А. Н. ПАРШИН

ПУТЬ

МАТЕМАТИКА
И ДРУГИЕ МИРЫ

2002

ОТ АВТОРА

Моему растерянному поколению,
все же с надеждой

Собранное здесь под одной обложкой писалось в разные годы, по разным поводам, да и в разных жанрах. Недоуменный читатель, пролистав книгу, спросит, что общего у теории инвариантов и житий святых кроме того, что пишет об этом один и тот же человек?

Пожалуй, уже это есть обстоятельство немаловажное и достаточное. Вот только многие вряд ли с этим согласятся. Когда Б. Бернсон, знаменитый знаток живописи итальянского Возрождения XIV–XV веков, позволил себе выйти немного за границы своих обычных занятий и написать что-то о Караваджо, специалисты по XVI веку встретили его в штыки. «Мне, как дворовой собаке, разрешено лаять лишь у своей конуры» — писал он в своем дневнике.

Автор провел всю свою жизнь в профессиональной среде, где дилетантизм отметался с порога. И в этой же среде ценились и широта взгляда, и знание смежных областей, и умение строить мосты между, казалось бы, совсем далеким. Отечественная математическая школа, расцветшая в 50–80 годах, славилась этим весьма. Как сказал наш коллега Н. П. Долбилин, на Западе учат know-how, в России учат know-why. Сейчас, когда нашу страну ускоренно приобщают к «семье» цивилизованных народов, культура этой широты пошла на спад. На семинарах, где когда-то могли с горячим энтузиазмом разбирать, сегодня кристаллические когомологии в геометрии, а завтра ультрапроизведения в логике, — теперь все больше и больше ходят на доклады только по своей теме.

Впрочем, чрезмерная специализация — не единственная «болезнь» современной науки. Выходя за пределы своего мира, математики и вообще представители естествознания отнюдь не всегда оказывались на высоте. Так, стремление перестроить гуманитарные науки на началах строгости и точности, возникшее в «оттепельные» 50-е, вышло со временем далеко за границы науки. Пресловутый слоган начала 90-х «разрешено все, что не запрещено» — его прямой потомок.

Но были в нашей профессии и другие. О некоторых будет сказано в этой книге. Среди них те, кому автор обязан освобождением от догматической немоты, от сковывающей коросты своей профессии — Андрей Иванович Лапин, Герман Вейль, отец Павел Флоренский.

Предлагаемые вниманию читателя тексты можно разделить на три части, по четыре работы в каждой. Первая содержит статьи историко-математического характера, в которых, однако, культурный фон играет важную роль. В следующей части основное место занимают разные вопросы естествознания, относящиеся, прежде всего, к осмыслению квантовой теории. Наконец, в последнем разделе собраны выступления, связанные так или иначе с весьма значимой для нашего времени, по мнению автора, проблемой — отношениям науки и религии (впрочем, об этом говорится немного и в других частях). Все части вполне независимы друг от друга и могут представить интерес для разных категорий читателей. Тем не менее, математика или, скорее дух математики, а не ее формализм, пронизывает всю книгу и связывает ее в единое целое.

Все работы сохранены по возможности так, как они появились впервые на свет. Их последовательность отражает, в какой-то мере, эволюцию взглядов автора. Часть работ была опубликована давно и некоторые явления автор теперь оценил бы гораздо резче (последнее десятилетие XX века научило многому). При подготовке книги были, однако, исправлены лишь явные неточности и дефекты стиля. Кроме того, есть в этой книге недостаток и иного рода — то, о чем мы будем говорить, по большей части — идеи, наброски, проекты. Их незавершенность слишком очевидна, чтобы ее скрывать. Хочется надеяться, что хотя бы в выборе обсуждаемого удалось прикоснуться к существенному, а не к вторичному или маргинальному.

Кажется, М. В. Алпатов сказал, что подлинные открытия (он писал об искусствоведении) нас ожидают не на пыльных чердаках и кладовых, а рядом с нами, в залах известнейших музеев, где у всех на виду висят все еще неоцененные и непонятые шедевры.

Эти замечательные слова можно отнести ко всем слоям жизни, они особо звучат сейчас, в эпоху тотальной симуляции и подделки. Удалось ли автору противостоять этому валу пусть на ограниченном пространстве книги, судить, конечно, читателю.

ЧИСЛА КАК ФУНКЦИИ

Развитие одной идеи в московской школе алгебраической геометрии

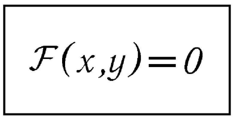
Откуда взялись числа, не знает никто. Этнографы объездили все страны вдоль и поперек и нашли народы, которым вполне хватает «один», «два» и «много». А между тем, у них есть и изысканное искусство, и тончайшие мифы, и нетривиальные ремесла. Они такие же люди, как и мы, только без этого «один», «два», «три» и так далее до бесконечности. Им Прометей не принес (стащил) «науку чисел, из наук важнейшую».

Хотя, чтобы увидеть резкую разницу между первыми числами и последующими, нет нужды ездить по свету. Язык сохранил достаточно свидетельств тому. Так, во многих языковых семьях этимология и образование грамматических форм для первых трех-четырех числительных принципиально отличаются от всех остальных. К тому же у всех народов мира «первые» числа нагружены богатой символикой, имеют индивидуальный облик. В стерильном натуральном ряду все это исчезает напрочь.

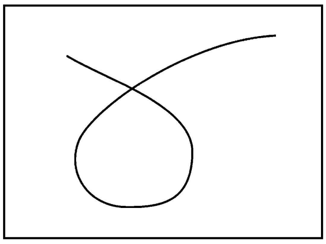
То, что чисел бесконечно много, по-видимому, осознали впервые в древней Греции. *Начала* Евклида содержат уже доказательство бесконечности ряда простых чисел. Бесконечность здесь понимается как потенциальная, как не-конечность. Современному человеку происхождение чисел вполне понятно — они возникли из счета «вещей» или «предметов» (а счет откуда?). Также ему кажется очевидным, что, начав считать, он уже не может остановиться. Представить себе конечный замкнутый числовой универсум в *реальной* жизни, пожалуй, нелегко. Хотя в математике есть, к примеру, например, конечные поля.

Но как бы ни обстояло дело с числами, они в своей первооснове суть что-то дискретное, считаемое. Все эти иррациональности, континуумы, с которыми так мучились греки, появились в истории позднее. А вот понятие функции возникло, по-видимому, как воплощение чего-то непрерывного, траектории брошенного камня или линии, нарисованной пальцем на песке. Функции связаны с движением.

Впрочем, последующее развитие алгебры и многие функции превратило во что-то дискретное, доступное алгоритмизации с помощью каких-нибудь MapleV или PARI. О соотношении дискретного и непрерывного в математике размышляли многие. Об этих двух способах понимания писал Герман Вейль. Другой Вейль, Андре, так рассказал о «споре» О. Зарисского и К. Шевалле — что такое кривая? Они подошли к доске и нарисовали:



Шевалле



Зарисский

И то и другое мы видим, и то и другое рождено взмахом руки, но формулу можно еще, и прежде всего, сказать. Так что перед нами извечный спор уха и глаза, мира языка и мира зрения[1].

Та аналогия чисел и функций, о которой эта статья, это прыжок еще дальше... В ней непрерывное и дискретное входит в обе стороны, и в числа, и в функции. Рука об руку тут работают и алгебра, и анализ.

В основе нашего изложения лежит доклад автора на конференции «Matériaux pour l'Histoire des Mathématiques au XXème siècle», которая проходила в L'Université de Nice Sophia-Antipolis (Ницца, январь 1996). Моя задача состояла в том, чтобы обрисовать одну линию в развитии арифметической алгебраической геометрии в Москве в 50-е–60-е годы. Я не пытался представить здесь более или менее полное историческое исследование развития алгебраической геометрии во время этого «золотого века московской математической школы».

Прежде всего мы объясним смысл аналогии между числами и функциями, начиная с самых простейших понятий. Во второй части рассматривается один нетривиальный пример: явная формула для закона взаимности. В третьей части мы познакомимся с некоторыми аспектами «социальной» жизни московской школы, в частности, с некоторыми семинарами, лекциями и книгами. В последней части будет рассмотрен второй пример этой аналогии, арифметические поверхности который, безусловно, являются вершиной этого направления. Что касается временных рамок, то я почти не буду переступать через начало 70-х годов.

Дело в том, что плавное развитие этой идеи—аналогии между числами и функциями, начавшееся в последней трети XIX века, сменилось в шестидесятые годы XX века резким скачком. Было осознано, что предыдущее развитие шло в рамках одномерного мира. Стало ясно, что можно и нужно перейти к любым размерностям. Как именно произошел этот скачок, мы и хотим здесь рассказать.

[1] Нынешнее поколение добавит сюда клавиатуру и мышь.

Заинтересованный читатель может обратиться к [1; 23; 42; 43], чтобы познакомиться с дальнейшим развитием этих идей, которое шло скорее вширь, чем вглубь. Там же содержатся и те результаты, которые мы опустили.

1. Аналогия

Чтобы понять происхождение аналогии между числами и функциями, посмотрим на следующую таблицу:

$f \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	$F \in \mathbb{F}_p[t] \subset \mathbb{F}_p(t)$	$F \in \mathbb{C}[t] \subset \mathbb{C}(t)$
$f = (\pm)p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}$	$F = aP_1^{\nu_1} \dots P_n^{\nu_n}$	$F = a(t-t_1)^{\nu_1} \dots (t-t_n)^{\nu_n}$
$f \neq 0$	$F \neq 0,\ a \in \mathbb{F}_p^*$	$F \neq 0,\ a \in \mathbb{C}^*$

Здесь мы сравниваем кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел и кольца многочленов $\mathbb{F}_p[t]$ и $\mathbb{C}[t]$ от одной переменной t (с коэффициентами, соответственно, в конечном поле $\mathbb{F}_p$ из p элементов и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$) [2)]. Ненулевые элементы этих колец (числа f и функции F) разлагаются в произведение, соответственно, простых чисел p и неприводимых многочленов. Последние над полем $\mathbb{F}_p$ соответствуют сопряженным элементам из алгебраического замыкания поля $\mathbb{F}_p$. Над полем $\mathbb{C}$ они являются линейными многочленами $t - t_0$, где t_0 — произвольная точка на комплексной прямой $\mathbb{C}$.

Целые числа ν_k, входящие в данное разложение, обладают следующим фундаментальным свойством: они являются нормированиями [3)], а именно:

- $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$
- $\nu(f+g) \geqslant \min(\nu(f), \nu(g))$.

Для наших колец нормирования ν принимают неотрицательные значения, и их можно однозначно распространить на поля частных (поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поля рациональных функций $\mathbb{F}_p(t)$, $\mathbb{C}(t)$) как гомоморфизмы на всю группу $\mathbb{Z}$. Соответственно, мы имеем в этих полях разложения их элементов в произведения, обобщающие рассмотренные выше разложения.

Это первое наблюдение, показывающее, что числовые кольца и кольца функций имеют некоторые общие свойства.

Обратим внимание на то, что в случае $\mathbb{C}$ набор нормирований полностью совпадает с множеством точек комплексной аффинной прямой.

[2)] Здесь и далее k^* — множество ненулевых элементов поля k, т. е. его мультипликативная группа.

[3)] Такие нормирования называют обычно *неархимедовыми*. Им отвечают мультипликативные (неархимедовы) *нормы* $|f|$, например, $|f| = p^{-\nu(f)}$, для которых $|fg| = |f|\,|g|$ и $|f+g| \leqslant \max(|f|, |g|)$. Если ослабить последнее условие до $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, то получается хорошо известное определение нормы.

То же справедливо и для аффинной прямой над конечным полем $\mathbb{F}_p$, если в качестве точек принять максимальные идеалы кольца $\mathbb{F}_p[t]$. Каждый такой идеал является главным, т. е. состоит из кратных некоторого неприводимого многочлена P. В этом случае основное поле не является алгебраически замкнутым и правильное определение точек отличается от прямолинейного: характеризовать точку ее координатой $=$ элементом алгебраического замыкания поля $\mathbb{F}_p$.

Можно попытаться использовать нашу геометрическую интуицию и ввести геометрический объект и в случае кольца $\mathbb{Z}$. Обозначим его через $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ и будем сначала рассматривать как множество всех простых чисел $p = 2, 3, 5, \ldots$ или простых идеалов $(p) \subset \mathbb{Z}$. Таким образом, наша таблица расширяется до следующей:

ν_p	ν_P	ν_P
$p \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$	$P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p[t])$	$P = (t = t_0) \in \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t])$
	аффинная прямая над $\mathbb{F}_p$	аффинная прямая над $\mathbb{C}$

Для любой точки P на аффинной прямой над $\mathbb{C}$ мы имеем разложение рациональной функции F в степенной ряд:

$$F = \sum_{i_0}^{\infty} a_i (t - t_0)^i, \qquad \text{где} \quad i_0 = \nu_P(F), \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Такое же разложение есть и в случае прямой над $\mathbb{F}_p$. Аналогичная конструкция для поля $\mathbb{Q}$ будет представлением рациональных чисел как p-адических чисел:

$$f = \sum_{i_0}^{\infty} a_i p^i, \quad \text{где} \quad i_0 = \nu_p(f), \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Оба разложения связаны с вложениями полей: поля $\mathbb{Q}$ в поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел и полей $\mathbb{F}_p(t)$, $\mathbb{C}(t)$ в поля степенных рядов $\mathbb{F}_p((t))$, $\mathbb{C}((t))$. Эти вложения суть пополнения полей относительно метрик, определяемых нормированиями [5; 25]:

$$\rho(x, y) = p^{-\nu(x-y)}$$

в случае полей $\mathbb{Q}_p$ или $\mathbb{F}_p((t))$, и

$$\rho(x, y) = c^{-\nu(x-y)}$$

в случае поля $\mathbb{C}((t))$ (здесь $c \neq 0$ — произвольная фиксированная константа).

p-адические числа как числовые варианты степенных рядов были введены К. Гензелем [12]. Аналогия между степенными рядами и разложениями рациональных чисел по степеням p (для $p = 10$) рассматривалась еще Ньютоном [35].

Более глубоким проявлением этой аналогии является глобальное свойство нормирований, известное в теории чисел как *формула произведения*. Чтобы получить ее, мы обязаны расширить наши объекты, чтобы сделать их «компактными» или «полными». В случае аффинной прямой нужно вложить ее в проективную прямую $\mathbb{P}^1$, добавив точку на «бесконечности». Она соответствует нормированию:

$$\nu_\infty(f) = \deg(f).$$

Точка на «бесконечности» не имеет смысла как идеал кольца многочленов от t (все такие идеалы исчерпываются точками аффинной прямой). Однако, наша проективная прямая $\mathbb{P}^1$ содержит другую аффинную прямую (дополнение к точке $t = 0$), которая отвечает подкольцу $\mathbb{F}_p[t^{-1}]$, или $\mathbb{C}[t^{-1}]$ поля рациональных функций. И «бесконечная» точка отвечает идеалу (t^{-1}) этого кольца. Таким образом, все точки в случае поля функций устроены «одинаково»: они соответствуют *неархимедовым* нормированиям поля рациональных функций, и таким способом мы получаем *все* нормирования поля.

В случае поля $\mathbb{Q}$, наш геометрический объект $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ также не «компактен». Простые числа p отвечают всем неархимедовым нормированиям поля $\mathbb{Q}$. Но есть еще архимедово нормирование[4]:

$$\nu_\infty(f) = -\log|f|, \qquad f \in \mathbb{Q}^*.$$

и согласно теореме Островского это теперь все нормирования поля $\mathbb{Q}$. Фундаментальное отличие от геометрического случая состоит в том, что в числовой ситуации точка на «бесконечности» не имеет смысла как идеал какого-то подкольца поля $\mathbb{Q}$.

Формула произведения для поля $\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\Big(\prod_{p\in\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} p^{-\nu(f)}\Big) \times |f| = 1, \qquad f \in \mathbb{Q}^*.$$

Чтобы сравнить ее с соответствующей формулой для проективной прямой, перейдем от произведения к сумме

$$\sum_{p\in\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \nu_p(f)\log p + \nu_\infty(f) = 0.$$

[4] Если K — какое-то поле, то под (архимедовым) нормированием мы будем понимать $-\log|f|$, где $|f|$ — норма на K.

Для проективной прямой X над $\mathbb{F}_p$ имеем

$$\sum_{P\in X} \nu_P(f)\deg P + \nu_\infty(f) = 0,$$

а для проективной прямой над $\mathbb{C}$

$$\sum_{P} \nu_P(f) + \nu_\infty(f) = 0.$$

Это означает, что многочлен f имеет столько нулей (с кратностями), какова его степень.

Проективная прямая является частным случаем алгебраической кривой, а кольцо $\mathbb{Z}$ — частный случай колец целых чисел в полях алгебраических чисел (конечных расширениях поля $\mathbb{Q}$). Оба эти понятия объединяются на языке теории схем как схемы размерности 1.

Схемы суть пространства с пучком колец — структурным пучком $\mathcal{O}_X$ регулярных функций на схеме X. Для каждого открытого множества $U \subset X$ мы знаем, какие функции регулярны на U (это в точности $\mathcal{O}_X(U)$). В алгебраической геометрии слой пучка $\mathcal{O}_{X,x}$ в точке $x \in X$ состоит из рациональных функций, не имеющих полюса в этой точке. В рассмотренном нами примере $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ можно положить

$$\mathcal{O}_{X,p} = \{f \in \mathbb{Q} \mid f = m/n \quad \text{с } m,n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad (n,p) = 1\}.$$

Вообще, схемы X (конечного типа) над кольцом $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ являются основным объектом арифметической алгебраической геометрии. Имеются два типа схем. Грубо говоря, они являются «множествами», определяемыми уравнениями с конечными коэффициентами, и «множествами», определяемыми уравнениями с целыми коэффициентами. Ниже мы, соответственно, обозначаем эти два случая как *геометрический* (или *функциональный*) и *арифметический*.

Наши основные примеры $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p(t))$ и $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ являются как раз простейшими представителями этих двух типов. Первоначальная классификация схем состоит в классификации их по размерности. Под этим мы подразумеваем абсолютную размерность над кольцом $\mathbb{Z}$. Для аффинных схем она совпадает с размерностью Крулля соответствующего кольца. (т. е. длиной максимальной цепочки простых идеалов[5]).

Примеры, с которых мы начали наше изложение, суть как раз схемы размерности 1. Упорядоченные цепочки простых идеалов в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_p[t]$, $\mathbb{C}[t]$ имеют длину 1. Например, в $\mathbb{Z}$ мы имеем $(0) \subset (p)$, а в $\mathbb{C}[t]$: $(0) \subset (t-t_0)$.

С точки зрения арифметики кольцо $\mathbb{C}[t]$ не арифметического типа. Мы, однако, включили его в нашу картину как пример геометрического объекта, наиболее близкого нашей интуиции.

[5] Напомним, что идеал $\wp$ кольца A называется простым, если факторкольцо $A/\wp$ не имеет делителей нуля и $\neq \{0\}$ (т. е. само кольцо A простым идеалом не является).

Один из путей в арифметике состоит к переходе от многообразий над полем $\mathbb{C}$ к многообразиям над полем $\mathbb{F}_q$ и затем к схемам над $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.Такой подход подсказывает правильные формулировки теорем, справедливых в обеих ситуациях, а иногда и методы их доказательства.

Терминология схем появилась лишь в середине XX века, но попытки соединить теорию чисел и алгебраическую геометрию в единую науку делались много ранее. Вероятно, первым человеком, который осознал важность понятия размерности для арифметики, был Кронекер. Уже в XIX веке он попытался развить арифметику не только для размерности 1, но и для произвольных размерностей. Этим замыслом пренебрегали в течение длительного времени, и он возродился только в середине нашего столетия.

Мы можем указать на два основополагающих доклада на международных математических конгрессах, в которых обсуждалась эта проблема. Первый был сделан А. Вейлем на конгрессе в Кембридже (США) в 1950 г. [9]. Вейль описал цели Кронекера следующими словами: «В действительности он пытался сформулировать и развить новую область математики, которая содержала бы в качестве своих частных случаев как теорию чисел, так и алгебраическую геометрию».

Второй доклад, на конгрессе в Стокгольме в 1962 г., принадлежит И. Р. Шафаревичу [51].

Между этими двумя событиями А. Гротендиком была создана теория схем (см. [13] и [20]). Я думаю, что доклад Вейля оказал влияние на Гротендика. Что касается доклада Шафаревича, то он мог уже использовать язык схем в качестве фундамента для дальнейшего развития арифметики.

Используя понятие схемы мы можем описать нашу аналогию следующей таблицей, где мы сравниваем схемы X одной и той же размерности из обеих частей таблицы.

$\dim(X)$	геометрический случай	арифметический случай
...	....	....
2	алгебраические поверхности$/\mathbb{F}_q$	арифметические поверхности
1	алгебраические кривые$/\mathbb{F}_q$	арифметические кривые = конечные накрытия $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$
0	$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$	$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$

Здесь $\mathbb{F}_1$ — поле из одного элемента (о нем см. ниже).

Эта таблица есть результат (или исходный пункт) совершенно нового взгляда на аналогию между числами и функциями. В течении почти 80 лет была известна и изучалась лишь одна строка, относящаяся к размерности 1.

Ведущее место в этом развитии принадлежало Д. Гильберту [15; 16]. Эта аналогия — одна из его любимейших идей, и именно благодаря Гильберту она получила свою известность и стала одной из центральных идей в развитии теории чисел в XX веке.

В этом и следующих разделах мы будем говорить об этом гильбертовском периоде, а затем перейдем к описанию того скачка к другим размерностям, который произошел в 60-х годах XX века.

Повторим теперь приведенные выше конструкции в более общей ситуации произвольных кривых (или схем) размерности 1.

Пусть X — алгебраическая кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $K = \mathbb{F}_q(X)$ — поле рациональных функций на X и $\nu_x : K^\star \to \mathbb{Z}$ –нормирования, отвечающие замкнутым точкам $x \in X$. Если предположить, что X — *проективная* кривая, то мы имеем «формулу суммы»

$$\sum_{x \in X} \nu_x(f) \log \#k(x) = 0, \qquad f \in K^\star,$$

или формулу произведения

$$\prod_{x \in X} |f|_x = 1,$$

в которой

$$|f|_x = \#k(x)^{-\nu_x(f)}.$$

Здесь $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ — поле вычетов локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ в точке $x \in X$, $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал. Поле $k(x)$ — это конечное расширение поля $\mathbb{F}_q$. В геометрическом случае мы можем использовать либо саму кривую X (точка зрения алгебраической геометрии), либо поле K рациональных функций на X (точка зрения алгебры). Согласно хорошо известному результату это два описания одного и того же объекта (любое поле алгебраических функций одной переменной имеет единственную проективную неособую кривую X в качестве своей модели).

Если обратиться к арифметике, то можно заметить, что в течение долгого времени алгебраическая точка зрения была доминирующей. Предметом изучения было поле алгебраических чисел K, т. е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Но теперь мы можем использовать и геометрическую точку зрения, т. е. точку зрения теории схем. Это выглядит следующим образом.

Пусть X — множество простых идеалов $\wp$ кольца Λ_K целых чисел поля K. Каждому $\wp \in X$ отвечает нормирование $\nu_\wp$, именно

$$\nu_\wp(f) = \log |f|_\wp, \qquad f \in \mathbb{Q}^*,$$

где

$$|f|_\wp = \#(\Lambda_K/\wp)$$

— соответствующая норма. Легко видеть, что для $K = \mathbb{Q}$ это определение совпадает с предыдущим.

Произведение $|f|_\wp$ по всем $\wp$, как и раньше, не равно 1. Но теперь мы должны добавить конечное число «бесконечных» точек ∞, где ∞ — некоторое вложение поля K в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Число таких вложений равно степени $[K : \mathbb{Q}]$ поля K над $\mathbb{Q}$. Если вложение ∞ вещественно, т. е. имеет вид $K \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то норма равна

$$|f|_\infty = |f|_\mathbb{R} = |f|.$$

В противном случае имеем

$$|f|_\infty = |f|_\mathbb{C} = |f|^2.$$

Тогда выполняется формула произведения:

$$\prod_{x\in X'\cup\infty} |f|_x = 1.$$

Конечно, все эти нормирования имеют простой смысл. Они соответствуют *всем* возможным пополнениям поля K, а именно $\wp$-адическим, $K_\wp$, вещественным $\mathbb{R}$ и комплексным $\mathbb{C}$. Для поля $\mathbb{Q}$ мы имеем одно единственное вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Структура схемы на X задается пучком $\mathcal{O}_X$, слои которого суть

$$\mathcal{O}_{X,\wp} = \{f \in K \mid \nu_\wp(f) \geqslant 0\}.$$

Кольца $\mathcal{O}_{X,\wp}$ содержат максимальный идеал $\mathfrak{m}_x = \{f \in K \mid \nu_\wp(f) \geqslant 0\}$, пополняя по которому получаем полное локальное кольцо $\hat{\mathcal{O}}_{X,\wp}$. Его поле отношений и будет пополнением поля K по нормированию $\nu_\wp$. Для «бесконечных» точек такой конструкции нет, есть *лишь* поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, но *не* подкольца в них. Тем самым мы не можем ввести структуру схемы на всем множестве $X\cup\{\infty\}$ «точек» поля K.

Расширение полей $K \supset \mathbb{Q}$ дает отображение степени $[K : \mathbb{Q}]$

$$X \cup \{\infty\} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \infty$$

и над бесконечной точкой схемы $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\cup\infty$ лежит ровно $[K : \mathbb{Q}]$ бесконечных точек схемы $X \cup \{\infty\}$.

Но мы хотим двигаться в другом направлении, от геометрии к арифметике. И теория схем дает нам возможность применить язык геометрии в ситуации теории чисел. Если $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, то замкнутые точки x схемы X суть простые p, и мы имеем канонический изоморфизм:

$$k(x) \cong \mathbb{F}_p.$$

Здесь $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$, где $\mathfrak{m}_x$ максимальный идеал $\mathcal{O}_x$.

Мы можем говорить о рациональных *числах* $f \in \mathbb{Q}$ как рациональных *функциях* на «кривой» X со значениями $f(x) \in k(x)$. Принципиальное отличие от настоящих кривых состоит в том, что значения $f(x)$ нашей функции принадлежат разным полям $\mathbb{F}_q$, когда x пробегает «кривую» X. Поля $\mathbb{F}_q$ отличаются друг от друга. Они не являются расширениями одного и того же конечного поля $\mathbb{F}_p$, как это было в случае с кривыми. Они содержат в качестве общего подполя лишь «поле» $\mathbb{F}_1$ из одного элемента. Мы помещаем его в нашу таблицу под размерностью 0 как финальный объект в категории схем арифметического типа [6].

[6] Удивительно, но это не пустое понятие. Оно имеет богатую структуру. Например, могут быть определены высшие K-группы $K_\cdot(\mathbb{F}_1)$ и они совпадают со стабильными гомотопическими группами сфер, см. [44].

2. Закон взаимности

До сих пор мы говорили только о самых простых сторонах аналогии между числами и функциями. Гораздо более глубоким фактом является формула произведения для символа норменного вычета

$$\left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right),$$

открытая Д. Гильбертом. В [15] он писал: «Закон взаимности

$$\prod_{\wp} \left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right) = 1$$

напоминает интегральную теорему Коши, согласно которой интеграл функции, охватывающий все ее особые точки, всегда принимает значение 0. Одно известное доказательство обычного квадратичного закона взаимности указывает на внутреннюю связь между этой теоретико-числовым законом и фундаментальной теоремой Коши из теории функций».

Эта идея была реализована И. Р. Шафаревичем в его чисто локальной конструкции символа норменного вычета. Данное им доказательство закона взаимности было далеко идущим развитием соответствующего результата для вычетов [50]. Этот результат является важным вкладом в решение 9-й проблемы Гильберта (см. ее формулировку и комментарии в [17; 45]). Вероятно, Шафаревич был первым в нашей стране, кто принял эту аналогию всерьез.

Он использовал ее весьма нетривиальным образом, так как пришлось сравнивать p-адические числовые поля со сложной структурой их мультипликативной группы и гораздо более простые поля степенных рядов. Работа Шафаревича начинается с приведенной выше цитаты из Гильберта, и затем он поправляет Гильберта, указывая, что аналогом формулы произведения должна быть формула для суммы вычетов, а не интегральная теорема Коши.

Напомним сначала хорошо известные конструкции из теории полей классов. Теория полей классов является способом описать абелевы [7)] расширения поля арифметического типа такого, как $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{F}_p(t)$. В этом случае она называется глобальной теорией полей классов.

Если K — числовое поле, то его можно вложить в пополнения $K_\wp$ для всех простых идеалов $\wp$, как мы видели выше. В этой части мы будем иметь дело только с полями $K_\wp$. Поле $K_\wp$ называется *локальным полем*, и описание его абелевых расширений — это задача локальной теории полей классов. Для этой цели рассмотрим максимальное абелево расширение $K_\wp^{ab}$ как объединение всех конечных абелевых расширений. Задача заключается в том, чтобы описать его группу Галуа над $K_\wp$ с помощью конструкции внутренним образом связанной с полем $K_\wp$, а не с его расширениями.

Основной результат локальной теории полей классов состоит в существовании канонического гомоморфизма:

$$\varphi : K_\wp^* \to \mathrm{Gal}(K_\wp^{ab}/K_\wp),$$

который имеет тривиальное ядро и плотный образ. И тогда глобальная теория полей классов для поля K естественным образом сводится к локальным теориям для всех полей $K_\wp$ (см. например [25]).

[7)] То есть полей $L \supset K$ с абелевой группой Галуа над K.

Покажем, как отображение φ определяет символ норменного вычета. Предположим, что корень ζ из единицы порядка p^n принадлежит нашему полю. Здесь p — характеристика поля вычетов. Возьмем два числа λ и μ из $K_\wp^*$. В этой ситуации имеется абелево расширение $K_\wp(x)/K_\wp$, где $x^{p^n} = \lambda$. Его группа Галуа G является циклической группой порядка p^n и для любого $\sigma \in G$

$$\sigma(x) = (\text{некоторая степень корня } \zeta)x.$$

Из теории полей классов мы получаем следующее отображение

$$K_\wp^* \to \mathrm{Gal}(K_\wp^{ab}/K_\wp) \to G,$$

которое обозначим также через φ. Теперь можно определить символ норменного вычета условием

$$(\sqrt[p^n]{\lambda})^{\varphi(\mu)} = \left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right) \sqrt[p^n]{\lambda},$$

где $\sqrt[p^n]{\lambda} = x$ и результат не зависит от выбора x. Таким образом, чтобы определить этот символ, мы должны *выйти* из нашего локального поля и работать с его расширениями. Вопрос, поставленный Гильбертом, заключался в том, чтобы получить явное выражение целиком внутри поля $K_\wp$ и затем, наоборот, с его помощью построить отображение φ и развить теорию полей классов.

Далее, если взять λ и μ не из локального поля, а из первоначального глобального поля K, то мы получим символы для всех простых идеалов $\wp$. Чтобы получить глобальный закон взаимности, надо также определить символ для бесконечных точек ∞. Если определить символ и для них (что сделать гораздо проще), то мы получим закон взаимности, описанный Гильбертом (см. выше).

В частности, пусть $K = \mathbb{Q}$, $p = 2$, $n = 1$, и возьмем в качестве λ, μ два нечетных простых числа a, b. В бесконечном произведении общего закона взаимности останутся лишь сомножители, отвечающие $\wp = (a), (b)$ и ∞. Закон Гильберта сведется тогда в точности к квадратичному закону взаимности Гаусса:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b-1}{2}},$$

где $\left(\frac{a}{b}\right)$ — символ Лежандра. Теперь я перейду к объяснению конструкции Шафаревича и к тому, как она связана с вычетами дифференциальных форм на римановых поверхностях. Шафаревич рассмотрел случай, когда $n = 1$. Общий случай, равно как и применение к конструкции теории полей классов, начиная с локального определения символов, были рассмотрены А. И. Лапиным [28–30] [8].

[8] Первая из его работ была написана в 1950 г., когда он находился в заключении. Вопрос о ее возможной публикации обсуждался в ЦК КПСС по просьбе АН СССР и МВД. После рассмотрения этого вопроса тремя членами Политбюро (среди которых был Л. П. Берия) было дано разрешение на публикацию работы под псевдонимом. Однако к тому времени А. И. Лапин уже вышел на свободу и работа была опубликована обычным образом. Материалы этой переписки были недавно найдены в архиве ЦК и опубликованы в *Вопросах истории естествознания и техники*, 2001, № 2. С. 116–131. Там же содержатся воспоминания С. С. Демидова, И. Р. Шафаревича и И. Г. Башмаковой о самом Андрее Ивановиче.

