом $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{Z}$ (где $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{T}$ в случае непрерывного времени и $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$ в случае дискретного времени), естественным образом связываются σ-алгебры $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\xi_s, s \leqslant t\}$, являющиеся наименьшими σ-алгебрами, относительно которых измеримы случайные величины ξ_s, $s \leqslant t$. Для условных математических ожиданий $\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ иногда будем

*) Как и в (1.16), $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение.

использовать также следующие обозначения: $\mathsf{M}(\eta \mid \xi_s, s \leqslant t)$ и $\mathsf{M}(\eta \mid \xi_0^t)$.

Для условных вероятностей $\mathsf{P}(A \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ применяются аналогичные обозначения: $\mathsf{P}(A \mid \xi_s, s \leqslant t)$ и $\mathsf{P}(A \mid \xi_0^t)$.

Случайный процесс $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, называется *измеримым*, если для любых борелевских множеств $B \in \mathcal{B}$ числовой прямой R^1

$$\{(\omega, t)\colon \xi_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\boldsymbol{T}),$$

где $\mathcal{B}(\boldsymbol{T})$ есть σ-алгебра борелевских множеств на $\boldsymbol{T} = [0, \infty)$.

Следующая теорема иллюстрирует важность понятия измеримости процесса, заданного на *полном* вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Теорема 1.9 (Фубини). *Пусть $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, — измеримый случайный процесс.*

1) *Почти все траектории этого процесса являются измеримыми (по Борелю) функциями от $t \in \boldsymbol{T}$.*

2) *Если $\mathsf{M}\xi_t$ существует при всех $t \in \boldsymbol{T}$, то $m_t = \mathsf{M}\xi_t$ является измеримой функцией от $t \in \boldsymbol{T}$.*

3) *Если S — измеримое множество на $\boldsymbol{T} = [0, \infty)$ и*

$$\int_S \mathsf{M} |\xi_t| \, dt < \infty, \quad \text{то } \mathsf{P}\text{-п. н.} \quad \int_S |\xi_t| \, dt < \infty,$$

т. е. почти все траектории $\xi_t = \xi_t(\omega)$ интегрируемы на множестве S и

$$\int_S \mathsf{M}\xi_t \, dt = \mathsf{M} \int_S \xi_t \, dt.$$

Пусть $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, — неубывающее семейство σ-алгебр, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leqslant t$. Говорят, что (измеримый) случайный процесс $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, *согласован* с семейством σ-алгебр $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, если при каждом $t \in \boldsymbol{T}$ случайные величины ξ_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Для краткости такие случайные процессы будут обозначаться $X = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, или просто $X = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ и называться ***F**-согласованными* или *неупреждающими* *).

Случайный процесс $X = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, называется *прогрессивно измеримым*, если для каждого $t \in \boldsymbol{T}$

$$\{(\omega, s \leqslant t)\colon \xi_s(w) \in B\} \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0, t]),$$

где B — борелевские множества на R^1, а $\mathcal{B}([0, t])$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0, t]$.

*) Такие процессы называют также неантисипативными (non-anticipative processes).

Очевидно, что всякий прогрессивно измеримый случайный процесс $X=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, является измеримым и согласованным с $\boldsymbol{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$.

Всякий непрерывный справа (или слева) случайный процесс $X=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, является прогрессивно измеримым [126].

Два случайных процесса $X=(\xi_t(\omega))$, $t \in \boldsymbol{T}$, и $X'=(\xi'_t(\omega'))$, $t \in \boldsymbol{T}$, заданных, быть может, на разных вероятностных пространствах $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $(\Omega', \mathcal{F}', \mathsf{P}')$, будут называться *слабо эквивалентными*, если

$$\mathsf{P}\{\omega:\ \xi_{t_1} \in A_1, \ldots, \xi_{t_n} \in A_n\} = \mathsf{P}'\{\omega':\ \xi'_{t_1} \in A_1, \ldots, \xi'_{t_n} \in A_n\}$$

для любых $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{T}$ и борелевских множеств $A_1, \ldots, A_n$ числовой прямой R^1.

Случайные процессы $X=(\xi_t(\omega))$ и $X'=(\xi'_t(\omega))$, $t \in \boldsymbol{T}$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, называются *стохастически эквивалентными*, если $\mathsf{P}(\xi_t \neq \xi'_t)=1$ для всех $t \in \boldsymbol{T}$. Процесс $X'=(\xi'_t(\omega))$, $t \in \boldsymbol{T}$, стохастически эквивалентный $X=(\xi_t(\omega))$, $t \in \boldsymbol{T}$, называют *модификацией* процесса X.

Известно, что если процесс $X=(\xi_t(\omega))$, $t \in \boldsymbol{T}$, измерим и согласован (с $\boldsymbol{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$), то у него существует прогрессивно измеримая модификация [126].

Пусть $\xi=\xi(\omega)$ и $\eta=\eta(\omega)$ — две случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{F})$, причем η является $\mathcal{F}^{\xi}$-измеримой, где $\mathcal{F}^{\xi}=\sigma(\xi)$. Тогда существует такая борелевская функция $Y=Y(x)$, $x \in R^1$, что $\eta(\omega)=Y(\xi(\omega))$, P-п. н. В дальнейшем часто будет использоваться следующее обобщение этого факта (см. [46], стр. 543).

Пусть $\xi(\omega)=(\xi_t(\omega))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс, определенный на $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{F}_T^{\xi}=\sigma\{\omega:\ \xi_t(\omega),\ t \leqslant T\}$ и $\mathcal{B}_T$ — наименьшая σ-алгебра в пространстве R^T всех действительных функций $x=(x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, содержащая множества вида $\{x:\ x_{t_1} \in A_1, \ldots, x_{t_n} \in A_n\}$, где $0 \leqslant t_i \leqslant T$ и A_i — борелевские множества на числовой прямой, $i=1, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$

Если случайная величина $\eta=\eta(\omega)$ является $\mathcal{F}_T^{\xi}$-измеримой, то найдется такая $\mathcal{B}_T$-измеримая функция $Y=Y(x)$, $x \in R^T$, что $\eta(\omega)=Y(\xi(\omega))$, P-п. н. *). Более того, существуют не более чем счетное множество точек $s_1, s_2, \ldots$, принадлежащих интервалу $[0, T]$, и (измеримая) функция $Y=Y(z)$, определенная для $z=(z_1, z_2, \ldots) \in R^{\infty}$, такие, что

$$\eta(\omega)=Y(\xi_{s_1}(\omega), \xi_{s_2}(\omega), \ldots) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н}).$$

*) Для случайных величин η, являющихся $\mathcal{F}_T^{\xi}$-измеримыми, часто будут также использоваться обозначения $\eta=\eta_T(\xi)$, $\eta=\eta(T, \xi)$.

Следующее предложение будет неоднократно использоваться в книге. *Пусть* $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, — *измеримый случайный процесс на* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *с* $\mathsf{M}|\xi_t|<\infty$, $t\in\boldsymbol{T}$, *и пусть* $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, — *семейство неубывающих* σ-*подалгебр* $\mathscr{F}$. *Тогда условные математические ожидания* $\eta_t=\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_t)$ *могут быть выбраны таким образом, что процесс* $\eta=(\eta_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, *будет измеримым* [126], [52].

В соответствии с этим результатом в дальнейшем (даже если это не оговорено особо) всегда будет предполагаться, что условные математические ожидания $\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, уже так определены, что процесс $\eta_t=\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, является измеримым.

2. Непрерывность. Случайный процесс $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, называется *стохастическим непрерывным* в точке $t_0\in\boldsymbol{T}$, если для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\{|\xi_s-\xi_{t_0}|>\varepsilon\}\to 0, \qquad s\to t_0. \tag{1.19}$$

Если (1.19) выполнено для всех $t_0\in S\subseteq\boldsymbol{T}$, то процесс X называют стохастически непрерывным (на множестве S).

Случайный процесс $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, называется *непрерывным* (*непрерывным справа, слева*) на $S\subseteq\boldsymbol{T}$, если почти все его траектории непрерывны (непрерывны справа, слева) для $t\in S\subseteq\boldsymbol{T}$. Иначе говоря, должно существовать такое множество $N\in\mathscr{F}$ с $\mathsf{P}(N)=0$, что для всех $\omega\notin N$ траектории $\xi_t(\omega)$, $t\in S$, суть непрерывные (непрерывные справа, слева) функции.

Следующая теорема дает условия существования непрерывной модификации у процесса $X=(\xi_t(\omega))$, $t\in[a, b]$.

Теорема 1.10 (критерий Колмогорова). *Для того чтобы случайный процесс* $X=(\xi_t)$, $t\in[a, b]$, *допускал непрерывную модификацию* $X^*=(\xi_t^*)$, $t\in[a, b]$, *достаточно, чтобы нашлись такие постоянные* $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ *и* C, *что*

$$\mathsf{M}|\xi_{t+\Delta}-\xi_t|^\alpha\leqslant C|\Delta|^{1+\varepsilon} \tag{1.20}$$

для всех t, $t+\Delta\in[a, b]$.

Случайный процесс $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, называется *непрерывным в среднем квадратическом в точке* $t_0\in\boldsymbol{T}$, если

$$\mathsf{M}|\xi_s-\xi_{t_0}|^2\to 0, \qquad s\to t_0. \tag{1.21}$$

Если (1.21) выполнено для всех точек $t_0\in S\subseteq\boldsymbol{T}$, то процесс X будет называться *непрерывным в среднем квадратическом* (*на множестве* S).

3. Некоторые классы процессов. Остановимся на основных классах случайных процессов.

Стационарные процессы. Говорят, что случайный процесс $X=(\xi_t(\omega))$, $t\in\boldsymbol{T}=[0, \infty)$, является *стационарным* (или *стационарным в узком смысле*), если для любого действительного Δ конечномерные распределения не меняются при сдвиге на Δ:

$$\mathsf{P}\{\xi_{t_1}\in A_1, \ldots, \xi_{t_n}\in A_n\}=\mathsf{P}\{\xi_{t_1+\Delta}\in A_1, \ldots, \xi_{t_n+\Delta}\in A_n\},$$

если только $t_1, \ldots, t_n, t_1+\Delta, \ldots, t_n+\Delta\in \boldsymbol{T}$.

Случайный процесс $X=(\xi_t(\omega))$, $t\in\boldsymbol{T}=[0, \infty)$, называется *стационарным в широком смысле*, если

$$\mathsf{M}\xi_t^2<\infty, \quad t\in\boldsymbol{T} \quad \text{и} \quad \mathsf{M}\xi_t=\mathsf{M}\xi_{t+\Delta}, \quad \mathsf{M}\xi_s\xi_t=\mathsf{M}\xi_{s+\Delta}\xi_{t+\Delta},$$

т. е. если первые и вторые моменты не меняются при сдвиге.

Марковские процессы. Действительный случайный процесс $X=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, заданный на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, называется *марковским относительно неубывающей системы σ-алгебр* $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, если P-п. н. *)

$$\mathsf{P}(A\cap B\mid\xi_t)=\mathsf{P}(A\mid\xi_t)\mathsf{P}(B\mid\xi_t) \tag{1.22}$$

для любых $t\in\boldsymbol{T}$, $A\in\mathscr{F}_t$, $B\in\mathscr{F}^{\xi}_{[t,\infty)}=\sigma(\xi_s, s\geqslant t)$.

Действительный случайный процесс $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, называется (просто) *марковским*, если он является марковским относительно системы σ-алгебр $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}^{\xi}_t=\sigma(\xi_s, s\leqslant t)$.

Нижеследующие утверждения можно положить в основу различных, но эквивалентных определений марковости процесса $X=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$.

Теорема 1.11. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $X=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, — *марковский процесс относительно* $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$;

2) *для каждого* $t\in\boldsymbol{T}$ *и любой ограниченной* $\mathscr{F}^{\xi}_{[t,\infty)}$-*измеримой случайной величины* η

$$\mathsf{M}(\eta\mid\mathscr{F}_t)=\mathsf{M}(\eta\mid\xi_t) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}); \tag{1.23}$$

3) *для* $t\geqslant s\geqslant 0$ *и любой (измеримой) функции* $f(x)$ *с* $\sup_x|f(x)|<\infty$

$$\mathsf{M}[f(\xi_t)\mid\mathscr{F}_s]=\mathsf{M}[f(\xi_t)\mid\xi_s]. \tag{1.24}$$

Для проверки того, когда процесс $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, является (просто) марковским, полезно следующее утверждение.

Теорема 1.12. *Для того чтобы случайный процесс* $X=(\xi_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, *был марковским, необходимо и достаточно, чтобы для каждой (измеримой) функции* $f(x)$ *с* $\sup_x|f(x)|<\infty$ *и любого набора* $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant t$

$$\mathsf{M}[f(\xi_t)\mid\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}]=\mathsf{M}[f(\xi_t)\mid\xi_{t_n}]. \tag{1.25}$$

*) В соответствии с предыдущими соглашениями $\mathsf{P}(\cdot\mid\xi_t)$ обозначает условную вероятность $\mathsf{P}(\cdot\mid\sigma(\xi_t))$.

Процессы с независимыми приращениями являются важным частным случаем марковских процессов. Говорят, что процесс $X=(\xi_t)$, $t\in \boldsymbol{T}$, является *процессом с независимыми приращениями*, если для любых $t_n>t_{n-1}>\ldots$ $\ldots>t_1\geqslant 0$ приращения $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}-\xi_{t_{n-1}}$ образуют систему независимых случайных величин.

Процесс с независимыми приращениями называется *однородным* (по времени), если распределение вероятностей приращений $\xi_t-\xi_s$ зависит лишь от разности $t-s$. Часто такие процессы еще называют процессами со стационарными независимыми приращениями.

Мартингалы. Случайный процесс $X=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\in \boldsymbol{T}$, называется *мартингалом* (относительно системы $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$), если $\mathsf{M}|\xi_t|<\infty$, $t\in\boldsymbol{T}$, и

$$\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_s)=\xi_s,\quad t\geqslant s \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{1.26}$$

Мартингалам (а также близкому понятию — полумартингалам) будет посвящена значительная часть настоящей книги.

§ 3. Марковские моменты

1. Определения. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\boldsymbol{T}=[0,\infty)$ и $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$, — неубывающая последовательность σ-подалгебр $\mathscr{F}$ $(\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F},\ s\leqslant t)$. Как отмечалось в § 1, σ-алгебра $\mathscr{F}$ предполагается пополненной по мере P $(\mathscr{F}=\mathscr{F}^{\mathsf{P}})$. Далее всюду будет также предполагаться, что и σ-алгебры $\mathscr{F}_t$, $t\in\boldsymbol{T}$, пополнены множествами из $\mathscr{F}$, имеющими P-меру нуль.

Случайная величина (т. е. $\mathscr{F}$-измеримая функция) $\tau=\tau(\omega)$, принимающая значения в $\overline{\boldsymbol{T}}=[0,\infty]$, называется *марковским моментом* (относительно системы $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$), если для каждого $t\in\boldsymbol{T}$

$$\{\omega\colon\ \tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t. \tag{1.27}$$

Марковские моменты (м. м.) называют также случайными величинами, не зависящими от будущего. Если $\mathsf{P}\{\tau(\omega)<\infty\}=1$, то м. м. называется *моментом остановки* (м. о.).

С каждым м. м. $\tau=\tau(\omega)$ (относительно системы $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\in\boldsymbol{T}$) связывается σ-алгебра $\mathscr{F}_\tau$ — совокупность тех множеств $A\subseteq\{\omega\colon\ \tau<\infty\}$, для которых $A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ при всех $t\in\boldsymbol{T}$.

Если под $\mathscr{F}_t$ понимать совокупность событий, наблюдаемых до момента времени t, то $\mathscr{F}_\tau$ состоит из событий, наблюдаемых до случайного момента τ.

Техника оперирования марковскими моментами довольно существенно будет использована в настоящей книге.

1. Свойства марковских моментов. Для каждого $t \in \boldsymbol{T}$ положим*) $\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s\right)$, $\mathscr{F}_{0-} = \mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{s \geqslant 0} \mathscr{F}_s\right)$.

Последовательность σ-алгебр $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, называется *непрерывной справа*, если $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ для всех $t \in \boldsymbol{F}$. Заметим, что семейство $\boldsymbol{F}_+ = (\mathscr{F}_{t+})$ всегда непрерывно справа.

Лемма 1.1. *Пусть* $\tau = \tau(\omega)$ — *м. м. Тогда* $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ *и, следовательно,* $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$.

Доказательство следует из того, что

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{k}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{F}_{t-\frac{1}{k}} \subseteq \mathscr{F}_t.$$

Утверждение, обратное лемме 1.1, вообще говоря, неверно. Однако справедлива следующая

Лемма 1.2. *Если семейство* $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, *непрерывно справа и* $\tau = \tau(\omega)$ — *случайная величина со значениями в* $[0, \infty]$ *такая, что* $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ *для всех* $t \in \boldsymbol{T}$, *то* τ *есть марковский момент, т. е.* $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$.

Доказательство. Поскольку $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, то $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$.

Лемма 1.3. *Если* τ_1, τ_2 — *марковские моменты, то* $\tau_1 \wedge \tau_2 \equiv \min(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \vee \tau_2 \equiv \max(\tau_1, \tau_2)$ *и* $\tau_1 + \tau_2$ *также являются марковскими моментами.*

Доказательство следует непосредственно из соотношений

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\},$$
$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\},$$
$$\{\tau_1 + \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 = 0, \tau_2 = t\} \cup$$
$$\cup \{\tau_1 = t, \tau_2 = 0\} \cup \left(\bigcup_{\substack{a+b<t \\ a, b \geqslant 0}} [\{\tau_1 < a\} \cap \{\tau_2 < b\}]\right),$$

где a, b — рациональные числа.

Лемма 1.4. *Пусть* $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — *последовательность марковских моментов. Тогда* $\sup \tau_n$ *также марковский момент. Если к тому же семейство* $F = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, *непрерывно справа, то* $\inf_n \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$ *и* $\liminf_n \tau_n$ *также являются марковкими моментами.*

Доказательство следует из того, что

$$\{\sup_n \tau_n \leqslant t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \{\inf_n \tau_n < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t$$

---

*) Наименьшая σ-алгебра $\sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s\right)$ иногда обозначается $\bigvee_{s<t} \mathscr{F}_s$.

и для $\limsup_n \tau_n = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{m \geqslant n} \tau_m$, $\liminf_n \tau_n = \sup_{n \geqslant 1} \inf_{m \geqslant n} \tau_m$

$$\{\limsup_n \tau_n < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\tau_m < t - \frac{1}{k}\right\},$$

$$\{\liminf_n \tau_n > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{\tau_m > t + \frac{1}{k}\right\}.$$

Лемма 1.5. *Всякий марковский момент $\tau = \tau(\omega)$ (относительно $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$) является $\mathscr{F}_\tau$-измеримой случайной величиной. Если τ и σ — два марковских момента и $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$* ($\mathsf{P}$-п. н.), *то $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $A = \{\tau \leqslant s\}$. Надо показать, что $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$, $t \in \boldsymbol{T}$. Имеем

$$\{\tau \leqslant s\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t \wedge s\} \in \mathscr{F}_{t \wedge s} \subseteq \mathscr{F}_t.$$

Следовательно, м. м. τ является $\mathscr{F}_\tau$-измеримым.

Пусть теперь $A \subseteq \{\omega\colon \sigma < \infty\}$ и $A \in \mathscr{F}_\tau$. Тогда, поскольку $\mathsf{P}\{\tau \leqslant \sigma\} = 1$ и σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ пополнены, то с точностью до множеств нулевой вероятности множество $A \cap \{\sigma \leqslant t\}$ совпадает с множеством $A \cap \{\tau \leqslant t\} \cap \{\sigma \leqslant t\}$, которое принадлежит $\mathscr{F}_t$. Следовательно, множество $A \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$, и, значит, $A \in \mathscr{F}_\sigma$.

Лемма 1.6. *Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность марковских моментов относительно неубывающей непрерывной справа системы σ-алгебр $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in T$, и пусть $\tau = \inf_n \tau_n$. Тогда*

$$\mathscr{F}_\tau = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n}.$$

Доказательство. Согласно лемме 1.4 τ является м. м. Поэтому по лемме 1.5 $\mathscr{F}_\tau \subseteq \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n}$.

С другой стороны, пусть $A \in \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n}$. Тогда

$$A \cap \{\tau < t\} = A \cap \left(\bigcup_n (\tau_n < t)\right) = \bigcup_n (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathscr{F}_t.$$

Отсюда, в силу непрерывности справа ($\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$), вытекает, что $A \in \mathscr{F}_\tau$.

Лемма 1.7. *Пусть τ и σ — марковские моменты относительно $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$. Тогда каждое из событий $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\}$, $\{\tau \leqslant \sigma\}$, $\{\tau \geqslant \sigma\}$ и $\{\tau = \sigma\}$ принадлежит одновременно $\mathscr{F}_\tau$ и $\mathscr{F}_\sigma$.*

Доказательство. Для каждого $t \in \boldsymbol{T}$

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma \leqslant t\} = \bigcup_{r < t} (\{\tau < r\} \cap \{r < \sigma \leqslant t\}) \in \mathscr{F}_t,$$

где r — рациональные числа. Поэтому $\{\tau < \sigma\} \in \mathscr{F}_\sigma$.

Далее,

$$\{\tau < \sigma\} \cap (\tau \leqslant t) = \bigcup_{r < t} [(\{\tau \leqslant r\} \cap \{r < \sigma\}) \cup (\{\tau \leqslant t\} \cap \{t < \sigma\})] \in \mathscr{F}_t,$$

т. е. $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_\tau$.

Аналогично устанавливается, что $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_\tau$ и $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_\sigma$. Следовательно, $\{\tau \leqslant \sigma\}$, $\{\sigma \leqslant \tau\}$ и $\{\sigma = \tau\}$ принадлежат как $\mathscr{F}_\tau$, так и $\mathscr{F}_\sigma$.

Польза введенного в § 2 понятия прогрессивно измеримого случайного процесса иллюстрируется следующим предложением.

Лемма 1.8. *Пусть* $X = \{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$, $t \in \boldsymbol{T}$, *— действительный прогрессивно измеримый процесс и* $\tau = \tau(\omega)$ *— марковский момент (относительно* $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$) *такой, что* $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$. *Тогда функция* $\xi_\tau = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ *является* $\mathscr{F}_\tau$*-измеримой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — система борелевских множеств на числовой прямой R^1 и $t \in \boldsymbol{T}$. Надо установить, что для всякого $B \in \mathscr{B}$

$$\{\xi_{\tau(\omega)}(\omega) \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Положим $\sigma = \tau \wedge t$. Тогда

$$\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\xi_\tau \in B\} \cap [\{\tau < t\} \cup \{\tau = t\}] =$$
$$= [\{\xi_\sigma \in B\} \cap \{\sigma < t\}] \cup [\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau = t\}].$$

Ясно, что $\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$. Если установить, что ξ_σ — $\mathscr{F}_t$-измеримая функция, то тогда событие $\{\xi_\sigma \in B\} \cap \{\sigma < t\}$ также будет принадлежать $\mathscr{F}_t$. Заметим теперь, что отображение $\omega \to (\omega, \sigma(\omega))$ является измеримым отображением $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ в $(\Omega \times [0, t], \mathscr{F}_t \times \mathscr{B}([0, t]))$, а отображение $(\omega, s) \to \xi_s(\omega)$ пространства $(\Omega \times [0, t], \mathscr{F}_t \times \mathscr{B}([0, t]))$ в $(R^1, \mathscr{B})$ также измеримо в силу прогрессивной измеримости процесса $X = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$. Следовательно, отображение $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ в $(R^1, \mathscr{B})$, задаваемое $\xi_{\sigma(\omega)}(\omega)$, измеримо, как результат суперпозиции двух измеримых отображений.

Следствие. *Если* $X = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, *— непрерывный справа (или слева) процесс, то* ξ_τ $\mathscr{F}_\tau$*-измеримо.*

Лемма 1.9. *Пусть* $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\omega)$ *— интегрируемая случайная величина* ($\mathsf{M}|\mathfrak{z}| < \infty$) *и* τ *— марковский момент относительно системы* $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$. *Тогда на множестве* $\{\omega: \tau = t\}$ *условное математическое ожидание* $\mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_\tau)$ *совпадает с* $\mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_t)$, *т. е.*

$$\mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_\tau) = \mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_t) \qquad (\{\tau = t\}, \ \mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Доказательство. Надо показать, что

$$\mathsf{P}[\{\tau = t\} \cap \{\mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_\tau) \neq \mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_t)\}] = 0$$

или, что эквивалентно,

$$\chi \mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_\tau) = \chi \mathsf{M}(\mathfrak{z} | \mathscr{F}_t) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

где $\chi = \chi_{\{\tau = t\}}$ — характеристическая функция множества $\{\tau = t\}$. Поскольку случайная величина χ является $\mathcal{F}_\tau$- и $\mathcal{F}_t$-измеримой (лемма 1.7), то

$$\chi \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_\tau) \quad \text{и} \quad \chi \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t).$$

Покажем, что $\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t)$ (Р-п. н.). Прежде всего заметим, что случайная величина $\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t)$ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой. Действительно, пусть $s \in \boldsymbol{T}$ и $a \in R^1$. Тогда, если $t \leqslant s$, то, очевидно, $\{\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t) \leqslant a\} \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s$. Если же $t > s$, то множество

$$\{\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t) \leqslant a\} \cap \{\tau \leqslant s\} = \{\chi \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t) \leqslant a\} \cap \{\tau \leqslant s\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\varnothing, \Omega\} \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s.$$

Далее, согласно определению условного математического ожидания для всякого $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\int_A \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_\tau)\, d\mathsf{P} = \int_A \xi\chi\, d\mathsf{P} = \int_{A \cap \{\tau = t\}} \xi\, d\mathsf{P}. \tag{1.28}$$

Множество $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Поэтому

$$\int_{A \cap \{\tau = t\}} \xi\, d\mathsf{P} = \int_{A \cap \{\tau = t\}} \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t)\, d\mathsf{P} = \int_A \chi \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t)\, d\mathsf{P} =$$
$$= \int_A \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t)\, d\mathsf{P}. \tag{1.29}$$

Поскольку $\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t)$ $\mathcal{F}_\tau$-измеримо, то, в силу произвольности множества $A \in \mathcal{F}_\tau$, из (1.28), (1.29) вытекает, что $\mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathsf{M}(\xi\chi \mid \mathcal{F}_t)$ (Р-п. н.).

3. Примеры. Следующая лемма дает примеры наиболее употребительных марковских моментов.

Лемма 1.10. *Пусть $X = (\xi_t,\ t \in \boldsymbol{T})$ — действительный процесс, непрерывный справа, $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, — неубывающее семейство непрерывных справа σ-алгебр, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ и C — открытое множество в R^1. Тогда моменты*

$$\sigma_C = \inf\{t \geqslant 0:\ \xi_t \in C\}, \quad \tau_C = \inf\{t > 0:\ \xi_t \in C\}$$

(первого и первого после $+0$) достижения множества C являются марковскими.

Доказательство. Пусть $D = R^1 \setminus C$. Тогда в силу непрерывности справа траекторий процесса X и замкнутости множества D

$$\{\omega:\ \sigma_C \geqslant t\} = \{\omega:\ \xi_s \in D,\ s < t\} = \bigcap_{r < t} \{\xi_r \in D\},$$

где r — рациональные числа. Следовательно,

$$\{\sigma_C < t\} = \bigcup_{r<t} \{\xi_r \in C\} \in \mathscr{F}_t.$$

В силу предположения $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ и леммы 1.2 отсюда вытекает, что σ_C — м. м.

Аналогично доказывается марковость момента τ_C и следующая, в дальнейшем часто используемая

Лемма 1.11. *Пусть* $X = (\xi_t)$, $t \in \boldsymbol{T}$ — *действительный непрерывный случайный процесс,* $\mathscr{F}_t^\xi = \sigma\{\omega: \xi_s, s \leqslant t\}$ *и* D — *замкнутое множество в* R^1. *Тогда момент* $\sigma_D = \inf(t \geqslant 0: \xi_t \in D)$ *является марковским относительно системы* $\boldsymbol{F}^\xi = (\mathscr{F}_t^\xi)$, $t \in \boldsymbol{T}$.

§ 4. Процесс броуновского движения

1. Определение. В классе процессов со стационарными независимыми приращениями центральную роль играет процесс броуновского движения. Дадим определение и приведем общеизвестные свойства этого процесса.

Случайный процесс $\beta = (\beta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, называется *процессом броуновского движения* *), если

1) $\beta_0 = 0$ (P = п. н.);

2) β является процессом со стационарными независимыми приращениями;

3) приращения $\beta_t - \beta_s$ имеют гауссовское (нормальное) распределение с

$$\mathsf{M}[\beta_t - \beta_s] = 0, \qquad \mathsf{D}[\beta_t - \beta_s] = \sigma^2 |t - s|;$$

4) для почти всех $\omega \in \Omega$ функции $\beta_t = \beta_t(\omega)$ непрерывны (по t, $0 \leqslant t \leqslant T$).

В случае $\sigma^2 = 1$ процесс β часто называют *стандартным процессом броуновского движения.*

Существование такого процесса на (достаточно «богатом») вероятностном пространстве устанавливается с помощью непосредственного построения. Так, пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность независимых гауссовских, $N(0, 1)$, случайных величин и $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, 0 \leqslant t \leqslant T$, — произвольная полная ортонормальная последовательность в $L_2[0, T]$. Положим $\Phi_j(t) = \int_0^t \varphi_j(s)\,ds$, $j = 1, 2, \ldots$

*) Процесс броуновского движения называют также винеровским. Мы резервируем термин «винеровский» для процессов, определенных несколько иначе (подробнее см. в § 2 гл. 4).

Теорема 1.13. *Для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, ряды*

$$\beta_t = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \Phi_j(t)$$

сходятся **P**-п. н. *и определяют процесс броуновского движения на* $[0, T]$.

Из определения легко выводятся следующие свойства (стандартного) процесса броуновского движения:

$$\mathsf{M}\beta_t = 0, \qquad \operatorname{cov}(\beta_s, \beta_t) = \mathsf{M}\beta_s\beta_t = \min(s, t),$$

$$\mathsf{P}(\beta_t \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2t}\, dy, \qquad \mathsf{M}|\beta_t| = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.$$

Пусть $\mathscr{F}_t^\beta = \sigma(\beta_s, s \leqslant t)$. Нетрудно проверить, что процесс броуновского движения является мартингалом (относительно $(\mathscr{F}_t^\beta)$, $0 \leqslant t \leqslant T$):

$$\mathsf{M}(\beta_t | \mathscr{F}_s^\beta) = \beta_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \geqslant s, \tag{1.30}$$

причем

$$\mathsf{M}[(\beta_t - \beta_s)^2 | \mathscr{F}_s^\beta] = t - s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \geqslant s. \tag{1.31}$$

Как всякий процесс с независимыми приращениями, процесс броуновского движения является марковским:

$$\mathsf{M}[f(\beta_{t+s}) | \mathscr{F}_t^\beta] = \mathsf{M}[f(\beta_{t+s}) | \beta_t] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad s \geqslant 0, \tag{1.32}$$

для любой измеримой функции $f(x)$ с $\sup\limits_x |f(x)| < \infty$.

В частности, для любого борелевского множества $B \in \mathscr{B}$ на R^1

$$\mathsf{P}(\beta_t \in B | \mathscr{F}_s^\beta) = \mathsf{P}(\beta_t \in B | \beta_s) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \geqslant s. \tag{1.33}$$

Важное свойство процесса броуновского движения $\beta = (\beta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, состоит в том, что он является *строго марковским* в следующем смысле: для всякого марковского момента $\tau = \tau(\omega)$ (относительно $(\mathscr{F}_t^\beta)$, $0 \leqslant t \leqslant T$) с $\mathsf{P}(\tau(\omega) \leqslant T) = 1$ выполнено следующее усиление соотношения (1.32):

$$\mathsf{M}[f(\beta_{s+\tau}) | \mathscr{F}_{\tau+}^\beta] = \mathsf{M}[f(\beta_{s+\tau}) | \beta_\tau] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{1.34}$$

где s таково, что $\mathsf{P}(s + \tau \leqslant T) = 1$.

Строго марковскому свойству процесса броуновского движения можно придать следующую форму: *если исходный процесс* $\beta = (\beta_t)$ *определен для всех* $t \geqslant 0$, *то для всякого марковского момента* $\tau = \tau(\omega)$ (*относительно* $(\mathscr{F}_t^\beta)$, $t \geqslant 0$) *с* $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$ *процесс*

$$\tilde{\beta}_t = \beta_{t+\tau} - \beta_\tau$$

будет также процессом броуновского движения, не зависящим от событий σ-алгебры $\mathcal{F}^{\beta}_{\tau+}$.

2. Свойства траекторий процесса броуновского движения $\beta=(\beta_t)$, $t\geqslant 0$. Закон повторного логарифма утверждает, что

$$\mathsf{P}\left\{\limsup_{t\to\infty}\frac{|\beta_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right\}=1. \tag{1.35}$$

Локальный закон повторного логарифма:

$$\mathsf{P}\left\{\limsup_{t\to 0}\frac{|\beta_t|}{\sqrt{2t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1\right\}=1. \tag{1.36}$$

Гёльдеровское условие Леви:

$$\mathsf{P}\left\{\limsup_{0\leqslant t-s=h\downarrow 0}\frac{|\beta_t-\beta_s|}{\sqrt{2h\ln\frac{1}{h}}}=1\right\}=1. \tag{1.37}$$

Из (1.37) следует, что с вероятностью 1 траектории процесса броуновского движения удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем $\alpha<{}^1/_2$ (и не удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha={}^1/_2$; это следует из (1.36)).

Из (1.35) — (1.37) выводятся следующие свойства процесса броуновского движения: *с вероятностью* 1 *его траектории имеют сколь угодно «большие нули», недифференцируемы для всех* $t\geqslant 0$ *и имеют на любом сколь угодно малом интервале бесконечную вариацию.*

Множество $\mathfrak{z}(\omega)=\{t\leqslant 1,\ \beta_t(\omega)=0\}$ корней уравнения $\beta_t(\omega)=0$ обладает следующими свойствами: P ($\mathfrak{z}$ *не ограничено*) $=1$; *с вероятностью* 1 $\mathfrak{z}(\omega)$ *замкнуто и не имеет изолированнных точек*; $\mathsf{P}(\operatorname{mes}\mathfrak{z}(\omega)=0)=1$, *где* $\operatorname{mes}\mathfrak{z}(\omega)$ — *мера Лебега множества* $\mathfrak{z}(\omega)$.

3. Некоторые распределения, связанные с процессом броуновского движения $\beta=(\beta_t)$, $t\geqslant 0$. Обозначим

$$p(s, x, t, y)=\frac{\partial\mathsf{P}_{s,x}(t, y)}{\partial y}$$

плотность вероятности условного распределения $\mathsf{P}_{s,x}(t, y)=\mathsf{P}\{\beta_t\leqslant y\mid\beta_s=x\}$. В случае стандартного процесса ($\sigma^2=1$) броуновского движения плотность

$$p(s, x, t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-(y-x)^2/2(t-s)} \tag{1.38}$$

удовлетворяет уравнениям (проверяется непосредственно)

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x^2}, \quad s < t, \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial p(s, x, t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial y^2}, \quad t > s. \tag{1.40}$$

Уравнения (1.39) и (1.40) называются соответственно *обратным* и *прямым уравнениями Колмогорова*. (Прямое уравнение (1.40) называют также уравнением Фоккера — Планка.)

Из строго марковского свойства процесса β выводится соотношение (*принцип отражения*)

$$\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\beta_s \geqslant x\right) = 2\mathsf{P}(\beta_t \geqslant x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty e^{-y^2/2t}\,dy. \tag{1.41}$$

Обозначим $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : \beta_t = a\}$ момент первого достижения процессом β уровня $a \geqslant 0$. Этот момент является марковским моментом (лемма 1.11). Поскольку

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant t) = \mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant t}\beta_s \geqslant a\right),$$

то в силу (1.41)

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty e^{-y^2/2t}\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2}\,dy, \tag{1.42}$$

отсюда находим, что плотность $p_\tau(t) = \frac{\partial \mathsf{P}(\tau \leqslant t)}{\partial t}$ существует и задается формулой

$$p_\tau(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}}\, e^{-a^2/2t}. \tag{1.43}$$

Из (1.43) вытекает, что $p_\tau(t) \sim \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-3/2}$, при $t \to \infty$ и, следовательно, если $a > 0$, то $\mathsf{M}\tau = \infty$.

Пусть теперь

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : \beta_t = a - bt\}, \quad a > 0, \quad 0 \leqslant b < \infty,$$

— момент первого достижения процессом броуновского движения прямой $a - bt$. Известно, что плотность $p_\tau(t) = \frac{\partial \mathsf{P}(\tau \leqslant t)}{\partial t}$ в этом случае определяется формулой

$$p_\tau(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}}\, e^{-(bt-a)^2/2t}. \tag{1.44}$$

4. Преобразования процесса броуновского движения $\beta=(\beta_t)$, $t\geqslant 0$. Непосредственно проверяется, что

$$y_t(\omega)=\begin{cases} 0, & t=0,\\ t\beta_{1/t}(\omega), & t>0,\end{cases}$$

и

$$z_t(\omega)=c\beta_{t/c^2}(\omega), \quad c>0,$$

являются также процессами броуновского движения.

§ 5. Некоторые понятия математической статистики

1. В математической статистике первичным является понятие *выборочного пространства* $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$, состоящего из множества выборок $\mathfrak{X}$ и σ-алгебры его подмножеств $\mathscr{A}$. Обычно $\mathfrak{X}$ — это пространство последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i\in R^k$, или же пространство функций $x=(x_t)$, $t\geqslant 0$. В рассматриваемых далее задачах статистики процессов диффузионного типа выборочным пространством является пространство непрерывных функций.

Пусть $(\mathfrak{U}, \mathscr{B})$ — некоторое другое измеримое пространство. Всякое измеримое (точнее, $\mathscr{A}/\mathscr{B}$-измеримое) отображение $y=y(x)$ пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{U}$ называют *статистикой*. Если выборку $x=(x_1, x_2, \ldots)$ представлять себе как результаты наблюдений (например, результаты независимых наблюдений над некоторой случайной величиной $\xi=\xi(\omega)$), то $y=y(x)$ — это функция от результатов наблюдений.

Примеры статистик:

$$m_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ — выборочное среднее},$$

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_n)^2 \text{ — выборочная дисперсия}.$$

2. Одним из важнейших разделов математической статистики является теория оценивания. Приведем ряд ее понятий, используемых в этой книге.

Будем предполагать, что на выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ задано семейство $\mathscr{P}=\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ вероятностных мер, зависящих от параметра θ, принадлежащего некоторому параметрическому множеству Θ.

Статистика (оценка) $y=y(x)$ называется *несмещенной оценкой параметра* $\theta\in\Theta$, если $\mathsf{M}_\theta y(x)=\theta$ для всех $\theta\in\Theta$ (M_θ обозначает усреднение по мере P_θ).

Статистика $y = y(x)$ называется *достаточной для* θ (*или семейства* $\mathscr{P}$), если для каждого $A \in \mathscr{A}$ можно выбрать вариант условной вероятности $\mathsf{P}_\theta(A \mid y(x))$, не зависящий от θ.

Следующая факторизационная теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторая статистика $y = y(x)$ была достаточной.

Теорема 1.14. *Пусть семейство* $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ *доминируется некоторой* σ*-конечной мерой* λ (*т. е.* $\mathsf{P}_\theta \ll \lambda$, $\theta \in \Theta$). *Статистика* $y = y(x)$ *будет достаточной в том и только том случае, если существует* $\mathscr{B}$*-измеримая* (*при каждом* $\theta \in \Theta$) *функция* $g(y, \theta)$ *такая, что*

$$d\mathsf{P}_\theta(x) = g(y(x), \theta)\, d\lambda(x).$$

Последовательность статистик $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *состоятельной оценкой* параметра $\theta \in \Theta$, если для каждого $\theta \in \Theta$ $y_n(x) \to \theta$, $n \to \infty$, по P_θ-вероятности, т. е.

$$\mathsf{P}_\theta\{| y_n(x) - \theta | > \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Последовательность статистик $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сильно состоятельной оценкой* параметра $\theta \in \Theta$, если $y_n(x) \to \theta$ с P_θ-вероятностью единица для всех $\theta \in \Theta$.

Пусть семейство $\mathscr{P}$ доминируется некоторой σ-конечной мерой λ. Функция

$$L_x(\theta) = \frac{d\mathsf{P}_\theta(x)}{d\lambda(x)},$$

рассматриваемая (при фиксированном x) как функция от θ, называется *функцией правдоподобия*. Статистика $\hat{y} = \hat{y}(x)$, обращающая функцию правдоподобия $L_x(\theta)$ в максимум, называется *оценкой максимального правдоподобия*.

Для сравнения различных оценок $y = y(x)$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ вводят (неотрицательные) *функции потерь* $W(\theta, y)$ и *средние потери*

$$R(\theta, y) = \mathsf{M}_\theta W(\theta, y(x)). \tag{1.45}$$

В тех случаях, когда $\theta \in R^1$, $y \in R^1$, наиболее употребительной функцией потерь является функция

$$W(\theta, y) = | \theta - y |^2. \tag{1.46}$$

При исследовании качества оценок параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in R^k$ важную роль играет *информационная матрица Фишера* $I(\theta) = \| I_{ij}(\theta) \|$, где

$$I_{ij}(\theta = \mathsf{M}_\theta\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln \frac{d\mathsf{P}_\theta}{d\lambda}(x) \right\}\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} \ln \frac{d\mathsf{P}_\theta}{d\lambda}{}_j(x) \right\}. \tag{1.47}$$

В одномерном случае ($\theta \in R^1$) величина

$$I(\theta) = \mathsf{M}_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \frac{d\mathsf{P}_\theta}{d\lambda}(x) \right\}^2 \tag{1.48}$$

называется *информационным количеством Фишера.*

Для несмещенных оценок $y = y(x)$ параметра $\theta \in \Theta \subseteq R^1$ справедливо (при некоторых условиях регулярности; см. [128], [138]) *неравенство Рао — Крамера*

$$\mathsf{M}_\theta [\theta - y(x)]^2 \geqslant \frac{1}{I(\theta)}, \qquad \theta \in \Theta. \tag{1.49}$$

В многомерном случае ($\theta \in \Theta \subseteq R^k$, $y \in R^k$) неравенство (1.49) заменяется *матричным неравенством Рао — Крамера* *)

$$\mathsf{M}_\theta [\theta - y(x)] [\theta - y(x)]^* \geqslant I^{-1}(\theta), \qquad \theta \in \Theta. \tag{1.50}$$

(Подробнее см. [128], [138], а также § 8 гл. 7.)

Несмещенная оценка $y(x) \in R^k$ параметра $\theta \in R^k$ называется *эффективной*, если для всех значений $\theta \in \Theta$

$$\mathsf{M}_\theta [\theta - y(x)] [\theta - y(x)]^* = I^{-1}(\theta),$$

т. е. если в неравенстве Рао — Крамера на самом деле достигается равенство.

3. Предположим, что сам параметр $\theta \in \Theta$ является случайной величиной с распределением $\pi = \pi(d\theta)$. Тогда наряду со средними потерями $R(\theta, y)$ можно рассмотреть *полные средние потери*

$$R(\pi, y) = \int_\Theta R(\theta, y) \pi(d\theta).$$

Статистика $y^* = y^*(x)$ называется *байесовской относительно априорного распределения* π, если $R(\pi, y^*) \leqslant R(\pi, y)$ для любой другой статистики $y = y(x)$.

Статистика $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ называется *минимаксной*, если

$$\max_\theta R(\theta, \tilde{y}) \leqslant \inf_y \max_\theta R(\theta, y).$$

*) Для симметрических неотрицательно определенных матриц A и B неравенство $A \geqslant B$ означает, что матрица $A - B$ является неотрицательно определенной.

ГЛАВА 2

МАРТИНГАЛЫ И ПОЛУМАРТИНГАЛЫ. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ

§ 1. Полумартингалы на конечном временном интервале

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_N \subseteq \mathcal{F}$ — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$.

Определение 1. Последовательность $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, называется соответственно *супермартингалом* или *субмартингалом*, если $\mathsf{M}|x_n| < \infty$, $n = 1, \ldots, N$, и

$$\mathsf{M}(x_n | \mathcal{F}_m) \leqslant x_m \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad n \geqslant m, \tag{2.1}$$

или

$$\mathsf{M}(x_n | \mathcal{F}_m) \geqslant x_m \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad n \geqslant m. \tag{2.2}$$

Супермартингалы и субмартингалы называют также *полумартингалами*.

Если $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$ — супермартингал, то $Y = (-x_n, \mathcal{F}_n)$ является субмартингалом. Следовательно, для изучения свойств полумартингалов достаточно исследовать лишь супермартингалы (или субмартингалы — в зависимости от удобства).

Очевидно, что последовательность $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, одновременно являющаяся супермартингалом и субмартингалом, образует *мартингал*:

$$\mathsf{M}(x_n | \mathcal{F}_m) = x_m \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad n \geqslant m. \tag{2.3}$$

Для супермартингала математические ожидания $\mathsf{M}x_n$ не возрастают: $\mathsf{M}x_n \leqslant \mathsf{M}x_m$, $n \geqslant m$. Для мартингала математическое ожидание есть константа: $\mathsf{M}x_n = \mathsf{M}x_1$, $n \leqslant N$.

2. Пример 1. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина с $\mathsf{M}|\xi| < \infty$ и $x_n = \mathsf{M}(\xi | \mathcal{F}_n)$. Последовательность $(x_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал.

Пример 2. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — последовательность интегрируемых независимых случайных величин с $\mathsf{M}\eta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega\colon \eta_1, \ldots, \eta_n\}$. Тогда $S = (s_n, \mathcal{F}_n)$ образует мартингал.

Пример 3. Если $X=(x_n, \mathscr{F}_n)$ и $Y=(y_n, \mathscr{F}_n)$ — два супермартингала, то последовательность $z=(x_n \wedge y_n, \mathscr{F}_n)$ образует супермартингал.

Пример 4. Если $X=(x_n, \mathscr{F}_n)$ — мартингал и $f(x)$ — функция, выпуклая книзу, такая, что $\mathsf{M}|f(x)|<\infty$, то последовательность $F=(f(x_n), \mathscr{F}_n)$ образует субмартингал. Это следует непосредственно из неравенства Иенсена. В частности, последовательности $F=(|x_n|^\alpha, \mathscr{F}_n)$, $\alpha \geqslant 1$, $F=(|x_n|\log^+|x_n|, \mathscr{F}_n)$, где $\log^+ a=\max(0, \log a)$, образуют субмартингалы.

3. Перейдем к формулировкам и доказательствам основных фактов о полумартингалах.

Теорема 2.1 *Пусть $X=(x_n, \mathscr{F}_n)$, $n=1, \ldots, N$, — супермартингал. Тогда для любых двух марковских (относительно $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_n)$, $n=1, \ldots, N$) моментов τ и σ таких, что $\mathsf{P}(\tau \leqslant N)=\mathsf{P}(\sigma \leqslant N)=1$,*

$$x_\sigma \geqslant \mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma) \qquad (\{\tau \geqslant \sigma\},\ \mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{2.4}$$

или, что эквивалентно,

$$x_{\tau \wedge \sigma} \geqslant \mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathsf{M}|x_\tau|<\infty$. Действительно,

$$\mathsf{M}|x_\tau|=\sum_{n=1}^{N}\int_{\{\tau=n\}}|x_\tau|\,d\mathsf{P}=\sum_{n=1}^{N}\int_{\{\tau=n\}}|x_n|\,d\mathsf{P}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\mathsf{M}|x_n|<\infty.$$

Рассмотрим множество $\{\sigma=n\}$ и покажем, что на множестве $\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant\sigma\}=\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n\}$ выполнено неравенство (2.4). На этом множестве $x_\sigma=x_n$, и согласно лемме 1.9

$$\mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=\mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_n) \qquad (\{\sigma=n\},\ \mathsf{P}=\text{п. н.}).$$

Так что достаточно установить, что на $\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n\}$ P-п. н.

$$x_n \geqslant \mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_n).$$

Пусть $A \in \mathscr{F}_n$. Тогда

$$\int_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n\}}(x_n-x_\tau)\,d\mathsf{P}=\int_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau=n\}}(x_n-x_\tau)\,d\mathsf{P}+$$

$$+\int_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}}(x_n-x_\tau)\,d\mathsf{P}=\int_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}}(x_n-x_\tau)\,d\mathsf{P}\geqslant$$

$$\geqslant\int_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n+1\}}(x_{n+1}-x_\tau)\,d\mathsf{P}, \tag{2.6}$$

где последнее неравенство выполнено в силу того, что $x_n \geqslant \mathsf{M}(x_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ (P-п. н.) и множество $A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau>n\}\in\mathscr{F}_n$.

Продолжая неравенства (2.6), находим

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n\}} (x_n - x_\tau)\,d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau\geqslant n+1\}} (x_{n+1} - x_\tau)\,d\mathsf{P} \geqslant \ldots$$

$$\ldots \geqslant \int\limits_{A\cap\{\sigma=n\}\cap\{\tau=N\}} (x_N - x_\tau)\,d\mathsf{P} = 0. \qquad (2.7)$$

Поскольку $\Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N} \{\sigma = n\}$ есть множество меры нуль, то из (2.7) следует (2.4).

Следствие 1. *Пусть* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *супермартингал. Если* $\mathsf{P}(\tau \geqslant \sigma) = 1$, *то* $\mathsf{M}x_1 \geqslant \mathsf{M}x_\sigma \geqslant \mathsf{M}x_\tau \geqslant \mathsf{M}x_N$.

Следствие 2. *Пусть* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *субмартингал. Если* $\mathsf{P}(\tau \geqslant \sigma) = 1$, *то* $\mathsf{M}x_1 \leqslant \mathsf{M}x_\sigma \leqslant \mathsf{M}x_\tau \leqslant \mathsf{M}x_N$.

Следствие 3. *Пусть* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *супермартингал. Тогда, если* τ — *марковский момент и* $\mathsf{P}(\tau \leqslant N) = 1$, *то* $\mathsf{M}|x_\tau| \leqslant \mathsf{M}x_1 + 2\mathsf{M}x_N^- \leqslant 3\sup\limits_{n\leqslant N} \mathsf{M}|x_n|$.

В самом деле, $|x_\tau| = x_\tau + 2x_\tau^-$ и, по следствию 1, $\mathsf{M}|x_\tau| = \mathsf{M}x_\tau + 2\mathsf{M}x_\tau^- \leqslant \mathsf{M}x_1 + 2\mathsf{M}x_\tau^-$. Поскольку $(x_n \wedge 0, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — супермартингал (пример 3), то последовательность $(x_n^-, \mathscr{F}_n)$, где $x_n^- = -x_n \wedge 0$, образует субмартингал и, по следствию 2, $\mathsf{M}x_\tau^- \leqslant \mathsf{M}x_N^-$. Значит,

$$\mathsf{M}|x_\tau| \leqslant \mathsf{M}x_1 + 2\mathsf{M}x_\tau^- \leqslant \mathsf{M}x_1 + 2\mathsf{M}x_N^- \leqslant \mathsf{M}x_1 + 2\mathsf{M}|x_N| \leqslant$$
$$\leqslant 3\sup_{n\leqslant N} \mathsf{M}|x_n|.$$

Просматривая доказательство теоремы 2.1, замечаем, что если $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, является мартингалом, то в (2.6), (2.7) неравенства превращаются в равенства. Следовательно, справедлива

Теорема 2.2. *Пусть* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *мартингал. Тогда для любых двух марковских моментов* τ *и* σ *таких, что* $\mathsf{P}(\tau \leqslant N) = \mathsf{P}(\sigma \leqslant N) = 1$,

$$x_\sigma = \mathsf{M}(x_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma) \qquad (\{\tau \geqslant \sigma\},\ \mathsf{P}\text{-п. н.}) \qquad (2.8)$$

или, что эквивалентно, $x_{\sigma\wedge\tau} = \mathsf{M}(x_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma)$ (P-п. н.).

Следствие 1. *Если* $\mathsf{P}(\tau \leqslant \sigma) = 1$, *то* $\mathsf{M}x_1 = \mathsf{M}x_\sigma = \mathsf{M}x_\tau = \mathsf{M}x_N$.

4. Теорема 2.3. *Пусть* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *субмартингал. Тогда для всякого* $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}\{\max_{n\leqslant N} x_n \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\{\max\limits_{n\leqslant N} x_n \geqslant \lambda\}} x_N\,d\mathsf{P} \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathsf{M}x_N^+, \qquad (2.9)$$

$$\mathsf{P}\{\min_{n\leqslant N} x_n \leqslant -\lambda\} \leqslant -\mathsf{M}x_1 + \int\limits_{\{\min\limits_{n\leqslant N} x_n \leqslant -\lambda\}} x_N\,d\mathsf{P}. \qquad (2.10)$$

Доказательство. Введем марковский момент $\tau = \min\{n \leqslant N: x_n \geqslant \lambda\}$, полагая $\tau = N$, если $\max\limits_{n \leqslant N} x_n < \lambda$. Тогда по следствию 2 теоремы 2.1

$$\mathsf{M}x_N \geqslant \mathsf{M}x_\tau = \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n \geqslant \lambda\}} x_\tau \, d\mathsf{P} + \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n < \lambda\}} x_\tau \, d\mathsf{P} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n \geqslant \lambda\}} d\mathsf{P} + \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n < \lambda\}} x_N \, d\mathsf{P}.$$

Отсюда получаем

$$\lambda \mathsf{P}\{\max_{n \leqslant N} x_n \geqslant \lambda\} \leqslant \mathsf{M}x_N - \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n < \lambda\}} x_N \, d\mathsf{P} =$$

$$= \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n \geqslant \lambda\}} x_N \, d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_{\{\max\limits_{n \leqslant N} x_n \geqslant \lambda\}} x_N^+ \, d\mathsf{P} \leqslant \mathsf{M}x_N^+,$$

что и доказывает (2.9).

Аналогично доказывается и (2.10). Нужно лишь положить $\tau = \min\{n \leqslant N: x_n \leqslant -\lambda\}$ с $\tau = N$, если $\min\limits_{n \leqslant N} x_n > -\lambda$.

Следствие (неравенство Колмогорова). *Пусть* $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *квадратично интегрируемый мартингал* (*т. е. мартингал с* $\mathsf{M}x_n^2 < \infty$, $n = 1, \ldots, N$). *Тогда последовательность* $(x_n^2, \mathcal{F}_n)$ *будет субмартингалом* (пример 4) *и в силу* (2.9) *выполнено неравенство*

$$\mathsf{P}\{\max_{n \leqslant N} |x_n| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\mathsf{M}x_N^2}{\lambda^2}. \tag{2.11}$$

Теорема 2.4. *Пусть* $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, \ldots, N$, — *неотрицательный субмартингал. Пусть* $\mathsf{M}x_N^p < \infty$ $(1 < p < \infty)$. *Тогда* $\mathsf{M}[\max\limits_{n \leqslant N} x_n]^p < \infty$ *и*

$$\mathsf{M}[\max_{n \leqslant N} x_n]^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{M}x_N^p. \tag{2.12}$$

Доказательство. Обозначим $y = \max\limits_{n \leqslant N} x_n$ и $F(\lambda) = \mathsf{P}\{y \geqslant \lambda\}$. Тогда в силу (2.9)

$$\lambda F(\lambda) \leqslant \int\limits_{(y \geqslant \lambda)} x_N \, d\mathsf{P}. \tag{2.13}$$

Для вывода неравенства (2.12) оценим сначала $\mathsf{M}(y \wedge L)^p$, где $L \geqslant 0$.

Используя (2.13) находим, что

$$\mathsf{M}(y\wedge L)^p=-\int_0^L \lambda^p F(d\lambda)=\int_0^L F(\lambda)\,d(\lambda^p)-[\lambda^p F(\lambda)]_0^L\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^L F(\lambda)\,d(\lambda^p)\leqslant\int_0^L\frac{1}{\lambda}\left(\int_{\{y\geqslant\lambda\}}x_N\,d\mathsf{P}\right)d(\lambda^p)=$$

$$=\int_\Omega x_N\left[\int_0^{y\wedge L}\frac{d(\lambda^p)}{\lambda}\right]d\mathsf{P}=\frac{p}{p-1}\mathsf{M}\left[x_N(y\wedge L)^{p-1}\right].$$

Согласно неравенству Гёльдера $\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$

$$\mathsf{M}\left[x_N(y\wedge L)^{p-1}\right]\leqslant\left[\mathsf{M}x_N^p\right]^{1/p}\mathsf{M}\left[(y\wedge L)^{(p-1)q}\right]^{1/q}=$$

$$=\left[\mathsf{M}x_N^p\right]^{1/p}\left[\mathsf{M}(y\wedge L)^p\right]^{1/q}.$$

Итак,

$$\mathsf{M}(y\wedge L)^p\leqslant q\left[\mathsf{M}(y\wedge L)^p\right]^{1/q}\left[\mathsf{M}x_N^p\right]^{1/p}$$

и, поскольку $\mathsf{M}(y\wedge L)^p\leqslant L^p<\infty$,

$$\mathsf{M}(y\wedge L)^p\leqslant q^p\mathsf{M}x_N^p. \tag{2.14}$$

По теореме 1.1 $\mathsf{M}y^p=\lim\limits_{L\uparrow\infty}\mathsf{M}(y\wedge L)^p$. Поэтому из (2.14) следует требуемая оценка:

$$\mathsf{M}y^p\leqslant q^p\mathsf{M}x_N^p<\infty.$$

Следствие. *Пусть $X=(x_n,\mathscr{F}_n)$, $n=1,\ldots,N$, — квадратично интегрируемый мартингал. Тогда* $\mathsf{M}\left[\max\limits_{n\leqslant N}x_n^2\right]\leqslant 4\mathsf{M}x_N^2$.

5. При исследовании асимптотических свойств полумартингалов $X=(x_n,\mathscr{F}_n)$, $n=1,2,\ldots$, важную роль играют неравенства Дуба о числе пересечений интервала (a,b) (см. далее — теорема 2.5).

Для формулировки этих неравенств введем необходимые определения.

Пусть $X=(x_n,\mathscr{F}_n)$, $n=1,\ldots,N$, — субмартингал и (a,b) — непустой интервал. Введем понятие «числа пересечений снизу вверх интервала (a, b) субмартингалом X». С этой целью обозначим:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 0,\\
\tau_1 &= \min\{0 < n \leqslant N:\ x_n \leqslant a\},\\
\tau_2 &= \min\{\tau_1 < n \leqslant N:\ x_n \geqslant b\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\tau_{2m-1} &= \min\{\tau_{2m-2} < n \leqslant N:\ x_n \leqslant a\},\\
\tau_{2m} &= \min\{\tau_{2m-1} < n \leqslant N:\ x_n \geqslant b\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

При этом, если $\inf\limits_{n \leqslant N} x_n > a$, то τ_1 полагается равным N, а моменты $\tau_2, \tau_3, \dots$ не определяются. Соответствующие замечания относятся и к последующим моментам.

Определение 2. *Числом* $\beta = \beta(a, b)$ *пересечений снизу вверх интервала* (a, b) называется то максимальное m, для которого момент τ_{2m} определен.

Теорема 2.5. *Если* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n = 1, \dots, N$, — *субмартингал, то*

$$\mathsf{M}\beta(a, b) \leqslant \frac{\mathsf{M}[x_N - a]^+}{b - a} \leqslant \frac{\mathsf{M}x_N^+ + |a|}{b - a}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Поскольку число пересечений интервала (a, b) субмартингалом $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$, совпадает с числом пересечений интервала $(0, b - a)$ неотрицательным субмартингалом $X^+ = ((x_n - a)^+, \mathscr{F}_n)$, $n \leqslant N$, то можно считать, что исходный субмартингал неотрицательный и $a = 0$.

Итак, надо показать, что для $b > 0$

$$\mathsf{M}\beta(0, b) = \frac{\mathsf{M}x_N}{b}. \tag{2.16}$$

Положим $x_0 \equiv 0$, и пусть для $i = 1, \dots$

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_m < i \leqslant \tau_{m+1} \text{ для некоторого нечетного } m,\\ 0, & \text{если } \tau_m < i \leqslant \tau_{m+1} \text{ для некоторого четного } m. \end{cases}$$

Тогда P-п. н.

$$b\beta(0, b) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \chi_i [x_i - x_{i-1}]$$

и

$$\{\chi_i = 1\} = \bigcup_{m \text{ нечетно}} [\{\tau_m < i\} \setminus \{\tau_{m+1} < i\}].$$

Поэтому

$$b\mathsf{M}\beta(0,\ b)\leqslant \mathsf{M}\sum_{i=1}^{N}\chi_i[x_i-x_{i-1}]=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\{\chi_i=1\}}(x_i-x_{i-1})\,d\mathsf{P}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\{\chi_i=1\}}\mathsf{M}(x_i-x_{i-1}\,|\mathscr{F}_{i-1})\,d\mathsf{P}=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\{\chi_i=1\}}[\mathsf{M}(x_i\,|\mathscr{F}_{i-1})-x_{i-1}]\,d\mathsf{P}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}[\mathsf{M}(x_i\,|\mathscr{F}_{i-1})-x_{i-1}]\,d\mathsf{P}=\mathsf{M}x_N.$$

Теорема доказана.

Замечание. По аналогии с $\beta(a,\ b)$ можно определить и число пересечений $\alpha(a,\ b)$ интервала $(a,\ b)$ сверху вниз. Для $\mathsf{M}\alpha(a,\ b)$ тем же методом, что и при выводе (2.15), можно получить следующую оценку:

$$\mathsf{M}\alpha(a,\ b)\leqslant\frac{\mathsf{M}(x_N-b)^+}{b-a}\leqslant\frac{\mathsf{M}\left[x_N^+ +|b|\right]}{b-a}. \tag{2.17}$$

§ 2. Полумартингалы на бесконечном временно́м интервале. Теорема сходимости

В этом параграфе будет предполагаться, что полумартингалы $X=(x_n,\ \mathscr{F}_n)$ определены для $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 2.6. *Пусть* $X=(x_n,\ \mathscr{F}_n)$, $n<\infty$, — *субмартингал такой, что*

$$\sup_n \mathsf{M}x_n^+<\infty. \tag{2.18}$$

Тогда с вероятностью 1 *существует* $\lim\limits_n x_n\,(=x_\infty)$ *и* $\mathsf{M}x_\infty^+<\infty$.

Доказательство. Пусть $x^*=\lim\limits_n\sup x_n$, $x_*=\lim\limits_n\inf x_n$. Предположим, что

$$\mathsf{P}\{x^*>x_*\}>0. \tag{2.19}$$

Тогда, поскольку $\{x^*>x_*\}=\bigcup\limits_{a<b}\{x^*>b>a>x_*\}$ ($a,\ b$ — рациональные числа), то найдутся такие a и b, что

$$\mathsf{P}\{x^*>b>a>x_*\}>0. \tag{2.20}$$

Пусть $\beta_N(a,\ b)$ — число пересечений интервала $(a,\ b)$ субмартингалом $(x_n,\ \mathscr{F}_n)$, $n\leqslant N$, и $\beta_\infty(a,\ b)=\lim\limits_N\beta_N(a,\ b)$. Тогда согласно (2.15)

$$\mathsf{M}\beta_N(a,\ b)\leqslant\frac{\mathsf{M}x_N^+ +|a|}{b-a}$$

и в силу (2.18)

$$\mathsf{M}\beta_\infty(a, b) = \lim_N \mathsf{M}\beta_N(a, b) \leqslant \frac{\sup\limits_N \mathsf{M}x_N^+ + |a|}{b-a} < \infty.$$

Это, однако, противоречит предположению (2.20), из которого вытекает, что с положительной вероятностью $\beta_\infty(a, b) = \infty$.

Итак, $\mathsf{P}(x^* = x_*) = 1$, и, следовательно, $\lim\limits_n x_n$ существует с вероятностью 1. Этот предел будем в дальнейшем обозначать x_∞. Заметим, что в силу леммы Фату $\mathsf{M}x_\infty^+ \leqslant \sup\limits_n \mathsf{M}x_n^+$.

Следствие 1. *Если $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — отрицательный субмартингал (или положительный супермартингал), то с вероятностью* 1 *существует* $\lim\limits_n x_n$.

Следствие 2. *Пусть $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — отрицательный субмартингал (или положительный супермартингал). Тогда последовательность $\overline{X} = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, с $x_\infty = \lim\limits_n x_n$ и $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$ образует отрицательный субмартингал (положительный супермартингал).*

Действительно, если $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — отрицательный субмартингал, то по лемме Фату

$$\mathsf{M}x_\infty = \mathsf{M}\lim_n x_n \geqslant \overline{\lim_n}\, \mathsf{M}x_n \geqslant \mathsf{M}x_1 > -\infty$$

и

$$\mathsf{M}(x_\infty | \mathcal{F}_m) = \mathsf{M}(\lim_n x_n | \mathcal{F}_m) \geqslant \overline{\lim_n}\, \mathsf{M}(x_n | \mathcal{F}_m) \geqslant x_m \qquad (\text{P-п. н.}).$$

Следствие 3. *Если $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — мартингал, то* (2.18) *эквивалентно условию*

$$\sup_n \mathsf{M}|x_n| < \infty. \tag{2.21}$$

В самом деле, $\mathsf{M}|x_n| = \mathsf{M}x_n^+ + \mathsf{M}x_n^- = 2\mathsf{M}x_n^+ - \mathsf{M}x_n = 2\mathsf{M}x_n^+ - \mathsf{M}x_1$. Поэтому $\sup\limits_n \mathsf{M}|x_n| = 2\sup\limits_n \mathsf{M}x_n^+ - \mathsf{M}x_1$.

§ 3. Регулярные мартингалы. Теорема Леви

1. Обобщение теорем 2.1 и 2.2 на случай счетного времени требует некоторых дополнительных предложений о структуре мартингалов и полумартингалов. Важным для дальнейшего является

Определение 3. Мартингал $X = (x_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 1$, называется *регулярным*, если существует такая интегрируемая случайная величина $\eta = \eta(\omega)$, что

$$x_n = \mathsf{M}(\eta | \mathcal{F}_n) \quad (\text{P-п. н.}), \quad n \geqslant 1.$$

Заметим, что в случае конечного времени, $1 \leqslant n \leqslant N$, всякий мартингал является регулярным, поскольку $x_n = \mathsf{M}(x_N \mid \mathscr{F}_n)$, $1 \leqslant n \leqslant N$.

Теорема 2.7. *Следующие условия на мартингал* $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, *эквивалентны*:

(A) *регулярность, т. е. возможность представления в виде* $x_n = \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_n)$ (P-п. н.) *с* $\mathsf{M}|\eta| < \infty$;

(B) *равномерная интегрируемость величин* $x_1, x_2, \ldots$;

(C) *сходимость последовательности* $x_1, x_2, \ldots$ *в* L^1:

$$\lim_n \mathsf{M}|x_\infty - x_n| = 0;$$

(D) $\sup\limits_n \mathsf{M}|x_n| < \infty$ *и величина* $x_\infty = \lim\limits_n x_n$ *такова, что* $x_n = \mathsf{M}(x_\infty \mid \mathscr{F}_n)$ (P-*п. н.*), *т. е. последовательность* $\overline{X} = (x, \mathscr{F}_n)$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, *образует мартингал.*

Доказательство. (A)$\Rightarrow$(B). Надо показать, что величины $x_n = \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, равномерно интегрируемы. Имеем

$$|x_n| \leqslant \mathsf{M}(|\eta| \mid \mathscr{F}_n), \quad \mathsf{M}|x_n| \leqslant \mathsf{M}|\eta|, \quad \sup_n \mathsf{M}|x_n| \leqslant \mathsf{M}|\eta| < \infty.$$

Отсюда для $c > 0$, $b > 0$ получаем

$$\int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\}} |x_n|\,d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\}} |\eta|\,d\mathsf{P} =$$

$$= \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\} \cap \{|\eta| \geqslant b\}} |\eta|\,d\mathsf{P} + \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\} \cap \{|\eta| < b\}} |\eta|\,d\mathsf{P} \leqslant$$

$$\leqslant b\mathsf{P}\{|x_n| \geqslant c\} + \int\limits_{\{|\eta| \geqslant b\}} |\eta|\,d\mathsf{P} \leqslant \frac{b}{c}\mathsf{M}|x_n| + \int\limits_{\{|\eta| \geqslant b\}} |\eta|\,d\mathsf{P}.$$

Следовательно,

$$\sup_n \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\}} |x_n|\,d\mathsf{P} \leqslant \frac{b}{c}\mathsf{M}|\eta| + \int\limits_{\{|\eta| \geqslant b\}} |\eta|\,d\mathsf{P},$$

$$\lim_{c \uparrow \infty} \sup_n \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\}} |x_n|\,d\mathsf{P} \leqslant \int\limits_{\{|\eta| \geqslant b\}} |\eta|\,d\mathsf{P}.$$

Но $b > 0$ произвольно, поэтому

$$\lim_{c \uparrow \infty} \sup_n \int\limits_{\{|x_n| \geqslant c\}} |x_n|\,d\mathsf{P} = 0,$$

что и доказывает утверждение (B).

(B)$\Rightarrow$(C). Поскольку $x_n = \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_n)$ равномерно интегрируемы, то, во-первых, $\sup\limits_n \mathsf{M}|x_n| < \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_n x_n (= x_\infty)$ существует (следствие 3 теоремы 2.6) и, во-вторых, согласно следствию теоремы 1.3 $\mathsf{M}|x_n - x_\infty| \to 0$, $n \to \infty$, т. е. последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится (к x_∞) в L^1.

(C)$\Rightarrow$(D). Если последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots$ сходится в L^1 (скажем, к случайной величине y), то $\sup\limits_n \mathsf{M}|x_n| < \infty$. Тогда на основании следствия 3 теоремы 2.6 существует $\lim\limits_n x_n (= x_\infty)$, и, значит, $\mathsf{M}|x_n - y| \to 0$, $x_n \to x_\infty$ (P-п. н.), $n \to \infty$. Поэтому $y = x_\infty$ (P-п. н.). Следовательно, $x_n \to x_\infty$, т. е. $\mathsf{M}|x_n - x_\infty| \to 0$, $n \to \infty$, и $\mathsf{M}(x_n|\mathscr{F}_m) \xrightarrow{L^1} \mathsf{M}(x_\infty|\mathscr{F}_m)$, если $m \leqslant n \to \infty$. Но $\mathsf{M}(x_n|\mathscr{F}_m) = x_m$ (P-п. н.), и, значит, $x_m = (x_\infty|\mathscr{F}_m)$ (P-п. н.).

(D)$\Rightarrow$(A). Обозначая $\eta = x_\infty$, сразу получаем утверждение (A).

Из доказанной теоремы вытекает, что за определение регулярного мартингала можно принять также любое из свойств (B), (C), (D).

2. В качестве следствия теорем 2.6 и 2.7 выведем следующий полезный результат (П. Леви), упоминавшийся в § 1 гл. 1.

Теорема 2.8. *Пусть $\eta = \eta(\omega)$ — интегрируемая* ($\mathsf{M}|\eta| < \infty$) *случайная величина и $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \ldots$ — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$. Тогда при $n \to \infty$* P-п. н.

$$\mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n) \to \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_\infty), \tag{2.22}$$

где $\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n\right)$.

Доказательство. Обозначим $x_n = \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n)$. Последовательность $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, образует регулярный мартингал. Согласно теореме 2.6 существует $\lim x_n (= x_\infty)$, и по лемме Фату $\mathsf{M}|x_\infty| \leqslant \mathsf{M}|\eta|$. Далее, если $A \in \mathscr{F}_n$ и $m \geqslant n$, то

$$\int_A x_m \, d\mathsf{P} = \int_A x_n \, d\mathsf{P} = \int_A \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n) \, d\mathsf{P} = \int_A \eta \, d\mathsf{P}.$$

По теореме 2.7 последовательность $\{x_m, m \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема. Поэтому $\mathsf{M}\chi_A|x_m - x_\infty| \to 0$, $m \to \infty$, и, значит,

$$\int_A x_\infty \, d\mathsf{P} = \int_A \eta \, d\mathsf{P}. \tag{2.23}$$

Равенство (2.23) выполнено для любого $A \in \mathscr{F}_n$ и, следовательно, для любого множества A из алгебры $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$. Левая и правые части в (2.23) представляют σ-аддитивные меры (быть может, принимающие и отрицательные значения, но конечные), совпадающие на алгебре $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$. Поэтому в силу единственности продолжения σ-аддитивной конечной меры с алгебры $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ на наименьшую σ-алгебру $\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$, ее содержащую, равенство (2.23) остается верным и для $A\in\mathscr{F}_\infty=$ $=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$.

Итак,

$$\int_A x_\infty\,d\mathsf{P}=\int_A \eta\,d\mathsf{P}=\int_A \mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\infty)\,d\mathsf{P},\qquad A\in\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right).$$

Но x_∞ и $\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\infty)$ являются $\mathscr{F}_\infty$-измеримыми, следовательно, $x_\infty=\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\infty)$ (P-п. н.).

Замечание. Приведем пример мартингала, не являющегося регулярным. Пусть $x_n=\exp\left[S_n-\frac{1}{2}n\right]$, где $S_n=y_1+\ldots+y_n$, $y_i\sim N(0,\,1)$ и независимы, а $\mathscr{F}_n=\sigma\{\omega\colon\{y_1,\,\ldots,\,y_n\}$. Тогда $X=(x_n,\,\mathscr{F}_n)$, $n\geqslant 1$, — мартингал и в силу усиленного закона больших чисел

$$x_\infty=\lim_n x_n=\lim_n\exp\left\{n\left[\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right]\right\}=0\qquad(\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Следовательно, $x_n\neq\mathsf{M}(x_\infty\,|\,\mathscr{F}_n)=0$ (P-п. н.).

3. На регулярные мартингалы распространяется результат теоремы 2.2.

Теорема 2.9. *Пусть* $X=(x_n,\,\mathscr{F}_n)$, $n\geqslant 1$, — *регулярный мартингал и* τ, σ — *марковские моменты с* $\mathsf{P}(\tau\geqslant\sigma)=1$. *Тогда*

$$x_\sigma=\mathsf{M}(x_\tau\,|\,\mathscr{F}_\sigma).\tag{2.24}$$

Доказательство. Отметим вначале, что поскольку мартингал X регулярный, то существует $\lim_n x_n$ и в (2.24) под x_∞ понимается именно значение $\lim_n x_n$. Далее, для того чтобы $\mathsf{M}(x_\tau\,|\,\mathscr{F}_\sigma)$ было определено, надо еще показать, что $\mathsf{M}\,|x_\tau|<\infty$. Но $x_n=\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_n)$ и $x_\tau=\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\tau)$ (поскольку на множествах $\{\tau=n\}$ $x_\tau=x_n$ по определению, а $\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\tau)=\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_n)$ в силу леммы 1.9). Поэтому $\mathsf{M}\,|x_\tau|\leqslant\mathsf{M}\,|\eta|$. Для доказательства (2.24) осталось лишь заметить, что поскольку $\mathscr{F}_\tau\supseteq\mathscr{F}_\sigma$, то

$$\mathsf{M}(x_\tau\,|\,\mathscr{F}_\sigma)=\mathsf{M}(\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\tau)\,|\,\mathscr{F}_\sigma)=\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{F}_\sigma)=x_\sigma\qquad(\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Следствие. *Если* $X=(x_n,\,\mathscr{F}_n)$, $n\geqslant 1$, — *регулярный мартингал, то для любого марковского момента* σ

$$x_\sigma=\mathsf{M}(x_\infty\,|\,\mathscr{F}_\sigma).$$

Замечание. Для равномерно интегрируемого мартингала $X=(x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, свойство (2.24) остается выполненным и без предположения, что $\mathsf{P}(\tau \geqslant \sigma)=1$. А именно, $x_\sigma = \mathsf{M}(x_\tau | \mathscr{F}_\sigma)$ $(\{\tau \geqslant \sigma\}$, P-п. н.), т. е.

$$x_{\sigma \wedge \tau} = \mathsf{M}(x_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2.25}$$

§ 4. Сохранение супермартингального свойства для марковских моментов. Разложения Рисса и Дуба

1. Обратимся к аналогам теоремы 2.1 для полумартингалов.

Теорема 2.10. *Пусть $X=(x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — супермартингал, мажорирующий некоторый регулярный мартингал. т. е. пусть для некоторой случайной величины η с $\mathsf{M}|\eta| < \infty$*

$$x_n \geqslant \mathsf{M}(\eta | \mathscr{F}_n), \quad n \geqslant 1 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2.26}$$

Тогда, если $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau < \infty)=1$, то

$$x_\sigma \geqslant \mathsf{M}(x_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2.27}$$

Замечание. Отметим, что утверждение теоремы остается в силе и без предположения, что $\mathsf{P}(\tau < \infty)=1$. Соответствующее обобщение, опирающееся на приводимое далее разложение Рисса, будет дано в теореме 2.12.

Доказательство теоремы 2.10. Поскольку $x_n = \mathsf{M}(\eta | \mathscr{F}_n) + [x_n - \mathsf{M}(\eta | \mathscr{F}_n)]$ и $(\mathfrak{z}_n, \mathscr{F}_n)$, $\mathfrak{z}_n = x_n - \mathsf{M}(\eta | \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — неотрицательный супермартингал, то, принимая во внимание теорему 2.9, видим, что (2.27) достаточно доказать лишь для случая, когда $x_n \geqslant 0$ (P-п. н.).

Покажем, что $\mathsf{M}x_\tau < \infty$. Для этого положим $\tau_k = \tau \wedge k$. Тогда $\mathsf{M}x_{\tau_k} \leqslant \mathsf{M}x_1$ (следствие 1 теоремы 2.1), и поскольку $\mathsf{P}(\tau < \infty)=1$, то

$$x_\tau = x_\tau \cdot \chi_{\{\tau<\infty\}} = \lim_k \left[x_{\tau_k} \cdot \chi_{\{\tau<\infty\}}\right].$$

Поэтому по лемме Фату

$$\mathsf{M}x_\tau \leqslant \varliminf_k \mathsf{M}x_{\tau_k} = \mathsf{M}x_1 < \infty.$$

Рассмотрим теперь моменты $\tau_k = \tau \wedge k$, $\sigma_k = \sigma \wedge k$. Для них согласно теореме 2.1 $x_{\sigma_k} \geqslant \mathsf{M}(x_{\tau_k} | \mathscr{F}_{\sigma_k})$ и, следовательно, если $A \in \mathscr{F}_\sigma$, то

$$\int\limits_{A \cap \{\sigma \leqslant k\}} x_{\sigma_k} \, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A \cap \{\sigma \leqslant k\}} x_{\tau_k} \, d\mathsf{P},$$

поскольку $A \cap \{\sigma \leqslant k\} \in \mathscr{F}_{\sigma_k}$.

Событие $\{\sigma \leqslant k\} \supseteq \{\tau \leqslant k\}$, а $x_n \geqslant 0$ (P-п. н.). Значит,

$$\int\limits_{A \cap \{\sigma \leqslant k\}} x_{\sigma_k}\, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A \cap \{\tau \leqslant k\}} x_{\tau_k}\, d\mathsf{P}. \tag{2.28}$$

Но $x_{\sigma_k} = x_\sigma$ на множестве $\{\sigma \leqslant k\}$ и $x_{\tau_k} = x_\tau$ на $\{\tau \leqslant k\}$. Отсюда и из (2.28) находим

$$\int\limits_{A \cap \{\sigma \leqslant k\}} x_\sigma\, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A \cap \{\tau \leqslant k\}} x_\tau\, d\mathsf{P}. \tag{2.29}$$

Полагая в (2.29) $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{A \cap \{\sigma < \infty\}} x_\sigma\, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A \cap \{\tau < \infty\}} x_\tau\, d\mathsf{P},$$

поскольку $\mathsf{P}(\sigma < \infty) = \mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$. Теорема доказана.

2. Для доказательства аналога теоремы 2.10 без предложения конечности моментов τ и σ будет использовано так называемое разложение Рисса для супермартингалов.

Определение 4. Неотрицательный супермартингал $\Pi = (\pi_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, называется *потенциалом*, если

$$\mathsf{M}\pi_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что поскольку для потенциала $\sup\limits_n \mathsf{M}\pi_n \leqslant \mathsf{M}\pi_1 < \infty$, то существует $\lim\limits_n \pi_n (= \pi_\infty)$ и $\mathsf{M}\pi_\infty \leqslant \lim\limits_n \mathsf{M}\pi_n = 0$, откуда следует, что $\pi_\infty = 0$ (P-п. н.).

Теорема 2.11 (разложение Рисса). *Если супермартингал $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, мажорирует некоторый субмартингал $Y = (y_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, то найдутся мартингал $M = (m_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, и потенциал $\Pi = (\pi_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, такие, что для каждого n*

$$x_n = m_n + \pi_n. \tag{2.30}$$

Разложение (2.30) *единственно* (*с точностью до стохастической эквивалентности*).

Доказательство. Положим для каждого $n \geqslant 1$

$$x_{n,p} = \mathsf{M}(x_{n+p} \mid \mathscr{F}_n), \qquad p = 0, 1, \ldots$$

Тогда

$$x_{n,p+1} = \mathsf{M}(x_{n+p+1} \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \mathsf{M}(x_{n+p} \mid \mathscr{F}_n) = x_{n,p},$$

т. е. для каждого $n \geqslant 1$ последовательность $\{x_{n,p},\ p = 0, 1, \ldots\}$ является невозрастающей. Поскольку, кроме того,

$$x_{n,p} = \mathsf{M}(x_{n+p} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant \mathsf{M}(y_{n+p} \mid \mathscr{F}_n) \geqslant y_n,$$

то существует $\lim_{p\to\infty} x_{n,p} (= m_n)$ и $x_n \geqslant m_n \geqslant y_n$ (P-п. н.). Значит, $\mathsf{M}|m_n| < \infty$ и

$$\mathsf{M}(m_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathsf{M}(\lim_{p\to\infty} x_{n+1,p}|\mathscr{F}_n) \doteq \lim_{p\to\infty} \mathsf{M}(x_{n+1,p}|\mathscr{F}_n) = \\ = \lim_{p\to\infty} \mathsf{M}(x_{n+1+p}|\mathscr{F}_n) = \lim_{p\to\infty} \mathsf{M}(x_{n,p+1}|\mathscr{F}_n) = \\ = \mathsf{M}(\lim_{p\to\infty} x_{n,p+1}|\mathscr{F}_n) = \mathsf{M}(m_n|\mathscr{F}_n) = m_n.$$

Итак, $M = (m_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — мартингал.

Положим теперь $\pi_n = x_n - m_n$. Поскольку $x_n \geqslant m_n$, то $\pi_n \geqslant 0$. Ясно также, что $\Pi = (\pi_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — супермартингал. Осталось, следовательно, показать, что $\lim_n \mathsf{M}\pi_n = 0$.

Согласно определению m_n, $n \geqslant 1$, P-п. н.

$$\mathsf{M}(\pi_{n+p}|\mathscr{F}_n) = \mathsf{M}[x_{n+p} - m_{n+p}|\mathscr{F}_n] = \\ = \mathsf{M}[x_{n+p}|\mathscr{F}_n] - m_n = x_{n,p} - m_n \downarrow 0, \quad p\to\infty.$$

Поэтому по теореме 1.3

$$\lim_{p\to\infty} \mathsf{M}\pi_{n+p} = \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \pi_{n+p}\, d\mathsf{P} = \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \mathsf{M}(\pi_{n+p}|\mathscr{F}_n)\, d\mathsf{P} = 0.$$

Установим теперь единственность разложения (2.30). Пусть $x_n = \tilde{m}_n + \tilde{\pi}_n$ — другое разложение того же типа. Тогда

$$\mathsf{M}[x_{n+p}|\mathscr{F}_n] = \mathsf{M}[\tilde{m}_{n+p}|\mathscr{F}_n] + \mathsf{M}[\tilde{\pi}_{n+p}|\mathscr{F}_n] = \tilde{m}_n + \mathsf{M}[\tilde{\pi}_{n+p}|\mathscr{F}_n].$$

Но при $p\to\infty$ P-п. н.

$$\mathsf{M}[x_{n+p}|\mathscr{F}_n] \to m_n, \qquad \mathsf{M}[\tilde{\pi}_{n+p}|\mathscr{F}_n] \to 0.$$

Поэтому $m_n = \tilde{m}_n$, а $\pi_n = \tilde{\pi}_n$ (P-п. н.) для всех $n \geqslant 1$.

3. Применим разложение Рисса для доказательства следующего предложения, обобщающего теорему 2.10.

Теорема 2.12. *Пусть $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — супермартингал, мажорирующий некоторый регулярный мартингал ($x_n \geqslant \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n)$ для некоторой случайной величины η с $\mathsf{M}|\eta| < \infty$, $n \geqslant 1$, P-п. н.). Тогда, если $\mathsf{P}(\tau \geqslant \sigma) = 1$, то* P-п. н.

$$x_\sigma \geqslant \mathsf{M}(x_\tau|\mathscr{F}_\sigma). \tag{2.31}$$

Доказательство. Представим x_n в виде $x_n = \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n) + \mathfrak{z}_n$, где $\mathfrak{z}_n = x_n - \mathsf{M}(\eta|\mathscr{F}_n)$. Супермартингал $Z = (\mathfrak{z}_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, согласно теореме Рисса допускает разложение $\mathfrak{z}_n = m_n + \pi_n$. Заметим, что в качестве m_n можно взять $\mathsf{M}(\mathfrak{z}_\infty|\mathscr{F}_n)$, где $\mathfrak{z}_\infty = \lim_n \mathfrak{z}_n$, а π_n взять равным $\mathfrak{z}_n - \mathsf{M}(\mathfrak{z}_\infty|\mathscr{F}_n)$. Поэтому $x_n = \mathsf{M}(\eta + \mathfrak{z}_\infty|\mathscr{F}_n) + \pi_n$.

Мартингал $(\mathsf{M}(\eta+\mathfrak{z}_\infty)|\mathcal{F}_n)$, $n\geqslant 1$, регулярен, и к нему применима теорема 2.9. Поэтому достаточно лишь установить, что $\pi_\sigma \geqslant \mathsf{M}(\pi_\tau|\mathcal{F}_\sigma)$.

Как показано в теореме 2.10, для всякого $A\in\mathcal{F}_\sigma$

$$\int\limits_{A\cap\{\sigma<\infty\}} \pi_\sigma\, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_{A\cap\{\tau<\infty\}} \pi_\tau\, d\mathsf{P}.$$

Учитывая теперь, что $\pi_\infty=0$ (P-п. н.), получаем

$$\int\limits_A \pi_\sigma\, d\mathsf{P} \geqslant \int\limits_A \pi_\tau\, d\mathsf{P}.$$

Вместе с теоремой 2.9 это неравенство доказывает (2.31).

4. Определение 5. Случайный процесс A_n, $n=0, 1, \ldots$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\ldots$ $\ldots\subseteq\mathcal{F}$, называется *возрастающим*, если

1) $0=A_0\leqslant A_1\leqslant\ldots$ (P-п. н.),

и *натуральным*, если

2) A_{n+1} $\mathcal{F}_n$-измеримы, $n=0, 1, \ldots$

Теорема 2.13 (разложение Дуба). *Всякий супермартингал**) $X=(x_n, \mathcal{F}_n)$, $n\geqslant 0$, *допускает единственное (с точностью до стохастической эквивалентности) разложение*

$$x_n = m_n - A_n, \qquad n\geqslant 0, \tag{2.32}$$

где $M=(m_n, \mathcal{F}_n)$, $n\geqslant 0$, *— мартингал, а* A_n, $n\geqslant 0$, *— натуральный возрастающий процесс.*

Доказательство. Одно из разложений типа (2.32) получается, если положить

$$\begin{aligned} m_0&=x_0, \quad & m_{n+1}-m_n &= x_{n+1}-\mathsf{M}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n),\\ A_0&=0, \quad & A_{n+1}-A_n &= x_n-\mathsf{M}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Пусть теперь есть еще одно разложение: $x_n=m_n'-A_n'$, $n\geqslant 0$. Тогда

$$A_{n+1}'-A_n' = (m_{n+1}'-m_n') + (x_n - x_{n+1}). \tag{2.34}$$

Отсюда, учитывая, что A_n' и A_{n+1}' $\mathcal{F}_n$-измеримы, находим (беря в (2.34) условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot|\mathcal{F}_n)$)

$$A_{n+1}'-A_n' = x_n-\mathsf{M}(x_{n+1}|\mathcal{F}_n) = A_{n+1}-A_n.$$

Но $A_0'=A_0=0$, поэтому $A_n'=A_n$, $m_n'=m_n$, $n\geqslant 0$ (P-п. н.).

*) Здесь удобнее (имея в виду последующие применения к случаю непрерывного времени) рассматривать супермартингалы, определенные для $n\geqslant 0$ (а не для $n\geqslant 1$, как было ранее).

Следствие 1. *Если* $\Pi=(\pi_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 0$, *— потенциал, то существует натуральный возрастающий процесс* A_n, $n=0, 1, \ldots$, *такой, что*

$$\pi_n = \mathsf{M}(A_\infty | \mathcal{F}_n) - A_n,$$

где $A_\infty = \lim\limits_n A_n$.

Действительно, согласно теореме $\pi_n = m_n - A_n$, где $(m_n, \mathcal{F}_n)$ — некоторый мартингал. Покажем, что $m_n = \mathsf{M}(A_\infty | \mathcal{F}_n)$. Имеем $0 \leqslant A_n = m_n - \pi_n \leqslant m_n$ и $0 \leqslant A_n \leqslant A_\infty$, где $\mathsf{M}A_\infty = \lim\limits_n \mathsf{M}A_n = \lim\limits_n [\mathsf{M}m_0 - \mathsf{M}\pi_n] = \mathsf{M}m_0 < \infty$. Поэтому последовательность A_0, $A_1, \ldots$ равномерно интегрируема. Величины $\pi_0, \pi_1, \ldots$ также равномерно интегрируемы, поскольку $\pi_n \geqslant 0$ и $\mathsf{M}\pi_n \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что такова же и последовательность m_0, $m_1, \ldots$ Из теоремы 2.7 получаем, что существует $m_\infty = \lim\limits_n m_n$, причем $m_n = \mathsf{M}(m_\infty | \mathcal{F}_n)$. Обозначим $\pi_\infty = \lim\limits_n \pi_n$. Тогда $\pi_\infty = \lim\limits_n [m_n - A_n] = m_\infty - A_\infty$. Но $\pi_\infty = 0$ (P-п. н.), поэтому $m_\infty = A_\infty$ (P-п. н.). Значит,

$$\pi_n = m_n - A_n = \mathsf{M}(m_\infty | \mathcal{F}_n) - A_n = \mathsf{M}(A_\infty | \mathcal{F}_n) - A_n.$$

Следствие. 2. *Если супермартингал* $X=(x_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 0$, *мажорирует некоторый субмартингал* $Y=(y_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 0$, *то существует натуральный возрастающий процесс* A_n, $n \geqslant 0$, *и мартингал* $(m_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geqslant 0$, *такие, что*

$$x_n = m_n + \mathsf{M}(A_\infty | \mathcal{F}_n) - A_n, \quad n \geqslant 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{2.35}$$

Доказательство сразу следует из разложения Рисса (2.30) и предыдущего следствия.

5. Натуральный процесс A_n, $n=0, 1, \ldots$, по определению является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримым (а не только $\mathcal{F}_n$-измеримым) при каждом $n \geqslant 1$. Этому допущению можно придать несколько иную, но эквивалентную формулировку, оказывающуюся более удобной в случае непрерывного времени (см. § 3 в гл. 3). А именно, пусть $0 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant, \ldots$, где случайные величины A_n $\mathcal{F}_n$-измеримы и $\mathsf{M}A_\infty < \infty$.

Теорема 2.14. *Для того чтобы* A_n *были* $\mathcal{F}_{n-1}$-*измеримыми*, $n \geqslant 1$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого ограниченного мартингала* $Y=(y_n, \mathcal{F}_n)$, $n=0, 1, \ldots$,

$$\mathsf{M} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}(A_n - A_{n-1}) = \mathsf{M}y_\infty A_\infty, \tag{2.36}$$

где $y_\infty = \lim\limits_n y_n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть A_n $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримы, $\mathsf{M}A_\infty < \infty$. Тогда, поскольку

$$\mathsf{M}y_nA_n = \mathsf{M}y_{n-1}A_n, \quad n \geqslant 1, \tag{2.37}$$

то

$$\mathsf{M}\sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \mathsf{M}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}(A_n - A_{n-1}) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[\mathsf{M}y_nA_n - \mathsf{M}y_{n-1}A_{n-1}] = \lim_{N\to\infty}\mathsf{M}y_NA_N = \mathsf{M}y_\infty A_\infty.$$

Достаточность. Пусть выполнено (2.36). Тогда

$$\mathsf{M}\sum_{n=1}^{\infty} A_n[y_{n-1} - y_n] = 0 \tag{2.38}$$

для любого ограниченного мартингала $Y = (y_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 0$. Воспользуемся теперь тем фактом, что если $Y = (y_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 0$, — мартингал, то «остановленная» последовательность $(y_{n\wedge\tau}, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 0$, также будет мартингалом для любого марковского момента τ (см. далее теорему 2.15). Беря $\tau \equiv 1$ и применяя (2.38) к мартингалу $(y_{n\wedge 1}, \mathscr{F}_n)$, получим, что

$$\mathsf{M}A_1(y_0 - y_1) = 0. \tag{2.39}$$

Аналогичные рассуждения с $\tau \equiv 2$, $\tau \equiv 3$, и т. д. приводят к тому, что если справедливо (2.38), то тогда имеют место равенства (2.37) для любого ограниченного мартингала $Y = (y_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 0$.

Из (2.37) следует, что

$$\mathsf{M}\{[y_n - y_{n-1}][A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})]\} = 0. \tag{2.40}$$

Положим $y_{n+m} = y_n$, $m \geqslant 0$,

$$y_n = \operatorname{sign}[A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})], \quad y_k = \mathsf{M}(y_n \mid \mathscr{F}_k), \quad k < n.$$

Тогда из (2.40) находим

$$0 = \mathsf{M}\{\operatorname{sign}[A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})] - y_{n-1}\}\{A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})\} =$$
$$= \mathsf{M}\{\operatorname{sign}[A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})]\}\{A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})\} =$$
$$= \mathsf{M}\,|A_n - \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})|,$$

откуда $A_n = \mathsf{M}(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ (P-п. н.), т. е. A_n $\mathscr{F}_{n-1}$-измеримы.

6. Теорема 2.15. *Пусть $X = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, — мартингал (полумартингал) и $\tau = \tau(\omega)$ — м. м. относительно системы $(\mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$. Тогда «остановленная» последовательность $(x_{n\wedge\tau}, \mathscr{F}_n)$, $n \geqslant 1$, также является мартингалом (полумартингалом).*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая, когда X является супермартингалом. Из равенства

$$x_{\tau \wedge n} = \sum_{m<n} x_m \chi_{\{\tau=m\}} + x_n \chi_{\{\tau \geqslant n\}}$$

следует, что величины $x_{\tau\wedge n}$ $\mathcal{F}_n$-измеримы, интегрируемы при любом $n = 1, 2, \ldots$ и $x_{\tau\wedge(n+1)} - x_{\tau\wedge n} = \chi_{\{\tau>n\}}(x_{n+1} - x_n)$. Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{x_{\tau\wedge(n+1)} - x_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_n\right\} = \chi_{\{\tau>n\}} \mathsf{M}\left\{x_{n+1} - x_n \mid \mathcal{F}_n\right\} \leqslant 0,$$

откуда очевидным образом получаем утверждение теоремы.

Заметим также, что эту теорему можно было бы непосредственно вывести из (2.5) (для супермартингала). Действительно, беря в (2.5) $\sigma = m$ и вместо τ беря $\tau\wedge n$, находим ($n \geqslant m$), что P-п. н.

$$x_{\tau\wedge m} = x_{(\tau\wedge n)\wedge m} \geqslant \mathsf{M}\left(x_{\tau\wedge n} \mid \mathcal{F}_m\right).$$

ГЛАВА 3

МАРТИНГАЛЫ И ПОЛУМАРТИНГАЛЫ. НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ

§ 1. Непрерывные справа полумартингалы

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$.

Определение 1. Супермартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$ ($\mathsf{M}\,|x_t| < \infty$, $\mathsf{M}(x_t | \mathscr{F}_s) \leqslant x_s$, $t \geqslant s$) называется *непрерывным справа*, если

1) траектории x_t непрерывны справа P-п. н.;

2) семейство $(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, непрерывно справа, т. е.

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s, \qquad t \geqslant 0.$$

Многие из результатов предыдущей главы переносятся на непрерывные справа супермартингалы и субмартингалы (т. е. на полумартингалы).

Приведем прежде всего один полезный результат, дающий условия существования у супермартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, непрерывной справа модификации.

Теорема 3.1. *Пусть семейство $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, непрерывно справа. Для того чтобы супермартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, допускал непрерывную справа модификацию, необходимо и достаточно, чтобы функция $m_t = \mathsf{M} x_t$, $t \geqslant 0$, была непрерывной справа.*

Для доказательства нам понадобится следующая.

Лемма 3.1. *Пусть $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — супермартингал, для которого существует такая интегрируемая случайная величина y, что $x_s \geqslant \mathsf{M}(y | \mathscr{F}_s)$ P-п. н., $s \geqslant 0$. Пусть $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \ldots$ — невозрастающая последовательность марковских моментов. Тогда семейство случайных величин $\{x_{\tau_n}, n=1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируемо.*

Доказательство. Положим $y_n = x_{\tau_n}$, $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{\tau_n}$. Тогда по теореме 2.10 $x_{\tau_n} \geqslant \mathsf{M}(x_{\tau_{n-1}} | \mathscr{F}_{\tau_n})$ или, в новых обозначениях,

$$y_n \geqslant \mathsf{M}(y_{n-1} | \mathscr{G}_n). \tag{3.1}$$

Отметим для дальнейшего, что $\mathsf{M}x_0 \geqslant \mathsf{M}y_n \geqslant \mathsf{M}y_{n-1} \geqslant \mathsf{M}y$.

Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ и найдем такое $k = k(\varepsilon)$, что $\lim\limits_n \mathsf{M}y_n - \mathsf{M}y_k \leqslant \varepsilon$. Тогда для всех $n \geqslant k$ $\mathsf{M}y_n - \mathsf{M}y_k \leqslant \varepsilon$.

Далее, в силу (3.1) для $n \geqslant k$

$$\int\limits_{\{|y_n| > \lambda\}} |y_n|\, d\mathsf{P} = \int\limits_{\{y_n > \lambda\}} y_n\, d\mathsf{P} - \int\limits_{\{y_n < -\lambda\}} y_n\, d\mathsf{P} =$$

$$= \mathsf{M}y_n - \int\limits_{\{y_n \leqslant \lambda\}} y_n\, d\mathsf{P} - \int\limits_{\{y_n < -\lambda\}} y_n\, d\mathsf{P} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}y_n - \int\limits_{\{y_n \leqslant \lambda\}} y_k\, d\mathsf{P} - \int\limits_{\{y_n < -\lambda\}} y_k\, d\mathsf{P} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \mathsf{M}y_k - \int\limits_{\{y_n \leqslant \lambda\}} y_k\, d\mathsf{P} - \int\limits_{\{y_n < -\lambda\}} y_k\, d\mathsf{P} \leqslant \varepsilon + \int\limits_{\{|y_n| \geqslant \lambda\}} |y_k|\, d\mathsf{P}. \quad (3.2)$$

Но

$$\mathsf{P}\{|y_n| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|y_n|}{\lambda} \leqslant \frac{\mathsf{M}y_n + 2\mathsf{M}y_n^-}{\lambda} \leqslant \frac{\mathsf{M}x_0 + 2\mathsf{M}|y|}{\lambda} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Поэтому

$$\sup_{n \geqslant k} \int\limits_{\{|y_n| \geqslant \lambda\}} |y_k|\, d\mathsf{P} \to 0, \qquad \lambda \to \infty,$$

и, значит, согласно (3.2)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{n \geqslant k} \int\limits_{\{|y_n| \geqslant \lambda\}} |y_n|\, d\mathsf{P} \leqslant \varepsilon. \quad (3.3)$$

Поскольку величины $y_1, \ldots, y_k$ интегрируемы, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $L > 0$, что

$$\max_{i \leqslant k} \int\limits_{\{|y_i| \geqslant L\}} |y_i|\, d\mathsf{P} \leqslant \varepsilon.$$

Вместе с (3.3) это влечет за собой равномерную интегрируемость последовательности $y_1, y_2, \ldots$ Лемма доказана.

Замечание. Если $\mathsf{P}(\tau_1 \leqslant N) = 1$, $N < \infty$, то лемма сохраняет свою силу без предположения $x_s \geqslant \mathsf{M}(y \mid \mathcal{F}_s)$, $s \geqslant 0$, поскольку тогда достаточно рассматривать лишь $s \in [0, N]$, а для таких s $x_s \geqslant \mathsf{M}(y \mid \mathcal{F}_s)$ с $y = x_N$, $\mathsf{M}|x_N| < \infty$.

2. Доказательство теоремы 3.1. Пусть $t_1, t_2, \ldots$ — числовая последовательность такая, что $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n \downarrow t$,

$n \to \infty$. По предшествующей лемме величины $(x_{t_n},\ n = 1, 2, \ldots)$ равномерно интегрируемы, и поэтому из неравенства

$$x_t \geqslant \mathsf{M}(x_{t_n} | \mathscr{F}_t) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{3.4}$$

получаем (теорема 1.3)

$$x_t \geqslant \mathsf{M}(x_{t+} | \mathscr{F}_t) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{3.5}$$

где *) $x_{t+} = \lim\limits_n x_{t_n}$.

Согласно предположению $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$, а x_{t+}, очевидно, $\mathscr{F}_{t+}$-измеримо. Поэтому из (3.5) следует равенство $\mathsf{P}(x_t \geqslant x_{t+}) = 1$.

Предположим теперь, что $m_t = m_{t+}$, т. е. $\mathsf{M}x_t = \mathsf{M}x_{t+}$. Тогда из равенства $\mathsf{P}(x_t \geqslant x_{t+}) = 1$ сразу следует, что $\mathsf{P}(x_t = x_{t+}) = 1$. Тем самым, у супермартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, существует модификация $X^+ = (x_{t+}, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, траектории которой, очевидно, непрерывны справа с вероятностью 1.

Пусть теперь у супермартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, существует непрерывная справа модификация $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$. Тогда, поскольку $\mathsf{P}(x_t = y_t) = 1$, $t \geqslant 0$, то $\mathsf{M}x_t = \mathsf{M}y_t$, и по лемме 3.1

$$\lim_{s \downarrow t} \mathsf{M}y_s = \mathsf{M} \lim_{s \downarrow t} y_s = \mathsf{M}y_{t+} = \mathsf{M}y_t.$$

Иначе говоря, математическое ожидание $m_t = \mathsf{M}x_t (= \mathsf{M}y_t)$ непрерывно справа.

Следствие. *Всякий мартингал* $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$, $t \geqslant 0$, *допускает непрерывную справа модификацию.*

Замечание. В теореме 3.1 предположение о непрерывности справа семейства $F = \{\mathscr{F}_t\}$, $t \geqslant 0$, является существенным. Если оно не выполнено, то для существования непрерывной справа модификации у супермартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, достаточно, например, чтобы процесс x_t, $t \geqslant 0$, был *непрерывным справа по вероятности* в каждой точке t, т. е. чтобы $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_{s \downarrow t} x_s = x_t$.

§ 2. Основные неравенства. Теорема сходимости. Сохранение супермартингального свойства для марковских моментов

1. Теорема 3.2. *Пусть* $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — *субмартингал с непрерывными справа траекториями. Имеют место следующие*

---

*) Существование P-п. н. предела $\lim\limits_{t_n \downarrow t} x_{t_n}$ вытекает из теоремы 2.6, поскольку последовательность $(x_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n})$, $n = 1, 2, \ldots$, образует субмартингал.

неравенства:

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\leqslant T} x_t \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\{\sup\limits_{t\leqslant T} x_t \geqslant \lambda\}} x_T\, d\mathsf{P} \leqslant \frac{1}{\lambda} \mathsf{M} x_T^+, \tag{3.6}$$

$$\mathsf{P}\{\inf_{t\leqslant T} x_t \leqslant -\lambda\} \leqslant -\mathsf{M} x_0 + \int\limits_{\{\inf\limits_{t\leqslant T} x_t \leqslant -\lambda\}} x_T\, d\mathsf{P}. \tag{3.7}$$

Если X — *неотрицательный субмартингал с* $\mathsf{M} x_T^p < \infty$ *для* $1 < p < \infty$, *то*

$$\mathsf{M}[\sup_{t\leqslant T} x_t]^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{M} x_T^p. \tag{3.8}$$

Если $\beta_T(a, b)$ — *число пересечений (снизу вверх) интервала* (a, b) *субмартингалом* $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, *то*

$$\mathsf{M}\beta_T(a, b) \leqslant \frac{\mathsf{M}[x_T - a]^+}{b-a} \leqslant \frac{\mathsf{M} x_T^+ + |a|}{b-a}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Поскольку траектории x_t, $t \geqslant 0$, непрерывны справа, то события

$$\{\inf_{t\leqslant T} x_t \leqslant -\lambda\} = \{\inf_{r\leqslant T} x_r \leqslant -\lambda\} \text{ и } \{\sup_{t\leqslant T} x_t \geqslant \lambda\} = \{\sup_{r\leqslant T} x_r \geqslant \lambda\}$$

принадлежат $\mathcal{F}$ (r — рациональные числа). С учетом этого замечания неравенства (3.6) — (3.9) легко получаются из соответствующих неравенств для случая дискретного времени, рассмотренных в предыдущей главе.

Следствие 1. *Если* $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — *субмартингал (или супермартингал) с непрерывными справа траекториями, то для каждого* $t > 0$ (P-п. н.) *существует* $x_{t-} = \lim\limits_{s\uparrow t} x_s$.

Действительно, если бы с положительной вероятностью этот предел не существовал, то тогда (ср. с рассуждениями, использованными при доказательстве теоремы 2.6) для некоторых $a < b$ $\mathsf{M}\beta_t(a, b) = \infty$. Но это противоречит оценке (3.9).

Следствие 2. *Пусть* $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — *мартингал с* $x_t = \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$, $\mathsf{M}|\xi| < \infty$, *а семейство* $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *непрерывно справа. Тогда у процесса* x_t, $t \geqslant 0$, *существует модификация* $\tilde{x}_t$, $t \geqslant 0$, *с траекториями*, P-п. н. *непрерывными справа и имеющими предел слева (в каждой точке* $t > 0$).

Действительно, из теоремы 1.5 следует, что для каждого $t \geqslant 0$ существует

$$x_{t+} = \lim_{s\downarrow t} \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_s) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_{t+}) = \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = x_t.$$

Поэтому, если положить $\tilde{x}_t \equiv x_{t+}$, то получим модификацию, непрерывную P-п. н. справа. В силу предыдущего следствия процесс $\tilde{x}_t$, $t \geqslant 0$, имеет для каждого $t > 0$ пределы слева $\tilde{x}_{t-} = \lim\limits_{s \uparrow t} \tilde{x}_s$ (P-п. н.).

2. Теорема 3.3. *Пусть* $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — *субмартингал с непрерывными справа траекториями* x_t, $t \geqslant 0$, *такой, что*

$$\sup_t \mathsf{M} x_t^+ < \infty. \tag{3.10}$$

Тогда с вероятностью 1 *существует* $\lim\limits_{t \to \infty} x_t (= x_\infty)$ *и* $\mathsf{M} x_\infty^+ < \infty$.

Доказательство следует из неравенства (3.9) с помощью рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 2.6.

3. Аналогично случаю дискретного времени вводится понятие потенциала $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — неотрицательного супермартингала с $\lim\limits_{t \to \infty} \mathsf{M} \pi_t = 0$ — и доказывается следующий результат.

Теорема 3.4 (разложение Рисса). *Если супермартингал* $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *с непрерывными справа траекториями* x_t, $t \geqslant 0$, *мажорируется некоторым субмартингалом* $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *то найдутся мартингал* $M = (m_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *и потенциал* $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *такие, что для каждого* $t \geqslant 0$

$$x_t = m_t + \pi_t \qquad (\text{P-п. н.}). \tag{3.11}$$

Разложение (3.11) *единственно* (*с точностью до стохастической эквивалентности*).

4. Теорема 3.5. *Пусть* $X = (x_t, \mathscr{F})$, $t \geqslant 0$, — *супермартингал, с непрерывными справа траекториями, такой, что для некоторой случайной величины* η *с* $\mathsf{M}|\eta| < \infty$

$$x_t \geqslant \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_t), \quad t \geqslant 0, \quad \text{P-п. н.}$$

Тогда, если τ *и* σ — *марковские моменты и* $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau) = 1$, *то*

$$x_\sigma \geqslant \mathsf{M}(x_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma). \tag{3.12}$$

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ свяжем с моментом τ м. м., $\tau_n = \tau_n(\omega)$, полагая

$$\tau_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \text{ на } \left\{\omega: \frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и $\tau_n(\omega) = +\infty$ на $\{\omega: \tau(\omega) = \infty\}$. Аналогично определим и моменты σ_n, $n = 1, 2, \ldots$ Будем предполагать, что $\mathsf{P}(\sigma_n \leqslant \tau_n) = 1$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (в противном случае вместо σ_n надо рассмотреть $\sigma_n \wedge \tau_n$).

По теореме 2.12

$$x_{\sigma_n} \geqslant \mathsf{M}(x_{\tau_n} \mid \mathscr{F}_{\sigma_n}) \quad (\text{P-п. н.}), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

Возьмем множество $A \in \mathscr{F}_\sigma$. Тогда, поскольку $\mathscr{F}_\sigma \subseteq \mathscr{F}_{\sigma_n}$, то $A \in \mathscr{F}_{\sigma_n}$, и из предыдущего неравенства получаем

$$\int_A x_{\sigma_n} d\mathsf{P} \geqslant \int_A x_{\tau_n} d\mathsf{P}. \tag{3.13}$$

Заметим теперь, что случайные величины $(x_{\sigma_n}, n=1, 2, \ldots)$ и $(x_{\tau_n}, n=1, 2, \ldots)$ равномерно интегрируемы (лемма 3.1) и $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$, $\sigma_n(\omega) \downarrow \sigma(\omega)$ для *всех* ω. Поэтому, совершая в (3.13) предельный переход при $n \to \infty$, найдем (теорема 1.3), что

$$\int_A x_\sigma d\mathsf{P} \geqslant \int_A x_\tau d\mathsf{P}. \tag{3.14}$$

Поэтому $x_\sigma \geqslant \mathsf{M}[x_\tau | \mathscr{F}_\sigma]$ (P-п. н.).

Замечание 1. Из доказанной теоремы 3.5 видно, что неравенство (3.12) сохраняет свою силу для супермартингалов с непрерывными траекториями $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, и м. м. τ и σ таких, что $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau \leqslant T)=1$.

Замечание 2. Если $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$,—неотрицательный супермартингал и $x_\tau=0$, то $x_t=0$ ($\{t \geqslant \tau\}$, P-п. н.).

5. Проведенное выше доказательство показывает, что если супермартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, есть равномерно интегрируемый мартингал, то неравенство (3.12) обращается в равенство. Чтобы это утверждение сделать по своей форме аналогичным соответствующему утверждению (теорема 2.9) для дискретного времени, введем такое определение.

Определение 2. Мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, называется *регулярным*, если существует интегрируемая случайная величина η ($\mathsf{M}|\eta| < \infty$) такая, что

$$x_t = \mathsf{M}(\eta | \mathscr{F}_t), \quad t \geqslant 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Как и в теореме 2.7, можно показать, что регулярность мартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, эквивалентна требованию равномерной интегрируемости семейства случайных величин $(x_t, t \geqslant 0)$.

Теорема 3.6. *Пусть $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — регулярный мартингал с непрерывными справа траекториями. Тогда, если τ и σ — марковские моменты и $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau)=1$, то*

$$x_\sigma = \mathsf{M}(x_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{3.15}$$

Доказательство следует из проведённого выше доказательства теоремы 3.5, если учесть, что для регулярного мартингала семейства случайных величин $\{x_{\sigma_n}, n=1, 2, \ldots\}$ и $\{\tau_n, n=1, 2, \ldots)$ равномерно интегрируемы.

Замечание 1. Поскольку для мартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, $m_t = \mathsf{M}x_t \equiv \mathrm{const}$, то для непрерывности справа его траекторий (в соответствии с теоремой 3.1) достаточно требовать лишь непрерывности справа семейства $(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$. Более точно, в этом случае существует мартингал $Y=(y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, такой, что его траектории y_t, $t \geqslant 0$, непрерывны справа и $\mathsf{P}(x_t = y_t) = 1$, $t \geqslant 0$.

Замечание 2. Утверждение (3.15) теоремы 3.6 остается справедливым для мартингалов $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$ с непрерывными справа траекториями, заданных на конечном временном интервале $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, и марковских моментов τ и σ таких, что $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau \leqslant T) = 1$.

Замечание 3. Если в условиях теоремы 3.6 не требовать, чтобы $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau) = 1$, то утверждение (3.15) заменится на следующее:

$$x_{\sigma \wedge \tau} = \mathsf{M}(x_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{3.16}$$

(ср. с (2.25)). Отсюда, в частности, вытекает, что «остановленный» процесс $X^* = (x_{t \wedge \tau}, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, также будет мартингалом. Для доказательства (3.16) заметим, что согласно (2.25)

$$x_{\sigma_n \wedge \tau_n} = \mathsf{M}\left(x_{\tau_k} \middle| \mathscr{F}_{\sigma_n}\right) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

для всех $k \geqslant n$. Отсюда в силу равномерной интегрируемости величин $\{x_{\tau_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ при $k \to \infty$ получаем, что

$$x_{\sigma_n \wedge \tau} = \mathsf{M}\left(x_\tau \mid \mathscr{F}_{\sigma_n}\right).$$

Полагая теперь $n \to \infty$, приходим к требуемому равенству (3.16).

§ 3. Разложение Дуба — Мейера для супермартингалов

1. В настоящем параграфе рассматривается аналог теоремы 2.13 (разложение Дуба) в случае непрерывного времени.

Введем предварительно необходимые понятия.

Определение 3. Супермартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывными справа траекториями $x_t = x_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, *принадлежит классу D*, если семейство случайных величин $(x_\tau, \tau \in \mathfrak{T})$, где $\mathfrak{T}$ — совокупность марковских моментов τ с $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$, равномерно интегрируемо.

Определение 4. Супермартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывными справа траекториями $x_t = x_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, *принадлежит классу DL*, если для любого a, $0 \leqslant a < \infty$, семейство случайных величин $(x_\tau, \tau \in \mathfrak{T}_a)$, где $\mathfrak{T}_a$ — совокупность марковских моментов τ с $\mathsf{P}(\tau \leqslant a) = 1$, равномерно интегрируемо.

Ясно, что класс $DL \supseteq D$. Следующая теорема дает критерии принадлежности классам D и DL.

Теорема 3.7. 1) *Всякий мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывными справа траекториями принадлежит классу DL.*

2) *Всякий равномерно интегрируемый мартингал $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, с непрерывными справа траекториями принадлежит классу D.*

3) *Всякий отрицательный супермартингал* $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, *с непрерывными справа траекториями принадлежит классу* DL.

Доказательство. Пусть $\mathsf{P}(\tau\leqslant a)=1$, $a<\infty$. Тогда, согласно замечанию 2 к теореме 3.6, $x_\tau=\mathsf{M}(x_a|\mathcal{F}_\tau)$ (P-п. н.). Но семейство $(x_\tau,\ \tau\in\mathfrak{T}_a)$ таких случайных величин равномерно интегрируемо, что доказывается так же, как импликация (A)$\Rightarrow$(B) в теореме 2.7. Аналогично доказывается и второе утверждение. Докажем последнее утверждение.

Пусть $\mathsf{P}(\tau\leqslant a)=1$. Тогда, согласно замечанию 1 к теореме 3.5, для $\lambda>0$

$$\int\limits_{\{|x_\tau|>\lambda\}}|x_\tau|\,d\mathsf{P}=-\int\limits_{\{|x_\tau|>\lambda\}}x_\tau\,d\mathsf{P}\leqslant-\int\limits_{\{|x_\tau|>\lambda\}}x_a\,d\mathsf{P}$$

и также $\mathsf{M}|x_\tau|\leqslant\mathsf{M}|x_a|$. Поэтому по неравенству Чебышева

$$\lambda\mathsf{P}\{|x_\tau|>\lambda\}\leqslant\mathsf{M}|x_\tau|\leqslant\mathsf{M}|x_a|.$$

Значит, $\mathsf{P}\{|x_\tau|>\lambda\}\to 0$, $\lambda\to\infty$, и, следовательно,

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{T}_a}\int\limits_{\{|x_\tau|>\lambda\}}|x_\tau|\,d\mathsf{P}\leqslant\sup_{\tau\in\mathfrak{T}_a}\left[-\int\limits_{\{|x_\tau|>\lambda\}}x_a\,d\mathsf{P}\right]\to 0,\quad\lambda\to\infty.$$

Теорема доказана.

2. Определение 5. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $\boldsymbol{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — неубывающее семейство непрерывных справа σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Непрерывный справа случайный процесс A_t, $t\geqslant 0$, называется *возрастающим*, если величины A_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми, $A_0=0$ и $A_s\leqslant A_t$, $s\leqslant t$, P-п. н. Возрастающий процесс $A=(A_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, называется *натуральным возрастающим процессом*, если для всякого ограниченного положительного мартингала $Y=(y_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, имеющего пределы слева,

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_{s-}\,dA_s=\mathsf{M}y_\infty A_\infty. \tag{3.17}$$

Возрастающий процесс A_t, $t\geqslant 0$, называется *интегрируемым*, если $\mathsf{M}A_\infty<\infty$.

Лемма 3.2. *Интегрируемый возрастающий процесс* $A=(A_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, *является натуральным тогда и только тогда, когда для всякого непрерывного справа и имеющего пределы слева ограниченного мартингала* $Y=(y_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$,

$$\mathsf{M}\int\limits_0^T y_s\,dA_s=\mathsf{M}\int\limits_0^T y_{s-}\,dA_s \tag{3.18}$$

для любого $T>0$.

Доказательство. Покажем сначала, что для всякого возрастающего процесса $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, с $A_0=0$, $\mathsf{M}A_\infty<\infty$ и мартингала $Y=(y_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, имеющегося непрерывные справа траектории,

$$\mathsf{M}\int_0^T y_s\,dA_s=\mathsf{M}y_TA_T. \tag{3.19}$$

Положим $c_t(\omega)=\inf\{s\colon A_s(\omega)>t\}$ и воспользуемся тем, что (для почти всех ω) интеграл Лебега — Стилтьеса можно свести к интегралу Лебега (гл. 1, § 1):

$$\int_0^T y_s\,dA_s=\int_0^{A_T(\omega)} y_{c_t(\omega)}\,dt=\int_0^\infty y_{c_t(\omega)}\chi_{\{t:\ t<A_T(\omega)\}}\,dt,$$

где, согласно следствию леммы 1.8, $y_{c_t(\omega)}$ является $\mathscr{F}_{c_t}$-измеримой величиной. Но P-п. н.

$$\{t\colon t<A_T(\omega)\}=\{t\colon c_t(\omega)<T\}.$$

Поэтому

$$\int_0^T y_s\,dA_s=\int_0^\infty y_{c_t(\omega)}\chi_{\{t:\ c_t(\omega)<T\}}\,dt,$$

и по теореме Фубини

$$\mathsf{M}\int_0^T y_s\,dA_s=\int_0^\infty \mathsf{M}\left[y_{c_t(\omega)}\chi_{\{t:\ c_t(\omega)<T\}}\right]dt.$$

Зафиксируем некоторое $t\geqslant 0$ и заметим, что случайный момент $\tau(\omega)=c_t(\omega)$ является марковским. Тогда, поскольку событие $\{\omega\colon \tau(\omega)<T\}\in\mathscr{F}_\tau$ (лемма 1.7), а $Y=(y_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$,— мартингал, то (замечание 2 к теореме 3.6)

$$\mathsf{M}\left[y_{\tau(\omega)}\chi_{\{t:\ c_t(\omega)<T\}}\right]=\mathsf{M}\left[y_{\tau(\omega)}\chi_{\{\omega:\ \tau(\omega)<T\}}\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\chi_{\{\omega:\ \tau(\omega)<T\}}\mathsf{M}(y_T\mid\mathscr{F}_\tau)\right]=\mathsf{M}\left[\chi_{\{\omega:\ \tau(\omega)<T\}}y_T\right].$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\int_0^T y_s\,dA_s=\int_0^\infty \mathsf{M}\left\{\chi_{\{t:\ c_t(\omega)<T\}}y_T\right\}dt=$$
$$=\mathsf{M}\left[y_T\int_0^\infty \chi_{\{t:\ c_t(\omega)<T\}}\,dt\right]=\mathsf{M}y_TA_T.$$

Таким образом, (3.19) доказано.

Поэтому, если (3.18) выполнено для любого $T>0$, то $\mathsf{M}\int\limits_0^T y_{s-}\,dA_s=\mathsf{M}y_TA_T$, откуда, переходя к пределу при $T\to\infty$, получаем, что процесс $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$ удовлетворяет равенству (3.17).

Обратно, пусть выполнено (3.19). Тогда, поскольку

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_s\,dA_s=\mathsf{M}A_\infty y_\infty, \text{ то } \mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_s\,dA_s=\mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_{s-}\,dA_s.$$

Пусть теперь $y_s^*=y_{s-}\chi_{\{s<T\}}+y_T\chi_{\{s\geqslant T\}}$. Процесс $Y^*=(y_s^*, \mathscr{F}_s)$, $s\geqslant 0$, как нетрудно проверить*), является мартингалом (непрерывным справа, ограниченным), и равенство

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_s^*\,dA_s=\mathsf{M}\int\limits_0^\infty y_{s-}^*\,dA_s$$

превращается в равенство (3.18), что и требовалось доказать.

Сформулируем теперь аналог теоремы 2.13 (разложение Дуба), ограничившись сначала лишь неотрицательными супермартингалами, являющимися потенциалами.

Теорема 3.8 (разложение Дуба — Мейера). *Пусть непрерывный справа потенциал* $\Pi=(\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t<\infty$, *принадлежит классу* D. *Тогда существует интегрируемый возрастающий процесс* $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, *такой, что*

$$\pi_t=\mathsf{M}(A_\infty\,|\,\mathscr{F}_t)-A_t, \quad t\geqslant 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{3.20}$$

В разложении (3.20) *процесс* A_t, $t\geqslant 0$, *может быть взят натуральным.*

Разложение (3.20) *с натуральным возрастающим процессом единственно.*

Доказательство. Для каждого $n=0, 1, \ldots$ последовательность $(\pi_{i\cdot 2^{-n}}, \mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}})$, $i=0, 1, \ldots$, образует потенциал (с дискретным временем $0, 2^{-n}, 2\cdot 2^{-n}, \ldots$). Согласно следствию 1 теоремы 2.13 для каждого n

$$\pi_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left[A_\infty(n)\,|\,\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]-A_{i\cdot 2^{-n}}(n), \quad i=0, 1, \ldots, \tag{3.20$'$}$$

*) Более общий результат такого характера содержится в лемме 3,3.

где величины $A_{i\cdot 2^{-n}}(n)$ являются $\mathscr{F}_{(i-1)\cdot 2^{-n}}$-измеримыми образуют возрастающий процесс и

$$A_\infty(n) = \lim_{i\to\infty} A_{i\cdot 2^{-n}}(n). \tag{3.21}$$

Предположим сейчас, что величины $\{A_\infty(n),\ n=0,\ 1,\ \ldots\}$ равномерно интегрируемы (ниже будет показано, что для этого необходимо и достаточно, чтобы потенциал π принадлежал классу D). Тогда, согласно теореме 1.7, можно найти такую последовательность целых чисел $n_1,\ n_2,\ \ldots \to \infty$ и интегрируемую функцию A_∞, что для всякой ограниченной случайной величины ξ

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{M} A_\infty(n_i)\,\xi = \mathsf{M} A_\infty \xi. \tag{3.22}$$

Обозначим m_t непрерывную справа модификацию $\mathsf{M}(A_\infty \mid \mathscr{F}_t)$, существующую в силу следствия 2 теоремы 3.2.

Пусть $r \leqslant s$ являются числами вида $i \cdot 2^{-n}$, $i=0,\ 1,\ \ldots$ Тогда $A_r(n) \leqslant A_s(n)$, что вместе с (3.20) дает

$$\mathsf{M}[A_\infty(n) \mid \mathscr{F}_r] - \pi_r \leqslant \mathsf{M}[A_\infty(n) \mid \mathscr{F}_s] - \pi_s. \tag{3.23}$$

Отсюда при $n = n_i \to \infty$ получаем, что

$$m_r - \pi_r \leqslant m_s - \pi_s. \tag{3.24}$$

Положим $A_t = m_t - \pi_t$. Эта функция P-п. н. непрерывна справа, и поскольку согласно (3.24) она не убывает на двоично-рациональной последовательности, то A_t является возрастающим процессом.

Далее, $\pi_t \to 0$ (P-п. н.), $t\to\infty$, а $m_t = \mathsf{M}(A_\infty \mid \mathscr{F}_t) \to \mathsf{M}(A_\infty \mid \mathscr{F}_\infty) = A_\infty$, $t\to\infty$. Поэтому P-п. н. $\lim\limits_{t\to\infty} A_t$ совпадает с ранее введенной величиной A_∞.

Покажем теперь, что процесс A_t, $t \geqslant 0$, является натуральным. Пусть $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — ограниченный неотрицательный мартингал, имеющий P-п. н. пределы слева $y_{t-} = \lim\limits_{s\uparrow t} y_s$ в каждой точке $t > 0$.

Поскольку процесс A_t, $t \geqslant 0$, непрерывен справа, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (теорема 1.4)

$$\mathsf{M}\int_0^\infty y_{s-}\,dA_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}}\left(A_{(i+1)\,2^{-n}} - A_{i\cdot 2^{-n}}\right)\right]. \tag{3.25}$$

Но $y_{i\cdot 2^{-n}}$ $\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}$-измеримы, поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}}\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}} - A_{i\cdot 2^{-n}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}} \mathsf{M}\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}} - A_{i\cdot 2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}} \mathsf{M}\left(\left(m_{(i+1)\cdot 2^{-n}} - \pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\right) - \left(m_{i\cdot 2^{-n}} - \pi_{i\cdot 2^{-n}}\right) \mid \mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}} \mathsf{M}\left(\pi_{i\cdot 2^{-n}} - \pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}} \mid \mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}}\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n) - A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)\right]. \qquad (3.26)$$

Заметим теперь, что $A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}$ $\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}$-измеримы, а значит,

$$\mathsf{M}\left[y_{i\cdot 2^{-n}} A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)\right] = \mathsf{M}\left[y_{(i+1)\cdot 2^{-n}} A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\right]. \qquad (3.27)$$

Из (3.25) — (3.27) находим, что

$$\mathsf{M}\int_0^{\infty} y_{s-}\, dA_s = \lim_n \mathsf{M}\left[A_\infty(n)\, y_\infty\right]. \qquad (3.28)$$

Согласно (3.22)

$$\lim_{n_i\to\infty} \mathsf{M}\left[A_\infty(n_i)\, y_\infty\right] = \mathsf{M}\left[A_\infty y_\infty\right]. \qquad (3.29)$$

Из сопоставления (3.28) и (3.29) заключаем, что

$$\mathsf{M}\int_0^{\infty} y_{s-}\, dA_s = \mathsf{M} A_\infty y_\infty, \qquad (3.30)$$

т. е. построенный процесс A_t, $t \geqslant 0$, натуральный.

Предположим теперь, что есть еще одно разложение $\pi_t = \mathsf{M}(B_\infty \mid \mathcal{F}_t) - B_t$ с натуральным возрастающим процессом $(B_t,\ t \geqslant 0)$. Тогда

$$\pi_{i\cdot 2^{-n}} = \mathsf{M}\left(B_\infty \mid \mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right) - B_{i\cdot 2^{-n}}$$

и

$$\mathsf{M}\int_0^{\infty} y_{s-}\, dB_s = \mathsf{M} B_\infty y_\infty, \qquad (3.31)$$

где $Y = (y_t,\ \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — неотрицательный ограниченный мартингал с существующими пределами слева $y_{t-} = \lim_{s\uparrow t} y_s$. Возьмем, в частности, некоторый ограниченный мартинга

$(\tilde{y}_{i\cdot 2^{-n}}, \mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}})$, $i=0, 1, \ldots$, и образуем мартингал (с непрерывным временем) $\tilde{Y}=(\tilde{y}_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, полагая $\tilde{y}_t=\tilde{y}_{i\cdot 2^{-n}}$, $i\cdot 2^{-n}\leqslant t<(i+1)\cdot 2^{-n}$. Тогда из (3.31) вытекает, что

$$\mathsf{M}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{y}_{(i-1)\cdot 2^{-n}}\left[B_{i\cdot 2^{-n}}-B_{(i-1)\cdot 2^{-n}}\right]=\mathsf{M}\tilde{y}_\infty B_\infty. \tag{3.32}$$

В теореме 2.14 было показано, что из (3.32) вытекает $\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}$-измеримость величин $B_{(i+1)\cdot 2^{-n}}$. Поэтому, сравнивая два разложения:

$$\pi_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left[A_\infty(n)\,|\,\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]-A_{i\cdot 2^{-n}}(n),$$
$$\pi_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left[B_\infty(n)\,|\,\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]-B_{i\cdot 2^{-n}}(n),$$

видим, что в силу единственности разложения Дуба

$$A_{i\cdot 2^{-n}}(n)=B_{i\cdot 2^{-n}}(n), \qquad i=0,\ 1,\ \ldots \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Следовательно, $A_\infty(n)=B_\infty(n)$ и $A_\infty=B_\infty$ (P-п. н.). Но $\pi_t=\mathsf{M}[A_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]-A_t=\mathsf{M}[B_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]-B_t$, откуда получаем: $A_t=B_t$ (P-п. н.) для всех $t\geqslant 0$.

Для полного завершения доказательства надо еще установить, что для равномерной интегрируемости последовательности $\{A_\infty(n),\ n=0, 1, \ldots\}$ необходимо и достаточно, чтобы потенциал $\pi=(\pi_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, принадлежал классу D.

Если семейство $\{A_\infty(n),\ n=0,\ 1,\ \ldots\}$ равномерно интегрируемо, то, как было установлено, $\pi_t=\mathsf{M}[A_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]-A_t$. Следовательно, $\pi_\tau\leqslant\mathsf{M}[A_\infty\,|\,\mathcal{F}_\tau]$.

Но семейство $\{\mathsf{M}[A_\infty\,|\,\mathcal{F}_\tau],\ \tau\in\mathfrak{T}\}$ равномерно интегрируемо (теорема 3.7), поэтому таким же свойством обладает и семейство $\{\pi_\tau,\ \tau\in\mathfrak{T}\}$, т. е. потенциал π принадлежит классу D.

Обратно, пусть $\pi\in D$. Тогда согласно разложению Дуба для каждого $n=0,\ 1,\ \ldots$ P-п. н.

$$\pi_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left[A_\infty(n)\,|\,\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]-A_{i\cdot 2^{-n}}(n). \tag{3.33}$$

Поскольку $A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)$ $\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}}$-измеримы, то для каждого $\lambda>0$ момент

$$\tau_{n,\lambda}=\inf\left\{i\cdot 2^{-n}:\ A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)>\lambda\right\} \tag{3.34}$$

($\tau_{n,\lambda}=\infty$, если множество $\{\cdot\}$ в (3.34) пусто) будет марковским относительно семейства $\left\{\mathcal{F}_{i\cdot 2^{-n}},\ i=0,\ 1,\ \ldots\right\}$.

Ясно, что $\{\omega:\ A_\infty(n)>\lambda\}=\{\omega:\ \tau_{n,\lambda}<\infty\}$, и в силу (3.33)

$$\pi_{\tau_{n,\lambda}}=\mathsf{M}\left[A_\infty(n)\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{n,\lambda}}\right]-A_{\tau_{n,\lambda}}(n) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{3.35}$$

Отсюда находим

$$\mathsf{M}\,[A_\infty(n);\ \{A_\infty(n)>\lambda\}]=$$
$$=\mathsf{M}\left[A_{\tau_{n,\lambda}}(n);\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right]+\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\lambda}};\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\lambda\mathsf{P}\{A_\infty(n)>\lambda\}+\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\lambda}};\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right],\tag{3.36}$$

поскольку в силу (3.34) $A_{\tau_{n,\lambda}}(n)\leqslant\lambda$.

Из (3.36) получаем

$$\mathsf{M}\,[A_\infty(n)-\lambda;\ \{A_\infty(n)>2\lambda\}]\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{M}\,[A_\infty(n)-\lambda;\ \{A_\infty(n)>\lambda\}]\leqslant\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\lambda}};\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right].\tag{3.37}$$

Значит,

$$\lambda\mathsf{P}\{A_\infty(n)>2\lambda\}\leqslant\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\lambda}};\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right].\tag{3.38}$$

Из (3.36) (с заменой λ на 2λ) и (3.38) находим

$$\mathsf{M}\,[A_\infty(n);\ \{A_\infty(n)>2\lambda\}]\leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda\mathsf{P}\{A_\infty(n)>2\lambda\}+\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,2\lambda}};\ \{\tau_{n,2\lambda}<\infty\}\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\lambda}};\ \{\tau_{n,\lambda}<\infty\}\right]+\mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,2\lambda}};\ \{\tau_{n,2\lambda}<\infty\}\right].\tag{3.39}$$

Заметим теперь, что

$$\mathsf{P}\{\tau_{n,\lambda}<\infty\}=\mathsf{P}\{A_\infty(n)>\lambda\}\leqslant\frac{\mathsf{M}A_\infty(n)}{\lambda}=\frac{\mathsf{M}\pi_0}{\lambda}\to 0,\quad \lambda\to\infty.$$

Из этого замечания и предположения $\pi\in D$ вытекает, что при $\lambda\to\infty$ правая часть в (3.39) равномерно по $n=0, 1, \ldots$ стремится к нулю. Поэтому равномерно по всем $n=0, 1, \ldots$

$$\int\limits_{\{A_\infty(n)>2\lambda\}} A_\infty(n)\,dP\to 0,\qquad \lambda\to\infty,$$

что и доказывает равномерную интегрируемость величин $\{A_\infty(n),\ n=0,\ 1,\ \ldots\}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $X=(x_t,\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$,—непрерывный справа супермартингал, принадлежащий классу D. Тогда существуют непрерывный справа равномерно интегрируемый мартингал $M=(m_t,\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, и интегрируемый возрастающий натуральный процесс $A=(A_t,\mathscr{F}_t)$ такие, что*

$$x_t=m_t-A_t\qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),\qquad t\geqslant 0.\tag{3.40}$$

Это разложение (с натуральным процессом A_t, $t\geqslant 0$) единственно с точностью до стохастической эквивалентности.

Докажем этот результат. Поскольку $X\in D$, то, в частности, $\sup\limits_t \mathsf{M}\,|x_t|<\infty$ и $\sup\limits_t \mathsf{M}\,x_t^-<\infty$. Следовательно, по теореме 3.3 существует $x_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}x_t$ с $\mathsf{M}\,|x_\infty|<\infty$.

Пусть $\tilde{m}_t$ — непрерывная справа модификация мартингала $\mathsf{M}(x_\infty|\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$. Тогда, если $\pi_t = x_t - \tilde{m}_t$, то процесс $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, будет образовывать непрерывный справа потенциал, принадлежащий классу D, поскольку $X\in D$ и мартингал $\tilde{M} = (\mathsf{M}(x_\infty|\mathscr{F}_t), \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, также принадлежит классу D (теорема 3.7). Применяя теперь разложение Дуба — Мейера к потенциалу $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, находим, что

$$x_t = \mathsf{M}(x_\infty|\mathscr{F}_t) + \mathsf{M}(A_\infty|\mathscr{F}_t) - A_t, \tag{3.41}$$

где A_t, $t\geqslant 0$, — некоторый интегрируемый натуральный возрастающий процесс.

Замечание. Теорема 3.8 и следствие из нее остаются справедливыми и для непрерывных справа супермартингалов $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, принадлежащих классу DL, с тем лишь отличием, что натуральный возрастающий процесс A_t, $t\geqslant 0$, таков, что, вообще говоря, $\mathsf{M}A_\infty \leqslant \infty$ (см. [126]).

3. В теореме 3.8 и в замечании к ней предполагалось, что супермартингал $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T\leqslant\infty$, принадлежит классу D или DL. Остановимся теперь на аналоге разложения Дуба — Мейера, отказавшись от предположения, что $\Pi\in D$ или $\Pi\in DL$.

Определение 6. Случайный процесс $M = (m_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, называется *локальным мартингалом*, если существует возрастающая последовательность марковских моментов τ_n, $n=1, 2, \ldots$ (относительно $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$), такая, что

1) $\mathsf{P}(\tau_n\leqslant n) = 1$, $\mathsf{P}(\lim\limits_n \tau_n = \infty) = 1$;

2) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ последовательности $\{m_{t\wedge\tau_n}, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0)$ являются равномерно интегрируемыми мартингалами.

В связи с данным определением отметим, что всякий мартингал с непрерывными справа траекториями является локальным мартингалом. Вытекает это из следующего предложения (ср. с теоремой 2.15).

Лемма 3.3. *Пусть $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — мартингал с непрерывными справа траекториями и $\tau = \tau(\omega)$ — марковский момент относительно системы $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$. Тогда процесс $(x_{t\wedge\tau}, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, также является мартингалом.*

Доказательство. Положим

$$\tau_n = k/2^n \quad \text{на} \quad \left\{\omega\colon \frac{k-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{k}{2^n}\right\},$$

считая $\tau_n = \infty$ на $\{\omega\colon \tau=\infty\}$. Зафиксируем два числа s и t, $s\leqslant t$, и пусть $t_n = k/2^n$, если $\frac{k-1}{2^n}\leqslant t<\frac{k}{2^n}$, и $s_n = k/2^n$, если $\frac{k-1}{2^n}\leqslant s<\frac{k}{2^n}$. При достаточно большом n, очевидно, $s_n\leqslant t_n$.

Согласно теореме 2.15 для всякого $A \in \mathscr{F}_s$

$$\int_A x_{\tau_n \wedge t_n} d\mathsf{P} = \int_A x_{\tau_n \wedge s_n} d\mathsf{P}.$$

Поскольку величины $x_{\tau_n \wedge t_n}$ и $x_{\tau_n \wedge s_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно интегрируемы (лемма 3.1), то, переходя к пределу ($n \to \infty$) в предыдущем равенстве, получаем $\mathsf{M}(x_{\tau \wedge t} | \mathscr{F}_s) = x_{\tau \wedge s}$ (P-п. н.).

Замечание. Утверждение леммы остается справедливым и для супермартингалов, имеющих непрерывные справа траектории и мажорирующих некоторый регулярный мартингал (ср. с теоремой 3.5).

Теорема 3.9. *Пусть $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывный справа неотрицательный супермартингал. Тогда существуют и единственны: непрерывный справа процесс $M = (m_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, являющийся локальным мартингалом, и натуральный интегрируемый возрастающий процесс $A = (A_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, такие, что*

$$x_t = m_t - A_t \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \geqslant 0. \tag{3.42}$$

Доказательство. Из аналога неравенства (3.7) для неотрицательного супермартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, находим, что

$$\mathsf{P}\{\sup_t x_t \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\mathsf{M}x_0}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{P}\{\sup_t x_t < \infty\} = 1. \tag{3.43}$$

Положим $\tau_n = \inf\{t: x_t \geqslant n\} \wedge n$. Тогда $\mathsf{P}\{\tau_n \leqslant n\} = 1$, $\mathsf{P}(\tau_n \leqslant \leqslant \tau_{n+1}\} = 1$ и в силу (3.43) $\mathsf{P}\{\lim_n \tau_n = \infty\} = 1$. Положим теперь $x_n(t) = x_{t \wedge \tau_n}$. Ясно, что $x_{t \wedge \tau_n} \leqslant \max\{n, x_{\tau_n}\}$, откуда следует, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ супермартингал $X_n = (x_n(t), \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, принадлежит классу D. Поэтому согласно следствию теоремы 3.8

$$x_n(t) = m_n(t) - A_n(t), \tag{3.44}$$

где $M_n = (m_n(t), \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — равномерно интегрируемый мартингал, а $A_n(t)$, $t \geqslant 0$, — натуральный возрастающий процесс.

Заметим, что $x_{n+1}(\tau_n \wedge t) = x_n(t)$. Далее, поскольку $\{m_{n+1}(t).\ t \geqslant 0\}$ равномерно интегрируемо, то таково же и семейство $\{m_{n+1}(t \wedge \tau_n), t \geqslant 0\}$. Процесс $A_{n+1}(\tau_n \wedge t)$, $t \geqslant 0$, получающийся из натурального возрастающего процесса $A_{n+1}(t)$, $t \geqslant 0$, «остановкой» в момент τ_n, как нетрудно доказать, также будет натуральным и возрастающим.

В силу единственности разложений Дуба — Мейера

$$m_{n+1}(\tau_n \wedge t) = m_n(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$A_{n+1}(\tau_n \wedge t) = A_n(t), \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому определены процессы $(m_t, t \geqslant 0)$ и $(A_t, t \geqslant 0)$, где

$$m_t = m_n(t) \quad \text{для} \quad t \leqslant \tau_n,$$
$$A_t = A_n(t) \quad \text{для} \quad t \leqslant \tau_n.$$

Ясно, что процесс $M = (m_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, является локальным мартингалом, а A_t, $t \geqslant 0$, — возрастающим процессом.

Поскольку для $A_t^N = A_t \wedge N$

$$\mathsf{M} A_t^N = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(A_t^N;\ \tau_n \geqslant t) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}(A_n^N(t);\ \tau_n \geqslant t) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{M} A_n^N(t) \leqslant \lim_{n\to\infty} [\mathsf{M} x_n(0) - \mathsf{M} x_n(t)] \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathsf{M} x_n(0) = \mathsf{M} x_0 < \infty,$$

то величины A_t^N, $t \geqslant 0$, интегрируемы, и по лемме Фату $\mathsf{M} A_t < \infty$ и $\mathsf{M} A_\infty < \infty$.

Пусть теперь $Y = (y_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — положительный ограниченный мартингал, имеющий пределы слева $y_{t-} = \lim_{s \uparrow t} y_s$ (P-п. н.). Тогда, используя лемму 3.2 применительно к процессам $A_n(t)$, $t \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$\mathsf{M} \int_0^t y_s\, dA_s = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left[\int_0^t y_s\, dA_s;\ \tau_n \geqslant t\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left[\int_0^t y_s\, dA_n(s);\ \tau_n \geqslant t\right] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left[\int_0^t y_{s-}\, dA_n(s),\ \tau_n \geqslant t\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left[\int_0^t y_{s-}\, dA_s;\ \tau_n \geqslant t\right] = \mathsf{M} \int_0^t y_{s-}\, dA_s.$$

Из полученного равенства

$$\mathsf{M} \int_0^t y_s\, dA_s = \mathsf{M} \int_0^t y_{s-}\, dA_s$$

и леммы 3.2 следует, что процесс A_t, $t \geqslant 0$, является натуральным.

Единственность разложения (3.42) доказывается так же, как и в теореме 3.8.

§ 4. Некоторые свойства натуральных возрастающих процессов

1. В случае дискретного времени $n=0, 1, \ldots$ возрастающий процесс $A=(A_n, \mathscr{F}_n)$, $n=0, 1, \ldots$, назывался натуральным, если величины A_{n+1} были $\mathscr{F}_n$-измеримы. Естественно было бы ожидать, что в случае непрерывного времени данное в предшествующем параграфе определение натурального возрастающего процесса $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$ (см. 3.17), приводит к тому, что при каждом $t>0$ случайные величины A_t являются на самом деле $\mathscr{F}_{t-}$-измеримыми. Покажем, что это действительно так.

Теорема 3.10. *Пусть $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — непрерывный справа интегрируемый возрастающий процесс, $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$, $t\geqslant 0$. Тогда для каждого $t>0$ величины A_t являются $\mathscr{F}_{t-}$-измеримыми.*

Доказательство. Образуем потенциал

$$\pi_t = \mathsf{M}[A_\infty \mid \mathscr{F}_t] - A_t, \tag{3.45}$$

беря в качестве $\mathsf{M}[A_\infty \mid \mathscr{F}_t]$ непрерывную справа модификацию. Пользуясь обозначениями, принятыми при доказательстве теоремы 3.8, имеем

$$\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}} = \mathsf{M}\left[A_\infty(n) \mid \mathscr{F}_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\right] - A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n). \tag{3.46}$$

Зафиксируем некоторое $t>0$ и положим $t_n=(i+1)\cdot 2^{-n}$, если $i\cdot 2^{-n}<t\leqslant(i+1)\cdot 2^{-n}$. Тогда из (3.46) в силу $\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}$-измеримости величины $A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)$ получаем

$$\mathsf{M}\left[\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}} \mid \mathscr{F}_t\right] = \mathsf{M}\left[A_\infty(n) \mid \mathscr{F}_t\right] - A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n). \tag{3.47}$$

Подставляя сюда значения $\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}$ из (3.45), находим

$$\mathsf{M}[A_\infty(n) \mid \mathscr{F}_t] = \mathsf{M}\left[A_\infty - A_{t_n} \mid \mathscr{F}_t\right] - A_{t_n}(n), \quad t_n=(i+1)\cdot 2^{-n}. \tag{3.48}$$

Поскольку разложение (3.45) с натуральным процессом $A=(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, единственно, то, в соответствии с доказательством теоремы 3.8, существует подпоследовательность $\{n_j,\ j=1, 2, \ldots\}$ такая, что $A_\infty(n_j)$ сходятся слабо к A_∞. Тогда, очевидно, и $\mathsf{M}[A_\infty(n_j) \mid \mathscr{F}_t]$ слабо сходятся к $\mathsf{M}[A_\infty \mid \mathscr{F}_t]$. Заметим также, что в силу непрерывности справа процесса A_t, $t\geqslant 0$,

$$\mathsf{M}\left|\mathsf{M}\left(A_{t_{n_j}} \middle| \mathscr{F}_t\right) - A_t\right| \to 0, \quad n_j\to\infty.$$

Учитывая все это, из (3.48) получаем, что $A_{t_{n_j}}(n_j)$ сходятся слабо к A_t, $n_j\to\infty$.

Величины $A_{t_{n_j}}(n_j)$ являются $\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n_j}}$-измеримыми, и поскольку $i\cdot 2^{-n_j} < t \leqslant t_{n_j}$, то они и $\mathscr{F}_{t-}$-измеримы.

Покажем теперь, что и слабый предел A_t этих величин также будет $\mathscr{F}_{t-}$-измеримым. Вытекает это из следующего общего предложения.

Лемма 3.4. *Пусть на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *задана последовательность случайных величин* ξ_i, $i=1, 2, \ldots$, *с* $\mathsf{M}|\xi_i| < \infty$, *слабо сходящаяся к случайной величине* ξ, *т. е. пусть для любой ограниченной* $\mathscr{F}$*-измеримой величины* η

$$\mathsf{M}\xi_i\eta \to \mathsf{M}\xi\eta, \quad i \to \infty. \tag{3.49}$$

Предположим, что случайные величины ξ_i *являются* $\mathscr{G}$*-измеримыми, где* $\mathscr{G}$ — *(полная)* σ*-подалгебра* $\mathscr{F}$. *Тогда случайная величина* ξ *также* $\mathscr{G}$*-измерима.*

Доказательство. Согласно теореме 1.7 последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ равномерно интегрируема. Эта последовательность останется равномерно интегрируемой, если ее рассматривать на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{G}, \mathsf{P})$. Следовательно, еще раз применив теорему 1.7, получаем, что найдется такая подпоследовательность $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots$ и $\mathscr{G}$-измеримая случайная величина $\tilde{\xi}$, что для любой ограниченной $\mathscr{G}$-измеримой величины $\tilde{\eta}$

$$\mathsf{M}\xi_{n_i}\tilde{\eta} \to \mathsf{M}\tilde{\xi}\tilde{\eta}, \quad i \to \infty. \tag{3.50}$$

Согласно (3.49) $\mathsf{M}\xi_{n_i}\eta \to \mathsf{M}\,\xi\eta$, и, с другой стороны, в силу (3.50)

$$\mathsf{M}\xi_{n_i}\eta = \mathsf{M}\,\{\xi_{n_i}\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{G})\} \to \mathsf{M}\,\{\tilde{\xi}\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathscr{G})\} = \mathsf{M}\tilde{\xi}\eta.$$

Следовательно, $\mathsf{M}\xi\eta = \mathsf{M}\tilde{\xi}\eta$, откуда $\xi = \tilde{\xi}$ (P-п. н.), а значит, ξ $\mathscr{G}$-измерима.

Замечание. Если τ — марковский момент, то случайная величина $A_\tau = A_{\tau(\omega)}(\omega)$ является $\mathscr{F}_{\tau-}$-измеримой. Напомним, что $\mathscr{F}_{\tau-}$ есть σ-алгебра, порожденная множествами вида $\{\tau > t\} \cap \Lambda_t$, где $\Lambda_t \in \mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$.

2. В следующей теореме даются условия, при которых натуральный процесс A_t, соответствующий потенциалу π_t, является непрерывным.

Предварительно введем такое

Определение 7. Потенциал π_t, $t \geqslant 0$, является *регулярным*, если для любой последовательности $\{\tau_n, n=1, 2, \ldots\}$ марковских моментов таких, что $\tau_n \uparrow \tau$, $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$,

$$\mathsf{M}\pi_{\tau_n} \to \mathsf{M}\pi_\tau.$$

Теорема 3.11. *Пусть* $\Pi=(\pi_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — *непрерывный справа потенциал, принадлежащий классу* D. *Для того чтобы отвечающий этому потенциалу натуральный возрастающий процесс* A_t, $t\geqslant 0$, *был* **P**-п. н. *непрерывным (более точно — имел непрерывную модификацию), необходимо и достаточно, чтобы потенциал был регулярным.*

Доказательство необходимости просто. Пусть A_t, $t\geqslant 0$, является **P**-п. н. непрерывным процессом. Тогда, если $\tau_n\uparrow\tau$, то по теореме Лебега 1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}A_{\tau_n}=\mathsf{M}A_\tau$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\pi_{\tau_n}=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\left[A_\infty-A_{\tau_n}\right]=\mathsf{M}\left[A_\infty-A_\tau\right]=\mathsf{M}\pi_\tau. \tag{3.51}$$

Доказательство достаточности более сложно и будет разбито на ряд этапов.

3. Лемма 3.5. *Пусть* $\Pi=(\pi_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — *непрерывный справа потенциал и*

$$\pi_t=\mathsf{M}\left[A_\infty\,|\,\mathcal{F}_t\right]-A_t, \tag{3.52}$$

где A_t, $t\geqslant 0$, — *натуральный интегрируемый возрастающий процесс. Тогда*

$$\mathsf{M}A_\infty^2=\mathsf{M}\int_0^\infty\left[\pi_t+\pi_{t-}\right]dA_t, \tag{3.53}$$

где предел $\pi_{t-}=\lim\limits_{s\uparrow t}\pi_s$ *существует согласно следствию* 1 *теоремы* 3.2.

Доказательство. а) Предположим вначале, что $\mathsf{M}A_\infty^2<\infty$, и при этом допущении установим справедливость равенства (3.53).

Пусть m_t, $t\geqslant 0$, — непрерывная справа и имеющая пределы слева модификация $\mathsf{M}(A_\infty\,|\,\mathcal{F}_t)$ (см. следствие 2 к теореме 3.2). Тогда в силу равномерной интегрируемости семейства величин $\{m_t,\ t\geqslant 0\}$

$$\mathsf{M}\left[\int_0^\infty m_t\,dA_t\right]=\mathsf{M}\left[\int_0^\infty m_{t+}\,dA_t\right]=\lim_{k\to\infty}\mathsf{M}\left[\sum_{i=0}^\infty m_{\frac{i+1}{k}}\left(A_{\frac{i+1}{k}}-A_{\frac{i}{k}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^\infty\mathsf{M}\left[m_{\frac{i+1}{k}}\left(A_{\frac{i+1}{k}}-A_{\frac{i}{k}}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^\infty\left[\mathsf{M}m_{\frac{i+1}{k}}A_{\frac{i+1}{k}}-\mathsf{M}m_{\frac{i}{k}}A_{\frac{i}{k}}\right]=$$

$$=\mathsf{M}m_\infty A_\infty=\mathsf{M}A_\infty^2. \tag{3.54}$$

Воспользуемся теперь тем, что процесс A_t, $t\geqslant 0$, натуральный. Если $m_t^N=\mathsf{M}\left(A_\infty\wedge N\,|\,\mathcal{F}_t\right)$, $t\geqslant 0$, то

$$\mathsf{M}\int_0^\infty m_{t-}^N\,dA_t=\mathsf{M}m_\infty^N A_\infty.$$

Полагая $N \to \infty$, находим, что

$$\mathsf{M} \int_0^\infty m_{t-}\, dA_t = \mathsf{M} m_\infty A_\infty = \mathsf{M} A_\infty^2. \tag{3.55}$$

Заметим еще, что

$$\mathsf{M} \int_0^\infty (A_t + A_{t-})\, dA_t = \lim_{k \to \infty} \mathsf{M} \left[\sum_{i=0}^\infty \left(A_{\frac{i+1}{k}} + A_{\frac{i}{k}} \right) \left(A_{\frac{i+1}{k}} - A_{\frac{i}{k}} \right) \right] =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \mathsf{M} \sum_{i=0}^\infty \left[A^2_{\frac{i+1}{k}} - A^2_{\frac{i}{k}} \right] = \mathsf{M} A_\infty^2. \tag{3.56}$$

Из (3.54) — (3.56) получаем

$$\mathsf{M} \int_0^\infty (\pi_t + \pi_{t-})\, dA_t = \mathsf{M} \int_0^\infty (m_t + m_{t-})\, dA_t - \mathsf{M} \int_0^\infty (A_t + A_{t-})\, dA_t =$$

$$= 2\mathsf{M} A_\infty^2 - \mathsf{M} A_\infty^2 = \mathsf{M} A_\infty^2.$$

б) Предположим теперь, что

$$\mathsf{M} \int_0^\infty [\pi_t + \pi_{t-}]\, dA_t < \infty. \tag{3.57}$$

Тогда, если доказать, что в этом случае и $\mathsf{M} A_\infty^2 < \infty$, то равенство (3.53) будет вытекать из предыдущих рассмотрений.

В свою очередь для доказательства неравенства $\mathsf{M} A_\infty^2 < \infty$ достаточно установить, что для всех n, больших некоторого $N_0 < \infty$,

$$\mathsf{M} A_\infty^2(n) \leqslant C < \infty. \tag{3.58}$$

Вытекает это из того, что A_∞ является слабым пределом некоторой последовательности $\{A_\infty(n_i),\ i = 1, 2, \ldots\}$ и следующего предложения.

Лемма 3.6. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательность случайных величин $\mathsf{M} |\xi_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots,$ слабо сходящаяся к некоторой величине ξ, т. е. пусть для любой ограниченной случайной величины η*

$$\mathsf{M} \xi_i \eta \to \mathsf{M} \xi \eta, \quad i \to \infty. \tag{3.59}$$

Предположим, что $\sup_i \mathsf{M} \xi_i^2 \leqslant C < \infty$. *Тогда* $\mathsf{M} \xi^2 \leqslant C$.

Доказательство. Обозначим

$$\xi_{(n)} = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |\xi| > n. \end{cases}$$

Тогда, полагая в (3.59) $\eta=\xi_{(n)}$ и учитывая, что $\xi\xi_{(n)}=\xi^2_{(n)}$ (P-п. н.), получим

$$\mathsf{M}\xi^2_{(n)}=\mathsf{M}\xi\xi_{(n)}=\lim_{i\to\infty}\mathsf{M}\xi_i\xi_{(n)}\leqslant\left[\sup_i\mathsf{M}\xi_i^2\cdot\mathsf{M}\xi^2_{(n)}\right]^{1/2}=C^{1/2}\left(\mathsf{M}\xi^2_{(n)}\right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

Но $\mathsf{M}\xi^2_{(n)}\leqslant n<\infty$, поэтому (3.60) приводит к неравенству $\mathsf{M}\xi^2_{(n)}\leqslant C$. Наконец, по лемме Фату $\mathsf{M}\xi^2=\mathsf{M}\lim\limits_n\xi^2_{(n)}\leqslant C<\infty$, что и доказывает лемму 3.6.

Итак, возвращаясь к доказательству леммы 3.5, установим справедливость неравенства (3.58).

Из (3.57) вытекает, что найдется такое $N_0<\infty$, что для всех $n\geqslant N_0$

$$\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{i\cdot 2^{-n}}\left[A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}-A_{i\cdot 2^{-n}}\right]\leqslant C<\infty \quad (3.61)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{i\cdot 2^{-n}}\left[A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right]\leqslant C<\infty.$$

Пусть $a^N=\min(a,N)$ и $\pi^N_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left(A^N_\infty(n)\,|\,\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right)-A^N_{i\cdot 2^{-n}}(n)$. Поскольку $A^N_{i\cdot 2^{-n}}(n)\leqslant N<\infty$, то применимы результаты пункта а), в соответствии с которыми

$$\mathsf{M}\left[A^N_\infty(n)\right]^2=\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\pi^N_{(i+1)\cdot 2^{-n}}+\pi^N_{i\cdot 2^{-n}}\right)\left(A^N_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A^N_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right).$$

Заметим, что

$$A^N_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A^N_{i\cdot 2^{-n}}(n)\leqslant\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)^N$$

и

$$\pi^N_{i\cdot 2^{-n}}=\mathsf{M}\left[A^N_\infty(n)-A^N_{i\cdot 2^{-n}}(n)\,|\,\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{M}\left[\left(A_\infty(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)^N|\,\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right]\leqslant\pi_{i\cdot 2^{-n}}.$$

Поэтому согласно (3.61)

$$\mathsf{M}\left[A^N_\infty(n)\right]^2\leqslant\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}+\pi_{i\cdot 2^{-n}}\right)\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)\leqslant 2C.$$

где мы воспользовались тем, что

$$\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)=$$

$$=\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\mathsf{M}\left\{\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\left[A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right]\middle|\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right\}=$$

$$=\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\mathsf{M}\left(\pi_{(i+1)\cdot 2^{-n}}\middle|\mathscr{F}_{i\cdot 2^{-n}}\right)\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{M}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{i\cdot 2^{-n}}\left(A_{(i+1)\cdot 2^{-n}}(n)-A_{i\cdot 2^{-n}}(n)\right)\leqslant C.$$

Итак, $\mathsf{M}\left[A_{\infty}^{N}(n)\right]^2\leqslant 2C<\infty$, и по лемме Фату $\mathsf{M}\left[A_{\infty}(n)\right]^2\leqslant 2C$ для всех $n\geqslant N_0$.

4. Для формулировки еще двух вспомогательных предложений, используемых при доказательстве теоремы 3.11, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим процесс A_t, $t\geqslant 0$, и построим по нему субмартингал $(A_n(t), \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, полагая

$$A_n(t)=\mathsf{M}\left[A_{\varphi_n(t)}\middle|\mathscr{F}_t\right], \tag{3.62}$$

где $\varphi_n(t)=(k+1)2^{-n}$, если $k2^{-n}\leqslant t<(k+1)2^{-n}$. Согласно теореме 3.1 можно считать, что траектории $A_n(t)$, $t\geqslant 0$, непрерывны справа P-п. н. и имеют пределы слева в каждой точке $t\geqslant 0$.

Пусть τ — м. м. (относительно $(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$). Тогда из леммы 1.9 и определения условного математического ожидания нетрудно вывести, что

$$A_n(\tau)=\mathsf{M}\left[A_{\varphi_n(\tau)}\middle|\mathscr{F}_\tau\right]. \tag{3.63}$$

Для каждого $\varepsilon>0$ определим

$$\tau_{n,\varepsilon}=\inf\{t:\ A_n(t)-A_t\geqslant\varepsilon\}, \tag{3.64}$$

полагая $\tau_{n,\varepsilon}=+\infty$, если множество $\{\cdot\}$ в (3.64) пусто. Ясно, что $\tau_{n,\varepsilon}\leqslant\tau_{n+1,\varepsilon}$ (P-п. н.). Положим $\tau_\varepsilon=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_{n,\varepsilon}$.

Лемма 3.7. *Для всех* $n=1, 2, \ldots$

$$\mathsf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon}-A_{\tau_{n,\varepsilon}}\right]\geqslant\varepsilon\mathsf{P}(\tau_\varepsilon<\infty)+\mathsf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon}-A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right]. \tag{3.65}$$

Доказательство. Имеем

$$A_{\tau_\varepsilon}-A_{\tau_{n,\varepsilon}}=\left[A_{\tau_\varepsilon}-A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right]+\left[A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}-A_{\tau_{n,\varepsilon}}\right]$$

и

$$\mathsf{M}A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}=\mathsf{M}\mathsf{M}\left[A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\middle|\mathscr{F}_{\tau_{n,\varepsilon}}\right]\geqslant$$

$$\geqslant\mathsf{M}\mathsf{M}\left[A_{\varphi_n(\tau_{n,\varepsilon})}\middle|\mathscr{F}_{\tau_{n,\varepsilon}}\right]=\mathsf{M}A_n(\tau_{n,\varepsilon}).$$

Поэтому, учитывая, что $A_n(t) \geqslant A_t$ ($\mathbf{P}$-п. н.), $t \geqslant 0$, получаем

$$\mathbf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\tau_{n,\varepsilon}}\right] \geqslant \mathbf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right] + \mathbf{M}\left[A_n(\tau_{n,\varepsilon}) - A_{\tau_{n,\varepsilon}}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right] + \int\limits_{\{\tau_\varepsilon < \infty\}} \left[A_n(\tau_{n,\varepsilon}) - A_{\tau_{n,\varepsilon}}\right] d\mathbf{P} \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right] + \varepsilon\mathbf{P}(\tau_\varepsilon < \infty),$$

где мы воспользовались тем, что в силу непрерывности справа процессов $A_n(t)$ и A_t, $t \geqslant 0$, на множестве $\{\tau_\varepsilon < \infty\}$

$$A_n(\tau_{n,\varepsilon}) - A_{\tau_{n,\varepsilon}} \geqslant \varepsilon.$$

Лемма 3.8. *Пусть A_t, $t \geqslant 0$, — натуральный процесс, отвечающий регулярному потенциалу $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, и $\mathbf{M}A_\infty^2 < \infty$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{M}\int\limits_0^\infty [A_t - A_{t-}]\, dA_t \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \{\varepsilon \mathbf{M}A_{\tau_{n,\varepsilon}} + \mathbf{M}[A_\infty(A_\infty - A_{\tau_{n,\varepsilon}})]\}. \tag{3.66}$$

Доказательство. Положим $\Delta_{n,k} = \{t\colon k \cdot 2^{-n} \leqslant t < (k+1)2^{-n}\}$. Поскольку для $t \in \Delta_{n,k}$ процесс $(A_n(t), \mathscr{F}_t)$ образует мартингал, а процесс $(A_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, натуральный, то из леммы 3.2 нетрудно вывести, что

$$\mathbf{M}\int\limits_{\Delta_{n,k}} A_n(t)\, dA_t = \mathbf{M}\int\limits_{\Delta_{n,k}} A_n(t-)\, dA_t.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\int\limits_0^\infty A_n(t-)\, dA_t = \mathbf{M}\int\limits_0^\infty A_n(t)\, dA_t. \tag{3.67}$$

С другой стороны (ср. с (3.54)),

$$\mathbf{M}\int\limits_{\Delta_{n,k}} A_n(t)\, dA_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbf{M}\left\{A_n((k+1)\cdot 2^{-n} - \varepsilon)\left[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}-\varepsilon} - A_{k\cdot 2^{-n}}\right]\right\}. \tag{3.68}$$

Но при $\varepsilon \downarrow 0$

$$A_n((k+1)\cdot 2^{-n} - \varepsilon) = \mathbf{M}\left[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}} \mid \mathscr{F}_{(k+1)\cdot 2^{-n}-\varepsilon}\right] \to$$
$$\to \mathbf{M}\left[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}} \mid \mathscr{F}_{(k+1)\cdot 2^{-n}-}\right] = A_{(k+1)\cdot 2^{-n}},$$

так как величина $A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}$ является $\mathscr{F}_{(k+1)\cdot 2^{-n}}$-измеримой согласно теореме 3.10.

Поскольку потенциал $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, является регулярным, то $\mathbf{M}A_t = \mathbf{M}A_\infty - \mathbf{M}\pi_t$ является непрерывной функцией и, следовательно, для каждого $t>0$ $\mathsf{P}(A_t=A_{t-})=1$. (Заметим, что $A_{t-}=\lim\limits_{s\uparrow t} A_s$ существует для каждого $t>0$, поскольку $A_s=\mathsf{M}[A_\infty|\mathscr{F}_s]-\pi_s$, а $\pi_{t-}=\lim\limits_{s\uparrow t}\pi_s$ и $\mathsf{M}[A_\infty|\mathscr{F}_{t-}]=\lim\limits_{s\uparrow t}\mathsf{M}[A_\infty|\mathscr{F}_s]$ существуют по следствию 1 теоремы 3.2 и по теореме 1.5 соответственно.)

Далее, $A_{(k+1)\cdot 2^{-n}-\varepsilon}\to A_{((k+1)\cdot 2^{-n})-}$, $\varepsilon\to 0$, где, согласно сказанному, $\mathsf{P}(A_{((k+1)\cdot 2^{-n})-}=A_{(k+1)\cdot 2^{-n}})=1$. Поэтому, если $\mathsf{M}A_\infty^2<\infty$, то из (3.68) следует, что

$$\mathsf{M}\int\limits_{\Delta_{n,k}} A_n(t)\,dA_t=\mathsf{M}\left\{A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}-A_{k\cdot 2^{-n}}]\right\},$$

и, значит,

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty A_n(t)\,dA_t=\sum_{k=0}^\infty \mathsf{M}\left\{A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}\left[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}-A_{k\cdot 2^{-n}}\right]\right\}. \tag{3.69}$$

Отсюда с учетом (3.67) получаем

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty A_t\,dA_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^\infty \mathsf{M}\left\{A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}\left[A_{(k+1)\cdot 2^{-n}}-A_{k\cdot 2^{-n}}\right]\right\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\int\limits_0^\infty A_n(t)\,dA_t=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\int\limits_0^\infty A_n(t-)\,dA_t, \tag{3.70}$$

а следовательно,

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty [A_t-A_{t-}]\,dA_t=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\int\limits_0^\infty [A_n(t-)-A_{t-}]\,dA_t. \tag{3.71}$$

Для получения неравенства (3.66) преобразуем в (3.71) правую часть. Имеем

$$\mathsf{M}\int\limits_0^\infty [A_n(t-)-A_{t-}]\,dA_t=\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau_{n,\varepsilon}} [A_n(t-)-A_{t-}]\,dA_t+$$
$$+\mathsf{M}\int\limits_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty [A_n(t-)-A_{t-}]\,dA_t\leqslant\varepsilon\mathsf{M}A_{\tau_{n,\varepsilon}}+\mathsf{M}\int\limits_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty A_n(t-)\,dA_t. \tag{3.72}$$

Положим $B_t=\mathsf{M}(A_\infty|\mathscr{F}_t)$. Тогда, очевидно, $B_{t-}\geqslant A_n(t-)$, и, значит (см. (3.19)),

$$\mathsf{M}\int\limits_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty A_n(t-)\,dA_t\leqslant\mathsf{M}\int\limits_{\tau_{n,\varepsilon}}^\infty B_{t-}\,dA_t=\mathsf{M}\left[A_\infty(A_\infty-A_{\tau_{n,\varepsilon}})\right]. \tag{3.73}$$

Из (3.72) и (3.73) вытекает

$$\mathsf{M}\int_0^\infty [A_n(t-)-A_{t-}]\,dA_t \leqslant \varepsilon\mathsf{M}A_{\tau_{n,\varepsilon}} + \mathsf{M}[A_\infty(A_\infty - A_{\tau_{n,\varepsilon}})], \quad (3.74)$$

что вместе с (3.71) очевидным образом приводит к неравенству (3.66).

5. Доказательство теоремы 3.11. Достаточность. Будем сначала предполагать, что $\mathsf{M}A_\infty^2 < \infty$. Поскольку потенциал $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, регулярный, то

$$\mathsf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\tau_{\varepsilon, n}}\right] = \mathsf{M}\left[\pi_{\tau_{n,\varepsilon}} - \pi_{\tau_\varepsilon}\right] \to 0, \quad n \to \infty. \quad (3.75)$$

В силу непрерывности справа процесса A_t, $t \geqslant 0$,

$$\mathsf{M}\left[A_{\tau_\varepsilon} - A_{\varphi_n(\tau_\varepsilon)}\right] \to 0, \quad n \to \infty, \quad (3.76)$$

так как $\varphi_n(\tau_\varepsilon) \downarrow \tau_\varepsilon$, $n \to \infty$.

Из (3.75), (3.76) и неравенства (3.65) леммы 3.7 получаем, что $\mathsf{P}(\tau_\varepsilon < \infty) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Но тогда (см. (3.66))

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\{\varepsilon\mathsf{M}A_{\tau_{n,\varepsilon}} + \mathsf{M}\left[A_\infty(A_\infty - A_{\tau_{n,\varepsilon}})\right]\right\} = \varepsilon\mathsf{M}A_\infty,$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\int_0^\infty [A_t - A_{t-}]\,dA_t \leqslant \varepsilon\mathsf{M}A_\infty.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{M}\int_0^\infty [A_t - A_{t-}]\,dA_t = 0,$$

и, значит, P-п. н. траектории процесса непрерывны слева. Поскольку же траектории A_t, $t \geqslant 0$, также непрерывны и справа, то процесс A_t, $t \geqslant 0$, непрерывен с вероятностью 1.

Освободимся теперь от предположения $\mathsf{M}A_\infty^2 < \infty$.

Пусть $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывный справа регулярный потенциал класса D и

$$\pi_t = \mathsf{M}(A_\infty \mid \mathscr{F}_t) - A_t, \quad (3.77)$$

где A_t, $t \geqslant 0$, — натуральный возрастающий процесс. Положим для $n = 1, 2, \ldots$

$$A_t^{(n)} = A_t \wedge n, \quad B_t^{(n)} = A_t^{(n+1)} - A_t^{(n)}$$

и

$$\pi_t^{(n)} = \mathsf{M}\left[B_\infty^{(n)} \mid \mathscr{F}_t\right] - B_t^{(n)}. \quad (3.78)$$

Ясно, что для каждого $t \geqslant 0$

$$\pi_t = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_t^{(n)}, \tag{3.79}$$

где потенциалы $\pi_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$, ограничены и непрерывны справа. Покажем, что каждый из них является регулярным, если регулярен потенциал $\Pi = (\pi_t, \mathscr{F}_t)$.

Из (3.77) и (3.78) следует, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\pi_t = \pi_t^{(n)} + z_t,$$

где потенциал

$$z_t = \mathsf{M}\left[A_\infty - B_\infty^{(n)} \,|\, \mathscr{F}_t\right] - \left(A_t - B_t^{(n)}\right).$$

Пусть последовательность марковских моментов $\tau_m \uparrow \tau$. Тогда по теореме 3.5 $\mathsf{M}\pi_{\tau_m}^{(n)} \geqslant \mathsf{M}\pi_\tau^{(n)}$, $\mathsf{M}z_{\tau_m} \geqslant \mathsf{M}z_\tau$, и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{M}\pi_{\tau_m}^{(n)} \geqslant \mathsf{M}\pi_\tau^{(n)}, \qquad \lim_{m\to\infty} \mathsf{M}z_{\tau_m} = \mathsf{M}z_\tau. \tag{3.80}$$

На самом же деле оба эти неравенства являются равенствами, поскольку потенциал π_t, $t \geqslant 0$, регулярен:

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{M}\pi_{\tau_m} = \mathsf{M}\pi_\tau.$$

Итак, каждый из потенциалов $\pi_t^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, является регулярным, ограниченным, и, согласно проведенному выше доказательству, отвечающие им натуральные возрастающие процессы $B_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$, непрерывны с вероятностью 1.

Для потенциала $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_t^{(n)}$ соответствующим натуральным процессом является процесс $B_t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_t^{(n)}$, где каждый из процессов $B_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$, непрерывен. Этот процесс также является непрерывным. Действительно,

$$0 \leqslant B_t - \sum_{n=1}^{N} B_t^{(n)} \leqslant B_\infty - \sum_{n=1}^{N} B_\infty^{(n)} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{3.81}$$

где с вероятностью 1 $B_\infty - \sum\limits_{n=1}^{N} B_\infty^{(n)} \to 0$, $N \to \infty$, поскольку $\mathsf{M}B_\infty = \mathsf{M} \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_\infty^{(n)} = \mathsf{M}A_\infty < \infty$.

Из (3.81) следует, что процесс B_t, $t \geqslant 0$, непрерывен с вероятностью 1.

Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что из единственности разложения (3.77) с натуральным процессом A_t, $t \geqslant 0$, вытекает, что $\mathsf{P}(A_t = B_t) = 1$, $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что в разложении (3.77) натуральный процесс A_t, $t \geqslant 0$, можно выбрать непрерывным с вероятностью 1.

ГЛАВА 4

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО ВИНЕРОВСКОМУ ПРОЦЕССУ. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Винеровский процесс как квадратично интегрируемый мартингал

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство и $\beta = (\beta_t)$, $t \geqslant 0$, — процесс броуновского движения (в смысле определения § 4 гл. 1). Обозначим $\mathscr{F}_t^\beta = \sigma\{\omega\colon \beta_s, s \leqslant t\}$. Тогда согласно (1.30) и (1.31) P-п. н.

$$\mathsf{M}\left(\beta_t \mid \mathscr{F}_s^\beta\right) = \beta_s \qquad t \geqslant s, \tag{4.1}$$

$$\mathsf{M}\left[(\beta_t - \beta_s)^2 \mid \mathscr{F}_s^\beta\right] = t - s, \quad t \geqslant s. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что процесс броуновского движения β является квадратично интегрируемым $\left(\mathsf{M}\beta_t^2 < \infty,\ t \geqslant 0\right)$ мартингалом (относительно системы σ-алгебр $F^\beta = \left(\mathscr{F}_t^\beta\right), t \geqslant 0\right)$ с непрерывными (P-п. н.) траекториями.

В определенном смысле справедлив и обратный результат, для формулировки которого введем следующее

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство и $F = (\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$. Случайный процесс $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, называется *винеровским* (*по отношению к семейству* $F = (\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$), если

1) траектории W_t, $t \geqslant 0$, непрерывны по t P-п. н.;

2) $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, является квадратично интегрируемым мартингалом с $W_0 = 0$ и

$$\mathsf{M}\left[(W_t - W_s)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] = t - s, \quad t \geqslant s.$$

Теорема 4.1 (Леви). *Всякий винеровский процесс* $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, *является процессом броуновского движения.*

Замечание 1. Эту теорему можно переформулировать следующим эквивалентным образом: всякий непрерывный квадратично интегрируемый мартингал $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, с $W_0=0$ и $\mathsf{M}[(W_t-W_s)^2|\mathscr{F}_s]=t-s$ является процессом со стационарными независимыми гауссовскими приращениями с $\mathsf{M}[W_t-W_s]=0$, $\mathsf{M}[W_t-W_s]^2=t-s$, $t\geqslant s$.

Замечание 2. В силу теоремы Леви в дальнейшем мы не будем различать винеровские процессы и процессы броуновского движения $\beta=(\beta_t)$, $t\geqslant 0$, поскольку последние являются винеровскими относительно системы σ-алгебр $F^\beta=(\mathscr{F}_t^\beta)$, $t\geqslant 0$.

Замечание 3. Полезное обобщение теоремы Леви, принадлежащее Дубу, будет дано далее в гл. 5 (теорема 5.12). Доказательству теоремы 4.1 предпошлем две леммы.

Лемма 4.1. *Пусть σ — марковский момент (относительно $F=(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$), $\mathsf{P}(\sigma\leqslant T)=1$, $T<\infty$ и $\tilde{W}_t=W_{t\wedge\sigma}$, $\tilde{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{t\wedge\sigma}$. Тогда $\tilde{W}=(\tilde{W}_t, \tilde{\mathscr{F}}_t)$, $t\geqslant 0$, — мартингал,*

$$\mathsf{M}(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s|\tilde{\mathscr{F}}_s)=0 \tag{4.3}$$

и

$$\mathsf{M}[(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s)^2|\tilde{\mathscr{F}}_s]=\mathsf{M}[(t\wedge\sigma)-(s\wedge\sigma)|\tilde{\mathscr{F}}_s], \qquad t\geqslant s. \tag{4.4}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить теорему 3.6 к мартингалам $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$ и $(W_t^2-t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$.

Лемма 4.2. *Пусть $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T<\infty$, — непрерывный ограниченный ($\mathsf{P}\{\sup\limits_{t\leqslant T}|x_t|\leqslant K<\infty\}=1$) мартингал и функция $f(x)$ непрерывна и ограничена вместе со своими частными производными $f'(x)$, $f''(x)$.*

Если для любых s, t, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$,

$$\mathsf{M}[(x_t-x_s)^2|\mathscr{F}_s]=\int_s^t \mathsf{M}[g_u|\mathscr{F}_s]\,du \tag{4.5}$$

с некоторой измеримой функцией $g_u=g_u(\omega)$, при каждом u, $0\leqslant u\leqslant T$, являющейся $\mathscr{F}_u$-измеримой и такой, что $\mathsf{M}\int_0^T g_u^2\,du<\infty$, то P-п. н.

$$\mathsf{M}[f(x_t)|\mathscr{F}_s]=f(x_s)+\frac{1}{2}\int_s^t \mathsf{M}[f''(x_u)g_u|\mathscr{F}_s]\,du, \quad s\leqslant t\leqslant T. \tag{4.6}$$

Доказательство. Для заданных s, t $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$ рассмотрим разбиение отрезка $[s, t]$ на n частей, $s\equiv t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}\equiv t$, такое, что $\max\limits_j[t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}]\to 0$, $n\to\infty$.

Тогда, очевидно,

$$f(x_t)-f(x_s)=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(x_{t_{j+1}^{(n)}}\right)-f\left(x_{t_j^{(n)}}\right)\right],$$

и по теореме о среднем

$$f\left(x_{t_{j+1}^{(n)}}\right)-f\left(x_{t_j^{(n)}}\right)=f'\left(x_{t_j^{(n)}}\right)\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right)\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]+\frac{1}{2}\Delta f_j''\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]^2,$$

где

$$\Delta f_j''=f''\left(x_{t_j^{(n)}}+\theta\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]\right)-f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right),$$

а θ — случайная величина, $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Ясно, что

$$\mathsf{M}\left[f\left(x_{t_{j+1}^{(n)}}\right)-f\left(x_{t_j^{(n)}}\right)\Big|\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]=\frac{1}{2}f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right)\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}\mathsf{M}\left[g_u\,|\,\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]du+$$
$$+\frac{1}{2}\mathsf{M}\left\{\Delta f_j''\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_i^{(n)}}\right]^2\Big|\mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}[f(x_t)-f(x_s)|\,\mathscr{F}_s]=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}\mathsf{M}\left[f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right)g_u\,|\,\mathscr{F}_s\right]du+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathsf{M}\left\{\Delta f_j''\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]^2\Big|\mathscr{F}_s\right\}. \qquad (4.7)$$

Покажем теперь, что при $n\to\infty$ P-п. н.

$$\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}\mathsf{M}\left[f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right)g_u\,|\,\mathscr{F}_s\right]du\to\int_s^t\mathsf{M}[f''(x_u)g_u\,|\,\mathscr{F}_s]\,du \qquad (4.8)$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-1}\mathsf{M}\left\{\Delta f_j''\left[x_{t_{j+1}^{(n)}}-x_{t_j^{(n)}}\right]^2\Big|\mathscr{F}_s\right\}\xrightarrow{\mathsf{P}}0. \qquad (4.9)$$

С этой целью определим

$$f_n''(u)=f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right),\qquad t_j^{(n)}\leqslant u<t_{j+1}^{(n)}.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M}\left[f''\left(x_{t_j^{(n)}}\right) g_u \mid \mathscr{F}_s\right] =$$

$$= \int_s^t \mathsf{M}\left[f_n''(u) g_u \mid \mathscr{F}_s\right] du \to \int_s^t \mathsf{M}\left[f''(x_u) g_u \mid \mathscr{F}_s\right] du$$

в силу теоремы 1.4 и того, что $f_n''(u) \to f''(x_u)$ (P-п. н.).

Далее,

$$\mathsf{M}\left|\sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{M}\left\{\Delta f_j'' \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]^2 \middle| \mathscr{F}_s\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{M}\left|\Delta f_j'' \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]^2\right| \leqslant \mathsf{M}\left[\max_{j,\theta} |\Delta f_j''| \sum_{j=0}^{n-1} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathsf{M}\left[\max_{j,\theta} |\Delta f_j''|\right]^2 \cdot \mathsf{M}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]^2\right]^2\right)^{1/2}.$$

Но $\mathsf{M}\left[\max_{j,\theta} |\Delta f_j''|\right]^2 \to 0$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности с вероятностью 1 процесса x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, и ограниченности функции $f''(x)$, а

$$\mathsf{M}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]^2\right)^2 = \mathsf{M}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}}^2 + x_{t_j^{(n)}}^2 - 2x_{t_j^{(n)}} x_{t_{j+1}^{(n)}}\right]\right)^2 =$$

$$= \mathsf{M}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}}^2 - x_{t_j^{(n)}}^2\right] - 2\sum_{j=0}^{n-1} x_{t_j^{(n)}} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{M}(x_t^2 - x_s^2)^2 + 8\mathsf{M}\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_{t_j^{(n)}} \left[x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right]\right)^2 =$$

$$= 2\mathsf{M}(x_t^2 - x_s^2)^2 + 8\sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{M}\left[x_{t_j^{(n)}}\left(x_{t_{j+1}^{(n)}} - x_{t_j^{(n)}}\right)\right]^2 =$$

$$= 2\mathsf{M}(x_t^2 - x_s^2)^2 + 8\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M} x_{t_j^{(n)}}^2 g_u \, du \leqslant$$

$$\leqslant 8K^2 + 8K^2 \int_s^t \mathsf{M} g_u^2 \, du < \infty,$$

что и доказывает (4.9).

Лемма 4.2 доказана.

2. Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\sigma_N = \inf\{t \leqslant T\colon \sup_{s\leqslant T} |W_s| = N\}$, $\sigma_N = T$ на множестве $\{\omega\colon \sup_{s\leqslant T} |W_s| < N\}$. Обозначим также $\tilde{W}_N(t) = W_{t\wedge\sigma_N}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t\wedge\sigma_N}$. Согласно лемме 4.1 $(\tilde{W}_N(t), \tilde{\mathcal{F}}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является мартингалом с

$$\mathsf{M}([\tilde{W}_N(t) - \tilde{W}_N(s)]^2 | \tilde{\mathcal{F}}_s) = \mathsf{M}[(t\wedge\sigma_N - s\wedge\sigma_N) | \tilde{\mathcal{F}}_s] = \int_s^t \mathsf{M}[\chi_N(u) | \tilde{\mathcal{F}}_s]\, du,$$

где

$$\chi_N(u) = \begin{cases} 1, & \sigma_N > u, \\ 0, & \sigma_N \leqslant u. \end{cases}$$

Тогда по лемме 4.2 для любой функции $f(x)$, ограниченной и непрерывной (вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$),

$$\mathsf{M}\left[f(\tilde{W}_N(t)) | \mathcal{F}_{s\wedge\sigma_N}\right] = f(\tilde{W}_N(s)) + \frac{1}{2}\int_s^t \mathsf{M}\left[f''(\tilde{W}_N(u))\chi_N(u) | \mathcal{F}_{s\wedge\sigma_N}\right] du. \tag{4.10}$$

Заметим теперь, что с вероятностью 1 при $N \to \infty$

$$\tilde{W}_N(u) \to W_u, \qquad \chi_N(u) \xrightarrow{\mathsf{P}} 1, \qquad \sigma_N \to T,$$

а $\mathcal{F}_{s\wedge\sigma_N} \uparrow \mathcal{F}_s$. Поэтому из (4.10), применяя теорему 1.6, предельным переходом по $N \to \infty$ получаем, что

$$\mathsf{M}[f(W_t) | \mathcal{F}_s] = f(W_s) + \frac{1}{2}\int_s^t \mathsf{M}[f''(W_u) | \mathcal{F}_s]\, du. \tag{4.11}$$

Положим $f(x) = e^{i\lambda x}$, где $-\infty < \lambda < \infty$. Тогда из соотношения (4.11) (примененного к действительной и мнимой частям этой функции) получаем

$$\mathsf{M}\left[e^{i\lambda W_t} | \mathcal{F}_s\right] = e^{i\lambda W_s} - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \mathsf{M}\left[e^{i\lambda W_u} | \mathcal{F}_s\right] du. \tag{4.12}$$

Пусть $y_t = \mathsf{M}[e^{i\lambda W_t} | \mathcal{F}_s]$, $t \geqslant s$, с $y_s = e^{i\lambda W_s}$. Тогда в силу (4.12) для $t \geqslant s$

$$\frac{dy_t}{dt} = -\frac{\lambda^2}{2} y_t.$$

Единственное непрерывное решение y_t этого уравнения с начальным условием $y_s = e^{i\lambda W_s}$ задается формулой $y_t = y_s e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$, откуда получаем

$$\mathsf{M}\left[e^{i\lambda(W_t - W_s)} \mid \mathscr{F}_s\right] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}. \tag{4.13}$$

Из этой формулы видно, что приращения $W_t - W_s$ не зависят от случайных величин, измеримых относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_s$, $t \geqslant s$, и являются гауссовскими со средним $\mathsf{M}[W_t - W_s] = 0$ и дисперсией $\mathsf{D}[W_t - W_s] = t - s$.

Теорема Леви доказана.

3. Приведем также многомерный аналог этой теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, $W_t = (W_1(t), \ldots \ldots, W_n(t))$, — n-мерный непрерывный мартингал с $\mathsf{P}(W_i(0) = 0) = 1$, $i \leqslant n$, $\mathsf{M}[W_i(t) \mid \mathscr{F}_s] = W_i(s)$, $t \geqslant s$, P-п. н. и*

$$\mathsf{M}[(W_t - W_s)(W_t - W_s)^* \mid \mathscr{F}_s] = E \cdot (t - s), \tag{4.14}$$

где $E = E(n \times n)$ — единичная матрица порядка $n \times n$. Тогда $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, является n-мерным процессом броуновского движения с независимыми компонентами.

Доказательство мало чем отличается от доказательства в одномерном случае. Полагая

$$\sigma_N = \inf\left\{t \leqslant T:\ \sup_{s \leqslant t} \sum_{j=1}^{n} |W_j(s)| = N\right\}$$

и $\sigma_N = T$ на множестве $\left\{\omega:\ \sup\limits_{s \leqslant T} \sum\limits_{j=1}^{n} |W_j(s)| < N\right\}$, сначала тем же путем устанавливаем, что для любой функции $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, ограниченной и непрерывной вместе со своими производными f'_{x_i} и $f''_{x_i x_j}$,

$$\mathsf{M}\left[f(\tilde W_1^N(t), \ldots, \tilde W_n^N(t)) \mid \mathscr{F}_{s \wedge \sigma_N}\right] = f(\tilde W_1^N(s), \ldots, \tilde W_n^{(N)}(s)) + \\ + \frac{1}{2} \int_s^t \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\left[f''_{x_i x_i}(\tilde W_1^N(u), \ldots, \tilde W_n^N(u)) \chi_N(u) \mid \mathscr{F}_{s \wedge \sigma_N}\right] du, \tag{4.15}$$

где

$$\tilde W_i^N(t) = W_i(t \wedge \sigma_N), \qquad \chi_N(u) = \begin{cases} 1, & \sigma_N > u, \\ 0, & \sigma_N \leqslant u. \end{cases}$$

Отсюда после предельного перехода при $N \to \infty$ получаем, что

$$\mathsf{M}[f(W_1(t), \ldots, W_n(t)) \mid \mathscr{F}_s] = f(W_1(s), \ldots, W_n(s)) + \\ + \frac{1}{2} \int_s^t \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\left[f''_{x_i x_i}(W_1(u), \ldots, W_n(u)) \mid \mathscr{F}_s\right] du. \tag{4.16}$$

Беря затем $f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left[i \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right]$, находим

$$\mathsf{M}\left\{\exp\left[i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (W_j(t) - W_j(s))\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_s^2 (t-s)\right\}, \quad (4.17)$$

что и доказывает требуемый результат.

4. В заключение этого параграфа, посвященного винеровскому процессу $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, приведем один результат о непрерывности семейства σ-алгебр $\mathcal{F}_t^W$.

Теорема 4.3. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс на нем. Пусть $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{\omega\colon W_s, s \leqslant t\}$, причем предполагается, что $\mathcal{F}_t^W$ пополнены множествами из $\mathcal{F}$, имеющими P-меру нуль.*

Тогда семейство σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^W)$, $t \geqslant 0$, непрерывно: для всех $t \geqslant 0$ $\mathcal{F}_{t-}^W = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_{t+}^W$, где $\mathcal{F}_{0-}^W = \mathcal{F}_0^W$.

Доказательство. Непрерывность слева, $\mathcal{F}_{t-}^W = \mathcal{F}_t^W$, легко следует из непрерывности траектории винеровского процесса. Действительно, $\mathcal{F}_{t-}^W = \sigma\left(\bigcup\limits_{s<t} \mathcal{F}_s^W\right)$ и $\mathcal{F}_t^W = \sigma\left(\bigcup\limits_{s<t} \mathcal{F}_z^W \cup \mathcal{F}^W(t)\right)$, где $\mathcal{F}^W(t) = \sigma\{W_t\}$. Но $W_t = \lim\limits_{r \uparrow t} W_r$, где r — рациональные числа. Поэтому $\mathcal{F}^W(t) \subseteq \sigma\left(\bigcup\limits_{s<t} \mathcal{F}_s^W\right)$, и, значит, $\mathcal{F}_{t-}^W = \mathcal{F}_t^W$.

Несколько сложнее доказывается непрерывность справа $\mathcal{F}_{t+}^W = \mathcal{F}_t^W$.

Пусть $t > s$. В силу (4.13)

$$\mathsf{M}\left(e^{izW_t} \mid \mathcal{F}_s^W\right) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(e^{izW_t} \mid \mathcal{F}_s\right) \mid \mathcal{F}_s^W\right] = e^{izW_t - \frac{z^2}{2}(t-s)}. \quad (4.18)$$

Пусть ε таково, что $0 > \varepsilon < t - s$. Тогда

$$\mathsf{M}\left(e^{izW_t} \mid \mathcal{F}_{s+}^W\right) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(e^{izW_t} \mid \mathcal{F}_{s+\varepsilon}^W\right) \mid \mathcal{F}_{s+}^W\right] = \\ = \mathsf{M}\left[\exp\left\{izW_{s+\varepsilon} - \frac{z^2}{2}(t-s-\varepsilon)\right\} \Big| \mathcal{F}_{s+}^W\right]. \quad (4.19)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, находим, что

$$\mathsf{M}\left[e^{izW_t} \mid \mathcal{F}_{s+}^W\right] = \mathsf{M}\left[\exp\left\{izW_s - \frac{z^2}{2}(t-s)\right\} \Big| \mathcal{F}_{s+}^W\right] = \\ = \exp\left\{izW_s - \frac{z^2}{2}(t-s)\right\}, \quad (4.20)$$

поскольку W_s измеримо относительно $\mathscr{F}_{s+}^W$. Следовательно,

$$\mathsf{M}\left[e^{izW_t}\mid\mathscr{F}_s^W\right]=\mathsf{M}\left[e^{izW_t}\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right]. \tag{4.21}$$

Отсюда вытекает, что для любой измеримой ограниченной функции

$$\mathsf{M}\left[f(W_t)\mid\mathscr{F}_s^W\right]=\mathsf{M}\left[f(W_t)\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right]. \tag{4.22}$$

Пусть теперь $s<t_1<t_2$ и $f_1(x)$, $f_2(x)$ — две ограниченные измеримые функции. Тогда согласно предыдущему равенству

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\left[f_2(W_{t_2})f_1(W_{t_1})\mid\mathscr{F}_s^W\right]&=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(f_2(W_{t_2})\mid W_{t_1}\right)f_1(W_{t_1})\mid\mathscr{F}_s^W\right]=\\&=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(f_2(W_{t_2})\mid W_{t_1}\right)f_1(W_{t_1})\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right]=\mathsf{M}\left[f(W_{t_2})f(W_{t_1})\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right]\end{aligned} \tag{4.23}$$

и аналогично

$$\mathsf{M}\left[\prod_{j=1}^n f_j(W_{t_j})\mid\mathscr{F}_s^W\right]=\mathsf{M}\left[\prod_{j=1}^n f_j(W_{t_j})\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right], \tag{4.24}$$

где $s<t_1<\ldots<t_n$, а $f_j(x)$ — измеримые ограниченные функции, $j=1,\ldots,n$. Отсюда следует, что для $t>s$ и любой $\mathscr{F}_t^W$-измеримой ограниченной случайной величины $\eta=\eta(\omega)$

$$\mathsf{M}\left[\eta\mid\mathscr{F}_s^W\right]=\mathsf{M}\left[\eta\mid\mathscr{F}_{s+}^W\right]. \tag{4.25}$$

Беря, в частности, $\mathscr{F}_{s+}^W$-измеримую случайную величину $\eta=\eta(\omega)$, находим, что $\mathsf{M}\left(\eta\mid\mathscr{F}_s^W\right)=\eta$ (P-п. н.). В силу полноты σ-алгебр $\mathscr{F}_s^W$, $\mathscr{F}_{s+}^W$ отсюда вытекает, что η является $\mathscr{F}_s^W$-измеримой. Следовательно, $\mathscr{F}_s^W\supseteq\mathscr{F}_{s+}^W$. Обратное включение $\mathscr{F}_s^W\subseteq\mathscr{F}_{s+}^W$ очевидно. Поэтому $\mathscr{F}_s^W=\mathscr{F}_{s+}^W$. Теорема доказана.

§ 2. Стохастические интегралы. Процессы Ито

1. Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ с выделенным в нем неубывающим семейством σ-подалгебр $F=(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$. Далее всюду будет предполагаться, что каждая σ-алгебра $\mathscr{F}_t$, $t\geqslant 0$, пополнена*) множествами из $\mathscr{F}$, имеющими нулевую P-меру.

Пусть $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — винеровский процесс. В настоящем параграфе будет приведена конструкция и даны свойства стохастических интегралов $I_t(f)$ вида $\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s$ для некоторого класса функций $f=f(s, \omega)$. Прежде всего отметим,

---

*) Такое предположение дает возможность выбрать у рассматриваемых на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ случайных процессов модификации с нужными свойствами измеримости (см., например, замечание к лемме 4.4).

что интегралы такого типа нельзя определить как интегралы Лебега — Стилтьеса или Римана — Стилтьеса, поскольку реализации винеровского процесса имеют неограниченную вариацию на сколь угодно малом интервале времени (гл. 1, § 4). Однако винеровские траектории обладают все же некоторыми свойствами, которые в каком-то смысле аналогичны конечности вариации.

Лемма 4.3. *Пусть* $0 \equiv t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \equiv t$-*разбиение отрезка* $[0, t]$, *причем* $\max\limits_i [t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}] \to 0$, $n \to \infty$. *Тогда*

$$\operatorname*{l.i.m.}_n \sum_{i=0}^{n-1} \left[W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}\right]^2 = t \tag{4.26}$$

и с вероятностью 1

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n-1} \left[W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}\right]^2 = t. \tag{4.27}$$

Доказательство. Поскольку при любом n

$$\mathsf{M} \sum_{i=0}^{n-1} \left[W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}\right]^2 = t,$$

то для доказательства (4.26) достаточно проверить, что $\mathsf{D} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left[W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}\right]^2 \to 0$, $n \to \infty$. Но в силу независимости и гауссовости приращений винеровского процесса

$$\mathsf{D} \sum_{i=0}^{n-1} \left[W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}\right]^2 = 2 \sum_{i=0}^{n-1} [t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2t \max_i [t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство равенства (4.27) проведем в предположении, что $t_i^{(n)} = \frac{i}{n} t$ (в общем случае доказательство несколько сложнее). Для этого воспользуемся следующим общим фактом.

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — *последовательность случайных величин и для каждого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{|\xi_n| > \varepsilon\} < \infty. \tag{4.28}$$

Тогда $\xi_n \to 0$ *с вероятностью* 1 *при* $n \to \infty$.

Действительно, пусть $A_n^\varepsilon = \{\omega: |\xi_n| > \varepsilon\}$ и $B^\varepsilon = \limsup\limits_n A_n^\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m^\varepsilon$. Тогда $\{\omega: \xi_n(\omega) \not\to 0\} = \bigcup\limits_k B^{1/k}$. Но в силу (4.28) по лемме Бореля — Кантелли (гл. 1, § 1) $\mathsf{P}(B^{\varepsilon})=0$. Поэтому $\mathsf{P}\{\omega\colon \xi_n \not\to 0\}=0$.

Возвратясь к доказательству (4.27), где $t_i^{(n)}=\frac{i}{n}t$, положим

$$\xi_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left[W_{\frac{i+1}{n}t}-W_{\frac{i}{n}t}\right]^2-\frac{t}{n}\right\}.$$

В силу неравенства Чебышева

$$\mathsf{P}\{|\xi_n|>\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{M}|\xi_n|^4}{\varepsilon^4}.$$

Используя независимость приращений винеровского процесса на непересекающихся интервалах и формулы

$$\mathsf{M}[W_t-W_s]^{2m}=(2m-1)!!(t-s)^m, \qquad m=1,\ 2,\ \ldots,$$

нетрудно подсчитать, что

$$\mathsf{M}\xi_n^4\leqslant C\left(\frac{t}{n}\right)^3\cdot t,$$

где C — константа.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\xi_n|>\varepsilon\}<\infty$, и согласно сделанному выше замечанию $\xi_n\to 0$ (P-п. н.), $n\to\infty$, что и доказывает (4.27) в предположении $t_j^{(n)}=\frac{i}{n}t$.

З а м е ч а н и е. Утверждения (4.26) и (4.27) символически часто записывают в следующей форме:

$$\int_0^t (dW_s)^2=\int_0^t ds.$$

2. Определим класс случайных функций $f=f(t,\ \omega)$, для которых будет построен стохастический интеграл $\int_0^t f(s,\ \omega)\,dW_s$.

О п р е д е л е н и е 2. Измеримая (по паре переменных $(t,\ \omega)$) функция $f=f(t,\ \omega)$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, называется *неупреждающей* (по отношению к семейству $F=(\mathscr{F}_t),\ t\geqslant 0$), если при каждом t она $\mathscr{F}_t$-измерима.

О п р е д е л е н и е 3. Неупреждающая функция $f=f(t,\ \omega)$ называется *функцией класса* $\mathscr{P}_T$, если

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T f^2(t,\ \omega)\,dt<\infty\right\}=1. \qquad (4.29)$$

Определение 4. Неупреждающая функция $f=f(t, \omega)$ называется *функцией класса* $\mathfrak{M}_T$, если

$$\mathsf{M}\int_0^T f^2(t, \omega)\,dt < \infty. \qquad (4.30)$$

Замечание. Неупреждающие функции часто называют также функциями, не зависящими от «будущего».

В соответствии с определениями § 2 гл. 1 неупреждающие функции $f=f(t, \omega)$ — это измеримые случайные процессы, согласованные с семейством $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$. Очевидно, что при любом $T>0$ $\mathscr{P}_T \supseteq \mathfrak{M}_T$.

По аналогии с обычной теорией интегрирования естественно сначала определить стохастический интеграл $I_t(f)$ для некоторого множества «элементарных» функций.

Это множество должно удовлетворять следующим двум свойствам: с одной стороны, оно должно быть достаточно «богатым»; чтобы функциями из него можно было «аппроксимировать» любые функции из классов $\mathfrak{M}_T$ и $\mathscr{P}_T$, и, с другой стороны, таким, чтобы можно было просто описать свойства стохастических интегралов от его представителей.

Такой класс «элементарных» функций составляют вводимые в определении 5 простые функции.

Определение 5. Функция $e=e(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, называется *простой*, если существует конечное разбиение $0=t_0< < t_1 < \ldots < t_n = T$ отрезка $[0, T]$, случайные величины α, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, где α $\mathscr{F}_0$-измерима, а α_i $\mathscr{F}_{t_i}$-измеримы, $i= =0, 1, \ldots, n-1$, такие, что

$$e(t, \omega) = \alpha\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

($\chi_{\{0\}}(t)$ — характеристическая функция «точки» $\{0\}$, а $\chi_{(t_i, t_{i+1}]}$ — характеристическая функция полуинтервала $(t_i, t_{i+1}]$) и $e \in \mathfrak{M}_T$).

Замечание. Простые функции $e=e(t, \omega)$ определены как функции, непрерывные слева. Этот выбор мотивируется аналогией с обычным интегралом Стилтьеса, определяемым так, что если $a=a(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция, то

$$\int_0^\infty \chi_{(u, v]}(t)\,da(t) = a(v) - a(u).$$

То обстоятельство, что при построении стохастического интеграла по винеровскому процессу мы отправляемся от «элементарных» функций, непрерывных *слева*, не является существенным. Можно было бы в качестве «элементарных» взять ступенчатые функции, непрерывные справа. Однако это обстоятельство становится существенным при построении стохастических интегралов по квадратично интегрируемым мартингалам (см. § 4 гл. 5).

3. Для простых функций $e=e(t, \omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, стохастический интеграл $I_t(e)$ по определению полагается равным

$$I_t(e)=\alpha W_0+\sum_{\{0\leqslant i\leqslant m,\ t_{m+1}<t\}}\alpha_i\left[W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right]+\alpha_{m+1}\left[W_t-W_{t_{m+1}}\right]$$

или, так как $\mathsf{P}(W_0=0)=1$,

$$I_t(e)=\sum_{\{0\leqslant i\leqslant m,\ t_{m+1}<t\}}\alpha_i\left[W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right]+\alpha_{m+1}\left[W_t-W_{t_{m+1}}\right]. \tag{4.31}$$

Для краткости вместо сумм в (4.31) будем использовать следующую (интегральную) запись:

$$I_t(e)=\int_0^t e(s, \omega)\,dW_s. \tag{4.32}$$

Под интегралом $\int_s^t e(u, \omega)\,dW_u$ будет пониматься интеграл $I_t(\tilde{e})$, где $\tilde{e}(u, \omega)=e(u, \omega)\chi(u>s)$.

Отметим основные свойства стохастических интегралов от простых функций, непосредственно вытекающие из (4.31).

$$I_t(ae_1+be_2)=aI_t(e_1)+bI_1(e_2),\quad a,\ b=\text{const}. \tag{4.33}$$

$$\int_0^t e(s, \omega)\,dW_s=\int_0^u e(s, \omega)\,dW_s+\int_u^t e(s, \omega)\,dW_s\quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{4.34}$$

$$I_t(e) — \textit{непрерывная функция по } t,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.35}$$

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t e(u, \omega)\,dW_u\,|\,\mathscr{F}_s\right)=\int_0^s e(u, \omega)\,dW_u\quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{4.36}$$

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t e_1(u, \omega)\,dW_u\right)\left(\int_0^t e_2(u, \omega)\,dW_u\right)=\mathsf{M}\int_0^t e_1(u, \omega)\,e_2(u, \omega)\,du. \tag{4.37}$$

Если $e(s, \omega)=0$ *для всех* s, $0\leqslant s\leqslant T$, *и* $\omega\in A\subseteq\mathscr{F}_T$, *то* $\int_0^t e(s, \omega)\,dW_s=0$, $t\leqslant T$.

Процесс $I_t(e)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *прогрессивно измерим, и, в частности,* $I_t(e)$ $\mathscr{F}_t$-*измеримы при каждом* t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Из свойства (4.36), в частности, следует, что

$$\mathsf{M}\int_0^t e(u, \omega)\,dW_u = 0. \tag{4.38}$$

4. Отправляясь от интегралов $I_t(e)$ от простых функций, определим теперь стохастические интегралы $I_t(f)$, $t \leqslant T$, для функций $f \in \mathfrak{M}_T$.

Возможность такого определения основывается на следующей лемме.

Лемма 4.4. *Пусть функция $f \in \mathfrak{M}_T$. Тогда найдется последовательность простых функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что*

$$\mathsf{M}\int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\,dt \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.39}$$

Доказательство. а) Прежде всего заметим, что без ограничения общности можно считать функцию $f(t, \omega)$ ограниченной, $|f(t, \omega)| \leqslant C < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega \in \Omega$. (В противном случае можно перейти от $f(t, \omega)$ к функции $f^{(N)}(t, \omega) = f(t, \omega)\chi^N(t, \omega)$, где

$$\chi^N(t, \omega) = \begin{cases} 1, & |f(t, \omega)| \leqslant N, \\ 0, & |f(t, \omega)| > N, \end{cases}$$

и использовать то, что $\mathsf{M}\int_0^T |f(t, \omega) - f^{(N)}(t, \omega)|^2\,dt \to 0$ при $N \to \infty$.) Далее, если $T = \infty$, то сразу можно считать, что функция $f(t, \omega)$ финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторого конечного интервала.

Итак, пусть $|f(t, \omega)| \leqslant C < \infty$, $T < \infty$.

б) Если функция $f(t, \omega)$ непрерывна по t (P-п. н.), то последовательность простых функций строится просто. Например, можно положить

$$f_n(t, \omega) = f\left(\frac{kT}{n}, \omega\right), \qquad \frac{kT}{n} < t \leqslant \frac{(k+1)T}{n}.$$

Тогда (4.39) выполнено по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

в) Если функция $f(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измерима, то построить последовательность аппроксимирующих функций можно следующим образом. Пусть $F(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega)\,ds$, где интеграл понимается как интеграл Лебега. В силу прогрессивной измеримости функций $f(s, \omega)$ процесс $F(t, \omega)$,

$0 \leqslant t \leqslant T$, измерим и при каждом t случайные величины $F(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t$-измеримы.

Положим

$$\tilde{f}_m(t, \omega) = m \int\limits_{\left(t-\frac{1}{m}\right)\vee 0}^{t} f(s, \omega)\, ds \left(= \left[F(t, \omega) - F\left(\left(t - \frac{1}{m}\right) \vee 0, \omega\right)\right] \Big/ \frac{1}{m}\right).$$

Случайный процесс $\tilde{f}_m(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, измерим, является неупреждающим и имеет $\mathbf{P}$-п. н. непрерывные траектории. Поэтому согласно пункту б) для каждого m существует последовательность неупреждающих ступенчатых функций $\tilde{f}_{m,n}(t, \omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\mathbf{M} \int\limits_0^T [\tilde{f}_m(t, \omega) - \tilde{f}_{m,n}(t, \omega)]^2\, dt \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Заметим теперь, что $\mathbf{P}$-п. н. для почти всех $t \leqslant T$ существует производная $F'(t, \omega)$ и $F'(t, \omega) = f(t, \omega)$. Но в тех точках, где производная $F'(t, \omega)$ существует,

$$F'(t, \omega) = \lim_{m \to \infty} m \left[F(t, \omega) - F\left(\left(t - \frac{1}{m}\right) \vee 0, \omega\right)\right] = \lim_{m \to \infty} \tilde{f}_m(t, \omega).$$

Поэтому для почти всех (t, ω) (по мере $dt\, d\mathbf{P}$) $\lim\limits_{m \to \infty} \tilde{f}_m(t, \omega) = f(t, \omega)$ и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\mathbf{M} \int\limits_0^T [\tilde{f}_m(t, \omega) - f(t, \omega)]^2\, dt \to 0, \qquad m \to \infty.$$

Этим утверждение леммы доказано в случае, когда функции $f(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измеримы.

г) В общем случае доказательство проводится следующим образом. Доопределим функцию $f(t, \omega)$ для отрицательных t, полагая $f(t, \omega) = f(0, \omega)$. Будем считать функцию $f(t, \omega)$ ограниченной и финитной. Положим

$$\psi_n(t) = \frac{j}{2^n}, \quad \frac{j}{2^n} < t \leqslant \frac{j+1}{2^n}, \qquad j = 0, \pm 1, \ldots,$$

и заметим, что функция $f_n(t, \omega) = f[\psi_n(t - \tilde{s}) + \tilde{s}, \omega]$ является при каждом фиксированном $\tilde{s}$ простой. Лемма будет доказана, если показать, что можно так выбрать точку $\tilde{s}$, что будет выполнено (4.39).

Для доказательства воспользуемся следующим замечанием: если $f=f(t, \omega)$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$, — измеримая ограниченная финитная функция, то

$$\lim_{h\to 0} \mathsf{M}\int_0^\infty [f(s+h, \omega)-f(s, \omega)]^2\,ds=0. \tag{4.40}$$

Действительно, согласно пункту в) для всякого $\varepsilon>0$ найдется такая P-п. н. непрерывная функция $f_\varepsilon(t, \omega)$, что

$$\mathsf{M}\int_0^\infty [f_\varepsilon(s, \omega)-f(s, \omega)]^2\,ds\leqslant\varepsilon^2.$$

Но тогда в силу неравенства Минковского

$$\varlimsup_{h\to 0}\left[\mathsf{M}\int_0^\infty [f(s+h, \omega)-f(s, \omega)]^2\,ds\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{h\to 0}\left[\mathsf{M}\int_0^\infty [f_\varepsilon(s+h, \omega)-f_\varepsilon(s, \omega)]^2\,ds\right]^{1/2}+2\varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon>0$ следует (4.40).

