

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

В. Н. Брюшинкин  
Н. А. Ходикова

ТЕОРИЯ ПОИСКА ВЫВОДА  
ПРОИСХОЖДЕНИЕ  
И ФИЛОСОФСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Издательство  
Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта  
2012

УДК 16(091):167:510.66  
ББК 22.12  
Б898

*Рецензенты*

*А. С. Карпенко*, доктор философских наук, профессор  
заведующий сектором логики Института философии РАН  
*Е. Г. Драгалина-Чёрная*, доктор философских наук,  
профессор кафедры онтологии, логики и теории познания  
Государственного университета — Высшая школа экономики

**Брюшинкин В. Н., Ходикова Н. А.**

Б898 Теория поиска вывода. Происхождение и философские приложения : монография. Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта, 2012. — 166 с. — (Серия «Библиотека электронного журнала "РАЦИО.ru"»; вып. 6).  
ISBN 978-5-9971-0222-7

Проведена историко-логическая реконструкция происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств на основе поризматической модели происхождения научных теорий, предложенной Б.С. Грязновым. Рассмотрены философские приложения теории поиска вывода.

Книга адресована специалистам по логике, методологии науки, искусственному интеллекту.

*Публикуется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-06-07105д.*

УДК 16(091):167:510.66  
ББК 22.12

ISBN 978-5-9971-0222-7

© Брюшинкин В. Н.,  
Ходикова Н. А., 2012  
© Балтийский федеральный  
университет им. И. Канта, 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Введение</b> .....	7
<b>Глава 1. Понятие поризма и его роль в рациональной реконструкции происхождения научной теории</b> .....	12
§ 1. История логики и рациональная реконструкция развития науки .....	12
§ 2. Б. С. Грязнов о рациональной реконструкции развития науки .....	19
§ 3. Поризматическая модель происхождения научной теории и ее значение для логики и математики .....	23
<b>Глава 2. Гильбертовская теория доказательств: непротиворечивость и подформульность</b> .....	32
§ 1. Гильбертовская теория доказательств и непротиворечивость .....	32
§ 2. Генценовское доказательство непротиворечивости: подформульность как поризм .....	46
§ 3. Использование свойства подформульности в теоретической логике: таблицы Бета и модельные множества Хинтики .....	57
<b>Глава 3. Автоматическое доказательство логико-математических теорем и формализация эвристик</b> .....	63
§ 1. Ранняя история автоматического доказательства: программа «Логик-теоретик» .....	63
§ 2. Применение секвенциальных исчислений: процедура Хао Вана .....	70
§ 3. Идея метапеременности в процедуре Кангера .....	76
§ 4. Автоматическое доказательство теорем: методы, основанные на теореме Эрбрана и метод резолюций .....	80
§ 5. Обратный метод .....	85

<b>Глава 4. Теория поиска вывода и ее происхождение из теории доказательств</b> .....	93
§ 1. Логические алгоритмы и эвристики: подход О. Ф. Серебрянникова .....	93
§ 2. Теория поиска вывода: подход С. Ю. Маслова .....	100
§ 3. Приложения теории поиска вывода в психологии и философии логики .....	115
§ 4. Рациональная реконструкция происхождения теории поиска вывода в свете поризматической модели возникновения научных теорий.....	142
<b>Заключение</b> .....	155
<b>Список литературы</b> .....	158

*Светлой памяти  
Бориса Семеновича Грязнова*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная идея этой книги возникла у меня еще в конце 80-х гг. прошлого века и была кратко описана в тезисах доклада на конференции «Современная логика» в Санкт-Петербурге в 1990 году<sup>1</sup>. Происхождение ее связано, с одной стороны, с личными биографическими обстоятельствами, а с другой — с развитием моих научных интересов, имеющих отношение к философским приложениям теории поиска вывода. Личные обстоятельства — то огромное влияние, которое оказали на меня (и моих сокурсников, а теперь коллег, И. Н. Грифцову, Г. В. Сорину и др.) личность Бориса Семеновича Грязнова и развиваемые им методологические концепции. В 1976 году Борис Семенович в МГУ читал нам что-то вроде спецкурса по методологии науки, как тогда говорили, «на общественных началах». Хорошо помню глубокое впечатление, которое произвела на нас лекция «про поризмы», содержащая уже готовую концепцию. Впоследствии Б. С. Грязнов опубликовал свою статью «О взаимоотношении проблем и теорий»<sup>2</sup>, содержащую модель развития науки, потенциал которой до сих пор еще не раскрыт. Нервом этой концепции была идея рацио-

---

<sup>1</sup> *Брюшинкин В. Н.* О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке : сб. науч. тр. / под. ред. А. Я. Слиннина. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та. 1990. С. 17—18.

<sup>2</sup> *Грязнов Б. С.* О взаимоотношении проблем и теорий // Природа. 1977. №4. С. 17—26.

нального объяснения смены теорий в математике и физике на основе понятия поризма (неожиданного следствия), введенного еще древнегреческими математиками. В памяти сохранилось впечатление элегантности этой конструкции, мастерски представленной в лекции Бориса Семеновича. Исследование происхождения теории поиска вывода в логике оказалось богатным материалом для применения методологической схемы Грязнова, которая помогла упорядочить разнообразные историко-научные данные. Н. А. Ходикова выполнила огромную работу по собиранию и анализу источников и осуществлению идеи реконструкции происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств. Мне представляется, что получившаяся в результате книга — первое исследование по *теоретической* истории логики, то есть по такой реконструкции истории, которая, с одной стороны, осознанно ведется с точки зрения точно построенной общей теоретической схемы, а с другой — основывается не на анализе развития идей и понятий, а на соотношении логических теорий, что представляет собой новый шаг в развитии методологии историко-логических исследований.

В заключение мне хотелось высказать мою благодарность Анатолию Пушкарскому, который сделал много для того, чтобы эта книга вышла в свет.

*В. Н. Брюшинкин*

## ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена рациональной реконструкции истории логики. В применении к нашей науке и нашей теме понятие рациональной реконструкции вроде бы тривиально. Что может быть рациональнее, чем логика? И, соответственно, что может быть рациональнее, чем развитие логики? Однако развитие всегда таит в себе иррациональный элемент, по крайней мере в плане зарождения идей. И если мы представляем историю как зарождение и развитие идей, то добиться ее рациональной реконструкции трудно, если не невозможно. В тех внешних для науки социальных и психологических факторах, которые сопровождают появление идей, трудно дать рациональный отчет. Однако, если дело действительно обстоит так, не проще ли признать, что развитие науки (даже логики) — процесс не вполне рациональный, и поэтому его рациональная реконструкция только исказит истинный облик истории. Проблема последнего высказывания состоит в слове «действительно». История науки — это «действительно» история идей или «идея» — это продукт выбора самого историка, задающий перспективу рассмотрения?

Долгое время историко-научные исследования представляли собой по преимуществу биографии великих ученых с подробным описанием их достижений и ошибок. Основой изложения служила хронология, и молчаливо предполагалось, что такой порядок компоновки материала сам по себе обеспечивает отображение внутренней логики развития научной мысли. Таким образом, история науки представлялась как история идей и людей. Вместе с тем до 30-х годов XX века в исследованиях по методологии науки преобладали проблемы, связан-

ные с анализом понятийного аппарата науки, схем обоснования знания, структуры теорий, логики индуктивного и дедуктивного вывода, эмпирического содержания теоретического знания. Вопросы изучения закономерной смены теорий, особенностей развития научного знания впервые отчетливо выдвигается на первый план в работах Карла Поппера. В дальнейшем, как известно, его идеи рациональной реконструкции развития научных теорий были развиты и пересмотрены в методологических концепциях Т. Куна, И. Лакатоса, П. Фейерабенда, Дж. Агасси и др.

Б. С. Грязнов (1929—1978) на основании критического анализа постпозитивистских методологических концепций и историко-научного материала в 70-х годах XX века разработал оригинальную модель происхождения научных теорий. Ключевым понятием этой модели является понятие «поризм». На естественнонаучном (и частично математическом) материале Грязнов показал, что непредвиденное следствие, полученное в ходе решения задачи в рамках имеющейся теории, при выполнении определенных условий может привести к появлению новой. Истолкование ядра новой теории как логического, но тем не менее неожиданного, непредвиденного следствия предыдущей открывает путь к построению по-настоящему рациональной реконструкции происхождения новой научной теории.

В истории и методологии науки XX века был совершен поворот от рассмотрения развития науки как истории идей и людей к ее трактовке как последовательной смены теорий (или более общих единиц развития знания, таких, как парадигмы или научно-исследовательские программы). Мы предлагаем совершить такой же поворот по отношению к истории логики на основе модели развития науки, предложенной Б. С. Грязновым.

Если говорить об истории логики, то в отличие от стандартных механизмов реконструкции развития научного знания, разработанных в методологии науки XX века, в данной дисциплине до сих пор не идет речь о логических теориях, их преемственности и смене. История логики обычно представляется либо как хронологическая последовательность работ

различных логиков, либо, в лучшем случае, как развитие некоторых идей или представлений о правильности рассуждений и способов их формализации<sup>1</sup>. В связи с этим актуальной является проблема такого представления истории логики, которое соответствовало бы общенаучным методологическим концепциям, выработанным в XX веке<sup>2</sup>.

В этой книге рассматривается вопрос о происхождении одной из сравнительно молодых логических теорий (появившейся в 70-х годах XX века) — *теории поиска вывода*. Область исследования, связанная с автоматическим поиском доказательств в логико-математических исчислениях, явно представлена в работах Сергея Юрьевича Маслова (1939—1982). С.Ю. Маслов определял теорию поиска вывода как область математической логики, занимающуюся «выявлением по исчислению и объекту в языке исчисления структуры возможных выводов этого объекта»<sup>3</sup>. Теория поиска вывода является пограничной дисциплиной комплекса «computer science» — стоит на стыке логики, психологии и эвристики. Поэтому помимо активного практического применения она находит интересные теоретические приложения в философии<sup>4</sup> и психологии творчества<sup>5</sup>. Применение поризматической модели развития научного знания к возникновению теории поиска вывода позволит более полно осмыслить особенности основных идей

---

<sup>1</sup> *Kneale W., Kneale M. The Development of Logic. Oxford : Oxford University Press, 1964. P. V.*

<sup>2</sup> Вопрос о методологии истории логики будет рассмотрен полнее в 1-й главе книги.

<sup>3</sup> *Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. М. : Радио и связь, 1986. С. 93.*

<sup>4</sup> *Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.*

<sup>5</sup> *Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. М. : Радио и связь, 1986; Его же. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семиотика и информатика. М., 1979. Вып. 13. С. 17—46.*

и методов этой теории, очертить круг решаемых в ней задач. Вместе с тем успешное решение задачи представления возникновения одной логической теории на основе другой (теории поиска вывода на основе гильбертовской теории доказательств) порождает новый взгляд на историю логики вообще — как на историю смены и преемственности теорий.

Основные положения теории поиска вывода были сформулированы С. Ю. Масловым в его работах 1970-х годов<sup>1</sup>. Отдельные аспекты данной теории и ее приложений разрабатывались нами<sup>2</sup> и С. Л. Катречко<sup>3</sup>. Однако нельзя сказать, что в исследовательской литературе в последние десятилетия ей уделялось много внимания именно *как теории*. Скорее, развивалась проблематика практической применимости поиска доказательств в логико-математических исчислениях.

В намерения авторов этой книги входит рассмотрение двух важных этапов развития логики в XX веке — гильбертовской теории доказательств и теории поиска вывода — как *теорий* и применение к ним подхода к смене научных теорий, выработанного в общей методологии наук. Работы Б. С. Грязнова<sup>4</sup> внесли значительный и оригинальный вклад в исследование сущности научной теории, ее предметной области и объекта, в закономерности ее функционирования как сложной системы. Следствием общих методологических установок Грязнова стала его оригинальная поризматическая<sup>5</sup> модель происхождения

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. М. : Радио и связь, 1986; *Его же*. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семиотика и информатика. М., 1979. Вып. 13. С. 17—46.

<sup>2</sup> Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1988; *Его же*. О методологическом значении различения понятий «вывод» и «поиск вывода» // Философские науки. 1984. № 4. С. 49—54.

<sup>3</sup> Катречко С. Л. Логический анализ интеллектуальных систем с метапроцедурами : дис. ... канд. филос. наук. М., 1992.

<sup>4</sup> Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. М. : Наука, 1982.

<sup>5</sup> Этого слова нет в работах Б. С. Грязнова, но, по нашему мнению, оно вполне подходит для названия предложенной им модели.

---

научных теорий. Применимость этой модели к возникновению одних естественнонаучных теорий на базе других демонстрируется в работах ученого на убедительных примерах. Однако о возможности приложения своей модели к математическому знанию Грязнов замечает вскользь, упоминая непредвиденное, но вполне закономерное появление в математике отрицательных и комплексных чисел. Что касается логических теорий, то применение этой модели к их возникновению он не рассматривал вовсе. И как мы уже отметили, вопрос о смене теорий в логике с общих методологических позиций в историко-логических исследованиях практически не рассматривался. Пожалуй, исключение составляет подход Е. К. Войшвилло к происхождению релевантной логики из классической логики (высказываний или предикатов) за счет уточнения понятия логического следования для формул языка классической логики<sup>1</sup>. Идея о возможности использования поризматической модели Грязнова для реконструкции возникновения теорий в логике, в частности теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств, была впервые изложена в работе одного из авторов данной книги<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> *Войшвилло Е. К.* Релевантная логика как этап развития символической логики. Ее философско-методологическое значение // Гуманитарная наука в России: соросовские лауреаты. М., 1996. С. 14—29.

<sup>2</sup> *Брюшинкин В. Н.* О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке. С. 17—18.

## Глава 1

---

### ПОНЯТИЕ ПОРИЗМА И ЕГО РОЛЬ В РАЦИОНАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРОИСХОЖДЕНИЯ НАУЧНОЙ ТЕОРИИ\*

#### §1. История логики и рациональная реконструкция развития науки

И. Кант в конце XVIII века сформулировал концепцию неизменности логики: «Со времен Аристотеля ей [логике] не приходилось сделать ни одного шага назад... замечательно, что логика до сих пор не могла также сделать ни одного шага вперед и, по-видимому, имеет совершенно замкнутый, законченный характер»<sup>1</sup>. Развитие логической науки опровергло это положение Канта. В середине XIX века логика претерпела революционные изменения, настолько важные, что Б. Рассел в своей «Истории западной философии» назвал силлогистику Аристотеля «не имеющей большого значения»<sup>2</sup>. Два-

---

\* Данная глава содержит результаты исследования, выполненного при финансовой поддержке РГНФ, проект № 10-03-00745а «Логика в России: спор А. И. Введенского и Н. О. Лосского».

<sup>1</sup> *Кант И.* Критика чистого разума / пер. с нем. Н. О. Лосского. М. : Наука, 1998. С. 30.

<sup>2</sup> «...доктрины Аристотеля... полностью ложны за исключением формальной теории силлогизма, не имеющей большого значения. В наши дни любой человек, который захотел бы изучать логику, потратил бы зря время, если бы стал читать Аристотеля или кого-либо из его учеников» (*Рассел Б.* История западной философии и ее связи с политическими и социальными условиями от Античности до наших дней : в 3 кн. М. : Акад. проект, 2000. С. 199).

дцатый век отчетливо показал, что логика развивается. Наряду с классической возникают различные неклассические логики: модальные, временные, немонотонные, паранепротиворечивые. Символическая логика нашла плодотворное применение в программировании и решении задач искусственного интеллекта. В XX веке логика стала дифференцированной, бурно развивающейся научной дисциплиной, достигшей высокого теоретического уровня.

Иное положение наблюдается в отношении истории науки и ее методологии. Чаще всего история логики трактуется как история разработки некоторых идей или представлений и различных попыток их формализации. Например, в широко известной оксфордской работе по истории логики ее авторы У. и М. Нил ставят задачу показать «развитие (growth) логики вместо того, чтобы попытаться хронологически описать все то, что хорошие и плохие ученые прошлого говорили об этой науке»<sup>1</sup>. Однако это развитие они понимают как историю *представлений* о правильности рассуждений (validity of arguments) и попыток их формализации. Таким же образом понимает развитие логики и крупнейший российский историк логики Н. И. Стяжкин: «Настоящая книга посвящена вопросу формирования учений математической логики и охватывает период от древних времен до начала XX века включительно. <...> Между тем изучение генезиса этих *идей* представляет интерес, например, со следующих точек зрения: 1. Выяснение влияния логических *идей* мыслителей, предвосхитивших ряд концепций математической логики, на их собственные методологические взгляды, а также на философские концепции их современников. <...> 4. Выявление объема тех *идей* основоположников символической логики, которые продолжают и поныне сохранять интерес и актуальность для современных исследований в области оснований математики, а также формальной логики

---

<sup>1</sup> Kneale W., Kneale M. The Development of Logic. Oxford: Oxford University Press. 1964. P. V.

и ее приложений»<sup>1</sup>. О таком же подходе к истории логики говорят даже названия книг: *Попович М. В.* Очерк развития логических идей в культурно-историческом контексте. Киев: Наукова думка, 1979.; *Попов П. С., Стяжкин Н. И.* Развитие логических идей от Античности до эпохи Возрождения. М.: Изд-во МГУ, 1974. Подобный подход принимается и в учебном пособии по истории логики под редакцией В. Ф. Беркова и Я. С. Яскевич: «Результаты исследований по истории логики являются важной составной частью современных философских и методологических знаний. Освещая генезис и функционирование логических *идей*, они помогают лучше понять как общую картину развития человеческой культуры, так и ее отдельные проявления и этапы»<sup>2</sup>.

В последние пару десятилетий в отечественной логической традиции стали появляться исследования, основанные на понятии «образ логики», введенном И. Н. Грифцовой<sup>3</sup>. С точки зрения ученого, «образ логики — это восприятие научным сообществом состава логики и ее теоретической и практической роли в науке и культуре»<sup>4</sup>. Такой подход предполагает выделение основных характеристик образа логики для конкретных историко-логических исследований. Эти характеристики были уточнены В. С. Поповой, согласно которой в образ логики также входят «тип логики, философские установки, приложения логики, связь логики с мышлением, трактовка логических законов, степень отрефлексированности логической концепции и ее оснований»<sup>5</sup>. А. Г. Пушкарский, анализируя выделенные

---

<sup>1</sup> *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. С. 5 (Курсив наш. — *В. Б., Н. В.*).

<sup>2</sup> *История логики* / под ред. В. Ф. Беркова, Я. С. Яскевич. Минск: Новое знание, 2001. С. 3 (Курсив наш. — *В. Б., Н. В.*).

<sup>3</sup> *Грифцова И. Н.* Логика как теоретическая и практическая дисциплина. К вопросу о соотношении формальной и неформальной логики. М.: Эдиториал УРСС, 1998. С. 15—18.

<sup>4</sup> *Там же.* С. 15.

<sup>5</sup> *Попова В. С.* Спор о логике в университетской философии Санкт-Петербурга начала XX века. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2010. С. 106.

характеристики, предлагает добавить к их числу концепции предмета логики, или, иначе говоря, представления о природе логического<sup>1</sup>. В исследованиях, основанных на понятии образа логики, появляются новые способы представления истории логики: нелинейный<sup>2</sup>, синтетический, плюралистический<sup>3</sup>. «Образная» методология представляет собой способ представления дисциплины в целом, позволяя выделять различные, иногда несовместимые, пути развития логики. И в этом ее ценность. «Образ логики» позволяет систематизировать историко-логический материал различными способами, но внутри каждого из которых переход от одной концепции к другой определяется временной последовательностью. К числу попыток глобального упорядочивания историко-логического материала относится и концепция А. Н. Шумана<sup>4</sup>. Он выделяет три основные логические парадигмы, а именно традиционную, трансцендентальную и аналитическую, которые последовательно сменяют друг друга как исторические этапы развития логики. Такой «парадигмальный» подход также не ориентирован на описание перехода между логическими теориями. Значительный вклад в разработку методологии истории логики вносят работы В. А. Бажанова. Правда, его методологические взгляды проявляются, скорее, в конкретных исторических исследованиях<sup>5</sup>. В своем докладе на «Шестых Смирновских чте-

---

<sup>1</sup> Пушкарский А. Г. Методология истории логики: синтетический подход // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. Вып. 6. С. 27. См. также: *Его же*. О методологии истории логики // Модели рассуждений — 2: Аргументация и рациональность : сб. науч. ст. / под общ. ред. В. Н. Брюшинкина. Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. С. 204—213.

<sup>2</sup> Попова В. С. Указ. соч. С. 6.

<sup>3</sup> Пушкарский А. Г. Методология истории логики: синтетический подход. С. 25—34.

<sup>4</sup> Шуман А. Н. Философская логика: Истоки и эволюция. Минск : Экономпресс, 2001.

<sup>5</sup> Бажанов В. А. Николай Александрович Васильев (1880—1940). М. : Наука, 1988; *Его же*. История логики в России и СССР (Концептуальный контекст университетской философии). М. : Канон+, 2007.

ниях» (2009 год) В. А. Бажанов отмечает: «...методологический аспект историко-логических исследований по существу не нашел сколько-нибудь полного освещения в известной мне литературе»<sup>1</sup>. Существенно также его замечание о том, что в историко-логических исследованиях «речь идет не о механизмах конструкции, а о механизмах реконструкции реального историко-логического процесса»<sup>2</sup>. Вместе с тем, говоря о реальных исследованиях в этой области, В. А. Бажанов выражает ту же установку на рассмотрение истории идей<sup>3</sup>, а не теорий.

Е. К. Войшвилло рассматривает переход от классической к релевантной логике как продвижение от одного этапа развития науки к другому: «...релевантную логику вернее было бы характеризовать не как особое направление, но как некоторый новый этап в развитии логики»<sup>4</sup>. Однако здесь мы также не имеем дела со сменой и преемственностью теорий, как это принято в общей методологии науки. По Войшвилло, класси-

---

<sup>1</sup> Бажанов В. А. О методологическом аспекте историко-логических исследований // Шестые Смирновские чтения : матер. Междунар. науч. конф. Москва, 17—19 июня 2009 г. М. : Современные тетради, 2009. С. 117. Справедливости ради, надо заметить, что проблема методологии историко-логических исследований в нашей литературе к тому времени уже была поставлена А. Г. Пушкарским (Пушкарский А. Г. О методологии истории логики // Модели рассуждений — 2: Аргументация и рациональность : сб. науч. ст. / под общ. ред. В. Н. Брюшинкина. Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. С. 204—213).

<sup>2</sup> Бажанов В. А. О методологическом аспекте историко-логических исследований. С. 118.

<sup>3</sup> «...на поверхность исследования извлекаются более четкие и определенные закономерности развития этих идей. <...> Здесь закономерности развития идей затушевываются... зато более рельефно могут быть прослежены те или иные детали реального исследования» (Бажанов В. А. О методологическом аспекте историко-логических исследований. С. 118).

<sup>4</sup> Войшвилло Е. К. Символическая логика: Классическая и релевантная. Философско-методологические аспекты. М. : Высшая школа, 1989. С. 90.

ческие и релевантные логические системы — это различные классы ответов на один и тот же вопрос о природе логического следования, релевантная логика принимает во внимание содержание высказываний при установлении логического следования, а классическая нет. В этом смысле релевантная логика — просто более полное уточнение понятия логического следования.

Вместе с тем в современной металогике имеются исследования взаимоотношений между логическими теориями, основанными на различных способах членения выражений языка, таких, как аристотелевская силлогистика, онтология Лесневского, классическое исчисление предикатов. Рассматриваются операции, погружающие одну систему в другую, доказываются различные виды эквивалентности систем<sup>1</sup>. Однако в этих исследованиях не идет речь о способах возникновения одной логической теории на основании более ранней. Логические и математические теории обычно идеализированно трактуются как множества предложений, замкнутые относительно выводимости. Для анализа других теорий (в первую очередь, естественнонаучных) их полезно переформулировать в прикладных логических языках с точным синтаксисом и семантикой, но при этом «должны быть учтены дополнительные факторы, связанные с эмпирической интерпретацией и применением»<sup>2</sup>. Неинтерпретированные логические исчисления составляют основу аппарата вывода производных утверждений теории, но сами не являются научными теориями в полном смысле. Ви-

---

<sup>1</sup> Подробнее см.: *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М. : Наука, 1987. С. 141—192; *Бочаров В. А.* Аристотель и традиционная логика. Анализ силлогистических теорий. М. : Изд-во МГУ, 1984; *Субботин А. Л.* Традиционная и современная формальная логика. М. : Наука, 1969; *Маркин В. И.* Современные силлогистические теории. М. : Изд-во МГУ, 1991; *Бочаров В. А., Маркин В. И.* Силлогистические теории. М. : Прогресс-Традиция, 2010.

<sup>2</sup> *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М. : Наука, 1987. С. 4.

димо, с отсутствием в логических теориях «эмпирического» наполнения и связаны определенные трудности в представлении истории логики как смены и преемственности теорий.

В отличие от стандартных механизмов развития науки, разработанных в методологии науки XX века, в истории логики не идет речь о логических теориях, их смене и преемственности. В этом смысле история логики не приобрела теоретического характера, и методологии истории логики еще нужно пройти ту фазу развития, которая была успешно преодолена методологией истории науки в XX веке, когда в постпозитивистской философии науки были построены модели развития научных теорий и поставлена проблема рациональной реконструкции истории науки.

Однако определенные возможности для рассмотрения «теоретической» истории логики появились в металогических исследованиях XX века. В его начале в связи с кризисом математики возникла гильбертовская теория доказательств (метаматематика), в рамках которой была поставлена задача формализации математики. Теория доказательств представляет собой метауровневую содержательную теорию о формальных системах и доказательствах в них. В связи с этим теория доказательств демонстрирует определенное сходство со стандартным понятием научной теории, как оно используется в методологии науки. Это дает нам возможность применить к ней аппарат, выработанный в методологических учениях XX века. Вместе с тем в 1970-х годах в логике возникла теория поиска вывода, основные положения которой сформулированы в работах С.Ю. Маслова. Ее проблематика связана с гильбертовской теорией доказательств, что позволяет нам поставить вопрос о соотношении этих теорий и их преемственности. В методологии науки XX века был предложен ряд моделей развития научного знания (К. Поппер, И. Лакатос, Т. Кун, Дж. Агасси, Е.К. Войшвилло). В основном они были сформулированы на основании исследования истории науки и исходя из общих методологических соображений. На базе критического анализа

постпозитивистских концепций развития научного знания Б. С. Грязновым выработана модель происхождения новой теории в результате получения непредвиденного промежуточного утверждения (поризма) в ходе решения задач в рамках существующей теории (мы будем называть такую концепцию *поризматической моделью*). Для нашего исследования важно также, что основное понятие этой модели — *поризм* — было заимствовано из методологии дедуктивных наук, что облегчает ее приложение к развитию логических теорий. Предлагаемый в книге подход показывает, что историю логики (по крайней мере один из ее этапов, связанный с возникновением теории поиска вывода) можно представить как историю преемственности теорий, в противоположность традиционной трактовке науки как истории разработки идей.

## § 2. Б. С. Грязнов о рациональной реконструкции развития науки

Цель настоящего параграфа — рассмотрение понятия рациональности знания и ответ на вопрос, как возможна рациональная реконструкция развития научного знания.

Говоря о науке, следует помнить, что, будучи элементом сложной социальной системы, она, в свою очередь, сама обладает свойствами целостности и системности. Один из ее аспектов, наряду с институциональной, организационной, экономической, психологической сторонами, — ее представление как системы саморазвивающегося знания. Исследование науки с этой точки зрения требует осуществления системного и структурного подходов, поскольку «элемент системы, не являясь сам системой, развиваться не может»<sup>1</sup>. В качестве основных элементов системной модели научного знания Грязнов

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Наука как саморазвивающаяся система // Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 99.

выделяет язык науки и его интерпретацию, а взаимодействие между ними рассматривает как некоторое согласование. В таком случае развитие научного знания можно представить как результат взаимодействия этих структурных элементов. Точнее, «развитие научного знания является результатом установления отношения согласования [между языком и интерпретацией], а причиной этого процесса — возникающее и разрешающееся рассогласование»<sup>1</sup>. Для ответа на вопрос о происхождении этих рассогласований Грязнов предлагает рассматривать язык и интерпретацию не просто как элементы системы «наука», но как самостоятельные системы, обладающие сложной структурой. Он отмечает, что, если достаточно адекватным способом анализа языка выступает логико-математический метод, сферу интерпретации исследовать труднее. Тем не менее понятие интерпретации существенно для понимания механизмов развития науки и других форм человеческой деятельности. Так, Л. А. Микешина, исследуя развитие познавательной деятельности человека в целом, заключает, что «признание фундаментальности интерпретативной деятельности субъекта... одна из основных черт новой парадигмы познания»<sup>2</sup>, в рамках которой возможно «пересмотреть само понимание эпистемологии и теории познания»<sup>3</sup>. Для построения концепции рациональной реконструкции истории науки Грязнов полагает целесообразным рассматривать интерпретацию как «причинно-следственную структуру». В силу определенной самостоятельности функционирования и развития языка и интерпретации может оказаться, что процессы в сфере языка (происходящие строго по законам данной области) со временем приводят к результатам, не согласующимся с областью интерпретации. В качестве примера приводится возникнове-

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Наука как саморазвивающаяся система. С. 100.

<sup>2</sup> Микешина Л. А. Философия познания. Полемиические главы. М. : Прогресс-Традиция, 2002. С. 377.

<sup>3</sup> Там же.

ние отрицательных и комплексных чисел, постоянной Планка и других явлений, которые возникли в науке как чисто языковые образования, полученные в языке вполне законным образом, но не имеющие в момент появления соответствующей интерпретации. Необходимость изменения интерпретации таким образом, чтобы вновь возникшие языковые конструкции получили смысл, ведет к таким переменам в науке, которые можно рассматривать как научную революцию<sup>1</sup>.

Один из важнейших вопросов методологии науки — о рациональности, точнее, о том, как она возможна. Именно с решением проблемы рациональности связаны многие трудности исследований по изменению (росту, развитию) научных знаний. В качестве тех требований, которым должно удовлетворять рационально организованное знание, Грязнов выделяет гомогенность, замкнутость и наличие причинно-следственной структуры. В своей статье «Принципы рациональной реконструкции в истории науки и истории философии»<sup>2</sup> ученый рассматривает два подхода к формированию методологических программ в области истории науки: интерналистский и экстерналистский. Различие между ними он поясняет следующим образом: «С точки зрения экстерналистов изменения в науке... совершаются под воздействием внешних (по отношению к науке) событий, а потому задачей истории науки является изучение этих внешних воздействий», в то время как «интерналист, напротив, утверждает, что изменения, происходящие в науке, могут быть рационально воспроизведены в историческом знании только в том случае, если мы обратимся к внутренним, имманентным процессам, происходящим в научном знании»<sup>3</sup>. Анализируя экстерналистскую концепцию, Грязнов

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Логика и рациональность // Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 213.

<sup>2</sup> Грязнов Б. С. Принципы рациональной реконструкции в истории науки и истории философии // Там же. С. 101—111.

<sup>3</sup> Там же. С. 103.

делает вывод, что она решает задачу не истории науки, а социологии науки, поскольку задача эта состоит в изучении науки как социального института в системе социальной действительности. Он полагает, что рациональная реконструкция истории науки может быть осуществлена в рамках интерналистской методологии, поскольку именно эта методология может обеспечить два важнейших требования, предъявляемых к рациональному знанию — «однородность и замкнутость системы знания относительно некоторого мира объектов»<sup>1</sup>.

Следует отметить, что свойство замкнутости аналогично понятию полноты формальной системы. В содержательном истолковании это требование означает, что теория тем более замкнута, чем меньше факторов, не принадлежащих ей, привлекается для объяснения объектного мира теории. Для того чтобы различать внешние и внутренние факторы, Грязнов вводит понятие причинной структуры: «Событие В причинно зависит от события А в силу совокупности законов, действующих в области, к которой принадлежат события А и В»<sup>2</sup>. Внешним для теории считается такой фактор, который вызывает изменение в мире ее объектов, но не может быть причиной с точки зрения приведенного определения. Если мы стремимся к рациональному знанию, то должны ограничиваться такими описаниями и объяснениями, которые используют только внутренние факторы. Очевидно, что требование замкнутости справедливо и для реконструкции исторического процесса развития науки. Это означает, что если мы хотим дать научно обоснованную реконструкцию развития знания, то в качестве внутренних факторов, определяющих этот процесс, нужно рассматривать само научное знание. Безусловно, внешние факторы оказывают влияние на развитие науки. Однако влияние это не является непосредственным: чтобы внешняя проблема (например, социальная) ока-

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Принципы рациональной реконструкции в истории науки и истории философии. С. 104.

<sup>2</sup> Там же. С. 209.

зала воздействие на изменение в научном знании, она должна быть преобразована в проблему внутринаучную либо поставлена в некоторое соответствие с этой проблемой. Никакой внешний фактор не вызовет изменения в научном знании, если внутри самой научной теории нет такой задачи, которая была бы ему в каком-то смысле эквивалентна. Влияние внешнего фактора может выражаться лишь в выборе для решения определенной задачи из всего класса задач, существующих на данный момент внутри теории. Однако с момента выбора задачи весь дальнейший процесс развития научного знания осуществляется под действием только лишь внутренних факторов, которые связаны между собой причинными связями. Этот факт и позволяет говорить о возможности рациональной реконструкции изменений, происходящих в развитии знания.

Такая концепция движущих сил эволюции науки выводит нас на понимание фундаментальной значимости методологического понятия интерпретации как в определенном смысле самостоятельной системы относительно языка (синтаксиса) теории. Это превращает проблему поиска аналога методологического понятия интерпретации в гильбертовской теории доказательств и теории поиска вывода в одну из ключевых задач в ходе построения рациональной реконструкции происхождения теории поиска вывода.

### § 3. Поризматическая модель происхождения научной теории и ее значение для логики и математики

В методологии науки одним из ключевых является вопрос о механизме возникновения новых научных теорий, который Б. С. Грязнов рассматривает в своей статье «О взаимодействии проблем и теорий»<sup>1</sup>. Он отмечает, что при решении этого вопроса часто используется понятие *проблемы*: «В науке почти триумфами стали утверждения вроде: главное в науке осоз-

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 111—118.

нать проблему; хорошо сформулированная проблема — половина решения и пр.»<sup>1</sup>. В качестве примера приводится использование понятия проблемы в весьма популярной схеме роста научного знания, предложенной К. Поппером, которая, как известно, выглядит следующим образом:

$$P_1 \rightarrow TT \rightarrow EE \rightarrow P_2,$$

где  $P_1$  — исходная проблема;  $TT$  — предположительные теории, являющиеся решением проблемы  $P_1$ ;  $EE$  — проверочные процедуры, выявляющие ошибки в теории;  $P_2$  — новая проблема, порожденная теорией  $TT$ .