Для краткости обозначим наше локальное поле через K. Это поле отношений кольца дискретного нормирования $\mathcal{O}$ с максимальным идеалом $\wp$ и полем вычетов $\mathcal{O}/\wp = \mathbb{F}_q$. Обозначим через π образующую идеала $\wp$.

Мультипликативная группа K^* имеет следующую структуру:

$$K^* = \{\pi^m\}\mathcal{O}^* = \{\pi^m\}RU,$$

где множество R состоит из мультипликативных представителей поля вычетов $\mathbb{F}_q$ и $U = 1 + \wp$ называется группой главных единиц.

Символ норменного вычета имеет два важных свойства, полезных для его вычисления, а именно

$$\left(\frac{\lambda \cdot \lambda', \mu}{\wp}\right) = \left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right)\left(\frac{\lambda', \mu}{\wp}\right),$$

и

$$\left(\frac{(\lambda)^{p^n}, \mu}{\wp}\right) = \left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right)^{p^n} = 1.$$

То же справедливо и для второго аргумента μ.

Эти свойства показывают, что для того, чтобы вычислить наш символ, мы должны найти какую-то систему образующих для группы U/U^{p^n} (для группы R мы имеем $R = R^{p^n}$). Шафаревич использовал для этого экспоненты Артина–Хассе $E(\alpha, x)$ и их вариант $E(\alpha)$. Они определены для элементов α из максимального неразветвленного подкольца $\mathcal{O}_{nr} \subset \mathcal{O}$ и $x \in \wp$. Эти функции являются гомоморфизмами из кольца $\mathcal{O}_{nr}$ в группу единиц U. Мы увидим, что они являются аналогами экспоненциальных функций. Нам будет полезным следующее сокращение

$$\lambda \approx \mu \iff \lambda\mu^{-1} \in K^{p^n}.$$

Имеем следующие фундаментальные разложения:

$$\lambda \approx \pi^a E(\alpha) \prod_{\substack{1 \leqslant i < pe/(p-1), \\ p \nmid i}} E(\alpha_i, \pi^i),$$

$$\mu \approx \pi^b E(\beta) \prod_{\substack{1 \leqslant i < pe/(p-1), \\ p \nmid i}} E(\beta_i, \pi^i).$$

Целые числа a, b определены по модулю p^n, а значения всех E-функций по модулю p^n-степеней. Если ввести гомоморфизм $\delta : U/U^{p^n} \to U/U^{p^n}$ с $\delta(\lambda) = E(\alpha)$, $\delta(\mu) = E(\beta)$, то искомое локальное выражение будет выглядеть так

$$\left(\frac{\lambda, \mu}{\wp}\right) = E(\beta)^a E(\alpha)^{-b} E(\gamma),$$

где

$$E(\gamma) \approx \delta\Big(\prod_{i,j} E(i\alpha_i\beta_j, \pi^{i+j})\Big).$$

Самое главное показать, что результат не зависит от выбора простого элемента π. Это верно, но доказательство сложное и довольно длинное.

Все же оставалось неясным, как найти значение γ в явном виде. Позднее это было сделано двумя математиками, независимо друг от друга, Г. Брюкнером в Германии и С. В. Востоковым в Ленинграде [7; 8; 11].

Чтобы понять аналогию с римановыми поверхностями, рассмотрим точку P на такой поверхности, локальную координату t и соответствующее поле $K = \mathbb{C}((t))$ степенных рядов Лорана. Для мультипликативной группы поля K имеем:

$$K^* = \{t^m\}\mathbb{C}^*U$$

и любые элементы $\lambda, \mu \in U$ имеют следующее разложение:

$$\lambda = \exp(A) = \prod_{i\geqslant 1} \exp(\alpha_i t^i), \qquad \alpha_i \in \mathbb{C},$$
$$\mu = \exp(B) = \prod_{j\geqslant 1} \exp(\beta_j t^j), \qquad \beta_j \in \mathbb{C}.$$

В поле K имеются два простых действия: взятие производной $\partial = d/dt$ и вычета $\operatorname{res}(\sum \alpha_i t^i) = \alpha_{-1}$.

Теперь аналогия с вычетом дифференциальной формы в точке P видна из следующей таблицы

$$\begin{array}{ccc}
\exp(\alpha_i t^i) & \sim & E(\alpha_i, \pi^i) \\
\exp(\beta_j t^j) & \sim & E(\beta_j, \pi^j) \\
\exp(B\,\partial A) & \sim & \prod_{i,j} E(i\alpha_i\beta_j, \pi^{i+j})) \\
\operatorname{res}(\exp(B\partial A)) & \sim & \delta\Big(\prod_{i,j} E(i\alpha_i\beta_j, \pi^{i+j})\Big).
\end{array}$$

Чтобы сравнить колонки в последнем ряду, надо заметить, что

$$A\,\partial B = \sum_{i,j} j\alpha_i\beta_j t^{i+j-1} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{res}(A\,\partial B) = \sum_{i+j=0} j\alpha_i\beta_j.$$

Мы видим, что оба способа вполне *параллельны*, а именно операция δ выполняет роль вычета. Но вторая конструкция в числовом поле K является, конечно, гораздо более сложной. В частности, из нашей таблицы исчезли числа $E(\alpha)$ и $E(\beta)$. Их роль в определении символа норменного вычета естественно сравнить не с вычетом в точке P, а с так называемым ручным символом в поле $\mathbb{C}((t))$.

3. Общая ситуация в 50-е–60-е годы XX века

Пятидесятые годы были периодом пробуждения интереса к алгебраической геометрии в нашей стране. Может быть, не совсем правильно сказать «пробуждения», потому что до 50-х годов почти никто в СССР не интересовался алгебраической геометрией [9].

[9] Можно только упомянуть Н. Г. Чеботарева, в частности его книгу [49] и труды И. Г. Петровского и О. А. Олейник по топологии вещественных алгебраических многообразий, написанные после войны, см. их обзор в [36].

Тем не менее, появились несколько человек, которые серьезно интересовались алгебраической геометрией, прежде всего И. Р. Шафаревич, пытавшийся изучать доступную литературу. Чтобы показать, как это было трудно сделать, скажем, что в конце 40-х годов в Московском университете проводился семинар, на котором несколько математиков, в том числе и он, пытались понять доказательство теоремы Морделла–Вейля, но им не удалось это сделать.

Одна из причин такого положения понятна — это строгая изоляция от остального мира. Например, когда математики всего мира впервые после войны встретились на Международном математическом конгрессе в Кембридже (США) в 1950 году, на нем не было ни одного человека из СССР. Была только телеграмма, сообщавшая, что «советские математики, крайне занятые своей текущей работой, не могут присутствовать на конгрессе» [27]. Это как раз тот самый конгресс, где Андре Вейль сделал доклад, который мы упомянули выше. В конце 50-х годов обстановка несколько улучшилась, но сильные ограничения, конечно, оставались.

Большое влияние на процесс развития идей в 50-е годы оказали немногочисленные визиты западных математиков, среди которых необходимо отметить московские лекции Эриха Келера. Ввиду редкости прямых контактов очень важным было изучение литературы. Насколько мне известно, в Москве с большим трудом появились записки семинара Картана [24], но они были очень пристально изучены. Очень популярны были книга Ходжа о гармонических интегралах [48] и записки лекций Зигеля об автоморфных функциях нескольких комплексных переменных [40]. Последние были переведены на русский язык в 1954 году И. И. Пятецким-Шапиро [41], и в середине 50-х годов Шафаревич и Пятецкий-Шапиро провели семинар по этой книге, который с точки зрения понимания доказательств имеющихся в книге теорем оказался более удачным. Возможно, труды Пятецкого-Шапиро по ограниченным областям и его решение проблемы Картана о существовании несимметричных ограниченных областей стали результатом этой деятельности (см. его воспоминания об этом времени в сборнике [14]). В 1960–61 годах в Московском университете Е. Б. Дынкиным, М. М. Постниковым и И. Р. Шафаревичем был устроен большой семинар по теории деформаций комплексных структур, построенной незадолго до этого К. Кодаирой и Д. Спенсером.

Но наиболее важным для нашей истории будет интерес к классической теории алгебраических поверхностей.

Это понятно с точки зрения аналогии, рассматривавшейся выше. Конструкции, описанные в разделе 1, принадлежат к классической алгебраической теории чисел и, таким образом, входят по нашей классификации в область размерности 1. Позднее Шафаревич начал изучать диофантовы уравнения, в частности, эллиптические кривые над полями алгебраических чисел, и понял необходимость движения к высшим размерностям. Ведь кривым над такими полями должны соответствовать схемы размерности 2. К счастью, и само понятие схемы только-только появилось. Этот замысел был отчетливо сформулирован в его стокгольмском докладе, на который мы уже ссылались выше. Чтобы понять арифметику в размерности 2, сначала необходимо иметь четкую картину для алгебраических поверхностей. То есть мы должны иметь теорию соответствующих геометрических объектов — алгебраических поверхностей, прежде всего, над полем комплексных чисел, а затем над другими полями.

Такая теория уже существовала в трудах итальянских математиков, занимавшихся алгебраической геометрией, — Г. Кастельнуово, Ф. Энриквеса, Ф. Севери и других. Но ни основные определения, ни доказательства итальянских геометров не были ни в какой степени строгими, а иногда были и просто непонятными. На самом деле, эта наука было довольно замкнутой областью математики, со своими правилами и законами, которые отвергались основной частью математического сообщества. Появление теории пучков, пришедшей из комплексно-аналитической геометрии, (работа Ж.-П. Серра [39]) и аналитических методов в работах Кодаиры и Спенсера, давало возможность передоказать на строгой основе многие результаты итальянской школы. Достаточно сравнить доклад Б. Сегре на конгрессе 1954 г. в Амстердаме, целиком принадлежащий старой эпохе, с докладом А. Гротендика на конгрессе 1958 г. в Эдинбурге, чтобы почувствовать произошедший переворот.

В начале 60-х годов Шафаревич организовал в Московском университете семинар, на котором изучались классические труды итальянских математиков по теории алгебраических поверхностей. Основным источником была книга Ф. Энриквеса [54]. Этот семинар проводился в два этапа, в 1961–1962 и в 1962–1963 годах. Интересно, что примерно в это же время (точнее в конце 50-х годов) интерес к результатам итальянцев в области алгебраических поверхностей возник и в США — в школах О. Зарисского и К. Кодаиры.

Результатом двухлетней работы стало издание книги *Алгебраические поверхности* [2], вышедшей в 1965 г. в трудах Математического института им. В. А. Стеклова. В этот том вошли следующие главы:

1. Бирациональные преобразования (А. Б. Жижченко).
2. Минимальные модели (А. Б. Жижченко).
3. Критерий рациональности (А. Б. Жижченко).
4. Линейчатые поверхности (И. Р. Шафаревич).
5. Минимальные модели линейчатых и рациональных поверхностей (Ю. И. Манин, Ю. Р. Вайнберг, А. Н. Тюрин).
6. Поверхности общего типа (Б. Г. Мойшезон).
7. Поверхности с пучком эллиптических кривых (И. Р. Шафаревич).
8. Алгебраические поверхности с $\kappa = 0$ (Б. Г. Авербух).
9. Пространство модулей комплексных поверхностей с $q = 0$ и $K = 0$ (Г. Н. Тюрина).
10. Поверхности Энриквеса (Б. Г. Авербух).

Книга давала полное изложение классификации алгебраических поверхностей, как это было сделано итальянцами, с результатами, доказанными на основе теории пучков. В некоторых местах классические утверждения были исправлены или дополнены.

Примечательно, что этот семинар и книга послужили основным импульсом для дальнейшего развития алгебраической геометрии в Москве.

Приведем здесь лишь небольшой список дальнейших исследований, выросших отсюда:

- рациональные поверхности и многомерные многообразия (с решением проблемы Люрота [10] и классификацией многообразий Фано) — Ю. И. Манин и В. А. Исковских;

• теория векторных расслоений на алгебраических кривых и поверхностях — А. Н. Тюрин; Ф. А. Богомолов;

• поверхности К3 — Г. Н. Тюрина, И. Р. Шафаревич, И. И. Пятецкий-Шапиро, В. В. Никулин, А. Н. Рудаков, В. С. Куликов и другие;

• эллиптические пучки и главные однородные пространства — И. Р. Шафаревич, О. Н. Введенский;

• многомерная бирациональная и аналитическая геометрия (включая критерий обильности) — Б. Г. Мойшезон;

• минимальные модели для арифметических поверхностей — И. Р. Шафаревич.

Большая часть работ из этого списка была сделана после семинара и под его влиянием. Исключение составляют работы самого Шафаревича по теории главных однородных пространств, которые ему предшествовали. Они возникли из его интереса к диофантовым уравнениям, прежде всего, теории эллиптических кривых. Уже в 1956 г., в докладе на 3-м Всесоюзном математическом съезде он указал на аналогию между задачей погружения в теории Галуа полей алгебраических чисел и задачей классификации эллиптических кривых, определенных над такими полями. Общим для этих задач была их формулировка на языке когомологий Галуа и наличие локальных инвариантов, связанных с пополнениями основного числового поля (см. подробнее [21]). От этих арифметических задач было естественно перейти к изучению эллиптических кривых над полем алгебраических функций, а это и есть поверхности с пучком эллиптических кривых из приведенного выше списка.

Более подробное изложение дальнейшего развития алгебраической геометрии в Москве см. [1; 21; 26]. Общая атмосфера той эпохи хорошо показана в [14].

4. Арифметические поверхности

Большое значение для теории чисел имело развитие последнего направления из приведенного выше списка. В своих лекциях в Бомбее в 1966 г. [52] И. Р. Шафаревич систематически развил основные понятия и результаты из теории алгебраических поверхностей для случая арифметических поверхностей. В них он построил, используя схемный язык, теорию пересечений, определил и исследовал бирациональные преобразования и минимальные модели [11].

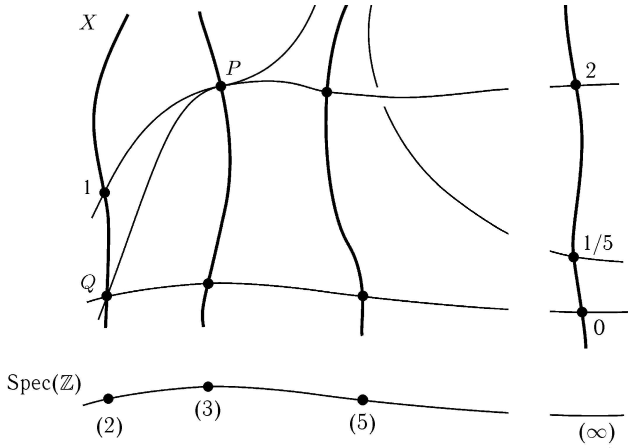
Приведем в качестве иллюстрации простейший пример арифметической поверхности, возникающей из аффинной прямой над полем $\mathbb{Q}$. Пусть $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[t])$. Это схема размерности 2 и она отображается на $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

---

[10] Формулировку этой проблемы Шафаревич услышал от Н. Г. Чеботарева, который давно ею интересовался. В частности, Чеботарев обсуждал проблему в своем докладе на конгрессе в Цюрихе в 1932 г. Задача состоит в том, чтобы выяснить когда подполе поля рациональных функций $k(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных снова будет полем такого типа. Это верно для $n = 1$ и для $n = 2, k = \mathbb{C}$. Доказательство последнего факта было дано итальянцами и использовало всю мощь теории поверхностей. Манин и Исковских построили контрпримеры в размерности 3.

[11] Независимо часть этих результатов была получена С. Лихтенбаумом в США [33] и П. Делинем во Франции [18].

Слои этого отображения над точками $p \in S$ суть аффинные прямые над конечными полями $\mathbb{F}_p$. Ниже мы изображаем точки слоев (которые есть, одновременно, точки схемы X) с координатами в конечных полях (т. е. вычетами $\bmod\ p$). «Поверхность» X содержит «кривые», задаваемые уравнениями вида $f = \mathrm{const}$, где $f \in \mathbb{Z}[t]$.



Кривые $t = 0$ и $t = 2$ пересекаются в точке Q слоя $p = 2$ над точкой (2) базы S и имеют там касание нулевого порядка, т. е. трансверсальны. Кривые $t = 1/5$ и $t = 2$ пересекаются в точке P слоя $p = 3$ над (3) и имеют там касание первого порядка. В самом деле,

$$2 \equiv 0 \mod 2, \qquad 2 \not\equiv 0 \mod 2^2,$$
$$5 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3, \qquad 5 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3^2, \qquad 5 \cdot 2 \not\equiv 1 \mod 3^3.$$

В последнем случае в окрестности слоя над $p = 3$ мы имеем разложения в 3-адические ряды

$$2 = 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + \dots,$$
$$1/5 = 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + \dots$$

Общее определение индекса пересечения двух кривых $C = \{f = 0\}$ и $D = \{g = 0\}$ в точке x выглядит так

$$(C \cdot D)_x = \log \#k(x) \cdot \text{длина}\,(\mathbb{Z}[t]/(f, g)), \tag{1}$$

где $\log \#k(x)$ введен по аналогии с одномерным случаем (см. раздел 1). Конечно, это определение имеет смысл, если кривые C и D пересекаются по конечному множеству точек, т. е. не имеют общих компонент. Чтобы дать определение в общем случае, в алгебраической геометрии обычно используют метод сдвига, приводя кривые в общее положение. В качестве сдвига используют прибавление дивизора рациональной функции, поскольку на полной поверхности индекс пересечения любой кривой с дивизором функции равен нулю. Последнее свойство есть обобщение на случай поверхности свойства дивизоров функций на кривых: их степень равна нулю (см. раздел 1). Как мы видели, чтобы последнее свойство выполнялось, нужно иметь полную или компактную кривую.

Соответственно, в двумерной ситуации нужно иметь что-то вроде полной поверхности. Однако, в лекциях Шафаревича рассматривались лишь неполные схемы, определенные над аффинной базой — спектром кольца целых чисел поля алгебраических чисел. С самого начала было ясно, что такой подход является лишь частичным аналогом ситуации с алгебраическими поверхностями. В конце лекций ставилась задача найти полный аналог алгебраической поверхности и построить для него теорию пересечений. Рассмотрим эту задачу более подробно.

Сравнивая геометрический и арифметический случаи в размерности 1, мы видели, что полным аналогом проективной кривой X является множество $X = X' \bigcup \infty$ и структура схемы имеется только на подмножестве X'. Точка ∞ добавляется к X', так сказать, вручную. Неизвестно, какая структура должна быть на всем множестве X. Кажется, что теория схем для этой цели непригодна.

Это справедливо и для высших размерностей. Полный объект из правой части таблицы, который соответствует проективным алгебраическим поверхностям, — это арифметические поверхности, введенные С. Ю. Аракеловым [3; 4] в начале 70-х годов.

Сравнивать их прямо с алгебраическими поверхностями не очень удобно. Обычно для такого сравнения алгебраическую поверхность X снабжают структурой пучка алгебраических кривых, параметризованных проективной неособой кривой B. Таким образом, имеется отображение:

$$f : X \longrightarrow B,$$

слои которого суть проективные кривые и почти все они являются неособыми кривыми одного и того же рода g. Сравним теперь это отображение со структурным отображением

$$f : X' \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

для арифметической поверхности.

Поскольку базисная «кривая» $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ не является полной, это значит, что двумерная схема X' тоже неполна и таким образом не может рассматриваться как точный аналог проективной алгебраической поверхности X. Точно так же, как в случае размерности 1, нам надо что-то добавить.

Чтобы понять идею Аракелова, вернемся к случаю алгебраической поверхности X с отображением f и разделим базисную кривую B на две различные части B' и S, где B' — открытое подмножество и S — конечное подмножество. Мы хотим рассмотреть B' как аналог $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ и $f^{-1}(B')$ как аналог для X'. Теперь мы ищем недостающую часть арифметической поверхности, которая соответствует части X, лежащей над S. Чтобы решить эту задачу, нам надо внимательнее изучить соответствующую часть алгебраической поверхности X.

С отображением f можно связать алгебраическую *кривую* Y, определенную над полем K рациональных функций кривой B (в теории схем эта конструкция, известная еще в классической алгебраической геометрии, называется переходом к общему слою и допускает простое и строгое определение). Если $b \in B$, то мы имеем кривую $Y_{(b)}$, которая получается заменой основного поля K на локальное поле K_b

$$Y \otimes_K K_b$$

и двумерную схему $X_{(b)}$,

$$X \otimes_B \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_b).$$

которая получается заменой базисной кривой B на «бесконечно малую» окрестность $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_b)$ точки b.

Теперь пусть $b \in S$. Тогда мы можем сравнить поля K_b с полями, которые являются пополнениями поля алгебраических чисел на «бесконечности». В арифметическом случае у нас нет никаких аналогов для схем $X_{(b)}$, но мы можем определить кривые $Y_{(b)}$ той же формулой, что и выше. Для поля $\mathbb{Q}$ это выглядит следующим образом:

$$Y_\infty = Y \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \subset Y \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}.$$

Таким образом получаются римановы поверхности над полем $\mathbb{C}$. Аракелов предложил, что выбор некоторой эрмитовой метрики на римановых поверхностях Y_∞ можно рассматривать как замену несуществующей модели $X_{(\infty)}$. Такой подход можно объяснить следующим образом. В геометрическом случае, для кривых $Y_{(b)}$ имеется биективное соответствие

$$\{\text{сечения проекции } X_{(b)} \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_b)\} \longleftrightarrow Y_{(b)}(K_b)$$

сечений отображения f с рациональными точками кривой $Y_{(b)}$. Для любых двух различных сечений C, D определен их индекс пересечения (см. (1)), и его можно использовать в качестве метрики на кривой $Y_{(b)}$. Выбор другой модели $X_{(b)}$ кривой $Y_{(b)}$ дает другую метрику на $Y_{(b)}$. Итак, множество моделей $X_{(b)}$ можно попытаться рассмотреть как множество некоторых метрик на $Y_{(b)}$. Такой подход к интерпретации теории Аракелова появился гораздо позже [19]. Описание точного соответствия между моделями и метриками было дано лишь в [22].

Теперь приведем таблицу, которая будет более точной, чем общая картина, данная выше.

Геометрический случай	Арифметический случай
Проективная неособая кривая B с конечным подмножеством $S \subset B$	Спектр кольца Λ целых чисел числового поля K и вложения K в $\mathbb{C}$
Проективные алгебраические поверхности X над $\mathbb{F}_q$ с отображением $f : X \to B$ на B	Арифметические поверхности
Поверхность $X' = f^{-1}(X - S)$ с отображением $f\|_{X'}$ на $X - S$	Двухмерная схема X' над $\operatorname{Spec}(\Lambda)$
Алгебраическая кривая $Y_{(b)}$ с $b \in S$	Компактные римановы поверхности $Y_{(\infty)}$, соответствующие вложениям K в $\mathbb{C}$
Схемы $X_{(b)}$ с $b \in S$	Эрмитовые метрики на поверхностях $Y_{(\infty)}$

Затем Аракелов определил такие понятия, как дивизор, дивизор функции и дифференциальной формы, линейная эквивалентность, индекс пересечения и канонический класс. Он доказал аналог формулы присоединения и в [4] также сформулировал аналог теоремы Римана–Роха.

Конструкция Аракелова лежала без движения почти десять лет, и лишь в начале 80-х годов она послужила отправным моментом для дальнейшего развития в работах Г. Фалтингса. Мы сошлемся на [23; 46; 47; 42; 43; 53; 38], где говорится о этих более поздних событиях. Эта линия оказала большое влияние на развитие теории чисел и также на развитие физики элементарных частиц [6], демонстрируя пресловутую «непостижимую эффективность математики в естественных науках».

5. Высота и теория Аракелова

В этой части мы объясним происхождение теории Аракелова, исходя из понятия высоты — основного инструмента теории диофантовых уравнений.

Пусть X — проективное алгебраическое многообразие, определенное над глобальным полем K размерности 1 (иначе говоря, K — или поле алгебраических чисел, или поле $K = k(B)$ алгебраических функций на какой-то кривой B, определенной над полем констант k) и пусть D — дивизор на X (т. е. целочисленная линейная комбинация подмногообразий коразмерности 1).

Высота — это функция

$$h_{X,D} : X(K) \to \mathbb{R},$$

на множестве рациональных точек $X(K)$, зависящая от выбора дивизора D на X. На самом деле высота определяется этими данными неоднозначно. Будем писать $f \approx g$ для двух числовых функций, если $f - g$ –ограниченная функция. Высота определяется как класс функций относительно такого отношения эквивалентности (см. подробности в [31]).

Простой, но важный пример: пусть $X \subset \mathbb{P}^n$, $K = \mathbb{Q}$ и D — гиперплоское сечение, задаваемое обращением в нуль какой-либо координаты. Тогда точку $P \in X(K)$ можно представить в виде $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, где x_i — целые взаимно простые числа. Имеем

$$h_{X,D} = \max_i \log |x_i|.$$

Отсюда видно, что число точек ограниченной высоты конечно — важнейшее свойство, позволяющее получать разного рода теоремы конечности для диофантовых уравнений.

Более общо, для глобального поля K с набором нормирований ν (куда мы включаем и бесконечные точки в числовом случае) и соответствующих им норм $|\cdot|_\nu$ высота точки в проективном пространстве задается как произведение

$$h(P) = \prod_\nu \max_i \log |x_i|_\nu$$

и формула произведения (см. раздел 1)

$$\prod_\nu |x|_\nu = 1, \qquad x \in K^*,$$

показывает, что это выражение корректно определено (но зависит, например, от выбора системы проективных координат).

Высота обладает следующими свойствами:

i) Инвариантность относительно линейной эквивалентности: если $D' = D + (f)$, где (f) — дивизор функции f, то

$$h_{X,D'} \approx h_{X,D}.$$

ii) Функториальность: если $f : X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и D — дивизор на Y, то

$$h_{X,f^*D} \approx f^* h_{X,D},$$

где f^* — обратный образ, соответственно, дивизоров или функций.

iii) Конечность: если дивизор D является гиперплоским сечением, то для любого $h \in \mathbb{R}$ множество

$$\{P \in X(K) \mid h_{X,D}(P) \leqslant h\}$$

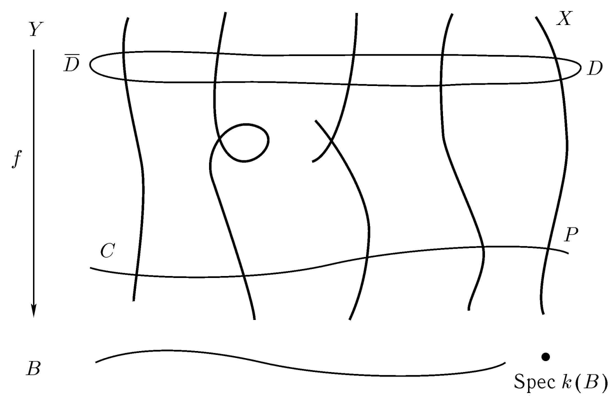
конечно.

Используя эти свойства, А. Вейль доказал, что группа $A(K)$ рациональных точек на абелевом многообразии A над глобальным полем K является конечно порожденной [12] (теорема Морделла–Вейля).

Если мы находимся в геометрической ситуации (по предыдущей классификации), то основное поле K имеет вид $k(B)$ и существует проективное многообразие Y и морфизм $f : Y \to B$ с общим слоем X. При разумных условиях на X и Y (их неприводимость и плоскость морфизма f) имеется биективное соответствие

$$\{\text{сечения отображения } f : Y \to B\} \longleftrightarrow X(K)$$

сечений C и рациональных точек P на X. Дивизор D также определяет некоторый дивизор $\overline{D}$ на Y.



[12] По модулю K/k-следа в геометрическом случае, см. [31].

В этих условиях мы имеем

iv) $h_{X,D} \approx (C \cdot D)_Y$,

(чтобы это равенство имело смысл, нужно, конечно, иметь теорию пересечений на многообразии Y, например, предположить, что Y — неособое многообразие).

Итак, по существу высота — это индекс пересечения, и это обстоятельство можно использовать в разных направлениях. Если X — алгебраическая кривая, то Y — это поверхность, ее модель из предыдущего раздела. Эта связь подсказывает, что для построения теории пересечений на арифметических поверхностях высота может служить исходным пунктом.

Очевидным недостатком высоты является ее приближенное определение и функториальность, с точностью до указанного выше отношения эквивалентности. Д. Тейт придумал определение высоты на абелевых многообразиях A — каноническую функцию $\hat{h}_{A,D}$ на множестве рациональных точек, ведущую себя функториально относительно гомоморфизмов абелевых многообразий и такую, что $\hat{h}_{A,D} \approx h_{A,D}$.

В геометрическом случае для индекса пересечения, очевидно, имеется разложение

$$C\ {}_Y\ D = \sum_{b \in B} C\ {}_b\ D$$

по индексам пересечений во всех слоях отображения f. А. Нерон [34] нашел новый подход к построению высоты Тейта на абелевых многообразиях, который одновременно давал для нее локальное разложение по точкам базы B (или нормированиям ν основного поля K):

$$\hat{h}(P) = \sum_{\nu} h_\nu(P) + \sum_{\infty} h_\infty(P), \qquad P \in A(K).$$

Заметим, что, в отличие от глобальной функции $\hat{h}(P)$, локальные компоненты определены не для всех $P \in A(K)$, а лишь для $P \in (A - D)(K)$, обращаясь в бесконечность на дивизоре D.

В числовом случае определение локальных компонент очень разное, в зависимости от природы точки (неархимедовой ν или архимедовой бесконечной ∞). Для $\hat{h}_\nu(P)$ используется индекс пересечения на специальной неособой модели абелева многообразия A над кольцом целых основного числового поля K (минимальная модель Нерона).

На бесконечности впервые в игру вступает анализ. Пусть A — абелево многообразие над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и D — положительный дивизор на A (т. е. $D = \sum_i n_i D_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geqslant 0$ и D_i –неприводимые подмногообразия коразмерности 1). Многообразие A является комплексным тором $\mathbb{C}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа ранга $2n$ в $\mathbb{C}^n$.

На самом A дивизор D не является дивизором полюсов какой-то голоморфной функции, но на универсальной накрывающей $\mathbb{C}^n$ такую функцию можно найти и, главное, она строится вполне каноническим образом.

Дивизор D представляет алгебраический класс когомологий, т. е. элемент пространства $H^{1,1} \subset H^2(A, \mathbb{C})$ согласно разложению Ходжа в когомологиях многообразия A. На абелевом многообразии пространство $H^{1,1}$ состоит из эрмитовых матриц. Если H — матрица, отвечающая дивизору D, то существует единственная (подходящим образом нормализованная) тета-функция $\theta(z) = \theta_D(z)$ на $\mathbb{C}^n$, обладающая следующими свойствами:

i) дивизор полюсов (θ_D) равен D,

ii) $\theta(z+\gamma) = \theta(z)\exp(\pi H(\gamma,z) + \pi/2H(\gamma,\gamma))\cdot\chi(\gamma)$,

где $z\in\mathbb{C}^n, \gamma\in\Gamma$ и $|\chi(\gamma)| = 1$ (см. подробности в [10]).

Теперь локальную компоненту высоты $\hat{h}_\infty(P)$ можно определить так [34]:

$$\hat{h}_\infty(z) = -\log|\theta_D(z)| + \pi H(z,z).$$

Из свойства ii) тета-функции вытекает, что эта функция инвариантна относительно Γ, т. е. является функцией точки $P\in A(\mathbb{C})$. Кроме этого, локально на A, в окрестности каждой точки дивизора D имеем

$$\hat{h}_\infty(P) \approx \log|\text{голоморфное уравнение для } D|. \tag{2}$$

Теперь на конструкцию Нерона можно посмотреть с другой точки зрения. Как выделить функцию $\hat{h}_\infty$ из всех гладких вещественных функций на $(A-D)(\mathbb{C})$, удовлетворяющих свойству (2)? Заметим, что все функции со свойством (2) отличаются друг от друга на ограниченную гладкую функцию на *всем* A.

Нетрудно видеть, что условием, выделяющим $\hat{h}_\infty$, является уравнение Пуассона

$$\Delta\hat{h}_\infty = \text{const}, \qquad \text{вне } D, \quad \text{или } \delta_D \text{ на всем } A. \tag{3}$$

Здесь

$$\Delta = \sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$$

оператор Лапласа, отвечающий плоской метрике на $\mathbb{C}^n$, которая, будучи Γ-инвариантной, спускается на A. Через δ_D обозначена дельта-функция, отвечающая подмногообразию D.

Это наблюдение подсказывает, что определение локальных компонент $\hat{h}_\infty(P)$ может быть дано для любого алгебраического многообразия X, если на нем фиксировать некоторую эрмитову метрику. Тогда для любого дивизора D существует единственная (с точности, до константы) функция $\hat{h}_{\infty,D}$, удовлетворяющая условиям (2) и (3). Такое определение было введено в [37] и послужило отправной точкой для развития теории Аракелова.