Из (4.40) вытекает также, что для любого $t\geqslant 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathsf{M}\int_0^\infty [f(s+t+h, \omega)-f(s+t, \omega)]^2\,ds=0$$

и, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\int_0^\infty [f(s+\psi_n(t), \omega)-f(s+t, \omega)]^2\,ds=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\int_0^\infty\int_0^\infty [f(s+\psi_n(t), \omega)-f(s+t, \omega)]^2\,ds\,dt=0.$$

Из последнего равенства следует, что существует такая последовательность чисел n_i, $i=1, 2, \ldots$, $n_i\to\infty$, что для почти всех (s, t, ω) (по мере $ds\,dt\,d\mathsf{P}$)

$$[f(s+\psi_{n_i}(t), \omega)-f(s+t, \omega)]^2\to 0, \qquad n_i\to\infty.$$

Отсюда, переходя к новым переменным $u=s$, $v=s+t$, получаем, что для почти всех (u, v, ω) (по мере $du\,dv\,d\mathsf{P}$)

$$[f(u+\psi_{n_i}(v-u), \omega)-f(v, \omega)]^2\to 0, \qquad n_i\to\infty,$$

и, значит, найдется такая точка $\tilde{u}=\tilde{s}$, что

$$\lim_{n_l\to\infty} \mathsf{M} \int_0^\infty [f(\tilde{u}+\psi_{n_l}(v-\tilde{u}), \omega)-f(v, \omega)]^2 dv =$$
$$= \lim_{n_l\to\infty} \mathsf{M} \int_0^\infty [f(\tilde{s}+\psi_{n_l}(t-\tilde{s}), \omega)-f(t, \omega)]^2 dt = 0.$$

Лемма 4.4 доказана.

Замечание. Если случайный процесс $f(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, является прогрессивно измеримым и $\mathsf{P}\left(\int_0^T |f(t, \omega)|\,dt < \infty\right) = 1$, то процесс $F(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega)\,ds$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где интеграл понимается как интеграл Лебега, является измеримым и $\boldsymbol{F}$-согласованным и, более того, прогрессивно измеримым (как имеющий P-п. н. непрерывные траектории).

Если же измеримый случайный процесс $f(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $\mathsf{P}\left(\int_0^T |f(t, \omega)|\,dt < \infty\right) = 1$, является $\mathscr{F}_t$-измеримым при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant T$, то у него существует (§ 2 гл. 1, п. 1) прогрессивно измеримая модификация $\tilde{f}(t, \omega)$, и тогда процесс $\tilde{F}(t, \omega) = \int_0^t \tilde{f}(s, \omega)\,ds$ также прогрессивно измерим. Покажем, что $\tilde{F}(t, \omega)$ является (прогрессивно измеримой) модификацией процесса $F(t, \omega)$.

Действительно, пусть $\chi_s(\omega) = \chi_{\{\omega:\, f(s,\, \omega) \neq \tilde{f}(s,\, \omega)\}}$. Тогда по теореме Фубини $\mathsf{M} \int_0^T \chi_s(\omega)\,ds = \int_0^T \mathsf{M}\chi_s(\omega)\,ds = 0$, и, следовательно, P-п. н. $\int_0^T \chi_s(\omega)\,ds = 0$, а значит, и $\mathsf{P}(F(t, \omega) = \tilde{F}(t, \omega)) = 1$, $t \leqslant T$.

Как было отмечено в начале данного параграфа, предполагается, что σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ пополнены множествами из $\mathscr{F}$, имеющими P-меру нуль. Поэтому из того, что $\tilde{F}(t, \omega)$ являются при каждом $t \leqslant T$ $\mathscr{F}_t$-измеримыми, вытекает, что и $F(t, \omega)$ также $\mathscr{F}_t$-измеримы для каждого $t \leqslant T$.

Учитывая также то, что процесс $F(t, \omega)$, $t \leqslant T$, непрерывен, получаем, что интеграл $F(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega)\,ds$, $t \leqslant T$, от неупреждающего процесса $f(s, \omega)$, $s \leqslant t$, является прогрессивно измеримым случайным процессом.

Приведенные рассуждения можно использовать (в случае, когда σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ пополнены множествами из $\mathscr{F}$, имеющими P-меру нуль) для доказательства п. г) леммы 4.4 сведением к случаю, рассмотренному в п. в). Однако доказательство, приведенное в п. г), имеет ту ценность, что оно указывает способ построения простых функций $f_n(t, \omega)$ непосредственно по значениям самой функции $f(t, \omega)$.

5. Итак, пусть $f \in \mathfrak{M}_T$. Согласно только что доказанной лемме существует последовательность простых функций $f_n(t, \omega)$, для которых выполнено (4.39). Но тогда, очевидно, и

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathsf{M} \int_0^T [f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)]^2 \, dt = 0,$$

а следовательно (по свойству (4.37)),

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathsf{M} \left[\int_0^T f_n(t, \omega) \, dW_t - \int_0^T f_m(t, \omega) \, dW_t \right]^2 = \\ = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathsf{M} \int_0^T [f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)]^2 \, dt = 0. \tag{4.41}$$

Таким образом, последовательность случайных величин $I_T(f_n)$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем квадратическом и, значит, сходится к некоторому пределу, который будем обозначать $I_T(f)$ или $\int_0^T f(t, \omega) \, dW_t$:

$$I_T(f) = \underset{n}{\text{l.i.m.}}\, I_T(f_n). \tag{4.42}$$

Значение (с точностью до стохастической эквивалентности) этого предела, как нетрудно показать, не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Следовательно, данное определение стохастического интеграла $I_T(f)$ корректно.

Замечание 1. Поскольку значение стохастического интеграла $I_T(f)$ определено с точностью до эквивалентности, условимся считать $I_T(f) = 0$ для всех тех ω, для которых $f(t, \omega) = 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ (ср. со свойствами стохастических интегралов от простых функций, п. 3).

Пусть снова $f \in \mathfrak{M}_T$. Определим семейство стохастических интегралов $I_t(f)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, полагая $I_t(f) = I_T(f\chi_t)$, т. е.

$$I_t(f) = \int_0^T f(s, \omega)\chi_t(s)\,dW_s. \tag{4.43}$$

Для $I_t(f)$ естественно пользоваться также записью

$$I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega)\,dW_s. \tag{4.44}$$

Остановимся на основных свойствах стохастических интегралов $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, от функций f, $f_i \in \mathfrak{M}_T$, $i = 1, 2$.

$$I_t(af_1 + bf_2) = aI_t(f_1) + bI_t(f_2), \quad a,\ b = \mathrm{const}. \tag{4.45}$$

$$\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s = \int_0^u f(s, \omega)\,dW_s + \int_u^t f(s, \omega)\,dW_s, \tag{4.46}$$

где

$$\int_u^t f(s, \omega)\,dW_s = \int_0^T f(s, \omega)\chi_{[u,\ t]}(s)\,dW_s,$$

а $\chi_{[u,\ t]}(s)$ — *характеристическая функция множества* $u \leqslant s \leqslant t$.

$$I_t(f) \text{ — непрерывная функция по } t,\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.47}$$

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f(u, \omega)\,dW_u \mid \mathscr{F}_s\right] = \int_0^s f(u, \omega)\,dW_u, \quad s \leqslant t. \tag{4.48}$$

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f_1(u, \omega)\,dW_u\right]\left[\int_0^t f_2(u, \omega)\,dW_u,\right] = \mathsf{M}\int_0^t f_1(u, \omega) f_2(u, \omega)\,du. \tag{4.49}$$

Если $f(s, \omega) = 0$ *для всех* s, $0 \leqslant s \leqslant T$, *и* $\omega \in A \in \mathscr{F}_T$, *то*

$$\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s = 0, \quad t \leqslant T, \quad \omega \in A. \tag{4.50}$$

Процесс $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $f \in \mathfrak{M}_T$, *прогрессивно измерим, и, в частности,* $I_t(f)$ $\mathscr{F}_t$*-измеримы при каждом* t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для доказательства (4.45) достаточно выбрать последовательности простых функций $f_1^{(n)}$ и $f_2^{(n)}$ такие, что

$$\mathsf{M}\int_0^T (f_i - f_i^{(n)})^2\,ds \to 0, \quad n \to \infty, \quad i = 1, 2,$$

и затем совершить предельный переход в равенстве

$$I_t\left(af_1^{(n)}+bf_2^{(n)}\right)=aI_t\left(f_1^{(n)}\right)+bI_t\left(f_2^{(n)}\right).$$

Аналогично доказывается и свойство (4.46).

Свойства (4.48) и (4.49) следуют из свойств (4.36) и (4.37), поскольку из сходимости случайных величин в среднем квадратическом вытекает сходимость их моментов первых двух порядков.

Свойство (4.49) можно несколько обобщить:

$$\mathsf{M}\left\{\int_s^t f_1(u,\omega)\,dW_u\int_s^t f_2(u,\omega)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\right\}= \\ =\mathsf{M}\left\{\int_s^t f_1(u,\omega)\,f_2(u,\omega)\,du \mid \mathcal{F}_s\right\}.$$

Проверка этого свойства проводится обычным порядком: сначала устанавливается его справедливость для простых функций, а затем совершается соответствующий предельный переход.

Свойство (4.50) вытекает из сделанного выше замечания 1. Покажем теперь, что процесс $I_t(f)$, $0\leqslant t\leqslant T$, прогрессивно измерим и, более того, имеет P-п. н. непрерывные траектории (точнее, имеет модификацию с этими двумя свойствами).

Для доказательства заметим, что для простых функций f_n процесс $(I_t(f_n), \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, образует непрерывный (P-п. н.) мартингал (по свойствам (4.35) и (4.36)). Поэтому по теореме 3.2

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t f_n(s,\omega)\,dW_s-\int_0^t f_m(s,\omega)\,dW_s\right|>\lambda\right\}\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{\lambda^2}\,\mathsf{M}\left\{\int_0^T [f_n(s,\omega)-f_m(s,\omega)]\,dW_s\right\}^2= \\ =\frac{1}{\lambda^2}\,\mathsf{M}\int_0^T [f_n(s,\omega)-f_m(s,\omega)]^2\,ds. \qquad (4.51)$$

Выберем последовательность простых функций f_n, сходящуюся к $f\in\mathfrak{M}_T$, так, чтобы $f_0\equiv 0$,

$$\mathsf{M}\int_0^T [f(s,\omega)-f_n(s,\omega)]^2\,ds\to 0,\qquad n\to\infty,$$

и

$$\mathsf{M}\int_0^T [f_{n+1}(s,\omega)-f_n(s,\omega)]^2\,ds\leqslant\frac{1}{2^n}. \qquad (4.52)$$

Заметим теперь, что ряд

$$\int_0^t f_1(s, \omega)\, dW_s + \left[\int_0^t (f_2(s, \omega) - f_1(s, \omega))\, dW_s\right] + \ldots$$
$$\ldots + \left[\int_0^t (f_{n+1}(s, \omega) - f_n(s, \omega))\, dW_s\right] + \ldots$$

сходится в среднеквадратическом к $\int_0^t f(s, \omega)\, dW_s$ и члены этого ряда **P**-п. н. непрерывны по t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Далее, согласно (4.51) и (4.52)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t (f_{n+1}(s, \omega) - f_n(s, \omega))\, dW_s\right| > \frac{1}{n^2}\right\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty.$$

Поэтому в силу леммы Бореля — Кантелли с вероятностью, равной единице, найдется такой (случайный) номер $N = N(\omega)$, начиная с которого

$$\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t (f_{n+1}(s, \omega) - f_n(s, \omega))\, dW_s\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad n \geqslant N.$$

Следовательно, ряд из непрерывных функций

$$\int_0^t f_1(s, \omega)\, dW_s + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t (f_{n+1}(s, \omega) - f_n(s, \omega))\, dW_s\right]$$

сходится равномерно с вероятностью 1 и определяет непрерывную функцию (**P**-п. н.), которая при каждом t является $\mathscr{F}_t$-измеримой *). Из этих двух свойств вытекает, что случайный процесс, определяемый этим рядом, является прогрессивно измеримым (гл. 1, § 2, п. 1).

Таким образом, мы видим, что можно так выбрать последовательность простых функций f_n, удовлетворяющих свойству (4.52), что построенные с их помощью интегралы $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, будут непрерывны по t, $0 \leqslant t \leqslant T$, с вероятностью 1. Поскольку с точностью до стохастической эквивалентности значения $I_t(f)$ не зависят от выбора аппроксимирующей последовательности, то отсюда следует, что у интегралов $I_t(f)$ существует непрерывная модификация. В дальнейшем при рассмотрении интегралов $I_t(f)$,

---

*) Напомним, что σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ предполагаются пополненными множествами из $\mathscr{F}$ нулевой вероятности.

$f \in \mathfrak{M}_T$, будет предполагаться, что $I_t(f)$ имеют непрерывные P-п. н. траектории.

Замечание 2. Отметим, что из построения аппроксимирующей последовательности $\{f_n, n=1, 2, \ldots\}$ со свойством (4.52) вытекает, в частности, что с вероятностью 1

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s - \int_0^t f_n(s, \omega)\, dW_s \right| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Иначе говоря, равномерно по t, $0 \leqslant t \leqslant T$, с вероятностью 1

$$\int_0^t f_n(s, \omega)\, dW_s \to \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s, \qquad n \to \infty.$$

Отметим еще два полезных свойства стохастических интегралов $I_t(f)$, $f \in \mathfrak{M}_T$, непосредственно вытекающих из теоремы 3.2 и того замечания, что $(I_T(f), \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является квадратично интегрируемым мартингалом с непрерывными траекториями:

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s \right| > \lambda \right\} \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_0^T \mathsf{M} f^2(s, \omega)\, ds, \tag{4.53}$$

$$\mathsf{M} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s \right|^2 \leqslant 4 \int_0^T \mathsf{M} f^2(s, \omega)\, ds. \tag{4.54}$$

Из последнего свойства, в частности, вытекает, что если $f \in \mathfrak{M}_T$ и последовательность функций $\{f_n, n=1, 2, \ldots\}$ такова, что $f_n \in \mathfrak{M}_T$ и

$$\mathsf{M} \int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\, dt \to 0,$$

то

$$\underset{n}{\text{l.i.m.}} \int_0^t f_n(s, \omega)\, dW_s = \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s.$$

Замечание 3. Проведенная выше конструкция стохастических интегралов $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и их основные свойства остаются в силе и в случае $T = \infty$. Нужно лишь потребовать, чтобы $f \in \mathfrak{M}_\infty$, где $\mathfrak{M}_\infty$ — класс неупреждающих функций $f = f(s, \omega)$ со свойством

$$\int_0^\infty \mathsf{M} f^2(s, \omega)\, ds < \infty.$$

6. Построим теперь стохастические интегралы $I_t(f)$, $t \leqslant T$, для функций f из класса $\mathscr{P}_T$, удовлетворяющих условию

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds < \infty\right\} = 1. \tag{4.55}$$

С этой целью установим сначала справедливость следующей леммы.

Лемма 4.5. *Пусть $f \in \mathscr{P}_T$, $T \leqslant \infty$. Тогда найдется последовательность функций $f_n \in \mathfrak{M}_T$ такая, что по вероятности*

$$\int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\, dt \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4.56}$$

Существует последовательность простых функций $f_n(t, \omega)$, для которых (4.56) *выполнено как в смысле сходимости по вероятности, так и с вероятностью* 1.

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{P}_T$. Положим

$$\tau_N(\omega) = \begin{cases} \inf\left\{t \leqslant T\colon \int_0^t f^2(s, \omega)\, ds \geqslant N\right\}, \\ T, \quad \text{если} \quad \int_0^T f^2(s, \omega)\, ds < N, \end{cases}$$

и

$$f_N(s, \omega) = f(s, \omega)\chi_{\{s \leqslant \tau_N(\omega)\}}. \tag{4.57}$$

Поскольку предполагается, что σ-алгебры $\mathscr{F}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, пополнены множествами из $\mathscr{F}$ нулевой вероятности, то, в соответствии с замечанием к лемме 4.4, процесс $\int_0^t f^2(s, \omega)\, ds$, $t \leqslant T$, является прогрессивно измеримым. Отсюда вытекает, что моменты $\tau_N(\omega)$ являются марковскими (по отношению к семейству $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$).

Поэтому функции $f_N(s, \omega)$, $N = 1, 2, \ldots$, являются неупреждающими и принадлежат классу $\mathfrak{M}_T$, поскольку

$$\int_0^T \mathsf{M} f_N^2(s, \omega)\, ds \leqslant N < \infty.$$

Чтобы доказать заключительную часть леммы, воспользуемся леммой 4.4, согласно которой для каждого $N = 1, 2, \ldots$ существует последовательность простых функций $f_N^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$, такая, что

$$\mathsf{M} \int_0^T [f_N^{(n)}(t, \omega) - f_N(t, \omega)]^2\, dt \to 0 \quad n \to \infty,$$

и что (в силу свойства (4.57))

$$\mathsf{P}\left\{ \int_0^T [f(t, \omega) - f_N(t, \omega)]^2\, dt > 0 \right\} \leqslant \mathsf{P}\left\{ \int_0^T f^2(t, \omega)\, dt > N \right\}. \tag{4.58}$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left\{ \int_0^T [f(t, \omega) - f_N^{(n)}(t, \omega)]^2\, dt > \varepsilon \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \int_0^T [f(t, \omega) - f_N(t, \omega)]^2\, dt > 0 \right\} +$$
$$+ \mathsf{P}\left\{ \int_0^T [f_N(t, \omega) - f_N^{(n)}(t, \omega)]^2\, dt > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \int_0^T f^2(t, \omega)\, dt > N \right\} + \frac{2}{\varepsilon} \mathsf{M} \int_0^T [f_N(t, \omega) - f_N^{(n)}(t, \omega)]^2\, dt,$$

что и доказывает существование последовательности простых функций $f_n(t, \omega)$, аппроксимирующих функцию f в смысле (4.56) со сходимостью по вероятности.

Без ограничения общности можно считать, что функции f_n уже выбраны так, что

$$\mathsf{P}\left\{ \int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\, dt > 2^{-n} \right\} \leqslant 2^{-n}.$$

(В противном случае этого можно добиться, рассматривая некоторую подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$, $n=1, 2, \ldots$) Поэтому по лемме Бореля — Кантелли для почти всех ω найдутся такие числа $N(\omega)$, что для всех $n \geqslant N(\omega)$

$$\int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\, dt \leqslant 2^{-n}.$$

В частности, с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T [f(t, \omega) - f_n(t, \omega)]^2\,dt = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 4. Если неупреждающая функция $f = f(t, \omega)$ такова, что с вероятностью 1

$$\int_0^T |f(t, \omega)|\,dt < \infty,$$

то найдется такая последовательность простых функций $\{f_n(t, \omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$, что с вероятностью 1

$$\lim_n \int_0^T |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|\,dt = 0.$$

Доказательство аналогично случаю, когда

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f^2(t, \omega)\,dt < \infty\right) = 1.$$

В дальнейшем нам понадобится также следующее предложение.

Лемма 4.6. *Пусть $f \in \mathfrak{M}_T$ и событие $A \in \mathcal{F}_T$. Тогда для любых $N > 0$, $C > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s\right| > C\right)\right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{A \cap \left(\int_0^T f^2(s, \omega)\,ds > N\right)\right\} \quad (4.59)$$

и, в частности,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s\right| > C\right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{\int_0^T f^2(s, \omega)\,ds > N\right\}. \quad (4.60)$$

Доказательство. Пусть функции $f_N(s, \omega)$ определены формулами (4.57). Тогда по свойству (4.49)

$$\mathsf{M}\left(\int_0^T f_N(s, \omega)\,dW_s\right)^2 = \int_0^T \mathsf{M} f_N^2(s, \omega)\,ds \leqslant N < \infty.$$

В соответствии со свойствами стохастических интегралов

$$\left\{\omega:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t [f(s,\omega)-f_N(s,\omega)]\,dW_s\right|=0\right\}\supseteq$$
$$\supseteq\left\{\omega:\ \int_0^T f^2(s,\omega)\,ds\leqslant N\right\}.$$

Поэтому

$$A\cap\left\{\omega:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t [f(s,\omega)-f_N(s,\omega)]\,dW_s\right|>0\right\}\subseteq$$
$$\subseteq A\cap\left\{\omega:\ \int_0^T f^2(s,\omega)\,ds>N\right\},$$

и, значит, в силу неравенства (4.53)

$$\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right)\right\}=$$
$$=\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f_N(s,\omega)\,dW_s+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\int_0^t [f(s,\omega)-f_N(s,\omega)]\,dW_s\right|>C\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f_N(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right)\right\}+$$
$$+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t [f(s,\omega)-f_N(s,\omega)]\,dW_s\right|>0\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f_N(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right\}+$$
$$+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\int_0^t f^2(s,\omega)\,ds>N\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{C^2}\mathsf{M}\left(\int_0^T f_N(s,\omega)\,dW_s\right)^2+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\,ds>N\right)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{N}{C^2}+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\int_0^T f^2(s,\omega)\,ds>N\right)\right\}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если* $f \in \mathfrak{M}_T$, *то*

$$\mathsf{P}\left\{\left(\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds \leqslant N\right) \cap \left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}\left|\int_0^t f(s, \omega)\, dW_s\right| > C\right)\right\} \leqslant \frac{N}{C^2}.$$

Замечание 5. Утверждение леммы остается справедливым, если в ее формулировке заменить момент T на марковский момент σ, потребовав при этом, чтобы $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

Перейдем теперь непосредственно к конструкции интеграла $I_T(f)$ для $f \in \mathcal{P}_T$, $T \leqslant \infty$.

Пусть $f_n = f_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность функций из класса $\mathfrak{M}_T$, аппроксимирующих функцию $f(t, \omega)$ в смысле сходимости (4.56). Тогда, очевидно, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n, m \to \infty} \mathsf{P}\left\{\int_0^T [f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)]^2\, dt > \varepsilon\right\} = 0$$

и согласно лемме 4.6 для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$\overline{\lim_{n, m \to \infty}}\, \mathsf{P}\left\{\left|\int_0^T f_n(t, \omega)\, dW_t - \int_0^T f_m(t, \omega)\, dW_t\right| > \delta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \lim_{n, m \to \infty} \mathsf{P}\left\{\int_0^T [f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega)]^2\, dt > \varepsilon\right\} = \frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{n, m \to \infty} \mathsf{P}\left\{\left|\int_0^T f_n(t, \omega)\, dW_t - \int_0^T f_m(t, \omega)\, dW_t\right| > \delta\right\} = 0.$$

Таким образом, последовательность случайных величин $I_T(f_n) = \int_0^T f_n(t, \omega)\, dW_t$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которую мы обозначаем $I_T(f)$ или $\int_0^T f(t, \omega)\, dW_t$ и называем *стохастическим интегралом* (от функции $f \in \mathcal{P}_T$ по винеровскому процессу $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$).

Значение $I_T(f)$ (с точностью до эквивалентности) не зависит от выбора аппроксимирующих последовательностей (скажем, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$). Действительно, объединяя последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ в одну, $\{h_n\}$, устанавливаем существование предела по вероятности последовательности величин $I_T(h_n)$,

$n \to \infty$. Следовательно, пределы по подпоследовательностям $\lim I_T(f_n)$, $\lim I_T(g_n)$ будут совпадать.

Конструкция стохастических интегралов $I_T(f)$ для $t \leqslant T$ в случае функций $f \in \mathscr{P}_T$ осуществляется так же, как и для $f \in \mathfrak{M}_T$. А именно, мы определяем интегралы $I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s$ с помощью равенств

$$I_t(f) = \int_0^T f(s, \omega)\chi_t(s)\, dW_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.61}$$

где $\chi_t(s)$ — характеристическая функция множества $0 \leqslant s \leqslant t$.

Поскольку (с точностью до стохастической эквивалентности) значение стохастических интегралов $I_t(f)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, то при исследовании свойств процесса $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, можно использовать частные случаи таких последовательностей.

В частности, возьмем в качестве такой последовательности функции $f_N(s, \omega)$ из (4.57). Поскольку $\mathsf{P}\left\{\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds < \infty\right\} = 1$, то множество $\Omega' = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N$, где $\Omega_N = \left\{\omega\colon\; N - 1 \leqslant \int_0^T f^2(s, \omega)\, ds < N\right\}$, отличается от Ω на подмножество P-меры нуль. Заметим теперь, что на множестве Ω_N

$$f_N(s, \omega) = f_{N+1}(s, \omega) = \ldots = f(s, \omega)$$

для всех s, $0 \leqslant s \leqslant T$. Следовательно, на множестве Ω_N

$$I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s = \int_0^t f_N(s, \omega)\, dW_s = I_t(f_N).$$

Но $f_N \in \mathfrak{M}_T$. Поэтому процесс $I_t(f_N)$ непрерывен по t, $0 \leqslant t \leqslant T$, с вероятностью 1 (точнее, имеет непрерывную модификацию). Отсюда вытекает, что на множестве Ω_N стохастические интегралы $I_t(f)$, $f \in \mathscr{P}_T$, $0 \leqslant t \leqslant T$, образуют непрерывный процесс. Но, как уже отмечалось, $\Omega' = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N$ отличается от Ω лишь на множестве P-меры нуль, следовательно, P-п. н. случайный процесс $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет непрерывные траектории. В силу прогрессивной измеримости процессов $I_t(f_N)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, это же рассуждение показывает, что процесс $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, также является прогрессивно измеримым.

Замечание 6. Согласно сделанному выше замечанию 2, если $f \in \mathfrak{M}_T$, то существует такая последовательность $\{f_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ простых функций, что равномерно по t, $0 \leqslant t \leqslant T$, с вероятностью 1 $\int_0^t f_n\, dW_s \to \int_0^t f\, dW_s$.

Аналогичный результат сохраняет свою силу и для функций $f \in \mathcal{P}_T$ (см. [123]).

Замечание 7. Полезно также отметить, что неравенства (4.59) и (4.60) сохраняются и для любой функции $f \in \mathcal{P}_T$. Действительно, пусть $\{f_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ — последовательность простых функций таких, что

$$|f_n(s, \omega)| \leqslant |f(s, \omega)|, \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \quad \omega \in \Omega,$$

и

$$\int_0^T [f_n(s, \omega) - f(s, \omega)]^2\, ds \to 0$$

(по вероятности) при $n \to \infty$. Тогда для любых $N > 0$, $C > 0$ и $A \in \mathcal{F}_T$

$$\mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t f(s, \omega)\, dW_s\right| > C\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t f_n(s, \omega)\, dW_s\right| > C\right)\right\} +$$
$$+ \mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t [f(s, \omega) - f_n(s, \omega)]\, dW_s\right| > 0\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{A \cap \left(\int_0^T f_n^2(s, \omega)\, ds > N\right)\right\} + \mathsf{P}\left\{\int_0^T [f(s, \omega) - f_n(s, \omega)]^2 ds > 0\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство

$$\mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_{t \leqslant T}\left|\int_0^t f(s, \omega)\, dW_s\right| > C\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{A \cap \left(\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds > N\right)\right\}.$$

Завершая конструкцию стохастических интегралов $I_t(f)$ для функций $f \in \mathscr{P}_T$, отметим их свойства. Свойства (4.45)—(4.47) остаются выполненными. Однако свойства (4.48), (4.49) могут нарушаться (см. ниже замечание 9 в п. 8). Если в случае $f \in \mathfrak{M}_T$ стохастические интегралы $(I_t(f), \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, образовали мартингал (притом квадратично интегрируемый), то для функций $f \in \mathscr{P}_T$ это уже, вообще говоря, не так. Впрочем, в случае $f \in \mathscr{P}_T$ $(I_t(f), \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, образуют локальный мартингал (см. далее п. 10).

7. Пусть $f \in \mathscr{P}_\infty$ и $\tau = \tau(\omega)$ — конечный $(\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1)$ марковский момент относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$. Наряду со стохастическими интегралами $I_t(f) = \int\limits_0^t f(s, \omega)\, dW_s$ введем стохастический интеграл со случайным верхним пределом τ.

Положим по определению

$$I_\tau(f) = I_t(f) \quad \text{на} \quad \{\omega\colon \tau(\omega) = t\}. \tag{4.62}$$

Поскольку стохастический интеграл $I_t(f)$, $t \geqslant 0$, является прогрессивно измеримым процессом, то по лемме 1.8 $I_\tau(f)$ является $\mathscr{F}_\tau$-измеримой случайной величиной.

По аналогии с обозначением $I_t(f) = \int\limits_0^t f(s, \omega)\, dW_s$ будем использовать также обозначение $I_\tau(f) = \int\limits_0^\tau f(s, \omega)\, dW_s$.

При оперировании со стохастическими интегралами $I_\tau(f)$ со случайным верхним пределом τ полезно следующее равенство:

$$I_\tau(f) = I_\infty(\chi \cdot f) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{4.63}$$

где $\chi = \chi_{\{t \leqslant \tau\}}$ — характеристическая функция множества $\{t \leqslant \tau\}$. В иных обозначениях равенство (4.63) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_0^\tau f(s, \omega)\, dW_s = \int\limits_0^\infty \chi_{\{s \leqslant \tau\}} f(s, \omega)\, dW_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{4.64}$$

Докажем (4.63) (или (4.64)).

Для простых функций $f \in \mathfrak{M}_\infty$ равенство

$$\int\limits_0^\tau f(s, \omega)\, dW_s = \int\limits_0^\infty \chi_{\{s \leqslant \tau\}} f(s, \omega)\, dW_s \tag{4.65}$$

очевидно.

Пусть $f \in \mathscr{P}_\infty$ и $f_n \in \mathfrak{M}_\infty$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность простых функций, участвующих в построении интегралов $I_t(f)$, $t \geqslant 0$. Поскольку (по вероятности)

$$\int_0^\infty [f_n(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau\}} - f(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau\}}]^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty [f_n(s, \omega) - f(s, \omega)]^2\,ds \to 0, \quad n\to\infty,$$

то

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau\}}\,dW_s = \int_0^\infty f(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau\}}\,dW_s. \tag{4.66}$$

Заметим теперь, что на множестве $\{\omega\colon \tau(\omega)=t\}$

$$\int_0^\tau f_n(s, \omega)\,dW_s = \int_0^t f_n(s, \omega)\,dW_s, \quad \int_0^\tau f(s, \omega)\,dW_s = \int_0^t f(s, \omega)\,dW_s$$

и

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s, \omega)\,dW_s = \int_0^t f(s, \omega)\,dW_s.$$

Поэтому на множестве $\{\omega\colon \tau(\omega)=t\}$

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^\tau f_n(s, \omega)\,dW_s = \int_0^\tau f(s, \omega)\,dW_s. \tag{4.67}$$

Из (4.65) — (4.67) следует требуемое равенство (4.64).

Следующий результат, часто используемый в дальнейшем, является обобщением леммы 4.6.

Лемма 4.7. *Пусть $f=f(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, — неупреждающий (относительно системы $F=(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$) процесс. Пусть $\{\sigma_n, n=1, 2, \ldots\}$ — неубывающая последовательность марковских моментов, $\sigma=\lim\limits_n \sigma_n$, таких, что при каждом $n=1, 2, \ldots$*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^{\sigma_n} f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right) = 1.$$

Тогда для любого события $A \in \mathscr{F}_\sigma$ и $N>0$, $C>0$

$$\mathsf{P}\left\{A \cap \left(\sup_n \left|\int_0^{\sigma_n} f(s, \omega)\,dW_s\right| > C\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{A \cap \int_0^\sigma f^2(s, \omega)\,ds > N\right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\tau_N=\begin{cases}\inf\left[t\leqslant\sigma:\ \int\limits_0^t f^2(s,\omega)\,ds\geqslant N\right],\\ \sigma,\quad\text{если}\quad \int\limits_0^\sigma f^2(s,\omega)\,ds<N,\end{cases}$$

и $f_N(s,\omega)=f(s,\omega)\chi_{\{s\leqslant\tau_N\}}$. Тогда, как и при доказательстве леммы 4.6, получаем, что

$$\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right)\right\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f_N(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right\}+$$

$$+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n}(f(s,\omega)-f_N(s,\omega))\,dW_s\right|>0\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f_N(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right\}+\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\int\limits_0^{\sigma} f^2(s,\omega)\,ds>N\right)\right\}.$$

Из теоремы 2.3 и свойств стохастических интегралов следует, что

$$\mathsf{P}\left\{\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f_N(s,\omega)\,dW_s\right|>C\right\}\leqslant\frac{1}{C^2}\,\mathsf{M}\int\limits_0^{\sigma} f_N^2(s,\omega)\,ds\leqslant\frac{N}{C^2},$$

что вместе с предшествующим неравенством и доказывает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть* $A=\left\{\omega:\ \int\limits_0^\sigma f^2(s,\omega)\,ds<\infty\right\}$. *Тогда* $\mathsf{P}\left\{A\cap\left(\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f(s,\omega)\,dW_s\right|=\infty\right)\right\}=0$. *Иначе говоря, на множестве* A

$$\sup_n\left|\int\limits_0^{\sigma_n} f(s,\omega)\,dW_s\right|<\infty,\qquad \mathsf{P}\text{-п. н.}$$

8. В качестве следствия равенства (4.64) выведем следующие формулы, известные как тождества Вальда.

Лемма 4.8. *Пусть* $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — *винеровский процесс и* $\tau=\tau(\omega)$ — *марковский момент* (*относительно* $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$) *с* $\mathsf{M}\tau < \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{M}W_\tau = 0, \tag{4.68}$$

$$\mathsf{M}W_\tau^2 = \mathsf{M}\tau. \tag{4.69}$$

Доказательство. Рассмотрим неупреждающую функцию $f(s, \omega) = \chi_{\{s \leqslant \tau(\omega)\}}$. Ясно, что

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^\infty f^2(s, \omega)\, ds < \infty\right\} = \mathsf{P}\left\{\int_0^\infty \chi_{\{s \leqslant \tau(\omega)\}}\, ds\right\} = \mathsf{P}\{\tau < \infty\} = 1,$$

т. е. эта функция принадлежит классу $\mathcal{P}_\infty$. Покажем, что для $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \chi_{\{s \leqslant \tau\}}\, dW_s = W_{t \wedge \tau} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{4.70}$$

С этой целью введем для каждого $n = 1, 2, \ldots$ марковские моменты

$$\tau_n = \frac{k}{2^n} \quad \text{на} \quad \left\{\omega\colon \frac{k-1}{2^n} \leqslant \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\},$$
$$\tau_n(\omega) = \infty \quad \text{на} \quad \{\omega\colon \tau(\omega) = \infty\}$$

и рассмотрим интегралы

$$\int_0^t \chi_{\{s \leqslant \tau_n\}}\, dW_s = \int_0^\infty \chi_{\{s \leqslant \tau_n \wedge t\}}\, dW_s.$$

Если t принимает одно из значений вида $k/2^n$, то тогда очевидно, что

$$\int_0^t \chi_{\{s \leqslant \tau_n\}}\, dW_s = \int_0^\infty \chi_{\{s \leqslant \tau_n \wedge t\}}\, dW_s = W_{\tau_n \wedge t}. \tag{4.71}$$

В силу непрерывности стохастических интегралов и траекторий винеровского процесса по t равенство (4.71) остается справедливым и для всех $t \geqslant 0$.

Заметим теперь, что

$$\int_0^\infty \mathsf{M}\left[\chi_{\{s \leqslant \tau_n\}} - \chi_{\{s \leqslant \tau\}}\right]^2 ds = \int_0^\infty [\mathsf{P}(s \leqslant \tau_n) - \mathsf{P}(s \leqslant \tau)]\, d =$$
$$= \mathsf{M}\tau_n - \mathsf{M}\tau \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^t \chi_{\{s\leqslant\tau_n\}}\, dW_s = \int_0^t \chi_{\{s\leqslant\tau\}}\, dW_s. \tag{4.72}$$

Сравнивая (4.72) с (4.71) и учитывая, что для *всех* $\omega\in\Omega$ $\tau_n(\omega)\downarrow\tau$, приходим к требуемому равенству (4.70).

Из (4.70) и (4.64) находим, что P-п. н.

$$W_\tau = \int_0^\tau \chi_{\{s\leqslant\tau\}}\, dW_s = \int_0^\infty \chi_{\{s\leqslant\tau\}}\, dW_s,$$

поскольку $\chi^2_{\{s\leqslant\tau\}} = \chi_{\{s\leqslant\tau\}}$.

Воспользуемся теперь свойствами (4.47) и (4.48), применимость которых законна, поскольку в условиях леммы $\int_0^\infty \mathsf{M}\chi^2_{\{s\leqslant\tau\}}\, ds = \mathsf{M}\tau < \infty$. Тогда

$$\mathsf{M}W_\tau = \mathsf{M}\int_0^\infty \chi_{\{s\leqslant\tau\}}\, dW_s = 0$$

и

$$\mathsf{M}W_\tau^2 = \mathsf{M}\left(\int_0^\infty \chi_{\{s\leqslant\tau\}}\, dW_s\right)^2 = \int_0^\infty \mathsf{M}\chi^2_{\{s\leqslant\tau\}}\, ds = \mathsf{M}\tau.$$

Лемма доказана.

Замечание 8. Равенство $\mathsf{M}W_\tau = 0$ остается справедливым и при условии $\mathsf{M}\sqrt{\tau} < \infty$ (см. [130], [132]).

Замечание 9. Условие $\mathsf{M}\tau < \infty$, обеспечивающее равенства $\mathsf{M}W_\tau^2 = \mathsf{M}\tau$, ослабить, вообще говоря, нельзя, что показывает такой пример. Пусть $\tau = \inf(t \geqslant 0\colon\ W_t = 1)$. Тогда $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$, $\mathsf{M}\tau = \infty$ (см. гл. 1, § 4, п. 3) и $1 = \mathsf{M}W_\tau^2 \neq \mathsf{M}\tau = \infty$.

9. Пусть $f = f(t, \omega)$ — произвольная неупреждающая функция, т. е. такая, что, вообще говоря, $\mathsf{P}\left(\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds = \infty\right) > 0$

Положим

$$\sigma_n = \inf\left\{t \leqslant T\colon\ \int_0^t f^2(s, \omega)\, ds \geqslant n\right\},$$

считая $\sigma_n = \infty$, если $\int\limits_0^T f^2(s, \omega)\,ds < n$, и пусть $\sigma = \lim\limits_n \sigma_n$. Ясно, что на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$ $\int\limits_0^\sigma f^2(s, \omega)\,ds = \infty$.

Поскольку $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_n\wedge T} f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right) = 1$, то определены стохастические интегралы

$$I_{\sigma_n\wedge T}(f) = \int\limits_0^{\sigma_n\wedge T} f(s, \omega)\,dW_s = \int\limits_0^T f_n(s, \omega)\,dW_s,$$

где $f_n(s, \omega) = f(s, \omega)\,\chi_{\{s \leqslant \sigma_n\}}$. Стохастический же интеграл $I_{\sigma\wedge T}(f)$, вообще говоря, не определен, поскольку $\int\limits_0^\sigma f^2(s, \omega)\,ds = \infty$ на множестве $\{\omega\colon \sigma \leqslant T\}$ P-п. н., а приведенные выше конструкции стохастических интегралов $I_\sigma(f)$ предполагали, что $\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^\sigma f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right\} = 1$.

При нарушении условия $\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^\sigma f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right\} = 1$ можно было бы пытаться определить интеграл $I_\sigma(f)$ как предел (в том или ином смысле) интегралов $I_{\sigma_n}(f)$ при $n \to \infty$. Но нетрудно привести примеры, когда на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$ P-п. н.

$$\overline{\lim_n}\, I_{\sigma_n}(f) = \infty, \qquad \underline{\lim_n}\, I_{\sigma_n}(f) = -\infty.$$

(Достаточно положить $T = \infty$, $f \equiv 1$.) Поэтому $\lim\limits_n I_{\sigma_n}(f)$, вообще говоря, не существует.

Покажем, однако, что существует *)

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_n \chi_{\left\{\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right\}} I_{\sigma\wedge T}(f_n), \tag{4.73}$$

который мы будем обозначать $\Gamma_{\sigma\wedge T}(f)$.

*) Этот факт будет существенно использован в гл. 6 и 7.

Для доказательства заметим, что

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_n \chi_{\left\{\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f^2(s,\,\omega)\,ds<\infty\right\}} \int\limits_0^{\sigma\wedge T} [f(s,\,\omega)-f_n(s,\,\omega)]^2\,ds=0. \quad (4.74)$$

Обозначая $\chi_{\sigma\wedge T}=\chi_{\left\{\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f^2(s,\,\omega)\,ds<\infty\right\}}$, по лемме 4.6 (см. замечание к ней) находим, что для любых $\varepsilon>0$, $\delta>0$

$$\mathsf{P}\left\{\chi_{\sigma\wedge T}\left|\int\limits_0^{\sigma\wedge T}(f_n(s,\,\omega)-f_m(s,\,\omega))\,dW_s\right|>\delta\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta^2}+\mathsf{P}\left\{\chi_{\sigma\wedge T}\int\limits_0^{\sigma\wedge T}[f_n(s,\,\omega)-f_m(s,\,\omega)]^2\,ds>\varepsilon\right\}.$$

Отсюда в силу (4.74) получаем

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\chi_{\sigma\wedge T}\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f_n(s,\,\omega)\,dW_s-\chi_{\sigma\wedge T}\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f_m(s,\,\omega)\,dW_s\right|>\delta\right\}=0. \quad (4.75)$$

Следовательно, последовательность случайных величин $\chi_{\sigma\wedge T}\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f_n(s,\,\omega)\,dW_s$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которая обозначается $\Gamma_{\sigma\wedge T}(f)$.

Заметим, что согласно проведенным построениям $|\Gamma_{\sigma\wedge T}(f)|<\infty$ P-п. н. на множестве $\left\{\omega\colon \int\limits_0^{\sigma\wedge T} f^2(s,\,\omega)\,ds=\infty\right\}$. А если $\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f^2(s,\,\omega)\,ds<\infty\right\}=1$, то

$$\Gamma_{\sigma\wedge T}(f)=I_{\sigma\wedge T}(f)=\int\limits_0^{\sigma\wedge T} f(s,\,\omega)\,dW_s.$$

Пусть теперь τ — произвольный марковский момент (не обязательно равный $\lim\limits_n \sigma_n$, где σ_n определены выше) и $\{f_n(s,\,\omega),\ n=1,\,2,\,\ldots\}$ — последовательность неупреждающих функций таких, что для каждого $n=1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^{\tau\wedge T} f_n^2(s, \omega)\,ds < \infty\right\} = 1,$$

и аппроксимирующих заданную функцию f в том смысле, что

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \chi_{\left\{\int_0^{\tau\wedge T} f^2(s,\omega)\,ds<\infty\right\}} \int_0^{\tau\wedge T} [f(s, \omega) - f_n(s, \omega)]^2\,ds = 0.$$

Аргументы, приведенные выше при определении величин $\Gamma_{\sigma\wedge T}(f)$, показывают, что и в рассматриваемом случае существует

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \chi_{\left\{\int_0^{\tau\wedge T} f^2(s,\omega)\,ds<\infty\right\}} \int_0^{\tau\wedge T} f_n(s, \omega)\,dW_s,$$

который будем также обозначать $\Gamma_{\tau\wedge T}(f)$. Важно отметить, что для заданных τ и f это значение (с точностью до стохастической эквивалентности) не зависит от специального вида аппроксимирующих последовательностей $\{f_n(s, \omega\}, n=1, 2, \ldots\}$.

Отметим также, что на множестве $\left\{\omega: \int_0^{T\wedge\tau} f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right\}$ у процесса $\Gamma_t(f)$, рассматриваемого для $t \leqslant T\wedge\tau$, существует P-п. н. непрерывная модификация. Только такие модификации далее и будут рассматриваться.

10. Как уже отмечалось выше, процесс $(I_t(f), \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, в случае $f\in\mathscr{P}_\infty$, вообще говоря, не является мартингалом. Однако этот процесс будет локальным мартингалом. Действительно, пусть $\tau_n = \inf\left(t: \int_0^t f^2(s, \omega)\,ds \geqslant n\right)\wedge n$. Тогда $\mathsf{P}(\tau_n\leqslant n)=1$, $\mathsf{P}(\tau_n\leqslant\tau_{n+1})=1$ и $\mathsf{P}\{\lim_n \tau_n=\infty\}=1$.

Рассмотрим для данного $n=1, 2, \ldots$ процесс

$$I_{t\wedge\tau_n}(f) = \int_0^{t\wedge\tau_n} f(s, \omega)\,dW_s = \int_0^t f(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau_n\}}\,dW_s.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty \mathsf{M}\left[f(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau_n\}}\right]^2 ds = \int_0^n \mathsf{M}\left[f(s, \omega)\chi_{\{s\leqslant\tau_n\}}\right]^2 ds \leqslant n,$$

то процесс $(I_{t\wedge\tau_n}(f), \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, является квадратичноинтегрируемым мартингалом. При этом

$$I_{t\wedge\tau_n}(f)=\mathsf{M}\left[I_{\tau_n}(f)\,|\,\mathcal{F}_t\right],$$

где $\mathsf{M}\left|I_{\tau_n}(f)\right|<\infty$. Из этого представления вытекает, что последовательность случайных величин $\{I_{t\wedge\tau_n}(f),\ t\geqslant 0\}$ является равномерно интегрируемой (см. доказательство теоремы 2.7).

Согласно определению 6 (гл. 3, § 3) это доказывает, что процесс $(I_t(f), \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, является локальным мартингалом.

11. В дальнейшем при рассмотрении задач нелинейной фильтрации нам придется сталкиваться со стохастическими интегралами, где интегрирование производится не по винеровскому процессу, а по так называемым процессам Ито. Дадим необходимые определения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$ и $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс.

Определение 6. Непрерывный случайный процесс $\xi=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, называется *процессом Ито* по отношению к винеровскому процессу $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t\leqslant T$, если существуют два неупреждающих процесса $a=(a_t, \mathcal{F}_t)$ и $b=(b_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, такие, что

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T |a_t|\,dt<\infty\right\}=1, \tag{4.76}$$

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T b_t^2\,dt<\infty\right\}=1 \tag{4.77}$$

и с вероятностью 1 для $0\leqslant t\leqslant T$

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t a(s,\omega)\,ds+\int_0^t b(s,\omega)\,dW_s. \tag{4.78}$$

(Для краткости говорят, что процесс ξ_t имеет стохастический дифференциал

$$d\xi_t=a(s,\omega)\,dt+b(s,\omega)\,dW_t, \tag{4.79}$$

понимая при этом (4.79) как сокращенную запись представления (4.78).)

Пусть теперь $f=(f(t,\omega), \mathcal{F}_t)$ — некоторая неупреждающая функция. Стохастический интеграл $I_t(f)=\int_0^t f(s,\omega)\,d\xi_s$ от функции $f=f(s,\omega)$ по процессу с дифференциалом (4.79) будет пониматься как

$$\int_0^t f(s, \omega)\, a(s, \omega)\, ds + \int_0^t f(s, \omega)\, b(s, \omega)\, dW_s \tag{4.80}$$

при условии, что оба этих интеграла существуют, для чего достаточно, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |f(s, \omega)\, a(s, \omega)|\, ds < \infty\right) = 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f^2(s, \omega)\, b^2(s, \omega)\, ds < \infty\right) = 1.$$

Данное определение интеграла $\int_0^t f(s, \omega)\, d\xi_s$ как величины (4.80) не совсем удобно, поскольку оно не дает эффективного способа вычисления $I_t(f)$ непосредственно по процессу $\xi=(\xi_s, \mathscr{F}_s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Можно, однако, получить так определенный интеграл как предел интегральных сумм вида

$$I_T(f_n) = \sum_{\{0 \leqslant i \leqslant m,\ t_{m+1}^{(n)} < T\}} f_n\left(t_i^{(n)}, \omega\right)\left[\xi_{t_{i+1}^{(n)}} - \xi_{t_i^{(n)}}\right] + \\ + f_n\left(t_{m+1}^{(n)}, \omega\right)\left[\xi_T - \xi_{t_{m+1}^{(n)}}\right] \tag{4.81}$$

(ср. с (4.21)), где $f_n(t, \omega)$ — простые функции, аппроксимирующие $f(t, \omega)$ в том смысле, что

$$\int_0^T (|a(t, \omega)|\, |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)| + \\ + b^2(t, \omega))\, |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2)\, dt \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty. \tag{4.82}$$

Для справедливости (4.82) достаточно, например, потребовать, чтобы

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T f^2(t, \omega)(|a(t, \omega)| + b^2(t, \omega))\, dt < \infty\right\} = 1. \tag{4.83}$$

Если условие (4.83) не выполнено, то возьмем простые функции $f_n^{(N)}(t, \omega)$ такие, что при каждом $N = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^T [f^{(N)}(t, \omega) - f_n^{(N)}(t, \omega)]^2 (|a(t, \omega)| + b^2(t, \omega))\, dt \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty,$$

где

$$f^{(N)}(t, \omega) = \begin{cases} f(t, \omega), & |f(t, \omega)| \leqslant N, \\ 0, & |f(t, \omega)| > N. \end{cases}$$

Тогда из последовательности $f_n^{(N)}(t, \omega)$ $(n, N = 1, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $\tilde{f}_n(t, \omega)$, аппроксимирующую $f(t, \omega)$ таким образом, что

$$\int_0^T |f(t, \omega) - \tilde{f}_n(t, \omega)| \, |a(t, \omega)| \, dt + \\ + \int_0^T [f(t, \omega) - \tilde{f}_n(t, \omega)]^2 b^2(t, \omega) \, dt \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство существования аппроксимирующей последовательности (при условии (4.83)) и существования предела $\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_n I_T(\tilde{f}_n)$ проводится так же, как и в случае построения интегралов по винеровскому процессу. Интегралы $I_t(f)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определяемые как $\int_0^T f(s, \omega) \chi_{\{s \leqslant t\}} d\xi_s$, образуют, как и в случае интегрирования по винеровскому процессу, непрерывный случайный процесс ($\mathbf{P}$-п. н.).

12. Важным частным случаем процессов Ито являются процессы диффузионного типа.

Определение 7. Процесс Ито $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, называется *процессом диффузионного типа* (по отношению к винеровскому процессу $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$), если функционалы $a(s, \omega)$ и $b(s, \omega)$, входящие в (4.78), являются $\mathcal{F}_s^\xi$-измеримыми *для почти всех* s, $0 \leqslant s \leqslant T$.

Обозначим $(\mathbf{C}_T, \mathcal{B}_T)$ измеримое пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x = (x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с σ-алгеброй $\mathcal{B}_T = \sigma\{x\colon x_t, t \leqslant T\}$. Пусть $\mathcal{B}_t = \sigma\{x\colon x_s, s \leqslant t\}$ и $\mathcal{B}_{[0, t]}$ — наименьшая σ-алгебра множеств на $[0, T]$, содержащая все борелевские подмножества отрезка $[0, t]$.

Приводимая далее лемма 4.9 показывает, что если ξ является процессом диффузионного типа с коэффициентами $a(s, \omega)$ и $b(s, \omega)$, то найдутся измеримые по паре переменных (s, x) функционалы $A(s, x)$ и $B(s, x)$, являющиеся $\mathcal{B}_{s+}$-измеримыми при каждом s, такие, что $\mathbf{P}$-п. н. для почти всех $0 \leqslant s \leqslant T$

$$A(s, \xi(\omega)) = a(s, \omega), \qquad B(s, \xi(\omega)) = b(s, \omega).$$

Отсюда следует, что для процессов диффузионного типа наряду с равенствами (P-п. н. для каждого $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s, \omega)\, ds + \int_0^t b(s, \omega)\, dW_s$$

справедливы также (P-п. н. для каждого $0 \leqslant t \leqslant T$) равенства

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t A(s, \xi)\, ds + \int_0^t B(s, \xi)\, dW_s,$$

где (измеримые) функционалы $A(s, x)$ и $B(s, x)$ являются $\mathscr{B}_{s+}$-измеримыми для каждого s, $0 \leqslant s \leqslant T$, $\mathscr{B}_{T+} = \mathscr{B}_T$.

Лемма 4.9. *Пусть $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — непрерывный случайный процесс, определенный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$. Пусть, далее, измеримый процесс $\zeta = (\zeta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, согласован с семейством σ-алгебр $\boldsymbol{F}^\xi = (\mathscr{F}_t^\xi)$.*

Тогда существует измеримый функционал $\varphi = \varphi(t, x)$, определенный на $([0, T] \times C_T, \mathscr{B}_{[0, T]} \times \mathscr{B}_T)$, который $\mathscr{B}_{t+}$-измерим при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ и такой, что

$$\lambda \times \mathrm{P}\{(t, \omega):\ \xi_t(\omega) \neq \varphi(t, \xi(\omega))\} = 0,$$

где λ — лебеговская мера на $[0, T]$, а $\lambda \times \mathrm{P}$ — прямое произведение мер λ и P.

Доказательство. Поскольку процесс $\zeta = (\zeta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, измерим и $\boldsymbol{F}^\xi$-согласован, то (см. гл. 1, § 2) у него существует прогрессивно измеримая модификация. Будем считать, что этим свойством обладает сам процесс $\zeta = (\zeta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда для каждого $0 \leqslant u \leqslant T$ функция $\zeta_{t \wedge u}(\omega)$, рассматриваемая как функция от (t, ω), где $0 \leqslant t \leqslant T$, $\omega \in \Omega$, является измеримой относительно $\lambda \times \mathrm{P}$-пополнения σ-алгебры $\mathscr{B}_{[0, u]} \times \mathscr{F}_u^\xi$. Поэтому для каждого $0 \leqslant u \leqslant T$ на $([0, T] \times C_T, \mathscr{B}_{[0, u]} \times \mathscr{B}_u)$ существует измеримый функционал $\varphi_u(t, x)$, такой, что

$$\lambda \times \mathrm{P}\left\{(t, \omega):\ \zeta_{t \wedge u}(\omega) \neq \varphi_u(t, \xi(\omega))\right\} = 0.$$

Пусть $u_{k, n} = \frac{T}{2^n} \cdot k$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Положим

$$\varphi^{(n)}(t, x) = \varphi_0(0, x)\chi_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{2^n} \varphi_{u_{k, n}}(t, x)\chi_{(u_{k-1, n}, u_{kn}]}(t)$$

и

$$\varphi(t, x) = \overline{\lim_n}\, \varphi^{(n)}(t, x).$$

Функционалы $\varphi^{(n)}(t, x)$ измеримы по (t, x) при каждом n, и, следовательно, функционал $\varphi(t, x)$ также измерим. Из конструкции функционалов $\varphi^{(n)}(t, x)$, $n=1, 2, \ldots$, видно также, что $\varphi(t, x)$ при каждом t $\mathscr{B}_{t+}$-измеримы. Далее, для всякого $\varepsilon>0$ и $n=1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&\{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\zeta_t(\omega)|>\varepsilon\} \subseteq \\
&\quad \subseteq \{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))|>\varepsilon/2\} \cup \\
&\quad \cup \{(t, \omega)\colon |\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))-\zeta_t(\omega)|>\varepsilon/2\} = \\
&\quad = \{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))|>\varepsilon/2\} \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} \{(u_{k-1, n}<t\leqslant u_{kn}, \omega)\colon |\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))-\zeta_t(\omega)|>\varepsilon/2\} \cup \\
&\quad \cup \{(t=0, \omega)\colon |\varphi^{(n)}(0, \xi(\omega))-\zeta_0(\omega)|>\varepsilon/2\} = \\
&\quad = \{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))|>\varepsilon/2\} \cup \\
&\quad \cup \{(t=0, \omega)\colon |\varphi_0(0, \xi(\omega))-\zeta_0(\omega)|>\varepsilon/2\} \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{(u_{k-1, n}<t\leqslant u_{kn}, \omega)\colon \left|\varphi_{u_{kn}}(t, \xi(\omega))-\zeta_{t\wedge u_{kn}}(\omega)\right|>\varepsilon/2\right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\lambda\times\mathsf{P}\{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\zeta_t(\omega)|>\varepsilon\} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \lambda\times\mathsf{P}\{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\varphi^{(n)}(t, \xi(\omega))|>\varepsilon/2\}.
\end{aligned}$$

Так как $\varphi(t, x)=\overline{\lim\limits_n}\,\varphi^{(n)}(t, x)$, то существует такая подпоследовательность (n_j), $j=1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n_j\to\infty} \lambda\times\mathsf{P}\left\{(t, \omega)\colon \left|\varphi(t, \xi(\omega))-\varphi^{(n_j)}(t, \xi(\omega))\right|>\varepsilon/2\right\}=0.$$

Поэтому для всякого $\varepsilon>0$

$$\lambda\times\mathsf{P}\{(t, \omega)\colon |\varphi(t, \xi(\omega))-\zeta_t(\omega)|>\varepsilon\}=0.$$

Лемма доказана.

13. Пусть $A=(A(t, x), \mathscr{B}_{t+})$, $\tilde{A}=(\tilde{A}(t, x), \mathscr{B}_{t+})$, $B=(B(t, x), \mathscr{B}_{t+})$, $\tilde{B}=(\tilde{B}(t, x), \mathscr{B}_{t+})$ — неупреждающие функционалы и $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — процессы диффузионного типа с

$$d\xi_t=A(t, \xi)\,dt+B(t, \xi)\,dW_t,$$
$$d\tilde{\xi}_t=\tilde{A}(t, \tilde{\xi})\,dt+\tilde{B}(t, \tilde{\xi})\,dW_t.$$

Функционалы A, $\tilde{A}$, B, $\tilde{B}$ предполагаются такими, что P-п. н.

$$\int_0^T [|A(t, \xi)|+|\tilde{A}(t, \tilde{\xi})|+B^2(t, \xi)+\tilde{B}^2(t, \tilde{\xi})]\,dt<\infty,$$

(Заметим, что при каждом s величины $B(s, \xi)$ и $\tilde{B}(s, \tilde{\xi})$ являются $\mathcal{F}_{s+}$-измеримыми и существование стохастических интегралов $\int\limits_0^t B(s, \xi)\, dW_s$, $\int\limits_0^t B(s, \tilde{\xi})\, dW_s$ вытекает из предшествующего неравенства и того факта, что процесс $W_t = (W_t, \mathcal{F}_{t+})$, как и $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, является также винеровским.)

Пусть теперь $g = (g(t, x), \mathcal{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неупреждающий функционал с

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T |g(t, \xi)|\, dt < \infty\right) = \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T |g(t, \tilde{\xi})|\, dt < \infty\right) = 1.$$

Рассмотрим интегралы (Лебега)

$$\int\limits_0^T g(t, \xi)\, dt, \qquad \int\limits_0^T g(t, \tilde{\xi})\, dt.$$

Поскольку они являются $\mathcal{F}_T^{\xi}$- и $\mathcal{F}_T^{\tilde{\xi}}$-измеримыми соответственно, то найдутся $\mathcal{B}_T$-измеримые функционалы $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ такие, что P-п. н.

$$\psi(\xi) = \int\limits_0^T g(t, \xi)\, dt, \qquad \tilde{\psi}(\tilde{\xi}) = \int\limits_0^T g(t, \tilde{\xi})\, dt.$$

Эти равенства могут задавать функционалы $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ не единственным образом. Поэтому, вообще говоря,

$$\mathsf{P}\{\psi(\tilde{\xi}) \neq \tilde{\psi}(\tilde{\xi})\} > 0, \qquad \mathsf{P}\{\psi(\xi) \neq \tilde{\psi}(\xi)\} > 0.$$

Рассмотрим теперь стохастические интегралы

$$\int\limits_0^T f(t, \xi)\, d\xi_t, \qquad \int\limits_0^T f(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t,$$

для существования которых потребуем, чтобы μ_ξ- и $\mu_{\tilde{\xi}}$-почти наверное *)

$$\int\limits_0^T [|f(t, x)|(|A(t, x)| + |\tilde{A}(t, x)|) + \\ + f^2(t, x)(B^2(t, x) + \tilde{B}^2(t, x))]\, dt < \infty.$$

---

*) μ_ξ и $\mu_{\tilde{\xi}}$ — меры в пространстве $(C_T, \mathcal{B}_T)$, отвечающие процессам ξ и $\tilde{\xi}$ соответственно.

Стохастические интегралы

$$\int_0^T f(t, \xi)\, d\xi_t, \qquad \int_0^T f(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t$$

являются $\mathscr{F}_T^{\xi}$- и $\mathscr{F}_T^{\tilde{\xi}}$-измеримыми соответственно. Поэтому найдутся $\mathscr{B}_T$-измеримые функционалы $\Phi(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ такие, что P-п. н.

$$\Phi(\xi) = \int_0^T f(t, \xi)\, d\xi_t, \qquad \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}) = \int_0^T f(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t.$$

Для функционалов $\Phi(x)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ также не обязательно справедливы P-п. н. следующие равенства: $\Phi(\tilde{\xi}) = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi})$, $\Phi(\xi) = \tilde{\Phi}(\xi)$.

В самом деле, пусть $f(t, x) = x_t$, $\xi_t = W_t$, $\tilde{\xi}_t = 2W_t$. Тогда

$$\int_0^T W_t\, dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}, \qquad \int_0^T (2W_t)\, d(2W_t) = \frac{(2W_T)^2}{2} - 2T.$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{x_T^2}{2} - \frac{T}{2}, \qquad \tilde{\Phi}(x) = \frac{x_T^2}{2} - 2T$$

и

$$\mathsf{P}(\Phi(\tilde{\xi}) > \tilde{\Phi}(\tilde{\xi})) = 1.$$

Заметим, что в рассмотренном примере меры μ_ξ и $\mu_{\tilde{\xi}}$ являются сингулярными. Поэтому естественно ожидать, что равенство (P-п. н.) функционалов $\Phi(\tilde{\xi})$ и $\tilde{\Phi}(\tilde{\xi})$, $\Phi(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(\xi)$, а также функционалов $\psi(\tilde{\xi})$ и $\tilde{\psi}(\tilde{\xi})$, $\psi(\xi)$ и $\tilde{\psi}(\xi)$ определяется свойствами абсолютной непрерывности мер μ_ξ и $\mu_{\tilde{\xi}}$.

Лемма 4.10. 1) *Если мера μ_ξ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{\tilde{\xi}}$ ($\mu_\xi \ll \mu_{\tilde{\xi}}$), то $\psi(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, $\Phi(\xi) = \tilde{\Phi}(\xi)$* ($\mathsf{P}$-п. н.).

2) *Если $\mu_{\tilde{\xi}} \ll \mu_\xi$, то $\psi(\tilde{\xi}) = \tilde{\psi}(\tilde{\xi})$, $\Phi(\tilde{\xi}) = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi})$* ($\mathsf{P}$-п. н.).

Доказательство. Установим справедливость равенства $\psi(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$. Пусть $g_n = (g_n(t, x), \mathscr{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность (простых) функционалов таких, что

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t, \tilde{\xi})\, dt = \int_0^T g(t, \tilde{\xi})\, dt,$$

Тогда функционал

$$\tilde{\psi}(x) = \mu_{\tilde{\xi}}\text{-}\lim_{n \to \infty} \int_0^T g_n(t, x)\, dt.$$

В силу абсолютной непрерывности $\mu_\xi \ll \mu_{\tilde{\xi}}$

$$\tilde{\psi}(x) = \mu_\xi\text{-}\lim_{n \to \infty} \int_0^T g_n(t, x)\, dt.$$

Поэтому отсюда получаем, что

$$\tilde{\psi}(\xi) = \mathsf{P}\text{-}\lim_{n \to \infty} \int_0^T g_n(t, \xi)\, dt = \psi(\xi) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Для доказательства равенства $\Phi(\xi) = \tilde{\Phi}(\xi)$ рассмотрим плотность (производную Радона — Никодима) $\mathfrak{z}(x) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_{\tilde{\xi}}}(x)$ меры μ_ξ по мере $\mu_{\tilde{\xi}}$. На исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ введем новую вероятностную меру $\tilde{\mathsf{P}}$, положив $\tilde{\mathsf{P}}(d\omega) = \mathfrak{z}(\tilde{\xi}(\omega))\, \mathsf{P}(d\omega)$. Тогда, если $\Gamma \in \mathscr{B}_T$, то

$$\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde{\xi} \in \Gamma\} = \int_{\{\omega:\ \tilde{\xi}(\omega) \in \Gamma\}} \mathfrak{z}(\tilde{\xi}(\omega))\, \mathsf{P}(d\omega) = \int_\Gamma \mathfrak{z}(x)\, d\mu_{\tilde{\xi}}(x) = \mu_\xi(\Gamma) = \\ = \mathsf{P}\{\xi \in \Gamma\}.$$

Пусть теперь $f_n = (f_n(t, x), \mathscr{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность (простых) функционалов таких, что P-п. н.

$$\lim_n \int_0^T \{[B^2(t, \tilde{\xi}) + \tilde{B}^2(t, \tilde{\xi})][f(t, \tilde{\xi}) - f_n(t, \tilde{\xi})]^2 + \\ + (|A(t, \tilde{\xi})| + |\tilde{A}(t, \tilde{\xi})|)(|f(t, \tilde{\xi}) - f_n(t, \tilde{\xi})|)\}\, dt = 0.$$

Тогда, поскольку $\tilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, то этот предел равен также нулю и $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н., откуда в силу установленного равенства $\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde{\xi} \in \Gamma\} = \mathsf{P}\{\xi \in \Gamma\}$ следует, что

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_n \int_0^T \{[B^2(t, \xi) + \tilde{B}^2(t, \xi)][f(t, \xi) - f_n(t, \xi)]^2 + \\ + (|A(t, \xi)| + |\tilde{A}(t, \xi)|)(|f(t, \xi) - f_n(t, \xi)|\})\, dt = 0.$$

Значит (см. п. 11 настоящего параграфа),

$$\text{P-}\lim_n \int_0^T f_n(t, \xi)\, d\xi_t = \int_0^T f(t, \xi)\, d\xi_t = \Phi(\xi),$$

$$\text{P-}\lim_n \int_0^T f_n(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t = \int_0^T f(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t = \tilde{\Phi}(\tilde{\xi}).$$

В силу определения стохастических интегралов от простых функций и равенства $\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde{\xi} \in \Gamma\} = \mathsf{P}\{\xi \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathscr{B}_T$,

$$\lim_n \mathsf{P}\left\{\left|\tilde{\Phi}(\xi) - \int_0^T f_n(t, \xi)\, d\xi_t\right| > \varepsilon\right\} = \\ = \lim_n \tilde{\mathsf{P}}\left\{\left|\tilde{\Phi}(\tilde{\xi}) - \int_0^T f_n(t, \tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}_t\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\{|\tilde{\Phi}(\xi) - \Phi(\xi)| > \varepsilon\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\left|\tilde{\Phi}(\xi) - \int_0^T f_n(t, \xi)\, d\xi_t\right| > \varepsilon/2\right\} + \\ + \mathsf{P}\left\{\left|\Phi(\xi) - \int_0^T f_n(t, \xi)\, d\xi_t\right| > \varepsilon/2\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, P-п. н. $\tilde{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi)$, что и доказывает первое утверждение леммы. Аналогичным образом устанавливается справедливость и второго утверждения.

Лемма доказана.

§ 3. Формула (замены переменных) Ито

1. Пусть $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс, имеющий стохастический дифференциал

$$d\xi_t = a(t, \omega)\, dt + b(t, \omega)\, dW_t, \tag{4.84}$$

где $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс, а неупреждающие функции $a(t, \omega)$, $b(t, \omega)$ таковы, что

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T |a(t, \omega)|\, dt < \infty\right\} = 1, \tag{4.85}$$

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T b^2(t, \omega)\, dt < \infty\right\} = 1. \tag{4.86}$$

Пусть теперь $f=f(t, x)$ — измеримая функция, определенная на $[0, T]\times R^1$. Приводимая ниже теорема дает условия, при которых случайный процесс $f(t, \xi_t)$ также допускает стохастический дифференциал.

Теорема 4.4. *Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $f'_t(t, x)$, $f'_x(t, x)$ и $f''_{xx}(t, x)$. Предположим, что случайный процесс $\xi=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеет стохастический дифференциал* (4.84).

Тогда процесс $f(t, \xi_t)$ также имеет стохастический дифференциал и

$$df(t, \xi_t)=\left[f'_t(t, \xi_t)+f'_x(t, \xi_t)a(t, \omega)+\frac{1}{2}f''_{xx}(t, \xi_t)b^2(t, \omega)\right]dt+ \\ +f'_x(t, \xi_t)b(t, \omega)\,dW_t. \quad (4.87)$$

Формула (4.87), полученная К. Ито, далее будет называться формулой (замены переменных) Ито.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для доказательства формулы Ито достаточно ограничиться рассмотрением лишь простых функций $a(s, \omega)$ и $b(s, \omega)$. Действительно, пусть $a_n(s, \omega)$, $b_n(s, \omega)$, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательности простых функций такие, что с вероятностью 1

$$\int_0^T |a(s, \omega)-a_n(s, \omega)|\,ds\to 0, \quad n\to\infty,$$

$$\int_0^T [b(s, \omega)-b_n(s, \omega)]^2\,ds\to 0, \quad n\to\infty$$

(см. лемму 4.5 и замечание 3 к ней). Согласно замечанию 4 (§ 2) можно считать, что последовательность $\{b_n(s, \omega), n=1, 2, \ldots\}$ выбрана так, что равномерно по $t\leqslant T$ с вероятностью 1

$$\int_0^t b_n(s, \omega)\,dW_s\to\int_0^t b(s, \omega)\,dW_s.$$

Тогда последовательность процессов

$$\xi_t^n=\xi_0+\int_0^t a_n(s, \omega)\,ds+\int_0^t b_n(s, \omega)\,dW_s$$

с вероятностью 1 равномерно по t, $0\leqslant t\leqslant T$, сходится к процессу ξ_t.

Предположим теперь, что формула (4.87) установлена для процессов $\xi_t^{(n)}$. Иначе говоря, пусть для $0 \leqslant s \leqslant T$ P-п. н.

$$f(s, \xi_s^{(n)}) = f(0, \xi_0) + \int_0^s \Big[f'_t(t, \xi_t^{(n)}) + f'_x(t, \xi_t^{(n)}) a_n(t, \omega) + \\ + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, \xi_t^{(n)}) b_n^2(t, \omega) \Big] dt + \int_0^s f'_x(t, \xi_t^{(n)}) b_n(t, \omega)\, dW_t. \quad (4.88)$$

Тогда, поскольку $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_t^{(n)} - \xi_t| \to 0$, $n \to \infty$, с вероятностью 1, а функции f, f'_t, f'_x, f''_{xx} непрерывны, совершая в (4.88) предельный переход, получим, что

$$f(s, \xi_s) = f(0, \xi_0) + \int_0^s \Big[f'_t(t, \xi_t) + f'_x(t, \xi_t) a(t, \omega) + \\ + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, \xi_t) b^2(t, \omega) \Big] dt + \int_0^s f'_x(t, \xi_t) b(t, \omega)\, dW_t. \quad (4.89)$$

(Стохастические интегралы $\int_0^s f'_x(t, \xi_t^{(n)}) b_n(t, \omega)\, dW_t \to \int_0^s f'_x(t, \xi_t) \times$ $\times b(t, \omega)\, dW_t$ при $n \to \infty$ в силу замечания 4 из предшествующего параграфа.)

Итак, достаточно доказать формулу (4.89), предполагая, что функции $a(t, \omega)$ и $b(t, \omega)$ являются простыми. При этом в силу аддитивности стохастических интегралов достаточно рассмотреть лишь такие $t \geqslant 0$, для которых

$$\xi_t = \xi_0 + at + bW_t, \quad (4.90)$$

где $a = a(\omega)$, $b = b(\omega)$ — некоторые случайные величины (не зависящие от t).

Пусть представление (4.90) выполнено для $t \leqslant t_0$, и пусть для простоты $\xi_0 = 0$. Тогда, очевидно, найдется такая функция $u(t, x)$ той же степени гладкости, что и $f(t, x)$, что

$$u(t, W_t) = f(t, at + bW_t), \qquad t \leqslant t_0.$$

Поэтому формулу Ито достаточно установить лишь для функции $u = u(t, W_t)$, $t \leqslant t_0$.

Положим $l = [2^n t]$, $\Delta W = W_{k \cdot 2^{-n}} - W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}$, $\Delta = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда по формуле Тейлора после ряда преобразований найдем, что

$$
\begin{aligned}
&u(t, W_t) - u(0, 0) = \\
&= \sum_{k \leqslant l} \left[u\left(k \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) - u\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) \right] + \\
&+ \sum_{k \leqslant l} \left[u\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) - u\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \right] + \\
&+ \left[u(t, W_t) - u\left(l \cdot 2^{-n}, W_{l \cdot 2^{-n}}\right) \right] = \\
&= \sum_{k \leqslant l} \left[u_t'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) \Delta + \left\{ u_t'\left(((k-1)+\theta_k) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) - \right.\right. \\
&\left.\left. - u_t'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) \right\} \Delta \right] + \sum_{k \leqslant l} \left[u_x'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \Delta W + \right. \\
&+ \frac{1}{2} u_{xx}''\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) (\Delta W)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta W)^2 \left\{ u_{xx}''\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}} + \theta_k' \Delta W\right) - \right. \\
&\qquad \left.\left. - u_{xx}''\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \right\} \right] + \delta_n(\omega), \qquad (4.91)
\end{aligned}
$$

где θ_k, θ_k' — случайные величины такие, что $0 \leqslant \theta_k \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_k' \leqslant 1$, а $\lim_n \delta_n(\omega) = 0$ (P-п. н.).

Заметим теперь, что случайные величины

$$
\alpha_n = \sup_{k \leqslant l} \left| u_t'\left(((k-1)+\theta_k) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) - u_t'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) \right|
$$

и

$$
\begin{aligned}
\beta_n = \sup_{k \leqslant l} \Big| u_{xx}''&\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}} + \theta_k' \Delta W\right) - \\
&- u_{xx}''\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \Big|
\end{aligned}
$$

при $n \to \infty$ стремятся к нулю с вероятностью 1 в силу непрерывности винеровского процесса и непрерывности производных u_t', u_{xx}''. Поэтому

$$
\begin{aligned}
u(t, W_t) - u(0, 0) = \sum_{k \leqslant l} u_t'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{k \cdot 2^{-n}}\right) \Delta + \\
+ \sum_{k \leqslant l} \left(u_x'\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \Delta W + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} u_{xx}''\left((k-1) \cdot 2^{-n}, W_{(k-1) \cdot 2^{-n}}\right) \Delta \right) + A_n + B_n + C_n + \delta_n(\omega), \quad (4.92)
\end{aligned}
$$

где

$$A_n \leqslant \alpha_n \cdot t, \qquad B_n \leqslant \frac{1}{2}\beta_n \sum_{k\leqslant l} (\Delta W)^2,$$

$$C_n = \frac{1}{2}\sum_{k\leqslant l} u''_{xx}\left((k-1)\cdot 2^{-n}, W_{(k-1)\cdot 2^{-n}}\right)\left((\Delta W)^2 - \Delta\right).$$

Ясно, что с вероятностью 1 $A_n \to 0$. Точно так же и $B_n \to 0$, поскольку с вероятностью 1 $\sum\limits_{k\leqslant l} (\Delta W)^2 \to t$ (лемма 4.3). Покажем, что $C_n \to 0$ (по вероятности) при $n \to \infty$.

Пусть $\chi_k^N = \chi_{\left\{\max\limits_{i\leqslant k} |W_{i\cdot 2^{-n}}| \leqslant N\right\}}$. Тогда

$$\mathsf{M}\left[\sum_{k\leqslant l} u''_{xx}\left((k-1)\cdot 2^{-n}, W_{(k-1)\cdot 2^{-n}}\right)\chi_k^N\left((\Delta W)^2 - \Delta\right)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\leqslant l} \mathsf{M}\left(u''_{xx}\left((k-1)\cdot 2^{-n}, W_{(k-1)\cdot 2^{-n}}\right)\chi_k^N\right)^2\left((\Delta W)^2 - \Delta\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\leqslant t_0,\ |x|\leqslant N} |u''_{xx}(t, x)|^2 \sum_{k\leqslant l} \mathsf{M}\left((\Delta W)^2 - \Delta\right)^2 =$$

$$= 2 \sup_{t\leqslant t_0,\ |x|\leqslant N} |u''_{xx}(t, x)|^2 \sum_{k\leqslant l} (\Delta)^2 \to 0, \quad n\to\infty. \tag{4.93}$$

Далее,

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{k\leqslant l} u''_{xx}\left((k-1)\cdot 2^{-n}, W_{(k-1)\cdot 2^{-n}}\right)\left(1-\chi_k^N\right)\left((\Delta W)^2 - \Delta\right) \neq 0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{\sup_{t\leqslant t_0} |W_t| > N\right\} \to 0, \quad N\to\infty. \tag{4.94}$$

Из (4.93) и (4.94) следует, что $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_{n} C_n = 0$. Переходя теперь в (4.92) к пределу при $n\to\infty$, получаем, что P-п. н. при всех t, $0\leqslant t\leqslant t_0$,

$$u(t, W_t) - u(0, 0) = \int_0^t u'_t(s, W_s)\,ds + \int_0^t u'_x(s, W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t u''_{xx}(s, W_s)\,ds. \tag{4.95}$$

Чтобы перейти от функции $u(t, W_t)$ к функции $f(t, \xi_t)$, вспомним, что $u(t, W_t) = f(t, at + bW_t)$. Поэтому

$$u'_t(s, W_s) = f'_s(s, \xi_s) + af'_x(s, \xi_s),$$

$$u'_x(s, W_s) = bf'_x(s, \xi_s),$$

$$u''_{xx}(s, W_s) = b^2 f''_{xx}(s, \xi_s).$$

Подставляя эти значения в (4.95), получаем требуемый результат:

$$f(t, \xi_t)=f(0, 0)+\int_0^t \left[f'_t(s, \xi_s)+af'_x(s, \xi_s)+\frac{1}{2}b^2f''_{xx}(s, \xi_s)\right]ds+\\ +\int_0^t bf'_x(s, \xi_s)\,dW_s. \quad (4.96)$$

Замечание. Формула Ито (4.87) сохраняет свою силу с заменой t на марковский момент $\tau=\tau(\omega)$ (относительно $(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$), если только $\mathsf{P}(\tau<\infty)=1$ и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^\tau |a(s, \omega)|\,ds<\infty\right)=1, \quad \mathsf{P}\left(\int_0^\tau b^2(s, \omega)\,ds<\infty\right)=1.$$

2. Приведем теперь многомерный вариант формулы Ито.

Пусть $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — векторный случайный процесс $\xi_t=(\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))$, имеющий стохастический дифференциал

$$d\xi_t=a(t, \omega)\,dt+b(t, \omega)\,dW_t, \quad (4.97)$$

где $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — (векторный) винеровский процесс *), $W_t=(W_1(t), \ldots, W_m(t))$. Вектор $a(t, \omega)=(a_1(t, \omega), \ldots, a_m(t, \omega))$ и матрица $b(t, \omega)=\|b_{ij}(t, \omega)\|$, $i, j=1, \ldots, m$, состоят из неупреждающих функций, удовлетворяющих условиям

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |a_i(t, \omega)|\,dt<\infty\right)=1, \qquad i=1, \ldots, m,$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T b_{ij}^2(t, \omega)\,dt<\infty\right)=1, \qquad i, j=1, \ldots, m.$$

В развернутом виде (4.97) записывается следующим образом:

$$d\xi_i(t)=a_i(t, \omega)\,dt+\sum_{j=1}^m b_{ij}(t, \omega)\,dW_j(t), \quad i=1, \ldots, m.$$

Теорема 4.5. *Пусть функция $f(t, x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна и имеет непрерывные производные f'_t, f'_{x_i}, $f''_{x_ix_j}$. Тогда с вероят-*

---

*) То есть векторный процесс, компоненты которого — независимые винеровские процессы.

ностью 1 *процесс* $f(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))$ *имеет стохастический дифференциал*

$$df(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) =$$
$$= \Big[f'_t(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) + \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))\, a_i(t, \omega) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(t, \omega)\, b_{jk}(t, \omega)\Big] dt +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))\, b_{ij}(t, \omega)\, dW_j(t). \quad (4.98)$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и в случае $m = 1$.

3. Рассмотрим ряд примеров на применение формулы Ито (4.98).

Пример 1. Пусть $X_i = (x_i(t), \mathscr{F}_t)$, $i = 1, 2,$ — два случайных процесса с дифференциалами

$$dx_i(t) = a_i(t, \omega)\, dt + b_i(t, \omega)\, dW_t.$$

Предполагается, что $x_1(t) = (x_{11}(t), \ldots, x_{1n}(t))$, $x_2(t) = (x_{21}(t), \ldots, x_{2m}(t))$, — вектор-функции $a_1(t) = (a_{11}(t), \ldots, a_{1n}(t))$, $a_2(t) = (a_{21}(t), \ldots, a_{2m}(t))$, матрицы $b_1(t) = \|b^1_{ij}(t)\|$, $b_2(t) = \|b^2_{ij}(t)\|$ имеют соответственно порядок $n \times k$, $m \times k$, а винеровский процесс $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ имеет k независимых компонент.

Рассмотрим матрицу $Y(t) = x_1(t)\, x^*_2(t)$. Применяя формулу Ито к элементам матрицы $Y(t)$, найдем, что

$$dY(t) = [x_1(t)\, a^*_2(t) + a_1(t)\, x^*_2(t) + b_1(t)\, b^*_2(t)]\, dt +$$
$$+ b_1(t)\, dW_t x^*_2(t) + x_1(t)\, dW^*_t b^*_2(t). \quad (4.99)$$

В частности, если $n = m = k = 1$,

$$d(x_1(t)\, x_2(t)) = [x_1(t)\, a_2(t) + a_1(t)\, x_2(t) + b_1(t)\, b_2(t)]\, dt +$$
$$+ [b_1(t)\, x_2(t) + x_1(t)\, b_2(t)]\, dW_t. \quad (4.100)$$

Пример 2. Пусть функция $f(t, x_1, \ldots, x_m) = (x, B(t)\, x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_m)$, а $B(t)$ — матрица (неслучайная) порядка $m \times m$ с дифференцируемыми элементами. Пусть $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, — процесс с дифференциалом

$$dx_t = a(t)\, dt + b(t)\, dW_t,$$

где $x_t = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $W_t = (W_1(t), \ldots, W_m(t))$ — винеровский процесс.

Найдем дифференциал процесса $(x_t, B(t)x_t)$. Применяя формулу (4.98) к $y_t = B(t)x_t$, находим

$$dy_t = [\dot{B}(t)x_t + B(t)a(t)]\,dt + B(t)b(t)\,dW_t.$$

Для вычисления дифференциала $d(x_t, B(t)x_t)$ воспользуемся формулой (4.99), согласно которой

$$d(x_t y_t^*) = [a(t)y_t^* + x_t x_t^* \dot{B}^*(t) + x_t a^*(t)B^*(t) + b(t)b^*(t)B(t)]\,dt + \\ + x_t\,dW_t^* b^*(t)B^*(t) + b(t)\,dW_t x_t^* B^*(t),$$

откуда

$$d(x_t, B(t)x_t) = \operatorname{Sp} d(x_t y_t^*) = \\ = [\operatorname{Sp} a(t)x_t^*B^*(t) + \operatorname{Sp} x_t x_t^*\dot{B}^*(t) + \operatorname{Sp} x_t a^*(t)B^*(t) + \\ + \operatorname{Sp} b(t)b^*(t)B(t)]\,dt + \operatorname{Sp} x_t\,dW_t^* b^*(t)B^*(t) + \operatorname{Sp} b(t)\,dW_t x_t^* B^*(t) = \\ = [(x_t, B^*(t)a(t)) + (x_t, B(t)a(t)) + (x_t, \dot{B}(t)x_t) + \operatorname{Sp} b(t)b^*(t)B(t)]\,dt + \\ + (b^*(t)B^*(t)x_t, dW_t) + (b^*(t)B(t)x_t, dW_t).$$

Итак,

$$d(x_t, B(t)x_t) = \{(x_t, \dot{B}(t)x_t) + (x_t, [B(t) + B^*(t)a(t)]) + \\ + \operatorname{Sp} b(t)b^*(t)B(t)\}\,dt + (b^*(t)[B(t) + B^*(t)]x_t, dW_t). \quad (4.101)$$

В частности, если $x_t \equiv W_t$, а $B(t)$ — симметрическая матрица, то

$$d(W_t, B(t)W_t) = [(W_t, \dot{B}(t)W_t) + \operatorname{Sp} B(t)]\,dt + 2(B(t)W_t, dW_t). \quad (4.102)$$

Пример 3. Пусть $a(t) = a(t, \omega) \in \mathscr{P}_T$ и

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left\{\int_0^t a(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds\right\}.$$

Обозначая $x_t = \int_0^t a(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds$, находим (из (4.87)), что $\mathfrak{z}_t = \exp x_t$ имеет дифференциал

$$d\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_t a(t)\,dW_t. \quad (4.103)$$

Точно так же

$$d\left(\frac{1}{\mathfrak{z}_t}\right) = \frac{a^2(t)}{\mathfrak{z}_t}\,dt - \frac{a(t)}{\mathfrak{z}_t}\,dW_t. \quad (4.104)$$

$\Big($Заметим, что $\mathsf{P}\{\inf_{t\leqslant T} \mathfrak{z}_t > 0\} = 1$, т. к. $\mathsf{P}\left\{\int_0^T a^2(t)\,dt < \infty\right\} = 1.\Big)$

Пример 4. Пусть $a(t)$, $b(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неслучайные функции с $\int_0^T |a(t)|\,dt < \infty$, $\int_0^T b^2(t)\,dt < \infty$.

Используя формулу Ито, находим, что случайный процесс

$$x_t = \exp\left\{\int_0^t a(s)\,ds\right\}\left\{\xi + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s a(u)\,du\right] b(s)\,dW_s\right\}$$

имеет стохастический дифференциал

$$dx_t = a(t)\,x_t\,dt + b(t)\,dW_t, \qquad x_0 = \xi.$$

4. Применим формулу Ито для вывода полезных оценок для математических ожиданий $\mathsf{M}\left(\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s\right)^{2m}$ четных степеней стохастических интегралов.

Лемма 4.11. *Пусть $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс, $f(t, \omega)$ — ограниченная неупреждающая функция, $|f(t, \omega)| \leqslant K$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда*

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s\right)^{2m} \leqslant K^{2m} t^m (2m-1)!!.$$

Доказательство. Пусть $x_t = \int_0^t f(s, \omega)\,dW_s$. Положим

$$\tau_N = \inf\,(t\colon \sup_{s \leqslant t} |x_s| \geqslant N),$$

считая $\tau_N = T$, если $\sup_{s \leqslant T} |x_s| < N$.

По формуле Ито

$$x_{t \wedge \tau_N}^{2m} = 2m \int_0^{t \wedge \tau_N} x_s^{2m-1} f(s, \omega)\,dW_s + m\,(2m-1) \int_0^{t \wedge \tau_N} x_s^{2m-2} f^2(s, \omega)\,ds.$$

Из определения τ_N, предположения $|f(s, \omega)| \leqslant K$, $0 \leqslant s \leqslant T$, и свойства (4.48) вытекает, что

$$\mathsf{M} \int_0^{t \wedge \tau_N} x_s^{2m-1} f(s, \omega)\,dW_s = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{M} x_{t \wedge \tau_N}^{2m} = m(2m-1)\,\mathsf{M} \int_0^{t \wedge \tau_N} x_s^{2m-2} f^2(s, \omega)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant K^2 m (2m-1)\,\mathsf{M} \int_0^{t \wedge \tau_n} x_s^{2m-2}\, ds \leqslant K^2 m (2m-1)\,\mathsf{M} \int_0^t x_s^{2m-2}\, ds.$$

Отсюда по лемме Фату получаем

$$\mathsf{M} x_t^{2m} \leqslant K^2 m (2m-1)\,\mathsf{M} \int_0^t x_s^{2m-2}\, ds.$$

Положим в этом неравенстве $m=1$. Тогда из него следует, что $\mathsf{M} x_t^2 \leqslant K^2 t$. Аналогично при $m=2$ получаем оценку $\mathsf{M} x_t^4 \leqslant \leqslant 3K^4 t^2$. Завершается доказательство требуемой оценки по индукции: предполагая, что $\mathsf{M} x_t^{2m} \leqslant K^{2m} t^m (2m-1)!!$, из приведенного выше неравенства легко получаем, что

$$\mathsf{M} x_t^{2(m+1)} \leqslant K^{2(m+1)} t^{m+1} (2m+1)!!.$$

Лемма доказана.

Откажемся теперь от предположения ограниченности функции $f(t, \omega)$, заменив его условием $\int_0^T \mathsf{M} f^{2m}(t, \omega)\, dt < \infty$, $m > 1$.

Лемма 4.12. *Пусть $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс, $f(t, \omega)$ — неупреждающая функция с*

$$\int_0^T \mathsf{M} f^{2m}(t, \omega)\, dt < \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{M} \left(\int_0^T f(s, \omega)\, dW_s \right)^{2m} \leqslant [m(2m-1)]^m\, t^{m-1} \int_0^t \mathsf{M} f^{2m}(s, \omega)\, ds.$$

Доказательство. Пользуясь обозначениями предыдущей леммы, находим, что

$$\mathsf{M} x_{t \wedge \tau_N}^{2m} = m(2m-1)\,\mathsf{M} \int_0^{t \wedge \tau_N} x_s^{2m-2} f^2(s, \omega)\, ds.$$

Из этой формулы следует, что $\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N}$ — неубывающая функция от t. Применение неравенства Гёльдера с $p=m$, $q=m/(m-1)$ дает оценку

$$\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\tau_N} x_s^{2m-2}f^2(s,\omega)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\tau_N} x_s^{2m}\,ds\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\tau_N} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= \left(\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\tau_N} x^{2m}_{s\wedge\tau_N}\,ds\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\tau_N} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathsf{M}\int_0^{t} x^{2m}_{s\wedge\tau_N}\,ds\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant$$

$$\leqslant t^{\frac{m-1}{m}}\left(\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N}\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N} \leqslant m(2m-1)\,t^{\frac{m-1}{m}}\left(\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N}\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Поскольку $\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N} < \infty$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$\left(\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant m(2m-1)\,t^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathsf{M}\int_0^{t} f^{2m}(s,\omega)\,ds\right)^{\frac{1}{m}},$$

или

$$\mathsf{M}x^{2m}_{t\wedge\tau_N} \leqslant [m(2m-1)]^m\, t^{m-1}\mathsf{M}\int_0^t f^{2m}(s,\omega)\,ds.$$

Применяя теперь лемму Фату, получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

§ 4. Сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $T=1$ (для простоты), $(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant 1$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$ и $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant 1$, — винеровский процесс. Обозначим $(\mathbf{C}_1, \mathscr{B}_1)$ измеримое пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций $x=(x_t, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ с σ-алгеброй $\mathscr{B}_1=\sigma(x: x_s, s \leqslant 1)$. Положим также $\mathscr{B}_t=\sigma\{x: x_s, s \leqslant t\}$.

Пусть $a(t, x)$ и $b(t, x)$ — измеримые неупреждающие (т. е. $\mathscr{B}_t$-измеримые при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$) функционалы.

Определение 8. Будем говорить, что (P-п. н. непрерывный) случайный процесс $\xi=(\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть *сильное решение* (или просто *решение*) стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = a(t, \xi)\,dt + b(t, \xi)\,dW_t \tag{4.105}$$

с $\mathscr{F}_0$-измеримым начальным условием $\xi_0=\eta$, если при каждом t, $0 < t \leqslant 1$, величины ξ_t являются $\mathscr{F}_t$-измеримыми,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^1 |a(t, \xi)|\,dt < \infty\right) = 1, \tag{4.106}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^1 b^2(t, \xi)\,dt < \infty\right) = 1 \tag{4.107}$$

и с вероятностью 1 для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\xi_t = \eta + \int_0^t a(s, \xi)\,ds + \int_0^t b(s, \xi)\,dW_s. \tag{4.108}$$

Введем теперь понятие слабого решения стохастического дифференциального уравнения (4.105).

Определение 9. Говорят, что стохастическое дифференциальное уравнение (4.105) с начальным условием η, имеющим заданную функцию распределения $F(x)$, обладает *слабым решением* (или *решением в слабом смысле*), если найдутся: вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, неубывающее семейство σ-подалгебр $(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant 1$, непрерывный случайный процесс $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$ и винеровский процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$ такие, что выполнены условия (4.106), (4.107), (4.108) и $\mathsf{P}\{\omega: \xi_0 \leqslant x\} = F(x)$.

Отметим, в чем основная разница между понятиями сильных и слабых решений, предполагая для простоты $\eta=0$.

Когда говорится о решении в сильном смысле, то подразумевается, что *уже заданы* некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, система $(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant 1$, и винеровский процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$. Если при этом $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^W$, то искомый процесс

$\xi=(\xi_t)$, $t\leqslant 1$, таков, что при каждом t величины ξ_t являются $\mathscr{F}_t^W$-измеримыми (т. е. ξ_t определяется по «прошлым» значениям винеровского процесса). Таким образом, для сильного решения

$$\mathscr{F}_t^\xi\subseteq\mathscr{F}_t^W,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Когда же речь идет о слабом решении уравнения (4.105) с заданными неупреждающими функционалами $a(t, x)$ и $b(t, x)$, то предполагается, что *должны найтись* вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, система $(\mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ и винеровский процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, для которых (4.108) выполнено P-п. н. Во многих случаях, где слабое решение существует, $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_t^\xi$ и, следовательно, процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ является винеровским по отношению к системе σ-подалгебр $(\mathscr{F}_t^\xi)$, $t\leqslant 1$. Поэтому в случае слабых решений

$$\mathscr{F}_t^W\subseteq\mathscr{F}_t^\xi,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Из определения 9 следует, что слабое решение — это, в сущности, совокупность объектов $\mathscr{A}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathsf{P}, W_t, \xi_t)$, где для краткости процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, также будет называться слабым решением.

Определение 10. Будем говорить, что стохастическое дифференциальное уравнение (4.105) имеет *единственное решение в слабом смысле*, если для любых его двух решений $\mathscr{A}=(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathsf{P}, W_t, \xi_t)$ и $\tilde{\mathscr{A}}=(\tilde\Omega, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{F}}_t, \tilde{\mathsf{P}}, \tilde W_t, \tilde\xi_t)$ совпадают распределения процессов $\xi=(\xi_t)$ и $\tilde\xi=(\tilde\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е.

$$\mu_\xi(A)=\tilde\mu_\xi(A),\qquad A\in\mathscr{B},$$

где

$$\mu_\xi(A)=\mathsf{P}\{\omega:\ \xi\in A\},\qquad \tilde\mu_\xi(A)=\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde\omega:\ \tilde\xi\in A\}.$$

Определение 11. Говорят, что стохастическое дифференциальное уравнение (4.105) имеет *единственное сильное решение*, если для любых его двух сильных решений $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ и $\tilde\xi=(\tilde\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi_t-\tilde\xi_t|>0\}=0. \tag{4.109}$$

В пп. 2—6 настоящего параграфа будут приведены основные теоремы существования и единственности сильных решений стохастических дифференциальных уравнений (4.105). Вопросы, связанные со слабыми решениями, рассматриваются в п. 7.

2. Простейшие условия, гарантирующие существование и единственность сильных решений уравнения (4.105), содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.6. *Пусть неупреждающие функционалы* $a(t, x)$, $b(t, x)$, $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbf{C}_1$, *удовлетворяют условию Липшица*

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \leqslant \leqslant L_1 \int_0^t |x_s - y_s|^2 dK(s) + L_2 |x_t - y_t|^2 \tag{4.110}$$

и

$$a^2(t, x) + b^2(t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2) dK(s) + L_2(1 + x_t^2), \tag{4.111}$$

где L_1, L_2 — *константы*, $K(s)$ — *неубывающая непрерывная справа функция*, $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$, $x, y \in \mathbf{C}_1$.

Пусть $\eta = \eta(\omega)$ — $\mathscr{F}_0$-*измеримая случайная величина*, $\mathbf{P}(|\eta(\omega)| < \infty) = 1$.

Тогда:

1) *уравнение*

$$dx_t = a(t, x) dt + b(t, x) dW_t, \qquad x_0 = \eta, \tag{4.112}$$

имеет, и притом единственное, сильное решение $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

2) *если* $\mathbf{M}\eta^{2m} < \infty$, $m \geqslant 1$, *то существует такая константа* c_m, *что*

$$\mathbf{M}\xi_t^{2m} \leqslant (1 + \mathbf{M}\eta^{2m}) e^{c_m t} - 1. \tag{4.113}$$

Доказательство. Начнем с доказательства единственности. Если $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_t, \mathscr{F}_t)$ — два непрерывных ($\mathbf{P}$-п. н.) сильных решения с $\xi_0 = \eta$, $\tilde{\xi}_0 = \eta$, то

$$\xi_t - \tilde{\xi}_t = \int_0^t [a(s, \xi) - a(s, \tilde{\xi})] ds + \int_0^t [b(s, \xi) - b(s, \tilde{\xi})] dW_s.$$

Обозначим $\chi_t^N = \chi_{\left\{\sup\limits_{s \leqslant t} \left(\xi_s^2 + \tilde{\xi}_s^2\right) \leqslant N\right\}}$. Тогда, поскольку $\chi_t^N = \chi_t^N \cdot \chi_s^N$ для $t \geqslant s$, то

$$\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2 \leqslant 2\chi_t^N \left[\left(\int_0^t \chi_s^N (a(s, \xi) - a(s, \tilde{\xi})) ds \right)^2 + \right. \left. + \left(\int_0^t \chi_s^N [b(s, \xi) - b(s, \tilde{\xi})] dW_s \right)^2 \right]. \tag{4.114}$$

Из определения χ_t^N следует, что величины

$$\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2, \quad \chi_t^N [a(t, \xi) - a(t, \tilde{\xi})]^2, \quad \chi_t^N [b(t, \xi) - b(t, \tilde{\xi})]^2$$

ограничены, и, следовательно, существуют математические ожидания от левой и правой частей неравенства (4.114). Поэтому, используя условие (4.110), находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\chi_t^N[\xi_t-\tilde{\xi}_t]^2 &\leqslant\\ &\leqslant 2\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N([a(s,\xi)-a(s,\tilde{\xi})]^2+[b(s,\xi)-b(s,\tilde{\xi})]^2)\,ds\leqslant\\ &\leqslant 2\left\{L_1\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N\int_0^s(\xi_u-\tilde{\xi}_u)^2\,dK(u)\,ds+L_2\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N(\xi_s-\tilde{\xi}_s)^2\,ds\right\}\leqslant\\ &\leqslant 2\left\{L_1\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N\int_0^s\chi_u^N(\xi_u-\tilde{\xi}_u)^2\,dK(u)\,ds+L_2\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N(\xi_s-\tilde{\xi}_s)^2\,ds\right\}\leqslant\\ &\leqslant 2\left\{L_1\int_0^t\int_0^s \mathsf{M}\chi_u^N(\xi_u-\tilde{\xi}_u)^2\,dK(u)\,ds+L_2\int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N(\xi_s-\tilde{\xi}_s)^2\,ds\right\}.\end{aligned} \tag{4.115}$$

Для последующих рассуждений нужна

Лемма 4.13. *Пусть c_0, c_1, c_2 — неотрицательные константы, $u(t)$ неотрицательная ограниченная, а $v(t)$ — неотрицательная интегрируемая функции, $0\leqslant t\leqslant 1$, такие, что*

$$u(t)\leqslant c_0+c_1\int_0^t v(s)\,u(s)\,ds+c_2\int_0^t v(s)\left[\int_0^s u(s_1)\,dK(s_1)\right]ds, \tag{4.116}$$

где $K(s)$ — неубывающая непрерывная справа функция, $0\leqslant\leqslant K(s)\leqslant 1$.

Тогда

$$u(t)\leqslant c_0\exp\left\{(c_1+c_2)\int_0^t v(s)\,ds\right\}. \tag{4.117}$$

Доказательство. Подставим в правую часть (4.116) вместо функции $u(s)$ ее мажоранту, определяемую правой же частью неравенства (4.116). После n таких итераций найдем

$$u(t)\leqslant c_0\sum_{j=0}^n\frac{(c_1+c_2)^j}{j!}\left(\int_0^t v_s\,ds\right)^j+\varphi_n(t), \tag{4.118}$$

где $\varphi_n(t)\to 0$, $n\to\infty$, в силу ограниченности функции $u(t)$. Переходя в (4.118) к пределу по $n\to\infty$, получаем требуемую оценку (4.117).

Применим эту лемму к неравенству (4.115), полагая $c_0 = 0$, $c_1 = 2L_1$, $c_2 = 2L_2$, $v(t) \equiv 1$ и $u(t) = \mathsf{M}\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2$. Тогда найдем, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\mathsf{M}\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2 = 0,$$

и, значит,

$$\mathsf{P}\{|\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\} \leqslant \mathsf{P}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} (\xi_s^2 + \tilde{\xi}_s^2) > N\}.$$

Но вероятность $\mathsf{P}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} (\xi_s^2 + \tilde{\xi}_s^2) > N\} \to 0$, $N \to \infty$, в силу непрерывности процессов ξ и $\tilde{\xi}$. Поэтому для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\mathsf{P}\{|\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\} = 0,$$

а значит, для любого счетного всюду плотного в $[0, 1]$ множества S

$$\mathsf{P}\{\sup_{t \in S} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\} = 0.$$

Наконец, опять используя непрерывность процессов ξ и $\tilde{\xi}$, находим

$$\mathsf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\} = \mathsf{P}\{\sup_{t \in S} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\},$$

что и доказывает единственность (непрерывного) сильного решения.

Доказательство существования такого решения сначала проведем в предположении, что $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$.

Положим $\xi_t^{(0)} = \eta$ (нулевое приближение) и

$$\xi_t^{(n)} = \eta + \int_0^t a(s, \xi^{(n-1)})\, ds + \int_0^t b(s, \xi^{(n-1)})\, dW_s. \qquad (4.119)$$

Покажем, что $\mathsf{M}(\xi_t^{(n)})^2 \leqslant d$, где константа d не зависит ни от n, ни от $t \leqslant 1$.

Действительно, в силу условия (4.111)

$$\mathsf{M}(\xi_t^{(n+1)})^2 \leqslant 3\left\{\mathsf{M}\eta^2 + \int_0^t \mathsf{M}[a^2(s, \xi^{(n)}) + b^2(s, \xi^{(n)})]\, ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 3\mathsf{M}\eta^2 + 3L_1 \int_0^t \int_0^s [1 + \mathsf{M}(\xi_{s_1}^{(n)})^2]\, dK(s_1)\, ds + 3L_2 \int_0^t [1 + \mathsf{M}(\xi_s^{(n)})^2]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 3(\mathsf{M}\eta^2 + L_1 + L_2) + 3L_1 \int_0^t \int_0^s \mathsf{M}(\xi_{s_1}^{(n)})^2\, dK(s_1)\, ds + 3L_2 \int_0^t \mathsf{M}(\xi_s^{(n)})^2\, ds.$$

Отсюда, учитывая, что $\mathsf{M}(\xi_t^{(0)})^2 = \mathsf{M}\eta^2 < \infty$, по индукции получаем оценку

$$\mathsf{M}(\xi_t^{(n+1)})^2 \leqslant 3(L + \mathsf{M}\eta^2)e^{3Lt} \leqslant 3(L + \mathsf{M}\eta^2)e^{3L} \tag{4.120}$$

с $L = L_1 + L_2$. Иначе говоря, можно взять $d = 3(L + \mathsf{M}\eta^2)e^{3L}$.

В силу (4.119) и условия Липшица (4.110)

$$\mathsf{M}[\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}]^2 \leqslant 2\int_0^t \mathsf{M}[(a(s, \xi^{(n)}) - a(s, \xi^{(n-1)}))^2 + (b(s, \xi^{(n)}) - b(s, \xi^{(n-1)})^2)]\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{L_1 \int_0^t \int_0^s \mathsf{M}(\xi_{s_1}^{(n)} - \xi_{s_1}^{(n-1)})^2\,dK(s_1)\,ds + L_2 \int_0^t \mathsf{M}(\xi_s^{(n)} - \xi_s^{(n-1)})^2\,ds\right\}.$$

Поскольку $\mathsf{M}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}[\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}]^2 \leqslant c$, где c — некоторая константа, то $(L = L_1 + L_2)$

$$\mathsf{M}[\xi_t^{(2)} - \xi_t^{(1)}]^2 \leqslant 2Lct, \quad \mathsf{M}[\xi_t^{(3)} - \xi_t^{(2)}]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2Lc\left\{2L_1 \int_0^t \int_0^s s_1\,dK(s_1)\,ds + 2L_2 \int_0^t s\,ds\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2Lc\left\{2L_1 \int_0^t sK(s)\,ds + 2L_2 \int_0^t s\,ds\right\} \leqslant c\frac{(2Lt)^2}{2}.$$

И вообще,

$$\mathsf{M}[\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c(2L)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{2L_1 \int_0^t \int_0^s s_1^{n-1}\,dK(s_1)\,ds + 2L_2 \int_0^t s^{n-1}\,ds\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c(2L)^{n-1}}{(n-1)!}\left\{2L_1 \int_0^t s^{n-1}K(s)\,ds + 2L_2 \int_0^t s^{n-1}\,ds\right\} \leqslant \frac{c(2Lt)^2}{n!}. \tag{4.120'}$$

Далее,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}| \leqslant \int_0^1 |a(s, \xi^{(n)}) - a(s, \xi^{(n-1)})|\,ds +$$
$$+ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^t [b(s, \xi^{(n)}) - b(s, \xi^{(n-1)})]\,dW_s\right|.$$

Воспользуемся теперь неравенством (4.54), которое вместе с условием Липшица (4.110) и (4.120′) приводит к неравенствам

$$\mathsf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}[\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}]^2\leqslant$$

$$\leqslant 10L_1\int_0^1\int_0^t \mathsf{M}[\xi_s^{(n)}-\xi_s^{(n-1)}]^2\,dK(s)\,dt+10L_2\int_0^1 \mathsf{M}[\xi_s^{(n)}-\xi_s^{(n-1)}]^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 10L_1c\,\frac{(2L)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\int_0^t s^{n-1}\,dK(s)\,dt+10L_2c\,\frac{(2L)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 s^{n-1}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 5c\,\frac{(2L)^n}{n!}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}|>\frac{1}{n^2}\right\}\leqslant 5c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2L)^n}{n!}\,n^4<\infty.$$

Поэтому по лемме Бореля — Кантелли ряд $\xi_t^{(0)}+\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}|$ сходится P-п. н. равномерно по t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Значит, последовательность случайных процессов $(\xi_t^{(n)})$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $n=0, 1, 2, \ldots$, P-п. н. сходится равномерно к *непрерывному* процессу

$$\xi_t=\xi_t^{(0)}+\sum_{n=0}^{\infty}(\xi_t^{(n+1)}-\xi_t^{(n)}).$$

Из оценки (4.120) и леммы Фату следует, что

$$\mathsf{M}\xi_t^2\leqslant 3(L+\mathsf{M}\eta^2)\,e^{3L}.$$

Покажем, что построенный процесс $\xi=(\xi_t)$, $t\leqslant 1$, является решением уравнения (4.112), т. е. что P-п. н. для каждого t, $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\xi_t-\eta-\int_0^t a(s,\xi)\,ds-\int_0^t b(s,\xi)\,dW_s=0. \tag{4.121}$$

В соответствии с (4.119) левая часть в (4.121) равна

$$[\xi_t-\xi_t^{(n+1)}]+\int_0^t[a(s,\xi^{(n)})-a(s,\xi)]\,ds+\int_0^t[b(s,\xi^{(n)})-b(s,\xi)]\,dW_s. \tag{4.122}$$

В силу условия Липшица (4.110)

$$\left|\int_0^t [a(s, \xi^{(n)}) - a(s, \xi)]\,ds\right|^2 \leqslant L_1 \int_0^t \int_0^s |\xi_u - \xi_u^{(n)}|^2\,dK(u)\,ds + {}$$
$$+ L_2 \int_0^t |\xi_s - \xi_s^{(n)}|^2\,ds \leqslant L \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |\xi_s - \xi_s^{(n)}|^2. \qquad (4.123)$$

Точно так же согласно (4.60) и (4.110) для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int_0^t [b(s, \xi^{(n)}) - b(s, \xi)]\,dW_s\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathsf{P}\left\{\int_0^t [b(s, \xi^{(n)}) - b(s, \xi)]^2\,ds > \delta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathsf{P}\left\{L_1 \int_0^t \int_0^s |\xi_u - \xi_u^{(n)}|\,dK(u)\,ds + L_2 \int_0^t |\xi_s - \xi_s^{(n)}|^2\,ds > \delta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathsf{P}\left\{L \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |\xi_s - \xi_s^{(n)}|^2 > \delta\right\}. \qquad (4.124)$$

Но $\mathsf{P}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |\xi_s - \xi_s^{(n)}|^2 > \delta\} \to 0$, $n \to \infty$; поэтому из (4.123) и (4.124) следует, что величина (4.122) стремится по вероятности к нулю при $n \to \infty$. Этим доказано, что $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является решением уравнения (4.121).

Из построения процесса ξ вытекает, что он является измеримым по (t, ω) и неупреждающим, т. е. $\mathcal{F}_t^{\eta, W}$-измеримым при каждом t.

Итак, при $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$ существование сильного решения уравнения (4.112) доказано.

Предположим теперь, что $\mathsf{M}\eta^{2m} < \infty$, $m > 1$, и установим оценку (4.113). Пусть

$$\chi_N(t) = \begin{cases} 1, & \sup\limits_{s \leqslant t} |\xi_s| \leqslant |\eta| + N, \\ 0, & \sup\limits_{s \leqslant t} |\xi_s| > |\eta| + N, \end{cases}$$

и

$$\psi_n = \begin{cases} 1, & |\eta| \leqslant n, \\ 0, & |\eta| > n. \end{cases}$$

По формуле Ито

$$\xi_t^{2m} = \eta^{2m} + 2m \int_0^t \xi_s^{2m-1} a(s, \xi)\, ds + m(2m-1) \int_0^t \xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi)\, ds + \\ + 2m \int_0^t \xi_s^{2m-1} b(s, \xi)\, dW_s.$$

Отсюда для $t \geqslant s$, учитывая равенство $\chi_N(t)\psi_n = \chi_N(t)\chi_N(s)\psi_n^2$, находим, что

$$\xi_t^{2m}\chi_N(t)\psi_n = \chi_N(t)\psi_n \Bigg[\psi_n\eta^{2m} + \int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-1} a(s, \xi)\, ds + \\ + m(2m-1)\int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi)\, ds + \\ + 2m\int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-1} b(s, \xi)\, dW_s\Bigg] \leqslant \\ \leqslant \psi_n\eta^{2m} + 2m\int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-1} a(s, \xi)\, ds + \\ + m(2m-1)\int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi)\, ds + \\ + 2m\int_0^t \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-1} b(s, \xi)\, dW_s. \qquad (4.125)$$

Заметим, что в силу определения $\chi_N(t)$ и ψ_n

$$\mathsf{M}\int_0^1 \psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{4m-2} b^2(s, \xi)\, ds < \infty.$$

Поэтому (см. (4.125) и (4.48))

$$\mathsf{M}\xi_t^{2m}\chi_N(t)\psi_n \leqslant \mathsf{M}\eta^{2m} + 2m\int_0^t \mathsf{M}\psi_n\chi_N(s)\,|\xi_s^{2m-1} a(s, \xi)|\, ds + \\ + m(2m-1)\int_0^t \mathsf{M}\psi_n\chi_N(s)\,\xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi)\, ds.$$

Для оценки величин $|\xi_s^{2m-1}|\,|a(s, \xi)|$ и $\xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi)$ воспользуемся неравенством

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad (4.126)$$

справедливым (см. [16]) для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Полагая в (4.126) $p = 2m/(2m-1)$, $q = 2m$, имеем

$$|\xi_s|^{2m-1} |a(s, \xi)| = (\xi_s^{2m})^{1/p} (a^{2m}(s, \xi))^{1/q} \leqslant \leqslant \frac{2m-1}{2m} \xi_s^{2m} + \frac{1}{2m} a^{2m}(s, \xi).$$

Аналогично при $p = m/(m-1)$, $q = m$

$$\xi_s^{2m-2} b^2(s, \xi) \leqslant \frac{m-1}{m} \xi_s^{2m} + \frac{1}{m} b^{2m}(s, \xi).$$

Поэтому для каждого m существует такая константа a_m, что

$$\mathsf{M}(\xi_t^{2m} \chi_N(t) \psi_n) \leqslant \mathsf{M}\eta^{2m} + a_m \int_0^t \mathsf{M}\left\{\chi_N(s) \psi_n \left(\xi_s^{2m} + \left[(1 + \xi_s^2) + \int_0^s (1 + \xi_{s_1}^2)\, dK(s_1)\right]^m\right)\right\} ds, \tag{4.127}$$

где

$$\left[1 + \xi_s^2 + \int_0^s (1 + \xi_{s_1}^2)\, dK(s_1)\right]^m \leqslant \leqslant b_m \left[1 + \xi_s^{2m} + \int_0^s (1 + \xi_{s_1}^{2m})\, dK(s_1)\right] \tag{4.128}$$

с некоторой константой b_m.

Из (4.127) и (4.128) находим (c_m — константа)

$$\mathsf{M}(\xi_t^{2m} \chi_N(t) \psi_n) \leqslant \mathsf{M}\eta^{2m} + \frac{c_m}{2}\left[t + \int_0^t \mathsf{M}(\xi_s^{2m} \chi_N(s) \psi_n)\, ds + \int_0^t \int_0^s \mathsf{M}(\xi_{s_1}^{2m} \chi_N(s) \psi_n)\, dK(s_1)\, ds\right]. \tag{4.129}$$

Прежде чем идти дальше, установим следующее предложение.

Лемма 4.14. *Пусть c, d — положительные постоянные и $u(t)$, $t \geqslant 0$, — неотрицательная ограниченная функция такая, что*

$$u(t) \leqslant d + c\left[t + \int_0^t u(s)\, ds + \int_0^t \int_0^s u(s_1)\, dK(s_1)\, ds\right], \tag{4.130}$$

где $K(s)$ — неубывающая непрерывная справа функция, $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$.

Тогда

$$u(t) \leqslant (1+d)\, e^{2ct} - 1. \tag{4.131}$$

Доказательство. Из (4.130) следует, что

$$1+u(t) \leqslant$$
$$\leqslant (1+d) + c\left[\int_0^t (1+u(s))\, ds + \int_0^t \int_0^s (1+u(s_1))\, dK(s_1)\, ds\right].$$

Применяя лемму 4.13 с $c_0 = (1+d)$, $c_1 = c_2 = c$, $v(t) \equiv 1$ к функции $1+u(t)$, получаем требуемое неравенство (4.131).

Воспользуемся этой леммой, беря в (4.129) $u(t) = \mathsf{M}\left[\xi_t^{2m} \chi_N(t)\, \psi_n\right]$. Тогда согласно (4.131)

$$\mathsf{M}\left[\xi_t^{2m} \chi_N(t)\, \psi_n\right] \leqslant (1 + \mathsf{M}\eta^{2m})\, e^{c_m t} - 1. \tag{4.132}$$

Отсюда, по лемме Фату, вытекает

$$\mathsf{M}\xi_t^{2m} \leqslant \varliminf_{\substack{N \to \infty \\ n \to \infty}} \mathsf{M}\left[\xi_t^{2m} \chi_N(t)\, \psi_n\right] \leqslant (1 + \mathsf{M}\eta^{2m})\, e^{c_m t} - 1.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что решение уравнения (4.112) существует и без предположения $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$.

Пусть $\eta_n = \eta\psi_n$, где $\psi_n = \chi_{\{|\eta| \leqslant n\}}$, и $\xi_n = (\xi_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — решения уравнения (4.112), отвечающие начальным условиям $\xi_0 = \eta_n$, $\mathsf{M}\eta_n^2 \leqslant n^2$.

Пусть $m > n$. Тогда так же, как и при доказательстве единственности решения уравнения (4.112) (в предположении $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$), устанавливается неравенство

$$\mathsf{M}\left[\xi_m(t) - \xi_n(t)\right]^2 \psi_n \leqslant 2L_1 \int_0^t \int_0^s \mathsf{M}\left[\xi_m(u) - \xi_n(u)\right]^2 \psi_n\, dK(u)\, ds +$$
$$+ 2L_2 \int_0^t \mathsf{M}\left[\xi_m(u) - \xi_n(u)\right]^2 \psi_n\, du,$$

из которого в силу леммы 4.13 следует $\mathsf{M}\left[\xi_m(t) - \xi_n(t)\right]^2 \psi_n = 0$. Значит,

$$\mathsf{P}\{|\xi_m(t) - \xi_n(t)| > 0\} \leqslant \mathsf{P}\{|\eta| > n\}. \tag{4.133}$$

Поскольку по предположению $\mathsf{P}\{|\eta| < \infty\} = 1$, то из (4.133) следует, что $\mathsf{P}\{|\xi_m(t) - \xi_n(t)| > 0\} \to 0$, m, $n \to \infty$, т. е. последовательность $\{\xi_n(t),\ n = 1, 2, \ldots\}$ фундаментальна по вероятности. Следовательно, для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, существует

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n \to \infty} \xi_n(t) = \xi(t).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\text{P-}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\int_0^t[\xi_s-\xi_n(s)]^2\,dK(s)\,dt+\int_0^1[\xi_s-\xi_n(s)]^2\,ds\right\}=0.$$

Это равенство позволяет (ср. с доказательством соотношения (4.121)) в уравнении

$$\xi_n(t)=\eta_n+\int_0^t a(s,\ \xi_m)\,ds+\int_0^t b(s,\ \xi_n)\,dW_s$$

перейти к пределу по $n\to\infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение*

$$dx_t=a(t,\ x_t)\,dt+b(t,\ x_t)\,dW_t, \tag{4.134}$$

где функции $a(t,\ y)$, $b(t,\ y)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $y\in R^1$, *удовлетворяют условию Липшица*

$$[a(t,\ y)-a(t,\ \tilde{y})]^2+[b(t,\ y)-b(t,\ \tilde{y})]^2\leqslant L\,[y-\tilde{y}]^2 \tag{4.135}$$

и растут не быстрее, чем линейно:

$$a^2(t,\ y)+b^2(t,\ y)\leqslant L\,(1+y^2). \tag{4.136}$$

Тогда согласно теореме 4.6 *уравнение* (4.134) *с начальным условием* $x_0=\eta$, $\mathsf{P}(|\eta|<\infty)=1$ *имеет единственное сильное решение.*

Замечание. Теорема 4.6 легко обобщается на случай векторных стохастических дифференциальных уравнений

$$dx_t=a(t,\ x)\,dt+b(t,\ x)\,dW_t,\qquad x_0=\eta,$$

где $\eta=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$, $x_t=(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))$, $W_t=(W_1(t),\ \ldots$ $\ldots,\ W_n(t))$ — винеровский процесс,

$$a(t,\ x)=(a_1(t,\ x),\ \ldots,\ a_n(t,\ x)),\ b(t,\ x)=\|b_{ij}(t,\ x)\|,$$

$$i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\quad x\in\mathbf{C}_1.$$

Для существования и единственности непрерывного сильного решения у рассматриваемого уравнения достаточно потребовать, чтобы функционалы $a_i(t,\ x)$, $b_{ij}(t,\ x)$ удовлетворяли условиям (4.110), (4.111), с $x_s^2=\sum_{i=1}^n x_i^2(s)$, $|x_s-y_s|^2=\sum_{i=1}^n|x_i(s)-$ $-y_i(s)|^2$, а $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n|\eta_i|<\infty\right)=1.$

Неравенство (4.113) обобщается следующим образом: если $\mathsf{M}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{2m}<\infty$, то

$$\mathsf{M}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{2m}(t)\leqslant\left(1+\mathsf{M}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{2m}\right)e^{c_m t}-1.$$

3. Из неравенства (4.113) видно, что конечность моментов $\mathsf{M}\eta^{2m}$ влечет за собой и конечность $\mathsf{M}\xi_t^{2m}$ при любом t, $0\leqslant t\leqslant 1$ (и вообще при любом $t\geqslant 0$, если уравнение (4.112) рассматривается на полупрямой $0\leqslant t<\infty$). Рассмотрим теперь аналогичный вопрос относительно экспоненциальных моментов.

Теорема 4.7. *Пусть* $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *непрерывный случайный процесс, являющийся сильным решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dx_t=a(t,\ x_t)\,dt+b(t,\ x_t)\,dW_t,\qquad x_0=\eta, \tag{4.137}$$

где η — $\mathscr{F}_0$*-измеримая случайная величина с*

$$\mathsf{M}e^{\varepsilon\eta^2}<\infty \tag{4.138}$$

для некоторого $\varepsilon>0$ *и функции* $a(t,\ y)$, $b(t,\ y)$, $y\in R^1$, *таковы, что*

$$a^2(t,\ y)\leqslant K^2(1+y^2),\ |b(t,\ y)|\leqslant K \tag{4.139}$$

(K — *константа*).

Тогда найдется такое $\delta=\delta(T)>0$, *что*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}e^{\delta\xi_t^2}<\infty. \tag{4.140}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай уравнения (4.137):

$$dx_t=ax_t\,dt+b\,dW_t,\qquad x_0=\eta, \tag{4.141}$$

где $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ — константы. Покажем, что тогда утверждение теоремы справедливо.

Нетрудно проверить, что единственное (непрерывное) решение ξ_t уравнения (4.141) задается формулой

$$\xi_t=e^{at}\left[\eta+b\int_0^t e^{-as}\,dW_s\right].$$

Ясно, что $\gamma_t=b\int_0^t e^{-as}\,dW_s$ является гауссовской случайной величиной с $\mathsf{M}\gamma_t=0$ и $\mathsf{M}\gamma_t^2=b^2\int_0^t e^{-2as}\,ds\leqslant b^2\int_0^T e^{-2as}\,ds\ (=R)$.

Выберем

$$\delta = e^{-2aT}\min\left(\frac{1}{5R}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда в силу независимости величин η и γ_t

$$\mathsf{M}e^{\delta\xi_t^2} \leqslant \mathsf{M}\exp\left\{2\delta e^{2at}\left[\eta^2+\gamma_t^2\right]\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\exp\left\{2\delta e^{2at}\eta^2\right\}\mathsf{M}\exp\left\{2\delta e^{2at}\gamma_t^2\right\} \leqslant \mathsf{M}e^{\varepsilon\eta^2}\mathsf{M}e^{\frac{2}{5R}\gamma_t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}e^{\varepsilon\eta^2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}e^{\frac{2}{5R}\gamma_t^2} < \infty.$$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая.

По формуле Ито

$$\xi_t^{2n} = \eta^{2n} + 2n\int_0^t \xi_s^{2n-1}a(s, \xi_s)\,ds + n(2n-1)\int_0^t \xi_s^{2n-2}b^2(s, \xi_s)\,ds +$$

$$+ 2n\int_0^t \xi_s^{2n-1}b(s, \xi_s)\,dW_s.$$

В силу предположения (4.138) $\mathsf{M}\eta^{2m} < \infty$ для любого $m \geqslant 1$. Поэтому согласно (4.113)

$$\mathsf{M}\int_0^t \xi_s^{4n-2}b^2(s, \xi_s)\,ds < \infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\xi_t^{2n} \leqslant \mathsf{M}\eta^{2n} + 2n\int_0^t \mathsf{M}\left|\xi_s^{2n-1}a(s, \xi_s)\right|ds + K^2n(2n-1)\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n-2}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\eta^{2n} + 2nK\int_0^t \mathsf{M}\left(1+2\xi_s^{2n}\right)ds + K^2n(2n-1)\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n-2}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\eta^2 + 2nKT + 4nK\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n} + K^2n(2n-1)\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n-2}\,ds. \qquad (4.142)$$

Выберем $r > 0$ так, чтобы

$$\mathsf{M}(\eta^2+r)^n \geqslant \mathsf{M}\eta^{2n} + 2nKT.$$

Тогда из (4.142) получим

$$\mathsf{M}\xi_t^{2n} \leqslant \mathsf{M}(\eta^2+r)^n + 4nK\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n} + K^2n(2n-1)\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^{2n-2}\,ds. \qquad (4.143)$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$dy_t = 2Ky_t\,dt + K\,dW_t, \quad y_0 = (\eta^2 + r)^{1/2}. \tag{4.144}$$

По формуле Ито

$$\mathsf{M}y_t^{2n} = \mathsf{M}(\eta^2 + r)^n + 4nK\int_0^t \mathsf{M}y_s^{2n}\,ds + K^2n(2n-1)\int_0^t \mathsf{M}y_s^{2n-2}\,ds. \tag{4.145}$$

Полагая в (4.143) и (4.145) $n=1$, находим, что

$$\mathsf{M}\xi_t^2 \leqslant \mathsf{M}(\eta^2 + r) + 4K\int_0^t \mathsf{M}\xi_s^2\,ds + K^2t, \tag{4.146}$$

$$\mathsf{M}y_t^2 = \mathsf{M}(\eta^2 + r) + 4K\int_0^t \mathsf{M}y_s^2\,ds + K^2t. \tag{4.147}$$

Докажем теперь следующее предложение.

Лемма 4.15. *Пусть $u(t)$, $v(t)$, $t \geqslant 0$,—интегрируемые функции такие, что при некотором $c > 0$*

$$u(t) \leqslant v(t) + c\int_0^t u(s)\,ds. \tag{4.148}$$

Тогда

$$u(t) \leqslant v(t) + c\int_0^t e^{c(t-s)}v(s)\,ds. \tag{4.149}$$

При этом, если в (4.148) *при всех $t \geqslant 0$ имеет место равенство, то и* (4.149) *выполнено также со знаком равенства.*

Доказательство. Обозначим $z(t) = \int_0^t u(s)\,ds$ и $g(t) = u(t) - v(t) - cz(t) \leqslant 0$. Ясно, что

$$\frac{dz(t)}{dt} = cz(t) + v(t) + g(t), \qquad z(0) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$z(t) = \int_0^t e^{c(t-s)}[v(s) + g(s)]\,ds \leqslant \int_0^t e^{c(t-s)}v(s)\,ds,$$

и, следовательно,

$$u(t) \leqslant v(t) + cz(t) \leqslant v(t) + c\int_0^t e^{c(t-s)}v(s)\,ds,$$

что и доказывает (4.149). Заключительная часть леммы следует из того, что $g(t) \equiv 0$.

Применяя эту лемму к (4.146) и (4.147), находим

$$\mathsf{M}\xi_t^2 \leqslant \mathsf{M}(\eta^2 + r) + K^2 t + 4K \int_0^t e^{4K(t-s)} [\mathsf{M}(\eta^2 + r) + K^2 s] \, ds = \mathsf{M} y_t^2.$$

Отсюда, используя эту же самую лемму, из (4.142), (4.145) по индукции получаем неравенства

$$\mathsf{M}\xi_t^{2n} \leqslant \mathsf{M} y_t^{2n}, \qquad n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому, если для некоторого $\delta > 0$ $\mathsf{M} e^{\delta y_t^2} < \infty$, то и $\mathsf{M} e^{\delta \xi_t^2} \leqslant \leqslant \mathsf{M} e^{\delta y_t^2} < \infty$.

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь заметить, что если $\mathsf{M} e^{\varepsilon \eta^2} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то для уравнения (4.144)

$$\mathsf{M} e^{\varepsilon y_0^2} = e^{\varepsilon r} \mathsf{M} e^{\varepsilon \eta^2} < \infty,$$

а поэтому, как было показано выше, найдется такое $\delta = \delta(T) > 0$, что $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M} e^{\delta y_t^2} < \infty$.

Замечание. Ослабить условие $|b(t, y)| \leqslant K$, заменив его требованием $|b(t, y)| \leqslant K(1 + |y|)$, вообще говоря, нельзя, что показывает следующий пример:

$$dx_t = x_t \, dW_t, \qquad x_0 = 1.$$

В этом случае $x_t = e^{W_t - \frac{1}{2} t}$, $\mathsf{M} e^{x_0^2} = e < \infty$, а

$$\mathsf{M} e^{\delta x_t^2} = \mathsf{M} \exp\{\delta e^{2W_t - t}\} = \infty$$

при любом $\delta > 0$.

4. В ряде последующих глав будут рассматриваться стохастические дифференциальные уравнения несколько иного типа, нежели уравнения (4.112).

Теорема 4.8. *Пусть* $a(t, x)$, $b(t, x)$, $t \in [0, 1]$, $x \in C_1$, — *неупреждающие функционалы, удовлетворяющие условиям* (4.110) *и* (4.111). *Пусть* $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ — *винеровский процесс*, $\varphi = (\varphi_t, \mathcal{F}_t)$ — *некоторый* (Р-п. н.) *непрерывный случайный процесс и* $\lambda_i = (\lambda_i(t), \mathcal{F}_t)$, $i = 1, 2$, — *случайные процессы с* $|\lambda_i(t)| \leqslant 1$.

Тогда уравнение

$$x_t = \varphi_t + \int_0^t \lambda_1(s) a(s, x)\, ds + \int_0^t \lambda_2(s) b(s, x)\, dW_s \tag{4.150}$$

имеет единственное сильное решение.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть $\xi = (\xi_t)$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — два решения уравнения (4.150). Как и при доказательстве теоремы 4.6, находим, что

$$\mathsf{M}\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_0^t \mathsf{M}\chi_s^N [(a(s, \xi) - a(s, \tilde{\xi}))^2 + (b(s, \xi) - b(s, \tilde{\xi}))^2]\, ds.$$

Отсюда в силу условия Липшица (4.110) и леммы 4.13 получаем $\mathsf{M}\chi_t^N [\xi_t - \tilde{\xi}_t]^2 = 0$, что приводит к соотношению $\mathsf{P}\{\sup\limits_{t \leqslant 1} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| > 0\} = 0$ (ср. с соответствующим доказательством в теореме 4.6). Этим единственность установлена.

Для доказательства существования сильного решения предположим сначала, что $\mathsf{M} \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \varphi_t^2 < \infty$. Тогда, рассматривая последовательность непрерывных процессов $\xi_t^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 0 \leqslant t = 1$, определяемых из соотношений

$$\xi_t^{(0)} = \varphi_t,$$
$$\cdots$$
$$\xi_t^{(n)} = \varphi_t + \int_0^t \lambda_1(s) a(s, \xi^{(n-1)})\, ds + \int_0^t \lambda_2(s) b(s, \xi^{(n-1)})\, dW_s,$$

как и в теореме 4.6, убеждаемся, что

$$\mathsf{M} \sup_{t \leqslant 1} [\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}]^2 \leqslant c_1 \frac{c_2^n}{n!},$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные.

Далее устанавливается, что последовательность непрерывных процессов $\xi^{(n)} = (\xi_t^{(n)})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится P-п. н. равномерно (по t) к некоторому (непрерывному) процессу $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, который является сильным решением уравнения (4.150) с $\sup\limits_{t \leqslant 1} \mathsf{M}\xi_t^2 < \infty$.

В общем случае, когда условие $\mathsf{M} \sup\limits_{t \leqslant 1} \varphi_t^2 < \infty$ нарушается, для доказательства существования решения рассмотрим последовательность уравнений

$$\xi_m(t)=\varphi_m(t)+\int_0^t \lambda_1(s)\,a(s,\ \xi_m)\,ds+\int_0^t \lambda_2(s)\,b(s,\ \xi_m)\,dW_s, \qquad (4.151)$$

где $\varphi_m(t)=\varphi_{t\wedge\tau_m}$ и $\tau_m=\inf(t\leqslant 1:\ \sup\limits_{s\leqslant t}|\varphi_s|\geqslant m)$, считая $\tau_m=1$ если $\sup\limits_{s\leqslant 1}|\varphi_s|<m,\ m=1,\ 2,\ \ldots$

Поскольку $|\varphi_m(t)|\leqslant m$, то уравнение (4.151) при каждом $m=1,\ 2,\ \ldots$ имеет непрерывное сильное решение. Далее, как и в теореме 4.6, устанавливается, что при каждом t, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\xi_m(t)$ сходится при $m\to\infty$ по вероятности к некоторому процессу $\xi(t)$, который удовлетворяет **P**-п. н. уравнению (4.150).

Замечание. Утверждение теоремы 4.8 обобщается на случай векторных уравнений (4.150) с $x_t=(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))$, $\varphi_t=(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))$, скалярными процессами $\lambda_i=(\lambda_i(t),\ \mathscr{F}_t)$, $|\lambda_i(t)|\leqslant 1$ $(i=1,\ 2)$ и $a(t,\ x)=(a_1(t,\ x),\ \ldots,\ a_n(t,\ x))$, $b(t,\ x)=\|b_{ij}(t,\ x)\|$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$. Достаточно лишь потребовать, чтобы процессы $\varphi_i=(\varphi_i(t),\ \mathscr{F}_t)$ были непрерывными, а функционалы $a_i(t,\ x)$, $b_{ij}(t,\ x)$ удовлетворяли условиям (4.110) и (4.111).

5. Рассмотрим еще один тип стохастических дифференциальных уравнений, для которых в гл. 12 будут подробно изучаться задачи фильтрации.

Теорема 4.9. *Пусть неупреждающие функционалы* $a_0(t,x)$, $a_1(t,x)$, $b(t,x)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *удовлетворяют условиям* (4.110) *и* (4.111), *и пусть* $|a_1(t,\ x)|\leqslant c<\infty$. *Тогда, если* η — $\mathscr{F}_0$*-измеримая случайная величина с* $\mathsf{M}\eta^2<\infty$, *то*

1) *уравнение*

$$dx_t=[a_0(t,\ x)+a_1(t,\ x)\,x_t]\,dt+b(t,\ x)\,dW_t,\qquad x_0=\eta, \qquad (4.152)$$

имеет единственное сильное решение;

2) *если* $\mathsf{M}\eta^{2m}<\infty$, $m\geqslant 1$, *то существует такая константа* $c_m>0$, *что*

$$\mathsf{M}\xi_t^{2m}\leqslant\left(1+\mathsf{M}\eta^{2m}\right)e^{c_m t}-1. \qquad (4.153)$$

Доказательство. Если существование решения у уравнения (4.152) установлено, то справедливость оценки (4.153) будет следовать из доказательства соответствующего неравенства (4.113) в теореме 4.6, поскольку при его выводе использовалось лишь условие (4.111), очевидно выполненное для функционалов $a_0(t,\ x)$, $a_1(t,\ x)\,x_t$, $b(t,\ x)$.

Условие Липшица (4.110) не выполняется для функционала $a_1(t,\ y)\,y_t$. Поэтому для доказательства существования и единственности решения уравнения (4.152) непосредственное применение теоремы 4.6 невозможно. Поступим следующим образом.

Рассмотрим последовательность процессов $\xi^{(n)}=\left(\xi_t^{(n)}\right)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$, являющихся решениями уравнений

$$d\xi_t^{(n)}=\left[a_0\left(t, \xi^{(n)}\right)+a_1\left(t, \xi^{(n)}\right) g_n\left(\xi_t^{(n)}\right)\right] dt+b\left(t, \xi^{(n)}\right) dW_t, \quad \xi_0^{(n)}=\eta, \tag{4.154}$$

с

$$g_n(z)=\begin{cases} z, & |z|\leqslant n, \\ n, & |z|>n. \end{cases}$$

Тогда при каждом $n=1, 2, \ldots$ функционал $a_1(t, y) g_n(y_t)$ удовлетворяет, как нетрудно видеть, условию Липшица (4.110). Следовательно, для каждого $n=1, 2, \ldots$ сильное решение $\xi_t^{(n)}$ уравнения (4.154) существует и единственно.

Анализ доказательства неравенства (4.113) показывает, что

$$\mathsf{M}\left(\xi_t^{(n)}\right)^2\leqslant\left(1+\mathsf{M}\eta^2\right) e^{c_1 t}-1,$$

где константа c_1 не зависит от n. Значит,

$$\sup_n \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \mathsf{M}\left(\xi_t^{(n)}\right)^2\leqslant\left(1+\mathsf{M}\eta^2\right) e^{c_1}-1<\infty,$$

что с учетом (4.54) дает неравенство

$$\sup_n \mathsf{M} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\xi_t^{(n)}\right)^2<\infty.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\xi_t^{(n)}\right|>n\right\}\leqslant\frac{1}{n^2} \sup_n \mathsf{M} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\xi_t^{(n)}\right)^2 \rightarrow 0, \quad n\rightarrow\infty. \tag{4.155}$$

Положим $\tau_n=\inf\left(t\leqslant 1: \sup_{s\leqslant t}\left|\xi_s^{(n)}\right|\geqslant n\right)$, считая $\tau_n=1$, если $\sup_{s\leqslant 1}\left|\xi_s^{(n)}\right|<n$, и пусть для заданных n' и n, $n'>n$; $\sigma=\tau_n\wedge\tau'_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\xi_{t\wedge\sigma}^{(n')}-\xi_{t\wedge\sigma}^{(n)}= & \int_0^{t\wedge\sigma}\left[a_0\left(s, \xi^{(n')}\right)-a_0\left(s, \xi^{(n)}\right)\right] ds+ \\ & +\int_0^{t\wedge\sigma}\left[a_1\left(s, \xi^{(n')}\right) g_{n'}\left(\xi_s^{(n')}\right)-a_1\left(s, \xi^{(n)}\right) g_n\left(\xi_s^{(n)}\right)\right] ds+ \\ & +\int_0^{t\wedge\sigma}\left[b\left(s, \xi^{(n')}\right)-b\left(s, \xi^{(n)}\right)\right] dW_s.\end{aligned}$$

Принимая во внимание условие Липшица, отсюда находим, что

$$\mathsf{M}\left[\xi_{t\wedge\sigma}^{(n')}-\xi_{t\wedge\sigma}^{(n)}\right]^2 \leqslant c_1\int_0^t\int_0^s \mathsf{M}\left[\xi_{u\wedge\sigma}^{(n')}-\xi_{u\wedge\sigma}^{(n)}\right]^2 dK(u)\,ds+$$
$$+c_2\int_0^t \mathsf{M}\left[\xi_{s\wedge\sigma}^{(n')}-\xi_{s\wedge\sigma}^{(n)}\right]^2 ds, \tag{4.156}$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные. Из (4.156) согласно лемме 4.13 получаем

$$\mathsf{M}\left[\xi_{t\wedge\sigma}^{(n')}-\xi_{t\wedge\sigma}^{(n)}\right]^2=0,$$

т. е. при $t\leqslant\sigma=\tau_n\wedge\tau_{n'}$ решения $\xi_t^{(n')}$ и $\xi_t^{(n)}$ совпадают P-п. н. Поэтому для любого t, $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\mathsf{P}\left\{\left|\xi_t^{(n')}-\xi_t^{(n)}\right|>0\right\}\leqslant\mathsf{P}\{\sigma<t\}=\mathsf{P}\left\{\tau_n\wedge\tau_{n'}<t\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\tau_n<t\right\}+\mathsf{P}\left\{\tau_{n'}<t\right\}\leqslant\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t}\left|\xi_s^{(n)}\right|>n\right\}+\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t}\left|\xi_s^{(n')}\right|>n\right\},$$

что вместе с (4.155) приводит к соотношению

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}}\mathsf{P}\left\{\left|\xi_t^{(n)}-\xi_t^{(n')}\right|=0\right\}.$$

Значит, величины $\xi_t^{(n)}$ стремятся по вероятности к некоторому пределу ξ_t.

Из совпадения величин $\xi_t^{(n)}$ и $\xi_t^{(n')}$ при $t\in[0,\sigma]$ следует, что $\tau_n\leqslant\tau_{n'}$ (P-п. н.) для $n'>n$. Пусть $n=n_1<n_2<\ldots$ Тогда $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\xi_t^{(n_k)}=\xi_t$ и при $t\leqslant\tau_{n_1}$

$$\xi_t^{(n_1)}=\xi_t^{(n_2)}=\ldots=\xi_t\qquad(\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\left|\xi_t-\eta-\int_0^t\left[a_0(s,\xi)+a_1(s,\xi)\xi_s\right]ds-\int_0^t b(s,\xi)\,dW_s\right|>0\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\tau_{n_1}<t\right\}=\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t}\left|\xi_s^{(n_1)}\right|>n_1\right\}\to 0,\quad n_1=n\to\infty.$$

Итак, существование сильного решения уравнения (4.152) доказано.

Пусть теперь $\xi=(\xi_t)$ и $\tilde\xi=(\tilde\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, — два таких решения уравнения (4.152). Тогда, как и в теореме 4.6, устанавливается (с использованием леммы 4.13), что $\mathsf{M}\chi_N(t)\left[\xi_t-\tilde\xi_t\right]^2=0$, где $\chi_N(t)=\chi_{\left\{\sup\limits_{s\leqslant t}\left(\xi_s^2+\tilde\xi_s^2\right)\leqslant N\right\}}$. Отсюда получаем

$$\mathsf{P}\{|\xi_t-\tilde\xi_t|>0\}\leqslant\mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant t}(\xi_s^2+\tilde\xi_s^2)>N\}\to 0,\qquad N\to\infty,$$

что в силу непрерывности процессов ξ и $\tilde\xi$ приводит к равенству $\mathsf{P}\{\sup\limits_{t\leqslant 1}|\xi_t-\tilde\xi_t|>0\}=0$.

Теорема доказана.

6. Сформулируем еще одну теорему о существовании и виде сильного решения линейных векторов стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 4.10. *Пусть элементы вектор-функции* $a_0(t)=(a_{01}(t),\ldots,a_{0n}(t))$ *и матриц* $a_1(t)=\|a_{ij}^{(1)}(t)\|$, $b(t)=\|b_{ij}(t)\|$, $i,j=1,\ldots,n$, *являются измеримыми (детерминированными) функциями* t, $0\leqslant t\leqslant 1$, *удовлетворяющими условиям*

$$\int_0^1|a_{0j}(t)|\,dt<\infty,\qquad \int_0^1|a_{ij}^{(1)}(t)|\,dt<\infty,\qquad \int_0^1 b_{ij}^2(t)\,dt<\infty.$$

Тогда векторное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx_t=[a_0(t)+a_1(t)x_t]\,dt+b(t)\,dW_t,\qquad x_0=\eta,\tag{4.157}$$

с винеровским (относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $t\leqslant 1$*) процессом* $W_t=(W_1(t),\ldots,W_n(t))$ *имеет, и притом единственное, сильное решение, определяемое формулой*

$$x_t=\Phi_t\left[\eta+\int_0^t\Phi_s^{-1}a_0(s)\,ds+\int_0^t\Phi_s^{-1}b(s)\,dW_s\right],\tag{4.158}$$

где Φ_t — *фундаментальная матрица* $(n\times n)$,

$$\Phi_t=E+\int_0^t a_1(s)\Phi_s\,ds\tag{4.159}$$

(E — *единичная матрица* порядка $(n\times n)$).

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует решение уравнения (4.159). Для этого рассмотрим последовательность $\{\Phi_k(t),\ k=0,1,\ldots\}$ с

$$\Phi_0(t)=E,\ \ldots,\quad \Phi_{k+1}(t)=E+\int_0^t a_1(s)\Phi_k(s)\,ds.\tag{4.160}$$

Имеем

$$\Phi_{k+1}(t)-\Phi_k(t)=\int_0^t a_1(s)\left[\Phi_k(s)-\Phi_{k-1}(s)\right]ds \qquad (4.161)$$

и

$$\sum_{i,j=1}^n\left|\left[\Phi_{k+1}(t)-\Phi_k(t)\right]_{ij}\right|\leqslant\int_0^t\sum_{i,j=1}^n\left|a_{ij}^{(1)}(s)\right|\sum_{i,j=1}^n\left|\left[\Phi_k(s)-\Phi_{k-1}(s)\right]_{ij}\right|ds.$$

Поскольку в силу (4.160)

$$\sum_{i,j=1}^n\left|\left[\Phi_1(t)-\Phi_0(t)\right]_{ij}\right|\leqslant\int_0^t\sum_{i,j=1}^n\left|a_{ij}^{(1)}(s)\right|ds<\infty,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

то из (4.161) получаем, что

$$\sum_{i,j=1}^n\left|\left[\Phi_{k+1}(t)-\Phi_k(t)\right]_{ij}\right|\leqslant\frac{1}{k!}\left(\int_0^t\sum_{i,j=1}^n\left|a_{ij}^{(1)}(s)\right|ds\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k!}\left(\int_0^1\sum_{i,j=1}^n\left|a_{ij}^{(1)}(s)\right|ds\right)^k.$$

Отсюда следует, что матричный ряд

$$\Phi_0(t)+\sum_{k=0}^\infty\left[\Phi_{k+1}(t)-\Phi_k(t)\right]$$

сходится абсолютно и равномерно к матрице Φ_t с непрерывными элементами. Поэтому после предельного перехода при $k\to\infty$ в (4.160) убеждаемся в существовании решения уравнения (4.159). Матрица Φ_t почти всюду, $0\leqslant t\leqslant 1$, дифференцируема, и производная ее определителя $|\Phi_t|$

$$\frac{d\,|\Phi_t|}{dt}=\operatorname{Sp}a_1(t)\cdot|\Phi_t|,\quad |\Phi_0|=1,$$

почти всюду, $0\leqslant t\leqslant 1$. Отсюда находим

$$|\Phi_t|=\exp\left(\int_0^t\operatorname{Sp}a_1(s)\,ds\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

и матрица Φ_t невырожденная.

Покажем теперь, что решение уравнения (4.159) единственно.

Поскольку матрица Φ_t не вырождается, то из тождества $\Phi_t\Phi_t^{-1}=E$ находим, что почти всюду, $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\frac{d\Phi_t^{-1}}{dt}=-\Phi_t^{-1}\frac{d\Phi_t}{dt}\Phi_t^{-1}=-\Phi_t^{-1}a_1(t). \qquad (4.162)$$

Пусть $\tilde{\Phi}_t$, $\tilde{\Phi}_0=E$,—еще одно решение уравнения (4.159). Тогда в силу (4.159) и (4.162) почти всюду, $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^{-1}\tilde{\Phi}_t)=0,$$

что доказывает совпадение непрерывных матриц Φ_t и $\tilde{\Phi}_t$ при всех $0\leqslant t\leqslant 1$.

Теперь, для того чтобы убедиться в существовании сильного решения системы стохастических дифференциальных уравнений (4.157), достаточно применить формулу Ито к представлению (4.158) для x_t.

Для доказательства единственности решения системы уравнений (4.157) заметим, что разность $\Delta_t=x_t-\tilde{x}_t$ двух любых ее решений x_t, $\tilde{x}_t$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_t=\Delta_0+\int_0^t a_1(s)\Delta_s$$

и

$$\sum_{i=1}^n|\Delta_t|_i\leqslant\sum_{i=1}^n|\Delta_0|_i+\int_0^t\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}^{(1)}(s)|\sum_{i=1}^n|\Delta_s|_i.$$

Отсюда по лемме 4.13 имеем

$$\sum_{i=1}^n|\Delta_t|_i\leqslant\sum_{i=1}^n|\Delta_0|_i\exp\left\{\int_0^t\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}^{(1)}(s)|\,ds\right\},$$

и следовательно, любые два решения x_t, $\tilde{x}_t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, с $\mathsf{P}\{x_0=\tilde{x}_0=\eta\}=1$ совпадают P-п. н. при всех t.

Замечание. Наряду с (4.157) рассмотрим уравнение

$$dx_t=[a_0(t)+a_1(t)x_t+a_2(t)\xi_t]\,dt+b(t)\,d\xi_t,\quad x_0=\eta,\tag{4.163}$$

где $\xi=[(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)),\mathcal{F}_t]$—процесс Ито с дифференциалом

$$d\xi_t=\alpha_t(\omega)\,dt+\beta_t(\omega)\,dW_t,\tag{4.164}$$

$W=([W_1(t),\ldots,W_n(t)],\mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс, а вектор $(\alpha_t(\omega),\mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\alpha_t(\omega)=[\alpha_1(t,\omega),\ldots,\alpha_n(t,\omega)]$, и матрицы $(\beta_t(\omega),\mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $\beta_t(\omega)=\|\beta_{ij}(t,\omega)\|$, и $b(t)=\|b_{ij}(t)\|$ порядка $(n\times n)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left\{\int_0^T|b_{ij}(t)\alpha_j(t,\omega)|\,dt<\infty\right\}=1,\quad i,j=1,\ldots,n,\\&\mathsf{P}\left\{\int_0^T(b_{ij}(t)\beta_{jk}(t,\omega))^2\,dt<\infty\right\}=1,\quad i,k=1,\ldots,n.\end{aligned}\tag{4.165}$$

Если вектор $a_0(t) = [a_{01}(t), \ldots, a_{0n}(t)]$ и матрицы $a_1(t) = \| a_{ij}^{(1)}(t) \|$, $a_2(t) = \| a_{ij}^{(2)}(t) \|$ порядка $(n \times n)$ удовлетворяют предположениям теоремы 4.10, то, аналогично доказательству теоремы 4.10, устанавливается, что

$$x_t = \Phi_t \left[\eta + \int_0^t \Phi_s^{-1} (a_0(s) + a_2(s)\xi_s) \, ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} b(s) \, d\xi_s \right], \tag{4.166}$$

где Φ_t удовлетворяет (4.159), является единственным сильным решением уравнения (4.163).

7. Рассмотрим теперь вопрос о существовании и единственности слабого решения уравнения

$$d\xi_t = a(t, \xi) \, dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{4.167}$$

Пусть $(\mathbf{C}_1, \mathscr{B}_1)$—измеримое пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций $x = (x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с $x_0 = 0$, $\mathscr{B}_t = \sigma\{x: x_s, s \leqslant t\}$. Обозначим ν винеровскую меру на $(\mathbf{C}_1, \mathscr{B}_1)$. Тогда процесс $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t(x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, на пространстве $(\mathbf{C}_1, \mathscr{B}_1, \nu)$ будет винеровским процессом, если определить $\widetilde{W}_t(x) = x_t$.

Теорема 4.11. *Пусть неупреждающий функционал* $a = (a(t, x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \in \mathbf{C}_1$, *таков, что*

$$\nu \left\{ x: \int_0^1 a^2(t, x) \, dt < \infty \right\} = 1, \tag{4.168}$$

$$\mathbf{M}_\nu \exp \left\{ \int_0^1 a(t, x) \, d\widetilde{W}_t(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 a^2(t, x) \, dt \right\} = 1, \tag{4.169}$$

где $\mathbf{M}_\nu$ — *усреднение по мере* ν. *Тогда уравнение* (4.167) *имеет слабое решение.*

Доказательство. Для доказательства существования такого решения достаточно построить совокупность объектов $\mathscr{A} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbf{P}, W, \xi)$, удовлетворяющих требованиям определения 8.

Возьмем $\Omega = \mathbf{C}_1$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_1$, $\mathscr{F}_t = \mathscr{B}_t$. В качестве меры $\mathbf{P}$ рассмотрим меру с дифференциалом $\mathbf{P}(d\omega) = \rho(\widetilde{W}(\omega)) \, \nu(d\omega)$, где

$$\rho(\widetilde{W}(\omega)) = \exp \left\{ \int_0^1 a(t, \widetilde{W}(\omega)) \, d\widetilde{W}_t(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^1 a^2(t, \widetilde{W}(\omega)) \, dt \right\}.$$

Из условия (4.169) вытекает, что мера $\mathbf{P}$ является вероятностной, поскольку $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{M}_\nu \rho(x) = 1$.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ рассмотрим теперь процесс

$$W_t = \tilde{W}_t - \int_0^t a(s, \tilde{W})\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.170}$$

Согласно теореме 6.3 этот процесс является винеровским (относительно системы σ-алгебр $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$ и меры P). Поэтому, если положить $\xi_t = \tilde{W}_t$, то из (4.170) найдем, что

$$\xi_t = \int_0^t a(s, \xi)\, ds + W_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.171}$$

Итак, построенная совокупность объектов $\mathcal{A} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}, W, \xi)$ образует слабое решение уравнения (4.167).

Замечание 1. Пусть μ_W и μ_ξ — меры, отвечающие процессам W и ξ. Тогда

$$\mu_\xi(A) = \mathsf{P}(\xi \in A) = \mathsf{P}(\tilde{W} \in A) = \int_{\{\tilde{W} \in A\}} \rho(\tilde{W}(\omega))\, \nu(d\omega) = \\ = \int_{\{W \in A\}} \rho(W(\omega))\, d\mu_W(\omega).$$

Поэтому $\mu_\xi \ll \mu_W$, и согласно лемме 6.8 $\mu_W \ll \mu_\xi$. Таким образом, $\mu_\xi \sim \mu_W$ и

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W(\omega)) = \rho(W(\omega)) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{4.172}$$

Замечание 2. В силу (4.168)

$$\mathsf{P}\left(\int_0^1 a^2(t, W)\, dt < \infty\right) = 1,$$

и согласно замечанию 1 $\mu_\xi \sim \mu_W$. Поэтому построенное выше слабое решение таково, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^1 a^2(t, \xi)\, dt < \infty\right) = 1. \tag{4.173}$$

Теорема 4.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.11. *Тогда в классе решений, удовлетворяющих условию* (4.173), *слабое решение уравнения* (4.167) *является единственным.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}, W, \xi)$ — построенное выше решение и $\mathcal{A}' = (\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, \mathsf{P}, W', \xi')$ — еще одно слабое решение с

$$\mathsf{P}'\left(\int_0^1 a^2(t,\ \xi')\,dt < \infty\right) = 1. \tag{4.174}$$

Тогда по теореме 7.7 $\mu_{\xi'} \sim \mu_{W'}$ и

$$\frac{d\mu_{\xi'}}{d\mu_{W'}}(W'(\omega')) = \rho(W'(\omega')),$$

что вместе с (4.172) дает требуемое равенство $\mu_{\xi'}(A) = \mu_\xi(A)$.

Теорема доказана.

Сформулируем, наконец, еще один результат, являющийся, по существу, следствием теорем 4.11 и 4.12.

Теорема 4.13. *Пусть функционал* $a = (a(t,\ x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \in \mathbf{C}_1$, *таков, что для всякого* $x \in \mathbf{C}_1$

$$\int_0^1 a^2(t,\ x)\,dt < \infty. \tag{4.175}$$

Тогда условие (4.169) *является необходимым и достаточным для существования и единственности слабого решения уравнения* (4.167).

Доказательство. Достаточность следует из теорем 4.11 и 4.12. Для доказательства необходимости заметим, что если $\mathscr{A} = (\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathscr{F}_t,\ \mathsf{P},\ W,\ \xi)$ — некоторое слабое решение, то в силу условия (4.175) из теоремы 7.7 вытекает, что $\mu_\xi \sim \mu_W$ и

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W(\omega)) = \rho(W(\omega)).$$

Значит,

$$\mu_\xi(\Omega) = \int_\Omega \rho(W(\omega))\,d\mu_W(\omega) = 1,$$

что совпадает с равенством (4.169).

Замечание. Достаточные условия выполнимости равенства (4.169) приведены в § 2 гл. 6.

ГЛАВА 5

КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МАРТИНГАЛЫ. СТРУКТУРА ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

§ 1. Разложение Дуба — Мейера для квадратично интегрируемых мартингалов

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — неубывающее непрерывное справа семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$, каждая из которых пополнена множествами из $\mathscr{F}$, имеющими нулевую P-вероятность.

Обозначим $\mathscr{M}_T$ совокупность квадратично интегрируемых мартингалов, т. е. непрерывных справа мартингалов $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M} x_t^2 < \infty$. Через $\mathscr{M}_T^c$ будут обозначаться мартингалы $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеющие P-п. н. непрерывные траектории и удовлетворяющие условию $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M} x_t^2 < \infty$. Очевидно, $\mathscr{M}_T^c \subseteq \mathscr{M}_T$. В случае $T=\infty$ классы $\mathscr{M}_\infty$ и $\mathscr{M}_\infty^c$ будут обозначаться соответственно $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}^c$.

Случайный процесс $Z=(x_t^2, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_T$, является неотрицательным субмартингалом и согласно теореме 3.7 принадлежит классу DL, а в случае $T<\infty$ — классу D.

Применяя разложение Дуба — Мейера (теорема 3.8 и следствие из нее) к субмартингалу $Z=(x_t^2, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Для каждого $X \in \mathscr{M}_T$ найдется единственный (с точностью до стохастической эквивалентности) натуральный возрастающий процесс $A_t \equiv \langle x \rangle_t$, $t \leqslant T$, такой, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$,*

$$x_t^2 = m_t + \langle x \rangle_t \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{5.1}$$

где $(m_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — мартингал. При этом для $t \geqslant s$

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathsf{M}\left[\langle x \rangle_t - \langle x \rangle_s \mid \mathscr{F}_s\right] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.2}$$

Доказательство. Достаточно установить лишь (5.2). Но $(m_t, \mathscr{F}_t)$ и $(x_t, \mathscr{F}_t)$ — мартингалы, поэтому

$$\mathsf{M}(m_t - m_s \mid \mathscr{F}_s) = 0, \quad \mathsf{M}\left[x_t^2 - x_s^2 \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathsf{M}\left[(x_t - x_s)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \text{ (P-п. н.)},$$

и (5.2) вытекает из (5.1).

Пример 1. Пусть $X = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс. Тогда $\langle W_t \rangle = t$ (P-п. н.).

Пример 2. Пусть $a(t, \omega) \in \mathfrak{M}_T$ и $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — непрерывный мартингал $x_t = \int_0^t a(s, \omega)\, dW_s$. Тогда по формуле Ито

$$x_t^2 = 2 \int_0^t a(s, \omega)\, x_s\, dW_s + \int_0^t a^2(s, \omega)\, ds.$$

Непосредственно проверяется, что процесс

$$y_t \equiv 2 \int_0^t a(s, \omega)\, x_s\, dW_s = x_t^2 - \int_0^t a^2(s, \omega)\, ds$$

является мартингалом, а процесс $\int_0^t a^2(s, \omega)\, ds$ натурален. Поэтому в рассматриваемом примере

$$\langle x \rangle_t = \int_0^t a^2(s, \omega)\, ds.$$

2. В дальнейшем нам понадобится аналог разложения (5.1) для произведения $x_t \cdot y_t$ двух квадратично интегрируемых мартингалов $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$ и $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 5.2. *Пусть $X \in \mathscr{M}_T$, $Y \in \mathscr{M}_T$. Тогда найдутся единственный (с точностью до стохастической эквивалентности) процесс $\langle x, y \rangle_t$, являющийся разностью двух натуральных возрастающих процессов, и мартингал $(m_t, \mathscr{F}_t)$ такие, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$,*

$$x_t y_t = m_t + \langle x, y \rangle_t \quad \text{(P-п. н.)}. \tag{5.3}$$

При этом P-п. н.

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(y_t - y_s) \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathsf{M}\left[\langle x, y \rangle_t - \langle x, y \rangle_s \mid \mathscr{F}_s\right]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что существуют процессы m_t и $\langle x, y \rangle_t$ с указанными свойствами, для которых выполнено (5.3). Согласно (5.1)

$$(x_t - y_t)^2 = m_t^{x-y} + \langle x - y \rangle_t, \quad (x_t + y_t)^2 = m_t^{x+y} + \langle x + y \rangle_t,$$

где приняты очевидные обозначения.

Определим теперь

$$\langle x, y\rangle_t = \frac{1}{4}[\langle x+y\rangle_t - \langle x-y\rangle_t] \quad \text{и} \quad m_t = x_t y_t - \langle x, y\rangle_t.$$

Ясно, что $\langle x, y\rangle_t$ есть разность двух натуральных возрастающих процессов. Проверим, что $(m_t, \mathscr{F}_t)$ есть мартингал.

В силу формулы $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$

$$\mathsf{M}[x_t y_t - x_s y_s \mid \mathscr{F}_s] = \mathsf{M}[(x_t - x_s)(y_t - y_s) \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= \frac{1}{4}\mathsf{M}\{[(x_t + y_t) - (x_s + y_s)]^2 - [(x_t - y_t) - (x_s - y_s)]^2 \mid \mathscr{F}_s\} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathsf{M}\{[\langle x+y\rangle_t - \langle x+y\rangle_s] - [\langle x-y\rangle_t - \langle x-y\rangle_s] \mid \mathscr{F}_s\} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathsf{M}\{[\langle x+y\rangle_t - \langle x-y\rangle_t] - [\langle x+y\rangle_s - \langle x-y\rangle_s] \mid \mathscr{F}_s\} =$$

$$= \mathsf{M}[\langle x, y\rangle_t - \langle x, y\rangle_s \mid \mathscr{F}_s].$$

Отсюда следует, что процесс $(m_t, \mathscr{F}_t)$ есть мартингал.

Пусть теперь имеется еще одно представление $x_t y_t = m_t' + A_t'$, где $(m_t', \mathscr{F}_t)$ — мартингал, а A_t' — процесс, являющийся разностью двух натуральных возрастающих процессов.

Если время t дискретно $(t = 0, 1, \ldots, N)$, то равенства $m_t' = m_t$, $A_t' = \langle x, y\rangle_t$ (Р-п. н.) устанавливаются следующим образом.

Поскольку

$$A_{t+1}' - A_t' = (x_{t+1}y_{t+1} - x_t y_t) - (m_{t+1}' - m_t'),$$

то в силу $\mathscr{F}_t$-измеримости A_{t+1}' и равенства (5.4)

$$A_{t+1}' - A_t' = \mathsf{M}[x_{t+1}y_{t+1} - x_t y_t \mid \mathscr{F}_t] = \langle x, y\rangle_{t+1} - \langle x, y\rangle_t \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Но $A_0' = \langle x, y\rangle_0 = 0$. Поэтому $A_t' = \langle x, y\rangle_t$ и $m_t' = m_t$ (Р-п. н.) для каждого $t = 0, 1, \ldots, N$.

Если же время t непрерывно, то единственность разложения (5.3) устанавливается с помощью приема, использованного при доказательстве единственности в теореме 3.8.

З а м е ч а н и е. Во избежание недоразумений отметим, что, вообще говоря, $\langle x+y\rangle_t \neq \langle x\rangle_t + \langle y\rangle_t$. Равенство $\langle x+y\rangle_t = \langle x\rangle_t + \langle y\rangle_t$, $t \leqslant T$, будет выполнено Р-п. н. в том случае, когда мартингалы $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$ и $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$ ортогональны $(X \perp Y)$, т. е. $\langle x, y\rangle_t = 0$, $t \leqslant T$. В силу единственности разложения (5.3) условие $\langle x, y\rangle_t = 0$, как нетрудно показать, эквивалентно тому, что процесс $(x_t y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, также является мартингалом.

Пример 3. Пусть $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс и

$$x_t=\int_0^t a(s, \omega)\, dW_s, \qquad y_t=\int_0^t b(s, \omega)\, dW_s,$$

где

$$\mathsf{M}\int_0^T a^2(s, \omega)\, ds<\infty, \qquad \mathsf{M}\int_0^T b^2(s, \omega)\, ds<\infty.$$

Тогда $X=(x_t, \mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}_T$, $Y=(y_t, \mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}_T$ и по формуле Ито

$$x_t y_t=\int_0^s [x_s b(s, \omega)+y_s a(s, \omega)]\, dW_s+\int_0^t a(s, \omega)\, b(s, \omega)\, ds.$$

Как и в примере 2, показывается, что процесс $\int_0^t [x_s b(s, \omega)+$ $+y_s a(s, \omega)]\, dW$ является мартингалом, а

$$\langle x, y\rangle_t=\int_0^t a(s, \omega)\, b(s, \omega)\, ds. \tag{5.5}$$

В частности, если $y_t\equiv W_t$, т. е. $b(s, \omega)\equiv 1$, то

$$\langle x, W\rangle_t=\int_0^t a(s, \omega)\, ds \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t\leqslant T. \tag{5.6}$$

3. Один из центральных результатов теории квадратично интегрируемых мартингалов состоит в том, что представление (5.6) справедливо для любого мартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}_T$, а не только в случае, когда $x_t=\int_0^t a(s, \omega)\, dW_s$. Точный результат дается в следующей теореме.

Теорема 5.3. *Пусть мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}_T$ и $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс. Предположим, что семейство σ-алгебр $\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, непрерывно справа, т. е. $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$ для всех t, $0\leqslant t\leqslant T$, где $\mathscr{F}_{T+}\equiv\mathscr{F}_T$. Тогда найдется случайный процесс $(a(t, \omega), \mathscr{F}_t)$ с $\mathsf{M}\int_0^T a^2(t, \omega)\, dt<\infty$ такой, что для всех t, $0\leqslant t\leqslant T$,*

$$\langle x, W\rangle_t=\int_0^t a(s, \omega)\, ds \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.7}$$

Предварительно докажем такую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть семейство* $F=(\mathcal{F}_t)$, $t\leqslant T$, *непрерывно справа*, $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$ — *винеровский процесс и* $X=(x_t, \mathcal{F}_t)\in\mathcal{M}_T$. *Пусть случайный процесс* $(g(t,\omega), \mathcal{F}_t)$, $t\leqslant T$, *измерим относительно* σ-*алгебры на* $[0, T]\times\Omega$, *порожденной неупреждающими процессами, имеющими непрерывные слева траектории и* $\mathsf{M}\int_0^T g^2(s,\omega)(d|\langle x, W\rangle_s| + ds)<\infty$. *Тогда, если* $y_t=\int_0^t g(s,\omega)\,dW_s$, *то* P-п. н.

$$\langle x, y\rangle_t=\int_0^t g(s,\omega)\,d\langle x, W\rangle_s, \tag{5.8}$$

где интеграл понимается как интеграл Лебега — Стилтьеса.

Если для почти всех ω *функция* $\langle x, W\rangle_t$ *абсолютно непрерывна, то равенство* (5.8) *выполняется для любого процесса* $(g(t,\omega), \mathcal{F}_t)$, $t\leqslant T$, *удовлетворяющего условию*

$$\mathsf{M}\int_0^T g^2(s,\omega)(d|\langle x, W\rangle_s| + ds)<\infty.$$

Доказательство. Пусть $g^{(n)}(t,\omega)$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность простых функций,

$$g^{(n)}(t,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} g(t_k^{(n)},\omega)\chi_{\left(t_k^{(n)},\, t_{k+1}^{(n)}\right]}(t),\quad 0=t_0^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=T, \tag{5.9}$$

таких, что

$$\mathsf{M}\int_0^T |g(t,\omega)-g^{(n)}(t,\omega)|^2(d|\langle x, W\rangle_t| + dt)\to 0,\quad n\to\infty.$$

(Существование такой последовательности в более общей ситуации доказано ниже в лемме 5.3.)

Тогда в силу (5.4) и (4.48) (P-п. н.)

$$\mathsf{M}[\langle x, y\rangle_t-\langle x, y\rangle_s|\mathcal{F}_s]=\mathsf{M}[(x_t-x_s)(y_t-y_s)|\mathcal{F}_s]=$$

$$=\mathsf{M}\left[(x_t-x_s)\int_0^t g(u,\omega)\,dW_u|\mathcal{F}_s\right]=\mathsf{M}\left[x_t\int_0^t g(u,\omega)\,dW_u|\mathcal{F}_s\right]=$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathsf{M}\left[x_t\int_s^t g^{(n)}(u,\omega)\,dW_u|\mathcal{F}_s\right].$$

Согласно (5.9)

$$\int\limits_s^t g^{(n)}(u, \omega)\, dW_u = \sum_{l \leqslant k \leqslant m} g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[W_{t \wedge t_{k+1}^{(n)}} - W_{s \vee t_k^{(n)}}\right],$$

где l и m определяются из условий $t_l^{(n)} \leqslant s < t_{l+1}^{(n)}$, $t_m^{(n)} < t \leqslant t_{m+1}^{(n)}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $t_l^{(n)} = s$, $t_{m+1}^{(n)} = t$. Тогда

$$\mathsf{M}\left[x_t \int\limits_s^t g^{(n)}(u, \omega)\, dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= \sum_{l \leqslant k \leqslant m} \mathsf{M}\left\{x_t g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\} =$$

$$= \sum_{l \leqslant k \leqslant m} \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left(x_t \mid \mathcal{F}_{t_{k+1}^{(n)}}\right) g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\} =$$

$$= \sum_{l \leqslant k \leqslant m} \mathsf{M}\left\{g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right] x_{t_{k+1}^{(n)}} \Big| \mathcal{F}_s\right\}, \qquad (5.10)$$

где

$$\mathsf{M}\left\{g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right] x_{t_{k+1}^{(n)}} \Big| \mathcal{F}_s\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{g\left(t_k^{(n)}, \omega\right) \mathsf{M}\left[\left(W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right)\left(x_{t_{k+1}^{(n)}} - x_{t_k^{(n)}}\right) \Big| \mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{g\left(t_k^{(n)}, \omega\right) \mathsf{M}\left[\langle x, W\rangle_{t_{k+1}^{(n)}} - \langle x, W\rangle_{t_k^{(n)}} \Big| \mathcal{F}_{t_k^{(n)}}\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{g\left(t_k^{(n)}, \omega\right)\left[\langle x, W\rangle_{t_{k+1}^{(n)}} - \langle x, W\rangle_{t_k^{(n)}}\right] \Big| \mathcal{F}_s\right\}. \qquad (5.11)$$

Из (5.10) и (5.11) следует, что

$$\mathsf{M}\left[x_t \int\limits_0^t g^{(n)}(u, \omega)\, dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathsf{M}\left[\int\limits_s^t g^{(n)}(u, \omega)\, d\langle x, W\rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right]. \quad (5.12)$$

Переходя в (5.12) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что P-п. н.

$$\underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, \mathsf{M}\left[x_t \int\limits_s^t g^{(n)}(u, \omega)\, dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left[\int\limits_s^t g(u, \omega)\, d\langle x, W\rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right]. \qquad (5.13)$$

Итак,

$$\mathsf{M}\left[\langle x, y\rangle_t - \langle x, y\rangle_s \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathsf{M}\left[\int\limits_s^t g(u, \omega)\, d\langle x, W\rangle_u \mid \mathcal{F}_s\right],$$

где процесс $\int_0^t g(u, \omega)\, d\langle x, W\rangle_u$ можно представить в виде разности двух натуральных возрастающих процессов. Поэтому согласно теореме 5.2 $\langle x, y\rangle_t$ допускает представление (5.8).

Заключительная часть леммы вытекает из доказываемой ниже леммы 5.5.

Доказательство теоремы 5.3. Пусть $(g(t, \omega), \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — функция, удовлетворяющая условиям леммы 5.1 и такая, что $g^2(t, \omega) = g(t, \omega)$ и $\int_0^t g(t, \omega)\, dt = 0$ (P-п. н.). Покажем, что тогда и $\int_0^T g(t, \omega)\, d\langle x, W\rangle_t = 0$ (P-п. н.).

С этой целью положим $y_t = \int_0^t g(s, \omega)\, dW_s$. Ясно, что процесс $Y = (y, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, является квадратично интегрируемым мартингалом и по лемме 5.1

$$\langle x, y\rangle_t = \int_0^t g(s, \omega)\, d\langle x, W\rangle_s. \tag{5.14}$$

Но $\mathsf{M} y_t^2 = \mathsf{M} \int_0^t g^2(s, \omega)\, ds = 0$. Поэтому $y_t = 0$ (P-п. н.), $t \leqslant T$, и, значит, $\langle x, y\rangle_t = 0$ (P-п. н.), $t \leqslant T$. Из (5.14) теперь следует, что

$$\int_0^T g(s, \omega)\, d\langle x, W\rangle_s = 0 \quad (\text{P-п. н.}). \tag{5.15}$$

Определим в измеримом пространстве $([0, T] \times \Omega, \mathscr{B}_{[0, T]} \times \mathscr{F}_T)$ меру $Q(\cdot)$, положив ее на множествах $S \times A$, $S \in \mathscr{B}_{[0, T]}$, $A \in \mathscr{F}_T$ равной

$$Q(S \times A) = \int_A \left[\int_S d\langle x, W\rangle_u\right] d\mathsf{P}(\omega).$$

Тогда из (5.15) вытекает, что мера Q абсолютно непрерывна по мере R, где $R(S \times A) = \lambda(S) P(A)$, λ — мера Лебега, $\lambda(dt) = dt$. Следовательно, найдется такая $\mathscr{B}_{[0, T]} \times \mathscr{F}_T$-измеримая функция $f(t, \omega)$ с $\int_\Omega \int_0^T |f(t, \omega)|\, dt\, d\mathsf{P}(\omega) < \infty$, что

$$Q(S \times A) = \int_A \int_S f(t, \omega)\, dt\, d\mathsf{P}(\omega).$$

Отсюда находим

$$\int_A \langle x, W\rangle_t \, d\mathsf{P}(\omega) = \int_A \left[\int_0^t f(s, \omega)\, ds\right] d\mathsf{P}(\omega),$$

и в силу произвольности множества $A \in \mathcal{F}_T$

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t f(s, \omega)\, ds \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{5.16}$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Полученное представление (5.16) не есть еще требуемое представление (5.7), поскольку из проведенного доказательства вытекает лишь, что функция $f(t, \omega)$ является $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}_T$-измеримой, и не вытекает, что при каждом фиксированном t она $\mathcal{F}_t$-измерима.

Покажем, что на самом деле существует вариант функции $f(t, \omega)$, $\mathcal{F}_t$-измеримый при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant T$. (Напомним, что производная Радона — Никодима $f(t, \omega)$ определяется однозначно лишь Р-п. н.) Вытекает это непосредственно из следующего общего предложения.

Лемма 5.2. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — *полное вероятностное пространство и* $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — *непрерывное справа семейство* σ-*подалгебр* $\mathcal{F}$, *пополненных множествами из* $\mathcal{F}$ *нулевой вероятности. Предположим, что* $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-*измеримая функция* $F(t, \omega)$ *является* $\mathcal{F}_t$-*измеримой при каждом* $t \geqslant 0$ *и* Р-п. н. *абсолютно непрерывной,*

$$F(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega)\, ds,$$

где $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-*измеримая функция* $f(s, \omega)$ *такова, что*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |f(s, \omega)|\, ds < \infty\right\} = 1, \qquad t \geqslant 0.$$

Тогда найдется такая $\mathcal{F}_t$-*измеримая при каждом* $t \geqslant 0$ *функция* $\tilde{f}(t, \omega)$, *что*

$$F(t, \omega) = \int_0^t \tilde{f}(s, \omega)\, ds \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \qquad t \geqslant 0,$$

и

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t |\tilde{f}(s, \omega)|\, ds < \infty\right\} = 1, \qquad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Если функция $f(t, \omega)$ непрерывна P-п. н. (по $t \leqslant T$), то можно взять $\tilde{f}(t, \omega) = f(t, \omega)$. Действительно, в этом случае

$$f(t, \omega) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{F(t+\Delta, \omega) - F(t, \omega)}{\Delta} \tag{5.17}$$

и при каждом $t \leqslant T$ величины $f(t, \omega)$ будут $\mathscr{F}_t$-измеримы в силу непрерывности справа семейства $F = (\mathscr{F}_t)$.

Если же функция $f(t, \omega)$ не является непрерывной, то рассмотрим последовательность непрерывных функций $\left\{f_n(t, \omega) = n \int\limits_0^t e^{-n(t-s)} f(s, \omega)\, ds,\ n = 1, 2, \ldots\right\}$. Известно, что эта последовательность обладает тем свойством, что с вероятностью 1

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^T |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|\, dt = 0. \tag{5.18}$$

Пусть $\tilde{f}(t, \omega)$ — предел этой последовательности по мере $\lambda \times \mathsf{P}$, где λ — мера Лебега на $[0, T]$, и $\{f_{n_k}(t, \omega),\ k = 1, 2, \ldots\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f_n(t, \omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся п. н. по мере $\lambda \times \mathsf{P}$ к $\tilde{f}(t, \omega)$.

Покажем теперь, что при каждом $t \leqslant T$ величины $f_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, а следовательно, и $f_{n_k}(t, \omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\tilde{f}(t, \omega)$ $\mathscr{F}_t$-измеримы. Для этого рассмотрим последовательность дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_t^{(n)} = -n x_t^{(n)} + nF(t, \omega), \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x_0^{(n)} = 0. \tag{5.19}$$

Ясно, что величины

$$x_t^{(n)} = n \int\limits_0^t e^{-n(t-s)} F(s, \omega)\, ds$$

при каждом $t \leqslant T$ $\mathscr{F}_t$-измеримы. Следовательно, таковыми же являются и величины $\dot{x}_t^{(n)}$.

Покажем теперь, что $\dot{x}_t^{(n)} = f_n(t, \omega)$.

Действительно, из (5.19) и определения $F(t, \omega)$ находим, что
$\dot{x}_t^{(n)} = n\left[F(t, \omega) - x_t^{(n)}\right] =$

$$= n\left[\int_0^t f(s, \omega)\,ds - n\int_0^t e^{-n(t-s)}\int_0^s f(u, \omega)\,du\,ds\right] =$$

$$= n\left[\int_0^t f(s, \omega)\,ds - \int_0^t f(s, \omega)\left(n\int_s^t e^{-n(t-u)}\,du\right)ds\right] =$$

$$= n\int_0^t e^{-n(t-s)} f(s, \omega)\,ds,$$

что доказывает $\mathcal{F}_t$-измеримость (при каждом $t \leqslant T$) величин $f_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ Наконец, из (5.18) следует, что

$$\int_0^t |\tilde{f}(s, \omega)|\,ds = \int_0^t |f(s, \omega)|\,ds < \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \qquad t \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Применяя эту лемму к $F(t, \omega) = \langle x, W\rangle_t$, получаем требуемое представление (5.7). Остается лишь показать, что в этом представлении $\mathsf{M}\int_0^T a^2(s, \omega)\,ds < \infty$.

Для $c > 0$ пусть $b(t, \omega) = e^{-c|a(t, \omega)|}|a(t, \omega)|$ и

$$y_t = \int_0^t e^{-c|a(s, \omega)|}\operatorname{sign} a(s, \omega)\,dW_s.$$

Процесс $Y = (y_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, является квадратично интегрируемым мартингалом, и по лемме 5.1

$$\langle x, y\rangle_t = \int_0^t e^{-c|a(s, \omega)|}\operatorname{sign} a(s, \omega)\,d\langle x, W\rangle_s =$$

$$= \int_0^t e^{-c|a(s, \omega)|}[\operatorname{sign} a(s, \omega)]\,a(s, \omega)\,ds = \int_0^t b(s, \omega)\,ds. \qquad (5.20)$$

Ясно, что функция $b = b(t, \omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является неупреждающей, ограниченной ($|b(t, \omega)| \leqslant K < \infty$ P-п. н.) и, следовательно, принадлежащей классу $\mathfrak{M}_T$ (см. определение 4 в § 2 гл. 4). По лемме 4.4 найдется последовательность простых функций $b_n(t, \omega)$, $n=1, 2, \ldots$ (соответствующих разбиениям $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=T$, $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}|t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}|\to 0$, $n\to\infty$), таких, что

$$\int_0^T \mathsf{M}|b(t, \omega)-b_n(t, \omega)|^2\,dt\to 0, \qquad n\to\infty.$$

Из очевидного равенства

$$b_n\left(t_j^{(n)}, \omega\right)=\frac{\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} b(s, \omega)\,ds}{t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}}+\frac{\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} [b_n(s, \omega)-b(s, \omega)]\,ds}{t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}}$$

и $\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}$-измеримости функций $b_n\left(t_j^{(n)}, \omega\right)$ следует, что

$$b_n\left(t_j^{(n)}, \omega\right)=\frac{\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M}\left[b(s, \omega)\,|\,\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right]ds}{t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}}+$$
$$+\frac{\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M}\left[b_n(s, \omega)-b(s, \omega)\,|\,\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right]ds}{t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}}.$$

Обозначим

$$\tilde{b}_n(t, \omega)=\begin{cases}\dfrac{\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M}\left[b(s, \omega)\,|\,\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}\right]ds}{t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}}, & t_j^{(n)}<t\leqslant t_{j+1}^{(n)},\\[2ex] 0, & t=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\mathsf{M}\int_0^T b_n^2(t,\omega)\,dt = \mathsf{M}\sum_{j=0}^{n-1} b_n^2(t_j^{(n)},\omega)\,[t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}] \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{M}\int_0^T \tilde{b}_n^2(t,\omega)\,dt + 2\mathsf{M}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\int\limits_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathsf{M}\left[b_n(s,\omega) - b(s,\omega)\mid \mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]ds\right)^2}{t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathsf{M}\int_0^T \tilde{b}_n^2(s,\omega)\,ds + 2\mathsf{M}\int_0^T [b_n(s,\omega) - b(s,\omega)]^2\,ds. \qquad (5.21)$$

Оценим сверху величину $\mathsf{M}\int\limits_0^T \tilde{b}_n^2(t,\omega)\,dt$. Из определения функции $\tilde{b}_n(t,\omega)$ и соотношения (5.20) получаем

$$\mathsf{M}\int_0^T \tilde{b}_n^2(t,\omega)\,dt = \sum_{j=0}^{n-1}\mathsf{M}\frac{\left(\mathsf{M}\left[\langle x,y\rangle_{t_{j+1}^{(n)}} - \langle x,y\rangle_{t_j^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right]\right)^2}{t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}}. \qquad (5.22)$$

Но при $0\leqslant s<t\leqslant T$ в соответствии с (5.4), неравенством Коши — Буняковского и (4.49)

$$\mathsf{M}\frac{(\mathsf{M}[\langle x,y\rangle_t - \langle x,y\rangle_s \mid \mathscr{F}_s])^2}{t-s} =$$

$$= \frac{1}{t-s}\mathsf{M}\left(\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)\int_s^t e^{-c|a(u,\omega)|}\operatorname{sign} a(u,\omega)\,dW_u \mid \mathscr{F}_s\right]\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t-s}\mathsf{M}\left(\mathsf{M}[(x_t - x_s)^2\mid \mathscr{F}_s]\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathsf{M}\left(\int_s^t e^{-2c|a(u,\omega)|}\,|\operatorname{sign} a(u,\omega)|\,du \mid \mathscr{F}_s\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}[x_t - x_s]^2 = \mathsf{M}x_t^2 - \mathsf{M}x_s^2 \leqslant \mathsf{M}x_t^2.$$

Из этого неравенства и (5.22) получаем

$$\mathsf{M}\int_0^T \tilde{b}_n^2(t,\omega)\,dt \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\mathsf{M}\left[x^2_{t_{j+1}^{(n)}} - x^2_{t_j^{(n)}}\right] = \mathsf{M}x_T^2 - \mathsf{M}x_0^2 \leqslant \mathsf{M}_T^2 < \infty,$$

что вместе с (5.21) дает следующую оценку:

$$\mathsf{M}\int_0^T b^2(t, \omega)\,dt \leqslant 2\mathsf{M}\int_0^T b_n^2(t, \omega)\,dt + 2\mathsf{M}\int_0^T [b_n(t, \omega) - b(t, \omega)]^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\mathsf{M}x_T^2 + 6\mathsf{M}\int_0^T [b_n(t, \omega) - b(t, \omega)]^2\,dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, находим, что для любого $c > 0$

$$\mathsf{M}\int_0^T e^{-2c|a(t, \omega)|}a^2(t, \omega)\,dt = \mathsf{M}\int_0^T b^2(t, \omega)\,dt \leqslant 4\mathsf{M}x_T^2,$$

а значит, по лемме Фату

$$\mathsf{M}\int_0^T a^2(t, \omega)\,dt \leqslant 4\mathsf{M}x_T^2 < \infty.$$

Теорема доказана.

§ 2. Представление квадратично интегрируемых мартингалов

1. Применим теорему 5.3 предшествующего параграфа для доказательства следующего важного результата о представлении квадратично интегрируемых мартингалов в виде суммы двух ортогональных мартингалов, один из которых есть стохастический интеграл по винеровскому процессу.

Теорема 5.4. *Пусть семейство $F = (\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, непрерывно справа, мартингал $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_T$ и $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс. Тогда существует такой F-согласованный процесс $(a(t, \omega), \mathscr{F}_t)$ с $\mathsf{M}\int_0^T a^2(s, \omega)\,ds < \infty$ и мартингал $Z = (z_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}_T$, что для всех $t \leqslant T$*

$$x_t = \int_0^t a(s, \omega)\,dW_s + z_t \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.23}$$

Мартингалы $Z = (z_t, \mathscr{F}_t)$ и $Y = (y_t, \mathscr{F}_t)$, где $y_t = \int_0^t a(s, \omega)\,dW_s$, ортогональны $(Z \perp Y)$, т. е.

$$\langle z, y\rangle_t = 0, \quad t \leqslant T. \tag{5.24}$$

Доказательство. По теореме 5.3 можно найти процесс $(a(t, \omega), \mathcal{F}_t)$ такой, что $\mathsf{M}\int_0^T a^2(t, \omega)\,dt < \infty$ и

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a(s, \omega)\,ds. \tag{5.25}$$

Положим $y_t = \int_0^t a(s, \omega)\,dW_s$ и $z_t = x_t - y_t$. Очевидно, что $Z = (z_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}_T$, и по лемме 5.1

$$\langle x, y\rangle_t = \int_0^t a(s, \omega)\,d\langle x, W\rangle_s = \int_0^t a^2(s, \omega)\,ds. \tag{5.26}$$

Поэтому

$$\langle z, y\rangle_t = \langle x - y, y\rangle_t = \langle x, y\rangle_t - \langle y\rangle_t = 0,$$

т. е. $Z \perp Y$.

Замечание 1. Если $\mathsf{M}x_t^2 = \mathsf{M}\int_0^t a^2(s, \omega)\,ds$, то $z_t = 0$ (P-п. н.), $t \leqslant T$, и

$$x_t = \int_0^t a(s, \omega)\,dW_s.$$

Действительно,

$$\mathsf{M}x_t^2 = \mathsf{M}(z_t + y_t)^2 = \mathsf{M}z_t^2 + \mathsf{M}y_t^2.$$

Но $\mathsf{M}x_t^2 = \mathsf{M}y_t^2 = \mathsf{M}\int_0^t a^2(s, \omega)\,ds$. Поэтому $\mathsf{M}z_t^2 = 0$, и, следовательно, $z_t = 0$ (P-п. н.), $t \leqslant T$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 5.4 $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$ — n-мерный винеровский процесс относительно $(\mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, то аналогичным образом доказывается, что существуют F-согласованные процессы $(a_i(s, \omega), \mathcal{F}_s)$ с $\mathsf{M}\int_0^T a_i^2(s, \omega)\,ds < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, и мартингал $Z = (z_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}_T$ такие, что

$$x_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t a_i(s, \omega)\,dW_i(s) + z_t.$$

При этом

$$\mathsf{M}\left(z_t \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s, \omega)\, dW_i(s)\right) = 0, \qquad t \leqslant T.$$

2. Всякий случайный процесс $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, вида

$$x_t = \int_0^t a(s, \omega)\, dW_s, \qquad \mathsf{M}\int_0^T a^2(s, \omega)\, ds < \infty$$

является квадратично интегрируемым мартингалом. Справедлив в определенном смысле и обратный результат.

Теорема 5.5. *Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t^W)$ — винеровский процесс, $t \leqslant T$, и $\mathscr{M}_T^W$ — класс квадратично интегрируемых мартингалов $X = (x_t, \mathscr{F}_t^W)$ с $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M} x_t^2 < \infty$ и траекториями, непрерывными справа. Тогда, если $X \in \mathscr{M}_T^W$, то найдется процесс $(f(s, \omega), \mathscr{F}_s^W)$, $s \leqslant T$, с $\mathsf{M}\int_0^T f^2(s, \omega)\, ds < \infty$ и такой, что для всех t*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s \qquad (\text{P-п. н.}). \tag{5.27}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (пополненная) система σ-алгебр $F^W = (\mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, непрерывна (теорема 4.3). По теореме 5.3

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t f(s, \omega)\, ds,$$

где $f(s, \omega)$ $\mathscr{F}_s^W$-измерима, $s \leqslant T$. Положим $\tilde{x}_t = x_t - x_0$. Ясно, что $\tilde{X} = (\tilde{x}_t, \mathscr{F}_t^W) \in \mathscr{M}_T^W$ и $\langle \tilde{x}, W\rangle_t = \int_0^t f(s, \omega)\, ds$. Тогда по теореме 5.4

$$\tilde{x}_t = \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s + z_t,$$

где $\mathsf{M} z_t \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s = 0$, $t \leqslant T$.

Покажем, что в рассматриваемом случае $z_t = 0$ (P-п. н.) для всех $t \leqslant T$. Поскольку при каждом t величины z_t $\mathscr{F}_t^W$-измеримы, то достаточно установить, что для любого $n=1, 2, \ldots$

$$\mathsf{M}z_t \prod_{j=1}^{n} F_j(W_{t_j}) = 0, \tag{5.28}$$

где $F_j(x)$ — ограниченные, измеримые по Борелю функции и $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t$.

Возьмем $n=1$, $F_1(x) = e^{i\lambda x}$, $-\infty < \lambda < \infty$ и докажем, что при всех $s \leqslant t$

$$\mathsf{M}z_t e^{i\lambda W_s} = 0. \tag{5.29}$$

Имеем

$$\mathsf{M}z_t e^{i\lambda W_s} = \mathsf{M}\left[M(z_t \mid \mathscr{F}_s^W)\, e^{i\lambda W_s}\right] = \mathsf{M}z_s e^{i\lambda W_s}.$$

По формуле Ито

$$e^{i\lambda W_s} = 1 + i\lambda \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, du. \tag{5.30}$$

Отсюда находим

$$\mathsf{M}z_s e^{i\lambda W_s} = \mathsf{M}z_s + i\lambda \mathsf{M}\left[z_s \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u\right] - \frac{\lambda^2}{2} \mathsf{M}\left[z_s \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, du\right].$$

Но $\mathsf{M}z_s = 0$,

$$\mathsf{M}\left[z_s \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, du\right] = \mathsf{M}\int_0^s z_s e^{i\lambda W_u}\, du = \mathsf{M}\left[\int_0^s M(z_s \mid \mathscr{F}_u^W)\, e^{i\lambda W_u}\, du\right]$$

и по лемме 5.1

$$\mathsf{M}\left[z_s \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u\right] = \mathsf{M}\left[\tilde{x}_s - \int_0^s f(u, \omega)\, dW_u\right]\left[\int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u\right] =$$

$$= \mathsf{M}\tilde{x}_s \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u - \mathsf{M}\int_0^s f(u, \omega)\, dW_u \int_0^s e^{i\lambda W_u}\, dW_u =$$

$$= \mathsf{M}\int_0^s f(u, \omega)\, e^{i\lambda W_u}\, du - \mathsf{M}\int_0^s f(u, \omega)\, e^{i\lambda W_u}\, du = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}z_s e^{i\lambda W_s} = -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^s \mathsf{M}\left(z_u e^{i\lambda W_u}\right) du,$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}z_t e^{i\lambda W_t} = \mathsf{M}z_s e^{i\lambda W_s} = 0.$$

В силу произвольности λ, $-\infty<\lambda<\infty$, отсюда выводится, что и для всякой измеримой (по Борелю) ограниченной функции $F_1(x)$ выполнено равенство (5.29).

Докажем теперь (5.28) по индукции. Пусть для любых ограниченных функций $F_1(x), \ldots, F_{n-1}(x)$

$$\mathsf{M} z_t \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) = 0.$$

Надо показать, что тогда и $\mathsf{M} z_t \prod_{j=1}^{n} F_j(W_{t_j}) = 0$. Положим сначала $F_n(W_{t_n}) = e^{i\lambda W_{t_n}}$, $-\infty<\lambda<\infty$. В силу (5.30)

$$e^{i\lambda W_{t_n}} = e^{i\lambda W_{t_{n-1}}} + i\lambda \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{i\lambda W_u}\, dW_u - \frac{\lambda^2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{i\lambda W_u}\, du.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left[z_t e^{i\lambda W_{t_n}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j})\right] &= \mathsf{M}\left[z_t e^{i\lambda W_{t_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j})\right] + \\ &+ i\lambda \mathsf{M}\left[z_t \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{i\lambda W_u}\, dW_u\right] - \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \mathsf{M}\left[z_t \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{i\lambda W_u}\, du\right]. \end{aligned} \tag{5.31}$$

По предположению индукции

$$\mathsf{M} z_t e^{i\lambda W_{t_{n-1}}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) = 0. \tag{5.32}$$

Ясно также, что

$$\mathsf{M}\left[z_t \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{i\lambda W_u}\, dW_u \,|\, \mathcal{F}^W_{t_{n-1}}\right] = 0. \tag{5.33}$$

Из (5.31) — (5.33) получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{M} z_t e^{i\lambda W_{t_n}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) &= \mathsf{M} z_{t_n} e^{i\lambda W_{t_n}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathsf{M} z_s e^{i\lambda W_s} \prod_{j=0}^{n-1} F_j(W_{t_j}) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathsf{M}z_t e^{i\lambda W_{t_n}} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(W_{t_j}) = 0$. В силу произвольности λ, $-\infty < \lambda < \infty$, отсюда вытекает требуемое равенство (5.28).

Теорема 5.5 доказана.

Замечание 1. Если $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$ — n-мерный винеровский процесс и $X = (x_t, \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, — квадратично интегрируемый мартингал с $\mathscr{F}_t^W = \sigma\{\omega: W_1(s), \ldots, W_n(s), s \leqslant t\}$, то

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(s, \omega)\, dW_i(s), \tag{5.34}$$

где величины $f_i(s, \omega)$ $\mathscr{F}_s^W$-измеримы, $i = 1, \ldots, n$, и

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \mathsf{M} f_i^2(s, \omega)\, ds < \infty. \tag{5.35}$$

Доказательство проводится так же, как и в одномерном ($n = 1$) случае.

Замечание 2. Из представления (5.27) следует, что всякий квадратично интегрируемый мартингал $X = (x_t, \mathscr{F}_t^W) \in \mathscr{M}_T^W$ имеет непрерывные (P-п. н.) траектории (точнее, имеет непрерывную модификацию).

§ 3. Структура функционалов от винеровского процесса

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство и $W = (W_t, \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, — винеровский процесс. Будем предполагать, что $\mathscr{F}_t^W$, $t \leqslant T$, пополнены множествами из $\mathscr{F}$, имеющими P-меру нуль.

Теорема 5.6. *Пусть $\xi = \xi(\omega)$ есть $\mathscr{F}_T^W$-измеримая случайная величина с $\mathsf{M}\xi^2 < \infty$. Тогда найдется F^W-согласованный процесс $(f(t, \omega), \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, с*

$$\mathsf{M} \int_0^T f^2(t, \omega)\, dt < \infty \tag{5.36}$$

такой, что P-п. н.

$$\xi = \mathsf{M}\xi + \int_0^T f(t, \omega)\, dW_t. \tag{5.37}$$

Если к тому же случайная величина ξ и процесс $W = (W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, образуют гауссовскую систему (§ 1 гл. 1), *т. е. совместное распределение ξ и W является гауссовским, то найдется* *детерминированная измеримая функция* $f=f(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *с* $\int_0^T f^2(t)\,dt<\infty$ *такая, что*

$$\xi=\mathsf{M}\xi+\int_0^T f(t)\,dW_t. \tag{5.38}$$

Доказательство. Пусть $x_t=\mathsf{M}(\xi\mid\mathcal{F}_t^W)$, где условные математические ожидания выбраны так, что процесс x_t, $0\leqslant t\leqslant T$, имеет непрерывные справа траектории (это можно сделать в силу теорему 3.1). Тогда мартингал $X=(x_t,\mathcal{F}_t^W)\in\mathcal{M}_T$ и по теореме 5.5 найдется функция $f(t,\omega)$ с указанными свойствами и такая, что

$$x_t=\mathsf{M}(\xi\mid\mathcal{F}_0^W)+\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s. \tag{5.39}$$

Отсюда следует требуемое представление (5.37), поскольку $\mathsf{M}(\xi\mid\mathcal{F}_0^W)=\mathsf{M}\xi$ (Р-п. н.), а $x_T=\xi$.

Предположим теперь, что совместное распределение ξ и W является гауссовским.

Положим

$$\Delta=\frac{T}{2^n},\quad \mathcal{F}_{T,n}^W=\sigma\{\omega:\ W_0,\ W_\Delta,\ \ldots,\ W_T\}=$$
$$=\sigma\{\omega:\ W_\Delta-W_0,\ W_{2\Delta}-W_\Delta,\ \ldots,\ W_T-W_{(T-\Delta)}\}.$$

Поскольку $\mathcal{F}_{T,n}^W\subseteq\mathcal{F}_{T,n+1}^W$ и $\mathcal{F}_T^W=\sigma\left(\bigcup_n\mathcal{F}_{T,n}^W\right)$, то по теореме Леви (теорема 1.5) $\xi_n=\mathsf{M}(\xi\mid\mathcal{F}_{T,n}^W)\to\xi$ при $n\to\infty$ с вероятностью 1. Последовательность случайных величин $\{(\xi_n-\xi)^2,\ n=1,2,\ldots\}$ равномерно интегрируема, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}|\xi_n-\xi|^2=0.$$

Значит, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\mathsf{M}|\xi_n-\xi_m|^2=0$. Но в силу следствия 3 теоремы о нормальной корреляции (теорема 13.1)

$$\xi_n=\mathsf{M}(\xi\mid\mathcal{F}_{T,n}^W)=\mathsf{M}\xi+$$
$$+\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{\mathsf{M}[(\xi-\mathsf{M}\xi)(W_{(k+1)\Delta}-W_{k\Delta})]}{\Delta}[W_{(k+1)\Delta}-W_{k\Delta}]=$$
$$=\mathsf{M}\xi+\int_0^T f_n(s)\,dW_s,$$

где

$$f_n(s) = \frac{1}{\Delta} \mathsf{M}\,[(\xi - \mathsf{M}\xi)(W_{(k+1)\Delta} - W_{k\Delta})], \qquad k\Delta \leqslant s < (k+1)\Delta,$$

и, очевидно, $\int\limits_0^T f_n^2(s)\,ds < \infty$.

Следовательно, по свойствам стохастических интегралов

$$\lim_{n,\,m\to\infty} \mathsf{M}\,|\xi_n - \xi_m|^2 = \lim_{n,\,m\to\infty} \int\limits_0^T [f_n(s) - f_m(s)]^2\,ds.$$

Отсюда следует, что существует такая функция $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, с $\int\limits_0^T f^2(s)\,ds < \infty$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T [f_n(s) - f(s)]^2\,ds = 0 \ \text{ и } \ \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_n = \mathsf{M}\xi + \int\limits_0^T f(s)\,dW_s.$$

С другой стороны, $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_n = \xi$. Поэтому

$$\xi = \mathsf{M}\xi + \int\limits_0^T f(s)\,dW_s.$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что при доказательстве утверждения (5.38) не использовался результат (5.37). По существу, утверждение (5.38) есть всего лишь следствие теоремы о нормальной корреляции. Если же известно, что $\xi = \mathsf{M}\xi + \int\limits_0^T f(s, \omega)\,dW_s$, то будет справедливо также и представление $\xi = \mathsf{M}\xi + \int\limits_0^T \mathsf{M}f(s, \omega)\,dW_s$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в этом случае введенные выше функции $f_n(s) = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \mathsf{M}f(s, \omega)\,ds$, и поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) = \mathsf{M}f(s, \omega)$ для почти всех s (см. доказательство леммы 4.4), то в качестве функции $f(s)$, участвующей в представлении (5.38), можно взять функцию $f(s) = \mathsf{M}f(s, \omega)$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение (5.38) становится, вообще говоря, неверным, если предполагать, что случайная величина ξ нормально распределена, но не требовать, чтобы совместное распределение (ξ, W) было гауссовским.

Действительно, случайный процесс

$$\xi_t = \int_0^t S(W_s)\,dW_s,$$

где

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

является винеровским. Значит, случайная величина $\xi = \xi_T$ является гауссовской, но ее нельзя представить в виде стохастического интеграла $\int_0^T f(s)\,dW_s$ с детерминированной функцией $f(s)$.

Замечание 3. Из представления (5.38) следует, что в качестве функции $f(t)$ можно взять функцию

$$f(t) = \frac{d}{dt}\,\mathsf{M}\,[(\xi - \mathsf{M}\xi)\,W_t].$$

Пример 1. Пусть $\xi = \int_0^T W_s\,ds$. Поскольку (ξ, W) является гауссовской системой, то ξ может быть представлено в виде $\int_0^T f(t)\,dW_t$. Простой подсчет показывает, что $f(t) = T - t$ и, следовательно,

$$\int_0^T W_t\,dt = \int_0^T (T - t)\,dW_t$$

(это соотношение легко получить также из формулы Ито).

Пример 2. Пусть $\xi = W_1^4$. Тогда

$$W_1^4 = 3 + \int_0^1 \left[12(1-t)\,W_t + 4W_t^3\right] dW_t.$$

Действительно, пусть $x_t = \mathsf{M}\left[W_1^4 \mid \mathscr{F}_t^W\right] = \mathsf{M}\left[W_1^4 \mid W_t\right]$. Поскольку распределение $\mathsf{P}(W_1 \leqslant x \mid W_t)$ является нормальным, $N(W_t,\ 1-t)$, то

$$\begin{aligned} x_t &= \mathsf{M}\,[W_1^4 \mid W_t] = \mathsf{M}\left[(W_1 - W_t + W_t)^4 \mid W_t\right] = \\ &= \mathsf{M}\,[(W_1 - W_t)^4 \mid W_t] + 4\mathsf{M}\,[(W_1 - W_t)^3\,W_t \mid W_t] + \\ &+ 6\mathsf{M}\left[(W_1 - W_t)^2\,W_t^2 \mid W_t^2\right] + 4\mathsf{M}\left[(W_1 - W_t)\,W_t^3 \mid W_t\right] + W_t^4 = \\ &= 3(1-t)^2 + 6(1-t)\,W_t^2 + W_t^4. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле Ито находим $dx_t = [12(1-t)W_t + 4W_t^3]\,dW_t$, что с учетом равенства $\mathsf{M}W_1^4 = 3$ приводит к требуемому представлению (5.37).

2. Согласно теореме 5.5 всякий квадратично интегрируемый мартингал $X = (x_t, \mathcal{F}_t^W) \in \mathcal{M}_T^W$ допускает представление (5.27), где функция $f(t, \omega)$ такова, что $\mathsf{M}\int_0^T f^2(t, \omega)\,dt < \infty$. Рассмотрим теперь вопрос о возможности аналогичного представления мартингалов $X = (x_t, \mathcal{F}_t^W)$, удовлетворяющих, вместо условия $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M}x_t^2 < \infty$, более слабому требованию $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M}|x_t| < \infty$.

Теорема 5.7. *Пусть* $X = (x_t, \mathcal{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, — *мартингал, имеющий непрерывные справа траектории и такой, что*

$$\sup_{t \leqslant T} \mathsf{M}|x_t| < \infty. \tag{5.40}$$

Тогда найдется $\boldsymbol{F}^W$*-согласованный процесс* $(f(t, \omega), \mathcal{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, *такой, что*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f^2(s, \omega)\,ds < \infty\right) = 1 \tag{5.41}$$

и для всех $t \leqslant T$

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, \omega)\,dW_s. \tag{5.42}$$

Представление (5.42) *единственно.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что на самом деле рассматриваемый мартингал $X = (x_t, \mathcal{F}_t^W)$ имеет непрерывные траектории.

Пусть $\{x_T'^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность $\mathcal{F}_T^W$-измеримых функций с $\mathsf{M}(x_T^{(n)})^2 < \infty$ таких, что

$$\mathsf{M}\,|x_T - x_T^{(n)}| < \frac{1}{n^2}.$$

Обозначим $x_t^{(n)}$ непрерывную справа модификацию $\mathsf{M}(x_T^{(n)} | \mathcal{F}_t^W)$, существующую по теореме 3.1. Тогда по теореме 5.5

$$x_t^{(n)} = x_0^{(n)} + \int_0^t f_n(s, \omega)\,dW_s, \tag{5.43}$$

где $\mathsf{M}\int\limits_0^T f_n^2(s, \omega)\,ds < \infty$. Из этого представления следует, что у мартингала $X^{(n)}=(x_t^{(n)}, \mathcal{F}_t^W)$, $t\leqslant T$, есть непрерывная модификация. Процесс $(x_t-x_t^{(n)}, \mathcal{F}_t^W)$ имеет непрерывные справа траектории, и по неравенству (3.6) для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x_t-x_t^{(n)}|>\varepsilon\right\}\leqslant\varepsilon^{-1}\mathsf{M}\,|x_T-x_T^{(n)}|\leqslant\varepsilon^{-1}n^2.$$

Поэтому по лемме Бореля — Кантелли

$$\lim_n \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x_t-x_t^{(n)}|=0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Отсюда следует, что P-п. н. функции x_t, $t\leqslant T$, непрерывны, как равномерные пределы непрерывных функций $x_t^{(n)}$, $t\leqslant T$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству представления (5.42).

Определим момент $\tau_n=\inf\{t\leqslant T\colon |x_t|\geqslant n\}$, полагая $\tau_n=T$, если $\sup\limits_{t\leqslant T}|x_t|<n$. Ясно, что $\{\tau_n\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t^W$ и процесс $X_n=(x_n(t), \mathcal{F}_t^W)$ с $x_n(t)=x_{t\wedge\tau_n}$ образует мартингал (см. 3.16)).

В силу непрерывности P-п. н. процесса x_t, $t\leqslant T$,

$$\sup_{t\leqslant T}|x_{t\wedge\tau_n}|\leqslant n.$$

Тогда, применяя к мартингалам $X_n=(x_n(t), \mathcal{F}_t^W)$ теорему 5.5 получаем, что для каждого $n=1, 2, \ldots$

$$x_n(t)=x_n(0)+\int\limits_0^t f_n(s, \omega)\,dW_s,$$

где $\mathsf{M}\int\limits_0^T f_n^2(s, \omega)\,ds<\infty$.

Заметим, что для $m\geqslant n$

$$x_m(t\wedge\tau_n)=x_n(t)$$

и

$$x_m(t\wedge\tau_n)=x_n(0)+\int\limits_0^{t\wedge\tau_n} f_m(s, \omega)\,dW_s=$$

$$=x_n(0)+\int\limits_0^t f_m(s, \omega)\,\chi_{\{\sup\limits_{u\leqslant s}|x_u|\leqslant n\}}(s)\,dW_s.$$

Отсюда по свойству (4.49) находим:

$$\int_0^T \mathsf{M}\left\{f_m(s,\ \omega)\,\chi_{\{\sup\limits_{u\leqslant s}|x_u|\leqslant n\}}(s)-f_n(s,\ \omega)\right\}^2 ds=0.$$

Следовательно, на множестве тех $(t,\ \omega)$, для которых $\sup\limits_{u\leqslant t}|x_u|\leqslant n$,

$$f_n(t,\ \omega)=f_{n+1}(t,\ \omega)=\ldots$$

Положим

$$f(t,\ \omega)=\begin{cases} f_1(t,\ \omega), & \text{если} \quad \sup\limits_{u\leqslant t}|x_u|\leqslant 1,\\ f_2(t,\ \omega), & \text{если} \quad 1<\sup\limits_{u\leqslant t}|x_u|\leqslant 2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Так построенная измеримая функция $f=f(t,\ \omega)$ при каждом t является $\mathcal{F}_t^W$-измеримой. Далее, для любого $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$\left\{\omega\colon \int_0^T f^2(s,\ \omega)\,ds=\infty\right\}\subseteq\left\{\omega\colon \int_0^T [f(s,\ \omega)-f_n(s,\ \omega)]^2\,ds>0\right\}\subseteq$$
$$\subseteq\{\omega\colon \sup_{s\leqslant T}|x_s|\geqslant n\}.$$

Но в силу непрерывности процесса x_t, $t\leqslant T$,

$$\mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant T}|x_s|\geqslant n\}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Поэтому $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T f^2(s,\ \omega)\,ds<\infty\right)=1$ и определен стохастический интеграл $\int\limits_0^t f(s,\ \omega)\,dW_s$, $t\leqslant T$.

Положим

$$\tilde{x}_t=x_0+\int_0^t f(s,\ \omega)\,dW_s.$$

В силу неравенства

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int_0^t [f(s,\ \omega)-f_n(s,\ \omega)]\,dW_s\right|>\varepsilon\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{P}\left\{\int_0^T [f(s,\ \omega)-f_n(s,\ \omega)]^2\,ds>\delta\right\}+\frac{\delta}{\varepsilon^2}$$

(см. замечание 7 в § 2 гл. 4)

$$\tilde{x}_t=\mathsf{P}\text{-}\lim_n x_n(t).$$

С другой стороны, P-п. н.

$$\lim_n x_n(t) = \lim_n x_{t \wedge \tau_n} = x_t, \qquad t \leqslant T.$$

Значит, P-п. н. для всех $t \leqslant T$ $x_t = \tilde{x}_t$ и

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s.$$

Осталось установить, что это представление единственно: если также $x_t = x_0 + \int_0^t f'(s, \omega)\, dW_s$ с неупреждающей функцией $f'(s, \omega)$, такой, что $\mathsf{P}\left(\int_0^T (f'(s, \omega))^2\, ds < \infty\right) = 1$, то $f(t, \omega) = f'(t, \omega)$ для почти всех (t, ω).

Пусть $\bar{f}(t, \omega) = f(t, \omega) - f'(t, \omega)$. Тогда для процесса $\bar{x}_t = \int_0^t \bar{f}(s, \omega)\, dW_s$ по формуле Ито

$$\bar{x}_t^2 = \int_0^t \bar{f}^2(s, \omega)\, ds + 2\int_0^t \bar{x}_s \bar{f}(s, \omega)\, dW_s.$$

Но $\bar{x}_t = 0$ (P-п. н.), $t \leqslant T$. Поэтому $\int_0^T \bar{f}^2(s, \omega)\, ds = 0$, откуда следует, что $f(s, \omega) = f'(s, \omega)$ для почти всех (s, ω).

Теорема доказана.