Б. С. Грязнов указывает на существенное противоречие, к которому ведет такой подход. Действительно, любая научная теория решает какую-то проблему. Например, теория Коперника есть ответ на вопрос, как устроена та часть Вселенной, в которой мы живем, а теория комплексных чисел — как возможно дальнейшее расширение понятия числа после введения действительных чисел. Однако если появление теории обусловлено необходимостью решения проблемы, то возникают два вопроса: откуда берутся проблемы и как создаются новые теории? Действительно, с одной стороны, согласно приведенной схеме, проблема — это «стимул создания новой теории». С другой — чтобы являться отправным пунктом новой теории, проблема должна содержать определенное знание этой теории. Но тогда проблема вовсе не сможет быть исходным пунктом научного знания. Это противоречие разрешается у Поппера и ряда других методологов ссылками на творческую интуицию, иррациональность создания новых теорий. Тогда проблема не заключает в себе знаний, а выступает лишь катализатором творческого мышления, которое и порождает новую теорию со всей содержащейся в ней системой знаний. Даже если принять такое объяснение возникновения теорий, остается открытым вопрос о происхождении проблем. Грязнов отмечает, что в большинстве исследований по истории и методологии науки причины возникновения новой проблемы ищут вне науки.

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 111.

«В самом деле, если формулировка новой проблемы уже предполагает знание и тем самым решение проблемы, но, в свою очередь, именно проблема является "отправным пунктом" возникновения нового научного знания, то знание, связанное с существованием проблемы, должно быть вненаучным»<sup>1</sup>. Очевидно, что с такой точки зрения, когда непредсказуемость, неожиданность научного открытия связывается с его иррациональностью, оказывается, что в науке нет места теориям, которые были бы логическими следствиями уже имеющегося знания и вместе с тем оставались непредсказуемыми, неожиданными. Однако, не соглашаясь с такой экстерналистской трактовкой возникновения научных теорий, Грязнов задается вопросом: «Можно ли понять историю науки как историю проблем?». Для ответа на этот вопрос он отделяет понятие проблемы от понятия задачи. Если *проблема* — это «вопрос (или совокупность вопросов), ответом (или решением) на который является теория в целом», то *задача* — это такой вопрос, решение которого — «некоторое утверждение (или совокупность утверждений), представляющее собой правильную часть теории»<sup>2</sup>.

Используя различие проблем и задач, Б. С. Грязнов предлагает, по сути, новую модель развития научных теорий, основанную на понятии поризма. Поризмом в античной науке называли «утверждение, которое получалось в процессе доказательства теоремы или решения задачи, но получалось как промежуточное следствие, непредвиденный результат»<sup>3</sup>. По-

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. О взаимоотношении проблем и теорий // Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 113.

<sup>2</sup> Грязнов Б. С. Принципы рациональной реконструкции в истории науки и истории философии // Там же. С. 114.

<sup>3</sup> Там же. Ср. у И. Лакатоса: «Они [греки] называли поризмами — следствиями — те побочные результаты, которые получались из доказательства теоремы или решения задачи, результаты, которые они непосредственно не искали; эти поризмы появлялись в таком виде случайно, без каких-нибудь добавочных трудов, и представляли, как говорит Прокл, нечто вроде... премии» (*Лакатос И. Доказательства и опровержения*. М. : Наука, 1967. С. 17).

сколько этот непредвиденный результат не является целью исследования, он может оказаться для субъекта познавательной деятельности совершенно неожиданным. Однако неожиданность нельзя путать с нелогичностью и иррациональностью. Тезис об иррациональности научных открытий зачастую опровергается самой историей науки, так как многие научные открытия появились именно как поризмы — неожиданно для исследователя, но вполне логичным путем в ходе решения задач в рамках старых научных теорий.

В статье Б. С. Грязнова в качестве примеров поризмов приводятся открытие гелиоцентрического строения солнечной системы, принадлежащее Копернику, и построение Планком квантовой механики. Задача, которую решал Коперник в рамках птолемеевой теории, состояла в поиске причин, приводивших к ошибке в определении дня весеннего равноденствия. Единственный способ решить эту задачу он увидел в предположении о движении Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Таким образом, «утверждение о движении Земли получилось у него как естественное следствие, но следствие промежуточное в ходе решения задачи, то есть как поризм»<sup>1</sup>. Планк решал задачу нахождения «такой эмпирической формулы, которая для коротких волн совпадала бы с формулой Вина, а для длинных волн — с формулой Рэлея. Найдя эту удачную эмпирическую формулу, Планк, чтобы объяснить ее, должен был приписать физический смысл двум константам, которые в ней появились»<sup>2</sup>. Как только подходящая интерпретация этим константам была дана (одна из них — знаменитая постоянная Планка), естественным следствием этой интерпретации стал фундаментальный вывод о прерывности испускания, поглощения и излучения энергии, который привел к появлению новой теории — квантовой механики.

Следует отметить определенную универсальность понятия поризма, которая позволяет использовать его при описании развития логико-математических теорий. Хотя оба приведен-

---

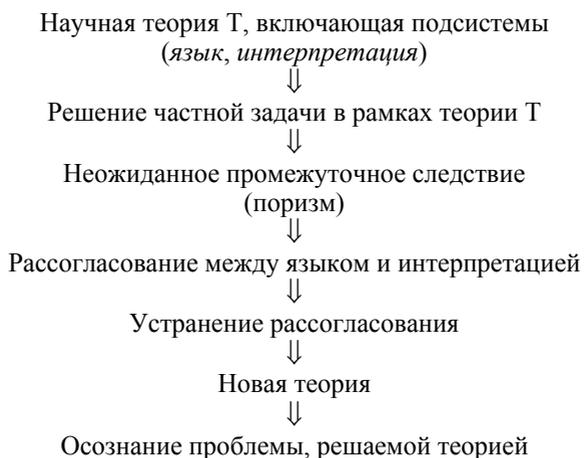
<sup>1</sup> Грязнов Б. С. О взаимоотношении проблем и теорий // Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 116.

<sup>2</sup> Там же. С. 117.

ных примера относятся к области естественных наук, поризмы играют заметную роль и в точных науках (само понятие поризма пришло к нам из древнегреческой геометрии). В качестве математических объектов, появившихся непредвиденно, но вполне логичным путем, Б. С. Грязнов упоминает отрицательные и комплексные числа.

Если вернуться к вопросу о взаимоотношении проблемы и теории, то на вопрос «Верно ли, что новая теория возникает как решение поставленной в науке проблемы?» Грязнов отвечает отрицательно: «Проблема не является первичной по отношению к теории, а историю науки вряд ли можно понять как историю проблем»<sup>1</sup>. Проблема, решаемая теорией, может быть осознана лишь после возникновения самой теории. Однако она отнюдь не лишний элемент научного познания — только в результате реконструкции проблемы, решаемой теорией, можно как следует понять саму теорию.

В качестве вывода из тех идей Б. С. Грязнова, которые были изложены выше, нами предлагается следующая общая схема возникновения новой научной теории:



<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Принципы рациональной реконструкции в истории науки и истории философии // Грязнов Б. С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 118.

При анализе этой схемы и конкретных примеров из истории науки возникает предположение о том, что для возникновения новой теории появления неожиданного решения частной задачи в рамках существующей теории недостаточно. Уже в статье «О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм» отмечается, что поризм может превратиться в новую теорию лишь путем придания ему новой интерпретации. «Будучи интерпретирован на новой области объектов, поризм становится новой теорией  $T^*$ . При этом некоторый изоморфный образ теории  $T$  при новой интерпретации становится подтеорией  $T^*$ »<sup>1</sup>.

В качестве примера реализации описанной поризматической схемы появления новой теории проследим возникновение понятия комплексного числа и в дальнейшем теории комплексных чисел. Если под числами понимать лишь обычные вещественные числа, то квадратные уравнения, дискриминант которых является отрицательным числом, оказываются неразрешимыми — не имеющими корней. *Мнимая единица  $i$*  — корень уравнения  $x^2 + 1 = 0$ . Таким образом, на множестве комплексных чисел, то есть чисел вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа, каждое квадратное уравнение имеет ровно два корня. Любопытно, что первоначально введение комплексных чисел в математику было вызвано необходимостью решать алгебраические уравнения третьей степени, а не квадратные<sup>2</sup>. Формула Кардано для корней кубического уравнения  $x^3 + px + q = 0$  в современных обозначениях имеет вид

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

---

<sup>1</sup> Брюшинкин В. Н. О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке. С. 18.

<sup>2</sup> Балтага В. К. Комплексные числа. Харьков : Изд-во Харьковского университета, 1959. С. 4.

Если выражение  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$  отрицательно, то формула приводит к необходимости извлекать квадратный корень из отрицательного числа, в то время как именно в этом случае все три корня уравнения вещественные. Сам Кардано был удивлен тем, что нашел числа, являющиеся корнями из отрицательных чисел. Он назвал их софистическими, добавив, что «для осуществления таких действий нужна была бы новая арифметика, которая была бы настолько же утонченной, насколько бесполезной»<sup>1</sup>. Первая догадка о том, как из этих «софистических» чисел получить действительные корни, пришла в голову Р. Бомбелли. Он в своем труде «Алгебра» показал, что новые числа дают при извлечении корня сопряженные числа, при сложении которых взаимно уничтожается корень квадратный из отрицательного числа. Бомбелли установил правила действия над новыми числами, а также над новыми и «старыми» единицами. Таким образом, мы можем сказать, что задача решения алгебраических уравнений второй и третьей степени привела к неожиданному синтаксическому результату (поризму) — открытию мнимых чисел.

Однако утверждать, что на этом этапе уже появляется последовательная, признанная теория комплексных чисел, по-видимому, преждевременно. Известно, что Р. Декарт в приложении к труду «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках», показал, что алгебраическое уравнение  $n$ -й степени может иметь как действительные, так и воображаемые, мнимые корни. Однако современники не приняли эти результаты, и мнимые величины, выдвинутые Декартом и его последователями, долго не получали признания. Г. Лейбниц ирониче-

---

<sup>1</sup> Цит. по: *Андронов И. К.* Математика действительных и комплексных чисел. М. : Просвещение, 1975. С. 91.

ски писал: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»<sup>1</sup>.

По-видимому, можно утверждать, что полное понимание сущности комплексных чисел и тем самым возможность построения логически обоснованной, законченной их теории пришли только в XIX веке, когда К. Гаусс нашел для них геометрическую интерпретацию как точек плоскости. Он же ввел в обращение термин «комплексное число», имея в виду объединение двух действительных единиц: « $a$  единиц обычных +  $b$  единиц мнимых». Позднее ирландский математик Гамильтон разработал алгебраическую интерпретацию комплексных чисел как пар действительных чисел.

Итак, геометрическая интерпретация комплексных чисел и их интерпретация как пар действительных чисел позволили окончательно осознать их значение и необходимость соответствующей теории. В дальнейшем теория алгебраических структур позволила показать, что комплексное число есть расширение понятия действительного числа, то есть, вообще говоря, действительное число есть частный случай комплексного числа  $a + bi$ , где  $b = 0$ . При этом арифметические операции над действительными числами — частный случай соответствующих операций над числами расширенной числовой области — комплексными. В этой расширенной числовой области сохраняются все основные законы арифметических действий над действительными числами. Другими словами, комплексные числа, так же, как и действительные, образуют поле относительно операций умножения и сложения.

В настоящее время многие математические теории приняли законченный вид благодаря использованию комплексных чисел. Например, отдельные факты математического анализа, совершенно необъяснимые, если оперировать толь-

---

<sup>1</sup> Цит. по: Андронов И. К. Указ. соч. С. 95.

ко действительными числами, легко разъясняются при расширении числовой области путем введения комплексных чисел. Важными являются и приложения комплексных чисел в физике и технике. С их помощью решаются уравнения электростатики, гидродинамики, теории колебаний, квантовой механики.

Взгляды Б. С. Грязнова на рациональную внешнюю и внутреннюю историю науки, возможность ее внутренней рациональной реконструкции, возникновение новой научной теории из логического, но непредвиденного, следствия предшествующей теории разбросаны по различным заметкам и статьям. Однако они составляют единую, внутренне упорядоченную систему, хотя и не описанную в явной форме. Одной из задач этой книги как раз и является попытка реконструировать систему методологических взглядов, лежащих в основе поризматической теории происхождения научной теории, и применить их к конкретному примеру из недавней истории логики — возникновению теории поиска вывода.

## Глава 2

---

### ГИЛЬБЕРТОВСКАЯ ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ: НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОДФОРМУЛЬНОСТЬ

#### § 1. Гильбертовская теория доказательств и непротиворечивость

В качестве исходной теории в нашем случае применения поризматической модели мы будем рассматривать гильбертовскую теорию доказательств. В связи с этим представляется полезным проследить главные этапы ее развития, основные задачи и методы их решения.

Как известно, теория множеств, созданная Кантором в 70-е годы XIX века, первоначально натолкнулась на недоверие и даже враждебность многих математиков. Только в начале 1890-х годов она вошла в моду и благодаря крайней общности своих понятий и методов проникла во все отрасли и разделы математики, а особенно широко стала применяться в анализе и геометрии. Однако «чрезмерно свободное оперирование понятием актуальной бесконечности привело, в конце концов, к новому... кризису оснований математики. Проявлением этого кризиса явилось обнаружение в теории множеств парадоксов или антиномий...»<sup>1</sup> Первая антиномия была выявлена самим Кантором в 1895 году, а впервые опубликована Бурали-Форти в 1897 году. Но поскольку данная антиномия возникла в довольно специальной области теории вполне упорядоченных

---

<sup>1</sup> Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. М. : Наука, 1983.

множеств, у Кантора была надежда, что небольшой пересмотр доказательства теорем в этой теории позволит устранить ее.

Однако в 1902 году Б. Рассел сформулировал антиномию, относящуюся к самым началам теории множеств и показывающую, что в основаниях этой дисциплины что-то неблагополучно. Кроме нее к числу логических (то есть таких, которые могут быть сформулированы в чисто логическом виде) антиномий относятся также антиномия Кантора и антиномия Бурали-Форти. Кроме них позже были описаны и антиномии несколько иного рода (их иногда называют семантическими или эпистемологическими). Это антиномии Ришара, Греллинга, а также хорошо известный парадокс лжеца и др.

После обнаружения парадоксов теории множеств были предложены различные варианты их устранения и, тем самым, способы обоснования математики, необходимость которого ясно продемонстрировали антиномии.

Представители логицизма (Б. Рассел и его сторонники) полагали, что необходимо дифференцировать типы математических объектов, которые фигурируют в рассуждениях, а также уточнить используемые при этом логические средства, в частности удалить ряд правил образования понятий, применение которых приводит к появлению порочного круга. Главная цель, которую преследует это направление, состоит в попытке редукции всей чистой математики к логике. При этом они признают вполне законным использование в математике понятия актуальной бесконечности<sup>1</sup>.

Сторонники аксиоматизации теории множеств (Цермело и его последователи), в принципе не исключая понятия актуальной бесконечности, ограничивают его так, чтобы антиномии не возникало. Для этого они, в частности, ограничивают ак-

---

<sup>1</sup> *Russell B. Mathematical logic as based on the theory of types // Russell B. Logic and Knowledge. L. : Routledge, 1989. P. 59—102 (русский перевод: Рассел Б. Математическая логика, основанная на теории типов // Логика, онтология, язык / сост., пер. и предисл. В. А. Суровцева. Томск : Изд-во Томского университета, 2006. С. 16—62).*

сиому свертывания (выражающую допущение, что любому условию соответствует множество всех предметов, удовлетворяющих этому условию) и тем самым строят системы, свободные от известных антиномий, но в то же время настолько сильные, чтобы средствами этих систем можно было развить достаточно большую часть классической математики<sup>1</sup>.

Наиболее радикальную программу обоснования математики, как известно, выдвинули сторонники интуиционизма и конструктивизма. Последователи Брауэра объявили канторовскую концепцию теории множеств целиком ложной, необоснованно переносящей на сферу бесконечного методы рассуждений, применимые лишь для конечных множеств. Они предлагают полностью отказаться от идеи актуальной бесконечности и связанных с ней понятий. Математика должна быть построена на такой основе, интуитивная надежность которой не вызывает никаких сомнений. Так, предлагается вернуться к понятию потенциальной бесконечности, возникающей в результате неограниченного построения математических объектов. Математические идеи интуиционистов были разработаны и развиты сторонниками конструктивного направления в математике, в частности советской школой конструктивной математики во главе с А. А. Марковым.

Все, кто занимался обоснованием теории множеств, испытывали потребность в доказательстве непротиворечивости рассматривавшихся ими систем. Традиционный метод проведения таких доказательств состоит в указании модели рассматриваемой теории, взятой из некоторой теории, непротиворечивость которой не вызывает сомнений. Так, например, Д. Гильберт в 1899 году, построив модель евклидовой геометрии средствами арифметики действительных чисел, доказал ее непротиворечивость (относительно арифметики действительных чисел). Очевидно, что доказательство непротиворечивости теории путем построения для нее модели в метатеории обладает лишь отно-

---

<sup>1</sup> Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М. : Мир, 1966. С. 317.

сительной убедительностью (в той степени, в какой мы убеждены в непротиворечивости метатеории). Нет сомнений, что для теории множеств невозможно построение метатеории, обладающей большей надежностью, чем она сама. Конечные модели для этой цели не подходят, системы же для построения бесконечных моделей не могут считаться надежными из-за антиномий. Гильберт, уверенный в надежности основ классической математики, предложил новый метод обоснования теории множеств, получивший название формалистической программы. Выполнение этой программы должно было показать, что применяемые в математике методы доказательства достаточно сильны для того, чтобы получить всю классическую математику, в том числе всю канторовскую теорию множеств, исходя из подходящим образом выбранных аксиом, но не настолько сильны, чтобы вывести из аксиом противоречие.

Выполнение этой задачи Гильберт предполагал осуществить в два этапа. Прежде всего, вся математика должна быть формализована, то есть необходимо было построить некоторую формальную систему, из аксиом которой с помощью некоторого четко определенного множества правил можно было бы вывести по крайней мере основы науки (здесь, в первую очередь, имелись в виду арифметика, анализ и теория множеств). Эта формализация идет дальше часто применяемой содержательной аксиоматики, в которой опираются на «содержательно понимаемую» логику и ограничиваются полным перечнем списка всех специальных первоначальных терминов и перечислением всех сформулированных в этих терминах допущений, необходимых для вывода определенной совокупности теорем. Формализация, предполагаемая Гильбертом, не должна была включать в себя никаких неявных значений терминов: во внимание в ней принимаются только вид и порядок символов, к последовательностям которых применяются правила вывода. В такой системе проверка того, является ли некоторая цепочка последовательностей символов доказательством последней последовательности в этой цепочке, может быть

осуществлена посредством конечной последовательности преобразований одного набора символов в другой из некоторого конечного количества заранее заданных наборов символов (аксиом) по строго определенным формальным правилам (правилам вывода), отвлекаясь от какой-либо содержательной интерпретации этих символов.

В качестве второго шага Гильберт намеревался показать, что применение правил вывода к аксиомам никогда не сможет привести к противоречию. Рассуждения, посредством которых необходимо доказать эту метатеорему о невозможности противоречия, должны быть настолько элементарными, чтобы в их справедливости невозможно было усомниться. Все виды рассуждений, применение которых в математике вызывает критику интуиционистов (например, закона исключенного третьего к бесконечным множествам) не должны применяться. Эта метатеория, в рамках которой предполагалось исследовать методы математических доказательств, была названа Гильбертом *метаматематикой*, или *теорией доказательств*. Гильберт настаивал на том, чтобы в теории доказательств разрешалось пользоваться только *финитными* методами, однако его указания на то, какими свойствами им необходимо обладать, довольно расплывчаты. Он лишь говорит, что это «прямые содержательные рассуждения, совершающиеся в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами и не зависящие от предположений аксиоматического характера»<sup>1</sup>. Наиболее конкретная характеристика финитным рассуждениям была дана учеником Гильберта Ж. Эрбраном: «Под интуиционистским (то есть финитным) рассуждением мы понимаем рассуждение, удовлетворяющее следующим условиям: всегда рассматривается лишь конечное и определенное число предметов и функций; функции эти точно определены, причем определение позволяет произвести однозначное вы-

---

<sup>1</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств / пер. с нем. Н. М. Нагорного ; под ред. С. И. Адяна. М. : Наука, 1982. С. 59.

числение их значений; никогда не утверждается существование объекта без указания способа построения этого объекта; никогда не рассматривается (как вполне определенное) множество всех предметов  $x$  какой-либо бесконечной совокупности; если же говорится, что какое-то рассуждение (или теорема) верно для всех этих  $x$ , то это означает, что это общее рассуждение можно повторить для каждого конкретного  $x$ , причем само это общее рассуждение следует при этом рассматривать только как образец для проведения таких конкретных рассуждений»<sup>1</sup>.

С точки зрения концепции формализма актуальная бесконечность представляет идеальное высказывание, которое приобретает смысл и получает обоснование через содержательные реальные утверждения математической теории. Как показывает Е. Д. Смирнова, для Гильберта доказательство непротиворечивости эквивалентно доказательству устранимости идеальных объектов, в первую очередь, абстракции актуальной бесконечности<sup>2</sup>. По мнению Гильберта, оперирование с бесконечным может стать надежным только через конечное. Эта установка нашла свое воплощение в требовании применять для доказательства непротиворечивости арифметики только финитные методы.

Для целей нашего историко-логического исследования необходимо осуществить *методологический* анализ гильбертовской теории доказательств. В методологии науки принято различать предметную область исследования и объект исследования<sup>3</sup>. Б. С. Грязнов предлагает считать «предметной областью исследования... совокупность вещей (явлений) и их отношений, которая существует независимо от деятельности человека»<sup>4</sup>. Конечно, «вещи», исследуемые логикой и математикой,

---

<sup>1</sup> Цит. по: Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. С. 321.

<sup>2</sup> Смирнова Е. Д. Логика и философия. М. : Росспэн, 1996. С. 229—245.

<sup>3</sup> Грязнов Б. С. Объект научного исследования // Грязнов Б. С. Логика, рациональность, творчество. С. 8—12.

<sup>4</sup> Там же. С. 10.

не существуют отдельно от деятельности человека<sup>1</sup>. Для логико-математических теорий предметный мир образуют предметы и процессы, независимые от самой этой теории и служащие предметом ее исследования. Для теории доказательств предметной областью исследования являются реальные доказательства, изобретаемые в содержательных математических теориях. Гильберт был уверен, что «доказуемые теоремы, то есть формулы, получающиеся при этом способе [формализации], являются отображением мыслей, которые образуют обычную до сих пор математику»<sup>2</sup>. Вместе с тем гильбертовская теория доказательств создает (вслед за Расселом) новый объект — формальное доказательство в некотором логико-математическом исчислении. Оно в таком случае представляет собой результат *абстракции* от реальных математических доказательств *свойства формальной выводимости* теоремы из аксиом теории, представленное в виде синтаксической последовательности формул языка данного исчисления, каждая из которых является либо его аксиомой, либо выводима из предыдущих по явно сформулированным в нем правилам вывода. Доказательство в логико-математическом исчислении — формальный синтаксический объект, а теория доказательств, или метаматематика, — содержательная теория о формальных системах. Это означает, что для того чтобы формальное доказательство, будучи абстракцией некоторого свойства реальных доказательств, стало абстрактным объектом, представляющим объект некоторой теории, оно должно быть интерпретировано, то есть ему должен быть приписан смысл, определяющий место этого объекта в теории. Для Гильберта смысл формальному доказательству придавался его связью с аксиоматическим методом. Вообще Гильберт считал аксиоматически построенное исчисление идеалом логико-математической теории, а аксиоматический метод — одним из главных средств математи-

---

<sup>1</sup> Если не предполагать принятие крайнего платонизма.

<sup>2</sup> *Гильберт Д.* Основания геометрии / пер. с нем. И. С. Градштейна ; под ред. П. К. Рашевского. М. ; Л. : Государственное технико-теоретическое изд-во, 1948. С. 367.

ческого исследования: «Геометрия, — так же, как и арифметика, — требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии»<sup>1</sup>. Сравнивая аксиоматический метод построения геометрии с традиционным генетическим методом введения понятия натурального числа в арифметике, Гильберт замечает: «Мое мнение таково: несмотря на то, что генетический метод имеет высокое педагогическое и эвристическое значение, все же для окончательного оформления и полного логического обоснования содержания нашего познания предпочтительнее аксиоматический метод»<sup>2</sup>. В статье «Аксиоматическое мышление» Гильберт так описывал значимость аксиоматического метода: «Я уверен: все, что может быть объектом научного исследования в целом, и постольку, поскольку оно созревает для оформления в теорию, прибегает к аксиоматическому методу и через него косвенно к математике»<sup>3</sup>. В самом общем виде Гильберт определял доказательство как «вывод какой-либо формулы из определенных аксиом (с помощью логического исчисления)»<sup>4</sup>. Вместе с тем аксиоматическое построение теории означает определенную интерпретацию доказательства как движения по *нисходящему* ряду, от основания к следствию, «сверху вниз», или, если вспомнить античную интерпретацию математических доказательств, данную в александрийской математической школе, *синтетическое построение* доказательства. Во времена создания гильбертовской теории доказательств аксиоматическое построение было единственным известным способом задания логико-математических теорий. Поэтому

---

<sup>1</sup> Гильберт Д. Основания геометрии. С. 55.

<sup>2</sup> Там же. С. 316.

<sup>3</sup> Гильберт Д. Аксиоматическое мышление / пер. с англ. А. Г. Барабашева // Методологический анализ оснований математики. М. : Наука, 1988. С. 104.

<sup>4</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. С. 274.

рассмотрение формального объекта «доказательство» вместе с синтетическим способом его построения «сверху вниз» традиционно воспринималось как нечто само собой разумеющееся. Однако такого рода ассоциация формального доказательства с определенным способом его построения придавала термину «доказательство» определенный *смысл* в системе теории, формировала *интерпретацию* понятия формального доказательства и тем самым придавала формальному объекту «доказательство» статус объекта теории доказательств. На этом основании мы можем заключить, что *объектом* гильбертовской теории доказательств является *понятие формального доказательства, которому придана «синтетическая», или «нисходящая» интерпретация.*

Уточним некоторые важные понятия теории доказательств. *Формализованные теории* строятся для формализации теорий, заданных интуитивным образом. Содержательный смысл формализованная теория получает после ее интерпретации. Тогда она становится интерпретированным исчислением (получает модель), в котором каждому правильно построенному выражению приписывается одно из двух истинностных значений. *Формальная система* является частным случаем формализованной теории, когда в ней класс истинных формул исчерпывающим образом описывается как класс предложений, выводимых из некоторого первоначального класса аксиом с помощью некоторых правил вывода. Аксиоматизировать формализованную теорию — значит построить эквивалентную ей аксиоматическую формальную систему. Как выяснилось, многие математические теории оказались не аксиоматизируемыми. Формальная система *разрешима*, если существует эффективный единообразный (разрешающий) метод, позволяющий определить, является ли данное предложение этой теории доказуемым в ней. Формализованная теория называется *формально непротиворечивой*, если в ней нет такого предложения  $\varphi$ , что  $\varphi$  и  $\neg\varphi$  одновременно доказуемы в этой теории. Отметим, что применительно к рассматриваемому нами формальному объекту «доказательство» это требование означает, что

ни одно доказательство в непротиворечивой теории не может привести к противоречию. Рекурсивной называется такая арифметика, которая имеет дело лишь с общерекурсивными функциями, свойствами и отношениями. Известно, что согласно тезису Черча — Тьюринга все функции, которые интуитивно рассматриваются как вычислимые, — общерекурсивные. Более формально, понятие общей рекурсивности эквивалентно вычислимости с помощью машин Тьюринга<sup>1</sup>.

Итак, первоначальная программа Гильберта состоит в том, чтобы построить непротиворечивую, полную, разрешимую формальную систему, класс доказуемых предложений которой совпадал бы с классом интуитивно истинных математических утверждений. Причем наличие этих свойств у данной системы можно было бы доказать с помощью арифметизации в той части арифметики, которая имеет дело лишь с общерекурсивными функциями, свойствами и отношениями. Невозможность выполнения этой задачи стала очевидной после того, как Гедель в 1931 году опубликовал статью «О формально неразрешимых предложениях "Principia Mathematica" и родственных системах», в которой изложил результаты своих исследований по вопросу о полноте и непротиворечивости формальных систем математики. В этой статье Гедель показал, что две наиболее обширные формальные системы математики — «Principia Mathematica» Б. Рассела и А. Н. Уайтхеда и аксиоматическая теория множеств Цермело — Френкеля — содержат сравнительно простые проблемы из области формализованной арифметики, которые не могут быть разрешены с помощью аксиом. Он обобщил этот факт, доказав следующую теорему.

#### Теорема Геделя (о неполноте)

*Каждая формальная система, настолько богатая, чтобы содержать формализацию рекурсивной арифметики, либо ω-противоречива, либо содержит некоторую неразрешимую (хотя и истинную) формулу, то есть такую формулу, что в данной системе ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть.*

---

<sup>1</sup> Клини С. К. Математическая логика. М. : Мир, 1973. С. 270.

Под  $\omega$ -непротиворечивой системой понимается такая система, в которой ни для какой свободной переменной  $x$  и формулы  $A(x)$  не оказываются теоремами одновременно следующие предложения:  $A(0)$ ,  $A(1)$ ,  $A(2)$ , ...,  $\neg(x)A(x)$ .

Гедель привел конструктивное доказательство этой теоремы, в котором непосредственно построил неразрешимое предложение в формальной системе. Такое предложение он формулирует по аналогии с парадоксом лжеца, как предложение, которое говорит о собственной недоказуемости. Однако противоречия здесь не возникает, поскольку, если неразрешимое предложение говорит о своей недоказуемости, то оно истинно, поскольку действительно недоказуемо. Таким образом, предложение, неразрешимое в системе Рассела и Уайтхеда, все же разрешимо посредством метаматематических рассуждений<sup>1</sup>.

Замечательно, что доказательство теоремы, предложенное Геделем, удовлетворяет всем строгим требованиям, которые Гильберт предъявлял к метаматематическим рассуждениям.

В 1936 году Б. Россер обобщил теорему Геделя, показав что альтернатива  $\omega$ -противоречивости может быть заменена в ней на простую противоречивость.

Таким образом, теорема Геделя обнаруживает принципиальную ограниченность дедуктивных возможностей любой достаточно богатой системы. Также из нее видно, что семантическое понятие истинности в арифметике, а следовательно и во всей математике, нельзя исчерпывающим образом отобразить посредством синтаксического понятия доказуемости в какой-либо одной формальной системе. Это говорит о невозможности осуществить первую часть программы Гильберта, состоявшую в представлении всей содержательной классической математики в виде формальных аксиоматических систем, из которых можно было бы получить все ее истины.

---

<sup>1</sup> Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики. М. : Наука, 1983. С. 187.

Вывод о недостижимости основной цели первоначальной программы Гильберта, состоявшей в том, чтобы доказать формальную непротиворечивость арифметики, пользуясь при этом лишь финитными методами, можно сделать из следующей теоремы.

Следствие из теоремы Геделя  
(или вторая теорема Геделя)

*Никакое предложение, которое можно точным образом интерпретировать как выражающее непротиворечивость какой-либо непротиворечивой формальной системы, содержащей арифметику, не может быть доказано в этой системе.*

Таким образом, попытка обойтись при обосновании математики только конечными (финитными) методами потерпела неудачу.

Нужно отметить, что Гильберт и его ученики сумели строго финитными средствами доказать непротиворечивость весьма широкой подсистемы арифметики, в которой, однако, принцип индукции неприменим к квантифицированным предложениям. Существуют определенные перспективы продвижения в этом направлении и менее категоричные суждения по поводу степени «губительности» теорем Геделя для программы Гильберта. Так, в известной монографии С. С. Гончарова, Ю. Л. Ершова и К. Ф. Самохвалова высказывается следующее положение: «Пусть  $CONP$  — геделевская арифметическая трактовка непротиворечивости системы  $P$  [элементарной теории чисел]. Будем говорить, что  $S$  — система первого (второго) рода, если найдется (не найдется) консервативное расширение системы  $S$ , в котором  $CONP$  является теоремой. Согласно теореме Геделя... системы первого рода невозможно обосновать по программе Гильберта, даже если когда-нибудь (в неопределенном будущем) финитно установят их непротиворечивость. Это относится, в частности, к теории множеств, так как она является системой первого рода. Для систем второго рода (например, арифметики  $P$ ) вывод из теоремы Геделя не

столь категоричен: он указывает лишь на необходимость переориентации исследований при поиске разрешимых в  $P$  арифметических выражений непротиворечивости»<sup>1</sup>.

Итак, программа Гильберта в ее первоначальном варианте оказалась невыполнимой, однако работа по ее реализации во все не была бесплодной. Для нас особенно интересно следующее замечание Френкеля и Бар-Хиллела: «...как это не раз бывало в истории математики, в процессе попыток решения этой утопической (как теперь, задним числом, мы можем сказать) задачи было накоплено подлинное богатство в виде новых теорий, новых понятий, новых методов, чрезвычайно интересных и плодотворных уже сегодня и, по-видимому, представляющих еще больший интерес для будущего»<sup>2</sup>. Все вышесказанное, как нам кажется, в полной мере относится к появлению и развитию теории поиска вывода.

Естественно, после того как выяснилось, что невозможно доказать формальную непротиворечивость арифметики финитными средствами, возник вопрос, нельзя ли это сделать с помощью каких-либо методов, не финитных в первоначальном смысле этого слова, но все же достаточно надежно согласующихся с основой концепции формализма. Уже через несколько лет после опубликования результатов Геделя Г. Генцену удалось доказать непротиворечивость арифметики с помощью лишь одного нового метода, выходящего за рамки арифметики в собственном смысле слова, — с помощью так называемой трансфинитной индукции.

Следует отметить, что, хотя первоначальная программа Гильберта, для выполнения которой он предложил построить теорию доказательств, оказалась невыполнимой, сам он считал, что данная теория может дать положительные результаты в вопросе доказательства непротиворечивости математических теорий. Теорема Геделя, по мнению Гильберта, показывает

---

<sup>1</sup> Гончаров С. С., Ершов Ю. Л., Самохвалов К. Ф. Введение в логику и методологию науки. М. : Интерпракс, 1994. С. 215—216.

<sup>2</sup> Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. С. 322.

лишь то, что «для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов»<sup>1</sup>. Результаты, полученные Генценом, дают Бернайсу возможность утверждать, что «временная неудача теории доказательств имела место лишь из-за того, что к этой теории предъявлялись слишком высокие методические требования»<sup>2</sup>.

Сегодня можно утверждать, что теория доказательств, которую так самоотверженно защищал Гильберт, постепенно превратилась в полноправную и значительную научную теорию. Очевидно, что ее основные результаты достигнуты в области оснований математики, причем речь идет не только о доказательстве непротиворечивости математических теорий. Г. Такеути отмечает, что «при исследовании оснований математики с философской точки зрения важно изучать и прояснять структуру математических доказательств»<sup>3</sup>. Теория доказательств оказывает влияние и на собственно математику. Важным следствием ранних исследований по теории доказательств является выработка точного понятия алгоритма, позволившего решать вопросы о разрешимости алгоритмических проблем в различных разделах математики. Идеи теории доказательства оказывают влияние на различные разделы математики, в частности на алгебру<sup>4</sup>. Несколько иначе оценивает значение теории доказательств Г. Крайзель. Он отмечает, что ранний период этой теории был вполне удовлетворительным, и результаты его остаются интересными до сих пор<sup>5</sup>. К ним от-

---

<sup>1</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. С. 20.

<sup>2</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. М. : Наука, 1982. С. 13.

<sup>3</sup> Такеути Г. Теория доказательств. М. : Мир, 1978. С. 10.

<sup>4</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. С. 10.

<sup>5</sup> Крайзель Г. Исследования по теории доказательств. М. : Наука, 1981. С. 214.