Теорию Аракелова теперь можно описать следующим образом. Арифметическая поверхность Аракелова $\tilde{X}$ состоит из неособой двумерной схемы X и ее отображения $f: X\to B$ на одномерную схему $B = \mathrm{Spec}(\Lambda_K)$, где Λ_K — кольцо целых поля алгебраических чисел K. Обозначим через B_∞ множество бесконечных точек поля K и выберем для каждого $v\in B_\infty$ эрмитову метрику μ_v на римановой поверхности $X_v = X\otimes_v\mathbb{C}$.

Дивизором Аракелова $\tilde{C}$ на $\tilde{X}$ называется линейная комбинация обычного дивизора C на X и «бесконечных» слоев X_v, причем последние входят с вещественными коэффициентами.

Пусть

$$\tilde{C} = C + \sum_{v\in B_\infty} a_v X_v, \quad \tilde{D} = D + \sum_{v\in B_\infty} b_v X_v,$$

два дивизора Аракелова. Предположим, что C и D пересекаются по конечному множеству точек. Тогда

$$\tilde{C}\cdot\tilde{D} = C\,{}_X\,D + \sum_{v\in B_\infty}(C\cdot D)_v + \sum_{v\in B_\infty} a_v \deg D/B + \sum_{v\in B_\infty} b_v \deg C/B,$$

где $C\ {}_X\ D$ — индекс пересечения на схеме X, а архимедовы индексы $(C \cdot D)_v$ определяются с помощью функций Грина $G(P,Q)(= G_v(P,Q))$, которые строятся по метрике μ_v.

Напомним, что функция Грина на римановой поверхности $X = X_v$ однозначно определяется следующими условиями:

1. G — гладкая вещественная положительная функция на $(X \times X) \setminus$ (диагональ).

2. Если z — локальная голоморфная координата около точки P_0 на X, то около (P_0, P_0) функция $G(P,Q)$ имеет вид

$$|z(P) - z(Q)| \cdot (\text{гладкая не обращающаяся в нуль функция}).$$

3.
$$\Delta_Q \log G(P,Q) = d\mu/dz \wedge d\bar{z},$$
где
$$\Delta_Q = (1/\pi i)(\partial^2/\partial z \partial \bar{z})$$
–оператор Лапласа и $d\mu$ — форма объема, возникающая из метрики μ_v.

Положим
$$(C \cdot D)_v = \sum_{P,Q} n_P m_Q \log G_v(P,Q),$$
если $C = \sum n_P P$ и $D = \sum m_Q Q$ — разложения дивизоров в (конечные) суммы точек на $X_v(\mathbb{C})$.

Если F — рациональная функция на X, то определим ее дивизор Аракелова, как
$$(\tilde{F}) = (F)_X + \sum_v a_v X_v, \quad a_v = -\int \log |F| d\mu_v.$$
Здесь $(F)_X$ — обычный дивизор функции F на схеме X.

Теперь на $\tilde{X}$ можно определить линейную эквивалентность $\approx$ дивизоров:
$$\tilde{C} \approx \tilde{D}, \quad \text{если} \quad \tilde{C} - \tilde{D} = (\tilde{F}).$$

Основное свойство индекса пересечения состоит в его инвариантности относительно линейной эквивалентности
$$\tilde{C} \cdot \tilde{D} = \tilde{C} \cdot (\tilde{D} + (\tilde{F})).$$

Это позволяет обычным в алгебраической геометрии способом определить индекс пересечения для любых двух дивизоров Аракелова.

Среди классов дивизоров относительно линейной эквивалентности имеется, как и в обычной геометрии, канонический класс. Входящие в него дивизоры строятся по рациональной дифференциальной форме ω степени 1 на $X \otimes K$ (точнее, это сечение относительного кокасательного расслоения X над B). Положим
$$(\tilde{\omega}) = (\omega)_X + \sum_v a_v X_v, \ a_v = -\int_{X_v} \log \left| \frac{\omega \wedge \bar{\omega}}{d\mu_v} \right| d\mu_v,$$
где $(\omega)_X$ — дивизор формы ω на схеме X.

Формула присоединения для дивизора $\tilde{C} = C$, представляющего сечение C на арифметической поверхности (т. е., имеющего степень 1 над базой B), имеет вид

$$\tilde{C} \cdot (\tilde{\omega}) + \tilde{C} \cdot \tilde{C} = 0.$$

В обычной алгебраической геометрии под формулой присоединения для кривой C на поверхности X понимают равенство

$$C \cdot (\Omega_X) + C \cdot C = 2g - 2,$$

где Ω_X — класс дифференциальных форм степени 2 на X и g — род (неособой) кривой C. Если поверхность X расслоена над кривой B и C — сечение этого расслоения, то $2g - 2 = C \cdot f^*(\Omega_B)$, ($\Omega_B$ — канонический класс кривой B) и формула присоединения принимает вид

$$C \cdot ((\Omega_X) - f^*(\Omega_B)) + C \cdot C = C \cdot ((\Omega_{X/B})) + C \cdot C = 0,$$

где $(\Omega_{X/B})$ — класс дивизоров, отвечающий относительному кокасательному расслоению поверхности X над B.

Именно это равенство и переносится на арифметические поверхности Аракелова. Более детальное изложение теории Аракелова и ее дальнейшего развития для многообразий любой размерности см. [46; 47; 32; 42].

* * *

В нашем кратком изложении был рассмотрен лишь один побег на огромном дереве аналогии между числами и функциями. Некоторое представление о дереве в целом можно получить из следующего списка:

• теория полей классов (параллельное описание абелевых расширений числовых и функциональных полей);

• дзета и L-функции схем размерности 1 (проблема мероморфного продолжения и доказательства функционального уравнения);

• теория высоты рациональных точек в диофантовой геометрии;

• теория арифметических многообразий Аракелова;

• классификация полупростых алгебраических групп над локальными полями;

• основы Брюа-Титса и симметрические пространства;

• арифметические подгруппы алгебраических групп, в частности, теория приведения;

• программа Ленглендса описания представлений групп Галуа локальных и глобальных полей;

• аналогия между явными формулами в теории чисел и формулой следа Лефшеца (А. Вейль, К. Денингер, А. Конн).

Наверняка этот перечень неполон и вся история еще далека от своего завершения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра. Математическая Логика. Теория чисел. Топология. (Обзорные статьи к пятидесятилетия Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР) // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 168.

2. Алгебраические поверхности // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 75. — С. 3–215.

3. *Аракелов С. Ю.* Теория пересечений дивизоров на арифметической поверхности // Известия АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. С. 1179–1192.

4. *Arakelov S. Yu.* Theory of intersections on an arithmetic surface // Proc. Inter. Congr. Math. Vancouver, 1974. Vol. 1. 1975. P. 405–408.

5. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1964.

6. *Bost J.-B.* Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes // Séminaire Bourbaki. Février 1987. Exp. 676. Astérisque. V. 152–153. — Paris: Soc. Math. France, 1987. P. 113–149.

7. *Brückner H.* Eine explizite Formel zum Reziprozitätsgesetz für Primzahlexponenten p. Algebraische Zahlentheorie. — Oberwolfach, 1964.

8. *Brückner H.* Explizites Reziprozitätsgesetz und Anwendungen // Vorles. Fachber. Mathem. Univ. Essen. Heft 2. 1979.

9. *Weil A.* Number theory and algebraic geometry // Proc. Intern. Congr. Math. (Cambridge, 1950). V. 2. P. 90–110. (Имеется перевод: Сб. Математика. 1958. № 2(4). С. 49–58.)

10. *Вейль А.* Введение в теорию кэлеровых многообразий. — М.: ИЛ, 1961.

11. *Востоков С. В.* Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. 1978. Т. 42. С. 1288–1321.

12. *Hensel K.* Theorie der algebraischen Zahlen. — Leipzig: Teubner, 1908.

13. *Grothendieck A.* The Cohomology Theory of Abstract Algebraic Varieties // Proc. Inter. Congr. Math. (Edinbourgh, 1958). — Cambridge University Press, 1960, P. 103–118. (Имеется перевод: Международный Математический конгресс в Эдинбурге. — М.: Физматгиз, 1962. С. 116–137.)

14. Golden Years of Moscow Mathematics. (Ed. Zdravkovska S., Duren P.). — Providence: AMS, 1993.

15. *Hilbert D.* Über die Theorie der relativquadratischer Zahlkörper // Jahresbericht der DMV. 1899. Bd. 6. (Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. S. 367–368.)

16. *Гильберт Д.* Избранные Труды. — М.: Факториал, 1998. Т. I. С. 532; Т. II. С. 420–421; Т. II. С. 494.

17. *Гильберт Д.* Математические проблемы // В кн.: *Гильберт Д.* Избранные труды. — М.: Факториал, 1998. Т. II. С. 401–436.

18. *Deligne P.* Intersections sur les surfaces régulières // In: Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. SGA 7 II. — Lecture Notes in Mathematics. V. 340. 1978. Exp. X, P. 1–38.

19. *Deligne P.* Le déterminant de la cohomologie // In: Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry. Contemp. Math. 1987. V. 67. P. 93–178.

20. *Deligne P.* Quelques idées maîtresses de l'œuvre de A. Grothendieck // In: Matériaux pour l'Histoire des Mathématiques au XXème siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice, 1996). — Soc. Math. France. Séminaires & Congrès. № 3. 1998. P. 11–20.

21. *Демушкин С. П. и др.* Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1984. Т. 39, вып. 1. С. 167–174.

22. *Zhang S.* Admissible pairing on a curve // Invent. Math. 1993. V. 112. P. 171–193.

23. *Зархин Ю. Г., Паршин А. Н.* Проблемы конечности в диофантовой геометрии // В кн.: *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии. — Москва: Мир, 1986. С. 369–438.

24. *Cartan H.* Séminaire École Normale Supérieure. 1950/51, 1951/52, 1953/54, 1957/58. Secrétariat mathématiques. Paris.

25. *Cassels J. W. S., Frölich A.* Algebraic Number Theory. — London: Academic Press, 1967. (Имеется перевод: Алгебраическая теория чисел. — М.: Мир, 1969.)

26. *Кострикин А. И. и др.* Василий Алексеевич Исковских (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1999. Т. 54, вып. 4. С. 183–187.

27. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. (Cambridge, USA, 1950.) V. 1. P. 122.

28. *Лапин А. И.* Теория символа Шафаревича // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 31–50.

29. *Лапин А. И.* К теории символа Шафаревича // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 145–158.

30. *Лапин А. И.* Общий закон взаимности и новое обоснование теории полей классов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 335–378.

31. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии. — М.: Мир, 1986.

32. *Lang S.* Introduction to Arakelov theory. — New York: Springer, 1988.

33. *Lichtenbaum S.* Curves over discrete valuation rings // Amer. J. Math. 1968. V. 15. P. 380–405.

34. *Néron A.* Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétes abéliennes // Ann. Math. 1965. V. 82. P. 249–331.

35. *Ньютон И.* Математические работы. — М.–Л., 1934.

36. *Олейник О. А.* К шестнадцатой проблеме Гильберта // В кн.: Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969. С. 182–195.

37. *Паршин А. Н.* Модулярные соответствия, высоты и изогении абелевых многообразий // Труды МИАН СССР. 1973. Т. 132. С. 211–236.

38. *Паршин А. Н.* О применении разветвленных накрытий в теории диофантовых уравнений // Матем. Сборник. 1989. Т. 180. С. 244–259.

39. *Serre J.-P.* Faisceaux algébriques cohérents // Ann. Math. 1955. V. 61. P. 197–278. (Имеется перевод в кн.: *Расслоенные пространства.* — М.: ИЛ, 1958. С. 372–450.)

40. *Siegel C. L.* Analytic functions of several complex variables. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1948–1949.

41. *Зигель К. Л.* Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1954.

42. *Soulé C.* (written together with D. Abramovich, J.-F. Burnol, J. Kramer). Lectures on Arakelov geometry. — Cambridge University Press, 1992.

43. *Soulé C.* Hermitian Vector Bundles on Arithmetic Varieties. — IHES Preprint, 1996.

44. *Soulé C.* On the field with one element. Talk given at the Arbeitstagung. Bonn, June 1999. — Preprint IHES/M/99/55.

45. *Фаддеев Д. К.* К девятой проблеме Гильберта // В кн.: *Проблемы Гильберта*. — М.: Наука, 1969. С. 131–140.

46. *Faltings G.* Calculus on arithmetic surfaces // Ann. Math. 1984. V. 119. P. 387–424.

47. *Faltings G.* Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem. V. 127. — Princeton: Annals of Mathematics Studies, 1992.

48. *Hodge W. V. D.* The theory and applications of harmonic integrals. — Cambridge University Press, 1941.

49. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. — М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

50. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. Сборник. 1950. Т. 26, № 68. С. 113–146.

51. *Шафаревич И. Р.* Поля алгебраических чисел // Proc. Int. Cong. Math. (Stockholm, 1962). — Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. P. 163–176.

52. *Shafarevich I. R.* Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. — Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1966.

53. *Szpiro L.* Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell. Asterisque. V. 127. — Paris: Soc. Math. France, 1985.

54. *Enriques F.* Le superficie algebriche. — Bologna: Nicola Zanichelli, 1949.

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ И ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ *) [1]

> In unserer Wissenschaft stets nur der überlegende Geist, nicht der angewandte Zwang der Formel den glücklichen Erfolg bedingt.
>
> *D. Hilbert*

Жизнь любой математической теории включает в себя периоды расцвета и упадка. Бывает, что наиболее блестящие достижения теории, дающие решения основных проблем, знаменуют видимый конец ее развития, и лишь появление через какое-то, иногда длительное, время новых точек зрения и концепций позволяет переосмыслить полученные ранее результаты, вдохнуть в них новую жизнь и привести теорию к новому расцвету. Яркий пример подобной ситуации доставляет классическая теория инвариантов, появившаяся в середине XIX в. в Англии и занявшая затем одно из центральных мест в математике второй половины XIX в. Своим возникновением теория инвариантов обязана трем наукам: теории чисел (гауссова классификация бинарных квадратичных форм), геометрии (проективные свойства кривых) и алгебре (теория определителей). Начальный период ее развития связан с именами таких математиков, как Кэли (1821–1895), Сильвестр (1814–1897) (придумавший почти все термины теории, в том числе слово «инвариант»), Сальмон (1819–1904) в Англии, Якоби (1804–1851), Гессе (1811–1874) в Германии и Эрмит (1822–1901) во Франции. Основная роль в теории инвариантов переходит затем к немецким математикам, среди которых выделяются Аронгольд (1819–1884), Клебш (1833–1872) и Гордан (1837–1912). Математиком, решившим в конце века основные проблемы теории, долгое время казавшиеся неприступными, и тем самым, по словам Г. Вейля, «почти убившим весь предмет», был Давид Гильберт.

Гильберт родился 23 января 1862 г. в Кёнигсберге, куда семейство Гильбертов переехало из Саксонии еще во времена Фридриха Великого [2]. Со столицей Пруссии связана значительная часть его жизни и деятельности (Гильберт жил здесь вплоть до своего переезда в Гёттинген в 1895 г.). Здесь прошли его детские годы, учеба в университете (1880–1885), и именно здесь были написаны работы по теории инвариантов, сделавшие имя Гильберта знаменитым. В то время был обычен переезд

---

*) Настоящая статья представляет собой текст доклада, сделанного в Школе по истории математики и механики (Тарту, июль 1973 г.).

студентов из одного университета в другой, дававший им возможность услышать лекции многих крупнейших математиков. Гильберт, однако, проводит почти все свое время в Кёнигсберге, лишь на семестр покидая его для посещения лекций Фукса в Гейдельберге. В Кёнигсбергском университете Гильберт застает Генриха Вебера (1842–1913), который был тут профессором с 1873 по 1883 г. Многочисленные книги Вебера по алгебраическим числам, эллиптическим функциям, математической физике пользовались широкой известностью, а его знаменитый *Lehrbuch der Algebra* популярен даже и сейчас.

Примечательно, как сильно пересекается этот список с темами дальнейшего творчества Гильберта. В 1883 г. Вебер покидает Кёнигсберг, и его место занимает Линдеман (1852–1939), только что прославившийся доказательством трансцендентности числа π. Влияние Линдемана на Гильберта, вообще говоря, небольшое, можно проследить в заметке 1893 г. [1, Bd. I], где Гильберт дает новое доказательство знаменитого результата своего учителя. Также по совету Линдемана Гильберт обращается к решению одной задачи о бинарных формах, составившему его диссертацию [1, Bd. II, № 11] (начало 1885 г.). Это первая работа Гильберта по теории инвариантов, и уже в ней появляются конструкции, имевшие впоследствии существенное значение для его основных работ в этой области. Интересно, что сам Гильберт придумал совсем другую тему для своей диссертации — некоторое обобщение цепных дробей. Когда он рассказал об этом Линдеману, тот немедленно заметил, что подобное уже было сделано Якоби.

В Кёнигсберге Гильберт знакомится с Германом Минковским (1864–1909) и Адольфом Гурвицом (1859–1919), дружба с которыми, особенно с Минковским, прошла через всю его жизнь и оказала огромное влияние на формирование Гильберта как математика. Гурвиц, который был на три года старше, учился в Мюнхене у Клейна, затем в Берлине и Лейпциге. Два года он работает в Гёттингене, а в 1884 г., когда ему еще не было и 25 лет, Линдеман пригласил его на должность экстраординарного профессора в Кёнигсберг. Здесь он пробыл до 1894 г. Минковский с раннего детства жил в Кёнигсберге и учился здесь вместе с Гильбертом. Много времени Минковский провел в Берлинском университете, где читали лекции Вейерштрасс, Куммер, Гельмгольц, Кронекер. В это же время он знакомится с новыми идеями Кантора (1845–1918). Все это живо обсуждалось затем друзьями во время их бесчисленных прогулок по окрестностям Кёнигсберга. Как вспоминал впоследствии Гильберт, вождем их тройки был, конечно, Гурвиц. Эти разговоры позволяли Гильберту быть в курсе самых последних идей и результатов многих немецких математиков, значительная часть которых по обычаям того времени не публиковалась, а излагалась в лекциях и семинарах. Позднее, когда друзья разъехались, между ними возникла постоянная переписка [[3]].

После окончания университета Гильберт проводит часть 1885 г. в Лейпциге, где знакомится с Феликсом Клейном (1849–1925), только что вышедшим из состояния глубокой депрессии — незадолго до этого трагически закончилось его соперничество с Пуанкаре в создании теории автоморфных функций (см. [2]). Гильберт легко находит общий язык с Клейном и всю свою жизнь после этой встречи пользуется его пониманием и поддержкой. По совету Клейна он в марте 1886 г. отправляется в Париж. Впечатления Гильберта о встречах с французскими математиками описаны в его письмах Клейну. Так, встречи с Пуанкаре (1854–1912) не удались, не произвели впечатления и лекции Пикара, но с Жорданом и особенно Эрмитом сразу наладились теплые отношения, несмотря на большую разницу в годах. Гильберта в его беседах с Эрмитом должны были, конечно, привлекать огромные познания последнего в области теории инвариантов.

Возвратившись в июне в Кёнигсберг, Гильберт становится через месяц приват-доцентом. По дороге домой он заезжает в Гёттинген к Клейну, а затем в Берлин, где встречается с Леопольдом Кронекером (1823–1891). По позднейшим высказываниям Гильберта, а также знавших его людей, этот математик оказал на него особенно сильное влияние. Многие из идей Кронекера прослеживаются в дальнейшей научной биографии Гильберта. Сюда относятся и идея об аналогии числовых и функциональных полей (см. *Mathematische Probleme* [1, Bd. III, № 17; 3]), и разработка комплексного умножения, приведшая Гильберта к его 12-й проблеме и новому классу дискретных групп (модулярные группы Гильберта), и, наконец, взгляды Кронекера на основания математики, своеобразно отразившиеся в позднейшем финитизме Гильберта. В дальнейшем мы увидим, что большое значение имели идеи Кронекера и для работ Гильберта по теории инвариантов.

Как известно, вся деятельность Гильберта резко распадается на отдельные периоды, посвященные тем или иным областям математики. Годы с 1884-го по 1892-й были отданы теории инвариантов. Сам Гильберт писал о себе в эти годы: «специалист по теории инвариантов». Занятия инвариантами не мешают Гильберту получить ряд замечательных результатов и в других областях математики. Так, в это время появляются его работы о положительных формах (1888, 1893), о неприводимости алгебраических уравнений (1892), о диофантовых уравнениях рода нуль (1891, совместно с Гурвицом), о кривых Пеано (1891), о вещественной топологии алгебраических кривых (1891). Из этих работ выросли впоследствии 16-я и 17-я проблемы. Одновременно Гильберт читает лекции в Кёнигсбергском университете, где в 1892 г. он становится профессором. Разносторонность его интересов позволяет ему легко переключаться с одной области на другую. Так, прочитав в первом семестре курс теории инвариантов, он обращается в следующем к гидродинамике [4].

Именно в это время наибольшей интенсивности своей научной деятельности Гильберт публикует работы *Über die Theorie der algebraischen Formen* (1890) [4; 1, Bd. II, № 16] и *Über die vollen Invariantensysteme* (1893) [5; 1, Bd. II, № 19], приведшие к тому завершению теории инвариантов, о котором говорилось выше, и оказавшие огромное влияние на развитие математики XX в. Прежде чем переходить к подробному анализу этих работ, опишем кратко то состояние, в котором находилась теория инвариантов перед началом деятельности Гильберта [5].

Основная задача теории, вокруг которой концентрировались усилия, состояла в построении и изучении инвариантов форм и их систем. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — переменные. *Форма* порядка k — это однородный многочлен

$$P = P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

степени k. Обозначим через $\mathrm{Gl}(n)$ полную линейную группу, т. е. группу всех невырожденных матриц порядка n, а через $\mathrm{Sl}(n)$ — унимодулярную группу, состоящую из матриц с определителем 1. Линейные преобразования этих групп действуют на переменные $x_1, \ldots, x_n$ формы P и переводят ее в новую форму P^g:

$$P^g(x_1, \ldots, x_n) = P(g(x_1), \ldots, g(x_n)), \qquad g \in \mathrm{Gl}(n).$$

Коэффициенты всевозможных форм с фиксированными числами n и k образуют векторное пространство E, и соответствие $P \mapsto P^g$ задает линейное преобразование этого пространства, отвечающее элементу g группы $\mathrm{Gl}(n)$. Как стали говорить позднее, это линейное представление группы $\mathrm{Gl}(n)$ в пространстве E. (Целым) *инвариантом* называется любая функция f на пространстве E, которая: 1) является многочленом от координат этого пространства, т. е. многочленом от коэффициентов форм P, и 2) не меняется под действием группы $\mathrm{Gl}(n)$ (или) $\mathrm{Sl}(n)$, т. е. $f(P^g) = f(P)$ для всех $g \in \mathrm{Gl}(n)$ (или) $g \in \mathrm{Sl}(n)$.

В теории рассматривались и функции более общего вида, например рациональные (см. ниже пример 5), и допускалось также иное поведение, скажем умножение на некоторую степень $\det(g)$, под действием преобразований g, принадлежащих различным подгруппам группы $\mathrm{Gl}(n)$. Мы ограничимся здесь для простоты приведенным выше определением.

В кольце R всех многочленов от координат пространства E целые инварианты f образуют подкольцо R^{inv}. Векторы пространства E можно отождествлять с формами P и говорить о значении инварианта f в точке P или для формы P. Аналогично можно рассматривать не одну форму, а набор форм $P_1, \ldots, P_s$ (или, как говорили в то время, «Formensysteme») и следующее действие линейных преобразований на таких системах

$$(P_1, \ldots, P_s) \quad \mapsto \quad (P_1^g, \ldots, P_s^g).$$

Инварианты в этой ситуации определяются как функции коэффициентов форм $P_1, \ldots, P_s$, имеющие такие же свойства, как и выше [6].

Построение инвариантов тесно связано с задачей проективной классификации алгебраических многообразий. Именно, результаты о проективной классификации алгебраических кривых послужили главной отправной точкой при создании теории инвариантов. Если имеется два набора форм $P_1, \ldots, P_s$, и $Q_1, \ldots, Q_s$, то они определяют алгебраические многообразия

$$X:\; P_1 = 0, \ldots, P_s = 0 \qquad \text{и} \qquad Y:\; Q_1 = 0, \ldots, Q_s = 0$$

в проективном пространстве. Из проективной эквивалентности многообразий и Y вытекает, что значения любых инвариантов для систем $P_1, \ldots, P_s$ и $Q_1, \ldots, Q_s$, совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно, так что изучение инвариантов представляет лишь первый шаг в задаче классификации геометрических объектов.

Примеры.

1) Система n линейных форм от n переменных

$$P_i = \sum a_{ij} x_j,$$

где $f = \det({}_{ij})$ –инвариант относительно группы $\mathrm{Sl}(n)$.

2) Квадратичная форма от n переменных

$$P = \sum a_{ij} x_i x_j,$$

где $f = \det(a_{ij})$ — инвариант относительно группы $\mathrm{Sl}(n)$.

3) Обобщение примера 1. n форм P_i от n переменных имеют инвариантом якобиан

$$f = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right).$$

4) Обобщение примера 2. Произвольная форма P от n переменных имеет инвариант — гессиан

$$f = \det\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

5) Двойное отношение четырех линейных форм от двух переменных

$$P_i = a_i x + b_i y \qquad (i = 1, \ldots, 4),$$
$$f = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} : \frac{a_4 b_2 - a_2 b_4}{a_4 b_3 - a_3 b_4}$$

— рациональный инвариант относительно группы $\mathrm{Gl}(2)$.

6) Бинарная форма P степени 4

$$P = a x_1^4 + 4b x_1^3 x_2 + 6c x_1^2 x_2^2 + 4d\, x_1 x_2^3 + e x_2^4,$$

определенная над полем комплексных чисел, имеет функции

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2, \qquad g_3 = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$$

в качестве полной [1)] системы инвариантов относительно группы $\mathrm{Sl}(2)$,

$$R^{\mathrm{inv}} = \mathbb{C}[g_2, g_3].$$

Например, $\Delta =$ (дискриминант формы P) $= g_2^3 - 27g_3^2$, (см. [6; 11]).

7) Классификация бинарных квадратичных P форм относительно групп $\mathrm{Gl}(2)$ и $\mathrm{Sl}(2)$,

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad \Delta = b^2 - ac.$$

Орбиты относительно группы $\mathrm{Gl}(2)$:
1) $\Delta \neq 0$,
2) $\Delta = 0, \quad P \neq 0$,
3) $P = 0$.

Орбиты относительно группы $\mathrm{Sl}(2)$:
1) $\Delta = a, \quad a \neq 0$,
2) $\Delta = 0, \quad P \neq 0$,
3) $P = 0$.

Рассматривая эти примеры, легко убедиться, что из равенства инвариантов следует проективная эквивалентность соответствующих геометрических объектов лишь в том случае, когда они достаточно «общи». Иначе говоря, это утверждение верно, если выбросить некоторые «исключительные» объекты, например, те, которые удовлетворяют условиям $\det(a_{ij}) = 0$ в первых двух примерах. Это обычная ситуация для теории инвариантов, и далее мы будем говорить о ее интерпретации в работах Гильберта и современных исследованиях. Появление группы $\mathrm{Sl}(n)$ связано с тем, что она почти совпадает с группой проективных преобразований $\mathrm{GL}(n-1)$. Не следует думать, что все внимание было обращено именно на указанные группы. Так, метрическая точка зрения, в задаче классификации приводит к появлению ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$, аффинная — к различным расширениям полной линейной группы и т. д. Тем не менее большая часть исследований по теории инвариантов, особенно периода ее расцвета, была посвящена группам $\mathrm{Gl}(n)$ и $\mathrm{Sl}(n)$.

Во многих случаях было замечено, что среди инвариантов данной системы форм можно выбрать конечное число таких инвариантов $f_1, \ldots, f_m$, что все остальные инварианты являются многочленами от $f_1, \ldots, f_m$. Эти инварианты впервые были обнаружены Кэли для бинарных форм степени 3 и 4 во втором из его известных *Мемуаров о формах*

[1)] Определение этого понятия дается в дальнейшем.

(1855) (см. пример 6). Они получили название полных или фундаментальных систем инвариантов. С современной точки зрения это конечная система образующих кольца инвариантов R^{inv}. Построение подобных систем для форм более высоких степеней и от большего числа переменных натолкнулось на значительные трудности. На этом пути трудами в основном немецкой школы был придуман так называемый символический метод. Этот метод позволял вычислять в явном виде инварианты любой системы форм, имеющие заданную степень [7]. Поскольку степени инвариантов полной системы заранее неизвестны, символический метод в принципе не позволяет строить полные системы инвариантов. Тем не менее, комбинируя его с другими соображениями, можно было в некоторых частных случаях получить требуемый результат. Вершиной этого подхода было доказательство Горданом в 1868 г. существования конечной полной системы инвариантов для бинарных форм любых степеней. За свои исследования Гордан удостоился прозвища «короля теории инвариантов». Отметим, что построения Гордана, равно как и другие конструкции, связанные с символическим методом, были вполне эффективными, хотя и связанными со сложными вычислениями. Для бинарных форм степени n явный вид полной системы инвариантов был найден лишь при $n \leqslant 6$ [6]. Уже случай $n = 7$ приводил к вычислениям, превосходящим возможности XIX в., хотя в то время исписать десяток страниц одними формулами без единого слова не считалось чем-то особенным. Вопрос о существовании конечной полной системы инвариантов в общем случае был одной из центральных проблем теории.

Таким было состояние этой области математики к середине 80-х годов, когда ею начинает заниматься Гильберт. Его обращение к этой теории выглядит вполне естественным, если вспомнить о традициях Кёнигсбергской математической школы. Созданная в первой половине века Францем Нейманом и Карлом Якоби, который преподавал в Кёнигсберге с 1826 по 1843 гг., она дала почти всех немецких математиков, занимавшихся теорией инвариантов. Гессе, ученик Якоби, преподавал здесь в 1840–1855 годах. Из Кёнигсберга происходят также Клебш и Аронгольд.

Первые работы Гильберта по теории инвариантов не связаны непосредственно с проблемой конечности, о которой он, вероятно, узнал позднее из парижских бесед с Эрмитом, однако уже в них он отчетливо сознает недостаточность символического метода для многих задач теории (см. предисловие к работе [1, Bd II, № 3], написанной в 1886 г.). Возможно, что толчком к исследованию этой проблемы послужило посещение Гильбертом в начале 1888 г. Эрлангена, где он встретился с Горданом. Впрочем, вряд ли эта встреча была особенно плодотворной: «король» не давал никому раскрыть рта в своем присутствии. Гораздо большее впечатление произвела на Гильберта его новая встреча с Кронекером. Она состоялась в Берлине, куда Гильберт заехал, возвращаясь из поездки в Эрланген и Гёттинген. Уже в Гёттингене Гильберт придумывает новое, очень простое доказательство теоремы Гордана о бинарных формах. Заметка об этом, датированная 30 марта, состоит всего из трех страниц. В конце мая Гильберт сдает в печать работу о пучках бинарных форм, а уже в сентябре — первую работу из цикла *Zur Theorie der Algebraischen Gebilde* (всего их было три), содержащую доказательство конечности полной системы инвариантов для произвольных форм. Таким образом, грандиозный прорыв Гильберта в теории инвариантов произошел за три летних месяца 1888 г. Подробное изложение результатов этих статей составило уже упоминавшуюся работу [4] 1890 г.

Статья Гильберта начинается со следующей общей теоремы. Пусть имеется бесконечная последовательность форм φ_i от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда существует такое m, что каждая форма φ_i является линейной комбинацией вида

$$\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_m\varphi_m,$$

где α_i — некоторые формы от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Это знаменитая теорема о базисе, ставшая в XX в. исходным пунктом для развития коммутативной алгебры. Гильберт доказывает ее индукцией по n. Характерной чертой теоремы Гильберта является ее полная неконструктивность уже в случае $n = 1$ (переход от n к $n+1$ проходит вполне эффективным образом). В этом случае число m равно номеру формы φ_i, степень которой минимальна, так что для определения m нужно знать степени *всех* форм φ_i. Само же доказательство теоремы о базисе очень просто и занимает в работе две страницы. Затем Гильберт применяет свою теорему к решению проблемы конечности в теории инвариантов. Для этой цели он рассматривает в кольце многочленов от коэффициентов форм, т. е. в кольце R функций на пространстве E, дифференциальный оператор Ω, обладающий следующими свойствами.

1. Ω — линейное отображение кольца R в кольцо инвариантов R^{inv}.
2. Ω переводит однородные многочлены в однородные.
3. Если $f \in R$ –инвариант, то $\Omega(f) = f$.
4. Если $f, g \in R$ и g — инвариант, то $\Omega(f \cdot g) = \Omega(f)g$.