Замечание. Пусть $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$ — n-мерный винеровский процесс и $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{\omega\colon W_1(s), \ldots, W_n(s),\ s \leqslant t\}$. Если $X = (x_t, \mathcal{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, — мартингал и $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M}|x_t| < \infty$, то найдутся F^W-согласованные процессы $(f_i(t, \omega), \mathcal{F}_t^W)$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n \int_0^T f_i^2(s, \omega)\, ds < \infty\right) = 1$ и P-п. н. для каждого $t \leqslant T$

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(s, \omega)\, dW_i(s).$$

Доказательство этого представления основано на формуле (5.34) и проводится так же, как и в одномерном случае.

3. Из теоремы 5.7 легко выводится следующий полезный результат (ср. с теоремой 5.6).

Теорема 5.8. *Пусть* $\xi=\xi(\omega)$ — $\mathscr{F}_T^W$*-измеримая случайная величина с* $\mathsf{M}|\xi|<\infty$ *и* $\mathsf{M}(\xi|\mathscr{F}_t^W)$, $t\leqslant T$, — *непрерывная справа модификация условных математических ожиданий. Тогда найдется процесс* $(f(t, \omega), \mathscr{F}_t^W)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *такой, что* $\mathsf{P}\left(\int_0^T f^2(t, \omega)\,dt<\infty\right)=1$ *и при всех* t, $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\mathsf{M}(\xi|\mathscr{F}_t^W)=\mathsf{M}\xi+\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.44}$$

В частности,

$$\xi=\mathsf{M}\xi+\int_0^T f(s, \omega)\,dW_s. \tag{5.45}$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.7, если в ней положить $x_t=\mathsf{M}(\xi|\mathscr{F}_t^W)$ и учесть, что $x_0=\mathsf{M}\xi$.

4. Теорема 5.9. *Пусть* $\xi=\xi(\omega)$ — $\mathscr{F}_T^W$*-измеримая случайная величина с* $\mathsf{P}(\xi>0)=1$ *и* $\mathsf{M}\xi<\infty$. *Тогда найдется процесс* $(\varphi(t, \omega), \mathscr{F}_t^W)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *такой, что* $\mathsf{P}\left(\int_0^T \varphi^2(t, \omega)\,dt<\infty\right)=1$ *и для всех* $t\leqslant T$ P-п. н.

$$\mathsf{M}(\xi|\mathscr{F}_t^W)=\exp\left[\int_0^t \varphi(s, \omega)\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(s, \omega)\,ds\right]\mathsf{M}\xi. \tag{5.46}$$

В частности,

$$\xi=\exp\left[\int_0^T \varphi(s, \omega)\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^T \varphi^2(s, \omega)\,ds\right]\mathsf{M}\xi. \tag{5.47}$$

Доказательство. Пусть $x_t=\mathsf{M}(\xi|\mathscr{F}_t^W)$, $t\leqslant T$, — непрерывная справа модификация условных математических ожиданий. Тогда по теореме 5.8

$$x_t=\mathsf{M}\xi+\int_0^t f(s, \omega)\,dW_s. \tag{5.48}$$

Покажем, что

$$\mathsf{P}(\inf_{t\leqslant T} x_t>0)=1, \tag{5.49}$$

Действительно, мартингал $X=(x_t, \mathcal{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, является равномерно интегрируемым. Поэтому, если $\tau=\tau(\omega)$ — марковский момент с $\mathsf{P}(\tau \leqslant T)=1$, то по теореме 3.6

$$x_\tau = \mathsf{M}(\xi \mid \mathcal{F}_\tau^W). \tag{5.50}$$

Положим $\tau=\inf\{t \leqslant T\colon x_t=0\}$, считая $\tau=\infty$, если $\inf\limits_{t \leqslant T} x_t > 0$. На множестве $\{\tau \leqslant T\}=\{\inf\limits_{t \leqslant T} x_t=0\}$ величина $x_\tau=0$, поскольку согласно (5.48) процесс x_t, $t \leqslant T$, непрерывен P-п. н. Поэтому в силу (5.50)

$$0 = \int\limits_{\{\tau \leqslant T\}} x_\tau \, d\mathsf{P}(\omega) = \int\limits_{\{\tau \leqslant T\}} \xi \, d\mathsf{P}(\omega).$$

Но $\mathsf{P}(\xi>0)=1$. Поэтому $\mathsf{P}(\tau \leqslant T) = \mathsf{P}(\inf\limits_{t \leqslant T} x_t=0)=0$.

Введем функцию

$$\varphi(t, \omega) = \frac{f(t, \omega)}{x_t} \left(= \frac{f(t, \omega)}{\mathsf{M}\xi + \int\limits_0^t f(s, \omega)\, dW_s} \right), \tag{5.51}$$

для которой в силу условия $\mathsf{P}(\inf\limits_{t \leqslant T} x_t > 0)=1$

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \varphi^2(t, \omega)\, dt < \infty \right) = 1.$$

Далее, согласно (5.48) и (5.51)

$$dx_t = f(t, \omega)\, dW_t = \varphi(t, \omega)\, x_t \, dW_t.$$

Единственное непрерывное (сильное) решение уравнения

$$dx_t = \varphi(t, \omega)\, x_t \, dW_t, \qquad x_0 = \mathsf{M}\xi, \tag{5.52}$$

существует и задается формулой

$$x_t = \exp\left[\int\limits_0^t \varphi(s, \omega)\, dW_s - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \varphi^2(s, \omega)\, ds \right] \mathsf{M}\xi. \tag{5.53}$$

Действительно, то, что (5.53) дает решение уравнения (5.52), следует из формулы Ито и показывалось в примере 3 § 3 гл. 4. Пусть y_t, $t \leqslant T$, — еще одно решение этого уравнения. Тогда нетрудно проверить, опять-таки используя формулу Ито, что $d(y_t/x_t)=0$. Отсюда находим $\mathsf{P}\{\sup\limits_{t \leqslant T} |x_t - y_t| > 0\}=0$.

§ 4. Стохастические интегралы по квадратично интегрируемым мартингалам

1. В четвертой главе был определен стохастический интеграл $I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s$ по винеровскому процессу $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, для неупреждающих функций $f = f(t, \omega)$, удовлетворяющих условию $\mathsf{M} \int_0^\infty f^2(t, \omega)\, dt < \infty$. Среди нетривиальных свойств этого интеграла наиболее важными являются следующие два свойства:

$$\mathsf{M} \int_0^t f(s, \omega)\, dW_s = 0, \tag{5.54}$$

$$\mathsf{M} \left[\int_0^t f(s, \omega)\, dW_s \right]^2 = \mathsf{M} \int_0^t f^2(s, \omega)\, ds. \tag{5.55}$$

Винеровский процесс является квадратично интегрируемым мартингалом, $\mathsf{M}(W_t - W_s \mid \mathscr{F}_s) = 0$, $t \geqslant s$, обладающим тем свойством, что для него

$$\mathsf{M}[(W_t - W_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = t - s. \tag{5.56}$$

Сопоставление (5.56) с (5.2) показывает, что для винеровского процесса натуральный возрастающий процесс $A_t \equiv \langle W \rangle_t = t$.

Анализ конструкции интеграла $I_t(f)$ приводит к мысли, что можно определить аналогичный интеграл $\int_0^t f(s, \omega)\, dx_s$ по квадратично интегрируемым мартингалам $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}$. В самом деле, для них выполнено равенство

$$\mathsf{M}[(x_t - x_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = \mathsf{M}[\langle x \rangle_t - \langle x \rangle_s \mid \mathscr{F}_s], \tag{5.57}$$

аналогичное равенству (5.56), играющему ключевую роль при определении стохастических интегралов $I_t(f)$ по винеровскому процессу.

Обозначим $A_t = \langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$. Можно было бы ожидать, что тот естественный класс функций $f = f(t, \omega)$, для которых определяются стохастические интегралы $\int_0^t f(s, \omega)\, dx_s$, $t \geqslant 0$, есть класс неупреждающих функций, удовлетворяющих условию

$$\mathsf{M} \int_0^\infty f^2(t, \omega)\, dA_t < \infty. \tag{5.58}$$

Что касается условия (5.58), то его выполнения приходится требовать, если желать, чтобы стохастический интеграл обладал аналогами свойств (5.54) и (5.55).

Однако при рассмотрении произвольных мартингалов $X = (x_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}$ возникает дополнительная тонкость, состоящая в том, что запас функций, для которых удается определить стохастический интеграл $\int_0^t f(s, \omega)\, dx_s$, существенно зависит от свойств натуральных процессов $A_t = \langle x \rangle_t$, отвечающих мартингалу $X = (x_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}$.

Введем следующие три класса функций: Φ_1, Φ_2, Φ_3 $(\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \Phi_3)$, для которых в зависимости от свойств натуральных процессов A_t, $t \geqslant 0$, будут определяться стохастические интегралы.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство и $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывное справа неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$, пополненных множествами из $\mathcal{F}$ нулевой вероятности.

Определение 1. Измеримая функция $f = f(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, *принадлежит классу* Φ_1, если она является неупреждающей, т. е.

$$f(t, \omega) \qquad \mathcal{F}_t\text{-измерима} \tag{5.59}$$

для каждого $t \geqslant 0$.

Определение 2. Измеримая функция $f = f(t, \omega)$ *принадлежит классу* Φ_2, если она является сильно неупреждающей, т. е.

$$f(\tau, \omega) \qquad \mathcal{F}_\tau\text{-измерима} \tag{5.60}$$

для каждого ограниченного марковского момента τ (относительно $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$).

Определение 3. Измеримая функция $f = f(t, \omega)$ *принадлежит классу* Φ_3, если она является неупреждающей и измеримой относительно наименьшей σ-алгебры на $R^+ \times \Omega$, порожденной неупреждающими процессами, имеющими непрерывные слева траектории.

Замечание 1. Всякая функция $f \in \Phi_3$ является сильно неупреждающей (следствие леммы 1.8).

Замечание 2. Непрерывные слева функции $f = f(t, \omega)$ являются предсказуемыми в том смысле, что $f(t, \omega) = \lim\limits_{s \uparrow t} f(s, \omega)$ для каждого $t \geqslant 0$. Поэтому функции класса Φ_3 называют *неупреждающими и предсказуемыми*.

Через $L_A^2(\Phi_i)$ будем обозначать функции из класса Φ_i, удовлетворяющие условию

$$\mathsf{M} \int_0^\infty f^2(s, \omega)\, dA_s < \infty.$$

Определение 4. Функция $f \in L_A^2(\Phi_1)$ называется *простой*, если существует такое конечное разбиение $0 = t_0 < \ldots < t_n < \infty$, что

$$f(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega)\, \chi_{(t_k,\, t_{k+1}]}(t). \tag{5.61}$$

Определение 5. Функция $f \in L_A^2(\Phi_2)$ называется *простой стохастической*, если существует последовательность $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ марковских моментов таких, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \ldots < \tau_n < \infty$ (P-п. н.) и

$$f(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k, \omega)\, \chi_{(\tau_k,\, \tau_{k+1}]}(t). \tag{5.62}$$

Классы простых и простых стохастических функций будем обозначать соответственно $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_s$.

2. Пусть $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}$, $x_0 = 0$ (для простоты) и $A_t = \langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$. Определим стохастический интеграл $I(f)$ $\left(\text{обозначаемый также } \int_0^\infty f(s, \omega)\, dx_s\right)$ от простой стохастической функции $f = f(t, \omega)$, положив

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k, \omega)\left[x_{\tau_{k+1}} - x_{\tau_k}\right]. \tag{5.63}$$

В частности, если $f = f(t, \omega)$ — простая функция, определенная в (5.61), то по определению

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega)\left[x_{t_{k+1}} - x_{t_k}\right]. \tag{5.64}$$

Если $f \in \mathscr{E}_s$, то под стохастическим интегралом $I_\tau(f) = \int_0^\tau f(s, \omega)\, dx_s$ будет пониматься интеграл $I(g)$ от функции

$$g(s, \omega) = f(s, \omega)\, \chi_{\{s \leqslant \tau\}}(s). \tag{5.65}$$

Аналогично, под интегралом $I_{\sigma,\tau}(f) = \int_\sigma^\tau f(s, \omega)\, dx_s$, где $\mathsf{P}(\sigma \leqslant \tau) = 1$, понимается интеграл от функции

$$g(s, \omega) = f(s, \omega)\, \chi_{\{\sigma < s \leqslant \tau\}}(s).$$

Так определенные стохастические интегралы обладают следующими свойствами (f, f_1 и f_2 — простые стохастические функции).

$$I_t(af_1+bf_2)=aI_t(f_1)+bI_t(f_2) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}); \quad a,\ b=\mathrm{const},\ t\geqslant 0. \tag{5.66}$$

$$\int_0^t f(s,\omega)\,dx_s=\int_0^u f(s,\omega)\,dx_s+\int_u^t f(s,\omega)\,dx_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н}). \tag{5.67}$$

$I_t(f)$ — *функция, непрерывная справа по* $t\geqslant 0$ (P-п. н.). (5.68)

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f(u,\omega)\,dx_u \,\Big|\, \mathscr{F}_s\right]=\int_0^s f(u,\omega)\,dx_u \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.69}$$

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f_1(u,\omega)\,dx_u \int_0^t f_2(u,\omega)\,dx_u\right]=\mathsf{M}\int_0^t f_1(u,\omega)f_2(u,\omega)\,dA_u. \tag{5.70}$$

В частности, из свойств (5.60) и (5.70) вытекает, что

$$\mathsf{M}\int_0^t f(u,\omega)\,dx_u=0, \tag{5.71}$$

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f(u,\omega)\,dx_u\right]^2=\mathsf{M}\int_0^t f^2(u,\omega)\,dA_u. \tag{5.72}$$

Как и в случае винеровского процесса, стохастический интеграл $\int_0^\infty f(s,\omega)\,dx_s$ для измеримой функции $f=f(s,\omega)$, удовлетворяющей условию $\mathsf{M}\int_0^\infty f^2(s,\omega)\,dA_s<\infty$, будет строиться как предел интегралов $\int_0^\infty f_n(s,\omega)\,dx_s$ от простых функций, аппроксимирующих (в определенном смысле) $f(s,\omega)$.

В приводимых ниже леммах описываются классы функций, допускающих аппроксимацию простыми функциями в зависимости от свойств процессов A_t, $t\geqslant 0$.

3. Лемма 5.3. *Пусть* $X=(x_t,\mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}$ *и* $A_t=\langle x\rangle_t$, $t\geqslant 0$, — *натуральный возрастающий процесс, отвечающий мартингалу* X. *Тогда пространство* $\mathscr{E}$ *простых функций плотно в* $L_A^2(\Phi_3)$.

Замечание 1. В общем случае, если на мартингал $X\in\mathscr{M}$ не накладывать дополнительных ограничений, то в замыкание $\overline{\mathscr{E}}$ (в $L_A^2(\Phi_3)$) могут не входить неупреждающие функции, имеющие траектории, непрерывные справа.

Замечание 2. Если $\tilde{A}=(\tilde{A}_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — модификация процесса $A=(A_t, \mathcal{F}_t)$, то нетрудно показать, что $L^2_{\tilde{A}}(\Phi_3)=L^2_A(\Phi_3)$.

Лемма 5.4. *Пусть $X=(x_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}$, причем соответствующий натуральный процесс $A_t=\langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$, является непрерывным с вероятностью* 1. *Тогда пространство $\mathcal{E}$ простых функций плотно в $L^2_A(\Phi_2)$.*

Замечание 3. Если мартингал $X=(x_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}$ квазинепрерывен слева (т. е. с вероятностью 1 $x_{\tau_n} \to x_\tau$, если последовательность марковских моментов $\tau_n \uparrow \tau$, $\mathsf{P}(\tau<\infty)=1$), то процесс $A_t=\langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$, является непрерывным P-п. н. (теорема 3.11 и ее следствие).

Лемма 5.5. *Пусть мартингал $X=(x_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}$, причем отвечающий ему натуральный процесс $A_t=\langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$, является абсолютно непрерывным с вероятностью* 1. *Тогда пространство $\mathcal{E}$ простых функций плотно в $L^2_A(\Phi_1)$.*

Перейдем к доказательствам этих лемм.

Доказательство леммы 5.3. Заметим вначале, что σ-алгебра Σ на $R_+ \times \Omega$, порожденная неупреждающими процессами, имеющими непрерывные слева траектории, совпадает с σ-алгеброй, порожденной множествами вида $(a, b] \times B$, где $B \in \mathcal{F}_a$. Действительно, если функция $f=f(t, \omega)$ является неупреждающей, имеет непрерывные слева траектории и ограничена, то она является пределом последовательности функций

$$f_n(t, \omega)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(t_k^{(n)}, \omega\right) \chi_{\left(t_k^{(n)},\, t_{k+1}^{(n)}\right]}(t),$$

где $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_{k_n}^{(n)}=T$ и $\max\limits_{0 \leqslant k<k_n-1}\left|t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)}\right| \to 0$, $n \to \infty$.

Из этого вытекает, что лемму достаточно доказать для функции $\chi=\chi_M(t, \omega)$, являющейся характеристической функцией множества $M \in \Sigma$ такого, что $M \subseteq [a, b] \times \Omega$.

Обозначим $\nu=\nu(\cdot)$ меру на $(R_+ \times \Omega, \Sigma)$, определенную на множествах вида $S \times B$ равенством

$$\nu(S \times B)=\mathsf{M}\left[\int_S dA_t;\ B\right]=\int_B\left[\int_S dA_t(\omega)\right]\mathsf{P}(d\omega).$$

Согласно определению σ-алгебры Σ для рассматриваемого множества $M \in \Sigma$ найдется такая последовательность множеств $\{M_n, n=1, 2, \ldots\}$ вида $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}(t_i, t_{i+1}] \times B_i$, где $a=t_0<t_1<\ldots$

$\ldots < t_n = b$, множества B_i $\mathcal{F}_{t_i}$-измеримы, что $M \supseteq M_n$ и $\nu(M \setminus M_n) \leqslant \frac{1}{n}$, т. е.

$$\int |\chi_M(t, \omega) - \chi_{M_n}(t, \omega)|^2 \, d\nu(t, \omega) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Другими словами,

$$\mathsf{M} \int_0^\infty |\chi_M(t, \omega) - \chi_{M_n}(t, \omega)|^2 \, dA_t \leqslant \frac{1}{n},$$

что и доказывает лемму.

В доказательстве леммы 5.4 будут использованы лемма 5.5 и лемма 5.6 (см. ниже). Приведем сначала

Доказательство леммы 5.5. В случае $A_t \equiv t$ утверждение леммы установлено в гл. 4 (лемма 4.4), где было показано, что существуют такие разбиения $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots$ $\ldots < t_n^{(n)} < \infty$, что для $f \in \mathfrak{M}_\infty$

$$\mathsf{M} \int_0^\infty |f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 \, dt \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{5.73}$$

$$f_n(t, \omega) = \sum_{k=0}^\infty f\left(t_k^{(n)}, \omega\right) \chi_{\left(t_k^{(n)} < t \leqslant t_{k+1}^{(n)}\right)}(t). \tag{5.74}$$

Значит, для некоторой подпоследовательности $n_i \uparrow \infty$, $i \to \infty$,

$$|f(t, \omega) - f_{n_i}(t, \omega)|^2 \to 0, \qquad i \to \infty, \tag{5.75}$$

для почти всех (t, ω) (по мере $dt\,d\mathsf{P}$). Поэтому $|f(t, \omega) - f_{n_i}(t, \omega)|^2 a(t, \omega) \to 0$, $i \to \infty$, также для почти всех (t, ω). Без ограничения общности можно считать функцию f финитной и $|f(t, \omega)| \leqslant K$. Тогда $|f(t, \omega) - f_n(t, \omega)|^2 a(t, \omega) \leqslant 4K^2 a(t, \omega)$, где $\mathsf{M} \int_0^\infty a(t, \omega)\, dt = \mathsf{M} A_\infty < \infty$. Следовательно,

$$\lim_{i \to \infty} \mathsf{M} \int_0^\infty |f(t, \omega) - f_{n_i}(t, \omega)|^2 \, dA_t =$$

$$= \lim_{i \to \infty} \mathsf{M} \int_0^\infty |f(t, \omega) - f_{n_i}(t, \omega)|^2 a(t, \omega)\, dt = 0, \tag{5.76}$$

что и доказывает лемму для ограниченных функций $f = f(t, \omega)$, обращающихся в нуль вне некоторого конечного интервала.

Общий случай сводится к рассмотренному (ср. с доказательством леммы 4.4).

Лемма 5.5 доказана.

Лемма 5.6. *Пусть* $0 \leqslant a < b < \infty$ *и* $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [a, b]$, — *непрерывная неубывающая функция. Для каждого* $u \in R$ *положим*

$$\beta(u) = \inf\{a \leqslant t \leqslant b\colon \alpha(t) > u\}, \quad \text{\textit{если}} \quad \alpha(b) > u,$$

и

$$\beta(u) = b, \quad \text{\textit{если}} \quad \alpha(\beta) \leqslant u.$$

Тогда функция $\beta = \beta(u)$, $u \in R$, *обладает следующими свойствами*:

(1) *не убывает и непрерывна справа*;

(2) *если* $\alpha(a) \leqslant u \leqslant \alpha(b)$, *то* $\alpha(\beta(u)) = u$;

(3) *если* $a < t \leqslant b$, *то* $\beta(u) < t \Leftrightarrow u < \alpha(t)$;

(4) *если* $\varphi = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — *измеримая (по Борелю) ограниченная функция, то*

$$\int \chi_{(a,b]}(t)\, \varphi(t)\, d\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi(\beta(u))\, du. \tag{5.77}$$

Доказательство свойств (1) — (3) элементарно. Справедливость свойства (4) отмечалась еще в § 1 гл. 1.

Доказательство леммы 5.4. Пусть функция $f(t, \omega) \in L_A^2(\Phi_2)$ ограничена, обращается в нуль вне некоторого конечного интервала $[a, b]$, а процесс $A_t = A_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, **P**-п. н. непрерывен.

Положим

$$\beta_\omega(u) = \inf\{a \leqslant t \leqslant b\colon A_t(\omega) > u\}, \quad \text{если} \quad A_b(\omega) > u,$$

и

$$\beta_\omega(u) = b, \quad \text{если} \quad A_b(\omega) \leqslant u.$$

Для каждого $u \in [0, \infty)$ случайная величина $\beta_\omega(u)$ является марковским моментом со значениями в $[a, b]$. Действительно, согласно свойству (3) леммы 5.6

$$\{\omega\colon \beta_\omega(u) < t\} = \{\omega\colon u < A_t\}$$

для любого $a \leqslant t \leqslant b$. Поэтому марковость момента $\beta_\omega(u)$ вытекает из леммы 1.2.

Положим $\tilde{\mathscr{F}}_u = \mathscr{F}_{\beta_\omega(u)}$ и $\tilde{f}(u, \omega) = f(\beta_\omega(u), \omega)$. Поскольку процесс $\beta_\omega(u)$, $u \geqslant 0$, имеет **P**-п. н. непрерывные слева траектории, то он измерим (даже прогрессивно измерим). Поэтому из измеримости процесса $f = f(u, \omega)$ вытекает, что процесс $\tilde{f} = \tilde{f}(u, \omega)$ также будет измеримым.

Согласно сделанному в условии леммы предположению функция $f = f(t, \omega)$ является сильно неупреждающей, а значит, при каждом $u \geqslant 0$ случайные величины $\tilde{f}(u, \omega) = f(\beta_\omega(u), \omega)$ являются $\tilde{\mathscr{F}}_u = \mathscr{F}_{\beta_\omega(u)}$-измеримыми. В силу определения функции $\beta_\omega(u)$

$$u > A_b(\omega) \Rightarrow \beta_\omega(u) = b, \qquad u < A_a(\omega) \Rightarrow \beta_\omega(u) = a.$$

Поэтому, если $c = \sup\limits_{t,\,\omega} |f(t, \omega)|$ и $f(t, \omega) = 0$ для $t \notin [a, b]$, то

$$\mathsf{M} \int_0^\infty |\tilde{f}(u, \omega)|^2 du = \mathsf{M} \int_{A_a}^{A_b} |\tilde{f}(u, \omega)|^2 du \leqslant c^2 \mathsf{M}[A_b - A_a] < \infty.$$

Следовательно, к функции $\tilde{f} = \tilde{f}(u, \omega)$, $u \geqslant 0$, применима лемма 5.5, согласно которой для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечное разбиение $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n < \infty$, что

$$\mathsf{M} \int_0^\infty |\tilde{f}(u, \omega) - \tilde{f}_n(u, \omega)|^2 du < \varepsilon,$$

где

$$\tilde{f}_n(u, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(u_k, \omega) \chi_{(u_k, u_{k+1}]}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_\omega(u_k), \omega) \chi_{(u_k, u_{k+1}]}(u).$$

Покажем, что функция

$$\varphi_n(t, \omega) = \chi_{(a, b]}(t) \tilde{f}_n(A_t, \omega) \tag{5.78}$$

является ε-аппроксимацией рассматриваемой функции $f \in L_A^2(\Phi_2)$, т. е.

$$\mathsf{M} \int_0^\infty |f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega)|^2 dA_t \leqslant \varepsilon.$$

Для этого заметим, что согласно свойству (3) леммы 5.6 для всякого t, $a < t \leqslant b$, и $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\{\omega\colon u_k < A_t \leqslant u_{k+1}\} = \{\omega\colon \beta_\omega(u_k) < t \leqslant \beta_\omega(u_{k+1})\}.$$

Поэтому, учитывая, что $\beta_\omega(u_k) \in [a, b]$ для всех $\omega \in \Omega$ и всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$, заключаем, что функция $\varphi_n = \varphi_n(t, \omega)$, определенная в (5.78), может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t, \omega) &= \chi_{(a, b]}(t) \tilde{f}_n(A_t, \omega) = \\
&= \chi_{(a, b]}(t) \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_\omega(u_k), \omega) \chi_{(u_k, u_{k+1}]}(A_t)\right] = \\
&= \chi_{(a, b]}(t) \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_\omega(u_k), \omega) \chi_{\{\beta_\omega(u_k) < t \leqslant \beta_\omega(u_{k+1})\}}(t) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_\omega(u_k), \omega) \chi_{\{\beta_\omega(u_k) < t \leqslant \beta_\omega(u_{k+1})\}}(t).
\end{aligned} \tag{5.79}$$

По предположению процесс $A_t = A_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, непрерывен **P**-п. н. Поэтому из свойства (2) леммы 5.6 следует, что если $A_a(\omega) \leqslant u \leqslant A_b(\omega)$, то

$$A_{\beta_\omega(u)} = u \tag{5.80}$$

и $\beta_\omega(u) \in (a, b]$. Следовательно, если $A_a(\omega) \leqslant u \leqslant A(\omega)$, то

$$\varphi_n(\beta_\omega(u), \omega) = \chi_{(a, b]}(\beta_\omega(u)) \tilde{f}_n\left(A_{\beta_\omega(u)}, \omega\right) = \tilde{f}_n(u, \omega).$$

Тогда согласно пункту (4) леммы 5.6

$$\mathbf{M} \int_0^\infty | f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega) |^2 \, dA_t =$$

$$= \mathbf{M} \int_{A_a}^{A_b} | f(\beta_\omega(u), \omega) - \varphi_n(\beta_\omega(u), \omega) |^2 \, du =$$

$$= \mathbf{M} \int_{A_a}^{A_b} | f(\beta_\omega(u), \omega) - \tilde{f}_n(u, \omega) |^2 \, du \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M} \int_0^\infty | f(\beta_\omega(u), \omega) - \tilde{f}_n(u, \omega) |^2 \, du =$$

$$= \mathbf{M} \int_0^\infty | \tilde{f}(u, \omega) - \tilde{f}_n(u, \omega) |^2 \, du < \varepsilon.$$

Итак, простая стохастическая функция

$$\varphi_n(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k, \omega) \chi_{(\tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}]}(t),$$

где $\tau_k = \beta_\omega(u_k)$, является ε-аппроксимацией функции $f(t, \omega)$ в $L_A^2(\Phi_2)$. Поэтому, если установить, что простая стохастическая функция

$$\chi(t, \omega) = \chi_{(0 < t \leqslant \tau]}(t) \in L_A^2(\Phi_2)$$

($\mathbf{P}(\tau \leqslant K < \infty) = 1$), может быть сколь угодно точно аппроксимирована простыми функциями, то лемма 5.4 будет доказана.

Пусть $\chi_n(t, \omega)$ — простая функция, определенная следующим образом: для $k/2^n < t \leqslant (k+1)/2^n$

$$\chi_n(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \tau(\omega) \geqslant k/2^n, \\ 0, & \text{если} \quad \tau(\omega) < k/2^n. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathsf{M}\int_0^\infty [\chi(t,\omega)-\chi_n(t,\omega)]^2\,dA_t \leqslant \mathsf{M}\left[A_{\tau+2^{-n}}-A_\tau\right]\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Этим лемма 5.4 доказана для ограниченных функций $f(t,\omega)\in L_A^2(\Phi_2)$, обращающихся в нуль вне некоторого конечного интервала. Общий случай функций $f(t,\omega)\in L_A^2(\Phi_2)$ легко сводится к рассмотренному.

4. Леммы 5.3—5.5 позволяют определить стохастические интегралы $I(f)=\int_0^\infty f(t,\omega)\,dx_t$ по мартингалу $X=(x_t,\mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}$ для некоторых классов функций $f=f(t,\omega)$, удовлетворяющих условию $\mathsf{M}\int_0^\infty f^2(t,\omega)\,dA_t<\infty$, как пределы в среднем квадратическом интегралов $I(f_n)=\int_0^\infty f_n(t,\omega)\,dx_t$ от простых функций $f_n=f_n(t,\omega)$, аппроксимирующих $f=f(t,\omega)$ в том смысле, что

$$\mathsf{M}\int_0^\infty |f(t,\omega)-f_n(t,\omega)|^2\,dA_t\to 0,\qquad n\to\infty$$

(ср. с соответствующей конструкцией для винеровского процесса; § 2 гл. 4).

Точный результат формулируется следуюшим образом.

Теорема 5.10. *Пусть $X=(x_t,\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — квадратично интегрируемый мартингал из $\mathscr{M}$ и $A_t=\langle x\rangle_t$, $t\geqslant 0$, — соответствующий ему натуральный возрастающий процесс.*

Пусть выполнено одно из трех условий:

I. *Функция* $f\in L_A^2(\Phi_3)$.

II. *Функция* $f\in L_A^2(\Phi_2)$, *и процесс* A_t, $t\geqslant 0$, P-п. н. *непрерывен.*

III. *Функция* $f\in L_A^2(\Phi_1)$, *и процесс* A_t, $t\geqslant 0$, *абсолютно непрерывен* (P-п. н.).

Тогда однозначно определена (с точностью до стохастической эквивалентности) случайная величина $I(f)$, совпадающая в случае простых функций f с введенным выше стохастическим интегралом и такая, что

$$\mathsf{M}I(f)=0,\tag{5.81}$$

$$\mathsf{M}[I(f)]^2=\mathsf{M}\int_0^\infty f^2(t,\omega)\,dA_t.\tag{5.82}$$

Значение случайной величины $I(f)$ не зависит (**P**-п. н.) *от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций.*

Случайная величина $I(f)$ обозначается также $\int\limits_0^\infty f(t, \omega)\,dx_t$ и называется *стохастическим интегралом от функции* $f = f(t, \omega)$ *по мартингалу* $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}$.

Доказательство. Существование $I(f)$ вытекает непосредственно из лемм 5.3—5.5. Свойства (5.81) и (5.82) следуют из соответствующих свойств для интегралов от простых функций $f_n = f_n(t, \omega)$ и того факта, что $I(f) = \text{l.i.m.}\, I(f_n)$.

5. Под интегралом

$$I_\tau(f) = \int\limits_0^\tau f(s, \omega)\,dx_s$$

будет пониматься интеграл

$$\int\limits_0^\infty f(s, \omega)\,\chi_{(s \leqslant \tau)}(s)\,dx_s.$$

Теорема 5.11. *Если мартингал* $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}^c$ (*имеет непрерывные траектории* **P**-п. н.), *а* $f \in L_A^2(\Phi_2)$, *то у интегралов* $I_t(f) = \int\limits_0^t f(s, \omega)\,dx_s$ *существует непрерывная модификация.*

Доказательство. Если функция $f \in L_A^2(\Phi_2)$ простая, то непрерывность $I_t(f)$ очевидна. В общем случае доказательство проводится так же, как и для винеровского процесса (см. § 2 гл. 4).

6. Если $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}$, а $f \in L_A^2(\Phi_3)$, то процесс $(I_t(f), \mathscr{F}_t)$ будет квадратично интегрируемым мартингалом. Согласно теореме 3.1 $I_t(f)$ имеет непрерывную справа модификацию.

7. В случае, когда натуральный процесс $A_t = \langle x \rangle_t$, $t \geqslant 0$, отвечающий мартингалу $X = (x_t, \mathscr{F}_t) \in \mathscr{M}$, является непрерывным, можно однозначно определить стохастический интеграл $I(f) = \int\limits_0^\infty f(t, \omega)\,dx_t$ для функций $f \in \Phi_2$, удовлетворяющих лишь предположению

$$\mathbf{P}\left(\int\limits_0^\infty f^2(t, \omega)\,dA_t < \infty\right) = 1.$$

8. Используем теорему 5.10 для доказательства следующего результата, обобщающего теорему (Леви) 4.1.

Теорема 5.12 (Дуб). *Пусть мартингал* $X=(x_t, \mathscr{F}_t)\in\mathscr{M}_T^c$ (*имеет непрерывные траектории*) *и*

$$A_t\equiv\langle x\rangle_t=\int_0^t a^2(s, \omega)\,ds,$$

где неупреждающая функция $a^2(s,\omega)>0$ *почти всюду относительно меры* $dt\,d\mathsf{P}$ *на* $([0, T)\times\Omega, \mathscr{B}_{[0,t]}\times\mathscr{F})$. *Тогда на пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ *существует винеровский процесс* $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, *такой, что с вероятностью* 1

$$x_t=x_0+\int_0^t a(s, \omega)\,dW_s. \tag{5.83}$$

Доказательство. Определим процесс

$$W_t=\int_0^t \frac{dx_s}{a(s, \omega)}, \tag{5.84}$$

полагая $a^{-1}(s,\omega)=0$ при $a(s,\omega)=0$. Интеграл (5.84) определен в силу теоремы 5.10 (пункт III), поскольку процесс A_t, $t\geqslant 0$, абсолютно непрерывен (P-п. н.) и

$$\mathsf{M}\int_0^T a^{-2}(s, \omega)\,dA_s=T<\infty.$$

Согласно теореме 5.11 процесс W_t, $t\leqslant T$, имеет непрерывную P-п. н. модификацию.

Далее, в силу (5.81), (5.82)

$$\mathsf{M}[W_t\mid\mathscr{F}_s]=W_s,$$
$$\mathsf{M}[(W_t-W_s)^2\mid\mathscr{F}_s]=t-s,\quad t\geqslant s\quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому по теореме 4.1 процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, является винеровским.

Заметим теперь, что для любых неупреждающих функций $\varphi=\varphi(t,\omega)$ с $\mathsf{M}\int_0^T \varphi^2(t,\omega)\,ds<\infty$

$$\int_0^t \varphi(s, \omega)\,dW_s=\int_0^t \frac{\varphi(s, \omega)}{a(s, \omega)}\,dx_s,$$

поскольку это равенство справедливо для простых функций. В частности, полагая $\varphi(s, \omega) = a(s, \omega)$, получаем равенство

$$\int_0^t a(s, \omega)\, dW_s = x_t - x_0 \quad (\text{P-п. н.}), \qquad t \leqslant T,$$

из которого следует (5.83).

§ 5. Интегральные представления мартингалов, являющихся условными математическими ожиданиями. Теорема Фубини для стохастических интегралов

1. Пусть $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неубывающее семейство непрерывных σ-подалгебр $\mathcal{F}$, $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ — мартингал с непрерывными справа траекториями и $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс. В настоящем параграфе будут изучаться представления условных математических ожиданий $y_t = \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_t^W)$ в виде стохастических интегралов по винеровскому процессу.

Лемма 5.7. *Процесс $Y = (y_t, \mathcal{F}_t^W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является мартингалом.*

Доказательство. В силу неравенства Йенсена

$$\mathsf{M}|y_t| = \mathsf{M}\left|\mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_t^W)\right| \leqslant \mathsf{M}|x_t|, \qquad t \leqslant T.$$

Далее, если $s \leqslant t$, то P-п. н.

$$\mathsf{M}(y_t \mid \mathcal{F}_s^W) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_t^W) \mid \mathcal{F}_s^W\right] = \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_s^W) =$$
$$= \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{F}_s^W\right] = \mathsf{M}(x_s \mid \mathcal{F}_s^W) = y_s,$$

что и доказывает лемму.

Замечание. Если $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ — квадратично интегрируемый мартингал, то таковым же является и мартингал $Y = (y_t, \mathcal{F}_t^W)$.

Теорема 5.13. *Если $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ — квадратично-интегрируемый мартингал, то мартингал $Y = (y_t, \mathcal{F}_t^W)$, $y_t = \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_t^W)$, допускает представление*

$$y_t = \mathsf{M}x_0 + \int_0^t \mathsf{M}(a_s \mid \mathcal{F}_s^W)\, dW_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.85}$$

где процесс $a = (a_s, \mathcal{F}_s)$, $s \leqslant t$, таков, что

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a_s\, ds \tag{5.86}$$

и

$$\int_0^T \mathsf{M}a_s^2\, ds < \infty. \tag{5.87}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $y_0 = \mathsf{M}(x_0 | \mathscr{F}_0^W) = \mathsf{M}x_0$ (P-п. н.), поскольку σ-алгебра $\mathscr{F}_0^W$ тривиальна ($\mathscr{F}_0^W = \{\Omega, \varnothing\}$). Далее, в силу замечания к лемме 5.7 процесс $Y = (y_t, \mathscr{F}_t^W)$ является квадратично интегрируемым мартингалом и по теореме 5.5

$$y_t = \mathsf{M}x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s, \tag{5.88}$$

где процесс $f = (f_s(\omega), \mathscr{F}_s^W)$ таков, что

$$\int_0^T \mathsf{M}f_s^2(\omega)\, ds < \infty.$$

По теореме 5.3 существует случайный процесс $a = (a_s, \mathscr{F}_s)$, $s \leqslant t$, такой, что P-п. н.

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a_s\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и $\int_0^T \mathsf{M}a_s^2\, ds < \infty$. Покажем, что в (5.88) $f_s(\omega) = \mathsf{M}(a_s | \mathscr{F}_s^W)$ (P-п. н.) для почти каждого s, $0 \leqslant s \leqslant T$.

Пусть $g = (g_t(\omega), \mathscr{F}_t^W)$ — ограниченный случайный процесс, удовлетворяющий условиям леммы 5.1, и $z_t = \int_0^t g_s(\omega)\, dW_s$. Тогда

$$\mathsf{M}y_t z_t = \mathsf{M}\{\mathsf{M}(x_t | \mathscr{F}_t^W) z_t\} = \mathsf{M}x_t z_t. \tag{5.89}$$

Из (5.88) и свойств стохастических интегралов получаем

$$\mathsf{M}y_t z_t = \int_0^t \mathsf{M}[f_s(\omega) g_s(\omega)]\, ds. \tag{5.90}$$

А по теореме 5.2 и лемме 5.1

$$\mathsf{M}x_t z_t = \mathsf{M}\langle x, z\rangle_t = \mathsf{M}\int_0^t g_s(\omega) a_s\, ds = \int_0^t \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(a_s | \mathscr{F}_s^W) g_s(\omega)\right] ds. \tag{5.91}$$

Из (5.89) — (5.91) находим, что

$$\int_0^t \mathsf{M}\{[f_s(\omega) - \mathsf{M}(a_s | \mathscr{F}_s^W)] g_s(\omega)\}\, ds = 0.$$

Отсюда в силу произвольности функции $g_s(\omega)$ получаем, что P-п. н. для почти всех s, $0 \leqslant s \leqslant T$,

$$f_s(\omega) = \mathsf{M}(a_s \mid \mathcal{F}_s^W)$$

и, следовательно, для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н.

$$\int_0^t f_s(\omega)\, dW_s = \int_0^t \mathsf{M}(a_s \mid \mathcal{F}_s^W)\, dW_s.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ — квадратично интегрируемый мартингал,*

$$x_t = \int_0^t a_s\, dW_s \tag{5.92}$$

и $\mathsf{M}\int_0^T a_s^2\, ds < \infty$. *Тогда* P-п. н. *для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t a_s\, dW_s \mid \mathcal{F}_t^W\right] = \int_0^t \mathsf{M}(a_s \mid \mathcal{F}_s^W)\, dW_s. \tag{5.93}$$

Действительно, из (5.92) и (5.6) получаем

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a_s\, ds.$$

Поэтому (5.93) вытекает из (5.85).

Следствие 2. *Пусть $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t)$ — два независимых винеровских процесса и $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ — мартингал,*

$$x_t = \int_0^t a_s\, d\tilde{W}_s, \qquad \int_0^T \mathsf{M}a_s^2\, ds < \infty.$$

Тогда P-п. н.

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t a_s\, d\tilde{W}_s \mid \mathcal{F}_t^W\right] = 0. \tag{5.94}$$

Для доказательства (5.94) достаточно установить, что $\langle x, W\rangle_t = 0$ (P-п. н.) для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Имеем

$$x_t + W_t = \int_0^t a_s\, d\tilde{W}_s + W_t, \qquad x_t - W_t = \int_0^t a_s\, d\tilde{W}_s - W_t.$$

Отсюда нетрудно найти, что $\langle x+W\rangle_t=\int\limits_0^t (a_s^2+1)\,ds$, $\langle x-W\rangle_t=$ $=\int\limits_0^t (a_s^2+1)\,ds$ и, следовательно,

$$\langle x,\ W\rangle_t=\frac{1}{4}\{\langle x+W\rangle_t-\langle x-W\rangle_t\}=0.$$

2. В следующей теореме равенство (5.93) обобщается на более широкий класс мартингалов.

Теорема 5.14. *Пусть* $X=(x_t,\ \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *мартингал,*

$$x_t=\int\limits_0^t a_s\,dW_s,\qquad \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T a_s^2\,ds<\infty\right)=1. \tag{5.95}$$

Если $\mathsf{M}|a_s|<\infty$, $0\leqslant s\leqslant T$ *и*

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T [\mathsf{M}(|a_s|\,|\,\mathscr{F}_s^W)]^2\,ds<\infty\right)=1, \tag{5.96}$$

то P-п. н. *для всех* t, $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\mathsf{M}\left(\int\limits_0^t a_s\,dW_s\,|\,\mathscr{F}_t^W\right)=\int\limits_0^t \mathsf{M}(a_s\,|\,\mathscr{F}_s^W)\,dW_s. \tag{5.97}$$

Доказательство. Утверждение (5.97) можно переформулировать, сказав, что мартингал $Y=(y_t,\ \mathscr{F}_t^W)$ с $y_t=$ $=\mathsf{M}(x_t\,|\,\mathscr{F}_t^W)$ допускает представление

$$y_t=\int\limits_0^t \mathsf{M}(a_s\,|\,\mathscr{F}_s^W)\,dW_s\qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Для доказательства (5.98) введем марковские моменты

$$\tau_n=\begin{cases}\inf\left\{t\leqslant T:\ \int\limits_0^t a_s^2\,ds\geqslant n\right\},\\ T,\quad \text{если}\quad \int\limits_0^T a_s^2\,ds<n.\end{cases}$$

Тогда мартингал $X^{(n)}=(x_t^{(n)},\ \mathscr{F}_t)$ с

$$x_t^{(n)}=\int\limits_0^t \chi_{(\tau_n\geqslant s)}a_s\,dW_s \tag{5.98}$$

является квадратично интегрируемым,

$$\int_0^T \mathsf{M}\chi_{(\tau_n \geqslant s)} a_s^2\, ds < \infty$$

и по следствию 1 теоремы 5.13 для мартингала $Y^{(n)} = (y_t^{(n)}, \mathscr{F}_t^W)$ с $y_t^{(n)} = \mathsf{M}(x_t^{(n)} \mid \mathscr{F}_t^W)$ имеет место представление

$$y_t^{(n)} = \int_0^t \mathsf{M}\{\chi_{(\tau_n \geqslant s)} a_s \mid \mathscr{F}_s^W\}\, dW_s. \tag{5.99}$$

Покажем, что $y_t^{(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} y_t$ (по вероятности) при $n \to \infty$ для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для этого заметим, что в силу (5.98) у процесса $x_t^{(n)}$ существует непрерывная модификация, и поэтому для нее

$$x_t^{(n)} = x_{t \wedge \tau_n} = \mathsf{M}(x_T \mid \mathscr{F}_{t \wedge \tau_n}).$$

Отсюда вытекает, что последовательность случайных величин $\{x_t^{(n)}, n = 1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируема (см. теорему 2.7). Но $x_t^{(n)} \to x_t$ (по вероятности), $n \to \infty$. Поэтому из этих двух фактов и замечания 1 к теореме 1.3 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\,|x_t - x_t^{(n)}| = 0.$$

Но $\mathsf{M}\,|y_t - y_t^{(n)}| \leqslant \mathsf{M}\,|x_t - x_t^{(n)}|$. Следовательно, $y_t^{(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} y_t$ для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что при $n \to \infty$

$$\int_0^t \mathsf{M}\{\chi_{(\tau_n \geqslant s)} a_s \mid \mathscr{F}_s^W\}\, dW_s \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_0^t \mathsf{M}(a_s \mid \mathscr{F}_s^W)\, dW_s.$$

Согласно неравенству (4.60) для этого достаточно установить, что

$$\int_0^T [\mathsf{M}\{\chi_{(\tau_n < s)} a_s \mid \mathscr{F}_s^W\}]^2\, ds \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{5.100}$$

Прежде всего заметим, что $\mathsf{M}\{\chi_{(\tau_n < s)} a_s \mid \mathscr{F}_s^W\} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$, поскольку $\mathsf{M}\,|a_s| < \infty$, $\chi_{(\tau_n < s)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$, и

$$\mathsf{M}\,|\mathsf{M}\{\chi_{(\tau_n < s)} a_s \mid \mathscr{F}_s^W\}| \leqslant \mathsf{M}\chi_{(\tau_n < s)}\,|a_s| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Положим

$$\sigma_N = \begin{cases} \inf\left\{ t \leqslant T\colon \int\limits_0^t \{\mathsf{M}(|a_s||\mathscr{F}_s^W)^2\,ds \geqslant N \right\}, \\ T, \quad \text{если} \quad \int\limits_0^T \{\mathsf{M}(|a_s||\mathscr{F}_s^W)\}^2\,ds < N. \end{cases}$$

Тогда для $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^T [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W)]^2\,ds > \varepsilon \right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^T [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W)]^2\,ds > \varepsilon;\ \sigma_N = T \right\} +$$

$$+ \mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^T [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W)]^2\,ds > \varepsilon;\ \sigma_N < T \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^{T\wedge\sigma_N} [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W)]^2\,ds > \varepsilon;\ \sigma_N = T \right\} + \mathsf{P}\{\sigma_N < T\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^T \chi_{(\sigma_N \geqslant s)} [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n > s)} a_s | \mathscr{F}_s^W)]^2\,ds > \varepsilon \right\} + \mathsf{P}(\sigma_N < T). \tag{5.101}$$

Здесь $\mathsf{P}\{\sigma_N < T\} \to 0$, $N \to \infty$, в силу условия (5.96). Далее, поскольку $\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M} \int\limits_0^T \chi_{(\sigma_N \geqslant s)} [\mathsf{M}(\chi_{(\tau_n < s)} a_s | \mathscr{F}_s^W]^2\,ds = 0.$$

Поэтому, переходя в (5.101) к пределу (сначала по $n \to \infty$, а затем по $N \to \infty$), получаем требуемое соотношение (5.100).

3. Равенство (5.97), установленное в теореме 5.14, позволяет доказать для стохастических интегралов утверждение (теорема 5.15), аналогичное теореме Фубини.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathsf{P}})$ — два вероятностных пространства, $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mathsf{P}}) = (\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathscr{F} \times \tilde{\mathscr{F}}, \mathsf{P} \times \tilde{\mathsf{P}})$ и $(\mathscr{F}_t)$ и $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — неубывающие семейства σ-подалгебр $\mathscr{F}$ и $\tilde{\mathscr{F}}$.

Пусть $W = (W_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — винеровский процесс, $\mathscr{F}_t^W = \sigma\{\omega\colon W_s, s \leqslant t\}$.

Теорема 5.15. *Рассмотрим случайный процесс* $(g_t(\omega, \tilde{\omega}), \mathcal{F}_t^W \times \tilde{\mathcal{F}}_t)$, $t \leqslant 1$. *Если*

$$\mathsf{M} \times \tilde{\mathsf{M}} \int_0^1 g_t^2(\omega, \tilde{\omega})\, dt < \infty \tag{5.102}$$

($\mathsf{M} \times \tilde{\mathsf{M}}$ — *усреднение по мере* $\mathsf{P} \times \tilde{\mathsf{P}}$), *то для каждого* t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, P-п. н.

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left[\int_0^t g_s(\omega, \tilde{\omega})\, dW_s(\omega)\right] d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\omega}) = \int_0^t \left[\int_{\tilde{\Omega}} g_s(\omega, \tilde{\omega})\, d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\omega})\right] dW_s(\omega). \tag{5.103}$$

Доказательство. Обозначим

$$x_t(\omega, \tilde{\omega}) = \int_0^t g_s(\omega, \tilde{\omega})\, dW_s(\omega)$$

и положим $\hat{W}_s(\omega, \tilde{\omega}) = W_s(\omega)$. Тогда, используя конструкцию стохастического интеграла, изложенную в гл. 4, можно так определить интеграл $\int_0^t g_s(\omega, \tilde{\omega})\, dW_s(\omega)$, чтобы он совпадал $\mathsf{P} \times \tilde{\mathsf{P}}$-п. н. с интегралом $\hat{x}_t(\omega, \tilde{\omega}) = \int_0^t g_s(\omega, \tilde{\omega})\, d\hat{W}_s(\omega, \tilde{\omega})$, который $\mathcal{F}_t^W \times \tilde{\mathcal{F}}_t$-измерим.

Нетрудно показать, что $\mathsf{P} \times \tilde{\mathsf{P}}$-п. н. $\int_{\tilde{\Omega}} x_t(\omega, \tilde{\omega})\, d\tilde{P}(\tilde{\omega})$ является одним из вариантов условного математического ожидания $\mathsf{M} \times \tilde{\mathsf{M}}\left[x_t(\omega, \tilde{\omega}) \mid \mathcal{F}_t^{\hat{W}}\right]$, т. е.

$$\mathsf{M} \times \tilde{\mathsf{M}}\left[x_t(\omega, \tilde{\omega}) \mid \mathcal{F}_t^{\hat{W}}\right] = \int_{\tilde{\Omega}} x_t(\omega, \tilde{\omega})\, d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\omega}) \quad (\mathsf{P} \times \tilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}).$$

Аналогично

$$\mathsf{M} \times \tilde{\mathsf{M}}\left[g_t(\omega, \tilde{\omega}) \mid \mathcal{F}_t^{\hat{W}}\right] = \int_{\tilde{\Omega}} g_t(\omega, \tilde{\omega})\, d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\omega}) \quad (\mathsf{P} \times \mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому, учитывая (5.97), находим ($\mathsf{P}\times\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.)

$$\int_{\tilde\Omega} x_t(\omega,\tilde\omega)\,d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde\omega)=\mathsf{M}\times\tilde{\mathsf{M}}\left[x_t(\omega,\tilde\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^{\hat W}\right]=$$

$$=\mathsf{M}\times\tilde{\mathsf{M}}\left[\int_0^t g_s(\omega,\tilde\omega)\,dW_s(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^{\hat W}\right]=$$

$$=\mathsf{M}\times\tilde{\mathsf{M}}\left[\int_0^t g_s(\omega,\tilde\omega)\,d\hat W_s(\omega,\tilde\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^{\hat W}\right]=$$

$$=\int_0^t \mathsf{M}\times\tilde{\mathsf{M}}\left[g_s(\omega,\tilde\omega)\,|\,\mathscr{F}_s^{\hat W}\right]d\hat W_s(\omega,\tilde\omega)=$$

$$=\int_0^t\left[\int_{\tilde\Omega} g_s(\omega,\tilde\omega)\,d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde\omega)\right]d\hat W_s(\omega,\hat\omega)=\int_0^t\left[\int_{\tilde\Omega} g_s(\omega,\tilde\omega)\,d\tilde{\mathsf{P}}(\tilde\omega)\right]dW_s(\omega).$$

Это и доказывает (5.103), если только заметить, что $\mathscr{F}_t^{\hat W}=$ $=\mathscr{F}_t^W\times(\tilde\Omega,\varnothing)$.

§ 6. Структура функционалов от процессов диффузионного типа

1. Из теоремы 5.5 следует, что всякий квадратично интегрируемый мартингал $X=(x_t,\mathscr{F}_t^W)$, $t\leqslant T$, где $\mathscr{F}_t^W$ — σ-алгебра, порожденная значениями винеровского процесса W_s, $s\leqslant t$, допускает представление

$$x_t=x_0+\int_0^t f_s(\omega)\,dW_s$$

с процессом $f=(f_s(\omega),\mathscr{F}_s^W)$ таким, что $\int_0^T \mathsf{M}f_s^2(\omega)\,ds<\infty$.

В настоящем параграфе этот результат, а также теоремы 5.7, 5.8 будут распространены на мартингалы $X=(x_t,\mathscr{F}_t^\xi)$, где $\xi=(\xi_t,\mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, является процессом диффузионного типа с дифференциалом

$$d\xi_t=a_t(\xi)\,dt+b_t(\xi)\,dW_t. \tag{5.104}$$

Будет показано, в частности, что (в предположениях, сформулированных ниже) всякий квадратично интегрируемый мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ допускает представление

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\,dW_s \quad (\text{P-п. н.}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.105}$$

с процессом $f=(f_s(\omega), \mathscr{F}_s^\xi)$, $s \leqslant T$, таким, что

$$\mathsf{M}\int_0^t f_s^2(\omega)\,ds < \infty.$$

2. Начнем с рассмотрения частного случая уравнения (5.104).

Теорема 5.16. *Пусть процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ является (сильным) решением уравнения*

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b_s(\xi)\,dW_s, \tag{5.106}$$

где неупреждающий функционал *) $b=(b_t(x), \mathscr{B}_t)$, $t \leqslant T$, *предполагается таким, что* $\mathsf{P}\left(\int_0^T b_t^2(\xi)\,ds < \infty\right) = 1$ *и*

$$b_t^2(x) \geqslant c > 0. \tag{5.107}$$

Тогда всякий мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет непрерывную модификацию, которая допускает P-п. н. *представление*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\,dW_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.108}$$

где процесс $f=(f_s(\omega), \mathscr{F}_s^\xi)$ таков, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty\right) = 1. \tag{5.109}$$

Если мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ квадратично интегрируем, то

$$\mathsf{M}\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty. \tag{5.110}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что семейство (пополненных) σ-алгебр $(\mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является непрерывным. Пусть $\mathscr{F}_t^{\xi_0, W} = \mathscr{F}_0^\xi \vee \mathscr{F}_t^W$, где $\mathscr{F}_0^\xi = \sigma\{\omega\colon \xi_0(\omega)\}$.

---

*) $\mathscr{B}_t = \sigma\{x\colon x_s,\ s \leqslant t\}$, где x принадлежит пространству непрерывных (на $[0, T]$) функций.

Поскольку ξ — сильное решение уравнения (5.106), то

$$\mathscr{F}_t^{\xi_0, W} \supseteq \mathscr{F}_t^{\xi}. \tag{5.111}$$

С другой стороны, в силу условия (5.107) для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$W_t = \int_0^t \frac{d\xi_s}{b_s(\xi)} \quad (\text{P-п. н.}) \tag{5.112}$$

(см. теорему 5.12). Поэтому $\mathscr{F}_t^{\xi_0, W} \subseteq \mathscr{F}_t^{\xi}$, что вместе с (5.111) приводит к равенству *)

$$\mathscr{F}_t^{\xi_0, W} = \mathscr{F}_t^{\xi}. \tag{5.113}$$

Согласно теореме 4.3 семейство (пополненных) σ-алгебр $(\mathscr{F}_t^W)$ $0 \leqslant t \leqslant T$, является непрерывным. Этим свойством, как нетрудно показать, обладает и семейство $(\mathscr{F}_t^{\xi_0, W})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а значит, и $(\mathscr{F}_t^{\xi})$.

В силу теоремы 3.1 отсюда следует, что у всякого мартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t^{\xi})$ существует непрерывная справа модификация, которая и будет далее рассматриваться.

Предположим теперь, что $X = (x_t, \mathscr{F}_t^{\xi})$ является квадратично интегрируемым мартингалом.

Если $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс, то, как нетрудно проверить, винеровским будет и процесс $(W_t, \mathscr{F}_t^{\xi})$. Поэтому согласно теореме 5.3 существует процесс $f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^{\xi})$ такой, что $\mathsf{M} \int_0^T f_t^2(\omega)\, dt < \infty$ и

$$\langle x, W \rangle_t = \int_0^t f_s(\omega)\, ds. \tag{5.114}$$

Положим

$$\tilde{x}_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s$$

и покажем, что $\mathsf{P}(\tilde{x}_t = x_t) = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Зафиксируем t и рассмотрим разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = t$ отрезка $[0, t]$. Если показать, что

$$\mathsf{M}(\tilde{x}_t - x_t) \exp\left\{ i \left(z_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k W_{t_k} \right) \right\} = 0 \tag{5.115}$$

---

*) Если $\xi_0 \equiv 0$, то утверждение доказываемой теоремы легко вывести из теоремы 5.5 и того факта, что согласно (5.113) $\mathscr{F}_t^W = \mathscr{F}_t^{\xi}$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

для любых z_i с $|z_i|<\infty$, $i=0, 1, \ldots, n$, то отсюда будет следовать требуемое равенство $\mathsf{P}(\tilde{x}_t=x_t)=1$, поскольку случайными величинами $\exp\left\{i\left(z_0\xi_0+\sum\limits_{k=1}^{n} z_k W_{t_k}\right)\right\}$ можно аппроксимировать любую ограниченную $\mathcal{F}_t^{\xi_0, W}$-измеримую (а значит, и $\mathcal{F}_t^{\xi}$-измеримую) случайную величину.

Начнем со случая $n=1$. Положим $y_t=x_t-\tilde{x}_t$. Ясно, что $Y=(y_t, \mathcal{F}_t^{\xi})$ также является квадратично интегрируемым мартингалом и согласно (5.6) и (5.114)

$$\langle z, W\rangle_s=0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad 0\leqslant s\leqslant T.$$

В силу леммы 5.1 отсюда вытекает, что

$$\mathsf{M}\left[y_t\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_0^{\xi}\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,d\langle y, W\rangle_u \mid \mathcal{F}_0^{\xi}\right]=0. \tag{5.116}$$

Далее, по формуле Ито

$$\exp\{i(z_0\xi_0+z_1W_t)\}=\exp\{iz_0\xi_0\}+$$
$$+iz_1\exp\{iz_0\xi_0\}\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,dW_u-\frac{z_1^2}{2}\exp\{iz_0\xi_0\}\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,du.$$

Поэтому, учитывая (5.116) и то, что $y_0=0$, находим

$$\mathsf{M}y_t\exp\{i(z_0\xi_0+z_1W_t)\}=\mathsf{M}y_t\exp\{iz_0\xi_0\}+$$
$$+iz_1\,\mathsf{M}\left\{y_t\exp(iz_0\xi_0)\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,dW_u\right\}-$$
$$-\frac{z_1^2}{2}\,\mathsf{M}\left\{y_t\exp(iz_0\xi_0)\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,du\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left(y_t\mid \mathcal{F}_0^{\xi}\right)\exp(iz_0\xi_0)\right\}+$$
$$+iz_1\mathsf{M}\left\{\exp(iz_0\xi_0)\,\mathsf{M}\left[y_t\int_0^t \exp(iz_1W_u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_0^{\xi}\right]\right\}-$$
$$-\frac{z_1^2}{2}\int_0^t \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left(y_t\mid \mathcal{F}_u^{\xi}\right)\exp\left[i\left(z_0\xi_0+z_1W_u\right)\right]\right\}du=$$
$$=-\frac{z_1^2}{2}\int_0^t \mathsf{M}\left\{y_u\exp\left[i(z_0\xi_0+z_1W_u)\right]\right\}du.$$

Следовательно, $u_t = \mathsf{M} y_t \exp[i(z_0\xi_0 + z_1 W_t)]$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{u}_t = -\frac{z_1^2}{2} u_t, \qquad u_0 = 0,$$

решение которого тождественно равно нулю.

Итак, равенство (5.115) в случае $n = 1$ установлено.

Пусть теперь $n > 1$ и для $n-1$ равенство (5.115) также доказано. По формуле Ито

$$\exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k W_{t_k}\right)\right\} = \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k}\right)\right\} + \\ + i z_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k} + z_n W_u\right)\right\} dW_u - \\ - \frac{z_n^2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k} + z_n W_u\right)\right\} du. \qquad (5.117)$$

Если теперь учесть, что согласно предположению индукции

$$\mathsf{M} y_t \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k}\right)\right\} = \\ = \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left(y_t \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t_{n-1}}\right) \exp\left[i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k}\right)\right]\right\} = \\ = \mathsf{M} y_{t_{n-1}} \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k}\right)\right\} = 0,$$

то из (5.117), аналогично случаю $n = 1$, легко выводится, что

$$\mathsf{M}\left[y_t \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k W_{t_k}\right)\right\}\right] = \\ = -\frac{z_n^2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t} \mathsf{M}\left[y_u \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k W_{t_k} + z_n W_u\right)\right\}\right] du.$$

Отсюда получаем

$$\mathsf{M} y_t \exp\left\{i\left(z_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k W_{t_k}\right)\right\} = 0.$$

Итак, соотношение (5.115) для случая квадратично интегрируемого мартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ доказано, что в свою очередь доказывает требуемое представление (5.108).

В том случае, когда мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$ не является квадратично интегрируемым, доказательство представления (5.108) почти дословно повторяет соответствующее доказательство теоремы 5.7.

Следствие. *Пусть функционал $b=(b_t(x), \mathscr{B}_t)$ удовлетворяет условиям* (4.110), (4.111) *и* $b_t^2(x)\geqslant c>0$. *Тогда согласно теореме* 4.6 *сильное решение уравнения* (5.106) *существует и всякий мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ допускает представление* (5.108).

3. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая.

Теорема 5.17. *Пусть $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — процесс диффузионного типа с дифференциалом*

$$d\xi_t=a_t(\xi)\,dt+b_t(\xi)\,dW_t, \tag{5.118}$$

где $a=(a_t(x), \mathscr{B}_t)$ и $b=(b_t(x), \mathscr{B}_t)$ — неупреждающие функционалы. Будем предполагать, что коэффициент $b_t(x)$ удовлетворяет условиям (4.110), (4.111) *и*

$$b_t^2(x)\geqslant c>0. \tag{5.119}$$

Пусть также

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T a_t^2(\eta)\,dt<\infty\right)=1, \tag{5.120}$$

где η — (сильное) решение уравнения

$$d\eta_t=b_t(\eta)\,dW_t, \qquad \eta_0=\xi_0. \tag{5.121}$$

Тогда у всякого мартингала $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ существует непрерывная модификация, для которой имеет место представление

$$x_t=x_0+\int_0^t f_s(\omega)\,dW_s \tag{5.122}$$

с $\boldsymbol{F}^\xi$-согласованным процессом $(f_t(\omega), \mathscr{F}_t^\xi)$ таким, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds<\infty\right)=1.$$

Если $X=(x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — квадратично интегрируемый мартингал, то к тому же

$$\int_0^T \mathsf{M}f_t^2(\omega)\,dt<\infty. \tag{5.123}$$

Доказательство. Согласно сделанным предположениям и теореме 7.19 меры μ_ξ и μ_η эквивалентны. При этом плотность $\mathfrak{z}_t(\xi)=\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(t, \xi)$ задается формулой (см. (7.124))

$$\mathfrak{z}_t(\xi)=\exp\left(-\int_0^t \frac{a_s(\xi)}{b_s^2(\xi)}\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\right)^2 ds\right)=$$

$$=\exp\left(-\int_0^t \frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\right)^2 ds\right). \tag{5.124}$$

Рассмотрим новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathsf{P}})$ с мерой

$$\tilde{\mathsf{P}}(d\omega)=\mathfrak{z}_T(\xi(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)$$

(ясно, что $\tilde{\mathsf{P}}\ll\mathsf{P}$ и в силу леммы 6.8 $\mathsf{P}\ll\tilde{\mathsf{P}}$; значит, $\mathsf{P}\sim\tilde{\mathsf{P}}$).

Имеем

$$\tilde{\mathsf{P}}\{\xi\in\Gamma\}=\int_{\{\omega:\ \xi\in\Gamma\}}\mathfrak{z}_T(\xi(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)=\int_\Gamma \mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_\xi(x)=\mu_\eta(\Gamma).$$

Таким образом, случайный процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, рассматриваемый на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathsf{P}})$, имеет то же распределение, что и процесс $\eta=(\eta_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, рассматриваемый на пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

Далее, по теореме 6.2 процесс $(\tilde{W}_t, \mathscr{F}_t)$,

$$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\,ds, \tag{5.125}$$

по мере $\tilde{\mathsf{P}}$ является винеровским.

Из (5.125) и (4.80) следует, что $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\xi_0+\int_0^t b_s(\xi)\,d\tilde{W}_s=\xi_0+\int_0^t a_s(\xi)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,dW_s=\xi_t.$$

Значит, процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, рассматриваемый на $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathsf{P}})$, является решением уравнения

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t b_s(\xi)\,d\tilde{W}_s \tag{5.126}$$

(ср. с уравнением (5.121)).

Согласно сделанным в условиях теоремы предположениям о коэффициенте $b_s(x)$ (сильное) решение уравнения (5.126), так же как и уравнения (5.121), существует и единственно. Тогда по теореме 5.16 всякий мартингал $Y=(y_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathsf{P}})$, имеет непрерывную модификацию, которая допускает $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н. представление

$$y_t = y_0 + \int_0^t g_s(\omega)\, d\tilde{W}_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.127}$$

где $\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T g_s^2(\omega)\, ds < \infty\right) = 1$.

Пусть $X=(x_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ — мартингал. Покажем, что процесс $Y=(y_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ с $y_t = x_t/\mathfrak{z}_t(\xi)$, рассматриваемый на $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathsf{P}})$, также является мартингалом.

В самом деле,

$$\tilde{\mathsf{M}}|y_t| = \int_\Omega |y_t|\, d\tilde{\mathsf{P}} = \int_\Omega |y_t|\, \mathfrak{z}_T(\xi)\, d\mathsf{P} = \int_\Omega \frac{|x_t|}{\mathfrak{z}_t(\xi)}\, \mathfrak{z}_T(\xi)\, d\mathsf{P} =$$
$$= \int_\Omega \frac{|x_t|}{\mathfrak{z}_t(\xi)}\, \mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\xi) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right) d\mathsf{P} = \int_\Omega |x_t|\, d\mathsf{P} = \mathsf{M}|x_t| < \infty$$

и при $t \geqslant s$ согласно лемме 6.6 $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}\left(y_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right) = \mathfrak{z}_s^{-1}(\xi)\, \mathsf{M}\left(y_t \mathfrak{z}_t(\xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right) = \mathfrak{z}_s^{-1}(\xi)\, \mathsf{M}\left(x_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right) = \frac{x_s}{\mathfrak{z}_s(\xi)} = y_s.$$

Следовательно, к мартингалу $Y=(y_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ с $y_t = x_t/\mathfrak{z}_t(\xi)$ применим результат (5.127), согласно которому $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н. и P-п. н. для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\frac{x_t}{\mathfrak{z}_t(\xi)} = x_0 + \int_0^t g_s(\omega)\, d\tilde{W}_s = x_0 + \int_0^t g_s(\omega)\, W_s + \int_0^t g_s(\omega) \frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\, ds,$$

или

$$x_t = \mathfrak{z}_t(\xi)\, z_t, \tag{5.128}$$

где

$$z_t = x_0 + \int_0^t g_s(\omega)\, dW_s + \int_0^t g_s(\omega) \frac{a_s(\xi)}{b_s(\xi)}\, ds. \tag{5.129}$$

Применяя формулу Ито, из (5.128), (5.129) и (5.124) находим, что

$$dx_t = \mathfrak{z}_t(\xi)\,dz_t + z_t\,d\mathfrak{z}_t - \mathfrak{z}_t(\xi)\,g_t(\omega)\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}\,dt =$$
$$= \mathfrak{z}_t(\xi)\,g_t(\omega)\,dW_t + \mathfrak{z}_t(\xi)\,g_t(\omega)\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}\,dt - z_t\mathfrak{z}_t(\xi)\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}\,dW_t -$$
$$- \mathfrak{z}_t(\xi)\,g_t(\omega)\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}\,dt = f_t(\omega)\,dW_t,$$

где

$$f_t(\omega) = \mathfrak{z}_t(\xi)\,g_t(\omega) - x_t\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}. \tag{5.130}$$

Иначе говоря, P-п. н.

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\,dW_s,$$

где $\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty\right) = 1$, что в свою очередь вытекает из (5.130) в силу эквивалентности мер P и $\tilde{\mathsf{P}}$ (лемма 6.8), непрерывности P-п. н. процессов $\mathfrak{z}_t(\xi)$ и $x_t = \mathfrak{z}_t(\xi)\,z_t$ и условий

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t g_t^2(\omega)\,dt < \infty\right) = \mathsf{P}\left(\int_0^T \left(\frac{a_t(\xi)}{b_t(\xi)}\right)^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь проверить, что в случае квадратично интегрируемых мартингалов $X = (x_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ функционал $f_s(\omega)$, $s \leqslant T$, удовлетворяет условию (5.110). Вытекает это из следующего общего предложения.

Лемма 5.8. *Пусть $F = (\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$ и $f = (f_t(\omega), \mathcal{F}_t)$ — процесс с*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_t^2(\omega)\,dt < \infty\right) = 1.$$

Для того чтобы (непрерывный) мартигнал $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, с

$$x_t = \int_0^t f_s(\omega)\,dW_s$$

был квадратично интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^T \mathsf{M} f_s^2(\omega)\,ds < \infty. \tag{5.131}$$

Доказательство. Достаточность условия (5.131) следует из свойства стохастических интегралов (по винеровскому процессу (см. (4.49)). Для доказательства необходимости положим для $n=1, 2, \ldots$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\left(t \leqslant T\colon \int\limits_0^t f_s^2\,ds \geqslant n\right), \\ T, \quad \text{если} \quad \int\limits_0^T f_s^2\,ds < n. \end{cases}$$

В силу непрерывности траекторий мартингала $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$ и теоремы 3.6 $\mathbf{P}$-п. н.

$$\int\limits_0^{t\wedge\tau_n} f_s(\omega)\,dW_s = x_{t\wedge\tau_n} = \mathbf{M}\left[x_t \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right].$$

Поскольку к тому же мартингал $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$ является квадратично интегрируемым, то в силу неравенства Йенсена

$$\mathbf{M}x_{t\wedge\tau_n}^2 = \mathbf{M}\left[\mathbf{M}\left(x_T \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n}\right)\right]^2 \leqslant \mathbf{M}x_T^2 < \infty.$$

С другой стороны, поскольку $\mathbf{M}\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} f_s^2(\omega)\,ds \leqslant n < \infty$, то

$$\mathbf{M}x_{T\wedge\tau_n}^2 = \mathbf{M}\left(\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} f_s(\omega)\,dW_s\right)^2 = \mathbf{M}\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} f_s^2(\omega)\,ds.$$

Следовательно, для любого $n=1, 2, \ldots$

$$\mathbf{M}\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} f_s^2(\omega)\,ds \leqslant \mathbf{M}x_T^2,$$

и, значит,

$$\mathbf{M}\int\limits_0^T f_s^2(\omega)\,ds = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\int\limits_0^{T\wedge\tau_n} f_s^2(\omega)\,ds \leqslant \mathbf{M}x_T^2 < \infty,$$

что и доказывает лемму.

Замечание. Если $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — квадратично интегрируемый мартингал с

$$x_t = x_0 + \int\limits_0^t f_s(\omega)\,dW_s,$$

где $\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty\right) = 1$, то

$$\mathsf{M}\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds \leqslant \mathsf{M}\,[x_T - x_0]^2 = \mathsf{M}x_T^2 - \mathsf{M}x_0^2 \leqslant \mathsf{M}x_T^2 < \infty.$$

4. В следующей теореме ослабляется условие (5.120), входящее в формулировку предшествующей теоремы.

Теорема 5.18. *Пусть выполнены предположения теоремы* 5.17, *за исключением условия* (5.120), *которое заменяется требованием, что*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1. \tag{5.132}$$

Тогда утверждения теоремы 5.17 *также остаются справедливыми.*

Доказательство. Условие (5.120) обеспечивало эквивалентность $\mu_\xi \sim \mu_\eta$. При условии же (5.132) согласно теореме 7.20 лишь $\mu_\xi \ll \mu_\eta$.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$ и $\xi^{(n)} = (\xi_t^{(n)}, \mathscr{F}_t)$ — процесс, являющийся (сильным) решением уравнения

$$\xi_t^{(n)} = \xi_{\int_0^t \chi_s^{(n)}\,ds} + \int_0^t [1 - \chi_s^{(n)}]\, b_s(\xi^{(n)})\,dW_s, \tag{5.133}$$

где

$$\chi_s^{(n)} = \chi_{\left[\int_0^s \left(\frac{a_u(\xi)}{b_u(\xi)}\right)^2 ds < n\right]}.$$

В силу сделанных предположений коэффициент $b_s(x)$ удовлетворяет условиям (4.110) и (4.111). Поэтому из теоремы 4.8 следует, что сильное решение уравнения (5.133) действительно существует.

Как показано при доказательстве теоремы 7.19, процесс $\xi^{(n)} = (\xi_t^{(n)}, \mathscr{F}_t)$ допускает дифференциал

$$d\xi_t^{(n)} = a_t^{(n)}(\xi^{(n)})\,dt + b_t(\xi^{(n)})\,dW_t, \tag{5.134}$$

где

$$a_t^{(n)}(x) = a_t(x)\,\chi_{\left[\int_0^t \left(\frac{a_s(x)}{b_s(x)}\right)^2 ds < n\right]}.$$

Поскольку

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \left(\frac{a_t^{(n)}(\xi^{(n)})}{b_t(\xi^{(n)})}\right)^2 dt \leqslant n\right) = 1,$$

то по теореме 7.18 $\mu_{\xi^{(n)}} \sim \mu_\eta$.

Положим теперь $x_t^{(n)} = \mathsf{M}\left[x_T \mid \mathscr{F}_t^{\xi^{(n)}}\right]$. Тогда в силу теоремы 5.17 для мартингала $X^{(n)} = \left(x_t^{(n)}, \mathscr{F}_t^{\xi^{(n)}}\right)$ справедливо представление

$$x_t^{(n)} = x_0^{(n)} + \int_0^t f_s^{(n)}(\omega^{(n)})\, dW_s, \tag{5.135}$$

где процесс $\left(f_s^{(n)}(\omega), \mathscr{F}_s^{\xi^{(n)}}\right)$ таков, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T [f_s^{(n)}(\omega)]^2\, ds < \infty\right) = 1.$$

Заметим, что $x_0^{(n)} = x_0$ (P-п. н.). Действительно, поскольку $\xi_0^{(n)} = \xi_0$ (P-п. н.), то

$$x_0^{(n)} = \mathsf{M}\left[x_T \mid \mathscr{F}_0^{\xi^{(n)}}\right] = \mathsf{M}\left[x_T \mid \xi_0^{(n)}\right] = \mathsf{M}\left[x_t \mid \xi_0\right] = x_0.$$

Пусть

$$\tau_n(x) = \begin{cases} \inf\left[t:\ \displaystyle\int_0^t \left(\frac{a_s(x)}{b_s(x)}\right)^2 ds \geqslant n\right], \\ T, \quad \text{если} \quad \displaystyle\int_0^T \left(\frac{a_s(x)}{b_s(x)}\right)^2 ds < n. \end{cases}$$

Из построения процесса $\xi^{(n)}$ следует, что $\xi_t^{(n)} = \xi_t$ для $t \leqslant \tau_n(\xi)$. Поэтому $\tau_n(\xi) = \tau_n(\xi^{(n)})$ (P-п. н.). Отсюда нетрудно вывести, что для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathscr{F}^{\xi}_{t \wedge \tau_n(\xi)} = \mathscr{F}^{\xi^{(n)}}_{t \wedge \tau_n(\xi^{(n)})}. \tag{5.136}$$

Из (5.135) вытекает, что мартингал $X^{(n)} = \left(x_t^{(n)}, \mathscr{F}_t^{\xi^{(n)}}\right)$ имеет непрерывные траектории. Поэтому по теореме 3.6 и

$$\mathsf{M}\left(x_t^{(n)} \mid \mathscr{F}^{\xi^{(n)}}_{t \wedge \tau_n(\xi^{(n)})}\right) = x^{(n)}_{t \wedge \tau_n(\xi^{(n)})} =$$

$$= x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n(\xi^{(n)})} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s = x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n(\xi)} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s, \tag{5.137}$$

поскольку $\tau_n(\xi) = \tau_n(\xi^{(n)})$ (P-п. н.) и при $s \leqslant \tau_n(\xi)$ $\xi_s = \xi_s^{(n)}$ (P-п. н.), Заметим теперь, что $x_t^{(n)} = \mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_t^{\xi^{(n)}}\right)$. Тогда согласно теореме 3.6 и соотношению (5.136)

$$x_{t\wedge\tau_n(\xi^{(n)})}^{(n)} = \mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi^{(n)})}^{\xi^{(n)}}\right) = \mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}\right),$$

что вместе с (5.137) дает при $0 \leqslant t \leqslant T$ равенство

$$\mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}\right) = x_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.138}$$

Обозначим для краткости правую часть в (5.138) $\tilde{x}_t^{(n)}$ и положим $\tilde{\mathscr{F}}_t^{(n)} = \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}$. Процесс $\tilde{X}^{(n)} = (\tilde{x}_t^{(n)}, \tilde{\mathscr{F}}_t^{(n)})$ является мартингалом, поскольку $\mathsf{M}|\tilde{x}_t^{(n)}| \leqslant \mathsf{M}|x_T| < \infty$ и при $t \leqslant s$

$$\mathsf{M}\left(\tilde{x}_t^{(n)} \mid \tilde{\mathscr{F}}_s^{(n)}\right) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi} \mid \mathscr{F}_{s\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}\right)\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{s\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}\right) = x_0 + \int_0^{s\wedge\tau_n(\xi)} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s = \tilde{x}_s^{(n)} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Пусть $m \leqslant n$. Тогда $\tau_m(\xi) \leqslant \tau_n(\xi)$ и по теореме 3.6 (P-п. н.)

$$\mathsf{M}\left(\tilde{x}_T^{(n)} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{(n)}\right) = \tilde{x}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{(n)} = x_0 + \int_0^{t\wedge\tau_m(\xi)} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s. \tag{5.139}$$

С другой стороны, поскольку

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{(n)} = \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)\wedge\tau_m(\xi)}^{\xi} = \mathscr{F}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{\xi},$$

то P-п. н.

$$\mathsf{M}\left(\tilde{x}_T^{(n)} \mid \tilde{\mathscr{F}}_{t\wedge\tau_m(\xi)}\right) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n(\xi)}^{\xi}\right) \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{\xi}\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left(x_T \mid \mathscr{F}_{t\wedge\tau_m(\xi)}^{\xi}\right) = x_0 + \int_0^{t\wedge\tau_m(\xi)} f_s^{(m)}(\omega)\, dW_s. \tag{5.140}$$

Сравнивая формулы (5.139) и (5.140), убеждаемся в том, что

$$\int_0^{t\wedge\tau_m(\xi)} [f_s^{(n)}(\omega) - f_s^{(m)}(\omega)]\, dW_s = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.141}$$

Из (5.141) с помощью формулы Ито находим, что

$$0=\left(\int_0^{T\wedge\tau_m(\xi)}[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]\,dW_s\right)^2=\int_0^{T\wedge\tau_m(\xi)}[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]^2\,ds+$$

$$+2\int_0^{T\wedge\tau_m(\xi)}\left\{\int_0^t[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]\,dW_s\right\}\{f_t^{(n)}(\omega)-f_t^{(m)}(\omega)\}\,dW_t=$$

$$=\int_0^{T\wedge\tau_m(\xi)}[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]^2\,ds,$$

поскольку на множестве $\{\omega\colon\ t\leqslant\tau_m(\xi)\}$

$$\int_0^t[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]\,dW_s=0.$$

Итак, для $n\geqslant m$ на множестве $\{\tau_m(\xi)=T\}$

$$\int_0^T[f_s^{(n)}(\omega)-f_s^{(m)}(\omega)]^2\,ds=0. \tag{5.142}$$

Отсюда следует, что для почти всех t, $0\leqslant t\leqslant T$,

$$f_t^{(n)}(\omega)=f_t^{(n)}(\omega)\qquad(\{\tau_m(\xi)=T\},\ \mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Определим теперь функцию $f_t(\omega)$:

$$f_t(\omega)=\begin{cases}f_t^{(1)}(\omega), & \text{если}\quad \displaystyle\int_0^t a_s^2(\xi)\,ds<1,\\ f_t^{(2)}(\omega), & \text{если}\quad 1\leqslant\displaystyle\int_0^t a_s^2(\xi)\,ds<2,\\ \dots\dots\dots & \\ f_t^{(n)}(\omega), & \text{если}\quad n-1\leqslant\displaystyle\int_0^t a_s^2(\xi)\,ds<n,\\ \dots\dots\dots & \end{cases} \tag{5.143}$$

Из определения ясно, что функция $f_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, является $\mathscr{B}_{[0,T]}\times\mathscr{F}_T^{\xi}$-измеримой и $\mathscr{F}_t^{\xi}$-измеримой при каждом фиксированном t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Далее,

$$\int_0^T f_t^2(\omega)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau_n(\xi)}^{\tau_{n+1}(\xi)} f_t^2(\omega)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau_n(\xi)}^{\tau_{n+1}(\xi)} [f_t^{(n+1)}(\omega)]^2\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int_{\tau_n(\xi)}^{\tau_{n+1}(\xi)} [f_n^{(n+1)}(\omega)]^2\,dt + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{\tau_n(\xi)}^{\tau_{n+1}(\xi)} [f_t^{(n+1)}(\omega)]^2\,dt.$$

На множестве $\{\omega:\ \tau_{N+1}(\xi) = T\}$

$$\int_0^T f_t^2(\omega)\,dt = \sum_{n=0}^{N} \int_{\tau_n(\xi)}^{\tau_{n+1}(\xi)} [f_t^{(n+1)}(\omega)]^2\,dt < \infty.$$

Значит, для любого N

$$\left\{\omega:\ \int_0^T f_t^2(\omega)\,dt = \infty\right\} \subseteq \left\{\omega:\ \tau_{N+1}(\xi) < T\right\}.$$

Но $\tau_N(\xi) \uparrow T$ (P-п. н.) при $N \to \infty$. Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T f_t^2(\omega)\,dt < \infty\right\} = 1.$$

Аналогичным образом легко устанавливается также включение

$$\left\{\omega:\ \int_0^T [f_t(\omega) - f_t^{(n)}(\omega)]^2\,dt > 0\right\} \subseteq \left\{\omega:\ \tau_n(\xi) < T\right\}.$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\int_0^T [f_t(\omega) - f_t^{(n)}(\omega)]^2\,dt \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,$$

и, следовательно,

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_s^{(n)}(\omega)\,dW_s = \int_0^t f_s(\omega)\,dW_s. \tag{5.144}$$

Ясно также, что

$$\int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} f_s^{(n)}(\omega)\,dW_s = \int_0^t \chi_{\{\tau_n(\xi)>s\}} f_s^{(n)}(\omega)\,dW_s$$

и для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_n \int_0^t \chi_{\{\tau_n(\xi) > s\}} f_s^{(n)}(\omega)\, dW_s = \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s, \tag{5.145}$$

поскольку

$$\mathsf{P}\left\{ \int_0^T \left[f_s(\omega) - f_s^{(n)}(\omega)\chi_{\{\tau_n(\xi) > s\}}\right]^2 > \varepsilon \right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{ \int_0^T \left[f_s(\omega) - f_s^{(n)}(\omega)\chi_{\{\tau_n(\xi) > s\}}\right]^2 ds > \varepsilon, \quad \tau_n(\xi) = T \right\} +$$

$$+ \mathsf{P}\left\{ \int_0^T \left[f_s(\omega) - f_s^{(n)}(\omega)\chi_{\{\tau_n(\xi) > s\}}\right]^2 ds > \varepsilon, \quad \tau_n(\xi) < T \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{ \int_0^T \left[f_s(\omega) - f_s^{(n)}(\omega)\right]^2 ds > \varepsilon \right\} + \mathsf{P}\{\tau_n(\xi) < T\} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Пусть $t < T$. Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в (5.138). Левая часть равенства в силу теоремы 1.5 стремится к $\mathsf{M}(x_T \mid \mathcal{F}_t^\xi) = x_t$, а правая согласно (5.145) сходится по вероятности к $x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s$. Таким образом, при $t < T$

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\, dW_s \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.146}$$

Если же $t = T$, то $\mathcal{F}^\xi_{T \wedge \tau_n(\xi)} \uparrow \mathcal{F}^\xi_{T-}$ и, значит,

$$\mathsf{M}(x_T \mid \mathcal{F}^\xi_{T-}) = x_0 + \int_0^T f_s(\omega)\, dW_s.$$

Но процесс $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет P-п. н. непрерывные траектории, и поэтому $\mathcal{F}^\xi_{t-} = \mathcal{F}^\xi_t$ (ср. с доказательством теоремы 4.3).

Теорема 5.18 доказана.

5. В теореме 4.3 было показано, что (пополненные) σ-алгебры $\mathcal{F}_t^W$, порожденные значениями винеровского процесса W_s, $s \leqslant t$, непрерывны, т. е. $\mathcal{F}^W_{t-} = \mathcal{F}^W_t = \mathcal{F}^W_{t+}$. Установим аналогичный результат и для процессов диффузионного типа.

Теорема 5.19. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.18. *Тогда* (*пополненные*) *σ-алгебры $\mathcal{F}_t^\xi$ непрерывны:*

$$\mathcal{F}^\xi_{t-} = \mathcal{F}^\xi_t = \mathcal{F}^\xi_{t+}.$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, соотношение $\mathcal{F}^\xi_{t-}=\mathcal{F}^\xi_t$ доказывается аналогично случаю винеровского процесса (см. теорему 4.3). Установим непрерывность σ-алгебр $\mathcal{F}^\xi_t$ справа.

Пусть η — ограниченная случайная величина, $|\eta|\leqslant c$. Тогда по теореме 5.18 у мартингала $X=(x_t, \mathcal{F}^\xi_t)$ с $x_t=\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_t)$ существует непрерывная модификация. Покажем, что

$$\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_t)=\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_{t+}) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{5.147}$$

Для всякого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_{t+})=\mathsf{M}(\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_{t+\varepsilon})|\mathcal{F}^\xi_{t+})=\mathsf{M}(x_{t+\varepsilon}|\mathcal{F}^\xi_{t+}). \tag{5.148}$$

Но случайные величины $x_t=\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_t)$ ограничены, $|x_t|\leqslant c$, и в силу непрерывности процесса x_t из (5.148), переходя к пределу при $\varepsilon\downarrow 0$, находим, что P-п. н.

$$\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_{t+})=\mathsf{M}(x_t|\mathcal{F}^\xi_{t+})=x_t=\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_t).$$

Этим соотношением (5.147) установлено.

Возьмем теперь в нем в качестве η $\mathcal{F}^\xi_{t+}$-измеримую ограниченную случайную величину. Тогда $\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_{t+})=\eta$ и, значит, $\eta=\mathsf{M}(\eta|\mathcal{F}^\xi_t)$.

Следовательно, случайная величина η $\mathcal{F}^\xi_t$-измерима, что доказывает включение $\mathcal{F}^\xi_{t+}\subseteq\mathcal{F}^\xi_t$. Обратное включение $\mathcal{F}^\xi_t\subseteq\mathcal{F}^\xi_{t+}$ очевидно.

Теорема 5.19 доказана.

6. Заслуживает особого выделения частный случай теорем 5.17, 5.18, когда коэффициент $b_t(x)\equiv 1$ (или $b_t(x)\equiv c\neq 0$).

Теорема 5.20. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *процесс диффузионного типа с дифференциалом*

$$d\xi_t=a_t(\xi)\,dt+dW_t, \tag{5.149}$$

где $a=(a_t(x), \mathcal{B}_t)$ — *неупреждающий функционал с*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=1.$$

Тогда у всякого мартингала $X=(x_t, \mathcal{F}^\xi_t)$ *существует непрерывная модификация, для которой имеет место представление*

$$x_t=x_0+\int_0^t f_s(\omega)\,dW_s,$$

где процесс $(f_s(\omega), \mathscr{F}_s^\xi)$ *таков, что*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty\right) = 1.$$

Если $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ — *квадратично интегрируемый мартингал, то к тому же* $\mathsf{M}\int_0^T f_s^2(\omega)\,ds < \infty$.

7. Рассмотрим теперь структуру функционалов от процессов диффузионного типа в гауссовском случае. Будем предполагать, что случайный процесс $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет дифференциал

$$d\xi_t = a_t(\xi)\,dt + b(t)\,dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{5.150}$$

где $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс, а $b(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — детерминированная функция с $b^2(t) \geqslant c > 0$ $\left(\int_0^T b^2(t)\,dt < \infty\right)$.

Теорема 5.21. *Пусть* $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *гауссовский мартингал. Если процесс* $(W, \xi, X) = (W_t, \xi_t, x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *образует гауссовскую систему и*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1, \tag{5.151}$$

то у мартингала $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ *существует непрерывная модификация и*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s)\,dW_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.152}$$

где измеримая детерминированная функция $f = f(t)$ *такова, что*

$$\int_0^T f^2(t)\,dt < \infty. \tag{5.153}$$

Доказательство. Гауссовский мартингал X является квадратично интегрируемым. Поэтому согласно теореме 5.18 найдется процесс $g = (g_t(\omega), \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\int_0^T \mathsf{M} g_t^2(\omega)\,dt < \infty$ такой, что

$$x_t = x_0 + \int_0^t g_s(\omega)\,dW_s. \tag{5.154}$$

Из (5.150) следует, что при каждом t случайные величины W_t $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримы. Следовательно, не только процесс $(W_t, \mathcal{F}_t)$, но и $(W_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ также является мартингалом, и, значит, $\mathsf{M}(W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi) = W_s$ (P-п. н.), $t \geqslant s$. Отсюда вытекает, что выражение

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \\ = \mathsf{M}\left[(x_t - \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_s^\xi))(W_t - \mathsf{M}(W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] \quad (5.155)$$

есть не что иное, как условная ковариация $\operatorname{cov}(x_t, W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ (см. обозначения в § 1 гл. 13).

Покажем, что в силу гауссовости процесса (W, ξ, X)

$$\operatorname{cov}(x_t, W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi) = \mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \\ = \mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s)\right] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \quad (5.156)$$

Для доказательства этого заметим сначала, что

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] - x_s W_s.$$

Пусть теперь $\mathcal{F}_{s,n}^\xi = \sigma\left\{\omega\colon \xi_0, \xi_{\frac{s}{2^n}}, \xi_{2\frac{s}{2^n}}, \ldots, \xi_s\right\}$. Тогда $\mathcal{F}_{s,n}^\xi \uparrow \mathcal{F}_s^\xi$, и, следовательно, по теореме 1.5 (P-п. н)

$$\mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \to \mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right], \quad \mathsf{M}\left[x_s W_s \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \to x_s W_s.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \lim_n \mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] - x_s W_s = \\ = \lim_n \left\{\mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] - \mathsf{M}\left[x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \mathsf{M}\left[W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right]\right\} + \\ + \lim_n \left\{\mathsf{M}\left[x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \mathsf{M}\left[W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right]\right\} - x_s W_s.$$

Поскольку $\mathcal{F}_s^\xi \supseteq \mathcal{F}_{s,n}^\xi$, то $\mathsf{M}\left[x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_s^\xi) \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] = \mathsf{M}(x_s \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi) \to x_s$ и, аналогично, $\mathsf{M}\left[W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] = \mathsf{M}\left[W_s \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \to W_s$. Следовательно,

$$\mathsf{M}\left[(x_t - x_s)(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \\ = \lim_n \left\{\mathsf{M}\left[x_t W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] - \mathsf{M}\left[x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right] \mathsf{M}\left[W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right]\right\} = \\ = \lim_n \mathsf{M}\left\{\left[x_t - \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\left[W_t - \mathsf{M}(W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right] \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right\}.$$

Но по теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1)

$$\mathsf{M}\left\{\left[x_t - \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\left[W_t - \mathsf{M}(W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right] \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi\right\} = \\ = \mathsf{M}\left\{\left[x_t - \mathsf{M}(x_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\left[W_t - \mathsf{M}(W_t \mid \mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\right\} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Итак,

$$\mathsf{M}\left[(x_t-x_s)(W_t-W_s)\,|\,\mathcal{F}_s^\xi\right]=$$
$$=\lim_n \mathsf{M}\left\{\left[x_t-\mathsf{M}(x_t\,|\,\mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\left[W_t-\mathsf{M}(W_t\,|\,\mathcal{F}_{s,n}^\xi)\right]\right\},$$

что в силу равномерной интегрируемости величин

$\left\{\mathsf{M}(x_t\,|\,\mathcal{F}_{s,n}^\xi),\ n=1,2,\ldots\right\}$ и $\left\{\mathsf{M}(W_t\,|\,\mathcal{F}_{s,n}^\xi),\ n=1,2,\ldots\right\}$

приводит к требуемому равенству (5.156).

Из этого равенства и (5.154) получаем, что

$$\int_s^t \mathsf{M}\left[g_u(\omega)\,|\,\mathcal{F}_s^\xi\right]du=\int_s^t \mathsf{M}g_u(\omega)\,du. \tag{5.157}$$

Рассмотрим теперь для фиксированного t, $0\leqslant t\leqslant T$, разбиение

$$0\equiv t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}\equiv t$$

с $\max\limits_j\left[t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}\right]\to 0$, $n\to\infty$, и положим

$$g_n(u)=\mathsf{M}\left[g_u(\omega)\,|\,\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}^\xi\right],\quad t_j^{(n)}\leqslant u<t_j^{(n+1)}.$$

Тогда согласно (5.157)

$$\int_0^t \mathsf{M}g_u(\omega)\,du-\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}\mathsf{M}g_u(\omega)\,du=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}g_n(u)\,du=\int_0^t g_n(u)\,du.$$

По теореме 5.19 σ-алгебры $\mathcal{F}_t^\xi$, $0\leqslant t\leqslant T$, непрерывны. Поэтому для каждого u, $0\leqslant u\leqslant t$, с вероятностью 1 при $n\to\infty$

$$g_n(u)\to\mathsf{M}\left[g_u(\omega)\,|\,\mathcal{F}_u^\xi\right]=g_u(\omega). \tag{5.158}$$

По неравенству Йенсена $\mathsf{M}g_n^2(u)\leqslant\mathsf{M}g_u^2(\omega)$, и, значит,

$$\int_0^t \mathsf{M}g_n^2(u)\,du\leqslant\int_0^t \mathsf{M}g_u^2(\omega)\,du<\infty.$$

Таким образом, на основании теоремы 1.8 семейство случайных функций $\{g_n(u),\ n=1,2,\ldots\}$ равномерно интегрируемо (по мере $\mathsf{P}(d\omega)\times du$) и в силу (5.158)

$$\mathsf{M}\left|\int_0^t\left[\mathsf{M}g_u(\omega)-g_u(\omega)\right]du\right|\leqslant\mathsf{M}\left|\int_0^t\left[\mathsf{M}g_u(\omega)-g_n(u)\right]du\right|+$$
$$+\mathsf{M}\left|\int_0^t\left[g_u(\omega)-g_n(u)\right]du\right|\leqslant\int_0^t\mathsf{M}\left|g_u(\omega)-g_n(u)\right|du\to 0,\quad n\to\infty.$$

Отсюда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, получаем

$$\int_0^t \mathsf{M} g_u(\omega)\, du = \int_0^t g_u(\omega) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{5.159}$$

и, значит, для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н.

$$g_t(\omega) = \mathsf{M} g_t(\omega).$$

Вместе с (5.154) это доказывает справедливость представления (5.152) с $f(t) = \mathsf{M} g_t(\omega)$.

Следствие 1. *Функцию $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, участвующую в представлении* (5.152), *можно определять из равенства*

$$f(t) = \frac{d\mathsf{M}\,[x_t W_t]}{dt}.$$

Следствие 2. *Пусть $\eta = \eta(\omega)$ — $\mathcal{F}_T^\xi$-измеримая гауссовская случайная величина. Предположим, что* (η, W, ξ) *образует гауссовскую систему. Тогда найдется детерминированная функция $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, такая, что* ($\mathsf{P}$-п. н.)

$$\eta(\omega) = \mathsf{M}\eta(\omega) + \int_0^T f(s)\, dW_s, \tag{5.160}$$

где $\int_0^T f^2(s)\, ds < \infty$.

По теореме о нормальной корреляции мартингал $x_t = \mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ будет гауссовским. Гауссовской будет и система (W, ξ, X) с $X = (x_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому (5.160) следует из (5.152), если только учесть, что $x_T = \eta$, а $x_0 = \mathsf{M}\eta$ (P-п. н.).

ГЛАВА 6

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СУПЕРМАРТИНГАЛЫ И МАРТИНГАЛЫ. ТЕОРЕМА ГИРСАНОВА

§ 1. Неотрицательные супермартингалы

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$, пополненных множествами из $\mathscr{F}$ нулевой вероятности. Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс и $\gamma = (\gamma_t, \mathscr{F}_t)$—случайный процесс с

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\, ds < \infty\right) = 1. \tag{6.1}$$

При исследовании вопросов об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам Ито, относительно винеровской меры (см. следующую главу) существенную роль играют неотрицательные непрерывные P-п. н. случайные процессы $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, допускающие представление

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \gamma_s\, dW_s. \tag{6.2}$$

В следующей лемме показывается, что процессы такого типа необходимо являются супермартингалами.

Лемма 6.1. *Пусть процесс* $\gamma = (\gamma_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, *удовлетворяет условию* (6.1) *и* $\mathfrak{z}_t \geqslant 0$ (P-п. н.), $0 \leqslant t \leqslant T$. *Тогда случайный процесс* $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$ *является* (*неотрицательным*) *супермартингалом*,

$$\mathsf{M}(\mathfrak{z}_t \mid \mathscr{F}_s) \leqslant \mathfrak{z}_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \quad t \geqslant s, \tag{6.3}$$

и, в частности,

$$\mathsf{M}\mathfrak{z}_t \leqslant 1. \tag{6.4}$$

Доказательство. Положим *) для $n \geqslant 1$

$$\tau_n = \inf\left\{ t \leqslant T:\ \int_0^t \gamma_s^2\, ds \geqslant n \right\},$$

считая $\tau_n = T$, если $\int_0^T \gamma_s^2\, ds < n$. Тогда согласно (4.63) для $t > s$

$$\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n} = 1 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \gamma_u\, dW_u = \mathfrak{z}_{s\wedge\tau_n} + \int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} \gamma_u\, dW_u.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}\left[\int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} \gamma_n\, dW_u \mid \mathscr{F}_s\right] = 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

то

$$\mathsf{M}\left[\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n} \mid \mathscr{F}_s\right] = \mathfrak{z}_{s\wedge\tau_n} \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Но $\tau_n \to T$ с вероятностью единица при $n \to \infty$, поэтому в силу неотрицательности и непрерывности процесса $\mathfrak{z}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, по лемме Фату $\mathsf{M}(\mathfrak{z}_t \mid \mathscr{F}_s) \leqslant \mathfrak{z}_s$.

2. Лемма 6.2. *Неотрицательный супермартингал* $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *с* $\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \gamma_t\, dW_s$, $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\, ds < \infty\right) = 1$, *допускает представление*

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left(\Gamma_t(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\, ds\right), \tag{6.5}$$

где

$$\beta_s = \mathfrak{z}_s^+ \gamma_s, \qquad \mathfrak{z}_s^+ = \begin{cases} \mathfrak{z}_s^{-1}, & \mathfrak{z}_s > 0, \\ 0, & \mathfrak{z}_s = 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

а **)

$$\Gamma_t(\beta) = \mathsf{P}\text{-}\lim_n \chi_{\left(\int_0^t \beta_s^2\, ds < \infty\right)} \int_0^t \beta_s^{(n)}\, dW_s, \quad \beta_s^{(n)} = \beta_s \chi_{\left(\int_0^t \beta_u^2\, du \leqslant n\right)}.$$

---

*) В соответствии с замечанием к лемме 4.4 у процесса $\int_0^t \gamma_s^2\, ds$, $t \leqslant T$, существует прогрессивно измеримая модификация, которая и будет рассматриваться как в этом, так и в других аналогичных случаях. Тогда момены τ_n будут марковскими относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

**) Случайные величины $\Gamma_t(\beta)$ подробно изучались в п. 9 § 2 гл. 4.

Доказательство. Пусть

$$\sigma_n = \inf\left\{t \leqslant T:\ \mathfrak{z}_t = \frac{1}{n}\right\}$$

$\left(\sigma_n = \infty,\right.$ если $\left.\inf\limits_{t\leqslant T} \mathfrak{z}_t > \frac{1}{n}\right)$. Пусть также

$$\sigma = \inf\{t \leqslant T:\ \mathfrak{z}_t = 0\}$$

($\sigma = \infty$, если $\inf\limits_{t\leqslant T} \mathfrak{z}_t > 0$). Ясно, что **P**-п. н. $\sigma_n \uparrow \sigma$, $n \to \infty$. Согласно замечанию 2 к теореме 3.5

$$\mathfrak{z}_t = 0 \qquad (\{T \geqslant t \geqslant \sigma\};\ \mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_{t\wedge\sigma} \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.}) \tag{6.7}$$

и

$$\mathfrak{z}_t\mathfrak{z}_t^+ = \begin{cases} 1, & t < \sigma, \\ 0, & t \geqslant \sigma. \end{cases} \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) получаем, что **P**-п. н.

$$\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_{t\wedge\sigma} = 1 + \int_0^{t\wedge\sigma} \gamma_s\, dW_s = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\gamma_s\, dW_s,$$

т. е.

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s\beta_s\, dW_s \tag{6.9}$$

с $\beta_s = \mathfrak{z}_s^+\gamma_s$.

Ясно, что

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T (\mathfrak{z}_s\beta_s)^2\, ds < \infty\right) = \mathbf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\, ds < \infty\right) = 1. \tag{6.10}$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \int_0^{\sigma_n\wedge T} \beta_s^2\, ds \leqslant \int_0^{\sigma_n\wedge T} (\mathfrak{z}_s\beta_s)^2\, ds < \infty.$$

Отсюда получаем $\mathbf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_n\wedge T} \beta_s^2\, ds < \infty\right) = 1$ и, применяя формулу Ито к $\ln \mathfrak{z}_{t\wedge\sigma_n}$, из (6.9) находим, что

$$\mathfrak{z}_{t\wedge\sigma_n} = \exp\left(\int_0^{t\wedge\sigma_n} \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_n} \beta_s^2\, ds\right). \tag{6.11}$$

Заметим теперь, что для каждого $t \leqslant T$ на множестве $\{\omega\colon t < \sigma \leqslant T\}$

$$\int_0^t \beta_s^2\, ds < \infty \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.})$$

и на множестве $\{\omega\colon T \geqslant t \geqslant \sigma\}$

$$\mathfrak{z}_t = 0 \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому $\{\omega\colon \mathfrak{z}_t > 0\} \subseteq \left\{\omega\colon \int_0^t \beta_s^2\, ds < \infty\right\}$, и, обозначая $\chi_t = \chi_{\left(\int_0^t \beta_s^2\, ds < \infty\right)}$, получаем

$$\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_t \chi_t = \mathfrak{z}_{t \wedge \sigma} \chi_t = \mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \mathfrak{z}_{t \wedge \sigma_n} =$$

$$= \mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \exp\left(\int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s^2\, ds\right) =$$

$$= \mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \exp\left(\chi_t \int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s^2\, ds\right) =$$

$$= \chi_t \exp\left(\mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{t \wedge \sigma} \beta_s^2\, ds\right). \qquad (6.12)$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \int_{t \wedge \sigma_n}^{t \wedge \sigma} \beta_s^2\, ds = 0,$$

то согласно п. 9 § 2 гл. 4 существует

$$\Gamma_{t \wedge \sigma}(\beta) = \mathbf{P}\text{-}\lim_n \chi_t \int_0^{t \wedge \sigma_n} \beta_s\, dW_s.$$

Следовательно, $\mathbf{P}$-п. н. для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathfrak{z}_t = \chi_t \exp\left(\Gamma_{t \wedge \sigma}(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^{t \wedge \sigma} \beta_s^2\, ds\right). \qquad (6.13)$$

Поэтому на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$ P-п. н.

$$\chi_\sigma \exp\left(\Gamma_\sigma(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds\right) = 0. \tag{6.14}$$

Выведем отсюда, что на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$

$$\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds = \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Действительно, предположим противное, т. е. что

$$\mathsf{P}\left\{(\sigma \leqslant T) \cap \left(\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds < \infty\right)\right\} > 0.$$

Тогда на основании леммы 4.7

$$\mathsf{P}\left\{(\sigma \leqslant T) \cap \left(\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds < \infty\right) \cap \left(\sup_n \left|\int_0^{\sigma_n} \beta_s\,dW_s\right| = \infty\right)\right\} = 0,$$

и, следовательно, на множестве $(\sigma \leqslant T) \cap \left(\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds < \infty\right)$ положительной вероятности

$$\mathfrak{z}_{\sigma_n} = \exp\left(\int_0^{\sigma_n} \beta_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma_n} \beta_s^2\,ds\right) \not\to 0, \qquad n \to \infty,$$

что противоречит тому, что $\mathfrak{z}_{\sigma_n} \to \mathfrak{z}_\sigma = 0$ (P-п. н.) на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$.

Итак,

$$\{\omega\colon\ \sigma \leqslant T\} \cap \left\{\omega\colon\ \int_0^\sigma \beta_s^2\,ds = \infty\right\} = \{\omega\colon\ \sigma \leqslant T\}. \tag{6.15}$$

Покажем теперь, что для каждого $t \leqslant T$ P-п. н. правая часть в (6.13) равна

$$\chi_t \exp\left(\Gamma_{t \wedge \sigma}(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma} \beta_s^2\,ds\right) = \exp\left(\Gamma_t(\beta) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right). \tag{6.16}$$

Зафиксируем t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда, если ω таково, что $t < \sigma$, то (6.16) выполнено очевидным образом, поскольку в этом случае $\chi_t = 1$, а $t \wedge \sigma = t$. Пусть теперь $T \geqslant t \geqslant \sigma$. Тогда левая часть в (6.16) равна нулю. Правая часть также равна нулю, поскольку на множестве $\{\sigma \leqslant T\}$

$$\int_0^\sigma \beta_s^2\,ds = \infty, \quad \text{а} \quad \Gamma_\sigma(\beta) = 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

(ср. с п. 9 § 2 гл. 4).

3. Важным частным случаем неотрицательных непрерывных P-п. н. супермартингалов, допускающих представление (6.2), являются процессы $\varphi = (\varphi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, с

$$\varphi_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right), \tag{6.17}$$

где процесс $\beta = (\beta_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, таков, что $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2\,ds < \infty\right) = 1.$

То, что такие процессы допускают представление (6.2), следует непосредственно из формулы Ито, приводящей к уравнению

$$\varphi_t = 1 + \int_0^t \varphi_s\beta_s\,dW_s. \tag{6.18}$$

Тем самым получено представление (6.2) с $\gamma_s = \varphi_s\beta_s$, причем $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\,ds < \infty\right) = 1.$

4. Исследуем сейчас подробнее вопросы существования и единственности непрерывных решений уравнений типа (6.18), а также рассмотрим возможность представления этих решений в виде (6.17) или (6.5).

Итак, пусть ищутся неотрицательные непрерывные P-п. н. решения уравнения

$$dx_t = x_t\alpha_t\,dW_t, \qquad x_0 = 1, \qquad t \leqslant T, \tag{6.19}$$

удовлетворяющие предположению $\mathsf{P}\left(\int_0^T x_t^2\alpha_t^2\,dt < \infty\right) = 1.$

Если случайный процесс $\alpha = (\alpha_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, таков, что $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2\,dt < \infty\right) = 1$, то неотрицательное решение такого уравнения существует, единственно и задается формулой

$$x_t = \exp\left(\int_0^t \alpha_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2\,ds\right). \tag{6.20}$$

(Если y_t, $t \leqslant T$, — еще одно непрерывное решение, то по формуле Ито находим, что $d\left(\frac{y_t}{x_t}\right) \equiv 0$, откуда вытекает, что $y_t = x_t$, $t \leqslant T$, P-п. н.)

Если известно, что процесс $\alpha = (\alpha_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, таков, что уравнение (6.19) имеет непрерывное неотрицательное решение, то из доказательства леммы 6.2 следует, что такое решение может быть представлено в виде

$$x_t = \exp\left(\Gamma_t(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2\,ds\right) \tag{6.21}$$

и это решение единственно.

Естественно поставить теперь вопрос о том, при каких предположениях о процессе $\alpha = (\alpha_t, \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, уравнение (6.19) имеет неотрицательное непрерывное решение. Ответ на этот вопрос содержится в приводимой ниже лемме, для формулировки которой введем следующие обозначения.

Пусть

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\left\{t \leqslant T: \int_0^t \alpha_s^2\,ds \geqslant n^2\right\}, \\ \infty, \quad \text{если} \quad \int_0^T \alpha_s^2\,ds < n^2, \end{cases} \tag{6.22}$$

и $\tau = \lim\limits_n \tau_n$.

Ясно, что $\int_0^\tau \alpha_s^2\,ds = \infty$ на множестве $\{\omega: \tau \leqslant T\}$.

Лемма 6.3. *Для того чтобы уравнение* (6.19) *имело неотрицательное непрерывное* P-п. н. *решение, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathsf{P}(\tau_1 > 0) = 1$ *и на множестве*)* $\{\omega: \tau \leqslant T\}$

$$\lim_n \int_0^{\tau_n} \alpha_s^2\,ds = \infty. \tag{6.23}$$

Это решение единственно и задается формулой (6.21).

*) Условие (6.23) означает, что на множестве $\{\omega: \tau \leqslant T\}$ «уход» интеграла $\int_0^t \alpha_s^2(\omega)\,ds$ в бесконечность при $t \to \tau(\omega)$ происходит непрерывным образом.

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение

$$x_t = 1 + \int_0^t x_s \alpha_s \, dW_s \tag{6.24}$$

имеет решение $\mathfrak{z}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \mathfrak{z}_s^2 \alpha_s^2 \, ds < \infty\right) = 1. \tag{6.25}$$

Согласно лемме 6.2

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left(\Gamma_t(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2 ds\right). \tag{6.26}$$

Поэтому, если для некоторого $n = 1, 2, \ldots$ $\mathsf{P}(\tau_n = 0) > 0$, то это означало бы, что $\int_0^t \alpha_s^2 ds = \infty$ с положительной вероятностью для любого $t > 0$. Но тогда из (6.26) вытекало бы, что с положительной вероятностью $\mathfrak{z}_0 = 0$. Это, однако, противоречит предположению $\mathsf{P}(\mathfrak{z}_0 = 1) = 1$.

Далее, $\int_0^\tau \alpha_s^2 ds = \infty$ на множестве $\{\omega: \tau \leqslant T\}$ и, следовательно, $\mathfrak{z}_\tau = 0$. Поэтому на множестве $\{\tau \leqslant T\}$ P-п. н.

$$0 = \mathfrak{z}_\tau = \mathsf{P}\text{-}\lim_n \mathfrak{z}_{\tau_n} = \mathsf{P}\text{-}\lim_n \exp\left(\Gamma_{\tau_n}(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} \alpha_s^2 ds\right).$$

Отсюда с помощью леммы 4.7 уже нетрудно вывести, что выполнено условие (6.23).

Достаточность. Пусть процесс $\alpha = (\alpha_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет условиям леммы. Покажем, что тогда

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left(\Gamma_t(\alpha) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) \tag{6.27}$$

является решением уравнения (6.19). Для этого надо проверить, во-первых, что $\mathfrak{z}_0 = 1$, во-вторых, что $\mathsf{P}\left(\int_0^t (\mathfrak{z}_s \alpha_s)^2 ds < \infty\right) = 1$, в-третьих, что $\mathfrak{z}_t$, $t \leqslant T$, непрерывен P-п. н. и, наконец, что $d\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_t \alpha_t \, dW_t$.

Условие $\mathfrak{z}_0=1$ вытекает из того, что $\mathsf{P}(\tau_n>0)=1$, $n=1,2,\ldots$

Займемся проверкой непрерывности P-п. н. $\mathfrak{z}_t$, $t\leqslant T$, и условия $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T(\mathfrak{z}_s\alpha_s)^2\,ds<\infty\right)=1$.

Из (6.27) и п. 9 § 2 гл. 4 следует, что на $\{\omega\colon \tau_n\leqslant T\}$

$$\mathfrak{z}_{\tau_n}=\exp\left(\int\limits_0^{\tau_n}\alpha_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_n}\alpha_s^2\,ds\right),\tag{6.28}$$

и, следовательно, по формуле Ито

$$\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T}=1+\int\limits_0^{\tau_n\wedge T}\mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s.$$

Как и в лемме 6.1, отсюда нетрудно вывести, что последовательность $\left(\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T},\mathscr{F}_{\tau_n\wedge T}\right)$, $n=1,2,\ldots$, является (неотрицательным) супермартингалом с $\mathsf{M}\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T}\leqslant 1$. Поэтому согласно теореме 2.6 P-п. н. существует $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T}(=\mathfrak{z}^*)$, причем $\mathsf{M}\mathfrak{z}^*\leqslant 1$. Отсюда вытекает, что

$$\mathsf{P}(\mathfrak{z}^*<\infty)=1.$$

Покажем, что процесс $\mathfrak{z}_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, определенный в (6.27), является P-п. н. непрерывным.

Поскольку

$$\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n}=\exp\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\alpha_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t\wedge\tau_n}\alpha_s^2\,ds\right),\tag{6.29}$$

то $\mathfrak{z}_t$ является P-п. н. непрерывной функцией для $t\leqslant\tau_n$. Для $\tau\leqslant t\leqslant T$ $\mathfrak{z}_t=0$ (P-п. н.), поскольку на множестве $\{\omega\colon \tau\leqslant t\leqslant T\}$ $\int\limits_0^{\tau}\alpha_s^2\,ds=\infty$. Поэтому $\mathfrak{z}_t$, $t\leqslant T$, будет P-п. н. непрерывной функцией, если показать, что $\mathsf{P}(\mathfrak{z}^*=0)=1$.

Из (6.28) по формуле Ито

$$e^{-\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T}}=e^{-1}-\int\limits_0^{\tau_n\wedge T}e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_n\wedge T}e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds.\tag{6.30}$$

Здесь $\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau_n\wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s=0$, так как

$$\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau_n\wedge T} e^{-2\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds\leqslant\sup_{0\leqslant z\leqslant\infty}e^{-2z}z^2n^2<\infty.$$

Поэтому из (6.30) следует, что

$$\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau_n\wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds=2\mathsf{M}\left[e^{-\mathfrak{z}_{\tau_n\wedge T}}-e^{-1}\right]\leqslant 2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, находим

$$\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau\wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds\leqslant 2. \tag{6.31}$$

Из (6.31) вытекает, что P-п. н.

$$\infty>\int\limits_0^{\tau\wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds\geqslant\int\limits_{\tau_n\wedge T}^{\tau_{n+1}\wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{\tau_n\wedge T\leqslant s\leqslant\tau_{n+1}\wedge T}\left[e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\right]\int\limits_{\tau_n\wedge T}^{\tau_{n+1}\wedge T}\alpha_s^2\,ds. \tag{6.32}$$

На множестве $\{\omega:\ \tau\leqslant T\}$ в силу (6.23) и (6.22)

$$\int\limits_{\tau_n\wedge T}^{\tau_{n+1}\wedge T}\alpha_s^2\,ds=\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}\alpha_s^2\,ds=2n+1.$$

Поэтому из (6.32) следует, что на $\{\tau\leqslant T\}$

$$\inf_{\tau_n\leqslant s\leqslant\tau_{n+1}}\left[e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\right]\leqslant\frac{\int\limits_0^{\tau} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds}{2n+1}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Значит, на $\{\tau\leqslant T\}$ P-п. н.

$$e^{-\mathfrak{z}^*}(\mathfrak{z}^*)^2=0.$$

Но $\mathsf{P}(\mathfrak{z}^*<\infty)=1$, поэтому $\mathsf{P}(\mathfrak{z}^*=0)=1$.

Итак, непрерывность P-п. н. траекторий процесса $\mathfrak{z}_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, доказана.

Далее, как и в (6.32), находим, что

$$\infty > \int_0^{\tau \wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds \geqslant \inf_{0 \leqslant s \leqslant \tau \wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s} \int_0^{\tau \wedge T} \mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds. \tag{6.33}$$

Поскольку $\mathfrak{z}_s$, $s \leqslant T$, является непрерывным процессом, то $\mathsf{P}\left(\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant \tau \wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s} > 0\right) = 1$, что вместе с (6.33) дает

$$\int_0^T \mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds = \int_0^{\tau \wedge T} \mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds \leqslant \frac{\int_0^{\tau \wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}\mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds}{\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant \tau \wedge T} e^{-\mathfrak{z}_s}} < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{6.34}$$

т. е. $\mathsf{P}\left(\int_0^T \mathfrak{z}_s^2\alpha_s^2\,ds < \infty\right) = 1$. Из этого условия следует, что определены стохастические интегралы $\int_0^t \mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s$ для всех $t \leqslant T$.

Обозначим

$$y_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s, \qquad t \leqslant T. \tag{6.35}$$

В силу (6.28)

$$\mathfrak{z}_{t \wedge \tau_n} = 1 + \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s, \qquad t \leqslant T.$$

Поэтому $y_t = \mathfrak{z}_t$ (P-п. н.) для всех $t \leqslant \tau_n \leqslant T$, и в силу непрерывности траекторий этих процессов $y_t = \mathfrak{z}_t$ (P-п. н.) для $t \leqslant \tau \leqslant T$.

Итак, если $\tau \geqslant T$, то $y_t = \mathfrak{z}_t$ (P-п. н.) для всех $t \leqslant T$. Если же $\tau < T$, то $y_\tau = \mathfrak{z}_\tau = 0$ и для $t > \tau$ $y_t = y_\tau + \int_\tau^t \mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s = y_\tau = 0$, поскольку $\mathfrak{z}_s = 0$ для $s \geqslant \tau$. Следовательно, $y_t = \mathfrak{z}_t$ (P-п. н.) для всех $t \leqslant T$, и, значит, согласно (6.35)

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s\alpha_s\,dW_s.$$

Покажем теперь, что решение (6.27) уравнения (6.19) с точностью до стохастической эквивалентности является единственным.

Пусть $\tilde{\mathfrak{z}}_t$, $t\leqslant T$, — еще одно неотрицательное непрерывное решение уравнения (6.19). Тогда $d(\tilde{\mathfrak{z}}_t/\mathfrak{z}_t)\equiv 0$ при $t<\tau=\lim\limits_n \tau_n$ (ср. с п. 4 § 3 гл. 5). Поэтому $\mathfrak{z}_t=\tilde{\mathfrak{z}}_t$ (P-п. н.) при $t<\tau\wedge T$ и по непрерывности $\mathfrak{z}_\tau=\tilde{\mathfrak{z}}_\tau$. Следовательно, на множестве $\{\omega:\ \tau>T\}$ $\mathfrak{z}_t=\tilde{\mathfrak{z}}_t$, $t\leqslant T$. Рассмотрим теперь множество $\{\omega:\ \tau\leqslant T\}$. Поскольку оба процесса $\mathfrak{z}_t$ и $\tilde{\mathfrak{z}}_t$ являются (как решения уравнения (6.19)) супермартингалами, то $\mathfrak{z}_t=\tilde{\mathfrak{z}}_t=0$ (P-п. н.) на множестве $\{\omega:\ \tau\leqslant t\leqslant T\}$.

Итак, $\mathfrak{z}_t=\tilde{\mathfrak{z}}_t$ (P-п. н.) для каждого t, $0\leqslant t\leqslant T$. Из непрерывности этих процессов вытекает, что их траектории совпадают P-п. н., т. е. $\mathsf{P}\{\sup\limits_{t\leqslant T}|\mathfrak{z}_t-\tilde{\mathfrak{z}}_t|>0\}=0$.

§ 2. Неотрицательные мартингалы

1. При некоторых простых предположениях супермартингал $\varphi=(\varphi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, введенный в (6.17), оказывается мартингалом. Настоящий параграф будет посвящен исследованию этого вопроса.

Начнем с доказательства следующего общего результата.

Лемма 6.4. *Если* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — *супермартингал и*

$$\mathsf{M}\xi_0=\mathsf{M}\xi_T, \tag{6.36}$$

то он является мартингалом.

Доказательство. В силу супермартингальности

$$\mathsf{M}\xi_T\leqslant \mathsf{M}\xi_t\leqslant \mathsf{M}\xi_0.$$

Поэтому согласно (6.36) $\mathsf{M}\xi_t=\mathrm{const}$, $t\leqslant T$.

Обозначим $A=\{\omega:\ \mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_s)<\xi_s\}$, где $0\leqslant s<t\leqslant T$, и предположим, что $\mathsf{P}(A)>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\xi_T=\mathsf{M}\xi_t=\mathsf{M}\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_s)&=\\ =\mathsf{M}\{\chi_A\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_s)\}+\mathsf{M}\{(1-\chi_A)\,\mathsf{M}(\xi_t|\mathscr{F}_s)\}&<\mathsf{M}\chi_A\xi_s+\\ &+\mathsf{M}(1-\chi_A)\,\xi_s=\mathsf{M}\xi_s,\end{aligned}$$

что противоречит равенству $\mathsf{M}\xi_T=\mathsf{M}\xi_s$. Поэтому $\mathsf{P}(A)=0$, а следовательно, процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, является мартингалом.

2. Теорема 6.1. *Пусть* $\beta=(\beta_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — *случайный процесс с* $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2\,ds<\infty\right)=1$. *Тогда, если*

$$\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_s^2\,ds\right)<\infty, \tag{6.37}$$

то супермартингал $\varphi(\beta)=(\varphi_t(\beta), \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, *с*

$$\varphi_t(\beta)=\exp\left(\int_0^t \beta_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right)$$

является мартингалом и, в частности, $\mathsf{M}\varphi_t(\beta)=1$, $t\leqslant T$.

Доказательство. Пусть $a>0$ и

$$\sigma_a=\begin{cases}\inf\left\{t\leqslant T:\ \int_0^t \beta_s\,dW_s-\int_0^t \beta_s^2\,ds=-a\right\},\\ T,\quad \text{если}\quad \inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\int_0^t \beta_s\,dW_s-\int_0^t \beta_s^2\,ds\right]>-a.\end{cases}$$

Положим $\lambda\leqslant 0$ и покажем вначале, что

$$\mathsf{M}\varphi_{\sigma_a}(\lambda\beta)=1. \tag{6.38}$$

Для этого заметим, что

$$\varphi_{\sigma_a}(\lambda\beta)=1+\lambda\int_0^{\sigma_a}\varphi_s(\lambda\beta)\,\beta_s\,dW_s.$$

Поэтому для доказательства равенства (6.38) достаточно показать, что

$$\mathsf{M}\int_0^{\sigma_a}\varphi_s^2(\lambda\beta)\,\beta_s^2\,ds<\infty. \tag{6.39}$$

В силу предположения (6.37)

$$\mathsf{M}\int_0^{\sigma_a}\beta_s^2\,ds\leqslant 2\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sigma_a}\beta_s^2\,ds\right)\leqslant 2\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T}\beta_s^2\,ds\right)<\infty. \tag{6.40}$$

С другой стороны, при $\lambda\leqslant 0$ и $0\leqslant s\leqslant\sigma_a$

$$\varphi_s(\lambda\beta)=\exp\left(\lambda\int_0^s\beta_u\,dW_u-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^s\beta_u^2\,du\right)=$$

$$=\exp\left\{\lambda\left[\int_0^s\beta_u\,dW_u-\int_0^s\beta_u^2\,du\right]\right\}\exp\left\{\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\int_0^s\beta_u^2\,du\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{\lambda\left[\int_0^s\beta_u\,dW_u-\int_0^s\beta_u^2\,du\right]\right\}\leqslant\exp\{|\lambda|a\}.$$

Следовательно, $\varphi_s^2(\lambda\beta) \leqslant \exp\{2a|\lambda|\}$ при $s \leqslant \sigma_a$ и (6.39) вытекает из (6.40).

Докажем теперь, что равенство (6.38) остается справедливым и при $\lambda \leqslant 1$. С этой целью обозначим $\rho_{\sigma_a}(\lambda\beta) = e^{\lambda a}\varphi_{\sigma_a}(\lambda\beta)$. Если $\lambda \leqslant 0$, то согласно (6.38)

$$\mathsf{M}\rho_{\sigma_a}(\lambda\beta) = e^{\lambda a}. \tag{6.41}$$

Обозначим

$$A(\omega) = \int_0^{\sigma_a} \beta_t^2 dt, \qquad B(\omega) = \int_0^{\sigma_a} \beta_t \, dW_t - \int_0^{\sigma_a} \beta_t^2 \, dt + a \geqslant 0,$$

и пусть $u(z) = \rho_{\sigma_a}(\lambda\beta)$, где $\lambda = 1 - \sqrt{1-z}$.

Ясно, что если $0 \leqslant z \leqslant 1$, то и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

В силу определения функции $\rho_{\sigma_a}(\lambda\beta)$

$$u(z) = \exp\left\{\frac{z}{2} A(\omega) + \left(1 - \sqrt{1-z}\right) B(\omega)\right\}.$$

При $z < 1$ функция $u(z)$ представима (P-п. н.) в виде ряда

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} p_k(\omega),$$

где, как нетрудно проверить, $p_k(\omega) \geqslant 0$ (P-п. н.) для всех $k = 0, 1, \ldots$

Если $z \leqslant 1$, то в силу леммы 6.1

$$\mathsf{M}u(z) \leqslant e^{a(1-\sqrt{1-z})}$$

и, в частности, для любого $0 \leqslant z_0 < 1$

$$\mathsf{M}u(z_0) < \infty.$$

Поэтому для $|z| \leqslant z_0$

$$\mathsf{M}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} p_k(\omega) \leqslant \mathsf{M}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_0^k}{k!} p_k(\omega) = \mathsf{M}u(z_0) < \infty.$$

Отсюда в силу теоремы Фубини следует, что для любого $|z| < 1$

$$\mathsf{M}u(z) = \mathsf{M}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} p_k(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \mathsf{M}p_k(\omega). \tag{6.42}$$

При $z < 1$

$$e^{a(1-\sqrt{1-z})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} c_k,$$

где $c_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$

В силу этого равенства и формул (6.41), (6.42) для $-1 < z \leqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \mathsf{M} p_k(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} c_k.$$

Поэтому $\mathsf{M} p_k(\omega) = c_k$, $k = 0, 1, \ldots$, а значит (см. (6.42)), для $0 \leqslant z < 1$

$$\mathsf{M} u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} c_k = e^{a(1-\sqrt{1-z})},$$

что и доказывает справедливость равенства (6.41) для всех $\lambda < 1$. Поскольку $B(\omega) \geqslant 0$, $A(\omega) \geqslant 0$ (P-п. н.), то

$$\rho_{\sigma_a}(\lambda\beta) = \exp\left\{ \lambda B(\omega) + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) A(\omega) \right\} \uparrow \rho_{\sigma_a}(\beta)$$

при $\lambda \uparrow 1$. Поэтому по теореме 1.1 (о монотонной сходимости) $\lim\limits_{\lambda \uparrow 1} \mathsf{M} \rho_{\sigma_u}(\lambda\beta) = \mathsf{M} \rho_{\sigma_a}(\beta)$, и, следовательно, в силу (6.41)

$$\mathsf{M} \rho_{\sigma_a}(\beta) = \lim_{\lambda \uparrow 1} \mathsf{M} \rho_{\sigma_a}(\lambda\beta) = e^a,$$

а значит,

$$\mathsf{M} \varphi_{\sigma_a}(\beta) = 1.$$

Отсюда

$$1 = \mathsf{M} \varphi_{\sigma_a}(\beta) = \mathsf{M}\left[\varphi_{\sigma_a}(\beta) \chi_{(\sigma_a < T)}\right] + \mathsf{M}\left[\varphi_{\sigma_a}(\beta) \chi_{(\sigma_a = T)}\right] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\varphi_{\sigma_a}(\beta) \chi_{(\sigma_a < T)}\right] + \mathsf{M}\left[\varphi_T(\beta) \chi_{(\sigma_a = T)}\right]$$

и

$$\mathsf{M} \varphi_T(\beta) = 1 - \mathsf{M}\left[\varphi_{\sigma_a}(\beta) \chi_{(\sigma_a < T)}\right] + \mathsf{M}\left[\varphi_T(\beta) \chi_{(\sigma_a < T)}\right]. \tag{6.43}$$

Но $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_{a \to \infty} \chi_{(\sigma_a < T)} = 0$ и $\mathsf{M} \varphi_T(\beta) \leqslant 1$. Поэтому

$$\lim_{a \to \infty} \mathsf{M} \chi_{(\sigma_a < T)} \varphi_T(\beta) = 0. \tag{6.44}$$

Далее, на множестве $(\sigma_a < T)$

$$\varphi_{\sigma_a}(\beta) = \exp\left\{ -a + \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_a} \beta_s^2 \, ds \right\} \leqslant \exp\left\{ -a + \frac{1}{2} \int_0^T \beta_s^2 \, ds \right\},$$

и, значит,

$$\mathsf{M} \chi_{(\sigma_a < T)} \varphi_{\sigma_a}(\beta) \leqslant e^{-a} \mathsf{M} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \beta_s^2 \, ds \right) \to 0, \quad a \to \infty. \tag{6.45}$$

Из (6.43) — (6.45) получаем требуемый результат: $\mathsf{M}\varphi_T(\beta)=1$, из которого согласно лемме 6.4 следует, что $\varphi(\beta)=(\varphi_t(\beta), \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, является мартингалом.

Замечание. Теорема 6.1 справедлива с заменой T на любой марковский момент τ (относительно $(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$). В частности, утверждение теоремы верно при $T=\infty$.

Следствие. *Пусть* $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — *винеровский процесс и* $\tau=\tau(\omega)$ — *марковский момент (относительно* $(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$) *с*

$$\mathsf{M}e^{\frac{1}{2}\tau} > \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{M}e^{W_\tau-\frac{1}{2}\tau}=1.$$

3. Приведем ряд примеров, в которых супермартингал $\varphi(\beta)=(\varphi_t(\beta), \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, с

$$\varphi_t(\beta)=\exp\left(\int_0^t \beta_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right)$$

является мартингалом и, в частности, $\mathsf{M}\varphi_t(\beta)=1$, $t\leqslant T$.

Пример 1. Если $|\beta_t|\leqslant K<\infty$ (P-п. н.), $t\leqslant T$, то $\mathsf{M}\varphi_t(\beta)=1$, $t\leqslant T$, в силу того, что

$$\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right)\leqslant \exp\left(\frac{T}{2}K^2\right)<\infty.$$

Пример 2. Пусть $\tau_n=\inf\left\{t\leqslant T:\ \int_0^t \beta_s^2\,ds=n\right\}$, причем $\tau_n=T$, если $\int_0^T \beta_s^2\,ds<n$. Тогда

$$\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau_n} \beta_s^2\,ds\right)\leqslant e^{n/2}<\infty$$

и $\mathsf{M}\varphi_{\tau_n}(\beta)=1$ согласно замечанию к теореме 6.1.

Пример 3. Пусть для некоторого $\delta>0$

$$\sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}\exp(\delta\beta_t^2)<\infty. \tag{6.46}$$

Тогда $\mathsf{M}\varphi_t(\beta)=1$, $t\leqslant T$. Действительно, по неравенству Йенсена

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right)=\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{T\beta_t^2}{2}\,dt\right)\leqslant\frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(\frac{T\beta_t^2}{2}\right)dt.$$

Поэтому, если $T\leqslant 2\delta$, то

$$\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right)\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}\exp(\delta\beta_t^2)<\infty,$$

и по теореме 6.1 $\mathsf{M}\varphi_T(\beta)=1$.

Пусть теперь $T>2\delta$. Представим $\varphi_T(\beta)$ в виде произведения

$$\varphi_T(\beta)=\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta),$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$,

$$\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)=\exp\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}\beta_t\,dW_t-\frac{1}{2}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\beta_t^2\,dt\right)$$

и $\max\limits_j\,[t_{j+1}-t_j]\leqslant 2\delta$.

Тогда $\mathsf{M}\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)=1$ и $\mathsf{M}\left[\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)\,|\,\mathscr{F}_{t_j}\right]=1$ (P-п. н.). Следовательно,

$$\mathsf{M}\varphi_T(\beta)=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(\varphi_T(\beta)\,|\,\mathscr{F}_{t_{n-1}}\right)\right]=\mathsf{M}\varphi_{t_{n-1}}(\beta)=\ldots=\mathsf{M}\varphi_{t_1}=1.$$

Условие типа (6.46) легко проверяется в следующих двух случаях.

а) Пусть $\beta=(\beta_t,\mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — гауссовский процесс с

$$\sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}\,|\beta_t|<\infty,\qquad \sup_{t\leqslant T}\mathsf{D}\beta_t<\infty.$$

Тогда, выбирая

$$\delta<\frac{1}{2\sup\limits_{t\leqslant T}\mathsf{D}\beta_t},$$

находим, что

$$\sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}\exp(\delta\beta_t^2)=\sup_{t\leqslant T}\frac{\exp\left[\dfrac{\delta(\mathsf{M}\beta_t)^2}{1-2\delta\mathsf{D}\beta_t}\right]}{\sqrt{1-2\delta\mathsf{D}\beta_t}}.$$

б) Пусть $y=(y_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — случайный процесс, допускающий дифференциал

$$dy_t = a(t, y_t)\,dt + b(t, y_t)\,dW_t, \quad y_0 = \eta,$$

где $|a(t, y)| \leqslant K(1+|y|)$, $|b(t, y)| \leqslant K < \infty$ и $\mathsf{M}\exp(\varepsilon\eta^2) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

По теореме 4.7 найдется такое $\delta_1 > 0$, что $\sup\limits_{t \leqslant T} \mathsf{M}\exp(\delta_1 y_t^2) < \infty$, а значит, при некотором $\delta > 0$

$$\sup_{t \leqslant T} \mathsf{M}\exp(\delta a^2(t, y_t)) < \infty,$$

и, следовательно, $\mathsf{M}\varphi_t(\varphi) = 1$, где $\beta_t = a(t, y_t)$.

Пример 4. Пусть процессы $\beta = (\beta_t, \mathscr{F}_t)$ и $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, независимы и $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt < \infty\right) = 1$. Тогда $\mathsf{M}\varphi_t(\beta) = 1$, $t \leqslant T$.

Для доказательства, наряду с $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, рассмотрим идентичное ему пространство $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mathsf{P}})$ и на вероятностном пространстве $(\Omega \times \bar{\Omega}, \mathscr{F} \times \bar{\mathscr{F}}, \mathsf{P} \times \bar{\mathsf{P}})$ определим случайную величину

$$\varphi_T(\omega, \bar{\omega}) = \exp\left(\int_0^T \beta_t(\omega)\,dW_t(\bar{\omega}) - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt\right).$$

В силу независимости процессов β и W

$$\mathsf{M}\varphi_T(\beta) = \int_{\Omega \times \bar{\Omega}} \varphi_T(\omega, \bar{\omega})\,d(\mathsf{P} \times \bar{\mathsf{P}})(\omega, \bar{\omega}).$$

По теореме Фубини

$$\int_{\Omega \times \bar{\Omega}} \varphi_T(\omega, \bar{\omega})\,d(\mathsf{P} \times \bar{\mathsf{P}})(\omega, \bar{\omega}) = \int_\Omega \left[\int_{\bar{\Omega}} \varphi_T(\omega, \bar{\omega})\,d\bar{\mathsf{P}}(\bar{\omega})\right] d\mathsf{P}(\omega).$$

Но P-п. н.

$$\int_{\bar{\Omega}} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt\right) d\bar{\mathsf{P}}(\bar{\omega}) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt\right) < \infty,$$

и поэтому в силу теоремы 6.1

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi_T(\omega, \bar{\omega})\,d\bar{\mathsf{P}}(\bar{\omega}) = 1 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

а значит, и $\mathsf{M}\varphi_T(\beta) = 1$.

Пример 5. Условие независимости процессов β и W, сформулированное в предыдущем примере, можно ослабить, заменив его независимостью σ-алгебр

$$\mathscr{F}^{\beta}_{u+\varepsilon}=\sigma\{\omega:\ \beta_v,\ v\leqslant u+\varepsilon\}\ \text{ и }\ \mathscr{F}^{W}_{s,\,t}=\sigma\{\omega:\ W_v-W_s,\ s\leqslant v\leqslant t\}$$

для $0\leqslant u\leqslant s<t\leqslant T$, $\varepsilon>0$.

Действительно, пусть

$$0=t_0<t_1<\ \dots\ <t_n=T\ \text{ и }\ \max_j[t_{j+1}-t_j]\leqslant\varepsilon.$$

Тогда согласно примеру 4 $\mathsf{M}\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)=1$ и $\mathsf{M}\left(\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)\,|\,\mathscr{F}_{t_j}\right)=1$ (P-п. н.). Применяя теперь прием, использованный в примере 3, находим, что

$$\mathsf{M}\varphi_T(\beta)=\mathsf{M}\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{t_j}^{t_{j+1}}(\beta)=\mathsf{M}\varphi_0^{t_1}(\beta)=1.$$

4. Покажем теперь, что в теореме 6.1 условие

$$\mathsf{M}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\beta_s^2\,ds\right)<\infty,$$

вообще говоря, неулучшаемо в том смысле, что выполнение для любого $\varepsilon>0$ условия

$$\mathsf{M}\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_0^T\beta_s^2\,ds\right)<\infty$$

не влечет за собой равенства $\mathsf{M}\varphi_T(\beta)=1$.

Пример 6. Пусть $\tau_\varepsilon=\inf\{t:\ W_t-(1-\varepsilon)t=-a\}$, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $a>0$. Покажем сначала, что

$$\mathsf{M}\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon\right)=\exp\left((1-2\varepsilon)\,a\right),\tag{6.47}$$

а затем установим, что $\mathsf{M}\varphi_{\tau_\varepsilon}<1$, где $\varphi_{\tau_\varepsilon}=\exp\left(W_{\tau_\varepsilon}-\frac{\tau_\varepsilon}{2}\right)$.

Определим моменты

$$\tau_\varepsilon^{(n)}=\inf\{t:\ n\leqslant W_t\leqslant-a+(1-\varepsilon)t\}$$

и установим, что

$$\mathsf{M}\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\right]=V_n(0),\tag{6.48}$$

где

$$V_n(x)=\frac{e^{-2\varepsilon n}-e^{-(1-2\varepsilon)a-n}}{e^{-(a+2\varepsilon n)}-e^{-(1-2\varepsilon)a}}\,e^x+\frac{e^{-(a+n)}-1}{e^{-(a+2\varepsilon n)}-e^{-(1-2\varepsilon)a}}\,e^{(1-2\varepsilon)x}$$

является решением дифференциального уравнения

$$V_n''(x) - 2(1-\varepsilon)V_n'(x) + (1-2\varepsilon)V_n(x) = 0$$

с $V_n(-a) = V_n(n) = 1$.

Для доказательства (6.48) рассмотрим функцию $V_n(x)e^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)t}$. По формуле Ито

$$V_n\left(x_{\tau_\varepsilon^{(n)}}\right)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\right] = V_n(0) + \int_0^{\tau_\varepsilon^{(n)}} V_n'(x_s)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)s\right]dW_s,$$

где $x_t = W_t - (1-\varepsilon)t$. Ясно также, что для всякого $N \geqslant 0$

$$V_n\left(x_{\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N}\right)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N\right] = V_n(0) + \int_0^{\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N} V_n'(x_s)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)s\right]dW_s.$$

Поэтому, поскольку для $-a \leqslant x \leqslant n$ функция $V_n'(x)$ ограничена, то

$$\mathsf{M}\int_0^{\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N} V_n'(x_s)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)s\right]dW_s = 0$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}V_n\left(x_{\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N}\right)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N\right] = V_n(0). \tag{6.49}$$

Легко проверяется, что

$$0 < \inf_{-a\leqslant x\leqslant n} V_n(x) < \sup_{-a\leqslant x\leqslant n} V_n(x) < \infty,$$

а значит,

$$\mathsf{M}\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N\right] \leqslant \frac{V_n(0)}{\inf\limits_{-a\leqslant x\leqslant n} V_n(x)} < \infty.$$

Отсюда после предельного перехода ($N\to\infty$) получаем

$$\mathsf{M}\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\right] \leqslant \frac{V_n(0)}{\inf\limits_{-a\leqslant x\leqslant n} V_n(x)}.$$

Из этого неравенства и неравенства

$$V_n\left(x_{\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N}\right)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\wedge N\right]\leqslant\sup_{-a\leqslant x\leqslant n}V_n(x)\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^{(n)}\right]$$

вытекает, что в (6.49) возможен предельный переход под знаком математического ожидания при $N\to\infty$, что с учетом равенства

$$V_n\left(x_{\tau_\varepsilon^{(n)}}\right)=1 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

приводит к соотношению (6.48). Делая в нем предельный переход $(n\to\infty)$, получаем требуемое соотношение (6.47).

Наконец, заметим, что

$$\varphi_{\tau_\varepsilon}=\exp\left(W_{\tau_\varepsilon}-\frac{\tau_\varepsilon}{2}\right)=\exp\left(W_{\tau_\varepsilon}-(1-\varepsilon)\,\tau_\varepsilon\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon\right)=$$
$$=\exp\left[-a+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon\right].$$

Отсюда в силу (6.47) вытекает, что

$$\mathsf{M}\varphi_{\tau_\varepsilon}=e^{-2\varepsilon a}<1.$$

5. Приведем еще два примера, в которых нарушается равенство $\mathsf{M}\varphi_t(\beta)=1$, а значит, (6.37) не выполнено. В первом из этих примеров $T=\infty$, во втором $T=1$.

Пример 7. Пусть $\varphi_t=\exp\left(W_t-\frac{t}{2}\right)$ и $\tau=\inf\{t\colon W_t=-1\}$. Тогда $\mathsf{P}(\tau<\infty)=1$ (гл. 1, § 3) и

$$\varphi_\tau=\exp\left(-1-\frac{\tau}{2}\right)<e^{-1}.$$

Следовательно, $\mathsf{M}\varphi_\tau<e^{-1}<1$.

Пример 8. Пусть $0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\beta_t=-\frac{2W_t}{(1-t)^2}\chi_{(\tau\geqslant t)},$$

где $\tau=\inf\left\{t\leqslant 1\colon W_t^2=1-t\right\}$.

Тогда, поскольку $\mathsf{P}(0<\tau<1)=1$, то

$$\int_0^1\beta_t^2\,dt=4\int_0^1\frac{W_t^2}{(1-t)^4}\chi_{(\tau\geqslant t)}\,dt=4\int_0^\tau\frac{W_t^2}{(1-t)^4}\,dt<\infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

По формуле Ито для $t<1$

$$d\left(\frac{W_t^2}{(1-t)^2}\right)=\frac{2W_t^2}{(1-t)^3}\,dt+\frac{2W_t}{(1-t)^2}\,dW_t+\frac{1}{(1-t)^2}\,dt,$$

откуда

$$-\int_0^1 \frac{2W_t}{(1-t)^2}\chi_{(\tau\geqslant t)}\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4W_t^2}{(1-t)^4}\chi_{(\tau\geqslant t)}\,dt=$$

$$=-\frac{W_\tau^2}{(1-\tau)^2}+\int_0^\tau \frac{2W_t^2}{(1-t)^3}\,dt+\int_0^\tau \frac{dt}{(1-t)^2}-\int_0^\tau \frac{2W_t^2}{(1-t)^4}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{1-\tau}+\int_0^\tau \left\{2W_t^2\left[\frac{1}{(1-t)^3}-\frac{1}{(1-t)^4}\right]+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}dt\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{1-\tau}+\int_0^\tau \frac{1}{(1-t)^2}\,dt=-1.$$

Поэтому $\mathsf{M}\varphi_1(\beta)\leqslant e^{-1}<1$.

§ 3. Теорема Гирсанова и ее обобщение

1. Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ винеровский процесс $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, и случайный процесс $\gamma=(\gamma_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, с $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_t^2\,dt<\infty\right)=1$. Пусть $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — неотрицательный непрерывный супермартингал с

$$\mathfrak{z}_t=1+\int_0^t \gamma_s\,dW_s. \tag{6.50}$$

Если $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T=1$, то процесс $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, будет неотрицательным мартингалом (лемма 6.4) и на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ определена *вероятностная* мера $\tilde{\mathsf{P}}$ с $d\tilde{\mathsf{P}}=\mathfrak{z}_T(\omega)\,d\mathsf{P}$.

Теорема 6.2. *Если* $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T(\omega)=1$, *то на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathsf{P}})$ *случайный процесс* $\tilde{W}=(\tilde{W}_t, \mathscr{F})$, $t\leqslant T$ *с*)*

$$\tilde{W}_t=W_t-\int_0^t \mathfrak{z}_s^+\gamma_s\,ds \tag{6.51}$$

является винеровским (относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *и меры* $\tilde{\mathsf{P}}$*).*

2. Доказательству этой теоремы предпошлем ряд вспомогательных предложений.

---

*) $\mathfrak{z}_s^+=\mathfrak{z}_s^{-1}$, если $\mathfrak{z}_s>0$, и $\mathfrak{z}_s^+=0$ при $\mathfrak{z}_s=0$. Из приводимой ниже леммы 6.5 вытекает, что $\mathfrak{z}_s^+=\mathfrak{z}_s^{-1}$ ($\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.).

Лемма 6.5. *Пусть* $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T = 1$. *Тогда*

$$\tilde{\mathsf{P}}(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t = 0) = 0.$$

Доказательство. По определению меры $\tilde{\mathsf{P}}$

$$\tilde{\mathsf{P}}(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t = 0) = \int\limits_{\{\omega:\ \inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t=0\}} \mathfrak{z}_T\, d\mathsf{P}(\omega).$$

Пусть $\tau = \inf\{t \leqslant T:\ \mathfrak{z}_t = 0\}$ и $\tau = \infty$, если $\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t > 0$. Тогда $\{\omega:\ \inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t = 0\} = \{\omega:\ \tau \leqslant T\}$ и, следовательно, по теореме 3.6

$$\tilde{\mathsf{P}}(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} \mathfrak{z}_t = 0) = \int\limits_{\{\omega:\ \tau\leqslant T\}} \mathfrak{z}_T\, d\mathsf{P} = \int\limits_{\{\omega:\ \tau\leqslant T\}} \mathfrak{z}_\tau\, d\mathsf{P} = 0.$$

Лемма 6.6. *Пусть* $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T = 1$ *и* $\eta = \eta(\omega)$ — $\mathscr{F}_t$-*измеримая случайная величина с**) $\tilde{\mathsf{M}}|\eta(\omega)| < \infty$, *и* $0 \leqslant t \leqslant T$. *Пусть* $\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)$ — *один из вариантов условного математического ожидания,* $0 \leqslant s \leqslant T$. *Тогда, если* $s \leqslant t$, *то*

$$\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s) = \mathfrak{z}_s^+ \mathsf{M}(\eta\mathfrak{z}_t\,|\,\mathscr{F}_s) \qquad (\tilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}). \tag{6.52}$$

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda(\omega)$ — ограниченная $\mathscr{F}_s$-измеримая случайная величина и $s \leqslant t$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\mathsf{M}}(\eta\lambda) = \tilde{\mathsf{M}}[\lambda\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)] = \mathsf{M}[\lambda\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)\,\mathfrak{z}_T] =\\ = \mathsf{M}[\lambda\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)\,\mathsf{M}(\mathfrak{z}_T\,|\,\mathscr{F}_s)] = \mathsf{M}[\lambda\mathfrak{z}_s\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s)].\end{aligned} \tag{6.53}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathsf{M}}(\eta\lambda) = \mathsf{M}(\lambda\eta\mathfrak{z}_T) = \mathsf{M}(\lambda\eta\mathsf{M}(\mathfrak{z}_T\,|\,\mathscr{F}_t)) = \mathsf{M}(\lambda\eta\mathfrak{z}_t) =\\ = \mathsf{M}[\lambda\mathsf{M}(\eta\mathfrak{z}_t\,|\,\mathscr{F}_s)].\end{aligned} \tag{6.54}$$

Из (6.53) и (6.54) следует, что P- и $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\mathfrak{z}_s\tilde{\mathsf{M}}(\eta\,|\,\mathscr{F}_s) = \mathsf{M}(\eta\mathfrak{z}_t\,|\,\mathscr{F}_s). \tag{6.55}$$

Но $\tilde{\mathsf{P}}(\mathfrak{z}_s > 0) = 1$. Поэтому $\tilde{\mathsf{P}}(\mathfrak{z}_s^{-1} = \mathfrak{z}_s^+) = 1$ и (6.52) в случае $s \leqslant t$ следует из (6.55).

Замечание. Если $\eta \equiv 1$, то из (6.52) следует, что

$$\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+ = 1 \qquad (\tilde{\mathsf{P}}\text{-п. н.}),$$

так что $\tilde{\mathsf{M}}\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+ = 1$. В то же время

$$\mathsf{M}\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+ = \mathsf{P}(\mathfrak{z}_s > 0).$$

*) $\tilde{\mathsf{M}}$ обозначает усреднение по мере $\tilde{\mathsf{P}}$.

Лемма 6.7. *Пусть* $\{\xi_n \geqslant 0,\ n=1, 2, \ldots\}$ — *последовательность случайных величин таких, что* $\xi_n \to \xi$ (*по вероятности*), $n \to \infty$. *Если* $\mathsf{M}\xi_n = \mathsf{M}\xi = C$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\,|\xi - \xi_n| = 0. \tag{6.56}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{M}\,|\xi - \xi_n| = \mathsf{M}\,(\xi - \xi_n)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)} + \mathsf{M}\,(\xi_n - \xi)\,\chi_{(\xi < \xi_n)} =$$
$$= \mathsf{M}\,(\xi - \xi_n)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)} + \mathsf{M}\,(\xi_n - \xi) - \mathsf{M}\,(\xi_n - \xi)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)}.$$

Но $\mathsf{M}\,(\xi_n - \xi) = 0$. Поэтому

$$\mathsf{M}\,|\xi - \xi_n| = 2\mathsf{M}\,(\xi - \xi_n)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)}, \tag{6.57}$$

где $0 \leqslant (\xi - \xi_n)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)} \leqslant \xi$. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}\,(\xi - \xi_n)\,\chi_{(\xi \geqslant \xi_n)} = 0$, что вместе с (6.57) доказывает (6.56).

Лемма 6.8. *Пусть на некотором измеримом пространстве* $(X, \mathfrak{X})$ *заданы две неотрицательные меры* ν *и* $\tilde{\nu}$, *причем* $\tilde{\nu} \ll \nu$ *и* $g(x) = \frac{d\tilde{\nu}}{d\nu}(x)$. *Если* $\nu\{x\colon g(x) = 0\} = 0$, *то* $\nu \ll \tilde{\nu}$ *и*

$$\frac{d\nu}{d\tilde{\nu}}(x) = g^{-1}(x) \qquad (\tilde{\nu}\text{-п. н.}).$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{X}$. Тогда

$$\int_A g^+(x)\,d\tilde{\nu}(x) = \int_A g^+(x)\,g(x)\,d\nu(x).$$

Но

$$g^+(x)\,g(x) = \begin{cases} 1, & g(x) > 0, \\ 0, & g(x) = 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_A g^+(x)\,d\tilde{\nu}(x) = \nu[A \cap \{x\colon g(x) > 0\}] = \nu(A) - \nu[A \cap \{x\colon g(x) = 0\}],$$

где по предположению леммы

$$\nu[A \cap \{x\colon g(x) = 0\}] \leqslant \nu\{x\colon g(x) = 0\} = 0.$$

Следовательно,

$$\nu(A) = \int_A g^+(x)\,d\tilde{\nu}(x),$$

что и доказывает лемму, поскольку $g^+(x)$ совпадает ν- и $\tilde{\nu}$-п. н. с $g^{-1}(x)$.

3. Доказательство теоремы 6.2. Поскольку $\mathfrak{z}_s^+ = \mathfrak{z}_s^{-1}$ ($\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.), $0 \leqslant s \leqslant t$ и $\tilde{\mathsf{P}}(\inf\limits_{s \leqslant T} \mathfrak{z}_s = 0) = 0$, то процесс $\mathfrak{z}^+ = (\mathfrak{z}_s^+)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, имеет $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н. непрерывные траектории и, значит, $\tilde{\mathsf{P}}(\sup\limits_{s \leqslant T} \mathfrak{z}_s^+ < \infty) = 1$.

Далее, мера $\tilde{\mathsf{P}}$ абсолютно непрерывна относительно меры P ($\tilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$) и

$$\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \gamma_s^2\,ds < \infty\right) = \mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\,ds < \infty\right) = 1.$$

Заметим также, что

$$\int_0^T (\mathfrak{z}_t^+ \gamma_t)^2\,dt \leqslant \sup_{t \leqslant T} (\mathfrak{z}_t^+)^2 \int_0^T \gamma_t^2\,dt.$$

Поэтому

$$\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T (\mathfrak{z}_t^+ \gamma_t)^2\,dt < \infty\right) = 1,$$

и, значит, интеграл $\int_0^t \mathfrak{z}_s^+ \gamma_s\,ds$, входящий в (6.51), определен.

Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}\{\exp[iz(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s) \mid \mathcal{F}_s\} = \exp\left(-\frac{z^2}{2}(t-s)\right) \qquad (6.58)$$

для любых z, $-\infty < z < \infty$, и s, t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Предположим сначала, что

$$\mathsf{P}\{0 < c_1 \leqslant \inf_{t \leqslant T} \mathfrak{z}_t \leqslant \sup_{t \leqslant T} \mathfrak{z}_t \leqslant c_2 < \infty\} = 1, \qquad (6.59)$$

$$\mathsf{M}\int_0^T \gamma_t^2\,dt < \infty, \qquad (6.60)$$

где c_1 и c_2 — константы.

Обозначим $\eta(t, s) = \exp[iz(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)]$. Тогда по лемме 6.6 $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}(\eta(t, s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathfrak{z}_s^+ \mathsf{M}(\eta(t, s)\,\mathfrak{z}_t \mid \mathcal{F}_s). \qquad (6.61)$$

По формуле Ито

$$\eta(t, s)\mathfrak{z}_t = \mathfrak{z}_s + \int_s^t \eta(u, s)\mathfrak{z}_u\mathfrak{z}_u^+\gamma_u dW_u + iz\int_s^t \eta(u, s)\mathfrak{z}_u dW_u - \\ - \frac{z^2}{2}\int_s^t \eta(u, s)\mathfrak{z}_u du.$$

Предположения (6.59) и (6.60) гарантируют, что

$$\mathsf{M}\left[\int_s^t \eta(u, s)\mathfrak{z}_u\mathfrak{z}_u^+\gamma_u dW_u \mid \mathscr{F}_s\right] = 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

и

$$\mathsf{M}\left[\int_s^t \eta(u, s)\mathfrak{z}_u dW_u \mid \mathscr{F}_s\right] = 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому P- и $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\mathfrak{z}_s^+\mathsf{M}(\eta(t, s)\mathfrak{z}_t \mid \mathscr{F}_s) = \mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_s - \frac{z^2}{2}\int_s^t \mathfrak{z}_s^+\mathsf{M}(\eta(u, s)\mathfrak{z}_u \mid \mathscr{F}_s)du. \tag{6.62}$$

Обозначим

$$f(t, s) = \mathfrak{z}_s^+\mathsf{M}(\eta(t, s)\mathfrak{z}_t \mid \mathscr{F}_s).$$

Тогда в силу (6.62) $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$f(t, s) = 1 - \frac{z^2}{2}\int_s^t f(u, s)du,$$

откуда находим

$$f(t, s) = e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)} \tag{6.63}$$

Но согласно (6.61) $\tilde{\mathsf{M}}(\eta(t, s) \mid \mathscr{F}_s) = f(t, s)$ ($\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.), что вместе с (6.63) и доказывает утверждение теоремы в предположениях (6.59) и (6.60).

Пусть теперь эти предположения не выполнены. Введем марковские моменты τ_n, $n = 1, 2, \ldots$, полагая

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\left\{t \leqslant T: \left[\int_0^t \gamma_s^2 ds + \sup_{s \leqslant t}\mathfrak{z}_s + (\inf_{s\leqslant t}\mathfrak{z}_s)^{-1}\right] \geqslant n\right\}, \\ T, \quad \text{если} \quad \left[\int_0^T \gamma_s^2 ds + \sup_{s\leqslant T}\mathfrak{z}_s + (\inf_{s\leqslant T}\mathfrak{z}_s)^{-1}\right] < n. \end{cases}$$

Поскольку

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\,ds + \sup_{s\leqslant T} \mathfrak{z}_s < \infty\right) = 1, \qquad \tilde{\mathsf{P}}\left(\inf_{s\leqslant T} \mathfrak{z}_s > 0\right) = 1$$

и $\tilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$, то $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н. $\tau_n \uparrow T$, $n \to \infty$.

Положим

$$\mathfrak{z}_t^{(n)} = \mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n}, \quad \gamma_t^{(n)} = \gamma_t \chi_{(\tau_n \geqslant t)}$$

и

$$\tilde{W}_t^{(n)} = W_t - \int_0^{t\wedge\tau_n} \left(\mathfrak{z}_s^{(n)}\right)^+ \gamma_s\,ds.$$

Тогда

$$\mathfrak{z}_t^{(n)} = 1 + \int_0^t \gamma_s^{(n)}\,dW_s \quad \text{и} \quad \tilde{W}_t^{(n)} = W_t - \int_0^t \left(\mathfrak{z}_s^{(n)}\right)^+ \gamma_s^{(n)}\,ds.$$

Пусть мера $\tilde{\mathsf{P}}^{(n)}$ определена равенством $d\tilde{\mathsf{P}}^{(n)} = \mathfrak{z}_T^{(n)}(\omega)\,d\mathsf{P}$.

Процесс $\mathfrak{z}^{(n)} = \left(\mathfrak{z}_t^{(n)}, \mathscr{F}_t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является мартингалом с $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T^{(n)} = 1$, и для него выполнено предложение (6.59) с $c_2 = n$, $c_1 = n^{-1}$. Кроме того, $\mathsf{M}\int_0^T \left(\gamma_t^{(n)}\right)^2 dt \leqslant n < \infty$, и, следовательно, по доказанному $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t^{(n)} - \tilde{W}_s^{(n)}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\} = \exp\left\{-\frac{z^2}{2}(t-s)\right\}, \tag{6.64}$$

где $\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}$ — усреднение по мере $\tilde{\mathsf{P}}^{(n)}$.

Для завершения доказательства осталось лишь показать, что по $\tilde{\mathsf{P}}$-вероятности при $n \to \infty$

$$\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t^{(n)} - \tilde{W}_s^{(n)}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\} \to \tilde{\mathsf{M}}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\}. \tag{6.65}$$

Поскольку при $n \to \infty$

$$\tilde{\mathsf{M}}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t^{(n)} - \tilde{W}_s^{(n)}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\} \xrightarrow{\tilde{\mathsf{P}}} \tilde{\mathsf{M}}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\},$$

то для доказательства (6.65) достаточно проверить лишь, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \tilde{\mathsf{M}}\,\Big|\,\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t^{(n)} - \tilde{W}_s^{(n)}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\} - \\ - \tilde{\mathsf{M}}\left\{\exp\left[iz\left(\tilde{W}_t^{(n)} - \tilde{W}_s^{(n)}\right)\right] \mid \mathscr{F}_s\right\}\Big| = 0. \tag{6.66}$$

В силу леммы 6.8 при каждом $n = 1, 2, \ldots$ мера $\tilde{\mathsf{P}}^{(n)}$ эквивалентна мере P, а значит,

$$\tilde{\mathsf{P}} \ll \tilde{\mathsf{P}}^{(n)}. \tag{6.67}$$

Согласно лемме 6.6 $\tilde{\mathsf{P}}^{(n)}$-п. н. и (в силу (6.67)) $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\,|\,\mathcal{F}_s\} = \mathsf{M}\left\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\,\frac{\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}\right\} \tag{6.68}$$

и

$$\tilde{\mathsf{M}}\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(m)})]\,|\,\mathcal{F}_s\} = \mathsf{M}\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\,\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\,|\,\mathcal{F}_s\}. \tag{6.69}$$

Поэтому

$$\tilde{\mathsf{M}}\,|\,\tilde{\mathsf{M}}^{(n)}\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\,|\,\mathcal{F}_s\} - \tilde{\mathsf{M}}\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\,|\,\mathcal{F}_s\}\,| =$$
$$= \tilde{\mathsf{M}}\,\left|\,\mathsf{M}\left\{\exp[iz(\tilde W_t^{(n)}-\tilde W_s^{(n)})]\left[\frac{\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}-\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\right]\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{\mathsf{M}}\mathsf{M}\left(\left|\frac{\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}-\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\right|\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = \mathsf{M}\left|\frac{\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}-\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\right| =$$
$$= \mathsf{M}\,|\,\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n}-\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\,|. \tag{6.70}$$

Покажем теперь, что $\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n}\to\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t$ P-п. н. при $n\to\infty$. Введем момент $\tau=\inf(t\leqslant T\colon\ \mathfrak{z}_t=0)$, полагая $\tau=T$, если $\inf\limits_{s\leqslant T}\mathfrak{z}_s>0$. Тогда, поскольку

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T\gamma_s^2\,ds<\infty\right)=1,\qquad \mathsf{P}\,(\sup_{s\leqslant T}\mathfrak{z}_s<\infty)=1,$$

то введенные ранее марковские моменты τ_n, $n=1, 2, \ldots$, обладают тем свойством, что P-п. н. $\tau_n\uparrow\tau$, $n\to\infty$. Согласно замечанию 2 к теореме 3.5 $\mathfrak{z}_t=0$ ($\{t\geqslant\tau\}$; P-п. н.). Отсюда для всех $0\leqslant t\leqslant T$ получаем $\mathfrak{z}_t=\mathfrak{z}_{t\wedge\tau}$ (P-п. н.).

Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}\mathfrak{z}_{t\wedge\tau_n}=\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}_{t\wedge\tau}. \tag{6.71}$$

В силу непрерывности $\mathfrak{z}_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, (6.71) будет иметь место, если $\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}\to\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau}$, $n\to\infty$ (P-п. н.). Но $\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau}=0$ на множестве $\{s\geqslant\tau\}$ и для всех $n=1, 2, \ldots$ $\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}=0$, а на множестве $\{\tau>s\}$ $\inf\limits_n\mathfrak{z}_{s\wedge\tau_n}>0$, и, следовательно,

$$\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau_n}\to\mathfrak{z}_{s\wedge\tau}\mathfrak{z}^+_{s\wedge\tau},\qquad n\to\infty\quad(\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

Итак, P-п. н.

$$\frac{\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}\to\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t. \tag{6.72}$$

Далее,

$$\mathsf{M}\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t = \mathsf{M}\left[\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_t \mid \mathscr{F}_s\right)\right] = \mathsf{M}\left[\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_s\right] = \mathsf{M}\mathfrak{z}_s = 1$$

и

$$\mathsf{M}\mathfrak{z}_s\cdot\frac{\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}} = \mathsf{M}\left[\frac{\mathfrak{z}_s}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}\,\mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_t^{(n)} \mid \mathscr{F}_s\right)\right] = \mathsf{M}\left[\frac{\mathfrak{z}_s}{\mathfrak{z}_s^{(n)}}\,\mathfrak{z}_s^{(n)}\right] = \mathsf{M}\mathfrak{z}_s = 1.$$

Поэтому по лемме 6.7

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left|\frac{\mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_t^{(n)}}{\mathfrak{z}_s^{(n)}} - \mathfrak{z}_s\mathfrak{z}_s^+\mathfrak{z}_t\right| = 0,$$

откуда и следует требуемое соотношение (6.66).

Теорема 6.2 доказана.

4. Пусть $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — супермартингал специального вида с

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\, ds\right), \tag{6.73}$$

где $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2\, ds < \infty\right) = 1$. Тогда

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \gamma_s\, dW_s$$

с $\gamma_s = \mathfrak{z}_s\beta_s$.

Из теоремы 6.2 для рассматриваемого случая получаем следующий результат.

Теорема 6.3 (И. В. Гирсанов). *Если* $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T = 1$, *то случайный процесс*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s\, ds$$

является винеровским относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *и вероятностной меры* $\tilde{\mathsf{P}}$ $(d\tilde{\mathsf{P}} = \mathfrak{z}_T(\omega)\, d\mathsf{P})$.

Замечание. Примером неотрицательного мартингала $\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \gamma_s\, dW_s$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_s^2\, ds < \infty\right) = 1$, не представимого в виде (6.73). может служить мартингал

$$\mathfrak{z}_t = 1 + W_{t\wedge\tau}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где

$$\tau = \inf\{t\colon\ W_t = -1\}.$$

5. Приведем также многомерный вариант теоремы 6.2.

Пусть $\gamma_i = (\gamma_i(t), \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, \ldots, n$, — случайные процессы с $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_i^2(t)\,dt < \infty\right) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и $W = (W_1(t), \ldots, W_n(t), \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — n-мерный винеровский процесс.

Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s), \tag{6.74}$$

который в дальнейшем будет играть ту же роль, что и процесс, определенный в (6.49).

Лемма 6.9. *Существует винеровский процесс* $\hat{W} = (\hat{W}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *такой, что для каждого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н.

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \hat{\gamma}_s\,d\hat{W}_s \tag{6.75}$$

с $\hat{\gamma}_s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2(s)}$.

Доказательство. Если

$$\mathsf{P}\{\hat{\gamma}_s > 0,\quad 0 \leqslant s \leqslant T\} = 1, \tag{6.76}$$

то положим

$$\hat{W}_t = \int_0^t \hat{\gamma}_s^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_s.$$

Тогда из теоремы 4.1 следует, что процесс $(\hat{W}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является винеровским.

В общем случае определим

$$\hat{W}_t = \int_0^t \hat{\gamma}_s^+ \sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s) + \int_0^t (1 - \hat{\gamma}^+(s)\,\hat{\gamma}(s))\,dz_s,$$

где $(z_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс, не зависящий от процесса W. (Тем самым мы предполагаем, что исходное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ является достаточно «богатым»; в противном случае вместо $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ за исходное следует взять, например, пространство $(\Omega \times \Omega, \mathscr{F} \times \mathscr{F}, \mathsf{P} \times \mathsf{P})$.)

Процесс $\hat{W} = (\hat{W}_t, \mathscr{F}_t)$ является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом. Покажем, что

$$\mathsf{M}[(\hat{W}_t - \hat{W}_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = t - s \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{6.77}$$

По формуле Ито

$$\hat{W}_t^2-\hat{W}_s^2=2\int_s^t \hat{W}_u\left[\hat{\gamma}_u^+\sum_{i=1}^n \gamma_i(u)\,dW_i(u)+(1-\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)\,dz_u\right]+$$

$$+\int_s^t\left[(\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)^2+(1-\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)^2\right]du.$$

Но

$$\mathsf{P}\text{-п. н.}\quad (\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)^2+(1-\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)^2=\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u+(1-\hat{\gamma}_u^+\hat{\gamma}_u)=1.$$

Следовательно, P-п. н.

$$\mathsf{M}\left[(\hat{W}_t-\hat{W}_s)^2\,|\,\mathscr{F}_s\right]=\mathsf{M}\left[\hat{W}_t^2-\hat{W}_s^2\,|\,\mathscr{F}_s\right]=t-s.$$

Из теоремы 4.1 вытекает, что процесс $\hat{W}=(\hat{W}_t, \mathscr{F}_t)$ является винеровским. Осталось проверить справедливость P-п. н. равенства (6.75).

Имеем

$$1+\int_0^t \hat{\gamma}_s\,d\hat{W}_s=1+\int_0^t \hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+\sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s)+\int_0^t \hat{\gamma}_s(1-\hat{\gamma}_s^+\hat{\gamma}_s)\,dz_s=$$

$$=1+\int_0^t \hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+\sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s),$$

поскольку P-п. н. для любого s, $0\leqslant s\leqslant T$,

$$\hat{\gamma}_s(1-\hat{\gamma}_s^+\hat{\gamma}_s)=\hat{\gamma}_s-\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+\hat{\gamma}_s=\hat{\gamma}_s-\hat{\gamma}_s=0.$$

Значит,

$$1+\int_0^t \hat{\gamma}_s\,dW_s=\mathfrak{z}_t-\int_0^t(1-\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+)\sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s). \tag{6.78}$$

Но

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t(1-\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+)\sum_{i=1}^n \gamma_i(s)\,dW_i(s)\right)^2=$$

$$=\mathsf{M}\int_0^t(1-\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+)^2\,\hat{\gamma}_s\,ds=\mathsf{M}\int_0^t(1-\hat{\gamma}_s\hat{\gamma}_s^+)\,\hat{\gamma}_s\,ds=0,$$

что вместе с (6.78) доказывает требуемое представление (6.75).

Из доказанной леммы легко выводятся следующие свойства процесса $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Свойство 1. Если $\mathfrak{z}_t \geqslant 0$ (P-п. н.), то процесс $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t, \mathscr{F}_t)$ является супермартингалом, $\mathsf{M}(\mathfrak{z}_t | \mathscr{F}_s) \leqslant \mathfrak{z}_s$ (P-п. н.), $t \geqslant s$, и в частности, $\mathsf{M}\mathfrak{z}_t \leqslant 1$.

Свойство 2. Если $\mathsf{P}(\inf_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathfrak{z}_t > 0) = 1$, то $\mathfrak{z}_t$ допускает представление

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left(\int_0^t \sum_{i=1}^n \beta_i(s)\, dW_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^2 \beta_i^2(s)\, ds,\right),$$

где $\beta_i(t) = \mathfrak{z}_t^{-1} \gamma_i(t)$.

Пусть теперь $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — n-мерный винеровский процесс, где (вектор-столбец) $W_t = [W_1(t), \ldots, W_n(t)]$. Пусть $\gamma = (\gamma_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — также n-мерный процесс с (вектор-столбцом)

$$\gamma_t = [\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)] \quad \text{и} \quad \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n \int_0^T \gamma_i^2(t)\, dt < \infty\right) = 1.$$

Положим

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \gamma_s^* \, dW_s, \tag{6.79}$$

где γ_s^* — вектор-строка, транспонированная к γ_s.

Как и в одномерном случае ($n = 1$), доказывается следующий многомерный аналог теоремы 6.2.

Теорема 6.4. *Пусть* $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T = 1$. *Тогда n-мерный случайный процесс*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \mathfrak{z}_s^+ \gamma_s \, ds$$

является (относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, *и меры* $\tilde{\mathsf{P}}$ *с* $d\tilde{\mathsf{P}} = \mathfrak{z}_T(\omega)\, d\mathsf{P}$) *винеровским процессом.*

ГЛАВА 7

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРОЦЕССАМ ИТО И ПРОЦЕССАМ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

§ 1. Процессы Ито. Абсолютная непрерывность их мер относительно винеровской

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $F=(\mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$ и $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\geqslant 0$, — винеровский процесс.

Рассмотрим случайный *процесс Ито* *) $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, с дифференциалом **)

$$d\xi_t=\beta_t(\omega)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0, \tag{7.1}$$

где процесс $\beta=(\beta_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, таков, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |\beta_t(\omega)|\,dt<\infty\right)=1.$$

Обозначим $(\mathbf{C}_T, \mathscr{B}_T)$ измеримое пространство непрерывных функций $x=(x_s)$, $s\leqslant T$, с $x_0=0$, и пусть μ_ξ, μ_W — меры в $(\mathbf{C}_T, \mathscr{B}_T)$, отвечающие процессам $\xi=(\xi_s)$, $s\leqslant T$, и $W=(W_s)$, $s\leqslant T$:

$$\mu_\xi(B)=\mathsf{P}\{\omega\colon \xi\in B\}, \quad \mu_W(B)=\mathsf{P}\{\omega\colon W\in B\}. \tag{7.2}$$

В настоящем параграфе будут изучаться вопросы абсолютной непрерывности и эквивалентности мер μ_ξ и μ_W для случая, когда ξ есть процесс Ито.

Условимся о некоторых используемых далее обозначениях.

Пусть $\mu_{t,\xi}$ и $\mu_{t,W}$ — сужения мер μ_ξ и μ_W на $\mathscr{B}_t=\sigma\{x\colon x_s,\ s\leqslant t\}$. Через $\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, x)$ и $\dfrac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, x)$ будут обозна-

*) В случае $T=\infty$ предполагается, что $0\leqslant t<\infty$.

**) См. определение 6 в § 2 гл. 4.

чаться измеримые по паре переменных плотности (производные Радона — Никодима) мер $\mu_{t,\xi}$ по $\mu_{t,W}$ и $\mu_{t,W}$ по $\mu_{t,\xi}$. В случае $t=T$ индекс T будет опускаться:

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x)=\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(T,\ x),\qquad \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x)=\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(T,\ x).$$

Через $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(\xi)$, $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\ \xi)$ обозначаются соответственно $\mathscr{F}_T^\xi$- и $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримые случайные величины, получаемые при подстановке в $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x)$, $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\ x)$ вместо x функции $\xi=(\xi_s(\omega))$, $s\leqslant T$. Аналогичным образом определяются $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\ W)$, $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W)$, ...

2. Теорема 7.1. *Пусть* $\xi=(\xi_t,\ \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — *процесс Ито с дифференциалом* (7.1). *Если*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2\,dt<\infty\right)=1, \tag{7.3}$$

$$\mathsf{M}\exp\left\{-\int_0^T \beta_t\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right\}=1, \tag{7.4}$$

то $\mu_\xi\sim\mu_W$ *и* P-п. н.*)

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi)=\mathsf{M}\left[\exp\left\{-\int_0^T \beta_t\,d\xi_t+\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right\}\middle|\mathscr{F}_T^\xi\right]. \tag{7.5}$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathfrak{z}_t=\exp\left(-\int_0^t \beta_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right).$$

Поскольку по предположению (7.4) $\mathsf{M}\mathfrak{z}_T=1$, то (лемма 6.4) $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_t,\ \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, является мартингалом. Пусть $\tilde{\mathsf{P}}$ — мера на $(\Omega,\ \mathscr{F})$ с $d\tilde{\mathsf{P}}=\mathfrak{z}_T(\omega)\,d\mathsf{P}$. По теореме 6.3 процесс $\xi=(\xi_t,\ \mathscr{F}_t)$,

---

*) По поводу определения стохастического интеграла $\int_0^t \beta_s\,d\xi_s$ см. гл. 4, § 2.

$t \leqslant T$, является винеровским (по мере $\tilde{\mathsf{P}}$), а следовательно, для $A \in \mathscr{B}_T$

$$\mu_W(A) = \tilde{\mathsf{P}}(\xi \in A) = \int\limits_{\{\omega:\ \xi \in A\}} \mathfrak{z}_T(\omega)\, d\mathsf{P} = \int\limits_{\{\omega:\ \xi \in A\}} \mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\omega) \mid \mathscr{F}_T^{\xi}\right) d\mathsf{P}. \quad (7.6)$$

Случайная величина $\mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\omega) \mid \mathscr{F}_T^{\xi}\right)$ является $\mathscr{F}_T^{\xi}$-измеримой, и, следовательно*), найдется такая $\mathscr{B}_T$-измеримая неотрицательная функция $\Phi(x)$, что P-п. н.

$$\mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\omega) \mid \mathscr{F}_T^{\xi}\right) = \Phi(\xi(\omega)). \quad (7.7)$$

(Для наглядности эту функцию $\Phi(x)$ будем обозначать также $\mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\omega) \mid \mathscr{F}_T^{\xi}\right)_{\xi = x}$. Аналогичные обозначения используются и в других случаях.)

Тогда формулу (7.6) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_W(A) = \int\limits_{\{\omega:\ \xi \in A\}} \Phi(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega) = \int\limits_A \Phi(x)\, d\mu_\xi(x).$$

Отсюда получаем $\mu_W \ll \mu_\xi$ и

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x) = \Phi(x) \qquad (\mu_\xi\text{-п. н.}).$$

Поэтому в силу (7.7)

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T(\omega) \mid \mathscr{F}_T^{\xi}\right) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

что вместе с (7.1) доказывает представление (7.5).

Осталось теперь показать, что $\mu_\xi \ll \mu_W$. Для доказательства заметим, что

$$\frac{d\tilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}}(\omega) = \mathfrak{z}_T(\omega),$$

причем $\mathsf{P}(\mathfrak{z}_T(\omega) = 0) = 0$, поскольку в силу условия (7.3)

$$\mathsf{P}\left(\left|\int_0^T \beta_t\, dW_t\right| < \infty\right) = 1.$$

Поэтому по лемме 6.8 $\mathsf{P} \ll \tilde{\mathsf{P}}$ и

$$\frac{d\mathsf{P}}{d\tilde{\mathsf{P}}}(\omega) = \mathfrak{z}_T^{-1}(\omega).$$

*) См. гл. 1, § 2.

Далее,

$$\mu_\xi(A) = \mathsf{P}\{\omega\colon \xi \in A\} = \int\limits_{\{\omega\colon \xi \in A\}} \mathfrak{z}_T^{-1}(\omega)\, d\tilde{\mathsf{P}}(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\{\omega\colon \xi \in A\}} \tilde{\mathsf{M}}\left[\mathfrak{z}_T^{-1}(\omega) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right] d\tilde{\mathsf{P}}(\omega) = \int\limits_A \tilde{\mathsf{M}}\left[\mathfrak{z}_T^{-1}(\omega) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right]_{\xi = x} d\mu_W(x),$$

поскольку $\tilde{\mathsf{P}}\{\omega\colon \xi \in A\} = \mu_W(A)$. Следовательно, $\mu_\xi \ll \mu_W$ и P-п. н.

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(\xi) = \tilde{\mathsf{M}}\left[\mathfrak{z}_T^{-1}(\omega) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right]. \tag{7.8}$$

Замечание. Теорема 7.1 сохраняет свою силу, если вместо момента времени T рассматривать марковский момент σ (относительно системы $(\mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$). Тогда, если

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^\sigma \beta_t^2\, dt < \infty\right) = 1,$$

$$\mathsf{M} \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma \beta_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \beta_t^2\, dt\right\} = 1,$$

то меры μ_ξ и μ_W, рассматриваемые на σ-алгебре $\mathcal{B}_\sigma$, эквивалентны.

Следствие. *Пусть при каждом t, $0 \leqslant t \leqslant T$, случайные величины $\beta_t = \beta_t(\omega)$ являются $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримыми. Не вводя новых обозначений, будем сразу предполагать, что $\beta_t = \beta_t(\xi(\omega))$. Пусть также выполнены условия* (7.3), (7.4).

Тогда P-п. н.

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left(-\int\limits_0^T \beta_t(\xi)\, d\xi_t + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \beta_t^2(\xi)\, dt\right). \tag{7.9}$$

Поскольку $\mu_\xi \sim \mu_W$, то

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x) = \left[\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x)\right]^{-1}.$$

Из (7.9) и леммы 4.10 нетрудно вывести, что производная $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(W) = \exp\left(\int\limits_0^T \beta_t(W)\, dW_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \beta_t^2(W)\, dt\right) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{7.10}$$

Пример 1. Пусть $\xi_t = \theta \cdot t + W_t$, $t \leqslant 1$, где $\theta = \theta(\omega)$ — $\mathscr{F}_0$-измеримая нормально распределенная случайная величина, $N(0, 1)$, не зависящая от винеровского процесса W. Согласно примеру 4 § 2 гл. 6 $\mathsf{M}\exp\left(-\theta W_1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 1$, и по теореме 7.1 $\mu_\xi \sim \mu_W$,

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \mathsf{M}\left[\exp\left(-\theta\xi_1 + \frac{\theta^2}{2}\right)\Big|\mathscr{F}_1^\xi\right].$$

Условное распределение $\mathsf{P}(\theta \leqslant y \mid \mathscr{F}_1^\xi)$ является нормальным, $N\left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Поэтому

$$\mathsf{M}\left[\exp\left(-\theta\xi_1 + \frac{\theta^2}{2}\right)\Big|\mathscr{F}_1^\xi\right] = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x) = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right), \qquad \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{x_1^2}{4}\right). \tag{7.11}$$

Забегая вперед, отметим, что для этих производных можно дать иные выражения (§ 4). Так, согласно теореме 7.13 P-п. н.

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left[-\int_0^1 \frac{\xi_s}{1+s}\,d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{\xi_s}{1+s}\right)^2 ds\right]. \tag{7.12}$$

3. Теорема 7.2. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — *процесс Ито с дифференциалом* (7.1). *Если* $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2\,dt < \infty\right) = 1$, *то* $\mu_\xi \ll \mu_W$.

Доказательство. Положим для $n = 1, 2, \ldots$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\left\{t \leqslant T\colon \int_0^t \beta_s^2\,ds \geqslant n\right\}, \\ T, \quad \text{если} \quad \int_0^T \beta_s^2\,ds < n, \end{cases}$$

и $\chi_t^{(n)} = \chi_{\left\{\int_0^t \beta_s^2 ds \leqslant n\right\}}$, $\beta_t^{(n)} = \chi_t^{(n)}\beta_t$.

Пусть

$$\xi_t^{(n)} = \int_0^t \beta_s^{(n)}\,ds + W_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тогда, поскольку $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\beta_s^{(n)})^2 ds \leqslant n\right) = 1$, то по теореме 6.1

$$\mathsf{M} \exp\left(-\int\limits_0^T \beta_s^{(n)}\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\beta_s^{(n)})^2\, ds\right) = 1.$$

Следовательно, согласно предыдущей теореме 7.1 $\mu_{\xi^{(n)}} \sim \mu_W$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$

Заметим теперь, что на множестве $\{\tau_n = T\}$ $\xi_t^{(n)} = \xi_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н. и поэтому для любого $\Gamma \in \mathscr{B}_T$

$$\mu_\xi(\Gamma) = \mathsf{P}\{\omega\colon\ \xi(\omega) \in \Gamma\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi(\omega) \in \Gamma,\ \tau_n = T\} + \mathsf{P}\{\xi(\omega) \in \Gamma,\ \tau_n < T\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi^{(n)}(\omega) \in \Gamma,\ \tau_n = T\} + \mathsf{P}\{\xi(\omega) \in \Gamma,\ \tau_n < T\}.$$

Пусть $\mu_W(\Gamma) = 0$. Тогда, поскольку $\mu_{\xi^{(n)}} \sim \mu_W$, $\mu_{\xi^{(n)}}(\Gamma) = 0$ и

$$\mathsf{P}\{\xi^{(n)} \in \Gamma,\ \tau_n = T\} \leqslant \mathsf{P}\{\xi^{(n)} \in \Gamma\} = \mu_{\xi^{(n)}}(\Gamma) = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_\xi(\Gamma) = \mathsf{P}\{\xi \in \Gamma,\ \tau_n < T\} \leqslant \mathsf{P}\{\tau_n \leqslant T\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \beta_t^2\, dt > n\right\} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что $\mu_\xi(\Gamma) = 0$, а значит, $\mu_\xi \ll \mu_W$.

4. Теоремы 7.1 и 7.2 допускают обобщение на многомерный случай. Приведем соответствующие результаты, ограничившись лишь формулировкой, поскольку их доказательства аналогичны одномерному случаю.

Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — n-мерный *) винеровский процесс, $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, и $\beta = (\beta_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\beta_t = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$.

Теорема 7.3. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *$n$-мерный процесс Ито,* $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, *с дифференциалом*

$$d\xi_t = \beta_t\, dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{7.13}$$

---

*) Здесь и далее векторы считаются вектор-столбцами.

Тогда если

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^*\beta_t\,dt < \infty\right) = 1, \tag{7.14}$$

$$\mathsf{M}\exp\left(-\int_0^T \beta_t^*\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^*\beta_t\,dt\right) = 1, \tag{7.15}$$

то $\mu_\xi \sim \mu_W$ *и* P-п. н.

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \mathsf{M}\left[\exp\left(-\int_0^T \beta_t^*\,d\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^*\beta_t\,dt\right)\Bigg|\,\mathcal{F}_T^\xi\right]. \tag{7.16}$$

Теорема 7.4. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *n-мерный процесс Ито,* $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, *с дифференциалом*

$$d\xi_t = \beta_t\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0,$$

и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^*\beta_t\,dt < \infty\right) = 1.$$

Тогда $\mu_\xi \ll \mu_W$.

§ 2. Процессы диффузионного типа. Абсолютная непрерывность их мер относительно винеровской

1. Пусть $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с выделенным в нем семейством σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *диффузионного типа* *) с дифференциалом

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{7.17}$$

где неупреждающий процесс $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+})$, заданный на $(C_T, \mathcal{B}_T)$, таков, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |\alpha_t(\xi)|\,dt < \infty\right) = 1. \tag{7.18}$$

Согласно теореме 7.2 условие $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1$ обеспечивает абсолютную непрерывность меры μ_ξ по винеровской

*) См. определение 7 в § 2 гл. 4.

мере μ_W. Оказывается, что для процесса диффузионного типа это условие не только достаточно, но и необходимо.

Теорема 7.5. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *процесс диффузионного типа с дифференциалом* (7.17). *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1 \Leftrightarrow \mu_\xi \ll \mu_W. \tag{7.19}$$

Доказательство. Утверждение «$\Rightarrow$» следует из теоремы 7.2. Для доказательства обратного утверждения обозначим $\mathfrak{z}_t(x) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Покажем, что процесс $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t(W), \mathcal{F}_t^W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является мартингалом.

Пусть $s < t$ и $\lambda(W)$ — ограниченная $\mathcal{F}_s^W$-измеримая случайная величина. Тогда

$$\mathsf{M}\lambda(W)\,\mathfrak{z}_t(W) = \int \lambda(x)\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, x)\,d\mu_W(x) =$$
$$= \int \lambda(x)\,d\mu_{t,\xi}(x) = \int \lambda(x)\,d\mu_{s,\xi}(x) = \int \lambda(x)\,\mathfrak{z}_s(x)\,d\mu_{s,W}(x),$$

откуда получаем $\mathsf{M}(\mathfrak{z}_t(W) \mid \mathcal{F}_s^W) = \mathfrak{z}_s(W)$ (P-п. н.), $t > s$.

Применим к мартингалу $\mathfrak{z}_t = (\mathfrak{z}_t(W), \mathcal{F}_t^W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, теорему 5.7. Согласно этой теореме найдется процесс

$$\gamma = (\gamma_t(\omega), \mathcal{F}_t^W), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \text{с} \quad \mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_t^2(\omega)\,dt < \infty\right) = 1$$

такой, что для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н.

$$\mathfrak{z}_t(W) = 1 + \int_0^t \gamma_s(\omega)\,dW_s. \tag{7.20}$$

При этом процесс $\mathfrak{z}_t(W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является непрерывным с вероятностью 1.

Рассмотрим теперь на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathsf{P}})$ с $d\tilde{\mathsf{P}}(\omega) = \mathfrak{z}_T(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega)$ случайный процесс $\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t^W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t B_s(\omega)\,ds, \tag{7.21}$$

где $B_s(\omega)=\mathfrak{z}_s^+(W)\gamma_s(\omega)$. По теореме 6.2 этот процесс является винеровским. При доказательстве этой теоремы было показано также, что

$$\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T B_s^2(\omega)\,ds<\infty\right)=1. \tag{7.22}$$

Согласно лемме 4.9 найдется такой функционал $\beta=(\beta_s(x),\mathscr{B}_{s+})$, что для почти всех $0\leqslant s\leqslant T$ (P-п. н.)

$$B_s(\omega)=\beta_s(W(\omega)),$$

а следовательно,

$$\tilde{W}_t=W_t-\int_0^t \beta_s(W)\,ds, \qquad \mathsf{P}\text{-п. н.}$$

В силу (7.22)

$$\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \beta_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1.$$

Из этого равенства и предположения $\mu_\xi\ll\mu_W$ следует, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=1. \tag{7.23}$$

Действительно,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=\mu_\xi\left\{x:\ \int_0^T \beta_t^2(x)\,dt<\infty\right\}=$$

$$=\int \chi_{\left\{\int_0^T \beta_t^2(x)\,dt<\infty\right\}}(x)\,d\mu_\xi(x)=\int \chi_{\left\{\int_0^T \beta_t^2(x)\,dt<\infty\right\}}(x)\,\mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_W(x)=$$

$$=\mathsf{M}\chi_{\left\{\int_0^T \beta_t^2(W)\,dt<\infty\right\}}(W)\,\mathfrak{z}_T(W)=\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \beta_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1.$$

Определим теперь на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ процесс $\hat{W}=(\hat{W}_t(\xi),\mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, полагая

$$\hat{W}_t(x)=x_t-\int_0^t \beta_s(x)\,ds, \qquad x\in \mathbf{C}_T. \tag{7.24}$$

Этот процесс при $x=\xi$ является винеровским. В самом деле, пусть $\lambda=\lambda(\xi)$ — ограниченная $\mathscr{F}_s^\xi$-измеримая случайная величина. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\lambda(\xi)\,e^{iz[\hat{W}_t(\xi)-\hat{W}_s(\xi)]} &= \int \lambda(x)\,e^{iz[\hat{W}_t(x)-\hat{W}_s(x)]}\,d\mu_\xi(x) = \\
&= \int \lambda(x)\,e^{iz[\hat{W}_t(x)-\hat{W}_s(x)]}\mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_W(x) = \\
&= \int \lambda(W)\,e^{iz[\tilde{W}_t-\tilde{W}_s]}\mathfrak{z}_T(W)\,d\mathsf{P} = \tilde{\mathsf{M}}\lambda(W)\,e^{iz[\tilde{W}_t-\tilde{W}_s]} = \\
&= \tilde{\mathsf{M}}\left\{\lambda(W)\,\tilde{\mathsf{M}}\left[e^{iz(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s)}\mid\mathscr{F}_s\right]\right\} = \tilde{\mathsf{M}}\lambda(W)\,e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)} = \\
&= e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}\int \lambda(W)\,\mathfrak{z}_T(W)\,d\mathsf{P} = e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}\mathsf{M}\lambda(\xi).
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{M}\lambda(\xi)\,e^{iz[\hat{W}_t-\hat{W}_s]} = \mathsf{M}\left\{\lambda(\xi)\,\mathsf{M}\left[e^{iz(\hat{W}_t-\hat{W}_s)}\mid\mathscr{F}_s^\xi\right]\right\},$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\left[e^{iz(\hat{W}_t-\hat{W}_s)}\mid\mathscr{F}_s^\xi\right] = e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}.$$

Из (7.18) и (7.24) получаем

$$\hat{W}_t(\xi) - W_t = \int_0^t [\alpha_s(\xi) - \beta_s(\xi)]\,ds, \tag{7.25}$$

где $(\hat{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ и $(W_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — два винеровских процесса. Значит, с одной стороны, процесс $(\hat{W}_t - W_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, является квадратично интегрируемым мартингалом, с другой стороны, он имеет специальный вид (7.25). Из приводимой ниже леммы вытекает, что в таком случае $\hat{W}_t - W_t = 0$ (P-п. н.) для всех t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Лемма 7.1. *Пусть* $\eta=(\eta_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *квадратично интегрируемый мартингал, допускающий представление*

$$\eta_t = \int_0^t f_s\,ds, \qquad \mathsf{P}\text{-п. н.}, \tag{7.26}$$

где неупреждающий процесс $f=(f_s, \mathscr{F}_s)$, $0\leqslant s\leqslant T$, *таков, что* $\mathsf{P}\left(\int_0^T |f_s|\,ds < \infty\right) = 1$. *Тогда с вероятностью* 1 $f_t=0$ *для почти всех* t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Доказательство. Пусть $\tau_N = \inf\left(t \leqslant T\colon \int_0^t |f_s|\,ds \geqslant N\right)$ и $\tau_N = T$, если $\int_0^T |f_s|\,ds < N$. Обозначим $\chi_t^{(N)} = \chi_{\{\tau_N \geqslant t\}}$ и $\eta_t^{(N)} = \int_0^t \chi_s^{(N)} f_s\,ds$.

Процесс $(\eta_t^{(N)}, \mathscr{F}_t^{(N)})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\mathscr{F}_t^{(N)} = \mathscr{F}_{t\wedge\tau_N}$ будет квадратично интегрируемым мартингалом (теорема 3.6), и поэтому

$$\mathsf{M}(\eta_t^{(N)})^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{M}\left[\eta_{t_{j+1}}^{(N)} - \eta_{t_j}^{(N)}\right]^2,$$

где $0 = t_0 < \ldots < t_n = t$ и $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$, $n \to \infty$.

Поскольку

$$\eta_{t_{j+1}}^{(N)} - \eta_{t_j}^{(N)} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} f_s\,ds,$$

то

$$\mathsf{M}(\eta_t^{(N)})^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \mathsf{M}\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} f_s\,ds\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{M}\left\{\max_{j\leqslant n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds\right\} =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{M}\left\{\max_{j\leqslant n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds \int_0^T \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant N \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{M}\left\{\max_{j\leqslant n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds\right\}.$$

Но $\max_{j\leqslant n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \chi_s^{(N)} |f_s|\,ds \leqslant N$ и при $n \to \infty$ с вероятностью 1 стремится к нулю. Следовательно, $\mathsf{M}(\eta_t^{(N)})^2 = 0$ и по лемме Фату

$$\mathsf{M}\eta_t^2 = \mathsf{M}\left(\lim_{N\to\infty} \eta_t^{(N)}\right)^2 \leqslant \varliminf_{N\to\infty} \mathsf{M}(\eta_t^{(N)})^2 = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 7.5. Поскольку $\widehat{W}_t - W_t = 0$ (P-п. н.) для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, то из представления (7.25) и леммы 7.1 следует, что $\alpha_s(\xi) = \beta_s(\xi)$ P-п. н. для почти всех s, $0 \leqslant s \leqslant T$. Но согласно (7.23) $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2(\xi)\,ds < \infty\right) = 1$. Поэтому и $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds < \infty\right) = 1$, что и завершает доказательство теоремы 7.5.

2. Согласно теореме 7.5 в случае процессов диффузионного типа условие $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1$ является необходимым и достаточным для абсолютной непрерывности меры μ_ξ по мере μ_W. Займемся теперь изучением процессов

$$\mathfrak{z}_t(\xi) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi) \quad \text{и} \quad \mathfrak{z}_t(W) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W).$$

Теорема 7.6. *Пусть $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — процесс диффузионного типа с*

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{7.27}$$

Тогда, если $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1$, то процесс $\mathfrak{z}_t(W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является единственным решением уравнения

$$\mathfrak{z}_t(W) = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s(W)\alpha_s(W)\,dW_s, \tag{7.28}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W) = \exp\left(\Gamma_t(\alpha(W)) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\,ds\right) \quad \text{P-п. н.,} \tag{7.29}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right) \quad \text{P-п. н.,} \tag{7.30}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t \alpha_s^2(W)\,ds < \infty\right) = \mathsf{M}\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right). \tag{7.31}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения прежде всего покажем, что процесс $\mathfrak{z}_t(W)$, $t \leqslant T$, таков, что $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W))^2\,ds < \infty\right) = 1$. С этой целью, используя обозначения, принятые при доказательстве теоремы 7.5, установим сначала, что P-п. н. для почти каждого s, $0 \leqslant s \leqslant T$,

$$\mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W) = \mathfrak{z}_s(W)\,\beta_s(W). \tag{7.32}$$

Заметим, во-первых, что, как показано в теореме 7.5, $\mathsf{P}(\alpha_s(\xi) \neq \beta_s(\xi)) = 0$ для почти всех $s \leqslant T$. Во-вторых, $\mathsf{P}(\mathfrak{z}_s(\xi) = 0) = 0$, $s \leqslant T$, поскольку

$$\mathsf{P}(\mathfrak{z}_s(\xi) = 0) = \mu_\xi(x\colon\ \mathfrak{z}_s(x) = 0) = \mathsf{M}\mathfrak{z}_s(W)\,\chi_{\{\mathfrak{z}_s(W)=0\}} = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \mu_\xi\left(\mathfrak{z}_s(x)\left[\alpha_s(x) - \beta_s(x)\right] \neq 0\right) = \mathsf{M}\mathfrak{z}_s(W)\,\chi_{\{\mathfrak{z}_s(W)\,[\alpha_s(W)-\beta_s(W)] \neq 0\}},$$

что и доказывает (7.32).

Далее, по определению $\beta_s(W) = \mathfrak{z}_s^+(W)\,\gamma_s(W)$. Поэтому $\mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W) = \mathfrak{z}_s(W)\,\mathfrak{z}_s^+(W)\,\gamma_s(W)$ (P-п. н.) для почти всех $s \leqslant T$ и

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W))^2\,ds < \infty\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\mathfrak{z}_s(W)\,\mathfrak{z}_s^+(W)\,\gamma_s(W))^2\,ds < \infty\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \gamma_s^2(W)\,ds < \infty\right) = 1.$$

Итак, $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W))^2\,ds < \infty\right) = 1$ и, следовательно, определен стохастический интеграл $\int\limits_0^t \mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W)\,dW_s$.

Покажем, что P-п. н.

$$1 + \int\limits_0^t \mathfrak{z}_s(W)\,\alpha_s(W)\,dW_s = 1 + \int\limits_0^t \gamma_s(W)\,dW_s. \tag{7.33}$$

Согласно (7.20) $1 + \int\limits_0^t \gamma_s(W)\,ds = \mathfrak{z}_t(W)$. Поскольку процесс $(\mathfrak{z}_t(W), \mathcal{F}_t^W)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является неотрицательным мартингалом, то **P**-п. н. $\mathfrak{z}_t(W) \equiv 0$ при $T \geqslant t \geqslant \tau$, где

$$\tau = \begin{cases} \inf(t \leqslant T: \ \mathfrak{z}_t = 0), \\ \infty, \quad \inf\limits_{t \leqslant T} \mathfrak{z}_t > 0. \end{cases}$$

По определению

$$1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s(W)\, \alpha_s(W)\, dW_s = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s(W)\, \mathfrak{z}_s^+(W)\, \gamma_s(W)\, dW_s,$$

и, следовательно, при $T \geqslant \tau \geqslant t$ равенство (7.33) выполнено **P**-п. н. и, в частности, при $\tau \leqslant T$

$$1 + \int_0^\tau \mathfrak{z}_s(W)\, \alpha_s(W)\, dW_s = 0.$$

При $T \geqslant t \geqslant \tau$ обе части (7.33) равны нулю.

Из (7.33) и (7.20) вытекает теперь справедливость уравнения (7.28).

Для доказательства утверждений (7.29) и (7.30) воспользуемся леммой 6.2, согласно которой процесс $\mathfrak{z}_t(W)$, $t \leqslant T$, рассматриваемый как решение уравнения (7.28), может быть представлен в виде (7.29). Формула (7.30) следует из (7.29) и леммы 4.10, если заметить, что $\mathbf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\, ds < \infty\right) = 1$.

Чтобы теперь доказать (7.31), заметим, что в силу (7.27)

$$\mathbf{M} \exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\, ds\right) =$$

$$= \mathbf{M} \exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\, d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\, ds\right) = \mathbf{M}\mathfrak{z}_t^+(\xi). \tag{7.34}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{M}\mathfrak{z}_t^+(\xi) = \int \mathfrak{z}_t^+(x)\, \mathfrak{z}_t(x)\, d\mu_W(x) =$$

$$= \mu_W\{x: \ \mathfrak{z}_t(x) > 0\} = \mathbf{P}(\mathfrak{z}_t(W) > 0). \tag{7.35}$$

Но согласно (7.29)

$$\mathbf{P}(\mathfrak{z}_t(W) > 0) = \mathbf{P}\left(\int_0^t \alpha_s^2(W)\, ds < \infty\right),$$

что вместе с (7.34) и (7.35) приводит к доказательству требуемого равенства (7.31).

Теорема доказана.

3. Теорема 7.7. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *процесс диффузионного типа с дифференциалом*

$$d\xi_t=\alpha_t(\xi)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{r} \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=1, \\ \mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_s^2(W)\,dt<\infty\right)=1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \mu_\xi\sim\mu_W. \tag{7.36}$$

При этом P-п. н.

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\ W)=\exp\left(\int\limits_0^t \alpha_s(W)\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \alpha_s^2(W)\,ds\right), \tag{7.37}$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t,\ \xi)=\exp\left(-\int\limits_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right). \tag{7.38}$$

Доказательство утверждения «$\Rightarrow$». По теореме 7.5 из условия $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=1$ получаем, что $\mu_\xi\ll\mu_W$. Из теоремы 7.6 следует представление (7.37), поскольку $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_t^2(W)\,dt<\infty\right)=1$ и, значит, $\Gamma_t(\alpha(W))=\int\limits_0^t \alpha_s(W)\,dW_s$.

В силу условия $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1$

$$\mathsf{P}\left(\left|\int\limits_0^T \alpha_s(W)\,dW_s\right|<\infty\right)=1$$

(см. замечание 7 в п. 3 § 2 гл. 4), поэтому из (7.37) вытекает, что $\mu_W\left\{x\colon \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x)=0\right\}=0$. Тогда по лемме 6.8 $\mu_W\ll\mu_\xi$ и производная

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(x)=\left[\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(x)\right]^{-1},$$

что вместе с (7.37) и леммой 4.10 дает представление (7.38).

Доказательство утверждения «$\Leftarrow$». Если $\mu_\xi \ll \mu_W$, то по теореме 7.5 $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right)=1$. Но поскольку $\mu_\xi \sim \mu_W$, то тогда, очевидно, и $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1$.

Теорема доказана.

4. В настоящем пункте будут изучаться условия, обеспечивающие абсолютную непрерывность меры μ_W по мере μ_ξ.

Предварительно введем следующее обозначение. Пусть $\alpha = (\alpha_t(x), \mathscr{B}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неупреждающий процесс и для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\tau_n(x) = \begin{cases} \inf\left\{t \leqslant T\colon \int_0^T \alpha_s^2(x)\,ds \geqslant n\right\}, \\ \infty, \quad \text{если} \quad \int_0^T \alpha_s^2(x) < n, \end{cases}$$

$$\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(x).$$

Теорема 7.8. *Пусть $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — процесс диффузионного типа с дифференциалом*

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0,$$

причем

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |\alpha_t(\xi)|\,dt < \infty\right) = 1, \quad \mathsf{P}(\tau_n(\xi) > 0) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

и на множестве $(\tau(\xi) \leqslant T)$

$$\lim_n \int_0^{\tau_n(\xi)} \alpha_t^2(\xi)\,dt = \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1 \Rightarrow \mu_W \ll \mu_\xi, \tag{7.39}$$

и если $\mathscr{F}_t^\xi = \mathscr{F}_t^W$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1 \Leftarrow \mu_W \ll \mu_\xi. \tag{7.40}$$

Доказательство. В силу условия $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_s^2(W)\,ds < \infty\right) = 1$

$$\mathsf{P}(\tau(W) = \infty) = 1.$$

Условие же $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds < \infty\right) = 1$, вообще говоря, не выполнено, а потому $\mathsf{P}(\tau(\xi) = \infty) \leqslant 1$. Из условия $\mathsf{P}(\tau_n(\xi) > 0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, следует лишь, что $\mathsf{P}(\tau(\xi) > 0) = 1$.

Обозначим

$$\chi_t^{(n)}(x) = \chi_{\left\{x:\ \int\limits_0^t \alpha_s^2(x)\,ds < n\right\}}$$

и

$$\alpha_t^{(n)}(x) = \alpha_t(x)\,\chi_t^{(n)}(x).$$

Положим также

$$\xi_t^{(n)} = \int\limits_0^t \alpha_s^{(n)}(\xi)\,ds + W_t.$$

Поскольку $\xi_t^{(n)} = \xi_t$ (P-п. н.) при $0 \leqslant t \leqslant \tau_n(\xi)$, то

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^{(n)}(\xi)\,ds = \int\limits_0^t \alpha_s^{(n)}(\xi^{(n)})\,ds,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right) = 1,$$

и, следовательно,

$$d\xi_t^{(n)} = \alpha_t^{(n)}(\xi^{(n)})\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^{(n)} = 0.$$

Ясно, что

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(W))^2\,ds < \infty\right) = 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(\xi^{(n)}))^2\,ds < \infty\right) = 1.$$

Поэтому по теореме 7.7 $\mu_{\xi^{(n)}} \sim \mu_W$ и

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_{\xi^{(n)}}}(t, \xi^{(n)}) = \exp\left\{-\int\limits_0^t \alpha_s^{(n)}(\xi^{(n)})\,d\xi_s^{(n)} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\alpha_s^{(n)}(\xi^{(n)}))^2\,ds\right\}. \quad (7.41)$$

Обозначим

$$\rho_t^{(n)}(x) = \frac{d\mu_W}{d\mu_{\xi^{(n)}}}(t, x).$$

Тогда, если $A \in \mathscr{B}_T$, то

$$\mu_W(A) = \lim_n \mu_W\{A \cap (\tau^{(n)}(x) = \infty)\} =$$

$$= \lim_n \int\limits_{A \cap (\tau_n(x)=\infty)} \rho_T^{(n)}(x)\, d\mu_{\xi^{(n)}}(x) = \lim_n \int\limits_{A \cap (\tau_n(x)=\infty)} \rho_T^{(n)}(x)\, d\mu_\xi(x) =$$

$$= \lim_n \int\limits_A \rho_T^{(n)}(x)\, \chi_T^{(n)}(x)\, d\mu_\xi(x).$$

Покажем, что условие $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \alpha_s^2(W)\,ds < \infty\right) = 1$ обеспечивает равномерную интегрируемость семейства величин $\left\{\rho_T^{(n)}(\xi)\,\chi_T^{(n)}(\xi),\ n = 1, 2, \ldots\right\}$.

Для всякого $N > 1$ имеем

$$\int\limits_{\left\{\omega:\ \rho_T^{(n)}(\xi)\,\chi_T^{(n)}(\xi) > N\right\}} \rho_T^{(n)}(\xi)\,\chi_T^{(n)}(\xi)\, d\mathsf{P}(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\left\{x:\ \rho_T^{(n)}(x)\,\chi_T^{(n)}(x) > N\right\}} \rho_T^{(n)}(x)\,\chi_T^{(n)}(x)\, d\mu_{\xi^{(n)}}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_W\left\{x:\ \rho_T^{(n)}(x)\,\chi_T^{(n)}(x) > N\right\} \leqslant \mu_W\left\{x:\ \rho_T^{(n)}(x) > N\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{-\int\limits_0^T \alpha_s^{(n)}(W)\,dW_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(W))^2 ds > \ln N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_0^T \alpha_s^{(n)}(W)\,dW_s\right| > \frac{\ln N}{2}\right\} + \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(W))^2 ds > \ln N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\ln N} + 2\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(W))^2 ds > \ln N\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\ln N} + 2\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \alpha_s^2(W)\,ds > \ln N\right\}, \tag{7.42}$$

где использована оценка

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_0^T \alpha_s^{(n)}(W)\,dW_s\right| > \frac{\ln N}{2}\right\} \leqslant \frac{4}{\ln N} + \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T (\alpha_s^{(n)}(W))^2 ds > \ln N\right\}$$

(см. лемму 4.6).

Поскольку $\mathsf{P}\left\{\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds < \infty\right\} = 1$, то из (7.42) вытекает, что последовательность величин $\{\rho_T^{(n)}(\xi)\chi_T^{(n)}(\xi),\ n = 1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируема.

Рассмотрим величины

$$\rho_T^{(n)}(\xi)\chi_T^{(n)}(\xi) =$$
$$= \chi_{\left\{\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds < n\right\}} \exp\left\{-\int_0^T \alpha_s^{(n)}(\xi)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\alpha_s^{(n)}(\xi))^2\,d\xi\right\}.$$

Из результатов п. 9 § 2 гл. 4 следует, что существует

$$\Gamma_T(\alpha(\xi)) = \mathsf{P}\text{-}\lim_n \chi_{\left\{\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds < n\right\}} \int_0^T \alpha_s^{(n)}(\xi)\,dW_s.$$

Поэтому согласно замечанию 1 к теореме 1.3

$$\lim_n \int_A \rho_T^{(n)}(x)\chi_T^{(n)}(x)\,d\mu_\xi(x) =$$
$$= \lim_n \int_{\{\omega:\ \xi(\omega)\in A\}} \rho_T^{(n)}(\xi)\chi_T^{(n)}(\xi)\,d\mathsf{P}(\omega) = \int_{\{\omega:\ \xi(\omega)\in A\}} \rho_T(\alpha(\xi))\,d\mathsf{P}(\omega),$$

где $\rho_T(\xi) = \exp\left[-\Gamma_T(\alpha(\xi)) - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds\right]$. Следовательно, $\mu_W \ll \mu_\xi$ и

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left[-\Gamma_T(\alpha(\xi)) - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds\right]. \tag{7.43}$$

Докажем теперь утверждение «$\Leftarrow$». Пусть $\mu_W \ll \mu_\xi$ и $\mathscr{F}_t^\xi = \mathscr{F}_t^W$, $t \leqslant T$. Рассмотрим производную $\rho_t(\xi) = \frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)$, $t \leqslant T$. Поскольку σ-алгебры $\mathscr{F}_t^W$ и $\mathscr{F}_t^\xi$ совпадают, то существует $\mathscr{F}_t^W$-измеримая функция $\tilde{\rho}_t(W)$ такая, что $\tilde{\rho}_t(W) = \rho_t(\xi)$ (P-п. н.), $t \leqslant T$.