носятся гильбертовское математическое убеждение относительно роли формальных правил в математике, установление того, что это убеждение верно для многих ее областей и теоретическое опровержение этого убеждения теоремами Геделя о неполноте. При этом он критикует теорию доказательств за излишний интерес к «методам» (изысканным и остроумным) в ущерб интересу к результатам. Однако, по нашему мнению, именно развитие методов теории доказательств привело к ряду очень интересных результатов. Об одном из них — обнаружении Генценом свойства подформульности доказательств — пойдет речь в следующем параграфе.

Итак, получается, что гильбертовская теория доказательств представляет собой содержательную научную теорию, *объектом* которой является *синтетически интерпретированное понятие формального доказательства*, а *главной задачей* — *прямое (не использующее метода построения модели) обоснование непротиворечивости формальной арифметики*. Мы намерены показать, что одним из промежуточных и непредвиденных результатов решения этой задачи в рамках теории доказательств оказалось обнаружение свойства подформульности вывода в секвенциальных исчислениях без сечений.

## § 2. Генценовское доказательство непротиворечивости: подформульность как поризм

Учитывая результаты теоремы Геделя о неразрешимости, Генцен предлагает доказывать непротиворечивость чистой теории чисел с помощью вспомогательных средств, не принадлежащих к ней, но вполне надежных.

Как уже отмечалось, теория является непротиворечивой, если ни одно *доказательство* в ней не ведет к противоречию. В связи с этим Генцен рассматривает теорию, *объектами* которой являются *доказательства*, и называет ее, вслед за Гильбертом, «теорией доказательств», или «метаматематикой». Именно в рамках теории доказательств находится вопрос о непротиворечивости чистой теории чисел.

Прежде всего для работы в теории доказательств необходимо строгое формальное определение понятия теоретико-числового доказательства. С целью дать такое определение Генцен проводит формализацию чистой теории чисел.

Формализация арифметики начинается с формализации понятия арифметического высказывания. Далее встает задача формализовать средства доказательства, то есть способы построения понятий и способы заключения. Формализация способов заключения может проводиться по-разному. Например, Гильберт использует для этого специальные аксиоматические исчисления, в которых «истинные формулы выводятся из некоторого множества "логических основных формул" посредством применения немногих правил вывода»<sup>1</sup>. Такие исчисления дают значительные формальные преимущества, однако выводы в них «очень далеки от тех способов рассуждений, которые применяются в действительности при математических доказательствах»<sup>2</sup>. В реальных математических доказательствах обычно принимаются некоторые допущения (математические аксиомы, теоремы, просто какие-то промежуточные предположения), а затем из них путем рассуждений выводится новое утверждение (теорема). Сам Генцен, формализуя логический вывод, хочет «прежде всего построить такой формализм, который был бы как можно ближе к применяющимся в действительности рассуждениям»<sup>3</sup>. С этой целью он строит «исчисление натуральных выводов».

Классическое «исчисление натуральных выводов» (НК-исчисление), построенное Генценом, обладает следующей особенностью: выводы в нем «исходят вообще не из логических аксиом, а из допущений, из которых делаются логические заключения»<sup>4</sup>. Эти логические заключения проводятся в соот-

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 18.

<sup>2</sup> Там же. С. 10.

<sup>3</sup> Там же. С. 18.

<sup>4</sup> Там же.

ветствии с особыми «фигурами заключения». Схемы фигур заключения представляют собой правила введения и удаления логических союзов и кванторов:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{UE}{\frac{U \ B}{U \& B}}; & \frac{UB}{\frac{U \& B}{B}}, \frac{U \& B}{U}; & \frac{OE}{\frac{U}{U \vee B}, \frac{B}{U \vee B}}; \\
 \frac{OB}{\frac{U \vee B \overset{[U]}{\mathfrak{I}} \overset{[B]}{\mathfrak{I}}}{U \vee B}}; & \frac{AE}{\frac{F\alpha}{\forall x Fx}}; & \frac{AB}{\frac{\forall x Fx}{F\alpha}}; \\
 \frac{EE}{\frac{F\alpha}{\exists x Fx}}; & \frac{EB}{\frac{\exists x Fx \overset{[F\alpha]}{\mathfrak{I}}}{\mathfrak{I}}}; & \frac{FE}{\frac{\overset{[U]}{B}}{U \supset B}}; \\
 \frac{FB}{\frac{U \ U \supset B}{B}}; & \frac{NE}{\frac{\overset{[U]}{\lambda}}{\neg U}}; & \frac{NB}{\frac{U \ \neg U}{\lambda}}; \frac{\lambda}{D}
 \end{array}$$

«Знаки, стоящие в квадратных скобках, имеют следующее значение: формально равные формулы этого вида в любом количестве (в том числе и нулевом) могут сопоставляться фигурам заключения в качестве допущений»<sup>1</sup>.

Содержательный смысл этих правил в точности соответствует общепринятому пониманию смысла логических связей. Допущения, вводимые в процессе вывода, последовательно исключаются из него в результате применения фигур заключения «введение следования» — FE и «введение отрицания» — NE. В результате конечная формула вывода оказывается независимой от любых допущений. Таким образом, выво-

<sup>1</sup> Генцен Г. Исследования логических выводов. С. 19.

ды в натуральном исчислении действительно вполне адекватно отражают реальные математические рассуждения.

Интересно, что мотив воспроизведения «действительных рассуждений» являлся едва ли не главным при построении Генценом исчисления натуральных выводов. Сам он при всех формальных недостатках этого исчисления главным его достоинством называет «далеко идущее приближение к действительным рассуждениям»<sup>1</sup>. Нам представляется важным тот факт, что натуральные исчисления стали впоследствии весьма полезным логическим аппаратом, позволяющим снабдить каждого ученого, работающего в той или иной области конкретных наук, совокупностью правил, на основе которых можно осуществлять переход от одних содержательных утверждений к другим.

При исследовании свойств натурального исчисления Генцен пришел к теореме, характеризующей логические доказательства, которую он назвал «основной теоремой». В ней утверждается, что «каждое чисто логическое доказательство может быть приведено к некоторой определенной, хотя и неоднозначно, нормальной форме»<sup>2</sup>. Одним из следствий основной теоремы и является непротиворечивость арифметики.

Для формулировки основной теоремы в соответствующей форме и ее доказательства натуральное исчисление оказалось непригодным. Поэтому Генцен вводит особое исчисление логических выводов, которое называет логистическим (исчисление ЛК). Выводы в нем уже не содержат никаких допущений. Достигается это следующим образом. Если формула В доказана с использованием допущений  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , то формула  $(U_1 \& U_2 \& \dots \& U_N) \supset B$  является логически истинной. Чтобы избежать появления новых логических знаков  $\&$  и  $\supset$  и нарушения систематизации фигур заключения на фигуры введения и фигуры удаления, Генцен вводит понятие *секвенции*. При

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Исследования логических выводов С. 23.

<sup>2</sup> Там же. С. 10.

этом вместо формулы  $(U_1 \& U_2 \& \dots \& U_N) \supset B$  пишется секвенция  $U_1, U_2, \dots, U_N \rightarrow B$ .

Расширяя описанное понятие секвенции<sup>1</sup>, в общем случае можно сказать, что она представляет собой выражение вида

$$U_1, U_2, \dots, U_\mu \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_\nu$$

Содержательный смысл секвенции без свободных переменных можно определить следующим образом: если присутствуют все допущения  $U_1, U_2, \dots, U_\mu$ , то есть  $U_1 \& U_2 \& \dots \& U_\mu$  (передние формулы), то имеет место хотя бы одно из высказываний  $B_1, B_2, \dots, B_\nu$ , то есть  $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_\nu$  (задние формулы). Отсутствие в секвенции передних формул означает наличие задних без каких-либо допущений. Если в секвенции нет ни одной задней формулы, то подразумевается, что из допущений  $U_1, U_2, \dots, U_\mu$  невозможно сделать вывод, то есть они ведут к противоречию. Следовательно, секвенция без передних и задних формул («пустая секвенция») означает, что без каких-либо допущений получается противоречие. Очевидно, что, если данная секвенция выводима в некоторой системе, то сама эта система противоречива.

Таким образом, идея доказательства *непротиворечивости* системы, формализованной в виде секвенциального исчисления, состоит в том, чтобы доказать, что в данном исчислении *невозможно вывести пустую секвенцию*.

Исходной (основной) секвенцией является секвенция вида  $D \rightarrow D$ , где  $D$  — произвольная формула. Формула, входящая в секвенцию, называется *S-формулой*. Та *S-формула*, которая в схеме фигуры заключения содержит пропозициональную связку или квантор, называется *главной формулой* фигуры заключения.

*Вывод* в ЛК-исчислении — это древовидная фигура, состоящая из некоторого числа секвенций с самой нижней ко-

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода. С. 157.

нечной и несколькими *верхними секвенциями*, которые должны быть основными. *Нить вывода* — это цепь секвенций, которую проходят, когда спускаются, начиная от некоторой верхней секвенции до конечной. Связь между секвенциями в выводе устанавливается посредством фигур заключения. Они делятся на фигуры введения и удаления, как и фигуры заключения в натуральном исчислении. Генцен называет их *логическими фигурами заключения*.

Схемы фигур заключения для  $\&$ :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, U \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, U \& B};$$

$$\frac{U, \Gamma \rightarrow \Theta}{U \& B, \Gamma \rightarrow \Theta} \quad ; \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Theta}{U \& B, \Gamma \rightarrow \Theta}.$$

Схемы фигур заключения для  $\vee$ :

$$\frac{U, \Gamma \rightarrow \Theta \quad B, \Gamma \rightarrow \Theta}{U \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, U}{\Gamma \rightarrow \Theta, U \vee B} \quad ; \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, U \vee B}.$$

Схемы фигур заключения для  $\forall$ :

$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, F(\alpha)}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x F(x)}$ , где  $\alpha$  — переменная не встречающаяся в заключении правила;

$$\frac{F(t), \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall x F(x), \Gamma \rightarrow \Theta}, \text{ где } t \text{ — произвольный терм.}$$

Схемы фигур заключения для  $\exists$ :

$\frac{F(\alpha), \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x F(x), \Gamma \rightarrow \Theta}$ , где  $\alpha$  — переменная не встречающаяся в заключении правила;

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, F(t)}{\Gamma \rightarrow \Theta, \exists xF(x)}, \text{ где } t \text{ — произвольный терм.}$$

Схемы фигур заключения для  $\neg$ :

$$\frac{U, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg U};$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, U}{\neg U, \Gamma \rightarrow \Theta}.$$

Кроме этих фигур появляются новые, относящиеся не к логическим знакам, а к структуре самой секвенции. Их Генцен называет *структурными* фигурами заключения.

*Схемы структурных фигур заключения*

Утончение:  $\frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{D, \Gamma \rightarrow \Theta}; \frac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, D}$

Сокращение:  $\frac{D, D, \Gamma \rightarrow \Theta}{D, \Gamma \rightarrow \Theta}; \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D, D}{\Gamma \rightarrow \Theta, D}$

Перестановка:  $\frac{\Delta, D, \mathfrak{Z}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \mathfrak{Z}, D, \Gamma \rightarrow \Theta}; \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D, \mathfrak{Z}, \Delta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{Z}, D, \Delta}$

Сечение:  $\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, D \quad D, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}$

Среди структурных фигур заключения Генцен выделяет *сечение*. *Основная теорема* (о возможности приведения любого доказательства к некоторой нормальной форме) формулируется теперь так:

*Каждый ЛК-вывод можно преобразовать в ЛК-вывод с той же конечной секвенцией, в который не входит сечение*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Генцен Г. Исследования логических выводов. С. 30.

Особенность *сечения* по сравнению с другими правилами заключения состоит в следующем.

Назовем формулы, обозначенные в схемах фигур заключения буквами  $U$ ,  $B$ ,  $F(\alpha)$ , *боковыми*. Очевидно, они всегда выступают подформулами главной формулы. Из схем фигур заключения легко заметить два факта:

1) главная формула всегда стоит в нижней секвенции логических фигур заключения, боковые — в верхних;

2) если  $S$ -формула верхней секвенции некоторой фигуры заключения не является ни боковой формулой, ни формулой  $D$  сечения, то она входит и в нижнюю секвенцию.

Из этих замечаний следует, что  $S$ -формула может исчезнуть из вывода лишь в том случае, когда она является формулой  $D$  сечения или боковой формулой некоторой логической фигуры заключения. В последнем случае эта  $S$ -формула включается в главную формулу следующей секвенции в качестве подформулы. Учитывая это, Генцен формулирует следующую *дополнительную теорему* к основной теореме, выражающую **свойство подформульности**:

*В ЛК-выводе, не содержащем сечения, все входящие в него  $S$ -формулы являются подформулами  $S$ -формул, входящих в конечную секвенцию.*

В сочетании с дополнительной теоремой основная теорема означает, что каждое ЛК-исчисление может быть преобразовано так, что каждый вывод в нем будет обладать *свойством подформульности*. Таким образом, представленное посредством вывода доказательство не содержит окольных путей, к нему относятся лишь такие понятия, которые входят и в конечный результат.

Одним из следствий основной теоремы является непротиворечивость логики предикатов. Пустая секвенция не может быть нижней секвенцией никакой фигуры заключения, кроме сечения, то есть вообще не выводима.

Доказав основную теорему, Генцен формулирует и доказывает ее усиление. В усиленной теореме на конечную сек-

венцию вывода накладывает ограничение: она должна содержать кванторы всеобщности и существования только в начале, причем область действия каждого квантора — вся следующая за ним часть формулы. Тогда вывод такой секвенции можно преобразовать так, что он не только не будет содержать сечений, но и «распадется» на две части: верхнюю и нижнюю. Верхняя часть вывода не содержит кванторы всеобщности и существования, а в нижнюю входят только фигуры заключения с одной верхней секвенцией. Таким образом, нижняя часть такого вывода состоит из одной-единственной нити вывода.

Генцен строит формальную систему, включающую в себя понятия и аксиомы арифметики. Эта система является противоречивой тогда и только тогда, когда в ней существует вывод с конечной секвенцией  $U_1, U_2, \dots, U_\mu \rightarrow$ , где  $U_1, U_2, \dots, U_\mu$  — это арифметические аксиомы. Применяя усиленную теорему к этой системе, Генцен получает следующее утверждение: «Если арифметика противоречива, то, пользуясь лишь истинными арифметическими высказываниями и применяя лишь правила вывода логики высказываний, можно доказать противоречие». Но, «то, что из таких высказываний средствами логики высказываний не может быть выведено противоречие, почти очевидно, и доказательство этого может быть лишь формальным описанием ясного существа дела»<sup>1</sup>. Нужно отметить, что предыдущие рассуждения относились к арифметике без правила полной индукции, которое широко применяется в теории чисел. Поэтому, конечно, важная задача — это доказательство непротиворечивости арифметики с полной индукцией. Но, согласно теореме Геделя, сделать это средствами самой арифметики с полной индукцией невозможно. Генцен же предлагает доказательство с использованием трансфинитной индукции. Необходимо доказать, что никакой вывод не является противоречивым, то есть не имеет пустой последней секвенции. Для этого сначала доказывается непротиворечивость простых выводов. Затем с использованием полученных результатов —

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Исследования логических выводов. С. 58—59.

непротиворечивость более сложных выводов и т. д. Переход происходит индуктивно. При этом, прежде чем перейти к следующему классу выводов, нужно будет исчерпать бесконечный ряд выводов предыдущего класса. Это и означает применение трансфинитной индукции<sup>1</sup>.

Итак, решая задачу доказательства непротиворечивости чистой теории чисел, Генцен построил секвенциальное исчисление и доказал для него основную теорему. При этом он отметил, что возможность приведения любого доказательства к такому виду, что в нем более не встречается сечения, влечет за собой появление у него важного свойства — *подформульности*. Используя основную теорему, в которой существенным образом фигурирует свойство подформульности выводов, Генцен доказывает непротиворечивость чистой теории чисел. Таким образом, свойство подформульности было получено *не целенаправленно, а в ходе решения конкретной задачи* — доказательства непротиворечивости арифметики. Это свойство появилось как особенность доказательств без сечений в конкретном виде исчислений, а именно секвенциальных, введенных с целью доказательства непротиворечивости арифметики. На этом основании мы можем утверждать: *свойство подформульности представляет собой поризм, который, как мы покажем в дальнейшем, в конечном счете привел к возникновению новой теории — теории поиска вывода.*

Однако возникновение новой теории на основе поризма требует придания ему новой интерпретации и включения его в некоторую систему понятий, которая составит ядро этой теории. Такая новая интерпретация в данном случае состоит из двух этапов: 1) внутренняя теоретическая интерпретация поризма; 2) возникновение новой области задач, которая составляет внешнюю «квазиэмпирическую» интерпретацию поризма и обеспечивает его включение в новую систему понятий, что в конечном счете приводит к возникновению новой теории.

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел. С. 30.

Первый этап мы рассмотрим в этом и следующем параграфах, а второму будет посвящена вся третья глава.

Уже сама формулировка Генценом дополнительной теоремы, связанной со свойством подформульности, показывает, что построение доказательств, обладающих этим свойством, может с равным успехом идти как традиционным синтетическим путем — от аксиом к теореме — при помощи постепенного собирания доказуемой формулы из ее подформул, так и в обратном направлении — при помощи анализа исходной формулы на ее подформулы с целью получения основных секвенций — аксиом. В случае успешного построения дерева доказательства «снизу вверх» при чтении его «сверху вниз» получается обычное доказательство исходной формулы. Таким образом, обнаружение у доказательств в генценовском секвенциальном исчислении ЛК свойства подформульности показало, что доказательство в этом исчислении может строиться как «сверху вниз», так и «снизу вверх». В терминах рассматриваемой модели это обстоятельство вводит новую *аналитическую интерпретацию* основного объекта гильбертовской теории доказательств — формального доказательства. Поскольку данный объект представляет собой понятие формального доказательства вместе с его синтетической интерпретацией «сверху вниз», возможность новой аналитической интерпретации создает возможность нового теоретического объекта. А так как синтетическая и аналитическая интерпретации противоположны, то новый теоретический объект означает *рассогласование* с первоначальной интерпретацией объекта теории доказательств и требует развития нового взгляда на доказательства в секвенциальных исчислениях как на объекты, обладающие важными «аналитическими» свойствами. Построение доказательства, обладающего свойством подформульности, «снизу вверх» реализует некоторую элементарную стратегию его поиска, в которой структура доказываемой секвенции и выделение в ней главного знака почти однозначно<sup>1</sup> определяют следующий

---

<sup>1</sup> За исключением применения так называемых минус-правил: правил введения квантора общности в антецедент и квантора существования в сукцедент секвенции.

шаг построения доказательства. Тем самым построение доказательства исходной секвенции «снизу вверх» включает в себя формализацию некоторой стратегии его обнаружения, а значит, порождает возможность нового теоретического объекта — *поиска вывода*. Если в аксиоматических системах доказательства обычно рассматриваются как линейные структуры (последовательности формул), то секвенциальные доказательства (выводы) — это всегда древовидные структуры, причем допускающие построение как «сверху вниз», так и «снизу вверх» (если устранены сечения). Последний подход позволяет говорить о возможности построения некоторой систематической процедуры поиска доказательства. Однако аналитическая интерпретация доказательств в свете обладания ими свойством подформульности создает только *возможность* определения процедур поиска доказательств. В действительности появление нового теоретического объекта и последующее возникновение на этой основе теории поиска вывода потребовало еще и создания новой области задач — автоматического доказательства теорем.

**§ 3. Использование свойства подформульности  
в теоретической логике:  
таблицы Бета и модельные множества Хинтикки**

Наличие у доказательств исчисления свойства подформульности позволяет доказывать секвенции, применяя фигуры заключения «снизу вверх» — от доказываемой секвенции к ее непосредственным предшественникам и так далее, пока все секвенции не окажутся основными. В результате возникает возможность построения *процедуры поиска доказательства*.

Однако сам Генцен не формулирует идею организации поиска доказательства, основанного на принципе подформульности. В свете поризматической модели происхождения теории этот факт объясняется тем обстоятельством, что он решал задачу (доказательство непротиворечивости), поставленную еще в исходной — гильбертовской теории доказательств. За-

дача доказательства непротиворечивости относится к метаязыковому формальной системы и решается при помощи обоснования утверждения об исчислении в целом. Для определения процедур поиска вывода на основе свойства подформульности нужно было сформулировать *новую цель* исследовательской деятельности — *построение доказательства в самом исчислении*. Хотя эта цель уже неявно содержалась в аналитической интерпретации формального доказательства, ее надо было четко сформулировать для того, чтобы на основании свойства подформульности определить процедуры поиска вывода<sup>1</sup>. Такого рода интерпретация исчислений секвенциального типа появилась не у Генцена, а позднее — в середине 1950-х годов — в работах голландского логика Э. Бета и финского логика Я. Хинтикки.

В статье 1956 года и книге «Основания математики», изданной в 1959 году, Э. Бет излагает разработанный им метод семантических таблиц для классической логики предикатов<sup>2</sup>. Суть этого метода заключается в следующем. Для доказательства того, что формула  $V$  является логическим следствием формул  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , необходимо доказать, что не существует контрпримера, то есть невозможна такая ситуация, при которой формулы  $U_1, U_2, \dots, U_N$  истинны, а формула  $V$  ложна. Руководствуясь этими соображениями, Бет предложил систематический метод построения контрпримера, который «состоит в выписывании *семантической таблицы*»<sup>3</sup>. Делается это следующим образом.

Таблица делится на два столбца: в левый выписываются истинные формулы, в правый — ложные. По определению контрпримера первоначально в левый столбец записываются формулы  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , а в правый — формула  $V$ . Затем, исхо-

---

<sup>1</sup> О характере поиска вывода как вида деятельности и его отличии от доказательства см.: Брюшинкин В. Н. О методологическом значении различения понятий «вывод» и «поиск вывода» // *Философские науки*. 1984. № 4. С. 49—54.

<sup>2</sup> Бет Э. В. Метод семантических таблиц // *Математическая теория логического вывода*. С. 191.

<sup>3</sup> Там же. С. 192.

дя из смысла логических союзов и кванторов, исходные формулы последовательно разбиваются на подформулы, которые заносятся в один из столбцов. При этом таблица может разбиваться на подтаблицы. Подтаблица называется замкнутой, если одна и та же формула встречается в левом и правом столбцах. Если все подтаблицы некоторой таблицы замкнуты, то сама таблица тоже замкнута. Если семантическая таблица оказалась замкнутой, это означает, что все попытки построить контрпример привели к противоречию, следовательно, формула  $V$  действительно является логическим следствием формул  $U_1, U_2, \dots, U_N$ . Если же хотя бы одна подтаблица оказалась незамкнутой, то контрпример найден, и формула  $V$  не следует из формул  $U_1, U_2, \dots, U_N$ .

Бет замечает, что в случае, если таблица замкнута, ее легко переделать в формальный вывод формулы  $V$  из формул  $U_1, U_2, \dots, U_N$ . Этот вывод обладает несколькими особенностями. Во-первых, он «очень похож на способ рассуждений, которым мы обычно пользуемся», и «полностью согласуется с семантической интерпретацией формул»<sup>1</sup> (интересно, что и Генцен одним из главных достоинств своих натуральных выводов называл их близость к естественным рассуждениям). Кроме того, для него выполняется свойство подформульности, так как при построении первоначальной таблицы исходные формулы разбивались на подформулы. Бет разработал соответствующую систему натуральной дедукции, в которой могут строиться такие выводы. Таким образом, попытка построить контрпример для доказательства того, что  $V$  не является логическим следствием формул  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , эквивалентна поиску непосредственного вывода  $V$  из  $U_1, U_2, \dots, U_N$ .

Другой подход к использованию свойства подформульности для поиска вывода связан с понятием *модельного множества*, введенным Я. Хинтиккой<sup>2</sup>. Рассматривая философские

---

<sup>1</sup> Бет Э. В. Метод семантических таблиц. С. 195.

<sup>2</sup> Hintikka J. Form and content in quantification theory. Two Papers on Symbolic Logic // Acta Philosophica Fennica. 1955. Vol. 21. P. 11—55.

проблемы логики, в качестве центрального он вводит понятие «возможный мир». Его «можно интерпретировать либо как возможное положение дел, либо как возможное направление развития событий»<sup>1</sup>. С понятием «возможный мир» непосредственно связано другое важное понятие — «описание возможного мира». Одним из таких описаний возможных положений дел являются, например, карнаповские описания состояний. Хинтикка отмечает две характерные черты описаний состояний: они содержат имена элементов данной индивидуальной области и имена предикатов из некоторого фиксированного множества предикатов, то есть представляют собой исчерпывающие описания возможных миров. Следовательно, при рассмотрении бесконечных областей описания состояний становятся бесконечными, что делает оперирование с ними затруднительным.

В качестве одного из возможных выходов Хинтикка предлагает ограничиться частичными описаниями универсума рассуждения, тем не менее «достаточно полными, чтобы показать логическую возможность описываемого положения дел»<sup>2</sup>. Такими частичными описаниями возможных положений дел являются модельные множества. Модельное множество — это «множество  $\mu$  всех предложений, истинных в мире, представляемом некоторым описанием состояния»<sup>3</sup>. Это множество характеризуется рядом условий, которые аналогичны условиям истинности для пропозициональных связок и кванторов. Например, если  $(F_1 \vee F_2) \in \mu$ , то  $F_1 \in \mu$  или  $F_2 \in \mu$  (правило  $(C.\vee)$ ). Вообще, все эти условия сформулированы «по нисходящей», то есть утверждают, что если сложная формула входит в модельное множество, то и некоторые ее подформулы тоже. Кроме того, если атомарное предложение содержится в  $\mu$ , то его отрицание не может входить в  $\mu$  (условие  $(C.\neg)$ ). Хинтикка доказал, что предложение выполнимо (то есть истинно в неко-

---

<sup>1</sup> Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М. : Прогресс, 1980. С. 38.

<sup>2</sup> Там же. С. 44.

<sup>3</sup> Там же. С. 45.

тором возможным мире), если и только если оно может быть встроено в некоторое модельное множество. Чтобы доказать логическую истинность некоторого предложения  $F$ , достаточно доказать невыполнимость его отрицания  $\neg F$ . Для этого нужно взять единичное множество, состоящее из  $\neg F$ , и расширять его по правилам построения модельных множеств. Очевидно, что применение правила  $(C.\vee)$  приведет к расщеплению построения модельного множества на две альтернативные ветви. Если все попытки встроить  $\neg F$  в модельное множество приводят к нарушению условия  $(C.\neg)$ , то  $\neg F$  противоречиво, а следовательно,  $F$ -логически истинно.

Модельные множества Хинтикки оказались удобным средством для доказательства полноты логических систем без сечения. В этом случае модельное множество — это совокупность формул, расположенных на одной ветви поиска доказательства или опровержения.

Таким образом, Э. Бет и Я. Хинтикка использовали свойство подформульности в системах без сечения для построения доказательства «снизу вверх». Аппарат семантических таблиц Бета, усовершенствованный Р. Смаллианом, под именем аналитических таблиц вошел в совокупность методов современной символической логики и служит удобным средством для решения многих задач<sup>1</sup>. Модельные множества, помимо их применения для решения логических задач, нашли приложения в философии, в частности при анализе философии Канта и исследовании «образной теории языка» Л. Витгенштейна.

В целом и Бет, и Хинтикка использовали свойство подформульности для построения процедур *доказательства*, в то время как существенной чертой теории поиска вывода выступает ее нацеленность на отыскание и реализацию процедур *поиска доказательства*. Чтобы отличие стало очевидным, выделим в составе логической процедуры две подсистемы: *вывод* и *поиск вывода*. Вывод формулы  $F$  мы понимаем в обычном

---

<sup>1</sup> Подробнее об этом см.: Антонова О. А. Табличные методы в логике. СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 2003. С. 53—70.

смысле — как формальную конструкцию, состоящую из аксиом, гипотез и формул, полученных из предыдущих по правилам вывода, где последней формулой является формула  $F$ . Очевидно, что никакой информации о том процессе, который привел к получению вывода, он сам не дает. Поэтому для того чтобы говорить о действиях, приведших к появлению вывода, необходимо ввести понятие *поиска вывода*. Таким образом, в системе логической процедуры *процесс* рассуждения представляется подсистемой *поиска вывода*, а *результат* — подсистемой *вывода*<sup>1</sup>. И хотя Бет и Хинтикка строят методы *вывода* (доказательства) в системах секвенциального типа, использование которых в дальнейшем позволило моделировать и подсистему *поиска вывода* (доказательства), сами они такого различия не проводят. Вероятно, это обусловлено тем, что в таком различии не было необходимости, пока не стоял вопрос о возможности машинного моделирования логических процедур.

Цели, которые ставили и Бет, и Хинтикка, в целом не выходят за рамки теории доказательств. Не случайно и семантические таблицы, и модельные множества были использованы их авторами для доказательства метатеорем исчисления предикатов, таких, как, например, полнота этого исчисления. Иначе говоря, новые методы были применены для решения задач, поставленных еще в теории доказательств, и тем самым не привели к осознанию поиска вывода как нового теоретического объекта, отличного от формального доказательства в некотором исчислении.

Для превращения непредвиденного следствия в новую теорию необходимо включение поризма в другую систему задач и понятий. Такого рода включение достигается при помощи интерпретации поризма на иной предметной области или области задач. Такой областью стало автоматическое доказательство теорем на ЭВМ.

---

<sup>1</sup> Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. С. 30.

## Глава 3

---

### АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЭВРИСТИК

#### § 1. Ранняя история автоматического доказательства: программа «Логик-теоретик»

В начале 1950-х годов сформировалось особое направление в кибернетике, связанное с изучением и моделированием сложных форм психической деятельности. Эта область исследований получила название «эвристическое программирование». В сферу интересов эвристического программирования вошли такие проблемы, как решение задач, формирование понятий, выдвижение гипотез, игра в интеллектуальные игры, а также создание программ, способных обучаться и отвечать на вопросы. Все это оказалось весьма затруднительным по ряду причин. Одним из препятствий на пути решения машиной интеллектуальных задач стало то, что многие интересные задачи из различных областей знания не являются формализованными. В связи с этим значительное внимание исследователей было направлено на такие области науки, где необходимый уровень формализации уже существует или легко достижим. Речь идет о доказательстве математических теорем и теорем математической логики: «Учитывая современный уровень достижений в разработке и создании мощных вычислительных машин и в искусстве программирования их действий, вполне естественно предположить возможность использования компьютеров в решении некоторых проблем формального вывода. Эта

возможность существенно подтверждается тем фактом, что, фактически, логика высказываний играла центральную роль в создании компьютеров и геделевский метод арифметизации дает нам принципиальную возможность свести любую логическую проблему к арифметической»<sup>1</sup>. Направление эвристического программирования, занимающееся этим классом задач, получило название «автоматическое доказательство теорем».

Первые работы по автоматическому доказательству теорем появились в середине 1950-х годов. Были написаны программы, цель которых заключалась в доказательстве теорем математической логики из работы Уайтхеда и Рассела «Principia Mathematica». Можно обозначить два основных направления, по которым стали двигаться ученые при написании этих программ. Одно из них реализовывали А. Ньюэлл, Дж. Шоу и Г. Саймон, а также Г. Гелернтер и Н. Рочестер. Во втором направлении исследования вели несколько ученых: Хао Ван, П. Гилмор, М. Дэвис и Х. Патнем и др. Рассмотрим детально сначала первый из этих подходов.

А. Ньюэлл, Дж. Шоу и Г. Саймон в 1956 году написали программу «Логик-теоретик», задачей которой было доказательство теорем в исчислении высказываний. Уточняя понятие *задачи*, авторы программы полагают, что она задана, когда выполнены два условия: 1) имеется некоторая процедура, позволяющая вырабатывать множество возможных решений; 2) имеется способ проверки того, является ли данный элемент этого множества действительно решением поставленной задачи. Ньюэлл, Шоу и Саймон отмечают<sup>2</sup>, что цель их исследования — разобраться в сложных процессах, участвующих в ре-

---

<sup>1</sup> Beth E. W. Formal Methods: An Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1961. P. 113.

<sup>2</sup> Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Эмпирические исследования машины «Логик-теоретик»; пример изучения эвристики // Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 113.

шении задач. Эти процессы, то есть те, которые *могут* решить данную задачу, но не дают никаких гарантий, они называют «эвристическими процессами», или «эвристиками». По замыслу авторов «Логика-теоретика», использование эвристик должно помочь понять, «каким образом, например, математик в состоянии доказать теорему, даже если он вначале не знает, как ему это сделать, и сможет ли он вообще ее доказать»<sup>1</sup>, то есть механизмы, управляющие математическим творчеством. Другим возможным вариантом процесса доказательства может быть *алгоритм*. Под алгоритмом понимается процедура, дающая гарантию того, что если задача имеет решение, то это решение рано или поздно будет найдено.

Программа «Логик-теоретик» работает с аксиоматическим исчислением высказываний, в котором заданы пять аксиом и три правила вывода.

Аксиомы:

1.  $(p \vee p) \rightarrow p$ .
2.  $p \rightarrow (q \vee p)$ .
3.  $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ .
4.  $(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$ .
5.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$ .

Правила вывода:

1. *Правило подстановки*: любую переменную в любой теореме можно заменить на любое выражение, при условии, что заменяется каждое вхождение переменной.

2. *Правило замены*: любую логическую связку можно заменять ее определением через другие связки.

3. *Правило отделения (modus ponens)*: если  $A$  и  $A \rightarrow B$  — теоремы, то  $B$  — тоже теорема.

Доказательством формулы  $A$  в данной системе является такая последовательность формул, где каждая либо аксиома, либо уже доказанная теорема, либо получена из предыдущих

---

<sup>1</sup> Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Указ. соч. С. 113.

формул с использованием одного из правил вывода, а последней в списке выступает формула  $A$ .

В качестве алгоритмического процесса, находящего такие доказательства, Ньюэлл, Шоу и Саймон рассматривают алгоритм Британского музея. Суть этого алгоритма такова. Если нужно доказать некоторую теорему логики высказываний  $A$ , то систематически строятся все возможные доказательства и проводится проверка, не совпадает ли последняя теорема в доказательстве с формулой  $A$ . Очевидно, что такой алгоритм является крайне неэффективным и требует огромных затрат машинного времени и памяти для решения самых простых задач. Так, Ньюэлл, Шоу и Саймон замечают, что для выработки доказательства всех теорем из главы 2 «Principia Mathematica» потребовались бы сотни тысяч лет счета.

Авторы «Логика-теоретика» из вышесказанного делают следующий вывод: для того чтобы иметь возможность доказывать теоремы логики высказываний за приемлемое время, «должны быть радикально изменены как порядок, в котором вырабатываются возможные доказательства, так и способ их проверки»<sup>1</sup>. В связи с этим они отказались от алгоритмического подхода. Предложенные ими процедуры делают процесс поиска доказательства более осмысленным и, как показали эксперименты, гораздо более эффективным. Однако они не гарантируют того, что доказательство когда-либо будет найдено, каковы бы ни были затраченные усилия.

Ньюэлл, Шоу и Саймон используют для доказательства теорем особые типы эвристик, которые они называют *методами*. Эти методы представляют собой наборы операций, которые генерируют возможные доказательства не подряд (как в алгоритме Британского музея), а исходя из структуры доказываемой теоремы. Это, по замыслу авторов, придает процессу поиска доказательства некоторую целесообразность и значительно увеличивает его эффективность. «Логик-теоретик» содержит четыре основных метода<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Указ. соч. С. 123.