Гильберт применяет теорему о базисе к совокупности инвариантных однородных многочленов положительной степени. Если $i_1, \ldots, i_m$ — полученный таким путем базис, то для любого однородного инварианта $f \in R^{\mathrm{inv}}$ положительной степени имеем разложение $f = \alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_m i_m$, где $\alpha_i \in R$. Использование оператора Ω дает

$$f = \Omega(f) = \Omega(\alpha_1)i_1 + \cdots + \Omega(\alpha_m)i_m.$$

Кольцо R — это кольцо многочленов, и, следовательно, его элементы имеют обычную степень. В силу наших предположений

$$\deg \Omega(\alpha_i) < \deg f$$

и индукция приводит к требуемому результату.

В дальнейших статьях цикла Гильберт доказывает, также основываясь на теореме о базисе, теорему о нулях (Nullstellensatz) и вводит понятие характеристической функции «модуля» (полиномиального идеала в современной терминологии). Значение этих результатов для развития алгебраической геометрии и коммутативной алгебры в XX в. достаточно хорошо известно [8].

Мы сосредоточим здесь все внимание на той части работы Гильберта [4], которая имеет непосредственное отношение к теории инвариантов. В ней, помимо решения проблемы конечности, Гильберт доказывает для построенных им фундаментальных инвариантов то, что в теории инвариантов называли второй основной теоремой (в то время как первая — это конечность полной системы).

Точнее, Гильберт доказывает конечность числа соотношений между базисными или фундаментальными инвариантами. То, что инварианты полной системы могут не быть независимыми, было известно уже давно. Однако Гильберт не только решил этот вопрос, но и пошел существенно дальше, введя совершенно новую точку зрения на задачу о соотношениях. Именно он заметил, что соотношения между базисными инвариантами также не являются, вообще говоря, независимыми и между ними существуют соотношения более высокого порядка, названные им сизигиями (Syzygie). Итерируя этот процесс, Гильберт не только доказывает конечность числа соотношений на каждом шаге, что есть непосредственное следствие теоремы о базисе, но и показывает, что весь процесс обрывается через конечное число шагов (теорема о цепях сизигий). С современной точки зрения эта теорема содержит построение точной последовательности колец

$$0 \longleftarrow R^{\mathrm{inv}} \longleftarrow R^1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow R^t \longleftarrow 0,$$

в которой R^i — кольца многочленов и все идеалы $\operatorname{Ker} p_i$ (p_i — отображение кольца R^i в R^{i-1}) — конечно порождены [9].

Обратимся теперь к тем источникам, из которых выросли составные части доказательства Гильберта. На мой взгляд, их три:

1) инвариантные процессы теории инвариантов (Кэли);

2) теория целых алгебраических величин (Кронекер);

3) теория множеств (Кантор).

Под инвариантными процессами здесь понимаются способы сопоставления произвольной функции $f \in R$ на пространстве E некоторой инвариантной функции. Такой процесс впервые появился у Кэли. Он обладал свойствами 1 – 4 оператора Ω, необходимыми для доказательства Гильберта. Однако Гильберт независимо придумал аналогичную конструкцию для инвариантов бинарных форм еще в 1884 г. в своей диссертации [1, Bd. II, № 1]. В ней он рассматривает однородные функции коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ бинарной формы

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

и применяет к ним дифференциальные операторы

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots$$

и

$$\Delta = na_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2)a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots$$

Затем вводит оператор

$$[\quad] = 1 - \frac{\Delta D}{1!\,2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!\,3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!\,4!} + \ldots$$

и доказывает, что для любой функции $f \in R$ функция $[f]$ является инвариантом (свойство 1). Свойства 3 и 4 следуют из того факта, что для инвариантов f бинарных форм имеет место дифференциальное уравнение $Df = 0$, которое их на самом деле характеризует. Составление разного рода дифференциальных уравнений для инвариантов было одним из излюбленных занятий специалистов (ср. [7]). Таким образом, оператор типа Ω был известен Гильберту задолго до его обращения к проблеме конечности. Возможно, что свойства оператора $[\quad]$ подсказали ему желательность построения для инвариантов разложения того типа, которое встречается в теореме о базисе. Действительно, если бы оператор $[\quad]$ или Ω обладал более сильным свойством

$$\Omega(f \cdot g) = \Omega(f)\Omega(g),$$

то теорема конечности следовала бы из конечности числа образующих кольца многочленов. Это, однако, не так, и Гильберту пришлось искать более тонкие соображения.

Несомненно, что существенное влияние на эти поиски оказали исследования Кронекера по теории полей алгебраических величин (чисел и функций). Эти исследования, начатые Кронекером еще в 50-х годах, были им наконец опубликованы в 1882 г. [8]. В § 6 этой работы он доказывает теорему о существовании конечного базиса введенных им целых величин поля. Хотя эта теорема относится к несколько иному классу объектов, чем теорема Гильберта, она формулируется дословно также. Интересно, что в этом же томе журнала Крелля, наряду со статьей Кронекера, появилась работа Дедекинда и Вебера на аналогичную тему. Соперничество Кронекера и Дедекинда в этой области алгебры хорошо известно. Заметим, что в то время, как Дедекинд и Вебер ограничились полями функций от одной переменной, Кронекер рассматривает более общий случай алгебраических функций от любого числа переменных, что, конечно, было существенно для задачи, над которой работал Гильберт. Пожалуй, наиболее явным подтверждением связи идей Кронекера с работой Гильберта служит текст его 14-й проблемы, в которой предлагается обобщение проблемы конечности теории инвариантов как раз в связи с понятием целой функции (это обобщение включает в себя также упомянутую выше теорему конечности Кронекера) [1, Bd III, № 17; 3]. О значении методов Кронекера для дальнейших исследований Гильберта по теории инвариантов мы еще будем говорить.

Вернемся, однако, к дифференциальным операторам Ω. Операторы Кэли, использованные Гильбертом, имели следующий вид. Пусть $F(f)$ — функция формы f от n переменных и $a \in \mathrm{Gl}(n)$. Положим тогда

$$\Omega_a = \sum (\pm) \frac{\partial^n}{\partial a_{1i_1} \dots \partial a_{ni_n}}, \quad a = (a_{ij}),$$

где знак находится так же, как в определителе, и введем

$$\Omega(F) = \Omega_a^p(\det(a)^q F(f^a)).$$

Рассматривая элементы матрицы как независимые переменные, видим, что при подходящих p и q они не будут входить в выражение для $\Omega(F)$. Оказывается, что в этом случае $\Omega(F)$ — инвариант. Нам важно сейчас лишь то, что выражение для оператора Ω содержит дифференцирование по параметрам, задающим элементы группы $\mathrm{Gl}(n)$. В конце своей работы [4] Гильберт обсуждает возможность перенесения его доказательства на случай произвольной подгруппы в $\mathrm{Gl}(n)$. Он связывает изучение инвариантов произвольных подгрупп группы $\mathrm{Gl}(n)$ с геометрическими исследованиями в духе Клейна и Ли и замечает, что для применения описанных выше конструкций нужно, чтобы элементы группы зависели от конечного числа параметров и чтобы по этим параметрам можно было дифференцировать (т. е., как бы мы теперь сказали, эта группа должна быть группой Ли). Не здесь ли начались размышления Гильберта, приведшие его впоследствии к 5-й проблеме? Сам Гильберт приводит в своей работе два примера групп, к которым применимы его рассуждения: ортогональная группа O(4) и группа проективных преобразований трехмерного пространства, переводящих в себя некоторую кривую третьей степени. Связь этого круга идей с теорией групп Ли несомненна (публикация основополагающей книги Ли и Энгеля началась как раз в 1888 г.). Так, дифференциальные уравнения для инвариантов легко интерпретируются в терминах операторов из алгебры Ли, и, более того, эти уравнения послужили одним из исходных пунктов при возникновении теории групп Ли [7].

Интересно дальнейшее развитие этой идеи Гильберта. Новый шаг в этом направлении был сделан в 1897 г. Гурвицом [9]. Он ввел инвариантный процесс совершенно иного рода, но с теми же свойствами. Гурвиц исходил из того факта, что для конечной группы G инвариантный процесс всегда существует. Именно, если задано линейное представление группы G в пространстве E, то G действует на функции f на этом пространстве (f переходит в $f^g = f(g(x))$) и можно положить

$$\Omega(f) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} f^g,$$

где N — число элементов в группе. Свойства 1–4 немедленно проверяются. Гурвиц показывает, что эта конструкция распространяется на ортогональную группу $\mathrm{O}(n)$, если суммирование заменить интегрированием по группе, инвариантным относительно сдвигов. Он вводит явным образом на $\mathrm{O}(n)$ инвариантную меру и доказывает сходимость интеграла, пользуясь, по существу, лишь компактностью этой группы. Применяя свою операцию усреднения и повторяя затем рассуждения Гильберта, Гурвиц получает теорему конечности для инвариантов ортогональной группы [10]. Интересно отметить, что в работе Гильберта [4] нет никаких упоминаний об операции усреднения по конечной группе, хотя ее использование в то время было достаточно распространенным. Так, незадолго до этого операция усреднения была с блеском использована Пуанкаре в применении к бесконечным дискретным группам для построения автоморфных форм (ряды Пуанкаре). Позднее она встречается и у самого Гильберта (в его *Zahlbericht*'е при доказательстве теоремы 90) [11].

Через два года после работы Гурвица Маурер анонсирует решение проблемы конечности для любой группы Ли в $\mathrm{Gl}(n)$ (подробное изложение в 1903 г. [10]). Впоследствии эта работа была признана ошибочной, однако в своем парижском докладе Гильберт цитирует ее как верную (это место оставлено без изменений и в тексте доклада, помещенном в собрании сочинений [1]). Таким образом, в отличие от распространенного мнения, Гильберт ставит в своей 14-й проблеме не вопрос о конечности базиса инвариантов для произвольных подгрупп, а некоторое его обобщение, о котором мы уже упоминали [12].

Появление интегральных методов в теории инвариантов и особенно применение их И. Шуром и Г. Вейлем к теории представлений классических групп Ли (так называемый «унитарный трюк»), построение меры Хаара на компактных группах — все это на долгое время отодвинуло на второй план роль инвариантных дифференциальных процессов. Со временем появляется, однако, тенденция к более алгебраическому подходу к теории инвариантов и сильно связанной с ней теории представлений. Дело в том, что, несмотря на простоту и естественность, интегральные методы годятся лишь для топологических групп. В 1935 г. Казимир и Ван дер Варден дают чисто алгебраическое доказательство основных результатов теории представлений, основанное на использовании дифференциального оператора типа Ω (оператора Казимира) [13]. В дальнейшем этот подход был положен в основу двух теорий, интенсивно развивающихся начиная с 40-х годов нашего века: теории алгебраических групп и теории когомологий алгебр Ли. Именно в последней и вообще в гомологической алгебре тема инвариантных процессов находит свое естественное завершение [14].

В рамках программы, намеченной в 14-й проблеме Гильберта, развитие последних лет принесло такой неожиданный результат, как пример Нагата (1958) группы Ли, для которой не имеет место теорема конечности для кольца инвариантов. Нагата получил также весьма общее алгебраическое доказательство теоремы конечности для полупростых групп Ли, класса групп, естественным образом обобщающего группы, изученные Гильбертом [15]. 14-я проблема не может, однако, считаться окончательно решенной, пока не выяснено, для каких в точности групп имеет место теорема конечности.

Вернемся теперь к событиям, связанным непосредственно с появлением работы Гильберта [4]. Значительная часть математиков того времени считала, что доказательства существования должны быть эффективными (конструктивными), т. е. должны содержать хотя бы принципиальную возможность построить за конечное число шагов объект, существование которого утверждается, причем требуемое число шагов должно быть вычислимо априори. Наиболее последовательным выразителем этих взглядов был Кронекер. Характерный пример — его реакция на теорему Линдемана о трансцендентности π: «Зачем заниматься подобными вещами? Ведь иррациональные числа не существуют!». Специалисты по теории инвариантов придерживались близкой точки зрения, хотя и в менее декларативной форме. Впечатление, которое произвела на них работа Гильберта, наиболее ярко выразилось в известных словах Гордана: «это — не математика, это — теология». К чести 50-летнего Гордана надо сказать, что он вскоре понял преимущества «теологии» и сам придумал некоторые упрощения доказательства Гильберта. С сомнением отнесся к работе Линдеман. Удивительнее, пожалуй, что старик Кэли признал, что Гильберт «решил великую проблему» (этому предшествовала переписка, в которой Гильберт объяснил некоторые детали своей работы). Среди тех, кто восторженно принял открытие Гильберта, был Клейн. С этого момента он начинает добиваться приглашения Гильберта в Гёттинген.

Среди этого диссонанса голосов нет одного, который был бы нам особенно интересен. Я имею в виду Георга Кантора, взгляды которого на цели и методы математики столь кардинально расходились со взглядами Кронекера. Работы Кантора появляются как раз во время становления Гильберта как математика (основной труд по теории множеств *Grundlagen einer allgemeinen Mannifaltigkeitslehre* выходит в 1884 г.). Впечатление, которое они производили на молодого Гильберта, можно понять из некролога Минковскому, написанного Гильбертом в 1909 г. [1, Bd. III, № 19]. Гильберт говорит в нем о широте взглядов Минковского, который, учась у Кронекера в Берлине, сумел воспринять и идеи Кантора.

Вернувшись в Кёнигсберг, Минковский с энтузиазмом пропагандирует новое учение. По словам Гильберта, он «первый математик нашего поколения, понявший значение теории Кантора». Все это, без сомнения, относится и к самому Гильберту.

В одной из своих работ по основаниям математики, отвечая на интуиционистскую критику теории множеств, он писал: «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор».

Хотя из работ Гильберта интересующего нас времени к теории множеств имеет непосредственное отношение лишь заметка 1891 г. о кривых Пеано и хотя работы по теории инвариантов формально не связаны ни с теоретико-множественными рассуждениями, ни с какими-либо конструкциями Кантора, тем не менее, думается, что дух теории Кантора сыграл существенную роль в описанных достижениях Гильберта. Более точное выяснение этого вопроса представляет несомненный интерес.

Выше уже говорилось о влиянии на математику XX в., которое оказала работа [4]. Приходится поражаться тому спектру математических дисциплин, возникновение или развитие которых связано с этим исследованием: алгебраическая геометрия, коммутативная алгебра, теория представлений, гомологическая алгебра (теорема о цепях сизигий — первая теорема этой науки).

Иная ситуация сложилась со второй основной работой Гильберта по теории инвариантов — *Über vollen Invariantensysteme*, появившейся в 1893 г. Как писал Гильберт, цель работы состояла в том, чтобы связать теорию инвариантов с теорией алгебраических функций многих переменных и на этой основе найти конструктивный подход к построению полной системы инвариантов (возможно, что тут сыграли свою роль критические замечания по поводу предыдущей работы, но, разумеется, Гильберт сам понимал желательность явных конструкций в теории инвариантов). По мнению Гильберта, поля рациональных инвариантов имеют столь же важное значение для общей теории полей алгебраических функций, как круговые поля для теории алгебраических чисел. Гильберт свободно пользуется в своей работе терминологией и конструкциями Кронекера из его цитированной работы 1882 г. [8], причем здесь уже играет важную роль конструктивный характер рассуждений последнего.

Основной задачей, которой занимается Гильберт, является построение такого набора инвариантов $f_1, \ldots, f_\mu$, что выполняется следующее свойство: если форма P такова, что существует такой *однородный непостоянный* инвариант f, что $f(P) \neq 0$, то существует такая функция f_i, что $f_i(P) \neq 0$.

Полная система инвариантов дает пример такого набора, однако обратное неверно, и Гильберт доказывает, что каждый инвариант $f \in R$ является целым относительно элементов $f_1, \ldots, f_\mu$, т. е. удовлетворяет уравнению вида

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

где коэффициенты a_i принадлежат подкольцу, порожденному инвариантами f_i. Этот факт непосредственно следует из теоремы о нулях и последующего применения оператора Ω. Эффективная конструкция базиса целых величин поля функций (в данном случае это базис целого замыкания подкольца, порожденного элементами $f_1, \dots, f_\mu$), которую, как мы уже отмечали, дал Кронекер в [8], показывает, что для эффективного построения полной системы инвариантов достаточно знать в явном виде инварианты $f_1, \dots, f_\mu$. Более того, поскольку символический метод позволяет находить инварианты заданной степени, то достаточно получить оценку сверху для степеней многочленов $f_1, \dots, f_\mu$. В связи с этим особое значение приобретают те формы P, в которых все инварианты обращаются в нуль. Гильберт называет их нуль-формами и получает глубокий критерий, позволяющий находить все нуль-формы.

Так, бинарная форма $P(x, y)$ степени n будет нуль-формой, если она имеет вид

$$P(x, y) = Q(x, y)(ax + by)^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}.$$

Гильберт находит также в явном виде нуль-формы для случая тернарных форм небольших степеней. Ясно, что нуль-формы образуют в пространстве E (и это верно в общей ситуации) алгебраическое подмногообразие меньшего, чем E, числа измерений, т. е. являются в естественном смысле слова «исключительными» [16].

Применение нуль-форм к задаче оценки степеней многочленов $f_1, \dots, f_\mu$ основано на следующих соображениях.

Если форма P_0 не является нуль-формой, то Гильберт показывает, что можно построить такой многочлен f, что $f(P_0) \neq$ и выполняется соотношение

$$f(P_0^g) = f(P_0), \quad \text{для всех} \quad g \in \mathrm{Sl}(n).$$

Множество точек пространства E, имеющих вид P_0^g, где P_0 — фиксированная форма, а g пробегает группу $\mathrm{Sl}(n)$, называется *орбитой* точки P_0 относительно группы $\mathrm{Sl}(n)$. Оно образует в E алгебраическое подмногообразие, вообще говоря, незамкнутое (см. пример 7). Одна из форм упомянутого выше критерия Гильберта гласит, что P_0 — нуль-форма в том и только в том случае, когда замыкание орбиты формы P_0 содержит точку 0. Из этого следует, конечно, существование многочлена с требуемыми свойствами, но для Гильберта важно знать оценку сверху для степени f. Это приводит его к довольно тонким рассуждениям. Их современная обработка содержится в лекциях Дьедонне (см. [11]) [17]. Затем к многочлену f применяется оператор Ω и получается инвариант $\Omega(f)$, причем

$$\Omega(f)(P_0) = f(P_0) \neq 0.$$

Это вытекает из одного дополнительного свойства оператора Ω, легко усматриваемого из его явного вида. Именно,

5. Если функция f удовлетворяет соотношению $f(P_0^g) = f(P_0)$ для всех $g \in \mathrm{Sl}(n)$, то $\Omega(f)(P_0) = f(P_0)$ (свойство локальности).

Покажем теперь, как, используя эту конструкцию, найти функции $f_1, \ldots, f_\mu$. Возьмем какую-нибудь не нуль-форму P_0 и соответствующую инвариантную функцию, построенную выше, выберем в качестве f_1. Для любой нуль-формы Q имеем $f_1(Q) = 0$. Может быть, найдется не нуль-форма P_1, для которой $f_1(P_1) = 0$. Применяя к P_1 приведенные выше построения, получим функцию f_2, и т. д. Процесс оборвется, когда мы построим таким образом функции $f_1, \ldots, f_\mu$, задающие многообразие нуль-форм. Поскольку имеется оценка степеней многочленов f_i, это завершает нахождение полной системы инвариантов. Самый сложный шаг, который мы опустили, Гильберт проводит лишь для случая тернарных форм и показывает, что для них степени инвариантов полной системы оцениваются числом $27(3k + 1)^8$, где k — степень форм из пространства E. В своих лекциях Дьедонне переизложил конструкцию Гильберта и получил аналогичную оценку в общем случае. Работа Гильберта [5] заканчивается очень характерными для его облика словами: «Таким образом, я полагаю, нами достигнута наиболее важная общая цель теории функциональных полей, образованных инвариантами». Одновременно он пишет Минковскому: «С публикацией работы в *Mathematische Annalen* я окончательно оставляю область инвариантов и перехожу теперь к теории чисел».

Судьба этой работы Гильберта составляет разительный контраст с судьбой его первой работы, о которой мы говорили. Вплоть до 60-х годов нашего века о ней в лучшем случае упоминали в обзорах и учебниках (даже Г. Вейль в своем очерке деятельности Гильберта [12], написанном в 1944 г., излагая содержание второй работы Гильберта, ни слова не говорит о нуль-формах). Истинное значение этого понятия и результата Гильберта стал ясным в 1961 г. с появлением работы, а затем и книги *Geometric Invariant Theory* американского математика Давида Мамфорда [17]. Мамфорд использовал идеи второй работы Гильберта в качестве технического средства для решения ряда задач алгебраической геометрии, самой важной из которых была задача построения модулей алгебраических кривых [18].

Краткая история последней такова [19]. В 1857 г. в большой работе *Theorie der Abelschen Funktionen*, появившейся в журнале Крелля, Риман изложил совершенно новый подход к классификации алгебраических кривых. Он сопоставил каждой такой кривой поле рациональных функций на ней, являющееся полем алгебраических функций от одной переменной, и назвал две кривые бирационально эквивалентными, если соответствующие поля изоморфны. Эта классификация носит, в отличие от проективной, внутренний характер и не зависит от погружения кривой в проективное пространство. Степень кривой уже не является инвариантом, и ее место занимает введенный Риманом род (Geschlecht). Основной результат о бирациональной классификации, полученный Риманом наглядными нестрогими рассуждениями, состоит в том, что кривые данного рода g имеют $3g - 3$ непрерывных (даже аналитических) инвариантов. Говорят также, что кривые рода g зависят от $3g - 3$ параметров, именуемых «модулями» (не следует путать с алгебраическим понятием модуля), или что множество кривых рода g параметризуется многообразием модулей, имеющим размерность $3g - 3$.

Точный смысл этим утверждениям был придан, по существу, лишь А. Гротендиком в конце 50-х годов нашего века. Это не мешало, однако, многочисленным алгебраическим геометрам заниматься подробным исследованием этого вопроса (и не только для кривых, но и для многообразий большей размерности). Здесь не место описывать их деятельность. Отметим лишь существенный для дальнейшего результат Макса Нётера. Он сопоставил каждой [20] алгебраической кривой X рода $g > 2$ некоторую кривую Y в $(g - 1)$-мерном проективном пространстве так, что бирациональная эквивалентность исходных кривых X совпадает с проективной эквивалентностью кривых Y (так называемая нормальная модель, см. [2]). Это позволило свести задачу Римана к некоторой задаче теории инвариантов.

Новая точка зрения на проблему модулей, выдвинутая Гротендиком, привела и к переосмысливанию результатов и задач теории инвариантов. Это было сделано Мамфордом в книге [13]. Опишем его точку зрения для рассмотренного выше случая форм (или их систем). Введенное нами пространство E форм P под действием группы $\mathrm{Gl}(n)$ (или ее подгрупп) разбивается на непересекающиеся подмножества, состоящие из форм, эквивалентных друг другу.

Как мы уже говорили, такие подмножества называются орбитами. Множество орбит — это множество классов эквивалентности форм относительно группы $\mathrm{Gl}(n)$. Согласно Мамфорду, основной задачей теории является выяснение того, когда на множестве орбит можно ввести «естественную» в некотором точном смысле структуру алгебраического многообразия (это новая постановка) и каким образом ее описать (этим, по сути дела, и занималась классическая теория инвариантов)? Оказывается, что с точки зрения этой задачи, некоторые орбиты являются «исключительными», и это как раз те орбиты, которые отвечают нуль-формам. Если их удалить, то на множестве оставшихся орбит вводится естественная структура алгебраического многообразия. Обобщив результаты работы Гильберта [5], Мамфорд доказал простой критерий, позволяющий вполне эффективным образом описывать множество подлежащих удалению исключительных орбит. В частности, применение этого критерия к проблеме модулей позволило установить, что нормальные модели

Нетера алгебраических кривых рода $g > 2$ не принадлежат к исключительным орбитам в пространстве систем форм, задающих кривые в проективном пространстве размерности $g-1$. На этом пути Мамфорд получил решение проблемы модулей алгебраических кривых, а также ряда аналогичных задач (модули абелевых многообразий, векторных расслоений и т. д.) [11; 13]. Совсем недавно в рамках этого направления было получено решение старой, восходящей еще к итальянцам, задачи о связности многообразия модулей.

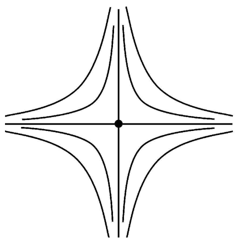
Отсылая за более подробным описанием теории Мамфорда к [11], мы ограничимся рассмотрением здесь одного весьма простого, но характерного примера. Пусть $E = k^2$ — плоскость над полем k с координатами x и y. Группа $G = \mathrm{Gl}(1) = \{\lambda \in k,\ \lambda \neq 0\}$ действует на E по формуле

$$P^g = (gx, g^{-1}y), \quad P = (x, y),\ g \in G.$$

При этом

$$R = k[x, y],\ R^{\mathrm{inv}} = k[xy].$$

Множество орбит устроено следующим образом:



1) орбиты вида $xy = c$, $c \neq 0$;

2) орбита $x = 0$, $y \neq 0$;

3) орбита $y = 0$, $x \neq 0$.

4) орбита, состоящая из точки $(0, 0)$.

Обозначим множество орбит через M. Тогда имеется отображение $\varphi : E \to M$, сопоставляющее каждой точке $P \in E$ ее орбиту. Мы хотим превратить M в алгебраическое многообразие. Естественно потребовать, чтобы отображение φ было не просто отображением множеств, но отображением алгебраических многообразий (регулярным отображением, см. [14, гл. 1]). Если $a \in M$, то слой отображения φ в точке a, т. е. $\varphi^{-1}(a)$, состоит из одной орбиты. Но в алгебраической геометрии известна теорема, согласно которой при регулярных отображениях размерности слоев могут лишь «подскакивать» при изменении точки a [14, с. 89]. В нашем случае (и вообще в теории инвариантов) выполняется противоположная ситуация: почти все орбиты имеют максимальную размерность (орбиты 1, 2 и 3 размерности 1) по сравнению с размерностями остальных орбит (орбита 4 размерности 0). Таким образом, для решения нашей задачи необходимо выбросить орбиту 4.

Далее, каждая инвариантная функция на E определяет функцию на множестве M, и естественно предположить, что если имеется инвариантная рациональная функция на E, то она должна определять рациональную функцию на многообразии M, и, более того, все рациональные функции на M получаются таким образом. Но в алгебраической геометрии доказывается, что для любых двух точек a и b некоторого многообразия существует рациональная функция f, определенная в этих точках и принимающая в них разные значения. Чтобы применить это в нашей ситуации, заметим, что инвариантные рациональные функции на E имеют вид $P(xy)/Q(xy)$, где P и Q — многочлены, и приведенное условие не выполняется для точек многообразия M, отвечающих орбитам 2 и 3.

Итак, хотя бы одну из этих орбит (скажем, 2) необходимо выбросить. Тогда на оставшемся множестве орбит можно ввести структуру алгебраического многообразия, точнее, это множество будет аффинной прямой (каждому $c \neq 0$ отвечает орбита 1, а $c = 0$ — орбита 3). Сравним полученное с теорией Гильберта—Мамфорда. «Нуль-формами» в нашем случае будут точки, принадлежащие орбитам 2, 3 и 4 (это следует из определения и приведенного выше описания кольца целых инвариантов). Таким образом, на основании этой теории можно ввести требуемую структуру на множестве орбит вида 1 (получится прямая с выколотой точкой). Та обстоятельство, что получаемая структура несколько меньше, чем есть на самом деле, также находит свое объяснение в теории Мамфорда, однако мы не можем здесь останавливаться на этом вопросе.

В заключение сделаем ряд общих замечаний. В 1893 г. на математическом съезде в Чикаго Клейн зачитал представленный Гильбертом доклад, в котором он дал такую оценку своей деятельности в теории инвариантов. Гильберт пишет о трех периодах в развитии любой математической теории: наивном, формальном и критическом [1, Bd. II, № 23]. Так, представителями наивного периода в теории инвариантов были, по его мнению, Кэли и Сильвестр, находившие удовольствие в вычислениях простых систем инвариантов и в их многочисленных применениях, например, к решению уравнений первых четырех степеней. Формальный период связан с созданием символического метода (Клебш, Гордан), а к критическому Гильберт причисляет свои работы. Одновременно Гильберт подчеркивает связь теории инвариантов, бывшей в его время чисто алгебраической теорией, с алгебраической геометрией, из недр которой она фактически вышла. Новейшее развитие полностью подтвердило эти слова Гильберта. Произошедший синтез теории инвариантов и алгебраической геометрии является еще одним подтверждением единства математики, в которое так верил Гильберт и которое он неустанно пропагандировал всю свою жизнь.

ПРИМЕЧАНИЯ

1) Автор не стремился к исчерпывающему изложению истории теории инвариантов, его целью было лишь обратить внимание на ряд сторон предмета, которые либо привлекали мало внимания, либо неверно

описывались. Так, несмотря на «социологические» выводы работы [15], нашу статью можно было бы озаглавить «Возрождение одной математической теории».

[2] Использованные здесь и далее биографические сведения о Гильберте заимствованы из книги К. Рид [16] и очерка О. Блюменталя [1; Bd. III].

[3] Насколько мне известно, сохранились лишь письма Минковского Гильберту. Недавно они были опубликованы. (*Minkowski H.* Briefe an David Hilbert. — Berlin: Springer-Verlag, 1973.)

[4] Математический факультет был в то время невелик. В одном письме Гильберт пишет: «11 лекторов и почти столько же студентов» [16, с. 28]. См. также [2].

[5] Дальнейшие, несколько стилизованные замечания дают лишь самый поверхностный эскиз общей картины теории. Подробного историко-математического описания теории инвариантов до сих пор не существует. К счастью, на рубеже веков было написано несколько весьма полных обзоров [17; 18; 19], позволяющих нынешнему историку не утонуть (или не сразу утонуть) в безбрежной литературе. Прекрасный обзор современного состояния теории инвариантов см. в работе *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные напрвления. — М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 55. С. 137–309.

[6] С алгебраической точки зрения коэффициенты формы образуют ковариантный тензор и дальнейшее обобщение задачи состоит в рассмотрении инвариантов произвольного числа ковариантных и контравариантных тензоров и в замене, наконец, пространства E произвольным рациональным представлением группы $\mathrm{Gl}(n)$ или ее подгруппы [11; 20]. Конечно, все это произошло позднее, хотя в неявном виде содержалось и в ранних исследованиях.

[7] Современное изложение см. в книге *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947, и в лекциях Дьедонне, переведенных в [11].

[8] См. *Бальдассари М.* Алгебраические многообразия. — М.: ИЛ, 1961. Гл. 5; и *Серр Ж.-П.* Локальная алгебра и теория кратностей // Математика. Сб. переводов. 1963. Т. 7, № 5.

[9] Это, пожалуй, первый пример резольвенты в смысле гомологической алгебры. Дальнейшую историю вопроса и современное состояние см. в книге: *Маклейн С.* Гомология. — М.: Мир, 1966. Гл. 7, § 6.

[10] Предварительно он доказывает эту теорему для инвариантов конечных групп, подчеркивая, что операторы $\Omega(f)$ заменяют в этом случае дифференциальные операторы, использованные Гильбертом.

11) Начиная с середины 90-х годов XIX века появляются работы, применяющие операцию усреднения к теории представлений конечных групп. Именно в это время доказывается существование инвариантного скалярного произведения и теорема о полной приводимости (см. работы Машке и Мура (E. H. Moore) в 50-м томе *Mathemathische Annalen* за 1898 г. и литературу, указанную в работе Мура). Интересно, что в это же время близкая операция усреднения была независимо введена в совершенно иной области — гидродинамике (работа Рейнольдса по теории турбулентности 1894 г.).

Общие свойства подобных операций (так называемые операторы Рейнольдса) интенсивно изучались впоследствии в самых разных областях математики, в частности, в функциональном анализе (см. книгу: *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. — М.: Мир, 1970; и обзоры Биркгофа и Рота, цитированные на с. 96 этой книги).

12) На современном языке гипотеза Гильберта изложена у Нагата (Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 766–772).

13) Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. (Семинар Софус Ли.) — М.: ИЛ, 1962.

14) Вариацией на эту тему является также упомянутая выше теорема 90 Гильберта — все это звучит нынче единым образом, как обращение в нуль некоторых групп когомологий.

15) По поводу исследований Нагата и его учеников см. комментарий к 14-й проблеме в [3], гл. 3 лекций Дьедонне в [11] и список литературы в [11].

16) Это подмногообразие задается уравнениями $f_1 = 0, \ldots, f_\mu = 0$, и задача состоит в том, чтобы оценить его степень.