Процесс $(\rho_t(\xi), \mathscr{F}_t^\xi)$, $t \leqslant T$, является неотрицательным мартингалом. Следовательно, таким же свойством обладает и процесс $(\tilde{\rho}_t(W), \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$. По теореме 5.7 найдется процесс $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_t(W), \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, с $\mathsf{P}\left(\int_0^T \tilde{\gamma}_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1$ такой, что P-п. н.

$$\tilde{\rho}_t(W) = 1 + \int_0^t \tilde{\gamma}_s(W)\,dW_s. \tag{7.44}$$

Согласно теореме 6.2 процесс $\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, с

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \tilde{\beta}_s(W)\,ds, \qquad \tilde{\beta}_s(W) = \tilde{\rho}_s^+(W)\,\tilde{\gamma}_s(W), \tag{7.45}$$

рассматриваемый на $(\Omega, \tilde{\mathsf{P}})$, $\tilde{\mathsf{P}}(d\omega) = \tilde{\rho}_T(W(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)$, является винеровским. При этом

$$\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \beta_s^2(W)\,ds < \infty\right) = 1. \tag{7.46}$$

Положим $\beta_s(\xi) = \rho_s^+(\xi)\,\gamma_s(\xi)$, $\gamma_s(\xi) = \tilde{\gamma}_s(W)$. Тогда P-п. н. $\beta_s(\xi) = \tilde{\beta}_s(W)$, $s \leqslant T$. Поэтому из (7.45) и уравнения

$$\xi_t = \int_0^t \alpha_s(\xi)\,ds + W_t \tag{7.47}$$

следует, что

$$\tilde{W}_t - \xi_t = -\int_0^t [\alpha_s(\xi) + \beta_s(\xi)]\,ds. \tag{7.48}$$

Процесс $(\xi_t, \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, рассматриваемый на $(\Omega, \tilde{\mathsf{P}})$, также является винеровским, поскольку $\mathscr{F}_t^\xi = \mathscr{F}_t^W$ и

$$\tilde{\mathsf{P}}(\xi \in \Gamma) = \int\limits_{\{\omega:\ \xi(\omega) \in \Gamma\}} \rho_T(\xi(\omega))\,d\mathsf{P}(\omega) = \int_\Gamma \frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(T, x)\,d\mu_\xi(x) = \mu_W(\Gamma).$$

Следовательно, процесс $(\tilde{W}_t - \xi_t, \mathscr{F}_t^W)$, $t \leqslant T$, является квадратично интегрируемым мартингалом и в силу (7.48) и леммы 7.1 $\alpha_s(\xi) = -\beta_s(\xi)$ P-п. н. при почти всех $s \leqslant T$. Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\,dt < \infty\right) = \tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) =$$

$$= \tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \beta_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = \tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \tilde{\beta}_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1,$$

что и доказывает утверждение «$\Leftarrow$».

5. Теорема 7.9. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — *процесс диффузионного типа с*

$$d\xi_t=\alpha_t(\xi)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0, \tag{7.49}$$

где $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T|\alpha_t(\xi)|\,dt<\infty\right)=1$, $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T\alpha_t^2(W)\,dt<\infty\right)=1$, *и выполнены предложения теоремы* 7.8.

Тогда процесс $\rho_t(\xi)=\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)$, $t\leqslant T$, *является единственным решением уравнения*

$$\rho_t(\xi)=1-\int\limits_0^t\rho_s(\xi)\,\alpha_s(\xi)\,dW_s \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{7.50}$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, W)=\exp\left(-\int\limits_0^t\alpha_s(W)\,dW_s+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_s^2(W)\,ds\right) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{7.51}$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)=\exp\left(-\Gamma_t(\alpha(\xi))-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_s^2(\xi)\,ds\right) \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{7.52}$$

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^t\alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=\mathsf{M}\exp\left(\int\limits_0^t\alpha_s(W)\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\alpha_s^2(W)\,ds\right). \tag{7.53}$$

Доказательство. Представление (7.52) было доказано в предшествующей теореме (см. (7.43)). Формула (7.51) следует из (7.52) и леммы 4.10, если только заметить, что

$$\mathsf{P}\text{-}\lim_n\chi_{\left\{\int\limits_0^t\alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right\}}\exp\left(-\int\limits_0^t\alpha_s^{(n)}(\xi)\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\alpha_s^{(n)}(\xi))^2\,ds\right)=$$

$$=\mathsf{P}\text{-}\lim_n\chi_{\left\{\int\limits_0^t\alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right\}}\exp\left(-\int\limits_0^t\alpha_s^{(n)}(\xi)\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\alpha_s^{(n)}(\xi))^2\,ds\right)$$

и что в предположении $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T\alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1$

$$\Gamma_t(\alpha(W))=\int\limits_0^t\alpha_s(W)\,dW_s.$$

Равенство (7.53) устанавливается точно так же, как и (7.30) в теореме 7.6. Справедливость уравнения (7.50) доказывается так же, как и в лемме 6.3.

6. В рассматриваемых в дальнейшем задачах последовательного оценивания (гл. 17, §§ 5, 6) возникает вопрос об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам диффузионного типа в случае, когда длительность наблюдения (T) является случайной величиной.

Пусть $(C, \mathscr{B})$ — пространство непрерывных на $[0, \infty)$ функций $x=(x_t)$, $t \geqslant 0$, $x_0=0$, $\mathscr{B}_t=\sigma\{x\colon x_s, s\leqslant t\}$ и $\sigma=\sigma_x$ — марковский момент относительно системы $(\mathscr{B}_t)$, $t\geqslant 0$.

Будем предполагать, что процесс $\xi=(\xi_t)$, $t\geqslant 0$, имеет дифференциал

$$d\xi_t=\alpha_t(\xi)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0, \tag{7.54}$$

причем $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^\infty |\alpha_t(\xi)|\,dt<\infty\right)=1$. Через $\mu_{\sigma,\xi}$ и $\mu_{\sigma,W}$ обозначим сужения мер μ_ξ и μ_W на σ-алгебре $\mathscr{B}_\sigma$.

Теорема 7.10. 1) *Если* $\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_\xi} \alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=1$, *то* $\mu_{\sigma,\xi} \ll \ll \mu_{\sigma,W}$ *и*

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_W} \alpha_t^2(W)\,dt<\infty\right)=\mathsf{M}\exp\left\{-\int\limits_0^{\sigma_\xi}\alpha_t(\xi)\,dW_t-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sigma_\xi}\alpha_t^2(\xi)\,dt\right\}, \tag{7.55}$$

где $\sigma_W=\sigma_{W(\omega)}$, $\sigma_\xi=\sigma_{\xi(\omega)}$.

2) *Если*

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_\xi}\alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_W}\alpha_t^2(W)\,dt<\infty\right)=1,$$

то $\mu_{\sigma,\xi}\sim\mu_{\sigma,W}$ *и* ($\mu_{\sigma,W}$-п. н.)

$$\frac{d\mu_{\sigma,\xi}}{d\mu_{\sigma,W}}(\sigma, W)=\exp\left(\int\limits_0^{\sigma_W}\alpha_s(W)\,dW_s-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sigma_W}\alpha_s^2(W)\,ds\right). \tag{7.56}$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{\alpha}_t(x)=\alpha_t(x)\,\chi_{\{t<\sigma_x\}}, \tag{7.57}$$

и пусть

$$\tilde{\xi}_t = \begin{cases} \xi_t, & t < \sigma_\xi, \\ \xi_{\sigma_\xi} + \left[W_t - W_{\sigma_\xi}\right], & t \geqslant \sigma_\xi, \end{cases} \tag{7.58}$$

т. е. $\tilde{\xi}_t = \int\limits_0^{t\wedge\sigma_\xi} \alpha_s(\xi)\, ds + W_t$.

Нетрудно заметить, что

$$d\tilde{\xi}_t = \tilde{\alpha}_t(\tilde{\xi})\, dt + dW_t. \tag{7.59}$$

Согласно сделанному предположению

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\sigma_\xi} \alpha_s^2(\xi)\, ds < \infty\right) = 1,$$

и, следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\infty} \tilde{\alpha}_s^2(\tilde{\xi})\, ds < \infty\right) = 1. \tag{7.60}$$

Поэтому по теореме 7.5 (с $T = \infty$) $\mu_{\tilde{\xi}} \ll \mu_W$ и

$$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^{\infty} \tilde{\alpha}_t^2(W)\, dt < \infty\right) = \mathsf{M}\exp\left(-\int\limits_0^{\infty} \tilde{\alpha}_t(\tilde{\xi})\, dW_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \tilde{\alpha}_t^2(\tilde{\xi})\, dt\right). \tag{7.61}$$

Но $\mu_{\sigma,\xi}(A) = \mu_{\tilde{\xi}}(A)$ и $\mu_{\sigma,W}(A) = \mu_W(A)$ на множествах $A \in \mathscr{B}_{\sigma_x}$. Значит, $\mu_{\sigma,\xi} \ll \mu_{\sigma,W}$ и (7.55) следует из (7.61) и (7.57).

Аналогичным образом из теоремы 7.7 выводится утверждение об эквивалентности мер $\mu_{\sigma,\xi}$ и $\mu_{\sigma,W}$, а также и формула (7.56).

7. Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — n-мерный винеровский процесс, $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, и $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ — процесс с дифференциалом

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\, dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0,$$

где $\alpha_t(x) = (\alpha_1(t, x), \ldots, \alpha_n(t, x))$ — вектор из неупреждающих функционалов.

Теоремы 7.5—7.10 допускают обобщение и на рассматриваемый многомерный случай. Все формулировки остаются прежними, с заменой лишь $\alpha_t^2(x)$ на $\alpha_t^*(x)\alpha_t(x)$. Так, например, многомерный аналог утверждения (7.19) теоремы 7.5 формулируется следующим образом:

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^*(\xi)\,\alpha_t(\xi)\,dt < \infty\right) = 1 \Leftrightarrow \mu_\xi \ll \mu_W. \tag{7.62}$$

§ 3. Структура процессов, мера которых абсолютно непрерывна относительно винеровской меры

Если $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, есть процесс диффузионного типа с дифференциалом

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{7.63}$$

то согласно теореме 7.5 условие $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = 1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $\mu_\xi \ll \mu_W$. В настоящем параграфе будет установлено, что если некоторый случайный процесс $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, таков, что его мера μ_ξ абсолютно непрерывна относительно винеровской меры μ_W, то этот процесс есть процесс диффузионного типа. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.11. *Пусть на полном вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *заданы неубывающее семейство σ-подалгебр* $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *случайный процесс* $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ *и винеровский процесс* $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *такие, что* $\mu_\xi \ll \mu_W$.

Тогда найдутся винеровский процесс $\widehat{W} = (\widehat{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ *и неупреждающий процесс* $\alpha = (\alpha_t(x), \mathcal{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *такие, что*

$$\xi_t = \int_0^t \alpha_s(\xi)\,ds + \widehat{W}_t \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{7.64}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds < \infty\right) = 1. \tag{7.65}$$

Если, кроме того, $\mu_\xi \sim \mu_W$, *то и*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds < \infty\right) = 1. \tag{7.66}$$

Доказательство. По предположению $\mu_\xi \ll \mu_W$. Обозначим $\mathfrak{z}_t(x) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, x)$. Процесс $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t(W), \mathcal{F}_t^W)$ является неотрицательным мартингалом с $\mathsf{M}\mathfrak{z}_t(W) = 1$, и согласно теореме 5.7

существует процесс $\gamma=(\gamma_t(\omega), \mathcal{F}_t^W)$ с $\mathsf{P}\left(\int_0^T \gamma_t^2(\omega)\,dt<\infty\right)=1$ такой, что P-п. н.

$$\mathfrak{z}_t(W)=1+\int_0^t \gamma_s(\omega)\,dW_s, \qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{7.67}$$

Рассмотрим новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \tilde{\mathsf{P}})$ с $d\tilde{\mathsf{P}}(\omega)=\mathfrak{z}_T(W(\omega))\,d\mathsf{P}(\omega)$ и определим на нем случайный процесс $\tilde{W}=(\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t^W)$ с

$$\tilde{W}_t=W_t-\int_0^t \alpha_s(W)\,ds,$$

где функционал $\alpha=(\alpha_s(x), \mathcal{B}_{s+})$ таков *), что P-п. н. для почти всех $0\leqslant s\leqslant T$ $\alpha_s(W)=\mathfrak{z}_s^+(W)\gamma_s(\omega)$. Согласно теореме 6.2 процесс $\tilde{W}=(\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t^W)$, $0\leqslant t\leqslant T$, является винеровским, причем $\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1$ (см. п. 3 § 3 гл. 6).

Заметим теперь, что $\mu_\xi(A)=\tilde{\mathsf{P}}(W\in A)$, поскольку

$$\tilde{\mathsf{P}}(W\in A)=\int_{\{\omega:\ W\in A\}} \mathfrak{z}_T(W(\omega))\,d\mathsf{P}(\omega)=\int_A \mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_W(x)=\mu_\xi(A).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=\mu_\xi\left(\int_0^T \alpha_s^2(x)\,ds<\infty\right)=$$
$$=\tilde{\mathsf{P}}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1, \tag{7.68}$$

что позволяет определить процесс

$$\hat{W}_t=\xi_t-\int_0^t \alpha_s(\xi)\,ds, \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Процесс $\hat{W}=(\hat{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, рассматриваемый на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, является винеровским, что показывается так же, как и в теореме 7.5.

Итак, утверждения (7.64), (7.65) теоремы доказаны. Утверждение (7.66) следует из эквивалентности мер μ_ξ и μ_W и равенства (7.65).

---

*) Существование такого функционала следует из леммы 4.9.

Замечание 1. Из доказанной теоремы вытекает, что если процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ таков, что его мера μ_ξ абсолютно непрерывна относительно винеровской, то этот процесс необходимо является слабым решением уравнения типа (7.63).

Замечание 2. Если $\mu_\xi \sim \mu_W$, то из теорем 7.7 и 7.11 следует, что существует неупреждающий функционал $\alpha = (\alpha_t(x), \mathscr{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, такой, что плотности

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W) \quad \text{и} \quad \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi)$$

могут быть найдены по формулам (7.37) и (7.38).

§ 4. Представление процессов Ито в виде процессов диффузионного типа. Обновляющие (innovation) процессы. Структура функционалов от процессов Ито

1. Как показано в § 1 (теорема 7.2), для процессов Ито $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с дифференциалом

$$d\xi_t = \beta_t(\omega)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{7.69}$$

условие $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt < \infty\right) = 1$ обеспечивает абсолютную непрерывность меры μ_ξ по винеровской мере μ_W. Однако явную формулу для плотности $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}$ получить, вообще говоря, не удается.

С другой стороны, если процесс ξ является процессом диффузионного типа ($\beta_t(\omega) = \alpha_t(\xi(\omega))$), то согласно теореме 7.6 для плотностей $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}$ можно дать простые выражения (см. (7.29) и (7.30)). Точно так же структура функционалов от процессов диффузионного типа исследована достаточно подробно (§ 6 гл. 5). Непосредственное же изучение функционалов от процессов Ито является весьма трудной задачей.

В связи с этим возникает вопрос: а нельзя ли представить процесс Ито в виде процесса диффузионного типа (правда, быть может, по отношению к другому винеровскому процессу)?

Положительный ответ на этот вопрос содержится в нижеследующей теореме, в которой описывается также структура функционалов от процессов Ито.

Теорема 7.12. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — *процесс Ито с дифференциалом* (7.69), *где*

$$\int_0^T \mathsf{M}\,|\beta_t(\omega)|\,dt < \infty. \tag{7.70}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_t(x), \mathscr{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *— функционал такой**), *что* **Р**-п. н. *для почти всех*, t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\alpha_t(\xi) = \mathsf{M}(\beta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi). \tag{7.71}$$

1°. *Случайный процесс* $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *с*

$$\overline{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(\xi)\, ds \tag{7.72}$$

является винеровским, а процесс ξ *является процессом диффузионного типа по отношению к процессу* $\overline{W}$:

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi)\, dt + d\overline{W}_t. \tag{7.73}$$

2°. *Если*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\, dt < \infty\right) = 1,$$

то всякий мартингал $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *допускает непрерывную модификацию, для которой справедливо представление*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_s(\omega)\, d\overline{W}_s, \tag{7.74}$$

где процесс $f = (f_s(\omega), \mathscr{F}_s^\xi)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, *таков, что*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\omega)\, ds < \infty\right) = 1.$$

Если к тому же мартингал $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ *является квадратично интегрируемым, то*

$$\int_0^T \mathsf{M} f_s^2(\omega)\, ds < \infty.$$

Доказательство. В силу (7.69) и (7.72)

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t [\beta_s(\omega) - \alpha_s(\xi)]\, ds.$$

---

*) Существование такого функционала следует из леммы 4.9.

Отсюда по формуле Ито при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ находим

$$e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)} = 1 + iz\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\,dW_u +$$

$$+ iz\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}[\beta_u(\omega) - \alpha_u(\xi)]\,du - \frac{z^2}{2}\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\,du. \quad (7.75)$$

Но

$$\mathsf{M}\left[\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\,dW_u \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = 0$$

и

$$\mathsf{M}\left[\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\left(\beta_u(\omega) - \alpha_u(\xi)\right)du \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left[\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\,\mathsf{M}\left(\beta_u(\omega) - \alpha_u(\xi) \mid \mathscr{F}_u^\xi\right)du \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = 0.$$

Поэтому, беря в (7.75) условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ от левой и правой частей, находим

$$\mathsf{M}\left(e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)} \mid \mathscr{F}_s^\xi\right) = 1 - \frac{z^2}{2}\int_s^t \mathsf{M}\left(e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)} \mid \mathscr{F}_s^\xi\right)du.$$

Отсюда получаем

$$\mathsf{M}\left(e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)} \mid \mathscr{F}_s^\xi\right) = e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)} \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \quad 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Следовательно, процесс $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ является винеровским. Для завершения доказательства теоремы осталось лишь заметить, что представление (7.74) следует непосредственно из (7.73) и теорем 5.20, 7.2 и 7.5.

Следствие. *Пусть $\eta = \eta(\omega)$ — $\mathscr{F}_T^\xi$-измеримая случайная величина с $\mathsf{M}|\eta| < \infty$ и выполнено условие 2° теоремы 7.12. Тогда найдется такой процесс*

$$f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^\xi), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad c \quad \mathsf{P}\left(\int_0^T f_t^2(\omega)\,dt < \infty\right) = 1,$$

что

$$\eta = \mathsf{M}\eta + \int_0^T f_t(\omega)\,d\overline{W}_t.$$

Если к тому же $\mathsf{M}\eta^2 < \infty$, *то* $\int_0^T \mathsf{M}f_t^2(\omega)\,dt < \infty$.

Для доказательства достаточно лишь заметить, что $x_t = \mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ является мартингалом и $x_0 = \mathsf{M}\eta$, $x_T = \eta$ (P-п. н.).

2. Возможность представления процессов Ито $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с дифференциалом (7.69) в виде процессов диффузионного типа (см. (7.73)) с *винеровским* процессом $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ играет существенную роль при выводе как общих уравнений оптимальной нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции (гл. 8), так и отдельных частных результатов (см., например, гл. 10). Согласно определению процесса $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$

$$\mathscr{F}_t^{\overline{W}} \subseteq \mathscr{F}_t^\xi$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant T$.

Во многих случаях справедливо обратное включение

$$\mathscr{F}_t^{\overline{W}} \supseteq \mathscr{F}_t^\xi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и, следовательно,

$$\mathscr{F}_t^{\overline{W}} = \mathscr{F}_t^\xi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Совпадение σ-алгебр $\mathscr{F}_t^{\overline{W}}$ и $\mathscr{F}_t^\xi$, $0 \leqslant t \leqslant T$, говорит о том, что процесс $\overline{W}$ «несет в себе ту же самую информацию», что и процесс ξ.

Это свойство процесса $\overline{W}$ оправдывает следующее

Определение. Винеровский процесс $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ называется *обновляющим* (innovation) процессом (по отношению к процессу $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$), если для каждого $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\mathscr{F}_t^{\overline{W}} = \mathscr{F}_t^\xi.$$

Исследование вопроса о том, когда винеровский процесс, входящий в (7.73), является обновляющим, является важной и трудной задачей. Если уравнение (7.73) имеет единственное сильное решение, то, конечно, процесс $\overline{W}$ будет обновляющим. Однако, как правило, решение вопроса о том, когда это уравнение имеет сильное решение, довольно трудно. Один достаточно общий случай совпадения σ-алгебр $\mathscr{F}_t^{\overline{W}}$ и $\mathscr{F}_t^\xi$ будет рассмотрен в следующем параграфе (теорема 7.16). По поводу совпадения этих σ-алгебр в других случаях см. теоремы 12.5 и 13.5.

Пример 2. Пусть $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет дифференциал

$$d\xi_t = \theta\, dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0,$$

где θ — $\mathscr{F}_0$-измеримая нормальная случайная величина, $N(m, \gamma)$, не зависящая от винеровского процесса $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$. Тогда

$\mathsf{M}(\theta\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)=\dfrac{m+\gamma\xi_t}{1+\gamma t}$ (см., например, гл. 12, теорема 12.2) и, следовательно, процесс ξ является процессом диффузионного типа с дифференциалом

$$d\xi_t=\frac{m+\gamma\xi_t}{1+\gamma t}\,dt+d\overline{W}_t. \tag{7.76}$$

Непосредственно можно убедиться, что в этом примере $\mathscr{F}_t^\xi=\mathscr{F}_t^{\overline{W}}$, $0\leqslant t\leqslant T$.

3. Итак, условия (7.70) гарантируют, что всякий процесс Ито является в то же время процессом диффузионного типа (по отношению к винеровскому процессу $\overline{W}$).

Используем этот факт для вывода формул для плотностей мер $\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu_W}$ и $\dfrac{d\mu_W}{d\mu_\xi}$.

Теорема 7.13. *Пусть* $\xi=(\xi_t,\mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, — *процесс Ито с дифференциалом*

$$d\xi_t=\beta_t(\omega)\,dt+dW_t, \tag{7.77}$$

где

$$\int_0^T \mathsf{M}\,|\beta_t(\omega)|\,dt<\infty, \tag{7.78}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt<\infty\right)=1. \tag{7.79}$$

Если к тому же

$$\mathsf{M}\exp\left(-\int_0^T \beta_t\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2\,dt\right)=1, \tag{7.80}$$

то $\mu_\xi\sim\mu_W$, $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1$ *и*

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,W)=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(W)\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\,ds\right), \tag{7.81}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\xi)=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right), \tag{7.82}$$

где функционал $\alpha=(\alpha_t(x),\mathscr{B}_{t+})$, $t\leqslant T$, *таков, что* P-п. н. $\alpha_t(\xi)=\mathsf{M}\left[\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]$ *для почти всех* $t\leqslant T$.

Доказательство. Из условий (7.79), (7.80) и теоремы 7.1 вытекает, что $\mu_\xi\sim\mu_W$. В силу (7.77), (7.78) и теоремы 7.12

процесс ξ является в то же время процессом диффузионного типа с дифференциалом (7.74), где $\overline{W}$ — винеровский процесс. Но меры μ_W и $\mu_{\overline{W}}$ совпадают, поэтому $\mu_\xi \sim \mu_{\overline{W}}$ и по теореме 7.7

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(\overline{W})\,ds<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2(W)\,ds<\infty\right)=1,$$

где функционал $\alpha=(\alpha_t(x),\ \mathscr{B}_{t+})\ t\leqslant T$, таков, что P-п. н. $\alpha_t(\xi)= =\mathsf{M}\left[\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]$, $t\leqslant T$, для почти всех $t\leqslant T$. (Во избежание недоразумений, отметим, что, вообще говоря, P-п. н. $\alpha_t(\overline{W})\neq \neq \mathsf{M}\left(\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^{\overline{W}}\right)$. Действительно, так как $\mathscr{F}_t^{\overline{W}}\subseteq\mathscr{F}_t^\xi$, то $\mathsf{M}\left(\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^{\overline{W}}\right)=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)|\,\mathscr{F}_t^{\overline{W}}\right]=\mathsf{M}\left[\alpha_t(\xi)\,|\,\mathscr{F}_t^{\overline{W}}\right]$, что может быть не равно $\alpha_t(\overline{W})$.)

Представления (7.81), (7.82) следуют из формул (7.37), (7.38) и того замечания, что $\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t,\ \xi)=\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu_{\overline{W}}}(t,\ \xi)$ (P-п. н.), $t\leqslant T$.

З а м е ч а н и е 1. Сравнивая формулы (7.5) и (7.82), видим, что

$$\mathsf{M}\left[\exp\left\{-\int_0^t \beta_s\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2\,ds\right\}\Big|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]=$$
$$=\exp\left[-\int_0^t \mathsf{M}\left(\beta_s\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right)d\xi_s+\frac{1}{2}\int_0^t \left(\mathsf{M}\left(\beta_s\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right)\right)^2 ds\right]. \qquad (7.83)$$

Иначе говоря, в предположениях (7.76)—(7.80) условное математическое ожидание, входящее в левую часть формулы (7.83), может быть «перенесено» под знак экспоненты.

З а м е ч а н и е 2. Если $\mathsf{M}\exp\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \beta_s^2\,ds<\infty\right\}<\infty$, то справедливы формулы (7.81), (7.82).

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 6.1 и заметить, что из условия $\displaystyle\int_0^T \mathsf{M}\,|\,\beta_t(\omega)\,|\,dt<\infty$ вытекает, что $\mathsf{M}\,|\,\beta_t(\omega)\,|<\infty$ для почти всех $t\in[0,\ T]$. Однако без ограничения общности можно считать, что $\mathsf{M}\,|\,\beta_t(\omega)\,|<\infty$ для всех $t\in[0,\ T]$, поскольку в противном случае можно было, не изменяя процесса ξ, перейти к новой функции $\tilde{\beta}_t(\omega)$, которая для почти всех $t\in[0,\ T]$ совпадает с $\beta_t(\omega)$, а в остальных точках t равна, например, нулю.

Замечание 3. Если процессы $\beta=(\beta_t(\omega), \mathscr{F}_t)$ и $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, независимы, $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\,dt<\infty\right)=1$ и $\mathsf{M}|\beta_t(\omega)|<\infty$, $\int_0^T \mathsf{M}|\beta_t(\omega)|\,dt<\infty$, то меры μ_ξ и μ_W эквивалентны и справедливы формулы (7.81), (7.82).

Для доказательства достаточно заметить, что, в соответствии с примером 4 § 2 гл. 6, выполнено условие (7.80).

Пример 3. Продолжим рассмотрение примера из предыдущего пункта. Условия (7.77) — (7.80) выполнены, и поэтому (ср. также с (7.12)) P-п. н.

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi)=\exp\left(\int_0^t \frac{m+\gamma\xi_s}{1+\gamma s}\,d\xi_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{m+\gamma\xi_s}{1+\gamma s}\right)^2 ds\right),$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W)=\exp\left(\int_0^t \frac{m+\gamma W_s}{1+\gamma s}\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{m+\gamma W_s}{1+\gamma s}\right)^2 ds\right).$$

4. Теорема 7.14. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $t\leqslant T$, *—процесс Ито с дифференциалом* (7.76), *и пусть выполнены условия* (7.77) — (7.79). *Тогда* $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=1$, $\mu_\xi\ll\mu_W$ *и*

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W)&=\exp\left(\Gamma_t(W)-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\,ds\right),\\ \frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi)&=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right).\end{aligned}\tag{7.84}$$

Доказательство. Из условия (7.79) и теоремы 7.2 вытекает, что $\mu_\xi\ll\mu_W$. Согласно теореме (7.12) ξ является процессом диффузионного типа с дифференциалом (7.74), где $\overline{W}$—винеровский процесс. Но меры μ_W и $\mu_{\overline{W}}$ совпадают, поэтому $\mu_\xi\ll\mu_{\overline{W}}$ и по теореме 7.5 (утверждение $\Leftarrow$) $\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=1$. Формулы (7.84) следуют из теоремы 7.6.

§ 5. Случай гауссовских процессов

1. В этом параграфе будут рассмотрены процессы Ито $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, с дифференциалом

$$d\xi_t=\beta_t(\omega)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0, \tag{7.85}$$

в предположении, что процесс $\beta=(\beta_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, является *гауссовским*.

Теорема 7.15. *Пусть $\beta=(\beta_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — непрерывный в среднем квадратическом гауссовский процесс.*

Тогда $\mu_\xi \sim \mu_W$ и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(\xi)\,dt<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_t^2(W)\,dt<\infty\right)=1, \tag{7.86}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W)=\exp\left(\int_0^t \alpha_s(W)\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\,ds\right), \tag{7.87}$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)=\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\xi)\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\,ds\right), \tag{7.88}$$

где функционал $\alpha=(\alpha_t(x), \mathscr{B}_{t+})$ таков, что P-п. н. $\alpha_t(\xi)=\mathsf{M}\left[\beta_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]$ *для почти всех $0\leqslant t\leqslant T$.*

Доказательство. По предположению процесс $\beta_t=\beta_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, непрерывен в среднем квадратическом, поэтому $\mathsf{M}\beta_t$ и $\mathsf{M}\beta_t^2$ непрерывны по t и

$$\int_0^T \mathsf{M}\beta_t^2\,dt<\infty. \tag{7.89}$$

Следовательно, $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2\,dt<\infty\right)=1$, и по теореме 7.2 $\mu_\xi \ll \mu_W$.

Далее, в § 2 гл. 6 показано (см. пример 3, а)), что

$$\mathsf{M}\exp\left(-\int_0^T \beta_s\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^T \beta_s^2\,ds\right)=1.$$

Поэтому в силу теоремы 7.1 $\mu_\xi\sim\mu_W$.

Поскольку

$$\int_0^T \mathsf{M}\alpha_t^2(\xi)\,dt=\int_0^T \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(\beta_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)\right]^2 dt\leqslant\int_0^T \mathsf{M}\beta_t^2\,dt<\infty,$$

то выполнено условие (7.86) и, следовательно, плотности $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W)$ и $\frac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)$ задаются формулами (7.87), (7.88) согласно теореме 7.7.

Теорема 7.15 доказана.

2. Откажемся теперь от предположения непрерывности в среднем квадратическом гауссовского процесса $\beta_t(\omega)$, $t \leqslant T$.

Теорема 7.16. *Пусть* $\beta = (\beta_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *гауссовский процесс с*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2(\omega)\, dt < \infty\right) = 1. \tag{7.90}$$

1°. *Тогда* $\mu_\xi \ll \mu_W$ *и* (P-п. н.)

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W) = \exp\left(\Gamma_t(\alpha_t(W)) - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(W)\, ds\right), \tag{7.91}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, \xi) = \exp\left(\int_0^t \alpha_s(\xi)\, d\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\xi)\, ds\right). \tag{7.92}$$

2°. *Если к тому же система* $(\beta, W) = (\beta_t, W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *является гауссовской, то для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathscr{F}_t^\xi = \mathscr{F}_t^{\overline{W}},$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ — *(обновляющий) процесс с*

$$\overline{W}_t = \xi_t - \int_0^t \alpha_s(\xi)\, ds, \qquad \alpha_s(\xi) = \mathsf{M}\,(\beta_s(\omega) \mid \mathscr{F}_s^\xi).$$

При этом всякий мартингал $X = (x_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *образующий вместе с* (β, W) *гауссовскую систему, представляется в виде*

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s)\, d\overline{W}_s, \tag{7.93}$$

где детерминированная функция $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, *такова, что* $\int_0^T f^2(s)\, ds < \infty$.

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму, имеющую и самостоятельный интерес.

Лемма 7.2. *Пусть $\beta_t=\beta_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — измеримый гауссовский процесс. Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2\,ds<\infty\right)=1\Leftrightarrow\int_0^T \mathsf{M}\beta_s^2\,ds<\infty. \tag{7.94}$$

Доказательство. Импликация «$\Leftarrow$» очевидна. При доказательстве прямого утверждения «$\Rightarrow$» можно считать, что $\mathsf{M}\beta_t\equiv 0$. Действительно, допустим, что уже установлено, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \tilde\beta_s^2\,ds<\infty\right)=1\Rightarrow\int_0^T \mathsf{M}\tilde\beta_s^2\,ds<\infty$$

для гауссовских процессов $\tilde\beta_t=\tilde\beta_t(\omega)$, $0\leqslant t\leqslant T$, с $\mathsf{M}\tilde\beta_t\equiv 0$. Тогда наряду с исходным процессом β_t рассмотрим не зависящий от него гауссовский процесс $\bar\beta_t$, имеющий те же распределения, что и процесс β_t.

Процесс $\tilde\beta_t=\beta_t-\bar\beta_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеет нулевое среднее, и, следовательно, из условия $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2\,dt<\infty\right)=\mathsf{P}\left(\int_0^T \bar\beta_t^2\,dt<\infty\right)=1$ вытекает, что

$$\int_0^T \mathsf{M}(\beta_t-\bar\beta_t)^2\,dt<\infty.$$

Но

$$\int_0^T \mathsf{M}(\beta_t-\bar\beta_t)^2\,dt=2\int_0^T[\mathsf{M}\beta_t^2-(\mathsf{M}\beta_t)^2]\,dt=2\int_0^T \mathsf{M}(\beta_t-\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T(\beta_t-\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt<\infty\right)=1.$$

Поскольку $\mathsf{M}\beta_t=\beta_t-(\beta_t-\mathsf{M}\beta_t)$, то

$$\int_0^T(\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt\leqslant 2\int_0^T\beta_t^2\,dt+2\int_0^T(\beta_t-\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt.$$

Первая часть этого неравенства конечна с вероятностью единица, а значит, $\int_0^T(\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt<\infty$. Поэтому, если импликация «$\Rightarrow$» доказана для процессов с нулевым средним, то из условия

$\mathsf{P}\left(\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt<\infty\right)=1$ будет вытекать, что $\int\limits_0^T (\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt<\infty$ и $\int\limits_0^T \mathsf{M}\tilde{\beta}_t^2\,dt<\infty$, где $\tilde{\beta}_t=\beta_t-\mathsf{M}\beta_t$. Тогда

$$\int\limits_0^T \mathsf{M}\beta_t^2\,dt\leqslant 2\int\limits_0^T \mathsf{M}\tilde{\beta}_t^2\,dt+2\int\limits_0^T (\mathsf{M}\beta_t)^2\,dt<\infty.$$

Итак, будем считать, что $\mathsf{M}\beta_t=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Предположим теперь, что процесс β_t, $0\leqslant t\leqslant T$, непрерывен в среднем квадратическом. Покажем, что

$$\mathsf{M}\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt\leqslant\left[\mathsf{M}\exp\left(-\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt\right)\right]^{-2}. \tag{7.95}$$

Действительно, согласно разложению Карунена ([34], гл. 5, § 2) P-п. н. при $0\leqslant t\leqslant T$

$$\beta_t=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varphi_i(t),$$

где $\{\varphi_i(t),\ i=1,2,\ldots\}$ — ортонормированные собственные функции ядра $\mathsf{M}\beta_t\beta_s$:

$$\int\limits_0^T \mathsf{M}\beta_t\beta_s\varphi_i(s)\,ds=\lambda_i\varphi_i(t),\qquad \int\limits_0^T \varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt=\delta(i-j),$$

а

$$\eta_i=\int\limits_0^T \beta_t\varphi_i(t)\,dt$$

— независимые гауссовские случайные величины с $\mathsf{M}\eta_i=0$ и $\mathsf{M}\eta_i^2=\lambda_i$.

Тогда

$$\mathsf{M}\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt=\mathsf{M}\int\limits_0^T\left(\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varphi_i(t)\right)^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{M}\eta_i^2=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i. \tag{7.96}$$

Далее, легко подсчитать, что

$$0<\mathsf{M}\exp\left(-\int\limits_0^T \beta_t^2\,dt\right)=\mathsf{M}\exp\left(-\int\limits_0^T\left(\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varphi_i(t)\right)^2dt\right)=$$

$$=\mathsf{M}\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\mathsf{M}\exp(-\eta_i^2)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+2\lambda_i)^{-1/2}. \tag{7.97}$$

Сравнивая правые части в (7.96) и (7.97), приходим к требуемому неравенству (7.95).

Пусть теперь $\beta_t = \beta_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — произвольный гауссовский процесс (не обязательно непрерывный в среднем квадратическом) с $\mathsf{M}\beta_t = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_t^2\,dt < \infty\right) = 1$. Обозначим $f = (f_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ некоторую полную ортонормированную (в $L_2[0, T]$) систему непрерывных функций и положим для $n = 1, 2, \ldots$

$$\beta_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t),$$

где *)

$$\alpha_i = \int_0^T \beta_t f_i(t)\,dt.$$

Легко проверить, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ процессы $\beta_t^{(n)}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, непрерывны в среднем квадратическом и

$$\lim_n \int_0^T [\beta_t - \beta_t^{(n)}]^2\,dt = 0, \qquad \int_0^T \beta_t^2\,dt = \lim_n \int_0^T (\beta_t^{(n)})^2\,dt \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{7.98}$$

Тогда из доказанного неравенства,

$$\mathsf{M}\int_0^T (\beta_t^{(n)})^2\,dt \leqslant \left[\mathsf{M}\exp\left(-\int_0^T (\beta_t^{(n)})^2\,dt\right)\right]^{-2},$$

и леммы Фату получаем, что неравенство (7.95) справедливо и без предположения непрерывности в среднем квадратическом процесса β_t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Из этого неравенства следует, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \beta_s^2\,ds < \infty\right) \Rightarrow \int_0^T \mathsf{M}\beta_s^2\,ds < \infty.$$

Лемма доказана.

---

*) По поводу гауссовости величин α_i и ранее рассмотренных величин η_i см. далее замечание к этой лемме.

Замечание. При доказательстве леммы 7.2 использовался тот факт, что случайные величины $\alpha = \int\limits_0^T \beta_t \varphi(t)\, dt$ являются гауссовскими *).

Доказать гауссовость величины α можно следующим образом. Обозначим

$$\eta(t) = \beta_t \varphi(t), \qquad \eta_\varepsilon(t) = \frac{\eta(t)}{1 + \varepsilon \sqrt{\mathsf{M}\eta^2(t)}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \alpha^\varepsilon = \int\limits_0^T \eta_\varepsilon(t)\, dt.$$

Тогда P-п. н.

$$|\alpha - \alpha^\varepsilon| = \left| \int\limits_0^T [\eta(t) - \eta_\varepsilon(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T |\eta(t)| \frac{\varepsilon \sqrt{\mathsf{M}\eta^2(t)}}{1 + \varepsilon \sqrt{\mathsf{M}\eta^2(t)}}\, dt \to 0, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

поскольку при каждом t

$$1 \geqslant \frac{\varepsilon \sqrt{\mathsf{M}\eta^2(t)}}{1 + \varepsilon \sqrt{\mathsf{M}\eta^2(t)}} \to 0, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

$$\int\limits_0^T |\eta(t)|\, dt = \int\limits_0^T |\beta_t \varphi(t)|\, dt \leqslant \left(\int\limits_0^T \beta_t^2\, dt \cdot \int\limits_0^T \varphi^2(t)\, dt \right)^{1/2} < \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

и можно применить теорему о мажорируемой сходимости (теорему 1.4).

Чтобы доказать теперь гауссовость величины α, достаточно проверить, что распределение величин α^ε для $\varepsilon > 0$ является гауссовским.

Легко подсчитать, что в силу гауссовости процесса $\eta_\varepsilon(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ при $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^T \mathsf{M}|\eta_\varepsilon(t)|^n\, dt < \infty.$$

Хорошо известно **), что при выполнении условия

$$\int\limits_0^T \mathsf{M}|\eta_\varepsilon(t)|^k\, dt < \infty$$

*) Заметим, что это нетривиальный факт, поскольку интеграл $\int\limits_0^T \beta_t \varphi(t)\, dt$ является интегралом Лебега (при фиксированном ω), а не интегралом Римана.

**) См. [103], [164].

k-й семиинвариант $S^{(k)}_{\alpha^\varepsilon}$ случайной величины $\alpha^\varepsilon = \int_0^T \eta_\varepsilon(t)\,dt$ выражается через семиинварианты $S^{(k)}_{\eta_\varepsilon}(t_1, \ldots, t_k)$ вектора $(\eta_\varepsilon(t_1), \ldots$ $\ldots, \eta_\varepsilon(t_k))$ формулой

$$S^{(k)}_{\alpha^\varepsilon} = \int_0^T \ldots \int_0^T S^{(k)}_{\eta_\varepsilon}(t_1, \ldots, t_k)\,dt_1 \ldots dt_k.$$

Но случайный вектор $(\eta_\varepsilon(t_1), \ldots, \eta_\varepsilon(t_k))$ является гауссовским, и, следовательно, $S^{(k)}_{\eta_\varepsilon}(t_1, \ldots, t_k) = 0$, $k \geqslant 3$. Значит, только первые два семиинварианта $S^{(1)}_{\alpha^\varepsilon}$, $S^{(2)}_{\alpha^\varepsilon}$ величины α^ε могут быть отличны от нуля, и, следовательно, случайная величина α^ε имеет гауссовское распределение.

Доказательство теоремы 7.16. Из условия (7.90) и леммы 7.2 следует, что

$$\int_0^T \mathsf{M}\beta_t^2\,dt < \infty.$$

Поэтому представления (7.91), (7.92) непосредственно вытекают из теоремы 7.14.

Перейдем к доказательству утверждений 2°. Пусть функционал $\alpha = (\alpha_t(x), \mathscr{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in C_T$, таков, что $\alpha_t(\xi) = \mathsf{M}(\beta_t(\omega) \mid \mathscr{F}^\xi_t)$ (P-п. н.). Тогда в силу (7.73)

$$\xi_t = \int_0^t \alpha_s(\xi)\,ds + \overline{W}_t. \tag{7.99}$$

Ясно, что $\mathscr{F}^\xi_t \supseteq \mathscr{F}^{\overline{W}}_t$. Покажем справедливость обратных включений $\mathscr{F}^\xi_t \subseteq \mathscr{F}^{\overline{W}}_t$. Для этого заметим, что для каждого t, $0 \leqslant$ $\leqslant t \leqslant T$, случайная величина $\eta = \alpha_t(\xi)$ $\mathscr{F}^\xi_t$-измерима и по теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1) система (η, W, ξ) является гауссовской. Тогда по следствию 2 теоремы 5.21

$$\alpha_t(\xi) = \mathsf{M}\alpha_t(\xi) + \int_0^t G(t, s)\,d\overline{W}_s,$$

где детерминированная функция $G(t, s)$ такова, что $\int_0^t G^2(t, s)ds < \infty$.

Следовательно *), функция $\alpha_t(\xi)$ $\mathscr{F}^{\overline{W}}_t$-измерима. Отсюда вытекает,

---

*) Все рассматриваемые σ-алгебры считаются пополненными множествами из $\mathscr{F}$ нулевой вероятности.

что интеграл $\int\limits_0^t \alpha_s(\xi)\,ds$ также $\mathcal{F}_t^{\overline{W}}$-измерим, и в силу (7.99) $\mathcal{F}_t^{\xi} \subseteq \mathcal{F}_t^{\overline{W}}$.

Итак, для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{\xi}$ и $\mathcal{F}_t^{\overline{W}}$ совпадают. Возможность представления (7.93) следует из теоремы 5.21.

Следствие. *Если* $\eta = \eta(\omega)$ — $\mathcal{F}_T^{\xi}$-*измеримая гауссовская случайная величина и система* (η, β, W) *является гауссовской, то*

$$\eta = \mathsf{M}\eta + \int\limits_0^T f_T(s)\,d\overline{W}_s,$$

где функция $f_T(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, *такова, что* $\int\limits_0^T f_T^2(s)\,ds < \infty$.

3. Замечание. Если совместное распределение процессов β и W является гауссовским, то из условия (7.90) следует, что меры μ_ξ и μ_W эквивалентны ($\mu_\xi \sim \mu_W$). Действительно, в этом случае процесс ξ является гауссовским. А для гауссовских процессов их меры или эквивалентны, или сингулярны (см. [57]). Но $\mu_\xi \ll \mu_W$, поэтому $\mu_\xi \sim \mu_W$. Этот результат можно было бы получить и непосредственно, поскольку в рассматриваемом случае нетрудно проверить, что не только $\int\limits_0^T \mathsf{M}\alpha_t^2(\xi)\,dt < \infty$, но и $\int\limits_0^T \mathsf{M}\alpha_t^2(W)\,dt < \infty$. Поэтому эквивалентность мер μ_ξ и μ_W следует из теоремы 7.7 и плотности мер $\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W)$ и $\dfrac{d\mu_W}{d\mu_\xi}(t, \xi)$ задаются формулами (7.87), (7.88).

§ 6. Абсолютная непрерывность мер процессов Ито относительно мер, соответствующих процессам диффузионного типа

1. Результаты предшествующих параграфов допускают обобщение на более широкие классы процессов Ито и процессов диффузионного типа.

В соответствии с определением 6, данным в § 2 гл. 4, процесс $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, есть *процесс Ито*, если для любого $0 \leqslant t \leqslant T$ P-п. н.

$$\xi_t = \xi_0 + \int\limits_0^t A_s(\omega)\,ds + \int\limits_0^t B_s(\omega)\,dW_s, \tag{7.100}$$

где процессы $A=(A_s(\omega), \mathscr{F}_s)$ и $B=(B_s(\omega), \mathscr{F}_s)$ таковы что **P**-п. н.

$$\int_0^T |A_s(\omega)|\,ds < \infty, \tag{7.101}$$

$$\int_0^T B_s^2(\omega)\,ds < \infty. \tag{7.102}$$

В том же случае, когда для почти всех $s \leqslant T$ величины $A_s(\omega)$ и $B_s(\omega)$ являются $\mathscr{F}_s^\xi$-измеримыми, процесс Ито называется процессом *диффузионного типа* (определение 7, § 2 гл. 4). Для случая $B_s(\omega)\equiv 1$ в теореме 7.12 были даны условия, при которых процесс Ито являлся в то же самое время и процессом диффузионного типа (по отношению к винеровскому процессу $\overline{W}=(\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$). Для процессов (7.100) этот результат можно обобщить следующим образом.

Теорема 7.17. *Пусть* $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ *является процессом Ито* (7.100) *и* $\nu=(\nu_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *некоторый винеровский процесс, не зависящий от винеровского процесса* W *и процессов* A *и* B. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\int_0^T \mathsf{M}|A_t(\omega)|\,dt < \infty, \tag{7.103}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}\left(\sqrt{B_t^2(\omega)}\right)^+ |A_t(\omega)|\,dt < \infty, \tag{7.104}$$

где

$$\left(\sqrt{B_t^2(\omega)}\right)^+ = \begin{cases} \left(\sqrt{B_t^2(\omega)}\right)^{-1}, & B_t^2(\omega)>0, \\ 0, & B_t^2(\omega)=0. \end{cases}$$

Тогда найдутся: 1) *измеримые функционалы* $\overline{A}=(\overline{A}_t(x), \mathscr{B}_{t+})$ *и* $\overline{B}=(\overline{B}_t(x), \mathscr{B}_{t+})$, $0\leqslant t\leqslant T$, *удовлетворяющие* **P**-п. н. *при почти всех* $0\leqslant t\leqslant T$ *равенствам*

$$\overline{A}_t(\xi)=\mathsf{M}(A_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi), \qquad \overline{B}_t(\xi)=\sqrt{B_t^2(\omega)}, \tag{7.105}$$

и 2) *винеровский процесс* $\overline{W}=(\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^{\xi,\nu})$, $0\leqslant t\leqslant T$, *такие, что процесс* ξ *допускает представление*

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t \overline{A}_s(\xi)\,ds+\int_0^t \overline{B}_s(\xi)\,d\overline{W}_s. \tag{7.106}$$

Если к тому же $B_t^2(\omega)>0$ **P**-п. н. *при почти всех* $0\leqslant t\leqslant T$, *то винеровский процесс* $\overline{W}$ *согласован с семейством* $F^{\xi}=(\mathcal{F}_t^{\xi})$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Доказательство. В силу (7.103) $\mathsf{M}|A_t(\omega)|<\infty$ при почти всех t (без потери общности можно считать, что $\mathsf{M}|A_t(\omega)|<\infty$ при всех t, заменив, если это необходимо, $A_t(\omega)$ соответствующей модификацией). Тогда существование требуемого функционала $\overline{A}$ следует из леммы 4.9.

Чтобы доказать справедливость второго равенства (7.105), достаточно убедиться в том, что величины $B_t^2(\omega)$ при почти всех $0\leqslant t\leqslant T$ являются $\mathcal{F}_t^{\xi}$-измеримыми.

Для этого разобьем отрезок $[0, t]$ на n частей, $0\equiv t_0^{(n)}<\ldots$ $\ldots<t_n^{(n)}\equiv t$, таким образом, чтобы $\max\limits_j\left[t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}\right]\to 0$, $n\to\infty$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\xi_{t_{j+1}^{(n)}}-\xi_{t_j^{(n)}}\right]^2=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}A_s(\omega)\,ds\right)^2+$$
$$+2\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}B_s(\omega)\,dW_s\right)\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}A_s(\omega)\,ds\right)+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}B_s(\omega)\,dW_s\right)^2. \tag{7.107}$$

Первые два слагаемых в правой части (7.107) стремятся к нулю при $n\to\infty$ с вероятностью 1, поскольку

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}A_s(\omega)\,ds\right)^2\leqslant\max_j\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}|A_s(\omega)|\,ds\cdot\int_0^T|A_s(\omega)|\,ds\to 0,$$
$$n\to\infty,$$

и аналогично

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}B_s(\omega)\,dW_s\right)\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}A_s(\omega)\,ds\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\max_j\left|\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}B_s(\omega)\,dW_s\right|\cdot\int_0^T|A_s(\omega)|\,ds\to 0,\qquad n\to 0.$$

Последнее слагаемое в правой части (7.107) может быть переписано с помощью формулы Ито в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} B_s(\omega)\,dW_s\right)^2 =$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} B_s^2(\omega)\,ds + 2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}}\left(\int_{t_j^{(n)}}^{s} B_u(\omega)\,dW_u\right)B_s(\omega)\,dW_s =$$

$$=\int_0^t B_s^2(\omega)\,ds + 2\int_0^t f_n(s)\,B_s(\omega)\,dW_s,$$

где

$$f_n(s)=\int_{t_j^{(n)}}^{s} B_u(\omega)\,dW_u,\qquad t_j^{(n)}\leqslant s<t_{j+1}^{(n)}.$$

Так как

$$\int_0^T f_n^2(s)\,B_s^2(\omega)\,ds \leqslant \Big(\max_j \sup_{t_j^{(n)}\leqslant s<t_{j+1}^{(n)}} f_n^2(s)\Big)\cdot\int_0^T B_s^2(\omega)\,ds \to 0,$$

то $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_n \int_0^t f_n(s)\,B_s(\omega)\,dW_s = 0$ и последнее слагаемое в правой части (7.107) стремится по вероятности к $\int_0^t B_s^2(\omega)\,ds$ при $n\to\infty$. Левая часть равенства (7.107) при каждом $n=1, 2, \ldots$ является $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримой. Значит, $\int_0^t B_s^2(\omega)\,ds$ являются $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримыми при каждом $0\leqslant t\leqslant T$. Отсюда (см. доказательство леммы 5.2) следует существование процесса $\widetilde{B}^2=(\widetilde{B}_s^2(\omega), \mathscr{F}_s^\xi)$, $0\leqslant s\leqslant t$, такого, что при почти всех $0\leqslant s\leqslant t$ $\widetilde{B}_s^2(\omega)=B_s^2(\omega)$ (P-п. н.). Тогда существование искомого функционала $\overline{B}$ вытекает из леммы 4.9.

Условия (7.103), (7.104) и равенства (7.105) гарантируют существование интегралов $\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,d\xi_s$ и $\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,\overline{A}_s(\xi)\,ds$.

Рассмотрим теперь случайный процесс $\overline{W}=(\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^{\xi,\nu})$, определенный равенствами

$$\overline{W}_t=\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,d\xi_s-\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,\overline{A}_s(\xi)\,ds+\\+\int_0^t [1-\overline{B}_s^+(\xi)\,\overline{B}_s(\xi)]\,d\nu_s,\quad t\leqslant T, \tag{7.108}$$

и покажем, что процесс $\overline{W}$ является винеровским.

В силу (7.100) и (7.108)

$$\overline{W}_t=\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,B_s(\omega)\,dW_s+\int_0^t \overline{B}_s^+(\xi)\,[A_s(\omega)-\overline{A}_s(\xi)]\,ds+\\+\int_0^t [1-\overline{B}_s^+(\xi)\,\overline{B}_s(\xi)]\,d\nu_s.$$

По формуле Ито для $s<t$

$$e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)}=1+iz\int_0^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\overline{B}_u^+(\xi)\,B_u(\omega)\,dW_u+\\+iz\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}[1-\overline{B}_u^+(\xi)\,\overline{B}_u(\xi)]\,d\nu_u+\\+iz\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\overline{B}_u^+(\xi)\,[A_u(\omega)-\overline{A}_u(\xi)]\,du-\\-\frac{z^2}{2}\int_s^t e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\,du. \tag{7.109}$$

Поскольку винеровский процесс ν не зависит от процессов W, A и B, то P-п. н.

$$\mathsf{M}(A_t(\omega)\mid\mathcal{F}_t^{\xi,\nu})=\mathsf{M}(A_t(\omega)\mid\mathcal{F}_t^{\xi})=\overline{A}_t(\xi).$$

Как и при доказательстве теоремы 7.12, вычисляя условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot\mid\mathcal{F}_s^{\xi,\nu})$ от левой и правой частей (7.109), получаем

$$\mathsf{M}(e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)}\mid\mathcal{F}_s^{\xi,\nu})=1-\frac{z^2}{2}\int_s^t \mathsf{M}(e^{iz(\overline{W}_u-\overline{W}_s)}\mid\mathcal{F}_s^{\xi,\nu})\,du.$$

Отсюда $\mathsf{M}\left(e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)} \,|\, \mathcal{F}_s^{\xi,\nu}\right)=e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}$, что доказывает винеровость процесса $\overline{W}$.

Для доказательства представления (7.106) заметим, что в силу (7.108)

$$\int_0^t \overline{B}_s(\xi)\,d\overline{W}_s=\int_0^t \overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\,d\xi_s-\int_0^t \overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\,\overline{A}_s(\xi)\,ds=$$
$$=\xi_t-\xi_0-\int_0^t \overline{A}_s(\xi)\,ds+\zeta_t, \qquad (7.110)$$

где

$$\zeta_t=\int_0^t \left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]\left[d\xi_s-\overline{A}_s(\xi)\,ds\right].$$

Покажем теперь, что процесс $\zeta=(\zeta_t, \mathcal{F}_t^{\xi})$, $0\leqslant t\leqslant T$, является мартингалом. Действительно, в силу (7.100)

$$\zeta_t=\int_0^t \left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]B_s(\omega)\,dW_s+$$
$$+\int_0^t \left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]\left[A_s(\omega)-\overline{A}_s(\xi)\right]ds=$$
$$=\int_0^t \left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]\left[A_s(\omega)-\overline{A}_s(\xi)\right]ds, \qquad (7.111)$$

поскольку $\left\{\left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]B_s(\omega)\right\}^2=\left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]\overline{B}_s(\xi)=0$ и $\mathsf{M}\left(\int_0^t \left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]B_s(\omega)\,dW_s\right)^2=0$. Значит, при $s<t$ согласно (7.111)

$$\mathsf{M}\left(\zeta_t \,|\, \mathcal{F}_s^{\xi}\right)=$$
$$=\zeta_s+\mathsf{M}\left(\int_s^t \left[1-\overline{B}_u(\xi)\,\overline{B}_u^+(\xi)\right]\left[A_u(\omega)-\overline{A}_u(\xi)\right]du \,|\, \mathcal{F}_s^{\xi}\right)=\zeta_s.$$

Пусть $\tau_N=\inf\{t\leqslant T: |\zeta_t|\geqslant N\}$, причем $\tau_N=T$, если $\sup\limits_{t\leqslant T}|\zeta_t|<N$. Ясно, что процесс $\left(\zeta_{t\wedge\tau_N}, \mathcal{F}_t^{\xi}\right)$ является квадратично интегрируемым мартингалом с

$$\zeta_{t\wedge\tau_N}=\int_0^t \chi_{\{s<\tau_N\}}(\omega)\left[1-\overline{B}_s(\xi)\,\overline{B}_s^+(\xi)\right]\left[A_s(\omega)-\overline{A}_s(\xi)\right]ds.$$

Поэтому по лемме 7.1 $\zeta_{t\wedge\tau_N}\equiv 0$ (P-п. н.). На множестве $\{\tau_N=T\}$ $\zeta_t=\zeta_{t\wedge\tau_N}=0$. Значит,

$$\mathsf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\zeta_t|=0\}\leqslant\mathsf{P}\{\tau_N<T\}\to 0,\qquad N\to\infty, \tag{7.112}$$

в силу непрерывности процесса ζ.

Из (7.112) и (7.110) следует требуемое представление (7.106) для процесса ξ. Если же $B_t^2(\omega)>0$ P-п. н. для почти всех $0<t\leqslant T$, то из определения процесса $\overline{W}$ следует, что $\overline{W}_t$ $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримы при каждом $0\leqslant t\leqslant T$.

2. Непосредственным обобщением теоремы 7.1 является следующее предложение.

Теорема 7.18. *Пусть $\xi=(\xi_t,\mathscr{F}_t)$ — процесс Ито с дифференциалом*

$$d\xi_t=A_t(\omega)\,dt+b_t(\xi)\,dW_t, \tag{7.113}$$

$\eta=(\eta_t,\mathscr{F}_t)$ — процесс диффузионного типа с

$$d\eta_t=a_t(\eta)\,dt+b_t(\eta)\,dW_t,\qquad \eta_0=\xi_0, \tag{7.114}$$

а ξ_0 — $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина с $\mathsf{P}(|\xi_0|<\infty)=1$.

Пусть выполнены следующие предположения:

(I) *неупреждающие функционалы $a_t(x)$ и $b_t(x)$ удовлетворяют условиям* (4.110), (4.111), *обеспечивающим существование и единственность сильного решения уравнения* (7.114);

(II) *для любого t, $0\leqslant t\leqslant T$, уравнение*

$$b_t(\xi)\,\alpha_t(\omega)=A_t(\omega)-a_t(\xi) \tag{7.115}$$

имеет (относительно $\alpha_t(\omega)$) P-п. н. ограниченное решение;

(III) $$\mathsf{P}\left(\int_0^T\alpha_t^2(\omega)\,dt<\infty\right)=1; \tag{7.116}$$

(IV) $$\mathsf{M}\exp\left(-\int_0^T\alpha_t(\omega)\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\alpha_t^2(\omega)\,dt\right)=1. \tag{7.117}$$

Тогда $\mu_\xi\sim\mu_\eta$ и P-п. н.

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi)=\mathsf{M}\left\{\exp\left(-\int_0^T\alpha_t(\omega)\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\alpha_t^2(\omega)\,dt\right)\Bigg|\mathscr{F}_T^\xi\right\}. \tag{7.118}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что решение уравнения (7.115) может быть представлено в виде

$$\alpha_t(\omega)=b_t^+(\xi)\,[A_t(\omega)-a_t(\xi)], \tag{7.119}$$

где

$$b_t^+(\xi)=\begin{cases} b_t^{-1}(\xi), & b_t(\xi)\neq 0, \\ 0, & b_t(\xi)=0. \end{cases} \tag{7.120}$$

Обозначим

$$\mathfrak{z}_t=\exp\left(-\int_0^t \alpha_s(\omega)\,dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\omega)\,ds\right),$$

$$d\tilde{\mathsf{P}}(\omega)=\mathfrak{z}_T(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega).$$

По теореме 6.3 процесс

$$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \alpha_s(\omega)\,ds$$

является винеровским (относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, и меры $\tilde{\mathsf{P}}$). Имеем $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\eta_0+\int_0^t a_s(\xi)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,d\tilde{W}_s=$$

$$=\eta_0+\int_0^t a_s(\xi)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,\alpha_s(\omega)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,dW_s=$$

$$=\eta_0+\int_0^t a_s(\xi)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,b_s^+(\xi)\,[A_s(\omega)-a_s(\xi)]\,ds+$$

$$+\int_0^t b_s(\xi)\,dW_s=\eta_0+\int_0^t A_s(\omega)\,ds+\int_0^t b_s(\xi)\,dW_s=\xi_t.$$

Иначе говоря, процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ рассматриваемый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \tilde{\mathsf{P}})$, удовлетворяет тому же самому уравнению, что и процесс $\eta=(\eta_t, \mathscr{F}_t)$ на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Поэтому в силу предположения (I) $\tilde{\mathsf{P}}(\xi\in A)=\mathsf{P}\{\eta\in A\}$, и, значит,

$$\mu_\eta(A)=\mathsf{P}\{\eta\in A\}=\tilde{\mathsf{P}}\{\xi\in A\}=\int_{\{\omega:\ \xi\in A\}} \mathfrak{z}_T(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega)=$$

$$=\int_A \mathsf{M}\left(\mathfrak{z}_T\,|\,\mathscr{F}_T^{\xi}\right)_{\xi=x}\,d\mu_\xi(x). \tag{7.121}$$

Отсюда вытекает, что $\mu_\eta\ll\mu_\xi$ и формула (7.118). Абсолютная непрерывность меры μ_ξ по μ_η доказывается так же, как и в теореме 7.1.

Следствие. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *процесс диффузионного типа с*

$$d\xi_t = A_t(\xi)\,dt + b_t(\xi)\,dW_t, \qquad \xi_0 = \eta_0 \tag{7.122}$$

(*т. е. пусть в* (7.113) $A_t(\omega) = A_t(\xi(\omega))$). *Тогда, если выполнены предположения* (I), (II), (IV) *теоремы* 7.18 *и*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T [b_s^+(\xi)\,A_s(\xi)]^2\,ds < \infty\right\} = \mathsf{P}\left\{\int_0^T [b_s^+(\xi)\,a_s(\xi)]^2\,ds < \infty\right\} = 1, \tag{7.123}$$

то (ср. со следствием теоремы 7.1) P-п. н.

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left[-\int_0^T (b_s^+(\xi))^2\,[A_s(\xi) - a_s(\xi)]\,d\xi_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^T (b_s^+(\xi))^2\,[A_s^2(\xi) - a_s^2(\xi)]\,ds\right], \tag{7.124}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = \exp\left[\int_0^T (b_s^+(\eta))^2\,[A_s(\eta) - a_s(\eta)]\,d\eta_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^T (b_s^+(\eta))^2\,[A_s^2(\eta) - a_s^2(\eta)]\,ds\right]. \tag{7.125}$$

Заметим, что входящие в (7.124) и (7.125) стохастические интегралы определены в силу эквивалентности мер μ_ξ и μ_η, условия (7.123) и того, что P-п. н.

$$\int_0^T (b_s^+(\xi))^4\,(A_s(\xi) - a_s(\xi))^2\,b_s^2(\xi)\,ds \leqslant \int_0^T \alpha_s^2(\xi)\,ds < \infty.$$

Пример. Пусть $\xi = (\xi_t)$ и $\eta = (\eta_t)$ — два процесса диффузионного типа с дифференциалами

$$d\xi_t = \xi_t\,dt + \xi_t\,dW_t, \qquad \xi_0 = \eta_0, \qquad d\eta_t = \eta_t\,dW_t,$$

где $\mathsf{P}(\eta_0 = 0) > 0$.

С помощью формулы Ито убеждаемся, что решения этих уравнений задаются формулами

$$\xi_t = \eta_0 \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right), \qquad \eta_t = \eta_0 \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right).$$

Условия теоремы 7.18, как легко проверить, выполнены. Поэтому $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ и P-п. н.

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = \exp\left[\int_0^T \eta_s (\eta_s^+)^2 \, d\eta_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\eta_s \eta_s^+)^2 \, ds\right] =$$

$$= \exp\left[\int_0^T \eta_s^+ \, d\eta_s - \frac{1}{2}\int_0^T \eta_s \eta_s^+ \, ds\right] =$$

$$= \exp\left[\int_0^T (\eta_s \eta_s^+) \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T (\eta_s \eta_s^+) \, ds\right] = \exp\left[\eta_0 \eta_0^+ \left(W_T - \frac{T}{2}\right)\right]. \tag{7.126}$$

Но P-п. н.

$$\exp\left[\eta_0 \eta_0^+ \left(W_T - \frac{T}{2}\right)\right] = (1 - \eta_0 \eta_0^+) + \eta_0 \eta_0^+ \exp\left[\eta_0 \eta_0^+ \left(W_T - \frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$= (1 - \eta_0 \eta_0^+) + \eta_0 \eta_0^+ \exp\left(W_T - \frac{T}{2}\right) = (1 - \eta_0 \eta_0^+) + \eta_0^+ \eta_T.$$

Итак, P-п. н.

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = (1 - \eta_0 \eta_0^+) + \eta_0^+ \eta_T \tag{7.127}$$

и, аналогично,

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi) = \frac{1}{(1 - \xi_0 \xi_0^+) + \xi_0^+ \xi_T}. \tag{7.128}$$

Из (7.127) видно, что на множестве $\{\omega: \xi_0 = \eta_0 = 0\}$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = 1,$$

а на $\{\omega: \xi_0 = \eta_0 \neq 0\}$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = \frac{\eta_T}{\eta_0}.$$

3. Для рассматриваемых процессов диффузионного типа приведем аналоги некоторых утверждений теорем 7.5 — 7.7.

Теорема 7.19. *Пусть* $\xi = (\xi_t)$ *и* $\eta = (\eta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *два процесса диффузионного типа с*

$$d\xi_t = A_t(\xi)\, dt + b_t(\xi)\, dW_t, \qquad \xi_0 = \eta_0, \tag{7.129}$$

$$d\eta_t = a_t(\eta)\, dt + b_t(\eta)\, dW_t. \tag{7.130}$$

Пусть выполнены предположения (I), (II) *теоремы* 7.18 (*с* $A_t(\omega) = A_t(\xi(\omega))$).

Тогда, если

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T (b_s^+(\xi))^2\left[A_s^2(\xi)+a_s^2(\xi)\right]ds<\infty\right\}=$$
$$=\mathsf{P}\left\{\int_0^T (b_s^+(\eta))^2\left[A_s^2(\eta)+a_s^2(\eta)\right]ds<\infty\right\}=1, \qquad (7.131)$$

то $\mu_\xi\sim\mu_\eta$ *и плотности* $\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}$, $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}$ *задаются формулами* (7.124), (7.125).

Доказательство. Положим

$$\tau_n(x)=\begin{cases}\inf\left[t\leqslant T\colon \int_0^t (b_s^+(x)[A_s(x)-a_s(x)])^2\,ds\geqslant n\right],\\ T, \text{ если } \int_0^T (b_s^+(x)[A_s(x)-a_s(x)])^2\,ds<n,\end{cases}$$

$$\chi_t^{(n)}(x)=\chi_{\{\tau_n(x)\geqslant t\}},\qquad A_t^{(n)}(x)=a_t(x)+\chi_t^{(n)}(x)\left[A_t(x)-a_t(x)\right].$$

Рассмотрим процесс $\xi^{(n)}=(\xi_t^{(n)}, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, определяемый равенствами

$$\xi_t^{(n)}=\xi_{t\wedge\tau_n(\xi)}+\int_0^t\left[1-\chi_s^{(n)}(\xi)\right]a_s(\xi^{(n)})\,ds+$$
$$+\int_0^t\left[1-\chi_s^{(n)}(\xi)\right]b_s(\xi^{(n)})\,dW_s. \qquad (7.132)$$

По теореме 4.8 уравнения (7.132) существует единственное сильное решение, причем $\xi_t^{(n)}=\xi_t$ при $t\leqslant\tau_n(\xi)$. Учитывая это обстоятельство, с помощью формулы Ито находим, что

$$d\xi_t^{(n)}=A_t^{(n)}(\xi^{(n)})\,dt+b_t(\xi^{(n)})\,dW_t,\qquad \xi_0^{(n)}=\xi_0. \qquad (7.133)$$

Поскольку

$$A_t^{(n)}(x)-a_t(x)=\chi_t^{(n)}(x)\left[A_t(x)-a_t(x)\right],$$

то P-п. н.

$$\int_0^T \left(b_t^+(\xi^{(n)})\left[A_t^{(n)}(\xi^{(n)})-a_t(\xi^{(n)})\right]\right)^2dt\leqslant n,$$

и согласно теореме 6.1

$$\mathsf{M}\exp\left\{-\int_0^T b_t^+(\xi^{(n)})[A_t^{(n)}(\xi^{(n)})-a_t(\xi^{(n)})]\,dW_t-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T (b_t^+(\xi^{(n)})[A_t^{(n)}(\xi^{(n)})-a_t(\xi^{(n)})])^2\,dt\right\}=1.$$

С учетом теоремы 7.18 отсюда заключаем, что $\mu_{\xi^{(n)}}\sim\mu_\eta$ и

$$\frac{d\mu_{\xi^{(n)}}}{d\mu_\eta}(\eta)=\exp\left\{\int_0^T (b_t^+(\eta))^2[A_t^{(n)}(\eta)-a_t(\eta)]\,d\eta_t-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T (b_t^+(\eta))^2[(A_t^{(n)}(\eta))^2-(a_t(\eta))^2]\,dt\right\}=$$
$$=\exp\left\{\int_0^{T\wedge\tau_n(\eta)} (b_t^+(\eta))^2[A_t(\eta)-a_t(\eta)]\,d\eta_t-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^{T\wedge\tau_n(\eta)} (b_t^+(\eta))^2[A_t^2(\eta)-a_t^2(\eta)]\,dt\right\}=\mathfrak{z}_{T\wedge\tau_n(\eta)}(\eta).$$

Пусть теперь $\Gamma\in\mathscr{B}_T$. Тогда в силу (7.131)

$$\mu_\xi(\Gamma)=\lim_n \mu_{\xi^{(n)}}(\Gamma\cap(\tau_n(x)=T))=$$
$$=\lim_n\int_{\Gamma\cap(\tau_n(x)=T)} \mathfrak{z}_{T\wedge\tau_n(x)}(x)\,d\mu_\eta(x)=$$
$$=\lim_n\int_{\Gamma\cap(\tau_n(x)=T)} \mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_\eta(x)=\int_\Gamma \mathfrak{z}_T(x)\,d\mu_\eta(x).$$

Значит, $\mu_\xi\ll\mu_\eta$ и $\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(x)=\mathfrak{z}_T(x)$. Поскольку же $\mu_\eta(x\colon \mathfrak{z}_T(x)=0)=0$, то по лемме 6.8 $\mu_\eta\ll\mu_\xi$ и

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(x)=\mathfrak{z}_T^{-1}(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 7.20. *Пусть выполнены предположения теоремы 7.19, за исключением условия* (7.131), *которое заменяется условием*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T (b_s^+(\xi))^2[A_s^2(\xi)+a_s^2(\xi)]\,ds<\infty\right\}=1. \tag{7.134}$$

Тогда $\mu_\xi \ll \mu_\eta$, *плотность* $\mathfrak{z}_t(\eta) = \frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(t, \eta)$ *является единственным (непрерывным) решением уравнения*

$$\mathfrak{z}_t(\eta) = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s(\eta)\left(b_s^+(\eta)\right)^2 [A_s(\eta) - a_s(\eta)]\, d\eta_s, \tag{7.135}$$

а $\mathfrak{z}_t(\xi)$ *определяется формулой*

$$\mathfrak{z}_t(\xi) = \exp\left\{\int_0^t (b_s^+(\xi))^2 [A_s(\xi) - a_s(\xi)]\, d\xi_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\int_0^t (b_s^+(\xi))^2 [A_s^2(\xi) - a_s^2(\xi)]\, ds\right\}. \tag{7.136}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательствам теорем 7.19, 7.2 и 7.6.

4. Остановимся, наконец, на многомерных аналогах теорем 7.19 и 7.20, ограничившись лишь их формулировками.

Пусть $\xi = (\xi_t)$ и $\eta = (\eta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — векторные процессы, $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, $\eta_t = (\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$, имеющие дифференциалы

$$d\xi_t = A_t(\xi)\, dt + b_t(\xi)\, dW_t, \qquad \xi_0 = \eta_0,$$
$$d\eta_t = a_t(\eta)\, dt + b_t(\eta)\, dW_t,$$

где $W_t = (W_1(t), \ldots, W_k(t))$ — k-мерный винеровский процесс относительно системы $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $A_t(x) = (A_1(t, x), \ldots$ $\ldots, A_n(t, x))$, $a_t(x) = (a_1(t, x), \ldots, a_n(t, x))$, $b_t(x) = \| b_{tj}(t, x)\|$ — матрица порядка $n \times k$ и $\eta_0 = (\eta_1(0), \ldots, \eta_n(0))$ — вектор начальных значений с $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n |\eta_i| < \infty\right) = 1$.

Будем предполагать, что система алгебраических уравнений

$$b_t(x)\, \alpha_t(x) = [A_t(x) - a_t(x)]$$

имеет (относительно $\alpha_t(x)$) ограниченное решение при каждых t, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{C}$. Функционалы $a_t(x)$ и $b_t(x)$ удовлетворяют (покомпонентно) условиям (4.110), (4.111).

Тогда *), *если* μ_ξ-п. н.

$$\int_0^T [A_t^*(x)(b_t(x)\, b_t^*(x))^+ A_t(x) + a_t^*(x)(b_t(x)\, b_t^*(x))^+ a_t(x)]\, dt < \infty, \tag{7.137}$$

*) Матрица R^+ является псевдообратной по отношению к матрице R (см. гл. 13, § 1).

то $\mu_\xi \ll \mu_\eta$. *Если к тому же* (7.137) *выполнено и* μ_η-п. н., *то* $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ *и*

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(t, \eta) = \exp\left\{\int_0^t (A_s(\eta) - a_s(\eta))^* (b_s(\eta) b_s^*(\eta))^+ d\eta_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t (A_s(\eta) - a_s(\eta))^* (b_s(\eta) b_s^*(\eta))^+ (A_s(\eta) + a_s(\eta))\, ds\right\}, \quad (7.138)$$

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(t, \xi) = \exp\left\{-\int_0^t (A_s(\xi) - a_s(\xi))^* (b_s(\xi) b_s^*(\xi))^+ d\xi_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^t (A_s(\xi) - a_s(\xi))^* (b_s(\xi) b_s^*(\xi))^+ (A_s(\xi) + a_s(\xi))\, ds\right\}. \quad (7.139)$$

§ 7. Формула Камерона — Мартина

1. Пусть $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ — n-мерный винеровский процесс, $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, и $Q(t)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, элементы которой $q_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию

$$\int_0^T \sum_{i,\, j=1}^n |q_{ij}(t)|\, dt < \infty. \quad (7.140)$$

Используя результаты § 2 (п. 7), установим следующий результат, известный как «формула Камерона — Мартина».

Теорема 7.21. *Пусть выполнено условие* (7.140). *Тогда*

$$\mathsf{M} \exp\left[-\int_0^T (W_t, Q(t) W_t)\, dt\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{Sp} \Gamma(t)\, dt\right], \quad (7.141)$$

где $(W_t, Q(t) W_t)$ — *скалярное произведение, равное* $W_t^* Q(t) W_t$, *а* $\Gamma(t)$ — *симметрическая неположительно определенная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения Риккати*

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = 2Q(t) - \Gamma^2(t), \quad (7.142)$$

$\Gamma(T) = 0$ — *нулевая матрица.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение Риккати

$$\frac{d\tilde{\Gamma}(s)}{ds} = 2Q(T - s) - \tilde{\Gamma}^2(s) \quad (7.143)$$

с нулевой матрицей $\tilde{\Gamma}(0)$. Единственность решения этого уравнения в классе неотрицательно определенных матриц доказана в теореме 10.2. Существование непрерывного решения $\tilde{\Gamma}(t) = \| \tilde{\gamma}_{ij}(t) \|$ можно вывести, например, из решения некоторой вспомогательной задачи фильтрации (см. § 3 гл. 10).

Положим $\Gamma(t) = -\tilde{\Gamma}(T-t)$. Непосредственно проверяется, что $\Gamma(t)$ удовлетворяет уравнению (7.142), решение которого единственно в силу единственности решения уравнения (7.143).

Пусть теперь $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ — случайный процесс с дифференциалом

$$d\xi_t = \Gamma(t)\xi_t\,dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0. \tag{7.144}$$

Согласно теореме 4.10 сильное решение уравнения (7.144) существует, единственно, определяется формулой (4.158) и

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T \xi_t^*\Gamma^2(t)\xi_t\,dt < \infty\right\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^T W_t^*\Gamma^2(t)W_t\,dt < \infty\right\} = 1.$$

Используя многомерный аналог теоремы 7.7 (см. также п. 7 § 2), находим, что $\mu_\xi \sim \mu_W$ и

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(t, W) = \exp\left\{\int_0^t W_s^*\Gamma(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t W_s^*\Gamma^2(s)W_s\,ds\right\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}\exp\left\{\int_0^t W_s^*\Gamma(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t W_s^*\Gamma^2(s)W_s\,ds\right\} = 1. \tag{7.145}$$

По формуле Ито (см. гл. 4, пример 2, (4.102))

$$0 = \frac{1}{2}[W_T^*\Gamma(T)W_T - W_0^*\Gamma(0)W_0] = \frac{1}{2}\int_0^T \left(W_t^*\frac{d\Gamma(t)}{dt}W_t\right)dt + \int_0^T W_t^*\Gamma(t)\,dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Sp}\,\Gamma(t)\,dt.$$

Отсюда находим

$$\int_0^T W_t^*\Gamma(t)\,dW_t = \frac{1}{2}\int_0^T W_t^*\frac{d\Gamma(t)}{dt}W_t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Sp}\,\Gamma(t)\,dt.$$

Подставляя это выражение в (7.145) и учитывая, что в силу (7.142) $\frac{1}{2}\left[\frac{d\Gamma(t)}{dt}+\Gamma^2(t)\right]=Q(t)$, получаем

$$1=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{Sp}\Gamma(t)\,dt\right\}\mathsf{M}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T W_t^*\left[\frac{d\Gamma(t)}{dt}+\Gamma^2(t)\right]W_t\,dt\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{Sp}\Gamma(t)\,dt\right\}\mathsf{M}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T W_t^*Q(t)\,W_t\,dt\right\}, \qquad (7.146)$$

что и доказывает формулу (7.141).

Пример 1. Пусть $n=1$, $Q(t)=\frac{1}{2}$. В этом случае уравнение

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=1-\Gamma^2(t), \qquad \Gamma(T)=0,$$

имеет решение

$$\Gamma(t)=\frac{e^{2(t-T)}-1}{e^{2(t-T)}+1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^T \Gamma(t)\,dt=\ln(\operatorname{ch}T)^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T W_t^2\,dt\right\}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}T}}. \qquad (7.147)$$

§ 8. Неравенство Рао — Крамера — Волфовитца

1. В задачах оценивания параметров существенную роль играет неравенство Рао — Крамера и его обобщение, данное Волфовитцем для случая, когда длительность наблюдения является случайной величиной.

В настоящем параграфе будет показано, как полученные выше формулы для плотностей мер процессов диффузионного типа могут быть применены при отыскании нижних границ среднеквадратических ошибок в некоторых задачах оценивания неизвестных параметров.

2. Будем предполагать, что θ есть неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$, и $f = f(\theta)$ — функция, оцениваемая по результатам наблюдений за случайным процессом $\xi = (\xi_t)$, $t \geqslant 0$, имеющим дифференциал

$$d\xi_t = a_t(\theta, \xi)\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{7.148}$$

Измеримый функционал $\{a_t(\theta, x),\ t \geqslant 0,\ -\infty < \theta < \infty,\ x \in \mathbf{C}\}$ предполагается (при каждом фиксированном θ) неупреждающим, т. е. $\mathscr{B}_t$-измеримым при каждом $t \geqslant 0$, где $\mathscr{B}_t = \sigma\{x\colon x_s, s \leqslant t\}$ — σ-подалгебры в измеримом пространстве $(\mathbf{C}, \mathscr{B})$ непрерывных функций $x = (x_t)$, $t \geqslant 0$ с $x_0 = 0$.

Пусть $\tau = \tau(x)$ — марковский момент относительно системы $(\mathscr{B}_t)$, $t \geqslant 0$, и $\delta = (\delta(t, x))$ — прогрессивно измеримый (и, следовательно, неупреждающий) действительный процесс, определенный на $(\mathbf{C}, \mathscr{B})$.

В дальнейшем величина $\delta(t, x)$ будет рассматриваться как оценка функции $f(\theta)$ на основании наблюдений за траекторией x на интервале времени $[0, t]$. Если $\tau = \tau(x)$ — марковский момент, то величина $\delta(\tau(x), x)$ будет задавать оценку функции $f(\theta)$ по результатам наблюдений за траекторией x на временно́м интервале $[0, \tau(x)]$.

Пара функций $\Delta = (\tau, \delta)$ задает, как принято говорить, *последовательный план оценивания*. При ряде предположений регулярности, сформулированных ниже (теорема 7.22), для последовательных планов $\Delta = (\tau, \delta)$ будет получено (при каждом θ, $-\infty < \theta < \infty$) неравенство, аналогичное неравенству Рао — Крамера — Волфовитца, которое дает оценку снизу для величины $\mathsf{M}[f(\theta) - \delta(\tau, \xi)]^2$.

3. Остановимся вначале на используемых далее обозначениях и предположениях.

Пусть μ_W и μ_ξ^θ обозначают меры в пространстве $(\mathbf{C}, \mathscr{B})$, отвечающие соответственно винеровскому процессу W и процессу ξ с дифференциалом (7.148) для данного $-\infty < \theta < \infty$. Пусть

$$\text{а)}\quad \int_0^\infty |a_t(\theta, x)|\,dt < \infty \qquad (\mu_W\text{- и } \mu_\xi^\theta\text{-п. н.}),\quad -\infty < \theta < \infty;$$

$$\text{б)}\quad \int_0^{\tau(x)} a_t^2(\theta, x)\,dt < \infty \qquad (\mu_W\text{- и } \mu_\xi^\theta\text{-п. н.}),\quad -\infty < \theta < \infty.$$

Из условий а), б) и теоремы 7.10 вытекает, что при каждом θ меры μ_ξ^θ и μ_W эквивалентны и плотность $\varphi(\theta, W) =$

$=\dfrac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_W}(\tau(W),\ W)$ задается формулой

$$\varphi(\theta,\ W)=\exp\left\{\int\limits_0^{\tau(W)} a_t(\theta,\ W)\,dW_t-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau(W)} a_t^2(\theta,\ W)\,dt\right\}. \quad (7.149)$$

Это представление будет играть центральную роль при получении нижней границы для $\mathsf{M}[f(\theta)-\delta(\tau,\ \xi)]^2$.

Предположим также, что

в) при каждых $t\geqslant 0$ и $x\in \mathbf{C}$ функция $a_t(\theta,\ x)$ дифференцируема по θ и

$$\int\limits_0^{\tau(W)}\left[\frac{\partial}{\partial t}a_t(\theta,\ W)\right]^2 dt<\infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),\qquad -\infty<\theta<\infty,$$

$$0<\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\ \xi)\right]^2 dt<\infty,\qquad -\infty<\theta<\infty;$$

г) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_0^{\tau(W)} a_t(\theta,\ W)\,dW_t=\int\limits_0^{\tau(W)}\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\ W)\,dW_t \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

$-\infty<\theta<\infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_0^{\tau(W)} a_t^2(\theta,\ W)\,dt=2\int\limits_0^{\tau(W)} a_t(\theta, W)\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\ W)\,dt \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

$-\infty<\theta<\infty$;

д) функции $f(\theta)$ и $b(\theta)=\mathsf{M}\delta(\tau(W),\ W)\varphi(\theta,\ W)-f(\theta)$ дифференцируемы по θ и

$$\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)]=\mathsf{M}\delta(\tau(W),\ W)\frac{\partial\varphi(\theta,\ W)}{\partial\theta}.$$

4. Теорема 7.22. *Пусть* $\Delta=(\tau,\ \delta)$ — *последовательный план оценивания с* $\mathsf{M}\delta^2(\tau,\ \xi)<\infty$ *для каждого* θ, $-\infty<\theta<\infty$. *Тогда, если выполнены условия регулярности* а) — д), *то для каждого* θ, $-\infty<\theta<\infty$

$$\mathsf{M}[f(\theta)-\delta(\tau,\ \xi)]^2\geqslant\frac{\left(\dfrac{d}{d\theta}[f(\theta)+b(\theta)]\right)^2}{\mathsf{M}\displaystyle\int\limits_0^{\tau(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta,\ \xi)\right]^2 dt}+b^2(\theta). \quad (7.150)$$

Доказательство. Согласно предположениям г), д) и представлению (7.149) для каждого θ, $-\infty < \theta < \infty$,

$$\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)] = \mathsf{M}\delta(\tau(W), W)\frac{\partial\varphi(\theta, W)}{\partial\theta} =$$

$$= \mathsf{M}\delta(\tau(W), W)\left\{\int_0^{\tau(W)} \frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, W)]\,dW_t - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\tau(W)} a_t(\theta, W)\frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, W)]\,dt\right\}\varphi(\theta, W) =$$

$$= \mathsf{M}\delta(\tau(\xi), \xi)\left\{\int_0^{\tau(\xi)} \frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, \xi)]\,d\xi_t - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\tau(\xi)} a_t(\theta, \xi)\frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, \xi)]\,dt\right\} = \mathsf{M}\delta(\tau(\xi), \xi)\int_0^{\tau(\xi)} \frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, \xi)]\,dW_t. \tag{7.151}$$

Далее, в силу в)

$$\mathsf{M}\delta(\tau(\xi), \xi)\cdot \mathsf{M}\int_0^{\tau(\xi)} \frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, \xi)]\,dW_t = 0, \tag{7.152}$$

что вместе с (7.151) приводит к соотношению

$$\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)] = \mathsf{M}[\delta(\tau(\xi), \xi) - \mathsf{M}\delta(\tau(\xi), \xi)]\int_0^{\tau(\xi)} \frac{\partial}{\partial\theta}[a_t(\theta, \xi)]\,dW_t.$$

Отсюда согласно неравенству Коши — Буняковского, предположению в) и свойству стохастических интегралов получаем

$$\left(\frac{d}{d\theta}[b(\theta)+f(\theta)]\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}[\delta(\tau(\xi), \xi) - \mathsf{M}\delta(\tau(\xi), \xi)]^2\, \mathsf{M}\int_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta, \xi)\right]^2 dt =$$

$$= \mathsf{M}\int_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta, \xi)\right]^2 dt\cdot\{\mathsf{M}[\delta(\tau(\xi), \xi) - f(\theta)]^2 - b^2(\theta)\},$$

что в силу предположения $\mathsf{M}\int_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}a_t(\theta, \xi)\right]^2 dt > 0$ приводит к требуемому неравенству (7.150).

Следствие. *Если план* $\Delta = (\tau, \delta)$ *является несмещенным, т. е.* $b(\theta) = \mathsf{M}\delta(\tau, \xi) - f(\theta) \equiv 0$ *для всех* θ, $-\infty < \theta < \infty$, *то*

$$\mathsf{M}[\delta(\tau, \xi) - f(\theta)]^2 \geqslant \frac{\left[\frac{d}{d\theta} f(\theta)\right]^2}{\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} a_t(\theta, \xi)\right]^2 dt}. \tag{7.153}$$

В частности, если $f(\theta) \equiv \theta$, *то*

$$\mathsf{M}[\delta(\tau, \xi) - \theta]^2 \geqslant \frac{1}{\mathsf{M}\int\limits_0^{\tau(\xi)} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} a_t(\theta, \xi)\right]^2 dt}. \tag{7.154}$$

Пример. Пусть наблюдается случайный процесс

$$\xi_t = \theta t + W_t, \quad t \geqslant 0, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Тогда для несмещенных последовательных планов оценивания

$$\mathsf{M}[\delta(\tau, \xi) - \theta]^2 \geqslant \frac{1}{\mathsf{M}\tau(\xi)}. \tag{7.155}$$

В частности, план $\Delta^0 = (\tau^0, \delta^0)$ с $\tau^0(x) \equiv T$ и $\delta^0(T, x) = \frac{x_T}{T}$ является несмещенным. Для него выполнены все условия теоремы 7.22, и поэтому для него

$$\mathsf{M}[\delta^0(T, \xi) - \theta]^2 \geqslant \frac{1}{T}.$$

На самом деле левая часть равна $\frac{1}{T}$, поскольку $\mathsf{M}\left[\frac{\xi_T}{T} - \theta\right]^2 = \mathsf{M}\left(\frac{W_T}{T}\right)^2 = \frac{1}{T}$. Это означает, что среди всех несмещенных последовательных планов $\Delta = (\tau, \delta)$ с $\mathsf{M}\tau(\xi) \leqslant T$ (для всех $-\infty < \theta < \infty$) и удовлетворяющих условиям теоремы 7.22 план Δ^0 является оптимальным: для всех θ, $-\infty < \theta < \infty$,

$$\mathsf{M}[\delta(\tau, \xi) - \theta]^2 \geqslant \mathsf{M}[\delta^0(T, \xi) - \theta]^2.$$

Другие примеры использования неравенства (7.150) в задачах последовательного оценивания будут рассмотрены в гл. 17.

§ 9. Абстрактный вариант формулы Байеса

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $\theta = \theta(\omega)$ и $\xi = \xi(\omega)$ — случайные элементы со значениями в измеримых пространствах $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$, $(X, \mathscr{B}_X)$. Пусть $\mathscr{F}_\theta = \sigma\{\omega: \theta(\omega)\}$, $\mathscr{F}_\xi = \sigma\{\omega: \xi(\omega)\}$ и Q — сужение меры P на $(\Omega, \mathscr{F}_\xi)$. Обозначим $Q(A; \omega) = \mathsf{M}[\chi_A(\omega) | \mathscr{F}_\theta](\omega)$ условную вероятность события

$A \in \mathscr{F}_\xi$. Ясно, что для данного $A \in \mathscr{F}_\xi$

$$\mathbf{Q}(A) = \int_\Omega Q(A;\ \omega)\,\mathbf{P}(d\omega). \tag{7.156}$$

Если θ и ξ являются случайными величинами, принимающими лишь дискретные значения, и $\mathbf{M}|g(\theta)| < \infty$, то при отыскании условных математических ожиданий $\mathbf{M}[g(\theta)|\xi]$ основным орудием является формула Байеса

$$\mathbf{M}[g(\theta)|\xi] = \frac{\sum_i g(a_i)\,p(\xi\,|\,a_i)\,P(a_i)}{\sum_i p(\xi\,|\,a_i)\,P(a_i)}, \tag{7.157}$$

где $p(b|a) = \mathbf{P}\{\xi = b\,|\,\theta = a\}$, $P(a) = \mathbf{P}(\theta = a)$.

Для случая, когда θ и ξ являются случайными величинами, у которых функции распределения имеют плотности, формула Байеса принимает следующий вид:

$$\mathbf{M}[g(\theta)|\xi] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(a)\,p(\xi\,|\,a)\,p(a)\,da}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi\,|\,a)\,p(a)\,da}, \tag{7.158}$$

где $p(b|a) = \dfrac{d\mathbf{P}(\xi \leqslant b\,|\,\theta = a)}{db}$, $p(a) = d\mathbf{P}(\theta \leqslant a)/da$.

В дальнейшем нам неоднократно придется иметь дело с абстрактным вариантом формулы Байеса, обобщающим формулы (7.157), (7.158).

Пусть $\theta = \theta(\omega)$, $\xi = \xi(\omega)$ — случайные элементы со значениями в $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$, $(X, \mathscr{B}_X)$ и $\mathbf{M}|g(\theta)| < \infty$. Положим для $A \in \mathscr{F}_\xi$

$$\mathbf{G}(A) = \int_\Omega g(\theta(\tilde\omega))\,Q(A;\ \tilde\omega)\,\mathbf{P}(d\tilde\omega). \tag{7.159}$$

Лемма 7.3. 1) *Функция* $\mathbf{G} = \mathbf{G}(A)$, $A \in \mathscr{F}_\xi$, *определенная в* (7.159), *является обобщенной мерой* (*счетно-аддитивной функцией множеств* $A \in \mathscr{F}_\xi$, *принимающей, быть может, значения разных знаков*).

2) *Обобщенная мера* $\mathbf{G}$ *абсолютно непрерывна по мере* $\mathbf{Q}$: $\mathbf{G} \ll \mathbf{Q}$.

3) *Имеет место формула* (*Байеса*)

$$\mathbf{M}[g(\theta)|\mathscr{F}_\xi](\omega) = \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}(\omega). \tag{7.160}$$

Доказательство. Первые два свойства непосредственно следуют из (7.159). Докажем формулу (7.160). Поскольку $\mathsf{M}[g(\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi]$ является $\mathscr{F}_\xi$-измеримой функцией, то надо проверить лишь равенство

$$\mathsf{M}\{\chi_A(\omega)\,\mathsf{M}[g(\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi]\} = \mathsf{G}(A), \qquad A \in \mathscr{F}_\xi. \tag{7.161}$$

Имеем

$$\mathsf{M}\{\chi_A(\omega)\,\mathsf{M}[g(\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi]\} = \mathsf{M}\{\mathsf{M}[\chi_A(\omega)\,g(\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi]\} =$$
$$= \mathsf{M}\chi_A(\omega)\,g(\theta) = \mathsf{M}\{g(\theta)\,\mathsf{M}[\chi_A(\omega)\,|\,\mathscr{F}_\theta]\} = \mathsf{M}\{g(\theta)\,Q(A,\omega)\} = \mathsf{G}(A).$$

Лемма 7.4. *Предположим, что условная вероятность $Q(A;\,\tilde\omega)$ является регулярной*), σ-алгебра $\mathscr{F}_\xi$ сепарабельна**) и существует мера $\lambda = \lambda(A)$ на $(\Omega,\,\mathscr{F}_\xi)$ такая, что для почти всех $\tilde\omega \in \Omega$*

$$Q(\,\cdot\,,\,\tilde\omega) \ll \lambda(\,\cdot\,). \tag{7.162}$$

Тогда $\mathsf{Q} \ll \lambda$, $\mathsf{G} \ll \lambda$ и на пространстве $(\Omega\times\Omega,\,\mathscr{F}_\xi\times\mathscr{F}_\theta)$ существует неотрицательная измеримая функция $q(\omega,\,\tilde\omega)$ такая, что P-п. н.

$$Q(A;\,\tilde\omega) = \int_A q(\omega,\,\tilde\omega)\,d\lambda(\omega), \tag{7.163}$$

$$\frac{d\mathsf{G}}{d\lambda}(\omega) = \int_\Omega g(\theta(\tilde\omega))\,q(\omega,\,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega). \tag{7.164}$$

$$\frac{d\mathsf{Q}}{d\lambda}(\omega) = \int_\Omega q(\omega,\,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega), \tag{7.165}$$

$$0 < \frac{d\mathsf{Q}}{d\lambda}(\omega) < \infty, \tag{7.166}$$

$$\mathsf{M}[g(\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi](\omega) = \frac{\int_\Omega g(\theta(\tilde\omega))\,q(\omega,\,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega)}{\int_\Omega q(\omega,\,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega)}. \tag{7.167}$$

Доказательство. Существование измеримой функции $q(\omega,\,\tilde\omega)$, удовлетворяющей равенству (7.163), вытекает из регулярности условной вероятности $Q(A;\,\tilde\omega)$ и сепарабельности σ-алгебры $\mathscr{F}_\xi$***). Для доказательства (7.164), (7.165) достаточно применить теорему Фубини.

---

*) См. п. 4 § 1 гл. 1.

**) См. [46], стр. 555.

***) Доказательство этого факта дано в [46] (пример 2.7, Дополнение).

Далее, пусть $A_0=\left\{\omega:\ \frac{dQ}{d\lambda}(\omega)=0\right\}$. Тогда, поскольку $A_0\in\mathscr{F}_\xi$, то

$$\mathsf{P}(A_0)=\mathbf{Q}(A_0)=\int_{A_0}\frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda}(\omega)\,d\lambda(\omega)=0.$$

Следовательно, $\frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda}(\omega)>0$ (P-п. н.).

Для доказательства (7.167) заметим, что поскольку $\mathbf{G}\ll\mathbf{Q}$, $\mathbf{G}\ll\lambda$, $\mathbf{Q}\ll\lambda$, то

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\lambda}=\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{Q}}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda}.$$

Но $\frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda}>0$ (P-п. н.), поэтому

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{Q}}(\omega)=\frac{d\mathbf{G}}{d\lambda}(\omega)\Big/\frac{d\mathbf{Q}}{d\lambda}(\omega),$$

что вместе с (7.160), (7.164), (7.165) доказывает искомое представление (7.167).

Замечание 1. Если функция $g=g(\xi,\theta)$ такова, что $\mathsf{M}|g(\xi,\theta)|<\infty$, то

$$\mathsf{M}[g(\xi,\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi](\omega)=\frac{\int_\Omega g(\xi(\omega),\theta(\tilde\omega))\,q(\omega,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega)}{\int_\Omega q(\omega,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega)}. \tag{7.168}$$

Действительно, если функция $g(\xi,\theta)$ представима в виде

$$g(\xi,\theta)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\xi)\,g_k(\theta),$$

то формула (7.168) следует непосредственно из (7.167). Очевидным предельным переходом (7.168) распространяется и на произвольные (измеримые) функции $g(\theta,\xi)$ с $\mathsf{M}|g(\xi,\theta)|<\infty$.

Замечание 2. Обозначив

$$\rho(\omega,\tilde\omega)=\frac{q(\omega,\tilde\omega)}{\int_\Omega q(\omega,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega)},$$

получаем для формулы Байеса (7.168) следующее удобное представление:

$$\mathsf{M}[g(\xi,\theta)\,|\,\mathscr{F}_\xi](\omega)=\int_\Omega g(\xi(\omega),\theta(\tilde\omega))\,\rho(\omega,\tilde\omega)\,\mathsf{P}(d\tilde\omega). \tag{7.169}$$

2. Рассмотрим подробнее структуру формулы Байеса (7.169) для того случая, когда ξ является процессом Ито.

Будем предполагать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ с выделенным на нем семейством σ-подалгебр $(\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$. Пусть $W = (W_t(\omega), \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс и $\alpha = (\alpha_t(\omega), \mathscr{F}_t)$ — некоторый не зависящий от него процесс, траектории которого $a = (a_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, принадлежат измеримому пространству $(\mathbf{A}_T, \mathscr{B}_{\mathbf{A}_T})$.

Рассмотрим непрерывный случайный процесс $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеющий дифференциал

$$d\xi_t = A(t, \alpha, \xi)\, dt + B(t, \xi)\, dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{7.170}$$

Будем считать выполненными следующие условия:

A. Случайный процесс $\xi = (\xi_t, (\omega))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является сильным (т. е. $\mathscr{F}_t^{\alpha, W}$-измеримым) решением уравнения (7.170).

B. Функционалы $A(t, a, x)$, $B(t, x)$ являются неупреждающими, и для каждых $a \in \mathbf{A}_T$ и $x \in \mathbf{C}_T$ ($(\mathbf{C}_T, \mathscr{B}_T)$ — измеримое пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x = (x_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\int_0^T |A(t, a, x)|\, dt < \infty, \qquad \int_0^T B^2(t, x)\, dt < \infty. \tag{7.171}$$

C. Для любых x и $\tilde{x}$ из $\mathbf{C}_T$

$$|B(t, x) - B(t, \tilde{x})|^2 \leqslant L_1 \int_0^t |x_s - \tilde{x}_s|^2 dK(s) + L_2 |x_t - \tilde{x}_t|^2, \tag{7.172}$$

$$B^2(t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\, dK(s) + L_2 (1 + x_t^2), \tag{7.173}$$

$$B^2(t, x) \geqslant C > 0, \tag{7.174}$$

где $K(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция, $0 \leqslant K(t) \leqslant 1$, а C, L_1, L_2 — константы.

$$\textbf{D.}\quad \mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, \alpha, \xi)\, dt < \infty\right) = \mathsf{P}\left(\int_0^T A^2(t, \alpha, \eta)\, dt < \infty\right) = 1, \tag{7.175}$$

где $\eta = (\eta_t, \mathscr{F}_t^W)$ — сильное решение уравнения

$$d\eta_t = B(t, \eta)\, dW_t, \qquad \eta_0 = 0, \tag{7.176}$$

существующее в силу теоремы 4.6 и предположения **C**.

$$\textbf{E.}\quad \int_0^T \mathsf{M} |A(t, \alpha, \xi)|\, dt < \infty, \qquad \mathsf{P}\left(\int_0^T \bar{A}^2(t, \xi)\, dt < \infty\right) = 1, \tag{7.177}$$

где $\bar{A}(t, \xi) = \mathsf{M}[A(t, \alpha, \xi) \mid \mathscr{F}_t^\xi]$.

Обозначим μ_ξ, μ_η и μ_α меры, отвечающие введенным процессам ξ, η и α. Пусть также $\mu_{\alpha,\xi}$ — распределение вероятностей в пространстве $(\mathbf{A}_T \times \mathbf{C}_T, \mathcal{B}_{\mathbf{A}_T} \times \mathcal{B}_T)$, индуцированное парой процессов (α, ξ), и $\mu_\alpha \times \mu_\xi$ — декартово произведение мер μ_α и μ_ξ.

Теорема 7.23. *Пусть* $g_T(\alpha, \xi)$ — $\mathcal{F}_T^{\alpha,\xi}$-*измеримый функционал с* $\mathbf{M}|g_T(\alpha, \xi)| < \infty$.

Тогда, если процессы α *и* W *независимы и выполнены условия* **А — Е**, *то* **Р**-п. н.

$$\mathbf{M}\left[g_T(\alpha, \xi) | \mathcal{F}_T^\xi\right] = \int_{\mathbf{A}} g_T(a, \xi)\rho_T(a, \xi)\,d\mu_\alpha(a), \tag{7.178}$$

где

$$\rho_T(a, x) = \frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha \times \mu_\eta]}(a, x) \Big/ \frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(x), \tag{7.179}$$

при этом (**Р**-п. н.)

$$\rho_T(\alpha, \xi) = \\ = \exp\left\{\int_0^T \frac{A(t, \alpha, \xi) - \bar{A}(t, \xi)}{B(t, \xi)}\,d\bar{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{[A(t, \alpha, \xi) - \bar{A}(t, \xi)]^2}{B^2(t, \xi)}\,dt\right\}, \tag{7.180}$$

где функционал $\bar{A} = (\bar{A}(t, x), \mathcal{B}_{t+})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *таков, что* **Р**-п. н. *для почти всех* $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\bar{A}(t, \xi) = \mathbf{M}\left[A(t, \alpha, \xi) | \mathcal{F}_t^\xi\right], \tag{7.181}$$

и $\bar{W} = (\bar{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ — *винеровский процесс с*

$$\bar{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - \bar{A}(s, \xi)\,ds}{B(s, \xi)}. \tag{7.182}$$

Для доказательства представления (7.178), которое, по существу, если не что иное, как другая форма записи формулы Байеса (7.169) (с заменой интегрирования по пространству элементарных исходов интегрированием в функциональном пространстве), понадобится ряд вспомогательных утверждений.

3. Согласно предположению **А** непрерывный случайный процесс $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является сильным решением уравнения (7.170). Пусть t фиксировано. Поскольку при фиксированном t величина ξ_t является $\mathcal{F}_t^{\alpha, W}$-измеримой, то найдется (при данном t) измеримый функционал $Q_t(a, x)$ такой, что **Р**-п. н.

$$\xi_t(\omega) = Q_t(\alpha(\omega), W(\omega)). \tag{7.183}$$

Рассмотрим для $a \in \mathbf{A}_T$ процессы $\xi^a = (\xi_t^a(\omega))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определяемые уравнениями

$$d\xi_t^a = A(t, a, \xi^a)\,dt + B(t, \xi^a)\,dW_t, \qquad \xi_0^a = 0. \tag{7.184}$$

Покажем теперь, что при фиксированном t $\mu_\alpha \times \mathbf{P}$-п. н.

$$\xi_t^a(\omega) = Q_t(a, W(\omega)). \tag{7.185}$$

Будем считать, что исходное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ таково, что $\Omega = \mathbf{A}_T \times \mathbf{C}_T$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\mathbf{A}_T} \times \mathscr{B}_T$, $\mathbf{P} = \mu_\alpha \times \mu_W$. (Это предположение не ограничивает общности, но упрощает рассмотрение.) Тогда, считая $\omega = (\alpha, W)$, $\alpha(\omega) = \alpha$, $W(\omega) = W$, видим, что равенство (7.185) справедливо $\mu_\alpha \times \mu_W$-п. н. в силу (7.170).

Введем наряду с исходным пространством идентичное ему пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$. Пусть $\xi(\tilde{\omega})$, $W(\tilde{\omega})$, $\alpha(\tilde{\omega})$ — процессы, рассматриваемые на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ и имеющие те же самые (совместные) распределения, что и у процессов $\xi(\omega)$, $W(\omega)$, $\alpha(\omega)$.

Рассмотрим на $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathscr{F} \times \tilde{\mathscr{F}}, \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{P}})$ процесс $\xi^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) = (\xi_t^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$d\xi_t^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) = A(t, \alpha(\omega), \xi^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}))\,dt + B(t, \xi^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}))\,dW_t(\tilde{\omega}),$$
$$\xi_0^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) = 0.$$

Тогда в силу (7.185) $\mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{P}}$-п. н.

$$\xi_t^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) = Q_t(\alpha(\omega), W(\tilde{\omega})). \tag{7.186}$$

Лемма 7.5. *Пусть процессы* $\alpha(\omega)$ *и* $W(\omega)$ *независимы. Тогда для любого* $A \in \mathscr{B}_T$ ($\mathbf{P}$-п. н.)

$$\mathbf{P}\{\xi(\omega) \in A \mid \mathscr{F}_T^\alpha\} = \tilde{\mathbf{P}}\{\xi^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) \in A\}. \tag{7.187}$$

Доказательство. Из теоремы Фубини следует, что вероятность

$$\tilde{\mathbf{P}}\{\xi_t^a(\tilde{\omega}) \leqslant b\} = \tilde{\mathbf{P}}\{Q_t(a, W(\tilde{\omega})) \leqslant b\} = \mu_W\{x\colon Q_t(a, x) \leqslant b\}, \tag{7.188}$$

рассматриваемая как функция $a \in \mathbf{A}_T$, является $\mathscr{B}_{\mathbf{A}_T}$-измеримой. Следовательно, $\tilde{\mathbf{P}}\{\xi_t^a(\tilde{\omega}) \leqslant b\}$ является $\mathscr{F}_T^\alpha$-измеримой функцией от a.

Покажем, что $\mathbf{P}$-п. н.

$$\mathbf{P}\{\xi_t(\omega) \leqslant b \mid \mathscr{F}_T^\alpha\} = \tilde{\mathbf{P}}\{\xi^{\alpha(\omega)}(\tilde{\omega}) \leqslant b\}. \tag{7.189}$$

Пусть $\lambda(\alpha(\omega))$ — $\mathcal{F}_T^\alpha$-измеримая ограниченная случайная величина. Тогда по теореме Фубини

$$\mathsf{M}\lambda(\alpha(\omega))\,\chi_{\{\xi_t(\omega)\leqslant b\}}(\omega)=\int_{A_T}\int_{C_T}\lambda(a)\,\chi_{\{Q_t(a,\,x)\leqslant b\}}(x)\,d\mu_\alpha(a)\,d\mu_W(x)=$$

$$=\int_{A_T}\lambda(a)\left[\int_{C_T}\chi_{\{Q_t(a,\,x)\leqslant b\}}(x)\,d\mu_W(x)\right]d\mu_\alpha(a)=$$

$$=\int_{A_T}\lambda(a)\,\tilde{\mathsf{P}}\left\{\xi_t^a(\tilde\omega)\leqslant b\right\}d\mu_\alpha(a)=\mathsf{M}\left[\lambda(\alpha(\omega))\,\tilde{\mathsf{P}}\left\{\xi_t^{\alpha(\omega)}(\tilde\omega)\leqslant b\right\}\right],$$

где мы воспользовались равенством (7.183). Следовательно,

$$\mathsf{M}\left[\lambda(\alpha(\omega))\,\tilde{\mathsf{P}}\left\{\xi_t^{\alpha(\omega)}(\tilde\omega)\leqslant b\right\}\right]=\mathsf{M}\lambda(\alpha(\omega))\,\chi_{\{\xi_t(\omega)\leqslant b\}}(\omega),$$

что и доказывает (7.189).

Аналогично доказывается, что для любых $-\infty<b_i<\infty$, $i=1,\ldots,n$, $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T$ P-п. н.

$$\mathsf{P}\left\{\xi_{t_1}(\omega)\leqslant b_1,\ \ldots,\ \xi_{t_n}(\omega)\leqslant b_n\,|\,\mathcal{F}_T^\alpha\right\}=$$
$$=\tilde{\mathsf{P}}\left\{\xi_{t_1}^{\alpha(\omega)}(\tilde\omega)\leqslant b_1,\ \ldots,\ \xi_{t_n}^{\alpha(\omega)}(\tilde\omega)\leqslant b_n\right\},\qquad(7.190)$$

откуда следует требуемое равенство (7.187).

В следующих двух леммах будет показано, что $\mu_{\alpha,\xi}\sim\mu_\alpha\times\mu_\eta$, $\mu_\xi\sim\mu_\eta$, и найдены плотности этих мер.

Лемма 7.6. *Пусть процессы* α *и* W *независимы. Тогда в предположениях* **A — D**

$$\mu_{\alpha,\xi}\sim\mu_\alpha\times\mu_\eta\qquad(7.191)$$

и P-п. н.

$$\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(\alpha,\eta)=\exp\left[\int_0^T\frac{A(t,\alpha,\eta)}{B^2(t,\eta)}\,d\eta_t-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{A^2(t,\alpha,\eta)}{B^2(t,\eta)}\,dt\right].\qquad(7.192)$$

Доказательство. Рассмотрим введенные выше процессы $\xi^a(\omega)=\left\{\xi_t^a(\omega),\ 0\leqslant t\leqslant T\right\}$ и покажем, что $\mu_\alpha\times\mu_\eta$-п. н.

$$\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(a,x)=\frac{d\mu_{\xi^a}}{d\mu_\eta}(x).\qquad(7.193)$$

Пусть множество $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \in \mathscr{B}_{A_T}$, $\Gamma_2 \in \mathscr{B}_T$. Тогда в силу предыдущей леммы

$$\mu_{\alpha,\xi}(\Gamma) = \mathsf{P}\{\omega;\ \alpha(\omega) \in \Gamma_1,\ \xi(\omega) \in \Gamma_2\} =$$
$$= \int\limits_{\{\omega:\ \alpha(\omega) \in \Gamma_1\}} \mathsf{P}\{\xi(\omega) \in \Gamma_2 \mid \mathscr{F}_T^{\alpha}\}\, d\mathsf{P}(\omega) = \int\limits_{\Gamma_1} \tilde{\mathsf{P}}\{\xi^a(\tilde{\omega}) \in \Gamma_2\}\, d\mu_\alpha(a) =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_1} \mu_{\xi^a}(\Gamma_2)\, d\mu_\alpha(a). \tag{7.194}$$

Согласно (7.185), сделанным предположениям **A — E** и теореме 7.18 для μ_α-почти всех a $\mu_{\xi^a} \sim \mu_\eta$, причем ($\mu_\eta$-п. н.)

$$\frac{d\mu_{\xi^a}}{d\mu_\eta}(\eta) = \exp\left(\int\limits_0^T \frac{A(t, a, \eta)}{B^2(t, \eta)}\, d\eta_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{A^2(t, a, \eta)}{B^2(t, \eta)}\, dt\right). \tag{7.195}$$

Поэтому из (7.194) вытекает, что

$$\mu_{\alpha,\xi}(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma_1} \mu_{\xi^a}(\Gamma_2)\, d\mu_\alpha(a) = \int\limits_{\Gamma_1}\left[\int\limits_{\Gamma_2} \frac{d\mu_{\xi^a}}{d\mu_\eta}(x)\, d\mu_\eta(x)\right] d\mu_\alpha(a) =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{d\mu_{\xi^a}}{d\mu_\eta}\, d[\mu_\alpha \times \mu_\eta](a, x).$$

Следовательно, $\mu_{\alpha,\xi} \ll \mu_\alpha \times \mu_\eta$ и имеет место ($\mu_\alpha \times \mu_\eta$-п. н.) равенство (7.193).

Наконец, согласно (7.195)

$$\mu_\alpha \times \mu_\eta \left\{a, x:\ \frac{d\mu_{\xi^a}}{d\mu_\eta}(x) = 0\right\} = 0,$$

поэтому по лемме 6.8 $\mu_\alpha \times \mu_\eta \ll \mu_{\alpha,\xi}$.

Лемма 7.7. *Пусть процессы* α *и* W *независимы. Тогда в предположениях* **A — E** $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ *и*

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(x) = \int\limits_{A_T} \frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha \times \mu_\eta]}(a, x)\, d\mu_\alpha(a), \qquad \mu_\eta\text{-п. н.}, \tag{7.196}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\eta) = \exp\left\{\int\limits_0^T \frac{\bar{A}(t, \eta)}{B^2(t, \eta)}\, d\eta_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\bar{A}^2(t, \eta)}{B^2(t, \eta)}\, dt\right\}, \tag{7.197}$$

где $\bar{A}(t, x) = \mathsf{M}[A(t, \alpha, \xi) \mid \mathscr{F}_t^{\xi}]_{\xi = x}$.

Доказательство. Обозначая

$$\varphi(a, x) = \frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha \times \mu_\xi]}(\alpha, x),$$

находим, что для $\Gamma \in \mathscr{B}_T$

$$\mu_\xi(\Gamma) = \int_{A_T}\int_{\Gamma} d\mu_{\alpha,\xi}(a, x) = \int_{A_T \times \Gamma} \varphi(a, x)\, d[\mu_\alpha \times \mu_\eta](a, x) = \\ = \int_{\Gamma}\left[\int_{A_T} \varphi(a, x)\, d\mu_\alpha(a)\right] d\mu_\eta(x).$$

Поэтому $\mu_\xi \ll \mu_\eta$. Аналогично показывается, что $\mu_\eta \ll \mu_\xi$, причем

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(x) = \mathsf{M}\left\{\frac{d[\mu_\alpha \times \mu_\eta]}{d\mu_{\alpha,\xi}}(\alpha, \xi) \mid \mathscr{F}_T^\xi\right\}_{\xi=x}.$$

Из эквивалентности мер μ_ξ и μ_η и предположения

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \bar{A}^2(t, \xi)\, dt < \infty\right) = 1$$

следует, что и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \bar{A}^2(t, \eta)\, dt < \infty\right) = 1.$$

Применяя теорему 7.19, получаем формулу (7.197) и также представление

$$\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi) = \exp\left\{-\int_0^T \frac{\bar{A}(t, \xi)}{B^2(t, \xi)}\, d\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\bar{A}^2(t, \xi)}{B^2(t, \xi)}\, dt\right\}. \tag{7.198}$$

4. Доказательство теоремы 7.23. Из непрерывности процесса ξ следует, что σ-алгебра $\mathscr{F}_T^\xi$ сепарабельна. Далее, поскольку процесс ξ является непрерывным, то у условной вероятности $\mathsf{M}[\chi_A(\omega) \mid \mathscr{F}_\theta](\omega)$ существует *) регулярный вариант (который обозначим $Q(A, \omega)$). Пусть множества $A \in \mathscr{F}_T^\xi$ и $B \in \mathscr{B}_T$ связаны соотношением $A = \{\tilde{\omega}: \xi(\tilde{\omega}) \in B\}$. Тогда ($\mathsf{P}$-п. н.)

$$Q(A, \tilde{\omega}) = \tilde{\mathsf{P}}\{A \mid \mathscr{F}_T^\alpha\}(\tilde{\omega}) = \tilde{\mathsf{P}}\{\tilde{\omega}: \xi(\tilde{\omega}) \in B \mid \mathscr{F}_T^\alpha\}(\tilde{\omega}) = \\ = \mathsf{P}\{\omega: \xi^{\alpha(\tilde{\omega})}(\omega) \in B\} = \int_B \frac{d\mu_{\xi^{\alpha(\tilde{\omega})}}}{d\mu_\xi}(x)\, d\mu_\xi(x) = \int_A \frac{d\mu_{\xi^{\alpha(\tilde{\omega})}}}{d\mu_\xi}(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\omega).$$

*) См., например, [13], [37].

Обозначим $q(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\xi}(\xi(\omega))$. Тогда согласно (7.168)

$$\mathsf{M}\left[g_T(\alpha, \xi) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right] = \frac{\int\limits_\Omega g_T(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\tilde{\omega})) \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\xi}(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})}{\int\limits_\Omega \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\xi}(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})}. \quad (7.199)$$

Но $\mu_\xi \sim \mu_\eta$ и (P-п. н.) $\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})} \sim \mu_\xi$. Поэтому

$$\frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\xi}(\xi(\omega)) = \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\eta}(\xi(\omega)) \cdot \frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi(\omega)),$$

что после подстановки в (7.199) дает

$$\mathsf{M}\left[g_T(\alpha, \xi) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right] = \frac{\int\limits_\Omega g_T(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega)) \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\eta}(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})}{\int\limits_\Omega \frac{d\mu_{\xi\alpha(\tilde{\omega})}}{d\mu_\eta}(\xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})}.$$

Учитывая равенство (7.193) и обозначение (7.179), отсюда находим, что

$$\mathsf{M}\left[g_T(\alpha, \xi) \mid \mathcal{F}_T^\xi\right] = \frac{\int\limits_\Omega g_T(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega)) \frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha \times \mu_\eta]}(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})}{\int\limits_\Omega \frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha \times \mu_\eta]}(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega})} =$$

$$= \int\limits_\Omega g_T(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega))\, \rho_T(\alpha(\tilde{\omega}), \xi(\omega))\, d\mathsf{P}(\tilde{\omega}) =$$

$$= \int\limits_{A_T} g_T(a, \xi(\omega))\, \rho_T(a, \xi(\omega))\, d\mu_\alpha(a).$$

Это и доказывает формулу Байеса (7.178). Формула (7.180), дающее представление для $\rho_T(a, x)$, вытекает из (7.192), (7.196) и (7.197).

Отметим, что справедливость формулы Байеса (7.178) можно установить прямыми подсчетами, не обращаясь к общей формуле (7.168). Действительно, во-первых, случайная величина $\int\limits_A g_T(a, \xi(\omega))\, \rho_T(a, \xi(\omega))\, d\mu_\alpha(a)$ является $\mathcal{F}_T^\xi$-измеримой. Далее, пусть $\lambda(\xi)=\lambda(\xi(\omega))$ является $\mathcal{F}_T^\xi$-измеримой ограниченной величиной. Тогда

$$\mathsf{M}[g_T(\alpha, \xi)\lambda(\xi)]=\mathsf{M}\left[\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(\alpha, \eta)\, g_T(\alpha, \eta)\,\lambda(\eta)\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\lambda(\eta)\,\mathsf{M}\left\{\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(\alpha, \eta)\, g_T(\alpha, \eta)\,|\,\mathcal{F}_T^\eta\right\}\right].$$

Но процессы α и η независимы. Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(\alpha, \eta)\, g_T(\alpha, \eta)\,|\,\mathcal{F}_T^\eta\right\}=$$
$$=\int\limits_{A_T}\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(a, \eta)\, g_T(a, \eta)\, d\mu_\alpha(a),$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}[g_T(\alpha, \xi)\lambda(\xi)]=\mathsf{M}\left[\lambda(\eta)\int\limits_{A_T}\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(a, \eta)\, g_T(a, \eta)\, d\mu_\alpha(a)\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\lambda(\xi)\int\limits_{A_T}\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\eta]}(a, \xi)\, g_T(a, \xi)\, d\mu_\alpha(a)\frac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}(\xi)\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\lambda(\xi)\int\limits_{A_T}\left[\frac{d\mu_{\alpha,\xi}}{d[\mu_\alpha\times\mu_\xi]}(a, \xi)\Big/\frac{d\mu_\xi}{d\mu_\eta}(\xi)\right]g_T(a, \xi)\, d\mu_\alpha(a)\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\lambda(\xi)\int\limits_{A_T}g_T(a, \xi)\,\rho_T(a, \xi)\, d\mu_\alpha(a)\right\},$$

откуда и вытекает формула (7.178).

Замечание 1. Из доказательства теоремы 7.23 видно, что можно отказаться от условий **A** и **C** в ее формулировке, если имеет место эквивалентность мер $\mu_{\alpha,\xi}$ и $\mu_\alpha\times\mu_\eta$ и справедлива формула (7.192) для плотности.

Замечание 2. Пусть существует регулярная условная вероятность $\mu_{\alpha\,|\,\xi_0}$, отвечающая процессу α при заданном ξ_0. Если в (7.170) и (7.176) $\xi_0=\eta_0=\zeta$, где $\mathsf{P}(|\zeta|<\infty)=1$, то аналогично доказывается, что

$$\mathsf{M}[g_T(\alpha, \xi)\,|\,\mathcal{F}_T^\xi]=\int\limits_{A_T}g_T(a, \xi)\,\rho_T(a, \xi)\, d\mu_{\alpha\,|\,\xi_0}(a) \qquad (7.200)$$

(ср. с (7.178)).

Эти замечания используются далее в лемме 11.5.

Замечание 3. Формула (7.178) с $\rho_T(a, \xi)$ из (7.180) остается справедливой, если вместо условия **D** потребовать лишь, чтобы $\mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T A^2(t, \alpha, \xi)\,dt<\infty\right\}=1.$

5. Имея в виду обозначения (7.179), находим, что

$$\mathsf{P}\left(\alpha_T \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right) = \int\limits_{A_T} \chi_{\{a_T \leqslant b\}}(a)\, \rho_T(a, \xi)\, d\mu_\alpha(a). \tag{7.201}$$

Заметим, что *)

$$\int\limits_{A} \chi_{\{a_T \leqslant b\}}\, \rho_T(a, \xi)\, d\mu_\alpha(a) = \widetilde{\mathsf{M}}\left[\chi_{\{a_T(\tilde\omega) \leqslant b\}}\, \rho_T(\alpha(\tilde\omega)), \xi(\omega)\right] =$$
$$= \widetilde{\mathsf{M}}\left[\chi_{\{a_T(\tilde\omega) \leqslant b\}}\, \widetilde{\mathsf{M}}\left(\rho_T(\alpha(\tilde\omega), \xi(\omega)) \mid \alpha_T(\tilde\omega)\right)\right].$$

Поэтому из (7.201) находим

$$\mathsf{P}\left(\alpha_T \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right) = \int\limits_{-\infty}^{b} \widetilde{\mathsf{M}}\left[\rho_T(\alpha(\tilde\omega), \xi(\omega)) \mid \alpha_T(\tilde\omega) = a\right] dF_{\alpha_T}(a), \tag{7.202}$$

где $F_{\alpha_T}(a) = \mathsf{P}(\alpha_T \leqslant a)$, $a \in R^1$.

Если, в частности, $F_{\alpha_T}(a)$ имеет плотность $p_{\alpha_T}(a)$, то

$$\mathsf{P}\left(\alpha_T \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right) = \int\limits_{-\infty}^{b} \widetilde{\mathsf{M}}\left[\rho_T(\alpha(\tilde\omega), \xi(\omega)) \mid \alpha_T(\tilde\omega) = a\right] p_{\alpha_T}(a)\, da. \tag{7.203}$$

Следствие 1. *Если случайная величина α_T имеет плотность распределения вероятностей $p_{\alpha_T}(a)$, то тогда и апостериорное распределение $\mathsf{P}\left(\alpha_T \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right)$ также имеет* (P-п. н.) *плотность*

$$\frac{d\mathsf{P}\left(\alpha_T \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right)}{db} = p_{\alpha_T}(b)\, \widetilde{\mathsf{M}}\left[\rho_T(\alpha(\tilde\omega), \xi(\omega)) \mid \alpha_T(\tilde\omega) = b\right]. \tag{7.204}$$

Если же случайная величина α_T принимает конечное или счетное множество значений $b_1, b_2, \ldots$, то

$$\mathsf{P}\left(\alpha_T = b_k \mid \mathcal{F}_T^\xi\right) = p_{\alpha_T}(b_k)\, \mathsf{M}\left[\rho_T(\alpha(\tilde\omega), \xi(\omega)) \mid \alpha_T(\tilde\omega)\right) = b_k], \tag{7.205}$$

где $p_{\alpha_T}(b_k) = \mathsf{P}(\alpha_T = b_k)$.

Следствие 2. *Если $\alpha = \alpha(\omega)$ — случайная величина с функцией распределения $F_\alpha(a) = \mathsf{P}(\alpha(\omega) \leqslant a)$, то*

$$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant b \mid \mathcal{F}_T^\xi\right) = \int\limits_{-\infty}^{b} \rho_T(a, \xi(\omega))\, dF_\alpha(a). \tag{7.206}$$

---

*) $\widetilde{\mathsf{M}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathsf{P}}$, идентичной мере P, но определенной, на $(\widetilde\Omega, \widetilde{\mathcal{F}})$.

ГЛАВА 8

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Фильтрация. Основная теорема

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неубывающее семейство непрерывных справа σ-подалгебр $\mathscr{F}$, пополненных множествами из $\mathscr{F}$ нулевой вероятности.

Пусть (θ, ξ) — двумерный частично наблюдаемый случайный процесс, где $\theta = (\theta_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *ненаблюдаемая*, а $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *наблюдаемая* компоненты. Задача оптимальной фильтрации для частично наблюдаемого процесса (θ, ξ) состоит в построении для каждого момента t, $0 \leqslant t \leqslant T$, оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки некоторой $\mathscr{F}_t$-измеримой функции h_t, зависящей от (θ, ξ), по результатам наблюдений ξ_s, $s \leqslant t$.

Если $\mathsf{M} h_t^2 < \infty$, то такой оценкой, очевидно, является апостериорное среднее $\pi_t(h) = \mathsf{M}(h_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$. Без специальных предположений о структуре процессов (h, ξ) отыскание $\pi_t(h)$ представляется весьма трудным. Ниже будет предполагаться, что компоненты процесса (h, ξ) являются процессами типа (8.1) и (8.2), что дает возможность вывести для $\pi_t(h)$ стохастическое дифференциальное уравнение (8.10), называемое *уравнением оптимальной нелинейной фильтрации*. Применению этих уравнений для эффективного построения оптимальных «фильтров» будут посвящены последующие главы.

2. Перейдем к формулировке основных предположений о структуре процесса (h, ξ). Будем предполагать, что процесс $h = (h_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, может быть представлен в следующем виде:

$$h_t = h_0 + \int_0^t H_s\, ds + x_t, \tag{8.1}$$

где $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — мартингал, а $H=(H_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, — случайный процесс с $\int_0^T |H_s| ds < \infty$ (P-п. н). В силу непрерывности справа σ-алгебр $\mathscr{F}_t$ и теоремы 3.1 мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$, $t \leqslant T$, имеет непрерывную справа модификацию, которая далее и будет рассматриваться.

Относительно наблюдаемого процесса $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$ будет предполагаться, что он является процессом Ито,

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t A_s(\omega)\, ds + \int_0^t B_s(\xi)\, dW_s, \tag{8.2}$$

где $W=(W_t, \mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс. Процессы $A=(A_t(\omega), \mathscr{F}_t)$ и $B=(B_t(\xi), \mathscr{F}_t)$ предполагаются такими, что

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |A_t(\omega)|\, dt < \infty\right) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\int_0^T B_t^2(\xi)\, dt < \infty\right) = 1, \tag{8.3}$$

где измеримый функционал $B_t(x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbf{C}_T$, является $\mathscr{B}_t$-измеримым при каждом $t \leqslant T$.

Далее будет предполагаться, что функционал $B_t(x)$, $x \in \mathbf{C}_T$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет следующим условиям:

$$|B_t(x) - B_t(y)|^2 \leqslant L_1 \int_0^t [x_s - y_s]^2\, dK(s) + L_2 [x_t - y_t]^2, \tag{8.4}$$

$$B_t^2(x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\, dK(s) + L_2 (1 + x_t^2), \tag{8.5}$$

где L_1, L_2 — неотрицательные константы, $K(t)$, $0 \leqslant K(t) \leqslant 1$, — неубывающая непрерывная справа функция, x, $y \in \mathbf{C}_T$.

Если $g_t = g_t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — некоторый измеримый случайный процесс с $\mathsf{M}|g_t| < \infty$, то у условного математического ожидания $\mathsf{M}(g_t | \mathscr{F}_t^\xi)$ существует измеримая модификация (см. [52], [126]), которая будет обозначаться $\pi_t(g)$.

3. Основной результат этой главы формулируется следующим образом.

Теорема 8.1. *Пусть частично наблюдаемый случайный процесс* (h, ξ) *допускает представление* (8.1) — (8.2). *Пусть* *выполнены условия* (8.3) — (8.5) *и*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M} h_t^2 < \infty, \tag{8.6}$$

$$\int_0^T \mathsf{M} H_t^2 \, dt < \infty, \tag{8.7}$$

$$\int_0^T \mathsf{M} A_t^2 \, dt < \infty, \tag{8.8}$$

$$B_t^2(x) \geqslant C > 0. \tag{8.9}$$

Тогда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, P-п. н.

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(H)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \{\pi_s(D) + [\pi_s(hA) - \pi_s(h)\pi_s(A)] B_s^{-1}(\xi)\} \, d\overline{W}_s, \tag{8.10}$$

где

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - \pi_s(A)\, ds}{B_s(\xi)}$$

— *винеровский процесс* (*относительно системы* $(\mathcal{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$), *а* $D = (D_t, \mathcal{F}_t)$ — *процесс с* *)

$$D_t = \frac{d\langle x, W\rangle_t}{dt}. \tag{8.11}$$

Уравнение (8.10) будем называть *основным уравнением* (оптимальной нелинейной) *фильтрации.*

§ 2. Фильтрация. Доказательство основной теоремы

1. Доказательство теоремы 8.1 будет существенно опираться на результаты глав 5 и 7.

Из условий (8.8) и (8.9) следует, что

$$\int_0^T \mathsf{M}|A_t|\, dt < \infty, \qquad |B_t(x)| \geqslant \sqrt{C} > 0, \tag{8.12}$$

Следовательно, $\mathsf{M}|A_t| < \infty$ для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\mathsf{M}|A_t| < \infty$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда по теореме 7.17 $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$

*) Определение процесса $\langle x, W\rangle_t$ дано в гл. 5, § 1, п. 2.

является винеровским процессом и процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, определенный в (8.2), допускает дифференциал

$$d\xi_t=\pi_t(A)\,dt+B_t(\xi)\,d\overline{W}_t, \tag{8.13}$$

где $\pi_t(A)=\mathsf{M}\left[A_t(\omega)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]$.

В силу неравенства Йенсена и предположения (8.8)

$$\int_0^T \mathsf{M}\pi_t^2(A)\,dt\leqslant\int_0^T \mathsf{M}A_t^2\,dt<\infty, \tag{8.14}$$

что вместе с предположениями (8.4), (8.5) и (8.9) обеспечивает применимость теоремы 5.18. Согласно этой теореме и лемме 4.9 у всякого мартингала $Y=(y_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, существует непрерывная модификация, допускающая представление *)

$$y_t=y_0+\int_0^t f_s(\xi)\,d\overline{W}_s, \tag{8.15}$$

где $\mathsf{P}\left(\int_0^T f_s^2(\xi)\,ds<\infty\right)=1$ и в случае квадратично интегрируемого мартингала $\int_0^T \mathsf{M}f_s^2(\xi)\,ds<\infty$ (ср. с (5.122)).

Из (8.1) и предположений (8.6), (8.7) следует, что мартингал $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$ квадратично интегрируем. Беря от обеих частей в (8.1) условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)$, находим, что

$$\pi_t(h)=\mathsf{M}(h_0\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)+\mathsf{M}\left(\int_0^t H_s\,ds\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)+\mathsf{M}(x_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi). \tag{8.16}$$

2. Сформулируем теперь в виде лемм ряд вспомогательных утверждений, дающих возможность преобразовать правую часть в (8.16) к выражению, стоящему в правой части (8.10).

Лемма 8.1. *Процесс* $\left(\mathsf{M}(h_0\,|\,\mathscr{F}_t^\xi), \mathscr{F}_t^\xi\right)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *является квадратично интегрируемым мартингалом, допускающим представление*

$$\mathsf{M}(h_0\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)=\pi_0(h)+\int_0^t g_s^h(\xi)\,d\overline{W}_s, \tag{8.17}$$

где $\mathsf{M}\int_0^T [g_s^h(\xi)]^2\,ds<\infty$.

*) В (8.15) измеримый функционал $f_s(x)$ является $\mathscr{B}_{s+}$-измеримым при каждом $0\leqslant s\leqslant T$.

Доказательство леммы очевидным образом следует из теоремы 5.18 и теоремы 1.6, согласно которой у мартингала $\mathsf{M}(h_0|\mathcal{F}_t^\xi)$ существуют P-п. н. пределы справа для каждого t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Лемма 8.2. *Процесс* $(\mathsf{M}(x_t|\mathcal{F}_t^\xi), \mathcal{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *является квадратично интегрируемым мартингалом, допускающим представление*

$$\mathsf{M}(x_t|\mathcal{F}_t^\xi)=\int_0^t g_s^x(\xi)\,d\overline{W}_s \tag{8.18}$$

с $\mathsf{M}\int_0^T (g_s^x(\xi))^2\,ds<\infty$.

Доказательство. Тот факт, что этот процесс является мартингалом, проверяется так же, как и в лемме 5.7. Квадратичная интегрируемость следует из того, что таковым является мартингал $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$. Существование $\lim\limits_{s\downarrow t}\mathsf{M}(x_s|\mathcal{F}_s^\xi)$ вытекает из теоремы 3.1. Поэтому заключение леммы — прямое следствие теоремы 5.18.

Лемма 8.3. *Пусть* $\alpha=(\alpha_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *некоторый случайный процесс с* $\int_0^T \mathsf{M}|\alpha_t|\,dt<\infty$, *а* $\mathcal{G}$ — *некоторая* σ-*подалгебра* $\mathcal{F}$. *Тогда*

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t \alpha_s\,ds\,|\,\mathcal{G}\right)=\int_0^t \mathsf{M}(\alpha_s|\mathcal{G})\,ds \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{8.19}$$

Доказательство. Пусть $\lambda=\lambda(\omega)$ — ограниченная $\mathcal{G}$-измеримая случайная величина. Тогда, используя теорему Фубини, находим, что

$$\mathsf{M}\left[\lambda\int_0^t \alpha_s\,ds\right]=\int_0^t \mathsf{M}[\lambda\alpha_s]\,ds=$$
$$=\int_0^t \mathsf{M}\{\lambda\mathsf{M}(\alpha_s|\mathcal{G})\}\,ds=\mathsf{M}\left[\lambda\int_0^t \mathsf{M}(\alpha_s|\mathcal{G})\,ds\right].$$

С другой стороны

$$\mathsf{M}\left[\lambda\int_0^t \alpha_s\,ds\right]=\mathsf{M}\left[\lambda\mathsf{M}\left(\int_0^t \alpha_s\,ds\,|\,\mathcal{G}\right)\right].$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\left[\lambda\int_0^t \mathsf{M}(\alpha_s\,|\,\mathscr{G})\,ds\right]=\mathsf{M}\left[\lambda\mathsf{M}\left(\int_0^t \alpha_s\,ds\,|\,\mathscr{G}\right)\right].$$

Отсюда в силу произвольности $\lambda=\lambda(\omega)$ получаем требуемое утверждение (8.19).

Лемма 8.4. *Случайный процесс*

$$\left(\mathsf{M}\left(\int_0^t H_s\,ds\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)-\int_0^t \pi_s(H)\,ds,\ \mathscr{F}_t^\xi\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{8.20}$$

является квадратично интегрируемым мартингалом, допускающим представление

$$\mathsf{M}\left(\int_0^t H_s\,ds\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)-\int_0^t \pi_s(H)\,ds=\int_0^t g_s^H(\xi)\,d\overline{W}_s\tag{8.21}$$

с $\int_0^T \mathsf{M}\,(g_s^H(\xi))^2\,ds<\infty$.

Доказательство. Существование (**P**-п. н.)

$$\lim_{s\downarrow t}\left[\mathsf{M}\left(\int_0^s H_u\,du\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right)-\int_0^s \pi_u(H)\,du\right]\tag{8.22}$$

следует из теоремы 1.6. Поэтому утверждение леммы будет вытекать непосредственно из теоремы 5.18, если только показать, что процесс (8.20) является мартингалом (квадратичная интегрируемость следует из предположения (8.7)).

Пусть $s\leqslant t$. Тогда в силу леммы 8.3

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left[\int_0^t H_u\,du\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]-\int_0^t \pi_u(H)\,du\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right\}&=\\ =\mathsf{M}\left[\int_0^t H_u\,du\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]-\int_0^t \mathsf{M}\left[\pi_u(H)\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]du&=\\ =\mathsf{M}\left[\int_0^s H_u\,du\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]+\mathsf{M}\left[\int_s^t H_u\,du\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]&-\\ -\int_0^s \mathsf{M}\left[\pi_u(H)\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]du-\int_s^t \mathsf{M}\left[\pi_u(H)\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right]du.&\end{aligned}\tag{8.23}$$

Здесь

$$\int_0^s \mathsf{M}\left[\pi_u(H) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] du = \int_0^s \pi_u(H)\, du \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}) \tag{8.24}$$

и для $u \geqslant s$

$$\mathsf{M}\left[\pi_u(H) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left(H_u \mid \mathcal{F}_u^\xi\right) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right\} = \mathsf{M}\left\{H_u \mid \mathcal{F}_s^\xi\right\}.$$

Поэтому по лемме 8.3

$$\mathsf{M}\left[\int_s^t H_u\, du \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \int_s^t \mathsf{M}\left[\pi_u(H) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] du. \tag{8.25}$$

Из (8.23) — (8.25) вытекает, что процесс (8.20) является мартингалом.

3. Вернемся вновь к доказательству теоремы. Из (8.16), лемм 8.1, 8.2 и 8.4 находим, что

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(H)\, ds + \int_0^t g_s(\xi)\, d\overline{W}_s, \tag{8.26}$$

где

$$g_s(\xi) = g_s^h(\xi) + g_s^x(\xi) + g_s^H(\xi) \tag{8.27}$$

с

$$\int_0^T \mathsf{M} g_s^2(\xi)\, ds < \infty. \tag{8.28}$$

Покажем теперь, что P-п. н. для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$g_s(\xi) = \pi_s(D) + \left[\pi_s(hA) - \pi_s(h)\pi_s(A)\right] B_s^{-1}(\xi). \tag{8.29}$$

Поступим следующим образом. Пусть $y_t = \int_0^t g_s(\xi)\, d\overline{W}_s$, и $z_t = \int_0^t \lambda_s(\xi)\, d\overline{W}_s$, где $\lambda = (\lambda_s(\xi), \mathcal{F}_s^{(\xi)})$ — некоторый ограниченный случайный процесс с $|\lambda_s(\xi)| \leqslant C < \infty$. По свойствам стохастических интегралов

$$\mathsf{M} y_t z_t = \mathsf{M} \int_0^t \lambda_s(\xi)\, g_s(\xi)\, ds. \tag{8.30}$$

Подсчитаем теперь $\mathsf{M} y_t z_t$ другим способом, учитывая, что согласно (8.26)

$$y_t = \pi_t(h) - \pi_0(h) - \int_0^t \pi_s(H)\, ds. \tag{8.31}$$

Заметим, что

$$\mathsf{M} z_t \pi_0(h) = \mathsf{M}\left\{\pi_0(h)\,\mathsf{M}\left(z_t \mid \mathcal{F}_0^\xi\right)\right\} = 0$$

и

$$\mathsf{M}\left[z_t \int_0^t \pi_s(H)\,ds\right] = \int_0^t \mathsf{M}\left[z_t \pi_s(H)\right] ds =$$

$$= \int_0^t \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(z_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right) \pi_s(H)\right] ds = \int_0^t \mathsf{M}\left[z_s \pi_s(H)\right] ds.$$

Поэтому, учитывая, что случайные величины z_t $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримы, находим

$$\mathsf{M} y_t z_t = \mathsf{M} z_t \pi_t(h) - \int_0^t \mathsf{M} z_s \pi_s(H)\,ds =$$

$$= \mathsf{M}\left[z_t \mathsf{M}\left(h_t \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)\right] - \int_0^t \mathsf{M}\left[z_s \mathsf{M}\left(H_s \mid \mathcal{F}_s^\xi\right)\right] ds =$$

$$= \mathsf{M}\left[z_t h_t - \int_0^t z_s H_s\,ds\right]. \tag{8.32}$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - \pi_s(A)\,ds}{B_s(\xi)} = W_t + \int_0^t \frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds. \tag{8.33}$$

Получаем

$$z_t = \tilde{z}_t + \int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds, \tag{8.34}$$

где

$$\tilde{z}_t = \int_0^t \lambda_s(\xi)\,dW_s. \tag{8.35}$$

Из (8.32) и (8.34) находим

$$\mathsf{M} y_t z_t = \mathsf{M}\left[z_t h_t - \int_0^t z_s H_s\,ds\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left[\tilde{z}_t h_t - \int_0^t \tilde{z}_s H_s\,ds\right] + \mathsf{M}\left[h_t \int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds -\right.$$

$$\left. - \int_0^t \left(\int_0^s \lambda_u(\xi)\,\frac{A_u(\omega) - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\right) H_s\,ds\right]. \tag{8.36}$$

Процесс $\tilde{z} = (\tilde{z}_t, \mathcal{F}_t)$ является квадратично интегрируемым мартингалом. Поэтому

$$\mathsf{M}\tilde{z}_t h_0 = \mathsf{M}(h_0 \mathsf{M}(\tilde{z}_0 \mid \mathcal{F}_0)) = \mathsf{M} h_0 \tilde{z}_0 = 0$$

и

$$\mathsf{M}\int_0^t \tilde{z}_s H_s\,ds = \mathsf{M}\int_0^t [\mathsf{M}(\tilde{z}_t \mid \mathcal{F}_s) H_s]\,ds = \mathsf{M}\tilde{z}_t \int_0^t H_s\,ds.$$

Значит, в силу (8.1) и теоремы 5.2

$$\mathsf{M}\left[\tilde{z}_t h_t - \int_0^t \tilde{z}_s H_s\,ds\right] = \mathsf{M}\left[\tilde{z}_t\left(h_t - h_0 - \int_0^t H_s\,ds\right)\right] = \\ = \mathsf{M}\tilde{z}_t x_t = \mathsf{M}\langle \tilde{z}, x\rangle_t.$$

По лемме 5.1

$$\langle \tilde{z}, x_t\rangle = \int_0^t \lambda_s(\xi) D_s\,ds \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{8.37}$$

и поэтому

$$\mathsf{M}\left[\tilde{z}_t h_t - \int_0^t \tilde{z}_s H_s\,ds\right] = \mathsf{M}\langle \tilde{z}, x\rangle_t = \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi) D_s\,ds = \\ = \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\pi_s(D)\,ds. \tag{8.38}$$

Вычислим теперь второе слагаемое в правой части (8.36). Имеем

$$\mathsf{M}\left[h_t \int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds\right] = \\ = \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{h_s A_s - h_s \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds + \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,[h_t - h_s]\,\frac{A_s - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds = \\ = \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{\pi_s(hA) - \pi_s(h)\,\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds + \\ + \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,[h_t - h_s]\,\frac{A_s - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds. \tag{8.39}$$

Заметим, что

$$h_t - h_s = \int_s^t H_u\,du + (x_t - x_s)$$

и $\mathsf{M}(x_t - x_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$. Поэтому

$$\mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,[h_t - h_s]\,\frac{A_s - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds =$$

$$= \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,[x_t - x_s]\,\frac{A_s - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds +$$

$$+ \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{A_s - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\left(\int_s^t H_u\,du\right)ds =$$

$$= \mathsf{M}\int_0^t \left[\int_0^s \lambda_u(\xi)\,\frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\,du\right] H_s\,ds.$$

Отсюда и из (8.39) следует, что

$$\mathsf{M}h_t\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{A_s(\omega) - \pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds =$$

$$= \mathsf{M}\int_0^t \left[\int_0^s \lambda_u(\xi)\,\frac{A_u(\omega) - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\,du\right] H_s\,ds +$$

$$+ \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\,\frac{\pi_s(hA) - \pi_s(h)\,\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\,ds. \qquad (8.40)$$

Из (8.36), (8.38) и (8.40) находим, что

$$\mathsf{M}y_t z_t = \mathsf{M}\int_0^t \lambda_s(\xi)\left[\pi_s(D) + \frac{\pi_s(hA) - \pi_s(h)\,\pi_s(A)}{B_s(\xi)}\right] ds.$$

Сравнивая это выражение с (8.30), убеждаемся в справедливости формулы (8.29) P-п. н. для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Поскольку же значение интеграла $\int_0^t g_s(\xi)\,d\overline{W}_s$, входящего в (8.26), не изменяется от изменения функции $g_t(\xi)$ на множестве лебеговой меры нуль, то равенство (8.29) можно считать выполненным P-п. н. для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 8.1 доказана.

4. Замечание. Из доказательства теоремы следует, что

$$\int_0^T \mathsf{M}\left\{\pi_t(D)+\frac{\pi_t(hA)-\pi_t(h)\,\pi_t(A)}{B_t(\xi)}\right\}^2 dt<\infty. \tag{8.41}$$

5. Выделим один частный случай доказанной теоремы, когда $A_t\equiv 0$, $B_t\equiv 1$, $\xi_0=0$.

Теорема 8.2. *Пусть* $W=(W_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — *винеровский процесс и процесс* $h_t=h_0+\int_0^t H_s\,ds+x_t$, *где* $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$ — *мартингал.*

Если

(I) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}h_t^2<\infty$,

(II) $\int_0^T \mathsf{M}H_t^2\,dt<\infty$,

то

$$\pi_t^W(h)=\pi_0^W(h)+\int_0^t \pi_s^W(H)\,ds+\int_0^t \pi_s^W(D)\,dW_s, \tag{8.42}$$

где

$$\pi_t^W(g)=\mathsf{M}\left[g_t\mid\mathcal{F}_t^W\right],$$

а

$$D_t=\frac{d\langle x, W\rangle_t}{dt}.$$

Доказательство. Представление (8.42) следует из (8.10), если только заметить, что в рассматриваемом случае

$$\xi_t=W_t=\overline{W}_t.$$

Следствие. *Пусть* $X=(x_t, \mathcal{F}_t)$ — *квадратично интегрируемый мартингал. Тогда*

$$\mathsf{M}\left(x_t\mid\mathcal{F}_t^W\right)=\mathsf{M}x_0+\int_0^t \mathsf{M}\left(a_s\mid\mathcal{F}_s^W\right)ds, \tag{8.43}$$

где $\langle x, W\rangle_t=\int_0^t a_s\,ds$.

Формула (8.43) была ранее получена в § 5 гл. 5 (формула (5.85)).

§ 3. Фильтрация компонент диффузионных марковских процессов

В качестве иллюстрации основной теоремы 8.1 рассмотрим задачу оценивания ненаблюдаемой компоненты θ_t двумерного диффузионного марковского процесса (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, по результатам наблюдений θ_s, $s \leqslant t$.

Приведем точную постановку задачи.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы независимые между собой винеровские процессы $W_i = (W_i(t))$, $i = 1, 2$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и случайный вектор $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\xi}_0)$, не зависящий от W_1, W_2. Обозначим

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega:\ \tilde{\theta}_0, \tilde{\xi}_0, W_1(s), W_2(s), s \leqslant t\}.$$

Согласно теореме 4.3 (пополненные) σ-алгебры $\mathcal{F}_t^W$ являются непрерывными. Аналогичным образом доказывается, что (пополненные) σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ также непрерывны.

Пусть $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс с

$$\begin{aligned} &d\theta_t = a(t, \theta_t, \xi_t)\,dt + b_1(t, \theta_t, \xi_t)\,dW_1(t) + b_2(t, \theta_t, \xi_t)\,dW_2(t), \\ &d\xi_t = A(t, \theta_t, \xi_t)\,dt + B(t, \xi_t)\,dW_2(t), \\ &\theta_0 = \tilde{\theta}_0,\ \ \xi_0 = \tilde{\xi}_0,\ \mathsf{P}(|\tilde{\theta}_0| < \infty) = \mathsf{P}(|\tilde{\xi}_0| < \infty) = 1. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Если $g(t, \theta, x)$ обозначает любую из функций $a(t, \theta, x)$, $A(t, \theta, x)$, $b_1(t, \theta, x)$, $b_2(t, \theta, x)$, $B(t, x)$, то будет предполагаться, что

$$\begin{gathered} |g(t, \theta', x'') - g(t, \theta'', x'')|^2 \leqslant K(|\theta' - \theta''|^2 + |x' - x''|^2), \\ g^2(t, \theta, x) \leqslant K(1 + \theta^2 + x^2), \end{gathered} \tag{8.45}$$

Из этих предположений, теоремы 4.6 и замечания к ней следует, что система уравнений (8.44) имеет единственное (сильное) решение, являющееся марковским процессом. При этом, если

$$\mathsf{M}(\tilde{\theta}_0^2 + \tilde{\xi}_0^2) < \infty, \tag{8.46}$$

то

$$\sup_{t \leqslant T} \mathsf{M}(\theta_t^2 + \xi_t^2) < \infty, \tag{8.47}$$

и в силу (8.45)

$$\sup_{t \leqslant T} \mathsf{M}[A^2(t, \theta_t, \xi_t) + B^2(t, \xi_t)] < \infty. \tag{8.48}$$

Пусть $h = h(t, \theta_t, \xi_t)$ — измеримая функция такая, что $\mathsf{M}|h(t, \theta_t, \xi_t)| < \infty$. Используя теорему 8.1, найдем уравнение для $\pi_t(h) = \mathsf{M}[h(t, \theta_t, \xi_t) \,|\, \mathcal{F}_t^\xi]$.

Наряду со сделанными уже предположениями (8.45), (8.46) будем предполагать, что

$$B^2(t, x) \geqslant C > 0 \tag{8.49}$$

и что выполнены следующие условия:

функция $h = h(t, \theta, x)$ *непрерывна вместе со своими частными производными*

$$h_t', \ h_\theta', \ h_x', \ h_{\theta\theta}'', \ h_{\theta x}'', \ h_{xx}''; \tag{8.50}$$

$$\sup_{t \leqslant T} \mathsf{M} h^2(t, \theta_t, \xi_t) < \infty; \tag{8.51}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}[\mathfrak{L} h(t, \theta_t, \xi_t)]^2 dt < \infty, \tag{8.52}$$

где

$$\mathfrak{L} h(t, \theta, x) = h_t'(t, \theta, x) + h_\theta'(t, \theta, x) a(t, \theta, x) + h_x'(t, \theta, x) A(t, \theta, x) + \\ + \frac{1}{2} h_{\theta\theta}''(t, \theta, x)\left[b_1^2(t, \theta, x) + b_2^2(t, \theta, x)\right] + \frac{1}{2} h_{xx}''(t, \theta, x) B^2(t, x) + \\ + h_{\theta x}''(t, \theta, x) b_2(t, \theta, x) B(t, x). \tag{8.53}$$

Наконец, предположим, что

$$\int_0^T \mathsf{M}\left\{[h_\theta'(t, \theta_t, \xi_t)]^2 \left[b_1^2(t, \theta_t, \xi_t) + b_2^2(t, \theta_t, \xi_t)\right]\right\} dt < \infty, \tag{8.54}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}\left[h_x'(t, \theta_t, \xi_t)\right]^2 B^2(t, \xi_t) dt < \infty. \tag{8.55}$$

Теорема 8.3. *Если выполнены предположения* (8.45), (8.46), (8.49) — (8.52) *и* (8.54), (8.55), *то* P-п. н.

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(\mathfrak{L} h)\, ds + \\ + \int_0^t \left[\pi_s(\mathcal{N} h) + \frac{\pi_s(Ah) - \pi_s(A)\pi_s(h)}{B(s, \xi_s)}\right] d\overline{W}_s, \tag{8.56}$$

где

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - \pi_s(A)\, ds}{B(s, \xi_s)}$$

является винеровским процессом (*относительно* $(\mathcal{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$) *и*

$$\mathcal{N} h(t, \theta, x) = h_\theta'(t, \theta, x) b_2(t, \theta, x) + h_x'(t, \theta, x) B(t, x). \tag{8.57}$$

Доказательство. По формуле Ито (P-п. н.)

$$h(t, \theta_t, \xi_t) = h(0, \theta_0, \xi_0) + \int_0^t \mathfrak{L} h(s, \theta_s, \xi_s)\,ds + x_t,$$

где

$$x_t = \sum_{i=1}^{2} \int_0^t h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_i(s, \theta_s, \xi_s)\, dW_i(s) + \\ + \int_0^t h'_x(s, \theta_s, \xi_s)\, B(s, \xi_s)\, dW_2(s).$$

Согласно сделанным предположениям процесс $X = (x_t, \mathcal{F}_t)$ является квадратично интегрируемым мартингалом.

Установим теперь, что

$$\langle x, W_2\rangle_t = \int_0^t [h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_2(s, \theta_s, \xi_s) + \\ + h'_x(s, \theta_s, \xi_s)\, B(s, \xi_s)]\, ds. \quad (8.58)$$

С помощью формулы Ито легко находится, что

$$x_t W_2(t) = \int_0^t W_2(s)\, h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_1(s, \theta_s, \xi_s)\, dW_1(s) + \\ + \int_0^t [x_s + h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_2(s, \theta_s, \xi_s) + h'_x(s, \theta_s, \xi_s)\, B(s, \xi_s)]\, dW_2(s) + \\ + \int_0^t [h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_2(s, \theta_s, \xi_s) + h'_x(s, \theta_s, \xi_s)\, B(s, \xi_s)]\, ds. \quad (8.59)$$

При этом непосредственно проверяется, что процесс $Y = (y_t, \mathcal{F}_t)$ с

$$y_t = x_t W_2(t) - \int_0^t [h'_\theta(s, \theta_s, \xi_s)\, b_2(s, \theta_s, \xi_s) + h'_x(s, \theta_s, \xi_s)\, B(s, \xi_s)]\, ds$$

является мартингалом.

Отсюда, как и в примере 3 гл. 5, вытекает справедливость формулы (8.58).

Чтобы получить теперь требуемое представление (8.56), осталось лишь воспользоваться теоремой 8.1.

§ 4. Уравнения оптимальной нелинейной интерполяции

1. Как и в § 1, будем предполагать, что рассматривается двумерный процесс $(h, \xi)=(h_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$h_t = h_0 + \int_0^s H_s\, ds + x_t, \tag{8.60}$$

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t A_s\, ds + \int_0^t B_s(\xi)\, dW_s, \tag{8.61}$$

удовлетворяющий предположениям теоремы 8.1.

Задача оптимальной интерполяции состоит в отыскании оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки h_s по результатам наблюдений ξ_u, $u \leqslant t$, где $t \geqslant s$. Если $\mathsf{M} h_s^2 < \infty$, то такой оценкой является апостериорное среднее

$$\pi_{s,t}(h) = \mathsf{M}\left[h_s \mid \mathscr{F}_t^\xi\right]. \tag{8.62}$$

Для $\pi_{s,t}(h)$ можно получать уравнения двух типов: *прямые* (по t при фиксированном s) и *обратные* (по s при фиксированном t).

В настоящем параграфе будут выведены прямые уравнения, аналогичные уравнению (8.10) для $\pi_t(h) = \pi_{t,t}(h)$.

Теорема 8.4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8.1. *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$\pi_{s,t}(h) = \pi_s(h) + \int_s^t \frac{\mathsf{M}\left[h_s A_u \mid \mathscr{F}_g^\xi\right] - \mathsf{M}\left[h_s \mid \mathscr{F}_u^\xi\right] \mathsf{M}\left[A_u \mid \mathscr{F}_u^\xi\right]}{B_u(\xi)}\, d\overline{W}_u. \tag{8.63}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что формулу (8.63) можно переписать в следующем виде:

$$\pi_{s,t}(h) = \pi_s(h) + \int_s^t \frac{\mathsf{M}\left[h_s A_u \mid \mathscr{F}_u^\xi\right] - \pi_{s,u}(h)\, \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, d\overline{W}_u$$

или

$$d_t \pi_{s,t}(h) = \frac{\mathsf{M}\left[h_s A_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] - \pi_{s,t}(h)\, \pi_t(A)}{B_t(\xi)}\, d\overline{W}_t,$$

где

$$t \geqslant s \text{ и } \pi_{s,s}(h) = \pi_s(h).$$

Рассмотрим теперь квадратично интегрируемый мартингал $Y=(y_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ с

$$y_t = \mathsf{M}(h_s | \mathscr{F}_t^\xi), \qquad t \geqslant s. \tag{8.64}$$

Согласно теореме 5.18 y_t для $t \geqslant s$ допускает представление

$$y_t = \pi_s(h) + \int_s^t g_{s,u}(\xi)\, d\overline{W}_u \tag{8.65}$$

с винеровским процессом $\overline{W}=(\overline{W}_u, \mathscr{F}_u^\xi)$ и процессом $(g_{s,u}(\xi), \mathscr{F}_u^\xi)$, $u \geqslant s$, удовлетворяющим условию

$$\mathsf{M}\int_s^t g_{s,u}^2(\xi)\, du < \infty.$$

Как и при доказательстве теоремы 8.1, введем квадратично интегрируемый мартингал $Z=(z_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ с

$$z_t = \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, d\overline{W}_u,$$

где $|\lambda_{s,u}(\xi)| \leqslant C < \infty$.

Нетрудно найти, что

$$\mathsf{M} y_t z_t = \mathsf{M}\int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, g_{s,u}(\xi)\, du. \tag{8.66}$$

С другой стороны, принимая во внимание, что

$$\overline{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du,$$

находим, что

$$\mathsf{M} y_t z_t = \mathsf{M}\mathsf{M}(h_s | \mathscr{F}_t^\xi) z_t = \mathsf{M} h_s z_t =$$

$$= \mathsf{M} h_s \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, dW_u + \mathsf{M} h_s \int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du =$$

$$= \mathsf{M}\left[h_s \mathsf{M}\left(\int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, dW_u \,|\, \mathscr{F}_s\right)\right] + \mathsf{M}\int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, \frac{h_s A_u - h_s \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du =$$

$$= \mathsf{M}\int_s^t \lambda_{s,u}(\xi)\, \frac{\mathsf{M}(h_s A_u | \mathscr{F}_u^\xi) - \mathsf{M}(h_s | \mathscr{F}_u^\xi)\, \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du. \tag{8.67}$$

Сравнивая правые части в (8.66) и (8.67), находим, что P-п. н. для почти всех $u \geqslant s$

$$g_{s,u}(\xi) = \frac{\mathsf{M}\left(h_s A_u \mid \mathcal{F}_u^\xi\right) - \mathsf{M}\left(h_s \mid \mathcal{F}_u^\xi\right)\pi_u(A)}{B_u(\xi)}. \tag{8.68}$$

Как и в теореме 8.1, без ограничения общности можно считать, что функция $g_{s,u}(\xi)$ определяется равенством (8.68) (P-п. н.) для всех $u \geqslant s$.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что

$$\mathsf{M}\int_s^T \left[\frac{\mathsf{M}\left(h_s A_u \mid \mathcal{F}_u^\xi\right) - \mathsf{M}\left(h_s \mid \mathcal{F}_u^\xi\right)\pi_u(A)}{B_u(\xi)}\right]^2 du < \infty.$$

2. Применяя теорему 8.4 к процессу (θ, ξ), рассмотренному в § 3, находим, что (в предположениях теоремы 8.3) для $t \geqslant s$

$$\mathsf{M}\left[h(s, \theta_s, \xi_s) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right] =$$

$$= \pi_s(h) + \int_s^t \frac{\mathsf{M}\left\{h(s, \theta_s, \xi_s)\left[A(u, \theta_u, \xi_u) - \pi_u(A)\right] \mid \mathcal{F}_u^\xi\right\}}{B_u(\xi)} d\overline{W}_u. \tag{8.69}$$

§ 5. Уравнения оптимальной нелинейной экстраполяции

1. Снова будем предполагать, что процесс (h, ξ) описывается соотношениями (8.60), (8.61) и что выполнены условия теоремы 8.1.

Пусть $t \geqslant s$ и

$$\pi_{t,s}(h) = \mathsf{M}\left[h_t \mid \mathcal{F}_s^\xi\right]. \tag{8.70}$$

Очевидно, что если $\mathsf{M}h_t^2 < \infty$, то $\pi_{t,s}(h)$ является оптимальной (вообще говоря, нелинейной) оценкой «экстраполируемого» значения h_t по наблюдениям ξ_u, $u \leqslant s \leqslant t$. Идеи, примененные при выводе уравнений (8.10) для $\pi_t(h)$, позволяют получить также уравнения и для $\pi_{t,s}(h)$ по $s \leqslant t$ при фиксированном t. Эти уравнения естественно называть *обратными* уравнениями экстраполяции в отличие от прямых уравнений (по $t \geqslant s$ при фиксированном s).

Теорема 8.5. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8.1. *Тогда при фиксированных t и s, $s \leqslant t$,*

$$\pi_{t,s}(h) = \pi_{t,0}(h) + \int_0^s \left\{\pi_u(D) + \frac{\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(h_t \mid \mathcal{F}_u\right)\left(A_u - \pi_u(A)\right) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right]}{B_u(\xi)}\right\} d\overline{W}_u, \tag{8.71}$$

где $D_s = \frac{d\langle \tilde{x}, W\rangle_s}{ds}$ *и* $\tilde{X} = (\tilde{x}_s, \mathcal{F}_s)$, $s \leqslant t$, — *квадратично интегрируемый мартингал с* $\tilde{x}_s = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_s)$.

Доказательство. Пусть t фиксировано и $s \leqslant t$. Положим $y_s = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$. Процесс $Y = (y_s, \mathcal{F}_s^\xi)$, $s \leqslant t$, является квадратично интегрируемым мартингалом, и по теореме 5.18

$$y_s = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_0^\xi) + \int_0^s g_{u,t}(\xi)\, d\overline{W}_u \tag{8.72}$$

с

$$\mathsf{M}\int_0^t g_{u,t}^2(\xi)\, du < \infty.$$

Как и при доказательстве предшествующей теоремы, положим

$$z_s = \int_0^s \lambda_u(\xi)\, d\overline{W}_u,$$

где $|\lambda_u(\xi)| \leqslant C < \infty$. Тогда

$$\mathsf{M} y_s z_s = \mathsf{M}\int_0^s \lambda_u(\xi)\, g_{u,t}(\xi)\, du. \tag{8.73}$$

Вычисим теперь $\mathsf{M} y_s z_s$ иным способом. Ясно, что

$$\mathsf{M} y_s z_s = \mathsf{M}\mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)\, z_s = \mathsf{M} h_t z_s = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_s)\, z_s = \mathsf{M}\tilde{x}_s z_s.$$

Процесс $\tilde{X} = (\tilde{x}_s, \mathcal{F}_s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, является квадратично интегрируемым мартингалом, и по теореме 5.3

$$\langle \tilde{x}, W\rangle_s = \int_0^s D_u\, du,$$

где $\mathsf{M}\int_0^t D_u^2\, du < \infty$.

Пусть $\tilde{Z} = (\tilde{z}_s, \mathcal{F}_s)$, $s \leqslant t$, — квадратично интегрируемый мартингал с $\tilde{z}_s = \int_0^s \lambda_u(\xi)\, dW_u$. Тогда, поскольку

$$\overline{W}_s = W_s + \int_0^s \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du,$$

то

$$z_s = \tilde{z}_s + \int_0^s \lambda_u(\xi)\, \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)}\, du. \tag{8.74}$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}y_s z_s = \mathsf{M}\tilde{x}_s z_s = \mathsf{M}\tilde{x}_s \tilde{z}_s + \mathsf{M}\tilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi) \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du =$$

$$= \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \pi_u(D) du + \mathsf{M}\tilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi) \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du, \quad (8.75)$$

где

$$\mathsf{M}\tilde{x}_s \tilde{z}_s = \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) D_u du = \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \pi_u(D) du \quad (8.76)$$

по лемме 5.1.

Аналогично находим, что

$$\mathsf{M}\tilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi) \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du = \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \tilde{x}_s \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du =$$

$$= \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \mathsf{M}(\tilde{x}_s \mid \mathcal{F}_u) \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du. \quad (8.77)$$

Но $\tilde{x}_s = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_s)$ и, значит, при $u \leqslant s \leqslant t$

$$\mathsf{M}(\tilde{x}_s \mid \mathcal{F}_u) = \mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_u),$$

что вместе с (8.77) дает соотношение

$$\mathsf{M}\tilde{x}_s \int_0^s \lambda_u(\xi) \frac{A_u - \pi_u(A)}{B_u(\xi)} du =$$

$$= \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \frac{\mathsf{M}\{\mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_u)(A_u - \pi_u(A)) \mid \mathcal{F}_u^\xi\}}{B_u(\xi)} du. \quad (8.78)$$

Из (8.76) — (8.78) получаем

$$\mathsf{M}y_s z_s = \mathsf{M} \int_0^s \lambda_u(\xi) \left\{ \pi_u(D) + \frac{\mathsf{M}[\mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_u)(A_u - \pi_u(A)) \mid \mathcal{F}_u^\xi]}{B_u(\xi)} \right\} du. \quad (8.79)$$

Сравнивая (8.79) с (8.73), находим, что P-п. н. для почти всех $u \leqslant s$

$$g_u(\xi) = \pi_u(D) + \frac{\mathsf{M}[\mathsf{M}(h_t \mid \mathcal{F}_u)(A_u - \pi_u(A)) \mid \mathcal{F}_u^\xi]}{B_u(\xi)}. \quad (8.80)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что функция $g_u(\xi)$ определяется равенством (8.80) для всех $u \leqslant s$. Вместе с (8.72) это доказывает требуемое представление (8.71).

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает, что

$$\mathsf{M}\int_0^t \left\{\pi_u(D) + \frac{\mathsf{M}\left[\mathsf{M}(h_t \mid \mathscr{F}_u)(A_u - \pi_u(A)) \mid \mathscr{F}_u^\xi\right]}{B_u(\xi)}\right\}^2 du < \infty.$$

2. Рассмотрим представление (8.71) в случае диффузионного процесса (θ, ξ), рассмотренного в § 3.

Пусть t фиксировано и для $s \leqslant t$

$$g(s, \theta, x) = \mathsf{M}\{h(t, \theta_t, \xi_t) \mid \theta_s = \theta, \ \xi_s = x\}.$$

Предположим, что эта функция удовлетворяет условию (8.50) и)

$$\mathfrak{L}g(s, \theta, x) = 0, \tag{8.81}$$

где оператор $\mathfrak{L}$ определен в (8.53).

Предположим также, что

$$\mathsf{M}\int_0^T \left\{(g'_\theta(s, \theta_s, \xi_s))^2 \sum_{i=1}^2 b_i^2(s, \theta_s, \xi_s) + \right.$$
$$\left. + (g'_x(s, \theta_s, \xi_s))^2 B^2(s, \xi_s)\right\} ds < \infty. \tag{8.82}$$

По формуле Ито для $s \leqslant t$

$$g(s, \theta_s, \xi_s) = g(0, \theta_0, \xi_0) + \int_0^s \mathfrak{L} g(u, \theta_u, \xi_u)\, du +$$
$$+ \sum_{i=1}^2 \int_0^s g'_\theta(u, \theta_u, \xi_u)\, b_i(u, \theta_u, \xi_u)\, dW_i(u) +$$
$$+ \int_0^s g'_x(u, \theta_u, \xi_u)\, B(u, \xi_u)\, dW_2(u).$$

Отсюда видно, что в силу предположения (8.81) процесс $Y = (y_s, \mathscr{F}_s)$, $s \leqslant t$, с $y_s = g(s, \theta_s, \xi_s)$ является квадратично интегрируемым мартингалом и

$$\langle y, W_2\rangle_s = \int_0^s \left[g'_\theta(u, \theta_u, \xi_u)\, b_2(u, \theta_u, \xi_u) + g'_x(u, \theta_u, \xi_u)\, B(u, \xi_u)\right] du.$$

Поэтому в силу (8.71) и того, что

$$\mathsf{M}(h(t, \theta_t, \xi_t) \mid \mathscr{F}_s) = \mathsf{M}(h(t, \theta_t, \xi_t) \mid \theta_s, \xi_s) = g(s, \theta_s, \xi_s),$$

получаем

$$\mathsf{M}\{h(t, \theta_t, \xi_t) \mid \mathcal{F}_s^\xi\} = \mathsf{M}\{h(t, \theta_t, \xi_t) \mid \mathcal{F}_0^\xi\} + \\ + \int_0^s \left\{ \pi_u(\mathcal{N}g) + \frac{\pi_u(gA) - \pi_u(g)\,\pi_u(A)}{B(u, \xi_u)} \right\} dW_u, \tag{8.83}$$

где

$$\mathcal{N}g(u, \theta_u, \xi_u) = g'_\theta(u, \theta_u, \xi_u)\, b_2(u, \theta_u, \xi_u) + g'_x(u, \theta_u, \xi_u)\, B(u, \xi_u).$$

§ 6. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными для условной плотности (случай диффузионных марковских процессов)

1. Рассмотрим двумерный диффузионный марковский процесс $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, управляемый уравнениями (8.44) с $B(t, \xi_t) \equiv 1$. Если функция $h = h(x)$, $x \in R^1$, финитна вместе со своими производными $h'(x)$, $h''(x)$ и выполнены предположения (8.45), (8.46), то согласно (8.56) процесс $\pi_t(h) = \mathsf{M}[h(\theta_t) \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ допускает представление

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(\mathfrak{L}h)\, ds + \\ + \int_0^t [\pi_s(\mathcal{N}h) + \pi_s(Ah) - \pi_s(A)\,\pi_s(h)]\, d\overline{W}_s, \tag{8.84}$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ — винеровский процесс с

$$d\overline{W}_t = d\xi_t - \pi_t(A)\, dt,$$

а

$$\mathfrak{L}h(\theta_t) = h'(\theta_t)\, a(t, \theta_t, \xi_t) + \frac{1}{2} h''(\theta_t) \sum_{i=1}^2 b_i(t, \theta_t, \xi_t),$$

$$\mathcal{N}h(\theta_t) = h'(\theta_t)\, b_2(t, \theta_t, \xi_t).$$

Предположим теперь, что условное распределение $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет плотность $\rho_x(t) = \dfrac{d\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi)}{dx}$, являющуюся измеримой функцией от (t, x, ω). Отправляясь от представлений (8.84), найдем уравнения, которым удовлетворяет эта плотность. Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{L}^*\rho_t(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[a(t, x, \xi_t)\, \rho_x(t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{i=1}^2 b_i^2(t, x, \xi_t)\, \rho_x(t)\right],$$

$$\mathcal{N}^*\rho_x(t) = -\frac{\partial}{\partial x}[b_2(t, x, \xi_t)\, \rho_x(t)].$$

Теорема 8.6. *Пусть*

(I) *с вероятностью единица для каждого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *существуют производные*

$$\frac{\partial}{\partial x}[a[t, x, \xi_t)\rho_x(t)], \quad \frac{\partial}{\partial x}[b_2(t, x, \xi_t)\rho_x(t)],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{i=1}^{2} b_i^2(t, x, \xi_t)\rho_x(t)\right],$$

(II) *для любой непрерывной и финитной функции* $h = h(x)$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)\mathfrak{L}^*\rho_x(t)|\,dx\,dt < \infty \tag{8.85}$$

и

$$\mathsf{M}\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)[\mathcal{N}^*\rho_x(t)+\rho_x(t)(A(t, x, \xi_t)-\pi_t(A))]^2\,dx\,dt < \infty. \tag{8.86}$$

Тогда условная плотность $\rho_x(t)$, $x \in R'$, $0 < t \leqslant T$, *удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению* (*с частными производными*)

$$d_t\rho_x(t) = \mathfrak{L}^*\rho_x(t)\,dt +$$
$$+\left\{\mathcal{N}^*\rho_x(t) + \rho_x(t)\left[A(t, x_t, \xi_t) - \int_{-\infty}^{\infty} A(t, y, \xi_t)\rho_y(t)\,dy\right]\right\}\times$$
$$\times\left[d\xi_t - \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(t, y, \xi_t)\rho_y(t)\,dy\right)dt\right]. \tag{8.87}$$

Доказательство. Покажем сначала, что в предположении (8.86) (P-п. н.)

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\{\mathcal{N}^*\rho_x(s) + \rho_x(s)[A(s, x, \xi_s) - \pi_s(A)]\}\,dx\,d\overline{W}_s =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left(\int_0^t \{\mathcal{N}^*\rho_x(s)+\rho_x(s)[A(s, x, \xi_s)-\pi_s(A)]\}\,d\overline{W}_s\right)dx. \tag{8.88}$$

Положим для краткости

$$\alpha_s(x, \xi) = \mathcal{N}^*\rho_x(s) + \rho_x(s)[A(s, x, \xi_s) - \pi_s(A)].$$

Тогда для доказательства (8.88) надо показать, что (P-п. н.)

$$\chi_t(\xi)=\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\alpha_s(x,\ \xi)\,dx\right]d\overline{W}_s-\\ -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left[\int_0^t \alpha_s(x,\ \xi)\,d\overline{W}_s\right]dx=0. \qquad (8.89)$$

Величина $\chi_t(\xi)$ является $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримой, и согласно предположению (8.86) $\mathsf{M}\chi_t(\xi)=0$, $\mathsf{M}\chi_t^2(\xi)<\infty$. Поэтому для доказательства (8.89) достаточно лишь установить, что $\mathsf{M}[\chi_t(\xi)\lambda_t(\xi)]=0$ для любых $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримых величин $\lambda_t(\xi)$ с $|\lambda_t(\xi)|\leqslant 1$.

В силу теоремы 5.18

$$\lambda_t(\xi)=\mathsf{M}\lambda_t(\xi)+\int_0^t g_s(\xi)\,d\overline{W}_s,$$

где процесс $g=(g_s(\xi),\ \mathcal{F}_s^\xi)$, $s\leqslant t$, таков, что $\int_0^t \mathsf{M}g_s^2(\xi)\,ds<\infty$.

Поэтому по теореме Фубини

$$\mathsf{M}\chi_t(\xi)\lambda_t(\xi)=\mathsf{M}\chi_t(\xi)\int_0^t g_s(\xi)\,d\overline{W}_s=\int_0^t \mathsf{M}\left\{g_s(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\alpha_s(x,\xi)\,dx\right\}ds-\\ -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\left\{\int_0^t \mathsf{M}g_s(\xi)\,\alpha_s(x,\ \xi)\,ds\right\}dx=0.$$

Итак, $\chi_t(\xi)=0$ (P-п. н.) для любого t $(0\leqslant t\leqslant T)$, что и доказывает равенство (8.88).

Перейдем непосредственно к выводу уравнения (8.87). Для этого заметим, что

$$\pi_s(Ah)-\pi_s(A)\,\pi_s(h)=\mathsf{M}\{h(\theta_s)[A(s,\ \theta_s,\ \xi_s)-\pi_s(A)]\}.$$

Поэтому согласно (8.84)

$$\pi_t(h)=\pi_0(h)+\int_0^t \pi_s(\mathscr{L}h)\,ds+\\ +\int_0^t \mathsf{M}\{\mathscr{N}h(\theta_s)+h(\theta_s)[A(s,\ \theta_s,\ \xi_s)-\pi_s(A)]\,|\,\mathcal{F}_s^\xi\}\,d\overline{W}_s,$$

и если существует плотность $\rho_x(t)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\rho_x(t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\rho_x(0)\,dx +$$
$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[h'(x)\,a(s,x,\xi_s) + \frac{1}{2}h''(x)\sum_{i=1}^{2} b_i^2(s,x,\xi_s)\right]\rho_x(s)\,dx\,ds +$$
$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [h'(x)\,b_2(s,x,\xi_s) + h(x)\,(A(s,x,\xi_s) - \pi_s(A))]\,\rho_x(s)\,dx\,d\overline{W}_s. \quad (8.90)$$

Интегрируя в (8.90) по частям и меняя порядок интегрирования (что возможно в силу (8.88), (8.85) и теоремы Фубини), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\Big\{\rho_x(t) - \rho_x(0) - \int_0^t \mathfrak{L}^*\rho_x(s)\,ds -$$
$$- \int_0^t [\mathcal{N}^*\rho_x(s) + \rho_x(s)\,(A(s,x,\xi_s) - \pi_s(A))]\,d\overline{W}_s\Big\}\,dx = 0.$$

Отсюда в силу произвольности финитной функции $h(x)$ приходим к искомому уравнению (8.87).

2. Предположения теоремы 8.6 обычно трудно проверяемы. Исключение составляет случай условно-гауссовских процессов (θ, ξ), рассматриваемых далее в главах 10 и 11. Поэтому ниже будет подробно разобран достаточно простой, но тем не менее нетривиальный случай процессов (θ, ξ), для которых условная плотность $\rho_x(t)$ существует и является единственным решением уравнения (8.87).

Будем предполагать, что случайный процесс $(\theta, \xi) = [(\theta_t, \xi_t), \mathcal{F}_t]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет стохастическим дифференциальным уравнениям

$$d\theta_t = a(\theta_t)\,dt + dW_1(t), \quad (8.91)$$
$$d\xi_t = A(\theta_t)\,dt + dW_2(t), \quad (8.92)$$

где случайная величина θ_0 и винеровские процессы $W_i = (W_i(t), \mathcal{F}_t)$, $i = 1, 2$, независимы между собой, $\mathsf{P}(\xi_0 = 0) = 1$, $\mathsf{M}\theta_0^2 < \infty$.

Теорема 8.7. *Пусть*

(I) *функции* $a(x)$, $A(x)$ *равномерно ограничены вместе со своими производными* $a'(x)$, $a''(x)$, $a'''(x)$, $A'(x)$ *и* $A''(x)$ (*константой* K);

(II) $|A''(x)-A''(y)|\leqslant K|x-y|$, $|a'''(x)-a'''(y)|\leqslant K|x-y|$;

(III) *у функции распределения* $F(x)=\mathsf{P}(\theta_0\leqslant x)$ *существует дважды непрерывно дифференцируемая плотность* $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$.

Тогда существует (P-п. н. *для каждого* t, $0\leqslant t\leqslant T$) *плотность*

$$\rho_x(t)=\frac{d\mathsf{P}\left(\theta_t\leqslant x\,|\,\mathcal{F}_t^\xi\right)}{dx},$$

которая является $\mathcal{F}_t^\xi$-*измеримым* (*при каждом* t, $0\leqslant t\leqslant T$) *решением уравнения*

$$d_t\rho_x(t)=\mathfrak{L}^*\rho_x(t)\,dt+$$
$$+\rho_x(t)\left[A(x)-\int_{-\infty}^{\infty}A(y)\,\rho_y(t)\,dy\right]\left[d\xi_t-\left(\int_{-\infty}^{\infty}A(y)\rho_y(t)dy\right)dt\right] \tag{8.93}$$

с $\rho_x(0)=f(x)$ *и* $\mathfrak{L}^*\rho_x(t)=-\dfrac{\partial}{\partial x}[a(x)\,\rho_x(t)]+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[\rho_x(t)]$.

В классе (t, x, ω)-*измеримых дважды непрерывно дифференцируемых по* x *функций* $U_x(t)$, *являющихся* $\mathcal{F}_t^\xi$-*измеримыми при каждом* t, $0\leqslant t\leqslant T$, *и удовлетворяющих условию*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}A(x)\,U_x(t)\,dx\right)^2dt<\infty\right\}=1, \tag{8.94}$$

решение уравнения (8.93) *единственно в том смысле, что если* $U_x^{(1)}(t)$ *и* $U_x^{(2)}(t)$ — *два таких решения, то*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|U_x^{(1)}(t)-U_x^{(2)}(t)|>0\right\}=0,\qquad -\infty<x<\infty. \tag{8.95}$$

3. Для доказательства теоремы 8.7 установим ряд вспомогательных предложений.

Пусть $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}})$ — вероятностное пространство, идентичное $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, на котором заданы случайная величина $\tilde{\theta}_0$ с $\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\theta}_0\leqslant x)=\mathsf{P}(\theta_0\leqslant x)$ и не зависящий от нее винеровский процесс $\tilde{W}=(\tilde{W}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Введем также следующие величины:

$$\tilde{W}_t^y = y + \tilde{W}_t, \ -\infty < y < \infty, \qquad \bar{A}_s(\xi) = \mathsf{M}\left[A(\theta_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right],$$

$$\bar{W}_t = \xi_t - \int_0^t \bar{A}_s(\xi)\, ds, \qquad D(x) = \int_0^x a(y)\, dy$$

и

$$\psi_t(\xi) = \exp\left\{ \int_0^t \bar{A}_s(\xi)\, d\bar{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \bar{A}_s^2(\xi)\, ds \right\}, \tag{8.96}$$

$$\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) = \exp\left\{ \int_0^t A(y + \tilde{W}_s)\, d\bar{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t [a^2(y + \tilde{W}_s) + \right.$$

$$\left. + a^2(y + \tilde{W}_s) - a'(y + \tilde{W}_s) - 2A(y + \tilde{W}_s)\bar{A}_s(\xi)]\, ds \right\}, \tag{8.97}$$

где $\int_0^t A(y + \tilde{W}_s)\, d\bar{W}_s$ определяется для каждого $\tilde{\omega} \in \Omega$ как стохастический интеграл от детерминированной функции $A(y + \tilde{W}_s(\tilde{\omega}))$.

Лемма 8.5. *В условиях теоремы* 8.7 *существует* (P-п. н.) *плотность*

$$\rho_x(t) = \frac{d\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi)}{dx}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

определяемая формулами

$$\rho_x(0) = f(x)$$

и при $0 < t \leqslant T$

$$\rho_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\ \psi_t(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{2t} + D(x) - D(y) \right\} \times$$

$$\times \tilde{\mathsf{M}}(\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t = x - y) f(y)\, dy, \tag{8.98}$$

где $\tilde{\mathsf{M}}$ — *усреднение по мере* $\tilde{\mathsf{P}}$.

Доказательство. Рассмотрим на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathsf{P}})$ процесс $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с дифференциалом

$$d\tilde{\theta}_t = a(\tilde{\theta}_t)\, dt + d\tilde{W}_t. \tag{8.99}$$

Условия теоремы 8.7 гарантируют существование и единственность сильного решения уравнения (8.99) с начальным значением $\tilde{\theta}_0$. Поэтому меры μ_θ и $\mu_{\tilde{\theta}}$, отвечающие процессам θ и $\tilde{\theta}$, совпадают.

Рассмотрим теперь уравнение

$$d\tilde{\theta}_t^y = a(\tilde{\theta}_t^y)\,dt + d\tilde{W}_t, \qquad \tilde{\theta}_0^y = y. \tag{8.100}$$

У этого уравнения также существует единственное сильное решение и $\tilde{\mathsf{P}}$-п.н.

$$\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\theta} \in \Gamma \mid \tilde{\theta}_0 = y) = \tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\theta}^y \in \Gamma), \qquad \Gamma \in \mathscr{B}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\theta} \in \Gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathsf{P}}(\tilde{\theta}^y \in \Gamma)\, f(y)\, dy,$$

что символически будем обозначать

$$d\mu_{\tilde{\theta}} = d\mu_{\tilde{\theta}^y} f(y)\, dy, \tag{8.101}$$

где $\mu_{\tilde{\theta}^y}$ — мера, отвечающая процессу $\tilde{\theta}^y$. Обозначим $\mu_{\tilde{W}^y}$ меру процесса $\tilde{W}^y$; согласно теореме 7.7 $\mu_{\tilde{\theta}^y} \sim \mu_{\tilde{W}^y}$ и

$$\frac{d\mu_{\tilde{\theta}^y}}{d\mu_{\tilde{W}^y}}(t, \tilde{W}^y) = \exp\left\{ \int_0^t a(y + \tilde{W}_s)\, d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(y + \tilde{W}_s)\, ds \right\}. \tag{8.102}$$

Используя формулу Ито, находим, что

$$D(y + \tilde{W}_t) = D(y) + \int_0^t a(y + \tilde{W}_s)\, d\tilde{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^t a'(y + \tilde{W}_s)\, ds.$$

Поэтому представление (8.102) можно переписать в таком виде:

$$\frac{d\mu_{\tilde{\theta}^y}}{d\mu_{\tilde{W}^y}}(t, \tilde{W}^y) = \\ = \exp\left\{ D(y + \tilde{W}_t) - D(y) - \frac{1}{2} \int_0^t [a^2(y + \tilde{W}_s) + a'(y + \tilde{W}_s)]\, ds \right\}. \tag{8.103}$$

Из (8.101) и (8.103) нетрудно вывести, что

$$\frac{d\mu_{\tilde{\theta}}}{d\mu_{\tilde{W}^y} \times dy}(t, \tilde{W}, y) = \\ = f(y) \exp\left\{ D(y + \tilde{W}_t) - D(y) - \frac{1}{2} \int_0^t [a^2(y + \tilde{W}_s) + a'(y + \tilde{W}_s)]\, ds \right\}. \tag{8.104}$$

Используя это представление и формулу Байеса (теорема 7.23), получаем

$$\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{M}\left[\chi_{(\theta_t \leqslant x)} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] =$$

$$= \tilde{\mathsf{M}}\chi_{(\theta_t \leqslant x)} \exp\left\{\int_0^t [A(\tilde{\theta}_s) - \bar{A}_s(\xi)]\, d\bar{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t [A(\tilde{\theta}_s) - \bar{A}_s(\xi)]^2 ds\right\} =$$

$$= \int_{C_T} \chi_{(c_t \leqslant x)} \exp\left\{\int_0^t [A(c_s) - \bar{A}_s(\xi)]\, d\bar{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t [A(c_s) - \bar{A}_s(\xi)]^2 ds\right\} \times$$

$$\times\, d\mu_\theta(c) = \int_{C_T} \chi_{(c_t \leqslant x)} \exp\left\{\int_0^t [A(c_s) - \bar{A}_s(\xi)]\, d\bar{W}_s -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t [A(c_s) - \bar{A}_s(\xi)]^2 ds\right\} \frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\tilde{W}^y} \times dy}(t, c, y)\, d\mu_{\tilde{W}^y} \times dy =$$

$$= \frac{1}{\psi_t(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathsf{M}}\chi_{(y + \tilde{W}_t \leqslant x)} \exp\{D(y + \tilde{W}_t) - D(y)\} \rho_t(y, \tilde{W}, \xi) f(y)\, dy. \quad (8.105)$$

Но

$$\tilde{\mathsf{M}}\chi_{(y + \tilde{W}_t \leqslant x)} \exp\{D(y + \tilde{W}_t) - D(y)\} \rho_t(y, \tilde{W}, \xi) =$$

$$= \tilde{\mathsf{M}}\left\{\chi_{(y + \tilde{W}_t \leqslant x)} \exp[D(y + \tilde{W}_t) - D(y)]\, \tilde{\mathsf{M}}[\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x-y} \exp[D(y+z) - D(y)]\, \tilde{\mathsf{M}}[\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t = z] \exp\left\{-\frac{z^2}{2t}\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(z-y)^2}{2t} + D(z) - D(y)\right] \tilde{\mathsf{M}}[\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t = z - y]\, dz. \quad (8.106)$$

Из теоремы Фубини, (8.105), (8.106) для $t > 0$ получаем

$$\mathsf{P}(\theta_t \leqslant x \mid \mathscr{F}_t^\xi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\; \psi_t(\xi)} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-y)^2}{2t} + D(z) - D(y)\right] \times$$

$$\times\, \tilde{\mathsf{M}}[\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t = z - y] f(y)\, dy\, dz, \quad (8.107)$$

что и доказывает представление (8.98). Формула же $\rho_x(0) = f(x)$ очевидна.

Лемма доказана.

Чтобы сформулировать следующее утверждение, обозначим

$$B_{t,\xi}(x) = a^2(x) + A^2(x) - a'(x) - 2A(x)\bar{A}_t(\xi), \tag{8.108}$$

$$\tilde{\eta}_s = \tilde{W}_s - \frac{s}{t} W_t, \quad s \leqslant t, \tag{8.109}$$

и

$$\bar{\rho}_t(y, x-y, \tilde{\eta}, \xi) = \exp\left\{ \int_0^t A\left(y\frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t}x\right) d\overline{W}_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t B_{s,\xi}\left(y\frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t}x\right) ds \right\}. \tag{8.110}$$

Лемма 8.6. *В предположениях теоремы* 8.7 *для любых* x, y $(-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty)$ $\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.

$$\tilde{\mathsf{M}}[\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) \mid \tilde{W}_t = x - y] = \tilde{\mathsf{M}}\bar{\rho}(y, x-y, \tilde{\eta}, \xi). \tag{8.111}$$

Доказательство. Используя обозначение (8.108), функцию $\rho_t(y, \tilde{W}, \xi)$, определенную в (8.97), можно представить в следующем виде:

$$\rho_t(y, \tilde{W}, \xi) = \exp\left\{ \int_0^t A(y + \tilde{W}_s)\, d\overline{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t B_{s,\xi}(y + \tilde{W}_s)\, ds \right\}. \tag{8.112}$$

Основываясь на теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1), нетрудно показать, что условное (при условии $\tilde{W}_t$) распределение процесса $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_s)$, $s \leqslant t$ с $\tilde{\eta}_s = \tilde{W}_s - \frac{s}{t}\tilde{W}_t$ не зависит от $\tilde{W}_t$ ($\tilde{\mathsf{P}}$-п. н.). Поэтому, если $\Phi_s(\tilde{\eta}, \tilde{W}_t)$ — $\tilde{\mathcal{F}}_s^{\tilde{\eta}, \tilde{W}_t}$-измеримый функционал $\left(\tilde{\mathcal{F}}_s^{\tilde{\eta}, \tilde{W}_t} = \sigma\{\omega\colon \tilde{\eta}_u,\ u \leqslant s;\ \tilde{W}_t\},\ s \leqslant t\right)$ с $\tilde{\mathsf{M}}|\Phi_s(\tilde{\eta}, \tilde{W}_t)| < \infty$, то

$$\tilde{\mathsf{M}}(\Phi_s(\tilde{\eta}, \tilde{W}_t) \mid \tilde{W}_t = x) = \tilde{\mathsf{M}}\Phi_s(\tilde{\eta}, x). \tag{8.113}$$

Подставляя $\tilde{W}_s = \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t}\tilde{W}_t$ в $\rho_t(y, \tilde{W}, \xi)$ и применяя формулу (8.113), из (8.109) и (8.110) получаем требуемое равенство (8.111).

Следствие. *Из* (8.98) *и* (8.111) *следует, что*

$$\rho_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\psi_t(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{2t} + D(x) - D(y) \right\} \times$$

$$\times \tilde{\mathsf{M}}\bar{\rho}_t(y, x-y, \tilde{\eta}, \xi) f(y)\, dy. \tag{8.114}$$

Лемма 8.7. *В предположениях теоремы* 8.7

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathsf{M}\rho_x^2(t) < \infty, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{8.115}$$

Доказательство. Положим $z=(x-y)/\sqrt{t}$. Тогда в силу (8.114)

$$\rho_x(t) = -\frac{\psi_t^{-1}(\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, z, t)\, \tilde{\mathsf{M}}\bar{\rho}_t\left[x-z\sqrt{t},\, z\sqrt{t}, \tilde{\eta}, \xi\right] dz, \tag{8.116}$$

где

$$g(x, z, t) = \exp\left\{-\frac{z^2}{2} + D(x) - D\left(x-z\sqrt{t}\right)\right\} f\left(x-z\sqrt{t}\right).$$

Но $|D(x)| \leqslant \int_0^{|x|} |\alpha(y)|\,dy \leqslant K|x|$. Поэтому для каждого x, $-\infty < x < \infty$,

$$|g(x, z, t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{z^2}{2} + D(x) + K|x| + K|z|\sqrt{T}\right\} \sup_{-\infty\leqslant y\leqslant\infty} f(y) =$$
$$= d(x)\exp\left\{-\frac{z^2}{2} + K|z|\sqrt{T}\right\},$$

где

$$d(x) = \exp\{D(x) + K|x|\} \sup_{-\infty\leqslant y\leqslant\infty} f(y).$$

Далее, из (8.108) и (8.110) находим

$$0 \leqslant \bar{\rho}_t\left[x-z\sqrt{t},\, z\sqrt{t},\, \tilde{\eta},\, \xi\right] \leqslant$$
$$\leqslant K_1 \exp\left\{\int_0^t A\left(x-z\sqrt{t} + \frac{sz}{\sqrt{t}} + \tilde{\eta}_s\right) d\overline{W}_s\right\},$$

где K_1 — некоторая константа. Отсюда в силу неравенства Йенсена, леммы 6.1 и теоремы Фубини получаем

$$\mathsf{M}\left(\tilde{\mathsf{M}}\bar{\rho}_t\left[x-z\sqrt{t},\, z\sqrt{t},\, \tilde{\eta},\, \xi\right]\right)^{2n} \leqslant \mathsf{M}\tilde{\mathsf{M}}\bar{\rho}_t^{2n}\left[x-z\sqrt{t},\, z\sqrt{t},\, \tilde{\eta},\, \xi\right] \leqslant$$
$$\leqslant C_1(n)\,\mathsf{M}\tilde{\mathsf{M}} \exp\left\{2n\int_0^t A\left(x-z\sqrt{t} - \frac{sz}{\sqrt{t}} + \tilde{\eta}_s\right) d\overline{W}_s - \right.$$
$$\left. -\frac{(2n)^2}{2}\int_0^t A^2\left(x-z\sqrt{t} + \frac{sz}{\sqrt{t}} + \tilde{\eta}_s\right) ds\right\} \leqslant C_1(n),$$

где $C_1(n)$ — некоторая константа. Аналогичным образом показывается, что и

$$\mathsf{M}\,\psi_t^{-2n}(\xi) \leqslant C_2(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Используя эти оценки и интегрируемость функции $\exp\left\{-\frac{z^2}{2}+K\sqrt{T}|z|\right\}$, с помощью неравенств Коши — Буняковского из (8.116) получаем требуемый результат (8.115).

Лемма 8.8. *Если выполнены предположения теоремы* 8.7, *то условная плотность* $\rho_x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *дважды дифференцируема по* x *и*

$$\sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}\left[\frac{\partial\rho_x(t)}{\partial x}\right]^2<\infty,\qquad \sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}\left[\frac{\partial^2\rho_x(t)}{\partial x^2}\right]^2<\infty. \tag{8.117}$$

Доказательство. Обозначим для $t>0$

$$\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(x)=\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}+D(x)-D(y)\right\}\bar\rho_t(y,x-y,\tilde\eta,\xi).$$

Тогда в силу (8.114)

$$\rho_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\psi_t(\xi)}\int_{\tilde\Omega\times R^1}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(x)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy, \tag{8.118}$$

и для существования производных $\frac{\partial^i\rho_x(t)}{\partial x^i}$ достаточно установить, что дважды дифференцируемы по x величины

$$V(x)=\int_{\tilde\Omega\times R^1}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(x)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy.$$

Предположим, что при фиксированных z, y, $\tilde\eta$, ξ функция $\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(x)$ дважды дифференцируема по x. Тогда для любых x', x'' $(-\infty<x'<x''<\infty)$

$$V(x'')-V(x')=\int_{\tilde\Omega\times R^1}\left[\int_{x'}^{x''}\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(z)\,dz\right]\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy, \tag{8.119}$$

и если (P-п. н.)

$$\int_{\tilde\Omega\times R^1}\int_{x'}^{x''}\left|\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(z)\right|\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy<\infty, \tag{8.120}$$

то по теореме Фубини в (8.119) возможна смена порядков интегрирования и

$$V(x)=V(0)+\int_0^x\left[\int_{\tilde\Omega\times R^1}\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(z)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy\right]dz.$$

Поэтому, если к тому же функция

$$R(x)=\int_{\tilde\Omega\times R^1}\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{t,y,\tilde\eta,\xi}(x)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde\omega)\,f(y)\,dy$$

непрерывна по x (**P**-п. н. при $0 \leqslant t \leqslant T$), то функция $V(x)$ будет дифференцируемой по x и $\frac{dV(x)}{dx} = R(x)$.

Установим сначала, что функция $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_{t, y, \tilde{\eta}, \xi}(x)$ непрерывна по x. Поскольку функция $D(x)$ непрерывно дифференцируема, то нужно лишь убедиться в том, что непрерывно дифференцируемы (по x) функции

$$\int_0^t A\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) d\overline{W}_s, \qquad \int_0^t B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) ds.$$

Производные

$$\frac{\partial}{\partial x} A\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x} B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right)$$

существуют и равномерно ограничены по предположению теоремы 8.7. Повторяя проведенные выше рассуждения, убедимся в том, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) ds = \\ = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) ds, \qquad (8.121)$$

если только функция $\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) ds$ (как функция от x при фиксированных t, ξ, $\tilde{\eta}$) непрерывна. Но функция $\frac{\partial}{\partial x} B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right)$ равномерно ограничена и непрерывна, что и влечет за собой равенство (8.121) и непрерывность по x функции $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t B_{s, \xi}\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) ds$.

Установим теперь дифференцируемость по x функции $\int_0^t A\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) d\overline{W}_s$ и равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t A\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) d\overline{W}_s = \\ = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} A\left(y \frac{t-s}{t} + \tilde{\eta}_s + \frac{s}{t} x\right) d\overline{W}_s. \qquad (8.122)$$

Заметим, что функция $\lambda(x)=\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x} A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,x\right) d\overline{W}_s$ (при фиксированных t, $\tilde{\eta}$, ξ) непрерывна по x. Действительно, в силу предположений теоремы 8.7

$$\mathsf{M}|\lambda(x')-\lambda(x'')|^2=\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^t\left[\frac{\partial}{\partial x'}A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,x'\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x''}A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,x''\right)\right]d\overline{W}_s\right\}^2\leqslant KT|x'-x''|^2.$$

Поэтому непрерывность $\lambda(x)$ следует из критерия непрерывности Колмогорова (теорема 1.10).

Далее, по теореме Фубини для стохастических интегралов (теорема 5.15) при $-\infty<x'<x''<\infty$

$$\int\limits_{x'}^{x''}\left\{\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial z}A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,z\right)d\overline{W}_s\right\}dz=$$
$$=\int\limits_0^t\left\{\int\limits_{x'}^{x''}\frac{\partial}{\partial z}A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,z\right)dz\right\}d\overline{W}_s=$$
$$=\int\limits_0^t A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,x''\right)d\overline{W}_s-\int\limits_0^t A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\frac{s}{t}\,x'\right)d\overline{W}_s.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $\lambda(x)$ следует, что производная

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t A\left(y\,\frac{t-s}{t}+\tilde{\eta}_s+\frac{s}{t}\,x\right)d\overline{W}_s$$

существует и выполнено равенство (8.122).

Итак, функция $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{t,\,y,\,\tilde{\eta},\,\xi}(x)$ непрерывна по x. А значит, плотность $\rho_x(t)$ дифференцируема по x (для почти всех ω и t, $0\leqslant t\leqslant T$) и справедлива формула

$$\frac{\partial\rho_x(t)}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t\psi_t(\xi)}}\int\limits_{\Omega\times R^1}\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{t,\,y,\,\tilde{\eta},\,\xi}(x)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde{\omega})\,f(y)\,dy. \qquad (8.123)$$

Аналогичным образом устанавливается существование при $t>0$ производной $\frac{\partial^2\rho_x(t)}{\partial x^2}$ и формула

$$\frac{\partial^2\rho_x(t)}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t\psi_t(\xi)}}\int\limits_{\Omega\times R^1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_{t,\,y,\,\tilde{\eta},\,\xi}(x)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\tilde{\omega})\,f(y)\,dy. \qquad (8.124)$$

Проверка неравенств (8.117) производится так же, как в лемме 8.7.

4. Доказательство теоремы 8.7. Справедливость уравнения (8.93) для $\rho_x(t)$ следует из теоремы 8.6 и лемм 8.5—8.8, гарантирующих выполнение условий этой теоремы.

Займемся доказательством единственности решения этого уравнения в классе функций, определенном в условиях теоремы.

Пусть $U_x(t)$, $x \in R^1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — какое-нибудь решение уравнения (8.93) из указанного класса с $U_x(0) = f(x)$ (**P**-п. н.). Положим

$$\mathfrak{z}_t = \exp\left\{\int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(y)\, U_y(s)\, dy\right) d\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(y)\, U_y(s)\, dy\right)^2 ds\right\} \tag{8.125}$$

и

$$Q_x(t) = U_x(t)\, \mathfrak{z}_t. \tag{8.126}$$

По формуле Ито

$$d_t Q_x(t) = \\ = \left\{-\frac{\partial}{\partial x}[a(x)\, U_x(t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[U_x(t)]\right\}\mathfrak{z}_t\, dt + U_x(t)\, \mathfrak{z}_t\, A(x)\, d\xi_t \tag{8.127}$$

или, что то же,

$$d_t Q_x(t) = \left\{-\frac{\partial}{\partial x}[a(x)\, Q_x(t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[Q_x(t)]\right\} dt + Q_x(t)\, A(x)\, d\xi_t, \tag{8.128}$$

где

$$Q_x(0) = U_x(0) = f(x). \tag{8.129}$$

Таким образом, уравнение (8.128) с начальным условием (8.129) имеет сильное (т. е. $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримое при каждом t, $0 < t \leqslant T$) решение $Q_x(t) = U_x(t)\, \mathfrak{z}_t$.

По формуле Ито

$$\mathfrak{z}_t = 1 + \int_0^t \mathfrak{z}_s \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(y)\, U_y(s)\, dy\right) d\xi_s = \\ = 1 + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(y)\, Q_y(s)\, dy\right) d\xi_s, \tag{8.130}$$

и, очевидно, $\mathsf{P}\{0 < \mathfrak{z}_t < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\} = 1$. Поэтому из (8.126) и (8.130) следует, что

$$U_x(t) = \frac{Q_x(t)}{1 + \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(y)\, Q_y(s)\, dy \right) d\xi_s}, \tag{8.131}$$

где $Q_x(t)$ удовлетворяет уравнению (8.128).

Формулы (8.126) и (8.131) задают взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (8.93) и (8.128). Поэтому для доказательства единственности решения уравнения (8.93) достаточно установить единственность решения уравнения (8.128) в классе функций $Q_x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\mathsf{P}\left\{ \int\limits_0^T \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x)\, Q_x(t)\, dx \right)^2 dt < \infty \right\} = 1$$

(см. (8.131)).

Положим

$$\psi_x(t) = \exp\left\{ A(x)\, \xi_t - \frac{1}{2} A^2(x)\, t \right\} \tag{8.132}$$

и

$$R_x(t) = \frac{Q_x(t)}{\psi_x(t)}. \tag{8.133}$$

По формуле Ито из (8.128), (8.132) и (8.133) находим, что

$$d_t R_x(t) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}[a(x)\, Q_x(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[Q_x(t)] \right\} \psi_x^{-1}(t)\, dt. \tag{8.134}$$

Множитель при dt в (8.134) является непрерывной функцией по t, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_x(t)}{\partial t} &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\, Q_x(t)\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[Q_x(t)\right] \right\} \psi_x^{-1}(t) = \\ &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\, R_x(t)\, \psi_x(t)\right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[R_x(t)\, \psi_x(t)\right] \right\} \psi_x^{-1}(t) = \\ &= -a'(x)\, R_x(t) - a(x) \frac{\partial R_x(t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_x(t) - \\ &\quad - a(x)\, R_x(t) \frac{\partial \psi_x(t)}{\partial x} \psi_x^{-1}(t) + \frac{\partial R_x(t)}{\partial x} \frac{\partial \psi_x(t)}{\partial x} \psi_x^{-1}(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} R_x(t) \frac{\partial^2 \psi_x(t)}{\partial x^2} \psi_x^{-1}(t), \end{aligned} \tag{8.135}$$

где

$$\frac{\partial \psi_x(t)}{\partial x}\psi_x^{-1}(t)=A'(x)\left[A(x)t-\xi_t\right],$$

$$\frac{\partial^2 \psi_x(t)}{\partial x^2}\psi_x^{-1}(t)=(A'(x))^2\left[A'(x)t-\xi_t\right]^2+ \qquad (8.136)$$

$$+A''(x)\left[A(x)t-\xi_t\right]+(A'(x))^2.$$

Обозначая

$$\bar a(t,\ x)=-a(x)+A'(x)[A(x)t-\xi_t], \qquad (8.137)$$

$$\bar c(t,\ x)=-a'(x)-a(x)A'(x)[A(x)t-\xi_t]+$$

$$+\frac{1}{2}(A'(x))^2(1+[A(x)t-\xi_t]^2)+A''(x)[A(x)t-\xi_t], \qquad (8.138)$$

из (8.134) — (8.138) получаем для $R_x(t)$ уравнение

$$\frac{\partial R_x(t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_x(t)}{\partial x^2}+\bar a(t,\ x)\frac{\partial R_x(t)}{\partial x}+\bar c(t,\ x)R_x(t) \qquad (8.139)$$

с $R_x(0)=f(x)$.

Коэффициенты $\bar a(t,\ x)$, $\bar c(t,\ x)$ непрерывны (**P**-п. н.) по совокупности переменных и равномерно ограничены. Поэтому из известных результатов теории дифференциальных уравнений с частными производными *) вытекает, что уравнение (8.139) имеет (**P**-п. н.) единственное решение с $R_x(0)=f(x)$ в классе функций $R_x(t)$, удовлетворяющих условию (при каждом ω)

$$R_x(t)\leqslant c_1(\omega)\exp(c_2(\omega)x^2),$$

где $c_i(\omega)$, $i=1,\ 2$, таковы, что

$$\mathbf{P}(0<c_i(\omega)<\infty)=1, \qquad i=1,\ 2.$$

Но $\mathbf{P}(\inf_{t\leqslant T}\psi_x(t)>0)=1$, $-\infty<x<\infty$. Поэтому решение уравнения (8.128) также единственно в указанном классе.

Отсюда вытекает и единственность решения уравнения (8.93) в классе случайных функций $\{U_x(t),\ -\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}A(x)U_x(t)\,dx\right)^2 dt<\infty \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.}). \qquad (8.140)$$

Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что функция $\rho_x(t)$ удовлетворяет условию (8.140), поскольку

$$\int_0^T \mathbf{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}A(x)\rho_x(t)\,dx\right)^2 dt=\int_0^T \mathbf{M}\left[\mathbf{M}\left(A(\theta_t)\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right)\right]^2 dt\leqslant KT.$$

Теорема доказана.

---

*) См. например, в [154] теорему 10 (стр. 63).

ГЛАВА 9

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

§ 1. Уравнения оптимальной нелинейной фильтрации

1. В настоящей главе будет рассматриваться пара случайных процессов $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где ненаблюдаемая компонента θ является марковским процессом с конечным или счетным множеством состояний, а наблюдаемый процесс ξ допускает стохастический дифференциал

$$d\xi_t = A_t(\theta_t, \xi)\, dt + B_t(\xi)\, dW_t, \tag{9.1}$$

где W_t — винеровский процесс.

К такой схеме приводят многие задачи статистики случайных процессов, где ненаблюдаемый процесс принимает дискретные значения, а помеха носит характер «белого» гауссовского шума.

В настоящем параграфе, существенно использующем результаты предшествующей главы, будут выведены и изучены уравнения оптимальной нелинейной фильтрации. Интерполяция и экстраполяция рассматриваются в § 2 и 3.

2. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством непрерывных справа σ-подалгебр $\mathscr{F}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $\theta = (\theta_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — действительный марковский процесс со значениями в счетном множестве $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, непрерывный справа; $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — стандартный винеровский процесс, не зависящий от θ, и ξ_0 — $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина, не зависящая от θ. Будем предполагать, что неупреждающие функционалы

$A_t(\varepsilon, x)$ и $B_t(x)$, входящие в (9.1), удовлетворяют следующим условиям:

$$A_t^2(\varepsilon_t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\, dK(s) + L_2(1 + \varepsilon_t^2 + x_t^2), \tag{9.2}$$

$$0 < C \leqslant B_t^2(x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\, dK(s) + L_2(1 + x_t^2), \tag{9.3}$$

$$| A_t(\varepsilon_t, x) - A_t(\varepsilon_t, y) |^2 + | B_t(x) - B_t(y) |^2 \leqslant$$
$$\leqslant L_1 \int_0^t (x_s - y_s)^2\, dK(s) + L_2(x_t - y_t)^2, \tag{9.4}$$

где C, L_1, L_2 — некоторые константы, $K(s)$ — неубывающая непрерывная справа функция, $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$, $x \in \mathbf{C}_T$, $y \in \mathbf{C}_T$, $\varepsilon_t \in E$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Наряду с условиями (9.2) — (9.4) будет предполагаться также, что

$$\mathsf{M}\xi_0^2 < \infty \tag{9.5}$$

и

$$\mathsf{M} \int_0^t \theta_t^2\, dt < \infty. \tag{9.6}$$

В силу теоремы 4.6 *) предположения (9.2) — (9.6) обеспечивают у уравнения (9.1) существование и единственность (сильного) решения $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t^{\xi_0, \theta, W})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M}\xi_t^2 < \infty$.