<sup>2</sup> Там же.

Для повышения эффективности работы в «Логике-теоретике» применяются также дополнительные процедуры: *процедура сравнения* и *испытание на подобие*, которые фактически являются дополнительными эвристиками.

Процедура сравнения по некоторым признакам сравнивает структуру доказываемого выражения со структурой аксиом и теорем. Выбирая для дальнейшей работы только аксиомы или теоремы, «похожие» на доказываемое выражение, процедура сравнения позволяет существенно сократить время работы программы. Функция процедуры испытания на подобие состоит в том, чтобы до применения сравнения отбрасывать те теоремы и аксиомы, которые с большой вероятностью не пройдут успешно процедуру сравнения. Однако затраты времени на проведения испытания на подобие часто оказываются не меньшими, чем на процедуру сравнения. Кроме того, как мы уже отмечали, испытание на подобие является лишь эвристикой, которая не дает ни гарантии того, что выбираются только сравнимые выражения, ни того, что некоторые из них не окажутся отброшенными как не прошедшие проверку на подобие.

Описанные методы гарантируют выполнение двух условий, предъявляемых к доказательствам. Во-первых, любая выработанная ими подзадача представляет собой часть последовательности выражений, которая оканчивается доказываемой теоремой. Во-вторых, каждое выражение последовательности получается из предыдущих по правилам вывода. Однако эвристические методы не гарантируют выполнения третьего требования, предъявляемого к доказательству. Выбранное начало последовательности может не привести к аксиомам или теоремам, так как подзадачи могут оказываться ложными выражениями. Кроме того, нет гарантии, что вообще когда-либо удастся найти теорему, которую можно использовать для получения доказательства методом подстановки, или теорему, которая породит подзадачу любым из трех других методов. Эти ограничения можно назвать теоретическими, так как они являются свойством любого эвристического метода. На прак-

тике выявились следующие проблемы. Оказалось, что затраты, необходимые для проведения более, чем одношаговых доказательств (то есть случаев, когда применяется только метод подстановки), очень велики. Точнее, «Логик-теоретик» более или менее успешно справляется с одно- и двухшаговыми доказательствами, доказательства большей глубины за редкими исключениями оказываются недоступными. Дело в том, что выработка подзадач в методах отделения и цепеобразования управляется алгоритмической процедурой, гарантирующей, что все подзадачи, которые можно получить данными методами, будут образованы. Вследствие этого с увеличением глубины доказательства число исследуемых подзадач растет экспоненциально, что быстро исчерпывает машинные ресурсы.

Естественно, по сравнению с алгоритмическим методом Британского музея, эвристические методы, предлагаемые Ньюэллом, Шоу и Саймоном, дают значительные преимущества. Однако нужно принять во внимание, что указанный алгоритм является наименее осмысленным и самым неэффективным из всех возможных. Ньюэлл, Шоу и Саймон отмечают, что стремились получить доказательства теорем логики высказываний в духе Уайтхеда и Рассела, то есть доказательства в аксиоматическом исчислении высказываний (поэтому доказательство теорем методом таблиц истинности для них неприемлемо). Если стремиться работать именно в аксиоматическом исчислении, то, действительно, «Логик-теоретик» реализует процедуры доказательства достаточно эффективно для такой «неудобной» системы.

Как отмечали авторы «Логика-теоретика», процедура доказательства, реализованная в этой программе, претендует на адекватное отражение некоторых важных свойств человеческого мышления, которые закреплены в эвристиках.

Известно, что с самого начала существования эвристического программирования, одним из направлений которого стало автоматическое доказательство теорем, оно было нацелено на исследование и моделирование различных форм психиче-

ской деятельности человека. Как уже отмечалось, для того чтобы говорить о логической процедуре как об адекватной модели рассуждения, необходимо разделить ее на две подсистемы — *вывод* и *поиск вывода*. В этом случае творческая деятельность субъекта познания по отысканию доказательства (вывода), включающая в себя пробы подстановки в аксиомы или выбор конкретных аксиом по схемам аксиом, введение дополнительных допущений, устранение ошибок, выработку новых правил, позволяющих быстро находить подстановки и нужные допущения, представляется подсистемой поиска вывода<sup>1</sup>. Доказательством того, что исследователей в области автоматического доказательства теорем с самого начала интересовал этот второй компонент логической процедуры, может служить следующая цитата: «Притягательная сила доказательства машиной теорем лежит не столько в *конечном результате* (получение теорем), сколько в *средствах достижения этой цели* (глубокое изучение структуры процесса переработки информации при математическом творчестве)»<sup>2</sup>.

Итак, можно утверждать, что уже в ранних исследованиях по автоматическому доказательству теорем была поставлена задача формализации процесса поиска логического вывода. Тем самым была открыта новая область *прикладных исследований*, заключающихся в разработке процедур (или в пределе алгоритмов) поиска вывода. Однако эвристики, применяемые в «Логик-теоретике», которые и должны моделировать собственно творческие моменты в отыскании доказательства, носят характер внешних по отношению к основным методам и обусловленных исключительно опытом и интуицией создателей программы. Нам представляется, что это связано прежде всего с отсутствием в аксиоматических исчислениях явно сформулированных правил, позволяющих уменьшать неопределенность поиска. Таким обра-

---

<sup>1</sup> Подробнее см. Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. С. 31.

<sup>2</sup> *Вычислительные машины и мышление* : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 111.

зом, задача формализации эвристических принципов в самом логическом исчислении еще не была поставлена.

Говоря о причинах того, что к большим успехам в автоматическом доказательстве теорем методы, подобные реализованным в «Логике-теоретике», не привели, нужно отметить следующий момент. Дело в том, что доказательство теорем в аксиоматическом исчислении является вообще очень сложным, и процесс поиска доказательства в таком исчислении как раз довольно далек от реальных процессов доказательства, например, математических теорем. Значительно ближе к естественным способам рассуждения исчисления высказываний генценовского типа. Более того, оказалось, что программы по автоматическому доказательству теорем, основанные на таких исчислениях, гораздо более эффективны, чем «Логик-теоретик». Работы в этом направлении вели ряд исследователей. В частности, нам необходимо рассмотреть подход к данной проблеме Хао Вана, сделавшего большой шаг вперед на пути становления теории доказательств как новой ветви прикладной логики.

## § 2. Применение секвенциальных исчислений: процедура Хао Вана

Хао Ван вел свои исследования параллельно с Ньюэллом, Шоу и Саймоном, однако использовал подход, коренным образом отличавшийся от подхода авторов «Логика-теоретика». Если Ньюэлл, Шоу и Саймон утверждают превосходство своих эвристических методов над алгоритмическими, приводя в качестве доказательства алгоритм Британского музея, то Хао Ван вполне резонно замечает, что «обосновывать превосходство "эвристических" методов над алгоритмическими посредством выбора исключительно неэффективного алгоритма едва ли разумно»<sup>1</sup>. Хао Ван отмечает, что Ньюэлл, Шоу и Саймон

---

<sup>1</sup> Ван Хао. На пути к механической математике // Кибернетический сборник : сб. науч. тр. / под ред. А.А. Ляпунова [и др.]. М. : Изд-во иностранной лит-ры, 1962. Вып. 5. С. 118.

используют многообещающий термин «эвристика» для обозначения всего лишь частного метода, не гарантирующего общего решения данной проблемы. Он предлагает в данном случае использовать более подходящее слово «стратегия». Хао Ван полагает, что там, где существует достаточно простой эффективный общий алгоритм, его реализация гораздо более целесообразна, нежели попытки применять стратегии. Например, его первая программа, написанная для доказательства теорем логики высказываний, доказала 200 теорем из первых пяти глав «Principia Mathematica» менее, чем за три минуты. При этом те 52 теоремы, которые «Логик-теоретик» доказывал с переменным успехом в течение десятков минут, были доказаны приблизительно за 30 секунд. При этом Хао Ван не отрицает значения частных стратегий для повышения эффективности процедур в том случае, когда общий алгоритм является очень сложным или же не существует вовсе (как, например, в исчислении предикатов первого порядка в целом).

Итак, в трех своих программах для доказательства логических теорем Хао Ван реализует алгоритмические процедуры, основанные на исчислениях предикатов, свободных от сечений, общая теория которых была разработана Эрбраном и Генценом. Нам представляется полезным рассмотреть теоретический аппарат и практические результаты программ Хао Вана детально. Сделаем это, следуя его фундаментальной статье «На пути к механической математике»<sup>1</sup>.

Прежде всего Хао Ван отмечает, что в его программах с небольшими изменениями реализуются уже имеющиеся в логике формализмы исчисления предикатов. В том числе используются идеи, высказанные Бетом и Хинтиккой.

Возможность построения полной процедуры для исчисления предикатов с равенством основывается на описанном Эрбраном и Генценом устранении сечения. Причем для исчисления высказываний, исчисления одноместных предикатов и некоторых его расширений данная процедура становится доказа-

---

<sup>1</sup> Ван Хао. Указ. соч. С. 114—169.

тельность-разрешающей. Невозможность построения разрешающей процедуры для исчисления предикатов в целом объясняется существованием правила сокращения, которое позволяет освобождаться от повторений одной и той же формулы. Из-за этого правила в некоторых случаях процедура доказательства или опровержения может никогда не окончиться, хотя ни на каком конечном этапе это не будет известно. Однако для многих разрешимых фрагментов исчисления предикатов возможна такая формализация, что правило сокращения уже не будет встречаться. Хао Ван рассматривает следующие случаи. Прежде всего, естественно, самым простым из них является исчисление высказываний. Для него можно дать простую систему, которая одновременно выступает и полной процедурой доказательства и полной процедурой разрешения. Эта процедура реализована Хао Ваном в первой программе. Далее рассматривается «*AE*-исчисление предикатов», характеризующееся тем, что все предложения в нем могут быть приведены к такой «предваренной форме», что никакой квантор общности не входит в сферу действия квантора существования. Для этого исчисления предлагаются различные методы.

### *Программа для исчисления высказываний*

Исчисление высказываний Хао Ван называет «системой *P*» и формулирует его в секвенциальном виде в полном соответствии с генценовской традицией. Так, формулируются одиннадцать правил вывода: десять правил введения логических связок в антецедент или консеквент секвенции и начальное правило, соответствующее генценовскому понятию основной секвенции. Начальное правило: если  $\lambda, \xi$  — цепочки атомарных формул, то  $\lambda \rightarrow \xi$  есть теорема, если некоторая атомарная формула встречается по обе стороны от стрелки. Правила построены таким образом, чтобы, имея любую данную секвенцию и найдя в ней первую логическую связку, можно было применить соответствующее правило для ее исключения, получая при этом одну или две посылки. Процесс может повторяться до тех пор, пока не будет

получено множество секвенций с одними только атомарными формулами. Все эти секвенции вместе образуют множество посылок исходной секвенции. При помощи начального правила проверяется, являются ли все они теоремами. Если да, то исходная секвенция — теорема, и мы можем получить ее доказательство в обычном смысле слова, если запишем описанные шаги в обратном порядке. В противном случае получается опровергающий пример, и, соответственно, опровержение.

### *Программа для исчисления предикатов*

Рассматривается фрагмент исчисления предикатов с равенством. Вводятся понятия положительного и отрицательного квантора, которые позволяют избежать явного использования предваренной нормальной формы формулы. Это желательно сделать, поскольку предваренная нормальная форма указывает для каждого квантора максимальную область действия, и формула в таком виде очень сложна для доказательства. Если в формуле никакой отрицательный квантор не управляет положительным, то она приведена к «*AE*-форме». Другое важное понятие — «минисферный» вид формулы, которое в определенном смысле противоположно понятию предваренной формы. Работа с формулами в минисферном виде удобна, но процедура приведения формулы к этому виду может оказаться очень сложной, что накладывает ограничение на применимость описываемого метода.

Для секвенций, формулы которых не содержат символов функций и приведены к минисферному виду и к *AE*-форме, Хао Ван предлагает процедуру разрешения, которую он называет системой *Qp*. Она включает в себя шесть этапов. Рассмотрим их.

1-й этап. Каждая формула доказываемой секвенции приводится к минисферному виду, и правила вывода исчисления высказываний применяются везде, где только возможно. Получается конечное множество секвенций, эквивалентное исходной секвенции.

2-й этап. Для каждой секвенции проверяется — находится ли она в *AE*-форме. Если нет, то исходная секвенция не принадлежит *AE*-исчислению, и в данной системе ее ни доказать, ни опровергнуть нельзя.

3-й этап. В секвенции *AE*-исчисления опускаются все кванторы и заменяются все переменные, связанные отрицательными кванторами, на числа. В полученных секвенциях уже не будет содержаться кванторов.

4-й этап. К полученным секвенциям применяются правила удаления логических связок. Получается конечное множество секвенций, не содержащих логические константы. К каждой секвенции применяется основное правило и сохраняются только те секвенции, которые не являются верными.

5-й этап. Выписываются все переменные и числа, встречающиеся в последнем множестве секвенций. Производятся все возможные подстановки переменных на место чисел. Начальная секвенция из 3-го этапа является теоремой, если имеется такая подстановка, которая делает все секвенции в последнем множестве теоремами.

6-й этап. Исходная секвенция — это теорема, если все секвенции, полученные на 1-м этапе, оказываются теоремами после 3—5-го этапов.

Хао Ван показывает, что программа, основанная на описанной процедуре с небольшими изменениями, может доказывать все 158 теорем «Principia». Нужно, однако, отметить, что дополнительные правила вводятся в программу как раз для того, чтобы иметь возможность доказывать те несколько теорем из «Principia», которые первоначально программа доказать не могла. Таким образом, на какую-то общность данная программа, конечно, не претендует. Кроме того, естественно, наибольшее время затрачивается на поиск подходящей подстановки в 5-м этапе. В рассматриваемых случаях число возможных подстановок, очевидно, невелико, это и позволяет программе доказывать теоремы за приемлемое время.

Хотя Хао Ван доказывает корректность и полноту описанного метода, тем не менее, очевидно, что множество практи-

чески разрешимых с его помощью теорем весьма ограничено. Прежде всего потому, что выполнение 5-го этапа на практике затруднительно. Если искомая подстановка окажется достаточно простой, то можно ожидать, что машина сможет дать ответ в приемлемое время. В противном случае, скорее всего, для осуществления необходимого числа подстановок просто не хватит машинных ресурсов (памяти и времени). Хао Ван признает это и замечает, что необходим ряд улучшений метода. В частности, вероятно, полезно было бы включить в него некоторые стратегии, позволяющие не перебирать подряд дизъюнкции  $S_1, S_1 \vee S_2, S_1 \vee S_2 \vee S_3, \dots$ , проверяя их все на тавтологичность, а выбрать сразу наиболее «подходящие».

Итак, автоматическое доказательство теорем, являющееся частью более широкой области науки — эвристического программирования, с самого начала получило два направления. Это эвристические методы Саймона, Ньюэлла и Шоу и алгоритмические методы. Уже первые результаты исследований показали, что возможность эффективно доказывать теоремы логики высказываний и логики предикатов дает лишь использование систем, свободных от сечений. Так, при удалении правила *modus ponens* из исчисления высказываний оказалось, что все строки в доказательстве секвенции являются ее частями, то есть процедура обладает свойством подформульности. В результате всегда можно решить, существует доказательство или нет, по крайней мере, теоретически. В случае использования *modus ponens* перебор формул, подходящих для доказательства теоремы, может оказаться бесконечным. Поскольку для исчисления предикатов не существует процедуры разрешения, то из этой области расширение, то есть потенциально бесконечный перебор подстановок, полностью исключить нельзя.

Тем не менее работа Хао Вана наглядно продемонстрировала возможности, открываемые перед машиной в новой широкой области исследований в связи с использованием секвенциальных исчислений без сечения, выводы в которых обладают свойством подформульности. Он предложил называть эту

новую область науки «инференциальным анализом», мы же можем сказать, что, фактически, идеи Хао Вана вполне согласуются с идеями, лежащими в основе теории поиска логического вывода — теории, исследующей возможные способы решения задач в логических исчислениях.

Одним из путей преодоления трудностей, связанных с невозможностью полного устранения из исчисления предикатов правил, требующих бесконечного перебора, может быть использование метода метапеременных.

### § 3. Идея метапеременности в процедуре Кангера

Идея использования метапеременных была предложена одновременно Н. А. Шаниным, Д. Правицем и С. Кангером. Рассмотрим процедуру Кангера, явно опирающуюся на метод введения метапеременных<sup>1</sup>.

Говоря о возможных путях совершенствования методов автоматического доказательства теорем, Кангер не отрицает полезности применения эвристик, однако замечает, что использование целесообразно отложить до тех пор, «пока мы не будем иметь удовлетворительного метода доказательства в качестве основы для введения эвристических соображений»<sup>2</sup>.

Таким «удовлетворительным методом доказательства» Кангер считает уже рассмотренный нами метод поиска вывода «снизу вверх», основанный на свойстве подформульности выводов в исчислениях генценовского типа без сечений. Он, однако, замечает, что все предложенные методы, реализующие эту идею, являются все еще очень сложными с точки зрения их программной реализации. Кангер предлагает упрощение шаблона методов доказательства генценовского типа. Этот шаблон можно описать следующим образом. Если мы желаем

---

<sup>1</sup> Кангер С. Упрощенный метод доказательства для элементарной логики // Математическая теория логического вывода. С. 200—207.

<sup>2</sup> Там же. С. 201.

получить доказательство секвенции  $\Gamma \rightarrow F$ , то, выбирая эту секвенцию в качестве нижней, начинаем строить дерево стоящих выше секвенций посредством применения снизу вверх правил вывода. Если удастся построить такое дерево, в котором вершина каждой ветви является аксиомой, то вывод получен. Кангер отмечает, что, следуя этому шаблону и имея в запасе неограниченное время и память, можно всегда построить такое дерево вывода для любой выводимой секвенции  $\Gamma \rightarrow F$ . Основная трудность, по мнению Кангера состоит в том, что некоторые правила вывода ( $\rightarrow\exists$ ,  $\forall\rightarrow$ ) предполагают возможность продолжения ветви дерева более, чем одним способом. Поэтому целесообразно было бы разработать некоторые соображения, позволяющие выбрать наиболее благоприятные (с точки зрения простоты окончательного вывода) пути продолжения ветвей дерева вывода.

Кангер реализует этот план следующим образом. Он вводит понятие «ранга термина»: параметры и константы являются терминами ранга *нуль*, а терм  $f(c_1, \dots, c_n)$  — ранга  $r + 1$ , где  $r$  — максимальный из рангов термов  $c_1, \dots, c_n$ . Затем правила вывода, постулирующие понятие равенства в исчислении предикатов, ограничиваются таким образом, чтобы при их применении снизу вверх никогда не происходило замены термина на терм с большим рангом. Это требование, очевидно, соответствует свойству подформульности в применении к указанным правилам вывода. Главное же состоит в том, что изменяется формулировка тех двух правил вывода, контрприменение<sup>1</sup> которых допускает неограниченный перебор термов. Это правила:

$$[\forall\rightarrow] \frac{\Gamma, F_c^x, \forall xFx, \Delta \rightarrow Z}{\Gamma, \forall xFx, \Delta \rightarrow Z} \quad \text{и}$$

$$[\rightarrow\exists] \frac{\Gamma \rightarrow Z, \neg F_c^x, \neg \exists xFx, \Lambda}{\Gamma \rightarrow Z, \neg \exists xFx, \Lambda}.$$

<sup>1</sup> То есть применение «снизу вверх».

Теперь при их применении терм  $c$  не должен выбираться немедленно. Вместо этого переменная  $x$  заменяется «временной переменной  $\alpha$ » и делается заметка, что  $\alpha$  стоит вместо одного из термов заключения. Тогда правила принимают следующий вид.

Вместо правила  $[\forall \rightarrow]$  вводится правило

$$\frac{\Gamma, F_a^x, \forall xFx, \Delta \rightarrow Z}{\Gamma, \forall xFx, \Delta \rightarrow Z} \alpha / c_1, \dots, c_n,$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — термы, встречающиеся в заключении; если таких термов нет, то  $\alpha$  — первый параметр.

Вместо правила  $[\rightarrow \exists]$  вводится правило

$$\frac{\Gamma \rightarrow Z, \neg F_a^x, \neg \exists xFx, \Lambda}{\Gamma \rightarrow Z, \neg \exists xFx, \Lambda} \alpha / c_1, \dots, c_n,$$

где  $c_1, \dots, c_n$  — термы, встречающиеся в заключении; если таких термов нет, то  $\alpha$  — первый параметр.

Выражение  $\alpha / c_1, \dots, c_n$  называется подстановочным списком для временной переменной  $\alpha$ , а термы  $c_1, \dots, c_n$  — значениями  $\alpha$ .

Мы видим, что «временная переменная»  $\alpha$ , первоначально не входящая в язык исчисления, вводится в него как обозначающая произвольный терм из некоторого множества, то есть является *метапеременной*. Рассмотрим механизм выбора наиболее благоприятных путей вывода и уточнения значений метапеременной («временной переменной») в ходе выполнения процедуры Кангера. Для получения вывода секвенции  $\Gamma \rightarrow F$  начиная с этой секвенции применяются правила вывода снизу вверх. Построение дерева разбивается на этапы. Внутри каждого этапа применяются лишь правила для логических связок и кванторов, причем правила  $\forall \rightarrow$  и  $\rightarrow \exists$  — в последнюю очередь. Если в их заключении встречается более одного терма, то вводится новая временная переменная и указывается для нее подстановочный список. В конце каждого этапа выполняется проверка: можно ли выбрать такие значения для времен-

ных переменных из соответствующих подстановочных списков, чтобы все секвенции, стоящие в вершинах, были бы непосредственно выводимы после замены временных переменных выбранными значениями. Если такой выбор значений сделан, поиск вывода завершается. Если нет, то дальнейшее построение дерева поиска вывода продолжается только на тех ветвях, которые не оканчиваются непосредственно выводимыми секвенциями. Новый этап построения дерева поиска вывода выполняется с сохранением уже введенных временных переменных. Этап считается завершенным, если каждая его ветвь имеет своей вершиной такую секвенцию  $\Delta \rightarrow \Lambda$ , что, с одной стороны, каждая формула в  $\Delta$  или является атомарной, или начинается квантором всеобщности, и каждая формула из  $\Lambda$  или атомарна, или начинается квантором существования; с другой — все неатомарные формулы из  $\Lambda$  и  $\Delta$  расщеплялись в рассматриваемой ветви одно и то же число раз при предыдущих применениях правил  $\forall \rightarrow$  и  $\rightarrow \exists$ .

Итак, построение вывода в секвенциальных исчислениях со свойством подформульности привело к появлению понятия *дерева вывода* вместо фигурировавшего до этого понятия *вывода*. Дальнейшее использование секвенциальных исчислений для организации машинного поиска вывода приводит к введению понятия *дерева поиска вывода*. Появление этого понятия позволяет предложить регулярную *аналитическую* процедуру, использующую свойства *подформульности* и *обратимости*. Свойство подформульности гарантирует окончание процесса «расщепления» любой сложной формулы до элементарных подформул, а свойство обратимости — автоматическое превращение *дерева поиска вывода* в *дерево вывода*, если все концевые вершины представляют собой теоремы. Таким образом, выводимость исходной формулы «сводится» в секвенциальных исчислениях к проверке «замкнутости» множества элементарных подформул<sup>1</sup>. Введение метапеременных позволяет существенно повысить эф-

<sup>1</sup> Катречко С.Л. Логический анализ интеллектуальных систем с метапроцедурами : дис. ... канд. филос. наук. М., 1992.

фективность описанного аналитического метода, ограничивая потенциально бесконечный перебор при применении правил вывода. Для нас важным является тот факт, что формулировка и применение такой плодотворной для организации поиска вывода идеи, как введение метaperеменных, оказались возможными только при рассмотрении поиска вывода снизу вверх, основанном на свойстве подформульности.

#### § 4. Автоматическое доказательство теорем: методы, основанные на теореме Эрбрана и метод резолюций

В отличие от методов Хао Вана, строившего свои системы непосредственно для секвенциальных исчислений, в основе методов машинного поиска логического вывода П. Гилмора, М. Дэвиса и Х. Патнема лежит теорема Эрбрана.

Теорема Эрбрана позволяет «сводить процесс поиска вывода произвольной формулы  $A$  классического исчисления предикатов (без равенства) к процессу поиска формулы, выводимой средствами классического исчисления высказываний, среди членов некоторой последовательности бескванторных формул, структура которых тесно связана со структурой формулы  $A$ »<sup>1</sup>.

Одна из первых реализаций процедуры Эрбрана на вычислительной машине была предложена Гилмором, затем метод Гилмора усовершенствовали Дэвис и Патнем.

#### *Скулемовские стандартные формы*

С целью упрощения процедуры доказательства теорема Эрбрана применяется к формулам, приведенным к особой форме. Эта форма называется *скулемовской стандартной формой (или просто стандартной формой)*. Хотя скулемовская стандартная форма не всегда эквивалентна самой форму-

---

<sup>1</sup> Минц Г. Е. Приложение. Теорема Эрбрана // Математическая теория логического вывода. С. 311.

ле, но нам достаточно того, что она противоречива тогда и только тогда, когда противоречива исходная формула  $F$ .

Для того чтобы автоматически доказывать логическую или математическую теорему, ее нужно выразить в стандартной форме, а именно:

1) формализовать (то есть записать в виде формулы  $F$  логики предикатов);

2) построить отрицание этой формулы  $\neg F$ ;

3) для формулы  $\neg F$  получить множество дизъюнктов  $S$ . Формула  $F$  общезначима (то есть теорема, которую она формализует, справедлива) в том и только том случае, когда множество дизъюнктов  $S$  невыполнимо (то есть ложно при любой интерпретации на любой области).

В дальнейшем считаем, что на входе процедуры опровержения стоит множество дизъюнктов. Доказательство теоремы сводится к доказательству невыполнимости этого множества.

#### *Эрбрановский универсум множества дизъюнктов*

Чтобы доказать невыполнимость множества дизъюнктов, нужно доказать его ложность при всех интерпретациях на всех областях. В общем случае это невозможно, так как областей интерпретации формул в логике предикатов бесконечно много. Тем не менее возможно рассмотрение такой специальной области  $H$ , что  $S$  невыполнимо тогда и только тогда, когда оно ложно при всех интерпретациях на этой области. Такую область называют *эрбрановским универсумом* множества  $S$ .

*Основной пример* дизъюнкта  $S$  из множества дизъюнктов  $S$  есть дизъюнкт, полученный заменой переменных в  $S$  на члены эрбрановского универсума  $S$ .

Теорема Эрбрана позволяет нам для проверки невыполнимости множества дизъюнктов ограничиваться только рассмотрением его интерпретаций над эрбрановским универсумом  $S$ .

Эта идея была реализована в двух методах автоматического доказательства. В 1960 году Гилмор написал машинную программу, порождавшую для отрицания заданной формулы основные примеры дизъюнктов, приводившую их к дизъюнктив-

ной нормальной форме и устанавливавшую их невыполнимость. Однако данный мультипликативный метод оказался неэффективным. Например, если рассматривать множество из 10 двухлитерных основных дизъюнктов, то число конъюнктов в соответствующей дизъюнктивной нормальной форме будет  $2^{10}$ .

Для того чтобы сделать проверку невыполнимости множества основных дизъюнктов более эффективной, М. Дэвисом и Х. Патнемом был предложен новый метод. Однако эффективность и данного метода оказалась не слишком высокой. В 1965 году Дж. А. Робинсон предложил более эффективный метод резолюций.

### *Метод резолюций*

Решительное продвижение на пути к созданию предметной области теории поиска вывода и выделению специфических понятий и методов теории поиска вывода было достигнуто в связи с формулировкой универсальных методов поиска вывода — метода резолюций Дж. Робинсона и обратного метода С.Ю. Маслова. Кроме их практической эффективности они оказались подходящей основой для теоретических обобщений.

Процедура Эрбрана (реализованная в методах Гилмора и Дэвиса — Патнема) имеет существенный недостаток: она требует порождения множеств  $S'_1, \dots, S'_n, \dots$  основных примеров дизъюнктов. В большинстве случаев эта последовательность растет экспоненциально.

Метод резолюций позволяет избежать порождения множеств основных примеров. Он может применяться к любому множеству дизъюнктов (не обязательно основных) с целью проверки его невыполнимости. Основная идея метода состоит в том, чтобы проверить, содержит ли  $S$  пустой дизъюнкт  $\square$ . Если содержит, то  $S$  невыполнимо. Если  $S$  не содержит  $\square$ , то проверяется, может ли  $\square$  быть получен из  $S$ .

### *Метод резолюций для логики высказываний*

#### Правило резолюций

*Для любых двух дизъюнктов  $C_1$  и  $C_2$ , если существует литера  $L_1$  в  $C_1$ , которая контрарна литере  $L_2$  в  $C_2$ , то, вычеркнув  $L_1$  и  $L_2$  из  $C_1$  и  $C_2$  соответственно, построим дизъ-*

юнкцию оставшихся дизъюнктов. Построенный дизъюнкт есть резольвента  $C_1$  и  $C_2$ .

Если для двух единичных дизъюнктов существует резольвента, то она представляет собой пустой дизъюнкт  $\square$ .

### Теорема

Пусть даны два дизъюнкта  $C_1$  и  $C_2$ . Тогда резольвента  $C$  дизъюнктов  $C_1$  и  $C_2$  есть логическое следствие  $C_1$  и  $C_2$ .

Резолютивный вывод  $S$  из множества дизъюнктов  $S$  есть такая конечная последовательность  $C_1, C_2, \dots, C_k$  дизъюнктов, что каждый  $C_i$  или принадлежит  $S$ , или является резольventой дизъюнктов, предшествующих  $C_i$ , и  $C_k = S$ .

Опровержение (доказательство невыполнимости)  $S$  — это вывод  $\square$  из  $S$ . Действительно, если логическое следствие множества дизъюнктов —  $\square$ , то это множество не может быть истинным, то есть невыполнимо.

### Метод резолюций для логики предикатов

Для того чтобы применять правило резолюции, необходимо в двух дизъюнктах найти пару контрарных литер. Если матрица формулы в результате приведения к предваренной нормальной форме не содержит свободных переменных и скремлевских функций, то эта задача решается непосредственно, и, следовательно, для вывода заключения применим алгоритм принципа резолюции для исчисления высказываний<sup>1</sup>. Для дизъюнктов, содержащих переменные, задача нахождения контрарных литер может быть нетривиальной.

На наш взгляд, одним из наиболее важных моментов метода резолюций является реализация в нем алгоритма унификации, который фактически осуществляет идею метапеременности и приводит к тому, что окончательное «основное» значение используемых термов уточняется лишь после получения пустого дизъюнкта. Следует отметить, что алгоритм унифика-

---

<sup>1</sup> Пономарев В. Ф. Математическая логика. Калининград: Изд-во КГТУ, 2001. Ч. 1. С. 109.

ции — весьма универсальная процедура, которая как важнейший компонент входит в любую систему искусственного интеллекта<sup>1</sup>.

В процедуре доказательства по методу резолюций часто возникает задача нахождения такой подстановки, которая делает несколько выражений тождественными.

Подстановка  $\Theta$  называется *унификатором* для множества  $\{E_1, \dots, E_k\}$  тогда и только тогда, когда  $E_1\Theta = E_2\Theta = \dots = E_k\Theta$ . Множество  $\{E_1, \dots, E_k\}$  *унифицируемо*, если для него существует унификатор. Унификатор  $\sigma$  для множества выражений  $\{E_1, \dots, E_k\}$  называется *наиболее общим унификатором*, если для каждого унификатора  $\Theta$  для этого множества существует такая подстановка  $\lambda$ , что его можно представить в виде композиции  $\Theta = \sigma \circ \lambda$ .

Правило резолюций есть правило вывода, которое порождает резольвенты для множества дизъюнктов. Порождение пустого дизъюнкта эквивалентно невыполнимости множества дизъюнктов.

Шаги доказательства невыполнимости множества  $S$  могут быть представлены в виде растущего вверх *дерева вывода*, в котором каждый начальный узел представляет собой дизъюнкт из  $S$ , а каждый следующий — резольвента дизъюнктов, приписанных из его непосредственных предшественников. Если корневому узлу дерева вывода приписан дизъюнкт  $R$ , то это дерево есть *дерево вывода дизъюнкта  $R$* .

Описанный метод резолюций «является наиболее известным и широко используемым методом автоматического вывода. Известно большое число его модификаций, которые дают основу для многочисленных реализаций»<sup>2</sup> (таких, например, как стратегия вычеркивания и семантическая резолюция).

---

<sup>1</sup> Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта. М. : Радио и связь, 1985. С. 7.

<sup>2</sup> *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 1. Logical Foundations / ed. by D. M. Gabbay [et al.]. Oxford : Clarendon Press, 1993. P. 96.

## § 5. Обратный метод

Обратный метод был предложен С. Ю. Масловым в середине 1960-х годов.

Обратный метод формулируется для  $S$  — классического исчисления предикатов первого порядка. Решаемая задача: по данному объекту  $S$  определить, выводим ли он в секвенциальном исчислении. Для решения используется идея поиска «снизу вверх»: применяя правила вывода от нижних секвенций к верхним, для  $S$  мы можем определить его возможных непосредственных предшественников, затем по каждому из получившихся объектов (если это не аксиома) получить множество его возможных непосредственных предшественников и т. д. Дерево, возникающее в ходе такого процесса, называется *деревом поиска вывода*. Оно превращается в *дерево вывода*, когда все его «листья» оказываются аксиомами. Возможность использования такого подхода гарантирует основная теорема Генцена, указывающая, что каждый вывод в секвенциальном исчислении можно преобразовать в вывод с той же конечной секвенцией, в который не входит сечение.

Можно утверждать, что методы, базирующиеся на использовании секвенциальных исчислений со свойством подформульности (то есть на основной теореме Генцена), обладают более широкой областью применения, чем методы, основанные на теореме Эрбрана. Так, доказательство невыполнимости множества дизъюнктов  $S$  в методе резолюций эквивалентно выводу секвенции  $S \Rightarrow \square$ . В этом случае, используя теорему Эрбрана, можно получить следующий частный случай основной теоремы.

*Множество дизъюнктов  $S$  невыполнимо тогда и только тогда, когда секвенция  $S \Rightarrow \square$  может быть выведена в исчислении, единственными правилами которого являются  $(\forall \Rightarrow)$ ,  $(\vee \Rightarrow)$ ,  $(\wedge \Rightarrow)$ ,  $(\neg \Rightarrow)$ .*

Необходимо отметить, что хотя устранение сечений позволяет сделать поиск вывода механическим, оно обычно приводит к резкому удлинению искомого вывода.

До того как сформулировать собственно обратный метод, представляется необходимым, следуя С.Ю. Маслову<sup>1</sup>, изложить основные идеи, которые позволили повысить «эвристичность» генценовского исчисления, то есть сделать поиск вывода, основанный на свойстве подформульности, более эффективным. Эти идеи легли в основу метода резолюций и обратного метода. В дальнейшем расширение области их применения положило начало теории поиска вывода.

### *С-правила*

*Правилами типа сечения (или с-правилами)* называются такие правила  $S_1, S_2, \dots, S_m \vdash S_0$ , у которых при фиксированном  $S_0$  возможно бесконечное число различных наборов посылок  $S_1, S_2, \dots, S_m$ .