17) Построения Дьедонне содержат пробел, заполненный позднее в работах В. Л. Попова. См. его комментарии к статьям по теории инвариантов в издании трудов Д. Гильберта на русском языке [1].

Перевод части книги Мамфорда, посвященной собственно теории инвариантов, содержится в [11].

18) Поразительно, что через год после появления книги Мамфорда была опубликована историко-математическая работа [15], в которой второй работе Гильберта [5] уделялась ровно одна строчка и, более того, утверждалось, что ныне теория инвариантов — полностью мертвая наука. Это неверно даже в отношении чисто вычислительных методов догильбертовской теории (см., например, работы Игузы и, в частности, Amer. J. Math. 1967. V. 89. P. 817–855). Мы не упоминаем в нашей статье также и о внематематических применениях теории инвариантов (см. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. — М.: Мир, 1974). Впрочем, подобных ошибок не избегали и весьма проницательные личности (ср. замечания

Вигнера о теории эллиптических функций на с. 178 его книги *Этюды о симметрии*. — М.: Мир, 1971).

[19] См. также [2] и исторический очерк в [14].

[20] Точнее, каждой негиперэллиптической кривой. Гиперэллиптические кривые легко описываются из других соображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen. Bd. I–III. — Berlin: Springer, 1932–1935. См. также *Гильберт Д.* Избранные труды. — М.: Факториал, 1998. Т. I, II.

2. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1. — М.: Наука, 1989.

3. Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969.

4. *Hilbert D.* Uber die Theorie der algebraischen Formen // Math. Ann. 1890. Bd. 36. S. 473–534.

5. *Hilbert D.* Über die vollen Invariantensysteme // Math. Ann. 1893. Bd. 42. S. 313–373.

6. *Schur I.* Vorlesungen über Invariantentheorie. — Berlin: Springer-Verlag, 1968.

7. *Bourbaki N.* Groupes et algebres de Lie. Ch. 2 et 3. — Paris, 1972. (Note historique.) Имеется перевод: *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 1–3. — М.: Мир, 1976.

8. *Kronecker L.* Grundzuge der arithmetischen Theorie der algebraischen Grossen // Crelle J. 1882. V. 92. P. 1–122.

9. *Hurwitz A.* Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. 1897. S. 71–90.

10. *Maurer L.* Über die Endlichkeit der Invariantensysteme // Math. Ann. 1903. Bd. 57. S. 265–313.

11. *Дьедонне Ж., Мамфорд Д., Керрол Дж.* Геометрическая теория инвариантов. — М.: Мир, 1974.

12. *Weyl H.* David Hilbert and his mathematical work // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 612–654. (Имеется перевод: *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математические работы // В кн.: *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. II. — М.: Факториал, 1998.)

13. *Mumford D.* Geometric Invariant theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1965.

14. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.

15. *Fischer Ch. S.* The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge // Arch. Hist. Exact Sci. 1966. V. 3. P. 137–159.

16. *Reid C.* Hilbert. — Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Имеется перевод: *Рид К.* Гильберт. — М.: Наука, 1977.)

17. *Meyer W. F.* Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1892. Bd. 1.

18. *Meyer W. F.* Invariantentheorie // In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I. B2. 1892.

19. *Wietzenböck R.* Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten // In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. III. D10. 1921.

20. *Wietzenböck R.* Invariantentheorie. — Groningen, 1923.

РАЗМЫШЛЕНИЯ НАД ТЕОРЕМОЙ ГЁДЕЛЯ [1]

Памяти Андрея Ивановича Лапина

Теорема, о которой пойдет здесь речь, была доказана молодым австрийским математиком Куртом Гёделем в 1931 году [2]. Вполне справедливо она считается самым важным достижением математической логики в XX веке. На самом деле есть две теоремы: теорема Гёделя о неполноте, о том, что в каждой, достаточно богатой формальной системе существует истинные, но невыводимые, недоказуемые утверждения; и вторая теорема о том, что в таких системах их непротиворечивость нельзя доказать теми методами, которые в них формализуются. Они, по существу, положили конец тому течению в математической логике и основаниях математики, которое известно как формализм и связано с именем выдающегося немецкого математика Давида Гильберта.

Как известно, в конце XIX века в вопросах оснований математики были непрекращавшиеся споры в связи с появлением так называемых парадоксов, возникающих при не слишком аккуратном обращении с бесконечными множествами. Появилось несколько школ, часть которых предлагала вообще отказаться от понятия бесконечного. Пожалуй, наиболее известным и развитым был формализм Гильберта, который предложил свою знаменитую теорию доказательств. Смысл этой теории состоял в том, что все утверждения какой-либо математической теории можно записать в виде формул. Формулы — это конечные наборы значков, которые пишутся на бумаге. Тот факт, что мы можем вывести одно утверждение из другого, есть просто некая работа с этими формулами, которая не имеет никакого отношения к их смыслу. Применяя аксиоматический метод, мы имеем набор формул, называемых аксиомами, из которых все теоремы теории, т. е. истинные формулы, получаются с помощью правил вывода. Гильберт ожидал, что множество *истинных* формул совпадает с множеством *выводимых* и что формальной работой со знаками можно показать, что никогда не получится противоречивое высказывание. При этом методы работы со знаками должны быть достаточно надежными, чтобы не возникало сомнений в их непротиворечивости.

Сначала Гильберт построил свою аксиоматику геометрии, и успех на этом пути давал ему уверенность, что его теория доказательств окажется успешной и для арифметики, т. е. аксиоматической теории натуральных чисел. В то время было ясно, что значительную часть математики можно свести к арифметике. Он долго двигался по этому пути, еще в 1928-м году он писал, что: «Я преследую важную цель: именно, я хотел бы *окончательно разделаться* с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание $< \cdots >$ в строго выводимую формулу» [1]. Это было написано всего лишь за три года до появления теоремы Гёделя. Впрочем, и после появления работы Гёделя, которая была почти сразу признана математическим сообществом, Гильберт считал (например, в предисловии 1934-го года к первому тому своей книги *Grundlagen der Mathematik*, написанной вместе с Бернайсом), что «думать будто из недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением».

Такое отношение Гильберта можно понять, в чисто человеческом плане оно довольно обычно. Интересно, однако, посмотреть, как другие математики и вообще люди, интересующиеся вопросами оснований математики, относились к теореме Гёделя. Я приведу несколько очень разнородных высказываний для того, чтобы показать некоторую общую тенденцию.

Американский математик Поль Коэн, решивший в 1963 г. первую проблему Гильберта, вопрос о независимости континуум-гипотезы, в своем обзоре оснований теории множеств писал, что программа Гильберта ни при каких условиях не может быть восстановлена, добавляя при этом такую знаменательную фразу: «Жизнь была бы гораздо *приятнее*, не будь гильбертовская программа потрясена открытиями Гёделя». Вот высказывание логика Алана Тьюринга из его известной книги *Может ли машина мыслить?* Признавая, что теорема Гёделя говорит о некоторой ограниченности математического языка, понимаемого как логический язык, он критически относится к утверждению, что математическое мышление существенно у́же мышления человека. Он задает такой вопрос: «А кто, где и когда показал, что собственно мышление человека является неограниченным в том смысле, в каком эту ограниченность демонстрирует теорема Гёделя для математического мышления». Еще одно высказывание, уже человека, стоящего вне математической логики, известного физика Е. Л. Фейнберга в его книге *Кибернетика, логика и искусство*: «Это великая теорема, конечно, выдающееся достижение математической логики», но дальше добавляется: «надежда на доведение математической логики до такого *совершенства*, при котором она сумела бы охватить математику единой формальной системой, оказалась опровергнутой».

Во всех этих высказываниях, к которым можно было бы добавить огромное количество похожих [[3]], сквозит одна и та же простая мысль: «Да, конечно, это достижение, да, это ставит препятствия на пути фор-

[1] Источники этой и последующих цитат см. в прим. 2. Курсив во всех цитатах введения и прим. 3 принадлежит автору.

мализации математики, но как жаль, что этого не получилось!» Иными словами, представление о том, что логический формализм есть некий идеал, что это то, к чему нужно стремиться, некоторое, может быть, даже бессознательное представление такого рода, сидящее в головах очень многих мыслителей и исследователей, осталось совершенно непоколебленным теоремой Гёделя. Иными словами, теорема Гёделя принимается рассудком, но, можно сказать, чисто эмоционально она отвергается. И это является, безусловно, чрезвычайно интересным обстоятельством. Поэтому разумно посмотреть на ситуацию с теоремой Гёделя с более общей точки зрения. Не только с точки зрения теоремы, находящейся внутри математической логики или оснований математики, а как факт, который нам что-то говорит о мышлении математика, и даже не только математика, а человека вообще, о его творческом процессе. Дело в том, что математическая деятельность является весьма достойным и почтенным, но все же фрагментом деятельности, в том числе и творческой, человека в целом.

Если же мы подойдем к этому вопросу с такой более широкой точки зрения, то вопрос о роли логики тотчас же будет включен в вопрос о соотношении *логического* и *интуитивного* в познании. Причем, говоря здесь о познании, нужно рассматривать его в максимально широкой форме, как феномена, сопровождающего вообще любую деятельность человека. Вопрос о познании как о форме открытия чего-то нового много обсуждался в психологии. Известно, например, описание математического творчества, данное Пуанкаре. Одним из наиболее фундаментальных, внелогических компонентов открытия является так называемая вспышка озарения. Когда человек долго пытается решить какую-то задачу и сначала у него ничего не получается, затем неожиданно и мгновенно приходит решение. После этого ситуация становится ясной, и возврат к предыдущему блужданию в потемках оказывается невозможным. Примеры этого хорошо известны, и я не буду их здесь повторять. Хочу только подчеркнуть, что это свойство, наличие спонтанного перехода к чему-то новому, вовсе не является приметой, чертой каких-то высших форм человеческого познания и деятельности. Оно присутствует на всех уровнях, в том числе и на самых низших, физиологических уровнях.

Классический пример, известный всем: обучение двигательным навыкам, например езде на велосипеде. Опять попытки, опять ничего не выходит, совершенно непонятно, что и как нужно делать и вдруг в какой-то момент задача решается. Непонятно как, но быстро, спонтанно, и после этого человек едет, при этом он не может вернуться к тому состоянию, когда он не умел ездить. Он не может сказать: «теперь я знаю, как ехать». Что-то появилось, и он просто едет. Наличие таких фактов в жизни человека, в его психологии пробуждает мысль, не дает ли теорема Гёделя возможность что-то сказать об этой более широкой задаче, философской или психологической. Здесь, может быть, стоит обратиться к литературе. Привлекательность логического формального мышления существует для многих, но далеко не для всех. У Льва Толстого в *Войне и мире* имеется описание семейной жизни Наташи Ростовой и Пьера Безухова. Вот как он ее описывает:

> Наташа, оставшись с мужем одна, тоже разговаривала так, как только разговаривают жена с мужем, то есть с необыкновенной ясностью и быстротой понимая и сообщая мысли друг друга, *путем, противным всем правилам логики, без посредства суждений, умозаключений и выводов*, а совершенно особенным способом. Наташа до такой степени привыкла говорить с мужем этим способом, что вернейшим признаком того, что что-нибудь было неладно между нею и мужем, для нее служил *логический* ход мысли Пьера. Когда он начинал доказывать, говорить рассудительно и спокойно, и когда она, увлекаясь его примером, начинала делать то же, она знала, что это непременно приведет к ссоре.

Конечно, можно сказать, что подобное отношение к логическому мышлению есть некая особенность взглядов Льва Николаевича Толстого и это не имеет никакого отношения к тому, что нас интересует. На самом деле, имеет — подобные примеры можно привести из обычной практики математической жизни. Сколько раз математик, рассказывая трудную работу на семинаре и не очень понимая в чем ее идея, аккуратно пересказывает логический ход доказательства. Обычно слушающие внимательно следят за всеми выкладками и в конце концов убеждаются, что да, действительно, все верно. При этом часто остается неприятное чувство, что, по существу, работа не понята и осталось неясным, а что же здесь собственно говоря сделано, в чем суть доказательства. Другими словами, понимание смысла работы дается не чисто формальными, логическими средствами, а каким-то интуитивным схватыванием.

Подводя итог этому вступлению, я резюмирую, что хотелось бы мне объяснить в этом докладе, рассматривая теорему Гёделя. Вернемся к высказыванию Коэна, что жизнь была бы приятнее, если бы теоремы Гёделя не было. Я думаю, что правильная антитеза этому высказыванию должна быть такой: «*если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы*». Теорема Гёделя показывает не просто ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном, глубинном свойстве мышления и, может быть, жизни вообще. Если мы что-то хотим понять в мышлении человека, то это возможно не вопреки теореме Гёделя, а благодаря ей.

Пытаясь развить это утверждение, мы сразу наталкиваемся на ту трудность, что оно носит чисто негативный характер. Мы не можем иметь полную систему, мы не можем доказать ее непротиворечивость так, как нам хотелось бы. И здесь до́лжно обратиться к истории науки и вспомнить, что в этой истории встречались и чисто негативные утверждения и не всегда их роль была отрицательной.

Утверждения типа запрета играли огромную позитивную роль, которая приводила к большому количеству весьма содержательных открытий. Достаточно привести хрестоматийный пример: закон сохранения энергии, который возник из неудачных попыток создать вечный двигатель, т. е. из чисто негативного утверждения, и это привело к одному из фундаментальных принципов современной физики. Также, чисто негативные утверждения лежат в основе теории относительности (невозможность абсолютной одновременности событий) и квантовой механики (невозможность совместного измерения координаты и скорости). Пожалуй, наличие такого утверждения как исходного принципа при появлении новой физической теории является скорее правилом, чем исключением («принцип невозможности» Э. Уиттекера [4]).

Поэтому подобное отношение к теореме Гёделя, что она есть как бы тормоз на пути развития науки, является совершенно неверным. При разумном отношении к теореме Гёделя она должна быть не тормозом, а содержательным стимулом дальнейшего развития. Чтобы понять, как это может произойти, давайте обратимся к тому, каким способом Гёдель доказал свою теорему.

Доказательство

Как же Гёдель ее доказал? Формальная система, которая описывает арифметику целых чисел, состоит прежде всего из алфавита, куда входят логические и математические символы, которые используются в данной теории. Затем, имеются аксиомы, точнее, прежде всего, существуют формулы, т. е. правила построения из знаков алфавита некоторых выражений, которые называются *формулами*. Они необязательно являются истинными утверждениями теории, это любые наборы знаков, которые мы признаем грамматически правильными. Часть таких формул называется *аксиомами*. По определению, мы предполагаем, что они справедливы. И наконец, есть правила вывода, с помощью которых из одних формул получаются новые. Любые формулы, которые с помощью правил вывода следуют из аксиом, называются *доказуемыми* или теоремами. Все это вместе и называется *формальной системой*.

Гёдель доказал, что если формальная система является достаточно богатой, например такой как аксиоматика Пеано теории целых чисел и, если она непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми.

Первый шаг в конструкции Гёделя состоит в том, что рассматриваются все формулы теории, которые имеют вид $A(x)$, т. е. с одной свободной переменной. Например,

$$x^2 = 1.$$

Такие формулы можно перенумеровать, т. е. каждой из них по четко сформулированному правилу сопоставить некоторое натуральное число n. Это сопоставление называется *нумерацией Гёделя*.

Следующий шаг состоит в том, что мы можем в такой формуле вместо переменной x подставить любое натуральное число n. Вот мы и подставим в качестве x номер n формулы $A(x)$. Тогда мы получим формулу $A(n)$. Это второй шаг.

Третий шаг состоит в том, что рассматривается следующее утверждение о формулах нашей системы

$$B(n) = \{\text{формула } A(n) \text{ не доказуема}\}.$$

Далее, конструкция Гёделя такова, что это утверждение носит арифметический характер, т. е. является некоторым (верным или неверным, в зависимости от n) утверждением теории чисел. Его можно написать в явном виде и затем представить внутри нашей формальной системы некоторой формулой $B(x)$ с одной переменной x.

Как только подобное представление сделано, очень легко доказать [5], что, если $B(x)$ имеет номер n_0 по нумерации Гёделя, то формула $B(n_0)$ является истинной, но не доказуемой, т. е. наша система неполна. Это получается, если только предположить, что система непротиворечива. Вот, очень схематично, суть доказательства Гёделя.

Какие же основные черты доказательства теоремы Гёделя будут нам наиболее интересны? Черты следующие: я пойду в обратном порядке по сравнению с тем, как излагалось доказательство. В середине, перед самым критическим местом, у нас присутствует формула, которая утверждает, что высказывание $A(n)$ недоказуемо, т. е. невыводимо. Формула же $B(n_0)$ говорит следующее: «я невыводима». Эта конструкция является математическим оформлением хорошо известного в психологии и истории философии «парадокса лжеца». Является ли истинным высказывание человека, когда он говорит: «я лгу»?

Следующий момент, который существенен, это использование канторовского диагонального процесса. Он состоит в подстановке числа n в формулу $A(x)$ с номером n. Напомним, что диагональный процесс в теории Кантора используется для того, чтобы показать несчетность множества всех вещественных чисел. В частности, если начать с рациональных чисел, которые образуют счетное множество, то с помощью этого процесса можно сразу построить иррациональные числа, т. е. выйти за пределы множества рациональных чисел. Более того, этим же способом доказывается, что множество иррациональных чисел несчетно, т. е. представляет бесконечность более высокого порядка.

Таким образом, мы видим, что такие нетривиальные соображения о *различных* типах бесконечности, которые присутствуют в теории Кантора, также имеют значение для доказательства теоремы Гёделя.

Затем, имеется утверждение, что мы можем перенумеровать все формулы арифметики.

Наконец, еще одна особенность доказательства, которая тоже нуждается в осмыслении, состоит в следующем. Пусть мы построили некоторую формулу, которая недоказуема (и ее отрицание тоже недоказуемо), но которая является истинной. Давайте присоединим эту формулу к аксиомам нашей системы. Мы получим новую систему, и, согласно теореме Гёделя, снова найдется формула, которая будет истинна, но недоказуема. Таким образом, теорема Гёделя говорит, что, когда мы хотим формализовать истину, мы не можем это сделать ни на каком данном этапе. Мы можем лишь гнаться за ней, всегда охватывая ее лишь частично. Таким образом, имеется некоторый акт расширения нашей формальной системы и в этом акте расширения присутствует потенциальная бесконечность.

Вот основные черты [6] доказательства теоремы Гёделя, которые мне представляются наиболее важными и которые мы должны проанализировать, если хотим понять к каким выводам философского или общенаучного характера приводит теорема Гёделя.

Перформативные высказывания

Начнем с парадокса лжеца: «я лгу». Почему это высказывание является парадоксальным? Дело в том, что современное представление о языке как о знаковой системе (взгляды Фердинанда де Соссюра) приводит к тому, что основным в языке является его коммуникативная функция, т. е. передача информации. Имеется то, что называется означаемым (предметы, явления, события окружающего мира) и то, что называется означающим (слова, имена, предложения, фразы и т. д.). Между ними существует что-то вроде взаимно однозначного соответствия. Подобный взгляд на язык приводит к представлению о том, что высказывания языка могут быть либо истинными, либо ложными. Однако структура языка имеет целый пласт высказываний другого рода, которые не имеют истинностного значения.

Это — перформативные высказывания, о которых много писали, например, Дж. Остин или Э. Бенвенист. Примерами таких высказываний является выражение «я клянусь». В отличие от фразы «он клянется», оно не имеет истинностного значения потому, что смысл этого высказывания не есть утверждение о чем-то, находящемся вне него, а то, о чем оно говорит, это и есть произнесение самой этой фразы «я клянусь». Таким образом это высказывание не является *сообщением* о чем-то. Сказать его — значит совершить некоторый поступок. Слово в буквальном смысле является делом.

Таких высказываний в языке очень много. К ним относятся клятвы, присяги, завещания, обещания, извинения, приглашения, заключение сделки, объявление войны, открытие собраний, приказы и т. д. Подобные высказывания языка являются *действиями*, в точности такими же, как, скажем, забивание гвоздей или помянутая выше езда на велосипеде. О них нельзя говорить, верны они или нет, правильнее спросить, удачны они или неудачны. В исследованиях перформативных высказываний, проведенных в лингвистике, всегда подчеркивается, что это — определенный пласт языка, что такие высказывания имеют определенные грамматические свойства (лицо, наклонение, время и т. д.) и тем самым стоят особняком от подавляющего большинства остальных высказываний.

Тем не менее, если посмотреть на это с более широкой точки зрения, то подобное выделение перформативов есть лишь освоенное в современной лингвистике представление о *магических* функциях языка. Выше я сказал, что перформативные высказывания суть некое дело, и на самом деле все эти действия, которые осуществляются в перформативных высказываниях, это — реликты ритуальных действий. Вспомним, как относились к языку в древности, когда он весь носил магический характер — представление, сохранившееся еще у некоторых первобытных народов. Вот яркий пример.

В Гвинее есть племена, которые являются охотниками за именами. У такого племени имеется определенный запас имен, которые можно давать при появлении ребенка на свет. Бывают ситуации, когда число младенцев превосходит количество имен, имеющихся в распоряжении общины. Тогда мужчины отправляются на охоту за именами. Они должны найти в чужом, племени человека, убить его, и принести его имя. Для этого надо не просто его убить, а надо, чтобы перед смертью он сказал свое имя, т. е. как бы «отдал» его. Добытое таким образом имя будет использовано для наречения нового члена общины. Таким образом отношение к слову как к реальной вещи проявляется очень ярко. Подобные представления характерны для огромного количества мифологических систем и религиозных воззрений, достаточно вспомнить роль Слова в библейском представлении о творении мира.

Возвращаясь к современному, более близкому нам использованию языка, можно заметить, что даже те высказывания языка, которые являются неперформативными, в каком-то смысле носят в себе скрытый перформативный характер [7]. В самом деле, с точки зрения чисто соссюровской теории языка совершенно непонятно, почему человек реагирует на обращенное к нему словесное высказывание. Когда кто-то говорит о чем-то, например, «идет дождь», то с точки зрения чисто формальной, чтобы понять, почему эти слова имеют какой-то смысл для слушающего, хочется представить их как «я говорю, что идет дождь». Перформативный компонент этого высказывания состоит в словах «я говорю». То, что сейчас делается, это не просто колебание воздуха, а произнесение речи. Иногда, это происходит в обыденной речи, если нужно привлечь внимание к своим словам. В более сильной форме подобная конструкция встречается при различных нарушениях речи, так называемых афазиях, когда обнажаются обычно скрытые механизмы речи. Одним из любопытных нарушений речи такого рода, которое нам будет интересно в дальнейшем, состоит в том, что перформатив появляется в явной форме «я хочу сказать вам, что…» и дальше идет какое-то высказывание. Иногда процесс зацикливается и происходит потенциально бесконечное произнесение фразы «я хочу сказать вам, что я хочу сказать вам, что…»

Таким образом, мы можем сделать общий вывод, что язык человека, и тем более математический язык, могут рассматриваться как элемент некоторой реальности [8] и эта реальность, конечно, должна иметь право на существование. Но где?

Роль бесконечности

Остановившись на этом выводе, давайте перейдем к следующему пункту нашей программы, к вопросу о роли бесконечности в доказательстве теоремы Гёделя. Если посмотреть на доказательство внимательно, то мы увидим, что бесконечность встречается не один раз и в весьма разных формах. Прежде всего, как я уже говорил, там используется диагональный процесс. Затем, следствием этой теоремы является существование бесконечных цепочек расширений формальной системы, которые появляются, если мы хотим охватить все истинные утверждения. Ну, и наконец, вторая теорема Гёделя о том, что доказательство непротиворечивости не может формализоваться, говорит о необходимости использования в той или иной форме нефинитных методов для доказательства этой непротиворечивости, что, впрочем, впоследствии и было сделано в известных доказательствах Г. Генцена и П. С. Новикова [9].

Чтобы понять, как бесконечность связана с теоремой Гёделя, обратимся к совершенно другому вопросу, вопросу о памяти. Как я уже говорил, если нас интересуют процессы творчества в широком смысле слова, то мы можем, имеем право причислить к ним самые разнообразные формы человеческой деятельности. Заметим, что та самая вспышка озарения, которая присутствует в математике и в других формах деятельности, есть, конечно, и в памяти. Каждый знает, как он копался в своей памяти, пытаясь что-то вспомнить, иногда это никак не получается, пока не происходит эта неожиданная вспышка, после которой все становится ясным. На эту тему есть совершенно замечательные соображения, они принадлежат Августину в его знаменитой *Исповеди*, где он предвосхитил представление об относительности времени и многое другое.

Августин выражает свое изумление свойствами человеческой памяти, что она может хранить так много, даже, казалось бы, все, что человек видел и пережил в своей жизни. Вместе с тем совершенно непонятно, как это все устроено. Естественное представление состояло бы в том, что есть некий склад всего, что мы в жизни видели, где все аккуратно собирается, и затем, когда нужно что-то вспомнить, то мы осматриваем этот склад, берем одну вещь, другую, ну и наконец, после перебора нам посчастливилось и мы находим то, что хотим вспомнить, и в этот момент происходит это самое озарение. Представьте теперь, что мы очень сильно забыли, что мы хотим вспомнить. Тогда перебирая вещи внутри этого склада воспоминаний, мы в какой-то момент даже возьмем эту вещь в свои руки, но ее не узнаем. Это означает, что на самом деле представление о памяти как о хранилище впечатлений, которые мы испытываем в своей жизни, хотя и выглядит естественным, но не является полным. Сам акт воспоминания относится к моменту, когда мы должны узнать то, что хранится у нас в нашей памяти.

Таким образом, если внимательно посмотреть на то, что пишет Августин, то мы увидим, что то *Я*, или тот внутренний человек, который изучает все эти сохраненные образы, тоже должен помнить о них. В тот момент, когда его внутреннее представление об этих образах совпадает с тем, что он видит на этом складе, мы и вспоминаем этот образ. Таким образом внутри него тоже должен быть некий склад воспоминаний и так далее. Подобного рода аргумент неоднократно встречался в философии и психологии. Он известен у Аристотеля как «проблема третьего человека», у Гегеля под названием «дурной бесконечности», у Юма как регресс в бесконечность и т. д [[10]]. Как правило, отношение к подобного рода представлениям было всегда либо сдержанным, либо отрицательным. Если мы примем подобный аргумент, то мы скатываемся, как говорил Гегель, в дурную бесконечность.

Чтобы сделать этот аргумент более ясным и приблизить к нашей задаче, давайте рассмотрим простой ассоциативный эксперимент в современной психологии. Представьте себе таблицу, состоящую из двух рядов чисел — слева значения какой-то переменной A, а справа — переменной B. Нам нужно запомнить, что если A есть 5, то B должно равняться 10 и т. д. Мы смотрим на эту таблицу, мы ее запоминаем, а когда нам говорят что-то из левой колонки, то мы должны вспомнить число из правой. Иными словами, когда мы запоминаем эту таблицу, мы запоминаем, что из A вытекает B. Это есть логическая формула такого типа, о котором мы говорили выше.

Однако, когда подходит момент проверки нашей памяти, то экспериментатор не говорит, что из A вытекает B. Он просто говорит A, а мы уже должны ответить B. Таким образом, если мы запоминали, что из A вытекает B, то затем происходит проверка совсем не этой формулы, а такой: если на вход поступает A, то из A вытекает B. Для того, чтобы это вспомнить, нам нужно запомнить на самом деле то, что из A вытекает, что из A вытекает B, т. е. формулу с двумя импликациями, на единицу больше исходной. То, что здесь сказано, есть в точности формальное изложение тех соображений, которые возникают при чтении Августина. Совершенно ясно (скажем, для математика), что мы можем итерировать этот процесс, и таким образом, если мы признаем правду за сомнениями Августина, то вывод должен быть следующим: чтобы запомнить эту таблицу «слева стоит A, а справа B», мы должны запомнить *бесконечную* формулу, которая на логическом языке имеет такой вид:

$$\ldots (A \supset (A \supset (A \supset B))) \ldots$$

При этом объем запоминаемого не имеет значения, т. е. в любом акте воспоминания обязательно присутствует бесконечность такого вида [11]. Это соображение любопытным образом соотносится с теми расстройствами речи, о которых мы упомянули выше. Как мы говорили, при некоторых расстройствах речи человек произносит фразу «я хочу сказать вам, что я хочу сказать вам, что ...». Таким образом формулы, возникающие и в том и в другом случае, будут одинаковы по своей логической структуре.

Итак, эти аргументы означают, что за каждым высказыванием языка, которое представляет собой формулу, состоящую из конечного числа знаков, на самом деле скрывается некоторая бесконечная структура, которая в каждом акте высказывания высовывается только конечной своей частью, находясь всем своим бесконечным основанием где-то вне нашего сознания, но, тем не менее, существуя абсолютно реально.

Нумерация Гёделя как система координат

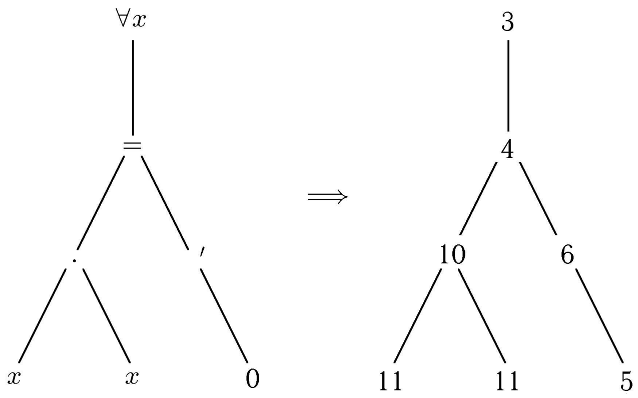
Сделав такое общее замечание о роли бесконечности, я, конечно, понимаю, что оно выглядит весьма далеким от конкретного обсуждения теоремы Гёделя. Давайте сразу перейдем к третьему пункту — вопросу о нумерации Гёделя. И здесь эти соображения приобретут более конкретный и точный характер. Итак, что же такое нумерация Гёделя?

Рассмотрим те символы, которые используются в логике и математике и поставим своей целью их перенумеровать, т. е. сопоставить им натуральные числа так, что если мы знаем натуральное число, скажем, возьмем число 573, то за этим числом скрывается вполне конкретная формула (т. е. мы можем явным образом восстановить эту формулу по этому числу). Как это делает Гёдель? Он рассматривает все вместе, без всяких различий, такие логические символы, как отрицание, конъюнкция, кванторы, ..., затем арифметические символы, такие, как равенство, нуль, операция $'$ для числа следующего за данным числом, сложение $+$, умножение $\cdot$, и пронумеровывает их числами от 1 до 10. Сюда же входят скобки $($, $)$, играющие важную синтаксическую роль:

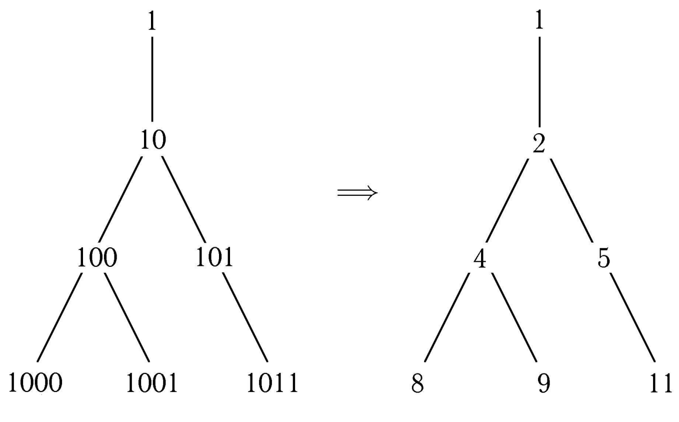
$\sim$	$\&$	$\forall$	$=$	0	$'$	$($	$)$	$+$	$\cdot$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Кроме того, мы имеем числовые переменные, т. е. переменные, которые принимают числовые значения, и пропозициональные переменные, которые обозначают различные предикаты, т. е. свойства чисел, типа тех формул $A(x)$, которые мы обсуждали выше. Каждому из этих символов сопоставим натуральное число, числовым переменным — простые числа, большие 10, а пропозициональным переменным — квадраты простых чисел.

Любая формула, имеющаяся в арифметике, записывается как последовательность таких символов. Следующий шаг состоит в графическом представлении этой последовательности как некоторого дерева (дерева непосредственных составляющих). Покажем как это происходит на примере формулы $\forall x\ (x^2 = 1)$, т. е. $\forall x\ ((x \cdot x) = (0'))$. В каждой вершине дерева находится один из символов нашего списка. Их можно заменить на соответствующие им геделевские номера:



Независимо от этого, каждая вершина определяет некоторое натуральное число n, сначала в двоичной записи, а затем и в десятичной:



После этих предварительных действий, номер всей формулы определяется как произведение, по всем вершинам, чисел $p_n^{\text{номер символа в вершине } n}$, где p_n — n-е простое число. В нашем случае, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_8 = 19$, $p_9 = 23$, $p_{11} = 31$.