Пусть к моменту времени $0 \leqslant t \leqslant T$ известна реализация $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$ наблюдаемого процесса ξ. Рассматриваемая задача фильтрации ненаблюдаемого процесса θ состоит в построении «оценок» величины θ_t по ξ_0^t. Наиболее удобной характеристикой оценивания для θ_t является апостериорная вероятность

$$\pi_\beta(t) = \mathsf{P}(\theta_t = \beta \mid \mathscr{F}_t^\xi), \qquad \beta \in E.$$

Действительно, с помощью $\pi_\beta(t)$, $\beta \in E$, могут быть получены самые разнообразные оценки величины θ_t. В частности, условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \sum_{\beta \in E} \beta \pi_\beta(t) \tag{9.7}$$

---

*) Точнее, в силу очевидного обобщения этой теоремы на случай, когда функционалы $a(t, x)$ в (4.112) заменяются функционалами $A_t(\varepsilon_t, x)$.

является оценкой, оптимальной в среднеквадратичном смысле. Оценка $\beta_t(\xi)$, полученная из условия

$$\max_{\beta} \mathsf{P}(\theta_t=\beta \mid \mathscr{F}_t^{\xi})=\pi_{\beta_t(\xi)}(t), \tag{9.8}$$

является оценкой, обращающей в максимум апостериорную вероятность.

3. Сформулируем ряд вспомогательных утверждений относительно процессов θ и ξ, которые будут использованы при доказательстве основного результата (теорема 9.1).

Обозначим

$$p_{\beta}(t)=\mathsf{P}(\theta_t=\beta),$$
$$p_{\beta\alpha}(t, s)=\mathsf{P}(\theta_t=\beta \mid \theta_s=\alpha), \quad 0 \leqslant s<t \leqslant T, \quad \beta, \alpha \in E.$$

Лемма 9.1. *Пусть существует функция $\lambda_{\alpha\beta}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\alpha, \beta \in E$, такая, что (равномерно по α, β) она непрерывна по t, $|\lambda_{\alpha\beta}(t)| \leqslant K$ и*

$$|p_{\beta\alpha}(t+\Delta, t)-\delta(\beta, \alpha)-\lambda_{\alpha\beta}(t) \cdot \Delta| \leqslant o(\Delta), \tag{9.9}$$

где $\delta(\beta, \alpha)$ — символ Кронекера, а величина $\frac{o(\Delta)}{\Delta} \rightarrow 0$ $(\Delta \rightarrow 0)$ равномерно по α, β, t.

Тогда $p_{\beta\alpha}(t, s)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$p_{\beta\alpha}(t, s)=\delta(\beta, \alpha)+\int_s^t \mathfrak{L}^* p_{\beta\alpha}(u, s)\, du, \tag{9.10}$$

где

$$\mathfrak{L}^* p_{\beta\alpha}(u, s)=\sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(u)\, p_{\gamma\beta}(u, s). \tag{9.11}$$

Вероятности $p_{\beta}(t)$ удовлетворяют уравнению

$$p_{\beta}(t)=p_{\beta}(0)+\int_0^t \mathfrak{L}^* p_{\beta}(u)\, du, \tag{9.12}$$

где

$$\mathfrak{L}^* p_{\beta}(u)=\sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(u)\, p_{\gamma}(u).$$

Доказательство. Пусть $s=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_n^{(n)}=t$ и $\max_j |t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В силу марковости процесса θ

$$p_{\beta\alpha}(t_{j+1}^{(n)}, s)=\mathsf{P}\left(\theta_{t_{j+1}^{(n)}}=\beta \mid \theta_s=\alpha\right)=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\mathsf{P}\left(\theta_{t_{j+1}^{(n)}}=\beta \,\middle|\, \theta_{t_j^{(n)}},\ \theta_s=\alpha\right) \,\middle|\, \theta_s=\alpha\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\mathsf{P}\left(\theta_{t_{j+1}^{(n)}}=\beta \,\middle|\, \theta_{t_j^{(n)}}\right) \,\middle|\, \theta_s=\alpha\right\},$$

или

$$p_{\beta\alpha}\left(t_{j+1}^{(n)},\ s\right)=\sum_{\gamma\in E} p_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right) p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right). \tag{9.13}$$

Обозначим

$$r_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right)=p_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right)-\delta(\beta,\ \gamma)-\lambda_{\gamma\beta}\left(t_j^{(n)}\right)\left(t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}\right).$$

Тогда из (9.13) находим, что

$$\begin{aligned} p_{\beta\alpha}&\left(t_{j+1}^{(n)},\ s\right)= \\ &=\sum_{\gamma\in E}\left[\delta(\beta,\ \gamma)+\lambda_{\gamma\beta}\left(t_j^{(n)}\right)\left(t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}\right)+r_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right)\right] p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right)= \\ &=p_{\beta\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right)+\left(\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}\left(t_j^{(n)}\right) p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right)\right)\left[t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}\right]+ \\ &\qquad+\sum_{\gamma\in E} r_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right) p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Из условий леммы и этого равенства вытекает, что функция $p_{\beta\alpha}(t,\ s)$ непрерывна по t (равномерно по α, β, s). Далее, в силу того же равенства (9.14)

$$\begin{aligned} p_{\beta\alpha}(t,\ s)-\delta(\beta,\ \alpha)&=\sum_{j=0}^{n-1}\left[p_{\beta\alpha}\left(t_{j+1}^{(n)},\ s\right)-p_{\beta\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right)\right]= \\ &=\int_s^t \sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(\varphi_n(u))\, p_{\gamma\alpha}(\varphi_n(u),\ s)\, du+ \\ &\qquad+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\gamma\in E} r_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right) p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right), \end{aligned} \tag{9.15}$$

где $\varphi_n(u)=t_j^{(n)}$, когда $t_j^{(n)}\leqslant u<t_{j+1}^{(n)}$.

Согласно предположениям леммы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\gamma\in E}\left|r_{\beta\gamma}\left(t_{j+1}^{(n)},\ t_j^{(n)}\right)\right| p_{\gamma\alpha}\left(t_j^{(n)},\ s\right)=0,$$

а

$$\sum_{\gamma\in E}\left|\lambda_{\gamma\beta}(\varphi_n(u))\right| p_{\gamma\alpha}(\varphi_n(u),\ s)\leqslant K<\infty.$$

С учетом этого, а также непрерывности $\lambda_{\alpha\beta}(t)$, $p_{\beta\alpha}(t,\ s)$ по t (равномерно по α, β, s) из (9.15) после предельного перехода (при $n\to\infty$) получаем требуемое уравнение (9.10). Уравнение (9.12) легко выводится из (9.10).

Замечание. Величины $\lambda_{\alpha\beta}(t)$ называются *плотностями вероятностей перехода* из α в β в момент времени t.

Лемма 9.2. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1. *Для каждого* $\beta \in E$ *положим*

$$x_t^\beta = \delta(\beta, \theta_t) - \delta(\beta, \theta_0) - \int_0^t \lambda_{\theta_s\beta}(s)\,ds. \tag{9.16}$$

Случайный процесс $X^\beta = (x_t^\beta, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *является квадратично интегрируемым мартингалом с непрерывными справа траекториями.*

Доказательство. Процесс x_t^β, $0 \leqslant t \leqslant T$, ограничен, $|x_t^\beta| \leqslant 2 + KT$, и непрерывен справа в силу непрерывности справа траекторий процесса θ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Покажем, что $X^\beta = (x_t^\beta, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является мартингалом. Пусть $t > s$. Тогда

$$x_t^\beta = x_s^\beta + \left[\delta(\beta, \theta_t) - \delta(\beta, \theta_s) - \int_s^t \lambda_{\theta_u\beta}(u)\,du\right]$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}(x_t^\beta \mid \mathscr{F}_s) = x_s^\beta + \mathsf{M}\left[\delta(\beta, \theta_t) - \delta(\beta, \theta_s) - \int_s^t \lambda_{\theta_u\beta}(u)\,du \mid \mathscr{F}_s\right].$$

В силу марковости процесса $\theta = (\theta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и уравнения (9.10)

$$\mathsf{M}\left[\delta(\beta, \theta_t) - \delta(\beta, \theta_s) - \int_s^t \lambda_{\theta_u\beta}(u)\,du \mid \mathscr{F}_s\right] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\delta(\beta, \theta_t) - \delta(\beta, \theta_s) - \int_s^t \lambda_{\theta_u\beta}(u)\,du \mid \theta_s\right] =$$
$$= p_{\beta\theta_s}(t, s) - \delta(\beta, \theta_s) - \int_s^t \sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(u)\, p_{\gamma\theta_s}(u, s) = 0.$$

Лемма доказана.

4. Теорема 9.1. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1 *и предположения* (9.2)—(9.6). *Тогда апостериорные вероятности* $\pi_\beta(t)$, $\beta \in E$, *удовлетворяют системе уравнений*

$$\pi_\beta(t) = p_\beta(0) + \int_0^t \mathfrak{L}^*\pi_\beta(u)\,du + \int_0^t \pi_\beta(u)\,\frac{A_u(\beta, \xi) - \bar{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\,d\overline{W}_u, \tag{9.17}$$

где

$$\mathfrak{L}^*\pi_\beta(u) = \sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(u)\,\pi_\beta(u), \tag{9.18}$$

$$\bar{A}_u(\xi) = \sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\,\pi_\gamma(u) \tag{9.19}$$

и $\bar{W} = (\bar{W}_t, \mathcal{F}_t)$ — *винеровский процесс с*

$$\bar{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_u - \bar{A}_u(\xi)\,du}{B_u(\xi)}. \tag{9.20}$$

Доказательство. В силу леммы 9.2

$$\delta(\beta, \theta_t) = \delta(\beta, \theta_s) + \int_0^t \lambda_{\theta_u\beta}(u)\,du + x_t^\beta, \tag{9.21}$$

где $X^\beta = (x_t^\beta, \mathcal{F}_t)$ — квадратично интегрируемый мартингал. Поскольку процессы X^β и W независимы, то $\langle x^\beta, W\rangle_t \equiv 0$ (P-п. н.), $0 \leqslant t \leqslant T$.

Предположения (9.2) — (9.6) гарантируют возможность применения (к $h_t = \delta(\beta, \theta_t)$) теоремы 8.1, согласно которой

$$\pi_t^\beta(\delta) = \pi_0^\beta(\delta) + \int_0^t \pi_s^\beta(\lambda)\,ds + \int_0^t \frac{\pi_s^\beta(\delta A) - \pi_s^\beta(\delta)\,\pi_s^\beta(A)}{B_u(\xi)}\,d\bar{W}_u, \tag{9.22}$$

где

$$\pi_t^\beta(\delta) = \mathsf{M}\left[\delta(\beta, \theta_t) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right] = \pi_\beta(t),$$

$$\pi_s^\beta(\lambda) = \mathsf{M}\left[\lambda_{\theta_s\beta}(s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(s)\,\pi_\gamma(s) = \mathfrak{L}^*\pi_\beta(s),$$

$$\pi_s^\beta(\delta A) = \mathsf{M}\left[\delta(\beta, \theta_s)\,A_s(\theta_s, \xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = A_s(\beta, \xi)\,\pi_\beta(s),$$

$$\pi_s^\beta(A) = \mathsf{M}\left[A_s(\theta_s, \xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \bar{A}_s(\xi) = \sum_{\gamma \in E} A_s(\gamma, \xi)\,\pi_\gamma(s).$$

С учетом этих обозначений видим, что (9.22) совпадает с искомым представлением (9.17).

Теорема доказана.

Замечание. Если в (9.1) коэффициенты $A_t(\theta_t, \xi)$ не зависят от θ_t, то $\pi_\beta(t) = p_\beta(t)$ и уравнения (9.17) превращаются в (прямые) уравнения Колмогорова (9.12).

5. Из (9.17) мы видим, что счетномерный процесс $\Pi = \{\pi_\beta(t), \beta \in E\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является решением следующей бесконечной системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$dz_\beta(t,\xi)=$$
$$=\left[\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(t)\,z_\gamma(t,\xi)-z_\beta(t,\xi)\frac{A_t(\beta,\xi)-\sum\limits_{\gamma\in E}A_t(\gamma,\xi)\,z_\gamma(t,\xi)}{B_t^2(\xi)}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{\gamma\in E}A_t(\gamma,\xi)\,z_\gamma(t,\xi)\right]dt+$$
$$+z_\beta(t,\xi)\frac{A_t(\beta,\xi)-\sum\limits_{\gamma\in E}A_t(\gamma,\xi)\,z_\gamma(t,\xi)}{B_t^2(\xi)}\,d\xi_t,\quad \beta\in E,$$

решаемой при условиях $z_\beta(0,\xi)=p_\beta(0)$, $\beta\in E$.

Возникает важный вопрос о единственности решения этой (нелинейной) системы уравнений.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1 *и предположения* (9.2) — (9.6). *Тогда в классе неотрицательных непрерывных процессов* $Z=\{z_\beta(t,\xi),\ \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, *являющихся* $\mathcal{F}_t^\xi$-*измеримыми при каждом* t *и удовлетворяющих условиям*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{\beta\in E}z_\beta(t,\xi)\leqslant C\right\}=1 \tag{9.24}$$

(*с некоторой константой* C),

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T\left(\sum_{\gamma\in E}\frac{|A_t(\gamma,\xi)|\,z_\gamma(t,\xi)}{B_t(\xi)}\right)^2dt<\infty\right\}=1, \tag{9.25}$$

система уравнений (9.23) *имеет единственное решение* (*если* Z *и* Z' — *два решения, то* $\mathsf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|z_\beta(t,\xi)-z'_\beta(t,\xi)|>0\}=0$, $\beta\in E$).

Доказательство. Отметим прежде всего, что апостериорные вероятности $\Pi=\{\pi_\beta(t),\ \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, принадлежат классу процессов, удовлетворяющих условиям (9.24), (9.25). Поэтому из утверждения теоремы следует, что в рассматриваемом классе процесс Π является единственным решением системы (9.23). Заметим также, что предполагаемая непрерывность траекторий компонент процессов Z и условия (9.24), (9.25) обеспечивают существование соответствующих интегралов (по dt и $d\xi_t$) в (9.23).

Пусть $Z=\{z_\beta(t,\xi),\ \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, есть некоторое решение системы (9.23) с $z_\beta(0,\xi)=p_\beta(0)$, $\sum\limits_{\beta\in E}p_\beta(0)=1$. Обозначим

$$
I_Z(t,\xi)=\exp\left\{\int_0^t \frac{\sum\limits_{\gamma\in E}A_s(\gamma,\xi)\,z_\gamma(s,\xi)}{B_s^2(\xi)}\,d\xi_s-\right.
$$
$$
\left.-\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{\sum\limits_{\gamma\in E}A_s(\gamma,\xi)\,z_\gamma(s,\xi)}{B_s(\xi)}\right]^2 ds\right\} \tag{9.26}
$$

и

$$
\mathfrak{z}_\beta(t,\xi)=z_\beta(t,\xi)\,I_Z(t,\xi). \tag{9.27}
$$

(В силу (9.25), (9.2) и (9.3) интегралы в (9.26) определены.)

Из (9.26), (9.27), (9.23) с помощью формулы Ито находим, что

$$
I_Z(t,\xi)=1+\int_0^t I_Z(s,\xi)\frac{\sum\limits_{\gamma\in E}A_s(\gamma,\xi)\,z_\gamma(s,\xi)}{B_s^2(\xi)}\,d\xi_s \tag{9.28}
$$

и

$$
d\mathfrak{z}_\beta(t,\xi)=\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(t)\,\mathfrak{z}_t(t,\xi)\,dt+\mathfrak{z}_\beta(t,\xi)\frac{A_t(\beta,\xi)}{B_t^2(\xi)}\,d\xi_t. \tag{9.29}
$$

Сравнивая (9.27) и (9.28), замечаем, что

$$
I_Z(t,\xi)=1+\int_0^t\frac{\sum\limits_{\gamma\in E}A_s(\gamma,\xi)\,\mathfrak{z}_\gamma(s,\xi)}{B_s^2(\xi)}\,d\xi_s. \tag{9.30}
$$

Поскольку $\mathsf{P}\{0<I_Z(t,\xi)<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T\}=1$, то в силу (9.27) и (9.30)

$$
z_\beta(t,\xi)=\frac{\mathfrak{z}_\beta(t,\xi)}{1+\int\limits_0^t\sum\limits_{\gamma\in E}\frac{A_s(\gamma,\xi)\,\mathfrak{z}_\gamma(s,\xi)}{B_s^2(\xi)}\,d\xi_s}. \tag{9.31}
$$

Если процесс $\mathfrak{z}=\{\mathfrak{z}_\beta(t,\xi),\ \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, является решением системы (9.29), то, применяя к правой части (9.31) формулу Ито, нетрудно убедиться, что процесс $Z=\{z_\beta(t,\xi),\ \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, будет подчиняться системе уравнений (9.23).

Таким образом, формулы (9.27) и (9.31) задают взаимно однозначное соответствие между процессами Z, являющимися решениями системы (9.23), и процессами $\mathfrak{z}$, являющимися решениями системы (9.29).

Пусть

$$\varphi(t)=\exp\left\{-\int_0^t \frac{A_s(\theta_s, \xi)}{B_s^2(\xi)}\,d\xi_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{A_s^2(\theta_s, \xi)}{B_s^2(\xi)}\,ds\right\}. \tag{9.32}$$

Тогда, если процесс Z удовлетворяет условию (9.24), то соответствующий ему процесс $\mathfrak{z}$ подчиняется условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathsf{M}\left(\sum_{\beta\in E} \mathfrak{z}_\beta(t, \xi)\,\varphi(t)\right)<\infty. \tag{9.33}$$

Действительно, в силу (9.24)

$$\mathsf{M}\sum_{\beta\in E}\mathfrak{z}_\beta(t, \xi)\,\varphi(t)=\mathsf{M}I_Z(t,\xi)\,\varphi(t)\cdot\sum_\beta z_\beta(t, \xi)\leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}I_Z(t, \xi)\,\varphi(t)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{\beta\in E} z_\beta(t, \xi)\leqslant C\mathsf{M}I_Z(t, \xi)\,\varphi(t)\leqslant C<\infty,$$

где мы воспользовались тем, что

$$\mathsf{M}I_Z(t, \xi)\,\varphi(t)=$$
$$=\mathsf{M}\exp\left\{\int_0^t \frac{\sum_{\gamma\in E} A_s(\gamma, \xi)\,z_\gamma(s, \xi)-A_s(\theta_s, \xi)}{B_s(\xi)}\,dW_s-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^t\left[\frac{\sum_{\gamma\in E} A_s(\gamma, \xi)\,z_\gamma(s, \xi)-A_s(\theta_s, \xi)}{B_s(\xi)}\right]^2 ds\right\}\leqslant 1 \tag{9.34}$$

(см. лемму 6.1).

В силу указанного выше взаимно однозначного соответствия между процессами Z и $\mathfrak{z}$ для доказательства единственности решения (нелинейной) системы уравнений (9.23) в классе процессов, подчиненных условиям (9.24), (9.25), достаточно установить единственность решения (линейной) системы (9.29) в классе процессов, удовлетворяющих условию (9.33).

Положим

$$\psi_s^t(\beta)=\exp\left\{\int_s^t \lambda_{\beta\beta}(u)\,du+\int_s^t \frac{A_u(\beta, \xi)}{B_u^2(\xi)}\,d\xi_u-\frac{1}{2}\int_s^t \frac{A_u^2(\beta, \xi)}{B_u^2(\xi)}\,du\right\}$$

и покажем, что система (9.29) эквивалентна системе уравнений

$$\mathfrak{z}_\beta(t, \xi)=\psi_0^t(\beta)\,p_\beta(0)+\int_0^t \psi_s^t(\beta)\sum_{\gamma\neq\beta}\lambda_{\gamma\beta}(s)\,\mathfrak{z}_\gamma(s, \xi)\,ds. \tag{9.35}$$

Тот факт, что всякое решение системы (9.35) является в то же время решением системы (9.29), проверяется с помощью формулы Ито.

С другой стороны, перепишем систему (9.29) в следующем виде:

$$d\mathfrak{z}_\beta(t, \xi) = [\lambda_{\beta\beta}(t)\mathfrak{z}_\beta(t, \xi) + \alpha_\beta(t, \xi)]\,dt + \mathfrak{z}_\beta(t, \xi)\frac{A_t(\beta, \xi)}{B_t^2(\xi)}\,d\xi_t, \tag{9.36}$$

где $\alpha_\beta(t, \xi) = \sum\limits_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(t)\mathfrak{z}_\gamma(t, \xi)$.

Уравнение (9.36) является (при заданном процессе $\alpha_\beta(t, \xi)$) линейным относительно $\mathfrak{z}_\beta(t, \xi)$. Согласно замечанию к теореме 4.10 его решение можно представить в виде

$$\mathfrak{z}_\beta(t, \xi) = \psi_0^t(\beta)\, p_\beta(0) + \int_0^t \psi_s^t(\beta)\, \alpha_\beta(s, \xi)\, ds. \tag{9.37}$$

Таким образом, задача свелась к установлению единственности решения системы интегральных уравнений (9.35), особенность которой состоит в том, что в ней *отсутствуют стохастические интегралы* (по $d\xi_s$).

Пусть $\Delta_\beta(t, \xi) = \mathfrak{z}_\beta'(t, \xi) - \mathfrak{z}_\beta''(t, \xi)$ — разность двух решений системы (9.35), удовлетворяющих условию (9.33). Тогда

$$\Delta_\beta(t, \xi) = \int_0^t \psi_s^t(\beta) \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(s)\, \Delta_\gamma(s, \xi)\, ds \tag{9.38}$$

и

$$\varphi(t)\,|\Delta_\beta(t, \xi)| \leqslant \int_0^t \psi_s^t(\beta)\, \varphi(t) \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(s)\, |\Delta_\gamma(s, \xi)|\, ds.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\varphi(t)\,|\Delta_\beta(t, \xi)| \leqslant \int_0^t \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(s)\, \mathsf{M}\left(\psi_s^t(\beta)\, \varphi(t)\, |\Delta_\gamma(s, \xi)|\right) ds.$$

Но

$$\mathsf{M}\left(\psi_s^t(\beta)\, \varphi(t)\, |\Delta_\gamma(s, \xi)|\, \middle|\, \mathcal{F}_s^{\theta, \xi}\right) = \\ = |\Delta_\gamma(s, \xi)|\, \varphi(s)\, \mathsf{M}\left[\psi_s^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \middle| \mathcal{F}_s^{\theta, \xi}\right] \leqslant |\Delta_\gamma(s, \xi)|\, \varphi(s),$$

поскольку

$$\mathsf{M}\left(\psi_s^t(\beta)\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \middle| \mathcal{F}_s^{\theta, \xi}\right) \leqslant 1,$$

что устанавливается так же, как и неравенство (9.34), если учесть, что $\lambda_{\beta\beta}(u) \leqslant 0$.

Следовательно,

$$\mathsf{M}(\varphi(t) | \Delta_\beta(t, \xi) |) \leqslant \int_0^t \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(s) \mathsf{M}(\varphi(s) | \Delta_\gamma(s, \xi) |) ds$$

и

$$\sum_{\beta \in E} \mathsf{M}(\varphi(t) | \Delta_\beta(t, \xi) |) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \sum_{\beta \in E} \sum_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(s) \mathsf{M}(\varphi(s) | \Delta_\gamma(s, \xi) |) ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \sum_{\gamma \in E} \mathsf{M}(\varphi(s) | \Delta_\gamma(s, \xi) |) \sum_{\beta \in E} | \lambda_{\gamma\beta}(s) | ds \leqslant$$
$$\leqslant 2K \int_0^t \sum_{\beta \in E} \mathsf{M}(\varphi(s) | \Delta_\beta(s, \xi) | ds), \tag{9.39}$$

где мы воспользовались тем, что

$$\sum_{\beta \in E} | \lambda_{\gamma\beta}(s) | = \sum_{\beta \neq \gamma} \lambda_{\gamma\beta}(s) + | \lambda_{\gamma\gamma}(s) | = 2 | \lambda_{\gamma\gamma}(s) | \leqslant 2K.$$

Из (9.39) следует, что

$$\sum_{\beta \in E} \mathsf{M}\{\varphi(t) | \Delta_\beta(t, \xi) |\} \leqslant 2K \int_0^t \sum_{\beta \in E} \mathsf{M}\{\varphi(s) | \Delta_\beta(s, \xi) |\} ds.$$

Согласно лемме 4.13 отсюда вытекает, что $\sum_{\beta \in E} \mathsf{M}\{\varphi(t) | \Delta_\beta(t, \xi) |\} = 0$. Но $\mathsf{P}\{\varphi(t) > 0\} = 1$, значит, $\mathsf{P}\{| \Delta_\beta(t, \xi) | > 0\} = 0$.

Поэтому в силу непрерывности процессов $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}''$ и счетности множества E

$$\mathsf{P}\left\{\left| \mathfrak{z}'_\beta(t, \xi) - \mathfrak{z}''_\beta(t, \xi) \right| = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \beta \in E\right\} = 1.$$

Тем самым единственность решения (в классе процессов, удовлетворяющих условию (9.33)) системы уравнений (9.29) установлена. Из единственности решения (9.29), как показано выше, следует и единственность решения системы (9.23) (в классе процессов со свойствами (9.24), (9.25)).

Замечание. Если $A_t(\theta_t, \xi) \equiv A_t(\theta_t, \xi_t)$, $B_t(\xi) \equiv B_t(\xi_t)$, то двумерный процесс (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, является марковским (относительно системы $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$):

$$\mathsf{P}\{\theta_t \in A, \xi_t \in B | \mathcal{F}_s\} = \mathsf{P}\{\theta_t \in A, \xi_t \in B | \theta_s, \xi_s\}. \tag{9.40}$$

Используя теорему 9.2 о единственности решения системы уравнений (9.23), можно показать, что в этом случае (бесконечномерный) процесс $\{\xi_t, \pi_\beta(t), \beta\in E\}$, $0\leqslant t\leqslant T$, является марковским относительно системы $(\mathcal{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$:

$$\mathsf{P}\{\xi_t\in B,\ \pi_\beta(t)\in A_\beta,\ \beta\in E\mid\mathcal{F}_t^\xi\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi_t\in B,\ \pi_\beta(t)\in A_\beta,\ \beta\in E\mid\xi_s,\ \pi_\beta(s),\ \beta\in E\}. \quad (9.41)$$

6. В ряде задач статистики (в частности, в рассматриваемых далее задачах интерполяции) возникает необходимость в знании уравнений, которым удовлетворяют условные вероятности

$$\omega_{\beta\alpha}(t,\ s)=\mathsf{P}(\theta_t=\beta\mid\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_s=\alpha), \quad (9.42)$$

где $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Ясно, что если $p_\alpha(0)=1$, то $\omega_{\beta\alpha}(t,\ 0)=\pi_\beta(t)$, причем $\pi_\alpha(0)=p_\alpha(0)=1$ и $\pi_\beta(0)=0$ при всех $\beta\neq\alpha$.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1 *и предположения* (9.2)—(9.6). *Тогда условные вероятности* $\{\omega_{\beta\alpha}(t,\ s),\ \beta\in E\}$, $s\leqslant t\leqslant T$, *удовлетворяют* (*при заданных* $\alpha\in E$ *и* $s\geqslant 0$) *системе* ($\beta\in E$) *уравнений*

$$\omega_{\beta\alpha}(t,\ s)=\delta(\beta,\ \alpha)+\int_0^t \mathfrak{L}^*\omega_{\beta\alpha}(u,\ s)\,du-$$
$$-\int_s^t \omega_{\beta\alpha}(u,\ s)\frac{A_u(\beta,\ \xi)-\sum\limits_{\gamma\in E}A_u(\gamma,\ \xi)\,\omega_{\gamma\alpha}(u,\ s)}{B_u^2(\xi)}\sum_{\gamma\in E}A_u(\gamma,\ \xi)\,\omega_{\gamma\alpha}(u,\ s)\,du+$$
$$+\int_s^t \omega_{\beta\alpha}(u,\ s)\frac{A_u(\beta,\ \xi)-\sum\limits_{\gamma\in E}A_u(\gamma,\ \xi)\,\omega_{\gamma\alpha}(u,\ s)}{B_u^2(\xi)}\,d\xi_u. \quad (9.43)$$

В классе неотрицательных непрерывных функций $\{\omega_{\beta\alpha}(t,\ s),\ \beta\in E,\ s\leqslant t\leqslant T\}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant t\leqslant T}\sum_{\beta\in E}\omega_{\beta\alpha}(t,\ s)\leqslant C\right\}=1 \quad (9.44)$$

(*с некоторой константой* C),

$$\mathsf{P}\left\{\int_s^T\left(\sum_{\gamma\in E}\frac{|A_u(\gamma,\ \xi)|\,\omega_{\gamma\alpha}(u,\ s)}{B_u(\xi)}\right)^2 du<\infty\right\}=1. \quad (9.45)$$

система (9.43) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть (θ_u^α), $s\leqslant u\leqslant T$, — марковский процесс с теми же самыми переходными вероятностями, что у исходного процесса θ, и удовлетворяющий условию $\theta_s^\alpha = \alpha$. Поэтому, в частности,

$$\mathsf{P}\{\theta_t = \beta \mid \theta_s = \alpha\} = \mathsf{P}\{\theta_t^\alpha = \beta\}, \qquad t \geqslant s. \tag{9.46}$$

Пусть, далее, $\left(\xi_u^{(\alpha,\, \xi_0^s)}\right)$, $0 \leqslant u \leqslant T$, — случайный процесс такой, что

$$\xi_u^{(\alpha,\, \xi_0^s)} = \xi_u, \qquad u \leqslant s, \tag{9.47}$$

и при $u > s$

$$\xi_u^{(\alpha,\, \xi_0^s)} = \xi_s + \int_s^u A_v\left(\theta_v^\alpha, \xi^{(\alpha,\, \xi_0^s)}\right) dv + \int_s^u B_v\left(\xi^{(\alpha,\, \xi_0^s)}\right) dW_v. \tag{9.48}$$

В силу предположений (9.2) — (9.4) уравнение (9.48) имеет единственное сильное решение (см. теорему 4.6 *)) и с вероятностью единица

$$\xi_u^{(\theta_s,\, \xi_0^s)} = \xi_u, \qquad u \leqslant s.$$

Покажем, что P-п. н. **)

$$\mathsf{P}\{\xi_t \leqslant y \mid \theta_s = \alpha, \xi_0^s\} = \mathsf{P}\left\{\xi_t^{(\alpha,\, \xi_0^s)} \leqslant y\right\}. \tag{9.49}$$

Для этого заметим, что для каждого $t \geqslant s$ найдется такой (измеримый) функционал $Q_t(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенный на $\mathbf{C}_{[0,s]} \times \mathbf{E}_{[s,t]} \times \mathbf{C}_{[s,t]}$, где $\mathbf{C}_{[0,s]}$ и $\mathbf{C}_{[s,t]}$ — пространства непрерывных функций на $[0, s]$ и $[s, t]$, а $\mathbf{E}_{[s,t]}$ — пространство непрерывных справа функций, определенных на $[s, t]$, что

$$\xi_t = Q_t\left(\xi_0^s, \theta_s^t, W_s^t\right) \qquad (\text{P-п. н.}). \tag{9.50}$$

В силу отмеченной единственности сильного решения уравнения (9.48) для каждого $t \geqslant s$ (P-п. н.)

$$\xi_t^{(\alpha,\, \xi_0^s)} = Q_t\left(\xi_0^s, (\theta^\alpha)_s^t, W_s^t\right). \tag{9.51}$$

Из (9.49), (9.50), независимости процессов θ и W, марковости процесса θ и (9.46) следует, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\xi_t \leqslant x \mid \theta_s = \alpha, \xi_0^s = x_0^s\} &= \mathsf{P}\{Q_t(\xi_0^s, \theta_s^t, W_s^t) \leqslant x \mid \theta_s = \alpha, \xi_0^s = x_0^s\} = \\ &= \mathsf{P}\{Q_t(x_0^s, \theta_s^t, W_s^t) \leqslant x \mid \theta_s = \alpha, \xi_0^s = x_0^s\} = \\ &= \mathsf{P}\{Q_t(x_0^s, \theta_s^t, W_s^t) \leqslant x \mid \theta_s = \alpha\} = \mathsf{P}\{Q_t(x_0^s, (\theta^\alpha)_s^t, W_s^t) \leqslant x\}.\end{aligned}$$

Вместе с (9.51) это и доказывает (9.49).

---

*) См. также сноску на стр. 379.

**) По поводу используемых здесь и далее обозначений для условных вероятностей см. § 2 гл. 1.

Аналогично показывается, что для любых $s \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t$ и $x_1, \ldots, x_n \in R^1$

$$\mathsf{P}\left\{\theta_t = \beta,\ \xi_{s_1} \leqslant x_1, \ldots, \xi_{s_n} \leqslant x_n \,\middle|\, \theta_s = \alpha,\ \xi_0^s\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{\theta_t^\alpha = \beta,\ \xi_{s_1}^{(\alpha,\ \xi_0^s)} \leqslant x_1, \ldots, \xi_{s_n}^{(\alpha,\ \xi_0^s)} \leqslant x_n\right\}. \quad (9.52)$$

Отсюда нетрудно вывести, что для $s \leqslant t$

$$\omega_{\beta\alpha}(t, s) = \mathsf{P}\left(\theta_t = \beta \mid \mathscr{F}_t^\xi,\ \theta_s = \alpha\right) = \mathsf{P}\left(\theta_t^\alpha = \beta \mid \mathscr{F}_t^{\xi^{(\alpha,\ \xi_0^s)}}\right).$$

Применяя к процессу $\left(\theta_t^\alpha,\ \xi_t^{(\alpha,\ \xi_0^s)}\right)$, $t \geqslant s$ (с учетом очевидных изменений в обозначениях), теорему 9.1, получаем, что $\omega_{\beta\alpha}(t, s)$ удовлетворяют (при фиксированных α и s) системе уравнений (9.43). Единственность непрерывного решения, удовлетворяющего условиям (9.44), (9.45), следует из теоремы 9.2.

§ 2. Прямые и обратные уравнения оптимальной нелинейной интерполяции

1. Пусть $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс, введенный в предыдущем параграфе. Обозначим

$$\pi_\beta(s, t) = \mathsf{P}\left(\theta_s = \beta \mid \mathscr{F}_t^\xi\right), \qquad s \leqslant t. \quad (9.53)$$

Зная апостериорные вероятности $\{\pi_\beta(s, t),\ \beta \in E\}$, можно решать разнообразные задачи интерполяции ненаблюдаемой компоненты по наблюдениям $\xi_0^t = \{\xi_u,\ u \leqslant t\}$, $s \leqslant t$. В настоящем параграфе будут выведены *прямые* (по t при фиксированном s) и *обратные* (по s при фиксированном t) уравнения для $\pi_\beta(s, t)$.

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1 *и предположения* (9.2) — (9.6). *Тогда для всех* s, t $(0 \leqslant s < t \leqslant T)$ *условные вероятности* $\pi_\beta(s, t)$ *удовлетворяют* (*прямым*) *уравнениям* $(\pi_\beta(s, s) = \pi_\beta(s))$

$$d_t\pi_\beta(s, t) = \pi_\beta(s, t) B_t^{-2}(\xi) \sum_{\gamma \in E} A_t(\gamma, \xi)\left[\omega_{\gamma\beta}(t, s) - \pi_\gamma(t)\right] \times \\ \times \left[d\xi_t - \sum_{\gamma \in E} A_t(\gamma, \xi)\pi_\gamma(t)\,dt\right] \quad (9.54)$$

и могут быть представлены в следующем виде:

$$\pi_\beta(s, t) = \pi_\beta(s) \exp\left\{\int_s^t B_s^{-2}(\xi) \sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\left[\omega_{\gamma\beta}(u, s) - \pi_\gamma(u)\right] d\xi_u - \right. \\ - \frac{1}{2}\int_s^t B_s^{-2}(t)\left\{\left[\sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\,\omega_{\gamma\beta}(u, s)\right]^2 - \right. \\ \left.\left. - \left[\sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\,\pi_\gamma(u)\right]^2\right\} du\right\}. \quad (9.55)$$

Доказательство. Поскольку

$$\pi_\beta(s, t) = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right],$$

то по теореме 8.4

$$\pi_\beta(s, t) = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] + \int_s^t [B_u(\xi)]^{-1}\left\{\mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) A_u(\theta_u, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right] - \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right] \mathsf{M}\left[A_u(\theta_u, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right]\right\} d\overline{W}_u, \quad (9.56)$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ — винеровский процесс с

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - \mathsf{M}\left[A_s(\theta_s, \xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] ds}{B_s(\xi)}.$$

Здесь

$$\mathsf{M}\left[A_u(\theta_u, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right] = \sum_\gamma A_u(\gamma, \xi)\, \pi_\gamma(u),$$

$$\mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta) A_u(\theta_u, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \beta)\, \mathsf{M}\left(A_u(\theta_s, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_s\right) \mid \mathcal{F}_u^\xi\right] = \pi_\beta(s, u) \sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\, \omega_{\gamma\beta}(u, s).$$

С учетом этого искомое уравнение (9.54) вытекает из (9.56).

Представление (9.55) следует из (9.54) и формулы Ито.

Замечание. Из (9.54) и (9.55) видим, что в задачах интерполяции при вычислении условных вероятностей $\pi_\beta(s, t)$, $\beta \in E$, требуется решать две вспомогательные задачи фильтрации (для нахождения $\pi_\gamma(u)$ и $\omega_{\gamma\beta}(u, s)$, $u \geqslant s$).

2. Для вывода обратных уравнений интерполяции нам потребуется ряд вспомогательных результатов, связанных с условной вероятностью

$$\rho_{\alpha\beta}(s, t) = \mathsf{P}\left(\theta_s = \alpha \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = \beta\right).$$

Лемма 9.3. *Пусть для заданного* $\beta \in E$ *выполнено любое из двух условий*:

1) $p_\beta(0) > 0$,
2) $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \inf\limits_{\gamma \neq \beta} \lambda_{\gamma\beta}(t) \geqslant \varepsilon_\beta > 0$.

Тогда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathsf{P}\{\pi_\beta(t) > 0\} = 1. \quad (9.57)$$

Доказательство. Из формулы Байеса (7.205) вытекает, что $\pi_\beta(t)$ обращается в нуль (Р-п. н.) одновременно с $p_\beta(t)$. Из (9.12) для $p_\beta(t)$, $T \geqslant t \geqslant s \geqslant 0$, получаем представление

$$p_\beta(t) = \exp\left\{\int_s^t \lambda_{\beta\beta}(u)\,du\right\}\left\{p_\beta(s) + \right.$$
$$\left. + \int_s^t \exp\left[-\int_0^u \lambda_{\beta\beta}(v)\,dv\right]\sum_{\gamma\neq\beta}\lambda_{\gamma\beta}(u)\,p_\gamma(u)\,du\right\}. \quad (9.58)$$

Поскольку $0 \leqslant \lambda_{\gamma\beta}(t) \leqslant K$ при $\gamma \neq \beta$, то из (9.58) вытекает, что для всех $t \geqslant s$

$$p_\beta(t) \geqslant \exp(-K(t-s))\left\{p_\beta(s) + \varepsilon_\beta \int_s^t [1 - p_\beta(u)]\,du\right\}. \quad (9.59)$$

Отсюда ясно, что если $p_\beta(0) > 0$, то $\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T} p_\beta(t) > 0$. Если же $p_\beta(0) = 0$, а $\varepsilon_\beta > 0$, то

$$p_\beta(t) \geqslant \varepsilon_\beta \int_0^t [1 - p_\beta(s)]\,ds. \quad (9.60)$$

Поэтому в силу непрерывности $p_\beta(s)$, $s \geqslant 0$, из (9.60) следует, что $p_\beta(t) > 0$ по крайней мере для достаточно малых положительных t. Этот факт вместе с (9.59) доказывает, что $p_\beta(t) > 0$ для каждого $t > 0$.

Лемма 9.4. *Если* $\mathsf{P}\{\pi_\beta(t) > 0\} = 1$, *то для* $t \geqslant s$

$$\rho_{\alpha\beta}(s, t) = \frac{\omega_{\beta\alpha}(t, s)\,\pi_\alpha(s, t)}{\pi_\beta(t)}. \quad (9.61)$$

Доказательство. Если $t \geqslant s$, то

$$\mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \alpha)\,\delta(\theta_t, \beta)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_t, \beta)\,\mathsf{M}\left(\delta(\theta_s, \alpha)\mid\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t\right)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\delta(\theta_t, \beta)\,\rho_{\alpha\theta_t}(s, t)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] = \rho_{\alpha\beta}(s, t)\,\pi_\beta(t). \quad (9.62)$$

С другой стороны,

$$\mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \alpha)\,\delta(\theta_t, \beta)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \alpha)\,\mathsf{M}\left(\delta(\theta_t, \beta)\mid\mathcal{F}_t^\xi, \theta_s\right)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\delta(\theta_s, \alpha)\,\omega_{\beta\theta_s}(t, s)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right] = \pi_\alpha(s, t)\,\omega_{\beta\alpha}(t, s). \quad (9.63)$$

Сравнивая (9.62) и (9.63) и учитывая, что $\mathsf{P}\{\pi_\beta(t) > 0\} = 1$, получаем искомую формулу (9.61).

Замечание. Формула (9.61) справедлива, если выполнено любое из условий леммы 9.3.

Лемма 9.5. *Пусть* $p_\beta(0)>0$. *Тогда процесс* $\rho_{\alpha\beta}(s,t)$, *где* $\alpha\in E$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, *допускает стохастический дифференциал*

$$d_t\rho_{\alpha\beta}(s,t)=\frac{1}{\pi_\beta(t)}\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(t)\,\pi_\gamma(t)\,[\rho_{\alpha\gamma}(s,t)-\rho_{\alpha\beta}(s,t)]\,dt \tag{9.64}$$

и $\rho_{\alpha\beta}(s,s)=\delta(\alpha,\beta)$.

Доказательство. В силу условия $p_\beta(0)>0$ и леммы 9.3 $\mathsf{P}(\pi_\beta(t)>0)=1$. Поэтому справедлива формула (9.61). Применяя к правой части (9.61) формулу Ито и учитывая, что $\omega_{\beta\alpha}(t,s)$, $\pi_\alpha(s,t)$ и $\pi_\beta(t)$ допускают представления (9.43), (9.54) и (9.17) соответственно, после несложного подсчета приходим к искомой формуле (9.64).

3. Займемся теперь выводом обратных уравнений интерполяции, рассматривая при этом лишь случай конечного множества E.

Теорема 9.5. *Пусть множество* E *конечно и* $p_\alpha(0)>0$ *для всех* $\alpha\in E$. *Тогда условные вероятности* $\pi_\alpha(s,t)=\mathsf{P}(\theta_s=\alpha\mid\mathcal{F}_t^\xi)$, $s<t$, $\alpha\in E$, *удовлетворяют системе уравнений*

$$-\frac{\partial\pi_\alpha(s,t)}{\partial s}=\pi_\alpha(s)\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi_\alpha(s,t)}{\pi_\alpha(s)}\right)-\frac{\pi_\alpha(s,t)}{\pi_\alpha(s)}\,\mathfrak{L}^*\pi_\alpha(s), \tag{9.65}$$

где

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi_\alpha(s,t)}{\pi_\alpha(s)}\right)=\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\alpha\gamma}(s)\,\frac{\pi_\gamma(s,t)}{\pi_\gamma(s)}, \tag{9.66}$$

$$\mathfrak{L}^*\pi_\alpha(s)=\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\alpha}(s)\,\pi_\gamma(s). \tag{9.67}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\pi_\alpha(s,t)=\mathsf{M}\left[\delta(\theta_s,\alpha)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right]=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(\delta(\theta_s,\alpha)\mid\mathcal{F}_t^\xi,\theta_t\right)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\rho_{\alpha\theta_t}(s,t)\mid\mathcal{F}_t^\xi\right]=\sum_{\gamma\in E}\rho_{\alpha\gamma}(s,t)\,\pi_\gamma(t). \tag{9.68}$$

Поэтому, если установить, что

$$-\frac{\partial\rho_{\alpha\gamma}(s,t)}{\partial s}=\pi_\alpha(s)\,\mathfrak{L}\left(\frac{\rho_{\alpha\gamma}(s,t)}{\pi_\alpha(s)}\right)-\frac{\rho_{\alpha\gamma}(s,t)}{\pi_\alpha(s)}\,\mathfrak{L}^*\pi_\alpha(s), \tag{9.69}$$

то (9.65) будет следовать из (9.68).

В силу леммы 9.5 у вероятностей $\rho_{\alpha\beta}(s,t)$ существует производная по t:

$$\frac{\partial\rho_{\alpha\beta}(s,t)}{\partial t}=\frac{1}{\pi_\beta(t)}\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(t)\,\pi_\gamma(t)\,[\rho_{\alpha\gamma}(s,t)-\rho_{\alpha\beta}(s,t)]. \tag{9.70}$$

Пусть $R(s, t) = \| \rho_{\alpha\beta}(s, t) \|$, $\alpha, \beta \in E$. Матрица $R(s, t)$ является фундаментальной: $R(s, s)$ — единичная матрица, и

$$\frac{\partial R(s, t)}{\partial t} = R(s, t)\, C(t, \omega), \tag{9.71}$$

где $C(t, \omega)$ — матрица с элементами

$$c_{\alpha\alpha}(t, \omega) = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}(t)\, \pi_\alpha(t) - \sum\limits_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\alpha}(t)\, \pi_\gamma(t)}{\pi_\alpha(t)},$$

$$c_{\alpha\beta}(t, \omega) = \frac{\lambda_{\alpha\beta}(t)\, \pi_\alpha(t)}{\pi_\beta(t)},$$

являющимися P-п. н. непрерывными функциями, поскольку $\pi_\gamma(t)$, $\lambda_{\gamma\alpha}(t)$ ($\gamma, \alpha \in E$) непрерывны по t, а множество E конечно.

Если $s < u < t$, то в силу свойств фундаментальных матриц

$$R(s, t) = R(s, u)\, R(u, t).$$

Поскольку матрица $R(s, u)$ (P-п. н.) невырождена,

$$R(u, t) = R^{-1}(s, u)\, R(s, t). \tag{9.72}$$

Из (9.71) и очевидного тождества

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(R(s, u)\, R^{-1}(s, u)\right)$$

следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u} R^{-1}(s, u) = -C(u, \omega)\, R^{-1}(s, u).$$

Поэтому

$$-\frac{\partial}{\partial u} R(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} R^{-1}(s, u)\, R(s, t) =$$
$$= C(u, \omega)\, R^{-1}(s, u)\, R(s, t) = C(u, \omega)\, R(u, t)$$

и, следовательно (при $s < t$),

$$-\frac{\partial}{\partial s} R(s, t) = C(s, \omega)\, R(s, t).$$

Покоординатно расписывая эту систему, приходим к системе уравнений (9.69), из которой, как уже отмечалось, вытекают уравнения (9.65).

Замечание. Если в (9.1) коэффициенты $A_t(\theta_t, \xi)$ не зависят от θ_t, то $\rho_{\alpha\beta}(s, t) = \mathsf{P}\left(\theta_s = \alpha \mid \theta_t = \beta, \mathcal{F}_t^\xi\right) = \mathsf{P}\left(\theta_s = \alpha \mid \theta_t = \beta\right) = p_{\alpha\beta}(s, t)$. При этом если множество E конечно и $p_\beta(0) > 0$, $\beta \in E$, то

$$-\frac{\partial p_{\alpha\beta}(s, t)}{\partial s} = p_\alpha(s)\, \mathfrak{L}\left(\frac{p_{\alpha\beta}(s, t)}{p_\alpha(s)}\right) - \frac{p_{\alpha\beta}(s, t)}{p_\alpha(s)}\, \mathfrak{L}^* p_\alpha(s). \tag{9.73}$$

§ 3. Уравнения оптимальной нелинейной экстраполяции

1. Для $s \leqslant t \leqslant T$ обозначим

$$\pi_\beta(t, s) = \mathsf{P}(\theta_t = \beta \mid \mathcal{F}_s^\xi), \qquad \beta \in E.$$

Знание этих вероятностей позволяет решать разнообразные задачи, связанные с прогнозированием значений θ_t по наблюдениям $\xi_0^s = \{\xi_u, u \leqslant s\}$. Так, если $\mathsf{M}\theta_t^2 < \infty$, то $\sum_{\beta \in E} \beta \pi_\beta(t, s)$ является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой θ_t по ξ_0^s.

Для вероятностей $\pi_\beta(t, s)$ можно получать уравнения как по t (при фиксированном s), так и по s (при фиксированном t). Первые из этих уравнений (которые естественно назвать прямыми уравнениями) дают возможность понять, как *ухудшается прогноз* значений θ_t по ξ_0^s, когда t растет. Из уравнений по s (t фиксировано) можно судить о степени *улучшения прогноза* значений θ_t с ростом «числа наблюдений» (т. е. при $s \uparrow t$).

2. Теорема 9.6. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1 *и предположения* (9.2) — (9.6). *Тогда для каждого фиксированного s условные вероятности $\{\pi_\beta(t, s),\ t \geqslant s,\ \beta \in E\}$ удовлетворяют* (*прямым*) *уравнениям*

$$\pi_\beta(t, s) = \pi_\beta(s) + \int_s^t \mathfrak{L}^* \pi_\beta(u, s)\, du, \tag{9.74}$$

где

$$\mathfrak{L}^* \pi_\beta(u, s) = \sum_{\gamma \in E} \lambda_{\gamma\beta}(u)\, \pi_\gamma(u, s).$$

Система уравнений (9.74) *имеет единственное решение* (*в классе неотрицательных непрерывных решений*) $x_\beta(t, s)$ *с* $\sup_{s \leqslant t \leqslant T} \sum_\beta x_\beta(t, s) < \infty$ (P-п. н.).

При фиксированном t условные вероятности $\{\pi_\beta(t, s),\ s \leqslant t,\ \beta \in E\}$ допускают представление

$$\pi_\beta(t, s) = \pi_\beta(t, 0) + \int_0^t B_u^{-2}(\xi) \Big\{ \sum_{\gamma \in E} p_{\beta\gamma}(t, u)\, \pi_\gamma(u) \Big[A_u(\gamma, \xi) - \\ - \sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\, \pi_\gamma(u) \Big] \Big\} \Big[d\xi_u - \sum_{\gamma \in E} A_u(\gamma, \xi)\, \pi_\gamma(u)\, du \Big]. \tag{9.75}$$

Доказательство. Для вывода уравнений (9.74) воспользуемся тем, что при $t \geqslant s$

$$\pi_\beta(t, s) = \mathsf{P}(\theta_t = \beta \mid \mathcal{F}_s^\xi) = \mathsf{M}[\mathsf{P}(\theta_t = \beta \mid \mathcal{F}_t^\xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi] = \\ = \mathsf{M}[\pi_\beta(t) \mid \mathcal{F}_s^\xi] \tag{9.76}$$

и согласно (9.17)

$$\pi_\beta(t)=\pi_\beta(s)+\int_s^t \mathfrak{L}^*\pi_\beta(u)\,du+\int_s^t \pi_\beta(u)\,\frac{A_u(\beta,\xi)-\bar{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\,d\overline{W}_u. \quad (9.77)$$

Тогда, беря от обеих частей (9.77) условное математическое ожидание $\mathsf{M}[\cdot\mid\mathcal{F}_s^\xi]$, получим

$$\pi_\beta(t)=\pi_\beta(s)+\mathsf{M}\left(\int_s^t \mathfrak{L}^*\pi_\beta(u)\,du\mid\mathcal{F}_s^\xi\right)+$$
$$+\mathsf{M}\left(\int_s^t \pi_\beta(u)\,\frac{A_u(\beta,\xi)-\bar{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\,d\overline{W}_u\mid\mathcal{F}_s^\xi\right). \quad (9.78)$$

Но

$$\mathsf{M}\left(\int_s^t \mathfrak{L}^*\pi_\beta(u)\,du\mid\mathcal{F}_s^\xi\right)=\int_s^t\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(u)\,\mathsf{M}\left[\pi_\gamma(u)\mid\mathcal{F}_s^\xi\right]du=$$
$$=\int_s^t\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(u)\,\pi_\gamma(u,\ s)\,du=\int_s^t \mathfrak{L}^*\pi_\beta(u,\ s)\,du. \quad (9.79)$$

Далее, при выводе основной теоремы фильтрации (см. замечание к теореме 8.1) было установлено, что случайный процесс

$$\left(\int_0^t \pi_\beta(u)\,\frac{A_u(\beta,\xi)-\bar{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\,d\overline{W}_u,\ \mathcal{F}_t^\xi\right),\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

является квадратично интегрируемым мартингалом. Следовательно,

$$\mathsf{M}\left(\int_s^t \pi_\beta(u)\,\frac{A_u(\beta,\xi)-\bar{A}_u(\xi)}{B_u(\xi)}\,d\overline{W}_u\mid\mathcal{F}_s^\xi\right)=0\qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

что вместе с (9.78), (9.79) доказывает справедливость уравнений (9.74).

Пусть $x_\beta(t,\ s)$ и $x'_\beta(t,\ s)$ — два решения системы уравнений (9.74). Тогда

$$x_\beta(t,\ s)-x'_\beta(t,\ s)=\int_s^t\sum_{\gamma\in E}\lambda_{\gamma\beta}(u)\left[x_\gamma(u,\ s)-x'_\gamma(u,\ s)\right]du$$

и, следовательно,

$$\sum_{\beta \in E} | x_\beta(t, s) - x'_\beta(t, s) | \leqslant$$
$$\leqslant \int_s^t \sum_{\gamma \in E} \sum_{\beta \in E} | \lambda_{\gamma\beta}(u) || x_\gamma(u, s) - x'_\gamma(u, s) | du.$$

Заметим, что $\sum_{\beta \in E} | \lambda_{\gamma\beta}(u) | = \sum_{\beta \neq \gamma} \lambda_{\gamma\beta}(u) - \lambda_{\gamma\gamma}(u) = -2\lambda_{\gamma\gamma}(u) \leqslant 2K$. Поэтому

$$\sum_{\beta \in E} | x_\beta(t, s) - x'_\beta(t, s) | \leqslant 2K \int_s^t \sum_{\beta \in E} | x_\beta(u, s) - x'_\beta(u, s) | du,$$

и по лемме 4.13

$$\sum_{\beta \in E} | x_\beta(t, s) - x'_\beta(t, s) | = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Этим доказана единственность решений прямой системы уравнений (9.74).

Установим теперь представления (9.75).

Рассмотрим для этого случайный процесс $Y = (y_s, \mathscr{F}_s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, с $y_s = p_{\beta\theta_s}(t, s)$. В силу марковости процесса $\theta = (\theta_s, \mathscr{F}_s)$

$$\mathsf{M}(y_s | \mathscr{F}_u) = \mathsf{M}[p_{\beta\theta_s}(t, s) | \mathscr{F}_u] = \mathsf{M}[p_{\beta\theta_s}(t, s) | \theta_u] =$$
$$= \sum_{\gamma \in E} p_{\beta\gamma}(t, s) p_{\gamma\theta_u}(s, u) = p_{\beta\theta_u}(t, u) = y_u \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \ u \geqslant s.$$

Поэтому процесс $Y = (y_s, \mathscr{F}_s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, является квадратично интегрируемым мартингалом.

Поскольку при $t \geqslant s$

$$\pi_\beta(t, s) = \mathsf{M}[\delta(\theta_t, \beta) | \mathscr{F}_s^\xi] = \mathsf{M}[\mathsf{M}(\delta(\theta_t, \beta) | \mathscr{F}_s) | \mathscr{F}_s^\xi] =$$
$$= \mathsf{M}[\mathsf{M}(\delta(\theta_t, \beta) | \theta_s) | \mathscr{F}_s^\xi] = \mathsf{M}(p_{\beta\theta_s}(t, s) | \mathscr{F}_s^\xi) = \mathsf{M}[y_s | \mathscr{F}_s^\xi],$$

то по теореме 8.5

$$\pi_\beta(t, s) = \pi_\beta(t, 0) + \int_0^s \alpha_u(\xi) d\overline{W}_u,$$

где

$$\alpha_u(\xi) = B_u^{-1}(\xi) \left[\mathsf{M}\left(p_{\beta\theta_u}(t, u) A_u(\theta_u, \xi) | \mathscr{F}_u^\xi\right) - \right.$$
$$\left. - \mathsf{M}\left(p_{\beta\theta_u}(t, u) | \mathscr{F}_u^\xi\right) \mathsf{M}(A_u(\theta_u, \xi) | \mathscr{F}_u^\xi)\right].$$

Теорема доказана.

§ 4. Примеры

Пример 1. Пусть $\theta = \theta(\omega)$ — случайная величина, принимающая два значения β и α с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Предположим, что наблюдению подлежит случайный процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, с

$$d\xi_t = \theta\, dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0.$$

Тогда апостериорная вероятность $\pi(t) = \mathsf{P}\{\theta = \beta \mid \mathcal{F}_t^\xi\}$ удовлетворяет согласно (9.17) уравнению

$$d\pi(t) = (\beta - \alpha)\pi(t)(1 - \pi(t))[d\xi_t - (\alpha + \pi(t)(\beta - \alpha))\,dt],$$
$$\pi(0) = p. \tag{9.80}$$

В частности, если $\beta = 1$, $\alpha = 0$, то

$$d\pi(t) = \pi(t)(1 - \pi(t))[d\xi_t - \pi(t)\,dt] \tag{9.81}$$

с $\pi(0) = p$.

Если $\varphi(t) = \frac{d\mu_1}{d\mu_0}(t, \xi)$ — плотность Радона—Никодима меры μ_1, отвечающей процессу ξ с $\theta = 1$ по мере μ_0, соответствующей процессу ξ при $\theta = 0$, то из формулы Байеса следует, что при $p < 1$

$$\pi(t) = \frac{p}{1-p}\varphi(t) \Big/ \left(1 + \frac{p}{1-p}\varphi(t)\right). \tag{9.82}$$

В рассматриваемом случае «отношение правдоподобия» (см. теорему 7.7) $\varphi(t) = \exp\left\{\xi_t - \frac{t}{2}\right\}$ и, следовательно,

$$d\varphi(t) = \varphi(t)\, d\xi_t. \tag{9.83}$$

Представление (9.81) можно было бы также вывести из (9.82) и (9.83). И наоборот, (9.83) легко следует из (9.81) и (9.82).

Отметим, что апостериорная вероятность $\pi(t)$ (так же как и $\varphi(t)$) является достаточной статистикой в задаче различения двух простых гипотез *) H_0: $\theta = 0$ и H_1: $\theta = 1$.

Пример 2. Пусть θ_t, $t \geqslant 0$, — марковский процесс, принимающий два значения 0 и 1 с $\mathsf{P}(\theta_0 = 1) = p$, $\mathsf{P}(\theta_0 = 0) = 1 - p$ и единственным переходом из 0 в 1:

$$\lambda_{00} = -\lambda, \qquad \lambda_{01} = \lambda, \qquad \lambda_{10} = 0, \qquad \lambda_{11} = 0.$$

Пусть наблюдается случайный процесс

$$\xi_t = \int_0^t \theta_s\, ds + W_t$$

*) Подробнее см., например, [169], гл. 4.

(к такой схеме приводится так называемая задача о «разладке», [169], состоящая в скорейшем обнаружении момента θ изменения коэффициента сноса у наблюдаемого процесса в предположении, что

$$\mathsf{P}\{\theta \geqslant t \mid \theta > 0\} = e^{-\lambda t}, \qquad \mathsf{P}(\theta = 0) = p.$$

В рассматриваемом случае апостериорная вероятность

$$\pi(t) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \mathscr{F}_t^\xi) \qquad \left(= \mathsf{P}\{\theta \leqslant t \mid \mathscr{F}_t^\xi\}\right)$$

удовлетворяет (согласно (9.17)) уравнению

$$d\pi(t) = \lambda(1 - \pi(t))\,dt + \pi(t)(1 - \pi(t))(d\xi_t - \pi(t)\,dt) \tag{9.84}$$

с $\pi(0) = p$.

Заметим, что $\pi(t) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$. Поэтому $\pi(t)$ является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой значений θ_t по наблюдениям $\xi_0^t = \{\xi_s,\ s \leqslant t\}$.

Пример 3. Пусть θ_t, $t \geqslant 0$, — марковский процесс с двумя состояниями 0 и 1.

Предположим, что $\mathsf{P}(\theta_0 = 0) = \mathsf{P}(\theta_0 = 1) = \frac{1}{2}$, плотности вероятностей перехода $\lambda_{\alpha\beta}(t)$ не зависят от t и

$$\lambda_{00} = -\lambda, \qquad \lambda_{01} = \lambda, \qquad \lambda_{10} = \lambda, \qquad \lambda_{11} = -\lambda.$$

(Процесс θ_t, $t \geqslant 0$, называется «телеграфным сигналом».)

Пусть наблюдаемый процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, допускает дифференциал

$$d\xi_t = \theta_t\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \tag{9.85}$$

Апостериорная вероятность $\pi(t) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \mathscr{F}_t^\xi)$, являющаяся в данном случае оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой значений θ_t, удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\pi(t) = \lambda(1 - 2\pi(t))\,dt + \pi(t)(1 - \pi(t))(d\xi_t - \pi(t)\,dt) \tag{9.86}$$

с $\pi(0) = \frac{1}{2}$.

Аналогично, $\omega_{11}(t, s) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \theta_s = 1, \mathscr{F}_t^\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_{11}(t, s) = 1 + \lambda \int_s^t [1 - 2\omega_{11}(u, s)]\,du + \\ + \int_s^t \omega_{11}(u, s)[1 - \omega_{11}(u, s)][d\xi_u - \omega_{11}(u, s)\,du]. \tag{9.87}$$

Обозначим для $s \leqslant t$ $\pi_1(s, t) = \mathsf{P}(\theta_s = 1 \mid \mathscr{F}_t^\xi)$. Тогда из (9.55) видно, что $\pi_1(s, t)$ является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой θ_s по ξ_0^t, $s \leqslant t$:

$$\pi_1(s, t) = \pi_1(s) \exp\left\{\int_s^t [\omega_{11}(u, s) - \pi(u)]\, d\xi_u - \frac{1}{2}\int_s^t \left[\omega_{11}^2(u, s) - \pi^2(u)\right] du\right\}.$$

Пусть теперь для $t \geqslant s$ $\pi_1(t, s) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \mathscr{F}_s^\xi)$. Тогда согласно (9.74)

$$\pi_1(t, s) = \pi(s) + \lambda \int_s^t [1 - 2\pi_1(u, s)]\, du.$$

Отсюда находим

$$\pi_1(t, s) = \pi(s)\, e^{-2\lambda(t-s)} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda(t-s)}\right). \tag{9.88}$$

В силу (9.75)

$$\pi_1(t, s) = \pi_1(t, 0) + \int_0^s [p_{11}(t, u) - p_{10}(t, u)]\, \pi(u)(1 - \pi(u))\, [d\xi_u - \pi(u)\, du].$$

Нетрудно найти из (9.12), что

$$p_{11}(t, u) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda(t-u)}\right), \qquad p_{10}(t, u) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda(t-u)}\right).$$

Поэтому

$$\pi_1(t, s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^s \pi(u)(1 - \pi(u))\, e^{-2\lambda(t-u)}\, [d\xi_u - \pi(u)\, du]. \tag{9.89}$$

Величина $\pi_1(t, s)$ является экстраполяционной оценкой θ_t по ξ_0^s, $s \leqslant t$.

ГЛАВА 10

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 1. Метод Калмана—Бьюси

1. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с выделенным на нем семейством σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$, рассмотрим двумерный гауссовский случайный процесс (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющий стохастическим дифференциальным уравнениям

$$d\theta_t = a(t)\,\theta_t\,dt + b(t)\,dW_1(t), \tag{10.1}$$

$$d\xi_t = A(t)\,\theta_t\,dt + B(t)\,dW_2(t), \tag{10.2}$$

где $W_1 = (W_1(t), \mathcal{F}_t)$ и $W_2 = (W_2(t), \mathcal{F}_t)$ — два независимых винеровских процесса и θ_0, ξ_0 $\mathcal{F}_0$-измеримы.

Будем предполагать, что измеримые функции $a(t)$, $b(t)$, $A(t)$, $B(t)$ таковы, что

$$\int_0^T |a(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^T b^2(t)\,dt < \infty, \tag{10.3}$$

$$\int_0^T |A(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^T B^2(t)\,dt < \infty. \tag{10.4}$$

Из теоремы 4.10 следует, что линейное уравнение (10.1) имеет, и притом единственное, непрерывное решение, задаваемое формулой

$$\theta_t = \exp\left[\int_0^t a(u)\,du\right]\left[\theta_0 + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s a(u)\,du\right\} b(s)\,dW_1(s)\right]. \tag{10.5}$$

Задача *оптимальной линейной нестационарной фильтрации* (θ_t по ξ_0^t), рассмотренная Калманом и Бьюси, состоит в следующем. Пусть процесс θ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, недоступен наблюдению, а наблюдать можно лишь значения ξ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, несущие в себе неполную $\left(\text{в силу наличия в (10.2) множителя } A(t) \text{ и помехи } \int_0^t B(s)\,dW_2(s)\right)$ информацию о значениях θ_t. Требуется в каждый момент времени t оценивать (фильтровать) «оптимальным» образом значения θ_t по реализации $\xi_0^t = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Если под оптимальным понимать оценивание, наилучшее в среднеквадратическом смысле, то оптимальная (в момент времени t) оценка для θ_t по $\xi_0^t = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$ совпадает с условным математическим ожиданием *)

$$m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) \tag{10.6}$$

(в обозначениях гл. 8 $m_t = \pi_t(\theta)$). Ошибку оценивания (фильтрации) обозначим

$$\gamma_t = \mathsf{M}\,(\theta_t - m_t)^2. \tag{10.7}$$

Метод, примененный Калманом и Бьюси для нахождения m_t и γ_t, позволил им получить для этих величин *замкнутую* систему рекуррентных уравнений (см. (10.10) — (10.11)), что оказалось весьма удобным при практической реализации оптимального «фильтра».

Рассмотренный Калманом и Бьюси процесс (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, является гауссовским. Как следствие этого оптимальная оценка $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$ оказывается *линейной* (см. далее лемму 10.1). В следующей главе дается существенное обобщение схемы Калмана — Бьюси. Там будет показано, что в так называемом условно-гауссовском случае для $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathscr{F}_t^\xi\right]$ также можно получить замкнутую систему уравнений (см. (12.29), (12.30)), хотя оценка m_t будет уже, вообще говоря, *нелинейной*.

В случае (10.1), (10.2) уравнения для m_t и γ_t могут быть легко выведены из общих уравнений фильтрации, полученных в гл. 8. Это будет проделано далее в § 2 и 3.

В п. 2—4 настоящего параграфа будет изложен (с некоторыми модификациями и уточнениями) тот вывод уравнений фильтрации для m_t и γ_t, который был первоначально предложен Калманом и Бьюси. Как уже отмечалось во введении, в основе этого вывода лежит представление (10.24) (в случае $m_0 = 0$). В п. 5 будет дан иной (более простой) вывод этих же

*) Всюду далее будут рассматриваться только измеримые модификации условных математических ожиданий.

уравнений, использующий то обстоятельство, что m_t можно представить в виде (10.52), где $\overline{W}$ — обновляющий процесс.

2. Теорема 10.1. *Пусть* (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, — *двумерный гауссовский процесс, управляемый системой уравнений* (10.1), (10.2). *Пусть выполнены условия* (10.3), (10.4) *и*

$$\int_0^T A^2(t)\, dt < \infty, \tag{10.8}$$

$$B^2(t) \geqslant C > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10.9}$$

Тогда условное математическое ожидание $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ *и среднеквадратическая ошибка фильтрации* $\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$dm_t = a(t)\, m_t\, dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)} (d\xi_t - A(t)\, m_t\, dt), \tag{10.10}$$

$$\dot{\gamma}_t = 2a(t)\, \gamma_t - \frac{A^2(t)\, \gamma_t^2}{B^2(t)} + b^2(t) \tag{10.11}$$

с $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0)$; $\gamma_0 = \mathsf{M}(\theta_0 - m_0)^2$.

Система уравнений (10.10), (10.11) *имеет единственное непрерывное решение* (*для* γ_t — *в классе неотрицательных функций*).

3. Доказательству предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 10.1. *Пусть* $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *гауссовский случайный процесс с*

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \alpha_s\, ds + \int_0^t B(s)\, dW_s, \quad B^2(s) \geqslant C > 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \tag{10.12}$$

где винеровский процесс $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ *не зависит от гауссовского процесса* $\alpha = (\alpha_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *с* $\mathsf{M}(\alpha_t \mid \xi_0) \equiv 0$ и

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T \alpha_s^2\, ds < \infty \right) = 1. \tag{10.13}$$

Тогда, если случайная величина $\eta = \eta(\omega)$ *и процесс* $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *образуют гауссовскую систему, то для каждого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *найдется функция* $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, *с*

$$\int_0^t G^2(t, s)\, ds < \infty \tag{10.14}$$

такая, что (P-п. н)

$$\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \mathsf{M}(\eta \mid \xi_0) + \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s. \tag{10.15}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия (10.13) вытекает, что $\int_0^T \mathsf{M}\alpha_t^2\, dt < \infty$ (лемма 7.2). Пусть $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{2^n}^{(n)} = t$ — двоично-рациональное разбиение отрезка $[0, t]$, $t_k^{(n)} = \frac{k}{2^n} t$. Обозначим

$$\mathcal{F}_{t,n}^\xi = \sigma\left\{\omega:\ \xi_{t_0^{(n)}}, \ldots, \xi_{t_{2^n}^{(n)}}\right\} = \\ = \sigma\left\{\omega:\ \xi_{t_0^{(n)}},\ \xi_{t_1^{(n)}} - \xi_{t_0^{(n)}}, \ldots, \xi_{t_{2^n}^{(n)}} - \xi_{t_{2^n-1}^{(n)}}\right\}.$$

Тогда, поскольку $\mathcal{F}_{t,n}^\xi \uparrow \mathcal{F}_t^\xi$, то по теореме 1.5 с вероятностью 1

$$\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_{t,n}^\xi) \to \mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_t^\xi). \tag{10.16}$$

Последовательность случайных величин $\{(\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_{t,n}^\xi))^2, n = 1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируема. Поэтому из (10.16) следует, что

$$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_{t,n}^\xi) = \mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_t^\xi). \tag{10.17}$$

По теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (P-п. н.)

$$\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_{t,n}^\xi) = \mathsf{M}(\eta \mid \xi_0) + \sum_{j=0}^{2^n-1} G_n(t, t_j^{(n)}) \left[\xi_{t_{j+1}^{(n)}} - \xi_{t_j^{(n)}}\right] \tag{10.18}$$

с некоторой (неслучайной) функцией $G_n(t, t_j^{(n)})$, $0 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}$. Обозначим

$$G_n(t, s) = G_n(t, t_j^{(n)}), \qquad t_j^{(n)} \leqslant s < t_{j+1}^{(n)}.$$

Тогда равенство (10.18) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathsf{M}(\eta \mid \mathcal{F}_{t,n}^\xi) = \mathsf{M}(\eta \mid \xi_0) + \int_0^t G_n(t, s)\, d\xi_s. \tag{10.19}$$

Из (10.19) и независимости процессов α и W следует, что

$$\mathsf{M}[\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathcal{F}_{t,n}^{\xi})-\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathcal{F}_{t,m}^{\xi})]^2=\mathsf{M}\left\{\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]\,d\xi_s\right\}^2=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]\,\alpha_s\,ds\right\}^2+$$
$$+\mathsf{M}\left\{\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]\,B(s)\,dW_s\right\}^2=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]\,\alpha_s\,ds\right\}^2+$$
$$+\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]^2 B^2(s)\,ds. \qquad (10.20)$$

Но в силу (10.17) $\lim\limits_{n,m\to\infty}\mathsf{M}[\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathcal{F}_{t,n}^{\xi})-\mathsf{M}(\eta\,|\,\mathcal{F}_{t,m}^{\xi})]^2=0$. Поэтому согласно (10.20) и неравенству $B^2(s)\geqslant C>0$, $0\leqslant s\leqslant T$,

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^t [G_n(t,s)-G_m(t,s)]^2\,ds=0.$$

Иначе говоря, последовательность функций $\{G_n(t,s),\ n=1,2,\ldots\}$ является фундаментальной в $L_2[0,t]$. В силу полноты этого пространства существует (при данном t) измеримая по s, $0\leqslant s\leqslant t$, функция $G(t,s)\in L_2[0,t]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t [G(t,s)-G_n(t,s)]^2\,ds=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t [G(t,s)-G_n(t,s)]^2 B^2(s)\,ds=0 \qquad (10.21)$$

Поскольку же $\mathsf{M}\int_0^t \alpha_t^2\,ds<\infty$, то из (10.21) вытекает, что и

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\left\{\int_0^t [G_n(t,s)-G(t,s)]\,\alpha_s\,ds\right\}^2=0.$$

Следовательно,

$$\lim_n \int_0^t G_n(t, s)\,d\xi_s = \int_0^t G(t, s)\,d\xi_s,$$

что вместе с (10.17), (10.19) доказывает представление (10.15).

Следствие 1. *Пусть $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс и $\eta = \eta(\omega)$ — (гауссовская) случайная величина такая, что (η, W) образует гауссовскую систему. Тогда* **P**-п. н. *для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,*

$$\mathsf{M}(\eta \mid \mathscr{F}_t^W) = \mathsf{M}\eta + \int_0^t G(t, s)\,dW_s, \tag{10.22}$$

где $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, — детерминированная функция с $\int_0^t G^2(t, s)\,ds < \infty$ (ср. с (5.160)). *В частности, если случайная величина η $\mathscr{F}_t^W$-измерима, то*

$$\eta = \mathsf{M}\eta + \int_0^t G(t, s)\,dW_s.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1, $m_0 = 0$. *Тогда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, существует функция $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, такая, что*

$$\begin{gathered}\int_0^t G^2(t, s)\,ds < \infty, \quad \int_0^t G^2(t, s)\,B^2(s)\,ds < \infty,\\ \int_0^t\int_0^t G(t, u)\,G(t, v)\,A(u)\,A(v)\,\mathsf{M}(\theta_u, \theta_v)\,du\,dv < \infty,\end{gathered} \tag{10.23}$$

и для $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ справедливо представление

$$m_t = \int_0^t G(t, s)\,d\xi_s. \tag{10.24}$$

Из леммы 10.3 будет вытекать, что у функции $G(t, s)$, участвующей в представлении (10.24.), существует модификация, измеримая по паре переменных.

Лемма 10.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 10.1 *и* $m_0 = 0$ (**P**-п. н.). *Тогда для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, функция $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, удовлетворяет интегральному уравнению*

Винера — Хопфа: при почти всех u, $0 \leqslant u \leqslant t$,

$$K(t, u) A(u) = \int_0^t G(t, s) A(s) K(s, u) A(u)\, ds + G(t, u) B^2(u), \tag{10.25}$$

где $K(t, u) = \mathsf{M}\theta_t\theta_u$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что из предположения $m_0 = 0$ (P-п. н.) следует, что $\mathsf{M}\theta_0 = \mathsf{M}m_0 = 0$, и в силу (10.5) $\mathsf{M}\theta_t \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Далее, интеграл $\int_0^t G(t, s) A(s) K(s, u) ds$ существует и конечен, поскольку $\int_0^t G^2(t, s)\, ds < \infty$, $\int_0^T A^2(s)\, ds < \infty$, а $K(s, u)$ ограничена, как непрерывная (по паре переменных) функция, допускающая согласно (10.5) представление

$$K(s, u) = \exp\left[\int_0^s a(z)\, dz + \int_0^u a(z)\, dz\right]\left[\mathsf{M}\theta_0^2 + \int_0^{s \wedge u} \exp\left(-2\int_0^z a(y)\, dy\right) b^2(z)\, dz\right], \tag{10.26}$$

где $s \wedge u = \min(s, u)$.

Перейдем теперь к выводу уравнения (10.25). Пусть $t \in [0, T]$ и $f(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, — ограниченная измеримая (по s) функция. Рассмотрим интеграл $I(t) = \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s$. Эта случайная величина $\mathcal{F}_t^\xi$-измерима, и, как нетрудно проверить,

$$\mathsf{M}\left[\int_0^t f(t, s)\, d\xi_s\right]^2 < \infty.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}(\theta_t - m_t) \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s = 0,$$

т. е.

$$\mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s = \mathsf{M}m_t \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s. \tag{10.27}$$

Поскольку случайные величины θ_t и $\int_0^t f(t, s) B(s)\, dW_2(s)$ независимы, то

$$\mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s = \mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s) A(s) \theta_s\, ds +$$
$$+ \mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s) B(s)\, dW_2(s) = \mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s) A(s) \theta_s\, ds =$$
$$= \int_0^t f(t, s) A(s) \mathsf{M}\theta_t \theta_s\, ds = \int_0^t f(t, s) A(s) K(t, s)\, ds. \quad (10.28)$$

С другой стороны, используя представление (10.24), находим, что

$$\mathsf{M} m_t \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s = \mathsf{M} \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s =$$
$$= \mathsf{M} \left[\int_0^t G(t, s) A(s) \theta_s\, ds + \int_0^t G(t, s) B(s)\, dW_2(s) \right] \times$$
$$\times \left[\int_0^t f(t, s) A(s) \theta_s\, ds + \int_0^t f(t, s) B(s)\, dW_2(s) \right]. \quad (10.29)$$

Воспользуемся снова независимостью $\int_0^t G(t, s) A(s) \theta_s\, ds$ и $\int_0^t f(t, s) B(s)\, dW_2(s)$, $\int_0^t f(t, s) A(s) \theta_s\, ds$ и $\int_0^t G(t, s) B(s)\, dW_2(s)$. Тогда из (10.29) получим

$$\mathsf{M} m_t \int_0^t f(t, s)\, d\xi_s = \mathsf{M} \int_0^t \int_0^t G(t, s) A(s) \theta_s \theta_u A(u) f(t, u)\, du +$$
$$+ \mathsf{M} \int_0^t G(t, s) B(s)\, dW_2(s) \int_0^t f(t, s) B(s)\, dW_2(s) =$$
$$= \int_0^t \int_0^t G(t, s) A(s) K(s, u) A(u) f(t, u)\, ds\, du +$$
$$+ \int_0^t G(t, u) B^2(u) f(t, u)\, du. \quad (10.30)$$

Сравнивая (10.27), (10.28) и (10.30), а также учитывая произвольность функции $f(t, u)$, получаем требуемое равенство (10.25).

Лемма 10.3. *Пусть $t \in [0, T]$ фиксировано. Решение $G(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, уравнения* (10.25) *единственно*)* (*в классе функций, удовлетворяющих условиям* (10.12)) *и задается формулой*

$$G(t, s) = \varphi_s^t G(s, s), \tag{10.31}$$

где

$$G(s, s) = \frac{\gamma_s A(s)}{B^2(s)}, \tag{10.32}$$

а φ_s^t является решением дифференционального уравнения

$$\frac{d\varphi_s^t}{dt} = \left[a(t) - \gamma_t \frac{A^2(t)}{B^2(t)}\right] \varphi_s^t, \qquad \varphi_s^s = 1. \tag{10.33}$$

Доказательство. Установим сначала единственность. Пусть $G_i(t, s)$, $i = 1, 2$, — два решения уравнения (10.25) такие, что

$$\int_0^t G_i^2(t, s)\, ds < \infty, \qquad \int_0^t G_i^2(t, s) B^2(s)\, ds < \infty.$$

Тогда $\Delta(t, s) = G_1(t, s) - G_2(t, s)$ является решением уравнения

$$\int_0^t \Delta(t, s) A(s) K(s, u) A(u)\, du + \Delta(t, u) B^2(u) = 0. \tag{10.34}$$

Умножая обе части этого уравнения на $\Delta(t, u)$ и интегрируя по u от 0 до t, получаем

$$\int_0^t \int_0^t \Delta(t, s) A(s) K(s, u) A(u) \Delta(t, u)\, ds\, du + \int_0^t \Delta^2(t, u) B^2(u)\, du = 0. \tag{10.35}$$

В силу неотрицательной определенности корреляционной функции $K(s, u)$

$$\int_0^t \int_0^t [\Delta(t, s) A(s)] K(s, u) [A(u) \Delta(t, s)] \geqslant 0.$$

*) Два решения $G_1(t, s)$ и $G_2(t, s)$ считаются совпадающими, если $G_1(t, s) = G_2(t, s)$ для почти всех s, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Поэтому

$$\int_0^t \Delta^2(t, u) B^2(u)\, du = 0,$$

и так как $\inf_{0 \leqslant u \leqslant t} B^2(u) > 0$, то $\Delta(t, u) = 0$ для почти всех u, $0 \leqslant u \leqslant t$.

Заметим также, что уравнение (10.33), определяющее функцию φ_s^t, имеет, и притом единственное, непрерывное решение. Это следует из теоремы 4.10 и того факта, что

$$\int_s^T \left| a(t) - \gamma_t \frac{A^2(t)}{B^2(t)} \right| dt \leqslant \int_s^T |a(t)|\, dt + \frac{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M}\theta_t^2}{C} \int_0^T A^2(t)\, dt < \infty;$$

константа C определена в (10.9)

Установим теперь справедливость формулы (10.32). Из (10.25) находим

$$G(t, t) B^2(t) = K(t, t) A(t) - \int_0^t G(t, s) A(s) K(s, t) A(t)\, ds =$$

$$= \mathsf{M}\theta_t^2 A(t) - \int_0^t G(t, s) A(s) \mathsf{M}\theta_s\theta_t A(t)\, ds =$$

$$= \mathsf{M}\left[\theta_t - \int_0^t G(t, s) A(s) \theta_s\right] \theta_t A(t). \quad (10.36)$$

Поскольку $\mathsf{M}\theta_t \int_0^t G(t, s) B(s)\, dW_2(s) = 0$, то правая часть в (10.36) равна

$$\mathsf{M}\left[\theta_t - \int_0^t G(t, s) A(s) \theta_s\, ds - \int_0^t G(t, s) B(s)\, dW_2(s)\right] \theta_t A(t) =$$

$$= \mathsf{M}\left[\theta_t - \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s\right] \theta_t A(t) = \mathsf{M}[\theta_t - m_t]\, \theta_t A(t) =$$

$$= \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2 A(t) + \mathsf{M}(\theta_t - m_t) m_t. \quad (10.37)$$

Но $\mathsf{M}(\theta_t - m_t) m_t A(t) = 0$, а $\mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2 = \gamma_t$. Следовательно, в силу (10.36) и (10.37) $G(t, t) B^2(t) = \gamma_t A(t)$, что и доказывает (10.32)

Решение уравнения (10.25) будем искать в предположении, что функция $G(t, s)$ почти всюду дифференцируема по t

$(s \leqslant t \leqslant T)$. Это предположение не ограничивает общности, так как если у уравнения (10.25) существует такое решение, удовлетворяющее условиям (10.23), то в силу доказанной единственности оно и будет искомым.

Установим прежде всего, что функция $K(t, u)$ почти всюду дифференцируема по t $(t \geqslant u)$ и

$$\frac{\partial K(t, u)}{\partial t} = a(t) K(t, u). \tag{10.38}$$

Действительно, в силу (10.1)

$$\theta_t \theta_u = \theta_u^2 + \int_u^t a(v) \theta_u \theta_v \, dv + \theta_u \int_u^t b(v) \, dW_1(v).$$

Беря от обеих частей этого равенства математическое ожидание и учитывая, что $\mathsf{M}\theta_u^2 \int_u^t b^2(v) \, dv < \infty$, находим

$$K(t, u) = K(u, u) + \int_u^t a(v) K(u, v) \, dv. \tag{10.39}$$

Это и доказывает справедливость уравнения (10.38).

В предположении указанной дифференцируемости функции $G(t, u)$ продифференцируем по t левую и правую части уравнения (10.25). Принимая во внимание (10.38), получаем

$$a(t) K(t, u) A(u) = G(t, t) A(t) K(t, u) A(u) + \\ + \int_0^t \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} A(s) K(s, u) A(u) \, ds + \frac{\partial G(t, u)}{\partial t} B^2(u). \tag{10.40}$$

Но согласно (10.25)

$$K(t, u) A(u) = \int_0^t G(t, s) A(s) K(s, u) A(u) \, ds + G(t, u) B^2(u)$$

и

$$G(t, t) = \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}.$$

Поэтому (10.40) преобразуется к следующему виду:

$$\int_0^t \left\{ \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)} \right] G(t, s) - \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \right\} A(s) K(s, u) A(u) \, ds + \\ + \left\{ \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)} \right] G(t, u) - \frac{\partial G(t, u)}{\partial t} \right\} B^2(u) = 0. \tag{10.41}$$

Отсюда ясно, что функция $G(t, s)$, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)}\right] G(t, s), \qquad t \geqslant s,$$

с $G(s, s) = \gamma_s \frac{A(s)}{B^2(s)}$ удовлетворяет и уравнению (10.41). Лемма 10.3 доказана.

4. Доказательство теоремы 10.1. Предположим вначале, что $m_0 = 0$ (Р-п. н.). Тогда в силу лемм 10.1 и 10.3

$$m_t = \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s = \int_0^t G(s, s)\, \varphi_s^t\, d\xi_s = \varphi_0^t \int_0^t (\varphi_0^s)^{-1} \frac{\gamma_s A(s)}{B^2(s)}\, d\xi_s, \quad (10.42)$$

поскольку $\varphi_s^t = \varphi_0^t (\varphi_0^s)^{-1}$. Учитывая, что $d\xi_t = A(t)\,\theta_t\, dt + B(t)\, dW_2(t)$, с помощью формулы Ито из (10.42) находим

$$dm_t = \frac{d\varphi_0^t}{dt} \left[\int_0^t (\varphi_0^s)^{-1} \frac{\gamma_s A(s)}{B^2(s)}\, d\xi_s\right] dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}\, d\xi_t. \quad (10.43)$$

Но

$$\frac{d\varphi_0^t}{dt} = \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)}\right] \varphi_0^t.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi_0^t}{dt} \left[\int_0^t (\varphi_0^s)^{-1} \frac{\gamma_s A(s)}{B^2(s)}\, d\xi_s\right] = \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)}\right] m_t,$$

что вместе с (10.43) приводит (в случае $m_0 = 0$) к уравнению

$$dm_t = \left[a(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)}\right] m_t\, dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}\, d\xi_t,$$

совпадающему с искомым уравнением (10.10).

Пусть $\mathsf{P}\{m_0 \neq 0\} > 0$. Введем процесс $(\tilde\theta_t, \tilde\xi_t)$ $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$\tilde\theta_t = \theta_t - m_0 e^{\int_0^t a(s)\, ds}, \quad (10.44)$$

$$\tilde\xi_t = \xi_t - m_0 \int_0^t A(s)\, e^{\int_0^s a(u)\, du}\, ds. \quad (10.45)$$

Тогда

$$d\tilde\theta_t = a(t)\,\tilde\theta_t\, dt + b(t)\, dW_1(t), \qquad \tilde\theta_0 = \theta_0 - m_0, \quad (10.46)$$

$$d\tilde\xi_t = A(t)\,\tilde\theta_t\, dt + B(t)\, dW_2(t), \qquad \tilde\xi_0 = \xi_0.$$

Обозначим $\tilde{m}_t = \mathsf{M}(\tilde{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}})$ и $\tilde{\gamma}_t = \mathsf{M}(\tilde{\theta}_t - \tilde{m}_t)^2$.

Поскольку $\tilde{\xi}_0 = \xi_0$, то в силу (10.45)

$$\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}} = \mathcal{F}_t^{\xi}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и, следовательно,

$$\tilde{m}_t = \mathsf{M}(\tilde{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi}) - m_0 e^{\int_0^t a(s)\,ds} = m_t - m_0 e^{\int_0^t a(s)\,ds}. \tag{10.47}$$

Согласно доказанному

$$d\tilde{m}_t = \left[a(t) - \frac{\tilde{\gamma}_t A^2(t)}{B^2(t)}\right]\tilde{m}_t\,dt + \frac{\tilde{\gamma}_t A(t)}{B^2(t)}\,d\tilde{\xi}_t. \tag{10.48}$$

Заметим, что

$$\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2 = \mathsf{M}\left[\left(\theta_t - m_0 e^{\int_0^t a(s)\,ds}\right) - \left(m_t - m_0 e^{\int_0^t a(s)\,ds}\right)\right]^2 =$$
$$= \mathsf{M}\,[\tilde{\theta}_t - \tilde{m}_t]^2 = \tilde{\gamma}_t.$$

Поэтому (10.48) с учетом (10.45) и (10.47) можно переписать следующим образом:

$$\left[dm_t - m_0 a(t)\,e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,dt\right] = \left[a(t) - \frac{A^2(t)\gamma_t}{B^2(t)}\right]\left[m_t - m_0 e^{\int_0^t a(s)\,ds}\right]dt +$$
$$+ \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}\left[d\xi_t - m_0 A(t)\,e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,dt\right].$$

После простых преобразований отсюда получаем требуемое уравнение (10.10) для $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi})$.

Выведем теперь уравнение (10.11) для $\gamma_t = \mathsf{M}\,[\theta_t - m_t]^2$. Обозначим $\delta_t = \theta_t - m_t$. Из (10.1), (10.10) и (10.2) получим

$$d\delta_t = a(t)\,\delta_t\,dt + b(t)\,dW_1(t) - \frac{\gamma_t A^2(t)}{B^2(t)}\,\delta_t\,dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B(t)}\,dW_2(t).$$

Отсюда с помощью формулы Ито находим

$$\delta_t^2 = \delta_0^2 + 2\int_0^t \left[a(s) - \frac{\gamma_s A^2(s)}{B^2(s)}\right]\delta_s^2\,ds + \int_0^t \left[b^2(s) + \frac{\gamma_s^2 A^2(s)}{B^2(s)}\right]ds +$$
$$+ 2\int_0^t \delta_s b(s)\,dW_1(s) + 2\int_0^t \delta_s\,\frac{\gamma_s A(s)}{B(s)}\,dW_2(s). \tag{10.49}$$

Замечая, что $M\delta_t^2 = \gamma_t$ и

$$M\int_0^t \delta_s b(s)\,dW_1(s) = 0, \qquad M\int_0^t \delta_s \frac{\gamma_s A(s)}{B(s)}\,dW_2(s) = 0,$$

из (10.49) получаем

$$\gamma_t = \gamma_0 + 2\int_0^t \left[a(s) - \frac{\gamma_s A^2(s)}{B^2(s)}\right]\gamma_s\,ds + \int_0^t \left[b^2(s) + \frac{\gamma_s^2 A^2(s)}{B^2(s)}\right]ds.$$

После очевидных упрощений это уравнение приводится к искомому уравнению (10.11).

Докажем теперь заключительную часть теоремы, касающуюся единственности решения системы (10.10), (10.11).

Если решение уравнения Риккати (10.11) единственно, то единственность решения уравнения (10.10) следует из его линейности, что доказывается аналогично теореме 4.10.

Установим единственность (в классе неотрицательных функций) решения уравнения (10.11).

Всякое неотрицательное решение γ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, этого уравнения удовлетворяет, как нетрудно проверить, интегральному уравнению

$$\gamma_t = \exp\left\{2\int_0^t a(s)\,ds\right\}\left\{\gamma_0 + \int_0^t \exp\left(-2\int_0^s a(u)\,du\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[b^2(s) - \frac{\gamma_s^2 A^2(s)}{B^2(s)}\right]ds\right\}.$$

Отсюда в силу (10.3) и предположения $M\theta_0^2 < \infty$ получаем

$$0 \leqslant \gamma_t \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{2\int_0^T |a(s)|\,ds\right\}\left\{\gamma_0 + \exp\left(2\int_0^T |a(u)|\,du\right)\int_0^T b^2(u)\,du\right\} \leqslant$$
$$\leqslant L < \infty, \tag{10.50}$$

где L — некоторая постоянная.

Пусть теперь $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — два решения уравнения (10.11). Положим $\Delta(t) = |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$. Тогда согласно (10.11), (10.50), (10.3), (10.8) и (10.9)

$$\Delta(t) \leqslant 2\int_0^t \left\{|a(s)| + \frac{L}{C}A^2(s)\right\}\Delta(s)\,ds.$$

Отсюда по лемме 4.11 вытекает, что $\Delta(t) \equiv 0$.

Теорема 10.1 доказана.

5. Метод Калмана — Бьюси существенно основывался на возможности представления условных математических ожиданий $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ в виде

$$m_t = \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s \tag{10.51}$$

(мы предполагаем здесь и далее, что $m_0 = 0$, а значит, в силу (10.5) $\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_0^\xi) = 0$). Однако в рассматриваемом случае, когда процесс (θ, ξ) является гауссовским, условные математические ожидания m_t могут быть представлены также в виде

$$m_t = \int_0^t F(t, s)\, d\overline{W}_s, \tag{10.52}$$

где $\int_0^t F^2(t, s)\, ds < \infty$, а процесс $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является винеровским и определяется равенством

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s}{B(s)} - \int_0^t \frac{A(s)}{B(s)} m_s\, ds$$

(см. теоремы 7.12, 7.16 и 7.17).

Покажем, что вывод уравнения (10.10) для m_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, становится значительно проще, если отправляться не от (10.51), а от представлений (10.52).

Будем следовать схеме, принятой при доказательстве теоремы 10.1.

Зафиксируем t, $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $f(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, — измеримая ограниченная функция. Тогда

$$\mathsf{M}(\theta_t - m_t) \int_0^t f(t, s)\, d\overline{W}_s = 0,$$

т. е. (ср. с (10.27))

$$\mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s)\, d\overline{W}_s = \int_0^t F(t, s) f(t, s)\, ds.$$

По определению обновляющего процесса $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$

$$\overline{W}_t = W_2(t) + \int_0^t \frac{A(s)}{B(s)} (\theta_s - m_s)\, ds,$$

и, значит,

$$\int_0^t F(t, s) f(t, s)\, ds = \mathsf{M}\left[\theta_t \int_0^t f(t, s)\, dW_2(s)\right] + \\ + \mathsf{M}\left[\theta_t \int_0^t f(t, s) \frac{A(s)}{B(s)} (\theta_s - m_s)\, ds\right] = \\ = \int_0^t f(t, s) \frac{A(s)}{B(s)} \mathsf{M}\left[\theta_t (\theta_s - m_s)\right] ds,$$

где мы воспользовались тем, что в силу независимости процессов θ и W_2

$$\mathsf{M}\theta_t \int_0^t f(t, s)\, dW_2(s) = \mathsf{M}\theta_t \mathsf{M} \int_0^t f(t, s)\, dW_2(s) = 0.$$

Далее, в силу (10.1)

$$\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_s) = \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \theta_s \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\theta_t (\theta_s - m_s) = \mathsf{M}\{\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_s)(\theta_s - m_s)\} = \\ = \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \mathsf{M}\theta_s [\theta_s - m_s] = \\ = \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \mathsf{M}[\theta_s - m_s]^2 = \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \gamma_s,$$

и, значит,

$$\int_0^t F(t, s) f(t, s)\, ds = \int_0^t f(t, s) \frac{A(s)}{B(s)} \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \gamma_s\, ds.$$

Отсюда в силу произвольности функции $f(t, s)$ получаем

$$F(t, s) = \exp\left\{\int_s^t a(u)\, du\right\} \gamma_s \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Таким образом,

$$m_t=\int_0^t F(t,s)\,d\overline{W}_s=\int_0^t \exp\left\{\int_s^t a(u)\,du\right\}\frac{A(s)}{B(s)}\gamma_s\,d\overline{W}_s=$$
$$=\exp\left\{\int_0^t a(u)\,du\right\}\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s a(u)\,du\right\}\frac{A(s)\gamma_s}{B^2(s)}[d\xi_s-m_s\,ds].$$

Отсюда по формуле Ито для m_t, $0\leqslant t\leqslant T$, получаем уравнение (10.10).

§ 2. Мартингальный вывод уравнений линейной нестационарной фильтрации

1. Как уже отмечалось в § 1, уравнения (10.10) и (10.11) для m_t и γ_t могут быть выведены из общих уравнений фильтрации, полученных в восьмой главе. Приведем этот вывод, что послужит также конкретным примером использования общих уравнений.

Будем использовать понятия и обозначения, использованные при доказательстве теоремы 10.1. Положим также

$$G_t=\sigma\{\omega:\ \theta_0(\omega),\ \xi_0(\omega);\ W_1(s),\ W_2(s),\ s\leqslant t\},\qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

и

$$\psi_s^t=\exp\left(\int_s^t a(u)\,du\right).$$

Тогда в силу (10.5)

$$\theta_t=\psi_0^t\left(\theta_0+\int_0^t(\psi_0^s)^{-1}b(s)\,dW_1(s)\right),$$

где процесс $\bar\theta=(\bar\theta_t,G_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, с

$$\bar\theta_t=\theta_0+\int_0^t(\psi_0^s)^{-1}b(s)\,dW_1(s)\tag{10.53}$$

является квадратично интегрируемым мартингалом.

Выведем сейчас уравнения для $\bar m_t=\mathsf{M}(\bar\theta_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)$ и $\bar\gamma_t=\mathsf{M}(\bar\theta_t-\bar m_t)^2$, из которых легко затем будут найдены и уравнения для

$$m_t=\psi_0^t\bar m_t,\qquad \gamma_t=(\psi_0^t)^2\bar\gamma_t.\tag{10.54}$$

В силу (10.53) $\langle\bar\theta, W_2\rangle_t = 0$ (P-п. н.), $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому согласно общему уравнению фильтрации (8.9) для $\pi_t(\bar\theta) = \mathsf{M}(\bar\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ $(= \bar m_t)$ получаем

$$\pi_t(\bar\theta) = \pi_0(\bar\theta) + \int_0^t \frac{\pi_s(\bar\theta^2)\,\psi_0^s A(s) - (\pi_s(\bar\theta))^2\,\psi_0^s A(s)}{B(s)}\, d\overset{*}{\bar W}_s, \tag{10.55}$$

где $\pi_s(\bar\theta^2) = \mathsf{M}(\bar\theta_s^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ и

$$\bar W_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - A(s)\, m_s\, ds}{B(s)}$$

является винеровским процессом (относительно $(\mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$).

Заметим, что

$$\pi_s(\bar\theta^2)\,\psi_0^s A(s) - (\pi_s(\bar\theta))^2\,\psi_0^s A(s) =$$
$$= \psi_0^s A(s)\left[\pi_s(\bar\theta^2) - (\pi_s(\bar\theta))^2\right] = \psi_0^s A(s)\,\mathsf{M}\left[(\bar\theta_s - \bar m_s)^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi\right]. \tag{10.56}$$

Покажем, что

$$\mathsf{M}\left[(\bar\theta_s - \bar m_s)^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\bar\theta_s - \bar m_s\right]^2 \qquad (= \bar\gamma_s). \tag{10.57}$$

Пусть $\mathscr{F}_{s,n}^\xi$ — σ-алгебры, введенные при доказательстве леммы 10.1,

$$m_s^{(n)} = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_{s,n}^\xi), \qquad \gamma_s^{(n)} = \mathsf{M}(\theta_s - m_s^{(n)})^2.$$

Из теоремы о нормальной корреляции (гл. 13) следует, что P-п. н.

$$\mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s^{(n)})^2 \mid \mathscr{F}_{s,n}^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\theta_s - m_s^{(n)}\right]^2. \tag{10.58}$$

Воспользуемся этим фактом для доказательства равенства $\mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s)^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\theta_s - m_s\right]^2$ (P-п. н.), из которого очевидным образом будет следовать и (10.57).

В силу теоремы 1.5 и (10.58)

$$\mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s)^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}(\theta_s^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi) - m_s^2 =$$
$$= \lim_n \mathsf{M}(\theta_s^2 \mid \mathscr{F}_{s,n}^\xi) - \lim_n (m_s^{(n)})^2 = \lim_n \mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s^{(n)})^2 \mid \mathscr{F}_{s,n}^\xi\right] =$$
$$= \lim_n \mathsf{M}\left[\theta_s - m_s^{(n)}\right]^2 = \lim_n \gamma_s^{(n)}. \tag{10.59}$$

С другой стороны,

$$\gamma_s = \mathsf{M}(\theta_s - m_s)^2 = \mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s^{(n)}) + (m_s^{(n)} - m_s)\right]^2 =$$
$$= \gamma_s^{(n)} + \mathsf{M}(m_s^{(n)} - m_s)^2 + 2\mathsf{M}(\theta_s - m_s^{(n)})(m_s^{(n)} - m_s),$$

и, следовательно, согласно доказательству леммы 10.1

$$|\gamma_s - \gamma_s^{(n)}| \leqslant \mathsf{M}(m_s^{(n)} - m_s)^2 + 2\sqrt{\mathsf{M}(\theta_s - m_s^{(n)})^2\,\mathsf{M}(m_s^{(n)} - m_s)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}(m_s^{(n)} - m_s)^2 + 2\sqrt{\mathsf{M}\theta_s^2\mathsf{M}(m_s^{(n)} - m_s)^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Вместе с (10.59) это доказывает равенство

$$\mathsf{M}\left[(\theta_s - m_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}[\theta_s - m_s]^2, \quad \mathsf{P}\text{-п. н.},$$

а значит, и равенство (10.57).

С учетом (10.57) и (10.54) правая часть в (10.56) переписывается так:

$$\psi_0^s A(s)\,\mathsf{M}\left[(\bar{\theta}_s - \bar{m}_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = \psi_0^s A(s)\,\bar{\gamma}(s) = A(s)\,\gamma_s\left(\psi_0^s\right)^{-1}.$$

Поэтому согласно (10.55)

$$d\bar{m}_t = \frac{A(t)\,\gamma_t}{B(t)\,\psi_0^t}\,d\bar{W}_t. \tag{10.60}$$

Применяя теперь формулу Ито к произведению $m_t = \psi_0^t \bar{m}_t$, получаем уравнение (10.10):

$$dm_t = \frac{d\psi_0^t}{dt}\,\bar{m}_t\,dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B(t)}\,d\bar{W}_t = a(t)\left(\psi_0^t \bar{m}_t\right)dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B(t)}\,d\bar{W}_t =$$
$$= a(t)\,m_t\,dt + \frac{\gamma_t A(t)}{B^2(t)}\,(d\xi_t - A(t)\,m_t\,dt).$$

2. Чтобы из (8.9) вывести уравнение (10.11), заметим, что согласно (10.53)

$$\bar{\theta}_t^2 = \bar{\theta}_0^2 + 2\int_0^t \bar{\theta}_s\left(\psi_0^s\right)^{-1} b(s)\,dW_1(s) + \int_0^t b^2(s)\left(\psi_0^s\right)^{-2} ds.$$

Поэтому в силу (8.9)

$$\pi_t(\bar{\theta}^2) = \pi_0(\bar{\theta}^2) + \int_0^t b^2(s)\left(\psi_0^s\right)^{-2} ds +$$
$$+ \int_0^t \frac{A(s)\,\psi_0^s}{B(s)}\,\mathsf{M}\left[\bar{\theta}_s^2(\bar{\theta}_s - m_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] d\bar{W}_s.$$

Поскольку процесс $(\bar{\theta}_s, \xi_s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, *гауссовский*, то

$$\mathsf{M}\left[\bar{\theta}_s^2(\bar{\theta}_s - \bar{m}_s) \mid \mathcal{F}_s^\xi\right] = 2\bar{m}_s\bar{\gamma}_s.$$

Значит,

$$\pi_t(\bar{\theta}^2) = \pi_0(\bar{\theta}^2) + \int_0^t b^2(s)\left(\psi_0^s\right)^{-2} ds + 2\int_0^t \frac{A(s)\,\psi_0^s}{B(s)}\,\bar{m}_s\bar{\gamma}_s\,d\bar{W}_s. \tag{10.61}$$

Из (10.60) и (10.61) получаем

$$d\bar{\gamma}_t = d\,[\pi_t(\bar{\theta}^2) - (\bar{m}_t)^2] =$$

$$= b^2(t)\left(\psi_0^t\right)^{-2} dt + 2\frac{A(t)\,\psi_0^t}{B(t)}\,\bar{m}_t\bar{\gamma}_t d\overline{W}_t - 2\bar{m}_t\frac{A(t)\,\gamma_t}{B(t)\,\psi_0^t}\,d\overline{W}_t - \left(\frac{A(t)\,\gamma_t}{B(t)\,\psi_0^t}\right)^2 dt =$$

$$= b^2(t)\left(\psi_0^t\right)^{-2} dt - \frac{A^2(t)}{B^2(t)}\left(\psi_0^t\right)^{-2}\gamma_t^2\,dt.$$

Отсюда находим

$$d\gamma_t = (\psi_0^t)^2\,d\bar{\gamma}_t + 2\,(\psi_0^t)^2\,\bar{\gamma}_t a(t)\,dt =$$

$$= b^2(t)\,dt - \frac{A^2(t)}{B^2(t)}\,(\psi_0^t)^4\,\bar{\gamma}_t^2\,dt + 2a(t)\,\bar{\gamma}_t\,(\psi_0^t)^2\,dt =$$

$$= b^2(t)\,dt - \frac{A^2(t)}{B^2(t)}\,\gamma_t^2\,dt + 2a(t)\,\gamma_t\,dt,$$

что совпадает с искомым уравнением (10.11).

3. Замечание. Уравнения (10.10) и (10.11) можно было вывести из уравнений для (θ_t, ξ_t) и без введения процесса $(\bar{\theta}_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Однако тогда, например, пришлось бы заменить предположение $\int_0^T |a(t)|\,dt < \infty$ более ограничительным условием $\int_0^T a^2(t)\,dt < \infty$.

§ 3. Уравнения линейной нестационарной фильтрации. Многомерный случай

1. В настоящем параграфе будет дано обобщение теоремы 10.1 в двух направлениях: во-первых, в коэффициенты сноса, входящие в систему (10.1), (10.2), будут введены слагаемые, линейно зависящие от наблюдаемой компоненты ξ_t; во-вторых, будут рассматриваться многомерные процессы θ_t и ξ_t.

Итак, пусть рассматривается $k+l$-мерный гауссовский случайный процесс $(\theta_t, \xi_t) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\,\theta_t + a_2(t)\,\xi_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} b_i(t)\,dW_i(t), \qquad (10.62)$$

$$d\xi_t = [A_0(t) + A_1(t)\,\theta_t + A_2(t)\,\xi_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} B_i(t)\,dW_i(t). \qquad (10.63)$$

В (10.62) и (10.63) $W_1 = [W_{11}(t), \ldots, W_{1k}(t)]$, $W_2 = [W_{21}(t), \ldots, W_{2l}(t)]$ — два независимых винеровских процесса. Гауссовский вектор начальных значений θ_0, ξ_0 предполагается не зависящим от процессов W_1 и W_2. Измеримые (детерминированные) вектор-функции

$$a_0(t)=[a_{01}(t), \ldots, a_{0k}(t)], \qquad A_0(t)=[A_{01}(t), \ldots, A_{0l}(t)]$$

и матрицы *)

$$\begin{aligned} a_1(t)&=\left\|a_{ij}^{(1)}(t)\right\|_{(k\times k)}, & a_2(t)&=\left\|a_{ij}^{(2)}(t)\right\|_{(k\times l)},\\ A_1(t)&=\left\|A_{ij}^{(1)}(t)\right\|_{(l\times k)}, & A_2(t)&=\left\|A_{ij}^{(2)}(t)\right\|_{(l\times l)},\\ b_1(t)&=\left\|b_{ij}^{(1)}(t)\right\|_{(k\times k)}, & b_2(t)&=\left\|b_{ij}^{(2)}(t)\right\|_{(k\times l)},\\ B_1(t)&=\left\|B_{ij}^{(1)}(t)\right\|_{(l\times k)}, & B_2(t)&=\left\|B_{ij}^{(2)}(t)\right\|_{(l\times l)} \end{aligned}$$

предполагаются обладающими следующими свойствами:

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^k|a_{0i}(t)|+\sum_{j=1}^l(A_{0j}(t))^2\right]dt<\infty, \tag{10.64}$$

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k|a_{ij}^{(1)}(t)|+\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l|a_{ij}^{(2)}(t)|\right]dt<\infty, \tag{10.65}$$

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l(A_{ij}^{(1)}(t))^2+\sum_{i=1}^l\sum_{j=1}^l(A_{ij}^{(2)}(t))^2\right]dt<\infty, \tag{10.66}$$

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k(b_{ij}^{(1)}(t))^2+\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l(b_{ij}^{(2)}(t))^2+\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l(B_{ij}^{(1)}(t))^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^l\sum_{j=1}^l(B_{ij}^{(2)}(t))^2\right]dt<\infty; \tag{10.67}$$

при всех t, $0\leqslant t\leqslant T$, матрицы $B_1(t)B_1^*(t)+B_2(t)B_2^*(t)$ равномерно невырождены, т. е. наименьшие собственные значения матриц $B_1(t)B_1^*(t)+B_2(t)B_2^*(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, равномерно по t больше нуля **).

Согласно теореме 4.10 система уравнений (10.62), (10.63) имеет единственное непрерывное решение.

---

*) Индексы $(p\times q)$ указывают порядок матриц (первый индекс, p, — число строк, второй, q, — число столбцов).

**) Можно показать, что при этом элементы $\left(B_1(t)B_1^*(t)+B_2(t)B_2^*(t)\right)^{-1}$, $0\leqslant t\leqslant T$, равномерно ограничены.

Пусть $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ — вектор условных математических ожиданий,

$$[m_1(t), \ldots, m_k(t)] = [\mathsf{M}(\theta_1(t) \mid \mathscr{F}_t^\xi), \ldots, \mathsf{M}(\theta_k(t) \mid \mathscr{F}_t^\xi)],$$

$\|\gamma_{ij}(t)\|_{(k \times k)} = \gamma_t$ — матрица ковариаций с

$$\gamma_{ij}(t) = \mathsf{M}\,[(\theta_i(t) - m_i(t))(\theta_j(t) - m_j(t))].$$

Вектор $m_t = [m_1(t), \ldots, m_k(t)]$ является, очевидно, $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримой оценкой вектора $\theta_t = (\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t))$, оптимальной в том смысле, что

$$\operatorname{Sp} \gamma_t \equiv \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ii}(t) \leqslant \operatorname{Sp} \mathsf{M}\,[(\theta_t - \nu_t)(\theta_t - \nu_t)^*] \tag{10.68}$$

для любого $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримого вектора $\nu_t = [\nu_1(t), \ldots, \nu_k(t)]$ с $\sum_{i=1}^{k} \mathsf{M}\nu_i^2(t) < \infty$.

В силу гауссовости процесса (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, компоненты вектора m_t линейным образом зависят от наблюдаемых значений $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$ (см. далее (10.73)). Поэтому оптимальная (в смысле (10.68)) фильтрация (значений θ_t по ξ_0^t) является линейной, но, вообще говоря, нестационарной. Как и для системы (10.1), (10.2), в рассматриваемом случае также можно получить замкнутую систему уравнений для m_t и γ_t, определяющих, как принято говорить, оптимальный фильтр.

2. Начнем с одного частного случая системы (10.62), (10.63), являющегося многомерным аналогом системы (10.1), (10.2).

Теорема 10.2. *Пусть $k + l$-мерный гауссовский процесс (θ_t, ξ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, допускает дифференциалы*

$$d\theta_t = a(t)\theta_t\,dt + b(t)\,dW_1(t), \tag{10.69}$$

$$d\xi_t = A(t)\theta_t\,dt + B(t)\,dW_2(t) \tag{10.70}$$

(*т. е. пусть в* (10.62), (10.63) $a_0(t) \equiv 0$, $A_0(t) \equiv 0$, $a_1(t) = a(t)$, $A_1(t) = A(t)$, $a_2(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv 0$, $b_2(t) \equiv 0$, $B_1(t) \equiv 0$, $b_1(t) = b(t)$, $B_2(t) = B(t)$).

Тогда m_t и γ_t *являются решениями системы уравнений*

$$dm_t = a(t)\,m_t\,dt + \gamma_t A^*(t)\,(B(t)\,B^*(t))^{-1}\,(d\xi_t - A(t)\,m_t\,dt), \tag{10.71}$$

$$\dot\gamma_t = a(t)\,\gamma_t + \gamma_t a^*(t) - \gamma_t A^*(t)\,(B(t)\,B^*(t))^{-1}\,A(t)\,\gamma_t + b(t)\,b^*(t) \tag{10.72}$$

с начальными условиями

$$m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0),\quad \gamma_0 = \mathsf{M}\,[(\theta_0 - m_0)(\theta_0 - m_0)^*].$$

Система уравнений (10.71) *и* (10.72) *имеет единственное решение* (*для* γ_t *в классе симметрических неотрицательно определенных матриц*).

Доказательство. При $k=l=1$ (10.71), (10.72) совпадают с уравнениями (10.10), (10.11), справедливость которых установлена в теореме 10.1.

Метод Калмана — Бьюси применим для вывода этих уравнений и в общем случае $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$.

Как и при доказательстве теоремы 10.1, сначала показывается, что (в случае $m_0=0$) для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$m_t = \int_0^t G(t, s)\, d\xi_s \tag{10.73}$$

с детерминированной матрицей $G(t, s)$ (порядка $(k \times l)$), измеримой по s и такой, что

$$\operatorname{Sp} \int_0^t G(t, s) G^*(t, s)\, ds < \infty, \tag{10.74}$$

$$\operatorname{Sp} \int_0^t G(t, s) B(s) B^*(s) G^*(t, s)\, ds < \infty. \tag{10.75}$$

Далее устанавливается, что

$$G(t, s) = \varphi_s^t G(s, s), \tag{10.76}$$

где

$$G(s, s) = \gamma_s A^*(s) (B(s) B^*(s))^{-1}, \tag{10.77}$$

а матрица φ_s^t является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi_s^t}{dt} = \left[a(t) - \gamma_t A^*(t) (B(t) B^*(t))^{-1} A(t)\right] \varphi_s^t, \quad \varphi_s^s = E_{(k \times k)}. \tag{10.78}$$

Поэтому m_t допускает представление

$$m_t = \varphi_0^t \int_0^t (\varphi_0^s)^{-1} \gamma_s A^*(s) (B(s) B^*(s))^{-1} d\xi_s, \tag{10.79}$$

из которого (в случае $m_0=0$) выводится уравнение (10.71).

Случай $m_0 \neq 0$ (**P**-п. н.) разбирается так же, как и при $k=l=1$.

Для получения уравнения (10.72) вводится вектор $\delta_t = \theta_t - m_t$ и затем для $\delta_t \delta_t^*$ с помощью формулы Ито находится интегральное представление, аналогичное (10.49). Беря затем математическое ожидание, получаем (интегральное) уравнение, эквивалентное уравнению (10.72).

Единственность решения системы (10.71) и (10.72) доказывается, как и в скалярном случае. Заметим лишь, что вместо оценки (10.50) следует воспользоваться оценкой

$$0 \leqslant \operatorname{Sp} \gamma_t \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Sp} \Phi_0^t \left\{ \gamma_0 + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s) b^*(s) \left[(\Phi_0^s)^{-1} \right]^* ds \right\} (\Phi_0^t)^* \leqslant L < \infty,$$

где L — некоторая постоянная, а Φ_0^t — фундаментальная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$\frac{d\Phi_0^t}{dt} = a(t) \Phi_0^t, \qquad \Phi_0^0 = E_{(k \times k)}.$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (b \circ b)(t) &= b_1(t) b_1^*(t) + b_2(t) b_2^*(t), \\ (b \circ B)(t) &= b_1(t) B_1^*(t) + b_2(t) B_2^*(t), \\ (B \circ B)(t) &= B_1(t) B_1^*(t) + B_2(t) B_2^*(t). \end{aligned} \tag{10.80}$$

Теорема 10.3. *Пусть коэффициенты системы* (10.62), (10.63) *удовлетворяют условиям* п. 1. *Тогда вектор m_t и матрица γ_t являются решениями системы уравнений*

$$\begin{aligned} dm_t = {} & [a_0(t) + a_1(t) m_t + a_2(t) \xi_t] dt + \\ & + [(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)] ((B \circ B)(t))^{-1} \times \\ & \times [d\xi_t - (A_0(t) + A_1(t) m_t + A_2(t) \xi_t) dt], \end{aligned} \tag{10.81}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_t = {} & a_1(t) \gamma_t + \gamma_t a_1^*(t) - \\ & - [(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)] ((B \circ B)(t))^{-1} [(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)]^* + b \circ b(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 | \xi_0)$ *и*

$$\gamma_0 = \| \gamma_{ij}(0) \|, \quad \gamma_{ij}(0) = \mathsf{M}[(\theta_i(0) - m_i(0))(\theta_j(0) - m_j(0))^*].$$

Система (10.81), (10.82) *имеет единственное решение* (*для* γ_t *в классе симметрических неотрицательно определенных матриц*).

Для доказательства понадобится следующая лемма.

Лемма 10.4. *Пусть* $W = ([W_1(t), \ldots, W_N(t)], \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *$N$-мерный винеровский процесс,* $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ — *матричный случайный процесс, где* $B_t = \| B_{ij}(t) \|_{(n \times N)}$, *и* P-п. н.

$$\operatorname{Sp} \int_0^T B_t B_t^* dt < \infty. \tag{10.83}$$

Пусть матричный процесс $D=(D_t, \mathcal{F}_t)$, $D_t=\| D_{ij}(t)\|_{(n\times k)}$, *таков, что для почти всех* t, $0\leqslant t\leqslant T$, **P**-п. н.

$$D_tD_t^*=B_tB_t^*. \tag{10.84}$$

Тогда *) *найдется* k-*мерный винеровский процесс* $\widetilde{W}=([\widetilde{W}_1(t), \ldots \ldots, \widetilde{W}_k(t)], \mathcal{F}_t)$ *такой, что для каждого* t, $0\leqslant t\leqslant T$, **P**-п. н.

$$\int_0^t B_s\,dW_s=\int_0^t D_s\,d\widetilde{W}_s. \tag{10.85}$$

Доказательство. Пусть исходное вероятностное пространство столь «богато», что на нем существует k-мерный винеровский процесс $Z=(z_t, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, не зависящий от винеровского процесса W. Положим

$$\widetilde{W}_t=\int_0^t D_s^+B_s\,dW_s+\int_0^t (E-D_s^+D_s)\,dz_s, \tag{10.86}$$

где E — единичная матрица порядка $(k\times k)$, а D_s^+ — псевдообратная матрица к D_s (гл. 13, § 1).

Процесс $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_s, \mathcal{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, является винеровским, поскольку в силу теоремы 4.2 он — (векторный) квадратично интегрируемый мартингал с непрерывными траекториями и

$$\mathsf{M}[(\widetilde{W}_t-\widetilde{W}_s)(\widetilde{W}_t-\widetilde{W}_s)^*\mid \mathcal{F}_s]=\mathsf{M}\left[\int_s^t D_u^+B_uB_u^*(D_u^+)^*\,du\mid \mathcal{F}_s\right]+$$
$$+\mathsf{M}\left[\int_s^t (E-D_u^+D_u)(E-D_u^+D_u)^*\,du\mid \mathcal{F}_s\right]=E(t-s)\qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.}),$$

где последнее равенство справедливо потому, что

$$D_u^+B_uB_u^+(D_u^+)^*=D_u^+D_uD_u^*(D_u^+)^*=D_u^+D_u(D_u^+D_u)^*=(D_u^+D_u)^2=D_u^+D_u,$$

а

$$(E-D_u^+D_u)(E-D_u^+D_u)^*=(E-D_u^+D_u)^2=E-D_u^+D_u$$

(см. гл. 13, § 1, п. 3).

*) Предполагается также, что исходное вероятностное пространство достаточно «богато».

Установим теперь справедливость равенства (10.85). Поскольку $D_s(E-D_s^+D_s)=D_s-D_sD_s^+D_s=0$ (**P**-п. н.), то в силу (10.86)

$$\int_0^t D_s\,d\widetilde{W}_s=\int_0^t D_sD_s^+B_s\,dW_s \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н}).$$

Далее,

$$\int_0^t D_sD_s^+B_s\,dW_s=\int_0^t B_s\,dW_s-\int_0^t (E-D_sD_s^+)\,B_s\,dW_s.$$

Положим $x_t=\int_0^t [E-D_s^+D_s]\,B_s\,dW_s$. Тогда

$$\mathbf{M}x_tx_t^*=\mathbf{M}\int_0^t (E-D_sD_s^+)\,B_sB_s^*(E-D_sD_s^+)^*\,ds=$$

$$=\mathbf{M}\int_0^t (E-D_sD_s^+)\,D_sD_s^*(E-D_sD_s^+)^*\,ds=0,$$

поскольку $(E-D_sD_s^+)\,D_s=0$. Следовательно, $x_t=0$ (**P**-п. н.), и, значит,

$$\int_0^t D_s\,d\widetilde{W}_s=\int_0^t D_sD_s^+B_s\,dW_s=\int_0^t B_s\,dW_s.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10.3. Покажем, что найдется такая блочная матрица

$$D_t=\begin{pmatrix} d_1(t) & d_2(t)\\ 0 & D_2(t)\end{pmatrix},$$

размеры блоков которой совпадают с размерами соответствующих блоков матрицы

$$B_t=\begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t)\\ B_1(t) & B_2(t)\end{pmatrix}$$

и при этом

$$D_tD_t^*=B_tB_t^*. \tag{10.87}$$

Ясно, что (10.87) эквивалентно системе матричных уравнений

$$\begin{aligned} d_1(t)\,d_1^*(t)+d_2(t)\,d_2^*(t)&=(b\circ b)(t),\\ d_2(t)\,D_2^*(t)&=(b\circ B)\,(t),\\ D_2(t)\,D_2^*(t)&=(B\circ B)(t).\end{aligned} \tag{10.88}$$

Матрицы D_t, $0\leqslant t\leqslant T$, с требуемыми свойствами строятся следующим образом. Положим (опуская для простоты индекс t)

$$D_2=D_2^*=(B\circ B)^{1/2}. \tag{10.89}$$

Тогда, поскольку матрица $B\circ B$ не вырождена, из второго равенства в (10.88) получаем

$$d_2=(b\circ B)(B\circ B)^{-1/2}. \tag{10.90}$$

Далее,

$$d_1d_1^*=(b\circ b)-(b\circ B)(B\circ B)^{-1}(b\circ B)^*. \tag{10.91}$$

По лемме 13.2 матрица $(b\circ b)-(b\circ B)(B\circ B)^{-1}(b\circ B)^*$ является неотрицательно определенной, и в качестве d_1 можно взять матрицу

$$d_1=d_1^*=\left[(b\circ b)-(b\circ B)(B\circ B)^{-1}(b\circ B)^*\right]^{1/2}. \tag{10.92}$$

Итак, блочная матрица

$$D_t=\begin{pmatrix} d_1(t) & d_2(t)\\ 0 & D_2(t)\end{pmatrix},$$

обладающая свойством (10.87), построена.

По лемме 10.4 для системы уравнений (10.62), (10.63) имеет место также представление

$$d\theta_t=[a_0(t)+a_1(t)\theta_t+a_2(t)\xi_t]dt+d_1(t)d\widetilde{W}_1(t)+d_2(t)d\widetilde{W}_2(t), \tag{10.93}$$

$$d\xi_t=[A_0(t)+A_1(t)\theta_t+A_2(t)\xi_t]dt+D_2(t)d\widetilde{W}_2(t), \tag{10.94}$$

где $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$ — новые винеровские процессы, независимые между собой.

Определим теперь случайный процесс $\nu=(\nu_t,\mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, являющийся решением линейного стохастического дифференциального уравнения

$$d\nu_t=\left\{\left[a_0(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_0(t)\right]+\left[a_1(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_1(t)\right]\nu_t+\right.$$
$$\left.+\left[a_2(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_2(t)\right]\xi_t\right\}dt+d_2(t)D_2^{-1}(t)d\xi_t,\quad \nu_0=0. \tag{10.95}$$

В силу сделанных в п. 1 предположений, формул (10.89), (10.90) и (10.92) и замечания к теореме 4.10 уравнение (10.95) имеет, и притом единственное, непрерывное решение $\nu=(\nu_t,\mathscr{F}_t^\xi)$. Положим

$$\tilde{\theta}_t=\theta_t-\nu_t,\quad \tilde{\xi}_t=\xi_t-\int_0^t[A_0(s)+A_1(s)\nu_s+A_2(s)\xi_s]ds. \tag{10.96}$$

В силу (10.94) и невырожденности матриц $D_2(t)$

$$\tilde{W}_2(t)=\int_0^t D_2^{-1}(s)\left[d\xi_s-\left(A_0(s)+A_1(s)\theta_s+A_2(s)\xi_s\right)ds\right] \tag{10.97}$$

(ср. с доказательством теоремы 5.12).

Из (10.95) — (10.97) находим

$$d\tilde{\theta}_t=\left[a_1(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_1(t)\right]\tilde{\theta}_t\,dt+d_1(t)\,d\tilde{W}_1(t), \tag{10.98}$$

$$d\tilde{\xi}_t=A_t(t)\tilde{\theta}_t\,dt+D_2(t)\,d\tilde{W}_2(t). \tag{10.99}$$

Из построения процесса $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ (см. (10.96)), следует, что $\mathcal{F}_t^{\xi}\supseteq\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}$. Покажем, что в действительности σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{\xi}$ и $\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}$ совпадают при всех t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Для доказательства рассмотрим линейную систему уравнений

$$d\xi_t=[A_0(t)+A_1(t)\nu_t+A_2(t)\xi_t]\,dt+d\tilde{\xi}_t,\quad \xi_0=\tilde{\xi}_0, \tag{10.100}$$

$$d\nu_t=\left[a_0(t)+a_1(t)\nu_t+a_2(t)\xi_t\right]dt+d_2(t)D_2^{-1}(t)\,d\tilde{\xi}_t,\ \nu_0=0, \tag{10.101}$$

получающуюся из (10.95), (10.96).

У этой линейной системы уравнений существует, и притом единственное, сильное решение (см. теорему 4.10 и замечание к ней), что влечет за собой включение $\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}\supseteq\mathcal{F}_t^{\xi}$, $0\leqslant t\leqslant T$. Там самым, $\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}=\mathcal{F}_t^{\xi}$, $0\leqslant t\leqslant T$, и

$$\tilde{m}_t=\mathsf{M}\left(\tilde{\theta}_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}\right)=\mathsf{M}\left(\tilde{\theta}_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right).$$

Поэтому

$$m_t=\mathsf{M}\left(\theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right)=\mathsf{M}\left[\tilde{\theta}_t+\nu_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right]=\tilde{m}_t+\nu_t \tag{10.102}$$

и

$$\tilde{\theta}_t-\tilde{m}_t=(\theta_t-\nu_t)-(m_t-\nu_t)=\theta_t-m_t.$$

Отсюда

$$\gamma_t=\tilde{\gamma}_t. \tag{10.103}$$

Согласно теореме 10.3

$$d\tilde{m}_t=\left[a_1(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_1(t)\right]\tilde{m}_t\,dt+ \\ +\tilde{\gamma}_tA_1^*(t)\left(D_2(t)D_2^*(t)\right)^{-1}\left(d\tilde{\xi}_t-A_1(t)\tilde{m}_t\,dt\right), \tag{10.104}$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}_t=\left[a_1(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_1(t)\right]\tilde{\gamma}_t+\tilde{\gamma}_t\left[a_1(t)-d_2(t)D_2^{-1}(t)A_1(t)\right]^*- \\ -\tilde{\gamma}_tA_1^*(t)\left(D_2(t)D_2^*(t)\right)^{-1}A_1(t)\tilde{\gamma}_t+d_1(t)d_1^*(t). \tag{10.105}$$

Отсюда с учетом того, что $m_t=\tilde{m}_t+\nu_t$ и $\gamma_t=\tilde{\gamma}_t$, после простых преобразований приходим к искомым уравнениям (10.81) и (10.82) для m_t и γ_t.

Единственность решения уравнения (10.82) следует из справедливости аналогичного факта для уравнения (10.105) и теоремы 10.2. Единственность решения уравнения (10.81) вытекает из его линейности, теоремы 4.10 и замечания к ней.

§ 4. Уравнения для почти оптимального линейного фильтра в случае вырождения матриц $B \circ B$

1. Снова рассмотрим $k+l$-мерный гауссовский процесс $(\theta_t, \xi_t) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, описываемый уравнениями (10.62), (10.63).

Предположим теперь, что матрицы $(B \circ B)(t) = B_1(t) B_1^*(t) + B_2(t) B_2^*(t)$ вырождаются *). В этом случае уравнения (10.81), (10.82), с помощью которых определялись условное математическое ожидание $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и матрица $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta_t - m_t) \times (\theta_t - m_t)^*]$ в случае положительно определенных матриц $(B \circ B)(t)$, теряют смысл, поскольку входящая в правую часть этих уравнений матрица $[(B \circ B)(t)]^{-1}$ не существует.

Если коэффициенты уравнений (10.62), (10.63) разрывны, то m_t и γ_t при вырожденных матрицах $(B \circ B)(t)$ не обязательно непрерывные функции времени и, следовательно, они не определяются уравнениями типа (10.81), (10.82).

В ряде частных случаев можно вывести уравнения для m_t и γ_t при вырожденных матрицах $(B \circ B)(t)$ (например, когда коэффициенты уравнений (10.62), (10.63) являются постоянными или достаточно гладкими функциями времени).

С прикладной точки зрения эти уравнения для m_t и γ_t при вырождении $(B \circ B)(t)$ не представляют ценности, потому что, как правило, содержат производные по времени от реализаций компонент наблюдаемого процесса ξ_t или же от их линейных комбинаций **), которые нельзя вычислить без больших погрешностей в реальной ситуации.

Ниже для каждого $\varepsilon \neq 0$ будут построены процессы m_t^ε и γ_t^ε, $0 \leqslant t \leqslant T$, которые в определенном смысле близки к m_t и γ_t. Эти процессы определяются из уравнений типа (10.81) и (10.82) для неотрицательно определенных матриц $(B \circ B)(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и задают фильтр, который, следуя терминологии, принятой у специалистов по некорректным задачам, можно было бы назвать «регуляризованным» фильтром.

2. Пусть $a_2(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv 0$. Наряду с процессами θ_t, ξ_t введем процесс $\xi^\varepsilon = (\xi_t^\varepsilon)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с

$$\xi_t^\varepsilon = \xi_t + \varepsilon \widetilde{W}_t, \quad \varepsilon \neq 0, \tag{10.106}$$

*) Этот случай возникает, например, в задачах линейной фильтрации стационарных процессов дробно-рациональным спектром (§ 3 гл. 15).

**) См. [43], [110], [172].

где $\tilde{W}_t = [\tilde{W}_1(t), \ldots, \tilde{W}_l(t)]$, $t \leqslant T$, — винеровский процесс, не зависящий от (θ_0, ξ_0) и процессов W_1, W_2.

Поскольку $a_2(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv 0$, то из (10.61), (10.62) и (10.106) следует, что процесс $(\theta_t, \xi_t^\varepsilon)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет системе уравнений

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]\,dt + b_1(t)\,dW_1(t) + b_2(t)\,dW_2(t), \tag{10.107}$$

$$d\xi_t^\varepsilon = [A_0(t) + A_1(t)\theta_t] + B_1(t)\,dW_1(t) + B_2(t)\,dW_2(t) + \varepsilon\,d\tilde{W}_t, \tag{10.108}$$

решаемых при начальных условиях θ_0 и $\xi_0^\varepsilon = \xi_0$.

Обозначим $n_t^\varepsilon = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)$, $\gamma_t^\varepsilon = \mathsf{M}\left[(\theta_t - n_t^\varepsilon)(\theta_t - n_t^\varepsilon)^*\right]$. По лемме 10.4 и теореме 10.3 n_t^ε и γ_t^ε определяются из уравнений

$$\begin{aligned} dn_t^\varepsilon &= [a_0(t) + a_1(t)n_t^\varepsilon]\,dt + \\ &+ \left[(b \circ B(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B \circ B)(t) + \varepsilon^2 E\right]^{-1}\left[d\xi_t^\varepsilon - \left(A_0(t) + A_1(t)n_t^\varepsilon\right)dt\right], \end{aligned} \tag{10.109}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_t^\varepsilon &= a_1(t)\gamma_t^\varepsilon + \gamma_t^\varepsilon a_1^*(t) + (b \circ b)(t) - \\ &- \left[(b \circ B)(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B \circ B)(t) + \varepsilon^2 E\right]^{-1}\left[(b \circ B)(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]^* \end{aligned} \tag{10.110}$$

с $n_0^\varepsilon = m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0)$, $\gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 = \mathsf{M}\left[(\theta_0 - m_0)(\theta_0 - m_0)^*\right]$, где $E = E_{(l \times l)}$ — единичная матрица.

Зададим процессы $\lambda_t^\varepsilon = \lambda_t^\varepsilon(\xi)$, $\Delta_t^\varepsilon = \Delta_t^\varepsilon(\tilde{W})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с $\lambda_t^\varepsilon = [\lambda_1^\varepsilon(t), \ldots, \lambda_k^\varepsilon(t)]$, $\Delta_t^\varepsilon = [\Delta_1^\varepsilon(t), \ldots, \Delta_k^\varepsilon(t)]$ с помощью следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\lambda_t^\varepsilon &= [a_0(t) + a_1(t)\lambda_t^\varepsilon]\,dt + \\ &+ \left[(b \circ B)(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B \circ B)(t) + \varepsilon^2 E\right]^{-1}\left[d\xi_t - \left(A_0(t) + A_1(t)\lambda_t^\varepsilon\right)dt\right], \\ \lambda_0^\varepsilon &= m_0, \end{aligned} \tag{10.111}$$

$$\begin{aligned} d\Delta_t^\varepsilon &= a_1(t)\Delta_t^\varepsilon\,dt + \\ &+ \left[(b \circ B)(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B \circ B)(t) + \varepsilon^2 E\right]^{-1}\left[\varepsilon\,d\tilde{W}_t - A_1(t)\Delta_t^\varepsilon\,dt\right], \\ \Delta_0^\varepsilon &= 0. \end{aligned} \tag{10.112}$$

Нетрудно проверить, в силу (10.108), (10.111) и (10.112), что для каждого $0 \leqslant t \leqslant T$

$$n_t^\varepsilon = n_t^\varepsilon(\xi^\varepsilon) = \lambda_t^\varepsilon(\xi) + \Delta_t^\varepsilon(\tilde{W}). \tag{10.113}$$

Определим матрицу $\delta_t^\varepsilon = \|\delta_{ij}^\varepsilon(t)\|_{(k \times k)} = \mathsf{M}\left[(\theta_t - \lambda_t^\varepsilon)(\theta_t - \lambda_t^\varepsilon)^*\right]$.

Лемма 10.5. *Пусть выполнены условия* (10.64) — (10.67). *Тогда для любого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

1) $\mathsf{M}\lambda_t^\varepsilon = \mathsf{M}\theta_t$,

2) $\gamma_{ii}(t) \leqslant \delta_{ii}^\varepsilon(t) \leqslant \gamma_{ii}^\varepsilon(t)$, $i = 1, \ldots, k$,

3) $\gamma_t = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_t^\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma_t^\varepsilon$,

4) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathsf{M}\left[m_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t)\right]^2 = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Имеем (см. 10.106): $\xi_i^\varepsilon(s) = \xi_i(s) + \varepsilon \widetilde{W}_i(s)$. Для каждого $s \leqslant t$ $\mathsf{M}\left[\xi_i(s) \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right]$ является оптимальной, в среднеквадратическом смысле, оценкой для $\xi_i(s)$ по $\left\{\xi_u^\varepsilon,\ 0 \leqslant u \leqslant t\right\}$. Поэтому

$$\mathsf{M}\left[\xi_i(s) - \mathsf{M}\left(\xi_i(s) \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 \leqslant \mathsf{M}\left[\xi_i(s) - \xi_i^\varepsilon(s)\right]^2 = \\ = \varepsilon^2 \mathsf{M}(\widetilde{W}_i(s))^2 = \varepsilon^2 s \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда нетрудно вывести, что для всякой случайной величины e_n, являющейся линейной функцией от $\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathsf{M}\left[e_n - \mathsf{M}\left(e_n \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 = 0.$$

Далее, если последовательность $(e_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ случайных величин e_n, определенных выше, имеет предел e в среднем квадратическом ($e = \underset{n}{\mathrm{l.i.m.}}\, e_n$), то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathsf{M}\left[e - \mathsf{M}\left(e \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 = 0, \tag{10.114}$$

поскольку

$$\mathsf{M}\left[e - \mathsf{M}\left(e \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 \leqslant \\ \leqslant 3\left(\mathsf{M}\left[e - e_n\right]^2 + \mathsf{M}\left[e_n - \mathsf{M}\left(e_n \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 + \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(e - e_n \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2\right) \leqslant \\ \leqslant 6\mathsf{M}\left[e - e_n\right]^2 + 3\mathsf{M}\left[e_n - \mathsf{M}\left(e_n \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2,$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \mathsf{M}\left[e - \mathsf{M}\left(e \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2 \leqslant 6\mathsf{M}\left[e - e_n\right]^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Заметим теперь, что компоненты $m_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, случайного вектора $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$ являются пределом в среднем квадратическом последовательности случайных величин типа e_n, $n = 1, 2, \ldots$ Действительно, если $\mathscr{F}_{t,n}^\xi = \sigma\left\{\omega\colon \xi_0, \xi_{2^{-n}}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \xi_{k \cdot 2^{-n}}, \ldots, \xi_t\right\}$, то по теореме о нормальной корреляции (см. гл. 13) компоненты $m_i^{(n)}(t)$, $i=1, \ldots, k$, вектора $m_t^{(n)}= = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_{t,n}^{\xi})$ линейно выражаются через ξ_0, ξ_{2-n}, ..., $\xi_{k\cdot 2-n}$, ..., ξ_t. При этом согласно теореме 1.5 $m_i^{(n)}(t) \to m_i(t)$ с вероятностью единица. Но $\mathsf{M}[m_i^{(n)}(t)]^4 \leqslant \mathsf{M}\theta_i^4(t)$ равномерно по всем n. Поэтому по теореме 1.8 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}[m_i(t)-m_i^{(n)}(t)]^2=0$.

Итак, в силу (10.114) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{M}\left[m_i(t)-\mathsf{M}\left(m_i(t) \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)\right]^2=0. \tag{10.115}$$

Из определения процесса ξ^ε (см. (10.106)) следует, что для любого $0 \leqslant t \leqslant T$ совпадают σ-алгебры $\mathscr{F}_t^{\xi,\xi^\varepsilon}$ и $\mathscr{F}_t^{\xi,\tilde{W}}$, откуда, используя независимость процессов (θ_t, ξ_t) и $(\tilde{W}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, находим, что P-п. н.

$$\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi,\xi^\varepsilon}\right)=\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi,\tilde{W}}\right)=\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi}\right)=m_t,$$

откуда в силу свойства условного математического ожидания получаем

$$\mathsf{M}\left(m_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right)=\mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi,\xi^\varepsilon}\right) \mid \mathscr{F}_t^{\xi^\varepsilon}\right]=n_t^\varepsilon. \tag{10.116}$$

Но тогда в силу (10.115) и (10.116)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{M}\left[n_i^\varepsilon(t)-m_i(t)\right]^2=0. \tag{10.117}$$

Из (10.117) легко выводится, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_t^\varepsilon=\gamma_t. \tag{10.118}$$

Установим теперь утверждение 1) леммы. Для этого рассмотрим процесс $[\theta_t-\lambda_t^\varepsilon]$, определяемый, в соответствии с (10.107) и (10.111), уравнением

$$[\theta_t-\lambda_t^\varepsilon]=[\theta_0-m_0]+\int_0^t (a_1(s)-D(s)A_1(s))[\theta_s-\lambda_s^\varepsilon]\,ds+ \\ +\sum_{i=1}^{2}\int_0^t [b_i(s)+D(s)B_i(s)]\,dW_i(s),$$

где $D(s)=\left[b\circ b(s)+\gamma_s^\varepsilon A_1^*(s)\right](B\circ B(s)+\varepsilon^2 E)^{-1}$, согласно которому, очевидно,

$$\mathsf{M}[\theta_t-\lambda_t^\varepsilon]=\int_0^t (a_1(s)-D(s)A_1(s))\,\mathsf{M}[\theta_s-\lambda_s^\varepsilon]\,ds, \tag{10.119}$$

и, следовательно, $\mathsf{M}[\theta_t-\lambda_t^\varepsilon]\equiv 0$.

Итак, утверждение 1) леммы доказано.

Из несмещенности $\lambda_t^\varepsilon (\mathsf{M}\lambda_t^\varepsilon = \mathsf{M}\theta_t)$ и (10.113) вытекает, что

$$\gamma_{ii}^\varepsilon(t) = \mathsf{M}\left[\theta_i(t) - n_i^\varepsilon(t)\right]^2 =$$
$$= \mathsf{M}\left[\theta_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t)\right]^2 + \mathsf{M}\left[\Delta_i^\varepsilon(t)\right]^2 \geqslant \mathsf{M}\left[\theta_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t)\right]^2 = \delta_{ii}^\varepsilon(t),$$

что вместе с (10.118) доказывает утверждения 2) и 3) леммы.

Наконец,

$$\gamma_{ii}(t) = \mathsf{M}\left[\theta_i(t) - m_i(t)\right]^2 = \mathsf{M}\left[(\theta_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t)) + (\lambda_i^\varepsilon(t) - m_i(t))\right]^2 =$$
$$= \delta_{ii}^\varepsilon(t) - \mathsf{M}\left[\lambda_i^\varepsilon(t) - m_i(t)\right]^2,$$

поскольку

$$\mathsf{M}\left[(\theta_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t))(\lambda_i^\varepsilon(t) - m_i(t))\right] =$$
$$= \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(\theta_i(t) - \lambda_i^\varepsilon(t) \mid \mathscr{F}_t^\xi)(\lambda_i^\varepsilon(t) - m_i(t))\right] = -\mathsf{M}\left[\lambda_i^\varepsilon(t) - m_i(t)\right]^2,$$

что доказывает утверждение 4), так как $\delta_{ii}^\varepsilon(t) \to \gamma_{ii}(t)$, $\varepsilon \to 0$.

3. Из леммы 10.5 вытекает, что при $a_2(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv 0$ в качестве почти оптимальной оценки θ_t по ξ_0^t можно выбрать λ_t^ε, где процесс λ_t^ε вместе с γ_t^ε определяется из уравнений (10.111) и (10.110).

Если же $a_2(t) \not\equiv 0$, $A_2(t) \not\equiv 0$, то по аналогии с уравнением (10.111) определим m_t^ε как решение уравнения

$$dm_t^\varepsilon = \left[a_0(t) + a_1(t)\, m_t^\varepsilon + a_2(t)\, \xi_t\right] dt +$$
$$+ \left[(b \circ B)(t) + \gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B \circ B)(t) + \varepsilon^2 E\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[d\xi_t - (A_0(t) + A_1(t)\, m_t^\varepsilon + A_2(t)\, \xi_t)\, dt\right], \qquad (10.120)$$

где $m_0^\varepsilon = m_0$, а γ_t^ε по-прежнему находится из уравнений (10.110).

Теорема 10.4. *Пусть выполнены условия* (10.64) — (10.67). *Тогда процесс* (m_t^ε), $0 \leqslant t \leqslant T$, *определяемый из уравнений* (10.120) *и* (10.110), *задает оценку вектора* θ_t *по* ξ_0^t, *обладающую следующими свойствами*:

$$\mathsf{M} m_t^\varepsilon = \mathsf{M}\theta_t,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathsf{M}\left[m_i^\varepsilon(t) - m_i(t)\right]^2 = 0, \qquad i = 1, \ldots, k, \qquad (10.121)$$
$$\gamma_{ii}(t) \leqslant \mathsf{M}\left[\theta_i(t) - m_i^\varepsilon(t)\right]^2 \leqslant \gamma_{ii}^\varepsilon(t), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Матрица среднеквадратичных ошибок $\Gamma_t^\varepsilon = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t^\varepsilon)(\theta_t - m_t^\varepsilon)^*\right]$ *определяется из уравнения*

$$\dot{\Gamma}_t^\varepsilon = a^\varepsilon(t)\, \Gamma_t^\varepsilon + \Gamma_t^\varepsilon (a^\varepsilon(t))^* + \sum_{i=1}^{2} (b_i^\varepsilon(t))(b_i^\varepsilon(t))^* \qquad (10.122)$$

с $\Gamma_0^\varepsilon=\gamma_0$ и

$$a^\varepsilon(t)=a_1(t)-\left[(b\circ B)(t)+\gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B\circ B)(t)+\varepsilon^2E\right]^{-1}A_1(t),$$

$$b_i^\varepsilon(t)=b_i(t)-\left[(b\circ B)(t)+\gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)\right]\left[(B\circ B)(t)+\varepsilon^2E\right]^{-1}B_i(t),\quad i=1,\ 2.$$

Доказательство. Если $a_2(t)\equiv 0$, $A_2(t)\equiv 0$, то, очевидно, $m_t^\varepsilon=\lambda_t^\varepsilon$, $0\leqslant t\leqslant T$, и в силу леммы 10.5 выполнены свойства (10.121) оценки m_t^ε. Чтобы в рассматриваемом случае вывести уравнение (10.122), положим $V_t^\varepsilon=\theta_t-\lambda_t^\varepsilon$. Тогда

$$dV_t^\varepsilon=a^\varepsilon(t)\,V_t^\varepsilon\,dt+\sum_{i=1}^{2}b_i^\varepsilon(t)\,dW_i(t)$$

и в силу формулы Ито

$$\begin{aligned}V_t^\varepsilon(V_t^\varepsilon)^*&=V_0^\varepsilon(V_0^\varepsilon)^*+\\&+\int_0^t\left[a^\varepsilon(s)\,V_s^\varepsilon(V_s^\varepsilon)^*+V_s^\varepsilon(V_s^\varepsilon)^*(a^\varepsilon(s))^*+\sum_{i=1}^{2}b_i^\varepsilon(s)(b_i^\varepsilon(s))^*\right]ds+\\&\qquad+\int_0^t V_s^\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{2}b_i^\varepsilon(s)\,dW_i(s)\right)^*+\int_0^t\sum_{i=1}^{2}\left(b_i^\varepsilon(s)\,dW_i(s)\right)(V_s^\varepsilon)^*.\end{aligned}$$

Отсюда после усреднения получаем для $\Gamma_t^\varepsilon=\mathsf{M}V_t^\varepsilon(V_t^\varepsilon)^*$ уравнение (10.122).

Пусть теперь $a_2(t)\not\equiv 0$, $A_2(t)\not\equiv 0$. Введем в рассмотрение процессы $\nu=(\nu_t)$, $\tilde\xi=(\tilde\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\nu_t=\int_0^t[a_1(s)\,\nu_s+a_2(s)\,\xi_s]\,ds,\tag{10.123}$$

$$\tilde\xi_t=\xi_t-\int_0^t[A_1(s)\,\nu_s+A_2(s)\,\xi_s]\,ds,\tag{10.124}$$

и положим $\tilde\theta_t=\theta_t-\nu_t$. Тогда из (10.62), (10.63) и (10.123), (10.124) найдем

$$d\tilde\theta_t=[a_0(t)+a_1(t)\,\tilde\theta_t]\,dt+b_1(t)\,dW_1(t)+b_2(t)\,dW_2(t),\tag{10.125}$$

$$d\tilde\xi_t=[A_0(t)+A_1(t)\,\tilde\theta_t]\,dt+B_1(t)\,dW_1(t)+B_2(t)\,dW_2(t)\tag{10.126}$$

с $\tilde\theta_0=\theta_0$, $\tilde\xi_0=\xi_0$.

Если оценивать $\tilde{\theta}_t$ по $\tilde{\xi}_0^t$, то согласно (10.120) (при $a_2(t)\equiv 0$, $A_2(t)\equiv 0$) соответствующая оценка $\tilde{m}_t^\varepsilon$ задается уравнением

$$d\tilde{m}_t^\varepsilon = [a_0(t)+a_1(t)\tilde{m}_t^\varepsilon]\,dt +$$
$$+[b\circ B(t)+\gamma_t^\varepsilon A_1^*(t)](B\circ B(t)+\varepsilon^2 E)^{-1}[d\tilde{\xi}_t-(A_0(t)+A_1(t)\,m_t^\varepsilon)\,dt],$$
$$\tilde{m}_0^\varepsilon = m_0. \tag{10.127}$$

Из (10.123) и (10.124) нетрудно вывести (ср. с доказательством теоремы 10.3), что σ-алгебры $\mathscr{F}_t^\xi$ и $\mathscr{F}_t^{\tilde{\xi}}$, $0\leqslant t\leqslant T$, совпадают. Поэтому, обозначая $\tilde{m}_t=\mathsf{M}(\tilde{\theta}_t\,|\,\mathscr{F}_t^{\tilde{\xi}})$, находим, что

$$m_t=\mathsf{M}(\theta_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)=\mathsf{M}(\tilde{\theta}_t+\nu_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)=\mathsf{M}(\tilde{\theta}_t\,|\,\mathscr{F}_t^{\tilde{\xi}})+\nu_t=\tilde{m}_t+\nu_t.$$

Положим $m_t^\varepsilon=\tilde{m}_t^\varepsilon+\nu_t$. Тогда $m_t-m_t^\varepsilon=\tilde{m}_t-\tilde{m}_t^\varepsilon$ и, следовательно, оценка m_t обладает указанными свойствами (10.121). Искомое уравнение (10.120) следует из равенства $m_t^\varepsilon=\tilde{m}_t^\varepsilon+\nu_t$ и (10.127), (10.123) и (10.124). Уравнение (10.122) справедливо и для случая $a_2(t)\not\equiv 0$, $A_2(t)\not\equiv 0$, поскольку $\theta_t-m_t^\varepsilon=\tilde{\theta}_t-\tilde{m}_t^\varepsilon=\tilde{V}_t^\varepsilon$ и нетрудно проверить, что $\mathsf{M}\tilde{V}_t^\varepsilon(\tilde{V}_t^\varepsilon)^*=\mathsf{M}V_t^\varepsilon(V_t^\varepsilon)^*$, $0\leqslant t\leqslant T$.

ГЛАВА 11

УСЛОВНО-ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Предположения и формулировка теоремы об условной гауссовости

1. Пусть $(\theta, \xi)=(\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс с ненаблюдаемой первой компонентой и наблюдаемой второй. При использовании уравнений оптимальной нелинейной фильтрации (8.9) для нахождения $\pi_t(\theta)=\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi})$ приходится сталкиваться с существенной трудностью, заключающейся в том, что для отыскания $\pi_t(\theta)$ требуется знать условные моменты старших порядков

$$\pi_t(\theta^2)=\mathsf{M}(\theta_t^2 \mid \mathscr{F}_t^{\xi}), \qquad \pi_t(\theta^3)=\mathsf{M}(\theta_t^3 \mid \mathscr{F}_t^{\xi}), \ \ldots$$

Возникающая таким образом «незамкнутость» уравнений (8.9) заставляет искать дополнительные соотношения между моментами старших порядков, которые позволили бы получить замкнутую систему уравнений.

В случае, рассмотренном в предшествующей главе, случайный процесс (θ, ξ) был гауссовским, что дало *дополнительное соотношение*

$$\pi_t(\theta^3)=3\pi_t(\theta)\,\pi_t(\theta^2)-2[\pi_t(\theta)]^3, \tag{11.1}$$

позволившее для апостериорного среднего $\pi_t(\theta)=\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}^{\xi})$ и апостериорной дисперсии $\gamma_t(\theta)=\pi_t(\theta^2)-[\pi_t(\theta)]^2$ получить из (8.9) замкнутую систему уравнений (10.10) — (10.11).

В настоящей главе будет рассмотрен один класс случайных процессов $(\theta, \xi)=(\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которые хотя и не являются гауссовскими, обладают тем важным свойством (обеспечивающим, в частности, равенство (11.1)), что P-п. н. условное распределение $F_{\xi_0^t}(x)=\mathsf{P}\{\theta_t \leqslant x \mid \mathscr{F}_t^{\xi}\}$ является гауссовским.

Для таких процессов (мы их называем условно-гауссовскими) решение задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции становится столь же эффективным, как и в случае гауссовского процесса (θ, ξ), рассмотренного в гл. 10. Детальное исследование этих задач содержится в следующей главе.

2. Перейдем к описанию рассматриваемых процессов и формулировкам основных предположений.

Будем считать заданными некоторое (полное) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с неубывающим непрерывным справа семейством σ-подалгебр $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $W_1 = (W_1(t), \mathcal{F}_t)$, $W_2 = (W_2(t), \mathcal{F}_t)$ — независимые между собой винеровские процессы. Случайные величины θ_0, ξ_0 предполагаются не зависящими от винеровских процессов W_1 и W_2.

Пусть $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является (непрерывным) процессом диффузионного типа с

$$d\theta_t = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + \\ + b_1(t, \xi)\,dW_1(t) + b_2(t, \xi)\,dW_2(t), \tag{11.2}$$

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + B(t, \xi)\,dW_2(t). \tag{11.3}$$

Каждый из (измеримых) функционалов $a_i(t, x)$, $A_i(t, x)$, $b_j(t, x)$, $B(t, x)$, $i = 0, 1$, $j = 1, 2$, предполагается неупреждающим (т. е. $\mathcal{B}_t$-измеримым, где $\mathcal{B}_t$ — σ-алгебра в пространстве $\mathbf{C}_T$ непрерывных функций $x = \{x_s, s \leqslant T\}$, порожденная значениями x_s, $s \leqslant t$).

Предполагается, что для каждого $x \in \mathbf{C}_T$

$$\int_0^T \Bigl(\sum_{i=0,1} \{|a_i(t, x)| + |A_i(t, x)|\} + \\ + \sum_{j=1,2} b_j^2(t, x) + B^2(t, x)\Bigr)\,dt < \infty. \tag{11.4}$$

Наряду с условием (11.4), обеспечивающим существование интегралов в (11.2), (11.3), будут предполагаться выполненными следующие условия:

для каждого $x \in \mathbf{C}_T$

$$\int_0^T [A_0^2(t, x) + A_1^2(t, x)]\,dt < \infty; \tag{11.5}$$

$$\inf_{x \in \mathbf{C}} B^2(t, x) \geqslant C > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{11.6}$$

для любых $x, y \in \mathbf{C}_T$

$$|B(t, x) - B(t, y)|^2 \leqslant L_1 \int_0^t |x_s - y_s|^2\,dK(s) + L_2|x_t - y_t|^2, \tag{11.7}$$

$$B^2(t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\,dK(s) + L_2(1 + x_t^2), \tag{11.8}$$

где $K(s)$ — *неубывающая непрерывная справа функция*, $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$;

$$\int_0^T \mathsf{M}\,|A_1(t,\ \xi)\,\theta_t\,|\,dt < \infty; \tag{11.9}$$

$$\mathsf{M}\,|\,\theta_t\,| < \infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{11.10}$$

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T A_1^2(t,\ \xi)\,m_t^2\,dt < \infty\right\} = 1, \tag{11.11}$$

где $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$.

Следующий результат является основным в данной главе.

Теорема 11.1. *Пусть выполнены условия* (11.4) — (11.11) *и с вероятностью* 1 *условное распределение* $F_{\xi_0}(a) = \mathsf{P}\left(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0\right)$ *является гауссовским*, $N(m_0,\ \gamma_0)$, *с* $0 \leqslant \gamma_0 < \infty$.

Тогда случайный процесс $(\theta,\ \xi) = (\theta_t,\ \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *удовлетворяющий уравнениям* (11.2), (11.3), *является условно-гауссовским, т. е. для любых* t *и* $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant t$ *условные распределения*

$$F_{\xi_0^t}(x_0,\ \ldots,\ x_n) = \mathsf{P}\left(\theta_{t_0} \leqslant x_0,\ \ldots,\ \theta_{t_n} \leqslant x_n \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$$

являются (P-п. н.) *гауссовскими*.

Доказательство этой теоремы, данное ниже в § 3, опирается на ряд вспомогательных результатов, собранных в следующем параграфе.

§ 2. Вспомогательные предложения

1. Пусть $\eta = (\eta_t,\ \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, обозначает любой из процессов $\xi = (\xi_t,\ \mathscr{F}_t)$ или $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_t,\ \mathscr{F}_t)$, где ξ является наблюдаемой компонентой процесса $(\theta,\ \xi)$ с дифференциалом

$$d\xi_t = [A_0(t,\ \xi) + A_1(t,\ \xi)\,\theta_t]\,dt + B(t,\ \xi)\,dW_2(t), \tag{11.12}$$

а $\tilde{\xi}$ есть решение уравнения

$$d\tilde{\xi}_t = B(t,\ \tilde{\xi})\,dW_2(t), \qquad \tilde{\xi}_0 = \xi_0. \tag{11.13}$$

В силу предположений *) (11.4) — (11.11) и теоремы 4.6 это уравнение имеет (и притом единственное) непрерывное решение.

Обозначим

$$\tilde{a}_0(t,\ x) = a_0(t,\ x) - \frac{b_2(t,\ x)}{B(t,\ x)}\,A_0(t,\ x), \tag{11.14}$$

$$\tilde{a}_1(t,\ x) = a_1(t,\ x) - \frac{b_2(t,\ x)}{B(t,\ x)}\,A_1(t,\ x) \tag{11.15}$$

---

*) На протяжении всего этого параграфа предполагаются выполненными условия (11.4) — (11.11).

и рассмотрим уравнение (относительно $\tilde{\theta}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\tilde{\theta}_t = \theta_0 + \int_0^t [\tilde{a}_0(s, \eta) + \tilde{a}_1(s, \eta)\tilde{\theta}_s]\,ds + \int_0^t b_1(s, \eta)\,dW_1(s) + \int_0^t \frac{b_2(s, \eta)}{B(s, \eta)}\,d\eta_s. \qquad (11.16)$$

Лемма 11.1. *Уравнение* (11.16) *имеет* (*и притом единственное*) *непрерывное,* $\mathcal{F}_t^{\theta_0, W_1, \eta}$*-измеримое при каждом* t *решение* $\tilde{\theta}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *задаваемое формулой*

$$\tilde{\theta}_t = \Phi_t(\eta)\left[\theta_0 + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\eta)\tilde{a}_0(s, \eta)\,ds + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\eta)\,b_1(s, \eta)\,dW_1(s) + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\eta)\frac{b_2(s, \eta)}{B(s, \eta)}\,d\eta_s\right], \qquad (11.17)$$

где

$$\Phi_t(\eta) = \exp\left\{\int_0^t \tilde{a}_1(s, \eta)\,ds\right\}. \qquad (11.18)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что в силу предположений (11.4)—(11.6) определены все интегралы, входящие в (11.17) и (11.18).

Применяя теперь формулу Ито, убеждаемся, что задаваемый правой частью (11.17) процесс $\tilde{\theta}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет уравнению (11.16). Так что для завершения доказательства леммы надо установить лишь единственность решения этого уравнения.

Пусть $\Delta_t = \tilde{\theta}_t - \tilde{\theta}'_t$ — разность двух непрерывных решений уравнения (11.16). Тогда

$$\Delta_t = \int_0^t \tilde{a}_1(s, \eta)\Delta_s\,ds$$

и, следовательно,

$$|\Delta_t| \leqslant \int_0^t |\tilde{a}_1(s, \eta)||\Delta_s|\,ds,$$

Отсюда по лемме 4.13 получаем: $|\Delta_t| = 0$ (**P**-п.н.) для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\Delta_t| > 0\} = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $\eta = \xi$. В этом случае $\tilde{\theta}_t$ является $\mathscr{F}_t^{\theta_0, W_1, \xi}$-измеримой случайной величиной. Согласно лемме 4.9 существует функционал $Q_t(a, x, y)$, определенный на $([0, T] \times R^1 \times \mathbf{C}_T \times \mathbf{C}_T)$ и являющийся при каждых t и a $\mathscr{B}_{t+} \times \mathscr{B}_{t+}$-измеримым, такой, что для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\tilde{\theta}_t = Q_t(\theta_0, W_1, \xi) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Пользуясь введенными выше обозначениями (11.14) и (11.15) уравнение (11.2) можно записать в следующем виде:

$$d\theta_t = [\tilde{a}_0(t, \xi) + \tilde{a}_1(t, \xi)\,\theta_t]\,dt + b_1(t, \xi)\,dW_1(t) + \frac{b_2(t, \xi)}{B(t, \xi)}\,d\xi_t.$$

Сравнивая это уравнение с (11.16), замечаем, что в силу леммы 11.1 для почти каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\theta_t = Q_t(\theta_0, W_1, \xi) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \tag{11.19}$$

Отсюда и из (11.3) вытекает, что процесс $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, допускает стохастический дифференциал

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,Q_t(\theta_0, W_1, \xi)]\,dt + B(t, \xi)\,dW_2(t). \tag{11.20}$$

2. Рассмотрим теперь два случайных процесса $(\alpha, \beta, \xi) = [(\alpha_t, \beta_t, \xi_t), \mathscr{F}_t]$ и $(\alpha, \beta, \tilde{\xi}) = [(\alpha_t, \beta_t, \tilde{\xi}_t), \mathscr{F}_t]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, задаваемых уравнениями

$$\begin{aligned} d\alpha_t &= 0, \qquad \alpha_0 = \theta_0, \\ d\beta_t &= dW_1(t), \quad \beta_0 = 0, \\ d\xi_t &= [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,Q_t(\alpha, \beta, \xi)]dt + B(t, \xi)dW_2(t) \end{aligned} \tag{11.21}$$

и

$$\begin{aligned} d\alpha_t &= 0, \qquad \alpha_0 = \theta_0, \\ d\beta_t &= dW_1(t), \qquad \beta_0 = 0, \\ d\tilde{\xi}_t &= B(t, \tilde{\xi})dW_2(t), \quad \tilde{\xi}_0 = \xi_0, \end{aligned} \tag{11.22}$$

соответственно.

Пусть $\mu_{\alpha, \beta, \xi}\,(= \mu_{\theta_0, W_1, \xi})$ и $\mu_{\alpha, \beta, \tilde{\xi}}\,(= \mu_{\theta_0, W_1, \tilde{\xi}})$ — меры, отвечающие процессам (α, β, ξ) и $(\alpha, \beta, \tilde{\xi})$.

Лемма 11.2. *Меры* $\mu_{\alpha,\beta,\xi}$ *и* $\mu_{\alpha,\beta,\tilde\xi}$ *эквивалентны,*

$$\mu_{\alpha,\beta,\xi} \sim \mu_{\alpha,\beta,\tilde\xi}. \tag{11.23}$$

При этом

$$\varphi_t(\alpha,\beta,\tilde\xi) = \frac{d\mu_{\alpha,\beta,\xi}}{d\mu_{\alpha,\beta,\tilde\xi}}(t,\alpha,\beta,\tilde\xi) \quad \text{и} \quad \psi_t(\alpha,\beta,\xi) = \frac{d\mu_{\alpha,\beta,\tilde\xi}}{d\mu_{\alpha,\beta,\xi}}(t,\alpha,\beta,\xi)$$

задаются формулами

$$\varphi_t(\alpha,\beta,\tilde\xi) = \exp\left\{\int_0^t \frac{A_0(s,\tilde\xi)+A_1(s,\tilde\xi)\,Q_s(\alpha,\beta,\tilde\xi)}{B^2(s,\tilde\xi)}\,d\tilde\xi_s - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{[A_0(s,\tilde\xi)+A_1(s,\tilde\xi)\,Q_s(\alpha,\beta,\tilde\xi)]^2}{B^2(s,\tilde\xi)}\,ds\right\}, \tag{11.24}$$

$$\psi_t(\alpha,\beta,\xi) = \exp\left\{-\int_0^t \frac{A_0(s,\xi)+A_1(s,\xi)\,Q_s(\alpha,\beta,\xi)}{B^2(s,\xi)}\,d\xi_s + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{[A_0(s,\xi)+A_1(s,\xi)\,Q_s(\alpha,\beta,\xi)]^2}{B^2(s,\xi)}\,ds\right\}. \tag{11.25}$$

Доказательство. Отметим сначала, что (см. гл. 13, § 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B^2(t,x) \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B^{-2}(t,x) \end{pmatrix}. \tag{11.26}$$

Поскольку $\theta_t = Q_t(\theta_0, W, \xi) = Q_t(\alpha,\beta,\xi)$ при почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$ P-п.н. и выполнены условия (11.2) и (11.3), то

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t \frac{[A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)\,Q_t(\alpha,\beta,\xi)]^2}{B^2(t,\xi)}\,dt < \infty\right\} = 1.$$

Тогда в силу многомерного аналога теоремы 7.20 $\mu_{\alpha,\beta,\tilde\xi} \ll \mu_{\alpha,\beta,\xi}$.

Согласно лемме 4.9 существует измеримый функционал $\tilde Q_t(a,x,y)$, определенный на $([0,T]\times R^1\times C_T\times C_T)$ и являющийся при каждых t и a $\mathscr{B}_{t+}\times\mathscr{B}_{t+}$-измеримым и таким, что при почти всех $0\leqslant t\leqslant T$ P-п.н.

$$\tilde\theta_t^{\tilde\xi} = \tilde Q_t(\theta_0, W_1, \tilde\xi),$$

где $\tilde\theta_t^{\tilde\xi}$, $0\leqslant t\leqslant T$,—решение уравнения (11.16) при $\eta=\tilde\xi$.

По лемме 4.10 при почти всех $0\leqslant t\leqslant T$ P-п.н.

$$Q_t(\alpha,\beta,\xi) = \tilde Q_t(\alpha,\beta,\xi).$$

Значит, процесс $\xi=(\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеет также дифференциал (ср. с (11.20))

$$d\xi_t=[A_0(t, \xi)+A_1(t, \xi)\tilde{Q}_t(\theta_0, W_1, \xi)]\,dt+B(t, \xi)\,dW_2(t).$$

Поэтому и

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T \frac{[A_0(t, \tilde{\xi})+A_1(t, \tilde{\xi})\tilde{Q}_t(\alpha, \beta, \tilde{\xi})]^2}{B^2(t, \tilde{\xi})}\,dt<\infty\right\}=1.$$

Отсюда в силу многомерного аналога теоремы 7.19 и леммы 4.10 получаем требуемое утверждение.

3. Пусть (θ, ξ)—случайный процесс, подчиняющийся уравнениям (11.2), (11.3). Обозначим $(m_t(x), \mathscr{B}_{t+})$ такой функционал*), что при почти всех $0\leqslant t\leqslant T$

$$m_t(\xi)=\mathsf{M}(\theta_t\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)\qquad \mathsf{P}\text{-п.н.},$$

и пусть

$$\overline{W}_t=\int_0^t \frac{d\xi_s}{B(s, \xi)}-\int_0^t \frac{A_0(s, \xi)+A_1(s, \xi)\,m_s(\xi)}{B(s, \xi)}\,ds. \tag{11.27}$$

Лемма 11.3. *Случайный процесс* $\overline{W}=(\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, *является винеровским.*

Доказательство. Из (11.27) и (11.3) получаем

$$\overline{W}_t=W_2(t)+\int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}[\theta_s-m_s(\xi)]\,ds. \tag{11.28}$$

Отсюда с помощью формулы Ито находим, что

$$e^{iz\overline{W}_t}=e^{iz\overline{W}_s}+iz\int_s^t \frac{A_1(u, \xi)}{B(u, \xi)}e^{iz\overline{W}_u}[\theta_u-m_u(\xi)]\,du+$$
$$+iz\int_s^t e^{iz\overline{W}_u}\,dW_2(u)-\frac{z^2}{2}\int_s^t e^{iz\overline{W}_u}\,du. \tag{11.29}$$

Как и при доказательстве теоремы 7.17, из (11.29) выводим, что P-п.н.

$$\mathsf{M}\left(e^{iz(\overline{W}_t-\overline{W}_s)}\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right)=e^{-\frac{z^2}{2}(t-s)}.$$

Лемма доказана.

---

*) См. лемму 4.9.

4. Лемма 11.4. *Пусть μ_ξ и $\mu_{\tilde{\xi}}$ — меры, отвечающие процессам ξ и $\tilde{\xi}$, определяемым из* (11.21) *и* (11.22). *Тогда $\mu_\xi \sim \mu_{\tilde{\xi}}$ и плотности*

$$\varphi_t(\tilde{\xi}) = \frac{d\mu_{\tilde{\xi}}}{d\mu_{\bar{\xi}}}(t, \tilde{\xi}), \qquad \psi_t(\xi) = \frac{d\mu_{\bar{\xi}}}{d\mu_{\xi}}(t, \xi)$$

задаются формулами

$$\varphi_t(\tilde{\xi}) = \exp\left\{\int_0^t \frac{A_0(s, \tilde{\xi}) + A_1(s, \tilde{\xi})\, m_s(\tilde{\xi})}{B^2(s, \tilde{\xi})}\, d\tilde{\xi}_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{[A_0(s, \tilde{\xi}) + A_1(s, \tilde{\xi})\, m_s(\tilde{\xi})]^2}{B^2(s, \tilde{\xi})}\, ds\right\}, \tag{11.30}$$

$$\psi_t(\xi) = \exp\left\{-\int_0^t \frac{A_0(s, \xi) + A_1(s, \xi)\, m_s(\xi)}{B^2(s, \xi)}\, d\xi_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{[A_0(s, \xi) + A_1(s, \xi)\, m_s(\xi)]^2}{B^2(s, \xi)}\, ds\right\}. \tag{11.31}$$

Доказательство. Из (11.27) находим

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t(\xi)]\, dt + B(t, \xi)\, d\overline{W}_t. \tag{11.32}$$

Пусть $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс с дифференциалом

$$d\bar{\xi}_t = B(t, \bar{\xi})\, d\overline{W}_t, \qquad \bar{\xi}_0 = \xi_0. \tag{11.33}$$

В силу предположений (11.7), (11.8) и теоремы 4.6 уравнение (11.33) имеет единственное сильное решение. Поэтому меры $\mu_{\bar{\xi}}$ и $\mu_{\tilde{\xi}}$ совпадают (ср. (11.33) и (11.22)).

Абсолютная непрерывность меры μ_ξ относительно меры $\mu_{\bar{\xi}}$ (а значит, и относительно $\mu_{\tilde{\xi}}$) следует из теоремы 7.20. Покажем, что верно и обратное, $\mu_{\bar{\xi}} \ll \mu_\xi$.

По лемме 11.2

$$\mu_{\bar{\xi}}(\Gamma) = \mu_{\tilde{\xi}}(\Gamma) = \mathsf{M}\,[\chi_{\{\xi \in \Gamma\}}\psi_t(\alpha, \beta, \xi)] =$$

$$= \mathsf{M}[\chi_{\{\xi \in \Gamma\}}\mathsf{M}(\psi_t(\alpha, \beta, \xi) \mid \mathscr{F}_t^\xi)] = \int_\Gamma \mathsf{M}\,[\psi_t(\alpha, \beta, \xi) \mid \mathscr{F}_t^\xi]_{\xi = x}\, d\mu_\xi(x).$$

Поэтому $\mu_{\bar{\xi}} \ll \mu_\xi$. Формулы (11.30) и (11.31) следуют из теоремы 7.20 и леммы 6.8.

5. Обозначим

$$\bar{\rho}_t(\alpha, \beta, \bar{\xi}) = \varphi_t(\alpha, \beta, \bar{\xi})/\varphi_t(\bar{\xi}),$$

и пусть для каждого $0 \leqslant t \leqslant T$ $\rho_t(a, b, x)$ обозначает такой (измеримый) функционал, что

$$\rho_t(\alpha, \beta, \xi) = \bar{\rho}_t(\alpha, \beta, \bar{\xi})_{\bar{\xi}=\xi} \qquad (\mathsf{P}\text{-п.н.}).$$

Тогда, учитывая совпадение мер μ_ξ и $\mu_{\bar{\xi}}$, из лемм 4.10, 11.2 и 11.4 выводим, что

$$\rho_t(\alpha, \beta, \xi) = \exp\left\{\int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}[Q_s(\alpha, \beta, \xi) - m_s(\xi)]\, d\overline{W}_s - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{A_1^2(s, \xi)}{B^2(s, \xi)}[Q_s(\alpha, \beta, \xi) - m_s(\xi)]^2\, ds\right\}. \qquad (11.34)$$

Лемма 11.5. *Пусть $f_t(\theta_0, W_1, \xi)$ — $\mathcal{F}_t^{\theta_0, W_1, \xi}$-измеримый функционал с $\mathsf{M}|f_t(\theta_0, W_1, \xi)| < \infty$. Тогда имеет место следующая формула (Байеса):*

$$\mathsf{M}[f_t(\theta_0, W_1, \xi) | \mathcal{F}_t^\xi] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{C_T} f_t(a, c, \xi)\, \rho_t(a, c, \xi)\, d\mu_W(c)\, dF_{\xi_0}(a), \qquad (11.35)$$

где $\mu_W(\cdot)$ — винеровская мера в измеримом пространстве $(C_T, \mathcal{B}_T)$ непрерывных функций $C_T = \{c_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}$, а $F_{\xi_0}(a) = \mathsf{P}\{\theta_0 \leqslant a | \xi_0\}$.

Формула (11.35) есть не что иное, как формула Байеса (7.178), доказанная в теореме 7.23 *).

Следствие. *Пусть*

$$f_t(\theta_0, W_1, \xi) = \exp\left\{i\left[z_0\theta_0 + \sum_{j=1}^k z_j W_1(t_j)\right]\right\},$$

где $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant t$. Тогда условная характеристическая функция

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{i\left[z_0\theta_0 + \sum_{j=1}^k z_j W_1(t_j)\right]\right\}\middle| \mathcal{F}_t^\xi\right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{C_T} \exp\left\{i\left[z_0 a + \sum_{j=1}^k z_j c_{t_j}\right]\right\}\rho_t(a, c, \xi)\, d\mu_W(c)\, dF_{\xi_0}(a), \qquad (11.36)$$

где c_{t_j} — значения непрерывной функции $c = (c_s, 0 \leqslant s \leqslant T)$ в точках t_j.

---

*) См. также замечания 1 и 2 к этой теореме.

§ 3. Доказательство теоремы об условной гауссовости

1. Докажем предварительно следующее предложение, являющееся ключевым при доказательстве теоремы 11.1.

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия* (11.5) — (11.11) *и с вероятностью* 1 *условное распределение*

$$F_{\xi_0}(a) = \mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$$

является гауссовским, с параметрами

$$m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0), \quad \gamma_0 = \mathsf{M}[(\theta_0 - m_0)^2 \mid \xi_0], \quad 0 \leqslant \gamma_0 < \infty \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Тогда условное распределение

$$G_{\xi_0^t}(a, c_1, \ldots, c_n) = \mathsf{P}\{\theta_0 \leqslant a,\ W_1(t_1) \leqslant c_1, \ldots, W_1(t_n) \leqslant c_n \mid \mathcal{F}_t^\xi\}$$

является гауссовским для любых t, $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t$, *и* $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство этой теоремы существенно опирается на представление (11.36) для условной характеристической функции.

Из (11.36) ясно, что для доказательства теоремы достаточно было бы показать, что для почти всех ω мера $\rho_t(a, c, \xi)\, d\mu_W(c)\, dF_{\xi_0}(a)$ является гауссовской. Однако непосредственная проверка этого факта затруднительна.

Применяемый далее метод доказательства основан на том, что $\rho_t(a, c, \xi)$ аппроксимируются подходящим образом подобранными функционалами $\rho_t^{(N)}(a, c, \xi)$, для которых

$$\ln \int_{-\infty}^{\infty} \lim_N \int_{C_T} \exp\left\{ i \left[z_0 a + \sum_{j=1}^{n} z_j c_{t_j} \right] \right\} \rho_t^{(N)}(a, c, \xi)\, d\mu_W(c)\, dF_{\xi_0}(a)$$

оказывается (P-п. н.) квадратичной формой относительно $z_0, \ldots, z_n$.

2. Осуществление намеченной программы начнем с преобразования $\ln \rho_t(\alpha, \beta, \xi)$ к более удобному виду.

Учитывая обозначения (11.14), (11.15), (11.18), положим

$$g_1(t, \xi) = \frac{A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)} \left\{ \Phi_t(\xi) \left[\int_0^t \Phi_s^{-1}(\xi)\, \tilde{a}_0(s, \xi)\, ds + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\xi) \frac{b_2(s, \xi)}{B(s, \xi)}\, d\xi_s \right] - m_s(\xi) \right\}, \tag{11.37}$$

$$g_2(t, \xi) = \frac{A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)} \Phi_t^{-1}(\xi), \tag{11.38}$$

$$g_3(t, \xi) = \Phi_t^{-1}(\xi)\, b_1(t, \xi). \tag{11.39}$$

Тогда из (11.17) находим, что

$$\frac{A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)}[Q_t(\theta_0, W_1, \xi) - m_t(\xi)] =$$
$$= g_1(t, \xi) + \theta_0 g_2(t, \xi) + g_2(t, \xi)\int_0^t g_3(s, \xi)\, dW_1(s).$$

В силу (11.34) это позволяет $\ln \rho_t(\theta_0, W_1, \xi)$ записать в следующем виде:

$$\ln \rho_t(\theta_0, W_1, \xi) = \int_0^t \left\{ g_1(s, \xi) + g_2(s, \xi)\left[\theta_0 + \int_0^s g_3(u, \xi)\, dW_1(u)\right]\right\} d\overline{W}_s -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \left\{ g_1(s, \xi) + g_2(s, \xi)\left[\theta_0 + \int_0^s g_3(u, \xi)\, dW_1(u)\right]\right\}^2 ds. \quad (11.40)$$

По формуле (11.28)

$$d\overline{W}_t = dW_2(t) + \frac{A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)}[\theta_t - m_t(\xi)]\, dt,$$

где винеровский процесс W_2 не зависит от винеровского процесса W_1. Используя это обстоятельство, легко с помощью формулы Ито установить, что

$$\int_0^t g_2(s, \xi)\left(\int_0^s g_3(u, \xi)\, dW_1(u)\right) d\overline{W}_s = \int_0^t g_2(s, \xi)\, d\overline{W}_s \times$$
$$\times \int_0^t g_3(s, \xi)\, dW_1(s) - \int_0^t g_3(s, \xi)\left(\int_0^s g_2(u, \xi)\, d\overline{W}_u\right) dW_1(s). \quad (11.41)$$

Аналогично,

$$\int_0^t g_2(s, \xi)\left(\int_0^t g_3(u, \xi)\, dW_1(u)\right) ds = \int_0^t g_2(s, \xi)\, ds \times$$
$$\times \int_0^t g_3(s, \xi)\, dW_1(s) - \int_0^t g_3(s, \xi)\left(\int_0^s g_2(u, \xi)\, du\right) dW_1(s). \quad (11.42)$$

Пусть при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ $\Delta_1(t, x)$, $\Delta_2(t, x)$ и $\Delta_3(t, x)$ — такие $\mathscr{B}_t$-измеримые функционалы, что

$$\Delta_1(t, \xi) = \int_0^t g_1(s, \xi)\, d\overline{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t [g_1(s, \xi)]^2 ds,$$

$$\Delta_2(t, \xi) = \int_0^t g_2(s, \xi)\, d\overline{W}_s - \int_0^t g_1(s, \xi)\, g_2(s, \xi)\, ds,$$

$$\Delta_3(t, \xi) = \left(\int_0^t [g_2(s, \xi)]^2\, ds\right)^{1/2}.$$

Пусть, далее, $\Delta_4(t, x)$ и $\Delta_5(t, x)$ — функционалы, измеримые по паре переменных, $\mathscr{B}_{t+}$-измеримые при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ и такие, что при почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\Delta_4(t, \xi) = \int_0^t g_2(s, \xi)\, d\overline{W}_s,$$

$$\Delta_5(t, \xi) = \int_0^t g_2(s, \xi)\, ds.$$

Обозначим, наконец, для каждого t $\Delta_6(t, x, y)$ и $\Delta_7(t, x, y)$ функционалы, являющиеся $\mathscr{B}_t \times \mathscr{B}_t$-измеримыми и такими, что

$$\Delta_6(t, W_1, \xi) = \Delta_4(t, \xi)\int_0^t g_3(s, \xi)\, dW_1(s) - \int_0^t g_3(s, \xi)\, \Delta_4(s, \xi)\, dW_1(s),$$

$$\Delta_7(t, W_1, \xi) = \Delta_5(t, \xi)\int_0^t g_3(s, \xi)\, dW_1(s) - \int_0^t g_3(s, \xi)\, \Delta_5(s, \xi)\, dW_1(s).$$

Из (11.40) — (11.42) и лемм 4.10, 11.2 с учетом этих обозначений находим, что для $a \in R^1$

$$\ln \rho_t(a, W_1, \tilde{\xi}) = \Delta_1(t, \tilde{\xi}) + a\Delta_2(t, \tilde{\xi}) - \frac{a^2}{2}\Delta_3^2(t, \tilde{\xi}) + \Delta_6(t, W_1, \tilde{\xi}) - $$
$$- a\Delta_7(t, W_1, \tilde{\xi}) - \frac{1}{2}\int_0^t [g_2(s, \tilde{\xi})]^2 \left[\int_0^s g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u)\right]^2 ds. \qquad (11.43)$$

Из определения величин $\Delta_6(t, W_1, \tilde{\xi})$, $\Delta_7(t, W_1, \tilde{\xi})$, лемм 4.10 и 11.2 и независимости процессов W_1 и $\tilde{\xi}$ вытекает, что условное распределение этих величин (при заданных $\tilde{\xi}$) является гауссовским.

Пусть $0 = t_0^{(N)} < t_1^{(N)} < \ldots < t_N^{(N)} = t$ — разбиение отрезка $[0, t]$ такое, что $\max\limits_j \left| t_{j+1}^{(N)} - t_j^{(N)} \right| \to 0$, $N \to \infty$. Положим $\psi_N(s) = t_j^{(N)}$, если $t_j^{(N)} \leqslant s < t_{j+1}^{(N)}$. Ясно, что $\psi_N(s) \to s$, $N \to \infty$, и

$$\int_0^{\psi_N(s)} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \to \int_0^s g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \qquad (\mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

Более того,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \left| \left(\int_0^{\psi_N(s)} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \right)^2 - \left(\int_0^s g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \right)^2 \right| = 0$$

(см. (4.47) и гл. 4, § 2, п. 6),

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^t [g_2(s, \tilde{\xi})]^2 \left(\int_0^{\psi_N(s)} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \right)^2 ds =$$
$$= \int_0^t [g_2(s, \tilde{\xi})]^2 \left(\int_0^s g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u) \right)^2 ds. \qquad (11.44)$$

Образуем теперь последовательность функций $\rho_t^{(N)}(a, W_1, \tilde{\xi})$, положив

$$\ln \rho_t^{(N)}(a, W_1, \tilde{\xi}) = \Delta_1(t, \tilde{\xi}) + a\Delta_2(t, \tilde{\xi}) -$$
$$- \frac{a^2}{2} \Delta_3^2(t, \tilde{\xi}) + \Delta_6(t, W_1, \tilde{\xi}) + a\Delta_7(t, W_1, \tilde{\xi}) -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j^{(N)}}^{t_{j+1}^{(N)}} [g_2(s, \tilde{\xi})]^2 \int_0^{t_j^{(N)}} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u)\, ds. \qquad (11.45)$$

Тогда в силу (11.44) для всех $a \in R^1$

$$\lim_{N\to\infty} \ln \rho_t^{(N)}(a, W_1, \tilde{\xi}) = \ln \rho_t(a, W_1, \tilde{\xi}). \qquad (11.46)$$

Правая часть в (11.45) является неположительно определенной квадратичной формой (с коэффициентами, зависящими от $a, \tilde{\xi}, t, t_j^{(N)}$) величин

$$\left\{ \Delta_6(t, W_1, \tilde{\xi}),\ \Delta_7(t, W_1, \tilde{\xi}),\ \int_0^{t_j^{(N)}} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u),\ j = 1, 2, \ldots, N \right\},$$

совместное распределение которых (при заданных $\tilde{\xi}$) является гауссовским.

Точно так же

$$\ln\left\{\exp\left(i\left[z_0 a+\sum_{k=1}^{n} z_k W_1(t_k)\right]\right)\rho_t^{(N)}(a, W_1, \tilde{\xi})\right\}$$

является неположительно определенной квадратичной формой величин

$$\left\{W_1(t_k),\ k=1, \ldots, n;\ \Delta_6(t, W_1, \tilde{\xi});\ \Delta_7(t, W_1, \tilde{\xi});\ \int_0^{t_j^{(N)}} g_3(u, \tilde{\xi})\, dW_1(u),\ j=1, \ldots, N\right\}$$

с (условным) гауссовским совместным распределением.

С учетом этого обстоятельства вычислим

$$I_N(t, a, \tilde{\xi})=\int_{C_T}\exp\left\{i\left[z_0 a+\sum_{k=1}^{n} z_k c_{t_k}\right]\right\}\rho_t^{(N)}(a, c, \tilde{\xi})\, d\mu_W(c), \tag{11.47}$$

используя следующее предложение, справедливость которого устанавливается прямым подсчетом.

Лемма 11.6. *Пусть $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ — гауссовский вектор с $\mathsf{M}\zeta=a$, $\mathsf{M}(\zeta-a)(\zeta-a)^*=\Gamma$, $\det\Gamma>0$. Пусть $d=d_1+id_2$, $d_1=(d_{11}, \ldots, d_{1m})$, $d_2=(d_{21}, \ldots, d_{2m})$, $d_{ij}\in R^1$ и D — неотрицательно определенная симметрическая матрица порядка $m\times m$. Тогда*

$$\mathsf{M}\exp[d\zeta-\zeta^* D\zeta]=\left(\frac{\det[2D+\Gamma^{-1}]^{-1}}{\det\Gamma}\right)^{m/2}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\left[-a^*\Gamma^{-1}a+\left(d_1+a^*\Gamma^{-1}\right)\left(2D+\Gamma^{-1}\right)^{-1}\left(d_1+a^*\Gamma^{-1}\right)^*\right]+\right.$$
$$\left.+i\left[d_2\left(2D+\Gamma^{-1}\right)^{-1}\left(d_1+a^*\Gamma^{-1}\right)^*-\frac{1}{2}\left[d_2\left(2D+\Gamma^{-1}\right)^{-1}d_2^*\right]\right]\right\}. \tag{11.48}$$

Для дальнейшего анализа нам нужен не явный вид правой части (11.48), а лишь только то, что $\mathsf{M}\exp\{d\zeta-\zeta^* D\zeta\}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathsf{M}\exp\{d\zeta-\zeta^* D\zeta\}=$$
$$=\varepsilon\exp\left\{d_1\delta+\frac{1}{2}d_1\gamma d_1^*+id_2\gamma d_1^*+id_2\delta-\frac{1}{2}d_2\gamma d_2^*\right\}, \tag{11.49}$$

где

$$\varepsilon = \left(\frac{\det(2D+\Gamma^{-1})^{-1}}{\det\Gamma}\right)^{m/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[-a^*\Gamma^{-1}a + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a^*\Gamma^{-1}(2D+\Gamma^{-1})^{-1}\Gamma^{-1}a\right]\right\},$$

$$\delta = (2D+\Gamma^{-1})^{-1}\Gamma^{-1}a,$$
$$\gamma = (2D+\Gamma^{-1})^{-1}.$$

Замечание. Если $\operatorname{rang}\Gamma = r < m$, то тогда найдутся гауссовский вектор $\tilde\zeta = (\tilde\zeta_1, \ldots, \tilde\zeta_r)$ с $\mathsf{M}\tilde\zeta = 0$, $\mathsf{M}\tilde\zeta\tilde\zeta^* = E_{(r\times r)}$ и матрица $C_{(m\times r)}$ такие, что (P-п. н.)

$$\zeta = a + C\tilde\zeta.$$

В этом случае

$$\mathsf{M}\exp\{d\zeta - \zeta^*D\zeta\} = \mathsf{M}\exp\{d(a+C\tilde\zeta) - (a+C\tilde\zeta)^*D(a+C\tilde\zeta)\},$$

что с учетом (11.49) можно переписать снова в виде

$$\mathsf{M}\exp\{d\zeta - \tilde\zeta^*D\zeta\} = \tilde\varepsilon\exp\left\{d_1\tilde\delta + \frac{1}{2}d_1\tilde\gamma d_1^* + id_2\tilde\gamma d_1^* + id_2\tilde\delta - \frac{1}{2}d_2\tilde\gamma d_2^*\right\}$$

с некоторыми $\tilde\varepsilon$, $\tilde\delta$, $\tilde\gamma$, явный вид которых может быть легко найден. Применяя эту лемму к вычислению интеграла (11.47), находим, что

$$I_N(t, a, \tilde\xi) = \varepsilon^{(N)}(t, \tilde\xi)\exp\{[iz_0 + \Delta_2(t, \tilde\xi) + \delta_0^{(N)}(t, \tilde\xi) +$$
$$+ i\sum_{k=1}^{n} z_k\gamma_{0k}^{(N)}(t, \tilde\xi)]\,a - \frac{a^2}{2}[\Delta_3^2(t, \tilde\xi) - \gamma_{00}^{(N)}(t, \tilde\xi)] +$$
$$+ i\sum_{k=1}^{n} z_k\delta_k^{(N)}(t, \tilde\xi) - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} z_iz_k\gamma_{ik}^{(N)}(t, \tilde\xi)\Big\},$$

где $\|\gamma_{kj}^{(N)}(t, x)\|$, $N = 1, 2, \ldots,$ — симметрические неотрицательно определенные матрицы.

Заметим теперь, что величины $\rho_t^{(N)}(a, W_1, \tilde\xi)$ мажорируются интегрируемыми (по мере $d\mu_W$) величинами

$$\exp\left\{\Delta_1(t, \tilde\xi) + a\Delta_2(t, \tilde\xi) - \frac{a^2}{2}\Delta_3^2(t, \tilde\xi) + \Delta_6(t, W_1, \tilde\xi) - a\Delta_7(t, W_1, \tilde\xi)\right\}.$$

Поэтому в силу (11.46) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (теорема 1.4) существует предел

$$I(t, a, \tilde\xi) = \lim_{N\to\infty} I_N(t, a, \tilde\xi) =$$
$$= \int_{C_T}\exp\left\{i\left[z_0a + \sum_{k=1}^{n} z_kc_{t_k}\right]\right\}\rho_t(a, c, \tilde\xi)\,d\mu_W(c). \quad (11.50)$$

В силу произвольности a, $z_1, \ldots, z_n$ величины $\varepsilon^{(N)}(t, \tilde{\xi})$, $\delta_j^{(N)}(t, \tilde{\xi})$ и $\gamma_{kj}^{(N)}(t, \tilde{\xi})$ стремятся при $N \to \infty$ к некоторым пределам $\varepsilon(t, \tilde{\xi})$, $\delta_j(t, \tilde{\xi})$, $\gamma_{kj}(t, \tilde{\xi})$. При этом матрица $\|\gamma_{kj}(t, \tilde{\xi})\|$ является неотрицательно определенной, как предел таких же матриц. Ясно также, что

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{i\left[z_0\theta_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j W_1(t_j)\right]\right\}\Bigg|\mathscr{F}_t^{\xi}\right)_{\xi=\tilde{\xi}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} I(t, a, \tilde{\xi})\, dF_{\xi_0}(a), \quad (11.51)$$

откуда в силу эквивалентности мер μ_ξ и $\mu_{\tilde{\xi}}$ и гауссовости условного распределения $F_{\xi_0}(a)$ следует справедливость теоремы 11.2.

Замечание. То же самое доказательство показывает, что P-п. н.

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{i\left[z_0\psi_0(t, \xi)\,\theta_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j\psi_j(t, \xi)\int_0^{t_j}\tilde{\psi}_j(t, \xi)\, dW_1(s)\right]\right\}\Bigg|\mathscr{F}_t^{\xi}\right) = \\ = \exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j\tilde{\delta}_j(t, \xi) - \frac{1}{2}\sum_{j,\, k=0}^{n} z_k z_j\tilde{\gamma}_{kj}(t, \xi)\right\}, \quad (11.52)$$

где $\|\tilde{\gamma}_{kj}(t, \xi)\|$ — неотрицательно определенная симметрическая матрица.

3. Доказательство теоремы 11.1. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t \leqslant T$ — некоторое разбиение отрезка $[0, T]$. Тогда с учетом (11.19) имеем

$$\mathsf{M}\left(\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j\theta_{t_j}\right\}\Bigg|\mathscr{F}_t^{\xi}\right) = \mathsf{M}\left(\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j Q_{t_j}(\theta_0, W_1, \xi)\right\}\Bigg|\mathscr{F}_t^{\xi}\right),$$

где согласно лемме 11.1

$$Q_{t_j}(\theta_0, W_1, \xi) = \Phi_{t_j}(\xi)\left[\theta_0 + \int_0^{t_j}\Phi_s^{-1}(\xi)\,\tilde{a}_0(s, \xi)\, ds + \right. \\ \left. + \int_0^{t_j}\Phi_s^{-1}(\xi)\, b_1(s, \xi)\, dW_1(s) + \int_0^{t}\Phi_s^{-1}(\xi)\frac{b_2(s, \xi)}{B(s, \xi)}\, d\xi_s\right].$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\left[\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j Q_{t_j}(\theta_0, W_1, \xi)\right\}\middle|\mathcal{F}_t^{\xi}\right]=$$

$$=\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n-1} z_j\left[\Phi_{t_j}(\xi)\left(\int_0^{t_j}\Phi_s^{-1}(\xi)\,\tilde{a}_0(s, \xi)\,ds+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_0^{t_j}\Phi_s^{-1}(\xi)\,\frac{b_2(s, \xi)}{B(s, \xi)}\,d\xi_s\right]\right)\right\}\times$$

$$\times\mathsf{M}\left(\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n-1} z_j\Phi_{t_j}(\xi)\left[\theta_0+\int_0^{t_j}\Phi_s^{-1}(\xi)\,b_1(s, \xi)\,dW_1(s)\right]\right\}\middle|\mathcal{F}_t^{\xi}\right).$$

Применяя к правой части (11.52) замечание к теореме 11.2, находим, что

$$\mathsf{M}\left[\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j\theta_{t_j}\right\}\middle|\mathcal{F}_t^{\xi}\right]=$$

$$=\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n} z_j\tilde{\delta}_j(t, \xi)-\frac{1}{2}\sum_{k, j=0}^{n} z_k z_j\tilde{\gamma}_{kj}(t, \xi)\right\}, \qquad (11.53)$$

где $\|\tilde{\gamma}_{kj}(t, \xi)\|$ — некоторая неотрицательно определенная симметрическая матрица.

В силу произвольности $z_0, z_1, \ldots, z_n$ из (11.53) следует, что условное распределение

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t_0}\leqslant a_0, \ldots, \theta_{t_n}\leqslant a_n \mid \mathcal{F}_t^{\xi}\right)$$

является для любых $t_0<t_1< \ldots <t_n\leqslant t$ и $n=1, 2, \ldots$ гауссовским.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть $0\leqslant s\leqslant t_0< \ldots <t_n\leqslant t$.

Тогда условное распределение

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t_0}\leqslant a_0, \ldots, \theta_{t_n}\leqslant a_n \mid \mathcal{F}_t^{\theta_s, \xi}\right)$$

также является (P-п. н.) гауссовским, что вытекает из гауссовости распределений $\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant a, \theta_{t_0}\leqslant a_0\leqslant \ldots \leqslant a_{t_n}\leqslant a_n \mid \mathcal{F}_t^{\xi}\right)$.

4. Для нужд задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции условно-гауссовских процессов особый интерес представляют параметры $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ условного распределения $F_{\xi_0^t}(a) = \mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Их можно было бы найти, отыскав явный вид входящих в (11.53) элементов $\tilde{\delta}_j(t, \xi)$ и $\tilde{\gamma}_{kj}(t, \xi)$.

В следующей главе будет показано, однако, что для отыскания параметров m_t, γ_t (а также других характеристик условно-гауссовских процессов) проще поступить иначе, воспользовавшись общими уравнениями фильтрации, интерполяции и экстраполяции, выведенными в восьмой главе.

ГЛАВА 12

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ КОМПОНЕНТ УСЛОВНО-ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Уравнения оптимальной фильтрации

1. Пусть $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — непрерывный случайный процесс диффузионного типа с

$$d\theta_t = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + b_1(t, \xi)\,dW_1(t) + b_2(t, \xi)\,dW_2(t), \tag{12.1}$$

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + B(t, \xi)\,dW_2(t). \tag{12.2}$$

Будем предполагать выполненными условия (11.4) — (11.11), сформулированные в предыдущей главе. Тогда, если условное распределение $F_{\xi_0}(a) = \mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ является (P-п. н.) гауссовским, $N(m_0, \gamma_0)$, то в соответствии с теоремой 11.1 условное распределение $F_{\xi_0^t}(a) = \mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ также будет гауссовским, $N(m_t, \gamma_t)$. Поэтому, если $\mathsf{M}\theta_t^2 < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то один из параметров этого распределения — апостериорное среднее $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ — будет оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценкой θ_t по $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$. Знание второго параметра этого распределения — $\gamma_t = \mathsf{M}([\theta_t - m_t]^2 \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ — дает возможность находить величину ошибки фильтрации

$$\Delta_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2 \qquad (= \mathsf{M}\gamma_t). \tag{12.3}$$

В приводимой ниже теореме 12.1 находятся уравнения, которым удовлетворяют m_t и γ_t. В силу условной гауссовости процесса (θ, ξ) эти уравнения оказываются замкнутыми.

Важно подчеркнуть, что теорема 12.1 содержит как частный случай уравнения фильтрации, выведенные в случае схемы Калмана — Бьюси в десятой главе. При этом, если в схеме Калмана — Бьюси процесс (θ, ξ) был гауссовским и, как следствие этого, оптимальная фильтрация оказалась линейной, то в рассматриваемом нами условно-гауссовском случае оптимальный «фильтр», вообще говоря, является нелинейным.

2. Вывод уравнений для m_t и γ_t, основанный на использовании основной теоремы фильтрации (теоремы 8.1), проходит по следующей схеме.

Согласно (12.1)

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t [a_0(s, \xi) + a_1(s, \xi)\theta_s]\,ds + x_t, \tag{12.4}$$

где

$$x_t = \int_0^t [b_1(s, \xi)\,dW_1(s) + b_2(s, \xi)\,dW_2(s)]. \tag{12.5}$$

Из (12.4), (12.5) с помощью формулы Ито находим, что

$$\theta_t^2 = \theta_0^2 + \int_0^t (2\theta_s[a_0(s, \xi) + a_1(s, \xi)\theta_s] + \\ + [b_1^2(s, \xi) + b_2^2(s, \xi)])\,ds + \tilde{x}_t, \tag{12.6}$$

где

$$\tilde{x}_t = \int_0^t 2\theta_s[b_1(s, \xi)\,dW_1(s) + b_2(s, \xi)\,dW_2(s)]. \tag{12.7}$$

Обозначим

$$h_t = \theta_t, \qquad H_t = a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t \tag{12.8}$$

и

$$\tilde{h}_t = \theta_t^2, \quad \tilde{H}_t = 2\theta_t[a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t] + [b_1^2(t, \xi) + b_2^2(t, \xi)]. \tag{12.9}$$

Тогда уравнения (12.4) и (12.6) запишутся в следующем виде:

$$h_t = h_0 + \int_0^t H_s\,ds + x_t, \tag{12.10}$$

$$\tilde{h}_t = \tilde{h}_0 + \int_0^t \tilde{H}_s\,ds + \tilde{x}_t. \tag{12.11}$$

Таким образом, ненаблюдаемые процессы h_t и $\tilde{h}_t$ имеют именно ту форму, которая предполагалась в теореме 8.1.

Для того чтобы воспользоваться результатом этой теоремы, надо найти условия, при которых выполнены предположения (8.6) — (8.8), входящие в ее формулировку (остальные предположения выполнены в силу (11.4) — (11.11)). В рассматриваемом нами случае эти условия (8.6) — (8.8) сводятся к следующим:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M}\theta_t^4 < \infty, \tag{12.12}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}[a_0(s, \xi) + a_1(s, \xi)\theta_s]^2 ds < \infty, \tag{12.13}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}\left\{2\theta_s[a_0(s, \xi) + a_1(s, \xi)\theta_s] + \left[b_1^2(s, \xi) + b_2^2(s, \xi)\right]\right\}^2 ds < \infty, \tag{12.14}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}\{A_0(s, \xi) + A_1(s, \xi)\theta_s\}^2 ds < \infty. \tag{12.15}$$

Для выполнения этих условий, а также чтобы иметь возможность утверждать, что $X = (x_t, \mathscr{F}_t)$ и $\tilde{X} = (\tilde{x}_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, являются квадратично интегрируемыми мартингалами, потребуем выполнения следующих условий:

для всех $x \in C_T$, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$|a_1(t, x)| \leqslant L, \qquad |A_1(t, x)| \leqslant L; \tag{12.16}$$

$$\int_0^T \mathsf{M}\left[a_0^4(t, \xi) + b_1^4(t, \xi) + b_2^4(t, \xi)\right] dt < \infty; \tag{12.17}$$

$$\mathsf{M}\theta_0^4 < \infty. \tag{12.18}$$

Для доказательства достаточности этих условий установим предварительно справедливость следующей леммы.

Лемма 12.1. *В предположениях* (12.16) — (12.18)

$$\mathsf{M}[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \theta_t^4] < \infty. \tag{12.19}$$

Доказательство. Положим

$$\tau_N = \inf\{t: \sup_{s \leqslant t} \theta_s^4 \geqslant N\},$$

считая $\tau_N = T$, если $\sup\limits_{s\leqslant T}\theta_s^4 < N$. Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$\theta_{t\wedge\tau_N}^4 = \left[\theta_0 + \int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_0(s,\xi)\,ds + \int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_1(s,\xi)\,\theta_s\,ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right]^4 \leqslant 125\left[\theta_0^4 + \left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_0(s,\xi)\,ds\right)^4 + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_1(s,\xi)\,\theta_s\,ds\right)^4 + \sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right)^4\right] \leqslant$$
$$\leqslant 125\left[\theta_0^4 + (t\wedge\tau_N)^3\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_0^4(s,\xi)\,ds + (t\wedge\tau_N)^3\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} a_1^4(s,\xi)\,\theta_s^4\,ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right)^4\right]. \qquad (12.20)$$

Согласно лемме 4.12

$$\mathsf{M}\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau_N} b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right)^4 \leqslant 36T\int\limits_0^T \mathsf{M}b_i^4(s,\xi)\,ds, \qquad i=1,2.$$

Поэтому, поскольку $\theta_s = \theta_{s\wedge\tau_N}$ для $s\leqslant t\wedge\tau_N$,

$$\mathsf{M}\theta_{t\wedge\tau_N}^4 \leqslant 125\left[\mathsf{M}\theta_0^4 + T^3\int\limits_0^T \mathsf{M}a_0^4(s,\xi)\,ds + \right.$$
$$\left. + T^3L^4\int\limits_0^t \mathsf{M}\theta_{s\wedge\tau_N}^4\,ds + 36T\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T \mathsf{M}b_i^4(s,\xi)\,ds\right],$$

т. е.

$$\mathsf{M}\theta_{t\wedge\tau_N}^4 \leqslant C_1 + C_2\int\limits_0^t \mathsf{M}\theta_{s\wedge\tau_N}^4\,ds, \qquad (12.21)$$

где C_1, C_2 — некоторые константы. Значит, по лемме 4.13

$$\mathsf{M}\theta_{t\wedge\tau_N}^4 \leqslant C_1e^{C_2t} \leqslant C_1e^{C_2T}$$

и по лемме Фату

$$\mathsf{M}\theta_t^4 \leqslant \varliminf_{N\to\infty} \mathsf{M}\theta_{t\wedge\tau_N}^4 \leqslant C_1e^{C_2T}.$$

Итак,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathsf{M}\theta_t^4 < \infty. \tag{12.22}$$

Покажем теперь, что и $\mathsf{M}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\theta_t^4] < \infty$. Из (12.20) с заменой $t\wedge\tau_N$ на t получаем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\theta_t^4 \leqslant 125\left[\theta_0^4 + T^3\int_0^T a_0^4(s,\xi)\,ds + T^3L^4\int_0^T \theta_s^4\,ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right|^4\right].$$

Согласно неравенству (3.8) и лемме 4.12

$$\mathsf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t b_i(s,\xi)\,dW_i(s)\right|^4 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot 36\,T\int_0^T \mathsf{M}b_i^4(s,\xi)\,ds,\qquad i=1,2.$$

Поэтому в силу (12.22) и предположений (12.16) — (12.18)

$$\mathsf{M}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\theta_t^4] \leqslant 125\left[\mathsf{M}\theta_0^4 + T^3\int_0^T \mathsf{M}a_0^4(s,\xi)\,ds + \right.$$
$$\left. + T^4L^4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{M}\theta_s^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot 36\,T\sum_{i=1}^{2}\int_0^T \mathsf{M}b_i^4(s,\xi)\,ds\right] < \infty.$$

Лемма доказана.

Итак, из предположений (12.16) — (12.18) вытекают условия (12.12). Очевидным образом проверяется, что эти предположения гарантируют справедливость неравенств (12.13) — (12.15). Из явного вида процессов x_t и $\tilde{x}_t$ и предположений (12.16) — (12.18) легко выводится, что $X=(x_t, \mathscr{F}_t)$ и $\tilde{X}=(\tilde{x}_t, \mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, являются квадратично интегрируемыми мартингалами. Таким образом, условия теоремы 8.1 в рассматриваемом нами случае выполнены.

Учитывая, что $\langle x, W_2\rangle = \int_0^t b_2(s,\xi)\,ds$, из (8.9) находим

$$m_t = m_0 + \int_0^t [a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)\,m_s]\,ds +$$
$$+ \int_0^t \left\{ b_2(s,\xi) + \frac{A_1(s,\xi)\left[\mathsf{M}(\theta_s^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi) - m_s^2\right]}{B(s,\xi)}\right\} d\overline{W}_s, \tag{12.23}$$

где

$$\overline{W}_t = \int_0^t \frac{d\xi_s - (A_0(s, \xi) + A_1(s, \xi) m_s)\, ds}{B(s, \xi)}.$$

Далее, $\mathsf{M}(\theta_s^2 \mid \mathscr{F}_s^\xi) - m_s^2 = \gamma_s$. Поэтому из (12.23) следует, что

$$dm_t = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi) m_t]\, dt + \\ + \frac{b_2(t, \xi) B(t, \xi) + \gamma_t A_1(t, \xi)}{B^2(t, \xi)} [d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi) m_t)\, dt]. \quad (12.24)$$

Обозначаем теперь $\delta_t = \mathsf{M}(\theta_t^2 \mid \mathscr{F}_t^\xi)$, так что $\delta_t - m_t^2 = \gamma_t$.

Тогда, учитывая равенство $\langle \tilde{x}, W_2 \rangle_t = \int_0^t 2\theta_s b_2(s, \xi)\, ds$, опять-таки из (8.9) получаем

$$\delta_t = \delta_0 + \int_0^t [2a_0(s, \xi) m_s + 2a_1(s, \xi) \delta_s + b_1^2(s, \xi) + b_2^2(s, \xi)]\, ds + \\ + \int_0^t \{2m_s b_2(s, \xi) + B^{-1}(s, \xi) [A_0(s, \xi) \delta_s + A_1(s, \xi) \mathsf{M}(\theta_s^3 \mid \mathscr{F}_s^\xi) - \\ - \delta_s (A_0(s, \xi) + A_1(s, \xi) m_s)]\}\, d\overline{W}_s,$$

или

$$\delta_t = \delta_0 + \int_0^t [2a_0(s, \xi) m_s + 2a_1(s, \xi) \delta_s + b_1^2(s, \xi) + b_2^2(s, \xi)]\, ds + \\ + \int_0^t B^{-1}(s, \xi) \{2m_s b_2(s, \xi) B(s, \xi) + \\ + A_1(s, \xi) [\mathsf{M}(\theta_s^3 \mid \mathscr{F}_s^\xi) - \delta_s m_s]\}\, d\overline{W}_s. \quad (12.25)$$

Из формулы Ито и (12.24) находим

$$m_t^2 = m_0^2 + \int_0^t \Big(2m_s [a_0(s, \xi) + a_1(s, \xi) m_s] + \\ + \Big[\frac{b_2(s, \xi) B(s, \xi) + \gamma_s A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}\Big]^2\Big)\, ds + \\ + \int_0^t 2m_s \frac{b_2(s, \xi) B(s, \xi) + \gamma_s A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}\, d\overline{W}_s, \quad (12.26)$$

что вместе с (12.25) дает для $\gamma_t=\delta_t-m_t^2$ следующее представление:

$$\gamma_t=\gamma_0+\int_0^t\Big[2a_1(s,\xi)\gamma_s+b_1^2(s,\xi)+b_2^2(s,\xi)-\\ -\left(\frac{b_2(s,\xi)B(s,\xi)+\gamma_tA_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2\Big]ds+\\ +\int_0^t\frac{A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\{\mathsf{M}(\theta_s^3\,|\,\mathcal{F}_s^\xi)-\delta_sm_s-2m_s\gamma_s\}\,d\overline{W}_s. \qquad (12.27)$$

Поскольку условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s\leqslant a\,|\,\mathcal{F}_s^\xi)$ является гауссовским, то (см. (11.1))

$$\mathsf{M}(\theta_s^3\,|\,\mathcal{F}_s^\xi)=3m_s\delta_s-2m_s^3 \qquad (=\delta_sm_s+2m_s\gamma_s).$$

Поэтому в (12.27) стохастический интеграл равен нулю, а следовательно,

$$\gamma_t=\gamma_0+\int_0^t\Big[2a_1(s,\xi)\gamma_s+b_1^2(s,\xi)+b_2^2(s,\xi)-\\ -\left(\frac{b_2(s,\xi)B(s,\xi)+\gamma_sA_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2\Big]ds. \qquad (12.28)$$

Итак, доказана

Теорема 12.1. *Пусть* (θ,ξ) — *случайный процесс с дифференциалами* (12.1), (12.2). *Тогда, если выполнены условия* (11.4) — (11.8), (12.16) — (12.18) *и условное распределение* $\mathsf{P}(\theta_0\leqslant a\,|\,\xi_0)$ *является гауссовским,* $N(m_0,\gamma_0)$, *то* m_t *и* γ_t *удовлетворяют системе уравнений*

$$dm_t=[a_0(t,\xi)+a_1(t,\xi)m_t]\,dt+\\ +\frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi)+\gamma_tA_1(t,\xi)}{B^2(t,\xi)}[d\xi_t-(A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)m_t)\,dt], \qquad (12.29)$$

$$\dot{\gamma}_t=2a_1(t,\xi)\gamma_t+b_1^2(t,\xi)+b_2^2(t,\xi)-\\ -\left(\frac{b_2(t,\xi)B(t,\xi)+\gamma_tA_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2, \qquad (12.30)$$

решаемых при условиях $m_0=\mathsf{M}(\theta_0\,|\,\xi_0)$, $\gamma_0=\mathsf{M}[(\theta_0-m_0)^2\,|\,\xi_0]$.