Простейший пример *с-правила* — *modus ponens*:  $A \rightarrow B, A \vdash B$ . В нем при фиксированной формуле  $B$ , вообще говоря, имеется сколько угодно таких вариантов формулы  $A$ , что истинной выступает импликация  $A \rightarrow B$ .

В секвенциальном исчислении *с-правилами* являются

$$\frac{\Gamma_1, F\Theta, (\forall x)F, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3 \quad (\forall \rightarrow)}{\Gamma_1, (\forall x)F, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_3},$$

$$\frac{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, \uparrow F\Theta, \uparrow (\exists x)F, \Gamma_3 \quad (\rightarrow \uparrow \exists)}{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, \uparrow (\exists x)F, \Gamma_3}.$$

Здесь  $\Theta$  — подстановка вида  $\{t/x\}$ , где  $t$  — произвольный основной терм.

Правила типа сечения остаются и после его устранения в секвенциальном исчислении. Их контрприменение допускает бесконечный перебор при варьировании терма  $t$ . Именно незнание термов является основной трудностью в поиске логического вывода.

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Теория поиска вывода и обратный метод // Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М. : Наука, 1983. С. 295.

Правила  $(\forall \rightarrow)$  и  $(\rightarrow \neg \exists)$  Маслов называет *минус-правилами*, а перестройку вывода, приводящую к устранению бесконечного перебора значений, *t-минус-нормализацией*. Ее идея состоит в том, чтобы ограничиваться такими применениями минус-правил, в которых в качестве  $t$  выступают лишь термы, явно входящие в секвенцию-заключение правил. Поскольку при этом множество выводимых в исчислении  $S$  секвенций не уменьшается, такой подход гарантирует эквивалентность нового варианта исчисления (без  $s$ -правил) его старому варианту. Однако при минус-нормализации результирующий вывод резко удлиняется, что делает ее эффективность сомнительной. Если допустить некоторое изменение языка и вида выводимых в исчислении объектов, окажется возможным такое устранение  $s$ -правил, что качество результирующего вывода не страдает. Такое изменение исчисления связано с использованием *метода метапеременных*.

### *Метод метапеременных*

Мы уже рассматривали этот метод на примере его применения в процедуре Кангера. Сейчас опишем его общую идею для того, чтобы проследить, как она ведет к еще одному важному принципу — *локальности* обработки информации.

Отметим, что терм  $t$ , входящий в формулировку  $s$ -правил исчисления  $S$   $(\forall \rightarrow)$  и  $(\rightarrow \neg \exists)$  не входит в язык исчисления  $S$  и применяется для описания самого исчисления. По сути,  $t$  является *метапеременной* исчисления  $S$ , так как может обозначать произвольный основной терм. При этом  $t$  входит в посылку минус-правила, не входя в его заключение. Обладающие такой особенностью метапеременные называются *собственными переменными  $s$ -правил*.

Метод метапеременных состоит в явном введении собственных переменных минус-правил в язык исчисления. Значения таких переменных при контрприменении правил не уточняются сразу, при этом постепенно строится «снизу вверх» заготовка вывода. Для нее время от времени проверяется, можно

ли подобрать значения метапеременных, превращающие ее в настоящий вывод. Таким образом, подбор нужного термина откладывается до того момента, когда уже имеется вся информация, необходимая для решения этой проблемы. Это обстоятельство позволяет сочетать методы анализа (когда на основании свойства подформульности строится «заготовка» вывода) и синтеза (когда при подборе подходящего термина из заготовки получается окончательный вывод). Итак, идея использования метапеременных для построения «снизу вверх» не вывода, а его заготовки оказалась весьма эффективной, хотя и потребовала дополнительно привлечения принципа локальной обработки информации. Эта идея будет рассмотрена ниже. Для нас сейчас важно отметить, что в связи с реализацией метода метапеременных возникает новый объект — *дерево поиска вывода*, которое, в силу обратимости правил вывода в секвенциальном исчислении, затем может дать дерево вывода.

#### *Локальные и глобальные методы*

Если заготовка вывода достаточно сложна, то попытка превратить ее в вывод требует огромной работы. Поскольку одна и та же метапеременная может иметь много вхождений в заготовку, необходимо тщательно согласовывать информацию о различных участках вывода. Кроме того, эта работа может оказаться вообще бесполезной, поскольку для заготовки не обязательно существует такая подстановка значений метапеременных, которая превратила бы ее в вывод. На примере процедуры Правица видно, что заготовка (множество  $M$ ) не обязательно имеет решение, то есть является противоречивой. В случае, если  $M$  не противоречиво, его нужно увеличивать, добавляя к нему новые копии дизъюнктов из  $S$ . Поэтому целесообразно идею метапеременных сочетать с *локальным принципом обработки информации*.

Этот принцип состоит в том, что правила вывода в исчислении должны быть «локальными», то есть их применение требует обработки лишь части информации о построенном к данному моменту дереве поиска вывода.

Нужно отметить, что когда мы для доказательства формулы  $F$  исчисления предикатов  $S$  пользуемся методом резолюций, то фактически строим новое исчисление  $I_{c,s}$ . В нем аксиомами выступают дизъюнкты из  $M$ , единственным правилом вывода — правило резолюций, а выводимость пустого дизъюнкта означает выводимость  $F$  в  $S$ . Правило резолюций является локальным, так как для его применения требуется знание лишь двух дизъюнктов-посылок.

Идея метапеременной осуществляется через понятие наиболее общего унификатора и приводит к тому, что окончательное «основное» значение используемых термов уточняется лишь после получения пустого дизъюнкта.

Видимо, наиболее перспективными являются такие методы поиска вывода, которые сочетают локальный принцип обработки информации и основную идею метода метапеременных: не большую уточненность значений термов, чем это необходимо в данный момент. К таким методам, как показано, относятся метод резолюций и обратный метод.

### Формулировка обратного метода для $S$

#### Частный случай

Рассмотрим обратный метод для поиска вывода секвенции  $\Rightarrow F$ , где  $F = (\exists x_1) \dots (\exists x_n)(D_1 \wedge \dots \wedge D_\delta)$  и  $D_i$  — дизъюнкты.

Выражение вида

$$[(i_1, \Theta_1); \dots; (i_h, \Theta_h)] \quad (h \geq 0),$$

где  $1 \leq i_1, \dots, i_h \leq \delta$  и  $\Theta_1, \dots, \Theta_h$  — подстановки вместо  $x_1, \dots, x_n$ , называется  $h$ -членным  $F$ -набором.

Исчисление  $I_{c,F}^{об}$ , называемое *исчислением благоприятных наборов*, определяется двумя правилами.

**Правило А.** Если  $D_i\eta$  (или  $D_i\eta \vee D_i\xi$ ) — тавтология, то  $[(i, \eta)]$  (соответственно  $[(i, \eta); (i, \xi)]$ ) является благоприятным  $F$ -набором.

**Правило Б.** Если  $F$ -наборы  $[N_1; (1, \xi_1)], \dots, [N_\delta; (\delta, \xi_\delta)]$  благоприятны, то благоприятен набор  $[N_1\eta_1; \dots; N_\delta\eta_\delta]$ , где  $\xi_1, \dots, \xi_\delta, \eta_1, \dots, \eta_\delta$  — такие подстановки, что  $\xi_1\eta_1 = \dots = \xi_\delta\eta_\delta$ .

Выводимость в этом исчислении 0-членного набора  $\square$  эквивалентна выводимости  $F$  в  $C$ .  $F$ -наборы указывают общий вид формул, которые могли бы встретиться в дереве вывода секвенции  $\Rightarrow F$ . При этом потенциально бесконечные множества поддеревьев генценовского дерева сводятся к конечной совокупности  $F$ -наборов. Таким образом, этот метод объединяет локальность с метапеременностью. При этом для построения вывода определяется сначала структура верхних секвенций потенциального дерева вывода, затем секвенций, лежащих ниже верхних, и т. д. Таким образом, метод является «обратным» по сравнению с поиском «снизу вверх».

### Модификация обратного метода

Будем рассматривать формулы вида  $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)(D_1 \wedge \dots \wedge D_\delta)$ .

$F$ -подстановка — это выражение вида  $\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ .

Выводимыми объектами исчисления  $I_F$  будут дизъюнкты вида

$$C = D_{i_1}\sigma_1 \vee \dots \vee D_{i_m}\sigma_m \quad (m \geq 0; 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq \delta),$$

где  $\delta_1, \dots, \delta_m$  —  $F$ -подстановки.

Понимание дизъюнктов  $C$  связано с формулой  $F$ . Определим

$$C^F = \forall C \vee F,$$

где  $\forall C$  означает  $(\forall z_1) \dots (\forall z_m)C$ , в котором переменные  $z_1, \dots, z_m$  входят в  $C$ , но не входят свободно в  $F$ .

Аксиомы исчисления  $I_F$  задаются правилом А, а правило Б задает единственное правило вывода.

**Правило А.** Если  $C$  — тавтология, то  $C$  — аксиома исчисления  $I_F$ .

**Правило Б.**

$$\frac{C_1 \vee D_1 \sigma_1; \dots; C_\delta \vee D_\delta \sigma_\delta}{C_1 \sigma^1 \vee \dots \vee C_\delta \sigma^\delta}, \text{ где } \sigma_1 \sigma^1 = \dots \sigma_\delta \sigma^\delta.$$

Правило Б означает, что если уже получено  $\delta$  штук дизъюнктов вида  $C = D_{i_1}\sigma_1 \vee \dots \vee D_{i_m}\sigma_m$ , причем конъюнкция их «хвостов» — частный случай формулы  $D_1 \wedge \dots \wedge D_\delta$  (при под-

становке  $\sigma = \sigma_1 \sigma^1 = \dots \sigma_\delta \sigma^\delta$ ), то правило Б позволяет «отрезать» эти «хвосты», сделав нужные подстановки и объединив оставшиеся части дизъюнктов.

Выводимые в  $I_F$  дизъюнкты называют F-благоприятными.

Для описанного исчисления справедливо следующее утверждение о полноте обратного метода.

*Дизъюнкт  $C$  F-благоприятен тогда и только тогда, когда  $C \vee F$  доказуема в исчислении предикатов.* В частности,  $\square$  благоприятен тогда и только тогда, когда формула  $F$  доказуема.

*Общая схема обратного метода может быть описана следующим образом<sup>1</sup>.*

Рассматривается произвольное секвенциальное исчисление  $\beta$  со свойством подформульности. Для произвольной секвенции  $\Sigma$  строится вывод. При этом сначала определяется структура верхних секвенций потенциального дерева вывода, затем секвенций, лежащих ниже, и т. д. Таким образом, метод является «обратным» по сравнению с поиском «снизу вверх». Это достигается построением исчисления  $I_{\beta, \Sigma}^{ob}$  *благоприятных наборов*. Выводимыми объектами этого исчисления ( $\Sigma$ -наборами) выступают пары  $[L, V]$ , где  $L$  — список подформул  $\Sigma$ , а  $V$  — система зависимостей между элементами из  $L$ . Для каждой секвенции  $\Sigma'$  и каждого  $\Sigma$ -набора  $N$  определяется отношение  *$N$  лежит в  $\Sigma'$* . Формулируются правила А и Б для исходных и для порождаемых благоприятных наборов соответственно. Для корректности метода достаточно выполнения двух условий: 1) для каждого  $\Sigma$ -набора  $N$ , порожденного по правилу А, всякая  $\Sigma'$ , в которой лежит  $N$ , выводима в  $\beta$ ; 2) если  $N$  порождено из благоприятных наборов по правилу Б и лежит в  $\Sigma'$ , то  $\Sigma'$  выводима в  $\beta$ .

С. Ю. Маслов отмечает, что обратный метод был предложен одновременно с методом резолюций и независимо от него. Если рассматривать обратный метод только для исчисле-

<sup>1</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Указ. соч. С. 302.

ния  $S$ , как мы делали до сих пор, то для стандартизованных формул метода резолюций оба метода примерно эквивалентны. Однако стандартизация формул обычно сильно их удлинняет и затрудняет процесс поиска вывода. В связи с этим существенное достоинство обратного метода — тот факт, что он применим вообще к секвенциям произвольной структуры. Для нас же важным является еще более сильное утверждение Маслова: обратный метод можно распространить на *произвольные секвенциальные исчисления без правил сечения* (то есть обладающие свойством подформульности).

С. Л. Катречко отмечает, что обратный метод представляет собой дальнейшее развитие «положительных» для организации процесса поиска вывода особенностей секвенциальных исчислений<sup>1</sup>. Эти особенности, как мы уже отмечали, основаны на свойстве *подформульности* и следующем из него свойстве *обратимости правил вывода*. Свойство подформульности позволяет по виду исходной формулы определить вид только тех аксиом, которые могут быть «полезны» для построения вывода данной формулы (понятие исходного благоприятного набора). Тем самым удастся существенно сократить потенциально бесконечный набор исходных аксиом. Обратимость правил в секвенциальных исчислениях (то есть возможность применять их как «снизу вверх» при поиске вывода, так и «сверху вниз» при построении дерева вывода) позволяет в ходе реализации обратного метода совместить эти подходы в форме правила Б.

---

<sup>1</sup> Катречко С. Л. Указ. соч.

## Глава 4

---

### ТЕОРИЯ ПОИСКА ВЫВОДА И ЕЕ ПРОИСХОЖДЕНИЕ ИЗ ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

#### § 1. Логические алгоритмы и эвристики: подход О. Ф. Серебрянникова

Формирование теории поиска вывода в качестве самостоятельной было связано с двумя рядами факторов: с одной стороны, с развитием автоматического доказательства теорем и интерпретацией свойства подформульности, а с другой — с теоретическим осознанием способов формализации эвристик в исчислениях секвенциального типа. Если первому ряду обстоятельств возникновения теории поиска вывода была посвящена предыдущая глава, то второй фактор будет рассмотрен в настоящем параграфе на примере подхода О. Ф. Серебрянникова, который дает следующее определение эвристики: «Эвристиками мы называем приемы, правила, процедуры, принципы, способствующие организации поиска решения задачи некоторым рациональным или целесообразным путем с практически осуществимыми затратами времени, сил и средств»<sup>1</sup>. Существенная особенность эвристик — это то, что стратегия поиска, основанная на них, не всегда приводит к успеху. Однако даже в случае неудачи эвристического поиска он должен давать информацию, позволяющую делать дальней-

---

<sup>1</sup> *Серебрянников О. Ф. Эвристики, алгоритмы и правила логики // Проблемы законов науки и логики научного познания : сб. науч. тр. / под ред. И. Я. Чупахина, В. П. Рожина. Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1980. С. 132.*

ший поиск более эффективным. Серебрянников отмечает, что противопоставление эвристики и алгоритма является необоснованным, поскольку они имеют ряд общих свойств. Например, алгоритм, как и эвристика, совсем не обязательно заканчивает работу выдачей определенного результата. Этим свойством обладают лишь разрешающие алгоритмы, а неразрешающие могут в некоторых случаях продолжать работу сколь угодно долго, не выдавая никакого результата (например, в случае попытки доказательства недоказуемой формулы в логике предикатов). Кроме того, алгоритм не обязательно должен быть основан на переборе возможных решений. В случае корректной формулировки задачи ее структура может подсказать путь существенного усовершенствования алгоритма, так что в плане рациональности, приемлемости он уподобляется эвристике. Приведенные выше рассуждения относятся к эвристикам и алгоритмам вообще, без уточнения области их применения. Однако наиболее ясно связь и взаимодополняемость этих понятий можно проследить в логике и кибернетике, а особенно в той их части, которая относится к исследованиям по проблеме поиска логического вывода<sup>1</sup>. И как было показано в третьей главе, процедура отыскания доказательства может оказаться практически реализуемой на ЭВМ, только если она будет сочетать в себе одновременно алгоритмичность и эвристичность.

Эвристическим принципом называется система правил, определяющая такую тактику поиска решения задачи, которая исключает или существенно ограничивает перебор элементов множества возможных решений. Эвристические принципы О. Ф. Серебрянников предлагает распределить на три группы<sup>2</sup>. К первой он относит принципы анализа. С их помощью прояс-

---

<sup>1</sup> *Серебрянников О. Ф.* Эвристики, алгоритмы и правила логики. С. 137.

<sup>2</sup> *Серебрянников О. Ф.* Иерархическое представление эвристик поиска доказательства в логических исчислениях // *Логика и теория познания* : сб. науч. тр. / под ред. О. Ф. Серебрянникова, Я. А. Слинникова. Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1990. С. 59.

няется смысл задачи и вырабатывается схема решения. Вторую группу составляют принципы синтеза, задача которых — реализовать схему возможного решения, превратить ее в собственно решение. В третью группу входят так называемые критерии нетривиальности, на основании которых отбираются интересные задачи, упрощаются условие задачи или ее решение.

Говоря о логических исчислениях, О. Ф. Серебрянников отмечает, что они всегда являются формализацией определенных дедуктивных средств, и потому в них могут выражаться принципы, определяющие структуру эвристической деятельности в поиске решения логической задачи<sup>1</sup>. Однако эта потенциальная возможность в разных видах логических исчислений реализуется в различной степени. Например, из определения доказательства в аксиоматических исчислениях следует, что «деятельность по нахождению решения задачи доказательства представляет собой выбор тех из вводимых в рассмотрение последовательностей формул, которые удовлетворяют определению доказательства»<sup>2</sup>. При этом в самом исчислении отсутствуют явно сформулированные правила, позволяющие уменьшить неопределенность поиска. Вышесказанное позволяет говорить о неэвристичности аксиоматических исчислений. Безусловно, строя доказательства в аксиоматическом исчислении, мы приобретаем некий опыт, позволяющий нам вырабатывать соответствующие эвристические приемы. Как утверждает О. Ф. Серебрянников, такие эвристические принципы можно описать и обосновать в точных терминах логических исчислений. Так, существенно сократить (а значит, упростить) доказательство может использование ранее доказанных теорем. Этот прием, обычный для неформальных рассуждений, реализуем и в аксиоматическом исчислении. Здесь сокращенное доказательство со ссылкой на используемую теорему всегда можно превратить в полное путем вставки вместо

---

<sup>1</sup> *Серебрянников О. Ф.* Эвристические принципы и логические исчисления. М. : Наука, 1970. С. 22.

<sup>2</sup> Там же. С. 33.

ссылки уже имеющегося доказательства использованной теоремы. Другим аналогом эвристик в аксиоматическом исчислении являются *производные правила*. О. Ф. Серебрянников дает следующее определение производного правила:

*Правило  $\Pi$  производно в исчислении  $I$ , если система  $I'$ , полученная из  $I$  добавлением  $\Pi$ , равнообъемна  $I$ , то есть какова бы ни была формула  $X$ , в  $I'$  формула  $X$  доказуема тогда и только тогда, когда  $X$  доказуема в  $I$ .*

Правила, отвечающие такому определению, чаще называют *допустимыми*<sup>1</sup>.

Использование ранее доказанных теорем и производных правил может рассматриваться как абстрактная модель накопления опыта и выработки эвристических принципов. Видимо, похожие соображения руководили А. Ньюэллом, Дж. Шоу и Г. Саймоном — создателями программы «Логик-теоретик», которую мы подробно анализировали в главе «Автоматический поиск доказательства». Можно увидеть, что в их программе упомянутые эвристические принципы реализуются в виде сохранения в памяти машины ранее полученных результатов и использования подпрограмм. Однако мы уже убедились, что попытка использования некоторых частных эвристик в программе, реализующей поиск доказательства в аксиоматическом исчислении, увеличила ее эффективность лишь по сравнению с алгоритмом простого перебора. Гораздо более впечатляющим оказался уже первый опыт применения в автоматическом доказательстве систем, реализующих другие исчисления — секвенциальные. Вполне согласуются с этим результатом и выводы О. Ф. Серебрянникова о том, что систематическое выражение эвристических принципов возможно в натуральных и секвенциальных исчислениях. Представляется интересным более детальное рассмотрение соображений, приведших к такому выводу.

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семиотика и информатика : сб. науч. тр. М., 1979. Вып. 13. С. 26.

Если говорить о натуральных исчислениях (или исчислениях естественного вывода), то можно отметить, что в них «элементарные эвристические принципы анализа и синтеза, имеющие место в обычных рассуждениях, получают непосредственное выражение в основных правилах. В свою очередь, аналоги более сложных эвристических принципов выражаются в форме производных правил этих исчислений»<sup>1</sup>. Это позволяет говорить о том, что в натуральных исчислениях раскрываются некоторые естественные механизмы эвристической деятельности по решению логических задач. Однако для организации такого поиска решения, который носил бы вполне организованный, регулярный характер, натуральные исчисления все-таки приспособлены плохо. Это обусловлено тем, что уровень формализации эвристических принципов в натуральных исчислениях недостаточен. Мы можем эффективно решать в них задачи лишь при условии некоторой изобретательности, то есть привлечения таких эвристических принципов, которые не формализованы в исчислении, а являются лишь продуктом нашего естественного мышления. Как отмечает О. Ф. Серебрянников, переход к *секвенциальным исчислениям* является наиболее естественным путем повышения уровня формализации эвристических принципов, позволяющим придать поиску решения логической задачи вполне организованный характер. Он замечает, что «в секвенциальных исчислениях находят системное представление особого рода эвристические принципы анализа, которые можно было бы назвать *соединенными принципами анализа и синтеза*»<sup>2</sup>. О. Ф. Серебрянников рассматривает секвенциальные исчисления высказываний на примере незначительной модификации табличного исчисления Бета (называя его исчислением В) и показывает, что *основные* правила этого исчисления позволяют осуществить поиск решения логической задачи в соответ-

---

<sup>1</sup> Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. С. 41.

<sup>2</sup> Там же. С. 51.

ствии с некоторой *регулярной эвристической процедурой*. Это связано с тем, что правила вывода в секвенциальных исчислениях формулируются так, что их можно рассматривать и как правила анализа, и как правила синтеза. Таким образом, контрприменение этих правил от заключений к посылкам обеспечивает такую полноту анализа, что синтез оказывается не более чем оборачиванием осуществленного анализа<sup>1</sup>. Действительно, если при применении правил вывода «снизу вверх» (соответствующем этапу анализа) все действия выполнены корректно, то их выполнение в обратном порядке (синтез) и даст искомое доказательство. Описывая процесс поиска доказательства некоторой формулы  $L$  в исчислении  $B$  (состоящий в построении для этой формулы замкнутой таблицы), О. Ф. Серебрянников отмечает, что осуществимость такого «вполне организованного» поиска решения логической задачи обусловлена тем, что при построении вывода в секвенциальном исчислении все вводимые в рассмотрение в процессе построения вывода формулы являются подформулами исходных — а это и есть то, что мы называем свойством подформульности. Нужно отметить, что, хотя О. Ф. Серебрянников рассматривает секвенциальное исчисление высказываний без структурных правил, где подформульность выполняется автоматически, мы знаем, что благодаря основной теореме Генцена об устранимости сечения это свойство может быть обеспечено и для секвенциальной формы классического исчисления предикатов. Из этого мы можем заключить, что на произвольные секвенциальные исчисления можно распространить и выводы о том, что свойство подформульности позволяет построить формальную дедуктивную процедуру таким образом, что она отображает обычную эвристическую процедуру доказательства.

Таким образом, можно говорить о важности роли свойства подформульности в решении проблемы **сочетания алгоритмичности и эвристичности** в логической процедуре. Порож-

---

<sup>1</sup> *Серебрянников О. Ф.* Иерархическое представление эвристик поиска доказательства в логических исчислениях. С. 61.

дая возможность построения алгоритма поиска вывода, основанного на применении правил вывода «снизу вверх», свойство подформульности вместе с тем является фактически формализацией определенного эвристического принципа в самом логическом исчислении.

Очевидно, дальнейшее движение в направлении введения эвристических принципов в исчисления позволит создавать более эффективные методы теории поиска вывода. В частности, С. Ю. Маслов отмечает, что совершенствование методов решения творческих задач связано с применением допустимых правил<sup>1</sup> (у Серебрянникова они называются производными). Здесь следует отметить, что у Маслова допустимые правила (производные, по Серебрянникову) делятся на две группы:

а) допустимые производные правила — каждое их применение допускает «вставку», то есть замену фиксированной последовательностью применений правил исходного исчисления;

б) собственно допустимые правила (не являющиеся производными) — их использование не может быть заменено какой-либо «вставкой» из применений других правил исчисления. Пример такого правила — сечение<sup>2</sup>.

Очевидно, что применение производных допустимых правил позволяет сокращать выводы, но навряд ли несет в себе существенно новые эвристические принципы. Дальнейшие перспективы развития методов решения творческих задач Маслов связывает со вторым типом допустимых правил. Введение новых допустимых правил этого типа приводит к появлению нового модифицированного исчисления, в котором оказываются формализованными какие-то дополнительные эвристические принципы.

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 36.

<sup>2</sup> Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. М. : Радио и связь, 1986. С. 107.

## § 2. Теория поиска вывода: подход С. Ю. Маслова

Нет сомнений, что классическое исчисление предикатов первого порядка ( $C$ ) — важнейшая дедуктивная система для того направления в математической логике, которое ориентировано на построение программ, обладающих интеллектуальными способностями. Р. Ковальски, сравнивая возможности применения логики для «общения с компьютером» с возможностями средств, специально созданных для компьютеров, отмечает, что логика по сравнению с последними «является более высокоуровневым и более человекоориентированным формальным средством»<sup>1</sup>. Именно для этой системы  $C$  с самого начала развития эвристического программирования разрабатывались методы автоматического доказательства теорем. Эвристический подход создателей «Логика-теоретика» — Ньюэлла, Саймона и Шоу — претендовал на моделирование некоторых процессов человеческого мышления, однако не дал возможности эффективно доказывать теоремы даже в исчислении высказываний. Дальнейшие исследования, ориентированные исключительно на стратегии и не признающие алгоритмического подхода, оказались бесперспективными для проблематики автоматического доказательства теорем.

Гораздо более плодотворной идеей, оказавшей решающее влияние на развитие данной области знания, оказалось использование для построения алгоритмов автоматического доказательства теорем исчислений генценовского типа. Именно эти исчисления обладают замечательным свойством — согласно основной теореме об устранимости сечения каждый вывод в секвенциальном исчислении можно преобразовать в вывод с той же конечной секвенцией, в который не входит сечение. Эта возможность обеспечивает доказательствам в таких модифицированных системах наличие свойства подформульности: каждая формула в доказательстве входит в доказываем-

---

<sup>1</sup> Ковальски Р. Логика в решении проблем. М. : Наука, 1990. С. 14.

мую формулу в качестве подформулы. Свойство подформульности, в свою очередь, приводит к идее поиска доказательства «снизу вверх». Мы уже отмечали, что такое доказательство связано с появлением понятия *дерево поиска вывода*. При построении этого объекта существенным образом используется информация, содержащаяся в самой формуле: состав переменных и связь между ними, то есть структура формулы. Свойство обратимости позволяет из *дерева поиска вывода* получать *дерево вывода*. Описанный подход дает удобные средства для реализации автоматического поиска вывода: «Нисходящий вывод согласует поиск решений и программирование. Вдобавок он обеспечивает такие возможности для исполнения интеллектуальных программ, как недетерминизм, параллелизм, вызов процедур по образцам»<sup>1</sup>.

Ряд алгоритмов автоматического доказательства, например методы Гилмора, Дэвиса и Патнема, Правица и Вогеры, основаны на теореме Эрбрана.

Можно сказать, что генцено-эрбрановские методы, основанные на свойстве подформульности и примененные к логике предикатов первого порядка, знаменуют собой *возникновение теории поиска логического вывода* как новой самостоятельной области знания.

Ключевую роль в формировании теории поиска вывода сыграли метод резолюций, предложенный Дж. А. Робинсоном в 1965 году, и обратный метод Маслова, разработанный примерно в это же время. Оба эти метода, использующие свойство подформульности, реализуют важные идеи, повышающие эвристические возможности исчисления, в котором производится поиск вывода. Это устранение *s*-правил с использованием метаварiableных и локальный принцип обработки информации.

Так, принципиальная осуществимость метода резолюций обеспечивается возможностью определения для конкретного дизъюнкта его непосредственных предшественников, что соответствует наличию свойства подформульности вывода. Ме-

---

<sup>1</sup> Ковальски Р. Указ. соч. С. 14.

ханизм резольвент, конечно, позволяет с большей эффективностью осуществлять процедуру построения дерева вывода, чем, к примеру, в методе Дэвиса и Патнема, поскольку фактически реализует идеи *локальности* и *метапериенности*. Мы намерены показать, что распространение идей и методов, полученных в ходе развития *теории поиска логического вывода*, на произвольные дедуктивные системы, позволяет говорить о появлении более общей теории — теории поиска вывода.

До сих пор мы употребляли термин «исчисление» только в смысле логической системы. Именно для логических исчислений разрабатывались все рассмотренные нами алгоритмы и методы *теории автоматического доказательства теорем*, или теории *поиска логического вывода*. Однако известно, что при попытках автоматизации решения разнообразных классов творческих задач возникает необходимость искать вывод объектов в таких исчислениях, которые не являются логико-математическими. С. Ю. Маслов отмечает, что, хотя моделирование таких исчислений в рамках классической логики возможно, но оно «может оказаться неадекватно решаемым задачам, придать им громоздкие и неестественные формулировки, превратить простые задачи в практически нерешаемые»<sup>1</sup>. Таким образом, возникает проблема поиска вывода в самых разнообразных исчислениях, в частности в дедуктивных системах нелогического типа. Для постановки и решения этой задачи прежде всего необходимо расширить понятие исчисления, или дедуктивной системы. Следует отметить, что Маслову не пришлось изобретать теорию исчислений общего типа — она существовала уже довольно давно.

Уже в середине XX века изучение логических исчислений привело к пониманию неединственности привычной «классической» логики, возможности и необходимости появления «других логик», других дедуктивных средств. Итогом этого стало возникновение общего понятия дедуктивной системы, в которой аксиомы и правила вывода формулируются не для

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Указ. соч. С. 291.

высказываний, а для объектов более общего типа. Первой классической работой по общей теории исчислений стала книга Э. Л. Поста, вышедшая в 1943 году, но получившая признание значительно позже — в 1960—1970-х годах<sup>1</sup>.

Рассмотрим канонические исчисления Поста, следуя работе С. Ю. Маслова<sup>2</sup>.

Исчисления (дедуктивные системы) могут быть рассчитаны на вывод объектов самого разного вида. Существенно при этом, что каждый выводимый объект содержит в себе конечное количество информации. Считается, что этот объект всегда может быть закодирован конечной последовательностью символов, каждый из которых принадлежит заранее указанному конечному множеству (алфавиту).

*Каноническим исчислением* называется четверка вида

$$(A, P, A, \pi), \quad (1)$$

где  $A$  и  $P$  — алфавиты, не имеющие общих букв ( $A$  называется алфавитом исчисления (1), а буквы из  $P$  — переменными исчисления);  $A$  — список аксиом исчисления (1);  $\pi$  — список правил вывода, каждое из которых имеет вид

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \vdots \\ \Sigma_m \end{array} \quad (2)$$

$$\frac{\Sigma_m}{\Sigma_0} \quad (m \geq 1)$$

Здесь  $\Sigma_i$  — слова в алфавите  $A \cup P$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; все переменные из  $\Sigma_0$  входят в слово  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ .  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  называются посылками правила (2), а  $\Sigma_0$  — заключение.

Способ получения слова  $Q$  из слов  $Q_1, \dots, Q_m$  описывается следующим способом. Для каждой входящей в (2) переменной

<sup>1</sup> См.: *Post E. Solvability, Provability, Definability: the Collected Works of Emil L. Post.* Boston : Birkhäuser, 1994, а также: *Маслов С. Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. С. 8.

<sup>2</sup> *Маслов С. Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. С. 20—40.

(то есть буквы алфавита  $P$ ) указывается некоторое слово в  $A$  (значение этой переменной). Если вместо всех переменных из (2) подставить их значения, то  $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  превратятся в слова  $A$ . Если при некотором выборе значений переменных описанный процесс переводит  $\Sigma_i$  в  $Q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), то говорят, что  $Q_0$  непосредственно выводима из  $Q_1, \dots, Q_m$  по правилу (2).

Важным является понятие *перечислимого множества*. Для его определения потребуются вспомогательные термины.

Два исчисления над  $A$  эквивалентны относительно  $A$ , если любое слово над  $A$  выводимо в первом исчислении тогда и только тогда, когда оно выводимо во втором. Говорят, что пара

$$(A, K), \quad (3)$$

где  $K$  — каноническое исчисление над  $A$  — *представление* множества выводимых в  $K$  слов алфавита  $A$ . При этом  $A$  называется *основным алфавитом* представления, а дополнение  $A$  до полного алфавита исчисления  $K$  называется *вспомогательным алфавитом*. Говорят, что множество  $M$  слов в  $A$  *перечислимо*, если для него существует представление (3) (то есть в представляющем исчислении помимо всех слов из  $M$  могут быть выводимы и еще какие-то слова, но обязательно содержащие буквы из вспомогательного алфавита).

Таким образом, поиск вывода в канонических исчислениях может быть поставлен как проблема перечисления (порождения) множества  $M$ . Такой процесс порождения множества  $M$ , представленного исчислением  $K$ , удобно описать в терминах *алгоритма поиска вывода* в  $K$ . Самый простой из таких алгоритмов чисто переборный. На первом шаге находятся все аксиомы исчисления  $K$ , их конечное число, а на каждом следующем — все слова, непосредственно выводимые из слов, появившиеся на предыдущих шагах. В применении к слову  $P$  этот алгоритм поиска останавливается в тот момент, когда оно порождается алгоритмом. В этот момент вывод  $P$  построен. Нетрудно увидеть, что это фактически алгоритм Британского музeya.

Маслов полагает, что есть серьезные основания считать, что всякое множество, которое можно породить (перечислить)

каким-либо конструктивным способом, является перечислимым. Таким образом, аппарат канонических исчислений оказывается достаточно мощным, чтобы смоделировать работу всяческих алгоритмов и дедуктивных систем. Это дает возможность утверждать, что «понятие канонического исчисления сравнимо по "уровню фундаментальности" с понятием машины Тьюринга»<sup>1</sup>.

Аппарат канонических исчислений обладает всеми возможностями, необходимыми для порождения сколь угодно сложных (но конструктивно порождаемых) множеств. Однако оказалось, что для работы со многими реальными дедуктивными системами бывает достаточно и некоторых «сужений» аппарата канонических исчислений, которые сокращают объем используемых дедуктивных средств, при этом сохраняя объем представляемых множеств. Возможность обходиться при работе с исчислениями только однопосылочными правилами следует из данной теоремы.

### Теорема

#### «Первая редукция Поста»

*Для любого канонического исчисления  $K$  ( $K = (A, P, A, \pi)$ ) можно построить эквивалентное относительно  $A$  каноническое исчисление  $K'$ , имеющее одну аксиому и только однопосылочные правила вывода.*

Характерно, что идея доказательства этой теоремы состоит в расширении алфавита  $A$  «разделительным знаком», служащим для образования списков слов и построения такого исчисления, в котором выводимые объекты — «выводы» исходного исчисления. Таким образом, идея изменения языка исчисления для перехода от имеющегося исчисления к исчислению с определенными «подходящими» свойствами выступает одним из главных методов общей теории дедуктивных систем. Мы видели, что этот же подход используется в наиболее эффективных методах теории поиска логического вывода — методе резолюций и обратном методе.