В итоге, даже для такой простенькой формулы получается число весьма приличное

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^{10} \cdot 11^6 \cdot 19^{11} \cdot 23^{11} \cdot 31^5 = \\ = 1030423590377917980796493774222382746482798864186312536,$$

напоминающее «большие числа» современной космологии, вроде числа протонов во Вселенной.

Таким образом мы строим нужную нумерацию.

Отвлечемся на некоторое время от чисто технической стороны дела. Что такое нумерация Гёделя с общематематической точки зрения? Это есть в точном смысле слова введение некоторой *системы координат* в пространство высказываний данной формальной системы. Точно также, как в XVII веке Декарт ввел свое декартово пространство как вместилище всех физических (и геометрических) предметов, окружающих нас, в точности также было бы естественно поместить высказывания языка, мысли, представления в некоторое другое умопостигаемое или умозрительное пространство (здесь могут быть разные названия). И вот то, что делает Гёдель, абсолютно не для этой цели, конечно, а для чисто технических задач своего доказательства, фактически состоит в этом. В силу однозначности разложения целых чисел на простые множители каждую формулу можно восстановить по ее геделевскому номеру, т. е. номер обладает основными свойствами координат.

С исторической точки зрения интересно отметить, и, насколько я знаю, это не было ранее отмечено, что нечто вроде нумерации Гёделя, с использованием простых чисел и разложения целых на простые множители, было введено в XVII веке Лейбницем в его знаменитой *универсальной характеристике* [12]. По Лейбницу это закон, по которому мы можем описать мир высказываний с помощью чисел, а затем различные вопросы об этих высказываниях решить с помощью простых арифметических соображений, скажем, делимости. На эту тему имеется большое количество разрозненных, иногда незаконченных текстов Лейбница. Эта универсальная характеристика Лейбница является замечательным предвосхищением нумерации Гёделя. Однако, если мы почитаем внимательно, зачем Лейбниц хотел это сделать, то создается впечатление, что он осознавал эту параллель с пространством Декарта. Так же, как Декарт отвел свое пространство для мира физики, для мира физических сущностей, точно также Лейбниц думал о своей универсальной характеристике как о неком универсальном вместилище для языка, всех его высказываний [13].

Если мы встанем на эту точку зрения, то нам придется, конечно, вспомнить, что математика за последние несколько сотен лет накопила огромный опыт геометрических представлений, т. е. представлений, как правильно выбрать то или иное пространство для данной задачи, куда нужно поместить предметы, которые мы рассматриваем, какие системы координат являются правильными в исследуемой ситуации. Существуют бесчисленные виды пространств: топологические, метрические, многообразия алгебраические, аналитические, римановы и т. д.

С этой точки зрения, нумерация Гёделя производит весьма отвратное впечатление. Ее первый шаг состоит в том, что сваливаются в одну кучу все логические символы и основные символы арифметики и затем их перенумеровывают числами от единицы до десяти безо всякого смысла. Для Гёделя это не имеет значения, поскольку такая нумерация нужна ему лишь для доказательства. Но с более содержательной точки зрения, мы должны вводить системы координат способом, который адекватен предметам, которые мы рассматриваем, в данном случае формулам арифметики.

Здесь нужно внимательнее поглядеть на деревья непосредственных составляющих, о которых я говорил выше. Структура такого дерева есть весьма существенная часть формулы и наша нумерация *должна* это учитывать. Интересный шаг делает Герман Вейль в своем изложении теоремы Гёделя. Он выводит скобки из списка первичных символов, которые мы нумеруем, и вводит их в структуру дерева, т. е. скобки исчезают из нумерации[2)]. Вейль делал это из чисто технических соображений, тем не менее, это есть весьма знаменательный шаг. Это первая попытка изменить нумерацию Гёделя так, чтобы она стала более адекватной рассматриваемому предмету.

Но если мы хотим полностью реализовать эту идею, то нам нужно пойти гораздо дальше. Мы не можем предложить ничего лучшего, находясь на том уровне описания формальной системы, который использует Гёдель. Однако, если теперь вспомнить идею о бесконечных формулах, то она позволит нам построить такую нумерацию формальной арифметики, которая будет содержательно отображать структуру каждой формулы. Для этого мы должны полностью изменить исходное сопоставление чисел формулам. Фактически вся структура формулы должна полностью отображаться в дереве и в различных вершинах этого дерева должны находиться символы, которые определяются данной вершиной однозначно.

Как это сделать? Для этого нужно разложить кванторы на бесконечные формулы, что хорошо известно в логике, а каждую переменную x разложить на бесконечную последовательность ее значений [14]. В нашем примере это означает, что формула $\forall x\ (x^2 = 1)$ заменяется сначала на

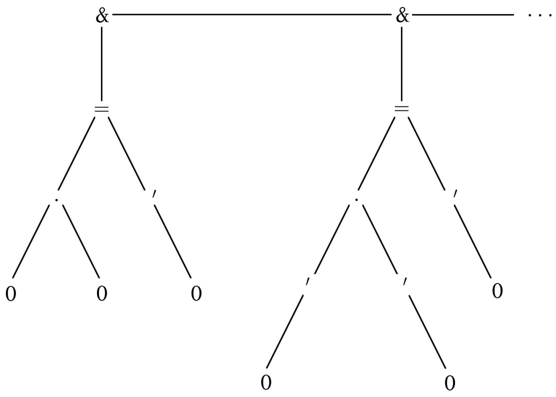
$$(0 \cdot 0 = 1)\ \&\ ((1 \cdot 1 = 1)\ \&\ ((2 \cdot 2 = 1) \ldots)),$$

[2)] Фактически мы этим воспользовались выше.

а затем на

$$(0 \cdot 0 = 0') \ \& \ ((0' \cdot 0' = 0') \ \& \ ((0'' \cdot 0'' = 0') \ldots)).$$

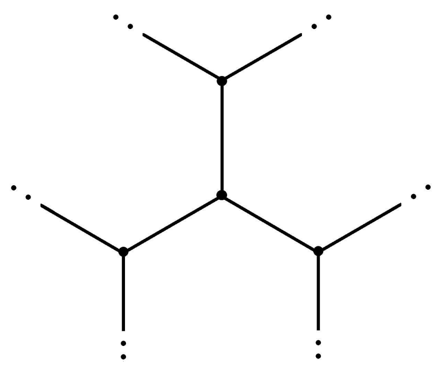
В результате получается уже бесконечное дерево



Таким образом, каждой формуле можно сопоставить вполне однозначную структуру некоторого дерева [15]. Теперь возникает вопрос, что мы таким образом получаем?

p-адический континуум

Дерево, которое получается при такой конструкции будет, как правило, бесконечным и его структура ветвления будет весьма простой: в каждой вершине дерева сходятся три, два или одно ребро. Если мы нарисуем универсальное однородное дерево Δ (валентности 3), то в каждой его вершине сходятся три ребра и оно неограниченно ветвится. Любое дерево, которое получается из формул формальной арифметики, *вкладывается* в такое единое дерево. Итак, если мы хотим реализовать идею нумерации Гёделя как представление о некоей естественной системе координат, то мы приходим к тому, чтобы превратить каждую формулу арифметики в некоторое естественное подмножество дерева Δ.



Почему это интересно? Разложение на простые числа, которое используется в нумерации Гёделя или в универсальной характеристике Лейбница, относится к натуральным числам или, у Лейбница, к рациональным. Множество рациональных чисел допускает бесконечно много расширений — пополнений относительно имеющихся в нем метрик.

В нем имеется бесконечное число p-адических метрик, по одной для каждого простого числа p, и обычная метрика, пополняя по которым мы получаем либо p-адические числа, либо вещественные [16]. Резкое отличие p-адических метрик от обычного расстояния состоит в том, что для них не выполняется аксиома Архимеда.

Именно пополнение вещественными числами, вещественный континуум, играет фундаментальную роль в геометрии, физике, в физической картине мира. С другой стороны, p-адические пополнения рациональных чисел вообще не использовались содержательным образом в естествознании [17]. Соображения делимости, используемые Лейбницем, естественным образом приводят к рассмотрению p-адических метрик на множестве рациональных чисел. Таким образом, умопостигаемое пространство может быть изучено, если мы будем вводить в нем p-адические координаты и рассматривать его как дерево Δ [18].

Получающееся на этом пути дерево Δ имеет замечательные свойства. Оно является однородным пространством группы матриц второго порядка с p-адическими коэффициентами. Иначе говоря, каждой такой матрице отвечает преобразование дерева в себя и любую точку дерева можно перевести в любую другую точку с помощью такого преобразования. В нашем случае в качестве p мы должны взять простое число 2.

Можно сравнить однородные пространства группы матриц второго порядка с вещественными коэффициентами и с p-адическими. Для случая вещественных чисел соответствующее однородное пространство будет единичным кругом на комплексной плоскости или, иначе, плоскостью Лобачевского. Группа будет состоять из движений, сохраняющих метрику (она почти совпадает с группой Лоренца из теории относительности, а движения тесно связаны с самими преобразованиями Лоренца). Это — первый нетривиальный пример неевклидовой геометрии, имеющий к тому же и отношение к физике.

Наше дерево Δ есть 2-адический аналог плоскости Лобачевского и, с точки зрения геометрии, оно является не чем-то случайным, а фундаментальным объектом классической математики. Представление об этом дереве как об однородном пространстве с определенной геометрией восходит к Эрлангенской программе Феликса Клейна. Программа Клейна относилась к группам непрерывного типа (таким, как группы матриц с вещественными коэффициентами), но в более широком аспекте сюда включаются и p-адические группы. Такое расширение этой программы было произведено уже в наше время Жаком Титсом, где-то начиная с 50-х годов и затем в многочисленных работах происходило ее дальнейшее развитие.

Между этими двумя объектами существует очень глубокая и нетривиальная аналогия. Вещи, которые мы умеем делать для обычного вещественного пространства, могут быть перенесены и на p-адический случай. Я упомяну в качестве более тонкой математической конструкции теорию униформизации римановых поверхностей, которая в p-адическом случае была построена Д. Мамфордом. Есть и более простые вещи, которые нам интересны потому, что с их помощью можно рассматривать разного сорта волновые процессы, т. е. p-адические аналоги распространения волн в обычном евклидовом пространстве. Как известно, это описывается на основе волнового уравнения, куда входит оператор Лапласа. Существует точный аналог оператора Лапласа для дерева Δ. Таким образом, можно пытаться перенести на p-адический случай значительную часть математической физики, известной в обычном евклидовом или декартовом пространстве [17].

Иными словами, в этом пространстве, куда мы можем поместить нашу формальную систему, нашу математическую теорию, у нас имеются богатые возможности как для «механического» движения, так и для «волновых» процессов. Это некий аналог обычной физики. Такие конструкции представляют большой интерес, потому что все мы знаем из обычного языка, что имеются огромные аналогии между физическим миром, движением предметов и движением мысли. «Мысль мелькнула», «мысль пришла», она «движется» и т. д. [19] Так, как если бы мы считали, что она движется в каком-то особом пространстве [20]. Вывод, к которому мы приходим, анализируя эти стороны теоремы Гёделя, состоит в том, что можно допустить существование некоего умопостигаемого пространства, в котором логические высказывания являются «вещами», или «предметами», но при этом они не исчерпывают его ни в коей мере, а находятся в нем примерно так, как рациональные числа помещаются среди иррациональных. И, следовательно, интуиция была бы связана с движением по этому пространству. Нетрудно заметить, что даже в чисто вербальном плане имеется некоторое совпадение: иррациональные числа и наличие иррационального, интуитивного компонента в человеческом познании [21].

И последнее замечание, которое в этом месте нужно сделать: акт познания, в частности математического познания, должен использовать бесконечность [22], и не просто бесконечность дискретного, счетного типа, а именно *континуум*. Чтобы понять это, немного отвлечемся от проблем логики и мышления и обратимся к тому, с чем я их уже сравнивал, к механике в классическом евклидовом пространстве. Весьма нетривиальным является вопрос: а почему мы должны пополнять рациональные числа, должны использовать континуум, т. е. все вещественные числа?

Ведь, как известно, все приборы, которые есть в физике и которые могут быть в физике, никогда не показывают иррациональных чисел. Вы никогда не увидите ни $\sqrt{2}$, ни π, ни e на экранах своих приборов, а всегда лишь десятичные дроби, которые их аппроксимируют. Казалось бы, в принципе можно двигаться в пространстве, состоящем только из рациональных чисел. Однако в истории человеческой мысли, вопрос о том, как вообще возможно движение, является весьма древним и весьма непростым. Так, знаменитые парадоксы Зенона, такие как *Ахиллес и черепаха*, как раз и состояли в том, что если мы ограничиваемся рациональными числами, то движение невозможно. Один из взглядов, и мне он кажется чрезвычайно содержательным, состоит в том, что парадоксы Зенона показывают с необходимостью, что движение возможно только по континууму [23]. Хотя похоже, этот взгляд и не является наиболее распространенным в наше время. Тем не менее, если мы его примем и обратимся к нашему вопросу об описании мышления, то можно сказать, что для того, чтобы мышление было возможным, для того, чтобы существовала интуиция, вспышка озарения, для этого необходимо, чтобы мысль могла двигаться по пространству, не просто бесконечному, но имеющему структуру континуума.

Разумеется, это ни в коей мере не означает, что логика должна быть изгнана, что логика не имеет смысла и т. п. [24] Как бы мы ни относились к интуиции, к соотношению интуитивного и логического, ясно, что обе эти компоненты являются необходимыми партнерами в процессе математического познания. И любое математическое утверждение, любая истина, которая уже получена, должна быть изложена согласно законам логики, в ней не должно быть ошибок, противоречий и т. п. Однако то обстоятельство, каким способом мы получаем эту истину, это — вопрос, который, с точки зрения самой логики, является абсолютно непонятым. И то, что здесь предлагается, является попыткой понять, как же на математическом языке описать тот механизм, который приводит к появлению самих математических мыслей, которые затем уже описываются на чисто логическом языке [25].

В связи с этим я хотел бы сказать еще одно: как выглядит логика для математика, далекого от этой науки. Впрочем мое мнение есть пересказ замечаний Джона фон Неймана, который, как известно, был и выдающимся логиком, и выдающимся математиком. Говоря о логике, он указывал, что математик, обращаясь к логике, испытывает неудобство, потому что вся логика крутится вокруг дискретных структур, с которыми человеку трудно общаться. Ему гораздо легче, когда он видит перед собой что-то непрерывное, более континуальное. Сделав подобное замечание, фон Нейман продолжает, что он не исключает в будущем возможное расширение логики, когда она будет носить менее дискретный и более непрерывный характер. В данном докладе я не предлагаю такое расширение логики, но первый шаг в этом направлении, причем, шаг уже четко сформулированный, можно сделать.

К этому я бы добавил, что, изучая логику, чувствуешь ее до некоторой степени оторванность [26] от основного потока математической мысли. Изучение движения камней и небесных тел привело к появлению таких общематематических понятий, как многообразие, дифференциальная форма, расслоение, а изучение движения человеческой мысли не дало ничего подобного.

Теорема Гёделя и квантовая механика

И, наконец, несколько слов о последнем свойстве доказательства теоремы Гёделя, которое я обозначил как наличие определенного акта расширения формальной системы. У нас есть утверждения, которые истинны, но не доказуемы, мы можем присоединить их в качестве новых аксиом к нашей формальной системе, снова появятся такие утверждения и т.д. Итак, в процессе познания мы можем формализовать то, что мы добыли, но для того, чтобы добывать снова, мы должны каждый раз уходить от нашего формализма. Герман Вейль в своем замечательном тексте о теореме Гёделя (это приложение к его *Philosophy of Mathematics and Natural Science*) делает интересное замечание, что этот акт расширения очень похож на тот акт расширения физической системы, который существует в квантовой механике.

Здесь нужно сказать, что в XX веке в науке, я имею в виду точные науки, появились два таких «незаконнорожденных дитяти». Это теорема Гёделя и теория наблюдения в квантовой физике. Обе конструкции были получены в техническом плане для того, чтобы показать несправедливость некоторых крайних утверждений. В физике это вопрос о наличии скрытых параметров — можно ли свести квантовые системы к системам классической механики. Теорема фон Неймана о невозможности введения скрытых параметров, хотя и была принята научным сообществом, но с крайней осторожностью. В точности так же, как и теорема Гёделя, с явным нежеланием, о чем я говорил выше. В той же квантовой теории ставились бесчисленные эксперименты для того, чтобы опровергнуть это представление, чтобы показать, что можно ввести скрытые параметры. Из этого вплоть до настоящего времени ничего не получилось.

Чтобы получить какое-то представление об этом акте расширения в квантовой теории обратимся к примеру, который предложил один из основателей квантовой теории Нильс Бор, один из наиболее философски мыслящих физиков в нашем столетии. Предположим, вы находитесь в темной комнате и, ощупывая имеющиеся в ней предметы, замечаете, что там стоит трость. Взяв ее, вы уже можете ощупывать предметы не своей рукой, а этой тростью. Вот та граница между наблюдателем, который изучает окружающий мир, и этим миром: в первом случае она находилась в точке вашего пальца, которым вы изучали этот мир, когда же вы взяли трость, то эта точка, как доказано в современной экспериментальной психологии, перемещается в конец трости. Трость включается в ваше тело. Тело + трость составляют как бы нового наблюдателя, и граница с окружающем миром перемещается.

Изменение границы описано тут в житейском опыте, в бытовой психологии, но оно в точном смысле слова существует в квантовой теории, и, по мнению Вейля, этот процесс переноса границы и акт расширения системы являются аналогичными акту расширения в теореме Гёделя [[27]].

Здесь надо сказать, что и в теории наблюдения в квантовой механике существует некоторый аналог вспышки озарения, этого спонтанного приобретения нового. Он состоит в т. н. редукции волновой функции. Я не буду более подробно обсуждать здесь эти вопросы, скажу только, что такая аналогия между квантовой теорией и теоремой Гёделя является, несомненно, весьма глубоким фактом, и, хотя это было высказано уже около полувека назад, это до сих пор вещь, которая неосмыслена и непонята.

* * *

В 1983 году, в журнале *Природа* была опубликована переписка двух биологов, энтомологов по профессии, Б. С. Кузина и А. А. Любищева, обсуждающих весьма общие вопросы науки и, в частности, возможность применения математики к биологии. Вот их взгляды:

Любищев:	Полностью, безоглядно за «математизацию».
Кузин:	Математика чужда биологии, нужна лишь для подсобных целей, например, для статистики.
Любищев:	За строгость и точность.
Кузин:	За интуицию и где! В систематике насекомых, где каждая особь для него не менее индивидуальна, чем соната Бетховена или Notre-Dame de Paris.

Я думаю, что неправы оба участника диалога, хотя мысли Кузина тоньше и как-то теплее. Неверно, что граница между формальным и интуитивным проходит между математикой и «гуманитарными» науками (каковой, в данном случае, выступает для Кузина биология). Эта граница проходит везде, в том числе и в самой математике. И это, быть может, главный вывод из теоремы Гёделя.

Более того, эта граница, граница между субъектом и объектом, *подвижна* и не может быть определена заранее. Она устанавливается каждый раз *заново* в *каждом* новом акте познания.

Завершая, я хочу сказать, что, рассматривая теорему Гёделя именно с такой точки зрения, не как вынужденное ограничение, а как фундаментальный философский факт, можно прийти к намного более глубокому развитию психологии, логики и многих других наук [[28]], которые изучают человека, чем используя ту ограниченную точку зрения, которая доминирует до сих пор в научном сообществе.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1)] Публикуемый текст представляет собой изложение доклада автора, сделанного на Третьей Всесоюзной школе по истории математики

(Одесса, сентябрь 1984 г.). Я не стал вносить в основной текст никаких изменений, хотя с тех пор произошло много событий, связанных с темой доклада. Все они отражены в комментариях, которые содержат также замечания, уточняющие и развивающие основной текст. Я глубоко признателен Н. С. Ермолаевой, предоставившей свою запись моего одесского доклада, и М. Л. Архангельской за большую помощь в подготовке текста к печати.

2) Литература, использованная в основном тексте:

Goedel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // Monatsch. Math. Phys. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

Гильберт Д. Основания геометрии. — М.–Л.: 1948. С. 365.

Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики (логические исчисления и формализация арифметики). — М.: Наука, 1979.

Коэн П. Дж. Об основаниях теории множеств // Успехи матем. наук. 1974. Т. XXIX, вып. 5. С. 169–176.

Тьюринг А. Может ли машина мыслить? — М.: Физматгиз, 1960.

Фейнберг Е. Л. Кибернетика, логика и искусство. — М.: Радио и связь, 1981.

Пуанкаре А. Математическое творчество. В кн. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Сов. радио, 1970. (См. также *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983. С. 309–319.)

Толстой Л. Н. Война и мир. Эпилог, часть первая, XVI.

Вейль Г. Структура математики // Успехи матем. наук. 1976. Т. XXXI, вып. 4. С. 220–238.

Austin J. L. How to do things with Words. — Oxford University Press, 1975.

Бенвенист Э. Общая лингвистика. — М.: Прогресс, 1974. Гл. XXIV «Аналитическая философия и язык». С. 301–310.

Мифы и предания папуасов маринд-аним. — М.: Наука, 1981. С. 260.

Лурия А. Р. Основные проблемы нейролингвистики. — М.: Изд-во МГУ, 1975.

St. Augustine Confessions. — London, 1973. X, 8–21. P. 214–228. (Имеется перевод: *Аврелий Августин* Исповедь. — М.: Renaissance, 1991. С. 243–258, особенно с. 254.)

Лейбниц Г. В. Сочинения. Т. 3. — М.: Мысль, 1984.

Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа). В сб.: *Об основаниях геометрии.* — М.: ГИТТЛ, 1956.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в 19-ом столетии. Ч. 1. — М.: Наука, 1989.

Tits J. Groupes simples et géométries associées // Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm 1962. Djursholm. Inst. Mittag-Leffler. 1963. P. 197–221.

Serre J.-P. Trees. — Springer Verlag, 1980.

Weyl H. Philosophy of Mathematics and Natural Science. — Princeton, 1949.

Дж. фон Нейман Общая и логическая теория автоматов. В кн. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? — М.: Физматгиз, 1960. С. 79–82.

Дж. фон Нейман Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964.

Дирак П. Многогранность личности Нильса Бора. В сб. *Нильс Бор. Жизнь и творчество.* — М.: Наука, 1967. С. 21–25 (о трости Бора).

Б. С. Кузин и А. А. Любищев о систематике // Природа. 1983. № 6.

[3] Вот некоторые из них. Г. Вейль: «Гёдель показал, что в гильбертовом формализме, и в действительности в любой не слишком узкой формальной системе M, происходят две *странные* вещи» [какие мы уже знаем] «вторая теорема Гёделя еще более *обескураживающа* (disquieting)».

J. Haugeland: «*Unfortunately*, even in mathematics, formalization is not all that one might have hoped. *Ideally*, one would like a system such that not only were all its theorems true, but also all its true tokens were theorems (i.e. *only* theorems were true). $< \cdots >$ But it has been shown $< \cdots >$ that no consistent formalization of arithmetic can be complete; and the same applies to many other important axiomatic systems. Most people are agreed, however, that this result *doesn't make any difference* to cognitive science» [*К сожалению* даже в математике формализация не оказывается тем окончательным прибежищем, на которое можно уповать. В *идеале* удовлетворительной системой представляется такая, для которой не только все ее теоремы являются истинными, но и все истинные высказывания оказываются теоремами, т. е. истинными оказываются *только* теоремы $< \cdots >$. Но как было показано $< \cdots >$, непротиворечивая формализованная арифметика, не может быть полной; то же самое оказывается верным для многих других важных аксиоматических систем. Большинство, однако, сходится на том, что этот результат *не имеет никакого значения* для теории познания.] *Mind Design: Philosophy, Psychology, Artificial Intelligence*. Ed. J. Haugeland. — Cambridge: MIT Press, 1981. P. 23.

[4] См. *Борн М.* Физика в жизни моего поколения. — М.: ИЛ, 1963. С. 412. Можно даже предложить этот принцип в качестве критерия фундаментальности научной теории. В этом смысле, специальная теория относительности и квантовая механика более фундаментальны, чем общая теория относительности или статистическая физика.

[5] Итак, пусть $B(x)$ имеет номер n_0. Покажем, что утверждение $B(n_0)$ истинно и оно и его отрицание $\sim B(n_0)$ недоказуемы. Напомним, что

$B(n) = \{$утверждение $A_n(n)$ недоказуемо$\}$, где мы явно обозначили номер формулы $A(x)$.

a) Пусть $B(n_0)$ доказуемо. Тогда $B(n_0)$ истинно и, следовательно, $B(n_0) = A_{n_0}(n_0)$ недоказуемо. Если система непротиворечива, то этого не может быть.

b) Пусть $\sim B(n_0)$ доказуемо. Тогда $B(n_0)$ ложно и, потому, $B(n_0) = A_{n_0}(n_0)$ доказуемо. Опять, противоречие.

c) $B(n_0)$ не может быть ложным, ибо тогда $A_{n_0}(n_0)$ доказуемо и, следовательно, $B(n_0)$ истинно. («Аналогичное» доказательство ложности $B(n_0)$ не получится ввиду несимметричности всей ситуации: формула $\sim B(x)$ имеет совсем другой геделевский номер, не n_0.)

Это краткое описание имеется у самого Гёделя (*Goedel K.* Collected Works. Vol. 3. — New York: Oxford, 1995). Вполне доступные изложения доказательства теорем Гёделя см. в цитированном выше очерке Вейля и кн. *Линдон Р.* Заметки по логике. — М.: Мир, 1968; *Нагель Э., Ньюмен Д. Р.* Теорема Гёделя. — М.: Знание, 1970; *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте. — М.: Наука, 1982.

[6]) Есть еще одна интересная черта доказательства Гёделя, которую мы лишь упомянем. В этом докладе мы неоднократно используем имеющиеся в языке метафоры для того, чтобы сделать выводы об устройстве самого языка. Иначе говоря, язык говорит нечто о самом себе. Это можно сравнить с математическим языком и его описанием, т. е. метаязыком. В логике эти два уровня, обычно, строго различаются. Нумерация Гёделя показывает как утверждения метаязыка (т. е. высказывания о языке) можно вложить в сам язык, если он достаточно богат. Таким образом, математический язык содержит *все* высказывания о себе.

[7]) Идея ввести «перформативную приставку» в глубинную структуру любого повествовательного предложения была высказана в 1970 г. Дж. Р. Россом. См. обсуждение в работах *Арутюновой Н. Д.* Предложение и его смысл. — М.: Наука, 1976, с. 46, и *Вержбицка А.* Речевые акты // В кн.: Новое в зарубежной лингвистике. — М., Прогресс, 1985. С. 251–275.

[8]) Различие между перформативным и констативным высказываниями похоже на различие между спонтанной и произвольной речью. При некоторых речевых расстройствах (афазиях) больные неспособны произнести слово, когда их об этом попросят. Классический пример: «нет, доктор, я не могу сказать вам «нет»». Этот и другие такие же примеры показывают, что употребление языка без непосредственной связи с реальностью (без референции) принципиально отличается от его спонтанного использования в текущей речи (см. *Cassirer E.* Philosophy of Symbolic Forms. Vol. 3. — Yale University Press, 1957). Кассирер сравнивает расстройства речи типа афазий с двигательными расстройствами (апракси-

ями) и находит в них много общего. Последние состоят в невозможности произвольных действий с предметами, например, их вращения. Параллели между этими заболеваниями также говорят, что со словами можно обращаться как с вещами (ср. известный оборот речи «вертеть слово»).

Очень ярко об этом написал о. Павел Флоренский в своей *Философии культа*: «Когда мы говорим слово *орудие*, то ближайшим образом припоминаются нам молоты, пилы, плуги или колеса и тому подобное — словом, в грубейшем смысле слова материальные орудия технической культуры. $< \cdots >$ Но есть и другой род орудий, наименее материальных, *воздушных*, если выразиться точно и буквально, однако ничуть не менее могучих; это суть *слова* — в особенности — оформленные технически понятия и термины. Слово, «воздушное ничто», есть, однако, орудие мысли, без коего мысль не раскрывается и не осуществляется. Не в переносном смысле, а в самом точном, слова суть орудия» (Богословские труды, 1978. Вып. 17. С. 102).

Итак, с одной стороны, отождествление «речь» = «действие» подсказывает нам, что язык имеет реальное существование. С другой стороны, возможность отделения «высказывания» от описываемого им «явления» говорит о том, что язык может существовать отдельно, не имея прямого отношения к физическому пространству.

[9] Новое доказательство непротиворечивости арифметики и обзор всех имеющихся доказательств см. *Нагорный Н. М.* К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики. — М.: Вычислительный центр РАН, 1995.

[10] См. *Платон* Парменид. 132a–133b; *Аристотель* Метафизика. I, 9 990b15–20, VII, 13 1039a 1–5; XIII, 4 1079a10–15; *О софистических опровержениях*, XXII 178b35–179a10; *Юм* Сочинения. — М., Мысль, 1965, т. 1. с. 120–123, т. 2, с. 533; *Гегель* Наука логики. Учение о бытии. Раздел первый, гл. 2, Раздел второй, гл. 2. Появление бесконечности в контексте, близком к обсуждаемому нами, имеется у Гуссерля в его анализе процесса возникновения общих понятий (*Husserl E.* Logische Untersuchungen II. Teil 2, Kap. 1, § 4, см. также *Passmore J.* Philosophical Reasoning. New York, 1961 и *Gardner M.* The infinite regress in philosophy, literature and mathematical proof. — Scientific American, 1965, April, 128).

[11] Интересно, что обсуждение этого аргумента иногда встречается и в современной литературе. Например, у Ф. Крика, когда он говорит о проблеме гомункулуса (или внутреннего человека), (см. его *Мысли о мозге* в сб.: *Мозг*. — М.: Мир, 1982. С. 266): «Существуют ли какие-то идеи, которых следует избегать? Я думаю, что одна, по крайней мере, есть — это идея гомункулуса». Вот как Крик описывает обсуждение этой идеи с одной своей знакомой: «Наконец, я в отчаянии спросил ее, как она сама считает, каким образом она видит мир. Женщина ответила, что, вероятно, где-то в голове у нее есть что-то вроде маленького телевизора.

«А кто же в таком случае,–спросил я,–смотрит на экран?» Тут она сразу же поняла, в чем проблема». И далее, говоря об ошибочной, по его мнению, склонности искать внутри человека этого самого гомункулуса, он добавляет весьма знаменательные слова: «это происходит потому, что мы несомненно питаем иллюзию существования гомункулуса — нашей личности». Интересно, что критические замечания Крика (как, впрочем, и многих других), по существу, ничем не отличаются от зенонова «доказательства» того, что Ахиллес никогда не догонит черепаху.

[12)] В 1997 г. вышла обстоятельная биография Гёделя (*Dawson J. W.* Logical Dilemmas. (The Life and Work of Kurt Gödel.) — Welleslen: A. K. Peters, 1997). В ней высказывается предположение, что идея нумерации, с использованием разложения целых чисел на простые множители, была подсказана Гёделю работами Лейбница. Во всяком случае, среди книг, читавшихся Гёделем в двадцатые годы, были и сочинения Лейбница. Позднее, уже после войны, в Америке, Гёдель принимал участие в проекте копирования архива Лейбница в Ганновере. Позднее такая копия архива Лейбница была создана в Пенсильванском университете.

Соображения о связи нумерации Гёделя с универсальной характеристикой Лейбница были изложены автором в примечаниях к публикациям работ П. А. Флоренского и Г. Вейля (Историко-математические исследования. 1986. Вып. 30. С. 169, 174; *Вейль Г.* Математическое мышление. — М.: Наука, 1989. С. 364–365) и более подробно в письме Г. Е. Минцу (1990). Г. Е. Минц обсудил их с рядом известных логиков (G. Kreisel, P. Martin-Löf, W. Goldfarb) на симпозиуме в Хельсинки (Logic Colloqium 1990). Судя по их реакции, эти соображения тогда еще не были известны (письмо Г. Е. Минца автору от 20.08.1990).

[13)] Идея универсальной характеристики Лейбница состоит в сопоставлении понятиям числовых значений (характеров). При этом составным терминам сопоставляется произведение числовых значений входящих в него терминов. Так, если термин «животное» выражается через число 2, термин «разумное» — через число 3, то термин «человек» будет выражен через число $2 \cdot 3$. Проверка истинности утверждений сводится к условию делимости соответствующих чисел (*Лейбниц Г. В.* Сочинения. Т. 3. — М.: Мысль, 1984. С. 506. Дальнейшие правила и варианты см. там же, с. 506–655). Если представить «термин» Лейбница, как множество «предметов», в него «входящих», то получается такое соответствие

составной термин

$\Updownarrow$

пересечение множеств

$\Updownarrow$

произведение простых чисел

(это, по существу, зародыш теории идеалов, как она была сформулирована Дедекиндом в XIX веке).