Замечание 1. Из (12.29) и (12.30) следует, что апостериорные моменты m_t и γ_t непрерывны по t (P-п. н.).

Замечание 2. Пусть $A_1(s,x)\equiv 0$, т. е. пусть наблюдаемый процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, имеет дифференциал

$$d\xi_t=A_0(t,\xi)\,dt+B(t,\xi)\,dW_2(t), \qquad (12.31)$$

а наблюдаемый процесс $\theta=(\theta_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$d\theta_t=[a_0(t, \xi)+a_1(t, \xi)\theta_t]\,dt+b_1(t, \xi)\,dW_1(t)+b_2(t, \xi)\,dW_2(t).$$

Из проведенного выше доказательства (см. (12.27)) видно, что и без предположения гауссовости условного распределения $\mathsf{P}(\theta_0\leqslant a\mid\xi_0)$ параметры m_t и γ_t удовлетворяют системе уравнений

$$dm_t=[a_0(t, \xi)+a_1(t, \xi)m_t]\,dt+\frac{b_2(t, \xi)}{B(t, \xi)}[d\xi_t-A_0(t, \xi)\,dt], \tag{12.32}$$

$$\dot\gamma_t=2a_1(t, \xi)\gamma_t+b_1^2(t, \xi). \tag{12.33}$$

Замечание 3. Пусть $m_{\theta_s}(t, s)=\mathsf{M}\left[\theta_t\,\middle|\,\mathcal{F}_t^{\theta_s, \xi}\right]$ для $s\leqslant t$ и $\gamma_{\theta_s}(t, s)=\mathsf{M}\left[\left(\theta_s-m_{\theta_s}(t, s)\right)^2\,\middle|\,\mathcal{F}_t^{\theta_s, \xi}\right]$. Тогда $m_{\theta_s}(t, s)$ и $\gamma_{\theta_s}(t, s)$ удовлетворяют при $t>s$ системе уравнений (12.29), (12.30), решаемой при условиях $m_{\theta_s}(s, s)=\theta_s$, $\gamma_{\theta_s}(s, s)=0$. Доказательство аналогично выводу уравнений для m_t и γ_t и использует тот факт, что условное распределение $\mathsf{P}\left(\theta_t\leqslant a\mid\mathcal{F}_s^{\theta_s, \xi}\right)$ является гауссовским (см. замечание к теореме 11.1). Из уравнения (12.30) и условия $\gamma_{\theta_s}(s, s)=0$ вытекает, что на самом деле $\gamma_{\theta_s}(t, s)$ не зависит от θ_s.

3. Остановимся на одном частном случае системы (12.1), (12.2), для которой уравнения фильтрации (12.29) и (12.30) допускают явное решение.

Теорема 12.2. *Пусть $\theta=\theta(\omega)$ — случайная величина с $\mathsf{M}\theta^4<\infty$. Предположим, что наблюдаемый процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, допускает дифференциал*

$$d\xi_t=[A_0(t, \xi)+A_1(t, \xi)\theta]\,dt+B(t, \xi)\,dW_2(t),$$

где коэффициенты A_0, A_1, B удовлетворяют условиям теоремы 12.1, а условное распределение $\mathsf{P}(\theta\leqslant a\mid\xi_0)$ является гауссовским. Тогда $m_t=\mathsf{M}(\theta\mid\mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t=\mathsf{M}\left[(\theta_t-m_t)^2\mid\mathcal{F}_t^\xi\right]$ задаются формулами

$$m_t=\frac{m_0+\gamma_0\displaystyle\int_0^t\frac{A_1(s, \xi)}{B^2(s, \xi)}[d\xi_s-A_0(s, \xi)\,ds]}{1+\gamma_0\displaystyle\int_0^t\left(\frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}\right)^2ds}, \tag{12.34}$$

$$\gamma_t=\frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\displaystyle\int_0^t\left(\frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}\right)^2ds}. \tag{12.35}$$

Доказательство. В силу (12.29) и (12.30) m_t и γ_t удовлетворяют уравнениям

$$dm_t = \frac{\gamma_t A_1(s, \xi)}{B^2(t, \xi)}[d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi) m_t) dt], \tag{12.36}$$

$$\dot{\gamma}_t = -\left(\frac{\gamma_t A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)}\right)^2, \tag{12.37}$$

решения которых, как нетрудно проверить, задаются формулами (12.34), (12.35).

В рассматриваемом случае формулы (12.34) и (12.35) можно было бы получить непосредственно из формулы Байеса (11.35), не обращаясь к общим уравнениям фильтрации для условно-гауссовских случайных процессов *).

Действительно, если $\gamma_0 > 0$, то в силу (11.35)

$$\mathsf{P}(\theta \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{M}\{\chi_{[\theta \leqslant a]} \mid \mathscr{F}_t^\xi\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_0}} \exp\left\{-\frac{(\alpha - m_0)^2}{2\gamma_0} + \int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}(\alpha - m_s(\xi))\, d\overline{W}_s - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}(\alpha - m_s(\xi))\right]^2 ds\right\} d\alpha.$$

Отсюда следует, что условное распределение $\mathsf{P}(\theta \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ обладает плотностью

$$\frac{d\mathsf{P}(\theta \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)}{da} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_0}} \exp\left\{-\frac{(a - m_0)^2}{2\gamma_0} + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}(a - m_s(\xi))\, d\overline{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)}(a - m_s(\xi))\right]^2 ds\right\}. \tag{12.38}$$

С другой стороны, условное распределение $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ является гауссовским:

$$\frac{d\mathsf{P}(\theta \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)}{da} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_t}} \exp\left\{-\frac{(a - m_t)^2}{2\gamma_t}\right\}. \tag{12.39}$$

---

*) При этом выводе уравнений для m_t и γ_t можно отказаться от предположений (12.15) и (12.16).

Приравнивая в (12.38) и (12.39) члены при a и a^2, получаем

$$-\frac{1}{2\gamma_0}-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2 ds=-\frac{1}{2\gamma_t}\ (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{12.40}$$

$$\frac{m_0}{\gamma_0}+\int_0^t\frac{A_1(s,\xi)}{B(s,\xi)}\,d\overline{W}_s+\int_0^t\left(\frac{A_1(s,\xi)\,m_s(\xi)}{B(s,\xi)}\right)^2 ds=\frac{m_t}{\gamma_t}\ (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{12.41}$$

Из (12.40) непосредственно следует формула (12.35). Если же теперь учесть, что

$$d\overline{W}_t=\frac{d\xi_s-[A_0(s,\xi)+A_1(s,\xi)\,m_s(\xi)]\,ds}{B(s,\xi)},$$

то из (12.41) получаем требуемое представление (12.34).

Если $\mathsf{P}(\gamma_0=0)>0$, то для вывода формул (12.34), (12.35) следует вместо распределения $\mathsf{P}(\theta\leqslant a\,|\,\xi_0)$ рассмотреть гауссовское распределение $\mathsf{P}^\varepsilon(\theta\leqslant a\,|\,\xi_0)$ с параметрами $m_0^\varepsilon=m_0$, $\gamma_0^\varepsilon=\gamma_0+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Тогда соответствующие величины m_t^ε и γ_t^ε будут задаваться формулами (12.34), (12.35) с заменой γ_0 на $\gamma_0^\varepsilon=\gamma_0+\varepsilon$, в которых затем надо сделать предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$.

§ 2. Единственность решений уравнений фильтрации. Совпадение σ-алгебр $\mathcal{F}_t^\xi$ и $\mathcal{F}_t^{\xi_0,\overline{W}}$

1. Для условно-гауссовского процесса (θ,ξ) апостериорные моменты $m_t=\mathsf{M}(\theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t=\mathsf{M}[(\theta_t-m_t)^2\,|\,\mathcal{F}_t^\xi]$ удовлетворяют, согласно теореме 12.1, уравнениям (12.29), (12.30). Следовательно, эта система уравнений имеет $\boldsymbol{F}^\xi$-согласованное решение $(\boldsymbol{F}^\xi=(\mathcal{F}_t^\xi),\ 0\leqslant t\leqslant T)$. В этом параграфе будет показано, что непрерывное решение этой системы единственно. Таким образом, решая эту систему уравнений, мы действительно будем получать моменты m_t и γ_t условного распределения θ_t.

Теорема 12.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.1. *Тогда система уравнений*

$$dx(t)=[a_0(t,\xi)+a_1(t,\xi)\,x(t)]\,dt+\\+\frac{b_2(t,\xi)\,B(t,\xi)+y(t)\,A_1(t,\xi)}{B^2(t,\xi)}\,[d\xi_t-(A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)\,x(t))\,dt], \tag{12.42}$$

$$\dot y(t)=2a_1(t,\xi)\,y(t)+b_1^2(t,\xi)+b_2^2(t,\xi)-\\-\left(\frac{b_2(t,\xi)\,B(t,\xi)+y(t)\,A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2, \tag{12.43}$$

решаемых с начальными условиями $x(0)=m_0$, $y(0)=\gamma_0$ ($|m_0|<\infty$, $0\leqslant\gamma_0<\infty$), *имеет единственное непрерывное,* $\mathcal{F}_t^\xi$*-измеримое при каждом* t *решение,* $0\leqslant t\leqslant T$.

Доказательство. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — два неотрицательных непрерывных решения уравнения (12.43). Тогда

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^t\left(|a_1(s,\xi)|+\left|\frac{b_2(s,\xi)}{B(s,\xi)}A_1(s,\xi)\right|\right)|y_1(s)-y_2(s)|\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}[y_1(s)+y_2(s)]\,|y_1(s)-y_2(s)|\,ds. \qquad (12.44)$$

Обозначим

$$r_1(s,\xi)=2\left(|a_1(s,\xi)|+\left|\frac{b_2(s,\xi)}{B(s,\xi)}A_1(s,\xi)\right|\right)+\frac{A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}[y_1(s)+y_2(s)].$$

Тогда неравенство (12.44) перепишется в следующем виде:

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant\int_0^t r_1(s,\xi)\,|y_1(s)-y_2(s)|\,ds.$$

Поэтому в силу леммы 4.13

$$\mathsf{P}\{y_1(t)=y_2(t)\}=1, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

и в силу непрерывности решений $y_1(t)$, $y_2(t)$

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|y_1(t)-y_2(t)|=0\}=1,$$

что и доказывает единственность непрерывного решения уравнения (12.43).

Пусть теперь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два непрерывных решения уравнения (12.42). Тогда

$$x_1(t)-x_2(t)=$$
$$=\int_0^t\left[a_1(s,\xi)+\frac{b_2(s,\xi)}{B(s,\xi)}A_1(s,\xi)+\frac{y(s)\,A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}\right][x_1(s)-x_2(s)]\,ds$$

и, следовательно,

$$|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant\int_0^t r_2(s,\xi)\,|x_1(s)-x_2(s)|\,ds, \qquad (12.45)$$

где

$$r_2(s,\xi)=|a_1(s,\xi)|+\left|\frac{b_2(s,\xi)}{B(s,\xi)}A_1(s,\xi)\right|+\frac{y(s)\,A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}.$$

Поэтому, снова применяя к (12.45) лемму 4.13, находим, что $x_1(t)=x_2(t)$ (**P**-п. н.) для каждого t, $0\leqslant t\leqslant T$. Отсюда получаем:

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x_1(t)-x_2(t)|=0\}=1.$$

Замечание. Согласно доказанному γ_t, $0\leqslant t\leqslant T$, является единственным непрерывным решением уравнения (12.43). Покажем, что если $\mathbf{P}(\gamma_0>0)=1$, то и $\mathbf{P}\{\inf_{t\leqslant T}\gamma_t>0\}=1$.

Действительно, в силу непрерывности $\gamma_t>0$ для достаточно малых $t>0$. Положим $\tau=\inf(t\leqslant T\colon\ \gamma_t=0)$, считая $\tau=\infty$, если $\inf_{t\leqslant T}\gamma_t>0$. Тогда при $t<\tau\wedge T$ определены величины $\delta_t=\gamma_t^{-1}$, удовлетворяющие уравнению

$$\dot{\delta}_t=-2\tilde{a}_1(t,\xi)\,\delta_t+\left(\frac{A_1(t,\xi)}{B(t,\xi)}\right)^2-\delta_t^2b_1^2(t,\xi),\qquad \delta_0=\gamma_0^{-1},\quad (12.46)$$

где

$$\tilde{a}_1(t,x)=a_1(t,x)-\frac{b_2(t,x)}{B(t,x)}A_1(t,x).$$

На множестве $\{\omega\colon\ \tau\leqslant T\}$ $\lim_{t\uparrow\tau}\delta_t=\infty$ (**P**-п. н.). Однако согласно (12.46)

$$\delta_t=\exp\left\{-2\int_0^t\tilde{a}_1(s,\xi)\,ds\right\}\left\{\delta_0+\int_0^t\exp\left[2\int_0^s\tilde{a}_1(u,\xi)\,du\right]\left(\frac{A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\delta_s^2b_1^2(s,\xi)\right)ds\right\}\leqslant\exp\left\{2\int_0^T|\tilde{a}_1(s,\xi)|\,ds\right\}\left[\delta_0+\int_0^T\frac{A_1^2(s,\xi)}{B^2(s,\xi)}\,ds\right]<\infty.$$

Значит, $\mathbf{P}\{\tau\leqslant T\}=0$. Иначе говоря,

$$\inf_{t\leqslant T}\gamma_t=(\sup_{t\leqslant T}\delta_t)^{-1}>0\qquad(\mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

2. При выводе уравнений фильтрации для процесса (θ,ξ) предполагалось, что этот процесс является решением системы уравнений (12.1), (12.2) с некоторыми винеровскими процессами W_1 и W_2. Однако не предполагалось, что процесс $(\theta,\xi)=(\theta_t,\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, являлся сильным решением (т. е. $\mathcal{F}_t^{\theta_0,\xi_0,W_1,W_2}$-измеримым для каждого t) этой системы.

Нетрудно привести условия, при которых эта система имеет, и притом единственное, непрерывное сильное решение.

Теорема 12.4. *Пусть $g(t,x)$ обозначает любой из неупреждающих функционалов $a_i(t,x)$, $A_i(t,x)$, $b_j(t,x)$, $B(t,x)$, $i=0,1$, $j=1,2$, $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in\mathbf{C}_T$. Предположим, что*

1) *для любых* $x,\ y \in \mathbf{C}_T$

$$|g(t, x) - g(t, y)|^2 \leqslant L_1 \int_0^t (x_s - y_s)^2\, dK(s) + L_2 (x_t - y_t)^2;$$

2) $$g^2(t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + x_s^2)\, dK(s) + L_2 (1 + x_t^2),$$

где $K(s)$ — *некоторая неубывающая непрерывная справа функция,* $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$, L_1, L_2 — *константы*;

3) $$|a_1(t, x)| \leqslant L_1, \qquad |A_1(t, x)| \leqslant L_2;$$

4) $\mathsf{M}(\theta_0^{2n} + \xi_0^{2n}) < \infty$ *для некоторого целого* $n \geqslant 1$.

Тогда система уравнений (12.1), (12.2) *имеет непрерывное сильное решение. Это решение единственно, и* $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathsf{M}(\theta_t^{2n} + \xi_t^{2n}) < \infty$.

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается так же, как и в одномерном случае (теорема 4.9).

3. Рассмотрим теперь вопрос о совпадении σ-алгебр $\mathscr{F}_t^\xi$ и $\mathscr{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ — винеровский процесс с дифференциалом (см. 11.27))

$$d\overline{W}_t = B^{-1}(t, \xi)[d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t)\, dt], \quad \overline{W}_0 = 0. \tag{12.47}$$

Согласно (12.29), (12.30) и (12.47) процессы m_t, ξ_t, γ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, образуют слабое решение системы уравнений

$$\begin{gathered}
dm_t = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\, m_t]\, dt + \left[b_2(t, \xi) + \frac{\gamma_t A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)}\right] d\overline{W}_t, \\
d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t]\, dt + B(t, \xi)\, d\overline{W}_t, \qquad (12.48) \\
\dot{\gamma}_t = 2\left[a_1(t, \xi) - \frac{b_2(t, \xi)}{B(t, \xi)} A_1(t, \xi)\right]\gamma_t + b_1^2(t, \xi) - \frac{A_1^2(t, \xi)}{B^2(t, \xi)}\gamma_t^2,
\end{gathered}$$

решаемой при заданных $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 | \xi_0)$, ξ_0 и $\gamma_0 = \mathsf{M}[(\theta_0 - m_0)^2 | \xi_0]$.

Изучим вопрос о существовании сильного решения у этой системы уравнений. Положительное решение этого вопроса позволит нам установить факт совпадения σ-алгебр $\mathscr{F}_t^\xi$ и $\mathscr{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, что в свою очередь будет говорить о том, что (обновляющий) процесс $\overline{W}$ и ξ_0 содержат в себе ту же самую «информацию», что и наблюдаемый процесс ξ.

Теорема 12.5. *Пусть функционалы* $a_i(t, x)$, $A_i(t, x)$, $b_j(t, x)$, $B(t, x)$, $i = 0, 1$; $j = 1, 2$, *удовлетворяют условиям* 1) *и 2) теоремы* 12.4. *Пусть также* $\gamma_0 = \gamma_0(x)$, $a_i(t, x)$, $A_i(t, x)$, $b_j(t, x)$ *и* $B^{-1}(t, x)$ $(i = 0, 1;\ j = 1, 2)$ *равномерно ограничены.*

Тогда система уравнений (12.48) *имеет, и притом единственное, сильное* (*т. е.* $\mathcal{F}_t^{m., \gamma_0, \xi_0, \overline{W}}$*-измеримое при каждом* t) *решение. При этом*

$$\mathcal{F}_t^{\xi} = \mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12.49}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{C}_T$. Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет $\gamma_t = \gamma_t(x)$:

$$\gamma_t(x) = \gamma_0(x) + \int_0^t \left[2\tilde{a}_1(s, x)\gamma_s(x) + b_1^2(s, x) - \frac{A_1^2(s, x)}{B^2(s, x)}\gamma_s^2(x)\right] ds. \tag{12.50}$$

Уравнение (12.50) является уравнением Риккати, причем его (неотрицательное непрерывное) решение существует и единственно для каждого $x \in \mathbf{C}_T$ (ср. с доказательством теоремы 12.3). Из (12.50) нетрудно вывести, что

$$\gamma_t(x) \leqslant \exp\left\{\int_0^t 2\tilde{a}_1(s, x)\, ds\right\}\left\{\gamma_0(x) + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \exp\left[-2\int_0^s \tilde{a}_1(u, x)\, du\right] b_1^2(s, x)\, ds\right\}.$$

В силу сделанных предположений отсюда вытекает, что $\gamma_t(x)$ равномерно ограничены по x.

Покажем, что функция $\gamma_t(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2 \leqslant L \int_0^t |x_s - y_s|^2\, d\tilde{K}(s), \qquad x_0 = y_0,$$

с некоторой неубывающей непрерывной справа функцией $\tilde{K}(s)$, $0 \leqslant \tilde{K}(s) \leqslant 1$.

Из (12.50) получаем

$$\gamma_t(x) - \gamma_t(y) = \int_0^t \left\{2[\tilde{a}_1(s, x)\gamma_s(x) - \tilde{a}_1(s, y)\gamma_s(y)] + \right.$$
$$\left. + [b_1^2(s, x) - b_1^2(s, y)] - \left[\frac{A_1^2(s, x)}{B^2(s, x)}\gamma_s^2(x) - \frac{A_1^2(s, y)}{B^2(s, y)}\gamma_s^2(y)\right]\right\} ds. \tag{12.51}$$

В силу условия 1) теоремы 12.4

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{a}_1(t, x)\gamma_t(x) - \tilde{a}_1(t, y)\gamma_t(y)|^2 \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2\gamma_t^2(x)\,|\tilde{a}_1(t, x) - \tilde{a}_1(t, y)|^2 + 2\,|\tilde{a}_1(t, x)|^2\,|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2 \leqslant \\
&\leqslant d_0 \int_0^t |x_s - y_s|^2\, dK(s) + d_1|x_t - y_t|^2 + d_2|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2, \qquad (12.52)
\end{aligned}
$$

где d_0, d_1 и d_2 — некоторые постоянные, существование которых гарантируется равномерной ограниченностью величин $\tilde{a}_1(t, x)$ и $\gamma_t(x)$, $x \in \mathbf{C}_T$.

Аналогично,

$$
|b_1^2(t, x) - b_1^2(t, y)|^2 \leqslant d_3 \int_0^t |x_s - y_s|^2\, dK(s) + d_4|x_t - y_t|^2 \qquad (12.53)
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{A_1^2(t, x)}{B^2(t, x)}\gamma_t^2(x) - \frac{A_1^2(t, y)}{B^2(t, y)}\gamma_t^2(y)\right| \leqslant \\
&\leqslant d_5 \int_0^t |x_s - y_s|^2\, dK(s) + d_6|x_t - y_t|^2 + d_7|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2. \qquad (12.54)
\end{aligned}
$$

Из (12.51) — (12.54) находим

$$
\begin{aligned}
&|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2 \leqslant d_8 \int_0^t \left[\int_0^s (x_u - y_u)^2\, dK(u)\right] ds + \\
&\qquad + d_9 \int_0^t (x_s - y_s)^2\, ds + d_{10} \int_0^t |\gamma_s(x) - \gamma_s(y)|^2\, ds \leqslant \\
&\leqslant d_8 T \int_0^t (x_s - y_s)^2\, dK(s) + d_9 \int_0^t (x_s - y_s)^2\, ds + d_{10} \int_0^t |\gamma_s(x) - \gamma_s(y)|^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Поэтому по лемме 4.13

$$
\begin{aligned}
&|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)|^2 \leqslant \left[d_8 T \int_0^t (x_s - y_s)^2\, dK(s) + d_9 \int_0^t (x_s - y_s)^2\, ds\right] e^{d_{10} t} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant d_{11} \int_0^t (x_s - y_s)^2\, d\tilde{K}(s), \qquad (12.55)
\end{aligned}
$$

где $\tilde{K}(s) = \dfrac{K(s) + s}{K(T) + T}$, а $d_{11} = e^{d_{10} T}[d_8 T + d_9](K(T) + T)$.

Рассмотрим теперь первые два уравнения системы (12.48), в которые подставлено $\gamma_t=\gamma_t(\xi)$, являющееся, как показано выше, непрерывным равномерно ограниченным решением третьего уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} dm_t &= [a_0(t, \xi)+a_1(t, \xi)\, m_t]\, dt+\left[b_1(t, \xi)+\frac{A_1(t, \xi)}{B(t, \xi)}\gamma_t(\xi)\right] d\overline{W}_t, \\ d\xi_t &= [A_0(t, \xi)+A_1(t, \xi)\, m_t]\, dt+B(t, \xi)\, d\overline{W}_t. \end{aligned} \tag{12.56}$$

Согласно предположениям теоремы и установленным свойствам функционала $\gamma_t(x)$ система уравнений (12.56) обладает единственным сильным (т. е. $\mathcal{F}_t^{m_0, \xi_0, \overline{W}}$-измеримым при каждом t) решением (см. замечание к теореме 4.6). Но $m_0=\mathsf{M}(\theta_0\,|\,\xi_0)$ $\mathcal{F}_0^{\xi}$-измеримо. Поэтому $\mathcal{F}_t^{m_0, \xi_0, \overline{W}}=\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$, $0\leqslant t\leqslant T$. Следовательно, ξ_t при каждом t $\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$-измеримы.

Итак, $\mathcal{F}_t^{\xi}\subseteq\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$. Справедливость же обратного включения, $\mathcal{F}_t^{\xi}\supseteq\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$, следует из конструкции обновляющего процесса $\overline{W}$ (см. (12.47)).

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в схеме Калмана—Бьюси

$$\begin{gathered} a_0(t, x)=a_0(t)+a_2(t)\, x_t, \qquad a_1(t, x)=a_1(t), \\ A_0(t, x)=A_0(t)+A_2(t)\, x_t, \qquad A_1(t, x)=A_1(t), \\ B(t, x)=B(t), \quad b_i(t, x)=b_i(t), \quad i=1,\ 2. \end{gathered} \tag{12.57}$$

В этом случае коэффициенты в уравнении, определяющем γ_t, являются детерминированными функциями, а уравнения для m_t и ξ_t имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dm_t &= [a_0(t)+a_1(t)\, m_t+a_2(t)\, \xi_t]\, dt+\left[b_1(t)+\frac{A_1(t)\,\gamma_t}{B(t)}\right] d\overline{W}_t, \\ d\xi_t &= [A_0(t)+A_1(t)\, m_t+A_2(t)\, \xi_t]\, dt+B(t)\, d\overline{W}_t. \end{aligned} \tag{12.58}$$

Эта система имеет единственное сильное решение в тех же самых предположениях, при которых были выведены уравнения фильтрации Калмана—Бьюси (см. (10.10), (10.11)). Поэтому в этом случае $\mathcal{F}_t^{\xi}=\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Замечание 2. Равенство $\mathcal{F}_t^{\xi}=\mathcal{F}_t^{\xi_0, \overline{W}}$ остается справедливым и в случае многомерных процессов θ и ξ (с очевидными изменениями в условиях теоремы 12.5, вызванными многомерностью процессов θ и ξ), рассматриваемых в следующем параграфе.

§ 3. Уравнения оптимальной фильтрации в многомерном случае

Обобщим результаты предшествующих параграфов на тот случай, когда каждый из процессов θ и ξ является векторным.

1. Снова предполагается, что задано некоторое (полное) вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ с неубывающим непрерывным справа семейством σ-подалгебр $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $W_1 = (W_1(t), \mathscr{F}_t)$ и $W_2 = (W_2(t), \mathscr{F}_t)$ — два независимых между собой винеровских процесса, $W_1(t) = [W_{11}(t), \ldots, W_{1k}(t)]$ и $W_2(t) = [W_{21}(t), \ldots, W_{2l}(t)]$.

Частично наблюдаемый случайный процесс

$$(\theta, \xi) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)), \mathscr{F}_t], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

будет предполагаться процессом диффузионного типа с дифференциалом

$$d\theta_t = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\,\theta_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} b_i(t, \xi)\,dW_i(t), \tag{12.59}$$

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} B_i(t, \xi)\,dW_i(t). \tag{12.60}$$

Здесь элементы вектор-функций (столбцов)

$$a_0(t, x) = (a_{01}(t, x), \ldots, a_{0k}(t, x)),$$
$$A_0(t, x) = (A_{01}(t, x), \ldots, A_{0l}(t, x))$$

и матриц

$$a_1(t, x) = \| a_{ij}^{(1)}(t, x) \|_{(k\times k)}, \qquad A_1(t, x) = \| A_{ij}^{(1)}(t, x) \|_{(l\times k)},$$
$$b_1(t, x) = \| b_{ij}^{(1)}(t, x) \|_{(k\times k)}, \qquad b_2(t, x) = \| b_{ij}^{(2)}(t, x) \|_{(k\times l)},$$
$$B_1(t, x) = \| B_{ij}^{(1)}(t, x) \|_{(l\times k)}, \qquad B_2(t, x) = \| B_{ij}^{(2)}(t, x) \|_{(l\times l)}$$

предполагаются измеримыми неупреждающими функционалами на $\{[0, T] \times \mathbf{C}_T^l, \mathscr{B}_{[0, T]} \times \mathscr{B}_T^l\}$, $x = (x_1, \ldots, x_l) \in \mathbf{C}_T^l$.

Следующие условия (I) — (VII) являются многомерными аналогами предположений (11.4) — (11.11), существенно использованных при доказательствах теорем 11.1 и 12.1 ($x \in \mathbf{C}_T^l$, индексы i и j принимают все допустимые значения):

(I) $$\int_0^T [\,|a_{0i}(t, x)| + |a_{ij}^{(1)}(t, x)| + (b_{ij}^{(1)}(t, x))^2 + (b_{ij}^{(2)}(t, x))^2 + (B_{ij}^{(1)}(t, x))^2 + (B_{ij}^{(2)}(t, x))^2]\,dt < \infty;$$

(II) $$\int_0^T [(A_{0i}(t, x))^2 + (A_{ij}^{(1)}(t, x))^2]\,dt < \infty;$$

(III) *матрица* $B \circ B(t, x) \equiv B_1(t, x) B_1^*(t, x) + B_2(t, x) B_2^*(t, x)$ *равномерно не вырождена, т. е. элементы обратной к ней матрицы равномерно ограничены;*

(IV) *если* $g(t, x)$ *обозначает любой из элементов матриц* $B_1(t, x)$ *и* $B_2(t, x)$, *то для* $x, y \in C_T^l$

$$|g(t, x) - g(t, y)|^2 \leqslant L_1 \int_0^t |x_s - y_s|^2 dK(s) + L_2 |x_t - y_t|^2,$$

$$g^2(t, x) \leqslant L_1 \int_0^t (1 + |x_s|^2) dK(s) + L_2(1 + |x_t|^2),$$

где $|x_t|^2 = x_1^2(t) + \ldots + x_l^2(t)$, $K(s)$—*неубывающая непрерывная справа функция,* $0 \leqslant K(s) \leqslant 1$;

(V) $$\int_0^T \mathsf{M} \, | A_{ij}^{(1)}(t, \xi) \, \theta_j(t) | \, dt < \infty;$$

(VI) $$\mathsf{M} | \theta_j(t) | < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

(VII) $$\mathsf{P} \left\{ \int_0^T \left(A_{ij}^{(1)}(t, \xi) \, m_j(t) \right)^2 dt < \infty \right\} = 1,$$

где $m_j(t) = \mathsf{M}\left[\theta_j(t) \,|\, \mathcal{F}_t^\xi\right]$.

2. Обобщением теоремы 11.1 на многомерный случай является

Теорема 12.6. *Пусть выполнены условия* (I)—(VII) *и с вероятностью единица условное распределение**) $F_{\xi_0}(a_0) = \mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a_0 \,|\, \xi_0)$ *является* (P-п. н.) *гауссовским,* $N(m_0, \gamma_0)$, *где вектор* $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \,|\, \mathcal{F}_0^\xi)$ *и матрица* $\gamma_0 = \mathsf{M}\left[(\theta_0 - m_0)(\theta_0 - m_0)^* \,|\, \mathcal{F}_0^\xi\right]$ *такова, что* $\operatorname{Sp} \gamma_0 < \infty$ (P-п. н.)

Тогда случайный процесс $(\theta, \xi) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, *удовлетворяющий системе уравнений* (12.59), (12.60), *является условно-гауссовским, т. е. для любых* t_j, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant t$, *условное распределение*

$$F_{\xi_0^t}(a_0, \ldots, a_n) = \mathsf{P}\left\{\theta_{t_0} \leqslant a_0, \ldots, \theta_{t_n} \leqslant a_n \,|\, \mathcal{F}_t^\xi\right\}$$

является (P-п. н.) *гауссовским.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 11.1. Поэтому остановимся лишь на отдельных моментах в доказательстве, которые могут вызвать затруднение в связи с многомерностью рассматриваемых процессов.

---

*) Для $\theta_0 = \{\theta_1(0), \ldots, \theta_k(0)\}$ и $a_0 = (a_{01}, \ldots, a_{0k})$ под $\{\theta_0 \leqslant a_0\}$ понимается событие $\{\theta_1(0) \leqslant a_{01}, \ldots, \theta_k(0) \leqslant a_{0k}\}$.

Прежде всего заметим, что в (12.60) можно считать $B_1(t, x)\equiv 0$, $B_2(t, x)\equiv B(t, x)$, поскольку в силу леммы 10.4 найдутся такие независимые между собой винеровские процессы

$$\tilde{W}_1(t)=[\tilde{W}_{11}(t), \ldots, \tilde{W}_{1k}(t)], \quad \tilde{W}_2(t)=[\tilde{W}_{21}(t), \ldots, \tilde{W}_{2l}(t)],$$

что

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^2 b_i(s, \xi)\, dW_i(s) &= \int_0^t \sum_{i=1}^2 d_i(s, \xi)\, d\tilde{W}_i(s), \\ \int_0^t \sum_{i=1}^2 B_i(s, \xi)\, dW_i(s) &= \int_0^t D(s, \xi)\, d\tilde{W}_2(s), \end{aligned} \tag{12.61}$$

где

$$\begin{aligned} &D(t, x)=\sqrt{(B\circ B)(t, x)}, \\ &d_2(t, x)=(b\circ B)(t, x)(B\circ B)^{-1/2}(t, x), \\ &d_1(t, x)=[(b\circ b)(t, x)-(b\circ B)(t, x)(B\circ B)^{-1}(t, x)(b\circ B)^*(t, x)]^{1/2} \end{aligned} \tag{12.62}$$

с $B\circ B=B_1B_1^*+B_2B_2^*$, $b\circ B=b_1B_1^*+b_2B_2^*$, $b\circ b=b_1b_1^*+b_2b_2^*$.

Далее, если $f_t(\theta_0, W_1, \xi)$ — (скалярная) $\mathcal{F}_t^{\theta_0, W_1, \xi}$-измеримая функция с $\mathsf{M}|f_t(\theta_0, W_1, \xi)|<\infty$, то имеет место формула Байеса (ср. с (11.35))

$$\mathsf{M}\left(f_t(\theta_0, W_1, \xi)\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right)= \\ =\int_{R^k}\int_{C_T^k} f_t(a, c, \xi)\,\rho_t(a, c, \xi)\, d\mu_W(c)\, dF_{\xi_0}(a), \tag{12.63}$$

где $a\in R^k$, $c\in C_T^k$, μ_W — винеровская мера в $(C_T^k, \mathcal{B}_T^k)$ и

$$\rho_t(a, c, \xi)=\exp\left\{\int_0^t [A_1(s, \xi)(Q_s(a, c, \xi)-m_s(\xi))]^*(B^*(s, \xi))^{-1}\, d\bar{W}_s- \right. \\ -\frac{1}{2}\int_0^t [A_1(s, \xi)(Q_s(a, c, \xi)-m_s(\xi))]^*(B(s, \xi)B^*(s, \xi))^{-1}\times \\ \left.\times[A_1(s, \xi)(Q_s(a, c, \xi)+m_s(\xi))]\,ds\right\}. \tag{12.64}$$

Здесь $m_t(\xi)=\mathsf{M}\left(\theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right)$,

$$\bar{W}_t=\int_0^t B^{-1}(s, \xi)\, d\xi_s-\int_0^t B^{-1}(s, \xi)[A_0(s, \xi)+A_1(s, \xi)\, m_s(\xi)]\, ds \tag{12.65}$$

— винеровский процесс (относительно $(\mathscr{F}_t^\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$),

$$Q_t(a, W_1, \xi) = \Phi_t(\xi)\left[a + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\xi)\,\tilde{a}_0(s, \xi)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\xi)\,b_1(s, \xi)\,dW_1(s) + \int_0^t \Phi_s^{-1}(\xi)\,b_2(s, \xi)\,B^{-1}(s, \xi)\,d\xi_s\right],$$

$$\frac{d\Phi_t(\xi)}{dt} = \tilde{a}_1(t, \xi)\,\Phi_t(\xi), \qquad \Phi_0(\xi) = E_{(k\times k)}$$

и

$$\tilde{a}_0(t, x) = a_0(t, x) - b_2(t, x)\,B^{-1}(t, x)\,A_0(t, x),$$

$$\tilde{a}_1(t, x) = a_1(t, x) - b_2(t, x)\,B^{-1}(t, x)\,A_1(t, x).$$

С помощью формулы (12.63), так же, как и в случае одномерных процессов θ и ξ, сначала проверяется гауссовость условных распределений

$$\mathsf{P}\left(\theta_0 \leqslant a_0,\ W_1(t_1) \leqslant y_1,\ \ldots,\ W_1(t_n) \leqslant y_n \mid \mathscr{F}_t^\xi\right),$$

$0 \leqslant t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t$, а затем устанавливают гауссовость распределений

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t_0} \leqslant a_0,\ \ldots,\ \theta_{t_n} \leqslant a_n \mid \mathscr{F}_t^\xi\right).$$

3. Предположим также, что наряду с (I) — (VII) выполнены условия:

(VIII) $\quad |a_{ij}^{(1)}(t, x)| \leqslant L, \qquad |A_{ij}^{(1)}(t, x)| \leqslant L;$

(IX) $\quad \int_0^T \mathsf{M}\left[a_{0i}^4(t, \xi) + (b_{ij}^{(1)}(t, \xi))^4 + (b_{ij}^{(2)}(t, \xi))^4\right] dt < \infty;$

(X) $\quad \mathsf{M} \sum_{i=1}^k \theta_i^4(0) < \infty.$

Следующий результат является многомерным аналогом теорем 12.1 и 12.3.

Теорема 12.7. *Пусть выполнены условия* (I) — (IV), (VIII) — (X). *Тогда вектор* $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ *и матрица* $\gamma_t = \mathsf{M}\left\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\}$ *являются единственными непрерывными,* $\mathscr{F}_t^\xi$*-измеримыми при каждом* t *решениями системы уравнений*

$$dm_1 = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\,m_t]\,dt + \\ + \left[(b\circ B)(t, \xi) + \gamma_t A_1^*(t, \xi)\right](B\circ B)^{-1}(t, \xi)\times \\ \times [d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,m_t)\,dt], \tag{12.66}$$

$$\dot{\gamma}_t = a_1(t, \xi)\,\gamma_t + \gamma_t a_1^*(t, \xi) + (b\circ b)(t, \xi) - \left[(b\circ B)(t, \xi) + \gamma_t A_1^*(t, \xi)\right]\times \\ \times (b\circ B)^{-1}(t, \xi)\left[(b\circ B)(t, \xi) + \gamma_t A_1^*(t, \xi)\right] \tag{12.67}$$

с начальными условиями $m_0 = \mathsf{M}(\theta_0 \mid \xi_0)$, $\gamma_0 = \mathsf{M}\{(\theta_0 - m_0) \times (\theta_0 - m_0)^* \mid \xi_0\}$.

Если при этом матрица γ_0 *положительно определена, то таковыми же будут и матрицы* γ_t, $0 < t \leqslant T$.

Доказательство этой теоремы в части, касающейся вывода уравнений (12.66), (12.67), совпадает с соответствующим доказательством теоремы 12.1, проводимым для компонент $m_j(t) = \mathsf{M}(\theta_j(t) \mid \mathscr{F}_t^\xi)$, $\gamma_{ij}(t) = \mathsf{M}\{[\theta_i(t) - m_i(t)][\theta_j(t) - m_j(t)] \mid \mathscr{F}_t^\xi\}$. Единственность решений системы (12.66), (12.67) доказывается, как и в теореме 12.3.

Остановимся на доказательстве последнего утверждения теоремы.

Покажем, что у матриц γ_t существуют обратные матрицы $\delta_t = \gamma_t^{-1}$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Ясно, что при достаточно малых значениях $t = t(\omega)$ такие матрицы существуют в силу невырожденности матрицы γ_0 и непрерывности (P-п. н.) элементов матрицы γ_t по t.

Пусть $\tau = \inf\{t \leqslant T\colon \det \gamma_t = 0\}$, причем $\tau = \infty$, если $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \det \gamma_t > 0$. Тогда при $t < \tau \wedge T$ определены матрицы $\delta_t = \gamma_t^{-1}$. Заметим теперь, что для $t < \tau \wedge T$

$$0 = \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt}(\gamma_t \delta_t) = \dot{\gamma}_t \delta_t + \gamma_t \dot{\delta}_t = \dot{\gamma}_t \delta_t + \delta_t^{-1} \dot{\delta}_t.$$

Поэтому

$$\dot{\delta}_t = -\delta_t \dot{\gamma}_t \delta_t. \tag{12.68}$$

Учитывая уравнение (12.67), отсюда получаем, что для $t < \tau \wedge T$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_t = &-\tilde{a}_1^*(t, \xi)\delta_t - \delta_t \tilde{a}_1(t, \xi) + A_1^*(t, \xi)(B \circ B)^{-1}(t, \xi) A_1(t, \xi) - \\ &- \delta_t\left[(b \circ b)(t, \xi) - (b \circ B)(t, \xi)(B \circ B)^{-1}(t, \xi)(b \circ B)^*(t, \xi)\right]\delta_t, \end{aligned} \tag{12.69}$$

где $\tilde{a}_1(t, x) = a_1(t, x) - (b \circ B)(t, x)(B \circ B)^{-1}(t, x) A_1(t, x)$.

На множестве $\{\omega\colon \tau \leqslant T\}$ элементы матрицы δ_t должны возрастать при $t \uparrow \tau$. Покажем, что на самом деле все элементы матриц δ_t ограничены.

Обозначим $G_t(\xi)$ решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dG_t(\xi)}{dt} = \tilde{a}_1(t, \xi) G_t(\xi), \quad G_0(\xi) = E_{(k \times k)}. \tag{12.70}$$

Матрица $G_t(\xi)$, являясь фундаментальной матрицей, как хорошо известно, невырождена.

Пусть $V_t = G_t(\xi)\delta_t G_t^*(\xi)$. Тогда из (12.69) и (12.70) для $t < \tau \wedge T$ находим

$$\dot{V}_t = \tilde{a}_1(t, \xi) V_t + V_t \tilde{a}_1^*(t, \xi) + G_t(\xi)\{-\tilde{a}_1^*(t, \xi)\delta_t - \delta_t \tilde{a}_1(t, \xi) + A_1^*(t, \xi)(B \circ B)^{-1}(t, \xi) A_1(t, \xi) - \delta_t[(b \circ b)(t, \xi) - (b \circ B)^*(t, \xi)(B \circ B)^{-1}(t, \xi)(b \circ B)^*(t, \xi)]\delta_t\} G_t^*(\xi). \tag{12.71}$$

Поскольку матрица $b \circ b - (b \circ B)(B \circ B)^{-1}(b \circ B)^*$ симметрическая и неотрицательно определенная, то из (12.71) получаем

$$\operatorname{Sp} V_t \leqslant \operatorname{Sp} V_0 + \int_0^T \operatorname{Sp}\{G_s(\xi) A_1^*(s, \xi)(B \circ B)^{-1}(s, \xi) A_1(s, \xi) G_s^*(\xi)\} ds,$$

что вместе с невырожденностью матрицы $G_t(\xi)$ и доказывает ограниченность (P-п. н.) элементов матриц δ_t. Значит, $\mathsf{P}(\tau \leqslant T) = 0$.

4. Приведем, наконец, многомерный аналог теоремы 12.2.

Теорема 12.8. *Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — k-мерная случайная величина с $\sum_{i=1}^{k} \mathsf{M}\theta_i^4 < \infty$. Предположим, что наблюдаемый процесс $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет дифференциал*

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta] dt + B(t, \xi) dW_2(t),$$

где коэффициенты A_0, A_1, B удовлетворяют условиям теоремы 12.6, а условное распределение $\mathsf{P}(\theta \leqslant a \mid \xi_0)$ является гауссовским, $N(m_0, \gamma_0)$. Тогда $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta - m_t)(\theta - m_t)^* \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ задаются формулами

$$m_t = \left[E + \gamma_0 \int_0^t A_1^*(s, \xi)(B(s, \xi) B^*(s, \xi))^{-1} A_1(s, \xi) ds\right]^{-1} \times \left[m_0 + \gamma_0 \int_0^t A_1^*(s, \xi)(B(s, \xi) B^*(s, \xi))^{-1}(d\xi_s - A_0(s, \xi) ds)\right], \tag{12.72}$$

$$\gamma_t = \left[E + \gamma_0 \int_0^t A_1^*(s, \xi)(B(s, \xi) B^*(s, \xi))^{-1} A_1(s, \xi) ds\right]^{-1} \gamma_0. \tag{12.73}$$

Доказательство аналогично соответствующему доказательству теоремы 12.2.

§ 4. Интерполяция условно-гауссовских процессов

1. Будем рассматривать $k+l$-мерный случайный процесс $(\theta, \xi)=[(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, управляемый системой стохастических дифференциальных уравнений (12.59), (12.60) и удовлетворяющий условиям (I) — (IV), (VIII) — (X). Пусть условное распределение $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ нормально, $N(m_0, \gamma_0)$. Тогда в силу теоремы 12.6 условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$, $s \leqslant t$, является (P-п. н.) гауссовским с параметрами

$$m(s, t)=\mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi),$$

$$\gamma(s, t)=\mathsf{M}\left[(\theta_s-m(s, t))(\theta_s-m(s, t))^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right].$$

Ясно, что компоненты $m_i(s, t)=\mathsf{M}\left[\theta_i(s) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right]$ вектора $m(s, t)=[m_1(s, t), \ldots, m_k(s, t)]$ являются наилучшими (в среднеквадратическом смысле) оценками компонент $\theta_i(s)$, $i=1, \ldots, k$, вектора $\theta_s=[\theta_1(s), \ldots, \theta_k(s)]$ по наблюдениям $\xi_0^t=\{\xi_s, s \leqslant t\}$.

В этом параграфе будут выведены прямые (по t при фиксированном s) и обратные (по s при фиксированном t) уравнения (интерполяции) для $m(s, t)$ и $\gamma(s, t)$.

Обозначим $m_{\theta_s}(t, s)=\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right)$ и

$$\gamma(t, s)=\mathsf{M}\left[(\theta_t-m_{\theta_s}(t, s))(\theta_t-m_{\theta_s}(t, s))^* \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right].$$

Согласно многомерному аналогу замечания 3 к теореме 12.1 $m_{\theta_s}(t, s)$ и $\gamma(t, s)$ удовлетворяют при $t \geqslant s$ системе уравнений (ср. с (12.66), (12.67))

$$\begin{aligned} d_t m_{\theta_s}(t, s)= & \left[a_0(t, \xi)+(a(t, \xi)-\gamma(t, s) c(t, \xi)) m_{\theta_s}(t, s)\right] dt+ \\ & +\left[(b \circ B)(t, \xi)+\gamma(t, s) A_1^*(t, \xi)\right](B \circ B)^{-1}(t, \xi)\left[d \xi_t-A_0(t, \xi) dt\right], \end{aligned} \tag{12.74}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \gamma(t, s)}{dt}= & a(t, \xi) \gamma(t, s)+\gamma(t, s) a^*(t, \xi)+ \\ & +b(t, \xi)-\gamma(t, \xi) c(t, \xi) \gamma(t, \xi), \end{aligned} \tag{12.75}$$

где

$$\begin{aligned} & a(t, x)=a_1(t, x)-(b \circ B)(t, x)(B \circ B)^{-1}(t, x) A_1(t, x), \\ & b(t, x)=b \circ b(t, x)-(b \circ B)(t, x)(B \circ B)^{-1}(t, x)(b \circ B)^*(t, x), \\ & c(t, x)=A_1^*(t, x)(B \circ B)^{-1}(t, x) A_1(t, x). \end{aligned} \tag{12.76}$$

Система уравнений (12.74), (12.75) решается при условиях $m_{\theta_s}(s, s)=\theta_s$, $\gamma(s, s)=0$ (нулевая матрица порядка $(k \times k)$) и имеет, как и система (12.66), (12.67), единственное непрерывное решение. Отсюда, в частности, вытекает, что $\gamma(t, s)$, как решение уравнения (12.75) с $\gamma(s, s)=0$, не зависит от θ_s,

2. При выводе уравнений для $m(s, t)$, $\gamma(s, t)$ будут использованы следующие две леммы.

Лемма 12.2. *Пусть матрица* $\varphi_s^t(\xi)$, $t \geqslant s$, *является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{d\varphi_s^t(\xi)}{dt} = [a(t, \xi) - \gamma(t, s)\, c(t, \xi)]\, \varphi_s^t(\xi) \tag{12.77}$$

с $\varphi_s^s(\xi) = E_{(k\times k)}$ *и*

$$q_s^t(\xi) = \int_s^t (\varphi_s^u(\xi))^{-1} [a_0(u, \xi)\, du + \{(b\circ B)(u, \xi) + \gamma(u, s)\, A_1^*(u, \xi)\} \times \\ \times (B\circ B)^{-1}(u, \xi)\{d\xi_u - A_0(u, \xi)\, du\}]. \tag{12.78}$$

Тогда

$$m_{\theta_s}(t, s) = \varphi_s^t(\xi)\left[\theta_s + q_s^t(\xi)\right] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{12.79}$$

Доказательство. В справедливости формулы (12.79) легко убедиться, применив формулу Ито.

Лемма 12.3. *Пусть* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. *Тогда*

$$m_t = \varphi_s^t(\xi)\left[m(s, t) + q_s^t(\xi)\right] \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \tag{12.80}$$

$$\gamma_t = \gamma(t, s) + \varphi_s^t(\xi)\, \gamma(s, t)\, (\varphi_s^t(\xi))^* \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{12.81}$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{F}_t^\xi \subseteq \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}$, то

$$m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left(m_{\theta_s}(t, s) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right). \tag{12.82}$$

Заметим, что элементы вектора $\chi_N \varphi_s^t(\xi)\, \theta_s$, где

$$\chi_N = \chi_{\left\{\left\|\varphi_s^t(\xi)\, q_s^t(\xi)\right\| \leqslant N\right\}},$$

интегрируемы. Поэтому

$$\chi_N \mathsf{M}\left[m_{\theta_s}(t, s) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[\chi_N \varphi_s^t(\xi)\, (\theta_s + q_s^t(\xi)) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] = \\ = \chi_N \varphi_s^t(\xi)\left[m(s, t) + q_t^t(\xi)\right],$$

что вместе с (12.82) и доказывает представление (12.80).

Далее, поскольку

$$\mathsf{M}\left[(\theta_t - m_{\theta_s}(t, s))\left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)^* \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right] = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

то

$$\gamma_t = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right] = \\ = \mathsf{M}\left\{\left[(\theta_t - m_{\theta_s}(t, s)) + \left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)\right]\left[\theta_t - m_{\theta_s}(t, s)\right) + \\ + \left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)\right]^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\} = \\ = \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left[(\theta_t - m_{\theta_s}(t, s))(\theta_t - m_{\theta_s}(t, s))^* \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right] \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\} + \\ + \mathsf{M}\left\{\left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)\left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\} = \\ = \gamma(t, s) + \mathsf{M}\left\{\left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)\left(m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right)^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\}. \tag{12.83}$$

Замечая, что

$$m_{\theta_s}(t, s) - m_t = \varphi_s^t(\xi)\left[\theta_s + q_s^t(\xi)\right] - \varphi_s^t(\xi)\left[m(s, t) + q_s^t(\xi)\right] = \\ = \varphi_s^t(\xi)\left[\theta_s - m(s, t)\right],$$

находим

$$\mathsf{M}\left\{(m_{\theta_s}(t, s) - m_t)(m_{\theta_s}(t, s) - m_t)^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right\} = \\ = \varphi_s^t(\xi)\,\mathsf{M}\left[(\theta_s - m(s, t))(\theta_s - m(s, t))^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right](\varphi_s^t(\xi))^* = \\ = \varphi_s^+(\xi)\,\gamma(s, t)\,(\varphi_s^t(\xi))^*.$$

Вместе с (12.83) это доказывает формулу (12.81).

3. Из (12.80), (12.81) для $m(s, t)$ и $\gamma(s, t)$ легко получить представления, показывающие, как меняются эти характеристики интерполяции при изменении t.

Теорема 12.9. *Пусть выполнены предположения* (I)—(IV), (VIII) — (X) *и условное распределение* $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ *нормально. Тогда* $m(s, t)$ *и* $\gamma(s, t)$ *допускают представления*

$$m(s, t) = m_s + \int_s^t \gamma(s, u)(\varphi_s^u(\xi))^* A_1^*(u, \xi)(B\circ B)^{-1}(u, \xi) \times \\ \times [d\xi_u - (A_0(u, \xi) + A_1(u, \xi)\,m_u)\,du], \tag{12.84}$$

$$\gamma(s, t) = \\ = \left(E + \gamma_s \int_s^t (\varphi_s^u(\xi))^* A_1^*(u, \xi)(B\circ B)^{-1}(u, \xi)\,A_1(u, \xi)\,\varphi_s^u(\xi)\,du\right)^{-1}\gamma_s. \tag{12.85}$$

Доказательство. Из (12.80) находим

$$m(s, t) = (\varphi_s^t(\xi))^{-1} m_t - q_s^t(\xi). \tag{12.86}$$

Матрица $\varphi_s^t(\xi)$ является фундаментальной. Поэтому обратная матрица $(\varphi_s^t(\xi))^{-1}$ существует, и согласно (12.77) для $t \geqslant s$

$$\frac{d\,(\varphi_s^t(\xi))^{-1}}{dt} = -(\varphi_s^t(\xi))^{-1}[a(t, \xi) - \gamma(t, s)\,c(t, \xi)] \tag{12.87}$$

с $(\varphi_s^s(\xi))^{-1} = E_{(k\times k)}$.

Из (12.86), (12.87) и (12.29) по формуле Ито находим

$$m(s, t) = m_s + \int_s^t (\varphi_s^u(\xi))^{-1}[\gamma_u - \gamma(u, s)]\,A_1^*(u, \xi)(B\circ B)^{-1}(u, \xi) \times \\ \times [d\xi_u - (A_0(u, \xi) + A_0(u, \xi)\,m_u)\,du]. \tag{12.88}$$

Но в силу (12.81)

$$(\varphi_s^u(\xi))^{-1}[\gamma_u - \gamma(u, s)] = \gamma(s, u)(\varphi_s^u(\xi))^*.$$

Подставляя это выражение в (12.88), приходим к искомому представлению (12.84).

Докажем теперь формулу (12.85). Из (12.81) получаем

$$\gamma(s, t) = (\varphi_s^t(\xi))^{-1}[\gamma_t - \gamma(t, s)][(\varphi_s^t(\xi))^*]^{-1}. \tag{12.89}$$

Дифференцируя правую часть в (12.89) и учитывая (12.30), (12.87), (12.75), после простых преобразований находим, что

$$\frac{d\gamma(s, t)}{dt} = -\gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^* c(t, \xi)\varphi_s^t(\xi)\gamma(s, t). \tag{12.90}$$

Уравнение (12.90) является частным случаем уравнения Риккати, решение которого существует и единственно. Чтобы его решить, зададим матрицы U_t, $t \geqslant s$, формулами

$$U_t = E + \gamma_s \int_s^t (\varphi_s^u(\xi))^* c(u, \xi)\varphi_s^u(\xi)\, du.$$

Эти матрицы не вырождены, и

$$\frac{dU_t^{-1}}{dt} = -U_t^{-1}\gamma_s(\varphi_s^t(\xi))^* c(t, \xi)\varphi_s^t(\xi)U_t^{-1}, \qquad U_s^{-1} = E.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d(U_t^{-1}\gamma_s)}{dt} = -(U_t^{-1}\gamma_s)(\varphi_s^t(\xi))^* c(t, \xi)\varphi_s^t(\xi)(U_t^{-1}\gamma_s), \tag{12.91}$$

где $U_s^{-1}\gamma_s = \gamma_s$.

Сравнивая (12.90) и (12.91), находим

$$\gamma(s, t) = (U_t^{-1}\gamma_s),$$

что и доказывает требуемое представление (12.85).

Замечание. Вместе с (12.90) уравнение для $m(s, t)$, получаемое из (12.84), называют прямыми уравнениями оптимальной нелинейной интерполяции.

4. Выведем теперь для $m(s, t)$ и $\gamma(s, t)$ представления, показывающие изменение этих величин при $s \uparrow t$.

Теорема 12.10. *Пусть выполнены условия* (I) — (IV), (VIII) — (X) *и условное распределение* $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ *является нормальным,* $N(m_0, \gamma_0)$. *Пусть, кроме того,*

$$\mathsf{P}\{\inf_{0 \leqslant t \leqslant T} \det \gamma_t > 0\} = 1.$$

Тогда

$$m(s, t) = m(t) - \int_0^t [a_0(u, \xi) + a_1(u, \xi)\, m(u, t) + b(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}(m(u, t) - m_u)]\, du - \\ - \int_s^t (b \circ B)(u, \xi)(B \circ B)^{-1}(u, \xi)[d\xi_u - (A_0(u, \xi) + A_1(u, \xi)\, m(u, t))\, du], \quad (12.92)$$

$$\gamma(s, t) = \gamma_t - \int_s^t \{[a(u, \xi) + b(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}]\, \gamma(u, t) + \gamma(u, t)[a(u, \xi) + b(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}]^* - b(u, \xi)\}\, du, \quad (12.93)$$

где $a(u, x)$, $b(u, x)$ *заданы формулами* (12.76).

Для доказательства этой теоремы установим предварительно следующие две леммы.

Лемма 12.4. *Пусть* $\mathsf{P}\{\inf_{t \leqslant T} \det \gamma_t > 0\} = 1$ *и матрица* $R_s^t(\xi)$ *является решением системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dR_s^t(\xi)}{dt} = [a(t, \xi) + b(t, \xi)\, \gamma_t^{-1}]\, R_s^t(\xi), \qquad R_s^s(\xi) = E_{(k \times k)}. \quad (12.94)$$

Тогда

$$\gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^* = (R_s^t(\xi))^{-1}\, \gamma_t. \quad (12.95)$$

Доказательство. Обозначим $U_s^t = \gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^*$. Тогда в силу (12.90) и (12.77)

$$\frac{dU_s^t}{dt} = -\gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^*\, c(t, \xi)\, \varphi_s^t(\xi)\, \gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^* + \\ + \gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^*[a(t, \xi) - \gamma(t, s)\, c(t, \xi)]^* = \\ = U_s^t a^*(t, \xi) - U_s^t c(t, \xi)[\varphi_s^t(\xi)\, \gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^* + \gamma(t, s)].$$

Но согласно (12.81)

$$\varphi_s^t(\xi)\, \gamma(s, t)(\varphi_s^t(\xi))^* + \gamma(t, s) = \gamma_t.$$

Поэтому

$$\frac{dU_s^t}{dt} = U_s^t[a^*(t, \xi) - c(t, \xi)\, \gamma_t]. \quad (12.96)$$

Пусть V_s^t — фундаментальная матрица системы (12.96), т. е. пусть

$$\frac{dV_s^t}{dt} = V_s^t[a^*(t, \xi) - c(t, \xi)\, \gamma_t], \qquad V_s^s = E_{(k \times k)}. \quad (12.97)$$

Поскольку $V_s^t = V_0^t (V_0^s)^{-1}$ и матрица $(V_0^s)^{-1}$ является решением системы уравнений

$$\frac{d(V_0^s)^{-1}}{ds} = -[a^*(s, \xi) - c(s, \xi)\gamma_t](V_0^s)^{-1}, \qquad (V_0^0)^{-1} = E_{(k\times k)},$$

то матрица V_s^t дифференцируема по s и при $s < t$

$$\frac{dV_s^t}{ds} = -[a^*(s, \xi) - c(s, \xi)\gamma_s] V_s^t, \qquad V_t^t = E_{(k\times k)}. \tag{12.98}$$

Но

$$U_s^t = U_s^s V_s^t = \gamma_s V_s^t,$$

где γ_s и V_s^t дифференцируемы по s. Поэтому матрица U_s^t также дифференцируема по s и

$$\frac{dU_s^t}{ds} = \frac{d\gamma_s}{ds} V_s^t + \gamma_s \frac{dV_s^t}{ds}.$$

Из (12.30) с учетом обозначений (12.76) имеем

$$\frac{d\gamma_s}{ds} = a(s, \xi)\gamma_s + \gamma_s a^*(s, \xi) + b(s, \xi) - \gamma_s c(s, \xi)\gamma_s, \tag{12.99}$$

что вместе с (12.97) дает

$$\frac{dU_s^t}{ds} = [a(s, \xi)\gamma_s + \gamma_s a^*(s, \xi) + b(s, \xi) - \gamma_s c(s, \xi)\gamma_s] V_s^t -$$
$$- \gamma_s (a^*(s, \xi) - c(s, \xi)\gamma_s) V_s^t = [a(s, \xi) + b(s, \xi)\gamma_s^{-1}] U_s^t. \tag{12.100}$$

Из (12.94) и (12.100) вытекает, что $U_t^t = R_s^t U_s^t$. Но $U_t^t = \gamma_t$, поэтому $U_s^t = (R_s^t)^{-1}\gamma_t$, что и доказывает (12.95).

Лемма 12.5. *Пусть* $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *— неубывающее семейство σ-алгебр,* $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ *— винеровский процесс и* $a = (a_t, \mathcal{F}_t)$, $b = (b_t, \mathcal{F}_t)$ *— случайные процессы с* $\int_0^T |a_t| dt < \infty$, $\int_0^T b_t^2 dt < \infty$ (P-п. н.). *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$\int_0^s a_u du \int_s^t b_u dW_u =$$
$$= \int_0^s a_u \left[\int_u^t b_v dW_v\right] du - \int_0^s \left[\int_0^u a_v dv\right] b_u dW_u. \tag{12.101}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_0^s a_u du \int_s^t b_u dW_u = \int_0^s a_u du \int_0^t b_u dW_u - \int_0^s a_u du \int_0^s b_u dW_u. \tag{12.102}$$

По формуле Ито

$$\int_0^s a_u\,du\int_0^s b_u\,dW_u=\int_0^s\left[\int_0^u b_v\,dW_v\right]a_u\,du+\int_0^s\left[\int_0^u a_v\,dv\right]b_u\,dW_u,$$

поэтому правая часть в (12.102) равна

$$\int_0^s a_u\,du\int_0^t b_u\,dW_u-\int_0^s\left[\int_0^u b_v\,dW_v\right]a_u\,du-\int_0^s\left[\int_0^u a_v\,dv\right]b_u\,dW_u=$$
$$=\int_0^s a_u\left[\int_u^t b_v\,dW_v\right]du-\int_0^s\left[\int_0^u a_v\,dv\right]b_u\,dW_u,$$

что и доказывает (12.101).

5. Доказательство теоремы 12.10. Согласно (12.84) и (12.95)

$$m(s,\ t)=m_s+\int_s^t\left[R_s^u(\xi)\right]^{-1}\gamma_u A_1^*(u,\ \xi)(B\circ B)^{-1/2}(u,\ \xi)\,d\overline{W}_u, \tag{12.103}$$

где

$$d\overline{W}_u=(B\circ B)^{-1/2}(u,\ \xi)\left[d\xi_u-(A_0(u,\ \xi)+A_1(u,\ \xi)\,m_u)\,du\right].$$

Матрица $R_s^u(\xi)$ фундаментальная. Поэтому $R_0^u(\xi)=R_0^s(\xi)\,R_s^u(\xi)$, и, значит,

$$\left[R_s^u(\xi)\right]^{-1}=R_0^s(\xi)\left[R_0^u(\xi)\right]^{-1}. \tag{12.104}$$

Из (12.103) и (12.104) находим

$$m(s,t)=m_s+R_0^s(\xi)\int_s^t\left[R_0^u(\xi)\right]^{-1}\gamma_u A_1^*(u,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(u,\xi)\,d\overline{W}_u. \tag{12.105}$$

Далее, из (12.94) и леммы 12.5 получаем

$$d_s\left[R_0^s(\xi)\int_s^t\left(R_0^u(\xi)\right)^{-1}\gamma_u A_1^*(u,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(u,\xi)\,d\overline{W}_u\right]=$$
$$=\left[a(s,\xi)+b(s,\xi)\,\gamma_s^{-1}\right]\times$$
$$\times\left[R_0^s(\xi)\int_s^t\left(R_0^u(\xi)\right)^{-1}\gamma_u A_1^*(u,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(u,\xi)\,d\overline{W}_u\right]ds-$$
$$-\gamma_s A_1^*(s,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(s,\xi)\,d\overline{W}_s=$$
$$=\left[a(s,\xi)+b(s,\xi)\,\gamma_s^{-1}\right]\left[m(s,t)-m_s\right]ds-$$
$$-\gamma_s A_1^*(s,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(s,\xi)\,d\overline{W}_s.$$

Но (см. (12.29))

$$dm_s = [a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)\,m_s]\,ds + (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(s,\xi)\,d\overline{W}_s + \gamma_s A_1^*(s,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(s,\xi)\,d\overline{W}_s.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_s m(s,t) &= [a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)\,m_s]\,ds + \\ &\quad + (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1/2}(s,\xi)\,d\overline{W}_s + \\ &\quad + [a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}][m(s,t) - m_s]\,ds = \\ &= [a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)\,m(s,t)]\,ds + \\ &\quad + (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1}(s,\xi)[d\xi_s - (A_0(s,\xi) + A_1(s,\xi)\,m(s,t))\,ds] + \\ &\quad + [a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}][m(s,t) - m_s]\,ds - a_1(s,\xi)[m(s,t) - m_s]\,ds + \\ &\quad + (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1}(s,\xi)\,A_1(s,\xi)[m_s - m(s,t)]\,ds. \end{aligned}$$

Согласно обозначениям (12.76)

$$[a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}] - a_1(s,\xi) - (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1}(s,\xi)\,A_1(s,\xi) = b(s,\xi)\,\gamma_s^{-1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} d_s m(s,t) &= [a_0(s,\xi) + a_1(s,\xi)\,m(s,t)]\,ds + \\ &\quad + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}[m_s - m(s,t)]\,ds + \\ &\quad + (b\circ B)(s,\xi)(B\circ B)^{-1}(s,\xi)[d\xi_s - (A_0(s,\xi) + A_1(s,\xi)\,m(s,t))\,ds], \end{aligned}$$

что и доказывает (12.92).

Выведем теперь уравнение (12.93) для $\gamma(s,t)$. Из (12.95) и (12.90) получаем

$$\gamma(s,t) = \gamma_s - R_0^s(\xi)\int_s^t [R_0^u(\xi)]^{-1}\,\gamma_u c(u,\xi)\,\gamma_u\,[(R_0^u(\xi))^*]^{-1}\,du\,(R_0^s(\xi))^*. \tag{12.106}$$

Дифференцируя (12.106) по s, находим с учетом (12.99) и (12.94), что

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(s,t)}{ds} &= a(s,\xi)\gamma_s + \gamma_s a^*(s,\xi) + b(s,\xi) - \\ &\quad - \gamma_s c(s,\xi)\gamma_s - [a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}][\gamma_s - \gamma(s,t)] - \\ &\quad - [\gamma_s - \gamma(s,t)][a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}]^* + \gamma_s c(s,\xi)\gamma_s = \\ &= [a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}]\,\gamma(s,t) + \\ &\quad + \gamma(s,t)[a(s,\xi) + b(s,\xi)\gamma_s^{-1}]^* - b(s,\xi). \end{aligned}$$

Теорема 12.10 доказана.

Замечание 1. Уравнения (12.92) и (12.93) линейны относительно $m(s, t)$ и $\gamma(s, t)$. Поэтому единственность их непрерывных решений устанавливается стандартным образом.

Замечание 2. Если $(b \circ B)(t, x) \equiv 0$, то уравнения (12.92) и (12.93) становятся существенно проще:

$$m(s, t) = m_t - \int_s^t \{a_0(u, \xi) + a_1(u, \xi)\, m(u, t) - (b \circ b)(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}[m(u, t) - m_u]\}\, du, \quad (12.107)$$

$$\gamma(s, t) = \gamma_t - \int_s^t \left\{[a_1(u, \xi) + (b \circ b)(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}]\, \gamma(u, t) + \gamma(u, t)\left[a_1(u, \xi) + (b \circ b)(u, \xi)\, \gamma_u^{-1}\right]^* - (b \circ b)(u, \xi)\right\} du. \quad (12.108)$$

Замечание 3. Рассмотренная в гл. 10 схема Калмана — Бьюси является частным случаем задач оценивания для условно-гауссовских процессов. Поэтому и в этой схеме также справедливы уравнения для $m(s, t)$ и $\gamma(s, t)$. Отметим, что, учитывая специфику схемы Калмана — Бьюси, эти уравнения можно вывести в тех же допущениях, что и уравнения для m_t и γ_t (см. теорему 10.3), требуя при выводе обратных уравнений дополнительно невырожденности матриц γ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

6. Остановимся еще на одном виде интерполяционных оценок для условно-гауссовских процессов.

Поскольку условные распределения $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant a, \theta_t \leqslant b \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ при $s \leqslant t$ являются (P-п. н.) гауссовскими, то гауссовским будет и условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t)$. Пусть

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = \beta),$$
$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \mathsf{M}\{(\theta_s - m_\beta(s, t))(\theta_s - m_\beta(s, t))^* \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = \beta\}.$$

Теорема 12.11. *Если выполнены условия* (I) — (IV), (VIII) — (X) *и условное распределение* $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ *является* (P-п. н.) *гауссовским, то*

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m(s, t) + \gamma(s, t)\, [\varphi_s^t(\xi)]^*\, \gamma_t^+ (\beta - m_t), \quad (12.109)$$
$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \gamma(s, t) - \gamma(s, t)\, [\varphi_s^t(\xi)]^*\, \gamma_t^+ \varphi_s^t(\xi)\, \gamma(s, t), \quad (12.110)$$

где γ_t^+ — *псевдообратная матрица к матрице* γ_t, *а* $\varphi_s^t(\xi)$ *определено в* (12.77).

Доказательство. Поскольку

$$\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t) = m_t, \qquad \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi) = m(s, t),$$
$$\operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \gamma_t, \ \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \gamma(s, t),$$
$$\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \mathsf{M}[(\theta_s - m(s, t))(\theta_t - m_t)^* \mid \mathcal{F}_t],$$

то по теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1)

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m(s, t) + \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)\, \gamma_t^+ (\beta - m_t), \tag{12.111}$$

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \gamma(s, t) - \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)\, \gamma_t^+ \left[\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)\right]^*. \tag{12.112}$$

Покажем, что P-п. н.

$$\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \gamma(s, t)\,(\varphi_s^t(\xi))^*. \tag{12.113}$$

Действительно, поскольку

$$\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{M}\left[(\theta_s - m(s, t))\, \mathsf{M}\left\{(\theta_t - m_t)^* \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right\} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right]$$

и согласно (12.79), (12.81)

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\left\{(\theta_t - m_t)^* \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right\} &= \\
&= \left\{\mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t) \mid \mathscr{F}_t^{\theta_s, \xi}\right]\right\}^* = \left\{m_{\theta_s}(t, s) - m_t\right\}^* = \\
&= \left\{\varphi_s^t(\xi)\left[\theta_s + q_s^t(\xi)\right] - \varphi_s^t(\xi)\left[m(s, t) + q_s^t(\xi)\right]\right\}^* = \\
&\qquad\qquad = \left[\theta_s - m(s, t)\right]^* (\varphi_s^t(\xi))^*,
\end{aligned}$$

то

$$\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{M}\left[(\theta_s - m(s, t))(\theta_s - m(s, t))^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\right](\varphi_s^t(\xi))^*,$$

что и доказывает равенство (12.113).

Из (12.111) — (12.113) получаем искомые представления (12.109) и (12.110).

Замечание 1. Если в дополнение к условиям теоремы 12.11 потребовать, чтобы $\mathsf{P}(\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \det \gamma_t > 0) = 1$, то дифференцированием (12.109) и (12.110) по s найдем, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{m}_\beta(s, t) = \beta - \\
&- \int_s^t \left[a_0(u, \xi) + a_1(u, \xi)\,\tilde{m}_\beta(u, t) + b(u, \xi)\,\gamma_u^{-1}(\tilde{m}_\beta(u, t) - m_u)\right] du - \\
&- \int_s^t (b \circ B)(u, \xi)\,(B \circ B)^{-1}(u, \xi)\left[d\xi_u - (A_0(u, \xi) + A_1(u, \xi)\,\tilde{m}_\beta(u, t))\,du\right],
\end{aligned} \tag{12.114}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = -\int_s^t &\left\{\left[a(u, \xi) + b(u, \xi)\,\gamma_u^{-1}\right] \tilde{\gamma}_\beta(u, t) + \right. \\
&\left. + \tilde{\gamma}_\beta(u, t)\left[a(u, \xi) + b(u, \xi)\,\gamma_u^{-1}\right]^* - b(u, \xi)\right\} du.
\end{aligned} \tag{12.115}$$

Замечание 2. Из (12.110) следует, что $\tilde{\gamma}_\beta(s, t)$ на самом деле не зависит от β.

Замечание 3. Рассмотрим гауссовский марковский процесс (θ_t), $0 \leqslant t \leqslant T$, с дифференциалом

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]\,dt + b(t)\,dW(t) \tag{12.116}$$

и заданной гауссовской случайной величиной θ_0. Будем предполагать, что детерминированные функции $a_0(t)$, $a_1(t)$ и $b(t)$ таковы, что

$$\int_0^T |a_i(t)|\,dt < \infty, \quad i = 0,\ 1; \quad \int_0^T b^2(t)\,dt < \infty.$$

Положим при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$

$$r(t) = \mathsf{M}\theta_t, \qquad r_\beta(s, t) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \theta_t = \beta),$$
$$R(t) = \mathsf{M}[\theta_t - r(t)]^2, \quad R_\beta(s, t) = \mathsf{M}[(\theta_s - r_\beta(s, t))^2 \mid \theta_t = \beta].$$

Если положить в (12.60) $A_1(t, x) \equiv 0$, $B_2(t, x) \equiv 0$ и считать, что ξ_0 не зависит от θ_0, то нетрудно видеть, что

$$r(t) = m_t, \qquad R(t) = \gamma_t$$

и

$$r_\beta(s, t) = \tilde{m}_\beta(s, t), \quad R_\beta(s, t) = \tilde{\gamma}_\beta(s, t).$$

Значит, согласно *) (12.29) и (12.30)

$$r(t) = r(0) + \int_0^t [a_0(s) + a_1(s)\,r(s)]\,ds \tag{12.117}$$

и

$$R(t) = R(0) + 2\int_0^t a_1(s)\,R(s)\,ds. \tag{12.118}$$

Для $r_\beta(s, t)$ и $R_\beta(s, t)$ из (12.114) и (12.115) в предположении, что $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} R(t) > 0$, находим

$$r_\beta(s, t) = \beta - \int_s^t \left[a_0(u) + a_1(u)\,r_\beta(u, t) + \frac{b^2(u)}{R(u)}(r_\beta(u, t) - r(u))\right] du, \tag{12.119}$$

$$R_\beta(s, t) = -2\int_s^t \left\{\left[a_1(u) + \frac{b^2(u)}{R(u)}\right] R_\beta(u, t) - \frac{1}{2}\,b^2(u)\right\} du. \tag{12.120}$$

---

*) См. также замечание 3 в п. 6.

Аналогом (12.109) и (12.110) являются формулы

$$r_\beta(s, t) = r(s) + A(s)\exp\left(\int_s^t a_1(u)\,du\right) R^+(t)(\beta - r(t)), \quad (12.121)$$

$$R_\beta(s, t) = R(s) - R^2(s)\exp\left(2\int_s^t a_1(u)\,du\right) R^+(t). \quad (12.122)$$

§ 5. Уравнения оптимальной экстраполяции

1. В этом параграфе выводятся уравнения экстраполяции для условно-гауссовских процессов, позволяющие эффективно вычислять оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки значений θ_t по наблюдениям $\xi_0^s = \{\xi_u, u \leqslant s\}$, $s \leqslant t \leqslant T$. Однако, в отличие от рассмотренных выше задач фильтрации и интерполяции, эти уравнения будут выведены не для общего процесса (θ, ξ), заданного уравнениями (12.1), (12.2), а только для двух частных случаев, приводимых ниже. Это сужение класса рассматриваемых процессов (θ, ξ) связано с тем, что условные распределения $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ для $t > s$ уже не являются, вообще говоря, гауссовскими.

2. Обозначим для $t \geqslant s$

$$n_1(t, s) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_s^\xi), \qquad n_2(t, s) = \mathsf{M}(\xi_t \mid \mathscr{F}_s^\xi). \quad (12.123)$$

Как и в случае интерполяции, для этих характеристик можно выводить уравнения двух типов: прямые уравнения (по t при фиксированном s) и обратные (по $s \uparrow t$ при фиксированном t). Из прямых уравнений можно понять, как ухудшается прогноз значений θ_t при возрастании t. Обратные уравнения позволяют установить степень улучшения качества прогноза значений θ_t с «увеличением данных», т. е. с ростом s.

Отметим, что обратные уравнения экстраполяции можно было бы вывести из общих уравнений экстраполяции, полученных в восьмой главе. Здесь, однако, мы приводим другой и, пожалуй, более естественный для данного случая вывод.

Будем предполагать, что $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является $k + l$-мерным процессом диффузионного типа с

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} b_i(t, \xi)\,dW_i(t), \quad (12.124)$$

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t]\,dt + \sum_{i=1}^{2} B_i(t, \xi)\,dW_2(t), \quad (12.125)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям (I)—(IV), (VIII)—(X), причем элементы вектора $a_0(t)$ и матрицы $a_1(t)$ являются детерминированными функциями времени, а условное распределение $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ является гауссовским.

Пусть, далее, φ_s^t — фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{d\varphi_s^t}{dt} = a_1(t)\,\varphi_s^t, \qquad t \geqslant s, \tag{12.126}$$

с $\varphi_s^s = E_{(k\times k)}$. При этих допущениях справедлива следующая

Теорема 12.12. *Пусть процесс* (θ, ξ) *управляется системой уравнений* (12.124), (12.125). *Тогда для каждого фиксированного* s, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $n_1(t, s)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dn_1(t, s)}{dt} = a_0(t) + a_1(t)\,n_1(t, s) \tag{12.127}$$

с $n_1(s, s) = m_s$, *где* m_s *определяется из уравнений* (12.66), (12.67).

При фиксированном t

$$n_1(t, s) = n_1(t, 0) + \int_0^s \varphi_u^t\left[(b\circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)\right](B\circ B)^{-1}(u, \xi)\times$$
$$\times\left[d\xi_u - (A_0(u, \xi) + A_1(u, \xi)\,m_u)\,du\right], \tag{12.128}$$

где m_u *и* γ_u *находятся из уравнений* (12.66), (12.67), *а*

$$n_1(t, 0) = \varphi_0^t\left[m_0 + \int_0^t (\varphi_0^s)^{-1} a_0(s)\,ds\right]. \tag{12.129}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что

$$n_1(t, s) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_s^\xi) = \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) \mid \mathscr{F}_s^\xi\right] = \mathsf{M}(m_t \mid \mathscr{F}_s^\xi),$$

где m_t согласно (12.66) представляется в следующем виде:

$$m_t = m_s + \int_s^t \left[a_0(u) + a_1(u)\,m_u\right]du +$$
$$+ \int_s^t \left[(b\circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)\right](B\circ b)^{-1/2}(u, \xi)\,d\overline{W}_u. \tag{12.130}$$

Но

$$\mathsf{M}\left(\int_s^t \left[(b\circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)\right](B\circ B)^{-1/2}(u, \xi)\,d\overline{W}_u \,\Big|\, \mathscr{F}_s^\xi\right) = 0;$$

поэтому, беря от обеих частей (12.130) условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot \mid \mathscr{F}_s^\xi)$, приходим к уравнению (12.127).

Для вывода представления (12.128) положим в (12.130) $s=0$. С помощью формулы Ито нетрудно убедиться в том, что (единственное) непрерывное решение m_t уравнения (12.130) с $s=0$ может быть записано в следующем виде:

$$m_t = \varphi_0^t \left[m_0 + \int_0^t (\varphi_0^u)^{-1} a_0(u)\,du + \right.$$
$$\left. + \int_0^t (\varphi_0^u)^{-1} [(b \circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)] (B \circ B)^{-1/2}(u, \xi)\, d\overline{W}_u \right].$$

Отсюда находим

$$m_t = n_1(t, 0) + \int_0^s \varphi_u^t [(b \circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)] (B \circ B)^{-1/2}(u, \xi)\, d\overline{W}_u +$$
$$+ \int_s^t \varphi_u^t [(b \circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)] (B \circ B)^{-1/2}(u, \xi)\, d\overline{W}_u. \quad (12.131)$$

Вычисляя условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ от обеих частей (12.131), получаем требуемое представление (12.128).

3. Пусть наряду с прогнозом значений θ_t требуется по $\xi_0^s = \{\xi_u, u \leqslant s\}$, $s < t$, экстраполировать и величины ξ_t.

Снова будем предполагать, что условное распределение $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a \mid \xi_0)$ является гауссовским и выполнены предположения (I)—(IV), (VIII)—(X), причем

$$A_0(t, x) = A_0(t) + A_2(t) x_t, \quad a_1(t, x) = a_1(t), \quad A_1(t, x) = A_1(t),$$

где элементы векторов и матриц $a_i(t)$, $A_i(t)$, $i=0, 1, 2$, являются детерминированными функциями. Иначе говоря, пусть

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t + a_2(t)\xi_t]\,dt + \sum_{i=1}^2 b_i(t, \xi)\, dW_i(t), \quad (12.132)$$

$$d\xi_t = [A_0(t) + A_1(t)\theta_t + A_2(t)\xi_t]\,dt + \sum_{i=1}^2 B_i(t, \xi)\, dW_i(t). \quad (12.133)$$

Пусть, далее, Φ_s^t — фундаментальная матрица системы $(t > s)$

$$\frac{d\Phi_s^t}{dt} = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix} \Phi_s^t,$$

где $\Phi_s^s = E_{((k+l) \times (k+l))}$.

Теорема 12.13. *При сделанных допущениях* $n_1(t, s)$ *и* $n_2(t, s)$ *при заданном* s *являются решениями системы уравнений*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dn_1(t, s)}{dt} \\ \dfrac{dn_2(t, s)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ A_0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ A_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t, s) \\ n_2(t, s) \end{pmatrix} \tag{12.134}$$

с $n_1(s, s) = m_s$, $n_2(s, s) = \xi_s$.

При фиксированном t

$$\begin{pmatrix} n_1(t, s) \\ n_2(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1(t, 0) \\ n_2(t, 0) \end{pmatrix} + \\ + \int_0^s \Phi_u^s \begin{pmatrix} [(b \circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)] (B \circ B)^{-1/2}(u, \xi) \\ (B \circ B)^{1/2}(u, \xi) \end{pmatrix} d\overline{W}_u, \tag{12.135}$$

где

$$\begin{pmatrix} n_1(t, 0) \\ n_2(t, 0) \end{pmatrix} = \Phi_0^t \begin{pmatrix} m_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi_s^t \begin{pmatrix} a_0(s) \\ A_0(s) \end{pmatrix} ds. \tag{12.136}$$

Доказательство. Принимая во внимание предположения о коэффициентах системы, из (12.66) и (12.133) находим, что

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_s \\ \xi_s \end{pmatrix} + \int_s^t \begin{pmatrix} a_0(u) \\ A_0(u) \end{pmatrix} du + \int_s^t \begin{pmatrix} a_1(u) & a_2(u) \\ A_1(u) & A_2(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u \\ \xi_u \end{pmatrix} du + \\ + \int_s^t \begin{pmatrix} [(b \circ B)(u, \xi) + \gamma_u A_1^*(u, \xi)] (B \circ B)^{-1/2}(u, \xi) \\ (B \circ B)^{1/2}(u, \xi) \end{pmatrix} d\overline{W}_u.$$

Отсюда (как и при доказательстве предыдущей теоремы) легко выводятся уравнения (12.134) и представление (12.135).

Замечание. Для частного случая уравнений (12.132), (12.133), отвечающих схеме Калмана—Бьюси (см. гл. 10), прямые и обратные уравнения экстраполяции справедливы лишь в предположениях теоремы 10.3.

ГЛАВА 13

УСЛОВНО-ГАУССОВСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ФИЛЬТРАЦИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Теорема о нормальной корреляции

1. В предыдущих двух главах рассматривались задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции для условно-гауссовских случайных процессов (θ, ξ) с непрерывным временем $t \geqslant 0$. В настоящей главе эти задачи будут изучаться для случайных последовательностей с дискретным временем $t = 0$, Δ, $2\Delta, \ldots$, обладающих также свойством «условной гауссовости».

Важно подчеркнуть, что материал данной главы не использует тот сложный аппарат теории мартингалов, который применяется для случая непрерывного времени. По существу, все результаты этой главы выводятся из *теоремы о нормальной корреляции* (теорема 13.1). Поэтому читатель, желающий ознакомиться с теорией фильтрации и смежными вопросами для случая лишь дискретного времени, может приступить к чтению этой главы без предварительного изучения материала предшествующих глав.

Сравнение результатов для дискретного и непрерывного времени показывает, что, по крайней мере внешне, между ними имеется большое сходство. Более того, формальный предельный переход (при $\Delta \to 0$) позволяет из результатов этой главы получить соответствующие результаты для случая непрерывного времени. Однако строгое обоснование этого предельного перехода вовсе не просто и потребовало бы, по существу, привлечения всего того аппарата, который был использован в предыдущих главах.

2. Формулировка и доказательство основного результата данного параграфа — теоремы о нормальной корреляции — требуют введения и исследования свойств псевдообратных матриц.

Рассмотрим матричное уравнение

$$AXA = A. \tag{13.1}$$

Если A — квадратная невырожденная матрица, то это уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}$. Если же матрица A вырожденная или даже прямоугольная, то решение уравнения (13.1), если оно существует, нельзя определить однозначно. Тем не менее существует (это будет доказано ниже), и притом (в определенном классе матриц) единственная, матрица, удовлетворяющая уравнению (13.1). Эта матрица далее будет обозначаться A^+ и называться псевдообратной матрицей.

Определение. Матрица A^+ (порядка $n \times m$) называется *псевдообратной к матрице* $A = A_{(m\times n)}$, если выполнены следующие два условия:

$$AA^+A = A, \tag{13.2}$$

$$A^+ = UA^* = A^*V, \tag{13.3}$$

где U и V — некоторые матрицы.

Из условия (13.3) следует, что строки и столбцы матрицы A^+ являются линейными комбинациями соответственно строк и столбцов матрицы A^*.

Лемма 13.1. *Матрица A^+, удовлетворяющая условиям* (13.2) *и* (13.3), *существует и единственна.*

Доказательство. Начнем с доказательства единственности. Пусть A_1^+ и A_2^+ — две различные псевдообратные матрицы. Тогда

$$AA_1^+A = A, \qquad A_1^+ = U_1A^* = A^*V_1$$

и

$$AA_2^+A = A, \qquad A_2^+ = U_2A^* = A^*V_2$$

с некоторыми матрицами U_1, V_1, U_2 и V_2. Положим $D = A_1^+ - A_2^+$, $U = U_1 - U_2$, $V = V_1 - V_2$.
Тогда *)

$$ADA = 0, \qquad D = UA^* = A^*V.$$

Но $D^* = V^*A$, поэтому

$$(DA)^*(DA) = A^*D^*DA = A^*V^*ADA = 0,$$

и, значит, $DA = 0$. Отсюда, используя формулу $D^* = AU^*$, находим, что

$$DD^* = DAU^* = 0.$$

Следовательно, $A_1^+ - A_2^+ = D = 0$.

Для доказательства существования матрицы A^+ предположим сначала, что ранг матрицы A (порядка $m \times n$ с $m \geqslant n$) равен n.

*) 0 — нулевая матрица.

Покажем, что в этом случае матрица

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* \tag{13.4}$$

удовлетворяет условиям (13.2), (13.3).

Свойство (13.2), очевидно, выполнено, поскольку

$$AA^+A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$$

где A^*A — невырожденная матрица порядка $n \times n$. Равенство $A^+ = UA^*$ выполнено с $U = (A^*A)^{-1}$. Равенство же $A^+ = A^*V$ выполняется, как легко проверить, если положить $V = A(A^*A)^{-2}A^*$.

Аналогичным образом показывается, что если ранг матрицы A (порядка $m \times n$ с $m \leqslant n$) равен m, то псевдообратной к матрице A является матрица

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}. \tag{13.5}$$

Для доказательства существования псевдообратной матрицы в общем случае используем тот факт, что всякую матрицу A порядка $m \times n$ ранга r можно представить в виде произведения

$$A = B \cdot C \tag{13.6}$$

с матрицами $B_{(m \times r)}$ и $C_{(r \times n)}$ ранга $r \leqslant m \wedge n$.

Действительно, возьмем в качестве матрицы B матрицу, составленную из r независимых столбцов матрицы A. Тогда все столбцы матрицы A можно выразить через столбцы матрицы B, о чем и свидетельствует формула (13.6), задающая «скелетное» разложение матрицы A.

Положим теперь

$$A^+ = C^+B^+, \tag{13.7}$$

где согласно (13.4) и (13.5)

$$C^+ = C^*(CC^*)^{-1}, \tag{13.8}$$

$$B^+ = (B^*B)^{-1}B^*. \tag{13.9}$$

Тогда

$$AA^+A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BC = A.$$

Далее, если положить $U = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$, то легко проверить, что $UA^* = A^+$.

Аналогичным образом проверяется, что $A^+ = A^*V$ с

$$V = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B.$$

Лемма доказана.

3. Укажем ряд используемых далее свойств псевдообратных матриц:

1°. $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$.

2°. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

3°. $(A^+)^+ = A$.

4°. $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^* = A^+A, (AA^+)^2 = AA^+,$

$$(AA^+)^* = AA^+.$$

5°. $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+ = A^+(A^+)^*$.

6°. $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$.

7°. $A^+AA^* = A^*AA^+ = A^*$.

8°. Если S — ортогональная матрица, то $(SAS^*)^+ = SA^+S^*$.

9°. Если A — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка $n \times n$ ранга $r < n$, то

$$A^+ = T^*(TT^*)^{-2}T, \tag{13.10}$$

где матрица $T_{(n\times r)}$ ранга r определяется из разложения

$$A = T^*T. \tag{13.11}$$

10°. Если матрица A невырожденная, то $A^+ = A^{-1}$.

Указанные свойства проверяются непосредственным подсчетом. Так, свойства 1° и 2° вытекают из (13.2), (13.6) — (13.9). Равенства

$$A^+ = C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \tilde{B}\tilde{C},$$

где

$$\tilde{B} = C^*(CC^*)^{-1}, \qquad \tilde{C} = (B^*B)^{-1}B^*,$$

задают скелетное разложение матрицы A^+, из которого следует 3°. Свойство 4° вытекает из 1°, 2° и (13.7) — (13.9). Чтобы доказать 5°, надо рассмотреть скелетное разложение $A = BC$ и представить матрицу A^*A в виде произведения $\tilde{B}\tilde{C}$, где $\tilde{B} = C^*$ и $\tilde{C} = B^*BC$. Свойства 6° и 7° вытекают из 1° — 5°.

Для доказательства 8° достаточно заметить, что в силу ортогональности ($SS^* = E$) матрицы S

$$(SAS^*)(SA^+S^*)(SAS^*) = SAA^+AS^* = SAS. \tag{13.12}$$

Далее, если $A^+ = UA^* = A^*V$, то

$$SA^+S^* = S(UA^*)S = SU(S^*S)A^*S = \tilde{U}(SA^*S^*) = \tilde{U}(SAS^*)^* \tag{13.13}$$

с $\tilde{U} = SUS^*$,

Аналогично устанавливается, что

$$SA^+S^* = (SAS^*)^* \tilde{V} \tag{13.14}$$

с $\tilde{V} = SVS^*$.

Из (13.12)—(13.14) вытекает, что $(SAS^*)^+ = SA^+S^*$.

Наконец, свойство 9° следует из скелетного разложения $A = T^*T$ и формул (13.7)—(13.9).

Замечание. Согласно свойству 9° в случае симметрических неотрицательно определенных матриц A псевдообратная матрица A^+ может быть определена формулой (13.10), где матрица T определяется из разложения $A = T^*T$. Это разложение, вообще говоря, не единственно. Однако псевдообратная матрица $A^+ = T^*(TT^*)^{-2}T$ определяется однозначно независимо от способа разложения $A = T^*T$. Таким образом, в случае симметрических неотрицательно определенных матриц A псевдообратная матрица

$$A^+ = \begin{cases} A^{-1}, & \text{если матрица } A \text{ не вырождена,} \\ T^*(TT^*)^{-2}T, & \text{если матрица } A \text{ вырождена.} \end{cases} \tag{13.15}$$

4. Напомним, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется гауссовским (нормальным), если его характеристическая функция *)

$$\varphi_\xi(z) = \mathsf{M} \exp[iz^*\xi], \quad z = (z_1, \ldots, z_n), \quad z^*\xi = \sum_{i=1}^n z_i \xi_i,$$

задается формулой

$$\varphi_\xi(z) = \exp\left[iz^*m - \frac{1}{2} z^*Rz\right], \tag{13.16}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, а $R = \|R_{ij}\|$ — неотрицательно определенная симметрическая матрица порядка $(n \times n)$. Параметры m и R имеют простой смысл. Вектор m есть вектор средних значений, $m = \mathsf{M}\xi$, а матрица R есть матрица ковариаций,

$$R \equiv \operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathsf{M}(\xi - m)(\xi - m)^*.$$

Сформулируем ряд простых свойств гауссовских векторов.

1. Если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский вектор, $A_{(m \times n)}$ — матрица и $a = (a_1, \ldots, a_m)$ — вектор, то случайный вектор $\eta = A\xi + a$ является гауссовским с

$$\varphi_\eta(z) = \exp\left\{iz^*(a + Am) - \frac{1}{2} z^*(ARA^*)z\right\} \tag{13.17}$$

и

$$\mathsf{M}\eta = a + Am, \operatorname{cov}(\eta, \eta) = A \operatorname{cov}(\xi, \xi) A^*. \tag{13.18}$$

*) При алгебраических операциях векторы a считаются столбцами, а векторы a^* — строками.

2. Пусть $(\theta, \xi) = [(\theta_1, \ldots, \theta_k)(\xi_1, \ldots, \xi_l)]$ — гауссовский вектор с $m_\theta = \mathsf{M}\theta$, $m_\xi = \mathsf{M}\xi$, $D_{\theta\theta} = \operatorname{cov}(\theta, \theta) = \mathsf{M}(\theta - m_\theta)(\theta - m_\theta)^*$, $D_{\xi\xi} = \operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathsf{M}(\xi - m_\xi)(\xi - m_\xi)^*$ и $D_{\theta\xi} = \operatorname{cov}(\theta, \xi) = \mathsf{M}(\theta - m_\theta)(\xi - m_\xi)$.

Если $D_{\theta\xi} = 0$, то (гауссовские) векторы θ и ξ независимы и

$$\varphi_{(\theta, \xi)}(z_1, z_2) = \varphi_\theta(z_1)\varphi_\xi(z_2),$$

где $z_1 = (z_{11}, \ldots, z_{1k})$, $z_2 = (z_{21}, \ldots, z_{2l})$ и

$$\varphi_\theta(z_1) = \exp\left[iz_1^* m_\theta - \frac{1}{2} z_1^* D_{\theta\theta} z_1\right],$$

$$\varphi_\xi(z_2) = \exp\left[iz_2^* m_\xi - \frac{1}{2} z_2^* D_{\xi\xi} z_2\right].$$

3. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский вектор с $m = \mathsf{M}\xi$, $R = \operatorname{cov}(\xi, \xi)$. Тогда найдется гауссовский вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ с независимыми компонентами, $\mathsf{M}\varepsilon = 0$ и $\operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = E_{(n \times n)}$, такой, что

$$\xi = R^{1/2}\varepsilon + m. \tag{13.19}$$

Для доказательства введем гауссовский вектор*) $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, не зависящий от ξ, с $\mathsf{M}\nu = 0$, $\operatorname{cov}(\nu, \nu) = E$. Положим $T = R^{1/2}$,

$$\varepsilon = (T^+)^*(\xi - m) + (E - TT^+)\nu. \tag{13.20}$$

Поскольку векторы ξ и ν независимы, то вектор ε также является гауссовским. Ясно, что $\mathsf{M}\varepsilon = 0$. Подсчитаем теперь ковариацию $\operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon)$. Имеем

$$\operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = \mathsf{M}\varepsilon\varepsilon^* = (T^+)^* RT^+ + (E - TT^+)(E - TT^+).$$

Но по свойству 4° псевдообратных матриц $(E - TT^+)^* = E - TT^+$, $(E - TT^+)^2 = E - TT^+$, а $(T^+)^* RT^+ = (T^+)^* T^*TT^+ = [(T^+)^* T^*][TT^+] = TT^+$. Поэтому $\operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = E$, что доказывает независимость компонент вектора ε.

Далее, из (13.20) получаем

$$T^*\varepsilon = T^*(T^+)^*(\xi - m) + (T^* - T^*TT^+)\nu =$$
$$= (\xi - m) - (E - T^*(T^+)^*)(\xi - m) + (T^* - T^*TT^+)\nu.$$

Но $T^* = T^*TT^+$ (свойство 7°), $T^*(T^+)^* = (T^+T)^* = T^+T$ (свойство 4°), а $(E - T^+T)\operatorname{cov}(\xi, \xi)(E - T^+T)^* = (E - T^+T)(T^*T) \times (E - T^+T) = 0$, что и доказывает равенство $R^{1/2}\varepsilon = \xi - m$.

*) Здесь мы считаем, что исходное вероятностное пространство является достаточно «богатым».

4. Пусть ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность гауссовских векторов, сходящаяся по вероятности к вектору ξ. Тогда ξ также гауссовский вектор.

Действительно, пусть $m_n = \mathsf{M}\xi_n$, $R_n = \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n)$. Тогда, поскольку $\mathsf{P}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ и $|\exp[iz^*\xi_n]| \leqslant 1$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left[iz^*m_n - \frac{1}{2}z^*R_nz\right] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\exp[iz^*\xi_n] = \mathsf{M}\exp[iz^*\xi].$$

Отсюда, в силу произвольности z, существуют вектор m и неотрицательно определенная матрица R такие, что

$$m = \lim_n m_n, \qquad R = \lim_n R_n.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\exp[iz^*\xi] = \exp\left[iz^*m - \frac{1}{2}z^*Rz\right],$$

что доказывает гауссовость вектора ξ.

5. Теорема 13.1 (теорема о нормальной корреляции). *Пусть* $(\theta, \xi) = ([\theta_1, \ldots, \theta_k], [\xi_1, \ldots, \xi_l])$ — *гауссовский вектор с*

$$m_\theta = \mathsf{M}\theta, \qquad m_\xi = \mathsf{M}\xi,$$

$$D_{\theta\theta} = \operatorname{cov}(\theta, \theta), \quad D_{\theta\xi} = \operatorname{cov}(\theta, \xi), \quad D_{\xi\xi} = \operatorname{cov}(\xi, \xi).$$

Тогда условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)$ *и условная ковариация*

$$\operatorname{cov}(\theta, \theta\,|\,\xi) = \mathsf{M}\{[\theta - \mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)][\theta - \mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)]^*\,|\,\xi\}$$

задаются формулами

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi) = m_\theta + D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}(\xi - m_\xi), \tag{13.21}$$

$$\operatorname{cov}(\theta, \theta\,|\,\xi) = D_{\theta\theta} - D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}(D_{\theta\xi})^*. \tag{13.22}$$

Доказательство. Положим

$$\eta = (\theta - m_\theta) + C(\xi - m_\xi), \tag{13.23}$$

где матрицу $C_{(k\times l)}$ подберем таким образом, чтобы $\mathsf{M}\eta(\xi - m_\xi)^* = 0$.

Если такая матрица существует, то она является решением линейной системы

$$D_{\theta\xi} + CD_{\xi\xi} = 0. \tag{13.24}$$

Если $D_{\xi\xi}$ — положительно определенная матрица, то

$$C = -D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{-1}. \tag{13.25}$$

В противном случае можно положить

$$C = -D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}. \tag{13.26}$$

Согласно свойству 3 из п. 4 найдется гауссовский вектор ε с $\mathsf{M}\varepsilon = 0$, $\mathsf{M}\varepsilon\varepsilon^* = E$ такой, что

$$\xi - m_\xi = D_{\xi\xi}^{1/2}\varepsilon.$$

Тогда, обозначая $T = D_{\xi\xi}^{1/2}$, получаем

$$D_{\theta\xi} = \mathsf{M}[(\theta - m_\theta)(\xi - m_\xi)^*] = \mathsf{M}(\theta - m_\theta)\varepsilon^* T = d_{\theta\xi}T,$$

где $d_{\theta\varepsilon} = \mathsf{M}(\theta - m_\theta)\varepsilon^*$. Следовательно,

$$D_{\theta\xi} = d_{\theta\varepsilon}T, \qquad D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\xi\xi} = d_{\theta\varepsilon}T(TT)^{+}TT = d_{\theta\varepsilon}T,$$

где мы воспользовались свойствами 1°, 4°, 5° псевдообратных матриц, согласно которым

$$D_{\xi\xi}^{+} = (TT)^{+} = T^{+}T^{+}, \qquad T(TT)^{+}TT = TT^{+}T^{+}TT =$$
$$= TT^{+}(T^{+}T)^{*}T = (TT^{+})^{2}T = TT^{+}T = T,$$

т. е.

$$D_{\theta\xi} = D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\xi\xi},$$

что и доказывает равенство (13.24) с $C = -D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}$.

Итак, вектор

$$\eta = (\theta - m_\theta) - D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}(\xi - m_\xi) \tag{13.27}$$

обладает тем свойством, что $\mathsf{M}\eta(\xi - m_\xi)^* = 0$.

Поскольку (θ, ξ) — гауссовский вектор, то таковым же является и вектор η. Более того, гауссовским будет и вектор (η, ξ), поскольку характеристическая функция

$$\varphi_{(\eta,\xi)}(z_1, z_2) = \mathsf{M}\exp\left[iz_1^*\eta + iz_2^*\xi\right] =$$
$$= \mathsf{M}\exp\left\{iz_1^*\left[(\theta - m_\theta) + C(\xi - m_\xi)\right] + iz_2^*\xi\right\}$$

может быть записана в силу гауссовости вектора (θ, ξ) в виде (13.16).

Далее, $\mathsf{M}\eta = 0$ и $\mathsf{M}\eta(\xi - m_\xi)^* = 0$. Поэтому согласно свойству 2 из п. 4 гауссовские векторы η и ξ независимы. Следовательно,

$$\mathsf{M}(\eta \mid \xi) = \mathsf{M}\eta = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}),$$

что вместе с (13.27) приводит к формуле (13.21).

Для доказательства представления (13.22) заметим, что $\theta - \mathsf{M}(\theta \mid \xi) = \eta$, а в силу независимости ξ и η

$$\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi) = \mathsf{M}(\eta\eta^* \mid \xi) = \mathsf{M}\eta\eta^* \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}). \tag{13.28}$$

Но согласно (13.27)

$$\mathsf{M}\eta\eta^* = D_{\theta\theta} + D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\xi\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi} - 2D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\xi\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}^{*} =$$
$$= D_{\theta\theta} - D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\xi\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}^{*} = D_{\theta\theta} - D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}^{*}, \tag{13.29}$$

где мы воспользовались тем, что согласно свойству 1° $D^{+}_{\xi\xi}D_{\xi\xi}D^{+}_{\xi\xi}=D^{+}_{\xi\xi}$.

Из (13.28) и (13.29) получаем искомое представление (13.22) для $\operatorname{cov}(\theta, \theta\,|\,\xi)$.

6. Следствие 1. *Если* $k=l=1$ *и* $\mathsf{D}\xi>0$, *то*

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)=\mathsf{M}\theta+\frac{\operatorname{cov}(\theta,\xi)}{D\xi}(\xi-\mathsf{M}\xi), \tag{13.30}$$

$$\mathsf{D}(\theta\,|\,\xi)=\mathsf{D}\theta-\frac{\operatorname{cov}^2(\theta,\xi)}{\mathsf{D}\xi}, \tag{13.31}$$

где $\mathsf{D}(\theta\,|\,\xi)=\mathsf{M}\{[\theta-\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)]^2\,|\xi\}$.

Полагая $\sigma_0=+\sqrt{\mathsf{D}\theta}$, $\sigma_\xi=+\sqrt{\mathsf{D}\xi}$ и вводя коэффициент корреляции

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(\theta,\xi)}{\sigma_\theta\sigma_\xi},$$

формулы (13.30) и (13.31) можно переписать в следующем виде:

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)=\mathsf{M}\theta+\rho\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\xi}(\xi-\mathsf{M}\xi), \tag{13.32}$$

$$\mathsf{D}(\theta\,|\,\xi)=\sigma_\theta^2(1-\rho^2). \tag{13.33}$$

Следствие 2. *Если*

$$\theta=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2,\qquad \xi=B_1\varepsilon_1+B_2\varepsilon_2,$$

где ε_1, ε_2 — *независимые гауссовские величины с* $\mathsf{M}\varepsilon_i=0$, $\mathsf{D}\varepsilon_i=1$, $i=1, 2$, *а* $B_1^2+B_2^2>0$, *то*

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi)=\frac{b_1B_1+b_2B_2}{B_1^2+B_2^2}\xi, \tag{13.34}$$

$$\mathsf{D}(\theta\,|\,\xi)=\frac{(B_1b_2-b_1B_2)^2}{B_1^2+B_2^2}. \tag{13.35}$$

Следствие 3. Пусть случайные величины $(\theta, \xi_1, \ldots, \xi_l)$ *образуют гауссовский вектор, причем* $\xi_1, \ldots, \xi_l$ *независимы и* $\mathsf{D}\xi_i>0$. *Тогда*

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_l)=\mathsf{M}\theta+\sum_{i=1}^{l}\frac{\operatorname{cov}(\theta,\xi_i)}{D\xi_i}(\xi_i-\mathsf{M}\xi_i).$$

В частности, если $\mathsf{M}\theta=\mathsf{M}\xi_i=0$, *то*

$$\mathsf{M}(\theta\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_l)=\sum_{i=1}^{l}\frac{\operatorname{cov}(\theta,\xi_i)}{\mathsf{D}\xi_i}\xi_i.$$

Замечание. Пусть $[\theta, \xi]=[(\theta_1, \ldots, \theta_k), (\xi_1, \ldots, \xi_l)]$ — случайный вектор, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Пусть $\mathscr{G}$ — некоторая σ-подалгебра $\mathscr{F}$, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Предположим, что ($\mathsf{P}$-п. н.) условное (при условии $\mathscr{G}$) распределение вектора (θ, ξ) является гауссовским со средними $\mathsf{M}(\theta \mid \mathscr{G})$, $\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G})$ и ковариациями $d_{11}=\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \mathscr{G})$, $d_{12}=\operatorname{cov}(\theta, \xi \mid \mathscr{G})$, $d_{22}=\operatorname{cov}(\xi, \xi \mid \mathscr{G})$. Тогда вектор условных математических ожиданий $\mathsf{M}(\theta \mid \xi, \mathscr{G})$ и условная матрица ковариаций $\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi, \mathscr{G})$ задаются (P-п. н.) формулами

$$\mathsf{M}(\theta \mid \xi, \mathscr{G})=\mathsf{M}(\theta \mid \mathscr{G})+d_{12}d_{22}^{+}[\xi-\mathsf{M}(\xi \mid \mathscr{G})], \tag{13.36}$$

$$\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi, \mathscr{G})=d_{11}-d_{12}d_{22}^{+}d_{12}^{*}. \tag{13.37}$$

Этот результат, доказываемый так же, как и в случае $\mathscr{G}=\{\varnothing, \Omega\}$, будет в дальнейшем неоднократно использоваться.

7. Теорема 13.2. *В предположениях теоремы* 13.1 *условное распределение* *) $\mathsf{P}(\theta \leqslant x \mid \xi)$ *является гауссовским с параметрами* $\mathsf{M}(\theta \mid \xi)$, $\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi)$, *задаваемыми формулами* (13.21), (13.22).

Доказательство. Достаточно показать, что условная характеристическая функция

$$\mathsf{M}(\exp[iz^*\theta] \mid \xi)=\exp\left(iz^*\mathsf{M}(\theta \mid \xi)-\frac{1}{2}z^*\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi)z\right). \tag{13.38}$$

Согласно (13.27), (13.21)

$$\theta=m_\theta+D_{\xi\theta}D_{\xi\xi}^{+}(\xi-\mathsf{M}\xi)+\eta=\mathsf{M}(\theta \mid \xi)+\eta,$$

где гауссовские векторы ξ и η независимы. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(\exp[iz^*\theta] \mid \xi)&=\exp[iz^*\mathsf{M}(\theta \mid \xi)]\,\mathsf{M}(\exp[iz^*\eta] \mid \xi)=\\&=\exp[iz^*\mathsf{M}(\theta \mid \xi)]\,\mathsf{M}\exp[iz^*\eta]=\\&=\exp\left[iz^*\mathsf{M}(\theta \mid \xi)-\frac{1}{2}z^*\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi)z\right].\end{aligned}$$

Замечание. Пусть матрица $\operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \xi)=D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}^{*}$ положительно определенная. Тогда у функции распределения $\mathsf{P}(\theta \leqslant x \mid \xi)=\mathsf{P}(\theta_1 \leqslant x_1, \ldots, \theta_k \leqslant x_k \mid \xi)$ существует (P-п. н.) плотность

$$\begin{aligned}p(x_1, \ldots, x_k \mid \xi)&=\frac{\left[\det\left(D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}\right]^{-1/2}}{(2\pi)^{k/2}}\times\\&\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mathsf{M}(\theta \mid \xi))^*\left[D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^{+}D_{\theta\xi}^{*}\right]^{-1}(x-\mathsf{M}(\theta \mid \xi))\right\},\end{aligned} \tag{13.39}$$

---

*) Под $\{\theta \leqslant x\}$ подразумевается событие $\{\theta_1 \leqslant x_1, \ldots, \theta_k \leqslant x_k\}$.

8. Теорема о нормальной корреляции позволяет легко установить следующие вспомогательные предложения.

Лемма 13.2. *Пусть b_1, b_2, B_1, B_2 — матрицы порядков $k\times k$, $k\times l$, $l\times k$, $l\times l$ соответственно и*

$$\begin{aligned} b\circ b &= b_1b_1^* + b_2b_2^*, \\ b\circ B &= b_1B_1^* + b_2B_2^*, \\ B\circ B &= B_1B_1^* + B_2B_2^*. \end{aligned} \tag{13.40}$$

Тогда симметрическая матрица

$$b\circ b - (b\circ B)(B\circ B)^+(b\circ B)^* \tag{13.41}$$

является неотрицательно определенной.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{1k}]$, $\varepsilon_2 = [\varepsilon_{21}, \ldots \ldots, \varepsilon_{2l}]$ — независимые гауссовские векторы с независимыми компонентами, $\mathsf{M}\varepsilon_{ij} = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_{ij} = 1$.

Положим

$$\theta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2,$$
$$\xi = B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_2.$$

Тогда согласно (13.22)

$$b\circ b - (b\circ B)(B\circ B)^+(b\circ B)^* = \operatorname{cov}(\theta, \theta\,|\,\xi),$$

что и доказывает лемму, поскольку матрица ковариаций $\operatorname{cov}(\theta, \theta\,|\,\xi)$ является неотрицательно определенной.

Лемма 13.3. *Пусть $R_{(n\times n)}$, $P_{(m\times m)}$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы и $Q_{(m\times n)}$—произвольная матрица.*

Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$(R + Q^*PQ)\,x = Q^*Py \tag{13.42}$$

разрешима (относительно x) для любого вектора $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и вектор

$$\tilde{x} = (R + Q^*PQ)^+Q^*Py \tag{13.43}$$

является одним из ее решений.

Доказательство. Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots \ldots, \varepsilon_n)$ — независимые гауссовские векторы с $\mathsf{M}\theta = 0$, $\operatorname{cov}(\theta, \theta) = P$, $\operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon) = E$. Положим $\xi = Q^*\theta + R^{1/2}\varepsilon$. Тогда $D_{\theta\xi} = \operatorname{cov}(\theta, \xi) = PQ$, $D_{\xi\xi} = \operatorname{cov}(\xi, \xi) = R + Q^*PQ$, причем, как доказывалось в теореме 13.1, система $D_{\theta\xi} + CD_{\xi\xi} = 0$ разрешима относительно C и $C = -D_{\theta\xi}D_{\xi\xi}^+$. Применительно к рассматриваемому случаю это означает, что система

$$PQ + C(R + Q^*PQ) = 0 \tag{13.44}$$

разрешима относительно C и $C = -PQ[R + Q^*PQ]^+$.

Из разрешимости системы (13.44) следует и разрешимость (относительно C^*) сопряженной системы

$$Q^*P + [R + Q^*PQ]\,C^* = 0. \tag{13.45}$$

Пусть теперь y — произвольный вектор. Положим $\tilde{x} = -C^*y$. Тогда, умножая (13.45) на $(-y)$, получим $(R + Q^*PQ)\,\tilde{x} = Q^*Py$, что и доказывает лемму.

Лемма 13.4. *Пусть $\theta_t = (\theta_1(t), \ldots, \theta_n(t))$, $t = 0, 1, \ldots,$ — гауссовский марковский процесс с вектором математических ожиданий $r(t) = \mathbf{M}\theta_t$ и корреляционной матрицей*

$$R(t, s) = \mathbf{M}\,[(\theta_t - r(t))(\theta_s - r(s))^*], \quad t, s = 0, 1, \ldots$$

Тогда найдется последовательность независимых гауссовских векторов $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t))$, $t \geqslant 1$, с $\mathbf{M}\varepsilon_t \equiv 0$ и $\mathbf{M}\varepsilon_t\varepsilon_t^* \equiv E_{(n\times n)}$ таких, что

$$\theta_{t+1} = [r(t+1) - R(t+1, t)\,R^+(t, t)\,r(t)] + R(t+1, 1)\,R^+(t, t)\,\theta_t +$$
$$+ [R(t+1, t+1) - R(t+1, t)\,R^+(t, t)\,R^*(t+1, t)]^{1/2}\,\varepsilon(t+1).$$

Доказательство. Положим $V_{t+1} = \theta_{t+1} - \mathbf{M}(\theta_{t+1}\,|\,\theta_t)$. По теореме о нормальной корреляции

$$\mathbf{M}\,[\theta_{t+1}\,|\,\theta_t] = r(t+1) + R(t+1, t)\,R^+(t, t)\,(\theta_t - r(t)).$$

Отсюда следует, что векторы V_t, $t \geqslant 1$, являются независимыми гауссовскими. Действительно, при $t > s$ в силу марковости процесса (θ_t), $t = 0, 1, \ldots,$

$$\mathbf{M}\,[\theta_t - \mathbf{M}(\theta_t\,|\,\theta_{t-1})\,|\,\theta_s, \theta_{s-1}] = \mathbf{M}\,[\theta_t\,|\,\theta_s] - \mathbf{M}\,[\theta_t\,|\,\theta_s] = 0,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}V_tV_s^* = \mathbf{M}\,[(\theta_t - \mathbf{M}(\theta_t\,|\,\theta_{t-1}))(\theta_s - \mathbf{M}(\theta_s\,|\,\theta_{s-1}))^*] =$$
$$= \mathbf{M}\,\{\mathbf{M}\,[\theta_t - \mathbf{M}(\theta_t\,|\,\theta_{t-1})\,|\,\theta_s, \theta_{s-1}]\,[\theta_s - \mathbf{M}(\theta_s\,|\,\theta_{s-1})]^*\} = 0.$$

Аналогично проверяется равенство $\mathbf{M}V_tV_s^* = 0$ при $t < s$.

Далее, из (13.22) находим, что

$$\mathbf{M}V_{t+1}V_{t+1}^* = R(t+1, t+1) - R(t+1, t)\,R^+(t, t)\,R^*(t+1, t).$$

Значит, в силу свойства 3 для гауссовских векторов найдется гауссовский вектор ε_{t+1} такой, что (см. (13.19))

$$V_{t+1} = [R(t+1, t+1) - R(t+1, t)\,R^+(t, t)\,R^*(t+1, t)]^{1/2}\,\varepsilon(t+1),$$
$$\mathbf{M}\varepsilon_{t+1} = 0, \qquad \operatorname{cov}(\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) = E.$$

Независимость гауссовских векторов ε_t, $t = 1, 2, \ldots,$ следует из независимости векторов V_t, $t=1, 2, \ldots$, и способа построения векторов ε_t в соответствии с формулой (13.20).

Требуемое рекуррентное уравнение для θ_t вытекает теперь из формул для V_{t+1} и представления для условного математического ожидания $\mathsf{M}(\theta_{t+1} \mid \theta_t)$.

§ 2. Рекуррентные уравнения фильтрации для условно-гауссовских последовательностей

1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ задана частично наблюдаемая случайная последовательность $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $t=0, 1, \ldots$,

$$\theta_t = (\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), \qquad \xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)),$$

определяемая рекуррентными уравнениями

$$\theta_{t+1} = a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)\theta_t + b_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + b_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1), \tag{13.46}$$

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1). \tag{13.47}$$

Здесь $\varepsilon_1(t) = (\varepsilon_{11}(t), \ldots, \varepsilon_{1k}(t))$, $\varepsilon_2(t) = (\varepsilon_{21}(t), \ldots, \varepsilon_{2l}(t))$ — независимые гауссовские векторы с независимыми компонентами, каждая из которых нормально распределена, $N(0, 1)$,

$$a_0(t, \xi) = (a_{01}(t, \xi), \ldots, a_{0k}(t, \xi)),$$
$$A_0(t, \xi) = (A_{01}(t, \xi), \ldots, A_{0l}(t, \xi))$$

— вектор-функции и

$$b_1(t, \xi) = \| b_{ij}^{(1)}(t, \xi) \|, \quad b_2(t, \xi) = \| b_{ij}^{(2)}(t, \xi) \|, \quad B_1(t, \xi) = \| B_{ij}^{(1)}(t, \xi) \|,$$
$$B_2(t, \xi) = \| B_{ij}^{(2)}(t, \xi) \|, \quad a_1(t, \xi) = \| a_{ij}^{(1)}(t, \xi) \|, \quad A_1(t, \xi) = \| A_{ij}^{(1)}(t, \xi) \|$$

— матричные функции, имеющие порядок $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$, $l \times l$, $k \times k$, $l \times k$ соответственно.

Любой из элементов этих вектор-функций и матриц предполагается неупреждающим, т. е. $\mathscr{F}_t^{\xi} = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_t\}$-измеримым для каждого $t=0, 1, \ldots$

Система (13.46), (13.47) решается при начальных условиях (θ_0, ξ_0), где случайный вектор (θ_0, ξ_0) предполагается независящим от последовательностей $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)]$, $t=1, 2, \ldots$ Относительно коэффициентов системы (13.46), (13.47) и начальных условий (θ_0, ξ_0) на протяжении всей главы будут приняты следующие допущения:

(I) *Если* $g(t, \xi)$ — *любая из функций* *) a_{0i}, A_{0j}, $b_{ij}^{(1)}$, $b_{ij}^{(2)}$, $B_{ij}^{(1)}$, $B_{ij}^{(2)}$, *то*

$$\mathsf{M}\,|\,g(t, \xi)\,|^2 < \infty, \qquad t = 0, 1, \ldots; \tag{13.48}$$

(II) *с вероятностью единица*

$$|\,a_{ij}^{(1)}(t, \xi)\,| \leqslant c, \quad |\,A_{ij}^{(1)}(t, \xi)\,| \leqslant c;$$

(III) $\mathsf{M}(\|\theta_0\|^2 + \|\xi_0\|^2) < \infty$, *где для* $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

(IV) *условное распределение* $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a\,|\,\xi_0)$ *является* (P-п. н.) *гауссовским.*

Из предположений (I) — (III) вытекает, что при любом $t < \infty$

$$\mathsf{M}(\|\theta_t\|^2 + \|\xi_t\|^2) < \infty. \tag{13.49}$$

2. Последовательность (θ, ξ) предполагается частично наблюдаемой, и задача фильтрации для нее состоит в построении оценок для ненаблюдаемых значений θ_t по наблюдениям $\xi_0^t = (\xi_0, \ldots, \xi_t)$. Пусть $F_{\xi_0^t}(a) = \mathsf{P}(\theta_t \leqslant a\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi})$,

$$m_t = \mathsf{M}(\theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}), \quad \gamma_t = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*\,|\,\mathcal{F}_t^{\xi}\right].$$

Очевидно, что в силу предположения (13.49) апостериорное среднее $m_t = (m_1(t), \ldots, m_k(t))$ является оптимальной оценкой (в среднеквадратическом смысле) вектора θ_t по значениям $\xi_0^t = \{\xi_0, \ldots, \xi_t\}$, а

$$\mathrm{Sp}\,\mathsf{M}\gamma_t = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{M}\,[\theta_i(t) - m_i(t)]^2$$

дает величину ошибки оценивания.

В случае произвольной частично наблюдаемой последовательности (θ, ξ) отыскание вида распределения $F_{\xi_0^t}(a)$ и его параметров m_t, γ_t представляется весьма трудной задачей. Однако для последовательностей (θ, ξ), управляемых системой (13.46), (13.47), при дополнительном предположении гауссовости условного распределения $\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a\,|\,\xi_0)$, решение задачи фильтрации (т. е. отыскания m_t и γ_t) становится эффективным.

В основе этого лежит следующий результат, аналогичный теореме 11.1 для случая непрерывного времени.

---

*) Для простоты записи иногда мы опускаем аргументы у рассматриваемых функций.

Теорема 13.3. *Пусть выполнены предположения* (I) — (IV). *Тогда последовательность* (θ, ξ), *управляемая системой* (13.46), (13.47), *является условно-гауссовской, т. е. условные распределения*

$$\mathsf{P}(\theta_0 \leqslant a_0, \ldots, \theta_t \leqslant a_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$$

являются (P-п. н.) *гауссовскими для каждого* $t = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Установим сейчас лишь гауссовость условного распределения $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Для целей фильтрации, рассматриваемой в этом параграфе, этого достаточно. Доказательство для общего случая будет дано ниже, в п. 6 § 3.

Доказательство будем вести по индукции. Предположим, что распределение $F_{\xi_0^t}(a) = \mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ нормально, $N(m_t, \gamma_t)$.

В силу системы (13.46), (13.47) условное распределение $\mathsf{P}(\theta_{t+1} \leqslant a, \xi_{t+1} \leqslant x \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = b)$ является гауссовским с вектором математических ожиданий

$$\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1 b = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 b \\ A_0 + A_1 b \end{pmatrix} \tag{13.50}$$

и матрицей ковариаций

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b \circ b & b \circ B \\ (b \circ B)^* & B \circ B \end{pmatrix}, \tag{13.51}$$

где $b \circ b = b_1 b_1^* + b_2 b_2^*$, $b \circ B = b_1 B_1^* + b_2 B_2^*$, $B \circ B = B_1 B_1^* + B_2 B_2^*$.

Пусть $\nu_t = (\theta_t, \xi_t)$, $z = (z_1, \ldots, z_{k+l})$. Тогда условная характеристическая функция вектора ν_{t+1} задается формулой

$$\mathsf{M}(\exp[iz^* \nu_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t) = \exp\left[iz^*(A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t) - \frac{1}{2} z^* B(t, \xi) z\right]. \tag{13.52}$$

По предположению индукции

$$\mathsf{M}(\exp[iz^*(A_1(t, \xi)\theta_t)] \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \exp\left[iz^*\left(A_1(t, \xi) m_t - \frac{1}{2} z^*(A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)) z\right)\right]. \tag{13.53}$$

Из (13.52) и (13.53) получаем

$$\mathsf{M}(\exp[iz^* \nu_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \exp\Big[iz^*(A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi) m_t) - \frac{1}{2} z^* B(t, \xi) z - \\ - \frac{1}{2} z^*(A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)) z\Big].$$

Таким образом, условные распределения

$$\mathsf{P}(\theta_{t+1}\leqslant a,\ \xi_{t+1}\leqslant x\,|\,\mathscr{F}_t^\xi) \tag{13.54}$$

являются гауссовскими.

Рассмотрим теперь вектор

$$\eta=[\theta_{t+1}-\mathsf{M}(\theta_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)]-C\,[\xi_{t+1}-\mathsf{M}(\xi_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)].$$

В силу теоремы о нормальной корреляции (и замечания к ней) найдется матрица C такая, что

$$\mathsf{M}\left[\eta(\xi_{t+1}-\mathsf{M}(\xi_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi))^*\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right]=0 \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Отсюда следует, что условно-гауссовские векторы η и ξ_{t+1} (при условии $\mathscr{F}_t^\xi$) независимы. Поэтому $(z=(z_1,\ \ldots,\ z_k))$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}\left[\exp(iz^*\theta_{t+1})\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \xi_{t+1}\right]=\\
&=\mathsf{M}\left\{\exp(iz^*[\mathsf{M}(\theta_{t+1}|\mathscr{F}_t^\xi)+C(\xi_{t+1}-\mathsf{M}(\xi_{t+1}|\mathscr{F}_t^\xi))+\eta]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \xi_{t+1}\right\}=\\
&\qquad=\exp\left(iz^*[\mathsf{M}(\theta_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)+C(\xi_{t+1}-\mathsf{M}(\xi_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi))]\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\mathsf{M}\left\{\exp(iz^*\eta)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \xi_{t+1}\right\}=\\
&\qquad=\exp\left(iz^*[\mathsf{M}(\theta_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)+C(\xi_{t+1}-\mathsf{M}(\xi_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t^\xi))]\right)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\times\mathsf{M}\left\{\exp(iz^*\eta)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right\}.
\end{aligned} \tag{13.55}$$

В силу (13.54) условное распределение $\mathsf{P}(\eta\leqslant y\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)$ является гауссовским. Вместе с (13.55) это и доказывает гауссовость условного распределения $\mathsf{P}(\theta_{t+1}\leqslant a\,|\,\mathscr{F}_{t+1}^\xi)$.

Итак, для всех $t=0,\ 1,\ \ldots$ условные распределения $\mathsf{P}(\theta_t\leqslant a\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)$ являются гауссовскими.

Замечание. Аналогично показывается, что если при некотором s распределение $\mathsf{P}(\theta_s\leqslant a\,|\,\mathscr{F}_s^\xi)$ является гауссовским, то таковыми же будут и условные распределения $\mathsf{P}(\theta_t\leqslant a\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)$ при $t\geqslant s$.

3. Условная гауссовость последовательности $(\theta,\ \xi)$ позволяет вывести для параметров m_t, γ_t замкнутую систему (ср. с § 1 гл. 11) рекуррентных уравнений.

Теорема 13.4. *В предположениях* (I)—(IV) *параметры* m_t *и* γ_t *определяются из рекуррентных уравнений**)

$$\begin{aligned}
m_{t+1}&=[a_0+a_1m_t]+\\
&+\left[b\circ B+a_1\gamma_tA_1^*\right]\left[B\circ B+A_1\gamma_tA_1^*\right]^+\left[\xi_{t+1}-A_0-A_1m_t\right],
\end{aligned} \tag{13.56}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{t+1}&=\left[a_1\gamma_ta_1^*+b\circ b\right]-\\
&-\left[b\circ B+a_1\gamma_tA_1^*\right]\left[B\circ B+A_1\gamma_tA_1^*\right]^+\left[b\circ B+a_1\gamma_tA_1^*\right]^*.
\end{aligned} \tag{13.57}$$

---

*) У коэффициентов a_0, A_0, ..., $b\circ b$, ... опущены аргументы $(t,\ \xi)$.

Доказательство. Найдем сначала параметры условного гауссовского распределения

$$\mathsf{P}\left(\theta_{t+1} \leqslant a,\ \xi_{t+1} \leqslant x \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) = \mathsf{M}\left[\mathsf{P}\left(\theta_{t+1} \leqslant a,\quad \xi_{t+1} \leqslant x \mid \theta_t,\ \mathscr{F}_t^\xi\right) \mid \mathscr{F}_t^\xi\right].$$

В силу (13.50)

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left(\theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) &= a_0(t,\ \xi) + a_1(t,\ \xi)\, m_t, \\ \mathsf{M}\left(\xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) &= A_0(t,\ \xi) + A_1(t,\ \xi)\, m_t. \end{aligned} \tag{13.58}$$

Для нахождения матрицы ковариаций воспользуемся тем, что в соответствии с (13.56) — (13.58)

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} - \mathsf{M}\left(\theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) &= a_1(t,\ \xi)\left[\theta_t - m_t\right] + \\ &\quad + b_1(t,\ \xi)\, \varepsilon_1(t+1) + b_2(t,\ \xi)\, \varepsilon_2(t+1), \\ \xi_{t+1} - \mathsf{M}\left(\xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) &= A_1(t,\ \xi)\left[\theta_t - m_t\right] + \\ &\quad + B_1(t,\ \xi)\, \varepsilon_1(t+1) + B_2(t,\ \xi)\, \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \tag{13.59}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} d_{11} &= \operatorname{cov}\left(\theta_{t+1},\ \theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) = a_1(t,\ \xi)\, \gamma_t a_1^*(t,\ \xi) + (b \circ b)(t,\ \xi), \\ d_{12} &= \operatorname{cov}\left(\theta_{t+1},\ \xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) = a_1(t,\ \xi)\, \gamma_t A_1^*(t,\ \xi) + (b \circ B)(t,\ \xi), \\ d_{22} &= \operatorname{cov}\left(\xi_{t+1},\ \xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) = A_1(t,\ \xi)\, \gamma_t A_1^*(t,\ \xi) + (B \circ B)(t,\ \xi). \end{aligned}$$

Поскольку условное (при условии $\mathscr{F}_t^\xi$) распределение вектора $(\theta_{t+1},\ \xi_{t+1})$ нормально, то в силу теоремы о нормальной корреляции (и замечания к ней)

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left(\theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi,\ \xi_{t+1}\right) &= \\ &= \mathsf{M}\left(\theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right) + d_{12} d_{22}^+\left(\xi_{t+1} - \mathsf{M}\left(\xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)\right) \end{aligned} \tag{13.60}$$

и

$$\operatorname{cov}\left(\theta_{t+1},\ \theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi,\ \xi_{t+1}\right) = d_{11} - d_{12} d_{22}^+ d_{12}^*. \tag{13.61}$$

Подставляя сюда выражения для $\mathsf{M}\left(\theta_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$, $\mathsf{M}\left(\xi_{t+1} \mid \mathscr{F}_t^\xi\right)$, d_{11}, d_{12} и d_{22}, из (13.58), (13.59) получаем рекуррентные уравнения (13.56), (13.57).

Следствие 1. *Пусть*

$$\begin{aligned} a_0(t,\ \xi) &= a_0(t) + a_2(t)\, \xi_t, & A_0(t,\ \xi) &= A_0(t) + A_2(t)\, \xi_t, \\ a_1(t,\ \xi) &= a_1(t), & A_1(t,\ \xi) &= A_1(t), \\ b_i(t,\ \xi) &= b_i(t), & B_i(t,\ \xi) &= B_i(t), \qquad i = 1,\ 2, \end{aligned}$$

где все функции $a_j(t)$, $A_j(t)$, $b_i(t)$, $B_i(t)$, $j = 0,\ 1,\ 2$ *и* $i = 1,\ 2$, *являются лишь функциями времени* t. *Если вектор* $(\theta_0,\ \xi_0)$ *является гауссовским, то процесс* $(\theta_t,\ \xi_t)$, $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, *также* *будет гауссовским. При этом ковариация* γ_t *не зависит от «случая» и, следовательно,* $\mathrm{Sp}\,\gamma_t$ *определяет среднеквадратическую ошибку оценивания вектора* θ_t *по наблюдениям* $\xi_0^t=(\xi_0, \ldots, \xi_t)$.

Следствие 2. *Пусть частично наблюдаемая последовательность* $(\theta, \xi)=(\theta_t, \xi_t)$, $t=0, 1, \ldots$, *удовлетворяет при* $t\geqslant 1$ *системе уравнений*

$$\theta_{t+1}=a_0(t, \xi)+a_1(t, \xi)\,\theta_t+b_1(t, \xi)\,\varepsilon_1(t+1)+b_2(t, \xi)\,\varepsilon_2(t+1), \tag{13.62}$$

$$\xi_t=\tilde{A}_0(t-1, \xi)+\tilde{A}_1(t-1, \xi)\,\theta_t+\tilde{B}_1(t-1, \xi)\,\varepsilon_1(t)+\tilde{B}_2(t-1, \xi)\,\varepsilon_2(t) \tag{13.63}$$

с $\mathbf{P}(\theta_1\leqslant a\,|\,\xi_1)\sim N(m_1, \gamma_1)$.

Хотя формально рассматриваемая система уравнений для θ_{t+1}, ξ_t и не укладывается в схему (13.46), (13.47), тем не менее при отыскании уравнений для $m_t=\mathbf{M}(\theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t=\mathrm{cov}(\theta_t, \theta_t\,|\,\mathcal{F}_t^\xi)$ можно воспользоваться результатами теоремы 13.4. В самом деле, из (13.62), (13.63) находим

$$\xi_{t+1}=\tilde{A}_0(t, \xi)+\tilde{A}_1(t, \xi)\,[a_0(t, \xi)+a_1(t, \xi)\,\theta_t+b_1(t, \xi)\,\varepsilon_1(t+1)+b_2(t, \xi)\,\varepsilon_2(t+1)]+\tilde{B}_1(t, \xi)\,\varepsilon_1(t+1)+\tilde{B}_2(t, \xi)\,\varepsilon_2(t+1).$$

Обозначая

$$\begin{aligned} A_0&=\tilde{A}_0+\tilde{A}_1a_0, & A_1&=\tilde{A}_1a_1,\\ B_1&=\tilde{A}_1b_1+\tilde{B}_1, & B_2&=\tilde{A}_1b_2+\tilde{B}_2, \end{aligned} \tag{13.64}$$

получаем, что *последовательность* (θ, ξ) *подчиняется уравнениям* (13.46), (13.47), *а* m_t *и* γ_t *удовлетворяют уравнениям* (13.56), (13.57).

Следствие 3 (фильтр Калмана — Бьюси). *Пусть гауссовская последовательность* (θ, ξ) *удовлетворяет уравнениям*

$$\theta_{t+1}=a_0(t)+a_1(t)\,\theta_t+b_1(t)\,\varepsilon_1(t+1)+b_2(t)\,\varepsilon_2(t+1), \tag{13.65}$$

$$\xi_t=A_0(t)+A_1(t)\,\theta_t+B_1(t)\,\varepsilon_1(t)+B_2(t)\,\varepsilon_2(t). \tag{13.66}$$

Тогда в силу (13.56), (13.57) *и предыдущего следствия* m_t *и* γ_t *удовлетворяют системе уравнений*

$$m_{t+1}=[a_0(t)+a_1(t)\,m_t]\,P_\gamma(t)\,Q_\gamma^+(t)\times[\xi_{t+1}-A_0(t+1)-A_1(t+1)\,a_0(t)-A_1(t+1)\,a_1(t)\,m_t], \tag{13.67}$$

$$\gamma_{t+1}=[a_1(t)\,\gamma_t a_1^*(t)+b\circ b(t)]-P_\gamma(t)\,Q_\gamma^+(t)\,P_\gamma^*(t), \tag{13.68}$$

где

$$P_\gamma(t) = b_1(t)[A_1(t+1)b_1(t) + B_2(t+1)]^* + \\ + b_2(t)[A_1(t+1)b_2(t) + B_2(t+1)]^* + a_1(t)\gamma_t a_1^*(t)A_1^*(t+1), \quad (13.69)$$

$$Q_\gamma(t) = [A_1(t+1)b_1(t) + B_1(t+1)][A_1(t+1)b_1(t) + B_1(t+1)]^* + \\ + [A_1(t+1)b_2(t) + B_2(t+1)][A_1(t+1)b_2(t) + B_2(t+1)]^* + \\ + A_1(t+1)a_1(t)\gamma_t a_1^*(t)A_1^*(t+1). \quad (13.70)$$

С помощью теоремы о нормальной корреляции для $m_0 = \mathbf{M}(\theta_0 \mid \xi_0)$ и $\gamma_0 = \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0 \mid \xi_0)$ получаем следующие выражения:

$$m_0 = \mathbf{M}\theta_0 + \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0) A_1^*(0)[A_1(0)\operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0)A_1^*(0) + B \circ B(0)]^+ \times \\ \times [\xi_0 - A_0(0) - A_1(0)\mathbf{M}\theta_0], \quad (13.71)$$

$$\gamma_0 = \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0) - \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0) A_1^*(0) \times \\ \times [A_1(0)\operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0)A_1^*(\theta) + B \circ B(0)]^+ A_1(0)\operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0). \quad (13.72)$$

З а м е ч а н и е. В предположениях теоремы условное распределение $\mathbf{P}(\theta_t \leqslant b \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_s = a)$, $t \geqslant s$, также гауссовское и его параметры $m_a(t, s) = \mathbf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_s = a)$ и $\gamma_a(t, s) = \operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_s = a)$ удовлетворяют при $t \geqslant s$ системе уравнений

$$m_a(t+1, s) = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi)m_a(t, s)] + \\ + [(b \circ B(t, \xi) + a_1(t, \xi)\gamma_a(t, s)A_1^*(t, \xi)] \times \\ \times [B \circ B(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)]^+ \times \\ \times [\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi)m_a(t, s)], \quad (13.73)$$

$$\gamma_a(t+1, s) = [a_1(t, \xi)\gamma_a(t, s)a_1^*(t, \xi) + b \circ b(t, \xi)] - \\ - [b \circ B(t, \xi) + a_1(t, \xi)\gamma_a(t, s)A_1^*(t, \xi)] \times \\ \times [B \circ B(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_a(t, s)A_1^*(t, \xi)]^+ \times \\ \times [b \circ B(t, \xi) + a_1(t, \xi)\gamma_a(t, s)A_1^*(t, \xi)] \quad (13.74)$$

с $m_a(s, s) = a$, $\gamma_a(s, s) = 0$.

Из (13.74) следует, что $\gamma_a(t, s)$ при $t \geqslant s$ не зависит от a.

4. Отметим ряд полезных свойств процессов m_t и γ_t, $t = 0, 1, \ldots$, предполагая выполненными условия теоремы 13.4.

С в о й с т в о 1. При любом $t = 0, 1, \ldots$ величины m_t и $(\theta_t - m_t)$ некоррелированы, т. е.

$$\mathbf{M}\{m_t^*(\theta_t - m_t)\} = \mathbf{M}\{(\theta_t - m_t)^* m_t\} = 0,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}\theta_t^*\theta_t = \mathbf{M}m_t^*m_t + \mathbf{M}(\theta_t - m_t)^*(\theta_t - m_t). \quad (13.75)$$

Свойство 2. Условная ковариация γ_t не зависит явно от коэффициентов $a_0(t, \xi)$ и $A_0(t, \xi)$.

Свойство 3. Пусть γ_0 и все коэффициенты системы (13.46), (13.47), за исключением, быть может, коэффициентов $a_0(t, \xi)$ и $A_0(t, \xi)$, не зависят от «случая». Тогда условная ковариация γ_t является функцией лишь времени t и $\gamma_t = \mathsf{M}\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*\}$. В этом случае распределение величины $\Delta_t = \theta_t - m_t$ нормально, $N(0, \gamma_t)$.

Свойство 4. Оценка m_t является несмещенной:

$$\mathsf{M}m_t = \mathsf{M}\theta_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{13.76}$$

5. В следующей теореме для последовательности ξ_t, $t = 0, 1, \ldots$, дается специальное представление (ср. с теоремой 7.12), которое в дальнейшем будет не раз использовано.

Теорема 13.5. *Пусть выполнены предположения* (I) — (IV). *Тогда найдутся гауссовские векторы* $\bar{\varepsilon}(t) = (\bar{\varepsilon}_1(t), \ldots, \bar{\varepsilon}_l(t))$ *с независимыми координатами и с*

$$\mathsf{M}\bar{\varepsilon}(t) = 0, \quad \mathsf{M}\bar{\varepsilon}(t)\bar{\varepsilon}^*(s) = \delta(t-s)E_{(l\times l)} \tag{13.77}$$

такие, что (P-п. н.)

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)m_t + \\ + \left[(B\circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)\right]^{1/2}\bar{\varepsilon}(t+1). \tag{13.78}$$

Если, кроме того, матрицы $(B\circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)$ *не вырождены* (P-п. н.), $t = 0, 1, \ldots$, *то* [1])

$$\mathcal{F}_t^{\xi} = \mathcal{F}_t^{(\xi_0, \bar{\varepsilon})}, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{13.79}$$

Доказательство. Предположим сначала, что при всех $t = 0, 1, \ldots$ матрицы $(B\circ B)(t, \xi)$ положительно определены. Тогда, поскольку матрицы $A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)$ по крайней мере неотрицательно определены, то матрицы $[(B\circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\times \times\gamma_t A_1^*(t, \xi)]^{1/2}$ положительно определены и, следовательно, имеет смысл случайный вектор

$$\bar{\varepsilon}(t+1) = \left[(B\circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)\right]^{-1/2}\times \\ \times\left[A_1(t, \xi)(\theta_t - m_t) + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1)\right]. \tag{13.80}$$

Условное (при условии $\mathcal{F}_t^{\xi}$) распределение вектора θ_t согласно теореме 13.3 является гауссовским, а случайные векторы $\varepsilon_1(t+1)$ и $\varepsilon_2(t+1)$ не зависят от $\xi_0^t = (\xi_0, \ldots, \xi_t)$. Поэтому

[1]) Все рассматриваемые σ-алгебры предполагаются пополненными множествами из $\mathcal{F}$ меры нуль.

из (13.80) следует, что условное распределение $\mathsf{P}(\bar{\varepsilon}(t+1)\leqslant \leqslant x\,|\,\mathcal{F}_t^\xi)$ является гауссовским и, как нетрудно подсчитать,

$$\mathsf{M}\left[\bar{\varepsilon}(t+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi\right]=0, \tag{13.81}$$

$$\operatorname{cov}\left(\bar{\varepsilon}(t+1),\ \bar{\varepsilon}(t+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi\right)=E_{(l\times l)}. \tag{13.82}$$

Отсюда видно, что параметры условного распределения вектора $\bar{\varepsilon}(t+1)$ не зависят от условия, а значит, и (безусловное) распределение вектора $\bar{\varepsilon}(t+1)$ также гауссовское. При этом

$$\mathsf{M}\bar{\varepsilon}(t+1)=0, \quad \operatorname{cov}(\bar{\varepsilon}(t+1),\ \bar{\varepsilon}(t+1))=E_{(l\times l)}.$$

Аналогичным образом, используя теорему 13.3, можно показать, что при любом t совместное распределение векторов $(\bar{\varepsilon}(1),\ \ldots,\ \bar{\varepsilon}(t))$ также гауссовское с $\operatorname{cov}(\bar{\varepsilon}(u),\ \bar{\varepsilon}(v))=\delta(u-v)E$. Отсюда следует независимость векторов $\bar{\varepsilon}(1),\ \ldots,\ \bar{\varepsilon}(t)$.

Из (13.80) и (13.47) очевидным образом вытекает требуемое представление (13.78).

Для доказательства (13.79) заметим прежде всего, что согласно (13.78)

$$\mathcal{F}_t^\xi \mathrel{\dot{\subseteq}} \mathcal{F}_t^{(\xi_0,\ \bar{\varepsilon})}. \tag{13.83}$$

Если матрица $(B\circ B)(t,\ \xi)+A_1(t,\ \xi)\gamma_t A_1^*(t,\ \xi)$ не вырождена, то опять-таки в силу (13.78)

$$\bar{\varepsilon}(t)=\left[(B\circ B)(t-1,\ \xi)+A_1(t-1,\ \xi)\gamma_t A_1^*(t-1,\ \xi)\right]^{-1/2}\times \\ \times\left[\xi_t-A_0(t-1,\ \xi)-A_1(t-1,\ \xi)\,m_{t-1}\right].$$

Поэтому $\mathcal{F}_t^\xi\supseteq\mathcal{F}_t^{(\xi_0,\ \bar{\varepsilon})}$, что вместе с (13.83) доказывает совпадение σ-алгебр $\mathcal{F}_t^\xi$ и $\mathcal{F}_t^{(\xi_0,\ \bar{\varepsilon})}$, $t=1,\ 2,\ \ldots$

Предположим теперь, что при некотором t матрица $(B\circ B)(t,\ \xi)+A_1(t,\ \xi)\gamma_t A_1^*(t,\ \xi)$ вырождается (с положительной вероятностью).

Построим (в крайнем случае за счет расширения основного вероятностного пространства) последовательность независимых гауссовских случайных векторов $z(t)=(z_1(t),\ldots,\ z_l(t))$, $\mathsf{M}z(t)=0$, $\mathsf{M}z(t)\,z^*(t)=E_{(l\times l)}$, независимых также от процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $t\geqslant 0$, и векторов $(\theta_0,\ \xi_0)$. Положим

$$\bar{\varepsilon}(t+1)=D^+(t,\ \xi)\left[A_1(t,\ \xi)(\theta_t-m_t)+B_1(t,\ \xi)\,\varepsilon_1(t+1)+\right. \\ \left.+B_2(t,\ \xi)\,\varepsilon_2(t+1)\right]+\left(E-D^+(t,\ \xi)\,D(t,\ \xi)\right)z(t+1), \tag{13.84}$$

где $D(t,\ \xi)=\left[(B\circ B)(t,\ \xi)+A_1(t,\ \xi)\gamma_t A_1^*(t,\ \xi)\right]^{1/2}$. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что последовательность $\bar{\varepsilon}(1)$, $\bar{\varepsilon}(2),\ \ldots$ так определенных векторов обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы.

Для доказательства представления (13.78) достаточно, очевидно, показать, что

$$D(t, \xi)\bar{\varepsilon}(t+1) = \\ = A_1(t, \xi)[\theta_t - m_t] + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1). \quad (13.85)$$

Умножая левую и правую части в (13.84) на $D(t, \xi)$, получаем

$$D(t, \xi)\bar{\varepsilon}(t+1) = \\ = [A_1(t, \xi)(\theta_t - m_t) + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1)] - \\ - [E - D(t, \xi)D^+(t, \xi)][A_1(t, \xi)(\theta_t - m_t) + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + \\ + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1)] + D(t, \xi)[E - D^*(t, \xi)D(t, \xi)]z(t+1). \quad (13.86)$$

По первому свойству псевдообратных матриц $D[E - D^+D] = D - DD^+D = 0$, и, следовательно, (P-п. н.)

$$D(t, \xi)[E - D^+(t, \xi)D(t, \xi)]z(t+1) = 0. \quad (13.87)$$

Обозначим

$$\zeta(t+1) = [E - D(t, \xi)D^+(t, \xi)][A_1(t, \xi)(\theta_t - m_t) + \\ + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1)].$$

Тогда

$$\mathsf{M}\zeta(t+1)\zeta^*(t+1) = \mathsf{M}\{\mathsf{M}(\zeta(t+1)\zeta^*(t+1)\mid\mathscr{F}_t^\xi)\} = \\ = \mathsf{M}\{(E - DD^+)DD^*(E - DD^+)\} = \mathsf{M}\{(DD^* - DD^+DD^*)(E - DD^+)\} = \\ = \mathsf{M}[(DD^* - DD^*)(E - DD^+] = 0.$$

Следовательно, $\zeta(t+1) = 0$ (P-п. н.), что вместе с (13.86), (13.87) доказывает (13.85).

Замечание. В случае невырожденных матриц $B \circ B(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)$, $t \geqslant 0$,

$$\mathscr{F}_t^\xi = \mathscr{F}_t^{\xi_0, \bar{\varepsilon}}, \quad t = 1, 2, \ldots;$$

поэтому последовательность $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}(1), \bar{\varepsilon}(2), \ldots)$ естественно (по аналогии с определением, данным в п. 2 § 4 гл. 7) назвать *обновляющей* последовательностью.

§ 3. Прямые и обратные уравнения интерполяции

1. Для случайной последовательности $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t)$, $t=0, 1, \ldots$, управляемой уравнениями (13.46), (13.47), под интерполяцией понимается задача построения оптимальных (в среднеквадратическом смысле) оценок вектора θ_s по наблюдениям $\xi_0^t = \{\xi_0, \ldots, \xi_t\}$, $t \geqslant s$.

Обозначим для $t \geqslant s$

$$m(s, t) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi), \quad \gamma(s, t) = \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi)$$

вектор средних значений и матрицу ковариаций условного распределения $\Pi_a(s, t) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$. Ясно, что $m(s, t)$ является оптимальной оценкой θ_s по ξ_0^t. Для этой оценки можно выводить как прямые уравнения (по t при фиксированном s), так и обратные (по s при фиксированном t). Прямые уравнения показывают, насколько улучшается интерполяция с накоплением данных, т. е. при увеличении t. Обратные уравнения представляют интерес в тех статистических задачах, где известен вектор $\xi_0^t = \{\xi_0, \ldots, \xi_t\}$ и по нему надо оценивать ненаблюдаемую компоненту θ_s для всех $s = 0, \ldots, t$. Обратные уравнения дают удобный рекуррентный способ подсчета оценок: $m(t-1, t)$ по $m(t, t) = m_t$ и ξ_t, $m(t-2, t)$ по $m(t-1, t)$, $m(t, t)$, ξ_{t-1}, ξ_t и т. д.

2. Будем предполагать выполненными предположения (I) — (III) из § 2.

Для вывода прямых уравнений интерполяции полезна следующая

Теорема 13.6. *Если условное распределение* $\Pi_a(s, s) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ *нормально* (P-п. н.), *то таковы же и распределения* $\Pi_a(s, t) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ *при* $t \geqslant s$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 13.5. *Если условное распределение* $\Pi_a(s, s) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ *нормально, то условное математическое ожидание*

$$m_\alpha(t, s) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_s^\xi, \theta_s = \alpha), \quad t \geqslant s,$$

допускает представление

$$m_\alpha(t, s) = \varphi_s^t \alpha + \psi_s^t, \tag{13.88}$$

где матрицы *)

$$\varphi_s^s = E_{(k \times k)},$$

$$\varphi_s^t = \prod_{u=s}^{t-1} \{a_1(u, \xi) - [b \circ B(u, \xi) + a_1(u, \xi)\gamma(u, s)A_1^*(u, \xi)] \times$$
$$\times [(B \circ B)(u, \xi) + A_1(u, \xi)\gamma(u, s)A_1^*(u, \xi)]^+ A_1(u, \xi)\} \tag{13.89}$$

---

*) Под $\prod_{u=s}^{t-1} A_u$ понимается произведение матриц $A_{t-1} \ldots A_s$.

и векторы

$$\psi_s^t = \sum_{u=s}^{t-1} \varphi_u^{t-1} \{a_0(u, \xi) + [(b \circ B)(u, \xi) + a_1(u, \xi)\gamma(u, s) A_1^*(u, \xi)] \times$$
$$\times [(B \circ B(u, \xi) + A_1(u, \xi)\gamma(u, s) A_1^*(u, \xi)]^+ (\xi_{u+1} - A_0(u, \xi))\} \quad (13.90)$$

не зависят от α. *Матрицы* $\gamma(u, s)$, $u \geqslant s$, *определяются из уравнений*

$$\gamma(u, s) = [a_1(u-1, \xi)\gamma(u-1, s) a_1^*(u-1, \xi) + (b \circ b)(u, \xi)] -$$
$$- [(b \circ B)(u-1, \xi) + a_1(u-1, \xi)\gamma(u-1, s) A_1^*(u-1, \xi)] \times$$
$$\times [(B \circ B)(u-1, \xi) + A_1(u-1, \xi)\gamma(u-1, s) A_1^*(u-1, \xi)]^+ \times$$
$$\times [(b \circ B)(u-1, \xi) + a_1(u-1, \xi)\gamma(u-1, s) A_1^*(u-1, \xi)]^* \quad (13.91)$$

с начальным условием $\gamma(s, s) = 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что соответствующий аналог представления (13.88) был дан в лемме 12.2 (ср. (13.88) с (12.79)).

Согласно замечанию к теореме 13.4 $m_\alpha(t, s)$ и $\gamma_\alpha(t, s) = \operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta = \alpha)$ удовлетворяют уравнениям (13.73), (13.74) с начальными условиями $m_\alpha(s, s) = \alpha$, $\gamma_\alpha(s, s) = 0$. Поскольку $\gamma_\alpha(t, s)$ не зависит от α, то будем писать $\gamma(t, s) = \gamma_\alpha(t, s)$.

Представление (13.88) выводится из (13.73) по индукции.

Доказательство теоремы 13.6. Покажем сначала, что гауссовским является условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant a, \xi_t \leqslant x \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi)$. Для этого вычислим условную характеристическую функцию

$$\mathsf{M}(\exp i[z_1^*\theta_s + z_2^*\xi_t] \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi) =$$
$$= \mathsf{M}(\exp i[z_1^*\theta_s] \mathsf{M}\{\exp i[z_2^*\xi_t] \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi, \theta_s\} \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi). \quad (13.92)$$

Очевидно, что

$$\mathsf{M}(\exp i[z_2^*\xi_t] \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi, \theta_{t-1}, \theta_s) =$$
$$= \exp\Big\{ iz_2^*(A_0(t-1, \xi) + A_1(t-1, \xi)\theta_{t-1}) -$$
$$- \frac{1}{2} z_2^*(B \circ B)(t-1, \xi) z_2 \Big\}. \quad (13.93)$$

Далее,

$$\mathsf{P}\{\theta_{t-1} \leqslant b \mid \mathcal{F}_{t-1}^\xi, \theta_s\} \sim N(m_{\theta_s}(t-1, s), \gamma(t-1, s))$$

и в силу (13.93)

$$\mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left[\exp i(z_2^*\xi_t)\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi},\ \theta_{t-1},\ \theta_s\right]\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi},\ \theta_s\right\}=$$
$$=\exp\left\{i\left[z_2^*A_0(t-1,\ \xi)\right]-\frac{1}{2}z_2^*(B\circ B)(t-1,\ \xi)z_2\right\}\times$$
$$\times\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z_2^*A_1(t-1,\ \xi)\theta_{t-1}\right]\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi},\ \theta_s\right\}=$$
$$=\exp\left\{iz_2^*A_0(t-1,\ \xi)-\frac{1}{2}z_2^*(B\circ B)(t-1,\ \xi)z_2\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[z_2^*A_1(t-1,\ \xi)m_{\theta_s}(t-1,\ s)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}z_2^*A_1(t-1,\ \xi)\gamma(t-1,\ s)A_1^*(t-1,\ \xi)z_2\right\}.$$

По лемме 13.5

$$m_{\theta_s}(t-1,\ s)=\varphi_s^{t-1}\theta_s+\psi_s^{t-1}\qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.})$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z_2^*\xi_t\right]\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi},\ \theta_s\right\}=$$
$$=\exp\left\{iz_2^*\left(A_0(t-1,\ \xi)+A_1(t-1,\ \xi)\psi_s^{t-1}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}z_2^*\left((B\circ B)(t-1,\ \xi)+A_1(t-1,\ \xi)\gamma(t-1,\ s)A_1^*(t-1,\ \xi)\right)z_2+$$
$$\left.+iz_2^*A_1(t-1,\ \xi)\varphi_s^{t-1}\theta_s\right\},$$

что вместе с (13.92) приводит к равенству

$$\mathsf{M}\left(\exp i\left[z_1^*\theta_s+z_2^*\xi_t\right]\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi}\right)=$$
$$=\exp\left\{iz_2^*\left(A_0(t-1,\ \xi)+A_1(t-1,\ \xi)\psi_s^{t-1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}z_2^*\left((B\circ B)(t-1,\ \xi)+A_1(t-1,\ \xi)\gamma(t-1,\ s)A_1^*(t-1,\ \xi)\right)z_2\right\}\times$$
$$\times\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z_1^*\theta_s+z_2^*\left(A_1(t-1,\ \xi)\varphi_s^{t-1}\theta_s\right)\right]\mid \mathcal{F}_{t-1}^{\xi}\right\}.\qquad(13.94)$$

Пусть $t=s+1$. Поскольку распределение $\Pi_a(s,\ s)=\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant a\mid \mathcal{F}_s^{\xi}\right)\sim N(m_s,\ \gamma_s)$, то из (13.94) вытекает, что распределение $\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant a,\ \xi_{s+1}\leqslant x\mid \mathcal{F}_s^{\xi}\right)$ также гауссовское. Отсюда уже нетрудно вывести, что гауссовским будет распределение $\Pi_a(s,\ s+1)$. Из (13.94) по индукции доказывается, что и при любом $t>s$ условные распределения $\Pi_a(s,\ t)$ тоже гауссовские.

Замечание. Тем же методом доказывается гауссовость условных распределений $\mathsf{P}\left\{\theta_s\leqslant a\mid \mathcal{F}_t^{\xi},\ \theta_u=b\right\}$ при $u<s\leqslant t$.

3. Итак, согласно теореме 13.6 распределение $\Pi_a(s,\ t)=\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant a\mid \mathcal{F}_t^{\xi}\right)\sim N(m(s,\ t),\ \gamma(s,\ t))$, если гауссовским является распределение $\Pi_a(s,\ s)$. Найдем прямые уравнения (интерполяции) для $m(s,\ t)$ и $\gamma(s,\ t)$.

Теорема 13.7. *Если* $\Pi_a(s, s) \sim N(m_s, \gamma_s)$, *то* $m(s, t)$ *и* $\gamma(s, t)$ *при* $t > s$ *удовлетворяют уравнениям*

$$m(s, t+1) = m(s, t) + \gamma(s, t)(\varphi_s^t)^* A_1^*(t, \xi) \times \\ \times [(B \circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)]^+ [\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi) m_t], \tag{13.95}$$

$$\gamma(s, t+1) = \gamma(s, t) - \gamma(s, t)(\varphi_s^t)^* A_1^*(t, \xi) \times \\ \times [(B \circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)]^+ A_1(t, \xi)\varphi_s^t \gamma(s, t), \tag{13.96}$$

где $m(t, t) = m_t$, $\gamma(t, t) = \gamma_t$, *а матрицы* φ_s^t *определяются из* (13.89).

Доказательство. Как следует из теоремы 13.6, условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant a, \xi_t \leqslant x \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi})$ нормально. Параметры этого распределения можно было бы получить из (13.94), однако их проще найти, используя теорему о нормальной корреляции.

Согласно замечанию к этой теореме

$$\mathsf{M}(\theta_s \mid \xi_t, \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}) + d_{12} d_{22}^+ [\xi_t - \mathsf{M}(\xi_t \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi})], \tag{13.97}$$

где

$$d_{12} = \operatorname{cov}(\theta_s, \xi_t \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}), \tag{13.98}$$

$$d_{22} = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_t \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}) = \\ = A_1(t-1, \xi)\gamma_{t-1} A_1^*(t-1, \xi) + (B \circ B)(t-1, \xi). \tag{13.99}$$

Чтобы найти d_{12}, заметим, что в силу леммы 13.4

$$m_{t-1} = \mathsf{M}(\theta_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}) = \mathsf{M}[\mathsf{M}(\theta_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}, \theta_s) \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}] = \\ = \mathsf{M}[\varphi_s^{t-1}\theta_s + \psi_s^{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}] = \varphi_s^{t-1} m(s, t-1) + \psi_s^{t-1}. \tag{13.100}$$

Далее,

$$\mathsf{M}[\theta_{t-1} - m_{t-1} \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}, \theta_s] = \\ = \varphi_s^{t-1}\theta_s + \psi_s^{t-1} - [\varphi_s^{t-1} m(s, t-1) + \psi_s^{t-1}] = \\ = \varphi_s^{t-1}[\theta_{t-1} - m(s, t-1)], \tag{13.101}$$

$$\mathsf{M}[\xi_t \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}] = A_0(t-1, \xi) + A_1(t-1, \xi) m_{t-1} \tag{13.102}$$

и по лемме 13.5

$$\mathsf{M}\{[\xi_t - \mathsf{M}(\xi_t \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi})]^* \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}, \theta_s\} = \mathsf{M}\{[A_1(t-1, \xi)(\theta_{t-1} - m_{t-1}) + \\ + B_1(t-1, \xi)\varepsilon_1(t) + B_2(t-1, \xi)\varepsilon_2(t)]^* \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}, \theta_s\} = \\ = \mathsf{M}\{[A_1(t-1, \xi)(\theta_{t-1} - m_{t-1})]^* \mid \mathscr{F}_{t-1}^{\xi}, \theta_s\} = \\ = [\theta_s - m(s, t-1)]^* (\varphi_s^{t-1})^* A_1^*(t-1, \xi). \tag{13.103}$$

Поэтому из (13.100) — (13.103) находим:

$$d_{12} = \operatorname{cov}(\theta_s, \xi_t \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1}) =$$
$$= \mathsf{M}\left\{[\theta_s - m(s, t-1)]\left[\xi_t - \mathsf{M}(\xi_t \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1})\right]^* \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\right\} =$$
$$= \mathsf{M}\left\{[\theta_s - m(s, t-1)]\left[\theta_s - m(s, t-1)\right]^* (\varphi_s^{t-1})^* A_1^*(t-1, \xi) \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\right\} =$$
$$= \gamma(s, t-1)(\varphi_s^{t-1})^* A_1^*(t-1, \xi). \qquad (13.104)$$

Из (13.97), (13.98), (13.102) и (13.104) получаем уравнение (13.95).

Чтобы вывести уравнение (13.96), заметим, что согласно замечанию к теореме о нормальной корреляции

$$\gamma(s, t) = \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1}, \xi_t) = d_{11} - d_{12} d_{22}^{+} d_{12}^{+}, \qquad (13.105)$$

где

$$d_{11} = \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathcal{F}^{\xi}_{t-1}) = \gamma(s, t-1). \qquad (13.106)$$

Из (13.105), (13.106), (13.104) и (13.99) получаем требуемое уравнение (13.96) для $\gamma(s, t)$.

4. Теорема 13.8. *Если матрицы* $(B \circ B)(u, \xi)$, $u = 0, 1, \ldots$, *невырождены, то решения* $m(s, t)$ *и* $\gamma(s, t)$ *уравнений* (13.95) *и* (13.96) *задаются формулами*

$$m(s, t) = \Bigg[E + \gamma_s \sum_{u=s}^{t-1} (\varphi_s^u)^* A_1^*(u, \xi)\big((B \circ B)(u, \xi) +$$
$$+ A_1(u, \xi)\gamma(u, s) A_1^*(u, \xi)\big)^{-1} A_1(u, \xi)\varphi_s^u\Bigg]^{-1} \times$$
$$\times \Bigg[m_s + \gamma_s \sum_{u=s}^{t-1} (\varphi_s^u)^* A_1^*(u, \xi)\big((B \circ B)(u, \xi) + A_1(u, \xi)\gamma(u, s) \times$$
$$\times A_1^*(u, \xi)\big)^{-1}(\xi_{u+1} - A_0(u, \xi) - A_1(u, \xi)\psi_s^u)\Bigg], \qquad (13.107)$$

$$\gamma(s, t) = \Bigg[E + \gamma_s \sum_{u=s}^{t-1} (\varphi_s^u)^* A_1^*(u, \xi)\big((B \circ B)(u, \xi) +$$
$$+ A_1(u, \xi)\gamma(u, s) A_1^*(u, \xi)\big)^{-1} A_1(u, \xi)\varphi_s^u\Bigg]^{-1} \gamma_s, \qquad (13.108)$$

где φ_s^u, ψ_s^u *и* $\gamma(u, s)$ *определены формулами* (13.89), (13.90) *и* (13.91).

Доказательство. Покажем сначала, что для всех $t > s$

$$\gamma_{t-1} = \gamma(t-1, s) + \varphi_s^{t-1}\gamma(s, t-1)(\varphi_s^{t-1})^*. \qquad (13.109)$$

В самом деле,

$$\gamma_{t-1}=\operatorname{cov}(\theta_{t-1},\theta_{t-1}\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1})=\mathsf{M}\{[\theta_t-m_{t-1}][\theta_t-m_{t-1}]^*\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}=$$
$$=\mathsf{M}\{[\theta_{t-1}-m_{\theta_s}(t-1,s)+m_{\theta_s}(t-1,s)-m_{t-1}]\times$$
$$\times[\theta_{t-1}-m_{\theta_s}(t-1,s)+m_{\theta_s}(t-1,s)-m_{t-1}]^*\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}=$$
$$=\mathsf{M}\{\mathsf{M}[(\theta_{t-1}-m_{\theta_s}(t-1,s))(\theta_{t-1}-m_{\theta_s}(t-1,s))^*\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1},\theta_s]\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}+$$
$$+\mathsf{M}\{(m_{\theta_s}(t-1,s)-m_{t-1})(m_{\theta_s}(t-1,s)-m_{t-1})^*\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}=$$
$$=\mathsf{M}\{\gamma(t-1,s)\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}+$$
$$+\mathsf{M}\{\varphi_s^{t-1}(\theta_s-m(s,t-1))(\theta_s-m(s,t-1))^*(\varphi_s^{t-1})^*\mid\mathcal{F}^{\xi}_{t-1}\}=$$
$$=\gamma(t-1,s)+\varphi_s^{t-1}\gamma(s,t-1)(\varphi_s^{t-1})^*,$$

где использовано равенство (13.100):

$$m_{t-1}=\varphi_s^{t-1}m(s,t-1)+\psi_s^{t-1}.$$

Из (13.96) и (13.109) получаем:

$$\gamma(s,t)=\gamma(s,t-1)-\gamma(s,t-1)(\varphi_s^{t-1}(\xi))^*A_1^*(t-1,\xi)\times$$
$$\times[(B\circ B)(t-1,\xi)+A_1(t-1,\xi)\gamma(t-1,s)A_1^*(t-1,\xi)+$$
$$+A_1(t-1,\xi)\varphi_s^{t-1}\gamma(s,t-1)(\varphi_s^{t-1})^*A_1^*(t-1,\xi)]^{-1}\times$$
$$\times A_1(t-1,\xi)\varphi_s^{t-1}\gamma(s,t-1). \qquad (13.110)$$

Положим здесь для $t>s$

$$\tilde{A}_1(t-1,\xi)=A_1(t-1,\xi)\varphi_s^{t-1},$$
$$(\widetilde{B\circ B})(t-1,\xi)=(B\circ B)(t-1,\xi)+ \qquad (13.111)$$
$$+A_1(t-1,\xi)\gamma(t-1,s)A_1^*(t-1,\xi).$$

Тогда $\gamma(s,t)$ будет удовлетворять (по $t>s$) уравнению

$$\gamma(s,t)=\gamma(s,t-1)-\gamma(s,t-1)\tilde{A}_1^*(t-1,\xi)([\widetilde{B\circ B})(t-1,\xi)+$$
$$+\tilde{A}_1(t-1,\xi)\gamma(s,t-1)\tilde{A}_1^*(t-1,\xi)]^{-1}\tilde{A}_1(t-1,\xi)\gamma(s,t-1).$$

Наряду с (13.111) введем обозначение $\tilde{A}_0(t-1,\xi)=A_0(t-1,\xi)+$ $+A_1(t-1,\xi)\psi_s^{t-1}$. Тогда уравнение (13.95) можно переписать в следующем виде:

$$m(s,t)=m(s,t-1)+\gamma(s,t-1)\tilde{A}_1^*(t-1,\xi)[(\widetilde{B\circ B})(t-1,\xi)+$$
$$+\tilde{A}_1(t-1,\xi)\gamma(s,t-1)\tilde{A}_1^*(t-1,\xi)]^{-1}\times$$
$$\times[\xi_t-\tilde{A}_0(t-1,\xi)-\tilde{A}_1(t-1,\xi)m(s,t-1)].$$

Решения же этого уравнения (см. далее теорему 13.15) определяются формулами (13.107), (13.108).

5. Рассмотрим еще один класс задач интерполяции, состоящих в построении наилучших (в среднеквадратическом смысле) оценок вектора θ_s по наблюдениям $\xi_0^t=\{\xi_0, \ldots, \xi_t\}$ и известному значению $\theta_t=\beta$ (ср. с п. 6 § 4 гл. 12).

Обозначим

$$\Pi_{\alpha\beta}(s, t)=\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant\alpha\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \theta_t=\beta\right), \qquad t\geqslant s,$$

и

$$\tilde{m}_\beta(s, t)=\mathsf{M}\left(\theta_s\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \theta_t=\beta\right), \quad \tilde{\gamma}_\beta(s, t)=\operatorname{cov}\left(\theta_s, \theta_s\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \theta_t=\beta\right).$$

Теорема 13.9. *Если условное распределение* $\Pi_\alpha(s)=\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant\alpha\,|\,\mathscr{F}_s^\xi\right)$ *нормально, то апостериорное распределение* $\Pi_{\alpha\beta}(s, t)$ *при всех* $t\geqslant s$ *также нормально.*

Доказательство. Вычислим условную характеристическую функцию

$$\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z^*\theta_s+\tilde{z}^*\theta_t\right]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right\}=\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z^*\theta_s\right]\mathsf{M}\left(\exp i\left[\tilde{z}^*\theta_t\right]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi, \theta_s\right)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right\},$$

где $z=(z_1, \ldots, z_k)$, $\tilde{z}=(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_k)$. Согласно замечанию к теореме 13.4 распределение $\mathsf{P}\left(\theta_t\leqslant\beta\,|\,\theta_s, \mathscr{F}_t^\xi\right)$ является гауссовским, $N\left(m_{\theta_s}(t, s), \gamma_{\theta_s}(t, s)\right)$. По лемме 13.5 $m_{\theta_s}(t, s)=\varphi_s^t\theta_s+\psi_s^t$, а ковариация $\gamma_{\theta_s}(t, s)$ не зависит от θ_s: $\gamma_{\theta_s}(t, s)=\gamma(t, s)$. Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{\exp\left[i\tilde{z}^*\theta_t\right]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi, \theta_s\right\}=\exp\left[i\tilde{z}^*\left(\varphi_s^t\theta_s+\psi_s^t\right)-\frac{1}{2}\tilde{z}^*\gamma(t, s)\,\tilde{z}\right]$$

и

$$\mathsf{M}\left(\exp i\left[z^*\theta_s+\tilde{z}^*\theta_t\right]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)=$$
$$=\exp\left[i\left(\tilde{z}^*\psi_s^t\right)-\frac{1}{2}\tilde{z}^*\gamma(t, s)\,\tilde{z}\right]\mathsf{M}\left(\exp i\left[z^*\theta_s+\tilde{z}^*\varphi_s^t\theta_s\right]\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right). \quad (13.112)$$

Но условное распределение $\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant\alpha\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$ является гауссовским (теорема 13.6). Поэтому из (13.112) следует, что таковым будет и распределение $\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant\alpha,\ \theta_t\leqslant\beta\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$, что вместе с гауссовостью распределения $\mathsf{P}\left(\theta_t\leqslant\beta\,|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$ (см. замечание к теореме 13.3) доказывает нормальность апостериорного распределения $\Pi_{\alpha\beta}(s, t)=\mathsf{P}\left(\theta_s\leqslant\alpha\,|\,\mathscr{F}_t^\xi,\ \theta_t=\beta\right)$.

6. Метод, примененный для доказательства теоремы 13.9, позволяет завершить доказательство теоремы 13.3.

Доказательство теоремы 13.3. Имеем

$$\mathsf{M}\left(\exp i\left[\sum_{s=0}^{t} z_s^*\theta_s\right]\Big|\mathcal{F}_t^\xi\right)=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\left(\exp i\left[\sum_{s=0}^{t-1} z_s^*\theta_s\right]\right)\mathsf{M}\left(\exp\left[iz_t^*\theta_t\right]\big|\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_0,\ \ldots,\ \theta_{t-1}\right)\big|\mathcal{F}_t^\xi\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\left(\exp i\left[\sum_{s=0}^{t-1} z_s^*\theta_s\right]\right)\mathsf{M}\left(\exp\left[iz^*\theta_t\right]\big|\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_{t-1}\right)\big|\mathcal{F}_t^\xi\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\exp i\left[\sum_{s=0}^{t-2} z_s^*\theta_s+z_{t-1}^*\theta_{t-1}+z_t^*\left(\varphi_{t-1}^t\theta_{t-1}+\psi_{t-1}^t\right)\right]\Big|\mathcal{F}_t^\xi\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}z_t^*\gamma(t,\ t-1)\,z_t\right\}=\exp\left\{i\left[z_t^*\psi_{t-1}^t\right]-\frac{1}{2}z_t^*\gamma(t,\ t-1)\,z_t\right\}\times$$
$$\times\mathsf{M}\left\{\left(\exp i\left[\sum_{s=0}^{t-2} z_s^*\theta_s\right]\right)\mathsf{M}\left[\exp i\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)^*\theta_{t-1}\,\big|\,\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_{t-2}\right]\big|\mathcal{F}_t^\xi\right\}. \tag{13.113}$$

Распределение $\mathsf{P}(\theta_{t-1}\leqslant\beta\,|\,\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_{t-2})$ нормально (см. замечание к теореме 13.6), причем его апостериорное среднее линейно зависит от θ_{t-2}, а ковариация от θ_{t-2} не зависит вовсе, поскольку для них справедливы уравнения, аналогичные уравнениям (13.95), (13.96). Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{\exp i\left[z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right]\theta_{t-1}\,\big|\,\mathcal{F}_t^\xi,\ \theta_{t-2}\right\}=$$
$$=\exp\left[i\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)\left(a(t-1,\ t-2)\,\theta_{t-2}+b(t-1,\ t-2)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)^*c(t-1,\ t-2)\left(z_{t-1}+(\varphi_t^{t-1})^*z_t\right)\right], \tag{13.114}$$

где $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — некоторые матричные функции (конкретный вид которых сейчас не важен), зависящие только от времени и ξ_0^t. Отсюда следует, что в показатель экспоненты правой части (13.114) θ_{t-2} входит линейно, а переменные z_t, z_{t-1} — квадратичным образом.

Таким образом,

$$\mathsf{M}\left[\exp\left(i\sum_{s=0}^{t} z_s^*\theta_s\right)\Big|\mathcal{F}_t^\xi\right]=$$
$$=\exp\left\{i\left[z_t^*\psi_{t-1}^t+\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)^*b(t-1,\ t-2)\right]-\right.$$
$$-\frac{1}{2}z_t^*\gamma(t,\ t-1)\,z_t-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^*)^*z_t\right)^*c(t-1,\ t-2)\left(z_{t-1}-(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)\right\}\times$$
$$\times\mathsf{M}\left(\exp i\left[\sum_{s=0}^{t-3} z_s^*\theta_s+\left\{z_{t-2}+\left(z_{t-1}+(\varphi_{t-1}^t)^*z_t\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\,a(t-1,\ t-2)\,\theta_{t-2}\right\}\right]\big|\mathcal{F}_t^\xi\right). \tag{13.115}$$

Продолжая указанный выше способ «отщепления» переменных, мы видим, что характеристическая функция

$$\mathsf{M}\left[\exp\left(i\sum_{s=0}^{t} z_s^*\theta_s\right)\Big|\mathcal{F}_t^\xi\right]$$

имеет вид экспоненты от неотрицательно определенной квадратичной формы переменных $z_0, \ldots, z_t$, что и доказывает условную гауссовость последовательности (θ, ξ), управляемой уравнениями (13.46), (13.47).

7. Продолжим изучение интерполяционной задачи, рассмотренной в п. 5.

Теорема 13.10. *Если условное распределение* $\Pi_\alpha(s) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant \alpha \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ *нормально, то параметры* $\tilde{m}_\beta(s, t)$ *и* $\tilde{\gamma}_\beta(s, t)$ *распределения* $\Pi_{\alpha,\beta}(s, t) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant \alpha \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = \beta)$ *при всех* $t > s$ *определяются из соотношений* (ср. с (12.109), (12.110))

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m(s, t) + \gamma(s, t)(\varphi_s^t)^* \gamma_t^+ (\beta - m_t), \tag{13.116}$$

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \gamma(s, t) - \gamma(s, t)(\varphi_s^t)^* \gamma_t^+ \varphi_s^t \gamma(s, t) \tag{13.117}$$

с $\tilde{m}_\beta(s, s) = \beta$, $\tilde{\gamma}_\beta(s, s) = 0$.

Доказательство. Условное распределение $\mathsf{P}(\theta_s \leqslant \alpha, \theta_t \leqslant \beta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ нормально. Поэтому согласно замечанию к теореме о нормальной корреляции

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_t = \beta) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi) + d_{12}d_{22}^+(\beta - \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)) \tag{13.118}$$

и

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = d_{11} - d_{12}d_{22}^+d_{12}^*, \tag{13.119}$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \gamma(s, t), \\ d_{12} &= \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi), \\ d_{22} &= \operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi). \end{aligned} \tag{13.120}$$

Согласно (13.100) и лемме 13.5

$$\mathsf{M}[(\theta_t - m_t)^* \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_s] = \\ = \theta_s^*(\varphi_s^t)^* + (\psi_s^t)^* - (m^*(s, t)(\varphi_s^t)^* + (\psi_s^t)^*) = (\theta_s - m(s, t))^*(\varphi_s^t)^*.$$

Поэтому

$$d_{12} = \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi) = \mathsf{M}[(\theta_s - m(s, t))(\theta_t - m_t)^* \mid \mathcal{F}_t^\xi] = \\ = \mathsf{M}\{(\theta_s - m(s, t))\mathsf{M}[(\theta_t - m_t)^* \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_s] \mid \mathcal{F}_t^\xi\} = \\ = d_{11}(\varphi_s^t)^* = \gamma(s, t)(\varphi_s^t)^*. \tag{13.121}$$

Из (13.118)—(13.121) получаем требуемые представления (13.116), (13.117).

Замечание. Из (13.117) следует, что ковариация $\tilde{\gamma}_\beta(s, t)$ не зависит от β.

8. Займемся теперь выводом обратных уравнений интерполяции (по s при фиксированном t) для $m(s, t)$, $\gamma(s, t)$ и $\tilde{m}_\beta(s, t)$, $\tilde{\gamma}_\beta(s, t)$.

Теорема 13.11. *Пусть выполнены предположения* (I) — (IV). *Тогда моменты* $\tilde{m}_\beta(s, t)$ *и* $\tilde{\gamma}_\beta(s, t)$ *удовлетворяют уравнениям* (*по* $s < t$)

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m(s, s+1) + \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ [\tilde{m}_\beta(s+1, t) - m_{s+1}], \tag{13.122}$$

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \tilde{\gamma}_\beta(s, s+1) + \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ \tilde{\gamma}_\beta(s+1, t) \times \times \gamma_{s+1}^+ \varphi_s^{s+1} \gamma(s, s+1) \tag{13.123}$$

с $\tilde{m}_\beta(t, t) = \beta$, $\tilde{\gamma}_\beta(t, t) = 0$.

Доказательство. Из (13.116), (13.117) получаем

$$\tilde{m}_\beta(s, s+1) = m(s, s+1) + \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ (\beta - m_{s+1}), \tag{13.124}$$

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, s+1) = \gamma(s, s+1) - \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ \varphi_s^{s+1} \gamma(s, s+1). \tag{13.125}$$

Покажем, что для процесса (θ, ξ), управляемого уравнениями (13.46), (13.47), для всех $s < u \leqslant t$

$$\mathsf{P}(\theta_s \leqslant \alpha \mid \mathcal{F}_t^\xi, \theta_u, \ldots, \theta_t) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant a \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u). \tag{13.126}$$

Для этого рассмотрим произвольные измеримые ограниченные функции $f(\theta_s)$, $\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)$, $g_0^u(\xi)$, $\lambda(\theta_u)$ соответственно от θ_s, $(\theta_{u+1}, \ldots, \theta_t, \xi_{u+1}, \ldots, \xi_t)$, $(\xi_0, \ldots, \xi_u)$, θ_u и заметим, что при $s < u$

$$\mathsf{M}\{\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_s, \ldots, \theta_u\} = \mathsf{M}\{\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\{\lambda(\theta_u) g_0^u(\xi) \mathsf{M}[f(\theta_s)\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u]\} &= \\
= \mathsf{M}\{\lambda(\theta_u) g_0^u(\xi) f(\theta_s)\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)\} &= \\
= \mathsf{M}\{\lambda(\theta_u) g_0^u(\xi) f(\theta_s) \mathsf{M}[\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_s, \ldots, \theta_u]\} &= \\
= \mathsf{M}\{\lambda(\theta_u) g_0^u(\xi) f(\theta_s) \mathsf{M}[\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u]\} &= \\
= \mathsf{M}\{\lambda(\theta_u) g_0^u(\xi) \mathsf{M}[f(\theta_s) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u] \mathsf{M}[\chi_{u+1}^t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_u^\xi, \theta_u]\}&.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности функций $\lambda(\theta_s)$ и $g_0^u(\xi)$

$$\mathsf{M}\left[f(\theta_s)\,|\,\mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\right]\mathsf{M}\left[\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)\,|\,\mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\right]=\mathsf{M}\left[f(\theta_s)\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)\,|\,\mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left[f(\theta_s)\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_u, \ldots, \theta_t\right]\big|\,\mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\right\}=$$
$$=\mathsf{M}\left\{\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)\,\mathsf{M}\left[f(\theta_s)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_u, \ldots, \theta_t\right]\big|\,\mathcal{F}_u^\xi, \theta_u\right\}.$$

Из-за произвольности $\chi_{u+1}^t(\theta, \xi)$ отсюда следует требуемое равенство (13.126).

Принимая во внимание (13.126), находим

$$\Pi_{\alpha\beta}(s, t)=\mathsf{M}\left[\Pi_{\alpha,\,\theta_{s+1}}(s, s+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]. \tag{13.127}$$

Из этой формулы вытекает

$$\tilde{m}_\beta(s, t)=\mathsf{M}\left[\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right],$$

что вместе с (13.114) приводит к уравнению (13.122).

Воспользуемся следующей известной формулой для подсчета условных ковариаций: если ξ, $\tilde{\xi}$ — случайные векторы, $\mathsf{M}\xi^*\xi<\infty$ и $\mathcal{G}$ — некоторая σ-алгебра, то

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi\,|\,\mathcal{G})=\mathsf{M}\left[\operatorname{cov}(\xi, \xi\,|\,\mathcal{G}, \tilde{\xi})\,|\,\mathcal{G}\right]+$$
$$+\operatorname{cov}\left[\mathsf{M}(\xi\,|\,\mathcal{G}, \tilde{\xi}), \mathsf{M}(\xi\,|\,\mathcal{G}, \tilde{\xi})\,|\,\mathcal{G}\right]. \tag{13.128}$$

Согласно этой формуле и равенству (13.127)

$$\tilde{\gamma}_\beta(s, t)=\operatorname{cov}\left(\theta_s, \theta_s\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right)=$$
$$=\mathsf{M}\left[\operatorname{cov}\left(\theta_s, \theta_s\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t, \theta_{s+1}\right)\big|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]+$$
$$+\operatorname{cov}\left[\mathsf{M}\left(\theta_s\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t, \theta_{s+1}\right), \mathsf{M}\left(\theta_s\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t, \theta_{s+1}\right)\big|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\operatorname{cov}\left(\theta_s, \theta_s\,|\,\mathcal{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}\right)\big|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]+$$
$$+\operatorname{cov}\left[\mathsf{M}\left(\theta_s\,|\,\mathcal{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}\right), \mathsf{M}\left(\theta_s\,|\,\mathcal{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}\right)\big|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]=$$
$$=\mathsf{M}\left[\tilde{\gamma}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]+$$
$$+\operatorname{cov}\left[\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1), \tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]=$$
$$=\tilde{\gamma}_\beta(s, s+1)+\mathsf{M}\left[\left(\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)-\tilde{m}_\beta(s, t)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)-\tilde{m}_\beta(s, t)\right)^*\big|\,\mathcal{F}_t^\xi, \theta_t=\beta\right]. \tag{13.129}$$

Но из (13.122) и (13.124) вытекает

$$\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1)-\tilde{m}_\beta(s, t)=$$
$$=\gamma(s, s+1)\left(\varphi_s^{s+1}\right)^*\gamma_{s+1}^+\left[\theta_{s+1}-\tilde{m}_\beta(s+1, t)\right], \tag{13.130}$$

что вместе с (13.129) приводит к искомому уравнению (13.123).

Т е о р е м а 13.12. *Пусть выполнены предположения* (I) — (IV). *Тогда моменты* $m(s, t)$ *и* $\gamma(s, t)$ *условного распределения*

$\Pi_\alpha(s, t) = \mathsf{P}(\theta_s \leqslant \alpha \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ *удовлетворяют по* $s < t$ (*обратным*) *уравнениям*

$$m(s,t) = m(s, s+1) + \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ [m(s+1, t) - m_{s+1}], \tag{13.131}$$

$$\gamma(s, t) = \tilde{\gamma}(s, s+1) + \\ + \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ \gamma(s+1, t) \gamma_{s+1}^+ \varphi_s^{s+1} \gamma(s, s+1) \tag{13.132}$$

с $m(t, t) = m_t$, $\gamma(t, t) = \gamma_t$, $\tilde{\gamma}(s, s+1) \equiv \tilde{\gamma}_\beta(s, s+1)$.

Доказательство. Уравнение (13.131) непосредственно выводится из (13.122). Для вывода (13.132) воспользуемся представлениями (13.127), (13.128). Получим

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &= \operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \\ &= \mathsf{M}[\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi, \theta_{s+1}) \mid \mathscr{F}_t^\xi] + \\ &+ \operatorname{cov}[\mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi, \theta_{s+1}), \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_t^\xi, \theta_{s+1}) \mid \mathscr{F}_t^\xi] = \\ &= \mathsf{M}[\operatorname{cov}(\theta_s, \theta_s \mid \mathscr{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}) \mid \mathscr{F}_t^\xi] + \\ &+ \operatorname{cov}[\mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}), \mathsf{M}(\theta_s \mid \mathscr{F}_{s+1}^\xi, \theta_{s+1}) \mid \mathscr{F}_t^\xi] = \\ &= \tilde{\gamma}(s, s+1) + \mathsf{M}\{[\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1) - m(s, t)] \times \\ &\qquad \times [\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1) - m(s, t)]^* \mid \mathscr{F}_t^\xi\}. \end{aligned} \tag{13.133}$$

Но согласно (13.122) и (13.131)

$$\tilde{m}_{\theta_{s+1}}(s, s+1) - m(s,t) = \gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^+ [\theta_{s+1} - m(s+1, t)],$$

что вместе с (13.133) дает уравнение (13.132).

§ 4. Рекуррентные уравнения оптимальной экстраполяции

1. Под экстраполяцией понимается оценивание векторов θ_t, ξ_t по наблюдениям $\xi_0^s = \{\xi_0, \ldots, \xi_s\}$, где $t > s$. Как и в случае непрерывного времени (§ 5 гл. 12), уравнения экстраполяции будут выведены только в двух частных случаях, что вызвано тем, что условные распределения $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a, \xi_t \leqslant b \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ уже не являются, вообще говоря, гауссовскими.

Прежде чем переходить к формулировкам теорем, поясним, каким образом можно выделить те случаи, в которых удается построить экстраполяционные оценки.

В силу (13.56) и (13.78)

$$m_{t+1} = [a_0(t, \xi) + a_1(t, \xi) m_t] + [(b \circ B)(t, \xi) + a_1(t, \xi) \gamma_t A_1^*(t, \xi)] \times \\ \times [(B \circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^*(t, \xi)]^+ \times \\ \times [(B \circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^*(t, \xi)]^{1/2} \bar{\varepsilon}(t+1), \quad (13.134)$$

$$\varepsilon_{t+1} = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi) m_t] + \\ + [(B \circ B)(t, \xi) + A_1(t, \xi) \gamma_t A_1^*(t, \xi)]^{1/2} \bar{\varepsilon}(t+1). \quad (13.135)$$

Обозначим

$$n_1(t, s) = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_s^\xi), \qquad n_2(t, s) = \mathsf{M}(\xi_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$$

оптимальные (в среднеквадратическом смысле) оценки θ_t и ξ_t по $\xi_0^s = \{\xi_0, \ldots, \xi_s\}$. Поскольку $n_1(t, s) = \mathsf{M}[\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi) \mid \mathcal{F}_s^\xi] = \mathsf{M}(m_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ и $\mathsf{M}(\bar{\varepsilon}(t+1) \mid \mathcal{F}_s^\xi) = 0$ для всех $t+1 > s$, то уравнения для $n_1(t, s)$ и $n_2(t, s)$ можно попытаться отыскать, беря $\mathsf{M}(\cdot \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ от обеих частей в (13.134), (13.135).

Нетрудно заметить, что на этом пути совместное отыскание $n_1(t, s)$ и $n_2(t, s)$ становится возможным, если предположить, что

$$a_0(t, \xi) = a_0(t) + a_2(t)\xi_t, \qquad a_1(t, \xi) = a_1(t). \quad (13.136)$$

$$A_0(t, \xi) = A_0(t) + A_2(t)\xi_t, \qquad A_1(t, \xi) = A_1(t), \quad (13.137)$$

где матричные функции $a_i(t)$, $A_i(t)$, $i = 1, 2$, и векторы $a_0(t)$, $A_0(t)$ зависят лишь от времени.

Если же нас интересует лишь оценка значений θ_t, то отыскание $n_1(t, s)$ становится возможным, если потребовать выполнения (13.136) с $a_2(t) \equiv 0$.

2. Теорема 13.13. *Пусть выполнены предположения* (I) — (IV) *и* (13.136), (13.137). *Тогда моменты* $n_1(t, s)$ *и* $n_2(t, s)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$n_1(t+1, s) = a_0(t) + a_1(t) n_1(t, s) + a_2(t) n_2(t, s), \quad (13.138)$$

$$n_2(t+1, s) = A_0(t) + A_1(t) n_1(t, s) + A_2(t) n_2(t, s) \quad (13.139)$$

с $n_1(s, s) = m_s$, $n_2(s, s) = \xi_s$.

Если выполнено (13.136) *и к тому же* $a_2(t) \equiv 0$, *то*

$$n_1(t+1, s) = a_0(t) + a_1(t) n_1(t, s), \quad n_1(s, s) = m_s. \quad (13.140)$$

Доказательство получается непосредственно усреднением обеих частей (13.134), (13.135).

Рассмотрим теперь обратные уравнения для $n_1(t, s)$ и $n_2(t, s)$.

Теорема 13.14. *Пусть выполнены условия* (I) — (IV) *и предположения* (13.136), (13.137).

Тогда справедливы уравнения

$$\begin{pmatrix} n_1(t, s+1) \\ n_2(t, s+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1(t, s) \\ n_2(t, s) \end{pmatrix} + \\ + \Phi_{s+1}^{t-1} \begin{pmatrix} D_1(s, \xi) \cdot D_2^+(s, \xi) \\ E \end{pmatrix} [\xi_{s+1} - A_0(s) - A_1(s) m_s - A_2(s) \xi_s], \tag{13.141}$$

где

$$D_1(s, \xi) = (b \circ B)(s, \xi) + a_1(s, \xi) \gamma_s A_1^*(s, \xi),$$
$$D_2(s, \xi) = (B \circ B)(s, \xi) + A_1(s, \xi) \gamma_s A_1^*(s, \xi),$$

$E = E_{(l \times l)}$, *матрица* Φ_s^t *определяется из рекуррентных уравнений*

$$\Phi_s^t = \begin{pmatrix} a_1(t-1) & a_2(t-1) \\ A_1(t-1) & A_2(t-1) \end{pmatrix} \Phi_s^{t-1}, \qquad \Phi_s^s = E_{(k+l) \times (k \times l)}, \tag{13.142}$$

а

$$\begin{pmatrix} n_1(t, 0) \\ n_2(t, 0) \end{pmatrix} = \Phi_0^t \begin{pmatrix} m_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix} + \sum_{u=0}^{t-1} \Phi_u^{t-1} \begin{pmatrix} a_0(u) \\ A_0(u) \end{pmatrix}. \tag{13.143}$$

Если выполнено (13.136) *и к тому же* $a_2(t) \equiv 0$, *то*

$$n_1(t, s+1) = n_1(t, s) + \psi_{s+1}^{t-1} [(b \circ B)(s, \xi) + a_1(s) \gamma_s A_1^*(s, \xi)] \times \\ \times [(B \circ B)(s, \xi) + A_1(s, \xi) \gamma_s A_1^*(s, \xi)]^+ \times \\ \times [\xi_{s+1} - A_0(s, \xi) - A_1(s, \xi) m_s], \tag{13.144}$$

где матрица ψ_s^t *определяется из уравнений*

$$\psi_s^t = a_1(t-1) \psi_s^{t-1}, \qquad \psi_s^s = E_{(k \times k)}, \tag{13.145}$$

а

$$n_1(t, 0) = \psi_0^t m_0 + \sum_{u=0}^{t-1} \psi_u^{t-1} a_0(u). \tag{13.146}$$

Доказательство. По индукции из (13.134), (13.135) получаем

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \Phi_0^t \begin{pmatrix} m_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix} + \sum_{u=0}^{t-1} \Phi_u^{t-1} \begin{pmatrix} a_0(u) \\ A_0(u) \end{pmatrix} + \\ + \sum_{u=0}^{t-1} \Phi_u^{t-1} \begin{pmatrix} D_1(u, \xi) D_2^+(u, \xi) D_2^{1/2}(u, \xi) \\ D_2^{1/2}(u, \xi) \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}(u+1). \tag{13.147}$$

Возьмем от обеих частей в (13.147) условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\cdot \mid \mathscr{F}^{\xi}_{s+1})$. Тогда, учитывая, что $\mathsf{M}\left[\bar{\varepsilon}(u+1) \mid \mathscr{F}^{\xi}_{s+1}\right]=0$, $u > s$, из (13.147) легко находим

$$\begin{pmatrix} n_1(t, s+1) \\ n_2(t, s+1) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} n_1(t, s) \\ n_2(t, s) \end{pmatrix} + \Phi^t_{s+1} \begin{pmatrix} D_1(s, \xi) D_2^+(s, \xi) D_2^{1/2}(s, \xi) \\ D_2^{1/2}(s, \xi) \end{pmatrix} \bar{\varepsilon}(s+1),$$

что вместе с (13.135) приводит к системе уравнений (13.141).

Уравнения (13.144) выводятся аналогичным образом.

§ 5. Примеры

1. Приведем ряд примеров, иллюстрирующих возможности использования выведенных выше уравнений фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

Пример 1 (оценка параметров). Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — гауссовский вектор с $\mathsf{M}\theta = m$ и $\operatorname{cov}(\theta, \theta) = \gamma$. Требуется оценить θ по наблюдению за l-мерным процессом ξ_t, $t = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющим рекуррентным уравнениям

$$\xi_{t+1} = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) \tag{13.148}$$

с $\xi_0 = 0$.

В предположениях *) (I) — (IV) для $m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \mathscr{F}^{\xi}_t)$ и $\gamma_t = \operatorname{cov}(\theta, \theta \mid \mathscr{F}^{\xi}_t)$ из (13.56), (13.57) получаем рекуррентные уравнения

$$m_{t+1} = m_t + \gamma_t A_1^*(t, \xi)\left[(B_1B_1^*)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)\right]^+ \times \\ \times [\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi) m_t], \tag{13.149}$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \gamma_t A_1^*(t, \xi)\left[(B_1B_1^*)(t, \xi) + A_1(t, \xi)\gamma_t A_1^*(t, \xi)\right]^+ A_1(t, \xi)\gamma_t \tag{13.150}$$

с $m_0 = m$, $\gamma_0 = \gamma$.

Теорема 13.15. *Если матрицы* $(B_1B_1)^*(t, \xi)$ *невырождены* (P-п. н.), $t = 0, 1, \ldots$, *то решения уравнений* (13.149), (13.150)

*) Предположение (II) можно заменить в данном случае условием $\mathsf{M}\operatorname{Sp} A_1(t, \xi) A_1^*(t, \xi) < \infty$.

задаются формулами *)

$$m_{t+1}=\left[E+\gamma\sum_{s=0}^{t}A_1^*(s,\xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s,\xi)A_1^*(s,\xi)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[m+\gamma\sum_{s=0}^{t}A_1^*(s,\xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s,\xi)(\xi_{s+1}-A_0(s,\xi))\right],\qquad(13.151)$$

$$\gamma_{t+1}=\left[E+\gamma\sum_{s=0}^{t}A_1^*(s,\xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s,\xi)A_1(s,\xi)\right]^{-1}\gamma.\qquad(13.152)$$

Доказательство. По теореме 13.3 условное распределение $\mathsf{P}\{\theta\leqslant a\mid\mathcal{F}_t^\xi\}$ является гауссовским (P-п. н.) с параметрами (m_t, γ_t).

Предположим, что матрица γ_t является положительно определенной. Тогда у условного распределения $\mathsf{P}\{\theta\leqslant a\mid\mathcal{F}_t^\xi\}$ существует плотность

$$f_\theta(a\mid\xi_0^t)=\frac{d\mathsf{P}\{\theta\leqslant a\mid\mathcal{F}_t^\xi\}}{da}.$$

Условное распределение $\mathsf{P}\{\xi_{t+1}\leqslant b\mid\mathcal{F}_t^\xi,\theta\}$ также (P-п. н.) является гауссовским с параметрами $\{(A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)\theta),\ (B_1B_1^*)(t,\xi)\}$. Поскольку матрицы $(B_1B_1^*)(t,\xi)$, $t=0, 1, \ldots$, невырождены (P-п. н.), то у распределения $\mathsf{P}\{\xi_{t+1}\leqslant b\mid\mathcal{F}_t^\xi,\theta\}$ существует плотность

$$f_{\xi_{t+1}}(b\mid\xi_0^t,\theta)=\frac{d\mathsf{P}\{\xi_{t+1}\leqslant b\mid\mathcal{F}_t^\xi,\theta\}}{db}.$$

Но тогда согласно формуле Байеса существует плотность

$$f_\theta(a\mid\xi_0^{t+1})=\frac{d\mathsf{P}\{\theta\leqslant a\mid\mathcal{F}_{t+1}^\xi\}}{da},$$

задаваемая формулой

$$f_\theta(a\mid\xi_0^t)=\frac{f_\theta(a\mid\xi_0^t)\,f_{\xi_{t+1}}(\xi_{t+1}\mid\xi_0^t,a)}{\int_{R^k}f_{\xi_{t+1}}(\xi_{t+1}\mid\xi_0^t,x)\,f_\theta(x\mid\xi_0^t)\,dx}\quad(\mathsf{P}\text{-п. н.}).\qquad(13.153)$$

Обозначим

$$g_1(t+1,\xi)=(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det\gamma_{t+1}},\qquad(13.154)$$

$$g_2(t+1,\xi)=$$
$$=(2\pi)^{\frac{k+1}{2}}\sqrt{\det\gamma_t\cdot\det(B_1B_1^*)(t,\xi)}\int_{R_k}f_{\xi_{t+1}}(\xi_{t+1}\mid\xi_0^t,x)\,f_\theta(x\mid\xi_0^t)\,dx.\qquad(13.155)$$

*) Ср. с теоремами 12.2 и 12.8.

По теореме 13.3 плотность $f_\theta(a\,|\,\xi_0^{t+1})$ является (P-п. н.) гауссовский с параметрами (m_{t+1}, γ_{t+1}), где γ_{t+1} — положительно определенная матрица. Учитывая это и обозначения (13.154), (13.155), находим из (13.153), что (P-п. н.)

$$[g_1(t+1, \xi)]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a-m_{t+1})^* \gamma_{t+1}^{-1}(a-m_{t+1})\right\} =$$
$$= [g_2(t+1, \xi)]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a-m_t)^* \gamma_t^{-1}(a-m_t) - \right.$$
$$-\frac{1}{2}(\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi)\,a)^* (B_1B_1^*)^{-1}(t, \xi) \times$$
$$\left. \times (\xi_{t+1} - A_0(t, \xi) - A_1(t, \xi)\,a)\right\}. \qquad (13.156)$$

Приравнивая теперь соответственно квадратичные и линейные формы по a в левой и правой частях равенства (13.156), получаем, в силу произвольности векторов a, рекуррентные уравнения

$$\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_t^{-1} + A_1^*(t, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(t, \xi)\,A_1(t, \xi), \qquad (13.157)$$

$$\gamma_{t+1}^{-1} m_{t+1} = \gamma_t^{-1} m_t + A_1^*(t, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(t, \xi)\,[\xi_{t+1} - A_0(t, \xi)]. \qquad (13.158)$$

Если матрица $\gamma_0 = \gamma$ положительно определенная, то по индукции убеждаемся, что рекуррентные уравнения (13.157) и (13.158) справедливы при всех t.

Поэтому из (13.157), (13.158) в случае невырожденной матрицы γ следуют представления (13.151), (13.152) для m_{t+1}, γ_{t+1}, $t \geqslant 0$.

Если же матрица γ вырождена, то, положив $\gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$, найдем γ_{t+1}^ε, m_{t+1}^ε по формулам (13.151), (13.152) с заменой γ на $\gamma + \varepsilon E$. В частности,

$$\gamma_{t+1}^\varepsilon = \left\{E + (\gamma + \varepsilon E)\sum_{s=0}^{t} A_1^*(s, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s, \xi)\,A_1(s, \xi)\right\}^{-1} [\gamma + \varepsilon E].$$

После предельного перехода $\varepsilon \downarrow 0$ получаем требуемые представления для m_{t+1}, γ_{t+1} для любой симметрической неотрицательно определенной матрицы γ.

Замечание. Пусть $m_t^{(n)}$ и $\gamma_t^{(n)}$ — параметры апостериорных распределений $\mathsf{P}(\theta \leqslant a\,|\,\mathcal{F}_t^\xi)$, отвечающих априорным распределениям $\mathsf{P}(\theta \leqslant a) \sim N(m^{(n)}, \gamma^{(n)})$.

Пусть $0 < \gamma^{(n)}$, $\operatorname{Sp}\gamma^{(n)} < \infty$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}(\gamma^{(n)})^{-1} = 0$, а матрицы $\sum\limits_{s=0}^{t} A_1^*(s, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s, \xi)\,A_1(s, \xi)$ не вырождены (P-п. н.), то нетрудно доказать, что существуют

$$\bar{m}_t = \lim_{n\to\infty} m_t^{(n)}, \qquad \bar{\gamma}_t = \lim_{n\to\infty} \gamma_t^{(n)}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{t+1} &= \left[\sum_{s=0}^{t} A_1^*(s, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s, \xi) A_1(s, \xi)\right]^{-1}, \\ \bar{m}_{t+1} &= \bar{\gamma}_{t+1}\left[\sum_{s=0}^{t} A_1^*(s, \xi)(B_1B_1^*)^{-1}(s, \xi)(s, \xi)(\xi_{s+1} - A_0(s, \xi))\right]. \end{aligned} \tag{13.159}$$

Отметим, что оценка (13.159) совпадает с *оценкой максимального правдоподобия* для вектора θ по наблюдениям $\xi_0^{t+1} = \{\xi_0, \ldots, \xi_{t+1}\}$.

2. Пример 2 (интерполяция гауссовской марковской цепи). Пусть $\theta_t = (\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t))$, $t = 0, 1, \ldots,$ — марковская цепь, определяемая рекуррентными уравнениями

$$\theta_{t+1} = a_0(t) + a_1(t)\theta_t + b(t)\varepsilon_1(t+1), \tag{13.160}$$

где $a_0(t)$, $a_1(t)$, $b(t)$ зависят лишь от t. Случайный вектор $\theta_0 \sim N(m, \gamma)$.

Рассмотрим задачу оценивания величин θ_s в предположении, что $\theta_t = \beta$, $s < t$.

Пусть

$$\begin{gathered} \tilde{m}_\beta(s, t) = \mathsf{M}(\theta_s \mid \theta_t = \beta), \\ \tilde{\gamma}(s, t) \equiv \tilde{\gamma}_\beta(s, t) = \mathsf{M}[(\theta_s - \tilde{m}_\beta(s, t))(\theta_s - \tilde{m}_\beta(s, t))^* \mid \theta_t = \beta], \\ m_t = \mathsf{M}\theta_t, \qquad \gamma_t = \operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t). \end{gathered}$$

Тогда согласно теоремам 13.4 и 13.10

$$m_{t+1} = a_0(t) + a_1(t) m_t, \qquad \gamma_{t+1} = a_1(t)\gamma_t a_1^*(t) + b(t) b^*(t) \tag{13.161}$$

и

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m_t + \gamma_t(\varphi_s^t)^* \gamma_t^+ (\beta - m_t), \qquad \tilde{\gamma}(s, t) = \gamma_s - \gamma_s(\varphi_s^t)^* \gamma_t^+ \varphi_s^t \gamma_s, \tag{13.162}$$

где $\varphi_s^t = a_1(t-1) \ldots a_1(s)$. В частности, если $\theta_{t+1} = \theta_t + \varepsilon_1(t+1)$, то

$$\tilde{m}_\beta(s, t) = m + \frac{s+\gamma}{t+\gamma}(\beta - m), \qquad \tilde{\gamma}(s, t) = (s+\gamma)\left[1 - \frac{s+\gamma}{t+\gamma}\right]. \tag{13.163}$$

Пример 3 (интерполяция с фиксированным запаздыванием). Рассмотрим задачу оценивания величин θ_s по наблюдениям $\xi_0^{s+h} = \{\xi_0, \ldots, \xi_{s+h}\}$, где h — фиксированная величина. Обозначим $m_h(s) = m(s, s+h)$, $\gamma_h(s) = \gamma(s, s+h)$ и предположим, что при всех $s = 0, 1, \ldots$ матрицы $\gamma(s, s+1)(\varphi_s^{s+1})^* \gamma_{s+1}^{-1}$ невырождены.

Тогда из прямого уравнения (13.95) получим

$$m_h(s+1) = m(s+1,\ s+h) + \gamma(s+1,\ s+h)\left(\varphi_{s+1}^{s+h}\right)^* A_1^*(s+h, \xi) \times \\ \times \left[(B \circ B)(s+h,\ \xi) + A_1(s+h,\ \xi)\gamma_{s+h}A_1^*(s+h,\ \xi)\right]^+ \times \\ \times [\xi_{s+h+1} - A_0(s+h,\ \xi) - A_1(s+h,\ \xi)\, m_{s+h}]. \quad (13.164)$$

Из обратного уравнения (13.131) в предположении невырожденности матриц $\gamma(s,\ s+1)\left(\varphi_s^{s+h}\right)^* \gamma_{s+1}^{-1}$ находим

$$m(s+1,\ s+h) = \\ = m_{s+1} + \left[\gamma(s,\ s+1)\left(\varphi_s^{s+1}\right)^* \gamma_{s+1}^{-1}\right]^{-1} \left[m_h(s) - m(s,\ s+1)\right], \quad (13.165)$$

что вместе с (13.164) дает уравнение для $m_h(s)$:

$$m_h(s+1) = m_{s+1} + \left[\gamma(s,\ s+1)\left(\varphi_s^{s+1}\right)^* \gamma_{s+1}^{-1}\right]^{-1} \left[m_h(s) - m(s, s+1)\right] + \\ + \gamma(s+1,\ s+h)\left(\varphi_{s+1}^{s+h}\right)^* A_1^*(s+h,\ \xi)\left[(B \circ B)(s+h,\ \xi) + \right. \\ \left. + A_1(s+h,\ \xi)\gamma_{s+h}A_1^*(s+h,\ \xi)\right]^+ \times \\ \times [\xi_{s+h+1} - A_0(s+h,\ \xi) - A_1(s+h,\ \xi)\, m_{s+h}]. \quad (13.166)$$

Аналогично из прямого уравнения (13.96) для $\gamma_h(s+1) = \gamma(s+1,\ s+h+1)$ находим, что

$$\gamma_h(s+1) = \gamma(s+1,\ s+h) - \gamma(s+1,\ s+h)\left(\varphi_{s+1}^{s+h}\right)^* A_1^*(s+h,\ \xi) \times \\ \times \left[(B \circ B)(s+h,\ \xi) + A_1(s+h,\ \xi)\gamma_{s+h}A_1^*(s+h,\ \xi)\right]^+ \times \\ \times A_1(s,\ h,\ \xi)\,\varphi_{s+1}^{s+h}\gamma(s+1,\ s+h). \quad (13.167)$$

Из обратного уравнения (13.132) получаем

$$\gamma(s+1,\ s+h) = \left[\gamma(s,\ s+1)\left(\varphi_s^{s+1}\right)^* \gamma_{s+1}^{-1}\right]^{-1} \left[\gamma_h(s) - \tilde{\gamma}(s,\ s+1)\right] \times \\ \times \left[\gamma_{s+1}^{-1}\varphi_s^{s+1}\gamma(s,\ s+1)\right]^{-1}.$$

Подставляя это выражение для $\gamma(s+1,\ s+h)$ в (13.166) и (13.167), получаем уравнения, описывающие эволюцию $m_h(s)$ и $\gamma_h(s)$. При этом $m_h(0) = m(0,\ h)$ и $\gamma_h(0) = \gamma(0,\ h)$ определяются из прямых уравнений (13.95), (13.96).

В частном случае $h = 1$

$$m_1(s+1) = m_{s+1} + \gamma_{s+1}A_1^*(s+1,\ \xi)\left[(B \circ B)(s+1,\ \xi) + \right. \\ \left. + A_1(s+1, \xi)\gamma_{s+1}A_1^*(s+1, \xi)\right]^+ \left[\xi_{s+2} - A_0(s+1, \xi) - A_1(s+1, \xi)\, m_{s+1}\right]. \\ (13.168)$$

3. Пример 4 (линейный прогноз стационарных последовательностей). Пусть $\tilde{\xi}_t$, $t=0, \pm 1, \pm 2,$ — стационарный в широком смысле процесс с $\mathsf{M}\tilde{\xi}_t \equiv 0$ и спектральной плотностью

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{|e^{i\lambda}+1|^2}{\left|e^{2i\lambda}+\frac{1}{2}e^{i\lambda}+\frac{1}{2}\right|^2}. \tag{13.169}$$

Пусть требуется построить оптимальную (в среднеквадратическом смысле) линейную оценку величины $\tilde{\xi}_t$ по $\tilde{\xi}_0^s=\{\tilde{\xi}_0, \ldots, \tilde{\xi}_s\}$, $s \leqslant t$.