---

<sup>1</sup> Смальян Р. Теория формальных систем. М. : Наука, 1981. С. 9.

Последовательный переход от произвольного канонического исчисления к частным видам исчислений с все более строгими ограничениями на аксиомы и правила вывода получил название *редукций Поста*.

*Вторая редукция* состоит в переходе от исчисления с одной аксиомой и однопосылочным правилом к исчислению, все правила которого имеют вид

$$G_1 p_1 \dots p_k G_{k+1} \mid\text{---} G'_1 p_1 \dots p_k G'_{k+1} \quad (k \geq 1),$$

где все  $p$  — различные переменные, а все  $G$  — слова в алфавите исчисления. При этом  $k$  может меняться от правила к правилу.

*Третья редукция* состоит в переходе от исчисления, полученного с использованием второй редукции, к исчислению, все правила которого имеют вид

$$G_1 p_1 G_2 \mid\text{---} G'_1 p_1 G'_2,$$

то есть это частный случай второй редукции при условии, что  $k = 1$ .

Четвертая редукция состоит в переходе к *нормальному исчислению*.

Исчисление называется *нормальным*, если оно содержит одну аксиому, а его правила вывода имеют вид:  $Gp \mid\text{---} pG'$ , где  $p$  — переменная, а  $G$  и  $G'$  — слова в алфавите исчисления.

Следующая теорема является результатом описанных редукций.

### Теорема Поста

*По каждому каноническому исчислению над  $A$  можно построить эквивалентное относительно  $A$  нормальное исчисление.*

Теорема Поста, несомненно, имеет большое теоретическое значение и может быть использована для построения различных специализаций аппарата исчислений. Однако схема обработки информации, заложенная в понятие нормального исчисления, не отражает принципов работы в реальных системах. В нормальном исчислении элементарным шагом обработки выступает получение информации из начала обрабатываемого слова и перемещение некоторого результата преобразования

этой информации в конец. Более адекватные модели реальных систем возникают, когда информация обрабатывается внутри одного конечного «поля зрения», которое может постепенно перемещаться. В связи с этой идеей возникает понятие *локального исчисления*. Локальным Маслов называет такое каноническое исчисление, которое имеет одну аксиому и правила вывода вида

$$p_1 G p_2 \mid - p_1 G' p_2,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — переменные,  $G$  и  $G'$  — слова в алфавите исчисления.

Важным результатом для возможности моделирования реальных систем при помощи аппарата исчислений и для дальнейшей организации поиска вывода в таких исчислениях является следующая теорема.

#### Теорема о локализации

*Любое перечислимое множество можно представить локальным исчислением (в подходящем расширении алфавита).*

Выбор класса исчислений, в рамках которого целесообразно производить моделирование интересующих исследователя реальных процессов, — довольно непростая задача. В этой ситуации возникает следующая дилемма: чем уже класс используемых исчислений, тем больше различаются процесс и его модель, чем шире соответствующий класс, тем труднее в его терминах высказать что-нибудь специфическое про моделируемые процессы. По-видимому, здесь нужно придерживаться принципа «золотой середины» — сведения необходимы, но такие, в которых специфика модели отражает все-таки основные особенности процессов. Для этого используемый класс исчислений должен удовлетворять *критерию универсальности*, то есть обеспечивать возможность задания в рамках рассматриваемого класса произвольного перечислимого множества. Очевидно, что соответствующие этому требованию дедуктивные средства могут отражать лишь простейшие из возможностей моделируемых процессов. Обычно дедуктивные системы «задают множество потенциально выводимых объектов, не предпреляя того, как именно будет развиваться кон-

кретный вывод и какие именно объекты, следовательно, окажутся выведенными»<sup>1</sup>. Для полноценного моделирования недетерминированных процессов и их качественного анализа часто требуется привлечение аппарата теории вероятностей, например введение вероятностных мер на множествах выводов. Идея появления вероятностного исчисления связана с тем, что во время работы недетерминированной системы возможности появления того или иного ее состояния оказываются различными. Стало реально говорить о вероятности того или иного продолжения данного вывода, о вероятности вывести данное слово. Реальное определение вероятностей продолжений выводов связано с большими трудностями, однако во многих случаях алгоритмы, основанные на вероятностном подходе, оказываются более эффективными. Маслов отмечает, что введение вероятностных исчислений дает аппарату исчислений «почти безграничные возможности моделирования» любых процессов, в том числе и творческих: «Гипотеза о том, что неопределенные размышления в квазивероятностных терминах лучше отражают сущность человеческого интеллекта, чем детерминированные алгоритмы обработки информации, весьма модна в наше время»<sup>2</sup>.

Итак, следуя Маслову, в общем случае исчисление — *это способ задания множества путем указания исходных элементов (аксиом) и правил вывода, каждое из которых описывает, как строить новые элементы из исходных и уже построенных*. Список, каждый элемент которого или является аксиомой, или получен из предшествующих элементов списка по одному из правил вывода, называется *выводом*, а его члены — *выводимыми* в исчислении. Пусть имеется некоторый класс  $K$  творческих задач. В соответствии со спецификой этого класса подбирается исчисление  $\beta_k$ , аксиомами которого выступают задачи, решение которых заранее известно, а правила вывода вида  $S_1, S_2, \dots, S_m \mid\text{---} S_0$  ( $m \geq 0$ ) гарантируют решаемость задачи

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. С. 48.

<sup>2</sup> Там же. С. 50.

$S_0$  в случае решаемости задач  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . Тогда фиксированная задача из рассматриваемого класса имеет решение, когда она «выводима» в построенном исчислении. Найти решение задачи — значит обнаружить один из возможных ее выводов.

Примером исчисления нелогического типа может служить исчисление для нахождения первообразных. Его аксиомами являются табличные интегралы. Правила соответствуют интегрированию подстановкой и по частям, а также стандартным преобразованиям элементарных функций, вынесению множителей, интегрированию сумм.

Другой характерный пример исчисления, где выводимые объекты не представляют собой логико-математические формулы, — исчисление задач на построение<sup>1</sup>. Решаемая задача задается плоскостью, на которой произвольным образом расположены исходные элементы. Аксиома, из которой должно быть «выводимо» требуемое построение, примерно соответствует чертежу, возникающему в результате анализа условия задачи. Правила вывода соответствуют проведению прямых и окружностей (включая нахождение всех требуемых точек пересечения).

Убедимся, что основные идеи поиска *логического* вывода могут быть обобщены на поиск вывода в *произвольных исчислениях*.

1. Определение *c*-правила как правила вида  $S_1, S_2, \dots, S_m \mid \text{---} S_0$ , где при фиксированном  $S_0$  возможно бесконечное число различных наборов посылок  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , имеет достаточно общий вид. Здесь  $S_1, S_2, \dots, S_m, S_0$  могут быть не только логическими формулами, но и объектами другой природы. Маслов отмечает, что «проблема устранения *c*-правил актуальна для самых разных исчислений, в том числе и для нелогических»<sup>2</sup>.

Так, в исчислении для первообразных *c*-правилом выступает правило интегрирования произвольной подстановкой.

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 25.

<sup>2</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Указ. соч. С. 295.

Его применение, действительно, допускает неограниченное варьирование функций-подстановок. Путем устранения этого с-правила может быть разрешено производить подстановку лишь основных элементарных функций, через суперпозицию которых моделируется применение исходного правила.

В исчислении задач на построение циркулем и линейкой в качестве с-правила может быть рассмотрено произвольное пополнение чертежа прямой или окружностью. Вместо него целесообразно ограничиться проведением прямых через уже намеченные чертежом точки и построением окружностей с центрами в таких точках и с радиусами, равными расстояниям между ними. «Возможность по любому "выводу"-построению указать "вывод", удовлетворяющий сформулированному ограничению, как раз имеет характер метаматематической теоремы об устранимости с-правил»<sup>1</sup>.

2. Как мы уже видели, метод метапеременных, состоящий в явном введении собственных переменных минус-правил в язык исчисления, впервые был предложен для устранения правил типа сечения (с-правил) из исчисления предикатов. Однако, как отмечает Маслов, он «может применяться для других исчислений и для произвольных типов с-правил. Правда, при этом значения метапеременных приходится конкретизировать не только при окончательном завершении заготовки, но и по ходу ее построения (при этом возможна не окончательная конкретизация, а с точностью до новых метапеременных)»<sup>2</sup>. Метод метапеременных позволяет полностью устранить с-правила из произвольных исчислений без увеличения числа применений правил в результирующем выводе (при доказательстве этого утверждения используются результаты теории исчислений общего типа, в частности возможность перехода к однопосылочным исчислениям). Это утверждение можно интерпретировать как аналог теоремы Генцена об устранимости сечения для произвольных исчислений, позволяю-

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Указ. соч. С. 296.

<sup>2</sup> Там же. С. 298.

щий говорить о наличии у выводов в таких исчислениях свойства подформульности.

Метод метапеременных широко распространен для решения творческих задач, связанных с переборами. Таковым, по существу, является метод неопределенных коэффициентов в математике. Вообще неоднократно существенный прогресс в математике достигался именно явным введением в изучаемый язык метапеременных предшествующего уровня. Примером может служить переход от арифметики к алгебре, состоящий в появлении языка «иксов и игреков» и правил преобразования выражений в этом языке.

После введения в язык исчисления метапеременных, уточнение значений переменных будет результатом определенного перебора. Усовершенствование механизма такого перебора обычно связано с выработкой в языке с введенными метапеременными подходящих допустимых правил. Частным случаем таких правил выступают нуль-посылочные правила, то есть допустимые схемы аксиом. Для исчисления первообразных полезным представляется его пополнение, например, схемой аксиом типа: «Любое рациональное выражение интегрируемо в элементарных функциях». Здесь добавление новых допустимых схем аксиом соответствует расширению таблицы интегралов. Рекуррентные формулы являются производными правилами, а метод неопределенных коэффициентов может быть сформулирован в форме собственно допустимого правила. Итак, введение в язык исчисления с метапеременными собственно допустимых правил — очень действенный механизм повышения эффективности любого исчисления. Маслов замечает, что само возникновение, например, интегрального исчисления «может трактоваться как появление нового языка для вычисления пределов конечных сумм с очень эффективными допустимыми правилами»<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 30.

3. Наряду с метапеременностью другой важной идеей для совершенствования методов поиска вывода, основанных на применении свойства подформульности, является принцип локальной обработки информации.

На примере исчисления  $C$  мы убедились, что непосредственное применение метода метапеременных весьма затруднительно в связи с необходимостью «глобальной» обработки «заготовки» вывода, содержащей метапеременные.

Для произвольных исчислений эта идея представляется следующим образом<sup>1</sup>.

Для любого исчисления  $\beta$  любой метод поиска вывода в нем может быть представлен как способ построения по каждому испытываемому на выводимость объекту  $S$  специального исчисления  $I_{\beta,S}$ , выводимость в котором специального объекта  $\square$  эквивалентна выводимости  $S$  в исходном исчислении  $\beta$ . Опишем поиск снизу вверх объекта  $S$  в произвольном исчислении генценовского типа  $\beta$ , обладающем свойством подформульности. Единственная аксиома соответствующего исчисления  $I_{\beta,S}$  —  $S$ , а правила вывода будут переводить объекты вида  $S_1 * \dots * S_i * \dots * S_n$  в объекты следующего вида:

а)  $S_1 * \dots * S_{i-1} * S_{i+1} \dots * S_n$ , если  $S_i$  является аксиомой  $\beta$ ;

б)  $S_1 * \dots * S_{i-1} * S'_i * S_{i+1} \dots * S_n$ , если  $S_i$  получается из  $S'_i$  по однопосылочному правилу  $\beta$ .

в)  $S_1 * \dots * S_{i-1} * S'_i * S''_i * S_{i+1} \dots * S_n$ , если  $S_i$  получается из  $S'_i$  и  $S''_i$  по двухпосылочному правилу  $\beta$ .

Выведение в этом исчислении пустого объекта соответствует получению аксиом на всех ветвях дерева поиска вывода в  $\beta$ .

Аналогично получается исчисление, оформляющее метод метапеременных, только в языке используется еще один потенциально бесконечный алфавит, а правило типа а) заменяется следующим *глобальным*:

$S_1 * \dots * S_n \mid \square \mid$  — при условии, что существует такая подстановка для метапеременных, которая превращает все  $S_i$  в аксиомы.

<sup>1</sup> Маслов С. Ю., Минц Г. Е. Указ. соч. С. 299.

Если применение правил а), б) и в) требовало обработки лишь части информации о построенном к данному моменту дереве поиска вывода, то использование глобального правила предполагает обработку всего дерева поиска вывода. Его сложность сравнима со сложностью всего процесса установления выводимости  $S$ .

Очевидно, что сочетание локального принципа обработки информации и основной идеи метода метапеременных (небольшая уточненность значений термов, чем это необходимо в данный момент) может ознаменовать очередной этап в машинном поиске вывода.

Итак, если некоторая система может быть смоделирована посредством исчисления общего типа, то процессы, происходящие в ней, можно представить как процессы *поиска вывода*. В этом случае аппарат получения результата — *теория поиска вывода*. Следуя модели Б. С. Грязнова, на этом этапе появляется возможность реконструировать проблему, решаемую теорией поиска вывода. Если задачи, решаемые теми или иными методами теории поиска вывода, связаны с поиском вывода определенных видов объектов в конкретных исчислениях, то проблема, решаемая теорией в целом, — как выявить по исчислению и объекту в языке исчисления структуру возможных выводов этого объекта<sup>1</sup>.

При этом, вообще говоря, нет никаких гарантий того, что эта задача может быть решена с использованием автоматических процедур. В частности, этому препятствует наличие в исчислениях правил типа сечения или *с-правил*. Мы видели, что устранение сечения и *с-правил* в исчислении  $S$  дает возможность получать такие его модификации, которые обладают свойством подформульности, что позволяет автоматизировать поиск вывода в них. Распространяя эту идею на нелогические исчисления, можно говорить, что устранение *с-правил* из них с целью обеспечения подформульности — необходимое усло-

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 20.

вие для решения тех задач, которые ставятся перед теорией поиска вывода.

Обе основные идеи обратного метода для исчисления  $C$  — *метапеременная* и *принцип локальной обработки информации* — применимы и к исчислениям, не являющимся логико-математическими.

Итак, мы можем сказать, что у истоков теории поиска вывода стояло машинное доказательство логических и математических теорем. Возможность устранения правил типа сечения из логико-математических исчислений привела к наличию у выводов в таких исчислениях свойства подформульности. Это позволило создавать методы автоматического доказательства, которые реализуют идею доказательства «снизу вверх».

С другой стороны, в настоящее время теория исчислений дает весьма эффективный аппарат качественного моделирования многих процессов из различных областей знания (биологии, экономики, социологии и т.д.). Свойства таких исчислений общего типа изучаются методами теории поиска вывода. Наличие у выводов свойства подформульности и здесь представляется необходимым для построения в них выводов «снизу вверх». Оказалось, что устранение  $c$ -правил (препятствующих организации поиска «снизу вверх») для исчислений общего типа невозможно, если требовать сохранения языка исчисления. Однако метод метапеременных, разработанный для исчислений логического типа, позволяет устранить  $c$ -правила и тем самым обеспечить подформульность и в исчислениях общего типа.

Итак, свойство подформульности, полученное Генценом как поризм в ходе доказательства непротиворечивости арифметики, было применено к решению задач автоматического доказательства теорем. На этом этапе объектом исследования становится *поиск логического вывода* и разрабатываются различные методы этого поиска. Необходимость искать вывод для объектов, отличных от логико-математических теорем, привела к появлению нового теоре-

тического объекта — поиска вывода «вообще». Для его исследования применяется соответствующий аппарат — теория исчислений общего типа. На нее распространяются методы, полученные в теории логико-математических исчислений, что приводит к возникновению теории поиска вывода и реконструкции решаемой этой теорией проблемы.

### § 3. Приложения теории поиска вывода в психологии и философии логики

Осознание того, что теория поиска вывода представляет собой область знания, отличную от теории доказательств, таит в себе возможности пересмотра тех философских взглядов, которые вырабатывались в то время, когда деятельность по построению доказательства (поиск вывода) считалась не доступной рациональной реконструкции. Теория поиска вывода дает нам запас рациональных моделей эвристической деятельности, что позволяет по-иному взглянуть на весь комплекс задач, связанных с местом логики в системе эвристической деятельности. Понятие логической процедуры становится центральным для такого подхода. В этом параграфе мы намерены показать, что системная трактовка логических процедур, в частности выделение в логической процедуре подсистемы *поиска вывода*, позволяет находить новые и удовлетворительные решения некоторых философских проблем логики (ФПЛ): отношения субъекта и объекта познания в логике, информативности логических истин и логических процедур, соотношения языка и мышления в логических процедурах, логических процедур и эвристических процессов.

Такие характеристики содержательных рассуждений, как запас знаний субъекта и его психологические особенности, эвристичность рассуждений, ориентация на получение нового знания в процессе рассуждений, отражение в рассуждениях основных характеристик мышления субъекта, явля-

ются существенными в плане ФПЛ, что и подтверждают исследования по теории аргументации, искусственному интеллекту и, в частности, по так называемой «естественной логике», или «логике рассуждений»<sup>1</sup>. Каким же должно быть понятие рассуждения, соответствующее этим характеристикам? Обычно под рассуждением понимают переход от одних утверждений (высказываний) к другим. Однако это понимание слишком абстрактно. Существенный его недостаток заключается в том, что процесс рассуждения рассматривается в изоляции от других мыслительных операций. Ведь любое рассуждение предпринимается для того, чтобы сделать некоторые мысли если не общезначимыми, то, по крайней мере, понятными или приемлемыми для другого человека или, в случае мысленного диалога, для себя самого. Иначе говоря, рассуждение является актом коммуникации и поэтому должно входить в структуру коммуникации. В этом смысле рассуждение включает в себя субъект, процесс перехода от одних высказываний к другим и адресата, обеспечивающего интерсубъективность рассуждения (в случае мысленного диалога адресат совпадает с субъектом). Кроме того, рассуждению свойственны психологические признаки сознательности и произвольности. Действительно, субъект, производящий рассуждение, волен прекратить его на любом этапе, а неосознаваемые компоненты в нем подлежат осознанию и развертыванию. И конечно же, рассуждению присуща такая черта, как последовательность. Рассуждения обычно развертываются по определенным правилам, и для них характерна довольно жесткая структура. Наконец, рассуждение характеризуется своим влиянием на адресата, в роли которого может выступать и субъект, проводящий рассуждение, и другой индивидуальный или коллективный субъект. Результатом рассуждения становится определенное изменение в системе знаний, мнений, установок адресата.

---

<sup>1</sup> *Поспелов Д. А.* О «человеческих» рассуждениях в интеллектуальных системах // Вопросы кибернетики. 1983. С. 5—37.

Дадим определение понятия «рассуждение».

*Рассуждение* — это акт коммуникации, состоящий в сознательном и последовательном преобразовании определенных структур мышления некоторого субъекта с целью планомерного изменения соответствующих структур другого субъекта. При таком понимании рассуждение трактуется как система, складывающаяся из взаимодействия субъекта, объекта и адресата рассуждения, в результате которого возникает последовательность высказываний, обладающая (или не обладающая) свойствами доказательности или убедительности.

Анализ рассуждений, имеющих место в науке или в обыденной жизни, показывает, что они являются целостными системами, включенными в более широкий контекст общения. Поэтому при исследовании рассуждений следует учитывать особенности построения теории целостных объектов, при котором необходимы следующие два этапа:

- (1) формирование исходных теоретических абстракций в результате анализа эмпирического материала;
- (2) построение на этой основе теории данного целостного объекта, воспроизводящей его особенности с той степенью адекватности, которая допускается исходными абстракциями (синтез).

Исходные абстракции задают те наиболее существенные свойства и отношения объекта теории, которые определяют характер решения основных проблем теории.

При рассмотрении способов формирования исходных абстракций особый интерес представляет проведенное Л. С. Выготским различение двух видов анализа: «анализ по элементам» и «анализ по единицам». Кратко говоря, анализ по элементам дает такие структуры, которые не сохраняют системных свойств целого (например, выделение в речевом мышлении собственно мышления и собственно речи), а анализ по единицам выделяет такие минимальные структуры, которые сохраняют системные свойства анализируемых объектов (например, значение слова, включающее единство мышления и речи). Л. С. Выготский считал анализ по единицам важнейшим

средством исследования системных объектов и видел в нем «коренное изменение метода психологического эксперимента», в частности, заключающееся в «замене анализа, разлагающего сложное психологическое целое на составные элементы и вследствие этого теряющего в процессе разложения целого на элементы подлежащие объяснению свойства, присущие целому как целому, анализом, расчленяющим сложное целое на далее неразложимые единицы, сохраняющие в наименее простейшем виде свойства, присущие целому как известному единству»<sup>1</sup>. Думается, что различие этих видов анализа имеет не только психологическое, но и общенаучное значение и примерно соответствует классическому (имеется в виду классическая наука Нового времени) и системному типам анализа.

В применении к ФПЛ упомянутый выше способ построения теории целостных объектов выглядит следующим образом:

(1) анализ рассуждений и выделение исходной теоретической абстракции — способа представления рассуждений;

(2) представление на основе этого способа систематических решений ФПЛ.

Из приведенных соображений следует, что стадия (1) может иметь двоякий характер в зависимости от типа применяемого анализа.

Чтобы проследить соотношения между рассуждениями и способами их представления, рассмотрим интерпретацию силлогистики Аристотеля, данную Я. Лукасевичем<sup>2</sup>. Сразу нужно отметить, что из текстов самого Аристотеля нельзя точно установить, какими структурами формальных языков следует представлять силлогизмы<sup>3</sup>. Последнее обстоятельство говорит о том, что выбранный способ представления сил-

---

<sup>1</sup> *Выготский Л. С.* Психология и учение о локализации психических функций // Соч. : в 6 т. М. : Педагогика, 1982. Т. 1. С. 174.

<sup>2</sup> *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М. : Изд-во иностр. лит., 1959.

<sup>3</sup> *Бочаров В. А.* Аристотель и традиционная логика: Анализ силлогических теорий. М. : Изд-во МГУ, 1984. С. 46.

логизмов свидетельствует, скорее, о характере установок на анализ рассуждений, принимаемых интерпретатором, чем о взглядах самого Аристотеля. Если учесть, что задачей Лукасевича было исследование силлогистики «с точки зрения современной формальной логики», то можно предположить, что используемый им способ представления рассуждений в какой-то мере характерен для философских установок ранней символической логики.

Лукасевич предлагает представлять аристотелевский силлогизм в виде импликации  $(\alpha \& \beta) \supset \gamma$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — посылки, а  $\gamma$  — заключение силлогизма, и приводит аргументы в пользу того, что это и есть аутентичное прочтение аристотелевских текстов. Для нас здесь важно одно положение: Лукасевич предлагает представлять аристотелевские силлогизмы как некоторые высказывания языка-объекта. Таким образом, намечается следующая цепочка: форма определенных образцов рассуждений представляется как силлогизм (Аристотель), а силлогизм — как импликативное высказывание (Лукасевич). Однако при таком подходе возможен отрыв представлений от своих прообразов-рассуждений. Не случайно Б.С. Грязнов, анализируя подход Лукасевича, сделал вывод, согласно которому силлогистика «не является теорией о доказательствах, но теорией о предложениях... Она ничего и не говорит о рассуждениях»<sup>1</sup>. В этом утверждении Б.С. Грязнова силлогистика Лукасевича и рассуждения разводятся, пожалуй, слишком резко. Силлогистика, конечно, говорит нечто существенное о рассуждениях, но делает это весьма своеобразно. Чтобы привести силлогистику Аристотеля в соответствие с «точкой зрения современной формальной логики», Лукасевич прибегает к представлению силлогистических рассуждений в виде высказываний и строит аксиоматическую теорию этих высказываний. На наш взгляд, Лукасевич выбрал такую форму представления не случайно. Дело в том, что свой подход к силлогистике Лукасевич сформулировал уже к

---

<sup>1</sup> Грязнов Б. С. Логика, рациональность, творчество. С. 234.

1929 году<sup>1</sup>, когда в символической логике единственным способом формализации рассуждений было построение аксиоматических систем гильбертовского типа, по терминологии В. А. Смирнова<sup>2</sup>, а натуральные и секвенциальные исчисления еще не были известны. Последующее развитие символической логики показало, что такой способ представления силлогистических рассуждений не является единственным, силлогистика может быть сформулирована и как натуральная, и как секвенциальная система. Таким образом, интерпретация силлогистики Лукасевичем свидетельствует о том, что одним из способов формализации рассуждений в ранней символической логике выступало представление их как высказываний языка-объекта. Это мы будем называть «высказывательным подходом» к представлению рассуждений.

Однако Лукасевич не был «изобретателем» такого подхода. На указанную особенность способа представления рассуждений в ранней символической логике обращает внимание Д. Правиц, характеризуя теорию доказательств Г. Фреге. По его мнению, хотя Фреге и стремился выразить содержательные доказательства формальными выводами, «однако это представление относится только к доказуемым теоремам, то есть к результатам доказательств, поскольку формальный вывод может основываться на понятиях или дедуктивных операциях, совершенно отличных от доказательств»<sup>3</sup>. В этом замечании Д. Правица содержится важное соображение: в ранней символической логике Фреге, Рассела, Гильберта формальные модели содержательных рассуждений представляли их только в отношении доказуемых теорем-высказываний. На наш взгляд, это обстоятельство также могло стимулировать «высказывательный подход» к представлению рассуждений.

---

<sup>1</sup> См. по этому поводу: *Pravitz D. The philosophical position of Proof theory // Contemporary philosophy in Scandinavia. Baltimore; L. : Hopkins, 1972. P. 123—134.*

<sup>2</sup> *Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления. М. : Наука, 1972. С. 22—25.*

<sup>3</sup> *Pravitz D. The philosophical position of Proof theory. P. 132.*

Говоря о способах представления рассуждений в ранней символической логике, нельзя обойти гильбертовскую теорию доказательств. На первый взгляд, подход Гильберта противоположен представлению рассуждений с помощью высказываний. Действительно, Гильберт в явной форме говорит, что «логические умозаключения» выражаются «с помощью формальных процессов», а «содержательные выводы подменяются внешними действиями согласно правилам»<sup>1</sup>. С содержательными рассуждениями здесь сопоставляются не высказывания, а действия с выражениями формальной системы. Однако имеется ряд обстоятельств, позволяющих говорить, что реализация программы Гильберта имела отношение к распространению «высказывательного подхода». На эти обстоятельства указывает критика гильбертовской теории доказательств с точки зрения так называемых общей (Д. Правиц<sup>2</sup>) и структурной (Г. Крайзель<sup>3</sup>) теорий доказательств.

Г. Крайзель вслед за Д. Правицем пользуется термином «редуктивная теория доказательств» для обозначения исследований, проводимых по типу программы Гильберта. Источник успехов этой теории, а также ее недостатков Г. Крайзель видит в том, что изучение самих доказательств эта теория заменяет изучением таких свойств высказываний или множеств высказываний, как общезначимость, доказуемость, выводимость. В этом он находит сходство между редуктивной теорией доказательств, теоретико-множественным подходом к основаниям математики и теорией моделей: «Доказуемость и выводимость В из А изучались и в теоретико-множественных основаниях, и в гильбертовской теории доказательств. Однако

---

<sup>1</sup> Гильберт Д. О бесконечном // Основания геометрии. М.; Л. : Государственное технико-теоретическое издательство, 1948. С. 359.

<sup>2</sup> Prawitz D. On the idea of general proof theory // Synthese. 1974. Vol. 27, № 1/2. P. 63—77.

<sup>3</sup> Kreisel G. Perspectives in the philosophy of pure mathematics // Logic, methodology and philosophy of science. Amsterdam : North-Holland, 1973. Pt 4. P. 255—277.

от этих исследований не следует ожидать даже первых шагов по направлению к теории самих доказательств. Наоборот, их целью является устранение всех деталей, связанных с доказательствами, которые не имеют отношения к утверждениям о доказуемости (или общезначимости) и выводимости (или следовании)»<sup>1</sup>. Поэтому, по мнению Крайзеля, ряд результатов, полученных в рамках гильбертовской теории доказательств (например, неполнота формальной арифметики, результаты о консервативности), «говорят не о самих доказательствах, а множествах доказуемых теорем»<sup>2</sup>.

Еще более радикальное заключение получает из анализа гильбертовской теории доказательств Э. Бет, который утверждает, что «теория доказательств для некоторой формальной системы  $L$  сводится к изучению структурных свойств выражений, имеющих место в  $L$ , или некоторых классов таких выражений (например, класса всех формул, доказуемых в  $L$ )»<sup>3</sup>.

Итак, из анализа теорий доказательств в ранней символической логике, предпринятого Э. Бетом, Г. Крайзелем, Д. Правицем, следует, что стремление к формализации рассуждений (математических доказательств) реализовывалось по преимуществу в результатах, относящихся не к самим рассуждениям, а к свойствам теорем или множеств теорем формализованных теорий. Это обстоятельство, которое, без сомнения, сыграло позитивную роль в развитии символической логики и исследований по основаниям математики, стимулировало появление «высказывательного подхода» к представлению рассуждений. Реализация этого подхода хорошо прослеживается на примере представления силлогизмов в системе Лукасевича, но еще более ярким примером его влияния на решение ФПЛ представляется, на наш

---

<sup>1</sup> *Kreisel G.* Op. cit. P. 263.

<sup>2</sup> *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. М. : Мир, 1981. С. 261.

<sup>3</sup> *Beth E.* The foundations of mathematics: A study in the philosophy of science. Amsterdam: Noth-Holland, 1959. P. 72.

взгляд, «Логико-философский трактат» Л. Витгенштейна, внимание к которому не ослабевает до настоящего времени. «Трактат» является, пожалуй, наилучшим материалом для выявления связи между способом анализа рассуждения, способом их представления и решениями ФПЛ.

### *Философия логики Л. Витгенштейна*

Онтология «Трактата», изложенная в группе афоризмов 1 и 2, есть не что иное, как семантика термина «предложение». С введением понятия «предложение» в «Трактате» начинается рассмотрение собственно логической проблематики. Центральная роль «предложения» подчеркивается афоризмом: «Предложение конструирует мир с помощью логических строительных лесов, поэтому в предложении можно также видеть, как обстоит дело со всем логическим, когда это предложение истинно» (4.023)<sup>1</sup>. Таким образом, структура предложения определяет «логический срез действительности» и тем самым детерминирует самую логику. Понятие предложения содержит в себе все, что необходимо для построения логики.

Через рассмотрение предельных случаев условий истинности предложений (тавтологичных и противоречивых) Витгенштейн вводит понятия логически истинного и логически ложного высказываний (4.431, 4.46). Этот же подход он распространяет и на понятие логического вывода, вводимое через понятие семантического следования, а это последнее вводится через понятие оснований истинности предложений (строки входа таблицы, в которых предложение принимает значение «истина»). На основании понятия логического следования легко определяется понятие вывода: «Если  $p$  следует из  $q$ , то я могу заключить от  $q$  к  $p$ ; вывести  $p$  из  $q$ . Способ вывода всегда

---

<sup>1</sup> Цитаты Витгенштейна цитируются по следующему изданию: *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М. : Изд-во иностр. лит., 1958. В тексте в круглых скобках приводится номер афоризма по этому изданию.

познается из обоих предложений. Только они могут оправдывать вывод» (5.132). Как мы видим, подчеркивая центральную роль понятия «предложение», Витгенштейн игнорирует даже очевидную важность для определения вывода понятия правила вывода.

Таким образом, Витгенштейн приходит к тезису о том, что предложение есть способ представления рассуждений: «В логике каждое предложение является формой доказательства» (6.1264). Это дает основание заключить, что предложение как способ представления рассуждений выступает в «Трактате» как единица анализа. Выбор такого способа представления рассуждений приводит к вполне определенным решениям ФПЛ.

Для начала рассмотрим проблему информативности логических истин. Витгенштейн, исходя из своей теории отношения предложений и реальности, а также понятия условий истинности предложений, определяет познавательный статус логических истин: «В тавтологии условия соответствия с миром — отношения изображения — взаимно аннулируются тем, что они не стоят ни в каком отношении изображения к действительности» (4.462). Принятие такого своеобразного отношения логических истин к действительности немедленно приводит к определенной оценке информационного содержания логических истин: «Предложения логики суть тавтологии» (6.1); «Предложения логики, следовательно, ничего не говорят. (Они являются аналитическими предложениями)». (6.11). Таким образом «высказывательный подход» приводит к отрицательному решению проблемы информативности логических истин.

Следующая проблема — информативность логических процедур. Основываясь на зависимости понятия следования от структуры предложения (5.13), Витгенштейн формулирует концепцию неинформативности логического следования, которая, по существу, является определением логического следования как включения по информации: «Если какое-нибудь предложение следует из другого, то последнее говорит больше, чем первое; первое меньше, чем последнее» (5.14). Теперь, если учесть процитированный афоризм 5.132, мы получаем

концепцию неинформативности логического вывода: информация заключения правильного логического вывода не превосходит информацию его посылок.

Из тех же предпосылок Витгенштейн исходит, отрицая возможности рассмотрения субъекта познания в логике. Предполагая, что истины логики суть тавтологии, допускающие любое положение дел в мире и не исключающие ни одной возможности, Витгенштейн делает вывод: «Логика наполняет мир: границы мира являются также ее границами... [Логика не может] выйти за границы мира, чтобы она могла рассматривать эти границы также и с другой стороны» (5.61). Далее, из анализа проблемы субъекта следует, что «субъект не принадлежит миру, но он есть граница мира» (5.632). А из этих двух высказываний уже несложно получить третье: «Мыслящего субъекта нет» (5.631). Конечно, это положение не следует воспринимать как отрицание существования субъекта. Это, скорее, отрицание возможности анализировать субъект с помощью рациональных логических средств.

Развивая свои взгляды на логику, Витгенштейн получает очень сильные (и, как показывает дальнейшее развитие символической логики, неверные) следствия. К этим следствиям, в частности, относится крайнее пренебрежение ролью доказательства в логике: «...для логики совершенно не важен способ показа того, что ее предложения суть тавтологии» (6.126); «доказательство в логике есть только механическое средство распознавания тавтологии там, где она усложнена» (6.1262).

Таким образом, решение ФПЛ в «Трактате» во многом диктовалось вполне определенной «парадигмой» — выбором в качестве единицы их анализа понятия предложения (высказывания).

Нетрудно заметить, что предложенные в «Трактате» решения ФПЛ решительно расходятся с характеристиками содержательных рассуждений. На наш взгляд, это свидетельствует о неприемлемости упомянутых решений и о том, что представление рассуждений как высказываний и выбор высказывания в качестве единицы анализа не является вполне адекватной основой решения ФПЛ.

Каким же требованиям должна удовлетворять системная единица анализа? Этот вопрос в связи с идеями Л. С. Выготского о единице анализа психики исследует В. П. Зинченко<sup>1</sup>. Выдвинутые им требования можно переформулировать в более общей методологической форме.

(1) Единица анализа должна быть некоторой связной структурой, далее неразложимым целым.

(2) Единица анализа должна содержать в себе системообразующие связи и отношения анализируемого объекта или процесса.

(3) Если целое динамично, то единица анализа должна включать в себя некоторый порождающий механизм, обеспечивающий ее динамику.

(4) Единица анализа должна служить основой синтеза свойств, присущих анализируемому целому.