Эти идеи возникли у Лейбница в молодости, и он с большим энтузиазмом принялся их развивать, думая, что нашел универсальное средство для ответа на все вопросы (то же мироощущение, что и у Гильберта триста лет спустя!): «С его применением могут быть навсегда исключены споры, поскольку они разрешимы на основе данных; и стоит только взяться за перья, как уже будет достаточно, чтобы двое спорящих, отбросив словопрения, сказали друг другу: *давайте посчитаем!*» (*Лейбниц Г. В.* loc. cit. С. 444–445. См. еще более поздний очерк *История идеи универсальной характеристики*, ibid., с. 412–418). К сожалению, в литературе эти взгляды молодого Лейбница часто выдаются за его окончательное суждение по этому вопросу.

Однако, позднее точка зрения Лейбница изменилась. В конце 90-х годов он пишет *Некоторые соображения о развитии наук и искусстве открытия* (*Лейбниц Г. В.* loc. cit. С. 461–479), где уже явно говорит о роли бесконечности, отходя, тем самым, от финитных иллюзий молодости (см. с. 476). Более того, Лейбниц вводит два вида истин: необходимые и случайные, лишь первые из которых могут быть обоснованы путем конечного логического рассуждения. Вот поразительные слова: «Различие между *истинами необходимыми и случайными* поистине то же самое, что и между соизмеримыми и несоизмеримыми числами: ибо как в соизмеримых числах может происходить разложение до общей меры, так и в необходимых истинах имеет место доказательство, или редукция к тождественным истинам. И как в иррациональных отношениях разложение идет в бесконечность, хотя и приближается так или иначе к общей мере, давая при этом некие ряды, хотя и бесконечные, — точно так же в силу того же самого процесса случайные истины требуют бесконечного анализа, который один только Бог способен доводить до конца. Поэтому-то только им одним эти истины познаются априорно и достоверно» (*Лейбниц Г. В.* loc. cit. С. 496). Затем он называет такие истины «истинами факта» и говорит, что они могут быть извлечены из данных «беспредельно сильным умом» (с. 497) что имеющийся в русском переводе термин «случайные истины» представляется нам совершенно неадекватным сути дела. Более правильным был бы перевод «свободные истины». См. отрывок *О свободе* (*Лейбниц Г. В.* Сочинения. Т. 1. — М.: Мысль. 1982. С. 316), где также обсуждаются эти два вида истин, и в оригинале случайные истины названы «liberae» (свободными).

В других работах Лейбниц связывает эти идеи со своими представлениями о природе бессознательного, с введенными им так называемыми «смутными ощущениями» (*Лейбниц Г. В.* Сочинения. Т. 1. — М.: Мысль, 1982, например, с. 336). Роль бесконечности в этом сознается им очень четко: «Мы обладаем бесконечным множеством знаний, которых мы не помним и не сознаем даже тогда, когда в них нуждаемся» (цит. по *Фейербах Л.* История философии. Т. 2. — М.: Мысль, 1974. С. 290).

[14)] Хотя понятие переменной считается столь элементарным, что его излагают школьникам в пятом классе, тем не менее, его освоение следует отнести к таким же нетривиальным и заранее неочевидным действиям, как все та же езда на велосипеде. До того как это понятие усвоено, оно выглядит абсолютно загадочным и полностью недоступным. Когда же оно усвоено, становится непонятным, что же в нем раньше было непонятного. Сам процесс перехода из одного состояния в другое происходит довольно быстро. Все эти особенности автор хорошо помнит из своего школьного опыта. Также и открытие переменных было величайшим событием в истории математики Нового времени. Трансцендентный смысл понятия переменной x состоит в том, что она может принимать бесконечно много значений и это *невозможно* понять ни на каком конкретном примере. В языке сходную роль выполняют местоимения (и вообще так называемые пустые знаки). Вот как их описывает Бенвенист: «Язык разрешил эту задачу [общения между субъектами — *Авт.*], создав серию пустых знаков, свободных от референтной соотнесенности с «реальностью», всегда готовых к новому употреблению и становящихся полными знаками, как только говорящий принимает их для себя, вводя в протекающий акт речи» (loc. cit., с. 288). В точности такая же ситуация встречается и в математике. Вспомним какой-нибудь математический доклад: «Пусть X — алгебраическое многообразие...». Отметим еще, что в раннем развитии человека местоимение *Я* появляется не сразу и с некоторым трудом.

[15)] Мы не даем тут точное определение дерева, отвечающего данной формуле арифметики. Приведенные соображения позволяют сопоставить каждой формуле (бесконечное) дерево. Чтобы восстановить формулу по дереву, нужно еще пометить некоторые его вершины (в вершине с тройным разветвлением может стоять либо &, либо $=$, либо арифметическая операция $+$, $\cdot$; в вершине с двойным ветвлением, либо $\sim$, либо $'$; и в концевой вершине либо $\sim$, либо 0). Если же интересоваться формулами арифметики с точностью до логической эквивалентности, то можно каждую формулу привести к так называемой нормальной форме $\ldots\forall\ldots\sim\ldots(P(x,y,\ldots)=Q(x,y,\ldots))$ (см. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. — М.: Физматгиз, 1959). Здесь P и Q — многочлены от переменных $x, y, \ldots$. По такой формуле можно построить дерево D, вместе с такими подграфами $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset D$, что в вершинах D_0 стоят только логические символы, вершины $D_1 \setminus D_0$ отвечают $=$, вершины $D_2 \setminus D_1$ — операции сложения, и остающиеся вершины из $D \setminus D_2$ –операциям умножения, $'$ и 0. По такой структуре дерева D исходная формула восстанавливается однозначно. Заметим еще, что таким способом мы получаем некоторое «тело» (т. е. подмножество) в Δ и его можно поместить в дереве Δ в любом месте, начиная с какой угодно вершины.

Значение этой конструкции состоит прежде всего в том, чтобы показать, *как* можно чисто «гуманитарные» критические замечания попытаться превратить во что-то вполне четкое и строгое. В дальнейшем можно было бы попробовать представить формальную систему (например, арифметику целых чисел) как динамическую систему на дереве Δ. О том, что у логики и механики есть что-то общее, писали и Пуанкаре, и Бергсон (см. его *Творческую эволюцию*, М., 1998; «соединенные вместе, понятия, составляют «умопостигаемый мир», который своими существенными чертами сходен с миром твердых тел» (с. 172), «этот физический порядок $< \cdots >$ является не чем иным, как падением логики в пространство и время» (с. 307)), и Дж. фон Нейман.

[16] p-адические числа возникают из рациональных путем пополнения множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел относительно метрики $|x-y|_p = p^{-a}$, где $x - y = p^a z$ и z взаимно просто с p. В этой метрике два числа тем ближе, чем на большую степень p они делятся. Так, последовательность p^n, $n = 1, 2, \ldots$ сходится к нулю.

[17] Спустя несколько лет после этого доклада в физике, по-видимому, под влиянием успехов в теории чисел, появились попытки ввести p-адические или даже адельные переменные. Были построены p-адические аналоги квантовой механики и различных моделей квантовой теории поля (некоторый итог этому развитию подведен в кн. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-адический анализ и математическая физика. — М.: Наука, 1994). Однако, физический смысл описания физических величин p-адическими числами прояснен, по-видимому, не был. Неясно, каковы те экспериментальные ситуации, в ходе которых измерение каких-либо физических величин должно с необходимостью производится с помощью p-адических чисел. И прежде всего, каковы те ситуации, в которых очевидным образом должна нарушаться аксиома Архимеда.

В более широком, философском плане можно сказать, что окружающий нас мир состоит, скажем, из вещей и отношений, и, если вещи нуждаются для своего изучения в *перечислении*, т. е. в описании натуральными (или вещественными) числами с обычной архимедовой метрикой, то отношения, конечно, скорее задаются *логическими схемами* и для них более подходят, как говорилось выше, p-адические числа. Когда же мы обращаемся к объектам квантового мира, таким как электроны или атомы, то их труднее отнести к одной из этих категорий. По привычке мы склонны рассматривать их, скорее, как вещи или предметы, но еще до недавнего времени серьезным конкурентом этой точки зрения был взгляд на атомы как на своего рода отношения (см. *Кассирер Э.* Познание и действительность. — Спб.: 1912. Гл. 4, VIII). Если мы примем, что эти две стороны реальности описываются, соответственно, вещественными и p-адическими числами, то их взаимодействие (например, проявляющееся в языке как связь «подлежащего» и «сказуемого») должно проявляться в объединении двух видов метрик в единое целое (ср. *Вейль Г.* О символизме в математике и математической физике. В сб. *Вейль Г.* Математическое мышление. — М.: Наука, 1989. С. 68).

[18] Появление древесной структуры в таком контексте вряд ли является случайным. Сравнение с представлением о Мировом Дереве, известном практически у всех первобытных народов, напрашивается само собой. Старые авторы представляли и человека как бы состоящем из «деревьев». Это хорошо видно на примере кровеносной и нервной систем, а также скелета, как они изображались в старых анатомических атласах (см., например, *Французскую Энциклопедию* XVIII века).

По отношению к бессознательному человека такое замечание сделал в 1896 г. датский философ и психолог Г. Геффдинг (см. его *Очерки психологии, основанной на опыте*, СПб., 1896, с. 88). Более развернутое описание бессознательного как дерева дал К. Г. Юнг в 1954 г. (см. *Jung C. G.* Alchemical Studies. — Princeton, 1967. P. 251–350). Древесная природа бессознательного проглядывает и в известных языковых метафорах. По отношению к самому языку, это видно даже из лингвистической терминологии («корень слова»). В фольклоре имеется весьма загадочный образ «мысленного дерева» (отсюда «растекаться мыслью по древу», см. *Словарь-справочник «Слова о полку Игореве»* (сост. В. Л. Виноградова). Вып. 3. — Л.: Наука, 1969. С. 120–123).

Заметим, что универсальное дерево Δ можно разложить на две бесконечно ветвящиеся части, соединенные в одной, единственной вершине. Для бессознательного это разложение отвечает сверхсознанию и подсознанию, этим «двум безднам в душе человека» (как это, иногда, описывается в психологической литературе). Для «обычных» деревьев мы имеем, соответственно, видимую крону и подземную корневую систему. Их способность к потенциально неограниченному ветвлению и росту есть определяющая черта растительного царства.

Итак, каждое дерево, имеющееся в природе, растет *одновременно* и в физическом, декартовом пространстве, и в универсальном мировом дереве.

Эти примеры показывают, что имеется некоторое взаимоотношение между древесным и физическим пространствами. Исходно, они *не зависят* друг от друга. Но в некоторых ситуациях первое *может* быть вложено во второе. Такое вложение — это дополнительная математическая структура, непосредственно не проявляющаяся, когда мы говорим о p-адических и архимедовых метриках.

[19] Обзор метафор (глаголов движения), связанных с интеллектуальной сферой человека см. *Арутюнова Н. Д.* Язык и мир человека. —

М., 1998. С. 363–364. Любопытно, что для эмоций характерны не «механические», а скорее «термодинамические» аналогии (например, «кипящие страсти»; см. *Гершензон М. О.* Гольфстрем. — М.: Шиповник, 1922; *Арутюнова Н. Д.* Предложение и его смысл. — М.: Наука, 1976. С. 98–110).

[20]) Можно сказать, что нумерация Гёделя есть реализация платоновской концепции, что идеи суть числа. Эта концепция основана на представлении о дихотомическом определении понятий с помощью процесса деления (диарезиса). Платон пишет об этом во многих диалогах (*Софист*, 218c–226a, 265e–268c; *Политик*, 267b, 276d; *Филеб*, 56c–57d; *Федр*, 265e, 277b; *Парменид*, 43a; *Послезаконие*, 990e). Впоследствии эта конструкция была переработана Аристотелем в его *Категориях*. (см. обзор в *Lloyd G. E. R.* Polarity and Analogy. Two types of argumentation in early Greek thought. — Bristol, 1992. P. 148–161). С давних пор имеется и ее наглядное представление в виде дерева, так называемое «древо Порфирия».

По-видимому, эти построения возникли в результате анализа мифологических представлений о божественной единице и неопределенной двоице (диаде), порождающих все сущее, которые встречаются во многих античных текстах, от пифагорейских фрагментов до Плутарха, Ямвлиха или Прокла (см. *Stenzel J.* Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles. — Leipzig-Berlin, 1924; *Лосев А. Ф.* Критика платонизма у Аристотеля. В кн. *Лосев А. Ф.* Миф. Число. Сущность. — М.: Мысль, 1994. С. 527–712).

Интересный анализ этой ситуации дал Вейль в своей *Philosophy* (p. 53, 150). Там он замечает, что дихотомический процесс можно представить в виде (возможно, бесконечного) дерева, исходящего из одной вершины, и указывает на различие взглядов Платона и Аристотеля по этому вопросу.

[21]) Подобные замечания о роли иррациональных чисел высказывал еще в начале нашего века о. Павел Флоренский в своей книге *Столп и Утверждение Истины* (см. *Флоренский П. А.* Сочинения. — М.: Правда, 1990. Т.1 (II). С. 506–514).

[22]) Противопоставление логического, финитного, идущего шаг за шагом, познания и интуитивного, бесконечного, схватывающего все сразу, в одно мгновение, делалось многими мыслителями, имевшими опыт математической работы (см., например, *Галилей Г.* Диалог о двух важнейших системах мира, Птолемеевой и Коперниковой. — М.–Л.: Гостехтеориздат, 1948. С. 89; *Паскаль Б.* Различие между познанием математическим и непосредственным (в оригинале «difference entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse»). В кн. *Франсуа де Ларошфуко* Максимы. *Блез Паскаль* Мысли. *Жан де Лабрюйер* Характеры. — М.: ИХЛ, 1974. С. 111–112; *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. — Одесса: 1911; *Фло-*

ренский П. А. Столп и Утверждение Истины: «рассудок возможен, если дана ему Абсолютная Актуальная Бесконечность» (с. 488), «всякое объяснение требует бесконечного ряда объяснительных или доказательных звеньев», (с. 485)).

[23] См. *Таннери П.* Первые шаги древнегреческой науки. — СПб., 1902; *Бергсон А.* Творческая эволюция. — М., 1998; *Койре А.* Очерки истории философской мысли. — М.: Прогресс, 1985.

Проведенный нами выше анализ рассуждений Августина о памяти, по существу, близок к парадоксам Зенона. Можно сказать, что это — парадокс Зенона в области логических формул. Сходные рассуждения имеются у Л. Кэррола в его эссе «Что черепаха сказала Ахиллу» (*Керролл Л.* История с узелками. — М.: Мир, 1973. С. 368–372; черепаха убеждает Ахилла, что к обычному аристотелевому силлогизму следует добавить еще одно промежуточное звено, затем еще одно и т. д.). Изложенные в свойственной Керролу игровой форме эти рассуждения не содержат, впрочем, никаких выводов.

Заметим еще, что под континуумом в топологии обычно понимают связное компактное пространство. Если из вещественной прямой выбросить какую-нибудь точку, то в таком некомпактном пространстве легко реализовать парадокс Зенона (Ахиллес действительно не догонит черепаху). Отсюда вытекает, что к рациональным точкам *необходимо* присоединить все предельные точки, т. е. все вещественные числа.

Применяя к умопостигаемому пространству-дереву такие же выводы, мы видим, что дерево Δ должно быть, по крайней мере, компактным. Это однако не так, и, чтобы получить компактное пространство, следует присоединить к Δ его границу $\partial\Delta$ (проективную прямую над полем p-адических чисел). Получающееся пространство будет содержать все «свои» предельные точки, хотя оно и не будет континуумом в топологическом смысле слова (являясь вполне несвязным пространством).

[24] Впрочем, поэты настроены в этом вопросе более решительно. Вспомним известные тютчевские строки или менее известные арабского мистика Омара ибн Аль-Фарида (1180–1234):

Пускай не смеет и не сможет речь
В словесность бессловесное облечь.

Солги глазам и ясность спрячь в туман —
Живую правду сохранит обман.

Прямые речи обратятся в ложь,
И только притчей тайну сбережешь.

(перевод З. Миркиной в сб. *Арабская поэзия средних веков*. — М.: ИХЛ, 1975. С. 529).

[25] Мы намеренно не обсуждаем тут роль теоремы Гёделя в многократно дискутировавшемся во второй половине нашего века вопросе:

«может ли машина мыслить?» Думаю, что наша позиция вполне понятна читателю. Отметим лишь, что первая попытка использовать теоремы Гёделя для отрицательного ответа на этот вопрос принадлежит, по-видимому, английскому философу Дж. Лукасу (*Lucas J. R.* Minds, Machines and Gödel // Philosophy. 1961. V. 36. P. 120–124). Она вызвала целый поток опровержений и критики (см. *Grabiner J. V.* Computers and the Nature of Man: a Historian's Perspective on Controversies about Artificial Intelligence // Bull. Amer. Math. Soc. 1986. V. 15. P. 113–126).

[26)] Это замечание, более или менее справедливое для середины нашего века, теперь может быть легко оспорено. Многие понятия чистой математики, например, категории и топосы, вошли в логику и основания математики. С другой стороны, чисто логические средства и конструкции нашли применения в «обычной» математике. Упомянем работы Дж. Акса и С. Кочена, Ю. Л. Ершова и совсем недавно Е. Хрущовского по диофантовым уравнениям, или применения нестандартного анализа к дифференциальным уравнениям.

[27)] Приведем здесь лишь слова Вейля, предшествующие этому выводу: «Непотревоженный наблюдением «физический процесс» представляется формально математически без интуитивной (anschauliche) интерпретации; только конкретный эксперимент, наблюдение с помощью решетки [т. е. физического прибора — *Авт.*], может быть описано интуитивно. Это противоречие между физическим процессом и наблюдением аналогично противоречию между формализмом и содержательным мышлением в гильбертовой системе математики. Так же, как возможно формализовать интуитивное математическое рассуждение, так же верно, что измерение с помощью решетки можно интерпретировать как физический процесс» (русский перевод этого приложения к книге Вейля см. в сб. *Прикладная комбинаторная математика*. — М.: Мир, 1968. С. 326–339).

Было бы весьма соблазнительно придать этой аналогии точный характер, представив процесс расширения формальной системы в логике как своего рода теорию наблюдения в p-адической квантовой механике на дереве Δ.

[28)] Если считать, что теорема Гёделя показала невозможность сведения мышления к логике, то можно подумать и о других областях науки, где имеется сходная ситуация. В первую очередь, речь может идти о генетике. Имеется явная аналогия между генетикой и логикой, которую, конечно, очень грубо, можно представить так:

геном	
$\Downarrow$	транскрипция + трансляция
организм	

аксиомы	
$\Downarrow$	правила вывода
теоремы	

Как писал К. Х. Уоддингтон, «генотип можно сравнить с системой аксиом, например, аксиом Евклида, а фенотип — с трехтомным учебником евклидовой геометрии» (*На пути к теоретической биологии. I. Пролегомены.* — М.: Мир, 1970. С. 17).

Должна существовать теорема Гёделя в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах.

ГЕРМАН ВЕЙЛЬ — МАТЕМАТИК, МЫСЛИТЕЛЬ, ЧЕЛОВЕК

В конце прошлого века один из посетителей оксфордского Тринити-колледжа принял участие в совместном обеде членов колледжа. Попробовав завязать обычную для оксфордцев беседу со своим визави, он услышал в ответ невнятное мычание. Обращение к соседу справа дало такой же результат. И лишь ректор колледжа рассеял недоумение: «да ведь они математики, мы *никогда* с ними не разговариваем».

Приводя эту историю (или, скорее, легенду) в своей лекции *Две культуры и научная революция*, английский писатель Чарльз Перси Сноу вовсе не хотел лишний раз подтвердить распространенное в обществе представление о чудаковатости математиков. Он имел в виду гораздо более серьезное явление — раскол культуры на две враждебные друг другу части — гуманитарную и научную (scientific), существующий и в сфере ее носителей — художественной интеллигенции и ученых. Говоря о все увеличивающейся стене непонимания и антипатии между обеими группами, Сноу приводит в качестве подтверждающего его точку зрения примера позицию английского поэта Т. С. Элиота. Увы, в этом случае его содержательная и в общем верная критика бьет мимо цели. Глубокая дружба и близость интересов связывали англичанина Томаса Элиота и немца Германа Вейля, математика, чувствовавшего себя как дома по обе стороны стены, разделившей культуру. В этом Вейль был наследником давней культурной традиции, представленной в Германии такими именами, как Лейбниц, позднее Гёте (при всей его нелюбви к математике), и в первой трети нашего столетия — «золотом веке» современной физики — плеядой ее создателей Э. Шрёдингером, В. Гейзенбергом, В. Паули и многими другими.

Жизнь

Герман Вейль родился 9 ноября 1885 г. в небольшом городке Эльмсхорн недалеко от Гамбурга. Несмотря на близость к большому городу, место было достаточно глухим, чтобы впоследствии Вейль смог назвать себя «парнем из деревни». Его родителями были управляющий местным банком Людвиг Вейль и Анна Вейль-Дик. Гимназические годы (1895–1904) Вейль провел неподалеку, в Альтоне. Весной 1904 г. он поступает в Гёттингенский университет, избрав его «главным образом потому, что директор моей гимназии случайно оказался двоюродным братом Гильберта и снабдил меня рекомендательным письмом к нему». Так вспоминал Вейль много лет спустя, в 1944 г., отдавая дань памяти своему только что скончавшемуся учителю.

Свое вступление в науку он описывает далее так: «Во всей полноте моей наивности и невежества я осмелился записаться на объявленный Гильбертом в этом семестре курс лекций о понятии числа и квадратуре круга. Бо́льшая часть материала оказалась выше моего понимания. Но двери нового мира распахнулись передо мной, и, став учеником Гильберта, я скоро ощутил в своем юном сердце твердую решимость во что бы то ни стало прочитать и изучить все, что написал этот человек. После первого курса я отправился домой с *Zahlbericht* [обзор, а по объему целая книга, Гильберта по теории алгебраических чисел — *Авт.*] Гильберта под мышкой, и за летние каникулы я разобрал эту работу, не имея никаких предварительных знаний ни по теории чисел, ни по теории Галуа. Это были счастливейшие месяцы моей жизни, свет которых сквозь годы, обремененные нашим обычным грузом сомнений и ошибок, согревает мне сердце».

Молодой Вейль попадает в круг учеников Гильберта. В их числе были в то время Курант, Теплиц, Хаар. Впоследствии Курант вспоминал, что он был сразу принят в этот «внутренний круг», а вот Вейлю с этим не повезло. Высокомерное отношение большинства к застенчивому провинциалу могло проявиться, среди прочего, и в насмешливой фразе, например, такой: «вот один из тех, кто тоже размышляет о математике».

В 1908 г. Вейль заканчивает университет. Его диссертация, посвященная сингулярным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, находилась еще целиком в русле тогдашних интересов Гильберта. Созданная последним теория интегральных уравнений нуждалась в возможно более широком поле применений.

Жизнь в Гёттингене продолжалась до 1913 г. Этот год — важный рубеж в жизни Вейля. Он получает приглашение занять кафедру в Федеральной высшей технической школе в Цюрихе (в Гёттингене он был приват-доцентом), где и прошли в спокойной, творческой обстановке лучшие годы его математической жизни. Его дань первой мировой войне заключалась в годе гарнизонной службы простым солдатом в Саарбрюккене. В это же время он женится на Елене Йозеф, дочери врача, с которой он прожил почти всю свою жизнь. В 1915 г. у них родился сын Фриц-Иоахим, ставший, как и отец, математиком, а через два года еще один сын — Михаэль. Много лет спустя, в 1938 г., появилась совместная работа Германа и Иоахима Вейлей о мероморфных кривых.

Многие математики, посещавшие дом Вейлей, вспоминали обаяние и жизнерадостность Елены. Ей были близки интересы мужа в философии и его страстная любовь к литературе. Гелла, как ее обычно звали, занималась переводами с испанского на немецкий. Переводила она и испанского философа Ортегу-и-Гассета, интересовавшего Вейля. Елена Вейль скончалась в сентябре 1948 г., когда Вейли давно уже жили в Америке. Ее смерть была для Вейля большим ударом. Слова Р. Куранта на ее похоронах дают нам возможность представить облик Вейля во время их первых встреч: «Известие о помолвке Германа Вейля и Геллы вызвало всеобщее удивление, ибо чести, которой добивались многие, был удостоен робкий, молчаливый человек, далекий от круга признанных законодателей математического мира Гёттингена». Приведя эти слова в своей статье о Вейле, французские математики К. Шевалле и А. Вейль далее продолжают: «Робким, молчаливым, далеким от круга законодателей — таким выглядел Герман Вейль в начале своей карьеры; таким, должно быть, он и остался в глубине несмотря на свои блестящие успехи. Как это часто бывает с робкими людьми, он умел, если ему удавалось сломать барьер своей застенчивости, быть вдохновенным и красноречивым. Вот как он вспоминает о первой встрече со своей будущей женой: "В этот вечер я описывал пожар на гумне, свидетелем которому мне только что довелось быть. Потом она говорила мне, что влюбилась в меня уже тогда, слушая мой рассказ"».

Таким был математик, уже завоевавший себе известность работами по анализу и только что вышедшей книгой о римановых поверхностях, которому предстояло в ближайшие пять лет буквально взорваться целым фейерверком работ по теории чисел (равномерное распределение и оценки тригонометрических сумм), дифференциальной геометрии (жесткость выпуклых поверхностей и пространства аффинной связности), обшей теории относительности (новые решения уравнений теории), единой теории поля, основаниям математики и логике (развитие интуиционизма и новый подход к континууму).

Вейль живет в Цюрихе до 1930 г. Это время его расцвета. В середине 20-х годах появляются работы по теории представлений непрерывных групп и теории инвариантов, выходит несколькими изданиями знаменитое изложение теории относительности *Пространство, время, материя*, содержащее и единую теорию поля, построенную Вейлем в 1918 г.

Во второй половине 20-х годов Вейль вносит существенный вклад в квантовую механику не только своими работами и книгой *Теория групп и квантовая механика*, но и личным общением с создателями новой физики (Э. Шрёдингером, М. Борном, В. Паули). Он находит новую, интегральную форму перестановочных соотношений, ставшую особенно полезной в квантовой теории поля, указывает физикам, что дырки в теории Дирака не могут быть протонами, наконец, предсказывает взаимную связь временных и пространственных отражений с зарядовым сопряжением. Последняя нашла свое воплощение в CPT-теореме, найденной Паули в 40 -х годах.

Двадцатые годы для Вейля — также время напряженных философских поисков и раздумий. В 1926 г. выходит его книга *Философия ма-*

тематики и естествознания. Наконец, это время счастливой семейной жизни. На юбилейном обеде в Цюрихе, посвященном столетию со дня рождения Вейля, его сын Михаэль так рассказывал о тех годах: «Мое детство падает на «двадцатые», время величайшей продуктивности Германа. Иначе говоря, Ахим и я видели его не слишком много, $< \cdots >$ но даже и в этих условиях, довольно часто, в основном воскресными полднями, он снимал с полки потрепанный и загадочный томик *Wolffs poetischer Hausschatz* и читал из него с таким напряжением и силой, что стены тряслись; многие из этих стихотворений я помню и сегодня — сказания о подвигах героев, о трусливых злодеях, об эрлах, возникающих из ночи, о кораблях, застигнутых бурей на озере Эри, об Эль Киле, дерзко скачущем к Заморе. Герман читал эти стихи скорее как песни, полностью поглощая все наше внимание. В наши головы не только вливалась высокая поэзия, но в них и запечатлелся вулкан чувств, охватывавший фигуру отца с книгой». Позднее пришел черед других книг, «а также стихов — море стихов — Гельдерлина, Гёте (больше всего из *Дивана*), Готфрида Келлера, Верхарна, Ницше, Демеля, Франца Верфеля и других и даже пассажи из *Волшебной горы* Т. Манна и *Заратустры* Ницше. Оглядываясь назад, можно сказать, что за этим стояла прозрачная педагогическая идея: заронить в нас любовь к литературе, особенно, конечно, немецкой, приноравливаясь к ребячьим умам и интересам. И я могу сказать, что он в этом полностью преуспел».

Вейля часто приглашали занять кафедры в немецких университетах. Не без колебаний он отклонял эти приглашения, но перед соблазном стать преемником своего учителя в Гёттингене он не устоял. В 1930 г. начались три года его гёттингенской жизни. Конец ей положил нацистский переворот в начале 1933 г. Тяжелые путы, наложенные нацистами на духовную жизнь нации, изгнание многих ученых из институтов и университетов привели Вейля к трудному для него решению — покинуть страну. Политические идеи и тяжеловесная риторика автора *Mein Kampf* вряд ли могли привести к каким-то иллюзиям относительно будущего.

Вейль переезжает в Принстон, в недавно созданный Институт высших исследований, где он будет работать до своей отставки в 1951 г., а затем, вплоть до смерти в 1955 г., состоять его почетным членом. Среди его коллег по Институту — Дж. фон Нейман, А. Эйнштейн, К. Гёдель, во время войны — В. Паули. В таком окружении вряд ли было плохо работать. В 30-е годы в Америке написаны работы по комплексному умножению абелевых функций, по теории потенциала, дифференциальной геометрии, механике. И все же в предисловии к вышедшей в 1938 г. книге *Классические группы, их инварианты и представления* Вейль писал: «Боги наложили на мои писания путы чужого языка, не звучавшего у моей колыбели.

Was dies heissen will, weiss jeder,
Der im Traum pferdlos geritten [1)]

— хотелось бы мне сказать вместе с Готфридом Келлером. Никто более меня не чувствует связанной с этим утраты силы, легкости и ясности выражения». И все же дело было, по всей вероятности, не только в языке. В том же предисловии мы читаем: «Опыт подсказывает мне, что борьба с опасностью слишком сильной специализации и технизации математического исследования особенно важна в Америке. Строгая точность, достижимая математическим мышлением, привела многих авторов к манере изложения, которая должна произвести на читателя такое впечатление как если бы он был заключен в ярко освещенную камеру, где каждая деталь выделяется с одинаково ослепляющей ясностью, но без рельефности. Я предпочитаю открытый ландшафт под ясным небом с его глубиной перспективы, где обилие отчетливо очерченных близких деталей постепенно сходит на нет по мере удаления к горизонту».

Вернуться в Цюрих Вейль смог только после войны, но радость возвращения была омрачена кончиной Геллы в 1948 г. Вейль снова женился через два года на Элен Бер из Цюриха и последующие пять лет своей жизни проводил по полгода в Принстоне и Цюрихе.

9 декабря 1955 г. Вейль скоропостижно скончался через месяц после торжественного празднования своего семидесятилетия. Он умер окруженный любовью близких и учеников, уважением коллег, оставив после себя на редкость завершенное здание математической мысли. Самым трудным для него были, пожалуй, философские размышления и отношения с обществом, когда раздирающее противоречие проходит между любовью к родине и невозможностью существовать в рамках все давящей тоталитарной системы. Вейль рассказал об этом в последний год своей жизни, вспоминая былые времена в Цюрихе: «Жизнь в стране, где у власти находилось это исчадие ада и позор немецкой нации [Гитлер], стала для меня невыносимой, и хотя эмиграция была горьким решением, давшимся мне ценой тяжелых душевных переживаний, я отряхнул пыль отечества со своих ног».

Выбор, сделанный Вейлем в 1933 г., приходилось делать многим в XX веке, и не только в Германии. Имеет смысл поэтому сравнить судьбу Вейля с судьбой другого выдающегося представителя немецкой культуры — физика Вернера Гейзенберга. В диалогах *Часть и целое* Гейзенберг описывает мучительные раздумья о своей жизни в нацистской Германии, трудные разговоры с эмигрировавшими физиками (летом 1939 г. в Америке). Он предпочел остаться, понимая всю тяжесть своего выбора — неизбежность моральных компромиссов, да и прямой опасности

[1)] Что это значит — каждый знает,
Кто скакал во сне без коня.

для жизни (во время войны он был близок к людям, организовавшим покушение на Гитлера в 1944 г.). Результаты жизненной позиции его и таких ученых, как Планк, Ган, теперь можно оценить: атомное оружие, оказавшее столь роковое влияние на развитие человечества, было создано не в Германии. После войны, когда все лежало в руинах, именно авторитет этих ученых обусловил возможность возрождения немецкой науки и образования. Свою лепту в это дело внес и Вейль двумя лекциями 1945 г. об истоках системы немецкого университетского образования. В 1953 г. они были опубликованы под заглавием *Университеты и наука в Германии*.