Построим гауссовский процесс ξ_t, $t=0, \pm 1, \ldots,$ с $\mathsf{M}\xi_t \equiv 0$ и спектральной плотностью $f(\lambda) \equiv \tilde{f}(\lambda)$. Такой процесс может быть получен как решение уравнения

$$\xi_{t+2}+\frac{1}{2}(\xi_{t+1}+\xi_t)=\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t+1),$$

где $\varepsilon(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots,$ — последовательность гауссовских случайных величин с

$$\mathsf{M}\varepsilon(t)=0, \quad \mathsf{M}\varepsilon(t)\varepsilon(s)=\delta(t, s)=\begin{cases} 1, & t=s, \\ 0, & t \neq s. \end{cases}$$

Положим $\theta_t=\xi_{t+1}-\varepsilon(t+1)$. Тогда для (θ_t, ξ_t), $t=0, \pm 1, \ldots,$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= -\frac{1}{2}\theta_t-\frac{1}{2}\xi_t+\frac{1}{2}\varepsilon(t+1), \\ \xi_{t+1} &= \theta_t+\varepsilon(t+1). \end{aligned} \tag{13.170}$$

Согласно теореме 13.13 $n_1(t, s)=\mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ и $n_2(t, s)=\mathsf{M}(\xi_t \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ определяются из уравнений (13.138), (13.139):

$$\begin{aligned} n_1(t+1, s) &= -\frac{1}{2}n_1(t, s)-\frac{1}{2}n_2(t, s), \\ n_2(t+1, s) &= n_1(t, s), \end{aligned} \tag{13.171}$$

с $n_1(s, s)=m_s$, $n_2(s, s)=\xi_s$.

Входящее в (13.171) начальное условие $m_s=\mathsf{M}(\theta_s \mid \mathcal{F}_s^\xi)$ и γ_s определяются из уравнений (см. (13.56), (13.57))

$$m_{s+1}=-\frac{1}{2}m_s-\frac{1}{2}\xi_s+\frac{1-\gamma_s}{2(1+\gamma_s)}(\xi_{s+1}-m_s), \tag{13.172}$$

$$\gamma_{s+1}=\frac{\gamma_s}{1+\gamma_s}. \tag{13.173}$$

Покажем, что здесь $m_0=0$, $\gamma_0=1$.

Действительно, в силу стационарности процесса (θ_t, ξ_t), $t=0, \pm 1, \ldots$, параметры $d_{11}=\mathsf{M}\theta_t^2$, $d_{12}=\mathsf{M}\theta_t\xi_t$, $d_{22}=\mathsf{M}\xi_t^2$ легко находятся из следующей системы, получаемой из (13.170):

$$d_{11}=\frac{1}{4}d_{11}+\frac{1}{4}d_{22}+\frac{1}{2}d_{12}+\frac{1}{4},$$

$$d_{12}=-\frac{1}{2}d_{11}-\frac{1}{2}d_{12}+\frac{1}{2},$$

$$d_{22}=d_{11}+1.$$

А именно $d_{11}=1$, $d_{12}=0$, $d_{22}=2$, и по теореме о нормальной корреляции $m_0=0$, $\gamma_0=1$.

Возвращаясь к исходному процессу $\tilde{\xi}_t$, $t=0, \pm 1, \ldots$, находим, что оптимальный линейный прогноз определяется из (13.171)—(13.173), где в (13.172) вместо ξ_t надо подставить $\tilde{\xi}_t$ (см. лемму 14.1).

ГЛАВА 14

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ К ЗАДАЧАМ СТАТИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

§ 1. Оптимальная линейная фильтрация стационарных последовательностей с дробно-рациональным спектром

1. Цель настоящей главы — показать, как уравнения оптимальной нелинейной фильтрации, полученные для условно-гауссовских случайных последовательностей, могут быть применены к решению разнообразных задач математической статистики. В частности, в настоящем параграфе рассматривается задача линейного оценивания ненаблюдаемых компонент многомерного стационарного в широком смысле процесса (время дискретное) с дробно-рациональной спектральной плотностью по компонентам, доступным наблюдению.

Возможность использования полученных выше уравнений фильтрации в этой задаче основана на том факте (теорема 14.1), что всякая стационарная последовательность с дробно-рациональным спектром является компонентой многомерного процесса, удовлетворяющего системе рекуррентных уравнений типа (13.46), (13.47).

Более точно, пусть $\eta(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — (действительный или комплексный) стационарный в широком смысле случайный процесс, допускающий спектральное представление

$$\eta(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\frac{P_{n-1}(e^{i\lambda})}{Q_n(e^{i\lambda})}\Phi(d\lambda), \tag{14.1}$$

где $\Phi(d\lambda)$ — ортогональная (случайная) мера с

$$\mathsf{M}\Phi(d\lambda)=0, \qquad \mathsf{M}|\Phi(d\lambda)|^2=\frac{d\lambda}{2\pi},$$

$$P_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k, \quad Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z_k, \quad a_n=1, \quad a_k,\ b_k\in R^1.$$

Будем предполагать, что все корни уравнения $Q_n(z)=0$ лежат внутри единичного круга.

Из представления (14.1) следует, что процесс $\eta(t)$ имеет дробно-рациональную спектральную плотность

$$f_\eta(\lambda)=\left|\frac{P_{n-1}(e^{i\lambda})}{Q_n(e^{i\lambda})}\right|^2. \tag{14.2}$$

Построим по мере $\Phi(d\lambda)$ процесс

$$\varepsilon(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-1)}\Phi(d\lambda). \tag{14.3}$$

Ясно, что

$$\mathbf{M}\varepsilon(t)=0, \qquad \mathbf{M}|\varepsilon(t)|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{2\pi}=1$$

и

$$\mathbf{M}\varepsilon(t)\,\bar{\varepsilon}(s)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)}\frac{d\lambda}{2\pi}=\delta(t,\ s), \tag{14.4}$$

где $\delta(t,\ s)$ — символ Кронекера.

Из (14.4) следует, что последовательность величин $\varepsilon(t)$, $t=0,\ \pm 1,\ \ldots$, является последовательностью с некоррелированными значениями.

Наряду с процессом $\eta(t)$, допускающим спектральное представление (14.1), определим новые процессы $\eta_1(t),\ \ldots,\ \eta_n(t)$ по формулам

$$\eta_j(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}W_j(e^{i\lambda})\Phi(d\lambda), \qquad j=1,\ \ldots,\ n, \tag{14.5}$$

где частотные характеристики $W_j(z)$, $j=1,\ \ldots,\ n$, выбраны следующим специальным образом:

$$W_j(z)=z^{-(n-j)}W_n(z)+\sum_{k=j}^{n-1}\beta_k z^{-(k-j+1)}, \quad j=1,\ \ldots,\ n-1, \tag{14.6}$$

$$W_n(z)=-z^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_kW_{k+1}(z)+z^{-1}\beta_n \tag{14.7}$$

с

$$\beta_1=b_{n-1},\ \beta_j=b_{n-j}-\sum_{i=1}^{j-1}\beta_i a_{n-j+i}, \qquad j=2,\ \ldots,\ n. \tag{14.8}$$

Из (14.6), (14.7) следует, что

$$W_j(z) = z^{-1}[W_{j+1}(z) + \beta_j] \tag{14.9}$$

и

$$W_n(z) = z^{-1}\left[-\sum_{k=0}^{n-1} a_k W_{k+1}(z) + \beta_n\right]. \tag{14.10}$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что

$$W_n(z) = z^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(z^{-(n-k-1)}W_n(z) + \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j z^{-(j-k)}\right) + \beta_n\right], \tag{14.11}$$

и, следовательно,

$$W_n(z) = \frac{P_{n-1}^{(n)}(z)}{Q_n(z)}, \tag{14.12}$$

где $P_{n-1}^{(n)}(z)$ — полином степени не выше $n-1$.

Далее, в силу (14.9)—(14.12)

$$W_j(z) = \frac{P_{n-1}^{(j)}(z)}{Q_n(z)}, \tag{14.13}$$

где полиномы $P_{n-1}^{(j)}(z)$ имеют степень также не выше $n-1$, причем в силу (14.8)

$$P_{n-1}^{(1)}(z) \equiv P_{n-1}(z). \tag{14.14}$$

Таким образом, $\eta_1(t) = \eta(t)$.

Теорема 14.1. *Стационарный (в широком смысле) процесс* $\eta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots,$ *допускающий спектральное представление* (14.1), *является компонентой n-мерного стационарного (в широком смысле) процесса* $(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$, $\eta_1(t) = \eta(t)$, *подчиняющегося системе рекуррентных уравнений*

$$\begin{aligned} \eta_j(t+1) &= \eta_{j+1}(t) + \beta_j \varepsilon(t+1), \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ \eta_n(t+1) &= -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \eta_{j+1}(t) + \beta_n \varepsilon(t+1). \end{aligned} \tag{14.15}$$

Процесс $\varepsilon(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots,$ *допускает представление* (14.3),

$$\mathsf{M}\eta_j(s)\bar{\varepsilon}(t) = 0, \quad s < t, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{14.16}$$

а коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *задаются формулами* (14.8).

Доказательство. Заметим прежде всего, что из представлений (14.12), (14.13) следует, что все полюсы у функций $W_j(z)$ лежат внутри единичного круга.

Используя представления (14.6), (14.7) и (14.5), легко находим, что процесс $(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ удовлетворяет системе рекуррентных уравнений (14.15).

Установим теперь справедливость формулы (14.16). Пусть *)

$$Y_t = (\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)),$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_n \end{Vmatrix}. \tag{14.17}$$

Тогда в матричной записи система уравнений (14.15) допускает представление

$$Y_t = AY_{t-1} + B\varepsilon_t. \tag{14.18}$$

Пусть $t > s$. Тогда в силу (14.18) и (14.4)

$$\mathsf{M}Y_s\bar{\varepsilon}(t) = A\mathsf{M}Y_{s-1}\bar{\varepsilon}(t) = A^2\mathsf{M}Y_{s-2}\bar{\varepsilon}(t) = \ldots = A^N\mathsf{M}Y_{s-N}\bar{\varepsilon}(t),$$

причем для каждого $j = 1, \ldots, n$

$$|\mathsf{M}\eta_j(s-N)\bar{\varepsilon}(t)| \leqslant (\mathsf{M}|\eta_j(s-N)|^2)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P_{n-1}^{(j)}(e^{i\lambda})}{Q_n(e^{i\lambda})}\right|^2 \frac{d\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} < \infty.$$

Значит, для доказательства равенств (14.16) достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} A^N = 0 \tag{14.19}$$

(0 — нулевая матрица).

Собственные числа матрицы A совпадают с корнями уравнения $Q_n(z) = 0$ и поэтому лежат внутри единичного круга. Приведем матрицу A к жордановой форме:

$$A = CJC^{-1},$$

где на главной диагонали матрицы J стоят собственные числа матрицы A. Пусть $\tilde{\lambda}$ — максимальное собственное число матрицы A. Тогда, поскольку $|\tilde{\lambda}| < 1$, любой элемент матрицы J^N не превосходит по модулю величины $N|\tilde{\lambda}|^{N-1}$. Но $A^N = CJ^NC^{-1}$ и $N|\tilde{\lambda}|^{N-1} \to 0$, $N \to \infty$, что и доказывает (14.19).

Замечание 1. Если $\eta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots,$ — действительный процесс, то каждый из процессов $\varepsilon(t)$, $\eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)$ также является действительным. При этом ковариационная матрица $\Gamma = \mathsf{M}Y_tY_t^*$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma = A\Gamma A^* + BB^*. \tag{14.20}$$

---

*) При алгебраических операциях Y_t рассматривается как вектор-столбец.

Если $t > s$, то

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \mathsf{M} Y_t Y_s^* = A^{t-s}\Gamma, \tag{14.21}$$

что следует из равенств

$$Y_t = AY_{t-1} + B\varepsilon(t) = A^2 Y_{t-2} + AB\varepsilon(t-1) + B\varepsilon(t) = \ldots$$
$$\ldots = A^{t-s} Y_s + \sum_{j=s}^{t-1} A^{t-1-j} B\varepsilon(j+1). \tag{14.22}$$

Аналогично, при $t < s$

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \Gamma(A^*)^{s-t}.$$

Замечание 2. Если $\eta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, — гауссовский процесс, то $\varepsilon(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, является гауссовской последовательностью независимых случайных величин.

2. Используем представления (14.15) для вывода уравнений фильтрации компонент стационарных последовательностей с дробно-рациональным спектром.

Пусть $\nu_t = [\theta_t, \xi_t] = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, — действительный стационарный (в широком смысле) $k + l$-мерный процесс, допускающий представление

$$\nu_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} W(e^{i\lambda}) \Phi(d\lambda), \tag{14.23}$$

где $W(z) = \| W_{r,q}(z) \|$ — матрица порядка $N \times m$, $N = k + l$, с дробно-рациональными элементами

$$W_{r,q}(z) = \frac{P^{(r,q)}_{n_{r,q}-1}}{Q^{(r,q)}_{n_{r,q}}}, \tag{14.24}$$

а $\Phi(d\lambda) = [\Phi_1(d\lambda), \ldots, \Phi_m(d\lambda)]$ — случайная векторная мера с некоррелированными компонентами, $\mathsf{M}\Phi_j(d\lambda) = 0$, $\mathsf{M}|\Phi_j(d\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi}$.

Будем предполагать также, что корни уравнений $Q^{(r,q)}_{n_{r,q}}(z) = 0$ лежат внутри единичного круга.

Применяя теорему 14.1 к каждому из процессов

$$\nu_{p,r,q}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} W_{r,q}(e^{i\lambda}) \Phi_p(d\lambda), \tag{14.25}$$

после простых преобразований для вектора $\xi_t = (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))$ и вектора $\hat{\theta}_t$ (составленного из вектора $\theta_t = (\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t))$ и всех тех дополнительных компонент типа $\eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)$, которые возникают по теореме 14.1 в системе (14.15)) получаем систему рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{t+1} &= a_1\hat{\theta}_t + a_2\xi_t + b\varepsilon(t+1), \\ \xi_{t+1} &= A_1\hat{\theta}_t + A_2\xi_t + B\varepsilon(t+1), \end{aligned} \tag{14.26}$$

где $\varepsilon(t)=(\varepsilon_1(t),\ldots,\varepsilon_m(t))$ — последовательность некоррелированных векторов с некоррелированными компонентами, $\mathsf{M}\varepsilon_j(t)=0$, $\mathsf{M}\varepsilon_j^2(t)=1$,

$$\varepsilon_j(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-1)}\Phi_j(d\lambda). \tag{14.27}$$

Матрицы a_i, A_i, b и B, $i=1, 2$, входящие в (14.26), находятся непосредственным подсчетом.

Предположим теперь, что у вектора $\nu_t=(\theta_t, \xi_t)$ первая компонента является ненаблюдаемой. Рассмотрим задачу построения для каждого $t=0, 1, \ldots$ линейной оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки для θ_t по наблюдениям $(\xi_0, \ldots, \xi_t)$.

Если ν_t, $t=0, 1, \ldots$, является гауссовским процессом, то по теореме 13.4 и следствию 1 из нее $\hat{m}_t=\mathsf{M}(\hat{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi})$ и $\hat{\gamma}_t=\mathsf{M}([\hat{\theta}_t-\hat{m}_t][\hat{\theta}_t-\hat{m}_t]^*)$ определяются из системы уравнений

$$\hat{m}_{t+1}=a_1\hat{m}_t+a_2\xi_t+ \\ +(bB^*+a_1\hat{\gamma}_tA_1^*)(BB^*+A_1\hat{\gamma}_tA_1^*)^+(\xi_{t+1}-A_1\hat{m}_t-A_2\xi_t), \tag{14.28}$$

$$\hat{\gamma}_{t+1}=a_1\hat{\gamma}_ta_1^*+bb^*- \\ -(bB^*+a_1\hat{\gamma}_1A_1^*)(BB^*+A_1\hat{\gamma}_tA_1^*)^+(bB^*+a_1\hat{\gamma}_tA_1^*)^*, \tag{14.29}$$

решаемых при начальных условиях

$$\hat{m}_0=\mathsf{M}(\hat{\theta}_0 \mid \xi_0), \quad \hat{\gamma}_0=\mathsf{M}([\hat{\theta}_0-\hat{m}_0][\hat{\theta}_0-\hat{m}_0]^*).$$

Согласно теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1)

$$\hat{m}_0=\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \xi_0)\operatorname{cov}^+(\xi_0, \xi_0)\xi_0, \tag{14.30}$$

$$\hat{\gamma}_0=\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_0)-\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \xi_0)\operatorname{cov}^+(\xi_0, \xi_0)\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \xi_0). \tag{14.31}$$

Поскольку $\hat{m}_t=\mathsf{M}(\hat{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi})$ линейным образом зависит от $\xi_0, \ldots, \xi_t$, то в случае гауссовского процесса $\nu_t=[\theta_t, \xi_t]$ решение задачи построения оптимальной линейной оценки θ_t по $\xi_0, \ldots, \xi_t$ дается уравнениями (14.28), (14.29).

Покажем теперь, что и в общем случае линейная оптимальная (в среднеквадратическом смысле) оценка также определяется из этих же уравнений. Справедливость этого утверждения вытекает из следующего предложения.

Лемма 14.1. *Пусть* (α, β) — *случайный вектор с* $\mathsf{M}(\alpha^2+\beta^2)<\infty$ *и* $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ — *гауссовский вектор с теми же двумя первыми моментами, что и у* (α, β), *т. е.*

$$\mathsf{M}\tilde{\alpha}^i=\mathsf{M}\alpha^i, \quad \mathsf{M}\tilde{\beta}^i=\mathsf{M}\beta^i, \quad i=1, 2, \quad \mathsf{M}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}=\mathsf{M}\alpha\beta.$$

Пусть $l(b)$ *линейная функция от* $b\in R^1$ *такая, что* P-п. н.

$$l(\tilde{\beta})=\mathsf{M}(\tilde{\alpha} \mid \tilde{\beta}). \tag{14.32}$$

Тогда $l(\beta)$ *является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) линейной оценкой величины* α *по* β, *причем* $\mathsf{M}l(\beta)=\mathsf{M}\alpha$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что существование линейной функции $l(b)$ со свойством (14.32) вытекает из теоремы о нормальной корреляции.

Несмещенность ($\mathsf{M}l(\beta)=\mathsf{M}\alpha$) линейной оценки вытекает из следующей очевидной цепочки равенств:

$$\mathsf{M}l(\beta)=\mathsf{M}l(\tilde{\beta})=\mathsf{M}[\mathsf{M}(\tilde{\alpha}\mid\tilde{\beta})]=\mathsf{M}\tilde{\alpha}=\mathsf{M}\alpha.$$

Далее, если $\tilde{l}(\beta)$ — какая-то другая линейная оценка, то

$$\mathsf{M}[\tilde{\alpha}-\tilde{l}(\tilde{\beta})]^2\geqslant\mathsf{M}[\tilde{\alpha}-l(\tilde{\beta})]^2.$$

Поэтому в силу линейности оценок $l(\beta)$ и $\tilde{l}(\beta)$

$$\mathsf{M}[\alpha-\tilde{l}(\beta)]^2=\mathsf{M}[\tilde{\alpha}-\tilde{l}(\tilde{\beta})]^2\geqslant\mathsf{M}[\tilde{\alpha}-l(\tilde{\beta})]^2=\mathsf{M}[\alpha-l(\beta)]^2,$$

что и доказывает оптимальность (в среднеквадратическом смысле) $l(\beta)$ в классе линейных оценок.

Замечание. Утверждение леммы остается справедливым, если α и β — векторы, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_l)$.

Чтобы применить лемму 14.1 к доказательству того, что оптимальная оценка θ_t по $\xi_0, \ldots, \xi_t$ определяется из системы уравнений (14.28), (14.29), осталось лишь заметить, что процесс $(\hat{\theta}_t, \xi_t)$, удовлетворяющий системе (14.26), и гауссовский процесс, определяемый той же системой, имеют одни и те же первые два момента.

3. Для иллюстрации предложенного выше подхода к задачам оценивания компонент стационарных процессов рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть θ_t и ζ_t, $t=0, \pm 1, \ldots,$ — некоррелированные между собой стационарные (в широком смысле) последовательности с $\mathsf{M}\theta_t=\mathsf{M}\zeta_t=0$ и спектральными плотностями

$$f_\theta(\lambda)=\frac{1}{|e^{i\lambda}+c_1|^2}, \qquad f_\zeta(\lambda)=\frac{1}{|e^{i\lambda}+c_2|^2},$$

где $|c_i|<1$, $i=1, 2$.

Будем предполагать, что θ_t является «полезным сигналом», ζ_t — «помеха» и что наблюдается процесс

$$\xi_t=\theta_t+\zeta_t. \tag{14.33}$$

Согласно теореме 14.1 найдутся некоррелированные последовательности $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots,$ с $\mathsf{M}\varepsilon_i(t)=0$, $\mathsf{M}\varepsilon_i(t)\varepsilon_i(s)=\delta(t, s)$, $i=1, 2$, такие, что

$$\theta_{t+1}=c\theta_t+\varepsilon_1(t+1), \qquad \zeta_{t+1}=c_2\zeta_t+\varepsilon_2(t+1). \tag{14.34}$$

Принимая во внимание (14.33) и (14.34), получаем, что

$$\xi_{t+1} = \theta_{t+1} + \zeta_{t+1} = (c_1 - c_2)\,\theta_t + c_2\xi_t + \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1).$$

Поэтому «ненаблюдаемый» процесс θ_t и «наблюдаемый» процесс ξ_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= c_1\theta_t + \varepsilon_1(t+1), \\ \xi_{t+1} &= (c_1 - c_2)\,\theta_t + c_2\xi_t + \varepsilon_1(t+1) + \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \tag{14.35}$$

В силу (14.28) и (14.29) оптимальная линейная оценка m_t, $t = 0, 1, \ldots$, величин θ_t и среднеквадратическая ошибка фильтрации $\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$m_{t+1} = c_1 m_t + \frac{1 + c_1(c_1 - c_2)\gamma_t}{2 + (c_1 - c_2)^2\gamma_t}[\xi_{t+1} - (c_1 - c_2)\,m_t - c_2\xi_t], \tag{14.36}$$

$$\gamma_{t+1} = c_1^2\gamma_t + 1 - \frac{[1 + c_1(c_1 - c_2)\gamma_t]^2}{2 + (c_1 - c_2)^2\gamma_t}. \tag{14.37}$$

Найдем начальные условия m_0, γ_0 для этой системы уравнений.

Процесс (θ_t, ξ_t), $t = 0, \pm 1, \ldots$, является стационарным (в широком смысле) процессом с $\mathsf{M}\theta_t = \mathsf{M}\xi_t = 0$ и ковариациями $d_{11} = \mathsf{M}\theta_t^2$, $d_{12} = \mathsf{M}\theta_t\xi_t$, $d_{22} = \mathsf{M}\xi_t^2$, удовлетворяющими в силу (14.35) и (14.20) системе уравнений

$$\begin{aligned} d_{11} &= c_1^2 d_{11} + 1, \\ d_{12} &= c_1(c_1 - c_2)\,d_{11} + c_1c_2d_{12} + 1, \\ d_{22} &= (c_1 - c_2)^2 d_{11} + c_2^2 d_{22} + 2c_2(c_1 - c_2)\,d_{12} + 2. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$d_{11} = \frac{1}{1 - c_1^2}, \qquad d_{12} = \frac{1}{1 - c_1^2}, \qquad d_{22} = \frac{2 - c_1^2 - c_2^2}{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)},$$

что вместе с (14.30), (14.31) дает

$$m_0 = \frac{d_{12}}{d_{22}}\,\xi_0 = \frac{1 - c_2^2}{2 - c_1^2 - c_2^2}\,\xi_0,$$

$$\gamma_0 = d_{11} - \frac{d_{12}^2}{d_{22}} = \frac{1}{1 - c_1^2} - \frac{1 - c_2^2}{(1 - c_1^2)(2 - c_1^2 - c_2^2)} = \frac{1}{2 - c_1^2 - c_2^2}.$$

Итак, оптимальная (в среднеквадратическом смысле) линейная оценка m_t «полезного сигнала» θ_t по $\xi_0, \ldots, \xi_t$ и среднеквадратическая ошибка γ_t определяются из системы уравнений (14.36), (14.37), решаемой при начальных условиях

$$m_0 = \frac{1 - c_2^2}{2 - c_1^2 - c_2^2}\,\xi_0, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{2 - c_1^2 - c_2^2}.$$

Мало что изменится, если рассматривать задачу оценивания параметра θ_t по наблюдениям $(\xi_{-N}, \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_t)$. В этом случае также остается справедливой система (14.36), (14.37), причем

$$m_{-N} = \frac{1-c_2^2}{2-c_1^2-c_2^2}\,\xi_{-N}, \qquad \gamma_{-N} = \frac{1}{2-c_1^2-c_2^2}.$$

4. В заключение заметим, что оптимальные линейные оценки интерполяции и экстраполяции для стационарных последовательностей с дробно-рациональным спектром можно получить (как и в случае фильтрации) из результатов предыдущей главы, рассматривая лишь гауссовские последовательности с теми же самыми первыми двумя моментами.

§ 2. Оценки максимального правдоподобия коэффициентов линейной регрессии

1. Пусть в моменты времени $t=0, 1, \ldots$ наблюдается случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\,\theta_i + \eta(t), \tag{14.38}$$

где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ — вектор (столбец) неизвестных параметров, $-\infty < \theta_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))$ — известная вектор-функция (строка), а $\eta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, — гауссовский стационарный случайный процесс с $M\eta(t)$ и дробно-рациональной спектральной плотностью

$$f_\eta(\lambda) = \left| \frac{P_{n-1}(e^{i\lambda})}{Q_n(e^{i\lambda})} \right|^2. \tag{14.39}$$

В (14.39)

$$P_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j, \qquad b_{n-1} \neq 0,$$

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \qquad a_n = 1,$$

причем предполагается, что корни уравнения $Q_n(z) = 0$ лежат внутри единичного круга.

Для получения оценок максимального правдоподобия вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ надо найти производную Радона — Никодима $\frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}$ меры μ_ξ^θ, отвечающей процессу $\xi = (\xi(t))$, $t = 0, 1, \ldots$, определяемому в (14.38), по мере μ_ξ^0 для такого же процесса с $\theta = 0$ (0 — нулевой вектор).

Согласно теореме 14.1 процесс $\eta(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots,$ является компонентой процесса $(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ с $\eta_1(t)=\eta(t)$, определяемого уравнениями

$$\begin{aligned} &\eta_j(t+1)=\eta_{j+1}(t)+\beta_j\varepsilon(t+1), \quad j=1, \ldots, n-1, \\ &\eta_n(t+1)=-a_0\eta_1(t)-\sum_{j=1}^{n-1} a_j\eta_{j+1}(t)+\beta_n\varepsilon(t+1), \end{aligned} \tag{14.40}$$

где $\varepsilon(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots,$ — некоторая последовательность независимых гауссовских случайных величин с $\mathsf{M}\varepsilon(t)=0$, $\mathsf{M}\varepsilon^2(t)=1$, а числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ задаются с помощью формул (14.8).

Поскольку $\xi(t+1)=\alpha(t+1)\theta+\eta_1(t+1)$, то для процесса $(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ с $\xi_1(t)=\xi(t)$, $\xi_j(t)=\eta_j(t)$, $j=2, \ldots, n$, справедлива система рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} &\xi_1(t+1)=\alpha(t+1)\theta+\xi_2(t)+\beta_1\varepsilon(t+1), \\ &\xi_k(t+1)=\xi_{k+1}(t)+\beta_k\varepsilon(t+1), \quad 1<k<n, \\ &\xi_n(t+1)=-a_0(\xi_1(t)-\alpha(t)\theta)-\sum_{j=1}^{n-1} a_j\xi_{j+1}(t)+\beta_n\varepsilon(t+1). \end{aligned} \tag{14.41}$$

Для фиксированного значения θ обозначим

$$\begin{aligned} &m_k^\theta(t)=\mathsf{M}\left[\xi_k(t)\,|\,\mathcal{F}_t^\xi\right], \quad k>1, \\ &\gamma_{ij}^\theta(t)=\mathsf{M}\left[(\xi_i(t)-m_i^\theta(t))(\xi_j(t)-m_j^\theta(t))\right], \quad i, j>1. \end{aligned}$$

Система (14.41) является частным случаем системы (13.46), (13.47), и, следовательно, $m_k^\theta(t)$ и $\gamma_{ij}^\theta(t)$ удовлетворяют уравнениям (13.56), (13.57). Важно отметить, что в коэффициенты уравнений, из которых определяются $\gamma_{ij}^\theta(t)$, не входит θ. Начальные условия $\gamma_{ij}^\theta(0)$ также от θ не зависят. Следовательно, элементы матрицы $\gamma^\theta(t)=\|\gamma_{ij}^\theta(t)\|$ не зависят от θ. Будем поэтому ее обозначать просто $\gamma(t)=\|\gamma_{ij}(t)\|$, $i, j\geqslant 2$.

При фиксированном θ уравнения для $m_k^\theta(t)$, $k=2, \ldots, n$, имеют в соответствии с (13.56) следующий вид:

$$m_k^\theta(t+1)=m_{k+1}^\theta(t)+\frac{\beta_k\beta_1+\gamma_{2k}(t)}{\beta_1^2+\gamma_{22}(t)}\left[\xi_{t+1}-\alpha(t+1)\theta-m_2^\theta(t)\right], \qquad 2\leqslant k\leqslant n-1, \tag{14.42}$$

$$\begin{aligned} m_n^\theta(t+1)=-a_0(\xi_1(t)-\alpha(t)\theta)-\sum_{j=1}^{n-1} a_j m_{j+1}^\theta(t)+{}& \\ +\frac{\beta_1\beta_n-\sum_{j=1}^{n-1} a_j\gamma_{1,\,j+1}(t)}{\beta_1^2+\gamma_{22}(t)}\left[\xi_{t+1}-\alpha(t+1)\theta-m_2^\theta(t)\right].& \end{aligned} \tag{14.43}$$

Решая линейную систему (14.42), (14.43), устанавливаем, что

$$m_2^\theta(t) = \nu_0(t, \xi) + \nu_1(t)\,\theta, \tag{14.44}$$

где $\nu_0(t, \xi)$ — $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримая функция, линейно зависящая от $\xi_0, \ldots, \xi_t$, а $\nu_1(t) = (\nu_{11}(t), \ldots, \nu_{1N}(t))$ — неслучайная вектор-функция (строка).

Применим к $\xi_1(t) = \xi(t)$ теорему 13.5. Тогда (при фиксированном θ) найдется последовательность независимых гауссовских случайных величин $\bar\varepsilon(t)$, $t = 0, 1, \ldots$, с $\mathsf{M}\bar\varepsilon(t) = 0$, $\mathsf{M}\bar\varepsilon^2(t) = 1$, $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\omega: \xi(0), \ldots, \xi(t)\}$-измеримых при каждом t (поскольку $\beta_1 = b_{n-1} \neq 0$), таких, что P-п. н.

$$\xi(t+1) = \alpha(t+1)\,\theta + m_2^\theta(t) + \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_{22}(t)}\,\bar\varepsilon(t+1). \tag{14.45}$$

Используя (14.44), отсюда получаем, что

$$\xi(t+1) = [\alpha(t+1) + \nu_1(t)]\,\theta + \nu_0(t, \xi) + \beta(t)\,\bar\varepsilon(t+1), \tag{14.46}$$

где $\beta(t) = \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_{22}(t)}$.

Но $\bar\varepsilon(t)$, $t = 0, 1, \ldots$, являются независимыми гауссовскими случайными величинами с $\mathsf{M}\bar\varepsilon(t) = 0$, $\mathsf{M}\bar\varepsilon^2(t) = 1$. Поэтому из (14.46) легко находим, что

$$\frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}(\xi(0), \ldots, \xi(t)) = \exp\left\{\frac{\xi(0)\,\alpha(0)\,\theta}{\delta^2} - \frac{(\alpha(0)\,\theta)^2}{2\delta^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{t}\left(\frac{[\xi(s) - \nu_0(s-1, \xi)]\,[\alpha(s) + \nu_1(s-1)]\,\theta}{\beta^2(s-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{[(\alpha(s) + \nu_1(s-1))\,\theta]^2}{\beta^2(s-1)}\right)\right\}, \tag{14.47}$$

где $\delta^2 = \mathsf{M}\eta^2(0)$.

Предположим, что при некотором $t \geqslant N - 1$ матрица

$$D_t = \frac{\alpha^*(0)\,\alpha(0)}{\delta^2} + \sum_{s=1}^{t}\frac{[\alpha(s) + \nu_1(s-1)]^*\,[\alpha(s) + \nu_1(s-1)]}{\beta^2(s-1)} \tag{14.48}$$

не вырождена. Тогда из (14.47) получаем оценку максимального правдоподобия $\hat\theta_t$ (по определению она обращает в максимум правую часть (14.47)), задаваемую формулой

$$\hat\theta_t = D_t^{-1}\left\{\frac{\alpha^*(0)\,\xi(0)}{\delta^2} + \sum_{s=1}^{t}\frac{[\alpha(s) + \nu_1(s-1)]^*\,[\xi(s) - \nu_0(s-1, \xi)]}{\beta^2(s-1)}\right\}. \tag{14.49}$$

Из (14.48), (14.49) нетрудно вывести, что оценка $\hat{\theta}_t$ является несмещенной ($M_\theta \hat{\theta}_t = \theta$) и

$$M_\theta [(\hat{\theta}_t - \theta)(\hat{\theta}_t - \theta)^*] = D_t^{-1}. \qquad (14.50)$$

С помощью простых преобразований из (14.47), (14.49) следует, что

$$\frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}(\xi(0), \ldots, \xi(t)) = \exp\left\{\theta^* D_t \hat{\theta}_t - \frac{1}{2}\theta^* D_t \theta\right\}. \qquad (14.51)$$

Отсюда, в частности, видно, что в рассматриваемой задаче $\hat{\theta}_t$ является достаточной статистикой (§ 5 гл. 1).

Покажем, что в классе несмещенных оценок $\tilde{\theta}_t = (\tilde{\theta}_1(t), \ldots$ $\ldots, \tilde{\theta}_k(t))$ с $M \sum_{i=1}^{N} \tilde{\theta}_i^2(t) < \infty$ оценка $\hat{\theta}_t$ эффективна, т. е.

$$M_\theta (\tilde{\theta}_t - \theta)(\tilde{\theta}_t - \theta)^* \geqslant M_\theta (\hat{\theta}_t - \theta)(\hat{\theta}_t - \theta)^* = D_t^{-1}. \qquad (14.52)$$

Действительно, согласно матричному неравенству Рао — Крамера (1.50)

$$M(\tilde{\theta}_t - \theta)(\tilde{\theta}_t - \theta)^* \geqslant I^{-1}(\theta), \qquad (14.53)$$

где $\tilde{\theta}_t$ — несмещенная оценка вектора θ ($M_\theta \tilde{\theta}_t = \theta$), а $I(\theta) = \| I_{ij}(\theta) \|$ — информационная матрица Фишера с элементами

$$I_{ij}(0) = M_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln \frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}(\xi(0), \ldots, \xi(t)) \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}(\xi(0), \ldots, \xi(t)) \right\}.$$

Но в нашем случае

$$I(\theta) = D_t. \qquad (14.54)$$

Чтобы доказать (14.54), заметим, вводя обозначения $D_{ij}(t)$ и $\tilde{D}_{ij}(t)$ для элементов матриц D_t и D_t^{-1} соответственно, что

$$\ln \frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^0}(\xi(0), \ldots, \xi(t)) = \sum_{k,\, l=1}^{N} D_{kl}(t)\, \theta_k \left[\hat{\theta}_l(t) - \frac{1}{2}\theta_l\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \frac{d\mu_\xi^0}{d\mu_\xi^0} (\xi(0), \ldots, \xi(t)) = \sum_{l=1}^{N} D_{jl}(t) [\hat{\theta}_l(t) - \theta_l],$$

$$I_{ij}(\theta) = \mathsf{M} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln \frac{d\mu_\xi^0}{d\mu_\xi^0} (\xi(0), \ldots, \xi(t)) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_\xi^\theta} (\xi(0), \ldots, \xi(t)) \right\} =$$

$$= \sum_{l,\,k=1}^{N} D_{jl}(t) D_{ik}(t) \mathsf{M} [\hat{\theta}_l(t) - \theta_l][\hat{\theta}_k(t) - \theta_k] =$$

$$= \sum_{l,\,k=1}^{N} D_{jl}(t) D_{ik}(t) \tilde{D}_{lk}(t) = \sum_{l=1}^{N} D_{jl}(t) \left(\sum_{k=1}^{N} D_{ik}(t) \tilde{D}_{lk}(t) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} D_{jl}(t) \delta(i, l) = D_{ij}(t).$$

Из (14.53) и (14.54) получаем требуемое неравенство (14.52), что и доказывает эффективность оценки $\hat{\theta}_t$.

Замечание. Метод, использованный выше для вывода представлений (14.49), (14.51), применим и в том случае, когда $b_{n-1} = b_{n-2} = \ldots = b_{n-m} = 0$, $b_{n-m-1} \neq 0$, $n - m - 1 \geqslant 0$.

2. Пример 2. Пусть $\xi(t) = \theta + \eta(t)$, где θ — неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$, а $\eta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ — стационарный гауссовский процесс с $\mathsf{M}\eta(t) = 0$ и спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \left| \frac{e^{i\lambda} + 1}{e^{2(i\lambda)} + e^{i\lambda} + \frac{1}{2}} \right|.$$

Оценка максимального правдоподобия неизвестного параметра θ может также интерпретироваться как оценка математического ожидания $\mathsf{M}\xi(t) = \theta$ процесса $\xi(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$

По теореме 14.1 процесс $\eta(t)$ является компонентой двумерного процесса $(\eta_1(t), \eta_2(t))$ с $\eta_1(t) = \eta(t)$, определяемого рекуррентными уравнениями

$$\eta_1(t+1) = \eta_2(t) + \varepsilon(t+1),$$
$$\eta_2(t+1) = -\frac{1}{2}\eta_1(t) - \eta_2(t) + \frac{1}{2}\varepsilon(t+1)$$

и последовательностью независимых гауссовских случайных величин $\varepsilon(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, $\mathsf{M}\varepsilon(t) = 0$, $\mathsf{M}\varepsilon^2(t) = 1$. Отсюда находим

$$\xi(t+1) = \theta + \eta_2(t) + \varepsilon(t+1),$$
$$\eta_2(t+1) = -\frac{\theta - \xi(t)}{2} - \eta_2(t) + \frac{1}{2}\varepsilon(t+1).$$

В соответствии с этим $m^\theta(t) = \mathsf{M}\left(\eta_2(t) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$ является решением рекуррентного уравнения

$$m_{t+1}^\theta = -\frac{\theta - \xi(t)}{2} - m_t^\theta + \frac{\frac{1}{2} + \gamma_t}{1 + \gamma_t}\left(\xi_{t+1} - \theta - m^\theta(t)\right),$$

где (см. 13.57))

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t + \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \gamma_t\right)^2}{1 + \gamma_t}.$$

В силу уравнения (14.20) $\mathsf{M}\eta_1^2(t) = \frac{12}{5}$, $\mathsf{M}\eta_2^2(t) = \frac{7}{5}$, $\mathsf{M}\eta_1(t)\eta_2(t) = -\frac{9}{15}$. Поэтому $\mathsf{M}[\xi(t) - \theta]^2 = \mathsf{M}\eta_1^2(t) = \frac{12}{5}$, $\mathsf{M}[\xi(t) - \theta]\eta_2(t) = \mathsf{M}\eta_1(t)\eta_2(t) = -\frac{9}{15}$, и, следовательно, по теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1)

$$m^\theta(0) = \frac{1}{4}(\theta - \xi(0)), \qquad \gamma_0 = \frac{5}{4}.$$

Решая теперь уравнение для $m^\theta(t)$ с начальным условием $m^\theta(0) = \frac{1}{4}(\theta - \xi(0))$, получаем

$$\begin{aligned} m^\theta(t) = \frac{1}{4}\prod_{s=0}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_s}{1 + \gamma_s}\right)[\theta - \xi(0)] + \\ + \sum_{s=0}^{t-1}\prod_{j=s+1}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_j}{1 + \gamma_j}\right)\left[\frac{1}{2}(\xi(s) - \theta) + \frac{\frac{1}{2} + \gamma_s}{1 + \gamma_s}\xi_{s+1}\right] = \\ = \nu_0(t, \xi) + \nu_1(t)\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_0(t, \xi) = -\frac{1}{4}\prod_{s=0}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_s}{1 + \gamma_s}\right)\xi_0 + \\ + \sum_{s=0}^{t-1}\prod_{j=s+1}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_j}{1 + \gamma_j}\right)\left[\frac{1}{2}\xi(s) + \frac{\frac{1}{2} + \gamma_s}{1 + \gamma_s}\xi(s+1)\right], \end{aligned}$$

$$\nu_1(t) = \frac{1}{4}\prod_{s=0}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_s}{1 + \gamma_s}\right) - \sum_{s=0}^{t-1}\prod_{j=s+1}^{t-1}\left(-\frac{\frac{3}{2} + 2\gamma_j}{1 + \gamma_s}\right).$$

Теперь в силу (14.48) и (14.49) имеем ($t \geqslant 1$)

$$D_t = \left[\frac{5}{12} + \sum_{s=1}^{t} \frac{(1+\nu_1(s-1))^2}{1+\gamma(s-1)}\right],$$

$$\hat{\theta}_t = D_t^{-1}\left[\frac{5}{12}\xi(0) + \sum_{s=1}^{t} \frac{(1+\nu_1(s-1))(\xi(s)-\nu_0(s-1,\xi))}{1+\gamma(s-1)}\right].$$

§ 3. Одна задача управления по неполным данным (линейная система с квадратичным функционалом потерь)

1. В этом параграфе будет показано, как уравнения оптимальной нелинейной фильтрации, выведенные в предыдущей главе, могут быть применены для отыскания оптимальных управлений.

Будем предполагать, что состояние некоторой «управляемой» системы описывается процессом $(\theta, \xi) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $t = 0, 1, \ldots, T < \infty$, который подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= c(t)u_t + a(t)\theta_t + b(t)\varepsilon_1(t+1), \\ \xi_{t+1} &= \qquad\quad A(t)\theta_t + B(t)\varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \tag{14.55}$$

Здесь $c(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерностей $(k\times r)$, $(k\times k)$, $(k\times k)$, $(l\times k)$, $(l\times l)$ соответственно с элементами, являющимися детерминированными ограниченными функциями $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Входящие в (14.55) независимые между собой случайные последовательности $\varepsilon_1(t) = (\varepsilon_{11}(t), \ldots$ $\ldots, \varepsilon_{1k}(t))$, $\varepsilon_2(t) = (\varepsilon_{21}(t), \ldots, \varepsilon_{2l}(t))$, $t = 1, \ldots, T$, являются гауссовскими с независимыми компонентами, $\mathsf{M}\varepsilon_{ij}(t) = 0$, $\mathsf{M}\varepsilon_{ij}^2(t) = 1$.

Система (14.55) решается при начальном условии θ_0, где θ_0 — гауссовский случайный вектор, $\mathsf{M}\theta_0 = m$, $\mathsf{M}[(\theta_0 - m_0)\times$ $\times(\theta_0 - m_0)^*] = \gamma$, не зависящий от последовательностей $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, \ldots, T$. В систему (14.55) входит также вектор-столбец $u_t = (u_1(t,\xi), \ldots, u_r(t,\xi))$, где при каждом $t = 0, 1, \ldots, T-1$ функции $u_i(t,\xi)$, играющие роль *управляющих* воздействий, являются $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\omega\colon \xi_0, \ldots, \xi_t\}$-измеримыми ($\xi_0 = 0$).

Все рассматриваемые далее управления $u = (u_0, \ldots, u_{T-1})$ будут предполагаться такими, что

$$\sum_{i=1}^{r} \mathsf{M}u_i^2(t,\xi) < \infty, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{14.56}$$

Предположим, что качество управления $u=(u_0, \ldots, u_{T-1})$ измеряется квадратичным функционалом потерь

$$V(u)=\mathbf{M}\left[\sum_{t=0}^{T-1}(\theta_t^*H(t)\theta_t+u_t^*R(t)u_t)+\theta_T^*H(T)\theta_T\right], \quad (14.57)$$

где $H(t)$, $R(t)$ — детерминированные, ограниченные, симметрические, неотрицательно определенные матрицы порядков $(k\times k)$, $(r\times r)$ соответственно.

Требуется найти (оптимальное) управление $\tilde{u}=(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{T-1})$, для которого

$$V(\tilde{u})=\inf V(u), \quad (14.58)$$

где inf берется по всем управлениям, удовлетворяющим условиям (14.56).

Рассматриваемая задача является примером так называемых задач управления по *неполным данным*, когда значения управляющих воздействий предполагаются зависящими лишь от наблюдаемой части координат $(\xi_0, \xi_1, \ldots)$, описывающих состояние управляемой системы.

2. При отыскании оптимальных управлений (в рассматриваемой задаче таковые существуют, что станет ясно из дальнейшего), помимо результатов оптимальной нелинейной фильтрации, будут использованы также идеи динамического программирования.

Введем ряд необходимых для дальнейшего обозначений.

Пусть $P(t)$ и γ_t, $t=0, 1, \ldots, T$, — матричные функции порядка $(k\times k)$, определяемые как решения рекуррентных уравнений

$$P(t)=H(t)+a^*(t)P(t+1)a(t)-$$
$$-a^*(t)P(t+1)c(t)[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]^+c^*(t)P(t+1)a(t) \quad (14.59)$$

с $P(T)=H(T)$ и

$$\gamma_{t+1}=a(t)\gamma_t a^*(t)+b(t)b^*(t)-$$
$$-a(t)\gamma_t A^*(t)[B(t)B^*(t)+A(t)\gamma_t A^*(t)]^+A(t)\gamma_t a^*(t) \quad (14.60)$$

с $\gamma_0=\gamma$. Пусть также

$$D(t)=a(t)\gamma_t A^*(t)\left\{[B(t)B^*(t)+A(t)\gamma_t A^*(t)]^{1/2}\right\}^+ \quad (14.61)$$

и $p(t)$, $t=0, 1, \ldots, T$, — последовательность неотрицательных чисел, определяемых рекуррентным образом:

$$p(t)=p(t+1)+\operatorname{Sp}P^{1/2}(t+1)D(t)D^*(t)P^{1/2}(t+1), \quad p(T)=0. \quad (14.62)$$

Из (14.62) следует, что

$$p(t)=\sum_{s=t}^{T-1} \operatorname{Sp} P^{1/2}(s+1)\, D(s)\, D^*(s)\, P^{1/2}(s+1). \qquad (14.63)$$

Введенные матрицы $P(t)$, γ_t и числа $p(t)$ находятся по коэффициентам системы (14.55) и заданным матрицам $H(t)$ и $R(t)$. Поэтому они не зависят от «случая» и, являясь лишь функциями времени t, могут быть найдены a priori.

Заметим, что матрицы $P(t)$, $t=0, 1, \ldots, T$, найденные из рекуррентных уравнений (14.59), являются симметрическими и неотрицательно определенными. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим задачу фильтрации (см. § 1 гл. 13) для процессов

$$\begin{aligned}\tilde\theta_{s+1}&=a^*(T-s)\,\tilde\theta_s+H^{1/2}(T-s)\,\tilde\varepsilon_1(s+1),\\ \tilde\xi_{s+1}&=c^*(T-s)\,\tilde\theta_s+R^{1/2}(T-s)\,\tilde\varepsilon_2(s+1),\end{aligned}$$

где $\tilde\varepsilon_1(s)$, $\tilde\varepsilon_2(s)$ — независимые гауссовские случайные векторы с независимыми компонентами, средние которых равны нулю, а дисперсии — единице. Будем предполагать, что $\tilde\theta_0$ является гауссовским вектором, $\mathsf{M}\tilde\theta_0=0$, $\mathsf{M}\tilde\theta_0\tilde\theta_0^*=H(T)$, не зависящим от $\tilde\varepsilon_1(s)$, $\tilde\varepsilon_2(s)$, $s=0, \ldots, T-1$.

Сравнивая уравнения (13.57) для $\tilde\gamma_t=\mathsf{M}[(\tilde\theta_t-\tilde m_t)(\tilde\theta_t-\tilde m_t)^*]$, где $\tilde m_t=\mathsf{M}(\tilde\theta_t \mid \tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_t)$, с уравнением (14.59) для $P(t)$, видим, что $P(t)=\tilde\gamma_{T-t}$. Следовательно, матрицы $P(t)$ являются симметрическими и неотрицательно определенными.

3. Теорема 14.2. *В классе управлений, удовлетворяющих условию* (14.56), *оптимальное управление* $\tilde u=(\tilde u_0, \ldots, \tilde u_{T-1})$ *существует и задается формулами*

$$\tilde u(t, \xi)=-[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]^+ c^*(t)P(t+1)a(t)\tilde m_t, \qquad (14.64)$$

где матрицы $P(t)$ *определяются из* (14.59), *а* $\tilde m_t$ *находятся из рекуррентных уравнений оптимальной фильтрации*

$$\begin{aligned}\tilde m_{t+1}&=c(t)\tilde u_t+a(t)\tilde m_t+\\ &+a(t)\gamma_tA^*(t)[B(t)B^*(t)+A(t)\gamma_tA^*(t)]^+[\xi_{t+1}-A(t)\tilde m_t]\end{aligned} \qquad (14.65)$$

с $\tilde m_0=m$ *и матрицами* γ_t, *определенными в* (14.60).

При этом входящий в (14.65) *наблюдаемый процесс* ξ_t, $t=1, \ldots, T$, *определяется из системы*

$$\begin{aligned}\theta_{t+1}&=c(t)\tilde u_t+a(t)\theta_t+b(t)\varepsilon_1(t+1),\\ \xi_{t+1}&=\qquad\qquad A(t)\theta_t+B(t)\varepsilon_2(t+1),\end{aligned} \qquad (14.66)$$

а

$$V(\tilde u)=p(0)+m^*P(0)m+\sum_{t=0}^{T}\operatorname{Sp} H^{1/2}(t)\gamma_tH^{1/2}(t). \qquad (14.67)$$

Доказательство. Пусть $u=(u_0, \ldots, u_{T-1})$ — какое-то управление, удовлетворяющее условию (14.56). Тогда $\mathsf{M}\sum_{t=0}^{T}\theta_t^*\theta_t<\infty$ и

$$V(u)=\mathsf{M}\sum_{t=0}^{T}\mathsf{M}(\theta_t^*H(t)\theta_t\,|\,\mathscr{F}_t^{\xi})+\mathsf{M}\sum_{t=0}^{T-1}u_t^*R(t)\,u_t. \quad (14.68)$$

Для рассматриваемого управления $u=(u_0, \ldots, u_{T-1})$ обозначим

$$m_t^u=\mathsf{M}\left(\theta_t^u\,|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right),\quad \gamma_t^u=\mathsf{M}\left[\left(\theta_t^u-m_t^u\right)\left(\theta_t^u-m_t^u\right)^*\right],$$

где соответствующие управляемые процессы θ_t^u и ξ_t^u определены в (14.55). Важно отметить, что для любого управления $u=(u_0, \ldots, u_{T-1})$, подчиняющегося условию (14.56), матрицы γ_t^u удовлетворяют системе рекуррентных уравнений (14.60) (см. теорему 13.4 и свойство 3 в п. 4 § 2 гл. 13, стр. 511). Поскольку ни коэффициенты этих уравнений, ни начальные условия не зависят от управления, то матрицы γ_t^u одни и те же для разных u. Поэтому $\gamma_t^u\equiv\gamma_t$ (см. (14.60)).

Покажем теперь, что в (14.68)

$$\mathsf{M}\left(\theta_t^{u*}H(t)\,\theta_t^u\,\middle|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right)=(m_t^u)^*\,H(t)\,m_t^u+\operatorname{Sp}H^{1/2}(t)\,\gamma_tH^{1/2}(t). \quad (14.69)$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\left(\theta_t^{u*}H(t)\,\theta_t^u\middle|\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right)&=\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u+m_t^u)^*H(t)(\theta_t^u-m_t^u+m_t^u)\middle|\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]=\\&=(m_t^u)^*\,H(t)\,m_t^u+2\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u)\,H(t)\,m_t^u\,\middle|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]+\\&\quad+\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u)^*\,H(t)\,(\theta_t^u-m_t^u)\middle|\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]=\\&=(m_t^u)^*\,H(t)\,m_t^u+\operatorname{Sp}\mathsf{M}\left[H^{1/2}(t)\,(\theta_t^u-m_t^u)\,(\theta_t^u-m_t^u)^*\,H^{1/2}(t)\,\middle|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]=\\&=(m_t^u)^*\,H(t)\,m_t^u+\operatorname{Sp}H^{1/2}(t)\,\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u)\,(\theta_t^u-m_t^u)^*\,\middle|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]H^{1/2}(t).\end{aligned} \quad (14.70)$$

Но согласно свойству 3 п. 4 § 2 гл. 13

$$\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u)\,(\theta_t^u-m_t^u)^*\,\middle|\,\mathscr{F}_t^{\xi^u}\right]=\mathsf{M}\left[(\theta_t^u-m_t^u)\,(\theta_t^u-m_t^u)^*\right]=\gamma_t,$$

что вместе с (14.70) и доказывает (14.69).

Итак, в силу (14.68) и (14.69)

$$V(u)=\sum_{t=0}^{T}\operatorname{Sp}H^{1/2}(t)\,\gamma_tH^{1/2}(t)+\mathsf{M}\sum_{t=0}^{T}(m_t^u)^*\,H(t)\,m_t^u+\mathsf{M}\sum_{t=0}^{T-1}u_t^*R(t)\,u_t. \quad (14.71)$$

Поскольку функции $\operatorname{Sp} H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t)$ зависят лишь от времени t и не зависят ни от управления, ни от процессов, описывающих состояние рассматриваемой системы, то ясно, что оптимальное управление $\tilde{u}$ в исходной задаче (если оно только, конечно, существует) совпадает с оптимальным управлением в задаче минимизации функционала

$$\overline{V}(u) = \mathsf{M}\left(\sum_{t=0}^{T}(m_t^u)^* H(t)\, m_t^u + \sum_{t=0}^{T-1} u_t^* R(t)\, u_t\right). \tag{14.72}$$

При этом «управляемый» процесс m_t^u определяется из уравнения

$$\begin{aligned} m_{t+1}^u = c(t)\, u_t + a(t)\, m_t^u &+ \\ + a(t)\gamma_t A^*(t)\,[B(t)B^*(t) + A(t)\gamma_t A^*(t)]^+ &[\xi_{t+1}^u - A(t)\, m_t^u]. \end{aligned} \tag{14.73}$$

Согласно теореме 13.5 найдется последовательность независимых гауссовских векторов $\bar{\varepsilon}^u(t) = (\bar{\varepsilon}_1^u(t), \ldots, \bar{\varepsilon}_l^u(t)), t = 1, \ldots, T$, с независимыми компонентами, $\mathsf{M}\bar{\varepsilon}_i^u(t) = 0$, $\mathsf{M}(\bar{\varepsilon}_i^u(t))^2 = 1$, $i = 1, \ldots, l$, такая, что

$$m_{t+1}^u = c(t)\, u_t + a(t)\, m_t^u + D(t)\,\bar{\varepsilon}^u(t+1). \tag{14.74}$$

Важно при этом отметить, что для всех допустимых u величины $\bar{\varepsilon}^u(t)$ совпадают $(\bar{\varepsilon}^u(t) \equiv \bar{\varepsilon}(t)\, t,\ t = 1, \ldots, T)$. Вытекает это из (13.84) и того замечания, что $\theta_t^u - m_t^u$ не зависят от u (см. (14.73) и (14.55)).

Таким образом, исходная задача отыскания оптимального управления для системы (14.55) и функционала (14.57) редуцируется к задаче нахождения оптимального управления для отфильтрованной системы (14.74) с функционалом (14.72) («принцип разделения» [26]).

4. При отыскании оптимальных управлений в этой редуцированной задаче будут полезны следующие две леммы.

Лемма 14.2. *Если $u = (u_0, \ldots, u_{T-1})$ — управление, подчиняющееся условию* (14.56), *то для всякой неотрицательно определенной симметрической матрицы $S(t+1)$*

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left[(m_{t+1}^u)^* S(t+1)\, m_{t+1}^u \,\middle|\, \mathcal{F}_t^\xi\right] = \mathsf{M}\left[(m_{t+1}^u)^* S(t+1)\, m_{t+1}^u \,\middle|\, m_t^u, u_t\right] = \\ = (m_t^u)^* a^*(t) S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, c(t)\, u_t + \\ + 2u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + \operatorname{Sp} S^{1/2}(t+1)\, D(t)\, D^*(t)\, S^{1/2}(t+1). \end{aligned} \tag{14.75}$$

Доказательство. В силу (14.74)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}\left[(m_{t+1}^u)^* S(t+1)\, m_{t+1}^u \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right] = \\
&= \mathsf{M}\left\{\left[c(t)\,u_t + a(t)\,m_t^u + D(t)\,\bar{\varepsilon}(t+1)\right]^* \times \right.\\
&\left.\times S(t+1)\left[c(t)\,u_t + a(t)\,m_t^u + D(t)\,\bar{\varepsilon}(t+1)\right] \middle|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right\} = \\
&= (m_t^u)^* a^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, c(t)\, u_t + \\
&+ 2u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + \\
&+ 2\mathsf{M}\left(\bar{\varepsilon}^*(t+1) \,|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right) D^*(t)\, S(t+1)\left(c(t)\,u_t + a(t)\,m_t^u\right) + \\
&+ \mathsf{M}\left[\bar{\varepsilon}^*(t+1)\, D^*(t)\, S(t+1)\, D(t)\,\bar{\varepsilon}(t+1) \,|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right] = \\
&= (m_t^u)^* a^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, c(t)\, u_t + \\
&\qquad + 2u_t^* c(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t^u + \operatorname{Sp} S^{1/2}(t+1)\, D(t)\, D^*(t)\, \operatorname{Sp}^{1/2}(t+1),
\end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $\mathsf{M}\left(\bar{\varepsilon}(t+1) \,|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right) = 0$ и

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}\left[\bar{\varepsilon}^*(t+1)\, D^*(t)\, S(t+1)\, D(t)\,\bar{\varepsilon}(t+1) \,|\, \mathcal{F}_t^{\xi^u}\right] = \\
&\quad = \mathsf{M}\left[\bar{\varepsilon}^*(t+1)\, D^*(t)\, S(t+1)\, D(t)\,\bar{\varepsilon}(t+1)\right] = \\
&\quad = \operatorname{Sp} S^{1/2}(t+1)\, D(t)\, \mathsf{M}\bar{\varepsilon}(t+1)\,\bar{\varepsilon}^*(t+1)\, D^*(t)\, S^{1/2}(t+1) = \\
&\quad = \operatorname{Sp} S^{1/2}(t+1)\, D(t)\, D^*(t)\, S^{1/2}(t).
\end{aligned} \tag{14.76}$$

Лемма доказана.

Замечание. Пусть $\bar{\delta}(1), \ldots, \bar{\delta}(T)$ — последовательность независимых гауссовских векторов ($\bar{\delta}(t) = (\bar{\delta}_1(t), \ldots, \bar{\delta}_l(t))$) с независимыми компонентами, имеющими нулевые средние и единичные дисперсии. Рассмотрим процесс m_t, $t = 0, \ldots, T$, определяемый из рекуррентных соотношений

$$m_{t+1} = c(t)\,u_t + a(t)\,m_t + D(t)\,\bar{\delta}(t+1), \qquad m_0 = m, \tag{14.77}$$

где $u_t = u_t(\omega)$ не зависит от $\bar{\delta}(t+1)$. Как и при доказательстве соотношений (14.75), показывается, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{M}\left[m_{t+1}^* S(t+1)\, m_{t+1} \,|\, u_t, m_t\right] = \\
&\qquad = m_t^* a^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t + u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, c(t)\, u_t + \\
&+ 2u_t^* c^*(t)\, S(t+1)\, a(t)\, m_t + \operatorname{Sp} S^{1/2}(t+1)\, D(t)\, D^*(t)\, S^{1/2}(t+1).
\end{aligned} \tag{14.78}$$

Свяжем теперь с введенными выше матрицами $P(t)$ и функциями $p(t)$, $t = 0, \ldots, T$, скалярные функции

$$Q_t(x) = p(t) + x^* P(t)\, x, \tag{14.79}$$

где $x \in R^k$. Поскольку $p(T) = 0$, а $P(T) = H(T)$, то

$$Q_T(x) = x^* H(T)\, x. \tag{14.80}$$

Лемма 14.3. *Функции* $Q_t(x)$, $t=0, 1, \ldots, T$, *удовлетворяют рекуррентным уравнениям*

$$Q_t(x)=\inf_V \{x^*H(t)x+V^*R(t)V+\mathsf{M}[Q_{t+1}(x_{t+1}^{x,V})]\}, \tag{14.81}$$

где $V\in R^r$, $x\in R^k$,

$$x_{t+1}^{x,V}=c(t)V+a(t)x+D(t)\bar{\delta}(t+1). \tag{14.82}$$

При этом inf *в* (14.81) *достигается на* r-*мерном векторе*

$$\tilde{V}=-[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]^+c^*(t)P(t+1)a(t)x. \tag{14.83}$$

Доказательство. Проверим, что функции $Q_t(x)=p(t)+x^*P(t)x$ удовлетворяют уравнению (14.81), т. е. что

$$p(t)+x^*P(t)x=$$
$$=\inf_V \{x^*H(t)x+V^*R(t)V+p(t+1)+\mathsf{M}[(x_{t+1}^{x,V})^*P(t+1)x_{t+1}^{x,V}]\}. \tag{14.84}$$

Положим

$$J(V,x)=V^*[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]V+$$
$$+2V^*c^*(t)P(t+1)a(t)x. \tag{14.85}$$

Тогда с учетом замечания к лемме 14.2 находим, что (14.84) эквивалентно уравнению

$$p(t)+x^*P(t)x=$$
$$=p(t+1)+\operatorname{Sp}P^{1/2}(t+1)D(t)D^*(t)P^{1/2}(t+1)+\inf_V J(V,x).$$

Но в силу (14.62)

$$p(t)=p(t+1)+\operatorname{Sp}P^{1/2}(t+1)D(t)D^*(t)P^{1/2}(t+1).$$

Поэтому надо лишь проверить, что

$$x^*P(t)x=\inf_V J(V,x) \tag{14.86}$$

для любого $x\in R^k$.

Если матрица $R(t)$, входящая в $J(V,x)$, была бы положительно определена, то тогда $J(V,x)>-\infty$ и $\inf_V J(V,x)$ достигался бы на векторе

$$\tilde{V}=-[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]^+c^*(t)P(t+1)a(t)x \tag{14.87}$$

и непосредственно легко было бы проверить, что $J(\tilde{V},x)=x^*P(t)x$.

Для доказательства равенства (14.86) в общем случае рассмотрим систему алгебраических уравнений (относительно $V=(V_1,\ldots,V_r)$)

$$\frac{1}{2}\nabla J(V,x)=0, \tag{14.88}$$

т. е. систему

$$[R(t)+c^*(t)P(t+1)c(t)]V=-c^*(t)P(t+1)a(t)x. \quad (14.89)$$

Согласно лемме 13.3 эта система совместна и вектор $\tilde{V}$, определяемый формулой (14.83), есть одно из ее решений. Поэтому минимум квадратичной формы $J(V, x)$ достигается на векторе $\tilde{V}$, и для проверки равенства (14.86) осталось лишь установить, что $x^*P(t)x=J(\tilde{V}, x)$, т. е. что

$$x^*P(t)x=x^*[H(t)+a^*(t)P(t+1)a(t+1)-$$
$$-a^*(t)P(t+1)c(t)(R(t)+c^*(t)P(t)c(t))^+c^*(t)P(t+1)a(t)]x. \quad (14.90)$$

Справедливость этого равенства вытекает из определения матриц $P(t)$ (см. уравнение (14.59)).

5. Возвратимся к доказательству теоремы 14.2.

Рассмотрим управление $\tilde{u}=(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{T-1})$, определенное в (14.64). Тогда в силу леммы 14.3

$$-\mathsf{M}\left[Q_{t+1}(\tilde{m}_{t+1})-Q_t(\tilde{m}_t)\right]=\mathsf{M}\left[\tilde{m}_t^*H(t)\tilde{m}_t+\tilde{u}_t^*R(t)\tilde{u}_t\right]. \quad (14.91)$$

Суммируя равенство (14.91) по t от 0 до $T-1$ и учитывая, что $\tilde{m}_0=m$, находим

$$Q_0(m)=\mathsf{M}Q_T(\tilde{m}_T)+\sum_{t=0}^{T-1}\mathsf{M}\left[\tilde{m}_t^*H(t)\tilde{m}_t+\tilde{u}_t^*R(t)\tilde{u}_t\right]=$$
$$=\sum_{t=0}^{T}\mathsf{M}\tilde{m}_t^*H(t)\tilde{m}_t+\sum_{t=0}^{T-1}\mathsf{M}\tilde{u}_t^*R(t)\tilde{u}_t. \quad (14.92)$$

С другой стороны, пусть $u=(u_0, \ldots, u_{T-1})$ — любое из управлений, удовлетворяющее условию (14.56). Тогда в силу лемм 14.2 и 14.3

$$-\mathsf{M}\left[Q_{t+1}(m_{t+1}^u)-Q_t(m_t^u)\right]\leqslant\mathsf{M}\left[(m_t^u)^*H(t)m_t^u+u_t^*R(t)u_t\right],$$

откуда вытекает, что

$$Q_0(m)\leqslant\sum_{t=0}^{T}\mathsf{M}(m_t^u)^*H(t)m_t^u+\sum_{t=0}^{T-1}\mathsf{M}u_t^*R(t)u_t. \quad (14.93)$$

Сравнение (14.92) с (14.93) доказывает оптимальность управления $\tilde{u}=(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{T-1})$. Формула (14.67) следует из (14.71), (14.79) и того, что

$$V(\tilde{u})=Q_0(m)+\sum_{t=0}^{T}\operatorname{Sp}H^{1/2}(t)\gamma_tH^{1/2}(t).$$

Замечание. Пусть $\theta_0 = m$ — детерминированный вектор, $b(t) \equiv 0$. Рассмотрим задачу управления (по полным данным) детерминированным процессом θ_t, $t = 0, \ldots, T$, с

$$\theta_{t+1} = c(t)\,u_t + a(t)\,\theta_t, \qquad \theta_0 \equiv m, \tag{14.94}$$

и функционалом

$$V(u) = \sum_{t=0}^{T} \theta_t^* H(t)\,\theta_t + \sum_{t=0}^{T-1} u_t^* H(t)\,u_t. \tag{14.95}$$

В этом частном случае оптимальное управление

$$\tilde{u}_t = -\left[R(t) + c^*(t)\,P(t+1)\,c(t)\right]^+ c^*(t)\,P(t+1)\,a(t)\,\tilde{\theta}_t, \tag{14.96}$$

где

$$\tilde{\theta}_{t+1} = c(t)\,\tilde{u}_t + a(t)\,\tilde{\theta}_t, \qquad \tilde{\theta}_0 = m,$$

а

$$V(\tilde{u}) = m^* P(0)\,m. \tag{14.97}$$

§ 4. Асимптотические свойства оптимального линейного фильтра

1. Рассмотрим задачу фильтрации *) для гауссовского процесса $(\tilde{\theta}, \tilde{\xi}) = [(\tilde{\theta}_1(t), \ldots, \tilde{\theta}_k(t)), (\tilde{\xi}_1(t), \ldots, \tilde{\xi}_l(t))]$, $t = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющего рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t+1} &= a_1\tilde{\theta}_t + a_2\tilde{\xi}_t + b_1\varepsilon_1(t+1) + b_2\varepsilon_2(t+1), \\ \tilde{\xi}_{t+1} &= A_1\tilde{\theta}_t + A_2\tilde{\xi}_t + B_1\varepsilon_1(t+1) + B_2\varepsilon_2(t+1) \end{aligned} \tag{14.98}$$

с постоянными матрицами a_1, a_2, b_1, b_2, A_1, A_2, B_1 и B_2 порядков $(k \times k)$, $(k \times l)$, $(k \times k)$, $(k \times l)$, $(l \times k)$, $(l \times l)$, $(l \times k)$, $(l \times l)$ соответственно.

Обозначим $m_t = \mathsf{M}\left(\tilde{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}\right)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}\left[(\tilde{\theta}_t - \tilde{m}_t)(\tilde{\theta}_t - \tilde{m}_t)^*\right]$. Тогда согласно теореме 13.4 матрица ошибок γ_t удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1} = {} & a_1\gamma_t a_1^* + b \circ b - \\ & - \left[b \circ B + a_1\gamma_t A_1^*\right]\left[B \circ B + A_1\gamma_t A_1^*\right]^+ \left[b \circ B + a_1\gamma_t A_1^*\right]^*, \end{aligned} \tag{14.99}$$

где $b \circ b = b_1 b_1^* + b_2 b_2^*$, $b \circ B = b_1 B_1^* + b_2 B_2^*$, $B \circ B = B_1 B_1^* + B_2 B_2^*$.

В этом параграфе будет исследоваться асимптотическое поведение матриц γ_t при $t \to \infty$. В предположениях, сформулированных далее в теореме 14.3, будет показано, что $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma_t = \gamma^0$ существует и $0 < \operatorname{Sp} \gamma^0 < \infty$.

---

*) По поводу принятых далее обозначений см. § 2 гл. 13.

Факт существования такого предела имеет важное значение для приложений, поскольку в этом случае оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка m_t, $t \geqslant 0$, «отслеживает» величины $\tilde{\theta}_t$, $t \geqslant 0$, с конечной ошибкой даже и тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{k} \mathsf{M}\tilde{\theta}_j^2(t) \to \infty, \quad t \to \infty.$$

Прежде чем переходить к выяснению условий, гарантирующих существование предела $\gamma^0 = \lim_{t\to\infty} \gamma_t$, заметим, что вместо системы (14.98) достаточно рассматривать систему уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= a\theta_t + b\varepsilon_1(t+1), \\ \xi_{t+1} &= A\theta_t + B\varepsilon_2(t+1) \end{aligned} \tag{14.100}$$

с $\theta_0 = \tilde{\theta}_0$, $\xi_0 = \tilde{\xi}_0$,

$$a = a_1 - (b \circ B)(B \circ B)^+ A_1, \qquad A = A_1, \tag{14.101}$$

$$b = \left[(b \circ b) - (b \circ B)(B \circ B)^+ (b \circ B)^*\right]^{1/2}, \qquad B = (B \circ B)^{1/2}, \tag{14.102}$$

поскольку уравнения для γ_t как в случае (14.98), так и в случае (14.100) будут совпадать.

Действительно, если $m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) = \mathsf{M}(\tilde{\theta}_{t+1} \mid \mathcal{F}_{t+1}^{\xi}, \tilde{\theta}_t)$, то

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1} &= \mathsf{M}[(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{t+1})(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{t+1})^*] = \\ &= \mathsf{M}\left[\left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) + m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t+1}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) + m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t+1}\right)^*\right] = \\ &= \mathsf{M}\left[\left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)\right)\left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)\right)^*\right] + \\ &\quad + \mathsf{M}\left[\left(m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t+1}\right)\left(m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t-1}\right)^*\right]. \end{aligned}$$

В силу (13.91)

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\left[\left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)\right)\left(\tilde{\theta}_{t+1} - m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)\right)\right] &= \gamma(t+1, t) = \\ &= b \circ b - (b \circ B)(B \circ B)^+ (b \circ B)^* = bb^*, \end{aligned}$$

а из определения $m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)$ в силу замечания к теореме 13.4 следует, что

$$m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) = a_1\tilde{\theta}_t + a_2\tilde{\xi}_t + (b \circ B)(B \circ B)^+ (\tilde{\xi}_{t+1} - A_1\tilde{\theta}_t - A_2\tilde{\xi}_t).$$

Поскольку $m_{t+1} = \mathsf{M}\left[m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) \mid \mathcal{F}_{t+1}^{\xi}\right]$, то из рекуррентного уравнения для $m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t)$ получаем

$$\begin{aligned} m_{t+1} = a_1 m(t, t+1) &+ a_2\xi_t + \\ &+ (b \circ B)(B \circ B)^{-1} (\xi_{t+1} - A_1 m(t, t+1) - A_2\xi_t), \end{aligned}$$

где $m(t, t+1) = \mathsf{M}\left[\tilde{\theta}_t \,|\, \mathcal{F}^{\xi}_{t+1}\right]$. Следовательно,

$$m_{\tilde{\theta}_t}(t+1) - m_{t+1} = \left[a_1 - (b\circ B)(B\circ B)^{+} A_1\right]\left(\tilde{\theta}_t - m(t, t+1)\right) = \\ = a\left(\tilde{\theta}_t - m(t, t+1)\right),$$

и

$$\mathsf{M}\left[\left(m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t+1}\right)\left(m_{\tilde{\theta}_t}(t+1, t) - m_{t+1}\right)^{*}\right] = a\gamma(t, t+1)\, a^{*},$$

где $\gamma(t, t+1) = \mathsf{M}\left[(\tilde{\theta}_t - m(t, t+1))(\tilde{\theta}_t - m(t, t+1))^{*}\right]$. Но согласно (13.110)

$$\gamma(t, t+1) = \gamma_t - \gamma_t A_1^{*}\left[B\circ B + A_1\gamma_t A_1^{*}\right]^{+} A_1\gamma_t.$$

Значит для γ_t, $t > 0$, также справедливо рекуррентное уравнение

$$\gamma_{t+1} = \left[a_1 - (b\circ B)(B\circ B)^{+} A_1\right]\gamma_t\left[a_1 - (b\circ B)(B\circ B)^{+} A_1\right]^{*} + \\ + \left[b\circ b - (b\circ B)(B\circ B)^{+}(b\circ B)^{*}\right] - \\ - \left[a_1 - (b\circ B)(B\circ B)^{+}(b\circ B)^{*}\right]\gamma_t A_1^{*} \times \\ \times \left[B\circ B + A_1\gamma_t A_1^{*}\right]^{+} A_1\gamma_t\left[a_1 - (b\circ B)(B\circ B)^{+}(b\circ B)^{*}\right]^{*}.$$

Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться лишь система (14.100) и соответственно изучаться асимптотическое поведение матриц γ_t, удовлетворяющих рекуррентному уравнению

$$\gamma_{t+1} = a\gamma_t a^{*} + bb^{*} - a\gamma_t A^{*}\left[BB^{*} + A\gamma_t A^{*}\right]^{+} A\gamma_t a. \quad (14.103)$$

Теорема 14.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(I) *Ранг блочной матрицы*

$$G_1 = \begin{pmatrix} A \\ Aa \\ \cdots \\ Aa^{k-1} \end{pmatrix}$$

размерности $(kl \times k)$ *равен* k;

(II) *ранг блочной матрицы* $G_2 = (b\ ab \ldots a^{k-1}b)$ *размерности* $(k \times lk)$ *равен* k;

(III) *матрица* BB^{*} *не вырождена.*

Тогда существует и не зависит от γ_0 $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t = \gamma^0$. *При этом* $\mathrm{Sp}\,\gamma^0 < \infty$ *и матрица* γ^0 *является единственным решением (в классе симметрических положительно определенных матриц) матричного уравнения*

$$\gamma = a\gamma a^{*} + bb^{*} - a\gamma A^{*}\left(BB^{*} + A\gamma A^{*}\right)^{-1} A\gamma a^{*}. \quad (14.104)$$

2. Доказательству этой теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 14.4. *Пусть D и d—матрицы размерностей $(l \times k)$ и $(k \times k)$ соответственно, и пусть*

$$D_n = \begin{pmatrix} D \\ Dd \\ \cdots \\ Dd^{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant k$$

— блочные матрицы размерностей $(nl \times k)$.

Тогда матрицы $D_k^* D_k$ и $D_n^* D_n$, $n > k$, одновременно либо вырождены, либо не вырождены.

Доказательство. Из правила перемножения блочных матриц вытекает, что

$$D_n^* D_n = D_k^* D_k + \sum_{j=k}^{n-1} (d^*)^j \; D^* D d^j. \qquad (14.105)$$

Отсюда видно, что вырожденность матрицы $D_n^* D_n$ влечет за собой вырожденность матрицы $D_k^* D_k$.

Пусть теперь вырождена матрица $D_k^* D_k$. Покажем, что тогда вырождены и матрицы $D_n^* D_n$, $n > k$.

Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_k)$ некоторый вектор-столбец, не равный тождественно нулю и такой, что

$$x^* D_k^* D_k x = 0. \qquad (14.106)$$

Установим, что в этом случае $Dd^j x = 0$ для всех $j \geqslant k$. Поскольку

$$D_k^* D_k = \sum_{j=0}^{k-1} (d^*)^j \; D^* D d^j,$$

то в силу (14.106)

$$Dx = 0, \; Ddx = 0, \; \ldots, \; Dd^{k-1} x = 0. \qquad (14.107)$$

Положим

$$y_0 = x, \; y_1 = dx = dy_0, \quad y_{j+1} = dy_j, \quad j \leqslant k-1.$$

Тогда

$$Dy_0 = 0, \; Dy_1 = 0, \; \ldots, \; Dy_{k-1} = 0. \qquad (14.108)$$

Но система векторов $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$, каждый из которых имеет размерность k, линейно зависима. Поэтому найдутся числа $c_0, \ldots, c_k$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{j=0}^{k} c_j y_j = 0. \qquad (14.109)$$

Пусть $i=\max[j\leqslant k:\ c_j\neq 0]$. Тогда из (14.109) получаем

$$y_i=\sum_{j=0}^{i-1}c'_jy_j,\quad c'_j=-\frac{c_j}{c_i},$$

и, следовательно,

$$y_k=d^{k-i}y_i=\sum_{j=0}^{i-1}c'_jd^{k-i}y_j=\sum_{j=0}^{i-1}c'_jy_{k-i+j}.$$

Поэтому в силу (14.108)

$$Dd^kx=Dy^k=\sum_{j=0}^{i-1}c'_jDy_{k-i+j}=0.$$

Отсюда по индукции устанавливаем, что $Dd^jx=0$, $j\geqslant k$, что вместе с формулой (14.105) доказывает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть $D=D_{(k\times l)}$, $d=d_{(k\times k)}$—некоторые матрицы и*

$$\tilde D_n=(D\,dD,\ \dots\ d^{n-1}D)$$

—блочная матрица порядка $(k\times nl)$, $n\geqslant k$. Тогда матрицы $\tilde D_n\tilde D_n^*$ и $\tilde D_k\tilde D_k^*$ одновременно либо вырождены, либо не вырождены.

Лемма 14.5. *Пусть $\theta=[\theta_1(t),\dots,\theta_k(t)]$, $t=0, 1, \dots$, —гауссовская последовательность, удовлетворяющая рекуррентному уравнению*

$$\theta_{t+1}=a\theta_t+b\varepsilon(t+1),\quad \theta_0=0, \tag{14.110}$$

где a и b—матрицы размерностей $(k\times k)$ и $(k\times k)$ и $\varepsilon(t)$—последовательность независимых гауссовских векторов $\varepsilon(t)=(\varepsilon_1(t),\dots,\varepsilon_k(t))$ с независимыми компонентами, $\mathsf M\varepsilon_j(t)=0$, $\mathsf M\varepsilon_j^2(t)=1$, $j=1,\dots,k$, $t=0, 1, \dots$

Если блочная матрица $G_2=(b\ ab\ \dots\ a^{k-1}b)$ размерности $(k\times lk)$ имеет ранг k, то матрица $\Gamma_t=\mathsf M\theta_t\theta_t^*$ при $t\geqslant k$ является положительно определенной.

Доказательство. Из (14.110) находим

$$\Gamma_{t+1}=\mathsf M\theta_{t+1}\theta_{t+1}^*=\mathsf M[a\theta_t+b\varepsilon(t+1)][a\theta_t+b\varepsilon(t+1)]^*=$$
$$=a\mathsf M\theta_t\theta_t^*a^*+b\mathsf M\varepsilon(t+1)\varepsilon^*(t+1)b^*.$$

Поэтому

$$\Gamma_{t+1}=a\Gamma_ta^*+bb^*,\qquad \Gamma_0=0. \tag{14.111}$$

Следовательно,

$$\Gamma_1=bb^*,\quad \Gamma_2=bb^*+abb^*a^*,\ \dots,$$
$$\Gamma_t=bb^*+abb^*a^*+\ \dots\ +a^{t-1}bb^*(a^*)^{t-1}.$$

Пусть $t=k$. Тогда, очевидно, $\Gamma_t = G_2G_2^*$ и при $t>k$

$$\Gamma_t = G_2G_2^* + \sum_{j=k}^{t-1} a^j bb^* (a^*)^j. \qquad (14.112)$$

Поскольку ранг матрицы G_2 по предположению равен k, то ранг матрицы $G_2G_2^*$ также равен k. Тогда из (14.112) следует, что при $t \geqslant k$ матрица Γ_t не вырождена.

Лемма 14.6. *Пусть* $(\tilde\theta, \tilde\xi) = ([\tilde\theta_1, \ldots, \tilde\theta_n], [\tilde\xi_1, \ldots, \tilde\xi_N])$ — *гауссовский вектор с положительно определенными матрицами* *)

$$\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta) = \mathsf{M}[(\tilde\theta - \mathsf{M}\tilde\theta)(\tilde\theta - \mathsf{M}\tilde\theta)^*], \qquad (14.113)$$

$$\operatorname{cov}(\tilde\xi, \tilde\xi \mid \tilde\theta) = \mathsf{M}[(\tilde\xi - \mathsf{M}(\tilde\xi \mid \tilde\theta))(\tilde\xi - \mathsf{M}(\tilde\xi \mid \tilde\theta))^*]. \qquad (14.114)$$

Тогда матрица

$$\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta \mid \tilde\xi) = \mathsf{M}[(\tilde\theta - \mathsf{M}(\tilde\theta \mid \tilde\xi))(\tilde\theta - \mathsf{M}(\tilde\theta \mid \tilde\xi))^*] \qquad (14.115)$$

также положительно определенная.

Доказательство. В силу невырожденности матриц (14.113) и (14.114) у гауссовских распределений **) $\mathsf{P}(\tilde\theta \leqslant a)$ и $\mathsf{P}(\tilde\xi \leqslant b \mid \tilde\theta = a)$ существуют плотности $f_{\tilde\theta}(a)$ и $f_{\tilde\xi \mid \tilde\theta}(b \mid a)$. Отсюда легко выводится, что существует и плотность $f_{\tilde\xi}(b)$. Поэтому из формулы Байеса вытекает, что у распределения $\mathsf{P}(\tilde\theta \leqslant a \mid \tilde\xi)$ также существует плотность $f_{\tilde\theta \mid \tilde\xi}(a \mid b)$, причем

$$f_{\tilde\theta \mid \tilde\xi}(a \mid b) = \frac{f_{\tilde\xi \mid \tilde\theta}(b \mid a) f_{\tilde\theta}(a)}{f_{\tilde\xi}(b)}.$$

Из факта существования этой (гауссовской) плотности следует, что отвечающая ей матрица ковариаций $\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta \mid \tilde\xi)$ не вырождена, а следовательно, является положительно определенной.

Лемма 14.7. *Пусть* γ_t^0, $t=0, 1, \ldots,$ — *решение уравнения*

$$\gamma_{t+1} = a\gamma_t a^* + bb^* - a\gamma_t A^*(BB^* + A\gamma_t A^*)^+ A\gamma_t a^* \qquad (14.116)$$

с начальным условием $\gamma_0^0 = 0$ (0 — *нулевая матрица порядка* $(k \times k)$). *Если матрица* BB^* *положительно определенная, а ранг матрицы* G_2 *равен* k, *то матрица* γ_k^0 *положительно определена.*

Доказательство. Пусть θ_t^0, $t=0, 1, \ldots,$ является решением уравнения

$$\theta_{t+1} = a\theta_t + b\varepsilon_1(t+1) \qquad (14.117)$$

---

*) По теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1) матрицы $\operatorname{cov}(\tilde\xi, \tilde\xi \mid \tilde\theta)$, $\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta \mid \tilde\xi)$ не зависят от $\tilde\theta$ и $\tilde\xi$ соответственно.

**) Запись $\{\tilde\theta \leqslant a\}$ обозначает событие $\{\tilde\theta_1 \leqslant a_1, \ldots, \tilde\theta_n \leqslant a_n\}$.

(см. (14.100)) с $\theta_0 = 0$. Тогда $\gamma_t^0 = \mathsf{M}\left[(\theta_t^0 - m_t^0)(\theta_t^0 - m_t^0)^*\right]$, $m_t^0 = \mathsf{M}(\theta_t^0 \mid \mathcal{F}_t^\xi)$, где

$$\xi_{t+1} = A\theta_t^0 + B\varepsilon_2(t+1). \tag{14.118}$$

Обозначим $\tilde\theta = \theta_k^0$, $\tilde\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\hat\theta = (\theta_0^0, \theta_1^0, \ldots, \theta_{k-1}^0)$, $\tilde\varepsilon = (\varepsilon_2(1), \ldots, \varepsilon_2(k))$. И пусть

$$\tilde B = \operatorname{diag}(B \ldots B), \qquad \tilde a = \operatorname{diag}(a \ldots a)$$

— блочно-диагональные матрицы, у которых отличны от нуля лишь блоки, стоящие на диагоналях, равные соответственно матрицам B и a. Тогда систему уравнений (14.118) для $t = 0, 1, \ldots, k-1$ можно представить в виде $\tilde\xi = \tilde a\hat\theta + \tilde B\tilde\varepsilon$. Векторы $(\tilde\theta, \hat\theta)$ и $\tilde\varepsilon$ независимы, поскольку независимы последовательности $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$\mathsf{M}(\tilde\xi \mid \tilde\theta) = \tilde a \mathsf{M}(\hat\theta \mid \tilde\theta)$$

и

$$\tilde\xi - \mathsf{M}(\tilde\xi \mid \tilde\theta) = \tilde a\left[\hat\theta - \mathsf{M}(\hat\theta \mid \tilde\theta)\right] + \tilde B\tilde\varepsilon.$$

Отсюда в силу независимости векторов $\tilde\theta$ и $\tilde\varepsilon$ получаем

$$\operatorname{cov}(\tilde\xi, \tilde\xi \mid \tilde\theta) = \tilde a \operatorname{cov}(\hat\theta, \hat\theta \mid \tilde\theta)\tilde a^* + \tilde B\tilde B^*.$$

Поскольку матрица BB^* не вырождена, то не вырождена и матрица $\tilde B\tilde B^* = \operatorname{diag}(BB^* \ldots BB^*)$. Далее, матрица $\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta) = \mathsf{M}\theta_k^0(\theta_k^0)^*$ является невырожденной по лемме 14.5. Поэтому по лемме 14.6 будет не вырождена и матрица

$$\operatorname{cov}(\tilde\theta, \tilde\theta \mid \tilde\xi) = \mathsf{M}\left[(\theta_k^0 - M(\theta_k^0 \mid \mathcal{F}_k^\xi))(\theta_k^0 - \mathsf{M}(\theta_k^0 \mid \mathcal{F}_k^\xi))^*\right] = \gamma_k^0,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 14.8. *Если ранг матрицы G_1 равен k, то для любого вектора $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $|x_i| < \infty$, $i = 1, \ldots, k$,*

$$\sup_{t \geqslant 0} x^*\gamma_t x < \infty. \tag{14.119}$$

Доказательство. Пусть $x_t = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, $t = 0, 1, \ldots, T > k$, — управляемый процесс, удовлетворяющий рекуррентному уравнению $x_{t+1} = a^*x_t + A^*u_t$, $x_0 = x$, где управление $u_t = (u_1(t, x_0, \ldots, x_t), \ldots, u_l(t, x_0, \ldots, x_t))$ выбирается так, чтобы минимизировать функционал

$$V_T(x; u) = x_T^*\gamma_0 x_T + \sum_{t=0}^{T-1}\left[x_t^* bb^* x_t + u_t^* BB^* u_t\right]. \tag{14.120}$$

Согласно замечанию к теореме 14.2 оптимальное управление $\tilde u_t$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, существует и задается формулой

$$\tilde u_t = -\left[BB^* + AP(t+1)A^*\right]^+ AP(t+1)a^*\tilde x_t,$$

где $\tilde{x}_{t+1} = a^*\tilde{x}_t + A^*\tilde{u}_t$ и

$$P(t) = bb^* + aP(t+1)\,a^* - aP(t+1)\,A^*[BB^* + AP(t+1)\,A^*]^+ \times \times AP(t+1)\,a^*, \quad P(T) = \gamma_0. \tag{14.121}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (14.103), убеждаемся в том, что

$$P(t) = \gamma_{T-t}. \tag{14.122}$$

Поскольку (см. (14.94)) для оптимального управления $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{T-1})$

$$V_T(x, \tilde{u}) = x^*P(0)\,x = x^*\gamma_T x,$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что

$$V_T(x; \tilde{u}) \leqslant c < \infty, \tag{14.123}$$

где постоянная c не зависит от T.

По условиям леммы матрица G_1 имеет ранг k. Поэтому матрица $G_1^*G_1$ не вырождена.

Рассмотрим управление $\hat{u}_t = (\hat{u}_t(t, x_0), \ldots, \hat{u}_l(t, x_0))$, определенное следующим образом:

$$\hat{u}_t = \begin{cases} -Aa^{k-t-1}\,(G_1^*G_1)^{-1}\,(a^*)^k\,x_0, & t \leqslant k, \\ 0, & t > k. \end{cases}$$

Соответствующий управляемый процесс $\hat{x}_t$, $t = 0, 1, \ldots$, $\hat{x}_{t+1} = a^*\hat{x}_t + A^*\hat{u}_t$, ровно за k шагов попадает в начало координат, поскольку

$$\hat{x}_k = (a^*)^k\,x_0 + \sum_{t=0}^{k-1} (a^*)^{k-t-1}\,A^*\hat{u}_t =$$
$$= (a^*)^k \left\{ E - \left[\sum_{t=0}^{k-1} (a^*)^{k-t-1}\,A^*Aa^{k-t-1} \right] (G_1^*G_1)^{-1} \right\} x_0 =$$
$$= (a^*)^k \left\{ E - (G_1^*G_1)\,(G_1^*G_1)^{-1} \right\} x_0 = 0.$$

Рассмотрим функционал $V_T(x, \hat{u})$. Так как $\hat{u}_t = 0$, $\hat{x}_t = 0$, $t > k$, то $\sup\limits_{T > k} V_T(x, \hat{u}) < \infty$. Но в силу оптимальности управления $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{T-1})$

$$\sup_{T \geqslant k} V_T(x, \tilde{u}) \leqslant \sup_{T \geqslant k} V_T(x, \hat{u}).$$

Поэтому

$$\sup_{T \geqslant 0} x^*\gamma_T x = \sup_{T \geqslant 0} V_T(x, \tilde{u}) \leqslant \sup_{T \geqslant 0} V_T(x, \hat{u}) = \max_{0 \leqslant T \leqslant k} V_T(x, \hat{u}) < \infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 14.9. *Пусть γ_t^0, $t=0, 1, \ldots,$ — решение уравнения* (14.116) *с начальным условием $\gamma_0^0=0$. Если ранг матрицы G_1 равен k, то существует*

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_t^0 = \gamma^0, \tag{14.124}$$

где γ^0 — неотрицательно определенная симметрическая матрица с $\mathrm{Sp}\,\gamma^0 < \infty$. Если к тому же и ранг матрицы G_2 равен k, а матрица BB^* не вырождена, то матрица γ^0 положительно определенная.

Доказательство. Согласно лемме 14.8 величины $x^*\gamma_T x$ ограничены для любого $T\geqslant 0$ ($|x_i|<\infty$, $i=1, \ldots, k$). Покажем, что эти величины являются монотонно неубывающими функциями T.

Пусть $T_2 > T_1$, $\tilde u^0(T_1)$ и $\tilde u^0(T_2)$ — оптимальные управления, отвечающие длительностям наблюдения T_1 и T_2 соответственно. Тогда, если $\tilde x_t^0(T_1)$ и $\tilde x_t^0(T_2)$ — траектории управляемых процессов для управлений $\tilde u^0(T_1)$ и $\tilde u^0(T_2)$ соответственно*), то

$$\begin{aligned} x^*\gamma_{T_2}^0 x &= V_{T_2}^0(x;\ \tilde u^0(T_2)) = \\ &= \sum_{t=0}^{T_2-1}\left[(\tilde x_t^0(T_2))^*\, bb^*\,(\tilde x_t^0(T_2)) + (\tilde u_t^0(T_2))^*\, BB^*\,(\tilde u_t^0(T_2))\right] \geqslant \\ &\geqslant \sum_{t=0}^{T_1-1}\left[(\tilde x_t^0(T_2))^*\, bb^*\,(\tilde x_t^0(T_2)) + (\tilde u_t^0(T_2))^*\, BB^*\,(\tilde u_t^0(T_2))\right] \geqslant \\ &\geqslant V_{T_1}^0(x;\ \tilde u^0(T_1)) = x^*\gamma_{T_1} x. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\tilde u^0(T_n)$ — оптимальное управление на интервале T_n, а $T_{n+1}=T_n+1$, то

$$V_{T_1}^0(x;\ \tilde u^0(T_1)) \leqslant V_{T_2}^0(x;\ \tilde u^0(T_2)) \leqslant \ldots \leqslant V_{T_n}^0(x;\ \tilde u^0(T_n)),$$

и в силу равномерной (по T_n) ограниченности величин $V_{T_n}^0(x,\ \tilde u^0(T_n))$ существует $\lim\limits_{T_n\to\infty} V_{T_n}^0(x;\ \tilde u^0(T_n)) = x^*\gamma^0 x$.

Отсюда в силу произвольности вектора x ясно, что предельная матрица γ^0 является симметрической, неотрицательно определенной и $\mathrm{Sp}\,\gamma^0 < \infty$.

Если, наконец, $\mathrm{rang}\, G_2 = k$, а матрица BB^* не вырождена, то по лемме 14.7 для любого ненулевого вектора x $x^*\gamma_k x > 0$. Но величины $x^*\gamma_T x$ являются монотонно неубывающими. Поэтому для любого ненулевого вектора x $x^*\gamma_T x > 0$, $T > k$, что и доказывает положительную определенность матрицы γ^0.

---

*) Индекс 0 у $V_T^0(x,\ \cdot)$, $\tilde u^0(T)$, $\tilde x_t^0(T)$ указывает на то, что $\gamma_0 = 0$.

3. Доказательство теоремы 14.3. Возьмем управление

$$\bar{u}_t = -[BB^* + A\gamma^0 A^*]^{-1} A\gamma^0 a^* \bar{x}_t, \tag{14.125}$$

где

$$\bar{x}_{t+1} = a^* \bar{x}_t + A^* \bar{u}_t \tag{14.126}$$

и матрица γ^0 определяется из (14.124). Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}_t^* \gamma^0 \bar{x}_t = 0. \tag{14.127}$$

В силу (14.125) и (14.126)

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1}^*\gamma^0\bar{x}_{t+1} &= \{\bar{x}_t^* a + \bar{u}_t^* A\}\gamma^0\{a^*\bar{x}_t + A^*\bar{u}_t\} = \\ &= \bar{x}_t^*\{a\gamma^0 a^* - 2a\gamma^0 A^*(BB^* + A\gamma^0 A^*)^{-1} A\gamma^0 a^* + \\ &+ a\gamma^0 A(BB^* + A\gamma^0 A^*)^{-1}[BB^* + A\gamma^0 A - BB^*](BB^* + A\gamma^0 A^*)^{-1} \times \\ &\times A\gamma^0 a^*\} x_t - \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t = \\ &= \bar{x}_t^*\{a\gamma^0 a^* - a\gamma^0 A^*(BB^* + A\gamma^0 A^*)^{-1} A\gamma^0 a^*\}\bar{x}_t - \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t. \end{aligned} \tag{14.128}$$

Поскольку γ^0 есть предел последовательности матриц γ_t^0, удовлстворяющих уравнениям (14.116), а матрица BB^* невырожденная, то γ^0 является решением уравнения

$$\gamma^0 = a\gamma^0 a^* + bb^* - a\gamma^0 A^*(BB^* + A\gamma^0 A^*)^{-1} A\gamma^0 a^*.$$

Отсюда и из (14.128) находим

$$\bar{x}_{t+1}^*\gamma^0\bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t^*\gamma^0\bar{x}_t = -[\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t].$$

Следовательно, согласно лемме 14.9

$$0 \leqslant \bar{x}_T^*\gamma^0\bar{x}_T = x^*\gamma^0 x - \sum_{t=0}^{T-1}[\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t] \leqslant$$
$$\leqslant x^*\gamma^0 x - V_T^0(x;\ \tilde{u}^0(T)) \to 0, \quad T\to\infty.$$

Теперь ясно, что поскольку матрица γ^0 не вырождена (лемма 14.9), то

$$\lim_{T\to\infty} \bar{x}_T = 0 \tag{14.129}$$

и

$$\lim_{T\to\infty} V_T^0(x;\ \tilde{u}^0(T)) = x^*\gamma^0 x = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1}[\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t]. \tag{14.130}$$

Пусть теперь γ_0 — (не обязательно нулевая) неотрицательно определенная симметрическая матрица. Тогда в силу (14.120)

$$V_T^0(x;\ \tilde{u}^0(T)) \leqslant V_T(x;\ \tilde{u}(T)) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{x}_T^*\gamma_0\bar{x}_T + \sum_{t=0}^{T-1}[\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t]. \tag{14.131}$$

Переходя в этих неравенствах к пределу ($T \to \infty$), находим с учетом (14.129) и (14.130), что

$$\lim_{T\to\infty} x^*\gamma_T x = \lim_{T\to\infty} V_T(x;\ \tilde{u}(T)) = \lim_{T\to\infty} V_T^0(x;\ \tilde{u}^0(T)) = x^*\gamma^0 x. \qquad (14.132)$$

Следовательно, в силу произвольности вектора x $\lim\limits_{T\to\infty}\gamma_T = \gamma^0$ существует. При этом γ^0 не зависит от начальной матрицы γ_0.

Выше уже отмечалось, что γ^0 является положительно определенным решением матричного уравнения (14.104). Покажем, что в классе положительно определенных симметрических матриц это решение является единственным.

Действительно, пусть $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ — два таких решения. Обозначим $\gamma_t^{(i)}$, $t \geqslant 0$, решения уравнений (14.103) с $\gamma_0^{(1)} = \gamma^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)} = \gamma^{(2)}$ соответственно. Тогда согласно доказанному

$$\lim_{T\to\infty}\gamma_T^{(i)} = \gamma^0 = \gamma^{(i)}, \qquad i = 1,\ 2.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\sup\limits_{t\geqslant 0}\operatorname{Sp}\mathsf{M}\theta_t\theta_t^* < \infty$, то в формулировке теоремы 14.3 можно отказаться от предположения (I), поскольку $\operatorname{Sp}\gamma_t \leqslant \operatorname{Sp}\mathsf{M}\theta_t\theta_t^*$.

Замечание 2. Пусть процесс $(\theta_t, \xi_t) = ([\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)], [\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)])$ удовлетворяет рекуррентным уравнениям (задача Калмана — Бьюси)

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= a_1\theta_t + b_1\varepsilon_1(t+1), \\ \xi_t &= A_1\theta_t + B_1\varepsilon_2(t) \end{aligned} \qquad (14.133)$$

ср. с (14.100)). Чтобы в терминах матриц a_1, b_1, A_1 и B_1 сформулировать условия, обеспечивающие существование предела $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t$, достаточно заметить следующее. Поскольку

$$\xi_{t+1} = A_1a_1\theta_t + A_1b_1\varepsilon_1(t+1) + B_1\varepsilon_2(t+1),$$

то, полагая

$$\begin{aligned} a &= a_1 - b_1b_1^*A_1[A_1b_1b_1^*A_1^* + B_1B_1^*]^{-1}A_1a_1, \\ A &= A_1a_1, \\ b &= [b_1b_1^* - b_1b_1^*A_1^*(A_1b_1b_1^*A_1^* + B_1B_1^*)^{-1}A_1b_1b_1^*]^{1/2}, \\ B &= (A_1b_1b_1^*A_1^* + B_1B_1^*)^{1/2}, \end{aligned}$$

сводим задачу исследования существования $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_t$ к уже изученной задаче для системы (14.100).

4. Пример 3. Пусть θ_t и ξ_t — одномерные процессы с

$$\theta_{t+1} = a\theta_t + b\varepsilon_1(t+1), \qquad \xi_{t+1} = A\theta_t + B\varepsilon_2(t+1).$$

Тогда, если $A \neq 0$, $b \neq 0$, $B \neq 0$, то выполнены условия теоремы 14.3 и предельная ошибка фильтрации $\gamma^0 = \lim_{t \to \infty} \gamma_t$ ($\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)^2$, $m_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \xi_0, \ldots, \xi_t)$) определяется как положительный корень квадратного уравнения

$$\gamma^2 + \left[\frac{B^2(1-a^2)}{A^2} - b^2\right]\gamma - \frac{b^2B^2}{A^2} = 0.$$

§ 5. Рекуррентное вычисление наилучших приближенных решений (псевдорешений) линейных алгебраических систем

1. Пусть заданы вектор $y = (y_1, \ldots, y_k)$ и матрица $A = \| a_{ij} \|$ порядка $(k \times n)$ и $\operatorname{rang} A \leqslant \min(k, n)$. Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = y, \tag{14.134}$$

вообще говоря, может не иметь решений, а если и имеет, то решение может быть не единственным.

Говорят, что вектор x^0 есть наилучшее приближенное решение (псевдорешение) системы (14.134), если

$$| y - Ax^0 |^2 = \inf_x | y - Ax |^2 \tag{14.135}$$

и, если также $| y - Ax' | = \inf_x |y - Ax|$, то

$$| x^0 |^2 \leqslant | x' |^2, \tag{14.136}$$

где $| y - Ax |^2 = \sum_{i=1}^{k} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right|^2$, $| x |^2 = \sum_{j=1}^{n} | x_j |^2$.

Иначе говоря, псевдорешение есть приближенное решение, имеющее наименьшую «длину».

Хорошо известно *), что такое решение x^0 задается формулой

$$x^0 = A^+ y, \tag{14.137}$$

где A^+ — матрица, псевдообратная к матрице A (см. § 1 гл. 13).

Из (14.137) видно, что для отыскания псевдорешений требуется находить псевдообратную матрицу A^+. Однако, как будет показано в этом параграфе, используя уравнения оптимальной фильтрации (13.56), (13.57), можно предложить рекуррентную процедуру нахождения псевдорешений, не требующую «псевдообращения» матрицы A.

2. Начнем с того случая, когда система алгебраических уравнений $Ax = y$ совместна ($k \leqslant n$). В этом случае псевдоре-

*) См., например, § 5 гл. 1 в [30].

шение $x^0 = A^+ y$ выделяется среди всех решений x тем, что его длина является наименьшей, т. е. $|x^0| \leqslant |x|$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $t = 1, 2, \ldots, k$ — номера строк матрицы A, a_t — строки матрицы A,

$$A_t = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_t \end{pmatrix},$$

y_t — элементы вектора y, $t = 1, \ldots, k$,

$$y^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим для каждого t (совместные) системы линейных алгебраических уравнений *)

$$A_t x = y^t. \tag{14.138}$$

Положим также

$$x_t = A_t^+ y^t, \qquad \gamma_t = E - A_t^+ A_t. \tag{14.139}$$

Теорема 14.4. *Векторы x_t и матрицы γ_t, $t = 1, \ldots, k$, удовлетворяют системе рекуррентных уравнений*

$$x_{t+1} = x_t + \gamma_t a_{t+1}^* (a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*)^+ (y_{t+1} - a_{t+1} x_t), \quad x_0 = 0, \tag{14.140}$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \gamma_t a_{t+1}^* (a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*)^+ a_{t+1} \gamma_t, \quad \gamma_0 = E, \tag{14.141}$$

где

$$(a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*)^+ = \begin{cases} [a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*]^{-1}, & a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^* > 0, \\ 0, & a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^* = 0, \end{cases} \tag{14.142}$$

и вектор x_k совпадает с псевдорешением x^0.

Если $\operatorname{rang} A = k$, *то* $(a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*)^+ = (a_{t+1} \gamma_t a_{t+1}^*)^{-1}$ *при всех* $t = 0, \ldots, k-1$.

Доказательство. Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — гауссовский вектор с $\mathsf{M}\theta = 0$, $\mathsf{M}\theta\theta^* = E$, и пусть

$$\xi^t = A_t \theta. \tag{14.143}$$

Тогда по теореме о нормальной корреляции (теорема 13.1) и в силу того, что $\mathsf{M}\xi^t = 0$, $\mathsf{M}\theta (\xi^t)^* = A_t^*$, $\mathsf{M}(\xi^t)(\xi^t)^* = A_t A_t^*$,

$$m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \xi^t) = A_t^* (A_t A_t^*)^+ \xi^t.$$

*) Размерность вектора x равна n при любом t.

Но по свойству 6° псевдообратных матриц (см. § 1 гл. 13) $A_t^*(A_tA_t^*)^+ = A_t^+$. Поэтому

$$m_t = A_t^+\xi^t. \tag{14.144}$$

Далее, опять-таки по теореме о нормальной корреляции

$$\gamma_t = E - A_t^+A_t = E - A_t^*(A_tA_t^*)^+A_t =$$
$$= \mathsf{M}\theta\theta^* - \mathsf{M}\theta(\xi^t)^*(\mathsf{M}(\xi^t)(\xi^t)^*)^+(\mathsf{M}\theta(\xi^t)^*)^* = \mathsf{M}[(\theta - m_t)(\theta - m_t)^*]. \tag{14.145}$$

С другой стороны, систему уравнений (14.143) можно представить в следующем эквивалентном виде, принятом в рассмотренной выше схеме фильтрации:

$$\theta_{t+1} = \theta_t, \quad \theta_0 = \theta; \quad \xi_{t+1} = a_{t+1}\theta, \ \xi_0 = 0 \tag{14.146}$$

(ср. с системой (13.46), (13.47)). Из уравнений фильтрации (13.56) и (13.57) применительно к схеме (14.146) находим, что

$$m_{t+1} = m_t + \gamma_t a_{t+1}^*(a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*)^+(\xi_{t+1} - a_{t+1}m_t), \qquad m_0 = 0, \tag{14.147}$$

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \gamma_t a_{t+1}^*(a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*)^+ a_{t+1}\gamma_t, \qquad \gamma_0 = E. \tag{14.148}$$

Итак, требуемое рекуррентное уравнение (14.141) для γ_t установлено. Чтобы теперь из (14.147) вывести уравнение (14.140), поступим следующим образом.

Пусть $z = \theta^* x$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\xi^t z &= \mathsf{M}A_t\theta\theta^* x = A_t x = y^t, \\ \mathsf{M}\xi_t z &= \mathsf{M}a_t\theta\theta^* x = a_t x = y_t, \\ \mathsf{M}m_t z &= \mathsf{M}A_t^+\xi^t z = A_t^+\mathsf{M}\xi^t z = A_t^+ y^t = x_t. \end{aligned} \tag{14.149}$$

Умножая левую и правую части (14.147) на z и беря затем математическое ожидание от полученных выражений, находим

$$\mathsf{M}m_{t+1}z = \mathsf{M}m_t z + \gamma_t a_{t+1}^*(a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*)^+[\mathsf{M}\xi_{t+1}z - a_{t+1}\mathsf{M}m_t z],$$

что вместе с (14.149) приводит к искомому уравнению (14.140).

Из (14.139) и (14.137) вытекает также, что $x_k = x^0$.

Для доказательства заключительной части теоремы положим для данного t

$$b = a_{t+1} - \sum_{s=1}^{t} c_s a_s, \tag{14.150}$$

где числа $c_1, \ldots, c_t$ выбраны так, чтобы величина bb^* была минимальной. Обозначая c вектор-строку $(c_1, \ldots, c_t)$, запишем (14.150) в векторной форме:

$$b = a_{t+1} - cA_t. \tag{14.151}$$

Тогда

$$bb^* = a_{t+1}a_{t+1}^* - 2a_{t+1}A_t^*c^* + cA_tA_t^*c.$$

Отсюда в силу минимальности величины bb^* вытекает, что вектор $c = (c_1, \ldots, c_t)$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений $c(A_tA_t^*) = a_{t+1}A_t^*$, и, следовательно,

$$c = a_{t+1}A_t^*(A_tA_t^*)^+ = a_{t+1}A_t^+. \qquad (14.152)$$

Из (14.151) и (14.152) следует, что

$$b = a_{t+1}(E - A_t^+A_t)$$

и

$$bb^* = a_{t+1}(E - 2A_t^+A_t + (A_t^+A_t)^2)a_{t+1}^* = \\ = a_{t+1}(E - A_t^+A_t)\,a_{t+1}^* = a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*,$$

где мы воспользовались свойством 4° псевдообратных матриц (§ 1 гл. 13).

Если ранг матрицы A равен k, то ранги матриц A_t, $t = 1, \ldots, k$, равны t. Поэтому при любом $t = 1, \ldots, k$ строка a_{t+1} не является линейной комбинацией строк $a_1, \ldots, a_t$, и, следовательно, $bb^* > 0$. Но $bb^* = a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*$, поэтому $a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^* > 0$.

Теорема доказана.

3. Обратимся теперь к тому случаю, когда система алгебраических уравнений $Ax = y$ несовместна. Оказывается, что и в этом случае для отыскания псевдорешения $x^0 = A^+y$ можно построить рекуррентную процедуру, не требующую «псевдообращения» матрицы A.

Будем предполагать, что матрица $A = \|a_{ij}\|$ имеет порядок $(k \times n)$. При описании рекуррентных процедур существенно различать случаи $k \leqslant n$ и $k > n$. Рассмотрим здесь лишь случай $k \leqslant n$.

Теорема 14.5. *Пусть $k \leqslant n$ и* $\operatorname{rang} A = k$. *Тогда псевдорешение $x^0 = A^+y$ совпадает с вектором x_k, найденным из системы рекуррентных уравнений* (14.140), (14.141).

Для доказательства нам потребуется

Лемма 14.10. *Пусть B — матрица порядка $(m \times n)$ и E — единичная матрица порядка $(n \times n)$. Тогда*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} (\alpha E + B^*B)^{-1}B^* = B^+, \qquad (14.153)$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} (\alpha E + B^*B)^{-1}\alpha = E - B^+B. \qquad (14.154)$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta(\alpha) \equiv B^+ - (\alpha E + B^*B)^{-1} B^* = (\alpha E + B^*B)^{-1}[(\alpha E + B^*B) B^+ - B^*] =$$
$$= (\alpha E + B^*B)^{-1} [\alpha B^+ + \alpha B^*BB^+ - \alpha B^*].$$

Но $B^*BB^+ = B^*$ (свойство 7°, § 1 гл. 13). Поэтому

$$\Delta(\alpha) = \alpha(\alpha E + B^*B)^{-1} B^+$$

и

$$\Delta(\alpha)(\Delta(\alpha))^* = \alpha^2 (\alpha E + B^*B)^{-1} (B^*B)^+ (\alpha E + B^*B)^{-1}, \quad (14.155)$$

поскольку $B^+(B^+)^* = (B^*B)^+$ (свойство 5°, § 1 гл. 13).

Если B^*B — диагональная матрица, то справедливость (14.153) следует из (14.155), поскольку нули на диагоналях матриц B^*B и $(B^*B)^+$ совпадают. В противном случае с помощью ортогонального преобразования $S(S^* = S^{-1})$ получаем

$$S^*(B^*B)S = \operatorname{diag}(B^*B), \quad S^*(B^*B)^+ S = \operatorname{diag}(B^*B)^+$$

и

$$S^*\Delta(\alpha)(\Delta(\alpha))^*S =$$
$$= \alpha[\alpha E + \operatorname{diag}(B^*B)]^{-1} \operatorname{diag}(B^*B)^+ [\alpha E + \operatorname{diag}(B^*B)]^{-1} \to 0, \alpha \downarrow 0.$$

Отсюда в силу невырожденности матрицы S получаем

$$\Delta(\alpha)(\Delta(\alpha))^* \to 0, \qquad \alpha \downarrow 0.$$

Итак, (14.153) установлено.

Для доказательства (14.154) надо теперь лишь заметить, что в силу (14.153)

$$E - B^+B = E - \lim_{\alpha \downarrow 0} (\alpha E + B^*B)^{-1} B^*B =$$
$$= E - \lim_{\alpha \downarrow 0} (\alpha E + B^*B)^{-1} (B^*B + \alpha E - \alpha E) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (\alpha E + B^*B)^{-1} \alpha.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 14.5. Если система $Ax = y$ совместна, то требуемое утверждение вытекает из теоремы 14.4. Перейдем к рассмотрению общего случая.

Покажем прежде всего, что вектор $x_t = A_t^+ y^t$ можно получить следующим образом:

$$x_t = \lim_{\alpha \downarrow 0} x_t^\alpha, \quad (14.156)$$

где x_t^α, $\alpha > 0$, есть решение совместной системы линейных уравнений

$$(\alpha E + A_t^* A_t) x_t^\alpha = A_t^* y^t. \quad (14.157)$$

Действительно, пусть вектор $x_t^\alpha(t)=\left(x_1^\alpha(t), \ldots, x_n^\alpha(t)\right)$ минимизирует функционал

$$J(x^\alpha)=\sum_{s=1}^{t}\left[a_s x^\alpha-y_s\right]^2+\alpha\sum_{j=1}^{m}(x_j^\alpha)^2,$$

где $x^\alpha=\left(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha\right)$. Тогда нетрудно видеть, что

$$x_t^\alpha=\left(\alpha E+A_t^* A_t\right)^{-1} A_t^* y^t. \tag{14.158}$$

Отсюда непосредственно следует, что x_t^α является решением совместной системы уравнений (14.157). Но по лемме 14.10

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\left(\alpha E+A_t^* A_t\right)^{-1} A_t^*=A_t^+,$$

что вместе с (14.158) и доказывает равенство $x_t=\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} x_t^\alpha$.

Выведем теперь рекуррентные уравнения для векторов x_t^α, $t\leqslant k$. Для этого воспользуемся приемом, примененным при доказательстве предыдущей теоремы.

Пусть $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — гауссовский вектор с $\mathsf{M}\theta=0$, $\mathsf{M}\theta\theta^*=E$, и пусть ε_t, $t=1, \ldots, k$, — гауссовская последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{M}\varepsilon_t=0$, $\mathsf{M}\varepsilon_t^2=1$, не зависящих от вектора θ.

Положим

$$\xi_{t+1}=a_{t+1}\theta_t+\alpha^{1/2}\varepsilon_{t+1}, \qquad \alpha>0, \tag{14.159}$$

где $\theta_t\equiv\theta$. Тогда $m_t^\alpha=\mathsf{M}\left(\theta_t \mid \xi_1, \ldots, \xi_t\right)=\mathsf{M}\left(\theta \mid \xi_1, \ldots, \xi_t\right)$, $\gamma_t^\alpha=\mathsf{M}\left[(\theta-m_t^\alpha)(\theta-m_t^\alpha)^*\right]$ согласно теореме 13.4 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$m_{t+1}^\alpha=m_t^\alpha+\frac{\gamma_t^\alpha a_{t+1}^*}{\alpha+a_{t+1}\gamma_t^\alpha a_{t+1}^*}\left(\xi_{t+1}-a_{t+1}m_t^\alpha\right), \quad m_0^\alpha=0, \tag{14.160}$$

$$\gamma_{t+1}^\alpha=\gamma_t^\alpha-\frac{\gamma_t^\alpha a_{t+1}^* a_{t+1}\gamma_t^\alpha}{\alpha+a_{t+1}\gamma_t^\alpha a_{t+1}^*}, \quad \gamma_0^\alpha=E. \tag{14.161}$$

Согласно теореме 13.15 решения m_t^α и γ_t^α этих уравнений задаются формулами

$$m_t^\alpha=\left(\alpha E+A_t^* A_t\right)^{-1}\sum_{s=0}^{t-1} a_{s+1}^*\xi_{s+1}=\left(\alpha E+A_t^* A_t\right)^{-1} A_t^*\xi^t, \tag{14.162}$$

$$\gamma_t^\alpha=\alpha\left(\alpha E+\sum_{s=0}^{t-1} a_{s+1}^* a_{s+1}\right)^{-1}=\alpha\left(\alpha E+A_t^* A_t\right)^{-1}. \tag{14.163}$$

Пусть $\Delta_t^\alpha = y_t - a_t x_t^\alpha$, $\Delta^\alpha = (\Delta_1^\alpha, \ldots, \Delta_k^\alpha)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ и $E_t\Delta^\alpha = y^t - A_t x^\alpha$, где E_t — матрица, образованная первыми t строками единичной матрицы E размерности $(k \times k)$. Положим $z = \theta^* x^\alpha + \alpha^{-1/2}\varepsilon^*\Delta^\alpha$. Тогда

$$\mathsf{M}\xi_t z = \mathsf{M}\left[a_t\theta + \alpha^{1/2}\varepsilon_t\right]\left[\theta^* x^\alpha + \alpha^{-1/2}\varepsilon^*\Delta^\alpha\right] = a_t x^\alpha + \Delta_t^\alpha = y_t,$$

$$\mathsf{M}\xi^t z = \mathsf{M}\left[A_t\theta + \alpha^{1/2}E_t\Delta^\alpha\right]\left[\theta^* x^\alpha + \alpha^{-1/2}\varepsilon^*\Delta^\alpha\right] = \qquad (14.164)$$
$$= A_t x^\alpha + E_t\Delta^\alpha = y^t,$$

$$\mathsf{M} m_t^\alpha z = (\alpha E + A_t^* A_t)^{-1} A_t^* \mathsf{M}\xi^t z = (\alpha E + A_t^* A_t)^{-1} A_t^* y^t = x_t^\alpha. \qquad (14.165)$$

Умножая (справа) на z левую и правую части (14.160), вычисляя затем математическое ожидание и принимая во внимание соотношения (14.164) и (14.165), находим, что

$$x_{t+1}^\alpha = x_t^\alpha + \frac{\gamma_t^\alpha a_{t+1}^*}{\alpha + a_{t+1}\gamma_t^\alpha a_{t+1}^*}(y_{t+1} - a_{t+1}x_t^\alpha), \quad x_0^\alpha = 0. \qquad (14.166)$$

В силу леммы (14.10) существует

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \gamma_t^\alpha = E - A_t^+ A_t \qquad (= \gamma_t).$$

Поскольку $\operatorname{rang} A = k$, то $a_{t+1}\gamma_t^\alpha a_{t+1}^* > 0$ при всех $\alpha \geqslant 0$, что вытекает из (14.163) и теоремы 14.4. Поэтому в (14.161) возможен предельный переход при $\alpha \downarrow 0$, что дает для $\gamma_t = \lim_{\alpha \downarrow 0} \gamma_t^\alpha$ уравнение

$$\gamma_{t+1} = \gamma_t - \gamma_t a_{t+1}^* (a_{t+1}\gamma_t a_{t+1}^*)^{-1} a_{t+1}\gamma_t, \quad \gamma_0 = E.$$

Наконец, совершая в (14.166) предельный переход по $\alpha \downarrow 0$, получаем в силу (14.156) требуемое уравнение (14.140).

Теорема доказана.

Замечание. Система рекуррентных соотношений (14.166), 14.161) при $\alpha > 0$ справедлива и для случая $k > n$, $\operatorname{rang} A \leqslant n$. Таким образом, с помощью этой системы отыскиваются векторы $x_k^\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* y \to A^+ y$ для матрицы $A_{(k \times n)}$ ранга $r \leqslant \min(k, n)$ (см. лемму 14.10).

ГЛАВА 15

ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Винеровский процесс в широком смысле

1. В предыдущей главе при отыскании оптимальных линейных оценок для стационарных последовательностей с дробно-рациональным спектром был использован часто применяемый в теории вероятностей принцип взаимосвязи между свойствами «в широком» и «в узком» смысле. Применительно к исследованному случаю этот принцип состоял в том, что для построения оптимальной (в среднеквадратическом смысле) линейной оценки достаточно было рассмотреть лишь случай гауссовских последовательностей (лемма 14.1). Этот принцип будет применен ниже и в задачах линейного оценивания процессов с непрерывным временем. Полезным при этом оказывается введение в рассмотрение понятия винеровского процесса в широком смысле.

2. Определение 1. Измеримый случайный процесс $W=(W_t)$, $t \geqslant 0$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, называется *винеровским процессом в широком смысле*, если

$$\begin{gathered} W_0=0 \quad (\mathsf{P}\text{-п. н.}), \\ \mathsf{M} W_t=0, \quad t \geqslant 0, \\ \mathsf{M} W_t W_s=t \wedge s. \end{gathered} \tag{15.1}$$

Ясно, что всякий винеровский процесс является в то же время винеровским и в широком смысле. Другим примером винеровского процесса в широком смысле является процесс

$$W_t=\pi_t-t, \tag{15.2}$$

где $\Pi=(\pi_t)$, $t \geqslant 0$, — пуассоновский процесс с $\mathsf{P}(\pi_0=0)=1$ и $\mathsf{P}(\pi_t=k)=e^{-t} \frac{t^k}{k!}$.

Пусть $\mathscr{F}_t$, $t \geqslant 0$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$, $z=(z_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс и $a=(a_t(\omega), \mathscr{F}_t)$,

$t \geqslant 0$, — некоторый процесс с $\mathsf{M}a_t^2(\omega) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда процесс

$$W_t = \int_0^t \frac{a_s(\omega)}{\sqrt{\mathsf{M}a_s^2(\omega)}}\, dz_s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{15.3}$$

является еще одним примером винеровского процесса в широком смысле. Заметим, что этот процесс имеет P-п. н. непрерывную модификацию.

Из определения ясно, что винеровский процесс в широком смысле есть процесс с ортогональными приращениями, т. е.

$$\mathsf{M}[W_{t_2} - W_{t_1}][W_{s_2} - W_{s_1}] = 0,$$

если $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$.

Пусть $\Phi(d\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — ортогональная спектральная мера с $\mathsf{M}\Phi(d\lambda) = 0$, $\mathsf{M}|\Phi(d\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi}$. Из спектральной теории стационарных процессов известно, что для каждой измеримой функции $\varphi(\lambda)$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty,$$

можно определить стохастический интеграл *)

$$I(\varphi, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda),$$

обладающий следующими двумя важными свойствами:

$$\mathsf{M} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda) = 0, \tag{15.4}$$

$$\mathsf{M} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda)\, \Phi(d\lambda)\, \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\lambda)\, \Phi(d\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda)\, \bar{\varphi}_2(\lambda)\, d\lambda. \tag{15.5}$$

---

*) Этот интеграл есть предел (в среднем квадратическом) очевидным образом определяемых интегралов $I(\varphi_n, \Phi)$ от простых функций $\varphi_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda) - \varphi_n(\lambda)|^2\, d\lambda \to 0$, $n \to \infty$ (ср. с конструкцией интеграла Ито в § 2 гл. 4).

Лемма 15.1. *Случайный процесс*

$$W_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda} \Phi(d\lambda) \tag{15.6}$$

является винеровским процессом в широком смысле.

Доказательство. Не очевидным является лишь свойство $\mathsf{M} W_s W_t = s \wedge t$. Для его проверки обозначим $\Delta = (t_1, t_2)$, $\Delta' = (s_1, s_2)$ два непересекающихся интервала. Тогда

$$\mathsf{M}[W_{t_2} - W_{t_1}][W_{s_2} - W_{s_1}] = \mathsf{M}[W_{t_2} - W_{t_1}]\overline{[W_{s_2} - W_{s_1}]} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t_2} - e^{i\lambda t_1})(e^{-i\lambda s_2} - e^{-i\lambda s_1}) \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Но если

$$\chi_\Delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta, \\ 0, & t \notin \Delta, \end{cases}$$

то в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda t_2} - e^{i\lambda t_1})(e^{-i\lambda s_2} - e^{-i\lambda s_1}) \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Delta(t) \chi_{\Delta'}(t)\, dt = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}[W_{t_2} - W_{t_1}][W_{s_2} - W_{s_1}] = 0. \tag{15.7}$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathsf{M}[W_{t_2} - W_{t_1}]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_\Delta(t))^2\, dt = t_2 - t_1. \tag{15.8}$$

Из (15.7), (15.8) следует, что рассматриваемый процесс является процессом с некоррелированными приращениями и с $\mathsf{M} W_t^2 = t$. Поэтому, если $t > s$, то

$$\mathsf{M} W_t W_s = \mathsf{M}[W_t - W_s + W_s] W_s = \mathsf{M} W_s^2 = s = t \wedge s.$$

Точно так же и при $t < s$

$$\mathsf{M} W_t W_s = t \wedge s.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего полезно заметить, что если винеровский процесс в широком смысле W_t, $t \geqslant 0$, является гауссовским, то у него существует непрерывная модификация, являющаяся процессом броуновского движения. Действительно, в силу гауссовости $\mathsf{M}[W_t - W_s]^4 = 3(\mathsf{M}[W_t - W_s]^2)^2 = 3|t - s|^2$. Поэтому по критерию Колмогорова (теорема 1.10) рассматриваемый процесс имеет непрерывную модификацию, являющуюся по определению (см. § 4 гл. 1) процессом броуновского движения.

3. Пусть детерминированная (измеримая) функция $f(t) \in L_2[0, T]$. По винеровскому процессу в широком смысле $W = (W_t)$, $t \geqslant 0$, можно определить стохастический интеграл Ито (в широком смысле)

$$I_T(f) = \int_0^T f(s)\, dW_s, \tag{15.9}$$

положив по определению

$$I_T(f) = \underset{n}{\text{l.i.m.}} \sum_k f_n\left(t_k^{(n)}\right)\left[W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right], \tag{15.10}$$

где $f_n(t)$ — простые функции $\left(f_n(t) = f_n\left(t_k^{(n)}\right)\right.$ для $t_k^{(n)} < t \leqslant t_{k+1}^{(n)}$, $\left.0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = T\right)$, обладающие тем свойством, что

$$\lim_n \int_0^T [f(t) - f_n(t)]^2\, dt = 0. \tag{15.11}$$

Так определенный интеграл обладает следующими свойствами (ср. с п. 5 § 2 гл. 4):

$$I_T(af_1 + bf_2) = aI_T(f_1) + bI_T(f_2); \quad a, b = \text{const}, \quad f_i \in L_2[0, T], \tag{15.12}$$

$$\int_0^t f(s)\, dW_s = \int_0^u f(s)\, dW_s + \int_u^t f(s)\, dW_s, \tag{15.13}$$

где

$$\int_u^t f(s)\, dW_s = \int_0^T f(s)\chi_{[u,\, t]}(s)\, dW_s, \tag{15.14}$$

а $\chi_{[u,\, t]}(s)$ — характеристическая функция множества $u \leqslant s \leqslant t$.

Процесс $I_t(f) = \int_0^t f(s)\, dW_s$ непрерывен по t в среднем квадратическом,

$$\mathsf{M} \int_0^t f(s)\, dW_s = 0, \tag{15.15}$$

$$\mathsf{M} \int_0^t f_1(s)\, dW_s \int_0^t f_2(s)\, dW_s = \int_0^t f_1(s) f_2(s)\, ds, \quad f_i \in L_2[0, T]. \tag{15.16}$$

Если *) $\int\limits_0^T |g(s)|\,ds < \infty$, $\int\limits_0^T f^2(s)\,ds < \infty$, *то*

$$\int\limits_0^t g(s)\,ds \int\limits_0^t f(s)\,dW_s = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s g(u)\,du\right) f(s)\,dW_s + \\ + \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^s f(u)\,dW_u\right) g(s)\,ds. \qquad (15.17)$$

Существование интеграла (15.9) и сформулированные свойства проверяются так же, как и в случае стохастического интеграла Ито по винеровскому процессу (§ 2 гл. 4).

4. Пусть $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $t \leqslant T$, — измеримые (детерминированные) функции такие, что

$$\int\limits_0^T |a(t)|\,dt < \infty, \quad \int\limits_0^T b^2(t)\,dt < \infty, \qquad (15.18)$$

$$\int\limits_0^T (|f(t)\,a(t)| + |f(t)\,b(t)|^2)\,dt < \infty. \qquad (15.19)$$

Положим

$$\xi_t = \int\limits_0^t a(s)\,ds + \int\limits_0^t b(s)\,dW_s, \qquad (15.20)$$

где W_s, $s \geqslant 0$, — винеровский процесс в широком смысле.

По этому процессу можно определить интеграл $\int\limits_0^t f(s)\,d\xi_s$, положив

$$\int\limits_0^t f(s)\,d\xi_s = \underset{n}{\text{l.i.m.}} \sum_k f_n(t_k^{(n)}) \left[\xi_{t_{k+1}^{(n)}} - \xi_{t_k^{(n)}}\right], \qquad (15.21)$$

---

*) Последний интеграл в (15.17) существует в силу теоремы Фубини и неравенства

$$\mathsf{M} \int\limits_0^T \left|\int\limits_0^s f(u)\,dW_u\right| |g(s)|\,ds \leqslant \int\limits_0^T \left(\mathsf{M}\left[\int\limits_0^s f(u)\,dW_u\right]^2\right)^{1/2} |g(s)|\,ds = \\ = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^s f^2(u)\,du\right)^{1/2} |g(s)|\,ds < \infty.$$

где $f_n(t)$ — последовательность простых функций таких, что

$$\lim_n \int_0^T [|a(t)||f(t)-f_n(t)|+b^2(t)|f(t)-f_n(t)|^2]\,dt=0.$$

Так определенные интегралы $\int_0^t f(s)\,d\xi_s$ являются $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримыми и обладают тем свойством, что P-п. н.

$$\int_0^t f(s)\,d\xi_s=\int_0^t f(s)\,a(s)\,ds+\int_0^t f(s)\,b(s)\,dW_s,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{15.22}$$

(Ср. с п. 11 § 2 гл. 4.)

5. Пусть $\nu=(\nu_t)$, $t\geqslant 0$, — процесс с ортогональными приращениями, с $\mathsf{M}(\nu_t-\nu_s)=0$ и

$$\mathsf{M}(\nu_t-\nu_s)^2=\int_s^t a^2(u)\,du, \tag{15.23}$$

где $\int_0^T a^2(u)\,du<\infty$. Для детерминированных (измеримых) функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T a^2(u)\,f^2(u)\,du<\infty, \tag{15.24}$$

также может быть определен стохастический интеграл

$$\int_0^T f(s)\,d\nu_s \tag{15.25}$$

как предел (в среднем квадратическом) соответствующих интегральных сумм $\sum_k f_n\left(s_k^{(n)}\right)\left[\nu_{s_{k+1}^{(n)}}-\nu_{s_k^{(n)}}\right]$ при $n\to\infty$, где последовательность простых функций $f_n(s)$ такова, что

$$\int_0^T |f_n(s)-f(s)|^2\,a^2(s)\,ds\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Корректность такого определения устанавливается так же, как и в случае стохастических интегралов, по квадратично интегрируемому мартингалу *), для которого соответствующий

---

*) Полезно заметить, что всякий квадратично интегрируемый мартингал является процессом с ортогональными приращениями.

натуральный и возрастающий процесс является абсолютно непрерывным с вероятностью 1 (см. теорему 5.10).

Отметим два полезных свойства интеграла (15.25):

$$\mathsf{M}\int_0^T f(s)\,d\nu_s = 0, \tag{15.26}$$

$$\mathsf{M}\int_0^T f_1(s)\,d\nu_s\int_0^T f_2(s)\,d\nu_s = \int_0^T f_1(s)\,f_2(s)\,a^2(s)\,ds \tag{15.27}$$

$\left(\text{предполагается, что } \int_0^T f_i^2(s)\,a^2(s)\,ds < \infty,\ i=1,\ 2\right).$

В том случае, когда рассматриваемый процесс $\nu=(\nu_t)$, $t\geqslant 0$, является к тому же мартингалом, а $a^2(u)>0$, $0\leqslant u\leqslant T$, как показано в теореме 5.12, процесс

$$W_t = \int_0^t \frac{d\nu_s}{a(s)} \tag{15.28}$$

является процессом броуновского движения. Отказ от предположения мартингальности приводит к следующему результату.

Лемма 15.2. *Пусть* $\nu=(\nu_t)$, $t\geqslant 0$, — *процесс с ортогональными приращениями*, $\mathsf{M}(\nu_t-\nu_s)=0$,

$$\mathsf{M}(\nu_t-\nu_s)^2=\int_s^t a^2(u)\,du.$$

Тогда, если $\inf\limits_{0\leqslant u\leqslant T} a^2(u)>0$, $\int_0^T a^2(u)\,du<\infty$, *то процесс* *)

$$W_t=\int_0^t \frac{d\nu_s}{a(s)}$$

является винеровским процессом в широком смысле.

---

*) Как обычно, $\int_0^t \frac{d\nu_s}{a(s)} = \int_0^T \chi_{(s\leqslant t)}\frac{d\nu_s}{a(s)}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathsf{M}W_t = 0$, $MW_t^2 = t$. Наконец, в силу (15.27)

$$\mathsf{M}W_tW_s = \mathsf{M}\int_0^t \frac{d\nu_u}{a(u)} \int_0^s \frac{d\nu_u}{a(u)} = \mathsf{M}\int_0^{t\vee s} \chi_{(u\leqslant t)} \frac{d\nu_u}{a(u)} \int_0^{t\vee s} \chi_{(v\leqslant s)} \frac{d\nu_v}{a(v)} =$$
$$= \int_0^{t\vee s} \chi_{(u\leqslant t)}\chi_{(u\leqslant s)}\,du = t\wedge s,$$

что и доказывает лемму.

6. Пусть детерминированные (измеримые) функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $b(t)$ таковы, что

$$\int_0^T |a_i(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^T b^2(t)\,dt < \infty. \tag{15.29}$$

Рассмотрим линейное уравнение

$$x_t = x_0 + \int_0^t [a_0(s) + a_1(s)x_s]\,ds + \int_0^t b(s)\,dW_s, \tag{15.30}$$

где $W = (W_s)$, $s \geqslant 0$, — винеровский процесс в широком смысле, а x_0 — некоррелированная с ним случайная величина с $\mathsf{M}x_0^2 < \infty$. (Как и в случае винеровского процесса, уравнение (15.30) будем символически записывать в виде $dx_t = [a_0(t) + a_1(t)x_t]\,dt + b(t)\,dW_t$.)

Если $W = (W_s)$, $s \geqslant 0$, является винеровским процессом, то согласно теореме 4.10 у уравнения (15.30) существует единственное непрерывное (P-п. н.) решение, задаваемое формулой

$$x_t = \exp\left\{\int_0^t a_1(u)\,du\right\}\left\{x_0 + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s a_1(u)\,du\right] a_0(s)\,ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s a_1(u)\,du\right] b(s)\,dW_s\right\}. \tag{15.31}$$

Стохастический интеграл, входящий в правую часть (15.31), определен и для винеровского процесса в широком смысле. Равенство (15.31) в случае винеровского процесса W_s справедливо также в среднеквадратичном смысле. Поэтому оно справедливо в среднеквадратичном смысле и тогда, когда W_s является винеровским процессом в широком смысле, что доказывает существование решения уравнения (15.30) с винеровским процессом в широком смысле, задаваемого представлением (15.31). При этом нетрудно убедиться, используя свойство (15.17), что процесс x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, непрерывен в среднем квадратическом. Пусть y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, — другое такое же решение уравнения (15.30). Тогда $\Delta_t = x_t - y_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_t = \int_0^t a_1(s)\Delta_s\,ds$$

и, следовательно, является непрерывным P-п. н. процессом, откуда

$$|\Delta_t| \leqslant \int_0^t |a_1(s)||\Delta_s|\,ds$$

и по лемме 4.13 $\Delta_s = 0$ (P-п. н.), $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x_t - y_t| > 0\} = 0.$$

Пусть теперь $W = (W_1, \ldots, W_n)$ — n-мерный винеровский процесс в широком смысле (каждый из процессов $W_i = (W_i(t))$, $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, является винеровским в широком смысле, и компоненты W_i, W_j при $i \neq j$ некоррелированы). Пусть заданы случайный вектор $x_0 = (x_1(0), \ldots, x_n(0))$, некоррелированный с W, $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}x_i^2(0) < \infty$, вектор-функция $a_0(t) = (a_0(t), \ldots, a_{0n}(t))$ и матрицы $a_1(t) = \|a_{ij}^1(t)\|$, $b(t) = \|b_{ij}(t)\|$ размерности $(n \times n)$. Будем предполагать также, что для элементов $a_{0i}(t)$, $a_{ij}^1(t)$, $b_{ij}(t)$ выполнены соответствующие условия (15.29).

Тогда, как и в случае $n = 1$, уравнение

$$x_t = x_0 + \int_0^t [a_0(s) + a_1(s)x_s] + \int_0^t b(s)\,dW_s \tag{15.32}$$

имеет единственное непрерывное в среднем квадратическом решение $x_t = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, задаваемое формулой

$$x_t = \Phi_0^t\left\{x_0 + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} a_0(s)\,ds + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\,dW_s\right\}, \tag{15.33}$$

где Φ_0^t — фундаментальная матрица,

$$\frac{d\Phi_0^t}{dt} = a_1(t)\Phi_0^t, \qquad \Phi_0^0 = E_{(n\times n)}. \tag{15.34}$$

Для рассматриваемого процесса x_t обозначим $n_t = \mathsf{M}x_t$, $\Gamma(t, s) = \mathsf{M}(x_t - n_t)(x_s - n_s)^*$, $\Gamma_t = \Gamma(t, t)$.

Теорема 15.1. *Вектор n_t и матрица Γ_t являются решениями дифференциальных уравнений*

$$\frac{dn_t}{dt} = a_0(t) + a_1(t)\, n_t, \tag{15.35}$$

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = a_1(t)\,\Gamma_t + \Gamma_t a_1^*(t) + b(t)\, b^*(t). \tag{15.36}$$

Матрица $\Gamma(t, s)$ *задается формулой*

$$\Gamma(t, s) = \begin{cases} \Phi_s^t \Gamma_s, & t \geqslant s, \\ \Gamma_t (\Phi_t^s)^*, & t \leqslant s, \end{cases} \tag{15.37}$$

где $\Phi_s^t = \Phi_0^t (\Phi_0^s)^{-1}$, $t \geqslant s$.

Доказательство. Уравнение (15.35) получается усреднением обеих частей в (15.32). При этом из (15.33) вытекает, что решение уравнения (15.35) определяется формулой

$$n_t = \Phi_0^t \left\{ n_0 + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} a_0(s)\, ds \right\}. \tag{15.38}$$

Далее, пусть $V_t = x_t - n_t$. Тогда из (15.33) и (15.38) вытекает, что

$$V_t = \Phi_0^t \left\{ V_0 + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, dW_s \right\}, \tag{15.39}$$

откуда в силу некоррелированности x_0 и W получаем

$$\Gamma_t = \mathbf{M} V_t V_t^* =$$
$$= \Phi_0^t \left\{ \mathbf{M} V_0 V_0^* + \mathbf{M} \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, dW_s \left(\int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, dW_s \right)^* \right\} (\Phi_0^t)^*.$$

Поскольку компоненты процесса W некоррелированы, то по свойствам (15.15) и (15.16)

$$\mathbf{M} \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, dW_s \left(\int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, dW_s \right)^* =$$
$$= \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, b^*(s) \left[(\Phi_0^s)^{-1} \right]^* ds.$$

Следовательно,

$$\Gamma_t = \Phi_0^t \left\{ \Gamma_0 + \int_0^t (\Phi_0^s)^{-1} b(s)\, b^*(s) \left[(\Phi_0^s)^{-1} \right]^* ds \right\} (\Phi_0^t)^*.$$

Дифференцируя правую часть этого соотношения и учитывая (15.34), приходим к требуемому уравнению (15.36).

Установим теперь формулу (15.37). Пусть $t \geqslant s$. Тогда

$$\Gamma(t, s) = \mathsf{M} V_t V_s^* = \Phi_0^t \Big\{ \mathsf{M} V_0 V_0^* +$$
$$+ \mathsf{M} \left[\int_0^t \left(\Phi_0^u\right)^{-1} b(u)\, dW_u \right] \left[\int_0^t \chi_{(s \geqslant u)} \left(\Phi_0^u\right)^{-1} b(u)\, dW_u \right] \left(\Phi_0^s\right)^* \Big\} =$$
$$= \Phi_s^t \Phi_0^s \left\{ \Gamma_0 + \int_0^s \left(\Phi_0^u\right)^{-1} b(u)\, b^*(u) \left(\Phi_0^u\right)^{-1} du \right\} \left(\Phi_0^s\right)^* = \Phi_s^t \Gamma_s.$$

Аналогично проверяется справедливость и второй части формулы (15.37) для $t \leqslant s$.

Теорема доказана.

7. Для процесса x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющего уравнению (15.30), обозначим для $t > s$

$$R(t, s) = \Gamma(t, s)\, \Gamma_s^+.$$

Пусть $s < u < t$. Покажем, что тогда

$$R(t, s) = R(t, u)\, R(u, s). \tag{15.40}$$

Для доказательства этого соотношения достаточно считать, что $x_0 = 0$, $a_0(s) \equiv 0$, а W_s есть винеровский процесс. Тогда из теоремы о нормальной корреляции (теорема 13.1) вытекает, что

$$\mathsf{M}(x_t \mid x_u) = R(t, u)\, x_u.$$

Из формулы (15.33) следует, что процесс x_t является марковским и, в частности,

$$\mathsf{M}(x_t \mid x_s, x_u) = \mathsf{M}(x_t \mid x_u) \qquad (\mathsf{P}\text{-п. н.}).$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}(x_t - R(t, u)\, x_u \mid x_s, x_u) = 0,$$

и, значит,

$$\mathsf{M}\left(x_t x_s^* \Gamma_s^+ - R(t, u)\, x_u x_s^* \Gamma_s^+\right) = 0,$$

что и доказывает соотношение (15.40).

Итак, для процесса x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющего уравнению (15.32), функция $R(t, s)$ удовлетворяет соотношению (15.40).

Справедлив в определенном смысле и обратный результат.

Теорема 15.2. *Пусть* $x = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — *случайный процесс с заданными первыми двумя моментами* $n_t = \mathsf{M} x_t$, $\Gamma(t, s) = \mathsf{M}[(x_t - n_t)(x_s - n_s)^*]$. *Предположим, что* *матрица* $R(t, s) = \Gamma(t, s)\Gamma_s^+$ *удовлетворяет соотношению* (15.40) *и выполнены следующие предположения*:

1) *существуют вектор* $a_0(t)$ *и матрицы* $a_1(t)$ *и* $B(t)$ *такие, что их элементы принадлежат* $L_1[0, T]$;

2) *элементы матриц* $R(t, s)$ *непрерывны по* $t\,(t > s)$, *и*

$$R(t, s) = R(s, s) + \int_s^t a_1(u) R(u, s)\, du;$$

3) *элементы матриц* $\Gamma_t = \Gamma(t, t)$ *непрерывны и*

$$\Gamma_t = \Gamma_0 + \int_0^t [a_1(u)\Gamma_u + \Gamma_u a_1^*(u)]\, du + \int_0^t B(u)\, du;$$

4) *элементы вектора* n_t *непрерывны по* t, *и*

$$n_t = n_0 + \int_0^t [a_0(u) + a_1(u) n_u]\, du.$$

Тогда найдется винеровский в широком смысле процесс $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$ *такой, что* P-п.н. *для всех* t, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$x_t = x_0 + \int_0^t [a_0(s) + a_1(s) x_s]\, ds + \int_0^t B^{1/2}(s)\, dW_s. \tag{15.41}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{W}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — некоторый n-мерный винеровский процесс в широком смысле и $\tilde{x}_0$ — n-мерный вектор, имеющий те же два первых момента, что и x_0, и не зависящий от $\tilde{W}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим, что для почти всех $0 \leqslant s \leqslant T$ матрицы $B(s)$ неотрицательно определены. Пусть процесс $\tilde{x}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, есть решение уравнения (п. 6)

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_0 + \int_0^t [a_0(s) + a_1(s)\tilde{x}_s]\, ds + \int_0^t B^{1/2}(e)\, d\tilde{W}_s.$$

Тогда в силу теоремы 15.1 и сделанных предположений 1)—4) первые два момента у процессов x_t и $\tilde{x}_t$ совпадают. Следовательно, совпадают первые два момента и у процессов

$$\begin{aligned} \nu_t &= x_t - x_0 - \int_0^t [a_0(s) + a_1(s) x_s]\, ds, \\ \tilde{\nu}_t &= \tilde{x}_t - \tilde{x}_0 - \int_0^t [a_0(s) + a_1(s)\tilde{x}_s]\, ds. \end{aligned} \tag{15.42}$$

Но $\tilde{\nu}_t = \int\limits_0^t B^{1/2}(s)\,d\tilde{W}_s$ является процессом с ортогональными приращениями, а значит, таковым же является и процесс ν_t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Если матрицы $B(t)$ положительно определены для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$, то процесс

$$W_t = \int\limits_0^t B^{-1/2}(s)\,d\nu_s$$

по многомерному варианту леммы 15.2 является винеровским в широком смысле. Поэтому $\nu_t = \int\limits_0^t B^{1/2}(s)\,dW_s$, что вместе с (15.42) доказывает в этом случае представление (15.41).

Если матрицы $B(t)$ для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$ неотрицательно определенные, то надо положить

$$W_t = \int\limits_0^t [B^{1/2}(s)]^+\,d\nu_s + \int\limits_0^t [E - (B^{1/2}(s))^+ (B^{1/2}(s))]\,dz_s,$$

где z_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, — некоторый n-мерный винеровский процесс в широком смысле, некоррелированный с исходным процессом x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$. (Такой процесс существует, если исходное вероятностное пространство достаточно «богатое»). Тогда, как и в лемме 10.4, показывается, что так определенный процесс W_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, является винеровским в широком смысле.

Покажем теперь, что сделанное предположение о неотрицательной определенности матриц $B(t)$ (для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$) есть следствие условий 2), 3), входящих в формулировку теоремы.

Поскольку свойства матриц $B(t)$ зависят лишь от свойств первых двух моментов процесса x_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, то без ограничения общности можно считать этот процесс гауссовским. Тогда по теореме о нормальной корреляции матрица

$$\Gamma(t+\Delta,\, t+\Delta) - \Gamma(t+\Delta,\, t)\,\Gamma^+(t,\, t)\,\Gamma^*(t+\Delta,\, t),$$
$$0 \leqslant t \leqslant t+\Delta \leqslant T,$$

является симметрической и неотрицательно определенной. По свойствам псевдообратных матриц (§ 1 гл. 14)

$$\Gamma^+(t,\, t) = \Gamma^+(t,\, t)\,\Gamma(t,\, t)\,\Gamma^+(t,\, t),\; (\Gamma^+(t,t))^* = (\Gamma^*(t,t))^+ = \Gamma^+(t,t).$$

Поэтому матрица

$$\Gamma(t+\Delta,\, t+\Delta) - \Gamma(t+\Delta,\, t)\,\Gamma^+(t,\, t)\,\Gamma(t,\, t)\,(\Gamma^+(t,\, t))^* \times$$
$$\times\, \Gamma^*(t+\Delta,\, t) = \Gamma(t+\Delta,\, t+\Delta) - R(t+\Delta,\, t)\,\Gamma(t,\, t)\,R^*(t+\Delta,\, t) \qquad (15.43)$$

также симметрическая и неотрицательно определенная. Из (12.43), 2), 3) и формулы $\Gamma(u, t)\Gamma^+(t, t)\Gamma(t, t)=\Gamma(u, t)$, $u \geqslant t$ (см. доказательство теоремы 13.1), после простых преобразований находим, что

$$B(t)=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\{\Gamma(t+\Delta, t+\Delta)-R(t+\Delta, t)\Gamma(t, t)R^*(t+\Delta, t)\}$$

(для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$). Следовательно, матрицы $B(t)$ для почти всех t являются неотрицательно определенными.

Теорема доказана.

Пример. Пусть $W=(W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — винеровский процесс в широком смысле и

$$\xi_t = W_1 \cdot t + W_t$$

(т. е. $d\xi_t = W_1 dt + dW_t$, $\xi_0 = 0$).

Используя доказанную теорему, покажем, что найдется такой винеровский процесс в широком смысле $\overline{W}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что (P-п. н.)

$$\xi_t = \int_0^t \frac{3\xi_s}{1+3s}\,ds + \overline{W}_t$$

(ср. с теоремой 7.12).

Действительно, в рассматриваемом случае $\mathsf{M}\xi_t \equiv 0$, $\Gamma(t, s) = \mathsf{M}\xi_t\xi_s = 3ts + t \wedge s$. Отсюда для $t \geqslant s > 0$ получаем

$$R(t, s) = \frac{3ts+s}{3s^2+s} = \frac{3t+1}{3s+1}.$$

Эта функция удовлетворяет условию (15.40), и легко найти, что

$$a_0(t) \equiv 0, \qquad a_1(t) = \frac{3}{1+3t}, \qquad B(t) \equiv 1.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае величины $\overline{W}_t$ являются $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримыми для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

§ 2. Оптимальная линейная фильтрация некоторых классов нестационарных процессов

1. Пусть $W_1=(W_{11}, \ldots, W_{1k})$ и $W_2=(W_{21}, \ldots, W_{2l})$ — некоррелированные между собой винеровские процессы в широком смысле. Будем рассматривать случайный процесс $(\theta, \xi) = [\theta_t, \xi_t]$, $t \geqslant 0$, компоненты которого $\theta_t = [\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)]$ и $\xi_t = [\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)]$, $t \geqslant 0$, подчиняются системе стохастических уравнений

$$\left.\begin{aligned} d\theta_t &= [a_0(t)+a_1(t)\theta_t+a_2(t)\xi_t]\,dt + b_1(t)\,dW_1(t)+b_2(t)\,dW_2(t), \\ d\xi_t &= [A_0(t)+A_1(t)\theta_t+a_2(t)\xi_t]\,dt + B_1(t)\,dW_1(t)+B_2(t)\,dW_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{15.44}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям из п. 1 § 3 гл. 10. Предположим также, что вектор начальных значений (θ_0, ξ_0) некоррелирован с процессами W_1, W_2, причем $\mathsf{M}(\theta_0^*\theta_0 + \xi_0^*\xi_0) < \infty$.

Используя результаты десятой главы, построим оптимальные (в среднеквадратическом смысле) линейные оценки ненаблюдаемой компоненты θ_t по наблюдениям $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$.

Определение. Будем говорить, что вектор $\lambda_t = [\lambda_1(t, \xi), \ldots, \lambda_k(t, \xi)]$ является *линейной оценкой* вектора θ_t по ξ_0^t, если величины $\lambda_j(t, \xi)$ принадлежат *) замкнутому линейному многообразию, порожденному величинами ξ_s, $s \leqslant t$; $j = 1, \ldots, k$.

Линейная оценка $\lambda_t = [\lambda_1(t, \xi), \ldots, \lambda_k(t, \xi)]$ будет называться *оптимальной*, если для любой другой линейной оценки $\bar{\lambda}_t = [\bar{\lambda}_1(t, \xi), \ldots, \bar{\lambda}_k(t, \xi)]$

$$\mathsf{M}[\theta_j(t) - \lambda_j(t, \xi)]^2 \leqslant \mathsf{M}[\theta_j(t) - \bar{\lambda}_j(t, \xi)]^2, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Заметим, что величина $\lambda_j(t, \xi)$ часто обозначается также $\hat{\mathsf{M}}\left(\theta_j(t) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$ и называется условным математическим ожиданием в широком смысле случайной величины $\theta_j(t)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t^\xi$.

2. Теорема 15.3. *Оптимальная линейная оценка λ_t вектора θ_t по наблюдениям ξ_0^t определяется из системы уравнений*

$$d\lambda_t = [a_0(t) + a_1(t)\lambda_t + a_2(t)\xi_t]\,dt + [(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)] \times \\ \times (B \circ B)^{-1}(t)[d\xi_t - (A_0(t) + A_1(t)\lambda_t + A_2(t)\xi_t)\,dt], \tag{15.45}$$

$$\dot{\gamma}_t = a_1(t)\gamma_t + \gamma_t a_1^*(t) + (b \circ b)(t) - \\ - [(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)](B \circ B)^{-1}(t)[(b \circ B)(t) + \gamma_t A_1^*(t)]^* \tag{15.46}$$

с

$$\lambda_0 = \mathsf{M}\theta_0 + \operatorname{cov}(\theta_0, \xi_0)\operatorname{cov}^+(\xi, \xi_0)(\xi_0 - \mathsf{M}\xi_0), \tag{15.47}$$

$$\gamma_0 = \operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0) - \operatorname{cov}(\theta_0, \xi_0)\operatorname{cov}^+(\xi_0, \xi_0)\operatorname{cov}^*(\theta_0, \xi_0). \tag{15.48}$$

При этом $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta_t - \lambda_t)(\theta_t - \lambda_t)^*]$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{\theta}_t, \tilde{\xi}_t)$, $t \geqslant 0$, — гауссовский процесс, удовлетворяющий системе (15.44), где вместо процессов (W_1, W_2) рассматриваются независимые между собой винеровские процессы $(\tilde{W}_1\ \tilde{W}_2)$. Предположим, что первые два момента у $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\xi}_0)$ те же, что и у вектора (θ_0, ξ_0), и $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\xi}_0)$ не зависит от процессов (W_1, W_2).

Обозначим

$$\tilde{\lambda}_t = \mathsf{M}\left(\tilde{\theta}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\xi}}\right), \qquad \tilde{\gamma}_t = \mathsf{M}[(\tilde{\theta}_t - \tilde{\lambda}_t)(\tilde{\theta}_t - \tilde{\lambda}_t)^*].$$

---

*) В смысле сходимости в среднем квадратическом.

Тогда согласно теореме 10.3 $\tilde{\lambda}_t$ и $\tilde{\gamma}_t$ удовлетворяют системе уравнений (15.45), (15.46) с заменой ξ_t на $\tilde{\xi}_t$, λ_t на $\tilde{\lambda}_t$, причем $\gamma_t \equiv \tilde{\gamma}_t$. Из (15.45) следует, что оценка λ_t является линейной (ср. с представлением (15.33)).

Покажем теперь, что оценка λ_t является оптимальной.

Пусть $q_j(t, \xi)$ — некоторая линейная оценка $\theta_j(t)$ по ξ_0^t и $q_j^{(n)}(t, \xi)$ — последовательность линейных оценок от $\xi_{t_0^{(n)}}, \ldots$ $\ldots, \xi_{t_n^{(n)}}$, где $T^{(n)} = \{t_0^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\} \subseteq T^{(n+1)} = \{t_0^{(n+1)}, \ldots, t_{n+1}^{(n+1)}\}$, $t_0^{(n)} \equiv 0$, $t_n^{(n)} \equiv t$, такая, что

$$q_j(t, \xi) = \underset{n}{\mathrm{l.i.m.}}\, q_j^{(n)}(t, \xi).$$

Положим $\tilde{\lambda}_j^{(n)}(t, \tilde{\xi}) = \mathsf{M}(\tilde{\theta}_j(t) \,|\, \mathscr{F}_{t,n}^{\tilde{\xi}})$, где $\mathscr{F}_{t,n}^{\tilde{\xi}} = \sigma\left\{\omega: \tilde{\xi}_{t_0^{(n)}}, \ldots \right.$ $\left.\ldots, \tilde{\xi}_{t_n^{(n)}}\right\}$, и обозначим $\lambda_j^{(n)}(t, \xi)$ оценку, полученную из $\tilde{\lambda}_j^{(n)}(t, \xi)$ заменой величин $\tilde{\xi}_{t_0^{(n)}}, \ldots, \tilde{\xi}_{t_n^{(n)}}$ на $\xi_{t_0^{(n)}}, \ldots, \xi_{t_n^{(n)}}$. По лемме 14.1 линейная оценка $\lambda_j^{(n)}(t, \xi)$ является оптимальной линейной оценкой θ_t по величинам $\xi_{t_0^{(n)}}, \ldots, \xi_{t_n^{(n)}}$, т. е.

$$\mathsf{M}\left[\theta_j(t) - \lambda_j^{(n)}(t, \xi)\right]^2 \leqslant \mathsf{M}\left[\theta_j(t) - q_j^{(n)}(t, \xi)\right]^2.$$

Но

$$\mathsf{M}\left[\lambda_j(t, \xi) - \lambda_j^{(n)}(t, \xi)\right]^2 = \mathsf{M}\left[\tilde{\lambda}_j(t, \tilde{\xi}) - \tilde{\lambda}_j^{(n)}(t, \tilde{\xi})\right]^2.$$

Так же, как и при доказательстве леммы 10.1, устанавливается, что

$$\lim_n \mathsf{M}\left[\tilde{\lambda}_j(t, \tilde{\xi}) - \tilde{\lambda}_j^{(n)}(t, \tilde{\xi})\right]^2 = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\left[\theta_j(t) - \lambda_j(t, \xi)\right]^2 = \lim_n \mathsf{M}\left[\theta_j(t) - \lambda_j^{(n)}(t, \xi)\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \lim_n \mathsf{M}\left[\theta_j(t) - q_j^{(n)}(t, \xi)\right]^2 = \mathsf{M}\left[\theta_j(t) - q_j(t, \xi)\right]^2,$$

что и доказывает оптимальность оценки $\lambda_j(t, \xi)$, $j = 1, \ldots, k$.

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом проверяется, что оптимальные (в среднеквадратическом смысле) линейные оценки интерполяции и экстраполяции для процесса (θ_t, ξ_t), удовлетворяющего системе (15.44), могут быть получены из соответствующих оценок для случая гауссовского процесса $(\tilde{\theta}_t, \tilde{\xi}_t)$.

3. Приведем два примера, иллюстрирующих возможности применения теоремы 15.3. Эти примеры поучительны в том отношении, что рассматриваемые в них процессы задаются в виде системы уравнений, не совпадающей с рассмотренной выше системой (15.44).

Пример 1. Пусть y_t и z_t — независимые между собой винеровские процессы. Рассмотрим процесс (θ_t, ξ_t), $t \geqslant 0$, удовлетворяющий системе стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\theta_t &= -\theta_t\,dt + (1+\theta_t)\,dy_t \\ d\xi_t &= \theta_t\,dt + dz_t, \end{aligned} \tag{15.49}$$

где $\xi_0 = 0$, а θ_0 — случайная величина, не зависящая от винеровских процессов y_t, z_t, $t \geqslant 0$, с $\mathsf{M}\theta_0 = m$, $\mathsf{M}(\theta_0 - m)^2 = \gamma > 0$.

Положим

$$W_1(t) = \int_0^t \frac{1+\theta_s}{\sqrt{\mathsf{M}(1+\theta_s)^2}}\,dy_s, \quad W_2(t) = z_t.$$

Эти два процесса являются некоррелированными между собой винеровскими процессами в широком смысле, и

$$\begin{aligned} d\theta_t &= -\theta_t\,dt + \sqrt{\mathsf{M}(1+\theta_t)^2}\,dW_1(t), \\ d\xi_t &= \theta_t\,dt + dW_2(t). \end{aligned} \tag{15.50}$$

В отличие от (15.49), эта система является уже частным случаем исследованной системы (15.44). Поэтому по теореме 15.3 оптимальная линейная оценка λ_t значений θ_t по $\xi_0^t = (\xi_s,\ s \leqslant t)$ и ошибка фильтрации $\gamma_t = \mathsf{M}[\theta_t - \lambda_t]^2$ определяются из уравнений

$$d\lambda_t = -\lambda_t\,dt + \gamma_t(d\xi_t - \lambda_t\,dt), \qquad \lambda_0 = m,$$
$$\dot\gamma_t = -2\gamma_t + \mathsf{M}(1+\theta_t)^2 - \gamma_t^2, \qquad \gamma_0 = \gamma.$$

Для полного решения задачи необходимо вычислить

$$\mathsf{M}(1+\theta_t)^2 = 1 + 2n_t + \Delta_t + n_t^2,$$

где

$$n_t = \mathsf{M}\theta_t, \qquad \Delta_t = \mathsf{M}(\theta_t - n_t)^2.$$

Из (15.50) находим

$$n_t = n_0 - \int_0^t n_s\,ds$$

и в силу формулы Ито

$$\Delta_t = \mathbf{M}(\theta_t - n_t)^2 = \mathbf{M}\left\{(\theta_0 - n_0)^2 - 2\int_0^t (\theta_s - n_s)^2 ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t (1+\theta_s)^2 ds + 2\int_0^t (\theta_s - n_s)(1+\theta_s)\, dy_s\right\} =$$
$$= \Delta_0 - 2\int_0^t \Delta_s ds + \int_0^t (1 + \Delta_s + 2n_s + n_s^2)\, ds.$$

Таким образом, оптимальная линейная оценка λ_t и ошибка γ_t определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} d\lambda_t &= -\lambda_t dt + \gamma_t (d\xi_t - \lambda_t dt), \\ \dot\gamma_t &= -2\gamma_t - \gamma_t^2 + 1 + \Delta_t + 2n_t + n_t^2, \\ \dot n_t &= -n_t, \\ \dot\Delta_t &= -\Delta_t + 1 + 2n_t + n_t^2, \end{aligned} \tag{15.51}$$

где $\lambda_0 = n_0 = m$, $\gamma_0 = \Delta_0 = \gamma$.

Пример 2. Пусть снова y_t и z_t — независимые между собой винеровские процессы, а процесс (θ_t, ξ_t), $t \geqslant 0$, определяется из уравнений

$$\begin{aligned} d\theta_t &= -\theta_t dt + dy_t, \\ d\xi_t &= -\theta_t^3 dt + dz_t, \end{aligned} \tag{15.52}$$

где $\xi_0 = 0$, а θ_0 — гауссовская случайная величина, $\mathbf{M}\theta_0 = 0$, $\mathbf{M}\theta_0^2 = \frac{1}{2}$, не зависящая от процессов y_t и z_t. Рассмотрим задачу *линейного* оценивания величин θ_t и θ_t^3 по $\xi_0^t = \{\xi_s,\ s \leqslant t\}$.

Обозначим $\theta_1(t) = \theta_t$, $\theta_2(t) = \theta_t^3$. С помощью формулы Ито убеждаемся в том, что

$$d\theta_2(t) = -3\theta_2(t)\, dt + 3\theta_1(t)\, dt + 3\theta_1^2(t)\, dy_t.$$

Итак, $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ удовлетворяют системе стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\theta_1(t) &= -\theta_1(t)\, dt + dy_t, \\ d\theta_2(t) &= [-3\theta_2(t) + 3\theta_1(t)]\, dt + 3\theta_1^2(t)\, dy_t. \end{aligned} \tag{15.53}$$

Обозначим

$$W_1(t) = y_t, \quad W_2(t) = \sqrt{2}\int_0^t \theta_1^2(s)\, dy_s - \frac{y_t}{\sqrt{2}}, \quad W_3(t) = z_t.$$

Нетрудно проверить, что $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $W_3(t)$ — некоррелированные между собой винеровские процессы в широком смысле. Следовательно, процессы $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ и ξ_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} d\theta_1(t) &= -\theta_1(t)\,dt + dW_1(t), \\ d\theta_2(t) &= [-3\theta_2(t)\,dt + 3\theta_1(t)]\,dt + \frac{3}{2}\,dW_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\,dW_2(t), \\ d\xi_t &= \theta_2(t)\,dt + dW_3(t), \end{aligned} \tag{15.54}$$

где $\xi_0 = 0$, а вектор $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ имеет следующие моменты:

$$\mathsf{M}\theta_1(0) = \mathsf{M}\theta_2(0) = 0, \quad \mathsf{M}\theta_1^2(0) = 1/2, \quad \mathsf{M}\theta_1(0)\,\theta_2(0) = \mathsf{M}\theta_0^4 = 3/4,$$
$$\mathsf{M}\theta_2^2(0) = \mathsf{M}\theta_0^6 = 15/8.$$

Система (15.54) является системой типа (15.44), и, следовательно, оптимальные линейные оценки для $\theta_1(t) = \theta_t$ и $\theta_2(t) = \theta_t^3$ могут быть найдены из системы уравнений (15.45), (15.46).

§ 3. Линейное оценивание стационарных в широком смысле случайных процессов с дробно-рациональным спектром

1. Цель этого параграфа — показать, как теорема 15.3 может быть применена к построению оптимальных линейных оценок для процессов, указанных в заголовке. Соответствующие результаты для случайных последовательностей были рассмотрены в § 1 предыдущей главы. Пусть $\eta = (\eta_t)$, $-\infty < t < \infty$, — действительный стационарный (в широком смысле) процесс, допускающий спектральное представление

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\frac{P_{n-1}(i\lambda)}{Q_n(i\lambda)}\,\Phi(d\lambda), \tag{15.55}$$

где $\Phi(d\lambda)$ — ортогональная спектральная мера, $\mathsf{M}\Phi(d\lambda) = 0$,

$$\mathsf{M}\,|\Phi(d\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi}, \qquad P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k, \qquad Q_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k,$$

а действительные части корней уравнения $Q_n(z) = 0$ являются отрицательными. Рассмотрим процессы

$$\eta_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,W_j(i\lambda)\,\Phi(d\lambda), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{15.56}$$

где частотные характеристики $W_j(z)$, $j = 1, \ldots, n$, подобраны следующим специальным образом:

$$W_j(z) = z^{-(n-j)}\,W_n(z) + \sum_{k=j}^{n-1} \beta_k z^{-(k-j+1)}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{15.57}$$

и

$$W_n(z) = -z^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k W_{k+1}(z) + z^{-1}\beta_n \tag{15.58}$$

с

$$\beta_1 = b_{n-1}, \quad \beta_j = b_{n-j} - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i a_{n-j+i}, \quad j = 2, \ldots, n. \tag{15.59}$$

Из (15.57), (15.58) следует, что

$$\begin{aligned} W_j(z) &= z^{-1}[W_{j+1}(z) + \beta_j] \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ W_n(z) &= z^{-1}\left[-\sum_{k=0}^{n-1} a_k W_{k+1}(z) + \beta_n\right]. \end{aligned} \tag{15.60}$$

Отсюда получаем

$$W_n(z) = z^{-1}\left[-\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(z^{-(n-k-1)} W_n(z) + \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j z^{-(j-k)}\right) + \beta_n\right],$$

и, значит,

$$W_n(z) = P_{n-1}^{(n)}(z)/Q_n(z), \tag{15.61}$$

где $P_{n-1}^{(n)}(z)$ — полином степени не выше n.

Тогда из (15.60), (15.61) получаем, что

$$W_j(z) = P_{n-1}^{(j)}(z)/Q_n(z), \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{15.62}$$

где полиномы $P_{n-1}^{(j)}(z)$ имеют степень не выше $n-1$, причем в силу (15.59)

$$W_1(z) = P_{n-1}(z)/Q_n(z). \tag{15.63}$$

Таким образом, процесс $\eta_1(t) = \eta_t$, $t \geqslant 0$.

Теорема 15.4. *Стационарный в широком смысле процесс $\eta_1(t) = \eta_t$, допускающий спектральное представление* (15.55), *является компонентой n-мерного стационарного (в широком смысле) процесса $\tilde{\eta}_t = (\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$, удовлетворяющего системе линейных стохастических уравнений*

$$\begin{aligned} d\eta_j(t) &= \eta_{j+1}(t)\,dt + \beta_j\,dW_t, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ d\eta_n(t) &= -\sum_{j=0}^{n-1} a_j \eta_{j+1}(t)\,dt + \beta_n\,dW_t \end{aligned} \tag{15.64}$$

с винеровским процессом в широком смысле

$$W_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda}\,\Phi(d\lambda) \tag{15.65}$$

и коэффициентами $\beta_1, \ldots, \beta_n$, задаваемыми формулами (15.59). *При этом* $\mathsf{M}\eta_j(0) W_t = 0$, $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Для доказательства этой теоремы потребуется

Лемма 15.3. *Пусть $W(z)$ — некоторая частотная характеристика с $\int_{-\infty}^{\infty} |W(i\lambda)|^2 d\lambda < \infty$ и*

$$\zeta_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda), \tag{15.66}$$

где $\Phi(d\lambda)$ — ортогональная спектральная мера с $\mathsf{M}\Phi(d\lambda) = 0$, $\mathsf{M}|\Phi(d\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi}$. Тогда с вероятностью 1

$$\int_0^t |\zeta_s|\,ds < \infty, \qquad t < \infty, \tag{15.67}$$

$$\int_0^t \zeta_s\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda} W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda). \tag{15.68}$$

Доказательство. Интегрируемость $|\zeta_s|$ вытекает из теоремы Фубини и оценки

$$\int_0^t \mathsf{M}|\zeta_s|\,ds \leqslant \int_0^t (\mathsf{M}\zeta_s^2)^{1/2} ds \leqslant \left(t\int_0^t \mathsf{M}\zeta_s^2\,ds\right)^{1/2} =$$

$$= t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(i\lambda)|^2 d\lambda\right)^{1/2} < \infty.$$

Итак, интеграл $\int_0^t \zeta_s\,ds$ существует и в силу (15.66)

$$\int_0^t \zeta_s\,ds = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)\,ds. \tag{15.69}$$

Покажем, что в правой части (15.69) возможна смена порядков интегрирования:

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t e^{i\lambda s}\,ds\right) W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda). \tag{15.70}$$

Пусть функция $\varphi(\lambda)$ такова, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$. Тогда в силу (15.5) и теоремы Фубини

$$\mathsf{M}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s}W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)\,ds\;\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s}W(i\lambda)\,\bar{\varphi}(\lambda)\,d\lambda\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t e^{i\lambda s}\,ds\right)W(i\lambda)\,\bar{\varphi}(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\mathsf{M}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t e^{i\lambda s}\,ds\right)W(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)\cdot\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda)},$$

что в силу произвольности $\varphi(\lambda)$ и доказывает (15.70).

Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что $\dfrac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}=\displaystyle\int_0^t e^{i\lambda s}\,ds$.

2. Доказательство теоремы 15.4. Ясно, что

$$\eta_j(t)-\eta_j(0)=\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\lambda t}-1]W_j(\lambda)\,\Phi(d\lambda),\qquad j=1,\ \ldots,\ n-1,$$

и согласно (15.60)

$$\eta_j(t)-\eta_j(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}W_{j+1}(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)+\beta_j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}\Phi(d\lambda).\tag{15.71}$$

По лемме 15.3

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}W_{j+1}(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}W_{j+1}(i\lambda)\,\Phi(d\lambda)\,ds=$$

$$=\int_0^t\eta_{j+1}(s)\,ds,\tag{15.72}$$

а по лемме 15.1 процесс

$$W_t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}\Phi(d\lambda)\tag{15.73}$$

является винеровским в широком смысле. Поэтому из (15.71) — (15.73) для $t>s$ получаем

$$\eta_j(t)-\eta_j(s)=\int_s^t\eta_{j+1}(u)\,du+\beta_j[W_t-W_s],\qquad j=1,\ \ldots,\ n-1,$$

что символически было условлено записывать в таком виде: $d\eta_j(t)=\eta_{j+1}dt+\beta_j dW_t$.

Аналогичным образом устанавливается и последнее уравнение в системе (15.64).

Проверим теперь некоррелированность величин $\eta_j(0)$ и W_t для $t\geqslant 0$ и $j=1, \ldots, n$. Для этого запишем систему (15.64) в матричной форме

$$d\tilde{\eta}_t=A\tilde{\eta}_t dt+B\,dW_t \tag{15.74}$$

с матрицами

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & & \ldots & -a_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Заметим, что система уравнений (15.74) остается справедливой и для $t\geqslant T$ $(T<0)$, если вместо W_t рассматривать винеровский процесс в широком смысле

$$W_t(T)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-e^{i\lambda T}}{i\lambda}\,\Phi(d\lambda), \tag{15.75}$$

т. е.

$$\tilde{\eta}_0=\tilde{\eta}_T+\int_T^0 A\tilde{\eta}_u\,du+BW_0(T).$$

Но $\mathsf{M}W_tW_0(T)=0$ (см. в лемме 15.1 равенство Парсеваля). Значит, $\mathsf{M}\tilde{\eta}_0W_t=\mathsf{M}\tilde{\eta}_TW_t+\int_T^0 A\mathsf{M}\tilde{\eta}_uW_t\,du$. Решая это уравнение (относительно $\mathsf{M}\tilde{\eta}_TW_t$, $T\leqslant 0$), находим что

$$\mathsf{M}\tilde{\eta}_0W_t=e^{-AT}\mathsf{M}\tilde{\eta}_TW_t. \tag{15.76}$$

Собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости, а элементы вектора $\mathsf{M}\tilde{\eta}_TW_t$ ограничены величинами, не зависящими от T. Поэтому $\lim\limits_{T\to-\infty}\mathsf{M}\tilde{\eta}_0W_t=0$.

Для завершения доказательства осталось лишь показать, что процесс $\tilde{\eta}_t$ является стационарным в широком смысле (для моментов $t\geqslant 0$).

Из (15.56) вытекает, что $\mathsf{M}\tilde{\eta}_t\equiv 0$. Далее, в соответствии с теоремой 15.1 матрица $\Gamma_t=\mathsf{M}\tilde{\eta}_t\tilde{\eta}_t^*$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\Gamma}_t=A\Gamma_t+\Gamma_tA^*+BB^*. \tag{15.77}$$

Опять же из представления (15.56) видно, что матрицы Γ_t не зависят от t. Обозначим $\Gamma \equiv \Gamma_t$. Тогда матрица Γ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$A\Gamma + \Gamma A^* + BB^* = 0. \tag{15.78}$$

Используя уравнение (15.77) и тот факт, что собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости, нетрудно показать, что решение системы (15.78) единственно и задается формулой

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{0} e^{-Au} BB^* e^{-A^*u}\, du. \tag{15.79}$$

Наконец, из (15.74) следует, что матрица $\Gamma(t, s) = \mathsf{M}\tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_s^*$ задается формулой

$$\Gamma(t, s) = \begin{cases} e^{A(t-s)}\Gamma, & t \geqslant s, \\ \Gamma e^{A^*(t-s)}, & s \geqslant t. \end{cases} \tag{15.80}$$

Этим показано, что процесс $\tilde{\eta}_t$, $t \geqslant 0$, является стационарным в широком смысле.

3. Рассмотрим частично наблюдаемый стационарный в широком смысле процесс $\nu_t = (\theta_t, \xi_t) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots \ldots, \xi_l(t))]$, $-\infty < t < \infty$, допускающий спектральное представление

$$\nu_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} W(i\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{15.81}$$

где $W(z)$ — матрица размерности $(k+l) \times n$ с элементами

$$W_{rq}(z) = P^{(rq)}_{n_{rq}-1}(z) / Q^{(rq)}_{n_{rq}}(z), \tag{15.82}$$

где $P^{(rq)}_{n_{rq}-1}(z)$ и $Q^{(rq)}_{n_{rq}}(z)$ — многочлены степени $n_{rq}-1$ и n_{rq} соответственно, причем коэффициент при $z^{n_{rq}}$ у $Q^{(rq)}_{n_{rq}}(z)$ равен единице, а корни уравнения $Q^{(rq)}_{n_{rq}}(z) = 0$ лежат в левой полуплоскости. Мера $\Phi(d\lambda) = (\Phi_1(d\lambda), \ldots, \Phi_n(d\lambda))$ является векторной мерой с некоррелированными компонентами, $\mathsf{M}\Phi_j(d\lambda) = 0$, $\mathsf{M}|\Phi_j(d\lambda)|^2 = \frac{d\lambda}{2\pi}$.

Предполагается, что θ_t является ненаблюдаемой компонентой, оцениваемой по наблюдениям ξ_s, $0 \leqslant s \leqslant T$. В случае $t = T$ имеем задачу фильтрации, $T \geqslant t$ — интерполяции, $t \geqslant T$ — экстраполяции.

Рассмотрим для определенности лишь задачу оптимальной (в среднеквадратическом смысле) линейной фильтрации. Чтобы иметь возможность применить теорему 15.3, достаточно показать, что процесс $\nu_t = (\theta_t, \xi_t)$, $t \geqslant 0$, может быть представлен в виде компоненты процесса, удовлетворяющего системе уравнений типа (15.44).

Используя теорему 15.4, находим, что вектор ν_t является компонентой вектора $(\hat{\theta}_t, \xi_t)$, имеющего размерность

$$N = \sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n_q} n_{rq}, \tag{15.83}$$

где n_{rq} — степень знаменателя дроби $W_{rq}(z)$, а n_q — число несовпадающих элементов W_{rq} в столбце с номером q в матрице $W(z)$.

Ясно, что вектор $\hat{\theta}_t$ содержит все компоненты вектора θ_t. Поэтому оценивание вектра $\hat{\theta}_t$ решает заодно и задачу оценивания вектора θ_t. В силу теоремы 15.4 $(\hat{\theta}_t, \xi_t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет системе стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\hat{\theta}_t &= [a_1\hat{\theta}_t + a_2\xi_t]\,dt + b\,dW_t, \\ d\xi_t &= [A_1\hat{\theta}_t + A_2\xi_t]\,dt + B\,dW_t \end{aligned} \tag{15.84}$$

с матричными коэффициентами соответствующих размерностей и векторным винеровским процессом в широком смысле $W_t = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$.

Если матрица BB^* является положительно определенной, то тогда возможно применение теоремы 15.3. В самом деле, для этого достаточно установить, что найдутся некоррелированные между собой винеровские процессы в широком смысле

$$W_1(t) = (W_{11}(t), \ldots, W_{1,n-l}(t)), \qquad W_2(t) = (W_{21}(t), \ldots, W_{2l}(t))$$

такие, что

$$bW_t = b_1W_1(t) + b_2W_2(t), \qquad BW_t = B_1W_1(t) + B_2W_2(t). \tag{15.85}$$

Возможность такого представления доказывается так же, как и в лемме 10.4. При этом матрицы b_1, b_2, B_1 и B_2 определяются из равенств

$$b_1b_1^* + b_2b_2^* = bb^*, \quad b_1B_1^* + b_2B_2^* = bB^*, \quad B_1B_1^* + B_2B_2^* = BB^*. \tag{15.86}$$

Замечание. Если матрица BB^* вырождена, то, в соответствии с результатом § 4 гл. 10, имеется возможность получать линейные (неоптимальные) оценки для $\hat{\theta}_t$, близкие в среднеквадратичном смысле к линейным оптимальным оценкам.

4. Приведем один пример, иллюстрирующий технику нахождения оптимальных линейных оценок. Пусть

$$W(z)=\begin{Vmatrix} \dfrac{\sqrt{c_1}}{z+\alpha} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{c_1}}{z+\alpha} & \dfrac{\sqrt{c_2}}{z+\beta} \end{Vmatrix}, \quad \alpha>0, \quad \beta>0, \quad c_i>0, \quad i=1,2.$$

Тогда

$$\theta_t=\sqrt{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda+\alpha}\Phi_1(d\lambda),$$

$$\xi_t=\sqrt{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda+\alpha}\Phi_1(d\lambda)+\sqrt{c_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda+\beta}\Phi_2(d\lambda).$$

Если обозначить

$$\eta_t=\sqrt{c_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda+\beta}\Phi_2(d\lambda),$$

то $\xi_t=\theta_t+\eta_t$ и задача оценивания θ_t по $\xi_0^t=(\xi_s,\ s\leqslant t)$ есть обычная задача выделения «сигнала» θ_t из смеси с «шумом» η_t. Согласно 15.4 найдутся некоррелированные между собой винеровские процессы в широком смысле $W_1(t)$ и $W_2(t)$ такие, что $d\theta_t=-\alpha\theta_t\,dt+\sqrt{c_1}\,dW_1(t)$, $d\eta_t=-\beta\eta_t\,dt+\sqrt{c_2}\,dW_2(t)$. Следовательно, для частично наблюдаемого процесса (θ_t,ξ_t), $t\geqslant 0$, справедлива система уравнений

$$d\theta_t=-\alpha\theta_t\,dt+\sqrt{c_1}\,dW_1(t),$$
$$d\xi_t=[-(\alpha-\beta)\theta_t-\beta\xi_t]\,dt+\sqrt{c_1}\,dW_1(t)+\sqrt{c_2}\,dW_2(t).$$

Применяя к этой системе теорему 15.3, находим, что оптимальная линейная оценка λ_t и ее ошибка $\gamma_t=\mathsf{M}(\theta_t-\lambda_t)^2$ находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} d\lambda_t&=-\alpha\lambda_t\,dt+\frac{c_1+\gamma_t(\beta-\alpha)}{c_1+c_2}[d\xi_t-((\beta-\alpha)\lambda_t-\beta\xi_t)\,dt],\\ \dot\gamma_t&=-2\alpha\gamma_t+c_1-\frac{[c_1+\gamma_t(\beta-\alpha)]^2}{c_1+c_2}. \end{aligned}\tag{15.87}$$

Найдем начальные условия λ_0 и $\gamma_0=\mathsf{M}(\theta_0-\lambda_0)^2$. По теореме 15.3

$$\lambda_0=\frac{\mathsf{M}\theta_0\xi_0}{\mathsf{M}\xi_0^2}\xi_0, \qquad \gamma_0=\mathsf{M}\theta_0^2-\frac{(\mathsf{M}\theta_0\xi_0)^2}{\mathsf{M}\xi_0^2}.$$

Обозначим $d_{11}=\mathsf{M}\theta_0^2$, $d_{12}=\mathsf{M}\theta_0\xi_0$, $d_{22}=\mathsf{M}\xi_0^2$, $D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12}\\ d_{12} & d_{22}\end{pmatrix}$.

В силу (15.78)

$$AD + DA^* + BB^* = 0$$

с

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ \beta - \alpha & -\beta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{c_1} & 0 \\ \sqrt{c_1} & \sqrt{c_2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$-2\alpha d_{11} + c_1 = 0,$$
$$(\beta - \alpha) d_{11} - (\beta + \alpha) d_{12} + c_1 = 0,$$
$$2(\beta - \alpha) d_{12} - 2\beta d_{22} + c_1 + c_2 = 0$$

и

$$d_{11} = \frac{c_1}{2\alpha}, \quad d_{12} = \frac{c_1}{2\alpha}, \qquad d_{22} = \frac{\alpha c_2 + \beta c_1}{2\alpha\beta}.$$

Итак, оптимальная линейная оценка θ_t по $\xi_0^t = \{\xi_s,\ s \leqslant t\}$ находится из уравнений (15.87), решаемых при условиях

$$\lambda_0 = \frac{c_1\beta}{\alpha c_2 + \beta c_1}\xi_0, \qquad \gamma_0 = \frac{c_1 c_2 \alpha}{2\alpha(\alpha c_2 + \beta c_1)}. \tag{15.88}$$

Если оценивать θ_t по $\xi_{-T}^t = \{\xi_s,\ -T \leqslant s \leqslant t\}$, где $T > 0$, то λ_t, γ_t также определяются из системы (15.87) с

$$\lambda_{-T} = \frac{c_1\beta}{\alpha c_2 + \beta c_1}\xi_{-T}, \qquad \gamma_{-T} = \frac{c_1 c_2 \alpha}{2\alpha(\alpha c_2 + \beta c_1)}. \tag{15.89}$$

Полагая $T \to \infty$, из (15.87) и (15.89) нетрудно найти, что оптимальная линейная оценка $\tilde{\lambda}_t$ и ошибка оценивания $\tilde{\gamma} \equiv \mathsf{M}[\tilde{\lambda}_t - \theta_t]^2$ величины θ_t по $\xi_{-\infty}^t = \{\xi_s,\ -\infty < s \leqslant t\}$ определяются из равенств

$$\tilde{\lambda}_t = \delta_1\xi_t + \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta_2(t-s)}[\delta_0 - \delta_1\delta_2]\,\xi_s\,ds,$$

где

$$\delta_0 = \delta_1\beta, \quad \delta_1 = \frac{\tilde{\gamma}(\beta - \alpha) + c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \delta_2 = \delta_1(\beta - \alpha) + \alpha,$$

и

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 c_2 + \beta^2 c_1)(c_1 + c_2)} - \alpha c_2 - \beta c_1}{\beta - \alpha}, & \alpha \neq \beta, \\[2ex] \dfrac{c_1 c_2}{2\alpha(c_1 + c_2)}, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

В частности, при $\alpha = \beta$, т. е. когда «спектральные составы» сигнала и шума совпадают,

$$\tilde{\lambda}_t = \frac{c_1}{c_1 + c_2}\xi_t.$$

§ 4. Сравнение оптимальных линейных и нелинейных оценок

1. Пусть θ_t, $t \geqslant 0$, — марковский процесс с двумя состояниями 0 и 1, $\mathsf{P}(\theta_0 = 1) = \pi_0$, переходная вероятность которого $P_{1\alpha}(t, s) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \theta_s = \alpha)$, $\alpha = 0, 1$, удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$\frac{dP_{1\alpha}(t, s)}{dt} = \lambda(1 - 2P_{1\alpha}(t, s)), \quad \lambda > 0, \qquad t > s. \tag{15.90}$$

Будем предполагать, что процесс θ_t, называемый «телеграфным сигналом», ненаблюдаем, а наблюдению доступен процесс

$$\xi_t = \int_0^t \theta_s\, ds + W_t, \tag{15.91}$$

где W_t, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс, не зависящий от θ_t, $t \geqslant 0$.

На примере задачи фильтрации значений θ_t по $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$ сравним качество оптимальных линейных и нелинейных оценок.

Оптимальная (в среднеквадратическом смысле) нелинейная оценка π_t величины θ_t по ξ_s, $s \leqslant t$, есть условное математическое ожидание $\pi_t = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) = \mathsf{P}(\theta_t = 1 \mid \mathscr{F}_t^\xi)$. Согласно (9.86) π_t, $t \geqslant 0$, является решением стохастического уравнения

$$d\pi_t = \lambda(1 - 2\pi_t)\, dt + \pi_t(1 - \pi_t)(d\xi_t - \pi_t\, dt). \tag{15.92}$$

(Из этого уравнения, в частности, видно, что оптимальная оценка π_t действительно является нелинейной.)

Чтобы построить оптимальную линейную оценку λ_t, достаточно рассмотреть задачу оптимальной фильтрации для процесса $\tilde{\theta}_t$ по значениям $\tilde{\xi}_s$, $s \leqslant t$, где $\tilde{\xi}_t = \int_0^t \tilde{\theta}_s\, ds + \tilde{W}_t$, $\tilde{W}_t$ — некоторый винеровский процесс, а $\tilde{\theta}_s$ — гауссовский процесс, не зависящий от $\tilde{W}_t$, $t \geqslant 0$, и имеющий те же первые два момента, что и процесс θ_t, $t \geqslant 0$.

Используя уравнение (15.90), стандартным путем находим, что $n_t = \mathsf{M}\theta_t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dn_t}{dt} = \lambda(1 - 2n_t), \qquad n_0 = \pi_0, \tag{15.93}$$

а корреляционная функция $K(t, s)$ определяется из равенства $K(t, s) = K(s, s)e^{-2\lambda|t-s|}$, где $K(s, s) = \mathsf{M}[\theta_s - n_s]^2 = n_s - n_s^2$. Решая уравнение (15.93), находим $n_t = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2n_0)e^{-2\lambda t}]$.

Следовательно, $\mathsf{M}(\theta_t - n_t)^2 \equiv K(t, t) = \frac{1}{4}[1 - (1 - 2\pi_0)^2 e^{-4\lambda t}]$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}(\theta_t - n_t)^2 = 1/4$.

Нетрудно теперь заметить, что требуемый гауссовский процесс $\tilde\theta_t$, $t \geqslant 0$, имеющий $\mathsf{M}\tilde\theta_t = n_t$ и $\mathsf{M}(\tilde\theta_t - n_t)(\tilde\theta_s - n_s) = K(t, s)$, можно построить как решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde\theta_t = \lambda(1 - 2\tilde\theta_t)\,dt + \sqrt{\lambda}\,dW_1(t), \tag{15.94}$$

где $W_1(t)$ — некоторый винеровский процесс, не зависящий от $\tilde W_t$, $t \geqslant 0$ (см. также теорему 15.2). Тогда, обозначая $W_2(t) = \tilde W_t$, получаем, что

$$d\tilde\xi_t = \tilde\theta_t\,dt + dW_2(t). \tag{15.95}$$

Применяя к системе (15.94), (15.95) теорему 15.3, находим, что $\lambda_t = \hat{\mathsf{M}}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - \lambda_t)^2$ удовлетворяют системе уравнений

$$d\lambda_t = \lambda(1 - 2\lambda_t)\,dt + \gamma_t(d\xi_t - \lambda_t\,dt), \qquad \lambda_0 = n_0, \tag{15.96}$$

$$\dot\gamma_t = -4\lambda\gamma_t + \lambda - \gamma_t^2, \qquad \gamma_0 = n_0 - n_0^2. \tag{15.97}$$

Можно показать (см. также далее теорему 16.2), что существует $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma_t = \gamma(\lambda)$, причем $\gamma(t)$ является единственным положительным решением уравнения

$$\gamma^2(\lambda) + 4\lambda\gamma(\lambda) - \lambda = 0. \tag{15.98}$$

Поэтому

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda + 4\lambda^2} - 2\lambda, \tag{15.99}$$

и, значит,

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} + O(\lambda), & \lambda \downarrow 0, \\ \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), & \lambda \uparrow \infty. \end{cases} \tag{15.100}$$

2. Найдем теперь величину $\delta(\lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}(\theta_t - \pi_t)^2$ для оптимальных нелинейных оценок π_t, $t \geqslant 0$.

Согласно теореме 7.12 процесс $\bar W = (\bar W_t, \mathcal{F}_t^\xi)$, $t \geqslant 0$, с

$$\bar W_t = \xi_t - \int_0^t \pi_s\,ds \tag{15.101}$$

является винеровским. Поэтому уравнение (15.92) может быть переписано в виде

$$d\pi_t = \lambda(1 - 2\pi_t)\,dt + \pi_t(1 - \pi_t)\,d\bar W_t, \qquad \pi_0 = n_0. \tag{15.102}$$

Далее, поскольку $\mathsf{M}(\theta_t - \pi_t)^2 = \mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t)$, то для отыскания $\delta(\lambda)$ надо уметь находить $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t)$ для процесса π_t, $t \geqslant 0$, с дифференциалом (15.102).

Согласно теореме 4.6 уравнение (15.102) имеет единственное сильное ($\mathscr{F}_t^{\overline{W}}$-измеримое при каждом $t \geqslant 0$) решение. Можно показать, что это решение является марковским процессом, одномерная плотность распределения которого $q(t, x) = \frac{d\mathsf{P}(\pi_t \leqslant x)}{dx}$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(1-2x)\,q(t, x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^2(1-x)^2 q(t, x)], \quad t \geqslant 0. \qquad (15.103)$$

В силу того, что процесс π_t, $t \geqslant 0$, является (в терминологии теории марковских процессов) возвратным и положительным *), $\delta(\lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t) = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^1 x(1-x)\,q(t, x)\,dx$ существует и

$$\delta(\lambda) = \int_0^1 x(1-x)\,q(x)\,dx, \qquad (15.104)$$

где $q(x)$ есть единственное вероятностное $\left(q(x) \geqslant 0, \int_0^1 q(x)\,dx = 1\right)$ решение уравнения

$$\frac{d}{dx}[\lambda(1-2x)\,q(x)] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}[x^2(1-x)^2 q(x)]. \qquad (15.105)$$

Нетрудно найти, что это решение задается формулой

$$q(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{2\lambda}{x(1-x)}\right\}\frac{1}{x^2(1-x)^2}}{\int_0^1 \exp\left\{-\frac{2\lambda}{y(1-y)}\right\}\frac{dy}{y^2(1-y)^2}}. \qquad (15.106)$$

Поэтому

$$\delta(\lambda) = \frac{\int_0^1 \exp\left(-\frac{2\lambda}{x(1-x)}\right)\frac{dx}{x(1-x)}}{\int_0^1 \exp\left(-\frac{2\lambda}{x(1-x)}\right)\frac{dx}{x^2(1-x)^2}},$$

*) См. леммы 9.3 и 9.4 в гл. 4 [157].

или, в силу симметрии подынтегральных функций относительно точки $x = 1/2$,

$$\delta(\lambda) = \frac{\int\limits_0^{1/2} \exp\left(-\frac{2\lambda}{x(1-x)}\right)\frac{dx}{x(1-x)}}{\int\limits_0^{1/2} \exp\left(-\frac{2\lambda}{x(1-x)}\right)\frac{dx}{x^2(1-x)^2}}. \tag{15.107}$$

Исследуем $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\delta(\lambda)$. Делая в (15.107) замену переменных

$$y = \frac{2\lambda}{x(1-x)} - 8\lambda,$$

находим, что

$$\delta(\lambda) = \frac{2\lambda\int\limits_0^\infty e^{-y}\sqrt{\frac{y+8\lambda}{y}}\,\frac{dy}{y+8\lambda}}{\int\limits_0^\infty e^{-y}\sqrt{\frac{y+8\lambda}{y}}\,dy}. \tag{15.108}$$

Поскольку при $0 < c < \infty$

$$\int\limits_0^\infty e^{-y}\sqrt{\frac{y+8c}{y}}\,dy < \infty,$$

то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости (теорема 1.4)

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int\limits_0^\infty e^{-y}\sqrt{\frac{y+8\lambda}{y}}\,dy = \int\limits_0^\infty e^{-y}\,dy = 1.$$

Далее,

$$2\lambda\int\limits_0^\infty e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}} = 2\lambda\left[\int\limits_0^1 e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}} + d(\lambda)\right],$$

где $d(\lambda) = \int\limits_1^\infty e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}}$, $\quad d(0) = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0} d(\lambda) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy < 1.$

Поэтому по теореме о среднем $(e^{-1} \leqslant c(\lambda) \leqslant 1)$

$$2\lambda\int\limits_0^\infty e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}} = 2\lambda\left[c(\lambda)\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}} + d(\lambda)\right].$$

Но

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(y+8\lambda)}} = -\ln\lambda\left[1+\frac{\ln 8}{\ln\lambda}-\frac{\ln\left[2\sqrt{1+8\lambda}+2+8\lambda\right]}{\ln\lambda}\right],$$

значит,

$$\delta(\lambda) = -2\lambda\ln\lambda\left[c(\lambda)+O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right], \quad \lambda\downarrow 0. \qquad (15.109)$$

Подобно тому, как показывалось существование

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t) = \int_0^1 x(1-x)\,q(x)\,dx,$$

можно показать, что существуют

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}(1-2\pi_t)^2, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t^2(1-\pi_t)^2,$$

причем

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}(1-2\pi_t)^2 = \frac{1}{\lambda}\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t^2(1-\pi_t)^2. \qquad (15.110)$$

(Заметим, что к (15.110) можно было бы прийти следующим путем. Из (15.102) по формуле Ито получаем

$$\pi_t(1-\pi_t) = n_0(1-n_0)+\lambda\int_0^t (1-2\pi_s)^2\,ds - \int_0^t \pi_s^2(1-\pi_s)^2\,ds + \\ + \int_0^t (1-2\pi_s)\,\pi_s(1-\pi_s)\,d\overline{W}_s.$$

Отсюда следует

$$\mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t) = n_0(1-n_0)+\lambda\int_0^t \mathsf{M}(1-2\pi_s)^2\,ds - \int_0^t \mathsf{M}\pi_s^2(1-\pi_s)^2\,ds,$$

или

$$\frac{d\left[\mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t)\right]}{dt} = \lambda\mathsf{M}(1-2\pi_t)^2 - \mathsf{M}\pi_t^2(1-\pi_t)^2. \qquad (15.111)$$

Но естественно ожидать, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{d\left[\mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t)\right]}{dt}=0$. Вместе с (15.111) это приводит к соотношению (15.110).) Замечая теперь, что $(1-2x)^2 = 1-4x(1-x)$, из (15.110) получаем

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{M}\pi_t(1-\pi_t) = \frac{1}{4} - \lim_{t\to\infty}\frac{\mathsf{M}\pi_t^2(1-\pi_t)^2}{4\lambda} = \frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (15.112)$$

Итак, объединяя оценки (15.109) и (15.112), получаем

$$\delta(\lambda)=\begin{cases} -2\lambda\ln\lambda\left(c(\lambda)+O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right), & \lambda\downarrow 0,\\ \frac{1}{4}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right), & \lambda\uparrow\infty. \end{cases} \tag{15.113}$$

Вместе с (15.100) для величины эффективности $\varepsilon(\lambda)=\frac{\gamma(\lambda)}{\delta(\lambda)}$ оптимальной нелинейной оценки по отношению к оптимальной линейной оценке находим следующее выражение:

$$\varepsilon(\lambda)=\begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}\ln\lambda}[1+o(1)], & \lambda\downarrow 0,\\ 1+o(1), & \lambda\uparrow\infty. \end{cases} \tag{15.114}$$

Отсюда видно, что при малых λ (т. е. когда среднее время пребывания «телеграфного сигнала» в нулевом и единичном состояниях велико) линейный фильтр значительно «проигрывает» в среднеквадратической точности нелинейному. В случае же $\lambda\uparrow\infty$ оба фильтра эквивалентны и работают одинаково «плохо»:

$$\delta(\lambda)\sim\lim_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-n_t)^2=\frac{1}{4},\quad \gamma(\lambda)\sim\lim_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-n_t)^2=\frac{1}{4},\quad \lambda\to\infty,$$

т. е. дают при больших λ ту же самую ошибку, что и «априорный» фильтр, для которого в качестве оценки величины θ_t берется среднее значение n_t.

Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-n_t)^2=\frac{1}{4}$ при всех $\lambda>0$, то из (15.100) также видно, что при малом λ оптимальный линейный фильтр работает «хорошо» (с точки зрения асимптотического «отслеживания» процесса θ_t по сравнению с «априорным» фильтром)

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-\lambda_t)^2}{\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-n_t)^2}=4\sqrt{\lambda}+O(\lambda),\qquad \lambda\downarrow 0.$$

Однако в этих условиях (т. е. при малом λ) нелинейный фильтр дает еще большую точность «отслеживания»:

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-\pi_t)^2}{\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{M}(\theta_t-n_t)^2}=8\lambda\ln\frac{1}{\lambda}\left[c(\lambda)+O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right],\quad \lambda\downarrow 0.$$

Это замечание отражает тот наблюдаемый в задачах фильтрации факт, что выигрыш, дистигаемый с помощью нелинейного фильтра, тем значительнее, чем выше точность «отслеживания», получаемая при применении оптимального линейного фильтра.

ГЛАВА 16

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

§ 1. Одна задача оптимального управления по неполным данным

1. В этом параграфе обобщаются на случай непрерывного времени результаты, полученные в § 3 гл. 14 для задачи управления (по неполным данным) линейной системой с квадратичным функционалом потерь.

Будем предполагать, что частично наблюдаемый управляемый процесс $(\theta, \xi) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)); (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $0 \leqslant t \leqslant T$, задается стохастическими уравнениями

$$\begin{aligned} d\theta_t &= [c(t) u_t + a(t) \theta_t]\, dt + b(t)\, dW_1(t), \\ d\xi_t &= A(t) \theta_t\, dt + B(t)\, dW_2(t). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Матрицы $c(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $A(t)$, $B(t)$ имеют размерности $(k \times r)$, $(k \times k)$, $(k \times k)$, $(l \times k)$, $(l \times l)$ соответственно, их элементы $c_{ij}(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$ являются детерминированными функциями времени, причем

$$| c_{ij}(t) | \leqslant c, \quad | a_{ij}(t) | \leqslant c, \quad | b_{ij}(t) | \leqslant c,$$
$$\int_0^T A_{ij}^2(t)\, dt < \infty, \qquad \int_0^T B_{ij}^2(t)\, dt < \infty$$

при всех допустимых значениях i, j. Предполагается также, что элементы матриц $(B(t) B^*(t))^{-1}$ равномерно ограничены. Входящие в (16.1) независимые винеровские процессы $W_1 = (W_{11}(t), \ldots, W_{1k}(t))$, $W_2 = (W_{21}(t), \ldots, W_{2l}(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, не зависят от гауссовского вектора θ_0 ($M\theta_0 = m_0$, $\operatorname{cov}(\theta_0, \theta_0) = \gamma_0$), а $\xi_0 = 0$.

Вектор $u_t = [u_1(t, \xi), \ldots, u_r(t, \xi)]$, входящий в (16.1), называется управляющим воздействием в момент времени t. Измеримые процессы $u_j(t, \xi)$, $j=1, \ldots, r$, предполагаются такими, что

$$\mathsf{M} \int_0^T \sum_{j=1}^r (u_j(t, \xi))^4 \, dt < \infty, \tag{16.2}$$

а величины $u_j(t, \xi)$ — $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримыми.

Управления $u=(u_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, для которых система уравнений (16.1) имеет единственное сильное решение и для которых выполнено условие (16.2), будут в дальнейшем называться *допустимыми*.

2. Чтобы сформулировать цель управления, введем в рассмотрение функционал потерь.

Пусть h, $H(t)$ — симметрические неотрицательно определенные матрицы порядка $(k \times k)$. Обозначим $R(t)$ симметрические равномерно*) положительно определенные матрицы (размерности $(r \times r)$). Предположим, что элементы матриц $H(t)$ и $R(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями t.

Для каждого допустимого управления $u=(u_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, рассмотрим функционал потерь

$$V(u;\ T) = \mathsf{M} \left\{ \theta_T^* h \theta_T + \int_0^T [\theta_t^* H(t) \theta_t + u_t^* R(t) u_t] \, dt \right\}. \tag{16.3}$$

Допустимое управление $\tilde{u}$ называется оптимальным, если

$$V(\tilde{u};\ T) = \inf_u V(u;\ T), \tag{16.4}$$

где inf берется по классу всех допустимых управлений.

Рассматривая допустимые управления u, положим

$$m_t^u = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi), \qquad \gamma_t^u = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t^u)(\theta_t - m_t^u)^*\right],$$

где θ_t и ξ_t — соответствующие этому управлению процессы, определяемые системой (16.1).

Теорема 16.1. *В классе допустимых управлений оптимальное управление $\tilde{u}=(\tilde{u}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, существует и определяется формулами*

$$\tilde{u}_t = -R^{-1}(t) \, c^*(t) \, P(t) \, \tilde{m}_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16.5}$$

*где неотрицательно определенные симметрические***) *матрицы $P(t) = \| P_{ij}(t) \|$ порядка $(k \times k)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, являются решением*

---

*) Элементы матриц $R^{-1}(t)$ равномерно ограничены.

**) Неотрицательная определенность и симметричность матрицы $P(t)$, удовлетворяющей уравнению (16.6), доказывается так же, как и в случае дискретного времени (§ 3 гл. 14).

уравнения Риккати

$$-\frac{dP(t)}{dt}=a^*(t)P(t)+P(t)a^*(t)+H(t)-\\ -P(t)c(t)R^{-1}(t)c^*(t)P(t),\quad P(T)=h,\quad (16.6)$$

а вектор $\tilde{m}_t$ *определяется из системы уравнений*

$$d\tilde{m}_t=[c(t)\tilde{u}_t+a(t)\tilde{m}_t]\,dt+\gamma_tA^*(t)(B(t)B^*(t))^{-1}[d\xi_t-A(t)\tilde{m}_t\,dt],\\ \tilde{m}_0=m_0=\mathsf{M}\theta_0,\quad (16.7)$$

$$\dot{\gamma}_t=a(t)\gamma_t+\gamma_ta^*(t)+b(t)b^*(t)-\gamma_tA^*(t)(B(t)B^*(t))^{-1}A(t)\gamma_t,\\ \gamma_0=\operatorname{cov}(\theta_0,\theta_0).\quad (16.8)$$

При этом

$$V(\tilde{u},T)=p(0)+m_0^*P(0)m_0+\\ +\operatorname{Sp}\left[\int_0^T H^{1/2}(t)\gamma_tH^{1/2}(t)\,dt+h^{1/2}\gamma_Th^{1/2}\right],\quad (16.9)$$

где

$$p(t)=\int_t^T\sum_{i,j=1}^k D_{ij}(s)P_{ij}(s)\,ds,\quad (16.10)$$

а $D_{ij}(t)$ — *элементы матрицы*

$$D(t)=\gamma_tA^*(t)[B(t)B^*(t)]^{-1}A(t)\gamma_t.\quad (16.11)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что при сделанных выше предположениях

$$\mathsf{M}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{j=1}^k\theta_j^4(t)\right]<\infty,$$

что доказывается, как и в лемме 12.1. Далее, так же, как и при доказательстве теоремы 14.2, устанавливается, что

$$V(u,t)=\mathsf{M}\left\{\theta_T^*h\theta_T+\int_0^T[\theta_t^*H(t)\theta_t+u_t^*R(t)u_t]\,dt\right\}=\\ =\mathsf{M}\left\{\mathsf{M}(\theta_T^*h\theta_T\mid\mathcal{F}_T^\xi)+\int_0^T[\mathsf{M}(\theta_t^*H(t)\theta_t\mid\mathcal{F}_t^\xi)+u_t^*R(t)u_t]\,dt\right\}=\\ =\mathsf{M}\left\{(m_T^u)^*hm_T^u+\int_0^T[(m_t^u)^*H(t)m_t^u+u_t^*R(t)u_t]\,dt+\right.\\ \left.+\operatorname{Sp}\left[h^{1/2}\gamma_T^uh^{1/2}+\int_0^T H^{1/2}(t)\gamma_t^uH^{1/2}(t)\,dt\right]\right\}.\quad (16.12)$$

Важно заметить, что функция γ_t^u не зависит от управления u и совпадает с функцией γ_t, удовлетворяющей уравнению (16.8) (см. теорему 12.1). Поэтому

$$V(u;\ T) = \operatorname{Sp}\left[h^{1/2}\gamma_T h^{1/2} + \int_0^T H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t)\,dt\right] + \\ + \mathsf{M}\left\{(m_T^u)^* h m_T^u + \int_0^T \left[(m_t^u)^* H(t) m_t^u + u_t^* R(t) u_t\right] dt\right\}, \quad (16.13)$$

где согласно той же теореме 12.1 m_t^u, $0 \leqslant t \leqslant T$, находится из уравнения

$$dm_t^u = \left[c(t)u_t + a(t)m_t^u\right]dt + \gamma_t (B(t)B^*(t))^{-1}\left[d\xi_t^u - A(t)m_t^u\,dt\right], \\ m_0^u = m_0, \quad (16.14)$$

с процессом ξ_t^u, $0 \leqslant t \leqslant T$, определяемым из системы (16.1).

Согласно векторному варианту леммы 11.3 процесс $\overline{W}^u = (\overline{W}_t^u, \mathscr{F}_t^{\xi^u})$, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\overline{W}_t^u = \int_0^t B^{-1}(s)\left[d\xi_s^u - A(s)m_s^u\,du\right], \quad (16.15)$$

является винеровским. Поэтому в силу (16.14) и (16.15)

$$dm_t^u = \left[c(t)u_t + a(t)m_t^u\right]dt + \gamma_t A^*(t)(B^*(t))^{-1}\,d\overline{W}_t^u. \quad (16.16)$$

3. Для решения исходной задачи рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $(\mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неубывающее семейство σ-подалгебр $\mathscr{F}$, $z = (z_t, \mathscr{F}_t)$ — r-мерный винеровский процесс, $u = (u_t, \mathscr{F}_t)$ — r-мерный процесс, удовлетворяющий условию

$$\mathsf{M}\int_0^T \sum_{j=1}^r u_j^4(t, \omega)\,dt < \infty, \quad (16.17)$$

где $(u_1(t, \omega), \ldots, u_r(t, \omega)) = u_t$. С управлением $u = (u_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, свяжем управляемый процесс

$$d\mu_t^u = \left[c(t)u_t + a(t)\mu_t^u\right]dt + \gamma_t A^*(t)(B^*(t))^{-1}\,dz_t, \quad (16.18)$$

где $c(t)$, $a(t)$, γ_t, $A(t)$, $B(t)$ — введенные выше матрицы, $\mu_0^u = m_0$. Как и раньше, управление $u = (u_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, будем называть допустимым, если для него выполнено условие (16.17) и уравнение (16.18) имеет единственное сильное решение.

В качестве функционала потерь рассмотрим функционал

$$\overline{V}(u;\ T)=\mathsf{M}\left\{(\mu_T^u)^* h(\mu_T^u)+\int_0^T\left[(\mu_t^u)^* H(t)\mu_t^u+u_t^* R(t)u_t\right]dt\right\}. \tag{16.19}$$

Покажем, что в этой задаче оптимальное управление $\tilde{u}=(\tilde{u}_t,\ \mathscr{F}_t)$ определяется формулами

$$\tilde{u}_t=-R^{-1}(t)c^*(t)P(t)\tilde{\mu}_t, \tag{16.20}$$

где $\tilde{\mu}_t$, $0\leqslant t\leqslant T$, находится из уравнения

$$d\tilde{\mu}_t=\left[a(t)-c(t)R^{-1}(t)c^*(t)P(t)\right]\tilde{\mu}_t\,dt+\gamma_t A^*(t)(B^*(t))^{-1}dz_t,$$
$$\tilde{\mu}_0=m_0. \tag{16.21}$$

С этой целью введем функцию

$$Q(t,\ x)=x^*P(t)x+p(t),\qquad x\in R^k,\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{16.22}$$

где $P(t)$ определяется из уравнений (16.6), а $p(t)$ — из (16.10).

Лемма 16.1. *Функция* $Q(t,\ x)=x^*P(t)x+p(t)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\Phi(t,\ x,\ Q(t,\ x))=0, \tag{16.23}$$

где

$$\Phi(t,\ x,\ Q(t,\ x))=x^*H(t)x+x^*a^*(t)\operatorname{grad}_x Q(t,\ x)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{k}D_{ij}(t)\frac{\partial^2 Q(t,\ x)}{\partial x_i\,\partial x_j}+\frac{\partial Q(t,\ x)}{\partial t}+$$
$$+\min_u\left[u^*R(t)u+u^*c^*(t)\operatorname{grad}_x Q(t,\ x)\right]$$

с $u=(u_1,\ \ldots,\ u_r)$, $Q(T,\ x)=x^*hx$.