(5) Единица анализа должна позволять исследовать отношение изучаемого объекта или процесса к более широкой системе, включающей этот объект или процесс как подсистему.

Таким образом, единица анализа целостной системы — это минимальная в некотором отношении система, обладающая достаточно сложным строением, чтобы отображать, по крайней мере, некоторые системообразующие связи целого, и служащая основанием для теоретического синтеза характеристик, присущих исходному целому.

Понятие высказывания или последовательности высказываний мало подходит на роль единицы анализа рассуждений, так как не удовлетворяет, как минимум, требованиям (2), (3), (4), (5). На наш взгляд, для этого больше подходит понятие логической процедуры, соответствующей «процедурному» подходу.

Что же такое логическая процедура и в чем значение этого понятия? Процедура вообще есть последовательность действий, выполняемая по более или менее определенным прави-

---

<sup>1</sup> Зинченко В. П. Идеи Л. С. Выготского о единицах анализа психики // Психологический журнал. 1981. Т. 2, №2. С. 120—121.

лам. Логическую процедуру в первом приближении можно характеризовать как последовательность действий, выполняемых в соответствии с правилами преобразования выражений некоторого естественного или формализованного языка. Однако уже это определение вызывает ряд вопросов: если логическая процедура есть последовательность действий, то что это за действия? чьи это действия? с чем это действия? Возникает задача описания логической процедуры как системы.

Первое, что требуется при системной трактовке логической процедуры, — это осознание того, что логическая процедура — один из видов познавательных процедур, а следовательно, имеет субъект-объектную структуру. На наш взгляд, нет необходимости конструировать какой-либо особый «логический» субъект. Субъектом действий, составляющих логическую процедуру, выступает субъект познания. Специфика субъект-объектных отношений в логических процедурах скорее связана с понятием объекта действий. На первый взгляд, субъект действует с формулами или множествами формул языка  $L$ . Однако являются ли формулы и предложения объектами логических процедур? На наш взгляд, нет, поскольку общезначимые формулы и логически истинные предложения обычно интересуют субъекта не сами по себе, а как выражение отношений между логическими формами высказываний языка  $L$ . Действительно, вместе с принятием некоторого языка, определением формы его выражений и их семантики фиксируется и множество отношений между логическими формами этих выражений — логических отношений между высказываниями. Эти отношения независимы от субъекта в том смысле, что диктуются, навязываются ему структурой самого языка и его семантикой. Строя выводы, доказательства, опровержения, субъект ставит своей целью обнаружить такие отношения, выраженные формулами или утверждениями о выводимости. Поэтому объектом данной логической процедуры естественно считать некоторое подмножество множества объективных отношений между логическими формами выражений языка  $L$  — логических отношений.

При таком понимании субъекта и объекта логических процедур системообразующими связями между компонентами системы — субъектом и объектом — выступают действия субъекта по исследованию объекта, то есть логических отношений.

Логическим аналогом такого рода действий можно считать понятие вывода (доказательства, опровержения). Если определять место логического вывода в системе логической процедуры, то можно сказать, что вывод есть средство фиксации логических отношений, развернутое «изображение» отношения логического следования. Поэтому логический вывод есть результат действий субъекта логических процедур. Сами эти действия — это действия по поиску вывода. Таким образом, на уровне работы с выражениями языка  $L$  логическая процедура состоит из двух подсистем: вывода и поиска вывода, которые в совокупности образуют те «внешние действия» (по выражению Гильберта), при помощи которых субъект исследует логические отношения между высказываниями языка  $L$ .

Рассмотрим, каким образом это понимание логических процедур может быть применено к формализованным логическим системам. С этой точки зрения, можно выделить два типа логических систем: во-первых, системы, в которых формализуются понятие общезначимой формулы или отношения следования, и, во-вторых, системы, в которых наряду с формализацией логического следования имеет место хотя бы частичная формализация принципов поиска вывода. Примером систем первого типа могут быть аксиоматические системы гильбертовского вида и системы натурального вывода, второго — секвенциальные системы.

Можно сказать, что более полная формализация процесса дедуктивного рассуждения происходит в системах второго типа. На основе этих систем можно точно ставить вопрос об эвристических возможностях логических процедур и поло-

жительно отвечать на него<sup>1</sup>. В системах первого типа формализуется только подсистема логического вывода, а системные принципы строения логической процедуры не находят полного выражения. В таком случае логические процедуры развертываются как бы в «двух измерениях»: в формальной системе, в которой выписывается вывод, и в «уме» субъекта, работающего с этой формальной системой (ищущего подстановки в аксиомы, изобретающего вспомогательные допущения и т. п.). Системы второго типа — секвенциальные системы кангеровского вида, семантические таблицы Бета и прочие — частично формализуют и вторую подсистему логических процедур, то есть поиск вывода. Для еще более полной формализации логических процедур в том виде, в каком они понимаются в настоящей книге, необходима формализация принципов поиска вывода в рассматриваемой логической системе, то есть формулировка алгоритмов поиска вывода.

Проведенный анализ понятия логической процедуры показывает, что она является целостной системой. Базисный уровень ее представляет собой субъект-объектную структуру, связанную действиями субъекта по исследованию логических отношений; на уровне «внешних действий» (семантики и синтаксиса языка) эта структура проявляется как динамическое взаимодействие двух подсистем: вывода и поиска вывода.

Теперь мы можем дать определение логической процедуры: логическая процедура есть последовательность действий

---

<sup>1</sup> Брюшинкин В. Н. О мерах приращения информации в ходе поиска логического вывода // Логика и основания математики : тез. VIII Всесоюз. конф. «Логика и методология науки». Паланга, 26—28 сент. 1982 г. Вильнюс : ВНИИСИ, 1982. С. 20—24; *Его же*. Информативность логических процедур // Системные исследования: Методол. пробл. : ежегодник, 1984. М. : Наука, 1984. С. 194—206; *Его же*. О методологическом значении различия понятий «вывод» и «поиск «вывода» // Филос. науки. 1984. №4. С. 48—54; Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества; Хинтикова Я. Указ. соч.

субъекта познания с формулами (или множествами формул) формализованного языка или предложениями естественного языка, направленных на обнаружение отношений логических форм высказываний этого языка и выполняемых в соответствии с правилами некоторой логической системы, сформулированной в этом языке.

Рассмотренная организация логических процедур в принципе соответствует структуре упомянутых выше содержательных рассуждений. Поэтому можно утверждать, что понятие логической процедуры выполняет основные методологические требования, предъявляемые к единице анализа. Действительно, выполнимость требований (1) — (3) следует из анализа структуры логических процедур. Выполнимость требования (5) следует из того, что логические процедуры являются разновидностью познавательных процедур. Что же касается выполнимости требования (4), то сначала необходимо выяснить, каким образом выбор логической процедуры в качестве единицы анализа влияет на решение ФПЛ.

Из рассмотрения структуры логических процедур вытекает следующее решение проблемы субъекта и объекта познания в логике. В качестве субъекта рассматривается исследователь, строящий выводы в некотором формализованном или естественном языке, в качестве объекта — логические отношения между высказываниями, а конкретные виды логических процедур описывают отношения между субъектом и объектом.

Понятие логической процедуры открывает возможности для отображения по крайней мере некоторых характеристик субъекта познания и особенностей его мышления при помощи подсистемы поиска вывода, которая, по словам С. Ю. Маслова, должна «отражать некоторые важные свойства человеческого мышления»<sup>1</sup>.

По отношению к проблемам информативности логических процедур и логических истин «процедурный» подход связан с

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 26.

переходом от понятия семантической информации, используемой в «высказывательном подходе», к понятию дедуктивной информации (например, поверхностной, по Хинтикке<sup>1</sup>, или дологической<sup>2</sup>), зависящей от фактического совершения логических процедур. Понятие такой дедуктивной информации позволяет выделить класс логических истин, сообщающий ненулевую информацию, и определить меры приращения информации субъекта познания в ходе совершения логических процедур<sup>3</sup>.

Понимание того факта, что логическая процедура нацелена на обнаружение и фиксацию логических отношений между высказываниями, раскрывает эвристический аспект логики. Рассмотрение логической процедуры как системы позволяет выделить ее подсистему, ответственную за эвристичность, а именно подсистему поиска вывода.

Таким образом, «процедурный» подход к анализу рассуждений дает решения ФПЛ, совпадающие с выделенными ранее характеристиками содержательных рассуждений. Отсюда можно заключить, что логическая процедура является системной единицей анализа рассуждений и может служить основой для решения философских проблем логики.

Универсальный характер понятия дедуктивной системы (исчисления) позволяет применять исчисления для качественного моделирования самых разных дискретных процессов из различных областей знания. Например, построены модели, отражающие технологический аспект работы экономических систем, их функционирование как систем с разрешениями, распоряжениями, обработкой информационных ресурсов и т. д. В связи с вопросом о роли научно-технического прогресса значительный интерес представляют модели, позволяющие выявлять качественные тенденции изменения биосферы и за-

---

<sup>1</sup> Хинтикка Я. Указ. соч. С. 182—227.

<sup>2</sup> Брюшинкин В. Н. О мерах приращения информации в ходе поиска логического вывода. С. 20—24.

<sup>3</sup> Там же.

пасов природных ресурсов при различных видах функционирования экономических систем. Другими примерами использования аппарата исчислений общего типа могут служить его применения в математической лингвистике, при изучении моделей роста, при моделировании биологической эволюции<sup>1</sup>. Теория поиска вывода является тем аппаратом, который позволяет изучать свойства исчислений и применять их к решению конкретных задач.

Наибольшее внимание С. Ю. Маслов уделяет направлениям возможных приложений теории поиска вывода в психологии. Он утверждает, что существует аналогия между *методами теории поиска вывода* и *способами, вырабатываемыми человеком* при решении конкретных творческих задач и классов таких задач. Здесь имеется в виду творчество, результатом которого должна стать некоторая цепочка рассуждений или действий, при этом каждое из них выбирается из своего, достаточно четко очерченного, конечного множества. Таким образом, главной задачей является интеллектуализация перебора. На значимость акта выбора в человеческом творчестве обращает внимание Г. Крайзель. Он отмечает, что нельзя игнорировать «важную особенность большинства видов человеческой деятельности, и прежде всего, исследований: когда мы начинаем размышлять о некоторой проблеме, почти все возможные идеи или "возможности" решения проносятся через наш мозг; главный шаг — это выбор идеи, которая сработает»<sup>2</sup>.

Особенно четко этот вид творчества выступает в играх с полной информацией и в доказательствах теорем в полностью формализованных теориях. Последняя задача обладает еще и той особенностью, что к ней сводится любое другое творчество с формализованными переходами. Поэтому соображения, возникающие при ее решении должны быть достаточно общими.

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества. С. 18.

<sup>2</sup> Крайзель Г. Указ. соч. С. 212.

Именно необходимость построения достаточно общей теории доказательств теорем в произвольных формализованных системах и привела к развитию теории поиска вывода. Центральный вопрос теории поиска вывода — *как* можно было бы открыть такую-то истину. Вообще говоря, традиционные аппараты логического типа моделируют лишь результаты творчества, то есть «что мозг признает истиной», а не «как мозг открывает истину».

Автоматизация элементов интеллектуальной деятельности — один из основных направлений развития теории поиска вывода. Чисто теоретически для любой формальной системы существует алгоритм поиска вывода, выдающий вывод для каждой выводимой формулы и работающий бесконечно долго для некоторых или всех невыводимых формул. Однако машинное моделирование процесса доказательства достаточно интересных теорем остается сверхзадачей. Очевидно, эта сверхзадача носит психологический характер, связанный с требованием определенной универсальности программ.

Идеи теории поиска вывода в применении к изучению творческих механизмов можно обозначить следующим образом. Пусть имеется некоторый класс  $K$  творческих задач. В соответствии со спецификой этого класса подбирается исчисление  $AK$ , аксиомами которого выступают задачи, решение которых заранее известно, а правила вывода вида

$$S_1, S_2, \dots, S_m \rightarrow S_0$$

гарантируют решаемость задачи  $S_0$  в случае решаемости задач  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . Теперь фиксированная задача из класса  $K$  имеет решение тогда и только тогда, когда она выводима в построенном исчислении.

Механизм творчества состоит в модификации исходного исчисления таким образом, чтобы появилась возможность осуществлять в нем машинный поиск вывода.

При формализации творческих процессов в математике возникают исчисления, не имеющие характера «исчислений для доказательства», объекты, выводимые в них, не являются

логики-математическими формулами. Это, например, исчисление для нахождения первообразных и исчисление задач на построение.

Поскольку творческие процессы определенного вида могут представляться как процессы поиска вывода, то совокупность всех идей и методов теории поиска вывода возможно рассматривать как своеобразную модель человеческого интеллекта, отражающую некоторые его важные свойства. Так, становится реальным говорить о возможности моделирования в терминах теории поиска вывода некоторых известных результатов по функциональной асимметрии полушарий человеческого мозга<sup>1</sup>. Вкратце у Маслоу результаты эти таковы. Существуют два принципиально отличных познавательных механизма, соответствующие левому и правому полушариям (эта локализация во многом условна). Их краткая сравнительная характеристика приведена Маслоу в таблице.

Познавательный механизм	
Левополушарный	Правополушарный
Локальность в обработке информации. Стремление к расщеплению информации и к последовательному перебору вариантов	Глобальная обработка информации. Выявление тех ее свойств, которые пропадают при расщеплениях и вычленении фрагментов
Хорошая воспроизводимость и проверяемость результатов работы, основанная на возможности отделения от субъекта познания как самих этих результатов, так и процесса, ведущего к их получению	Невозможность отчуждения собственной работы механизма вплоть до получения результата, а иногда и после его получения
Осознанность, точность действий, объективность получаемых результатов	Невозможность полного контроля сознанием, наличие в деятельности механизма сфер под- и сверхсознания

<sup>1</sup> Маслоу С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. С. 116.

Проблема моделирования деятельности левополушарного механизма, очевидно, может решаться (и решается) весьма успешно. Современные компьютеры и машинные программы давно превзошли возможности левого полушария человека. Вместе с тем те значительные трудности, с которыми сталкиваются при попытке решать посредством ЭВМ сколько-нибудь сложные интеллектуальные задачи, видимо, обусловлены «принципиальной невозможностью или решительным неумением построить полноценно работающую модель правополушарного механизма»<sup>1</sup>.

Теория поиска вывода позволяет описать некоторые важные особенности правополушарных познавательных механизмов в терминах метапеременных и допустимых правил.

Введение новых допустимых правил приводит к появлению нового модифицированного исчисления, часто требует изменения языка, включение в него новых понятий и соответствует творческому мышлению, осуществляемому правым полушарием. Таким образом, главную роль в процессах творчества играет формирование допустимых правил и соответствующего языка. Эти действия, направленные на совершенствование исчислений, автоматизировать очень сложно.

Другая важная идея теории поиска вывода — метод метапеременных. Он так же, как формирование допустимых правил, соответствует особенностям правополушарного механизма. Рассмотрим, как в этом методе реализуется свойство правополушарного механизма осуществлять глобальную обработку информации. При поиске вывода методом метапеременных вместо настоящего вывода постепенно строится его «заготовка» в языке с метапеременными, для которой регулярно проверяется возможность превращения в вывод подбором значений метапеременных. При этом почти вся трудность поиска заключается в одном глобальном правиле превращения «заготовки» в вывод, требующем тщательного согласования значений метапеременных, входящих в «заготовку». Наличие тако-

---

<sup>1</sup> Маслов С. Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения. С. 119.

го очевидно правополушарного акта приводит к невозможности прямой реализации идеи метода метапеременных. Тем не менее мы знаем, что метод метапеременных эффективно применяется в рамках локальных методов, которые моделируют особенности левополушарного механизма и успешно реализуются на ЭВМ.

С описанным подходом к применению аппарата теории поиска вывода в изучении психологии творчества и машинном моделировании некоторых творческих процессов непосредственно связан тот факт, что идеи теории поиска вывода позволяют находить новые решения ряда проблем философии логики. Одним из ее важнейших вопросов является проблема психологизма.

В общем плане проблема психологизма формулируется обычно как проблема соотношения логики и мышления. Однако в ней выделяются две различные составляющие: 1) вопрос возможности обоснования логики в терминах психологии; 2) вопрос о типе отношений между логическими процедурами, с одной стороны, и эмпирическими (психологическими) данными о мышлении — с другой.

Классический психологизм XIX века отвечал на эти вопросы так: 1) логика редуцируема к психологии; 2) логические структуры представляют собой подкласс психологических структур. Эту концепцию мы находим, например, у Дж. С. Милля. Антипсихологизм, возникший в своих радикальных формах в конце XIX — начале XX века и связанный прежде всего с именами Г. Фреге и Э. Гуссерля, дает следующие ответы: 1) логика автономна, не зависима от психологии; 2) логические структуры не сообщают нам никакой информации о структурах мышления.

Фреге говорит о ложности тезиса о том, что «в логике изучается психологический процесс мышления и те психологические законы, в соответствии с которыми он происходит»<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Фреге Г. Мысль: логическое исследование // Философия, логика, язык / под общ. ред. Д.П. Горского, В.В. Петрова. М.: Прогресс, 1987. С. 18.

Обоснование ложности этого тезиса Фреге получает из утверждения, согласно которому «в случае, когда нам необходимо установить, справедливо ли умозаключение, к которому этот (психический) процесс приводит, можно, вероятно, обойтись и без описания психического процесса»<sup>1</sup>. Здесь можно заметить, что в посылке и следствии речь идет о разных вещах. В посылке говорится о том, что из психического процесса нельзя получить никаких данных для *обоснования* логической процедуры (умозаключения). А в следствии — о неверности тезиса о том, что логика сообщает нам какую-либо информацию о процессе мышления, что логические процедуры *не являются моделями* процесса мышления. Однако, очевидно, что из первого второе, по крайней мере, не следует. Невозможность обоснования логических процедур в терминах психологии ничего еще не говорит о невозможности моделирования психологических процедур логическими. Математическое моделирование в социологии не свидетельствует о том, что теоремы математики обосновываются при помощи опросов об их верности.

Основная ошибка Фреге заключается в неразличении вопросов об обосновании и моделировании. Логические и психологические процедуры могут *обосновываться независимо* друг от друга, но могут сообщать друг о друге важную эвристическую информацию и даже служить *моделями* друг друга. Это просто другой вопрос, который и должен решаться независимо, на собственных эмпирических основаниях.

Одним из авторов монографии — В. Н. Брюшинкиным — предложена концепция метапсихологизма в качестве решения проблемы психологизма в той ее части, где ставится вопрос о типе отношений между логическими законами и формами, с одной стороны, и эмпирическими (психологическими) данными о мышлении — с другой. Рассмотрим этот подход подробнее, чтобы проследить, как в нем реализуются идеи теории поиска вывода<sup>2</sup>. Прежде всего нужно отметить, что решается не во-

---

<sup>1</sup> Фреге Г. Мысль: логическое исследование. С. 19.

<sup>2</sup> Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. С. 39—66.

прос о редукции в целом логики к психологии, а об отношении логических процедур к процессам мышления.

Если проследить историю проблемы психологизма, то окажется, что решающую роль в смене концепций (от психологизма к антипсихологизму и наоборот) играет изменение ориентации логики на приложения. Вплоть до начала XX века в философии логики господствовала концепция психологизма. Это было связано с тем, что до появления математической логики основной областью приложения логики была интроспективная психология и методика мышления. Г. Фреге, которого считают основателем символической логики, был также автором программы логицизма в основаниях математики. Ориентация логики на приложения к основаниям математики привела к тому, что психологизм уступил место антипсихологизму. Логику стали считать математической наукой, а применение ее к мышлению — случайным, возможным наряду со многими другими. Такая «математическая» ориентация сохранялась вплоть до 1950—1960-х годов, и, соответственно, тезисы антипсихологизма в основаниях логики оставались господствующими. Однако с началом исследований в области эвристического программирования (позднее эту область стали называть искусственным интеллектом) стало очевидно, что без использования логического аппарата здесь не обойтись (как он применялся и какие были получены результаты, мы уже обсуждали в предыдущих главах). Итак, приложения логики в системах искусственного интеллекта дают некоторые основания для пересмотра парадигмы антипсихологизма. Более того, идея о разделении понятий *вывода* и *поиска вывода*, лежащая в основе теории поиска вывода, дает возможность соединить в рамках одной концепции идеи дескриптивности и нормативности логики, противопоставление которых и вело до сих пор к явному противоречию между установками психологизма и антипсихологизма. Так, общезначимые формулы, выводы и прочее можно считать нормами, а процесс поиска вывода отражает фактуальное содержание логических норм, то есть передает дескриптивный аспект логики.

Указанное разделение логической процедуры на подсистему *вывода* и подсистему *поиска вывода* позволяет объяснить, каким образом логическая процедура может порождать новое знание. Согласно концепции В. М. Сергеева, система, порождающая новое знание, должна представляться иерархией, включающей, по крайней мере, три уровня:

- 1) действия с объектами;
- 2) логика этих действий;
- 3) металогика.

При этом должна быть формализована не только логика, но и металогика<sup>1</sup>. Интересно, что такое «трехуровневое» построение является достаточно типичным при организации процедур поиска вывода. С учетом уже обсуждавшихся выше особенностей аксиоматического, натурального и секвенциального формализмов в общем случае предлагается следующая иерархия уровней логической системы:

- 1) объектный уровень с системой аксиоматического или натурального типа;
- 2) метаяровень с формальной системой секвенциального типа, в которой формализуются записи о выводимости на объектном уровне;
- 3) метаметаяровень, на котором производятся содержательные рассуждения о первых двух уровнях.

В соответствии с этим подходом в логической процедуре выделяются два уровня: объектный и метаяровень. Подсистема вывода, очевидно, осуществляется на объектном уровне, а подсистема поиска вывода — на метаяуровне. Описание совершения этих процедур происходит на метаметаяуровне логической системы.

Итак, приведенные рассуждения в сочетании с тезисом, согласно которому подсистема вывода моделирует результаты естественного мышления, а подсистема поиска вывода — про-

---

<sup>1</sup> См.: *Сергеев В. М.* «Искусственный интеллект» как метод исследования сложных систем // Системные исследования: Методологические проблемы : ежегодник. М., 1984. С. 127.

цессы самого естественного мышления, позволили нам выдвинуть тезис метапсихологизма: *структуры и процессы естественного мышления, связанные с рассуждениями и аргументацией, моделируются структурами и процессами, имеющими место на метауровне логических систем.* Этот подход позволяет разрешить один из центральных вопросов философии логики: как возможно, чтобы непсихологистски обоснованные логические процедуры рассматривались в качестве моделей процессов естественного мышления. Очевидно, что, согласно концепции метапсихологизма, информация о процессах естественного мышления субъекта познания, связанных с рассуждениями и аргументацией, содержится в процессах метауровня логической системы, в то время как на объектном уровне локализуется информация о логических отношениях между высказываниями, не зависящих от каких-либо психологических установок. Следует отметить, что программа метапсихологизма не предполагает тождества логических процедур и структур естественного мышления, а говорит лишь о возможности моделирования психологических моделей мышления логическими процедурами поиска вывода.

Таким образом, решение задач по построению искусственного интеллекта дало «эвристическую» базу для пересмотра взглядов в философии логики в сторону отхода от антипсихологизма. Теория поиска вывода с ее идеями и методами дала тот аппарат, который позволил сформулировать и обосновать новую концепцию в философии логики — метапсихологизма. Нам представляется, что эта концепция, в свою очередь, может служить хорошим философским основанием для дальнейшего развития исследований в области искусственного интеллекта.

Другой важным вопросом в основаниях логики, который мы предлагаем решить, используя идеи теории поиска вывода, — проблема информативности логических процедур<sup>1</sup>. Общепризнанным является утверждение о том, что как логически

---

<sup>1</sup> Брюшинкин В. Н. Логика, мышление, информация. С. 106—143.

истинные (тавтологичные) формулы, так и дедуктивный логический вывод (в котором, как известно, информация заключения не превосходит информации посылок) не несут информации о реальности, поскольку не зависят от фактов эмпирического мира. С другой стороны, очевидно, что естественным рассуждениям присуще свойство эвристичности. Если логическая процедура претендует на то, чтобы быть моделью ряда аспектов естественного мышления, она должна обладать информативностью, то есть в ходе совершения логической процедуры информация субъекта познания должна каким-то образом возрастать. Поскольку ясно, что логический вывод этому требованию удовлетворять не может, то проблема информативности логической процедуры сводится к проблеме информативности подсистемы поиска вывода. Следует отметить, что, хотя объективно все отношения между высказываниями в языке задаются в его семантике, реально субъект познания всегда обладает знанием лишь о части этих отношений. В ходе осуществления процедуры поиска вывода раскрываются еще не выявленные отношения между высказываниями, и тем самым преодолевается ограниченность субъекта познания в рамках логических систем. Для уточнения этой позиции вводится понятие «языковой фикции». Так называются возникающие в ходе поиска вывода синтаксические объекты, которые кажутся элементами множества неопределенности (то есть содержания) исследуемого высказывания, а на самом деле ими не являются. Очевидно, что появление языковых фикций увеличивает неопределенность содержания анализируемых высказываний, а их устранение эту неопределенность уменьшает. Отмечая, что, во-первых, в большинстве теорий семантической информации увеличение информации связывается с устранением неопределенности и, во-вторых, одна из функций процедур поиска вывода состоит в выявлении и устранении языковых фикций, мы делаем следующий вывод: в ходе логических процедур уменьшается неопределенность данного высказывания и увеличивается его информация.

#### § 4. Рациональная реконструкция происхождения теории поиска вывода в свете поризматической модели возникновения научных теорий

Итак, нами проведен историко-логический анализ развития логических исследований от гильбертовской теории доказательств к формированию теории поиска вывода. Показано, что это развитие можно рационально реконструировать с точки зрения поризматической модели происхождения научных теорий. Теперь мы намерены показать, что специфика логико-математического знания обуславливает необходимость некоторой модификации одного из этапов поризматической модели (при этом сама модель оказывается достаточно универсальной, чтобы быть применимой к реконструкции происхождения и развития как естественнонаучных, так и логико-математических теорий).

В частности, в дополнительном внимании нуждается вопрос о соотношении поризма и интерпретации теории. Применение поризматической модели к развитию дедуктивных наук — логики и математики — требует более точного описания того, как неожиданное утверждение, полученное в рамках одной теории, становится ядром другой — новой — теории. Проблема поризматической модели заключается в том, что при таком подходе новая теория в определенном смысле становится логическим следствием предшествующей. Вместе с тем общепризнано, что новая теория предполагает возникновение нового языка, включающего термины и их отношения, отсутствующие в предыдущей теории, и нового объектного мира теории.

Рассмотрим ситуацию такого рода на примере открытия кванта действия, ставшего началом новой физической теории — квантовой механики. Автор этого открытия Макс Планк, получив так называемую постоянную Планка как чисто синтаксический объект<sup>1</sup>, придал ей физический смысл как едини-

---

<sup>1</sup> См.: *Грязнов Б. С.* О взаимоотношении проблем и теорий // Грязнов Б. С. *Логика, рациональность, творчество.* М. : Наука, 1982. С. 117.

цы дискретного испускания и поглощения тепловой энергии — кванта действия. Задача нахождения численного значения постоянной Планка поставила ее в связь с рядом других физических констант и эмпирическими измерениями, связанными с этой системой констант. Планк первым определил указанное численное значение, опираясь на измерения излучения черного тела. Это придало постоянной Планка эмпирическую интерпретацию. Интерпретация данного синтаксического объекта (поризма) порождает новый теоретический объект, на основе которого строится объектный мир новой теории. Сам Планк в дальнейшем пытался встроить полученное таким образом новое понятие в систему классической физики, но эти попытки не привели к успеху. Эйнштейн в 1905 году перенес идею квантованного испускания и поглощения энергии при тепловом излучении на излучение вообще и таким образом обосновал новое учение о свете. Квантовая теория света позволила простейшим образом объяснить ряд физических явлений, считавшихся загадочными, например фотоэлектрический эффект. В дальнейшем в исследованиях Бора, Гейзенберга и других физиков сложилась квантовая механика — физическая теория, радикально расходящаяся с классическими представлениями.

Проанализированный пример рождения квантовой теории порождает следующую схему.

Исходная теория  $T_1 \rightarrow$  множество задач, решаемых в данной теории  $\rightarrow$  непредвиденное промежуточное следствие решения одной из задач (поризм)  $\rightarrow$  рассогласование поризма с существующей интерпретацией теории  $\rightarrow$  новая эмпирическая (или иная) интерпретация поризма, дающая новый теоретический объект  $\rightarrow$  включение нового теоретического объекта в существующую систему понятий или создание новой системы понятий  $\rightarrow$  основные положения новой теории  $T_2 \rightarrow$  реконструкция проблемы, которую решает теория  $T_2$ .

Однако уже приводимый ранее пример возникновения комплексных чисел показывает разницу в зарождении новой теории в логико-математических и эмпирических науках. Главное различие состоит в том, что логико-математические

науки не предполагают эмпирической проверки теорий и связанной с ней эмпирической интерпретации<sup>1</sup>. История возникновения теории поиска вывода как раз показывает, что на место такой эмпирической интерпретации в данных науках заступает интерпретация на новой области задач или объектов.

Модифицировав таким образом поризматическую модель происхождения научной теории, мы можем приступить к изложению рациональной реконструкции возникновения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств. В качестве исходной теории  $T_1$  в данном цикле развития логики мы рассматриваем гильбертовскую теорию доказательств, проанализированную в § 1 главы 2 монографии. Сам Гильберт назвал ее также метаматематикой, поскольку здесь речь идет о метауровне рассмотрения конкретных логико-математических исчислений, ставятся и решаются метазадачи, например доказательства полноты, непротиворечивости и независимости систем аксиом. Таким образом, теория доказательств, чьей предметной областью выступают формальные логико-математические системы, сама является содержательной метауровневой теорией, в которой изучаются свойства и отношения математических доказательств, формализованных в определенных логико-математических исчислениях<sup>2</sup>. Проведенный в § 1 главы 2 методологический анализ показал, что *объект* гильбертовской теории доказательств — это *понятие формального доказательства, которому придана «синтетическая», или «нисходящая», интерпретация*. В рамках первоначальной формулировки гильбертовской теории доказательств такая ин-

---

<sup>1</sup> О понятии и роли эмпирической интерпретации см.: *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания.

<sup>2</sup> «Предмет метаматематики состоит в такой абстракции математики, когда математические теории заменяются формальными системами, доказательства — некоторыми последовательностями правильно построенных формул...» (*Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М. : Наука, 1967. С. 5. Перевод И. Н. Веселовского исправлен в соответствии с английским оригиналом.)

терпретация предполагалась как сама собой разумеющаяся, подразумеваемая. Только изучение генценовского доказательства непротиворечивости арифметики и дальнейшего развития методов автоматического доказательства на основе введенных Генценом секвенциальных систем позволило открыть тот факт, что принципиальным отличием интерпретации понятия доказательства в гильбертовской теории доказательств является синтетический порядок его рассмотрения, то есть понимание доказательства как некоторого процесса, идущего от аксиом исчисления к доказываемой теореме при помощи применения правил вывода, сформулированных в данной системе. Иного пути доказательства, кроме указанного «синтетического» движения «сверху вниз» — от аксиом, подформул к доказываемой формуле, в аксиоматическом исчислении нет и быть не может. В самом общем виде Гильберт определял доказательство как «вывод какой-либо формулы из определенных аксиом (с помощью логического исчисления)»<sup>1</sup>. Поэтому рассмотрение формального объекта «доказательство» вместе со способом его построения «сверху вниз» традиционно воспринималось как нечто само собой разумеющееся. Однако такого рода ассоциация формального доказательства с определенным способом его построения формировала интерпретацию понятия доказательства, которая, как показали дальнейшие исследования в теории доказательств, не является единственно возможной.

Вместе с тем задолго до Гильберта в методологии математики было известно, что синтетическая интерпретация доказательства как движения «сверху вниз», от аксиом к теоремам, не единственная. Наряду с методом синтеза (и совместно с ним) при построении реальных математических доказательствах использовался и *метод анализа*. Традиция аналитического подхода к доказательству идет от древнегреческих математических школ Эвдокса и Платона, представителям которых принадлежит «создание так называемого *анагогического*, или

---

<sup>1</sup> Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. С. 274.

*аналитического, метода и форм анализа и синтеза, с помощью которых удалось добиться не только надежных результатов, но и безупречного изложения этих результатов»*<sup>1</sup>. Папп Александрийский (III век н. э.) сформулировал метод анализа в виде свода эвристических правил. Сущность анализа, применявшегося греческими геометрами, следуя Я. Хинтикке и У. Ремезу, можно пояснить следующим образом: «Анализ — метод греческих геометров, использующийся при поиске доказательств теорем... и состоящий в предположении того, что требуется получить в исследовании, откуда это предполагаемое получается, и в продолжении этого процесса до тех пор, пока не будет достигнуто нечто уже известное. За анализом следует синтез, где искомая теорема... устанавливается шаг за шагом обычным образом с помощью прослеживания шагов анализа в обратном порядке»<sup>2</sup>. Аналитический метод в математике, или «продвижение от конца к началу», — это «очень общий и полезный метод составления плана; однако для того чтобы ликвидировать разрыв между неизвестным и данными, нам, очевидно, нужны еще какие-то идеи, подсказываемые сущностью вопроса»<sup>3</sup>. Таким образом, можно говорить о том, что описанный метод анализа «является типичным эвристическим методом, поскольку он дает субъекту... определенные указания, направляющие поиск доказательства теоремы, и не гарантирует получения результата»<sup>4</sup>. Итак, применение формального аналитического подхода в математических доказательствах может быть успешным лишь при условии привлечения дополнительных эвристических соображений, отражающих содержание задачи. Однако сама идея решения задачи на

---

<sup>1</sup> *Cейттен Г. Г.* История математики в древности и в Средние века / пер. с фр. П. Юшкевича. М. ; Л. : Гос. технико-теоретическое изд-во, 1932. С. 72.

<sup>2</sup> *Hintikka J., Remes U.* The Method of Analysis. Dordrecht : Reidel, 1974. P. 1.

<sup>3</sup> *Поля Д.* Математическое открытие / пер. с англ. В. С. Бермана ; под ред. И. М. Яглома. М. : Наука, 1970. С. 212.

<sup>4</sup> *Брюшинкин В. Н.* Логика, мышление, информация. С. 96.

основании анализа ее структуры очень заманчива, и мы можем убедиться, что наиболее полно она реализуется при поиске вывода «снизу вверх», использующем свойство подформульности. Так, Я. Хинтика и У. Ремез отмечают: «Логика (аналитического) метода соответствует так называемому свойству подформулы, которое является характеристикой особенностей методов натуральной дедукции»<sup>1</sup>. При этом под «методами натуральной дедукции» Хинтика и Ремез понимают генценовские секвенциальные исчисления, свободные от сечений, и табличное исчисление Бета.

Исходный момент в рассматриваемой нами поризматической модели — это необходимость решения некоторой частной задачи в рамках теории  $T_1$ . В нашем случае Генцен решал задачу доказательства непротиворечивости арифметики в рамках гильбертовской теории доказательств. Для этого он счел необходимым отказаться от формализации арифметики при помощи аксиоматических исчислений и предложил новый вид исчислений — натуральные, а затем секвенциальные. В отличие от гильбертовских исчислений, в которых предполагается минимум правил вывода и большое количество схем аксиом, секвенциальные содержат единственную, совершенно очевидную аксиому (это основная секвенция) и довольно много правил вывода (фигуры заключения). Для того чтобы доказать непротиворечивость арифметики, достаточно показать, что в соответствующем секвенциальном исчислении не может быть получено противоречие (то есть пустая секвенция). В свою очередь, для невозможности вывода пустой секвенции было бы достаточно того факта, что, раз появившись в доказательстве, ни одна формула «исчезнуть» из него не может, а обязательно войдет в последнюю формулу. Этому требованию удовлетворяют все фигуры заключения, кроме сечения. Основная теорема, которую доказал Генцен, говорит о том, что сечение может быть устранено из исчисления с сохранением множества выводимых объектов. В таком новом исчислении

---

<sup>1</sup> *Hintikka J., Remes U. The Method of Analysis. P. 253.*

без сечения все фигуры заключения обладают свойством *подформульности* — каждая формула над чертой (в посылке) входит в список формул под чертой (в заключении) отдельно или в качестве подформулы более сложной формулы. Учитывая это, можно утверждать, что, начиная с основных секвенций и применяя последовательно фигуры заключения «сверху вниз», построить пустую секвенцию невозможно.

Естественным и весьма важным следствием обнаружения подформульности всех фигур заключения, за исключением сечения, является тот факт, что доказательства в секвенциальных исчислениях без сечения также обладают свойством подформульности.

Итак, свойство подформульности доказательств в исчислениях без сечения появляется как непредвиденное следствие при решении задачи доказательства непротиворечивости арифметики. Эта задача решалась Генценом в рамках гильбертовской теории доказательств, в которой доказательства интерпретируются синтетически как движения «сверху вниз» (попытка вывести пустую секвенцию из основной секвенции). Однако, хотя Генцен при доказательстве различных теорем (в том числе непротиворечивости арифметики) использует синтетический способ построения вывода (доказательства), он все же допускает возможность аналитического рассмотрения вывода, его построения «снизу вверх»: «Пусть сначала дана нижняя секвенция. Она либо уже является верхней секвенцией, тогда весь вывод состоит из нее одной, — либо она является нижней секвенцией некоторой фигуры заключения. Каждая верхняя секвенция этой фигуры заключения снова является либо верхней секвенцией вывода, либо нижней секвенцией следующей фигуры заключения и т.д.»<sup>1</sup>. Таким образом, обнаружение у доказательств в генценовском секвенциальном исчислении ЛК свойства подформульности показало, что доказательство в этом исчислении может строиться как «сверху вниз», так и «снизу вверх». В тер-

---

<sup>1</sup> Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел. С. 160.

минах рассматриваемой модели это обстоятельство вводит новую аналитическую интерпретацию формального доказательства «снизу вверх». Поскольку объект гильбертовской теории доказательств представляет собой понятие формального доказательства вместе с его синтетической интерпретацией «сверху вниз», возможность новой аналитической интерпретации создает возможность нового теоретического объекта. Поскольку же синтетическая и аналитическая интерпретации противоположны, то новый теоретический объект означает рассогласование с первоначальной интерпретацией объекта теории доказательств и требует развития нового взгляда на доказательства в секвенциальных исчислениях как на объекты, обладающие важными «аналитическими» свойствами. Если в аксиоматических системах доказательства обычно рассматриваются как линейные структуры (последовательности формул), то секвенциальные доказательства (выводы) — это всегда древовидные структуры<sup>1</sup>, причем допускающие построение как «сверху вниз», так и «снизу вверх» (если устранены сечения). Последний подход позволяет говорить о возможности построения некоторой систематической процедуры поиска доказательства. Однако аналитическая интерпретация доказательств в свете обладания ими свойством подформульности создает только *возможность* определения процедур поиска доказательств. В действительности возникновение нового теоретического объекта и последующее появление на этой основе теории поиска вывода потребовало еще и введения новой области задач — автоматического доказательства теорем.

Следует отметить, что подобный сдвиг в интерпретации логического формализма, приведший к новой теории, имел место в исследованиях по аристотелевской силлогистике. Речь

---

<sup>1</sup> «Вывод — это древовидная фигура, состоящая из некоторого числа секвенций, с самой нижней конечной секвенцией и несколькими верхними секвенциями, которые должны быть основными секвенциями...» (Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел. С. 160).

идет о замене традиционной экстенциональной интерпретации силлогистики интенциональной. В работах В. И. Маркина<sup>1</sup> проанализирована интенциональная интерпретация силлогистики, данная Г. Лейбницем и Н. А. Васильевым. Так, В. И. Маркин замечает: «В традиционной и в современной логике широкое распространение получила идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно в этой связи рассматриваются как выражающие экстенциональные отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа *a* репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа *i* — наличие общих элементов у двух классов и т. п. Однако в истории логики складывался иной — альтернативный экстенциональному — подход к интерпретации смыслов категорических суждений, которые составляют предмет исследования в силлогистических теориях. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализе с точки зрения *содержательных*, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию»<sup>2</sup>. Для нашего исследования важно, что из такой смены интерпретации возникли два новых вида логических теорий — трансцендентальная логика Канта<sup>3</sup> и «воображаемая» логика Васильева<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Маркин В. И. Интенциональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. М. : Наука, 2001. Вып. 8. С. 82—91; *Его же*. Силлогистика как интенциональная логическая теория: Формальная реконструкция идей Г. Лейбница и Н. А. Васильева // Критическое мышление, логика, аргументация : сб. статей / под общ. ред. В. Н. Брюшинкина, В. И. Маркина. Калининград : Изд-во КГУ, 2003. С. 125—137.

<sup>2</sup> Маркин В. И. Силлогистика как интенциональная логическая теория... С. 125.

<sup>3</sup> См.: Брюшинкин В. Н. Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу «Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма» // Кантовский сборник. Калининград, 1986. Вып. 11. С. 29—39.

Необходимость появления новой области задач, при решении которых используется новый теоретический объект, для возникновения новой теории демонстрируется от противного на примере аналитических таблиц Э. Бета и модельных множеств Я. Хинтикки как чисто логических способов доказательства. Бет в семантических таблицах и Хинтикка в модельных множествах строили теоретические модели процедуры доказательства, основанные на свойстве подформульности. В качестве теоретического объекта на этом этапе исследований можно рассматривать дерево вывода, построение которого осуществляется «снизу вверх». Бет считает такую аналитическую интерпретацию вывода очень важной: «Наш подход в значительной мере осуществляет идеал чисто аналитического метода, сыгравшего столь важную роль в философии»<sup>2</sup>. Эти модели получили важные применения в логике и философии. Однако к появлению новой теории исследования Бета и Хинтикки не привели. *Устранение рассогласования интерпретаций* в нашем случае возможно лишь тогда, когда новая интерпретация доказательства «снизу вверх» находит применение на новой же области задач, для решения которых необходим новый теоретический объект, порождаемый аналитической интерпретацией формального доказательства. Такой областью применимости для свойства подформульности стало автоматическое доказательство теорем. При этом формальное доказательство, интерпретированное аналитически, порождает новый теоретический объект — процедуру поиска вывода, предусматривающую построение *дерева поиска вывода*, содержащего как дерево вывода, так и некоторые «тупиковые» пути, которые в ходе процедуры поиска вывода отсекаются.

С другой стороны, автоматическое доказательство теорем, будучи частью более общей области задач эвристического программирования, первоначально стало использовать другие

---

<sup>1</sup> См.: Маркин В. И. Силлогистика как интенциональная логическая теория... С. 132—133.

<sup>2</sup> Бет Э. В. Метод семантических таблиц. С. 195.

идеи. Исходя из алгоритмического, но совершенно неэффективного метода Британского музея, пытались получить «менее плохие методы», принимая некоторые «эвристические» соображения, которые иногда дают некоторое сокращение рассуждений и упрощают метод доказательства. В частности, такие «эвристические соображения» были предложены А. Ньюэллом и Г. Саймоном, Г. Гелернтером и Н. Рочестером<sup>1</sup>.

Однако формировавшееся таким образом поле автоматического доказательства теорем, основанное на идее добавления эвристик к традиционным способам построения формального доказательства, не привело к созданию теории поиска вывода. По этому поводу С. Кангер замечает, что введение эвристик целесообразно отложить до тех пор, «пока мы не будем иметь удовлетворительного метода доказательства в качестве основы для введения эвристических соображений»<sup>2</sup>.

Оказалось, что исчисления генценовского типа со всеми их свойствами, описанными сначала Г. Генценом, а затем С. Кангером, Э. Бетом, Я. Хинтиккой и другими, являются наиболее пригодными для того, чтобы быть основой методов автоматического доказательства. Кроме того, важную роль в автоматическом доказательстве логических теорем сыграла теорема Эрбрана. Если Хао Ван использовал в своих программах только идею подформульности, то в более совершенных методах П. Гилмора, М. Дэвиса и Х. Патнема реализуется также процедура Эрбрана. На этой основе возникают универсальные методы поиска вывода — метод резолюций Дж. Робинсона и обратный метод С. Ю. Маслова. С. Ю. Масловым выделены основные свойства процедур поиска логического вывода: подформульность (аналитичность), метапеременность и локальность. Здесь мы можем говорить о возникновении новой тео-

---

<sup>1</sup> Гелернтер Г. Реализация машины, доказывающей математические теоремы // Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 145—165.

<sup>2</sup> Кангер С. Упрощенный метод доказательства для элементарной логики // Автоматическая теория логического вывода. М. : Наука, 1967. С. 201.

рии — теории поиска логического вывода, сформировавшейся в результате применения идеи подформульности в исчислениях, свободных от сечений, к решению задач автоматического доказательства теорем.

Однако С. Ю. Маслов показал, что указанные свойства логических исчислений могут быть абстрагированы от класса объектов, у которых они были первоначально обнаружены и перенесены на более широкий класс процедур поиска вывода в произвольных дедуктивных исчислениях, представленных аппаратом канонических исчислений Э. Поста. Обратный метод, сформулированный первоначально для исчисления предикатов, в отличие от метода резолюций (использующего теорему Эрбрана) можно распространить на произвольные секвенциальные исчисления без правила сечения.

Далее, необходимость искать выводы объектов, отличных от логико-математических теорем, привела к появлению *нового теоретического объекта* — поиска вывода в произвольном исчислении. Для исследования этого объекта применяется соответствующий аппарат — теория исчислений общего типа. На нее распространяются методы, полученные в теории логико-математических исчислений, что и приводит к возникновению теории поиска вывода.

Такое расширение области применимости методов теории поиска вывода позволяет утверждать, что эта теория существенным образом вышла за рамки автоматического доказательства теорем и действительно является самостоятельной.

Итак, для появления теории поиска вывода было необходимо выполнение *двух* условий: обнаружение *свойства подформульности* и наличие *новой области задач* автоматического доказательства теорем, которая обеспечила «квазиэмпирическую» интерпретацию нового теоретического объекта, выявление его свойств и распространение этих свойств на более широкий класс дедуктивных систем. Мы убедились, что без переноса новой «аналитической» интерпретации доказательства, основанной на свойстве подформульности, на автомати-

ческое доказательство теорем она, хотя и дала интересные результаты, не могла привести к появлению новой теории. В то же время методы автоматического доказательства теорем, не основанные на секвенциальных исчислениях, а пытающиеся реализовать лишь некоторые эвристические соображения, оказались неэффективными. И только применение в этой области идей, основанных на свойстве подформульности, позволило не только создать гораздо более эффективные методы автоматического доказательства, но и привело к возникновению новой теории — поиска вывода, являющейся в целом ответом на вопрос — как по исчислению и объекту в языке исчисления искать вывод этого объекта. В свою очередь, теория поиска вывода вывела на новый уровень исследования по моделированию творческих процессов решения задач посредством ЭВМ, а также нашла весьма полезное применение в философии, психологии творчества и других отраслях знания.

Проведенный анализ показывает, что возникновение теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств допускает рациональную реконструкцию на основе поризматической модели происхождения новой научной теории. Схематически это может быть представлено следующим образом.

Гильбертовская теория доказательств  $T_1$  → задача доказательства непротиворечивости формальной арифметики, решаемая в данной теории → свойство подформульности как непредвиденное промежуточное следствие решения этой задачи (поризм) → рассогласование поризма с существующей синтетической интерпретацией → аналитическая интерпретация доказательств, обладающих свойством подформульности, порождающая представление доказательства как дерева вывода → использование секвенциальных исчислений со свойством подформульности в новой области задач — автоматического доказательства теорем, порождающее новый теоретический объект — дерево поиска вывода → появление новой теории  $T_2$  — теории поиска вывода → реконструкция проблемы, решаемой теорией поиска вывода (определение по исчислению и объекту в языке исчисления структуры возможных выводов объекта).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии поставлена и решена задача обоснования возможности применения общенаучных методологических концепций рациональной реконструкции развития научного знания к описанию возникновения новых теорий в логике. В центре исследования оказалась задача историко-логического анализа происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств на основании поризматической модели развития научных теорий Б.С. Грязнова. В книге впервые детально реконструирована поризматическая модель Б.С. Грязнова и предложена ее общая схема: на основании анализа историко-логического материала развит и систематизирован взгляд на *свойство подформульности* как на *поризм*, возникший в теории доказательств при решении задачи доказательства непротиворечивости формальной арифметики, и ставший ядром новой теории — теории поиска вывода; установлено, что применение поризматической модели к реконструкции развития логико-математических теорий требует определенной доработки самой модели, которая и была произведена. В частности, в исследовании впервые поставлена проблема специфики соотношения поризма и интерпретации в логико-математических теориях. В ходе ее решения выдвинут и обоснован тезис о том, что на место эмпирической интерпретации поризма, характерной для естественнонаучных теорий, в логико-математических науках заступает «квазиэмпирическая» интерпретация на новой области задач или объектов, позволяющая включить его в новую систему понятий. В монографии установлено, что интерпретация свойства подформульности как поризма может быть представлена как последовательность двух этапов.

Во-первых, это *внутренняя теоретическая интерпретация поризма*, состоящая в том, что для аксиоматических исчислений гильбертовского типа объектом исследования выступает фор-

мальный объект «доказательство», для которого естественным является «синтетическая» интерпретация. Однако, как это было показано Генценом, свойство подформульности у доказательств в секвенциальных исчислениях без сечений (рассматриваемое здесь как поризм) имеет новый «аналитический» взгляд на доказательство и порождает новый теоретический объект. Так как синтетическая и аналитическая интерпретации противоположны, то возникает рассогласование с первоначальной интерпретацией объекта теории доказательств.

Все это приводит, во-вторых, к *внешней «квазиэмпирической» интерпретации поризма*, поскольку аналитическая интерпретация создает возможность определения процедур поиска доказательств как нового теоретического объекта, а именно «поиска вывода». Возникшая на этой основе теория поиска вывода породила новую область задач, а именно автоматического доказательства теорем. Использование свойства подформульности как основы методов этой теории, подтвердившее свою практическую эффективность, и стало тем «квазиэмпирическим» базисом, который показал «полезность» поризма и привел к возникновению новой теории.

В монографии проведена реконструкция развития методов автоматического доказательства теорем, отличающаяся от имеющихся исследований по этой теме тем, что впервые последовательно рассмотрены все основные этапы этого развития, выполнена их сравнительная характеристика и выявлено значение свойства подформульности в совершенствовании методов автоматического доказательства вплоть до появления универсальных методов поиска вывода. Построение описанной реконструкции происхождения теории поиска вывода на основании поризматической модели позволяет надеяться, что общий подход к развитию научного знания, выработанный в методологии XX века, может успешно применяться к описанию и объяснению возникновения теорий в логике.

Таким образом, поризматическая модель предоставляет собой мощный способ объяснения изменений логических теорий и концепций. Кроме объяснения происхождения теории

поиска вывода поризматическую модель можно применить к возникновению аристотелевской силлогистики из риторики того времени<sup>1</sup>, булевой алгебры из современных ей алгебраических исследований на основе новой интерпретации переменных, пришедшей из логики и т.п.

Каковы же условия применимости поризматической модели к изменениям в истории логики?

1. Необходимо установление последовательности хотя бы из двух теорий.

2. В рамках теории должно быть дано понятие задачи и возможных способов ее решения.

3. Должно быть определено понятие логического или подобного логическому (метауровневого, например) следствия в теории.

4. Должно быть возможно реконструировать вопрос, на который отвечает новая теория в целом.

Поризматическая модель в силу своего крайнего рационализма налагает очень жесткие условия на те теории (концепции), изменения которых она призвана реконструировать. Если удастся построить поризматическую модель, то мы достигаем в каком-то смысле предельно рационалистического историко-логического объяснения, если же не удастся, то мы можем воспользоваться образной стратегией. Однако наибольшим успехом историко-логического исследования будет объяснение конкретного события истории логики с точки зрения двух этих дополнительных принципов одновременно. Конечно, именно это является и предельно трудной задачей.

Ответы на эти вопросы — дело будущих исследований. Но уже сейчас ясно, что применение поризматической и образной моделей к конкретным событиям истории логики позволяет ставить нетривиальные вопросы, которые свидетельствует о плодотворности установления отношения дополнительности между основанными на них исследовательскими стратегиями.

---

<sup>1</sup> Подходы к этому объяснению можно найти уже в работе Б.С. Грязнова. См.: *Грязнов Б. С. Ораторское искусство и генезис науки логики // Грязнов Б.С. Логика. Рациональность. Творчество. С. 232—240.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов И.К.* Математика действительных и комплексных чисел. М. : Просвещение, 1975.
2. *Антонова О.А.* Табличные методы в логике. СПб. : Издательство Санкт-Петербургского университета, 2003.
3. *Бажанов В.А.* Николай Александрович Васильев (1880—1940). М. : Наука, 1988.
4. *Бажанов В.А.* История логики в России и СССР (Концептуальный контекст университетской философии). М. : Канон+, 2007.
5. *Бажанов В.А.* О методологическом аспекте историко-логических исследований // Шестые Смирновские чтения : матер. Междунар. науч. конф. Москва, 17—19 июня 2009 г. М. : Современные тетради, 2009. С. 117—118.
6. *Балтага В.К.* Комплексные числа. Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1959.
7. *Бет Э.В.* Метод семантических таблиц // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А.В. Идельсона, Г.Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 191—200.
8. *Бочаров В.А.* Аристотель и традиционная логика. Анализ силлогистических теорий. М. : Изд-во МГУ, 1984.
9. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М. : Прогресс-Традиция, 2010.
10. *Брюшинкин В.Н.* О мерах приращения информации в ходе поиска логического вывода // Логика и основания математики : тез. VIII Всесоюз. конф. «Логика и методология науки». Паланга, 26—28 сент. 1982 г. Вильнюс : ВНИИСИ, 1982. С. 20—24.
11. *Брюшинкин В.Н.* Информативность логических процедур // Системные исследования : методол. пробл. : ежегодник, 1984. М. : Наука. 1984. С. 194—206.
12. *Брюшинкин В.Н.* О методологическом значении различения понятий «вывод» и «поиск «вывода» // Филос. науки. 1984. №4. С. 48—54.
13. *Брюшинкин В.Н.* Логика, мышление, информация. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.

14. *Брюшинкин В. Н.* Логическое моделирование процессов мышления : автореф. дис. ... д-ра филос. наук. М., 1990.
15. *Брюшинкин В. Н.* О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке : сб. науч. тр. / под ред. А. Я. Слиннина. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1990. С. 17—18.
16. *Брюшинкин В. Н.* Психологизм на пороге XXI века // Логическое кантоведение-4 : сб. науч. тр. / под ред. В. Н. Брюшинкина. Калининград : Янтарный сказ, 1998. С. 84—100.
17. *Брюшинкин В. Н.* Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу «Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма» // Кантовский сборник. Калининград : Изд-во КГУ, 1986. С. 29—39. Вып. 11.
18. *Бирюков Б. В.* Человеческий фактор в логике в свете проблемы «Искусственного интеллекта». Четыре контрверзы логической мысли и кибернетика // Кибернетика и диалектика : сб. науч. тр. / под ред. А. Д. Урсула. М. : Наука, 1978. С. 212—236.
19. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М. : Изд-во иностр. лит., 1958.
20. *Войцехович В. Э.* Диалектика метаисследования и формирование основных направлений метаматематики // Проблемы законов науки и логики научного познания : сб. науч. тр. / под ред. И. Я. Чупахина, В. П. Рожина. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. С. 138—143.
21. *Войшвилло Е. К.* Принцип соответствия как форма развития знаний и понятие относительной истины. Критика концепции несоизмеримости сменяющих друг друга теорий // Логика и В. Е. К. : К 90-летию со дня рождения проф. Е. К. Войшвилло : сб. науч. тр. / под ред. И. В. Маркина и др. М. : Современные тетради, 2003. С. 11—22.
22. *Войшвилло Е. К.* Символическая логика: классическая и релевантная. Философско-методологические аспекты. М. : Высшая школа, 1989.
23. *Вьютский Л. С.* Психология и учение о локализации психических функций // Соч. : в 6 т. М. : Педагогика, 1982. Т. 1.
24. Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967.
25. *Геллернтер Г.* Реализация машины, доказывающей математические теоремы // Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума и Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 145—165.

26. *Геллернтер Г., Ханзен Дж., Ловленд Д.* Экспериментальное исследование машины для доказательства геометрических теорем // Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 165—175.

27. *Генцен Г.* Непротиворечивость чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Идельсона, Г. Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 77—154.

28. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Идельсона, Г. Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 9—75.

29. *Генцен Г.* Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Идельсона, Г. Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 154—191.

30. *Гильберт Д.* Основания геометрии / пер. с нем. И. С. Градштейна ; под ред. П. К. Рашевского. М. ; Л. : Государственное технико-теоретическое изд-во, 1948.

31. *Гильберт Д.* Аксиоматическое мышление / пер. с англ. А. Г. Барабашева // Методологический анализ оснований математики / Ф. Китчер [и др.]. М. : Наука, 1988. С. 97—104.

32. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / пер. с нем. Н. М. Нагорного ; под ред. С. И. Адяна. М. : Наука, 1979.

33. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств / пер. с нем. Н. М. Нагорного ; под ред. С. И. Адяна. М. : Наука, 1982.

34. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л., Самохвалов К. Ф.* Введение в логику и методологию науки. М. : Интерпракс, 1994.

35. *Грязнов Б. С.* Логика. Рациональность. Творчество. М. : Наука, 1982.

36. *Интерпретация* как историко-научная и методологическая проблема : сб. науч. тр. / под ред. В. П. Горана. Новосибирск : Наука, 1986.

37. *Зинченко В. П.* Идеи Л. С. Выготского о единицах анализа психики // Психологический журнал. 1981. Т. 2, № 2. С. 120—121.

38. *История логики* / под ред. В. Ф. Беркова, Я. С. Яскевич. Минск : Новое знание, 2001.

39. *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия* : в 3 т. Т. 1. С древнейших времен до начала Нового времени. М. : Наука, 1970.

40. Кангер С. Упрощенный метод доказательства для элементарной логики // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Идельсона, Г. Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 200—208.
41. Кант И. Критика чистого разума / пер. с нем. Н. О. Лосского. М. : Наука, 1998.
42. Карнап Р. Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике / пер. Н. В. Воробьева ; под. ред. Д. А. Бочвара. М. : Изд-во иностранной литературы, 1959.
43. Карпович В. Н. Соотношение истории и методологии науки : сб. науч. тр. // Интерпретация как историко-научная и методологическая проблема / под ред. В. П. Горана. Новосибирск : Наука, 1986. С. 101—109.
44. Катречко С. Л. Логический анализ интеллектуальных систем с метапроцедурами : дис. ... канд. филос. наук. М., 1992.
45. Клини С. К. Математическая логика / пер. с англ. Ю. А. Гастева ; под ред. Г. Е. Минца. М. : Мир, 1973.
46. Ковальски Р. Логика в решении проблем. М. : Наука, 1990.
47. Ковальски Р., Хайс П. Семантические деревья в автоматическом поиске доказательств // Кибернетический сборник : сб. науч. тр. / под ред. А. А. Ляпунова, О. Б. Лупанова. М. : Мир, 1972. Вып. 9. С. 66—84.
48. Крайзель Г. Исследования по теории доказательств / пер. с англ. Ю. А. Гастева, Г. Е. Минца ; под ред. С. Ю. Маслова. М. : Мир, 1981.
49. Кун Т. С. Структура научных революций. М. : Прогресс, 1975.
50. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М. ; Л. : Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, 1951. Т. 1.
51. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И. Н. Веселовского. М. : Наука, 1967.
52. Лакатос И. Фальсификация и методология научно-исследовательских программ / пер. с англ. и пред. В. Поруса. М. : Медиум, 1995.
53. Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ // Н. А. Алешина [и др.]. М. : Наука, 1990.
54. Логический вывод : сб. науч. тр. / под ред. В. А. Смирнова [и др.]. М. : Наука, 1979.
55. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М. : Изд-во иностр. лит., 1959.
56. Маркин В. И. Интенциональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. М. : Наука, 2001. Вып. 8. С. 82—91.

57. *Маркин В. И.* Силлогистические теории в современной логике. М. : Изд-во МГУ, 1991.

58. *Маркин В. И.* Силлогистика как интенциональная логическая теория: Формальная реконструкция идей Г. Лейбница и Н. А. Васильева // Критическое мышление, логика, аргументация : сб. статей / под общ. ред. В. Н. Брюшинкина, В. И. Маркина. Калининград : Изд-во КГУ, 2003. С. 125—137.

59. *Маслов С. Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М. : Радио и связь, 1986.

60. *Маслов С. Ю.* Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семиотика и информатика. М., 1979. Вып. 13. С. 17—46.

61. *Маслов С. Ю., Минц Г. Е.* Теория поиска вывода и обратный метод // Ч. Чень, Р. Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М. : Наука, 1983. С. 291—313.

62. *Микешина Л. А.* Философия познания. Полемиические главы. М. : Прогресс-Традиция, 2002.

63. *Минц Г. Е.* Теорема Эрбрана // Математическая теория логического вывода : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Идельсона, Г. Е. Минца. М. : Наука, 1967. С. 311—349.

64. *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. Новосибирск : Изд-во Новосибирского ун-та, 2000.

65. *Никифоров А. Л.* От формальной логики к истории науки: критический анализ буржуазной методологии науки. М. : Наука, 1983.

66. *Нильсон Н.* Принципы искусственного интеллекта. М. : Радио и связь, 1985.

67. *Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г.* Эмпирические исследования машины «Логик-теоретик»: пример изучения эвристики // Вычислительные машины и мышление : сб. науч. тр. / под ред. Э. Фейгенбаума, Дж. Фельдмана. М. : Мир, 1967. С. 113—145.

68. *Очерки по истории математики* / под ред. Б. В. Гнеденко. М. : Изд-во Московского ун-та, 1997.

69. *Петров Ю. А.* Методологические вопросы анализа научного знания. М. : Высшая школа, 1977.

70. *Петров Ю. А.* Проблема соизмеримости теорий // Филос. науки. 1986. №4. С. 61—70.

71. *Петров Ю. А., Никифоров А. Л.* Логика и методология научного познания. М. : Изд-во Московского ун-та, 1982.

72. *Пойа Д.* Математическое открытие / пер. с англ. В. С. Бермана ; под ред. И. М. Яглома. М. : Наука, 1970.

73. *Пономарев В. Ф.* Математическая логика. Калининград : Изд-во КГТУ, 2001. Ч. 1, 2.

74. *Попов П. С., Стяжкин Н. И.* Развитие логических идей от Античности до эпохи Возрождения. М. : Изд-во МГУ, 1974.

75. *Попова В. С.* Спор о логике в университетской философии Санкт-Петербурга начала XX века. Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2010.

76. *Попович М. В.* Очерк развития логических идей в культурно-историческом контексте. Киев : Наукова думка, 1979.

77. *Поппер К. Р.* Логика и рост научного знания : избр. раб. / пер. с англ. ; сост. и вступ. ст. В. Садовского. М. : Прогресс, 1983.

78. *Поспелов Д. А.* О «человеческих» рассуждениях в интеллектуальных системах // Вопросы кибернетики. Логика рассуждений и ее моделирование / под ред. Д. А. Поспелова. М. : Наука, 1983. С. 5—37.

79. *Правиц Д.* Достижения и проблемы в развитии процедур механического доказательства // Кибернетический сборник : сб. науч. тр. / под ред. А. А. Ляпунова, О. Б. Лупанова. М. : Мир, 1972. Вып. 9. С. 52—66.

80. *Пушкарский А. Г.* О методологии истории логики // Модели рассуждений — 2: Аргументация и рациональность : сб. науч. ст. / под общ. ред. В. Н. Брюшинкина. Калининград : Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. С. 204—213.

81. *Пушкарский А. Г.* Методология истории логики: синтетический подход // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. Вып. 6. С. 25—34.

82. *Рассел Б.* История западной философии и ее связи с политическими и социальными условиями от античности до наших дней : в 3 кн. / пер. с англ. В. В. Целищева. М. : Акад. проект, 2000.

83. *Рузавин Г. И.* Философские проблемы оснований математики. М. : Наука, 1983.

84. *Садовский В. Н.* Карл Поппер и Россия. М. : Эдиториал УРСС, 2002.

85. *Серебрянников О. Ф.* Эвристики, алгоритмы и правила логики // Проблемы законов науки и логики научного познания : сб. науч. тр. / под ред. И. Я. Чупахина, В. П. Рожина. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. С. 132—138.

86. *Серебрянников О. Ф.* Иерархическое представление эвристик поиска доказательства в логических исчислениях // Логика и теория познания : сб. науч. тр. / под ред. О. Ф. Серебрянникова, Я. А. Слина. Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1990. С. 58—66.

87. *Серебрянников О. Ф.* Эвристические принципы и логические исчисления. М. : Наука, 1970.

88. *Сергеев В. М.* «Искусственный интеллект» как метод исследования сложных систем // Системные исследования: Методологические проблемы : ежегодник. М. : Наука, 1984. С. 116—129.

89. *Смальян Р.* Теория формальных систем. М. : Наука, 1981.

90. *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М. : Наука, 1987.

91. *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логические исчисления. М. : Наука, 1972.

92. *Смирнова Е. Д.* Логика и философия. М. : Росспэн, 1996.

93. *Столл Р. Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории / пер. с англ. Ю. А. Гастева, И. Х. Шмаина ; под ред. Ю. А. Шихановича. М. : Просвещение, 1968.

94. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики // пер. с нем. И. Б. Погребыского. М. : Наука, 1984.

95. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М. : Наука, 1967.

96. *Субботин А. Л.* Традиционная и современная формальная логика. М. : Наука, 1969.

97. *Такеути Г.* Теория доказательств. М. : Мир, 1978.

98. *Теория* доказательств и конструктивная математика: справочная книга по математической логике : в 4 ч. / под ред. В. П. Оревова. М. : Наука, 1983. Ч. 4.

99. *Фейерабенд П.* Избранные труды по методологии науки / пер. с англ. и нем. А. Л. Никифорова ; под ред. И. С. Нарского. М. : Прогресс, 1986.

100. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М. : Мир, 1966.

101. *Фреге Г.* Мысль: логическое исследование // Философия, логика, язык / общ. ред. Д. П. Горского, В. В. Петрова. М. : Прогресс, 1987. С. 18—47.

102. *Ван Хао.* На пути к механической математике // Кибернетический сборник : сб. науч. тр. / под ред. А. А. Ляпунова, О. Б. Лупанова, Н. Н. Рикко. М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. Вып. 5. С. 114—169.

103. *Хинтиikka Я.* Логико-эпистемологические исследования. М. : Прогресс, 1980.

104. *Цейтлен Г. Г.* История математики в древности и в Средние века / пер. с фр. П. Юшкевича. М. ; Л. : Государственное технико-теоретическое изд-во, 1932.

105. Чень Ч., Лу Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М. : Наука, 1983.
106. Энглер Э. Метаматематика элементарной математики / пер. с нем. Г. Е. Минца. М. : Мир, 1987.
107. Юдин Б. Г. Методологический анализ как направление изучения науки. М. : Наука, 1986.
108. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. М. : Физматгиз, 1963.
109. Beth E. The foundations of mathematics: A study in the philosophy of science. Amsterdam : Noth-Holland, 1959.
110. Beth Evert W. Formal Methods: An Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1961.
111. Cuomo S. Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
112. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 1. Logical Foundations / ed. by Dov M. Gabbay [et al.]. Oxford : Clarendon Press, 1993.
113. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 2. Deduction Methodologies / ed. by Dov M. Gabbay [et al.]. Oxford : Clarendon Press, 1993.
114. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 3. Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning / ed. by Dov M. Gabbay [et al.]. Oxford : Clarendon Press, 1994.
115. Hintikka J. Form and content in quantification theory // Two Papers on Symbolic Logic // Acta Philosophica Fennica. 1955. Vol. 21. P. 11—55.
116. Hintikka J., Remes U. The Method of Analysis. Dordrecht : Reidel, 1974.
117. Hintikka J., Remes U. Ancient geometrical analysis and modern logic. Dordrecht : Reidel, 1976.
118. Kneale W., Kneale M. The Development of Logic. Oxford : Oxford University Press, 1964.
119. Kreisel G. Perspectives in the philosophy of pure mathematics // Logic, methodology and philosophy of science. Amsterdam : North-Holland, 1973. Pt 4. P. 255—277.
120. Lakatos I. The Method of Analysis-Synthesis // Mathematics, Science and Epistemology. Cambridge : Cambridge University Press, 1978. P. 70—103.

121. *Netz R.* Why did Greek Mathematicians Publish their Analyses? // *Ancient and Medieval Traditions in the Exact Sciences: Essays in Memory of Wilbur Knorr* / ed. by P. Suppes [et al.]. Stanford, California : CSLI Publications, 2000. P. 139—157.

122. *Popper Karl R.* The Logic of Scientific Discovery. L. ; N.Y. : Routledge, 1995.

123. *Prawitz D., Prawitz H., Vogera N.* A mechanical proof procedure and its realization in an electronic computer // *The Journal of the Association for Computing Machinery*. 1960. Vol. 7, №2. P. 102—128.

124. *Prawitz D.* The philosophical position of Proof theory // *Contemporary philosophy in Scandinavia*. Baltimore ; L. : Hopkins, 1972. P. 123—134.

125. *Prawitz D.* On the idea of general proof theory // *Synthese*. 1974. Vol. 27, № 1/2. P. 63—77.

126. *Quine W. V.* Philosophy of Logic. L. : Harvard University Press, 1994.

127. *Robinson J. A.* Logic: Form and Function. The Mechanization of Deductive Reasoning. Edinburg : Edinburg University Press, 1979.

128. *Russell B.* Mathematical logic as based on the theory of types // *Russell B. Logic and Knowledge*. L. : Routledge, 1989. P. 59—102.

*Научное издание*

**Брюшинкин Владимир Никифорович**  
**Ходикова Нина Анатольевна**

**ТЕОРИЯ ПОИСКА ВЫВОДА**  
**ПРОИСХОЖДЕНИЕ И ФИЛОСОФСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**  
Монография

Редактор *Е. Т. Иванова*. Корректор *Е. В. Алексеева*  
Оригинал-макет подготовлен *О. М. Хрустальной*

Подписано в печать 05.04.2012 г.

Бумага для множительных аппаратов. Формат 60×90<sup>1/16</sup>  
Гарнитура «Таймс». Ризограф. Усл. печ. л. 10,4. Уч.-изд. л. 7,0.  
Тираж 400 экз. Заказ 148.

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта  
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14