Доказательство. В силу положительной определенности матриц $R(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, квадратичная форма

$$J(u;\ t)=u^*R(t)u+u^*c^*(t)\operatorname{grad}_x Q(t,\ x)$$

является положительно определенной и достигает минимального значения на векторе $\tilde{u}_t(x)=(\tilde{u}_1(t,\ x),\ \ldots,\ \tilde{u}_r(t,\ x))$, удовлетворяющем системе линейных алгебраических уравнений

$$\operatorname{grad}_u J(u;\ t)=0.$$

Поскольку $\operatorname{grad}_u J(u;\ t)=2R(t)u+c^*(t)\operatorname{grad}_x Q(t,\ x)$,

$$\tilde{u}_t(x)=-\frac{1}{2}R^{-1}(t)c^*(t)\operatorname{grad}_x Q(t,\ x).$$

Но

$$\operatorname{grad}_x Q(t, x) = 2P(t)x. \tag{16.24}$$

Поэтому

$$\tilde{u}_t(x) = -R^{-1}(t)c^*(t)P(t)x. \tag{16.25}$$

В силу (16.6), (16.22)

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t, x) = x^*\frac{dP(t)}{dt}x^* + \frac{dp(t)}{dt} =$$

$$= x^*\left[-a^*(t)P(t) - P(t)a(t) - H(t) + P(t)c(t)R^{-1}(t)c^*(t)P(t)\right]x -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{k} D_{ij}(t)P_{ij}(t) \tag{16.26}$$

и

$$\frac{\partial^2 Q(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} = 2P_{ij}(t). \tag{16.27}$$

Формулы (16.24)—(16.27) вместе с равенством $J(\tilde{u};\, t) = \min\limits_u J(u;\, t)$ показывают, что функция $Q(t, x) = x^*P(t)x + p(t)$ удовлетворяет уравнению (16.23).

Лемма доказана.

Покажем теперь, что для вспомогательной задачи управление, определяемое формулой (16.20), является оптимальным.

Из (16.23) ясно, что

$$\Phi(t, \tilde{\mu}_t, Q(t, \tilde{\mu}_t)) = 0. \tag{16.28}$$

Пусть теперь $u_t = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — любое из допустимых управлений и $\mu_t = (\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t))$ определяется из уравнения

$$d\mu_t = \left[c(t)u_t + a(t)\mu_t\right]dt + \gamma_t A_t^*(B^*(t))^{-1}dz_t. \tag{16.29}$$

Тогда из (16.23) и неравенства $J(\tilde{u};\, t) \leqslant J(u,\, t)$ вытекает, что

$$\Phi(t, \mu_t, Q(t, \mu_t)) \geqslant 0. \tag{16.30}$$

Применяя к $Q(t, \tilde{\mu}_t)$ формулу Ито, находим, что

$$Q(T, \tilde{\mu}_T) - Q(0, \tilde{\mu}_0) =$$

$$= \int_0^T \left[\frac{\partial Q(s, \tilde{\mu}_s)}{\partial s} + (c(s)\tilde{u}_s + a(s)\tilde{\mu}_s)^* \operatorname{grad}_{\tilde{\mu}} Q(s, \tilde{\mu}_s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} D_{ij}(s)\frac{\partial^2 Q(s, \tilde{\mu}_s)}{\partial \tilde{\mu}_i \partial \tilde{\mu}_j}\right]ds +$$

$$+ \int_0^t [\operatorname{grad}_{\tilde{\mu}} Q(s, \tilde{\mu}_s)]^* \gamma_s A^*(s)(B^*(s))^{-1}dz_s. \tag{16.31}$$

Отсюда, принимая во внимание (16.28), находим

$$Q(T, \tilde{\mu}_T) - Q(0, \tilde{\mu}_0) = -\int_0^T [(\tilde{\mu}_s)^* H(s)\tilde{\mu}_s + (\tilde{u}_s)^* R(s)\tilde{u}_s]\,ds + \\ + \int_0^T [\operatorname{grad}_{\tilde{\mu}} Q(s, \tilde{\mu}_s)]^* \gamma_s A^*(s)(B^*(s))^{-1}\,dz_s. \quad (16.32)$$

Беря теперь математическое ожидание от обеих частей этого равенства и учитывая равенство $\tilde{\mu}_0 = m_0$, получаем, что

$$Q(0, m_0) = \\ = \mathbf{M}\left\{(\tilde{\mu}_T)^* h\tilde{\mu}_T + \int_0^T [(\tilde{\mu}_t)^* H(t)\tilde{\mu}_t + (\tilde{u}_t)^* R(t)\tilde{u}_t]\,dt\right\}. \quad (16.33)$$

Аналогично, применяя тот же прием к $Q(t, \mu_t)$, находим, что

$$Q(0, m_0) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{M}\left\{(\tilde{\mu}_T)^* h\tilde{\mu}_T + \int_0^T [(\mu_t)^* H(t)\mu_t + (u_t)^* R(t)u_t]\,dt\right\}. \quad (16.34)$$

Сравнивая (16.33) и (16.34), получаем

$$\overline{V}(\tilde{u}; T) = Q(0, m_0) \leqslant \overline{V}(u, T). \quad (16.35)$$

Управление $\tilde{u}$, определяемое формулой (16.20), является допустимым, поскольку линейное уравнение (16.21) имеет, и притом единственное, сильное решение (теорема 4.10). Условие (16.17) выполнено в силу векторного варианта теоремы 4.6. Вместе с (16.35) это доказывает, что в классе допустимых управлений управление $\tilde{u}$ является оптимальным.

Этот результат можно получить тем же методом, что и при доказательстве теоремы 6.1. Он получается также из этой теоремы при формальном предельном переходе, если положить $B_{ij}(t) \equiv \varepsilon$, $\varepsilon \downarrow 0$.

4. Чтобы завершить доказательство теоремы 16.1, рассмотрим подробнее процессы

$$\overline{W}^u = \left(\overline{W}_t^u, \mathscr{F}_t^{\xi^u}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Из (16.14) и (16.1) следует, что с вероятностью единица величины $\theta_t^u - m_t^u$ и $\theta_t^0 - m_t^0$ совпадают (индекс 0 соответствует «нулевому» управлению $u_t \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$). Поэтому из (16.15) ясно, что с вероятностью единица все процессы $\overline{W}_t^u$ совпадают

$(\overline{W}_t^u = \overline{W}_t^0)$ и, значит, уравнение (16.16) можно записать в таком виде:

$$dm_t^u = \left[c(t)\,u_t + a(t)\,m_t^u\right]dt + \gamma_t A^*(t)\,(B^*(t))^{-1}\,d\overline{W}_t^0.$$

Пусть теперь $\bar{u}$ — некоторое допустимое управление, $\xi^{\bar{u}} = (\xi_t^{\bar{u}})$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — соответствующий ему процесс и

$$\mathcal{F}_t^{\xi^{\bar{u}}} = \sigma\left\{\omega:\ \xi_s^{\bar{u}},\ s \leqslant t\right\}.$$

Воспользуемся результатами п. 3, взяв $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{\xi^{\bar{u}}}$, $z_t = \overline{W}_t^0$. Пусть $\overline{U}$ — класс всех допустимых управлений $u = (u_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, являющихся $\mathcal{F}_t^{\xi^{\bar{u}}}$-измеримыми при каждом t. Поскольку для любого $\bar{u}$

$$\mathcal{F}_t^{\xi^{\bar{u}}} \supseteq \mathcal{F}_t^{\overline{W}^{\bar{u}}} \equiv \mathcal{F}_t^{\overline{W}^0}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

то управление $\tilde{u}$, задаваемое формулой (16.21), принадлежит $\overline{U}$ для любого $\bar{u}$ (допустимость управления $\tilde{u}$ следует из теоремы 4.10 и векторного варианта теоремы 4.6). Поэтому (см. (16.35)) $\overline{V}(\tilde{u};\ T) \leqslant \overline{V}(u;\ T)$ для всех $u \in \overline{U}$ и, в частности, $V(\tilde{u};\ T) \leqslant \overline{V}(\bar{u};\ T)$. В силу произвольности управления $\bar{u}$ отсюда следует, что управление $\tilde{u}$ является оптимальным.

Наконец, заметим, что формула (16.9) вытекает из (16.13) и равенств

$$\overline{V}(\tilde{u},\ T) = Q(0,\ m_0) = m_0^* P(0)\,m_0 + p(0).$$

Замечание. Как и в случае дискретного времени (§ 3 гл. 14), доказанная теорема иллюстрирует (справедливый и в более общей ситуации [26]) так называемый «принцип разделения», в соответствии с которым задача оптимального управления по неполным данным распадается на две: задачу фильтрации и задачу управления по полным данным для некоторой системы.

5. Рассмотрим один частный случай системы (16.1). Пусть $b(t) \equiv 0$, $A(t) \equiv E_{(k \times k)}$, $B(t) \equiv 0$. Тогда, в задаче управления процессом $\theta = (\theta_t)$, $0 < t \leqslant T$, с

$$\frac{d\theta_t}{dt} = c(t)\,u_t + a(t)\,\theta_t, \tag{16.36}$$

где θ_0 — детерминированный вектор, и функционалом

$$V(u,\ T) = \theta_T^* h \theta_T + \int_0^T \left[\theta_t^* H(t)\,\theta_t + u_t^* R(t)\,u_t\right]dt$$

оптимальное управление $\tilde{u} = (\tilde{u}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, существует и задается формулой

$$\tilde{u}_t = -R^{-1}(t)\,c^*(t)\,P(t)\,\theta_t, \tag{16.37}$$

где $P(t)$ является решением уравнения (16.6). При этом

$$V(\tilde{u};\ T) = \inf_u V(u;\ T) = \theta_0^* P(0)\,\theta_0. \tag{16.38}$$

Этот результат можно получить тем же методом, что и при доказательстве теоремы 6.1. Он получается также из этой теоремы при формальном предельном переходе, если положить $B_{ij}(t) \equiv \varepsilon$, $\varepsilon \downarrow 0$.

§ 2. Асимптотические свойства фильтра Калмана — Бьюси

1. Рассмотрим гауссовский частично наблюдаемый случайный процесс $(\theta, \xi) = [(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t)), (\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t))]$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющий системе стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\theta_t &= [a_1\theta_t + a_2\xi_t]\,dt + b_1\,dW_1(t) + b_2\,dW_2(t),\\ d\xi_t &= [A_1\theta_t + A_2\xi_t]\,dt + B_1\,dW_1(t) + B_2\,dW_2(t) \end{aligned} \tag{16.39}$$

с постоянными матрицами a_1, a_2, A_1, A_2, b_1, b_2, B_1 и B_2 порядков $(k \times k)$, $(k \times l)$, $(l \times k)$, $(l \times l)$, $(k \times k)$, $(k \times l)$, $(l \times k)$ и $(l \times l)$ соответственно. Независимые между собой винеровские процессы $W_1 = (W_{11}(t), \ldots, W_{1k}(t))$ и $W_2(t) = (W_{21}(t), \ldots, W_{2l}(t))$, $t \geqslant 0$, предполагаются, как обычно, не зависящими от гауссовского вектора начальных значений (θ_0, ξ_0).

Если матрица $(B \circ B) = B_1B_1^* + B_2B_2^*$ положительно определена, то согласно теореме 10.3 вектор апостериорных средних значений $m_t = \mathbf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ и матрица ковариаций

$$\gamma_t = \mathbf{M}[(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*] \tag{16.40}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} dm_t = {} & [a_1m_t + a_2\xi_t]\,dt + \\ & + [(b \circ B) + \gamma_t A_1^*](B \circ B)^{-1}[d\xi_t - (A_1m_t + A_2\xi_t)\,dt], \end{aligned} \tag{16.41}$$

$$\dot{\gamma}_t = a_1\gamma_t + \gamma_t a_1^* - [(b \circ B) + \gamma_t A_1^*](B \circ B)^{-1}[(b \circ B) + \gamma_t A_1^*] + (b \circ b), \tag{16.42}$$

где $(b \circ b) = b_1b_1^* + b_2b_2^*$, $(b \circ B) = b_1B_1^* + b_2B_2^*$.

Компоненты вектора $m_t = \mathbf{M}(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ являются наилучшими (в среднеквадратическом смысле) оценками соответствующих компонент вектора θ_t по наблюдениям ξ_0^t. Элементы матрицы γ_t, ее след $\operatorname{Sp}\gamma_t$, показывают точность «отслеживания» оценкой m_t

ненаблюдаемых состояний θ_t. При этом, как и в аналогичной задаче для случая дискретного времени, возникает важный для приложений вопрос об условиях, когда матрицы γ_t стабилизируются при $t \uparrow \infty$. Исследованию вопроса о существовании предела $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma_t$ и способах его вычисления и посвящен настоящий параграф.

2. Прежде чем переходить к точным формулировкам, заметим, что, полагая

$$\begin{aligned} a &= a_1 - (b \circ B)(B \circ B)^{-1} A_1, \\ b &= \left[(b \circ b) - (b \circ B)(B \circ B)^{-1}(b \circ B)^*\right]^{1/2}, \\ B &= [B \circ B]^{1/2}, \qquad A = A_1, \end{aligned} \tag{16.43}$$

уравнение (16.42) можно переписать в несколько более удобном виде:

$$\dot{\gamma}_t = a\gamma_t + \gamma_t a^* + bb^* - \gamma_t A^* (BB^*)^{-1} A\gamma_t. \tag{16.44}$$

Это уравнение совпадает с уравнением для ковариации при рассмотрении гауссовской пары процессов (θ, ξ), удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned} d\theta_t &= a\theta_t\,dt + b\,dW_1(t), \\ d\xi_t &= A\theta_t\,dt + B\,dW_2(t). \end{aligned} \tag{16.45}$$

Так что с точки зрения исследования поведения матриц γ_t при $t \to \infty$ достаточно вместо системы (16.39) рассматривать более простую систему (16.45).

Т е о р е м а 16.2. *Пусть рассматривается система* (16.45), *для которой выполнены следующие условия*:

(I) *ранг блочной матрицы*

$$G_1 = \begin{pmatrix} A \\ Aa \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Aa^{k-1} \end{pmatrix} \tag{16.46}$$

размерности $(kl \times k)$ *равен* k;

(II) *ранг блочной матрицы*

$$G_2 = (b\ \ ab\ \ldots\ a^{k-1}b) \tag{16.47}$$

размерности $(k \times lk)$ *равен* k;

(III) *матрица* BB^* *не вырождена.*

Тогда для $\gamma_t = \mathsf{M}(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma_t = \gamma$. *Этот предел* γ *не зависит от начального значения* γ_0 *и является* *единственным (в классе положительно определенных матриц) решением уравнения*

$$a\gamma + \gamma a^* + bb^* - \gamma A^* (B^*B)^{-1} A\gamma = 0. \tag{16.48}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

3. Лемма 16.2. *Пусть D и Δ — матрицы размерностей $(l\times k)$, $(k\times k)$. Образуем блочную матрицу (порядка $(nl\times k)$)*

$$D_n = \begin{pmatrix} D \\ D\Delta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D\Delta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы $D_n^*D_n$ и $\int\limits_0^T e^{-\Delta^* t} D^* D e^{-\Delta t}\,dt$, $0 < T < \infty$, одновременно либо вырождены, либо невырождены.

Доказательство. Согласно лемме 14.4 матрицы $D_n^*D_n$ и $D_k^*D_k$, $n \geqslant k$, одновременно или вырождены или невырождены. Если матрица $D_k^*D_k$ вырождена, то по этой же лемме найдется ненулевой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $D\Delta^j x = 0$, $j = 0, 1, \ldots, k, k+1, \ldots$ Но тогда

$$De^{-\Delta t} x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} (D\Delta^j x) = 0,$$

и, следовательно,

$$x^* \int\limits_0^T e^{-\Delta^* t} D^* D e^{-\Delta t}\,dt\, x = 0, \tag{16.49}$$

что и доказывает вырожденность матрицы $\int\limits_0^T e^{-\Delta^* t} D^* D e^{-\Delta t}\,dt$.

Наоборот, пусть выполнено (16.49). Тогда, очевидно, $x^* e^{-\Delta^* t} D^* D e^{-\Delta t} x \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому

$$De^{-\Delta t} x \equiv 0 \tag{16.50}$$

и (после дифференцирования по t)

$$\begin{gathered} D\,\Delta e^{-\Delta t} x \equiv 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D\Delta^{k-1} e^{-\Delta t} \equiv 0. \end{gathered} \tag{16.51}$$

Из (16.50) и (16.51) при $t = 0$ вытекает, что $D\Delta^j x = 0$, $j = 0, \ldots, k-1$, что эквивалентно равенству $x^* D_k^* D_k x = 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\tilde{D}_k = (D \; \Delta D \; \ldots \; \Delta^{k-1}D)$ — *блочная матрица порядка* $(k \times kl)$, *где* D *и* Δ — *матрицы размерностей* $(k \times l)$ *и* $(k \times k)$. *Тогда матрицы* $\tilde{D}_k \tilde{D}_k^*$ *и* $\int_0^T e^{-\Delta t} DD^* e^{-\Delta^* t}\, dt$ *одновременно либо вырождены, либо не вырождены.*

Лемма 16.3. *Если матрица* G_2 *имеет ранг* k, *то при* $t > 0$ *матрицы* γ_t, *определяемые из уравнения* (16.44), *являются положительно определенными.*

Доказательство. Матрица γ_t является матрицей ковариаций условно-гауссовского распределения $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi)$. Если это распределение имеет (P-п. н.) плотность, то тогда, очевидно, матрица γ_t будет положительно определенной. Рассматривая систему уравнений (16.45) и принимая во внимание следствие 1 теоремы 7.23 (п. 5 § 9 гл. 7), получаем, что распределение $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a \mid \mathcal{F}_t^\xi)$, $t > 0$, имеет плотность (P-п. н.), если плотностью обладает распределение $\mathsf{P}(\theta_t \leqslant a)$, что эквивалентно условию положительной определенности матрицы $\Gamma_t = \operatorname{cov}(\theta_t, \theta_t)$.

Согласно теореме 15.1 матрицы Γ_t являются решениями дифференциального уравнения

$$\dot{\Gamma}_t = a\Gamma_t + \Gamma_t a^* + bb^*. \tag{16.52}$$

Отсюда находим

$$\Gamma_t = e^{at}\Gamma_0 e^{a^*t} + e^{at}\left[\int_0^t e^{-as} bb^* e^{-a^*s}\, ds\right] e^{a^*t}.$$

Но в силу следствия леммы 16.2 матрицы Γ_t, $t > 0$, положительно определенные, поскольку таковой же является и матрица $G_2 G_2^*$ $(\operatorname{rang} G_2 = k)$.

Лемма доказана.

Лемма 16.4. *Если ранг матрицы* G_1 *равен* k, *то элементы всех матриц* γ_t *равномерно ограничены.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу управления детерминированным процессом $x_t = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{dx_t}{dt} = a^* x_t + A^* u_t, \qquad x_0 = x, \tag{16.53}$$

с функционалом

$$V(u;\, T) = x_T^* \gamma_0 x_T + \int_0^T \left[x_t^* bb^* x_t + u_t^* BB^* u_t\right] dt.$$

Управления u_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, выбираются из класса допустимых (см предыдущий параграф).

Согласно (16.37) оптимальное управление $\tilde{u}_t$ существует и задается формулой

$$\tilde{u}_t = -(BB^*)^{-1} A\gamma_{T-t}\tilde{x}_t, \tag{16.54}$$

где $\tilde{x}_t$ — решение уравнения (16.53) с $u_t = \tilde{u}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$. При этом $V(\tilde{u};\ T) = x^*\gamma_T x$. Поскольку элементы матриц γ_t являются непрерывными функциями, для доказательства леммы достаточно показать, что равномерно ограничены все элементы матриц γ_T при $T > 1$.

Поскольку $\operatorname{rang} G_1 = k$, матрица $G_1^* G_1$ не вырождена, и по лемме 16.2 не вырождена матрица

$$\int_0^1 e^{-a^*t} A^* A e^{-at}\, dt.$$

Возьмем теперь специальное управление

$$\hat{u}_t = \begin{cases} -Ae^{-at}\left(\int_0^1 e^{-a^*s} A^* A e^{-as}\right)^{-1} x, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

и пусть $\hat{x}_t$ — решение уравнения (16.53) с $u_t = \hat{u}_t$. Решая это уравнение, находим, что $\hat{x}_t \equiv 0$, $t \geqslant 1$. Но тогда в силу оптимальности управления $\tilde{u}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 1$,

$$x^*\gamma_T x \leqslant \int_0^1 [\hat{x}_t bb^* \hat{x}_t + \hat{u}_t^* BB^* \hat{u}_t]\, dt < \infty,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 16.5. *Пусть γ_t^0 — решение уравнений* (16.44) *с* $\gamma_0^0 = \gamma_0 = 0$ *и* $\operatorname{rang} G_1 = k$. *Тогда существует* $\lim_{t\to\infty} \gamma_t^0$ *и* $\gamma^0 = \lim_{t\to\infty} \gamma_t^0$ *является неотрицательно определенной симметрической матрицей, удовлетворяющей уравнению*

$$a\gamma^0 + \gamma^0 a^* + bb^* - \gamma^0 A^* (BB^*)^{-1} A\gamma^0 = 0. \tag{16.55}$$

Если к тому же $\operatorname{rang} G_2 = k$, *то* γ^0 *является положительно определенной матрицей.*

Доказательство. В силу предположения $\operatorname{rang} G_1 = k$ из предыдущей леммы следует, что элементы всех матриц γ_t^0, $t \geqslant 0$, равномерно ограничены.

Покажем, что при $\gamma_0 = 0$ функция $x^*\gamma_T^0 x$ монотонно не убывает (по T). Пусть $T_2 > T_1$. Тогда, обозначая $u_t(T_i)$ и $x_t(T_i)$ оптимальные управления и отвечающие им процессы во вспомогательных задачах управления, $i = 1, 2$, находим, что

$$x^*\gamma_{T_2} x = \int_0^{T_2} [(x_t(T_2))^* bb^* x_t(T_2) + (u_t(T_2))^* BB^* u_t(T_2)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{T_1} [(x_t(T_2))^* bb^* x_t(T_2) + (u_t(T_2))^* BB^* u_t(T_2)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{T_1} [(x_t(T_1))^* bb^* x_t(T_1) + (u_t(T_1))^* BB^* u_t(T_1)]\, dt = x^*\gamma_{T_1} x.$$

Из ограниченности и монотонности функций $x^*\gamma_T^0 x$ вытекает существование матрицы $\gamma^0 = \lim_{T\to\infty} \gamma_T^0$ с указанными свойствами.

Если же дополнительно $\operatorname{rang} G_2 = k$, то по лемме 16.3 не вырождены матрицы γ_t^0, а следовательно, таковой же является и матрица $\gamma^0 = \lim_{t\to\infty} \gamma_t^0$.

4. Доказательство теоремы 16.2. Обозначим $\gamma^0 = \lim_{t\to\infty} \gamma_t^0$ при $\gamma_0 = 0$ и положим

$$\bar{u}_t = -(BB^*)^{-1} A\gamma^0 \bar{x}_t, \tag{16.56}$$

где $\bar{x}_t$ — решение уравнения (16.53) с $u_t = \bar{u}_t$, $\bar{x}_0 = x$. Покажем, что $\bar{x}_t \to 0$, $t \to \infty$. Для этого достаточно, например, показать, что

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}_t^* \gamma^0 \bar{x}_t = 0, \tag{16.57}$$

поскольку матрица γ^0 является симметрической и положительно определенной.

В силу (16.53), (16.55) и (16.56)

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_t^*\gamma^0\bar{x}_t) = \bar{x}_t^*\gamma_0 \left[a^* - A^*(BB^*)^{-1} A\gamma^0\right] \bar{x}_t +$$

$$+ \bar{x}_t^* \left[a - \gamma^0 A^*(BB^*)^{-1} A\gamma^0\right] \bar{x}_t - \bar{x}_t^*\gamma^0 A^*(BB^*)^{-1} A\gamma^0 \bar{x}_t =$$

$$= -\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t - \bar{x}_t^*\gamma^0 A^*(BB^*)^{-1}(BB^*)(BB^*)^{-1} A\gamma^0 \bar{x}_t =$$

$$= -[\bar{x}_t^* bb^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* BB^* \bar{u}_t].$$

Значит, по лемме 16.5

$$0 \leqslant \bar{x}_T^* \gamma^0 \bar{x}_T = x^* \gamma^0 x - \int_0^T [\bar{x}_t^* b b^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* B B^* \bar{u}_t]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant x \gamma^0 x - \int_0^T [\tilde{x}_t^* b b^* \tilde{x}_t + \tilde{u}_t^* B B^* \tilde{u}_t]\, dt =$$

$$= x^* [\gamma^0 - \gamma_T^0]\, x \to 0, \quad T \to \infty, \tag{16.58}$$

где $\tilde{u}_t$ — оптимальное управление, определенное в (16.54).

Из (16.58) вытекает также, что

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T [\bar{x}_t^* b b^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* B B^* \bar{u}_t]\, dt = x^* \gamma^0 x. \tag{16.59}$$

Далее, пусть γ_0 — произвольная неотрицательно определенная матрица.

Тогда

$$\bar{x}_T^* \gamma_0 \bar{x}_T + \int_0^T [\bar{x}_t^* b b^* \bar{x}_t + \bar{u}_t^* B B^* \bar{u}_t]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant x^* \gamma_T x = \tilde{x}_T^* \gamma_0 \tilde{x}_T + \int_0^T [\tilde{x}_t^* b b^* \tilde{x}_t + \tilde{u}_t^* B B^* \tilde{u}_t]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T [\tilde{x}_t^* b b^* \tilde{x}_t + \tilde{u}_t^* B B^* \tilde{u}_t]\, dt \geqslant \int_0^T [\check{x}_t^* b b^* \check{x}_t + \check{u}_t^* B B^* \check{u}_t]\, dt = x^* \gamma_T^0 x, \tag{16.60}$$

где $\check{u}_t = -(BB^*)^{-1} A \gamma_{T-t}^0 \check{x}_t$, а $\check{x}_t$ — решение уравнения (16.53) с $u_t = \check{u}_t$. Из этих неравенств и (16.59) следует, что

$$\lim_{T \to \infty} \bar{x}_T^* \gamma_0 \bar{x}_T + x^* \gamma^0 x \geqslant \overline{\lim_{T \to \infty}}\, x^* \gamma_T x \geqslant \underline{\lim_{T \to \infty}}\, x^* \gamma_T x \geqslant \lim_{T \to \infty} x^* \gamma_T^0 x.$$

Но согласно (16.57) $\lim\limits_{T \to \infty} \bar{x}_T^* \gamma_0 \bar{x}_T = 0$, а $\lim\limits_{T \to \infty} x^* \gamma_T^0 x = x^* \gamma^0 x$ (лемма 16.5). Поэтому существует $\lim\limits_{T \to \infty} x^* \gamma_T x$ $(= x^* \gamma x)$,

$$\lim_{T \to \infty} x^* \gamma_T x = x^* \gamma^0 x,$$

и $\gamma = \lim\limits_{T \to \infty} \gamma_T = \gamma^0$.

Предельная матрица $\gamma = \lim\limits_{T \to \infty} \gamma_T$ не зависит от значения γ_0 и удовлетворяет в силу (16.55) уравнению (16.48).

Единственность решения этого уравнения (в классе положительно определенных матриц) доказывается, как и в теореме 14.3.

Замечание. Если собственные числа матрицы a лежат в левой полуплоскости, то можно отказаться от предположения (I) теоремы 16.2, поскольку тогда $\operatorname{Sp}\gamma_t \leqslant \operatorname{Sp} \mathsf{M}\, \theta_t\theta_t^* < \infty$, $t \geqslant 0$.

§ 3. Вычисление взаимной информации и пропускной способности гауссовского канала с обратной связью

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — система неубывающих σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Пусть $\theta = (\theta_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — некоторое «посылаемое сообщение», которое надо передать по каналу с гауссовским «белым» шумом. Чтобы это описание сделать точным, предположим, что задан винеровский процесс $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, не зависящий от процесса $\theta = (\theta_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Если «принятое сообщение» $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$ имеет вид

$$d\xi_t = a_t(\theta)\, dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{16.61}$$

т. е.

$$\xi_t = \int_0^t a_s(\theta)\, ds + W_t, \tag{16.62}$$

то говорят, что «сообщение» θ послано по каналу *без обратной связи* с гауссовским «белым» шумом *). Функционалы $a_s(\theta)$, $0 \leqslant s \leqslant T$, с $\mathsf{P}\left(\int_0^T |a_s(\theta)|\, ds < \infty\right) = 1$ задают кодирование и предполагаются неупреждающими.

В том же случае, когда «принимаемое сообщение» $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, допускает представление

$$d\xi_t = a_t(\theta, \xi)\, dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{16.63}$$

с неупреждающим функционалом $a_t(\theta, \xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T |a_t(\theta, \xi)|\, dt < \infty\right) = 1,$$

то говорят, что передача осуществляется по гауссовскому каналу с «белым» шумом *при наличии* (бесшумной) *обратной связи*.

Таким образом, в случае бесшумной обратной связи «принятое сообщение» ξ отсылается обратно и может быть учтено в дальнейшем при передаче «сообщения» θ.

*) В технической литературе вместо записи (16.62) используют ее формальный аналог $\dot{\xi}(t) = a_t(\theta) + \dot{W}_t$, называя $\dot{W}_t$ «белым» гауссовским шумом.

Пусть $(\Theta, \mathscr{B}_\theta)$ — измеримое пространство, которому принадлежат значения сигнала $\theta=(\theta_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. Через $(\mathbf{C}_T, \mathscr{B}_T)$ будем обозначать измеримое пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x=(x_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, с $x_0=0$. Пусть μ_W, μ_ξ и $\mu_{\theta, \xi}$—меры, отвечающие процессам W, ξ и (θ, ξ).

Если некоторое кодирование $a_t(\theta, \xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, выбрано, то естественно поставить вопрос о том, какая *информация* $\mathbf{I}_T(\theta, \xi)$ содержится в «принятом сообщении» $\xi=\{\xi_s, s\leqslant t\}$ относительно «переданного сообщения» $\theta=\{\theta_s, s\leqslant t\}$.

По определению

$$\mathbf{I}_T(\theta, \xi)=\mathbf{M}\ln\frac{d\mu_{\theta, \xi}}{d[\mu_\theta\times\mu_\xi]}(\theta, \xi), \tag{16.64}$$

причем полагается $\mathbf{I}_T(\theta, \xi)=\infty$, если мера $\mu_{\theta, \xi}$ не является абсолютно непрерывной относительно меры $\mu_\theta\times\mu_\xi$.

Теорема 16.3. *Пусть выполнены следующие условия*:

(I) *уравнение* (16.63) *имеет единственное сильное* (*т. е.* $\mathscr{F}_t^{\theta, W}$-*измеримое при каждом* t, $0\leqslant t\leqslant T$) *решение*;

(II)
$$\int_0^T \mathbf{M}a_t^2(\theta, \xi)\,dt<\infty.$$

Тогда

$$\mathbf{I}_T(\theta, \xi)=\frac{1}{2}\mathbf{M}\int_0^T\left[a_t^2(\theta, \xi)-\bar{a}_t^2(\xi)\right]dt, \tag{16.65}$$

где

$$\bar{a}_t(\xi)=\mathbf{M}\left[a_t(\theta, \xi)\,|\mathscr{F}_t^\xi\right]. \tag{16.66}$$

Доказательство. Согласно сделанным предположениям и леммам 7.6 и 7.7 $\mu_\xi\ll\mu_W$ и $\mu_{\theta, \xi}\ll\mu_\theta\times\mu_W$. Поэтому в силу замечания к теореме 7.23

$$\frac{d\mu_{\theta, \xi}}{d[\mu_\theta\times\mu_\xi]}(\theta, \xi)=\frac{d\mu_{\theta, \xi}}{d[\mu_\theta\times\mu_W]}(\theta, \xi)\Big/\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(\xi). \tag{16.67}$$

Но в силу лемм 7.6 и 7.7

$$\frac{d\mu_{\theta, \xi}}{d[\mu_\theta\times\mu_W]}(\theta, \xi)=\exp\left[\int_0^T a_t(\theta, \xi)\,d\xi_t-\frac{1}{2}\int_0^T a_t^2(\theta, \xi)\,dt\right], \tag{16.68}$$

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu_W}(\xi)=\exp\left[\int_0^T \bar{a}_t(\xi)\,d\xi_t-\frac{1}{2}\int_0^T \bar{a}_t^2(\xi)\,dt\right], \tag{16.69}$$

где

$$\bar{a}_t(x) = \mathsf{M}\left[a_t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right]_{\xi=x}.$$

При этом

$$\int_0^T \mathsf{M}\bar{a}_t^2(\xi)\,dt = \int_0^T \mathsf{M}\left[\mathsf{M}(a_t(\theta, \xi) \mid \mathcal{F}_t^\xi)\right]^2 dt \leqslant \int_0^T \mathsf{M}a_t^2(\theta, \xi)\,dt < \infty.$$

Из (16.67) — (16.69) следует, что

$$\ln \frac{d\mu_{\theta,\xi}}{d[\mu_\theta \times \mu_\xi]}(\theta, \xi) =$$

$$= \int_0^T [a_t(\theta, \xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,d\xi_t - \frac{1}{2}\int_0^T \left[a_t^2(\theta, \xi) - \bar{a}_t^2(\xi)\right] dt =$$

$$= \int_0^T \left([a_t(\theta, \xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,a_t(\theta, \xi) - \frac{1}{2}\left[a_t^2(\theta, \xi) - \bar{a}_t^2(\xi)\right]\right) dt +$$

$$+ \int_0^T [a_t(\theta, \xi) - \bar{a}_t(\xi)]\,dW_t. \tag{16.70}$$

Отсюда по свойствам стохастических интегралов

$$\mathsf{M} \ln \frac{d\mu_{\theta,\xi}}{d[\mu_0 \times \mu_\xi]}(\theta, \xi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \mathsf{M}\left[a_t^2(\theta, \xi) - 2a_t(\theta, \xi)\,\bar{a}_t(\xi) + \bar{a}_t^2(\xi)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \mathsf{M}\left[a_t(\theta, \xi) - \bar{a}_t(\xi)\right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \mathsf{M}\left\{\mathsf{M}\left[a_t(\theta, \xi) - \bar{a}_t(\xi)\right]^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \mathsf{M}\left[a_t^2(\theta, \xi) - \bar{a}_t^2(\xi)\right] dt, \tag{16.71}$$

что и доказывает теорему.

2. Используем эту теорему для доказательства того, что (при определенных «энергетических» ограничениях) обратная связь не увеличивает пропускной способности.

По определению для канала с обратной связью *пропускная способность*

$$\mathbf{C} = \sup \frac{1}{T} \mathbf{I}_T(\theta, \xi), \tag{16.72}$$

где sup берется по всем сообщениям θ и неупреждающим функционалам $\{a_t(\theta, \xi),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, для которых уравнение (16.63) имеет единственное сильное решение и

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{M} a_t^2(\theta, \xi)\, dt \leqslant \mathbf{P} \tag{16.73}$$

с константой $\mathbf{P}$, характеризующей энергетические возможности передающего устройства.

В силу (16.71)

$$0 \leqslant \mathbf{I}_T(\theta, \xi) = \frac{1}{2} \mathsf{M} \int_0^T [a_t^2(\theta, \xi) - \bar{a}_t^2(\xi)]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \mathsf{M} \int_0^T a_t^2(\theta, \xi)\, dt \leqslant \frac{\mathbf{P}T}{2}. \tag{16.74}$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} \leqslant \frac{\mathbf{P}}{2}. \tag{16.75}$$

Покажем теперь, что для канала без обратной связи

$$\mathbf{C}_0 = \sup \frac{1}{T} \mathbf{I}_T(\theta, \xi) = \frac{\mathbf{P}}{2}, \tag{16.76}$$

где sup берется по всем сообщениям θ и неупреждающим функционалам $a_t(\theta)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, для которых

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{M} a_t^2(\theta)\, dt \leqslant \mathbf{P}.$$

Поскольку $\mathbf{C} \geqslant \mathbf{C}_0$, то из (16.75) и (16.76) будет следовать, что обратная связь не увеличивает пропускной способности:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 = \frac{\mathbf{P}}{2}. \tag{16.77}$$

С этой целью рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть $a_t(x) = x_t$ и $\theta^\alpha = (\theta_t^\alpha)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является гауссовским стационарным процессом с $\mathsf{M}\theta_t^\alpha \equiv 0$ и корреляционной функцией

$$K(t, s) = \mathbf{P} \exp\{-\alpha\, |t - t|\}.$$

Будем предполагать, что сообщение $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, на выходе канала задается в виде

$$d\xi_t=\theta_t^\alpha\,dt+dW_t,\qquad \xi_0=0,$$

где $W=(W_t)$, $t\geqslant 0$, — винеровский процесс, не зависящий от процесса θ^α.

Согласно теореме 15.2 процесс θ_t^α имеет дифференциал

$$d\theta_t^\alpha=-\alpha\theta_t^\alpha\,dt+\sqrt{2\alpha\mathbf{P}}\,dz_t,$$

где $z=(z_t)$, $t\geqslant 0$, — винеровский процесс, не зависящий от W. Положим $m_t^\alpha=\mathsf{M}(\theta_t^\alpha\mid\mathscr{F}_t^\xi)$, $\gamma_t^\alpha=\mathsf{M}(\theta_t^\alpha-m_t^\alpha)^2$. По теореме 10.1

$$\begin{aligned} dm_t^\alpha&=-\alpha m_t^\alpha\,dt+\gamma_t^\alpha(d\xi_t-m_t^\alpha\,dt), & m_0^\alpha&=0,\\ \dot\gamma_t^\alpha&=-2\alpha\gamma_t^\alpha+2\alpha\mathbf{P}-(\gamma_t^\alpha)^2, & \gamma_0^\alpha&=\mathbf{P}. \end{aligned}\tag{16.78}$$

Из (16.78) и гауссовости процесса θ^α следует выполнимость предположений теоремы 16.3, и, значит,

$$\mathbf{I}_T(\theta^\alpha,\ \xi)=\frac{1}{2}\left[\int_0^T\mathsf{M}(\theta_t^\alpha)^2\,dt-\int_0^T\mathsf{M}(m_t^\alpha)^2\,dt\right]=$$

$$=\frac{\mathbf{P}T}{2}-\frac{1}{2}\int_0^T\mathsf{M}(m_t^\alpha)^2\,dt.\tag{16.79}$$

Покажем, что

$$\lim_{\alpha\uparrow\infty}\int_0^T\mathsf{M}(m_t^\alpha)^2\,dt=0.\tag{16.80}$$

По теореме 7.12 процесс $\overline{W}=(\overline{W}_t,\ \mathscr{F}_t^\xi)$ с $\overline{W}_t=\xi_t-\int_0^t m_s^\alpha\,ds$ является винеровским. Следовательно,

$$dm_t^\alpha=-\alpha m_t^\alpha\,dt+\gamma_t^\alpha\,d\overline{W}_t,$$

откуда

$$m_t^\alpha=e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\gamma_s^\alpha\,d\overline{W}_s,$$

и по свойствам стохастических интегралов получаем

$$\mathsf{M}(m_t^\alpha)^2=\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}(\gamma_s^\alpha)^2\,ds\leqslant\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}\mathbf{P}^2\,ds=$$

$$=\mathbf{P}^2\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha},\tag{16.81}$$

поскольку $\gamma_t^\alpha = \mathsf{M}(\theta_t^\alpha - m_t^\alpha)^2 \leqslant \mathsf{M}(\theta_t^\alpha)^2 = \mathbf{P}$. Из (16.81) вытекает требуемое соотношение (16.80).

Итак, доказана

Теорема 16.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 16.3. *Тогда пропускная способность* $\mathbf{C}$ *канала с обратной связью совпадает с пропускной способностью* $\mathbf{C}_0$ *канала без обратной связи и*

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 = \frac{\mathbf{P}}{2}.$$

§ 4. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью

1. Развитая в предшествующих главах теория оптимальной нелинейной фильтрации условно-гауссовских процессов дает возможность найти *оптимальный* метод передачи гауссовских процессов по каналам с аддитивным «белым» шумом при использовании мгновенной бесшумной обратной связи.

Предположим сначала, что сообщение, которое требуется передать, есть гауссовская случайная величина θ с $\mathsf{M}\theta = m$, $\mathsf{D}\theta = \gamma > 0$, причем параметры m и γ известны как на передающем, так и на приемном концах.

Сигналы $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, принимаемые на выходе «передающего устройства», предполагаются удовлетворяющими стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_t = A(t, \theta, \xi)\, dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{16.82}$$

где $W = (W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — винеровский процесс, не зависящий от θ. Неупреждающий функционал $A = (A(t, \theta, \xi))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, задает кодирование и предполагается таким, что уравнение (16.82) имеет, и притом единственное, сильное решение с

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T A^2(s, \theta, \xi)\, ds < \infty\right\} = 1.$$

Будем считать также, что на функционалы $A = (A(t, \theta, \xi))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, наложено ограничение:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{M}A^2(s, \theta, \xi)\, ds \leqslant \mathbf{P}, \tag{16.83}$$

где $\mathbf{P}$ — заданная константа. (Кодирования, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, будем называть допустимыми.)

В каждый момент времени t по принятому сигналу $\xi_0^t = \{\xi_s, s \leqslant t\}$ можно построить «сообщение на выходе» $\hat{\theta}_t(\xi)$.

Задающий декодирование неупреждающий функционал $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_t(\xi))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, должен выбираться, естественно, так, чтобы оптимальным в некотором смысле образом «воспроизводить» сообщение θ.

Обозначим

$$\Delta(t) = \inf \mathsf{M}[\theta - \hat{\theta}_t(\xi)]^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где inf берется по всем допустимым кодированиям $A = (A(s, \theta, \xi))$, $s \geqslant 0$, и декодированиям $\hat{\theta}_t(\xi)$. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальные кодирование, декодирование (конечно, если таковые существуют) и минимальную ошибку воспроизведения $\Delta(t)$ сообщения θ за передачу в течение времени t.

Поскольку (при заданном кодировании)

$$\mathsf{M}[\theta - \hat{\theta}_t(\xi)]^2 \geqslant \mathsf{M}[\theta - m_t(\xi)]^2,$$

где $m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$, то ясно, что $\Delta(t) = \inf\limits_A \mathsf{M}[\theta - m_t]^2$ и оптимальное декодирование (по сигналам ξ_0^t) есть апостериорное среднее $m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$.

Итак, исходная задача сводится к задаче отыскания лишь оптимального кодирования.

2. Рассмотрим сначала подкласс допустимых кодирующих функций $A(t, \theta, \xi)$, *линейно* зависящих от θ:

$$A(t, \theta, \xi) = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta, \tag{16.84}$$

где $A_0 = (A_0(t, \xi))$, $A_1 = (A_1(t, \xi))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — неупреждающие функционалы. Обозначим

$$\Delta^*(t) = \inf_{(A_0,\ A_1)} \mathsf{M}[\theta - m_t]^2, \tag{16.85}$$

и найдем величину $\Delta^*(t)$ и оптимальные кодирующие функции (A_0^*, A_1^*), на которых достигается inf в (16.85).

Пусть некоторое кодирование (A_0, A_1) выбрано и $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — процесс, удовлетворяющий уравнению

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta]\,dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0. \tag{16.86}$$

Тогда согласно теореме 12.1 $m_t = \mathsf{M}(\theta \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и $\gamma_t = \mathsf{M}[(\theta - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ удовлетворяют уравнениям

$$dm_t = \gamma_t A_1(t, \xi)\,[d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,m_t)\,dt], \tag{16.87}$$

$$\dot{\gamma}_t = -\gamma_t^2 A_1^2(t, \xi) \tag{16.88}$$

с $m_0=m$, $\gamma_0=\gamma$. Уравнение (16.88) имеет решение (теорема 12.2)

$$\gamma_t=\frac{\gamma}{1+\gamma\int\limits_0^t A_1^2(s,\xi)\,ds},$$

причем видно, что $\mathsf{P}(\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant T}\gamma_s>0)=1$. Поэтому из (16.88) получаем

$$\frac{\dot\gamma_t}{\gamma_t}=-\gamma_t A_1^2(t,\xi),$$

и, следовательно,

$$\ln\gamma_t-\ln\gamma=-\int\limits_0^t\gamma_s A_1^2(s,\xi)\,ds,$$

т.е.

$$\gamma_t=\gamma\exp\left\{-\int\limits_0^t\gamma_s A_1^2(s,\xi)\,ds\right\}. \tag{16.89}$$

Поскольку

$$\mathsf{M}[A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)\theta]^2=\mathsf{M}\{[A_0(t,\xi)+m_t A_1(t,\xi)]+[\theta-m_t]A_1(t,\xi)\}^2=$$
$$=\mathsf{M}\{A_0(t,\xi)+A_1(t,\xi)m_t\}^2+\mathsf{M}\gamma_t A_1^2(t,\xi), \tag{16.90}$$

то в силу ограничения (16.83)

$$\int\limits_0^t\mathsf{M}\gamma_s A_1^2(s,\xi)\,ds\leqslant\mathbf{P}t. \tag{16.91}$$

Поэтому в силу неравенства Йенсена ($\mathsf{M}e^{-\eta}\geqslant e^{-\mathsf{M}\eta}$), (16.89) и (16.91)

$$\mathsf{M}\gamma_t\geqslant\gamma e^{-\mathbf{P}t},\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{16.92}$$

Итак, для заданного кодирования (A_0, A_1)

$$\mathsf{M}[\theta-m_t]^2=\mathsf{M}\gamma_t\geqslant\gamma e^{-\mathbf{P}t}, \tag{16.93}$$

и, следовательно (см. (16.85)),

$$\Delta^*(t)\geqslant\gamma e^{-\mathbf{P}t}. \tag{16.94}$$

Для оптимального кодирования (A_0^*, A_1^*) неравенства в (16.91) и (16.92) должны превратиться в равенства. Это произойдет, если взять

$$A_1^*(t)=\sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma}}e^{\mathbf{P}t/2}, \tag{16.95}$$

поскольку тогда соответствующее γ_t^* (см. (16.88)) будет в точности равно $\gamma e^{-\mathbf{P}t}$.

Сравнивая (16.90) и равенство

$$\int_0^t \mathbf{M}\gamma_s^* (A_1^*(s))^2\,ds = \int_0^t \gamma_s^* (A_1^*(s))^2\,ds = \mathbf{P}t,$$

находим, что должно быть также выполнено равенство

$$A_0^*(t, \xi^*) + A_1^*(t)\,m_t^*(\xi^*) = 0, \tag{16.96}$$

где согласно (16.87) оптимальное декодирование m_t^* определяется из уравнения

$$dm_t^* = \sqrt{\mathbf{P}\gamma}\,e^{-\mathbf{P}t/2}\,d\xi_t^*, \quad m_0^* = m, \tag{16.97}$$

а передаваемый сигнал $\xi^* = (\xi_t^*)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. (16.86)), удовлетворяет уравнению

$$d\xi_t^* = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma}}\,e^{\mathbf{P}t/2}\,(\theta - m_t^*)\,dt + dW_t, \quad \xi_0^* = 0. \tag{16.98}$$

Из (16.97) видно, что оптимальное декодирование может быть записано также в следующем виде:

$$m_t^* = m + \sqrt{\mathbf{P}\gamma}\int_0^t e^{-\frac{\mathbf{P}s}{2}}\,d\xi_s^* =$$

$$= m + \sqrt{\mathbf{P}\gamma}\left[e^{-\frac{\mathbf{P}t}{2}}\,\xi_t^* + \frac{\mathbf{P}}{2}\int_0^t e^{-\frac{\mathbf{P}s}{2}}\,\xi_s^*\,ds\right]. \tag{16.99}$$

Уравнение же (16.98) показывает, что оптимальная операция кодирования состоит в том, чтобы посылать все время не само сообщение θ, а «расхождение» $\theta - m_t^*$ между величиной θ и ее оптимальной оценкой m_t^*, умноженное на $\sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma_t}}$

Итак, доказана

Лемма 16.6. *В классе допустимых линейных кодирующих функций* (16.84) *оптимальное кодирование* (A_0^*, A_1^*) *существует и задается формулами*

$$A_1^*(t) = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma}}\,e^{\mathbf{P}t/2}, \tag{16.100}$$

$$A_0^*(t, \xi^*) = -A_1^*(t)\,m_t^*. \tag{16.101}$$

При этом оптимальное декодирование m_t^* и передаваемый сигнал ξ_t^* удовлетворяют уравнениям (16.97), (16.98).

Ошибка воспроизведения

$$\Delta^*(t) = \gamma e^{-\mathbf{P}t}. \tag{16.102}$$

Замечание 1. Рассмотрим класс линейных кодирующих функций $A_0(t) + A_1(t)\,\theta$, не использующих обратную связь. Иначе говоря, будем предполагать, что функции $A_0(t)$, $A_1(t)$ зависят лишь от времени, $\int_0^T [A_0^2(t) + A_1^2(t)]\,dt < \infty$ и

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{M}[A_0(s) + A_1(s)\theta]^2\,ds \leqslant \mathbf{P}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}[A_0(s) + A_1(s)\theta]^2 = [A_0(s) + mA_1(s)]^2 + \gamma A_1^2(s),$$

то из вышеприведенного энергетического ограничения находим, что

$$\int_0^t A_1^2(s)\,ds \leqslant \frac{\mathbf{P}}{\gamma}t.$$

Отсюда вытекает, что

$$\gamma_t = \frac{\gamma}{1 + \gamma\int_0^t A_1^2(s)\,ds} \geqslant \frac{\gamma}{1 + \mathbf{P}t},$$

и, следовательно, минимальная среднеквадратическая ошибка воспроизведения (без использования обратной связи)

$$\tilde{\Delta}(t) = \inf \mathsf{M}[\theta - m_t]^2 \geqslant \frac{\gamma}{1 + \mathbf{P}t}.$$

Но для кодирующих функций

$$\tilde{A}_1(t) = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma}}, \qquad \tilde{A}_0(t) = -A_1(t)\,m$$

среднеквадратическая ошибка в точности равна $\frac{\gamma}{1 + \mathbf{P}t}$. Поэтому

$$\tilde{\Delta}(t) = \frac{\gamma}{1 + \mathbf{P}t}.$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим еще одну особенность процесса ξ^*, являющегося оптимальным передаваемым сигналом. Если (A_0, A_1) —некоторое допустимое кодирование, то согласно теореме 7.12 и уравнению (16.86)

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,m_t]\,dt + d\overline{W}_t,$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^\xi)$ — винеровский процесс.

Для оптимального сигнала ξ^* $A_0^*(t,\xi^*)+A_1^*(t,\xi^*)m_t^*=0$. Поэтому процесс $\xi^*=(\xi_t^*)$, $0\leqslant t\leqslant T$, совпадает с соответствующим ему обновляющим процессом $\overline{W}=(\overline{W}_t,\mathscr{F}_t^{\xi^*})$. Следовательно, *в оптимальном случае передача устроена так, что передавать надо только обновляющий процесс* $\overline{W}=(\overline{W}_t,F_t^{\xi^*})$.

3. Покажем теперь, что найденное в лемме 16.6 кодирование (A_0^*,A_1^*) является оптимальным также в том смысле, что оно дает наибольшую информацию $\mathbf{I}_t(\theta,\xi)$ о θ в принимаемом сообщении $\xi_0^t=\{\xi_s,\ s\leqslant t\}$ для каждого t, $0\leqslant t\leqslant T$.

Пусть $\mathbf{I}_t=\sup\mathbf{I}_t(\theta,\xi)$, где sup берется по всем сигналам $\xi_0^t=\{\xi_s,s\leqslant t\}$, удовлетворяющим уравнению (16.82) с допустимыми кодирующими функциями $A=(A(t,\theta,\xi))$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Лемма 16.7. *Процесс* $\xi^*=\{\xi_s^*,0\leqslant s\leqslant T\}$, *найденный в лемме* 16.6, *является также оптимальным в том смысле, что для него*

$$\mathbf{I}_t=\mathbf{I}_t(\theta,\xi^*)=\frac{\mathbf{P}t}{2},\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{16.103}$$

Доказательство. Пусть $A=(A(t,\theta,\xi))$, $0\leqslant t\leqslant T$,—некоторое допустимое кодирование. Тогда из теоремы 16.3 и предположения (16.83) следует, что

$$\mathbf{I}_t(\theta,\xi)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{M}\,[A^2(s,\theta,\xi)-\overline{A}^2(s,\xi)]\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{M}A^2(s,\theta,\xi)\,ds\leqslant\frac{\mathbf{P}t}{2}, \tag{16.104}$$

где $\overline{A}(s,\xi)=\mathbf{M}\left[A(s,\theta,\xi)\mid\mathscr{F}_s^\xi\right]$.

С другой стороны, возьмем $A(s,\theta,\xi^*)=A_0^*(s,\xi)+A_1^*(s)\,\theta$ с $A_0^*(s,\xi)$ и $A_1^*(s)$, определенными в лемме 16.6. Тогда в силу (16.101)

$$\mathbf{M}\left[A(s,\theta,\xi^*)\mid\mathscr{F}_s^\xi\right]=A_0^*(s,\xi^*)+A_1^*(s)\,m_s^*=0,$$

и, значит, согласно (16.104), (16.90)

$$\mathbf{I}_t(\theta,\xi^*)=\frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{M}\,[A_0^*(s,\xi)+A_1^*(s)\,\theta]^2\,ds=\frac{\mathbf{P}t}{2},$$

что вместе с (16.104) доказывает требуемое равенство (16.103).

4. В настоящем пункте будет показано, что *линейное* кодирование (A_0^*,A_1^*) является оптимальным в классе *всех* допустимых кодирований.

При доказательстве этого предложения оказывается полезным приводимое ниже неравенство (16.105), в определенном смысле аналогичное неравенству Рао-Крамера.

Лемма 16.8. *Пусть θ — гауссовская случайная величина, $\theta \sim N(m, \gamma)$ и $\tilde{\theta}$ — некоторая случайная величина. Тогда*

$$\mathbf{M}[\theta - \tilde{\theta}]^2 \geqslant \gamma e^{-2\mathbf{I}(\theta,\,\tilde{\theta})}. \tag{16.105}$$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon^2 = \mathbf{M}[\theta - \tilde{\theta}]^2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < \varepsilon^2 < \infty$. Рассмотрим теперь ε-энтропию $H_\varepsilon(\theta) = \inf\{\mathbf{I}(\theta, \bar{\theta})\colon \mathbf{M}(\theta - \bar{\theta})^2 \leqslant \varepsilon^2\}$. Согласно известной формуле для ε-энтропии $H_\varepsilon(\theta)$ гауссовской величины θ (см. формулу (12) в [88])

$$H_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2}\ln \max\left(\frac{\gamma}{\varepsilon^2},\ 1\right). \tag{16.106}$$

Следовательно,

$$\mathbf{I}(\theta, \tilde{\theta}) \geqslant H_\varepsilon(\theta) \geqslant \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\gamma}{\mathbf{M}[\theta - \tilde{\theta}]^2},$$

что и доказывает требуемое неравенство (16.105).

Теорема 16.5. *Пусть θ—гауссовская случайная величина, передаваемая по каналу связи, описываемому уравнением* (16.82). *Тогда*

$$\Delta(t) = \Delta^*(t) = \gamma e^{-\mathbf{P}t} \tag{16.107}$$

и, следовательно, в классе всех допустимых кодирований оптимальным является линейное кодирование (A_0^*, A_1^*), *найденное в лемме* 16.6.

Доказательство. Ясно, что $\Delta(t) \leqslant \Delta^*(t) = \gamma e^{-\mathbf{P}t}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что

$$\Delta(t) \geqslant \gamma e^{-\mathbf{P}t}. \tag{16.108}$$

Пусть $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,—процесс, отвечающий некоторому допустимому кодированию (см. 16.83)), и $\hat{\theta} = \hat{\theta}_t(\xi)$—какое-то декодирование. Тогда в силу леммы 16.8

$$\mathbf{M}\left[\theta - \hat{\theta}_t(\xi)\right]^2 \geqslant \gamma e^{-2\mathbf{I}(\theta,\,\hat{\theta}_t(\xi))}. \tag{16.109}$$

Но, как хорошо известно, $\mathbf{I}(\hat{\theta}, \hat{\theta}_t(\xi)) \leqslant \mathbf{I}_t(\theta, \xi)$. К тому же по лемме 16.7 $\mathbf{I}_t(\theta, \xi) \leqslant \mathbf{I}_t(\theta, \xi^*) = \mathbf{P}t/2$. Поэтому

$$\mathbf{M}[\theta - \theta_t(\xi)]^2 \geqslant \gamma e^{-\mathbf{P}t},$$

что и доказывает требуемое неравенство (16.108).

Теорема доказана.

5. Метод, примененный при доказательстве леммы 16.6, может быть использован для отыскания оптимального *линейного* кодирования и для того случая, когда передаваемое сообщение $\theta = (\theta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является гауссовским процессом с дифференциалом

$$d\theta_t = a(t)\,\theta_t\,dt + b(t)\,d\tilde{W}_t, \tag{16.110}$$

где винеровский процесс $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, не зависит от гауссовской случайной величины θ_0 с заданными значениями $\mathsf{M}\theta_0 = m$, $\mathsf{D}\theta_0 = \gamma > 0$, а $|a(t)| \leqslant K$, $|b(t)| \leqslant K$.

Будем предполагать (ср. с (16.86)), что процесс $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, получаемый на выходе канала, является единственным сильным решением уравнения

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta_t]\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{16.111}$$

где винеровский процесс $W = (W_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, не зависит от $\tilde{W}$, θ_0 и (неупреждающие) кодирующие функции $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$ удовлетворяют условиям

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T A_0^2(t, \xi)\,dt < \infty\right\} = 1, \qquad \sup_{x \in C,\ t \leqslant T} |A_1(t, x)| < \infty$$

и энергетическому ограничению

$$\mathsf{M}[A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta_t]^2 \leqslant \mathbf{P}$$

с заданной константой $\mathbf{P}$.

Пусть

$$\Delta^*(t) = \inf \mathsf{M}[\theta_t - \hat{\theta}_t(\xi)]^2,$$

где inf берется по всем описанным допустимым кодирующим функциям и декодированиям $\hat{\theta}_t(\xi)$. Ясно, что

$$\Delta^*(t) = \inf_{(A_0,\, A_1)} \mathsf{M}[\theta_t - m_t]^2,$$

где $m_t = \mathsf{M}\left(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi\right)$.

Обозначим

$$\gamma_t = \mathsf{M}\left[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi\right]. \tag{16.112}$$

Тогда

$$\Delta^*(t) = \inf_{(A_0,\, A_1)} \mathsf{M}\gamma_t. \tag{16.113}$$

Если кодирование (A_0, A_1) задано, то по теореме 12.1

$$dm_t = a(t)\,m_t\,dt + \gamma_t A_1(t, \xi)\,[d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,m_t)\,dt], \tag{16.114}$$

$$\dot{\gamma}_t = 2a(t)\,\gamma_t - \gamma_t^2 A_1^2(t, \xi) + b^2(t) \tag{16.115}$$

с $m_0 = m$, $\gamma_0 = \gamma$.

Как и в (16.90), находим, что

$$\mathsf{M}[A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t]^2 + \mathsf{M}[\gamma_t A_1^2(t, \xi)] \leqslant \mathbf{P}. \tag{16.116}$$

Заметим теперь, что уравнение (16.115) эквивалентно интегральному уравнению

$$\gamma_t = \gamma \exp\left\{2\int_0^t a(s)\,ds - \int_0^t \gamma_s A_1^2(s, \xi)\,ds\right\} + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_s^t a(u)\,du - \int_s^t \gamma_u A_1^2(u, \xi)\,du\right\} ds.$$

Отсюда в силу неравенства Йенсена ($\mathsf{M}e^{-\eta} \geqslant e^{-\mathsf{M}\eta}$) получаем

$$\mathsf{M}[\theta_t - m_t]^2 \geqslant \gamma \exp\left\{2\int_0^t a(s)\,ds - \int_0^t \mathsf{M}\gamma_s A_1^2(s, \xi)\,ds\right\} + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_s^t a(u)\,du - \int_s^t \mathsf{M}\gamma_u A_1^2(u, \xi)\,du\right\} ds, \tag{16.117}$$

что вместе с неравенством $\mathsf{M}\gamma_t A_1^2(t, \xi) \leqslant \mathbf{P}$, вытекающим из (16.116), дает для $\mathsf{M}\gamma_t$ оценку снизу:

$$\mathsf{M}\gamma_t \geqslant \gamma \exp\left\{2\int_0^t \left[a(s) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] ds\right\} + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_s^t \left[a(u) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] du\right\} ds. \tag{16.118}$$

Укажем теперь кодирование (A_0^*, A_1^*), для которого в (16.118) достигается знак равенства. Поскольку по предположению $\gamma_0 = \gamma > 0$, то $\mathsf{P}\{\inf_{t \leqslant T} \gamma_t > 0\} = 1$ (теорема 12.7) и, следовательно, для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, определены функции

$$A_1^*(t, \xi^*) = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma_t^*}}, \tag{16.119}$$

$$A_0^*(t, \xi^*) = -A_1^*(t, \xi)^* m_t^*, \tag{16.120}$$

где $m_t^* = \mathsf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi^*})$, $\gamma_t^* = \mathsf{M}[(\theta_t - m_t^*)^2 \mid \mathcal{F}_t^{\xi^*}]$, а $\xi^* = (\xi_t^*)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является решением уравнения

$$d\xi_t^* = [A_0^*(t, \xi^*) + A_1^*(t, \xi^*)\theta_t]\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^* = 0. \tag{16.121}$$

Важно заметить, что в силу (16.119) $(A_1^*(t, \xi^*))^2\,\gamma_t^* = \mathbf{P}$, и, следовательно (см. (16.115)),

$$\dot{\gamma}_t^* = [2a(t) - \mathbf{P}]\,\gamma_t^* + b^2(t), \qquad \gamma_0^* = \gamma. \tag{16.122}$$

Это линейное уравнение имеет единственное решение

$$\gamma_t^* = \gamma \exp\left\{2\int_0^t \left[a(s) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] ds\right\} + \\ + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_0^t \left[a(u) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] du\right\} ds, \tag{16.123}$$

которое не зависит от «случая».

Сравнивая (16.113), (16.118) и (16.123), убеждаемся в том, что

$$\Delta^*(t) = \gamma_t^*, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16.124}$$

Итак, доказана

Теорема 16.6. *При передаче по схеме* (16.111) *гауссовского процесса* θ_t, *подчиняющегося уравнению* (16.110), *оптимальная передача описывается уравнением*

$$d\xi_t^* = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\gamma_t^*}}\,[\theta_t - m_t^*]\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^* = 0, \tag{16.125}$$

где оптимальное декодирование $m_t^* = \mathsf{M}_t(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^{\xi^*})$ *определяется из уравнения*

$$dm_t^* = a(t)\,m_t^*\,dt + \sqrt{\mathbf{P}\gamma_t^*}\,d\xi_t^*, \qquad m_0^* = m, \tag{16.126}$$

а

$$\dot{\gamma}_t^* = [2a(t) - \mathbf{P}]\,\gamma_t^* + b^2(t), \quad \gamma_0^* = \gamma. \tag{16.127}$$

Минимальная ошибка воспроизведения

$$\Delta^*(t) = \gamma \exp\left\{2\int_0^t \left[a(s) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] ds + \\ + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_s^t \left[a(u) - \frac{\mathbf{P}}{2}\right] du\right\} ds.\right\} \tag{16.128}$$

Следствие. *Если* $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$, *то* (ср. с (16.102))

$$\Delta^*(t) = \gamma e^{-\mathbf{P}t}.$$

Замечание 1. Если в передаче по схеме (16.111) обратная связь не используется, то оптимальные кодирующие функции $\tilde{A}_0(t)$, $\tilde{A}_1(t)$ задаются формулами

$$\tilde{A}_1(t)=\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}\theta_t}}, \qquad \tilde{A}_0(t)=-\tilde{A}_1(t)\,\mathrm{M}\theta_t.$$

При этом среднеквадратическая ошибка воспроизведения $\tilde{\Delta}(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\tilde{\Delta}}(t)=2a(t)\tilde{\Delta}(t)+b^2(t)-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}\theta_t}\tilde{\Delta}^2(t),\quad \tilde{\Delta}(0)=\gamma.$$

Для сравнения величин $\Delta^*(t)$ и $\tilde{\Delta}(t)$ рассмотрим следующий

Пример 2. Пусть $a(t)\equiv-1$, $b(t)\equiv1$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $m=0$, т. е. пусть процесс θ_t, $t\geqslant0$, является стационарным гауссовским марковским процессом с $d\theta_t=-\theta_t\,dt+d\tilde{W}_t$ и $\theta_0\sim N(0,\ 1/2)$. Тогда $\mathrm{M}\theta_t\equiv0$, $\mathrm{D}\theta_t\equiv1/2$ и $\dot{\tilde{\Delta}}(t)=-2\tilde{\Delta}(t)+1-2\mathrm{P}\tilde{\Delta}^2(t)$, $\tilde{\Delta}(0)=1/2$. Отсюда нетрудно найти, что

$$\tilde{\Delta}_{\mathrm{P}}=\lim_{t\to\infty}\tilde{\Delta}(t)=\frac{\sqrt{1+2\mathrm{P}}-1}{2\mathrm{P}}.$$

В то же время согласно (16.128)

$$\Delta^*(t)=\frac{1}{2+\mathrm{P}}+e^{-(2+\mathrm{P})t}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\mathrm{P}}\right],$$

и, значит, $\Delta^*_{\mathrm{P}}=\lim\limits_{t\to\infty}\Delta^*(t)=\frac{1}{2+\mathrm{P}}$. Поэтому

$$\frac{\Delta^*_{\mathrm{P}}}{\tilde{\Delta}_{\mathrm{P}}}=\frac{2\mathrm{P}}{(2+\mathrm{P})(\sqrt{1+2\mathrm{P}}-1)},$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta^*_{\mathrm{P}}}{\tilde{\Delta}_{\mathrm{P}}}\sim\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{P}}}, & \mathrm{P}\to\infty,\\ 1, & \mathrm{P}\to0.\end{cases}$$

Иначе говоря, при больших **P** использование обратной связи дает ошибку воспроизведения существенно меньшую, нежели без использования обратной связи. При малых **P** ошибки воспроизведения в обоих случаях асимптотически (при $t\to\infty$) эквивалентны.

Замечание 2. Кодирование $(A_0^*,\ A_1^*)$, найденное в теореме 16.6, является также оптимальным в том смысле, что

$$\mathrm{I}_t(\theta,\xi^*)=\sup\mathrm{I}_t(\theta,\xi), \tag{16.129}$$

где sup берется по всем допустимым линейным кодированиям, а $\mathrm{I}_t(\theta,\xi)$ определено в (16.64). Доказательство равенства (16.129) проводится так же, как и в лемме 16.7.

ГЛАВА 17

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ И РАЗЛИЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

§ 1. Метод максимального правдоподобия для коэффициентов линейной регрессии

1. Пусть $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — случайный процесс с

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\theta_i + \eta_t, \tag{17.1}$$

где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ — вектор-столбец неизвестных параметров, $-\infty < \theta_i < \infty$, $i = 1, \ldots, N$, а $\alpha_t = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t))$ — известная вектор-функция с измеримыми детерминированными компонентами $\alpha_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$. Случайный процесс $\eta = (\eta_t)$, $-\infty < t < \infty$, предполагается стационарным, $\mathbf{M}\eta_0 = 0$, гауссовским с дробно-рациональной спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \left| \frac{P_{n-1}(i\lambda)}{Q_n(i\lambda)} \right|^2, \tag{17.2}$$

где $P_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j$, $b_{n-1} \neq 0$, $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $a_n = 1$ и корни уравнения $Q_n(z) = 0$ лежат в левой полуплоскости.

Основываясь на выведенных ранее уравнениях оптимальной фильтрации, найдем оценки максимального правдоподобия вектора θ по результатам наблюдений $\xi_0^T = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}$.

2. Будем предполагать, что у функций $\alpha_j(t)$ существуют производные $g_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$, и

$$\int_0^T g_j^2(t)\,dt < \infty. \tag{17.3}$$

Согласно теореме 15.4 процесс $\eta = (\eta_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является компонентой n-мерного процесса $(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$, где $\eta_t = \eta_1(t)$, удовлетворяющего уравнениям

$$d\eta_j(t)=\eta_{j+1}(t)\,dt+\beta_j dW_t, \qquad j=1, \ldots, n-1, \tag{17.4}$$

$$d\eta_n(t)=-\sum_{j=0}^{n-1} a_j\eta_{j+1}(t)\,dt+\beta_n\,dW_t, \tag{17.5}$$

где $W=(W_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — некоторый винеровский процесс, не зависящий от $\eta_j(0)$, $j=1, \ldots, n$, а числа β_j, $j=1, \ldots, N$, задаются формулами

$$\beta_1=b_{n-1}, \quad \beta_j=b_{n-j}-\sum_{i=1}^{j-1}\beta_i a_{n-j+i}, \qquad j=2, \ldots, n.$$

Согласно предположению $\beta_1=b_{n-1}\neq 0$ и

$$d\xi_t=\left[\sum_{i=1}^{N} g_i(t)\,\theta_i+\eta_2(t)\right]dt+\beta_1\,dW_t. \tag{17.6}$$

Поэтому, если $g_t=(g_1(t), \ldots, g_N(t))$ — вектор-функция (строка), а $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ — вектор (столбец) неизвестных параметров, то

$$d\xi_t=[g_t\theta+\eta_2(t)]\,dt+\beta_1\,dW_t \tag{17.7}$$

и

$$\begin{aligned} d\eta_j(t)&=\eta_{j+1}(t)dt+\beta_j\,dW_t, \qquad j=2, \ldots, n-1,\\ d\eta_n(t)&=\left[-a_0(\xi_t-\alpha_t\theta)-\sum_{j=2}^{n-1} a_j\eta_{j+1}(t)\right]dt+\beta_n\,dW_t. \end{aligned} \tag{17.8}$$

В системе (17.7), (17.8) компоненты $\eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)$ являются ненаблюдаемыми. Процесс ξ_t наблюдаем.

Зафиксируем некоторое $\theta\in R^N$ и для соответствующих этому значению процессов ξ_t и $\eta_j(t)$ обозначим

$$m_j^\theta(t, \xi)=\mathsf{M}\,[\eta_j(t)\,|\,\xi_s, \ 0\leqslant s\leqslant t], \ j=2, \ldots, n,$$

$$\gamma_{ij}^\theta(t)=\mathsf{M}\left[(\eta_i(t)-m_i^\theta(t, \xi))(\eta_j(t)-m_j^\theta(t, \xi))\right], \ i,j=2, \ldots, n.$$

Согласно уравнениям теоремы 10.3 ковариации $\gamma_{ij}^\theta(t)$ не зависят от θ. При этом $\gamma_{ij}(t)\equiv\gamma_{ij}^\theta(t)$ удовлетворяют уравнениям (10.82), а

$$\begin{aligned} dm_j^\theta(t, \xi)&=m_{j+1}^\theta(t, \xi)\,dt+\\ &+\frac{\beta_1\beta_j+\gamma_{2j}(t)}{\beta_1^2}\left[d\xi_t-(g_t\theta+m_2^\theta(t, \xi))\,dt\right], \ j=2, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{17.9}$$

$$\begin{aligned} dm_n^\theta(t, \xi)&=\left[-a_0(\xi_t-\alpha_t\theta)-\sum_{j=1}^{n-1} a_j m_{j+1}^\theta(t, \xi)\right]dt+\\ &\qquad+\frac{\beta_1\beta_n+\gamma_{2n}(t)}{\beta_1^2}\left[d\xi_t-(g_t\theta+m_2^\theta(t, \xi))\,dt\right]. \end{aligned} \tag{17.10}$$

Далее, по теореме 7.17 процесс $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, допускает дифференциал

$$d\xi_t=[g_t\theta+m_2^\theta(t,\xi)]\,dt+\beta_1\,d\overline{W}_t, \tag{17.11}$$

где $\overline{W}=(\overline{W}_t,\mathscr{F}_t^\xi)$ — винеровский процесс и

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^T (m_2^\theta(t,\xi))^2\,dt<\infty\right\}=1.$$

Наряду с процессом $\xi=(\xi_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, рассмотрим процесс

$$\tilde{\xi}_t=\tilde{\xi}_0+\beta_1\overline{W}_t,\qquad \tilde{\xi}_0=\eta_1(0), \tag{17.12}$$

и процессы $m_j^\theta(t,\tilde{\xi})$, $j=2,\ldots,n-1$, удовлетворяющие системе (17.9), (17.10), где вместо ξ подставлен процесс $\tilde{\xi}$.

Пусть μ^θ и $\tilde{\mu}$ — меры на $(C_T,\mathscr{B}_T)$, соответствующие *) процессам $\xi=(\xi_t)$ и $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, определяемым из (17.11) и (17.12). В силу теоремы 7.19, леммы 4.10 и того факта, что ξ_0 и $\tilde{\xi}_0=\eta_1(0)$ — гауссовские случайные величины $(\mathsf{D}\xi_0=\mathsf{D}\tilde{\xi}_0>0)$, меры μ^θ и $\tilde{\mu}$ эквивалентны, причем

$$\frac{d\mu^\theta}{d\tilde{\mu}}(\xi)=\exp\left\{\frac{\xi_0\alpha_0\theta}{\delta^2}-\frac{1}{2}\frac{(\alpha_0\theta)^2}{\delta^2}+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\frac{g_t\theta+m_2^\theta(t,\xi)}{\beta_1^2}\,d\xi_t-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{[g_t\theta+m_2^\theta(t,\xi)]^2}{\beta_1^2}\,dt\right\}, \tag{17.13}$$

где $\delta^2=\mathsf{M}\tilde{\xi}_0^2\ (=\mathsf{M}\eta_1^2(0))$.

Выясним структуру величин $m_2^\theta(t,\xi)$, входящих в (17.13). Из уравнений (17.9) и (17.10) нетрудно вывести **), что

$$m_2^\theta(t,\xi)=\nu_0(t,\xi)+\nu_1(t)\,\theta, \tag{17.14}$$

где $\nu_0(t,\xi)$ $\mathscr{F}_t^\xi$-измеримы при каждом t, а $\nu_1(t)=(\nu_{11}(t),\ldots$ $\ldots,\nu_{1N}(t))$ — детерминированная вектор-функция (строка).

---

*) $\mathscr{B}_T$ — борелевская σ-алгебра в пространстве C_T непрерывных функций $x=(x_s)$, $0\leqslant s\leqslant T$.

**) Соответствующие рассуждения для случая дискретного времени см. в § 2 гл. 14.

Из (17.13) и (17.14) получаем

$$\frac{d\mu^\theta}{d\bar{\mu}}(\xi)=\exp\left\{\frac{\xi_0\alpha_0\theta}{\delta^2}-\frac{1}{2}\frac{(\alpha_0\theta)^2}{\delta^2}+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\frac{(g_t+\nu_1(t))\,\theta+\nu_0(t,\xi)}{\beta_1^2}\,d\xi_t-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{[(g_t+\nu_1(t))\,\theta+\nu_0(t,\xi)]^2}{\beta_1^2}\,dt\right\}. \tag{17.15}$$

Предположим, что матрица

$$D_T=\frac{\alpha_0^*\alpha_0}{\delta^2}+\int_0^T\frac{[g_t+\nu_1(t)]^*\,[g_t+\nu_1(t)]}{\beta_1^2}\,dt \tag{17.16}$$

является положительно определенной. Тогда из (17.15), дифференцируя, находим, что вектор

$$\hat{\theta}_T(\xi)=D_T^{-1}\left\{\frac{\alpha_0^*\xi_0}{\delta^2}+\int_0^T\frac{[g_t+\nu_1(t)]^*}{\beta_1^2}\,(d\xi_t-\nu_0(t,\xi)\,dt)\right\} \tag{17.17}$$

максимизирует (17.15) и, следовательно, является оценкой максимального правдоподобия вектора θ.

3. Остановимся на некоторых свойствах оценок $\hat{\theta}_T(\xi)$. Из (17.16), (17.17) и (17.11) следует, что

$$\hat{\theta}_T(\xi)=D_T^{-1}\left\{\frac{\alpha_0^*\alpha_0\theta}{\delta^2}+\int_0^T\frac{[g_t+\nu_1(t)]^*}{\beta_1^2}\,[g_t+\nu_1(t)]\,\theta\,dt\right\}+$$
$$+D_T^{-1}\left\{\frac{\alpha_0^*\alpha_0\eta_l(0)}{\delta^2}+\int_0^t\frac{[g_t+\nu_1(t)]^*}{\beta_1^2}\,d\overline{W}_t\right\}=$$
$$=\theta+D_T^{-1}\left\{\frac{\alpha_0^*\alpha_0\eta_1(0)}{\delta^2}+\int_0^t\frac{[g_t+\nu_1(t)]^*}{\beta_1^2}\,d\overline{W}_t\right\}, \tag{17.18}$$

и, значит,

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_T(\xi)=\theta, \tag{17.19}$$

$$\mathsf{M}\,[(\hat{\theta}_T(\xi)-\theta)\,(\hat{\theta}_T(\xi)-\theta)^*]=D_T. \tag{17.20}$$

После несложных преобразований находим, что

$$\frac{d\mu^\theta}{d\bar{\mu}}(\xi)=\exp\left\{\theta^*D_T\hat{\theta}_T(\xi)-\frac{1}{2}\theta^*D_T\theta\right\}. \tag{17.21}$$

Отсюда вытекает, что оценка $\hat{\theta}_T(\xi)$ является достаточной статистикой (§ 5 гл. 1). Наконец, так же, как и в случае дискретного времени (§ 2 гл. 14), показывается, что оценка $\hat{\theta}_T(\xi)$ является эффективной.

Итак, доказана

Теорема 17.1. *Пусть матрица D_T, определяемая* (17.16), *является положительно определенной. Тогда оценка максимального правдоподобия* $\hat{\theta}_T(\xi)$ *вектора* θ *в схеме* (17.1) *задается формулой* (17.17). *Эта оценка является несмещенной и эффективной.*

4. В качестве иллюстрации приведем один

Пример. Оценим среднее значение θ стационарного гауссовского процесса ξ_t, $-\infty < t < \infty$, со спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \left| \frac{i\lambda + 1}{(i\lambda)^2 + i\lambda + 1} \right|^2$$

по результатам наблюдений $\xi_0^T = \{\xi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant T\}$.

Пусть $\eta_t = \xi_t - \theta$. Тогда η_t — стационарный гауссовский процесс с $\mathsf{M}\eta_t = 0$ и спектральной плотностью $f(\lambda)$. По теореме 15.4 процесс η_t является компонентой двумерного процесса $(\eta_1(t),\ \eta_2(t))$, $\eta_t = \eta_1(t)$, удовлетворяющего уравнениям

$$d\eta_1(t) = \eta_2(t)\,dt + dW_t,$$
$$d\eta_2(t) = [-\eta_1(t) - \eta_2(t)]\,dt,$$

и, следовательно,

$$d\xi_t = \eta_2(t)\,dt + dW_t,$$
$$d\eta_2 = [\theta - \xi_t - \eta_2(t)]\,dt.$$

Обозначим при фиксированном $\theta \in R^1$

$$m^\theta(t,\ \xi) = \mathsf{M}\left(\eta_2(t) \mid \mathcal{F}_t^\xi\right) \quad \text{и} \quad \gamma(t) = \mathsf{M}\left[\eta_2(t) - m^\theta(t,\ \xi)\right]^2.$$

По теореме 10.3 и в силу уравнений для процесса $(\xi(t),\ \eta_2(t))$ имеем уравнения для $m^\theta(t,\ \xi)$ и $\gamma(t)$:

$$dm^\theta(t,\ \xi) = [\theta - \xi_t - m^\theta(t,\ \xi)]\,dt + \gamma(t)\,[d\xi_t - m^\theta(t,\ \xi)\,dt],$$
$$\dot{\gamma}(t) = -2\gamma(t) - \gamma^2(t).$$

Эти уравнения решаются при начальных условиях

$$m^\theta(0,\ \xi) = \mathsf{M}[\eta_2(0) \mid \xi_0] = \mathsf{M}[\eta_2(0) \mid \eta_1(0) + \theta],$$
$$\gamma(0) = \mathsf{M}[\eta_2(0) - m^\theta(0,\ \xi)]^2,$$

которые находятся с помощью теоремы о нормальной корреляции (теорема 13.1). Согласно этой теореме

$$m^{\theta}(0, \xi) = \frac{\mathsf{M}\eta_1(0)\,\eta_2(0)}{\mathsf{M}\eta_1^2(0)}(\xi_0 - \theta),$$

$$\gamma(0) = \mathsf{M}\eta_2^2(0) - \frac{(\mathsf{M}\eta_1(0)\,\eta_2(0))^2}{\mathsf{M}\eta_1^2(0)}.$$

Для отыскания моментов $\mathsf{M}\eta_1^2(0)$, $\mathsf{M}\eta_2^2(0)$, $\mathsf{M}\eta_1(0)\,\eta_2(0)$ воспользуемся стационарностью процесса $(\eta_1(t), \eta_2(t))$, $-\infty < t < \infty$, и тем фактом, что матрица

$$\Gamma \equiv \mathsf{M}\begin{pmatrix} \eta_1^2(t) & \eta_1(t)\,\eta_2(t) \\ \eta_1(t)\,\eta_2(t) & \eta_2^2(t) \end{pmatrix}$$

является единственным решением системы уравнений (теорема 15.4)

$$A\Gamma + \Gamma A^* + BB^* = 0$$

с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\mathsf{M}\eta_1^2(0) = 1, \qquad \mathsf{M}\eta_2^2(0) = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{M}\eta_1(0)\,\eta_2(0) = -\frac{1}{2}, \qquad m^{\theta}(0, \xi) = \frac{1}{2}(\theta - \xi_0), \qquad \gamma(0) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, легко проверить, что

$$m^{\theta}(t, \xi) = \exp\left\{-\int_0^t (1 + \gamma(s))\,ds\right\}\left\{\frac{1}{2}(\theta - \xi_0) + \right.$$
$$+ \int_0^t \exp\left[\int_0^s (1 + \gamma(u))\,du\right](\theta - \xi_s)\,ds +$$
$$\left. + \int_0^t \exp\left[\int_0^s (1 + \gamma(u))\,du\right]\gamma_s\,d\xi_s\right\}.$$

Из этой формулы следует (см. (17.14))

$$m^{\theta}(t, \xi) = \nu_0(t, \xi) + \nu_1(t)\,\theta,$$

и нетрудно подсчитать, что

$$\nu_0(t,\xi)=\exp\left\{-\int_0^t (1+\gamma(s))\,ds\right\}\left\{-\frac{\xi_0}{2}-\right.$$

$$-\int_0^t \exp\left[\int_0^s (1+\gamma(u))\,du\right]\xi_u\,du+$$

$$\left.+\int_0^t \exp\left[\int_0^s (1+\gamma(u))\,du\right]\gamma_u\,d\xi_u\right\},$$

$$\nu_1(t)=\exp\left\{-\int_0^t (1+\gamma(s))\,ds\right\}\left\{\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t \exp\left[\int_0^s (1+\gamma(u))\,du\right]ds\right\}.$$

Поскольку $\mathsf{D}\xi_0=\mathsf{M}\eta_1^2(0)=1$, то величина (см. (17.16)) $D_T=1+\int_0^T \nu_1^2(t)\,dt>0$ (в нашем случае $g_t\equiv 0$) и оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T(\xi)$ для среднего значения процесса ξ_t задается формулой

$$\hat{\theta}_T(\xi)=\frac{\xi_0+\int_0^T \nu_1(t)\,(d\xi_t-\nu_0(t,\xi)\,dt)}{1+\int_0^T \nu_1^2(t)\,dt}.$$

§ 2. Оценка параметра коэффициента сноса для процессов диффузионного типа

1. Пусть θ — неизвестный параметр, $-\infty<\theta<\infty$, а $\xi=(\xi_t,\mathscr{F}_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, — процесс диффузионного типа с дифференциалом

$$d\xi_t=\theta a_t(\xi)\,dt+dW_t,\qquad \xi_0=0, \tag{17.22}$$

где $W=(W_t,\mathscr{F}_t)$ — винеровский процесс, а $a_t(x)$ — неупреждающие функционалы, $0\leqslant t\leqslant T$, $x\in C_T$.

Рассмотрим задачу оценивания параметра θ, входящего в коэффициент сноса $\theta a_t(\xi)$, по наблюдениям $\xi_0^T=\{\xi_s,\ s\leqslant T\}$.

Будем предполагать, что функционалы $a_t(x)$ удовлетворяют условиям

$$\mathsf{P}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt < \infty\right) = \mathsf{P}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(W)\,dt < \infty\right) = 1, \tag{17.23}$$

где индекс θ у P_θ подчеркивает то, что распределение процесса ξ рассматривается для данного значения θ.

Согласно теореме 7.7 меры μ_ξ^θ и μ_W ($\mu_\xi^\theta(B) = \mathsf{P}_\theta\{\omega: \xi \in B\}$, $B \in \mathscr{B}_T$), определенные на $(C_T, \mathscr{B}_T)$, эквивалентны и

$$\frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_W}(\xi) = \exp\left\{\theta\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t - \frac{\theta^2}{2}\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right\}. \tag{17.24}$$

Отсюда вытекает, что при условии $\mathsf{P}_\theta\left\{\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt > 0\right\} = 1$, $\theta \in R^1$, оценка максимального правдоподобия $\hat\theta_T(\xi)$ задается формулой

$$\hat\theta_T(\xi) = \frac{\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t}{\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt}. \tag{17.25}$$

Изучим свойства этой оценки.

Теорема 17.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \int_0^T \mathsf{M}_\theta a_t^{16}(\xi)\,dt < \infty, \tag{17.26}$$

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right)^{-16} < \infty \tag{17.27}$$

для любых θ_1, θ_2 $(-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty)$.

Тогда смещение $b_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta[\hat\theta_T(\xi) - \theta]$ *и среднеквадратическая ошибка* $B_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta[\hat\theta_T(\xi) - \theta]^2$ *определяются формулами*

$$b_T(\theta) = \frac{d}{d\theta}\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right)^{-1}, \tag{17.28}$$

$$B_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right)^{-1} + \frac{d^2}{d\theta^2}\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right)^{-2}. \tag{17.29}$$

2. Предварительно установим справедливость следующих двух лемм.

Лемма 17.1. *Пусть* $\delta = \delta(x)$ — $\mathscr{B}_T$-*измеримая функция с* $\sup\limits_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \mathsf{M}_\theta \delta^4(\xi) < \infty$ *для любых* θ_1, θ_2 $(-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty)$. *Если*

$$\sup_{\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2} \mathsf{M}_\theta \int_0^T a_t^8(\xi)\, dt < \infty, \qquad -\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \tag{17.30}$$

то функция $\mathsf{M}_\theta \delta(\xi)$ *дифференцируема по* θ *и*

$$\frac{d}{d\theta} \mathsf{M}_\theta \delta(\xi) = \mathsf{M}_\theta \left[\delta(\xi) \int_0^T a_t(\xi)\, dW_t \right]. \tag{17.31}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi(\theta, W) = \frac{d\mu_\xi^\theta}{d\mu_W}(W) = \exp\left\{ \theta \int_0^T a_t(W)\, dW_t - \frac{\theta^2}{2} \int_0^T a_t^2(W)\, dt \right\}.$$

Функция $\varphi(\theta, W)$ дифференцируема по θ, и (P-п. н.)

$$\frac{\partial \varphi(\theta, W)}{\partial \theta} = \left[\int_0^T a_t(W)\, dW_t - \theta \int_0^T a_t^2(W)\, dt \right] \varphi(\theta, W). \tag{17.32}$$

Пусть $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$. Тогда в силу (17.32)

$$\mathsf{M}_{\theta_2} \delta(\xi) - \mathsf{M}_{\theta_1} \delta(\xi) = \mathsf{M} \delta(W) [\varphi(\theta_2, W) - \varphi(\theta_1, W)] =$$

$$= \mathsf{M} \delta(W) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_0^T a_t(W) - \theta \int_0^T a_t^2(W)\, dt \right] \varphi(\theta, W)\, d\theta.$$

Заметим, что согласно предположениям леммы

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathsf{M} \left| \delta(W) \left[\int_0^T a_t(W)\, dW_t - \theta \int_0^T a_t^2(W)\, dt \right] \right| \varphi(\theta, W)\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathsf{M}_\theta \left| \delta(\xi) \left[\int_0^T a_t(\xi)\, d\xi_t - \theta \int_0^T a_t^2(\xi)\, dt \right] \right| d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathsf{M}_\theta \left| \delta(\xi) \int_0^T a_t(\xi)\, dW_t \right| d\theta \leqslant \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\mathsf{M}_\theta \delta^2(\xi)\, \mathsf{M}_\theta \int_0^T a_t^2(\xi)\, dt \right]^{1/2} d\theta < \infty.$$

Поэтому по теореме Фубини

$$\mathsf{M}\delta(W)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\int_0^T a_t(W)\,dW_t-\theta\int_0^T a_t^2(W)\,dt\right]\varphi(\theta,W)\,d\theta=$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)\left[\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t-\theta\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]d\theta=$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathsf{M}_\theta\left[\delta(\xi)\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right]d\theta,$$

и, значит,

$$\mathsf{M}_{\theta_2}\delta(\xi)-\mathsf{M}_{\theta_1}\delta(\xi)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\mathsf{M}_\theta\left(\delta(\xi)\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right)\right]d\theta. \qquad (17.33)$$

Отсюда следует, что $\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)$ является абсолютно непрерывной функцией. Покажем теперь, что в (17.33) подынтегральная функция

$$\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)\left[\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right]=\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)\left[\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t-\theta\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]$$

является непрерывной по θ.

Обозначим

$$\delta_1(\xi)=\delta(\xi)\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t,\qquad \delta_2(\xi)=\delta(\xi)\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt.$$

Тогда

$$\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)\left[\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right]=\mathsf{M}_\theta\delta_1(\xi)-\theta\mathsf{M}_\theta\delta_2(\xi),$$

и для доказательства непрерывности достаточно лишь установить, что

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2}\mathsf{M}_\theta\delta_i^2(\xi)<\infty,\qquad i=1,\,2, \qquad (17.34)$$

для любых $\theta_1<\theta_2$. Действительно, при выполнении этих условий функции $\mathsf{M}_\theta\delta_i(\xi)$, $i=1,\,2$, как было показано, будут абсолютно непрерывными, а следовательно, и непрерывными. Имеем

$$\mathsf{M}_\theta\delta_1^2(\xi)\leqslant\left\{\mathsf{M}_\theta\delta^4(\xi)\,\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t\right]^4\right\}^{1/2},$$

где в силу неравенства Гёльдера ($p=4$, $q=4/3$)

$$\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T a_t(\xi)\,d\xi_t\right]^4 = \mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t + \theta\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^4 \leqslant$$

$$\leqslant 2^3\left[\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right)^4 + \theta^4\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right)^4\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^3\left[36T\int_0^T \mathsf{M}_\theta a_t^4(\xi)\,dt + \theta^4 T^3\int_0^T \mathsf{M} a_t^8(\xi)\,dt\right]. \qquad (17.35)$$

(Здесь использована оценка

$$\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right)^4 \leqslant 36T\int_0^T \mathsf{M}_\theta a_t^4(\xi)\,dt,$$

доказанная в лемме 4.12.) Из (17.35) и (17.30) следует требуемая оценка (17.34) с $i=1$. Аналогично устанавливается оценка (17.34) и с $i=2$.

Лемма 17.2. *Пусть* $\delta(x)$ — $\mathscr{B}_T$ — *измеримая функция и*

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} \mathsf{M}_\theta\delta^8(\xi) < \infty \qquad (17.36)$$

для любых $\theta_1<\theta_2$. *Если*

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} \mathsf{M}_\theta\int_0^T a_t^{16}(\xi)\,dt < \infty, \qquad (17.37)$$

то функция $\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)$ *дважды дифференциируема по* θ *и*

$$\frac{d^2\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)}{d\theta^2} = \mathsf{M}_\theta\delta(\xi)\left[\left(\int_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right)^2 - \int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]. \qquad (17.38)$$

Доказательство. В силу (17.31) и определения функций $\delta_1(\xi)$, $\delta_2(\xi)$ (см. доказательство леммы 17.1)

$$\frac{d}{d\theta}\mathsf{M}_\theta\delta(\xi) = \mathsf{M}_\theta\delta_1(\xi) - \theta\mathsf{M}_\theta\delta_2(\xi). \qquad (17.39)$$

Поэтому для существования второй производной $\frac{d^2}{d\theta^2}\mathsf{M}_\theta\delta(\xi)$ достаточно в силу леммы 17.1 проверить, что

$$\sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} \mathsf{M}_\theta\delta_i^4(\xi) < \infty, \quad i=1,\,2, \qquad (17.40)$$

для любых $\theta_1<\theta_2$.

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\mathsf{M}_\theta \delta_1^4(\xi) = \left[\mathsf{M}_\theta \delta^8(\xi)\, \mathsf{M}_\theta \left(\int_0^T a_t(\xi)\, d\xi_t\right)^8\right]^{1/2}.$$

Используя неравенство Гёльдера ($p=8$, $q=8/7$) и лемму 4.12, находим, что

$$\mathsf{M}_\theta \left(\int_0^T a_t(\xi)\, d\xi_t\right)^8 = \mathsf{M}_\theta \left[\int_0^T a_t(\xi)\, dW_t + \theta \int_0^T a_t^2(\xi)\, dt\right]^8 \leqslant$$

$$\leqslant 2^7 \left[\mathsf{M}_\theta \left(\int_0^T a_t(\xi)\, dW_t\right)^8 + \theta^8 \mathsf{M}_\theta \left(\int_0^T a_t^2(\xi)\, dt\right)^8\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^7 \left[28^4 T^3 \int_0^T \mathsf{M} a_t^8(\xi)\, dt + \theta^8 T^7 \int_0^T \mathsf{M}_\theta a_t^{16}(\xi)\, dt\right]. \qquad (17.41)$$

Аналогично показывается, что

$$\mathsf{M}_\theta \delta_2^4(\xi) \leqslant \left[\mathsf{M}_\theta \delta^8(\xi)\, \mathsf{M}_\theta \left(\int_0^T a_t^2(\xi)\, dt\right)^8\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\mathsf{M}_\theta \delta^8(\xi)\, T^7 \int_0^T \mathsf{M}_\theta a_t^{16}(\xi)\, dt\right]^{1/2}.$$

Из этих неравенств и предположений леммы получаем требуемые неравенства (17.40). Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что формула (17.38) следует из (17.39) и (17.31).

3. Доказательство теоремы 17.2. В силу (17.22) и (17.25)

$$\hat{\theta}_T(\xi) = \theta + \frac{\int_0^T a_t(\xi)\, dW_t}{\int_0^T a_t^2(\xi)\, dt}. \qquad (17.42)$$

Поэтому смещение

$$b_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta [\hat{\theta}_T(\xi) - \theta] = \mathsf{M}_\theta \frac{\int_0^T a_t(\xi)\, dW_t}{\int_0^T a_t^2(\xi)\, dt}. \qquad (17.43)$$

По предположениям теоремы и в силу формулы (17.31)

$$\mathsf{M}_\theta \frac{\int\limits_0^T a_t(\xi)\,dW_t}{\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt} = \frac{d}{d\theta}\mathsf{M}_\theta\left[\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-1},$$

что вместе с (17.43) доказывает представление (17.28).

Далее, из (17.42) получаем

$$B_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta[\hat{\theta}_T(\xi) - \theta]^2 = \mathsf{M}_\theta\left[\int\limits_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right]^2\left[\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-2}.$$

Но по лемме 17.2

$$\frac{d^2\mathsf{M}_\theta\left[\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-2}}{d\theta^2} =$$

$$= \mathsf{M}_\theta\left[\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-2}\left\{\left(\int\limits_0^T a_t(\xi)\,dW_t\right)^2 - \int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right\} =$$

$$= B_T(\theta) - \mathsf{M}\left[\int\limits_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-1},$$

что эквивалентно (17.29).

Теорема доказана.

Замечание. Более детальное исследование величин $b_T(\theta)$ и $B_T(\theta)$ для случая, когда $a_t(x) = x_t$, проводится в следующем параграфе.

§ 3. Оценка параметра коэффициента сноса для одномерного гауссовского процесса

1. Будем предполагать, что наблюдаемый процесс $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет дифференциал

$$d\xi_t = \theta\xi_t\,dt + dW_t, \qquad \xi_0 = 0 \tag{17.44}$$

(ср. с (17.22)), где θ — неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$

Согласно (17.25) оценка максимального правдоподобия

$$\hat{\theta}_T(\xi) = \frac{\int_0^T \xi_t \, d\xi_t}{\int_0^T \xi_t^2 \, dt} = \frac{\xi_T^2 - T}{2\int_0^T \xi_t^2 \, dt}, \tag{17.45}$$

поскольку в силу формулы Ито $\int_0^T \xi_t \, d\xi_t = \frac{1}{2}[\xi_T^2 - T]$.

Найдем для рассматриваемого случая смещение $b_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta(\hat{\theta}_T(\xi) - \theta)$ и среднеквадратическую ошибку $B_T(\theta) = \mathsf{M}_\theta[\hat{\theta}_T(\xi) - \theta]^2$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\rho_T(\theta, a) = \left[\frac{2\sqrt{\theta^2 + 2a}}{(\sqrt{\theta^2 + 2a} + \theta)\, e^{-\sqrt{\theta^2+2a}\, T} + (\sqrt{\theta^2 + 2a} - \theta)\, e^{\sqrt{\theta^2+2a}\, T}}\right]^{1/2}. \tag{17.46}$$

Теорема 17.3. *Смещение $b_T(\theta)$ и среднеквадратическая ошибка $B_T(\theta)$ задаются формулами*

$$b_T(\theta) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\exp\left(-\frac{\theta T}{2}\right)\rho_T(\theta, a)\right\} da, \tag{17.47}$$

$$B_T(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta T}{2}\right)\int_0^T \rho_T(\theta, a)\, da + \int_0^T a\, \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\exp\left(-\frac{\theta T}{2}\right)\rho_T(\theta, a)\right\} da. \tag{17.48}$$

Доказательство. Для отыскания величин $b_T(\theta)$ и $B_T(\theta)$ воспользуемся представлениями (17.28), (17.29), полученными в теореме 17.2. Предварительно проверим выполнение предположений этой теоремы.

Процесс $\xi = (\xi_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с дифференциалом (17.44) является гауссовским с $\mathsf{M}_\theta \xi_t = 0$ и дисперсией $\Gamma_t(\theta) = \mathsf{M}_\theta \xi_t^2$, удовлетворяющей уравнению (см. теорему 15.1)

$$\frac{d\Gamma_t(\theta)}{dt} = 2\theta\Gamma_t(\theta) + 1, \qquad \Gamma_0(\theta) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Gamma_t(\theta) = \frac{1}{2\theta}(e^{2\theta t} - 1),$$

что влечет за собой условие (17.26) теоремы 17.2.

Для проверки условия (17.27) и вычисления математических ожиданий $\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T \xi_t^2\,dt\right]^{-1}$, $\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T \xi_t^2\,dt\right]^{-2}$, используемых при отыскании $b_T(\theta)$ и $B_T(\theta)$, поступим следующим образом.

Пусть $a > 0$ и

$$\psi_T(\theta, a) = \mathsf{M}_\theta \exp\left\{-a\int_0^T \xi_t^2\,dt\right\}. \tag{17.49}$$

Если предположить, что

$$\int_0^\infty a^{k-1}\psi_T(\theta, a)\,da < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17.50}$$

то тогда моменты $\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T \xi_t^2\,dt\right]^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, можно найти, используя функцию $\psi_T(\theta, a)$, по формулам

$$\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T \xi_t^2\,dt\right]^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty a^{k-1}\psi_T(\theta, a)\,da. \tag{17.51}$$

В самом деле, если для некоторого $k = 1, 2, \ldots$ выполнено условие (17.50), то тогда по теореме Фубини

$$\int_0^\infty a^{k-1}\psi_T(\theta, a)\,da = \int_0^\infty a^{k-1}\mathsf{M}_\theta \exp\left(-a\int_0^T \xi_t^2\,dt\right)da =$$
$$= \mathsf{M}_\theta \int_0^\infty a^{k-1}\exp\left(-a\int_0^T \xi_t^2\,dt\right)da = (k-1)!\,\mathsf{M}_\theta\left(\int_0^T \xi_t^2\,dt\right)^{-k},$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Итак, найдем функцию $\psi_T(\theta, a)$ и проверим справедливость неравенств (17.50).

2. Лемма 17.3. *Функция*

$$\psi_T(\theta, a) = \exp\left(-\frac{\theta T}{2}\right)\rho_T(\theta, a), \tag{17.52}$$

где $\rho_T(\theta, a)$ *определено в* (17.46).

Доказательство. Пусть $\lambda = \sqrt{\theta^2 + 2a}$, $0 \leqslant a < \infty$. Обозначим μ_{ξ^θ} и μ_{ξ^λ} меры на $(C_T, \mathscr{B}_T)$, отвечающие процессам ξ^θ и ξ^λ, имеющим соответственно дифференциалы

$$d\xi_t^\theta = \theta\xi_t^\theta\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^\theta = 0,$$
$$d\xi_t^\lambda = \lambda\xi_t^\lambda\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^\lambda = 0.$$

Согласно теореме 7.19 меры $\mu_{\xi\theta}$ и $\lambda_{\xi\lambda}$ эквивалентны и

$$\frac{d\mu_{\xi\theta}}{d\mu_{\xi\lambda}}(\xi^\lambda)=\exp\left\{(\theta-\lambda)\int_0^T \xi_t^\lambda\,d\xi_t^\lambda-\frac{\theta^2-\lambda^2}{2}\int_0^T(\xi_t^\lambda)^2\,dt\right\}.$$

Поэтому

$$\psi_T(\theta,a)=\mathrm{M}_\theta\exp\left\{-a\int_0^T\xi_t^2\,dt\right\}=\mathrm{M}\exp\left\{-a\int_0^T(\xi_t^\theta)^2\,dt\right\}=$$

$$=\mathrm{M}\exp\left\{-a\int_0^T(\xi_t^\lambda)^2\,dt+(\theta-\lambda)\int_0^T\xi_t^\lambda\,d\xi_t^\lambda-\frac{\theta^2-\lambda^2}{2}\int_0^T(\xi_t^\lambda)^2\,dt\right\}. \quad (17.53)$$

Поскольку

$$a+\frac{\theta^2-\lambda^2}{2}=0, \quad (17.54)$$

то

$$\psi_T(\theta,a)=\mathrm{M}\exp\left\{[\theta-\lambda]\int_0^T\xi_t^\lambda\,d\xi_t^\lambda\right\}=\mathrm{M}\exp\left\{\frac{\theta-\lambda}{2}[(\xi_T^\lambda)^2-T]\right\}=$$

$$=\exp\left(\frac{\lambda-\theta}{2}T\right)\mathrm{M}\exp\left\{\frac{\theta-\lambda}{2}(\xi_t^\lambda)^2\right\}.$$

Случайная величина ξ_T^λ имеет нормальное распределение $N\left(0,\frac{1}{2\lambda}(e^{2\lambda T}-1)\right)$, и, значит (лемма 11.6),

$$\mathrm{M}\exp\left\{\frac{\theta-\lambda}{2}(\xi_T^\lambda)^2\right\}=\left[\frac{2\lambda}{(\lambda-\theta)(e^{2\lambda T}-1)+2\lambda}\right]^{1/2}.$$

Вместе с (17.53) это приводит к следующему представлению:

$$\psi_T(\theta,a)=e^{\frac{\lambda-\theta}{2}T}\left[\frac{2\lambda}{(\lambda-\theta)(e^{2\lambda T}-1)+2\lambda}\right]^{1/2}, \quad (17.55)$$

где согласно (17.54) $\lambda=\sqrt{2a+\theta^2}$. После простых преобразований из (17.55) получаем требуемое представление (17.52).

Замечание. Если $\theta=0$, $a=1/2$, то

$$\psi_T\left(0,\frac{1}{2}\right)=\mathrm{M}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T W_t^2\,dt\right\}=\rho_T\left(0,\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{e^T+e^{-T}}}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}T}}.$$

(Ср. с примером из § 7 гл. 7.)

Завершим доказательство теоремы 17.3. Анализируя представление (17.52), находим, что неравенства (17.50) выполнены для любого $k=1, 2, \ldots$ Поэтому формулы (17.47) и (17.48) следуют из представлений (17.28), (17.29), (17.51) и (17.52).

3. Теорема 17.4. *Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T(\xi)$ сильно состоятельна, т. е. для каждого* θ, $-\infty < \theta < \infty$,

$$\mathsf{P}_\theta \{\lim_{T\to\infty} \hat{\theta}_T(\xi) = \theta\} = 1. \tag{17.56}$$

Доказательство. Из (17.49) получаем

$$\mathsf{M}_\theta \exp\left\{-\int_0^T \xi_t^2\,dt\right\} = \psi_T(\theta, 1),$$

где

$$\psi_T(\theta, 1) = \exp\left\{\left(-\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{2+\theta^2}}{2}\right)T\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{2\sqrt{2+\theta^2}}{(\sqrt{\theta^2+2}-\theta) + (\sqrt{\theta^2+2}+\theta)\exp(-2T\sqrt{2+\theta^2})}\right\}^{1/2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{T\to\infty} \psi_T(\theta, 1) = 0$, $-\infty < \theta < \infty$, то

$$\mathsf{P}_\theta\left(\int_0^\infty \xi_t^2\,dt = \infty\right) = 1. \tag{17.57}$$

Ясно, что

$$\hat{\theta}_T(\xi) = \theta + \frac{\int_0^T \xi_t\,dW_t}{\int_0^T \xi_t^2\,dt}. \tag{17.58}$$

Поэтому для доказательства (17.56) достаточно показать, что

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \xi_t\,dW_t}{\int_0^T \xi_t^2\,dt} = 0\right\} = 1, \quad -\infty<\theta<\infty.$$

Вытекает это из следующего общего утверждения.

Лемма 17.4. *Пусть на некотором вероятностном пространстве задан винеровский процесс $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, и случайный процесс $f = (f_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$ такой, что*

1) $\mathsf{P}\left(\int_0^T f_t^2\,dt < \infty\right) = 1$, $0 < T < \infty$;

2) $\mathsf{P}\left(\int_0^\infty f_t^2\,dt = \infty\right) = 1$.

Тогда случайный процесс $z=(z_s, \mathcal{G}_s)$, $s\geqslant 0$, *с* $z_s=\int\limits_0^{\tau_s} f_t\,dW_t$, $\mathcal{G}_s=\mathcal{F}_{\tau_s}$, *где* $\tau_s=\inf\left(t\colon \int\limits_0^t f_u^2\,du=s\right)$, *является винеровским и с вероятностью единица* *)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int\limits_0^t f_u\,dW_u}{\int\limits_0^t f_u^2\,du}=0. \tag{17.59}$$

Доказательство. Если $f_t>0$ ($\mathbf{P}$-п. н.) для всех $t>0$, то с вероятностью единица τ_s будет монотонно возрастающей непрерывной функцией от s. Отсюда следует, что случайный процесс $z_s=\int\limits_0^{\tau_s} f_t\,dW_t$ также имеет ($\mathbf{P}$-п. н.) непрерывные траектории. Далее, если $s_2\geqslant s_1$, то по свойствам стохастических интегралов

$$\mathbf{M}(z_{s_2}|\mathcal{G}_{s_1})=\mathbf{M}\left(\int\limits_0^{\tau_{s_2}} f_u\,dW_u\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}\right)=\int\limits_0^{\tau_{s_1}} f_u\,dW_u=z_{s_1}$$

и

$$\mathbf{M}\left[(z_{s_2}-z_{s_1})\,|\,\mathcal{G}_{s_1}\right]=\mathbf{M}\left[\left(\int\limits_{\tau_{s_1}}^{\tau_{s_2}} f_u\,dW_u\right)^2\middle|\,\mathcal{F}_{s_1}\right]=$$

$$=\mathbf{M}\left[\int\limits_{\tau_{s_1}}^{\tau_{s_2}} f_u^2\,du\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}\right]=s_2-s_1. \tag{17.60}$$

Следовательно, процесс $z=(z_s, \mathcal{G}_s)$, $s\geqslant 0$, является квадратично интегрируемым мартингалом со свойством (17.60). Значит, по определению (§ 1 гл. 4) этот процесс является винеровским.

---

*) Под $\int\limits_0^t f_u\,dW_u$ подразумевается непрерывная модификация стохастического интеграла, существующая согласно (4.47) и обобщению этого свойства для функций $f\in\mathcal{P}_T$.

Если же функция f_t обращается в нуль, то проверка мартингальности и свойства (17.60) остается без изменений. Поэтому нужно лишь показать, что и в этом случае процесс $z_s = \int_0^{\tau_s} f_u \, dW_u$ имеет (P-п. н.) непрерывные траектории.

Процесс τ_s, $s \geqslant 0$, является монотонно неубывающим, и, следовательно, его разрывы имеют вид скачков. Разрывы же процесса z_s, $s \geqslant 0$, могут происходить только в моменты разрыва процесса τ_s, $s \geqslant 0$. Пусть $\tau_{s-} < \tau_{s+}$. Тогда $\int_{\tau_{s-}}^{\tau_{s+}} f_u^2 \, du = 0$ и, следовательно,

$$z_{s+} - z_{s-} = \int_{\tau_{s-}}^{\tau_{s+}} f_u \, dW_u = 0.$$

Это доказывает непрерывность (P-п. н.) траекторий процесса z_s, $s \geqslant 0$.

Перейдем к доказательству свойства (17.59). Обозначим

$$\eta_t = \frac{\int_0^t f_u \, dW_u}{\int_0^t f_u^2 \, du}$$

и введем моменты $\tau_s = \inf\left\{ t \colon \int_0^t f_u^2 \, du = s \right\}$. Поскольку τ_s, $s \geqslant 0$, является монотонно неубывающей функцией от s, то для доказательства (17.59) достаточно установить, что с вероятностью единица $\eta_{\tau_s} \to 0$, $s \to \infty$. Но для $s > 0$

$$\eta_{\tau_s} = \frac{\int_0^{\tau_s} f_u \, dW_u}{\int_0^{\tau_s} f_u^2 \, du} = \frac{z_s}{s},$$

и из закона повторного логарифма (1.38) следует, что с вероятностью единица $\lim\limits_{s \to \infty} z_s/s = 0$.

Лемма доказана.

§ 4. Двумерный гауссовский марковский процесс. Оценка параметров

1. Предположим, что на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ наблюдается двумерный гауссовский марковский стационарный процесс $\xi_t = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ с нулевыми средними $\mathsf{M}\xi_1(t) = \mathsf{M}\xi_2(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$, допускающий дифференциал

$$d\xi_t = A\xi_t\,dt + dW_t. \tag{17.61}$$

Здесь $W_t = (W_1(t), W_2(t))$ — винеровский процесс с независимыми компонентами, не зависящий от ξ_0, и

$$A = \begin{pmatrix} -\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_2 & -\theta_1 \end{pmatrix} \tag{17.62}$$

— матрица, составленная из координат вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ с $\theta_1 > 0$, $-\infty < \theta_2 < \infty$, подлежащего оцениванию по наблюдениям $\xi_0^T = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant T\}$.

Построим оценки максимального правдоподобия $\hat\theta_1(T, \xi)$ и $\hat\theta_2(T, \xi)$ неизвестных параметров θ_1 и θ_2.

Теорема 17.5. 1°. *Оценка максимального правдоподобия $\hat\theta_1(T, \xi)$ является решением уравнения*

$$\frac{1}{\hat\theta_1(T, \xi)} - 2\hat\theta_1(T, \xi)\left[\xi_1^2(0) + \xi_2^2(0) + \frac{1}{2}\int_0^T [\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)]\,dt\right] = \\ = \int_0^T [\xi_1(t)\,d\xi_1(t) + \xi_2(t)\,d\xi_2(t)]. \tag{17.63}$$

2°. *Оценка*

$$\hat\theta_2(T, \xi) = \frac{\int_0^T [\xi_1(t)\,d\xi_2(t) - \xi_2(t)\,d\xi_1(t)]}{\int_0^T [\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)]\,dt}. \tag{17.64}$$

3°. *Условные распределения* *)

$$\mathsf{P}_\theta(\hat\theta_2(T, \xi) \leqslant a \mid \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t),\ t \leqslant T)$$

---

*) P_θ обозначает распределение вероятностей, отвечающее фиксированному $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

являются P_θ-п. н. *гауссовскими с параметрами*

$$\mathsf{M}_\theta\left[\hat{\theta}_2(T, \xi) \mid \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t),\ t \leqslant T\right] = \theta_2, \tag{17.65}$$

$$\mathsf{M}_\theta\left[(\hat{\theta}_2(t, \xi) - \theta)^2 \mid \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t),\ t \leqslant T\right] = \left[\int_0^T (\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t))\, dt\right]^{-1}. \tag{17.66}$$

В частности, распределение случайной величины

$$[\hat{\theta}_2(T, \xi) - \theta] \sqrt{\int_0^T [\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)]\, dt}$$

не зависит от $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ *и является в точности нормальным,* $N(0, 1)$.

2. Доказательству этой теоремы предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма 17.5. *Для каждого* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *гауссовский вектор* $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ *имеет независимые компоненты с* $\mathsf{D}\xi_i(t) \equiv \frac{1}{2\theta_1}$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что предположение стационарности процесса ξ_t, $-\infty < t < \infty$, автоматически влечет за собой ограничение $\theta_1 > 0$, поскольку собственные числа матрицы A должны лежать в левой полуплоскости.

Пусть $\Gamma \equiv \mathsf{M}\xi_t\xi_t^*$. Тогда по теореме 15.4 матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}$$

является единственным решением уравнения $A\Gamma + \Gamma A^* + E = 0$ или, что то же

$$\begin{aligned} -2\theta_1\Gamma_{11} - 2\theta_2\Gamma_{12} + 1 &= 0, \\ -2\theta_1\Gamma_{12} + \theta_2(\Gamma_{11} - \Gamma_{22}) &= 0, \\ 2\theta_1\Gamma_{12} - 2\theta_1\Gamma_{22} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \frac{1}{2\theta_1}$, $\Gamma_{12} = 0$.

Лемма доказана.

Следствие. *Функция распределения*

$$F_\theta(x_1, x_2) = \mathsf{P}_\theta(\xi_1(0) \leqslant x_1,\ \xi_2(0) \leqslant x_2)$$

имеет плотность

$$f_\theta(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_\theta(x_1, x_2)}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\theta_1}{\pi} \exp\left\{-\theta_1^2(x_1^2 + x_2^2)\right\}. \tag{17.67}$$

Для формулировки следующего утверждения введем некоторые обозначения.

Пусть $(\mathbf{C}_T^2, \mathscr{B}_T^2) = (\mathbf{C}_T \times \mathbf{C}_T, \mathscr{B}_T \times \mathscr{B}_T)$ — измеримое пространство функций $c = \{(c_1(t), c_2(t)), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где каждая из функций $c_i(t)$, $i = 1, 2$, является непрерывной. Через c^x, где $x = (x_1, x_2)$, будем обозначать функции из $\mathbf{C}_T^2$ с $c_1(0) = x_1$, $c_2(0) = x_2$. Пусть μ_ξ^θ — мера в $(\mathbf{C}_T^2, \mathscr{B}_T^2)$, отвечающая процессу $\xi = (\xi_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с заданным $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, а μ_{W^x} и $\mu_{\xi^x}^\theta$ — меры в $(\mathbf{C}_T^2, \mathscr{B}_T^2)$, соответствующие процессу $W_t^x = x + W_t$ (т. е. $W_i^x(t) = x_i + W_i(t)$, $i = 1, 2$) и процессу ξ^x с дифференциалом

$$d\xi_t^x = A\xi_t^x\,dt + dW_t, \qquad \xi_0^x = x. \tag{17.68}$$

Если множество $B \in \mathscr{B}_T^2$, то

$$\mu_\xi^\theta(\Gamma) = \int\limits_{\{x \in R^2:\ c^x \in B\}} \mu_{\xi^x}^\theta(B) f_\theta(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{17.69}$$

В самом деле, решения уравнений (17.61) и (17.68) задаются соответственно формулами

$$\xi_t = e^{At}\left[\xi_0 + \int_0^t e^{-As}\,dW_s\right],$$

$$\xi_t^x = e^{At}\left[x + \int_0^t e^{-As}\,dW_s\right].$$

Поэтому из независимости случайных величин ξ_0 и $\int_0^T e^{-As}\,dW_s$ следует

$$\mathbf{P}_\theta\{\xi \in B \mid \xi_0 = x\} = \mathbf{P}_\theta\{\xi^x \in B\} = \mu_{\xi^x}^\theta(B),$$

что, очевидно, и доказывает (17.69).

Введем в $(\mathbf{C}_T^2, \mathscr{B}_T^2)$ новую меру *) ν, полагая для $B \in \mathscr{B}_T^2$

$$\nu(\Gamma) = \int\limits_{\{x \in R^2:\ c^x \in B\}} \mu_{W^x}(B)\,dx_1\,dx_2. \tag{17.70}$$

(Для краткости вместо (17.70) будем писать $d\nu(x, y^x) = d\mu_{W^x}(y^x)\,dx_1\,dx_2$, $y^x \in \mathbf{C}_T^2$.)

---

*) Отметим, что вводимая мера ν неотрицательная и σ-конечная.

По теореме 7.19 меры $\mu^{\theta}_{\xi^x}$ и μ_{W^x} эквивалентны и

$$\frac{d\mu^{\theta}_{\xi^x}}{d\mu_{W^x}}(W^x)=\exp\left[\int_0^T (W^x_t)^* A^* dW^x_t - \frac{1}{2}\int_0^T (W^x_t)^* A^* A W^x_t\, dt\right]. \qquad (17.71)$$

Поэтому по теореме Фубини из (17.69) и (17.70) получаем, что

$$\mu^{\theta}_{\xi}(\Gamma)=\int_{\Gamma}\frac{d\mu^{\theta}_{\xi^x}}{d\mu_{W^x}}(y^x) f_{\theta}(x_1, x_2)\, d\nu(x, y^x),$$

где $f_{\theta}(x_1, x_2)$ определяется формулой (17.67). Отсюда следует абсолютная непрерывность меры μ^{θ}_{ξ} по ν и формула

$$\frac{d\mu^{\theta}_{\xi}}{d\nu}(\xi)=\frac{\theta_1}{\pi}\exp\left\{-\theta_1^2(\xi_1^2(0)+\xi_2^2(0))+\int_0^T \xi_t^* A^* d\xi_t - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int_0^T \xi_t^* A^* A \xi_t\, dt\right\}. \qquad (17.72)$$

Итак, доказана

Лемма 17.6. *Мера μ^{θ}_{ξ} абсолютно непрерывна относительно меры ν, и ее плотность $\frac{d\mu^{\theta}_{\xi}}{d\nu}(\xi)$ определяется формулой* (17.72).

3. Доказательство теоремы 17.5. Формулы (17.63) и (17.64) для оценок максимального правдоподобия $\hat{\theta}_1(t, \xi)$ и $\hat{\theta}_2(T, \xi)$ следуют из (17.72), поскольку они доставляют минимум $\ln\frac{d\mu^{\theta}_{\xi}}{d\nu}(\xi)$, что проверяется непосредственным подсчетом.

Перейдем к доказательству заключительного пункта теоремы.

Обозначим $\eta_t=\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)$. С помощью формулы Ито вычисляется, что

$$d\eta_t = 2\xi_1(t)\, d\xi_1(t) + 2\xi_2(t)\, d\xi_2(t) + 2\, dt =$$
$$= 2\xi_1(t)[-\theta_1\xi_1(t)-\theta_2\xi_2(t)]\, dt + 2\xi_1(t)\, dW_1(t) +$$
$$+ 2\xi_2(t)[\theta_2\xi_1(t)-\theta_1\xi_2(t)]\, dt + 2\xi_2(t)\, dW_2(t) + 2\, dt =$$
$$= -2\theta_1\left[\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)\right] dt + 2\, dt + 2\left[\xi_1(t)\, dW_1(t) + \xi_2(t)\, dW_2(t)\right] =$$
$$= 2[1-\theta_1\eta_t]\, dt + 2\sqrt{\eta_t}\, d\widetilde{W}_1(t), \qquad (17.73)$$

где (в предположении, что $\eta_s > 0$)

$$\widetilde{W}_1(t)=\int_0^t \frac{\xi_1(s)}{\sqrt{\eta_s}}\, dW_1(s) + \int_0^t \frac{\xi_2(s)}{\sqrt{\eta_s}}\, dW_2(s). \qquad (17.74)$$

Из теоремы 4.1 вытекает, что $(\tilde{W}_1(t), \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является винеровским процессом. Следовательно, для заданного $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ совокупность объектов $\mathcal{A} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}, \eta_t, \tilde{W}_1(t))$ образует слабое решение *) стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta_t = 2[1 - \theta_1\eta_t]\,dt + 2\sqrt{\eta_t}\,d\tilde{W}_1(t). \tag{17.75}$$

Покажем сейчас, что для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, величины η_t являются $\mathcal{F}_t^{\eta_0, \tilde{W}_1}$-измеримыми и $\mathsf{P}\{\inf\limits_{t \leqslant T} \eta_t > 0\} = 1$. Иначе говоря, процесс $\eta_t = \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)$ является сильным решением уравнения (17.75), где винеровский процесс $(\tilde{W}_1(t), \mathcal{F}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определен в (17.74).

С этой целью изучим некоторые свойства слабых решений уравнения типа (17.75). Пусть $\mathcal{A} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}, x_t, z_t)$ есть слабое решение уравнения

$$dx_t = 2[1 - ax_t]\,dt + 2\sqrt{x_t}\,dz_t, \qquad a \geqslant 0, \tag{17.76}$$

где x_0 таково, что $\mathsf{P}(x_0 > 0) = 1$, $\mathsf{M}x_0 < \infty$.

Докажем, что $\mathsf{M}\sup\limits_{t \leqslant T} x_t < \infty$. Для этого положим

$$\sigma_N = \begin{cases} \inf\{t \leqslant T\colon\ \sup\limits_{s \leqslant t} x_s \geqslant N\}, \\ T, \quad \text{если} \quad \sup\limits_{s \leqslant T} x_s < N. \end{cases}$$

Тогда в силу (17.76)

$$x_{t \wedge \sigma_N} = x_0 + 2\int_0^{t \wedge \sigma_N} [1 - ax_s]\,ds + \int_0^{t \wedge \sigma_N} \sqrt{x_s}\,dz_s, \tag{17.77}$$

и поскольку $\mathsf{M}\int\limits_0^{t \wedge \sigma_N} \sqrt{x_s}\,dz_s = 0$, то

$$\mathsf{M}x_{t \wedge \sigma_N} = \mathsf{M}x_0 + 2\mathsf{M}\int_0^{t \wedge \sigma_N} [1 - ax_s]\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}x_0 + 2\mathsf{M}\int_0^{t \wedge \sigma_N} [1 + ax_{s \wedge \sigma_N}]\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}x_0 + 2\mathsf{M}\int_0^t [1 + ax_{s \wedge \sigma_N}]\,ds \leqslant \mathsf{M}x_0 + 2T + 2a\int_0^t \mathsf{M}x_{s \wedge \sigma_N}\,ds.$$

*) См. определение 8 в § 4 гл. 4.

Отсюда по лемме 4.13 следует

$$\mathsf{M}x_{t\wedge\sigma_N}\leqslant(\mathsf{M}x_0+2T)\,e^{2aT},$$

а значит (лемма Фату),

$$\mathsf{M}x_t\leqslant(\mathsf{M}x_0+2T)\,e^{2aT}. \tag{17.78}$$

Далее,

$$\sup_{t\leqslant T}x_{t\wedge\sigma_N}\leqslant x_0+2\int_0^T[1+ax_s]\,ds+2\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^{t\wedge\sigma_N}\sqrt{x_s}\,dz_s\right|$$

и

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}x_{t\wedge\sigma_N}\leqslant\mathsf{M}x_0+2\int_0^T[1+a\mathsf{M}x_s]\,ds+2\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^{t\wedge\sigma_N}\sqrt{x_s}\,dW_s\right|.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского и (4.54)

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^{t\wedge\sigma_N}\sqrt{x_s}\,dz_s\right|\leqslant\left[\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^{t\wedge\sigma_N}\sqrt{x_s}\,dz_s\right|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\mathsf{M}\int_0^{t\wedge\sigma_N}x_s\,ds\right)^{1/2}\leqslant 2\left(\mathsf{M}\int_0^T x_s\,ds\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}x_{t\wedge\sigma_N}\leqslant\mathsf{M}x_0+2\int_0^T[1+a\,\mathsf{M}x_s]\,ds+4\left[\int_0^T\mathsf{M}x_s\,ds\right]^{1/2}.$$

Применяя лемму Фату и используя оценку (17.78), получаем требуемое неравенство $\mathsf{M}\sup\limits_{t\leqslant T}x_t<\infty$.

Покажем теперь, что $\mathsf{P}\{\inf\limits_{t\leqslant T}x_t>0\}=1$.

Для доказательства этого положим

$$\tau_n=\begin{cases}\inf\left(t\leqslant T:\ \inf\limits_{s\leqslant t}x_s\leqslant\dfrac{x_0}{1+n}\right),\\ \infty,\quad\text{если}\ \inf\limits_{s\leqslant t}x_s>\dfrac{x_0}{1+n}.\end{cases}$$

Из формулы Ито нетрудно найти, что

$$-\ln x_{\tau_n\wedge T}=-\ln x_0+2a(\tau_n\wedge T)-2\int_0^{\tau_n\wedge T}\frac{dz_s}{\sqrt{x_s}},$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$

$$-\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}=$$

$$=-\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_0+\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}2a(\tau_n\wedge T)-2\int_0^{\tau_n\wedge T}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\frac{dz_s}{\sqrt{x_s}}\leqslant$$

$$\leqslant-\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_0+2aT-2\int_0^{\tau_n\wedge T}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\frac{dz_s}{\sqrt{x_s}}. \qquad (17.79)$$

Поскольку $\mathsf{M}\int_0^{\tau_n\wedge T}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\frac{dz_s}{\sqrt{x_s}}=0$, то

$$-\mathsf{M}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}\leqslant\mathsf{M}\left|\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_0\right|+2aT. \qquad (17.80)$$

Но

$$\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}=$$

$$=\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{x_{\tau_n\wedge T}\leqslant 1\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}+\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{x_{\tau_n\wedge T}>1\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}\leqslant$$

$$\leqslant\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{x_{\tau_n\wedge T}\leqslant 1\}}\ln x_{\tau_n\wedge T}+\sup_{s\leqslant T}x_s,$$

что вместе с (17.79) приводит к неравенству

$$\mathsf{M}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{x_{\tau_n\wedge T}\leqslant 1\}}\left|\ln x_{\tau_n\wedge T}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{M}\left|\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\ln x_0\right|+2aT+\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}x_s \qquad (=c(\varepsilon)<\infty),$$

из которого в свою очередь следует неравенство

$$\mathsf{M}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{\tau_n\leqslant T\}}\chi_{\{x_{\tau_n}\leqslant 1\}}\left|\ln x_{\tau_n}\right|\leqslant c(\varepsilon)<\infty. \qquad (17.81)$$

Пусть $\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$. Тогда, переходя в (17.81) к пределу при $n\to\infty$, получаем, что

$$\mathsf{M}\chi_{\{x_0>\varepsilon\}}\chi_{\{\tau\leqslant T\}}\chi_{\{x_\tau\leqslant 1\}}\left|\ln x_\tau\right|\leqslant c(\varepsilon)<\infty. \qquad (17.82)$$

На множестве $\{\tau\leqslant T\}$ $|\ln x_\tau|=\infty$. Поэтому в силу (17.82)

$$\mathsf{P}\{x_0>\varepsilon,\ \tau\leqslant T,\ x_\tau\leqslant 1\}=0.$$

Но $x_\tau=0$ на множестве $\{\tau\leqslant T\}$, следовательно,

$$\mathsf{P}\{x_0>\varepsilon,\ \tau\leqslant T\}=0. \qquad (17.83)$$

Наконец,

$$\mathsf{P}\{\tau\leqslant T\}=\mathsf{P}\{\tau\leqslant T,\ x_0>\varepsilon\}+\mathsf{P}\{\tau\leqslant T,\ x_0\leqslant\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{P}\{x_0\leqslant\varepsilon\}\to 0, \qquad \varepsilon\downarrow 0,$$

что вместе с (17.83) приводит к искомому соотношению

$$\mathsf{P}\{\inf_{t\leqslant T} x_t=0\}=\mathsf{P}\{\tau\leqslant T\}=0.$$

Итак, процесс $\eta_t=\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, таков, что для любого $\theta=(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1>0$, $-\infty<\theta_2<\infty$,

$$\mathsf{P}_\theta\{\inf_{t\leqslant T}\eta_t>0\}=1. \tag{17.84}$$

Используем этот результат для доказательства того, что при каждом t, $0\leqslant t\leqslant T$, случайные величины η_t являются $\mathcal{F}_t^{\eta_0, \widetilde{W}_1}$-измеримыми.

Введем функции

$$g_n(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & \dfrac{1}{n}\leqslant y<\infty,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n}}, & 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

и

$$b_n(x)=1+\int_1^x g_n(y)\,dy.$$

Ясно, что $0<g_n(y)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)=\sqrt{x}$. Для каждого $n=1, 2, \ldots$ рассмотрим уравнение

$$\eta_t^{(n)}=\eta_0+2\int_0^t\left[1-\theta_1\eta_s^{(n)}\right]ds+2\int_0^t b_n\left(\eta_s^{(n)}\right)d\widetilde{W}_1(s). \tag{17.85}$$

Коэффициенты этого уравнения удовлетворяют предположениям теоремы 4.6, и поэтому у него существует единственное сильное решение $\eta_t^{(n)}$, $0\leqslant t\leqslant T$. Обозначим

$$\sigma_n(\eta)=\begin{cases}\inf\left\{t\leqslant T\colon\ \eta_t\leqslant\dfrac{1}{n}\right\},\\ T, \quad \text{если} \inf\limits_{s\leqslant T}\eta_s>\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Тогда ясно, что для всех $t\leqslant\sigma_n(\eta)$ $\eta_t^{(n)}=\eta_t$ (P_θ-п. н.) и $\sigma_n(\eta)=\sigma_n(\eta^{(n)})$. Следовательно, $\eta^{(n)}_{t\wedge\sigma_n(\eta^{(n)})}=\eta_{t\wedge\sigma_n(\eta)}$. Но величины

$\eta^{(n)}_{t\wedge\sigma_n(\eta^{(n)})}$ являются $\mathscr{F}_t^{\eta_0, \tilde{W}_1}$-измеримыми. Поэтому таковы же *) и величины $\eta_{t\wedge\sigma_n(\eta)}$. Но в силу (17.84) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(\eta)=T$ (P_θ-п. н.). Отсюда вытекает, что η_t $\mathscr{F}_t^{\eta_0, \tilde{W}_1}$-измеримы для каждого t.

Преобразуя выражение (17.64) для $\hat{\theta}_2(T, \xi)$, находим, что

$$\hat{\theta}_2(T, \xi)=\theta_2+\frac{\int\limits_0^T \xi_1(t)\,dW_2(t)-\int\limits_0^T \xi_2(t)\,dW_1(t)}{\int\limits_0^T\left[\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)\right]dt}=$$

$$=\theta_2+\frac{\int\limits_0^T\sqrt{\eta_t}\,d\tilde{W}_2(t)}{\int\limits_0^T\eta_t\,dt}, \tag{17.86}$$

где

$$\tilde{W}_2(t)=-\int\limits_0^T\frac{\xi_2(t)}{\sqrt{\eta_t}}\,dW_1(t)+\int\limits_0^T\frac{\xi_1(t)}{\sqrt{\eta_t}}\,dW_2(t). \tag{17.87}$$

Из теоремы 4.2 следует, что $\left[(\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t)), \mathscr{F}_t\right]$, $0\leqslant t\leqslant T$, является винеровским процессом. Поскольку $\eta_0=\xi_1^2(0)+$ $+\xi_2^2(0)>0$ (P-п. н.) и $\mathsf{M}_\theta\eta_0=\frac{1}{\theta_1}<\infty$ для всех $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ с $\theta_1>0$, $-\infty<\theta_2<\infty$, то согласно доказанному выше η_t при каждом t $\mathscr{F}_t^{\eta_0, \tilde{W}_1}$-измеримо. Но процесс $\tilde{W}_2(t)$ не зависит от η_0 и $\tilde{W}_1(t)$. Поэтому независимы между собой и процессы $\eta=(\eta_t, \mathscr{F}_t)$, $\tilde{W}_2=(\tilde{W}_2(t), \mathscr{F}_t)$. Отсюда вытекает, что P-п. н. условное распределение

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\int\limits_0^T\sqrt{\eta_t}\,d\tilde{W}_2(t)\leqslant y\,\middle|\,\eta_t, t\leqslant T\right\}$$

является нормальным, $N\left(0, \int\limits_0^T\eta_t\,dt\right)$. В частности, это доказывает формулы (17.65), (17.66).

Теорема доказана.

---

*) σ-алгебры $\mathscr{F}_t^{\eta_0, \tilde{W}_1}$, $0\leqslant t\leqslant T$, считаются пополненными множествами P_θ-меры нуль для всех допустимых значений $\theta=(\theta_1, \theta_2)$.

Замечание. Поскольку для любого допустимого $\theta=(\theta_1, \theta_2)$

$$\mathsf{P}_\theta\left(\int_0^\infty [\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)]\,dt=\infty\right)=1,$$

то из (17.63) и (17.64) нетрудно вывести, что оценки $\hat{\theta}_i(T, \xi)$, $i=1,2$, являются состоятельными, т. е. для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{T\to\infty}\mathsf{P}_\theta\{|\tilde{\theta}_i(T, \xi)-\theta_i|>\varepsilon\}=0.$$

§ 5. Последовательные оценки максимального правдоподобия

1. Как и в § 2, пусть θ — неизвестный параметр, $-\infty<\theta<\infty$, подлежащий оцениванию по наблюдениям за процессом $\xi=(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t\geqslant 0$, с дифференциалом

$$d\xi_t=\theta a_t(\xi)\,dt+dW_t, \qquad \xi_0=0. \tag{17.88}$$

В предположениях (17.23) оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T(\xi)$ параметра θ задается формулой (17.25). Вообще говоря, эта оценка является смещенной и ее смещение $b_T(\theta)$ и среднеквадратическая ошибка $B_T(\theta)$ определяются (в предположениях (17.26), (17.27)) формулами (17.28) и (17.29) соответственно. При этом согласно неравенству Рао — Крамера — Волфовитца (теорема 7.22)

$$B_T(\theta)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\left\{1+\dfrac{d^2}{d\theta^2}\mathsf{M}_\theta\left[\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-1}\right\}^2}{\mathsf{M}_\theta\displaystyle\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt}+\left\{\frac{d}{d\theta}\mathsf{M}_\theta\left[\int_0^T a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-1}\right\}^2, \tag{17.89}$$

где равенство, вообще говоря, может и не достигаться.

Для рассматриваемой задачи изучим свойства последовательных оценок максимального правдоподобия, полученных с помощью последовательных планов $\Delta=\Delta(\tau, \delta)$ (см. § 8 гл. 7), каждый из которых характеризуется моментом прекращения наблюдений $\tau=\tau(\xi)$ и $\mathcal{F}_\tau^\xi$-измеримой функцией $\delta(\xi)$, являющейся оценкой параметра θ.

Теорема 17.6. *Пусть для всех* θ, $-\infty<\theta<\infty$,

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\int_0^\infty a_t^2(\xi)\,dt=\infty\right\}=1. \tag{17.90}$$

Тогда последовательные планы $\Delta_H = \Delta(\tau_H, \delta_H)$, $0 < H < \infty$, *с*

$$\tau_H(\xi) = \inf\left(t:\ \int_0^t a_s^2(\xi)\,ds = H\right) \tag{17.91}$$

и

$$\delta_H(\xi) = \frac{1}{H}\int_0^{\tau_H(\xi)} a_t(\xi)\,d\xi_t \tag{17.92}$$

обладают следующими свойствами:

$$\mathsf{P}_\theta(\tau_H(\xi) < \infty) = 1, \qquad -\infty < \theta < \infty, \tag{17.93}$$

$$\mathsf{M}_\theta\delta_H(\xi) = \theta, \qquad -\infty < \theta < \infty, \tag{17.94}$$

$$\mathsf{M}_\theta[\delta_H(\xi) - \theta]^2 \equiv \frac{1}{H}. \tag{17.95}$$

Случайная величина $\delta_H(\xi)$ *является гауссовской,* $N\left(\theta, \frac{1}{H}\right)$.

В классе Δ_H *несмещенных последовательных планов* $\Delta(\tau, \delta)$, *удовлетворяющих условию*

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\int_0^\tau a_t^2(\xi)\,dt < \infty\right\} = \mathsf{P}_\theta\left\{\int_0^\tau a_t^2(W)\,dt < \infty\right\} = 1 \tag{17.96}$$

и условиям

$$\mathsf{M}_\theta\delta^2(\xi) < \infty, \qquad \mathsf{M}_\theta\int_0^\tau a_t^2(\xi)\,dt \leqslant H, \tag{17.97}$$

где H — *заданная константа,* $0 < H < \infty$, *план* $\Delta_H = \Delta(\tau_H, \delta_H)$ *является оптимальным в среднеквадратическом смысле:*

$$\mathsf{M}_\theta[\delta_H(\xi) - \theta]^2 \leqslant \mathsf{M}_\theta[\delta(\xi) - \theta]^2. \tag{17.98}$$

Доказательство. Согласно теореме 7.10 и предположению (17.96) меры $\mu^\theta_{\tau,\xi}$ и $\mu^\theta_{\tau,W}$, отвечающие процессам ξ (с заданным θ) и W, эквивалентны и

$$\frac{d\mu^\theta_{\tau,\xi}}{d\mu^\theta_{\tau,W}}(\tau(\xi), \xi) = \exp\left\{\theta\int_0^{\tau(\xi)} a_t(\xi)\,d\xi_t - \frac{\theta^2}{2}\int_0^{\tau(\xi)} a_t^2(\xi)\,dt\right\}. \tag{17.99}$$

Отсюда вытекает, что последовательная оценка максимального правдоподобия

$$\hat\theta_{\tau(\xi)}(\xi) = \frac{\int_0^{\tau(\xi)} a_t(\xi)\,d\xi_t}{\int_0^{\tau(\xi)} a_t^2(\xi)\,dt}. \tag{17.100}$$

Полагая в (17.100) $\tau(\xi)=\tau_H(\xi)$ и обозначая $\delta_H(\xi)=\hat{\theta}_{\tau_H(\xi)}$, получаем для оценки $\delta_H(\xi)$ представление (17.92). Для проверки свойства (17.93) достаточно заметить, что

$$\mathsf{P}_\theta\{\tau_H(\xi)>t\}=\mathsf{P}\left\{\int_0^t a_s^2(\xi)\,ds<H\right\},$$

откуда в силу (17.90) вытекает, что

$$\mathsf{P}_\theta\{\tau_H(\xi)=\infty\}=\mathsf{P}_\theta\left\{\int_0^\infty a_t^2(\xi)\,dt<H\right\}=0.$$

Далее,

$$\delta_H(\xi)=\theta-\frac{1}{H}\int_0^{\tau_H(\xi)} a_t(\xi)\,dW_t$$

и по лемме 17.4 величина $[\delta_H(\xi)-\theta]\sqrt{H}$ является нормально распределенной, $N(0,1)$, для каждого θ.

Наконец, согласно теореме 7.22 для любого несмещенного плана $\Delta=\Delta(\tau,\delta)$, удовлетворяющего условиям (17.96) и (17.97),

$$\mathsf{M}_\theta[\delta(\xi)-\theta]^2\geqslant\left[\mathsf{M}_\theta\int_0^{\tau(\xi)} a_t^2(\xi)\,dt\right]^{-1}\geqslant\frac{1}{H},\quad -\infty<\theta<\infty.$$

Сравнение этого неравенства с (17.95) показывает, что план $\Delta_H=\Delta(\tau_H,\delta_H)$ является оптимальным в среднеквадратическом смысле.

Теорема доказана.

2. Свойство (17.95) раскрывает смысл константы $H>0$, входящей в определение планов $\Delta_H=\Delta(\tau_H,\delta_H)$: если требуется построить последовательный план, для которого дисперсия ошибки (при всех $\theta, -\infty<\theta<\infty$) равна заданной величине $\varepsilon>0$, то в качестве такого плана можно взять план $\Delta_H=\Delta(\tau_H,\delta_H)$ с $H=\frac{1}{\varepsilon}$.

Согласно утверждениям теоремы 17.6 этот план обладает рядом несомненных достоинств: он является несмещенным, а тот факт, что распределение величины $(\delta_H(\xi)-\theta)\sqrt{H}$ является в точности нормальным, $N(0,1)$, дает возможность строить для θ доверительные интервалы.

Возникает, однако, существенный вопрос: не являются ли эти достоинства следствием того, что среднее время наблюдения $\mathsf{M}_\theta\tau_H$ является слишком большим? В приводимой ниже теореме для случая *) $a_t(x)=x_t$ даются оценки этого среднего времени в зависимости от задаваемой величины дисперсии ошибки.

Теорема 17.7. *Пусть наблюдаемый процесс ξ_t, $t\geqslant 0$, имеет дифференциал*

$$d\xi_t=\theta\xi_t\,dt+dW_t. \tag{17.101}$$

Тогда для последовательного плана $\Delta_H=\Delta(\tau_H,\delta_H)$, $H>0$, при всех $n=1,2,\ldots$

$$\mathsf{M}_\theta\tau_H^n(\xi)<\infty,\qquad -\infty<\theta<\infty, \tag{17.102}$$

и

$$\mathsf{M}_\theta\tau_H(\xi)\leqslant 2\left[\,|\theta|\,H+2\sqrt{H}\,\right]+\sqrt{8(\theta^2H^2+4H)+2H},\qquad -\infty<\theta<\infty. \tag{17.103}$$

В случае $\theta<0$ для $\mathsf{M}_\theta\tau_H(\xi)$ справедлива оценка снизу:

$$\mathsf{M}_\theta\tau_H(\xi)\geqslant-2\theta H. \tag{17.104}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в рассматриваемом случае оценка

$$\delta_H(\xi)=\frac{1}{H}\int\limits_0^{\tau_H(\xi)}\xi_t\,d\xi_t$$

может быть переписана в следующем виде:

$$\delta_H(\xi)=\frac{\xi^2_{\tau_H(\xi)}-\tau_H(\xi)}{2H},$$

поскольку $\int\limits_0^t\xi_s\,d\xi_s=\frac{1}{2}(\xi_t^2-t)$.

Для доказательства неравенств (17.102) заметим, что по формуле Ито

$$\xi_t^2=2\theta\int\limits_0^t\xi_s^2\,ds+2\int\limits_0^t\xi_s\,dW_s+t. \tag{17.105}$$

Отсюда получаем

$$H=\int\limits_0^{\tau_H(\xi)}\xi_t^2\,dt=2\theta\int\limits_0^{\tau_H(\xi)}\left(\int\limits_0^t\xi_s^2\,ds\right)dt+2\int\limits_0^{\tau_H(\xi)}\left(\int\limits_0^t\xi_s\,dW_s\right)dt+\frac{\tau_H^2(\xi)}{2},$$

*) Из теоремы 17.4 следует, что $\mathsf{P}_\theta\left\{\int\limits_0^\infty\xi_t\,dt=\infty\right\}=1$, $|\theta|<\infty$.

и, следовательно,

$$\tau_H^2(\xi) \leqslant 2H - 4\theta \int_0^{\tau_H(\xi)} \left(\int_0^t \xi_s^2\, ds \right) dt - 4 \int_0^{\tau_H(\xi)} \left(\int_0^t \xi_s\, dW_s \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant 2H + 4\,|\theta|\,\tau_H(\xi) + 4\tau_H(\xi) \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau_H(\xi)} \left| \int_0^t \xi_s\, dW_s \right|. \qquad (17.106)$$

Обозначим $\beta = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau_H(\xi)} \left| \int_0^t \xi_s\, dW_s \right|$. Тогда из (17.106) получим

$$\tau_H^2(\xi) - 4\tau_H(\xi)\,[\,|\theta|\,H + \beta] - 2H \leqslant 0,$$

а значит для каждого θ

$$\tau_H(\xi) \leqslant 2[\,|\theta|\,H + \beta] + \sqrt{4[\,|\theta|\,H + \beta]^2 + 2H}. \qquad (17.107)$$

По теореме 3.2 для $p > 1$

$$\mathsf{M}_\theta \beta^p = \mathsf{M}_\theta \left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau_H(\xi)} \left| \int_0^t \xi_s\, ds \right|^p \right) \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathsf{M}_\theta \left| \int_0^{\tau_H(\xi)} \xi_s\, dW_s \right|^p.$$

Поэтому $(p = 2m)$

$$\mathsf{M}_\theta \beta^{2m} \leqslant \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} \mathsf{M}_0 \left| \int_0^{\tau_H(\xi)} \xi_s\, dW_s \right|^{2m} =$$

$$= \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} (2m-1)!!\,H^m < \infty, \qquad (17.108)$$

поскольку случайная величина $\int_0^{\tau_H(\xi)} \xi_s\, dW_s \sim N(0, H)$.

Из (17.107) и (17.108) получаем неравенство $\mathsf{M}_\theta [\tau_H(\xi)]^n < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ В частности, для случая $n = 1$

$$\mathsf{M}_\theta \tau_H(\xi) \leqslant 2[\,|\theta|\,H + (\mathsf{M}_\theta \beta^2)^{1/2}] + \sqrt{8(\theta^2 H^2 + \mathsf{M}\theta\beta^2) + 2H} \leqslant$$

$$\leqslant 2[\,|\theta|\,H + 2\sqrt{H}] + \sqrt{8(\theta^2 H^2 + 4H) + 2H}.$$

Для вывода оценки (17.104) достаточно заметить, что в случае $\theta < 0$ из (17.105) следует неравенство

$$\tau_H(\xi) \geqslant -2\theta H - \int_0^{\tau_H(\xi)} \xi_s\, dW_s.$$

Усредняя обе части этого неравенства, получаем оценку (17.104). Теорема доказана.

§ 6. Последовательное различение двух простых гипотез для процессов Ито

1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы неубывающее семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, винеровский процесс $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$ и (ненаблюдаемый) не зависящий от W процесс $\theta = (\theta_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$. Относительно наблюдаемого процесса $\xi = (\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$, имеются гипотезы

$$H_0:\quad d\xi_t = dW_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{17.109}$$

$$H_1:\quad d\xi_t = \theta_t\,dt + dW_t, \quad \xi_0 = 0. \tag{17.110}$$

Иначе говоря, если процесс θ трактуется как «сигнал», а винеровский процесс как «шум», то рассматриваемая задача состоит в различении двух гипотез относительно присутствия (гипотеза H_1) или отсутствия (гипотеза H_0) сигнала θ по результатам наблюдений за процессом ξ.

Будем рассматривать последовательные планы $\Delta = \Delta(\tau, \delta)$ различения гипотез, характеризуемые моментом прекращения наблюдений τ и функцией заключительного решения δ. Предполагается, что $\tau = \tau(x)$ является марковским моментом (относительно системы $\mathcal{B}_t = \sigma\{x\colon x_s,\ s \leqslant t\}$, где $x = (x_t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывные функции с $x_0 = 0$), а функция $\delta = \delta(x)$ $\mathcal{B}_\tau$-измерима и принимает два значения: 0 и 1. Решение $\delta(x) = 0$ будет отождествляться с решением о принятии (справедливости) гипотезы H_0. Если же $\delta(x) = 1$, то будет приниматься гипотеза H_1.

С каждым планом $\Delta = \Delta(\tau, \delta)$ свяжем величины *)

$$\alpha(\Delta) = \mathsf{P}_1(\delta(\xi) = 0), \quad \beta(\Delta) = \mathsf{P}_0\{\delta(\xi) = 1\},$$

называемые вероятностями ошибок первого и второго рода.

Хорошо известно **), что для случая $\theta_t \equiv c \neq 0$ в классе $\Delta_{\alpha,\beta}$ последовательных планов $\Delta = \Delta(\tau, \delta)$ с $\alpha(\Delta) \leqslant \alpha$, $\beta(\Delta) \leqslant \beta$ (α и β — заданные константы, $\alpha + \beta < 1$) и $\mathsf{M}_0\tau(\xi) < \infty$, $\mathsf{M}_1\tau(\xi) < \infty$ существует план $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$, оптимальный в том смысле, что

$$\mathsf{M}_0\tilde{\tau} \leqslant \mathsf{M}_0\tau, \qquad \mathsf{M}_1\tilde{\tau} \leqslant \mathsf{M}_1\tau \tag{17.111}$$

для любого другого плана $\Delta = \Delta(\tau, \delta) \in \Delta_{\alpha,\beta}$.

Оказывается, что в определенном смысле этот результат может быть распространен и на более общий класс случайных процессов $\theta = (\theta_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geqslant 0$.

---

*) P_i обозначает распределение вероятностей для случая, когда рассматриваемый процесс ξ удовлетворяет гипотезе H_i, $i = 0, 1$. Через M_i будет обозначаться соответствующее усреднение.

**) См., например, § 2 гл. 4 в [169].

Будем предполагать, что рассматриваемый процесс $\theta = (\theta_t, \mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условию

$$\mathsf{M}\,|\theta_t| < \infty, \quad t < \infty, \tag{17.112}$$

и

$$\mathsf{P}_1\left\{\int_0^\infty m_t^2(\xi)\,dt = \infty\right\} = \mathsf{P}_0\left\{\int_0^\infty m_t^2(\xi)\,dt = \infty\right\} = 1, \tag{17.113}$$

где функционал $m_t(x)$, $t \geqslant 0$, таков, что при почти всех $t \geqslant 0$

$$m_t(\xi) = \mathsf{M}_1(\theta_t \mid \mathscr{F}_t^\xi) \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Через $\Delta_{\alpha,\beta}$ обозначим класс последовательных планов $\Delta = \Delta(\tau, \delta)$ с $\alpha(\Delta) \leqslant \alpha$, $\beta(\Delta) \leqslant \beta$, где $\alpha + \beta < 1$, и

$$\mathsf{M}_0 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt < \infty, \qquad \mathsf{M}_1 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt < \infty. \tag{17.114}$$

Теорема 17.8. *Пусть выполнены условия* (17.112), (17.113). *Тогда в классе* $\Delta_{\alpha,\beta}$ *существует план* $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$, *оптимальный в том смысле, что для любого другого плана* $\Delta = \Delta(\tau, \delta) \in \Delta_{\alpha,\beta}$

$$\begin{gathered}\mathsf{M}_0 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt \leqslant \mathsf{M}_0 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt,\\ \mathsf{M}_1 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt \leqslant \mathsf{M}_1 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt.\end{gathered} \tag{17.115}$$

План $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$ *определяется соотношениями*

$$\tilde{\tau}(\xi) = \inf\{t\colon \lambda_t(\xi) \notin (A, B)\}, \tag{17.116}$$

$$\tilde{\delta}(\xi) = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) \geqslant B,\\ 0, & \lambda_{\tilde{\tau}(\xi)} \leqslant A,\end{cases} \tag{17.117}$$

где

$$\lambda_t(\xi) = \int_0^t m_s(\xi)\,d\xi_s - \frac{1}{2}\int_0^t m_s^2(\xi)\,ds, \quad A = \ln\frac{\alpha}{1-\beta}, \quad B = \ln\frac{1-\alpha}{\beta}.$$

При этом

$$\begin{gathered}\mathsf{M}_0 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt = 2\omega(\beta, \alpha),\\ \mathsf{M}_1 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt = 2\omega(\alpha, \beta),\end{gathered} \tag{17.118}$$

где

$$\omega(x, y) = (1-x)\ln\frac{1-x}{y} + x\ln\frac{x}{1-y}. \qquad (17.119)$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

2. Лемма 17.7. *Для плана* $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$

$$\mathsf{P}_0(\tilde{\tau}(\xi) < \infty) = \mathsf{P}_1(\tilde{\tau}(\xi) < \infty) = 1.$$

Доказательство. В случае гипотезы H_0 $\xi_t = W_t$ и $\mathsf{P}_0(\tilde{\tau}(\xi) < \infty) = \mathsf{P}(\tilde{\tau}(W) < \infty)$. Положим

$$\sigma_n(W) = \inf\left\{t: \int_0^t m_s^2(W)\,ds \geqslant n\right\}.$$

Тогда

$$\lambda_{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)}(W) = \int_0^{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)} m_t(W)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)} m_t^2(W)\,dt$$

и $A \leqslant \lambda_{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)}(W) \leqslant B$. Следовательно,

$$A \leqslant \int_0^{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)} m_t(W)\,dW_t - \frac{1}{2}\mathsf{M}\int_0^{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)} m_s^2(W)\,ds \leqslant B.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\int_0^{\tilde{\tau}(W)\wedge\sigma_n(W)} m_s^2(W)\,ds \leqslant 2(B-A) < \infty, \qquad (17.120)$$

поскольку $0 < \alpha + \beta < 1$, и, значит, $B - A = \ln\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1-\beta}{\beta}\right] < \infty$.

Из (17.120) и (17.113) получаем, что

$$\mathsf{M}\int_0^{\tilde{\tau}(W)} m_s^2(W)\,ds \leqslant 2(B-A) < \infty.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}\int_0^{\tilde{\tau}(W)} m_s^2(W)\,ds \geqslant \mathsf{M}\chi_{\{\tilde{\tau}(W)=\infty\}}\int_0^{\infty} m_s^2(W)\,ds,$$

то в силу предположения (17.113) $\mathsf{P}(\tilde{\tau}(W) < \infty) = 1$.

Аналогично доказывается и равенство $\mathsf{P}_1(\tilde{\tau}(\xi) < \infty) = 1$. Для этого полезно заметить, что согласно теореме 7.12 процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, с дифференциалом (17.110) допускает также дифференциал

$$d\xi_t = m_t(\xi)\,dt + d\overline{W}_t \tag{17.121}$$

с некоторым винеровским процессом $\overline{W} = (\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^{\xi})$, $t \geqslant 0$. Следовательно, в случае гипотезы H_1

$$\lambda_t(\xi) = \int_0^t m_s(\xi)\,d\overline{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^t m_s^2(\xi)\,ds. \tag{17.122}$$

Следствие. *Случайная величина* $\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi)$ *принимает* (P_0- и P_1-п. н.) *лишь два значения*: A *или* B.

Лемма 17.8. *Для плана* $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$, *определенного в* (17.116), (17.117), $\alpha(\tilde{\Delta}) = \alpha$, $\beta(\tilde{\Delta}) = \beta$.

Доказательство. Поскольку

$$\alpha(\tilde{\Delta}) = \mathsf{P}_1\{\tilde{\delta}(\xi) = 0\} = \mathsf{P}_1\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = A\}$$

и

$$\beta(\tilde{\Delta}) = \mathsf{P}_0\{\tilde{\delta}(\xi) = 1\} = \mathsf{P}_0\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = B\},$$

то для доказательства леммы надо установить, что

$$\mathsf{P}_1\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = A\} = \alpha, \qquad \mathsf{P}_0 = \{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = B\} = \beta, \tag{17.123}$$

где

$$A = \ln\frac{\alpha}{1-\beta}, \qquad B = \ln\frac{1-\alpha}{\beta}. \tag{17.124}$$

Для этого рассмотрим решения $a(x)$, $b(x)$, $A \leqslant x \leqslant B$, дифференциальных уравнений

$$a''(x) + a'(x) = 0, \qquad a(A) = 1, \qquad a(B) = 0, \tag{17.125}$$

$$b''(x) + b'(x) = 0, \qquad b(A) = 0, \qquad b(B) = 1. \tag{17.126}$$

Ясно, что

$$a(x) = \frac{e^A(e^{B-x} - 1)}{e^B - e^A}, \qquad b(x) = \frac{e^x - e^A}{e^B - e^A} \tag{17.127}$$

и в силу (17.124)

$$a(0) = \alpha, \qquad b(0) = \beta. \tag{17.128}$$

Покажем, что $\mathsf{P}_1\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = A\} = \alpha$. Для этого обозначим $\sigma_n(\xi) = \inf\left\{t\colon \int_0^t m_s^2(\xi)\,ds \geqslant n\right\}$. Тогда, учитывая (17.122) и

(17.125), по формуле Ито, примененной к $a(\lambda_t(\xi))$, находим

$$a(\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n}(\xi)) = a(0) + \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} a'(\lambda_t(\xi))\, m_t(\xi)\, d\overline{W}_t + \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} [a'(\lambda_t(\xi)) + a''(\lambda_t(\xi))]\, m_t^2(\xi)\, dt = \alpha + \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} a'(\lambda_t(\xi))\, m_t(\xi)\, d\overline{W}_t.$$

Но

$$\mathsf{M}_1 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} [a'(\lambda_t(\xi))\, m_t(\xi)]^2\, dt \leqslant \sup_{A\leqslant x\leqslant B} [a'(x)]^2\, \mathsf{M}_1 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} m_t^2(\xi)\, dt \leqslant n \sup_{A\leqslant x\leqslant B} [a'(x)]^2 < \infty.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}_1 \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)} a'(\lambda_t(\xi))\, m_t(\xi)\, d\overline{W}_t = 0,$$

и, следовательно, беря в (17.129) математическое ожидание $\mathsf{M}_1(\cdot)$, получаем

$$\mathsf{M}_1 a(\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)\wedge\sigma_n(\xi)}(\xi)) = \alpha.$$

Функция $a(x)$ при $A\leqslant x\leqslant B$ ограничена и $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\xi) = \infty$ (P-п. н.). Поэтому по теореме о мажорируемой сходимости (теорема 1.4) $\mathsf{M}a(\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi)) = \alpha$. Используя лемму 17.7 и ее следствие, находим, что

$$\alpha = \mathsf{M}_1 a(\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi)) = 1\cdot\mathsf{P}_1\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = A\} + 0\cdot\mathsf{P}\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = B\} = \mathsf{P}_1\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = A\}.$$

Аналогично доказывается и формула $\mathsf{P}_0\{\lambda_{\tilde{\tau}(\xi)}(\xi) = B\} = \beta$.

Лемма 17.9. *Для плана $\tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\tau}, \tilde{\delta})$ справедливы формулы* (17.118).

Доказательство. Обозначим $g_0(x)$, $g_1(x)$, $A\leqslant x\leqslant B$, решения дифференциальных уравнений

$$g_i''(x) + (-1)^{1+i}\cdot g_i'(x) = -2, \quad g_i(A) = g_i(B) = 0, \quad i = 0, 1. \tag{17.130}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$g_0(x) = 2\left\{ \frac{(e^B - e^{A+B-x})(B-A)}{e^B - e^A} + A - x \right\} \tag{17.131}$$

и

$$g_1(x) = 2\left\{ \frac{(e^B - e^x)(B-A)}{e^B - e^A} - B + x \right\}. \tag{17.132}$$

С учетом (17.124) и (17.119) отсюда находим, что

$$-g_0(0) = 2\omega(\beta, \alpha), \tag{17.133}$$

$$g_1(0) = 2\omega(\alpha, \beta). \tag{17.134}$$

Пусть верна гипотеза H_0 и $\sigma_n(W) = \inf\left\{ t: \int_0^t m_s^2(W)\, ds \geqslant n \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда, применяя формулу Ито к $g_0(\lambda_t(W))$, получаем

$$g_0(\lambda_{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)}(W)) = g_0(0) + \int_0^{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)} g'(\lambda_t(W))\, m_t(W)\, dW_t -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)} [g'(\lambda_t(W)) - g''(\lambda_t(W))]\, m_t^2(W)\, dt =$$

$$= g_0(0) + \int_0^{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)} g'(\lambda_t(W))\, m_t(W)\, dW_t + \int_0^{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)} m_t^2(W)\, dt. \tag{17.135}$$

Поскольку $\mathsf{M} \int_0^{\bar\tau(\overline{W})\wedge\sigma_n(W)} g'(\lambda_t(W))\, m_t(W)\, dW_t = 0$, то, усредняя обе части (17.135), подходим к равенству

$$\mathsf{M} \int_0^{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)} m_t^2(W)\, dt = -g_0(0) + \mathsf{M} g_0(\lambda_{\bar\tau(W)\wedge\sigma_n(W)}(W)). \tag{17.136}$$

Переходя в (17.136) к пределу, получаем требуемое равенство

$$\mathsf{M}\int_0^{\tilde{\tau}(W)} m_t^2(W)\,dt = -g_0(0) = 2\omega(\beta, \alpha).$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\mathsf{M}_1\int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt = g_1(0) = 2\omega(\alpha, \beta).$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 17.8. Пусть $\Delta = \Delta(\tau, \delta)$ — некоторый план, принадлежащий классу $\Delta_{\alpha,\beta}$. Обозначим $\mu_{\tau,\xi}$ и $\mu_{\tau,W}$ сужения мер μ_ξ и μ_W, отвечающих процессу ξ с дифференциалом (17.110) и винеровскому процессу W, на σ-алгебру $\mathscr{B}_\tau$. Тогда в силу условий (17.112) — (17.114) и предположения (17.121) из теоремы 7.10 находим, что $\mu_{\tau,\xi} \sim \mu_{\tau,W}$,

$$\ln\frac{d\mu_{\tau,\xi}}{d\mu_{\tau,W}}(\tau, W) = \int_0^{\tau(W)} m_s(W)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{\tau(W)} m_s^2(W)\,ds \tag{17.137}$$

и

$$\ln\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau, \xi) = -\int_0^{\tau(\xi)} m_s(\xi)\,d\xi_s + \frac{1}{2}\int_0^{\tau(\xi)} m_s^2(\xi)\,ds. \tag{17.138}$$

Отсюда следует:

$$\mathsf{M}_0\ln\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau, \xi) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathsf{M}_0\int_0^{\tau(\xi)} m_s^2(\xi)\,ds = \frac{1}{2}\mathsf{M}\int_0^{\tau(W)} m_s^2(W)\,ds, \tag{17.139}$$

$$\mathsf{M}_1\ln\frac{d\mu_{\tau,\xi}}{d\mu_{\tau,W}}(\tau, \xi) = \frac{1}{2}\mathsf{M}_1\int_0^{\tau(\xi)} m_s^2(\xi)\,ds. \tag{17.140}$$

Используя неравенство Йенсена, получаем

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}_1\int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt = \mathbf{M}_1 \ln\frac{d\mu_{\tau,\xi}}{d\mu_{\tau,W}}(\tau,\xi) =$$

$$= -\mathbf{M}_1\ln\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi) = -\mathbf{M}_1\left\{\mathbf{M}_1\left[\ln\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant -\mathbf{M}_1\left\{\ln\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)\right]\right\} =$$

$$= -\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}\ln\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=1\right] -$$

$$-\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}\ln\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=0\right] =$$

$$= -\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}\ln\frac{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}\,\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=1\right]}{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}} -$$

$$-\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}\ln\frac{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}\,\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=0\right]}{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}}. \tag{17.141}$$

Заметим теперь, что в силу эквивалентности $\mu_{\tau,\xi}\sim\mu_{\tau,W}$ для $i=0, 1$

$$\mathbf{P}_0\{\delta(\xi)=i\} = \mathbf{P}\{\delta(W)=i\} = \mathbf{M}_1\chi_{\{\delta(\xi)=i\}}\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi) =$$

$$= \mathbf{M}_1\left\{\chi_{\{\delta(\xi)=i\}}\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=i\right]\right\} =$$

$$= \mathbf{P}_1\left\{\delta(\xi)=i\right\}\mathbf{M}_1\left[\frac{d\mu_{\tau,W}}{d\mu_{\tau,\xi}}(\tau,\xi)\,\middle|\,\delta(\xi)=i\right].$$

Отсюда следует, что неравенство (17.141) может быть преобразовано таким образом:

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}_1\int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt \geqslant -\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}\ln\frac{\mathbf{P}_0\{\delta(\xi)=1\}}{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}} -$$

$$-\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}\ln\frac{\mathbf{P}_0\{\delta(\xi)=0\}}{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}} =$$

$$= \mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}\ln\frac{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=1\}}{\mathbf{P}_0\{\delta(\xi)=1\}} + \mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}\ln\frac{\mathbf{P}_1\{\delta(\xi)=0\}}{\mathbf{P}_0\{\delta(\xi)=0\}} \geqslant$$

$$\geqslant (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha\ln\frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{M}_1\int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt,$$

где последнее равенство вытекает из леммы 17.9.

Аналогично доказывается и неравенство

$$\mathsf{M}_0 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt \geqslant \mathsf{M}_0 \int_0^{\tau(\xi)} m_t^2(\xi)\,dt.$$

Следствие. *Пусть* $\theta_t \equiv s(t)$, *где* $s(t)$, $t \geqslant 0$, — *детерминированная дифференцируемая функция такая, что* $\int_0^\infty s^2(t)\,dt = \infty$ *и* $s(t)\,s'(t) \geqslant 0$. (*Из этих предположений следует, что функция* $\Phi(t) = \int_0^t s^2(u)\,du$ *является выпуклой книзу*, $\Phi(0) = 0, \Phi(\infty) = \infty$.)

Пусть α, β — *заданные числа*, $0 < \alpha + \beta < 1$, и $\Delta_{\alpha,\beta}$ — *рассмотренный выше класс последовательных планов. Обозначим* $\Delta_T = (T, \delta_T)$ *план, принадлежащий классу* $\Delta_{\alpha,\beta}$ *и имеющий фиксированную длительность наблюдения, равную* T, $0 < T < \infty$. (Примером такого плана является тест Неймана—Пирсона.) *Тогда оптимальный план* $\tilde{\Delta} = (\tilde{\tau}, \tilde{\delta}) \in \Delta_{\alpha,\beta}$ *имеет* $\mathsf{M}_0\tilde{\tau} \leqslant T$, $\mathsf{M}_1\tilde{\tau} \leqslant T$.

В самом деле, по доказанной теореме $\mathsf{M}_i \int_0^{\tilde{\tau}(\xi)} s^2(t)\,dt \leqslant \Phi(T)$, $i = 0, 1$, откуда по неравенству Йенсена $\Phi(T) \geqslant \mathsf{M}_i\Phi(\tilde{\tau}(\xi)) \geqslant \Phi(\mathsf{M}_i\tilde{\tau}(\xi))$, и, следовательно, $T \geqslant \mathsf{M}_i\tau(\xi)$, $i = 0, 1$.

§ 7. Некоторые применения к стохастической аппроксимации

Пусть θ — неизвестный параметр, $-\infty < \theta < \infty$, подлежащий оцениванию по наблюдениям за процессом $\xi = (\xi_t)$, $t \geqslant 0$, с дифференциалом

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta]\,dt + B(t, \xi)\,dW_t, \qquad \xi_0 = 0. \quad (17.142)$$

Неупреждающие функционалы $A_0(t, x)$, $A_1(t, x)$, $B(t, x)$, заданные на $[0, \infty) \times \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — пространство непрерывных функций $x = (x_t)$, $t \geqslant 0$, предполагаются такими, что

1) $\int_0^T [A_0^2(t, x) + A_1^2(t, x) + B^2(t, x)]\,dt < \infty$, $T < \infty$, $x \in \mathbf{C}$;

2) $B^2(t, x) \geqslant d > 0$, $t < \infty$, $x \in \mathbf{C}$;

3) $\int_0^\infty \frac{A_1^2(t, x)}{B^2(t, x)}\,dt = \infty$, $x \in \mathbf{C}$;

4) для $B(t, x)$ выполнены условия (4.110), (4.111),

Если бы параметр θ был гауссовской случайной величиной, $N(0, \alpha^2)$, не зависящей от винеровского процесса W_t, $t \geqslant 0$, то тогда согласно (12.34) и (12.35) условное математическое ожидание $m_t = \mathbf{M}(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ и условная дисперсия $\gamma_t = \mathbf{M}[(\theta_t - m_t)^2 \mid \mathcal{F}_t^\xi]$ задавались бы формулами

$$m_t = \gamma_t \int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B^2(s, \xi)} [d\xi_s - A_0(s, \xi)\, ds], \quad \gamma_t = \left[\frac{1}{\alpha^2} + \int_0^t \frac{A_1^2(s, \xi)}{B^2(s, \xi)} ds\right]^{-1}, \tag{17.143}$$

которые следуют из уравнений

$$dm_t = \frac{\gamma_t A_1(t, \xi)}{B^2(t, \xi)} [d\xi_t - (A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t)\, dt], \quad m_0 = 0, \tag{17.144}$$

$$\dot{\gamma}_t = -\frac{\gamma_t^2 A_1^2(t, \xi)}{B^2(t, \xi)}, \quad \gamma_0 = \alpha^2. \tag{17.145}$$

(Заметим, что при $\alpha^2 = \infty$ и $\int_0^t \frac{A_1^2(s, x)}{B^2(s, x)} ds > 0$, $x \in \mathbf{C}$, оценка m_t, определяемая формулой (17.143), превращается в оценку максимального правдоподобия для параметра θ.)

В том случае, когда о вероятностной природе параметра θ ничего не известно, естественно задаться вопросом о том, а не будет ли оценка m_t^α, $t \geqslant 0$, определяемая из уравнения

$$dm_t^\alpha = A_1(t, \xi)\, \gamma_t B^{-2}(t, \xi) \left\{d\xi_t - \left(A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\, m_t^\alpha\right) dt\right\}, \tag{17.146}$$

где $0 < \alpha^2 \leqslant \infty$, сходиться в каком-либо подходящем смысле к истинному значению параметра θ.

Из (17.143) следует, что

$$m_t^\alpha - \theta = \gamma_t \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)} dW_s\right].$$

Поэтому в силу предположения 3)

$$\varlimsup_{t \to \infty} |m_t^\alpha - \theta| \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \left| \int_0^t \frac{A_1(s, \xi)}{B(s, \xi)} dW_s \right| \Bigg/ \int_0^t \frac{A_1^2(s, \xi)}{B^2(s, \xi)} ds. \tag{17.147}$$

Но из леммы 17.4 следует, что верхний предел в правой части (17.147) равен нулю $\mathbf{P}_\theta$-п. н. для любого θ. Следовательно, если истинное значение неизвестного параметра равно θ, то $\mathbf{P}_\theta$-п. н.

$m_t^\alpha \to \theta$, $t \to \infty$, где процесс m_t^α, $t \geqslant 0$, определяется уравнением (17.146), являющимся типичным примером уравнений, определяющих алгоритм стохастической аппроксимации.

Интересен вопрос о том, насколько «быстро» процесс m_t^α, $t \geqslant 0$, сходится к оцениваемому значению θ. Поскольку $m_t^\alpha \to \theta$ с P_θ-вероятностью единица, то для P_θ-почти всех ω и $\varepsilon > 0$ найдется (наименьший) момент $\tau_\varepsilon(\omega; \alpha)$ такой, что $|m_t^\alpha - \theta| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \geqslant \tau_\varepsilon(\omega; \alpha)$. (Заметим, что момент $\tau = \tau_\varepsilon(\omega; \alpha)$ *не* является марковским.)

Исследуем математическое ожидание $\mathsf{M}_\theta \tau_\varepsilon(\omega; \alpha)$ времени $\tau_\varepsilon(\omega; \alpha)$, необходимого для оценки неизвестного параметра с точностью до ε, ограничиваясь случаем $A_0 \equiv 0$, $A_1 \equiv 1$, $B \equiv 1$, $\alpha = \infty$.

Итак, пусть наблюдаемый процесс ξ_t, $t \geqslant 0$, имеет дифференциал

$$d\xi_t = \theta\, dt + dW_t. \tag{17.148}$$

Для простоты записи будем обозначать $m_t = m_t^\infty$, $\tau_\varepsilon(\omega) = \tau_\varepsilon(\omega; \infty)$. В рассматриваемом случае уравнение стохастической аппроксимации (17.146) принимает следующий вид:

$$dm_t = \frac{1}{t}\{d\xi_t - m_t\, dt\}. \tag{17.149}$$

Поскольку решение этого уравнения

$$m_t = \frac{\xi_t}{t} = \theta + \frac{W_t}{t},$$

то

$$\tau_\varepsilon(\omega) = \inf\left\{t : \left|\frac{W_s}{s}\right| \leqslant \varepsilon,\ s \geqslant t\right\}.$$

Теорема 17.9. *Для любого* θ, $-\infty < \theta < \infty$,

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\tau_\varepsilon(\omega) \leqslant \frac{x}{\varepsilon^2}\right\} = \mathsf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |W_t| < \sqrt{x}\right\}$$

и

$$\mathsf{M}_\theta \tau_\varepsilon(\omega) = \frac{c}{\varepsilon^2},$$

где c — некоторая константа, $0 < c < \infty$.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что каждый из процессов

$$W_t^* = \begin{cases} tW_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad W^{**}(t) = \sqrt{d}\, W_{t/d}, \quad d > 0,$$

является процессом броуновского движения (см. п. 4 в § 4 гл. 1). Тогда*)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_\theta\left\{\tau_\varepsilon(\omega)\leqslant\frac{x}{\varepsilon^2}\right\}&=\mathsf{P}\left\{|W_t|\leqslant t\varepsilon,\ t>\frac{x}{\varepsilon^2}\right\}=\\
&=\mathsf{P}\left\{\left|W_t^*\right|\leqslant t\varepsilon,\ t>\frac{x}{\varepsilon^2}\right\}=\mathsf{P}\left\{t\left|W_{1/t}\right|\leqslant t\varepsilon,\ t>\frac{x}{\varepsilon^2}\right\}=\\
&=\mathsf{P}\left\{\left|W_{1/t}\right|\leqslant\varepsilon,\ t>\frac{x}{\varepsilon^2}\right\}=\mathsf{P}\left\{\left|W_s\right|\leqslant\varepsilon,\ 0<s<\frac{\varepsilon^2}{x}\right\}=\\
&=\mathsf{P}\left\{|W_{t\cdot\varepsilon/x^2}|\leqslant\varepsilon,\ 0<t<1\right\}=\\
&=\mathsf{P}\left\{\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}|W_{t\cdot\varepsilon^2/x}|\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\varepsilon},\ 0<t<1\right\}=\\
&=\mathsf{P}\left\{|W_t|\leqslant\sqrt{x},\ 0\leqslant t\leqslant 1\right\}=\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_t|<\sqrt{x}\right\}.
\end{aligned}
$$

Хорошо известно**), что

$$
\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_t|<\sqrt{x}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2}(y-2k\sqrt{x})}\,dy. \tag{17.150}
$$

Таким образом, ряд в правой части (17.150) задает распределение вероятностей для случайной величины $\varepsilon^2\tau_\varepsilon(\omega)$. Поскольку

$$
\mathsf{P}_\theta\left\{\varepsilon^2\tau_\varepsilon(\omega)\leqslant x\right\}=\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}W_t^2\leqslant x\right\}
$$

и в силу (3.8) $\mathsf{M}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}W_t^2\leqslant 4$, то $\mathsf{M}_\theta\varepsilon^2\tau_\varepsilon(\omega)<\infty$ и, следовательно, $\mathsf{M}_\theta\tau_\varepsilon(\omega)=c/\varepsilon^2$, где константа

$$
c=\int_0^\infty\left[1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2}(y-2k\sqrt{x})^2}\,dy\right]dx<\infty.
$$

Теорема доказана.

---

*) $\{a_t\leqslant a,\ t>s\}$ означает событие, состоящее в том, что $a_t\leqslant a$ для всех $t>s$.

**) См., например, [145], стр. 173.

ПРИМЕЧАНИЯ

Глава 1

§ 1. Аксиоматика теории вероятностей изложена в работе Колмогорова [86]. Доказательства приводимых теорем 1.1—1.5 можно найти во многих руководствах. См., например, монографии Дуба [46], Лоэва [120], Колмогорова и Фомина [89], Мейера [126]. Теорема 1.6 доказана в статье [11]. Приводимая формулировка леммы Фату (теорема 1.2) содержится в [160]. Доказательство критерия равномерной интегрируемости Валле-Пуссена (теорема 1.8) см. в [126].

§ 2. Подробнее об измеримых, прогрессивно измеримых, стохастически эквивалентных процессах см. [126]. Стационарным процессам посвящены книги Розанова [139], Крамера и Лидбеттера [91], известная статья Яглома [172]. Современной теории марковских процессов посвящены монографии Дынкина [47], Блюменталя и Гетура [12]. В книге Прохорова и Розанова [135] читатель найдет основные факты теории стационарных и марковских процессов.

§ 3. Свойства марковских моментов мы излагаем, следуя Мейеру [126], Блюменталю и Гетуру [12], Ширяеву [169].

§ 4. Исчерпывающие сведения о процессе броуновского движения содержатся в книгах Леви [100], Ито и Маккина [61], Дуба [46], Гихмана и Скорохода [34], [36].

§ 5. Подробнее об использованных понятиях математической статистики см. книги Линника [106], Крамера [90], Фергюсона [153].

Глава 2

§ 1—4. Теория мартингалов и полумартингалов для случая дискретного времени изложена у Дуба [46], Мейера [126], Невё [130], Гихмана и Скорохода [37].

Глава 3

§ 1, 2. См. также Мейер [126], Дуб [46].

§ 3, 4. Доказательство разложения Дуба — Мейера заимствовано из статьи Рао [137] (см. также Мейер [126]).

Глава 4

§ 1. Доказательство теоремы Леви о том, что всякий винеровский процесс является процессом броуновского движения, есть у Дуба [46]. Мы приводим другое доказательство. Хотя специалистам и известен результат о непрерывности (пополненных) σ-алгебр $\mathcal{F}_t^W$, порожденных значениями винеровского процесса W_s, $s \leqslant t$, доказательство этого результата (теорема 4.3) приводится, по-видимому, впервые.

§ 2. Построение стохастических интегралов по винеровскому процессу от разных классов функций восходит к Винеру [20] и Ито [59]. Конструкцию и свойства стохастических интегралов можно найти в недавних книгах Гихмана и Скорохода [34], [36]. Интегралы $\Gamma_t(f)$ вводятся впервые. Лемма 4.9 получена Ершовым [52].

§ 3. Формула замены переменных Ито (см. [34], [36], [47], [60]) играет в теории стохастических дифференциальных уравнений фундаментальную роль.

§ 4. В стохастических дифференциальных уравнениях следует существенно различать понятия сильных и слабых решений. Слабые решения рассматривались Скороходом [144], Ершовым [52], [53], Ширяевым [166], Липцером и Ширяевым [111], Ямада и Ватанабе [174]. Существование и единственность сильных решений при интегральном условии Липшица (4.110) доказана Ито и Нисио [62]. Утверждение теоремы 4.7 содержится в статье Каллианпура и Стрибел [74]. Мы приводим иное доказательство.

Глава 5

§ 1, 2. По поводу доказательств теорем 5.1—5.4 см. также книгу Мейера [126], статьи Куниты и Ватанабе [95] и Вентцеля [18]. Теорема 5.5 иным способом доказана Кларком [85]. Доказательство теоремы 5.5 сходно с доказательством Вентцеля [18].

§ 3. Утверждения теоремы 5.6 частично содержится у Кларка [85]. Доказательство представления для гауссовских случайных величин принадлежит авторам. Теорема 5.7 доказана Кларком [85]. Утверждения типа теорем 5.8 и 5.9 можно найти также у Вентцеля [18].

§ 4. Конструкцию стохастического интеграла по квадратично интегрируемым мартингалам мы приводим, следуя Куррежу [96].

§ 5. Теоремы 5.13 и 5.14 являются новыми. Теорема Фубини для стохастических интегралов была впервые дана Каллианпуром и Стрибел [75]. Ее обобщения см. также в статье Ершова [51]. Приводимое нами доказательство основано на использовании результата теоремы 5.14.

§ 6. Структура функционалов от процессов диффузионного типа в случае $b_t(\xi) \equiv 1$ изучалась в работе Фуджисаки, Каллианпура и Кунита [156]. Общий случай рассматривается впервые. Доказательство непрерывности σ-алгебр $\mathcal{F}_t^\xi$ (теорема 5.19) также дается впервые. Теорема 5.21 является новой.

Глава 6

§ 1. Результаты этого параграфа принадлежат авторам.

§ 2. Теорема 6.1 доказана Новиковым [133]. С заменой множителя $1/2$ на $1+\varepsilon$ и $1/2+\varepsilon$ эта теорема была доказана соответственно Гихманом и Скороходом [36], Липцером и Ширяевым [118].

§ 3. Теорема 6.2 обобщает важный результат Гирсанова [31], сформулированный в теореме 6.3.

Глава 7

§ 1, 2. Некоторые общие вопросы абсолютной непрерывности мер в функциональных пространствах содержатся в статье Гихмана и Скорохода [35]. Абсолютная непрерывность винеровской меры при различных преобразованиях изучалась Камероном и Мартином [80], [81], Прохоровым [134].

Результаты этих параграфов получены Ершовым [53], Липцером и Ширяевым [118], Кадота и Шеппом [66].

§ 3. Структура процессов, мера которых абсолютно непрерывна и эквивалентна винеровской, изучалась Хитсуда [158], Липцером и Ширяевым [118], Ершовым [53], Кайлатом [69].

§ 4. Представление (7.73) для процессов Ито с помощью обновляющего процесса $\overline{W}$ было получено Ширяевым [166] и Кайлатом [67]. См. также статьи Ершова [52], Липцера и Ширяева [111], Фуджисаки, Каллианпура и Кунита [156].

§ 5. Лемма 7.2 в случае гауссовских процессов с нулевым средним доказана в статье Кадота [64]. Приведенное доказательство возможности сведения общего случая ($M\beta_t \not\equiv 0$) к случаю процессов с нулевым средним ($M\beta_t \equiv 0$) было указано нам А. С. Холево. Представления типа (7.99) рассматривались Хитсуда [158]. При доказательстве гауссовости интеграла (Лебега) $\int_0^T \alpha(t)\,dt$ от гауссовского процесса $\alpha(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, используются представления для семиинвариантов, см. Леонов и Ширяев [103], Ширяев [164]. Другое доказательство гауссовости можно получить с помощью теоремы 2.8, приведенной Дубом [46].

§ 6. Результаты этого параграфа получены авторами.

§ 7. Теорема 7.21 обобщает известный результат, принадлежащий Камерону и Мартину [80], [81].

§ 8. Теорема 7.22 обобщает известное неравенство Рао — Крамера [90] и неравенство Волфовитца [22].

§ 9. Леммы 7.3 и 7.4 содержатся в статье Каллианпура и Стрибел [74].

Глава 8

§ 1, 2. Выводу представлений для условных математических ожиданий $\pi_t(h)$ при разных предположениях о (θ, ξ, h) были посвящены работы многих авторов. Прежде всего необходимо отметить классические работы Колмогорова [87] и Винера [21], которые в рамках линейной теории рассмотрели задачу построения оптимальных оценок для случая стационарно связанных процессов. Развернутое изложение их результатов вместе с достижениями последних лет содержатся у Яглома [172], Розанова [139], Прохорова и Розанова [135]. По поводу результатов, касающихся нелинейной фильтрации, см., например, работы Стратоновича [146], [147], Вентцеля [19], Вонэма [25], Кушнера [98], [99], Ширяева [165], [166], [170], Липцера и Ширяева [111], [114]—[116], Липцера [108]—[110], Кайлата [67], [70], Фроста и Кайлата [155], Стрибел [148], Каллианпура и Стрибел [74], [75], Ершова [50], [51], Григелиониса [41]. Приводимый вывод следует в основном статье Фуджисаки, Каллианпура и Кунита [156]. Первые общие результаты по построению оптимальных нелинейных оценок для случая марковского процесса были получены Стратоновичем [146], [147] в рамках теории условных марковских процессов.

§ 3. Представление (8.56) для $\pi_t(h)$ в случае процессов диффузионного типа было получено Ширяевым [165], Липцером и Ширяевым [111].

§ 4, 5. Теоремы 8.4 и 8.5 приводятся впервые. Частные их случаи были получены Стратоновичем [147], Липцером и Ширяевым [112]—[116], Липцером [108]—[110].

§ 6. Рассматриваемые стохастические дифференциальные уравнения с частными производными для условной плотности были выведены Липцером и Ширяевым [111]. Результаты о единственности решения принадлежат Розовскому [140].

Глава 9

§ 1—3. Частные случаи теоремы 9.1 были опубликованы в работах Вонэма [25], Ширяева [166], Липцера и Ширяева [166], Стратоновича [147]. Приводимый мартингальный вывод дается впервые. Единственность решения нелинейной системы уравнений (9.23) изучалась Розовским и Ширяевым [141]. Выводу прямых и обратных уравнений интерполяции посвящены работы Стратоновича [147], Липцера и Ширяева [116].

Глава 10

§ 1—3. Уравнения (10.10) и (10.11), определяющие эволюцию оптимального линейного фильтра, получены Калманом и Бьюси [78]. См. также гл. 9 в книге Стратоновича [147].

Мартингальный вывод уравнений (10.10) и (10.11) дается, по-видимому, впервые. Доказательство леммы 10.1 принадлежит авторам. Другое доказательство леммы 10.1 дано Рюмгаартом [142].

§ 4. Уравнения для почти оптимального линейного фильтра в случае вырождения матриц $B \circ B$ даются впервые.

Глава 11

§ 1—3. Важность выделения класса условно-гауссовских процессов для эффективного решения задач оптимальной нелинейной фильтрации была отмечена Липцером [108]. Условно-гауссовские процессы рассматривались в статье Липцера и Ширяева [111]. Доказательство теоремы об условной гауссовости приводится впервые.

Глава 12

§ 1—5. Результаты этой главы принадлежат авторам. Частично они были ими опубликованы в [111], [113]—[115].

Глава 13

§ 1. Теорема о нормальной корреляции (теорема 13.1), доказанная в общей постановке Марсаглиа [124] (см. также Андерсон [2]), систематически используется в разных главах этой книги. Доказательство теоремы 13.2 авторам сообщил Кицул. Свойства псевдообратных матриц см. также в книге Гантмахера [30]. Лемма 13.3 доказана Пятецким (дипломная работа).

§ 2—5. Содержание этих параграфов основано на статьях Липцера и Ширяева [119], Глонти [38]—[40].

Глава 14

§ 1, 2. В этих параграфах систематически используется тот факт, что стационарная последовательность с дробно-рациональным спектром является компонентой многомерного стационарного процесса, подчиняющегося системе рекуррентных уравнений (14.15) (см. также гл. 15, § 3). Идея вывода рекуррентных уравнений заимствована у Лэнинга и Бэттина [122].

§ 3. Задача оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом потерь изучалась Красовским и Лидским [92], Летовым [104], Калманом [79]. Эта же задача управления по неполным данным приведена у Аоки [3], Медича [125], Вонэма [24].

§ 4. Теорема 14.3 аналогична соответствующему результату Калмана [77] (для случая непрерывного времени см. также § 2 гл. 16).

§ 5. Результаты этого параграфа получены Альбертом и Ситтлером [1], Жуковским и Липцером [55].

Глава 15

§ 1—3. В этих параграфах используются общие уравнения оптимальной фильтрации для линейного оценивания случайных процессов.

§ 4. Сравнение оптимальных линейных и нелинейных оценок производилось Стратоновичем [147] и Липцером [107].

Глава 16

§ 1. Доказательство теоремы 16.1 существенно основывается на результатах двенадцатой главы о виде уравнений для апостериорных средних и дисперсий в случае условно-гауссовских процессов (см. также Медич [125], Вонэм [26])

§ 2. Теорема 16.2 получена Калманом [77].

§ 3. Излагаемые результаты содержатся в статье Кадоты, Закаи и Зива [65].

§ 4. Передача гауссовской случайной величины по каналу с обратной связью рассматривалась Шалквийком и Кайлатом [161], Зигангировым [56], Дьячковым и Пинскером [48], Хасьминским (см. задачу 72 в добавлении к книге [157]), Невельсоном и Хасьминским [128]. Доказательство теоремы 16.4, основанное на использовании уравнений оптимальной нелинейной фильтрации, принадлежит Катышеву (дипломная работа).

Доказательство леммы 16.7 и теоремы 16.5 принадлежит Ихара (Sh. Ihara).

Теорема 16.6 доказана авторами.

Глава 17

§ 1. Здесь систематически используются результаты седьмой и десятой глав.

§ 2. Оценки параметров коэффициента сноса для процессов диффузионного типа изучались Новиковым [131], Арато [4].

§ 3. Результаты этого параграфа принадлежат Новикову [131].

§ 4. Оценка параметров двумерного гауссовского марковского процесса рассматривалась в работах Арато, Колмогорова, Синая [5], Арато [4], Липцера и Ширяева [111], Новикова [131].

§ 5. Последовательные оценки максимального правдоподобия $\delta_H(\xi)$ были введены авторами. Свойства этих оценок изучались Новиковым [131] и авторами. Теорема 17.7 доказана Вогником.

§ 6. Теорема 17.8 обобщает один из результатов Лэдена [121].

§ 7. Теорема 17.9 доказана в статье [143].

ЛИТЕРАТУРА

1. Альберт, Ситтлер (Albert A., Sittler R. W.), A method for computing least squares estimators that keep up with the data, SIAM J. Control 3 (1965), 384—417.
2. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ (перев. с англ.), Физматгиз, М., 1963.
3. Аоки М., Оптимизация стохастических систем (перев. с англ.), «Наука», М., 1971.
4. Арато М., Вычисление доверительных границ для параметра «затухание» комплексного стационарного гауссовского марковского процесса, Теория вероятн. и ее примен. **XIII**, 1 (1968), 326—333.
5. Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г., Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса, ДАН СССР **146**, 4 (1962), 747—750.
6. Астрём (Astrom K. I.), Optimal control of Markov processes with incomplete state information, J. Math. Anal. Appl. **10** (1965), 174—205.
7. Балакришнан (Balakrishnan A. V.), Stochastic differential systems, I, Lecture notes, Dept. of System Science, VCLA, 1971.
8. Балакришнан (Balakrishnan A. V.), A martingale approach to linear recursive state estimation, SIAM J. Control **10** (1972), 754—766.
9. Беллман Р., Кук К. Л., Дифференциально-разностные уравнения (перев. с англ.), «Мир», М., 1967.
10. Бенсуссан (Bensoussan A.), Filtrage optimal des systemes lineaires, Dunod, Paris, 1971.
11. Блэкуэлл, Дубинс (Blackwell D., Dubins L.), Merging of opinoins with increasing information, AMS **33** (1962), 882—886.
12. Блюменталь, Гетур (Blumental R. M., Getoor R. K.), Markov processes and potential theory, Academic Press, N. Y. and L., 1968.
13. Большаков И. А., Репин В. Г., Вопросы нелинейной фильтрации, Автоматика и телемеханика **XXII**, 4 (1961), 466—478.
14. Брейман (Breiman L.), Probability, Addison-Wesley Publ. Company, 1968.
15. Бьюси (Bucy R. S.), Nonlinear filtering theory, IEEE Trans. Automatic Control **AC-10** (1965), 198.
16. Бьюси, Джозеф (Bucy R. S., Joseph P. D.), Filtering for stochastic processes with application to guidance, Interscience, N. Y., 1968.
17. Бэккенбах Э., Беллман Р., Неравенства (перев. с англ.), «Мир», М., 1965.
18. Вентцель А. Д., Аддитивные функционалы от многомерного винеровского процесса, ДАН СССР **130**, 1 (1961), 13—16.
19. Вентцель А. Д., Об уравнениях теории условных марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. **X**, 2 (1965), 390—393.
20. Винер (Wiener N.), Differential space, J. Math. and Phys. **58** (1923), 131—174.
21. Винер (Wiener N.), Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, J. Wiley & Sons, N. Y., 1949.

22. Волфовитц (Wolfowitz J.), On sequential binomial estimation, AMS **17** (1946), 489—493.
23. Волфовитц (Wolfowitz J.), The efficiency of sequential games estimates and Wald's equation for sequential processes, AMS **18** (1947), 215—230.
24. Вонэм (Wonham W. M.), Stochastic problems in optimal control, Tech. report 63-14, Research Institute for Advanced Study, Baltimore, 1963.
25. Вонэм (Wonham W. M.), Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering, SIAM J. Control, **2** (1965), 347—369
26. Вонэм (Wonham W. M.) On the separation theorem of stochastic control, SIAM J. Control **6** (1968), 312—326.
27. Вонэм (Wonham W. M.), On a matrix Riccati equation of stochastic control, SIAM J. Control 6 (1968), 681—697.
28. Гальчук Л. И., Об одном представлении скачкообразных процессов, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969.
29. Гальчук Л. И. Фильтрация марковских процессов со скачками, УМН **XXV**, 5 (1970), 237—238.
30. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», М., 1967.
31. Гирсанов И. В., О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, Теория вероятн. и ее примен. **V**, 3 (1960), 314—330.
32. Гихман И. И., К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, Укр. матем. журн. **2**, 3 (1950), 45—69.
33. Гихман И. И., Дороговцев А. Я., Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, Укр. матем. журн. **17**, 6 (1965), 3—21.
34. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.
35. Гихман И. И., Скороход А. В., О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах, УМН **21** (1966), 83—152.
36. Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, «Наукова думка», Киев, 1968.
37. Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, том I, «Наука», М., 1971.
38. Глонти О. А., Последовательная фильтрация и интерполяция компонент марковской цепи, Литовский матем. сб. **IX**, 2 (1969), 263—279.
39. Глонти О. А., Экстраполяция компонент марковской цепи, Литовский матем. сб. **IX**, 4 (1969), 741—754.
40. Глонти О. А., Последовательная фильтрация компонент марковской цепи при вырожденности матрицы диффузии, Теория вероятн. и ее примен. **XV**, 4 (1970), 736—740.
41. Григелионис Б., О стохастических уравнениях нелинейной фильтрации случайных процессов, Литовский матем. сб. **XII**, 4 (1972).
42. Григелионис Б., О структуре плотностей мер, соответствующих случайным процессам, Литовский матем. сб. **XIII**, 1 (1973).
43. Гулько Ф. Б., Новосельцева Ж. А., Решение нестационарных задач фильтрации и упреждения методами моделирования, Автоматика и телемеханика **4** (1966), 122—141.
44. Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш., Применение условных семиинвариантов в задачах нелинейной фильтрации марковских процессов, Автоматика и телемеханика **6** (1967), 63—74.
45. Дашевский М. Л., Метод семиинвариантов в задачах нелинейной фильтрации марковских процессов, Автоматика и телемеханика **7** (1968), 24—32.
46. Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы (перев. с англ.), ИЛ, М., 1956.
47. Дынкин Е. Б., Марковские процессы, Физматгиз, 1963.

48. Дьячков А. Г., Пинскер М. С., Об оптимальном линейном методе передачи по гауссовскому стационарному каналу без памяти и с полной обратной связью, Проблемы передачи информации 7, 2 (1971), 38—46.
49. Дюге Д., Теоретическая и прикладная статистика, «Наука», М., 1972.
50. Ершов М. П., Нелинейная фильтрация марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. XIV, 4 (1969), 757—758.
51. Ершов М. П., Последовательное оценивание диффузионных процессов, Теория вероятн. и ее примен. XV, 4 (1970), 705—717.
52. Ершов М. П., О представлениях процессов Ито, Теория вероятн. и ее примен. XVII, 1 (1972), 167—172.
53. Ершов М. П., Об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам диффузионного типа, Теория вероятн. и ее примен. XVII, 1 (1972), 173—178.
54. Ершов (Yershov M. P.), Stochastic equations, Proc. Second Japan — USSR Sympos. Probab. Theory, Kyoto, I (1972), 101—106.
55. Жуковский Е. Л., Липцер Р. Ш., О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических уравнений, ЖВМ и МФ 12, 4 (1972), 843—857.
56. Зигангиров К. Ш., Передача сообщений по двоичному гауссовскому каналу с обратной связью, Проблемы передачи информации 3, 2 (1967), 98—101.
57. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, «Наука», М., 1970.
58. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Информационные неравенства и суперэффективные оценки, ДАН СССР 204, 6 (1972).
59. Ито (Ito K.), Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), 519—524.
60. Ито К., Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов, Математика, сб. перев. иностр. статей, 3 : 5 (1959), 131—141.
61. Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории (перев. с англ.), «Мир», М., 1968.
62. Ито, Нисио (Ito K., Nisio M.), On stationary solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 4, 1 (1964), 1—79.
63. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, «Наука», М., 1972.
64. Кадота (Kadota T. T.), Nonsingular Detection and Likelihood Ratio for Random Signals in White Gaussian Noise, IEEE Trans. Inform. Theory IT-16 (1970), 291—298.
65. Кадота, Закаи, Зив (Kadota T. T., Zakai M., Ziv I.), Mutual information of the white Gaussian channel with and without feedback, IEEE Trans. Inform. Theory IT-17, 4 (1971), 368—371.
66. Кадота, Шепп (Kadota T. T., Shepp L. A.), Conditions for the absolute continuity between a certain pair of probability measures, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 16, 3 (1970), 250—260.
67. Кайлат (Kailath T.), An innovations approach to least-squares estimation, Parts I, II, IEEE Trans. Automatic Control AC-13 (1968), 646—660.
68. Кайлат (Kailath T.), The innovations approach to detection and estimation theory, Proc. IEEE 58 (1970), 680—695.
69. Кайлат (Kailath T.), The structure of Radon — Nykodym derivatives with respect to Wiener and related measures, AMS 42 (1971), 1054—1067.
70. Кайлат, Гизи (Kailath T., Geesey R.), An innovations approach to least-squares estimation, Part IV, IEEE Trans. Automatic Control AC-16 (1971), 720—727.
71. Кайлат, Закаи (Kailath T., Zakai M.), Absolute continuity and Radon — Nykodym derivatives for certain measures relative to Wiener measure, AMS 42, 1 (1971), 130—140.

72. Калачев М. Г., Аналитический расчет стационарного фильтра Калмана — Бьюси в одной многомерной задаче фильтрации, Автоматика и телемеханика 1 (1972), 46—50.
73. Калачев М. Г., Петровский А. М., Многократное дифференцирование сигнала с ограниченным спектром, Автоматика и телемеханика 3 (1972), 28—34.
74. Каллианпур, Стрибел (Kallianpur G., Striebel C.), Estimation of stochastic systems: Arbitrary system process with additive white noise observation errors, AMS **39** (1968), 785—801.
75. Каллианпур, Стрибел (Kallianpur G., Striebel C.), Stochastic differential equations a occuring in the estimation of continuous parameter stochastic processes, Теория вероятн. и ее примен. **XIV**, 4 (1969), 597—622.
76. Калман (Kalman R. E.), A new approach to linear filtering and prediction problems, J. Basic. Engrg. 1 (1960), 35—45.
77. Калман (Kalman R. E.), Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Mexicana **5** (1960), 102—119.
78. Калман Р. Е., Бьюси Р. С., Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания (перев. с англ.), Техническая механика **83**, сер. Д, 1 (1961), 123.
79. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем (перев. с англ.), «Мир», М., 1971.
80. Камерон, Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.), Transformation of Wiener integrals under a general class of linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 184—219.
81. Камерон, Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.), Transformation of Wiener integrals by nonlinear transformation, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 253—283.
82. Кицул П. И., Нелинейная фильтрация по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений. Доклады II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления, Ташкент, сб. «Адаптация, самоорганизация», 1970, 52—57.
83. Кицул П. И., О непрерывно-дискретной фильтрации марковских процессов диффузионного типа, Автоматика и телемеханика **11** (1970), 29—37.
84. Кицул П. И., Одна задача фильтров, оптимальных в классе линейных систем, Автоматика и телемеханика **11** (1971), 46—52.
85. Кларк (Clark I. M. C.), The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, AMS **41**, 4 (1970), 1282—1295.
86. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М. — Л. 1936.
87. Колмогоров А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН СССР, сер. матем. **5**, 5 (1941).
88. Колмогоров А. Н., Теория передачи информации, Изд-во АН СССР, 1956.
89. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1968.
90. Крамер Г., Математические методы статистики (перев. с англ.), ИЛ, М., 1948.
91. Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы (перев. с англ.), «Мир», М., 1969.
92. Красовский Н. Н., Лидский Э. А., Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. III. Оптимальное регулирование в линейных системах. Минимум среднеквадратичной ошибки, Автоматика и телемеханика **11** (1961), 1425—1431.

93. Крылов Н. В., О стохастических интегральных уравнениях Ито, Теория вероятн. и ее примен. **14**, 2 (1969), 340—348.
94. Кунита (Kunita H.), Asymptotic behavior of the nonlinear filtering errors of Markov processes, J. of Multivariate Analysis **1**, 4 (1971), 365—393.
95. Кунита Х., Ватанабе Ш., О мартингалах, интегрируемых с квадратом, Математика, сб. перев. иностр. статей, **15**: 1 (1971), 66—102.
96. Курреж (Courrège Ph.), Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable, Seminaire Brelot — Choquet — Deny, 7-e annee (1962/63).
97. Курреж (Courrège Ph.), Intégrales stochastiques associées à une martingale de carré intégrable, C. R. Acad. Sci. **256** (1963), 867—870.
98. Кушнер (Kushner H. J.), On the dynamical equations of conditional probability density functions, with applications to optimal stochastic control theory, J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 332—344.
99. Кушнер (Kushner H. J.), Dynamical equations for optimal nonlinear filtering, J. Differential Equations **3** (1967), 179—190.
100. Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, «Наука», М., 1972.
101. Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, «Сов. радио», М. кн. 1, 1966, кн. 2, 1968.
102. Леман Э., Проверка статистических гипотез, «Наука», М., 1964.
103. Леонов В. П., Ширяев А. Н., К технике вычисления семиинвариантов, Теория вероятн. и ее примен. **IV**, 2 (1959), 342—355.
104 Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов. I—IV, Автоматика и телемеханика **4** (1960), 436—441, **5** (1960), 561—568, **6** (1960), 661—665, **4** (1961), 425—435.
105 Ли Р., Оптимальные оценки, определение характеристик и управление (перев. с англ.), «Наука», М., 1966.
106 Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, «Наука», М., 1966
107. Липцер Р. Ш., Сравнение нелинейной и линейной фильтрации некоторых марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. **XI**, 3 (1966), 528—533.
108 Липцер Р. Ш., О фильтрации и экстраполяции компонент диффузионных марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. XII, 4 (1967), 764—765.
109 Липцер Р. Ш., Об экстраполяции и фильтрации некоторых марковских процессов. I, Кибернетика **3** (1968), 63—70.
110. Липцер Р. Ш., Об экстраполяции и фильтрации некоторых марковских процессов. II, Кибернетика **6** (1968), 70—76.
111. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **104** (1968), 135—180.
112. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., О фильтрации, интерполяции и экстраполяции диффузионных марковских процессов по неполным данным. Теория вероятн. и ее примен. **XIII**, **3** (1968), 569—570.
113. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Экстраполяция многомерных марковских процессов по неполным данным, Теория вероятн. и ее примен. **XIII**, 1 (1968), 17—38.
114. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., О случаях эффективного решения задач оптимальной нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции, Теория вероятн. и ее примен. **XIII**, 3 (1968), 570—571.
115. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Нелинейная интерполяция компонент диффузионных марковских процессов (прямые уравнения, эффективные формулы), Теория вероятн. и ее примен. **XIII**, 4 (1968), 602—620.
116. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Интерполяция и фильтрация скачкообразной компоненты марковского процесса, Изв. АН СССР, сер. матем. **33**, 4 (1969), 901—914.

117. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., О плотности вероятностных мер процессов диффузионного типа, Изв. АН СССР, сер. матем. **33**, 5 (1969), 1120—1131.
118. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской, Изв. АН СССР, сер. матем. **36**, 4 (1972), 874—889.
119. Липцер, Ширяев (Liptser R. S., Shiryayev A. N.), Statistics of conditionally Gaussian random sequences, Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability (1970), Vol. II, Univ. of Calif. Press, 1972, 389—422.
120. Лоэв М., Теория вероятностей (перев. с англ.), ИЛ, М., 1962.
121. Лэден (Laidain M.), Test entre deux hypotheses pour un processus defini par une equation differentielle stochastique, Rev. Cethedec **8**, 26 (1971), 111—121.
122. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления (перев. с англ.), ИЛ, М., 1958.
123. Маккин Г., Стохастические интегралы (перев. с англ.), «Мир», М., 1972.
124. Марсаглиа (Marsaglia G.), Conditional means and covariance of normal variables with singular covariance matrix, J. Amer. Statist. Assoc. **59**, 308 (1964), 1203—1204.
125. Медич (Meditch J. S.), Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, N. Y., 1969.
126. Мейер (Meyer P. A.), Probabilités et potentiel, Herman, Paris, 1966.
127. Нахи (Nahi N. E.), Estimation theory and applications, J. Wiley & Sons, N. Y., 1969.
128. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, «Наука», М., 1972.
129. Невё Ж., Математические основы теории вероятностей (перев. с англ.), «Мир», М., 1969.
130. Невё (Neveu J.), Martingales, Notes partielles d'un course de 3ème cycle, Paris, 1970—1971.
131. Новиков А. А., Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов, Теория вероятн. и ее примен. **XVI**, 2 (1971), 394—396.
132. Новиков А. А., О моментах остановки винеровского процесса, Теория вероятн. и ее примен. **XVI**, 3 (1971), 548—550.
133. Новиков А. А., Об одном тождестве для стохастических интегралов, Теория вероятн. и ее примен. **XVII**, 4 (1972), 761—765.
134. Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятн. и ее примен. **I**, 2 (1956), 177—238.
135. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы, «Наука», М., 1967.
136. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1962.
137. Рао (Rao C. M.), On decomposition theorems of Meyer, Math. Scandinavica **24**, 1 (1969), 66—78.
138. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения (перев. с англ.), «Наука», М., 1968.
139. Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, Физматгиз, М., 1963.
140. Розовский Б. Л., Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в задачах нелинейной фильтрации, УМН **XXVII**, 3 (1972), 213—214.

141. Розовский Б. Л., Ширяев А. Н., О бесконечных системах стохастических дифференциальных уравнений, возникающих в теории оптимальной нелинейной фильтрации, Теория вероятн. и ее примен. **XVII**, 2 (1972), 228—237.
142. Рюмгаарт (Ruymgaart P. A.), A note of the integral-representation of the Kalman — Bucy estimate, Indag. Math. **33**, 4 (1971), 346—360.
143. Сигмунд, Роббинс, Вендель (Siegmund D., Robbins H., Wendel J.), The limiting distribution of the last time $S_n \geqslant n\varepsilon$, Proc. Nat. Acad. Sci. **62**, 1 (1968).
144. Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киев. ун-та, 1961.
145. Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., изд-во «Наука», 1964.
146. Стратонович Р. Л., Условные процессы Маркова, Теория вероятн. и ее примен. **V**, 2 (1960), 172—195.
147. Стратонович Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, Изд-во МГУ, 1966.
148. Стрибел (Striebel C. T.), Partial differential equations for the conditional distribution of a Markov process given noisy observations, J. Math. Anal. Appl. **11** (1965), 151—159.
149. Тихонов А. Н., Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений, ЖВМ и МФ **5**, 4 (1965), 718—722.
150. Турин Дж., Лекции о цифровой связи (перев. с англ.), «Мир», М., 1972.
151. Уиттл (Whittle P.), Prediction and regulation, London, 1963.
152. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, «Наука», М., 1966.
153. Фергюсон (Ferguson T. S.), Mathematical statistics, Academic Press, N. Y., 1967.
154. Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа (перев. с англ.), «Мир», М., 1968.
155. Фрост, Кайлат (Frost P., Kailatt T.), An innovations approach to least-squares estimation, Part III, IEEE Trans Automatic Control **AC-16** (1971), 217—226.
156. Фуджисаки, Каллианпур, Кунита (Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H.), Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, Osaka J. Math. **9**, 1 (1972), 19—40. (Русск. перев.: Математика, сб. перев. иностр. статей, **17** : 2 (1973), 108—128.)
157. Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, «Наука», М., 1969.
158. Хитсуда (Hitsuda M.), Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener processes, Osaka J. Math. **5** (1968), 299—312.
159. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, «Наука», М., 1968.
160. Чао, Роббинс, Сигмунд (Chow Y. S., Robbins H., Siegmund D.), Great expectations: The theory of optimal stopping, Houghton Mifflin Company Boston, 1971.
161. Шалквик, Кайлат (Shalkwijk J. P. M., Kailath T.), A coding scheme for additive noise channels with feedback, Part I, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-12** (1966), 172—182.
162. Шаташвили А. Д., Нелинейная фильтрация для решения некоторых стохастических дифференциальных уравнений, Кибернетика **3** (1970), 97—102.
163. Шепп (Shepp L. A.), Radon — Nykodym derivatives of Gaussian measures, AMS **37** (1966), 321—354.

164. Ширяев А. Н., Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I, Теория вероятн. и ее примен. **V**, 3 (1960), 293—313.
165. Ширяев А. Н., О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов, Теория вероятн. и ее примен. **XI**, 1 (1966), 200—206.
166. Ширяев А. Н., Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов, Проблемы передачи информации **II**, 3 (1966), 3—22.
167. Ширяев А. Н., Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов, Trans. 4th Prague Confer. Inform. Theory (1965), Prague, 1967, 131—203.
168. Ширяев А. Н., Исследования по статистическому последовательному анализу, Матем. заметки **3**, 6 (1968), 739—754.
169. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, «Наука», М., 1969.
170. Ширяев (Shiryayev A. N.), Sur les équations stochastiques aux dérivées partielles, Actes Congrès Intern. Math., 1970.
171. Ширяев (Shiryayev A. N.), Statistics of diffusion type processes, Proc. Second Japan — USSR Sympos. Probab. Theory, **I** (1971), 69—87.
172. Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН **7**, 5 (1952), 3—168.
173. Язвинский (Jazwinski A. H.), Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, N. Y., 1970.
174. Ямада, Ватанабе (Yamada T., Watanabe Sh.), On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. **11**, 1 (1971), 155—167.
175. Яшин А. И., Фильтрация скачкообразного марковского процесса с неизвестными вероятностными характеристиками при аддитивной помехе, Автоматика и телемеханика **12** (1968), 25—30.
176. Яшин А. И., О выделении скачкообразно меняющихся параметров многомерных процессов, Автоматика и телемеханика **10** (1969), 60—67.