Развитию математики после войны очень помог основанный в сентябре 1944 г. В. Зюссом институт в Обервольфахе (недалеко от Фрайбурга) и предназначенный исключительно для проведения научных конференций. 25 октября 1951 г. Герман Вейль (вместе с сыном Иоахимом и невесткой Мартой) в знак благодарности за оказанное гостеприимство оставил в книге гостей два коротких стихотворных экспромта[2], первый по-немецки, второй по-английски — это были два языка, на которых написаны все его работы.

Два кратких наставления капуцинов

Спотыкаясь о Штолля и Штайна[3],
Я в Шварцвальде бродил неприкаянно
И в такую чащобу залез — Переменные скрыли весь лес.
Приуныл я тут было,
Но достало мне силы,
Взял я в руки себя и сказал:
«Пусть в Шварцвальде темно,
Мюнстер тоже не светел,
Бодрость духа ты зря не теряй.
Сквозь деревья вдали ведь просвет уж заметен:
Цюрих, Хельсинки там, так и знай».
И вся тяжесть с души моей сразу же спала,
Лгать не стану — мне истина стала сиять:
Пфлюгер подал пример, ничего, что нас мало,
Будем малым числом поле функций пахать.

[2] Опубликованных впоследствии в *Perspectives in Mathematics* (*Anniversary of Oberwolfach 1984*) (Basel: Birkhauser, 1986), и переведенных Ю. А. Даниловым. Помимо его переводов в этом очерке использованы переводы Б. В. Бирюкова, Е. И. Коркиной, Д. А. Райкова, Д. Б. Фукса и автора.

[3] Штолль (W. Stoll) и Штайн (K. Stein), обычная транскрипция «Штейн», — немецкие математики, представители мюнстерской школы. Эти слова перекликаются еще с Stock und Stein (камни, горы).

Зюсс разослал всем cable[4].
Собрались — кто в дождь, кто в Nebel,
Под гостеприимный gable
Лоренцхофа — в новый Babel.
Нож и вилка здесь наш label.
Стол накрыт, не стол, а table.
Сколь душа, наш ум и тело were able
Проглотить, столь было яств.
Доски все, конечно, — stable.
Места хватит для всего:
и для правды, и для fable,
Излагаемых по вкусу:
кто by talk, а кто by chalk.
Ныне по домам we walk.

В этих стихах искусно сплетены и отношение Вейля к создателям теории функций многих комплексных переменных, и окружающая Обервольфах природа Шварцвальда, и противоборство двух школ теории функций, и намеки на католическое влияние в Мюнстере. В них видна неподдельная радость автора, с легкостью подчиняющего себе стихии двух языков.

Мысли

Когда читаешь написанные Вейлем математические работы, может показаться, что все это он сделал легко, как бы играючи, в них невозможно найти следы отчаянных усилий и срывов, хорошо известных каждому математику. Картина резко меняется, если мы обратимся к его философским размышлениям. Их незавершенность сразу бросается в глаза. Вот как сам Вейль сравнил эти два пласта своей жизни: «В духовной жизни человека отчетливо различаются, с одной стороны, сфера действия, создания форм, конструирования — это сфера, которой посвятили себя активно работающие художники, ученые, инженеры, государственные деятели и которая подчинена императиву объективности, с другой стороны сфера осмысления; эта сфера реализуется в понимании, и на нее следует смотреть как на борьбу за смысл наших действий, как на собственную сферу философа. Творческому деянию, не контролируемому осмыслением, грозит опасность утраты смысла—оно может сбиться с пути, окостенев, превратиться в рутину; но и осмысление подстерегает опасность выродиться в подрывающие творческие

[4] Лоренцхоф — первоначальное место института, около Обервольфаха, cable — телеграмма. Nebel (*нем.*) — туман, gable — фронтон крыши. Babel — Вавилон, label — знак, table — стол, were able — были способны, stable — устойчивы, fable — сказка, by talk–словами, by chalk — мелом, we walk — мы пошли.

силы человека «рассуждения по поводу», которые никого ни к чему не обязывают».

Но к подобным мыслям Вейль пришел в конце 20-х гг., когда за плечами были уже многие вершины. А началось все в последнем классе гимназии, когда на чердаке родительского дома был найден никому не нужный экземпляр краткого комментария к *Критике чистого разума*. Спустя пятьдесят лет это событие было описано так: «Одним толчком я был пробужден от «догматического забытья», в моем юношеском сознании мир был решительно поставлен под сомнение». Впрочем, уже через год чтение *Оснований геометрии* Гильберта в университете вернуло юному уму устойчивый взгляд на окружающий мир. Затем последовал период «позитивистского спокойствия» и, наконец, знакомство в 1913 г. с феноменологией Эдмунда Гуссерля, немецкого философа, работавшего в то время в Гёттингене. «...Именно Гуссерль освободил меня от позитивизма и возвратил к более широкому взгляду на мир» — продолжает Вейль в своем философском «завещании» *Познание и осмысление*. Памяти Гуссерля он посвятил в 1940 г. работу *Призрак модальности*, анализирующую понятие «возможности» в окружающем нас мире: математическом, физическом, наконец, просто человеческом.

По воспоминаниям сына Вейля в двадцатые годы среди мыслителей, привлекавших его внимание, были Демокрит, Лейбниц, Кант, Фихте, Гуссерль, Кассирер, Рассел, но и подчеркнуто далекие от науки — Кьеркегор, Ницше, Хайдеггер, Ясперс, Экхарт. Трехтомную *Философию* Ясперса Вейль читал целыми днями по субботам и воскресеньям, обсуждая прочитанные главы с семьей и друзьями, а в 1947 г. в Гейдельберге ему довелось обсуждать и с самим философом параллели между экзистенциализмом и современной физикой.

Глубоко проникая в мир философии, Вейль никогда не забывал свои математические корни. Придумав геометрическую аналогию теории познания (о ней см. ниже), он тут же интерпретирует на этом языке высказывания Гуссерля и, обнаруживая, что некоторые из них становятся ложными, говорит о «серьезном подозрении к ним». Другой яркий пример — отношение Вейля к Б. Расселу как мыслителю. В 1946 г. он написал рецензию на том *The Library of Living Philosophers*, посвященной Расселу. В ней Вейль приводит следующую историю из жизни последнего: «Я помню в точности момент, один день в 1894 г., — рассказывает Рассел — когда во время прогулок по Тринити-Лейн во мне вспыхнула уверенность, что онтологический аргумент (в пользу бытия Бога) верен. Я вышел, чтобы купить коробку табака: когда я шел обратно, я неожиданно подбросил ее в воздух и, ловя, воскликнул: «Великий Скотт [Иоанн Дунс Скотт — английский философ и богослов XIII века. — *Авт.*], онтологический аргумент — просто звук». Может ли кто-нибудь после этого анекдота сомневаться, что по своей натуре Рассел — философ, но не математик?»

Говоря о философских интересах Вейля, нельзя, конечно, не вспомнить и интеллектуальную атмосферу Цюриха 20-х годов.

В 1921–1927 гг. вместе с Вейлем в Высшей технической школе работал физик Э. Шрёдингер, человек разносторонних интересов. Среди его книг — и философские очерки, и *Что такое жизнь с точки зрения физика?* — знаменитое изложение генетики, и сборник стихов. По словам Шрёдингера, математические советы и поддержка Вейля были неоценимыми, когда он создавал свою волновую механику. Строя теорию цветового пространства, Шрёдингер опирался на конструкции аффинной геометрии, почерпнутые в книге Вейля *Пространство, время, материя*, а излагая основы генетики в своей *Философии математики и естествознания* 1949 г., Вейль многое почерпнул из книги Шрёдингера.

Другая незаурядная личность, с которой Вейль много общался, — Вольфганг Паули, также преподававший в Высшей школе (с 1928 г.). Позже им довелось провести вместе военные годы в Принстоне. Свидетельством их отношений более раннего времени является сохранившаяся переписка. Помимо проблем теории поля, в ней обсуждался вопрос о месте причинности в физике. В своей работе *Соотношение причинного и статистического описаний в физике* (1920) Вейль предположил, в рамках чисто философского обсуждения, что будущая физическая теория должна порвать с причинностью. В этих обсуждениях принимал участие и Эйнштейн, для которого акаузальный подход был неприемлем. Недавно историки науки высказали соображения, что эти идеи Вейля могли оказать впоследствии влияние на возникновение вероятностной интерпретации квантовой механики. Но помимо чисто научных вопросов, у Паули и Вейля было о чем поговорить. Изучение Паули античной и средневековой философии и науки, его интерес к таким фигурам, как Плотин, Прокл или Кеплер, и, наконец, его тесные связи с психологом К. Г. Юнгом, еще одним жителем Цюриха, вряд ли были неинтересны Вейлю. Связи Вейля (как и Шрёдингера) с Юнгом были, по-видимому, более отдаленными. Они выразились в участии в 1948 г. в XXVI конференции (Eranos conference), ежегодно устраиваемой на Лаго Маджоре в Швейцарии. В них участвовали близкие Юнгу ученые, философы, богословы. Работа Вейля *Наука как символическая конструкция человека* появилась в трудах конференции, посвященной в том году проблеме человека, в окружении работ физика М. Фирца и биолога А. Портмана.

Размышления Вейля над философскими вопросами науки не прекращались и позже, в Америке. В 1949 г. он выпускает новое, английское издание *Философии математики и естествознания*. Через несколько лет в *Познании и осмыслении* Вейль писал об этой книге: «У меня уже не хватило мужества написать ее заново с учетом тех изменений в научном знании и философии, которые произошли за эти годы. Я ограничился тем, что выправил старый текст, переработал некоторые разделы и написал заново несколько приложений, которые потребовали у меня больше усилий, чем некогда вся книга». В этих приложениях Вейль выходит за границы математики и физики, которые доминировали в первом издании книги 1926 г. Он пишет о генетике, химии, связи физики и биологии, об идее эволюции в естествознании. Его старым привязанностям — квантовой теории и основаниям математики — также отданы два приложения, ведь после 1926 г. окончательно оформилась квантовая механика и появилась теорема Гёделя о неполноте. Очерк последней, данный на широком философском и историческом фоне (с подробным экскурсом, например, в историю парадокса лжеца), является лучшим введением в этот круг вопросов.

В приложении, посвященном квантовой теории, Вейль вспоминает свою старую геометрическую аналогию теории познания. В ней объекты познания, субъекты (или многие *Я*) и явление объекта субъекту сравниваются соответственно с точками плоскости, системами координат и координатами точки. Пользуясь этими сопоставлениями, Вейль анализирует различные философские доктрины. Об этой аналогии, которая, видимо, была ему дорога, он говорит также и в *Познании и осмыслении*. Вейль с радостью отмечает, что она в точности совпадает с той схемой состояний и наблюдаемых, которая позднее появилась в квантовой механике. Впрочем, одно отличие двух схем все же имеется: в квантовой теории пространства являются комплексными. Занятно, что совсем другая конструкция раннего Вейля — фазовый множитель его единой теории поля — тоже появилась в квантовой механике умноженная на i.

Говоря о связи физики и биологии, Вейль высказывает сомнения по поводу ортодоксальных интерпретаций эволюции и происхождения жизни. Эти взгляды разделяли также многие его коллеги, математики и физики. Ряд конкретных соображений, высказываемых Вейлем в связи с этим, можно найти и у биологов (например, у таких представителей отечественной школы критиков дарвинизма, как Н. Я. Данилевский, Л. С. Берг, А. А. Любищев), но, скорее всего, Вейль пришел к ним самостоятельно.

Обсуждая в другом приложении комбинаторные идеи в генетике, Вейль демонстрирует удивительную способность перебрасывать мосты между самыми удаленными областями человеческой мысли. Изменения генотипа во времени приводят к проблеме выяснения его тождественности самому себе. Приводя различные определения тождественности, Вейль вспоминает, что та же проблема возникает в психологии (тождественность человеческого *Я*) и указывает, что она решается в мировой литературе в сценах узнавания, начиная с *Одиссеи*. Эти замечания Вейля перекликаются с анализом проблемы тождественности литературного героя, данным в предвоенные годы М. М. Бахтиным в его исследовании пространства-времени (хронотопа) литературных произведений. Вообще проблема тождества волновала Вейля во всех ее обличьях. Так, он неоднократно подчеркивал загадочность тождественности всех элементарных частиц одного сорта.

Мы привели здесь лишь несколько мыслей Вейля из щедрой их россыпи на страницах *Философии*. Как же сам Вейль оценивал свою работу? Приведенные выше его слова продолжаются так: «Как часто я с трудом удерживался от того, чтобы оставить работу, а когда приложения были написаны, швырнуть их в огонь». Эти поразительные слова, вряд ли способные вызвать сочувствие прагматически настроенного читателя, могут иметь несколько истоков. Хотя Вейлю и везло с окружением, в более широких кругах философски ориентированной интеллигенции его идеи должны были скорее отторгаться. Рассел или Карнап были там явно предпочтительнее. С другой стороны, математику вообще нелегко высказываться по философским вопросам, и Вейль всегда чувствовал, что «здесь нельзя обойтись вовсе без компромиссов», да и «крики беотийцев» задевают даже самых великих.

А его волновали не просто философские вопросы науки. Вейль пробовал идти гораздо дальше, пытаясь проникнуть в ту сферу бытия, которая, казалось, раз и навсегда была отвергнута наукой Нового времени. Вот некоторые свидетельства этого пути. «Из событий моей духовной жизни счастливейшими для меня были: изучение в бытность мою еще юным студентом (в 1905 г.) великолепной работы Гильберта *Zahlbericht* и чтение Майстера Экхарта, захватившее меня в чудесные дни пребывания в Энгадине зимой в 1922 г. Отныне для меня открылся доступ в религиозный мир $< \cdots >$ Я так и не довел до конца те религиозно-метафизические спекуляции, на которые меня толкнули Фихте и Экхарт; здесь, впрочем, сказалась, наверное, и природа самого объекта», «в связи с изучением Фихте я сам в те далекие времена месяцами предавался метафизическим размышлениям о Боге, Я и Мире, в которых, казалось, мне открывается последняя истина. Должен признаться, что от тех размышлений в моей памяти не сохранилось никаких следов».

Но осталась книга *The Open World*, вышедшая в 1932 г. и подводящая итог поиска математиком Мирового Абсолюта. Он таков: «Бог, как завершенное бесконечное, не может и не будет постигнут им [разумом — *Авт.*]; ни Бог не может проникнуть в человека путем откровения, ни человек не может постичь Бога путем мистического восприятия. Завершенное бесконечное мы можем выражать только в знаках».

Эти вопросы волновали в нашу эпоху не одного Вейля. Летним вечером 1952 г. Гейзенберг и Паули (или скорее носящие их имена персонажи диалогов Гейзенберга *Часть и целое*) вели неторопливую беседу, гуляя вдоль моря по одной из набережных Копенгагена. Неожиданно Паули спросил: «Веришь ли ты в личностного Бога?» Ответом была такая переформулировка этого вопроса: «Может ли кто-либо постигнуть глубинный порядок вещей или событий, существование которого, кажется, не вызывает сомнений, так же непосредственно, как он постигает душу другого человека?» В конце концов друзья согласились, что они вряд ли могут следовать словам знаменитого амулета Паскаля «Бог Авраама, Исаака и Иакова — не философов и ученых», и вернулись к прерванному обсуждению несимпатичной им позитивистской философии.

Чтобы яснее очертить существо вопроса, сравним еще Вейля с такой фигурой русской научной и философской мысли, как П. А. Флоренский. Они почти ровесники (Флоренский родился в 1882 г.), но Флоренскому не удалось сполна раскрыть свои дарования. В том же году, когда Вейль покинул Германию, Флоренский был арестован и отправлен в Сибирь, а в 1937 г. его жизнь была насильственно прервана. Как и Вейль, Флоренский интересовался и занимался многими областями науки, им обоим было присуще глубокое понимание языка, как человеческого, так и научного, их объединяли математическое образование и литературный талант, и, наконец, оба они пришли к теологическим проблемам. Но если Вейль шел к ним, исходя из своего математического опыта, твердо стоя на территории, освоенной наукой, и лишь заглядывая в область трансцендентного бытия, то для Флоренского, одного из крупнейших православных богословов, истина Откровения была, конечно, центром, вокруг которого кристаллизовались его занятия отдельными науками и попытки соединить их в единое целое. Естественно, что и его гносеологические выводы были совсем другими: «Познание не есть захват мертвого объекта хищным гносеологическим субъектом, а живое нравственное общение личностей, из которых каждая для каждой служит и объектом и субъектом. В собственном смысле познаваема только личность и только личностью».

И все же, несмотря на это принципиальное различие, у Вейля и Флоренского можно найти много общего не только в интересах, но и в достигнутом. Так, приведенная выше геометрическая аналогия Вейля очень близка по типу рассуждений ко многим «моделям» Флоренского [5]. Можно только гадать, чем бы завершились эти поиски, если бы на плечи ищущих не бросался век-волкодав.

Оглядывая еще раз жизненный путь, пройденный Вейлем, во всем многообразии его связей с окружающим Миром, нельзя не признать, что его уход из науки совпал с эпохой ее кардинального изменения. Из науки ушли единство и бескорыстность знания.

[5] См., например, раздел «Иррациональности в математике и догмате» в кн.: *Флоренский П. А.* Столп и утверждение истины. — М., 1914 (переиздание 1990) или его рассуждения о Лицах Троицы (Переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским // Историко-математические исследования. Вып. 31. — М.: Наука, 1989. С. 116–190).

ЕЩЕ РАЗ О «НАУЧНОЙ КАРТИНЕ МИРА»

> Тогда не побоимся и науки.
> Пути даже новые в ней укажем.
>
> *Ф. М. Достоевский*

Тревожной приметой нашего времени является растущее в обществе враждебное отношение к науке. К науке как таковой, к людям, ее делающим, а не только к отрицательным последствиям развития ее и связанной с нею техники. Последнее, конечно, вполне понятно и оправданно. Этот смутный протест существует рядом с непоколебимой уверенностью большинства ученых в непогрешимости научного метода познания мира, в способности науки при правильном ее применении участвовать в решении любых проблем, стоящих перед человечеством. Очень ясно эти надежды представлены в трудах покойного А. Д. Сахарова [1].

Быть может, поэтому в научной среде крайне редко обсуждаются вопросы о границах научного познания, о соотношении его принципов и этических норм или о взаимоотношении науки и религии.

В последнем номере 1989 года *Новый мир* опубликовал статью В. Н. Тростникова *Научна ли «научная картина мира»?* В ней сделана попытка показать, что наука в своем развитии сама отвергла ряд концепций, которые длительное время определяли ее развитие и были, так сказать, «скверной» научного метода.

Можно было бы только приветствовать обращение *Нового Мира* к этому кругу вопросов, если бы статья Тростникова не содержала целый ряд ошибок и необоснованных утверждений [2].

Однако не в этом главная причина, побудившая меня обратить на нее внимание. Дело в том, что часть основных тезисов Тростникова, если их очистить от ненужных преувеличений и неточностей, я вполне разделяю. Так что, с моей точки зрения, его статья лишь дискредитирует нечто интересное и нужное.

Речь идет о таких утверждениях автора как «математике открылась ложность рационализма» и «физика опровергла редукционизм». Входящие сюда термины имеют, говоря совсем кратко, по-школьному, следующий смысл: рационализм — представление, что разум человека достаточен для познания мира, редукционизм — представление, что высшие формы бытия могут быть сведены к низшим.

Верно, что в современной математике и физике появились результаты и теории (теорема Гёделя о неполноте в математической логике и теория наблюдения в квантовой физике), которые дают основание пересмотреть прежние взгляды на рационализм и редукционизм. Но не более того! И неудивительно, что подобный пересмотр был сделан очень немногими учеными. Правда, среди них такие глубокие и культурные умы XX века, как Г. Вейль и Дж. фон Нейман в математике, Н. Бор, В. Гейзенберг, В. Паули в физике. Подавляющее большинство исследователей (в их числе, например, П. Дирак и А. Эйнштейн) придерживались и придерживаются старых взглядов на мир.

Потому утверждая, что «физике открылась ложность редукционизма» и что «она его полностью опровергла», Тростников выдает желаемое за действительное. Современное научное сообщество в своем большинстве так не думает. Так, один из самых популярных сейчас физиков-теоретиков С. Хокинг недавно предсказывал (хочу надеяться, что не вполне серьезно) создание в скором времени единой физической теории, которая объяснит все, что только можно, и тогда физики превратятся в вычислителей, которым только и останется решать уравнения этой теории [3].

Вот другой пример, выходящий за рамки физики, — утверждение, что «борьба с «редукционизмом» и «физикализмом» [т. е. сведением биологии к физике — *Авт.*] не только бессмысленна, но и вредна для науки», сделанное биофизиком, который по своему профессиональному положению должен хорошо разбираться в квантовой теории [4].

Многие физики, особенно послевоенных поколений, считают, что происшедший в XX веке переворот в естествознании носит лишь «технический» характер. Прекрасно об этом «американском» стиле в мировоззрении ученых рассказано в диалогах Гейзенберга *Часть и целое*, недавно опубликованных и по-русски.

> Вы, европейцы, и особенно немцы, склонны относиться к подобным идеям страшно принципиально. Мы смотрим на все гораздо проще.
>
> — Так значит тебя ничуть не удивляет, — заметил я [Гейзенберг — *Авт.*] — что электрон в одном случае выступает как частица, а в другом — как волна $< \cdots >$
>
> — Еще как удивляет; но раз я вижу, что такое происходит в природе, мне надо с этим мириться $< \cdots >$ Как ни посмотри, речь идет либо о более или менее эффективных усовершенствованиях и квантовая механика тоже явно будет еще совершенствоваться, когда потребуется корректное описание других, еще не так хорошо известных явлений $< \cdots >$
>
> Весь этот бартоновский [собеседник Гейзенберга — *Авт.*] способ рассмотрения был мне совершенно не по душе [5].

Вы, европейцы, и особенно немцы, склонны относиться к подобным идеям страшно принципиально. Мы смотрим на все гораздо проще.

— Так значит тебя ничуть не удивляет, — заметил я [Гейзенберг — *Авт.*] — что электрон в одном случае выступает как частица, а в другом — как волна $< \cdots >$

— Еще как удивляет; но раз я вижу, что такое происходит в природе, мне надо с этим мириться $< \cdots >$ Как ни посмотри, речь идет либо о более или менее эффективных усовершенствованиях и квантовая механика тоже явно будет еще совершенствоваться, когда потребуется корректное описание других, еще не так хорошо известных явлений $< \cdots >$

Весь этот бартоновский [собеседник Гейзенберга — *Авт.*] способ рассмотрения был мне совершенно не по душе [5].

И причина этому не только в расхождении взглядов. Для Гейзенберга наука была не изолированной, замкнутой в себе сферой деятельности, а частью культуры, связанной с нею многочисленными и неразрываемыми нитями. Еще в юности он был очарован диалогами Платона. Стимул для построения своей теории элементарных частиц Гейзенберг находит в платоновском *Тимее*. На склоне лет он отваживается изложить увиденное и передуманное не в обычных мемуарах, а возрождая прочно забытый жанр своего любимого мыслителя.

Подобное мироощущение было в европейской науке первой трети XX века скорее правилом, чем исключением. Так, Вейль вполне органично соединял свои занятия математикой и физикой с их осмыслением через немецкую философию, от Майстера Экхарта до Ясперса. Нильс Бор, создавая модель строения атома, читал ночами напролет сочинения Кьеркегора и трактат Джемса по психологии, находя их созвучными своим поискам в физике.

Послевоенные годы принесли большие изменения в научную среду. Раскол культуры на две части, научную и гуманитарную (или художественную), привел к такому же расколу и в душах исследователей. И вот, выдающиеся ученые, люди широко образованные, тонкие знатоки живописи и музыки, стали отстаивать утверждения, что человек является сложной материальной системой, но системой конечной сложности и весьма ограниченного совершенства и поэтому доступной имитации. Или утверждать, что нет ничего отталкивающего или пугающего в возможности «закодировать» человека и «передать по телеграфу» в другое место и т. д.

Памятные моему поколению прогнозы построения интеллектуальных автоматов, делавшиеся у нас в 60-х годах, по существу могли быть сразу же опровергнуты именно теоремой Гёделя, полученной за тридцать лет до того и дружно проигнорированной этой частью научного сообщества. Будущим историкам науки придется долго разбираться, почему запрет существования вечного двигателя — это естественная максима нынешней науки, а попытки сформулировать запрет существования «думающей машины» считаются тормозом на пути прогресса.

Поворот в физике

Говоря о физике, стоит остановиться подробнее на том, что принципиально нового внесла квантовая теория в научное мировоззрение. Поворот в точном естествознании происходил в нашем веке в то самое время, когда в науки, считавшиеся традиционно гуманитарными, стали проникать идеи и методы точных наук. Принцип точности, объективности теоретических построений и обязательности эксперимента, как замена «отживших свое» традиционных методов в психологии, а затем и в языкознании и даже литературоведении, изгнание из этих наук личностного начала, стали рассматриваться как синонимы прогресса в науке.

И вот в то время, когда из научной психологии, казалось бы, навсегда были изгнаны «душа», «сознание» и многое другое, именно физики заговорили о «свободе воли» у электрона, о роли сознания наблюдателя в физическим эксперименте. Попытки понять ни на что не похожую реальность, открывшуюся перед физиками, вынуждали их на поистине отчаянные действия. Таким был и ничего не давший отказ от закона сохранения энергии. В 1919 г. английский физик Ч. Г. Дарвин, внук знаменитого натуралиста, пришел к мысли, что, может быть, придется «в качестве последней возможности приписать электрону свободу воли». Зная теперь дальнейшее развитие квантовой теории, устоявшейся в своих основах к концу 20-х годов, можно интерпретировать эту идею следующим разумным образом.

Предсказания в квантовой теории носят существенно вероятностный характер. Говоря о распаде атома в результате какого-либо процесса, мы можем найти лишь вероятность этого события, которая подтверждается на большой совокупности распадающихся атомов. Предсказать, когда данный, конкретный атом распадется, квантовая теория не может и, более того, она не допускает, что в будущем появится более полная теория, которая ответит на этот вопрос. Этим вероятностный мир квантовой теории принципиально отличается от обычных представлений о вероятности (бросание монет, лотерея), когда считается, что вероятностный исход обязан нашему незнанию подлинной ситуации.

Разумеется, этот основополагающий принцип квантовой теории тоже основан на каких-то допущениях и формально можно пытаться его обойти. Что неоднократно и безуспешно, поскольку опровергалось экспериментом, и делалось. В этих «неудачах» и есть, если угодно, своеволие электрона, его свобода.

Психологическая подоплека всех попыток опровергнуть квантовую теорию состоит в том, что революционный характер новой физики является революционным не в расхожем, а в буквальном смысле этого слова. Она возвращает (или скажем помягче, намекает на возможность возвращения) к тем представлениям о мире (прежде всего, о его одушевленности), с которыми наука упорно боролась столетиями. И неудивительно, что психологам, приверженцам точных методов, не пришло в голову воспользоваться в качестве модели поведением электрона, когда они оказались полностью неспособными понять феномен свободы воли. Проще было подчиниться духу времени и признать свободу воли чем-то вроде артефакта.

Намного большую известность получила введенная Н. Бором концепция дополнительности. Приведенный выше диалог из книги Гейзенберга как раз описывает ситуацию, для понимания которой эта концепция и была придумана. Как в одной и той же непротиворечивой теории соединить две явно противоречащие друг другу картины мира, корпускулярную (когда реальность выступает в виде частиц) и волновую (когда та же самая реальность воспринимается как волны)? Бор постоянно подчеркивал, что эта ситуация встречается не только в физике, но и в других науках и вообще в жизни [6].

Приведем характерный пример из психологии зрительного восприятия. Известны картины-перевертыши, когда одна и та же (как физический предмет) картина может восприниматься в разные моменты времени психологически как два совершенно разных по смыслу изображения. И это обстоятельство носит полностью объективный характер, оно не зависит от того, кто наблюдает картину.

Первые примеры такого рода в психологии представляли собой изображение фигуры на некотором фоне, скажем вазы, разбивающей окружающий ее фон на две части. Неожиданно наблюдатель видит вместо фона два лица, обращенных друг к другу и разделенных фоном, который раньше был вазой. Эти две картины переживаются каждая очень живо и цельно, но никогда не вместе! Вместе, в один и тот же момент времени, они просто не существуют. Есть и более занятные картинки такого рода (например, «девушка и старуха»). Подробно такие явления в восприятии исследовал датский психолог Э. Рубин, входивший в круг людей, с которыми общался Бор и где он мог найти какие-то стимулы для своих идей.

Другой интересный пример относится к языкознанию и принадлежит ученику Бора физику Дж. Уилеру [7]. Здесь речь идет о дополнительности смысла некоторого высказывания и его формальной (знаковой) структуры. Грубо говоря, понимая то, что нам говорят, мы не воспринимаем, из каких отдельных элементов (слов, морфем, фонем) состоит произносимое. И наоборот, слишком пристальное внимание к анализу структуры высказывания уничтожает, или отдаляет, его смысл (вспомните чтение по слогам или по буквам). Идея эта весьма перпендикулярна доминировавшему в науке о языке в нашем столетии представлению о соответствии между «смыслом» и «знаком (текстом)», точнее между означаемым и означающим. По-видимому, по этой причине этот круг мыслей и не оказал никакого влияния на языкознание, хотя Бор и пытался привлечь лингвистов и психологов к своим идеям [1)].

[1)] Лишь в последние десятилетия при изучении речи было открыто явление, напоминающее идею Уилера. Я имею в виду резкое различие в восприятии таких сторон речи как ее формальная, в частности фонетическая и грамматическая, структура и просодические характеристики, прежде всего интонация. В экспериментах по изучению асимметрии мозга было обнаружено, что восприятие человеком этих двух сторон речи подчиняется таким закономерностям, что их вполне можно считать дополнительными по Бору [8].

Сравнивая имеющуюся здесь пару дополнительных описаний речи с парой рассмотренной Уилером, мы видим, что они совпадают ровно наполовину, в обе па-

Представления о вероятности и дополнительности входят в качестве составной части в теорию наблюдения в квантовой физике, описывающую как происходит изучение реальности. Ситуация здесь кардинально отличается от того, что признавалось предшествующими поколениями естествоиспытателей и получило оценочное название «классической картины мира». В ней мир полностью независим от находящегося как бы в стеклянной клетке и изучающего мир наблюдателя. В полной противоположности, квантовая теория показала, что, по слегка перефразированным словам Бора, не только в драме жизни, но даже и в физической лаборатории, мы — одновременно и зрители и актеры.

Но это именно то естественное, нормальное состояние, в котором человечество пребывало в течении почти всей своей истории.

Смысл теории наблюдения в квантовой физике, построенной фон Нейманом, можно проиллюстрировать на рассмотренном выше примере картин-перевертышей. Допустим, что мы хотим найти физический прибор, который бы решал что же изображено на картине? Квантовая теория утверждает, что какое бы устройство мы ни ставили между собой и картиной, оно всегда будет воспринимать распределение красок на полотне, но никогда не смысл изображения! Можно сказать, что смыслом (ваза или лица) картину наделяет сознание наблюдателя, которое невозможно заменить каким-либо физическим прибором. При этом, как подчеркивал фон Нейман, этот вывод остается в силе, если мы включим в физический прибор, используемый для наблюдения, и глаза наблюдателя, и его нервные пути, и даже его мозг!

Это и есть самое сильное возражение против редукционизма, которое можно сделать на основе квантовой теории. В данном случае, против сведения сознания к физическим формам бытия.

Все эти идеи, появившиеся среди физиков в 20–30-х годах, вызвали неприятие части коллег, враждебное отношение философских кругов, от позитивистов до марксистов [2], полное равнодушие, а потом и незна-

---

ры входит формальная структура высказывания. Это подсказывает существование какой-то аналогии и между оставшимися членами этих пар: смыслом высказывания и его интонацией. Пытаясь сформулировать эту аналогию, можно предположить, что смысл высказывания представляет собой тоже интонацию, или скорее мелодию, но развертывающуюся в каком-то ином, семантическом пространстве. Эта идея позволяет дать новую интерпретацию двум направлениям философии языка: проходящем через всю патристику представлении о двух видах речи, Божественной и человеческой, и учению П. А. Флоренского о строении слова. Более подробно см. с. 152–153 и 228–234 наст. изд.

[2] Иногда критические отзывы показывают,что их авторы прекрасно понимают, что новые идеи уводят очень и очень далеко! Так философ М. Бунге писал в своей книге *Философия физики*, что развитие физики в направлении идей фон Неймана потребовало бы «привлечения всех наук о человеке: антропологии, психологии, социологии и т. д.» и поставило бы физику «в зависимость от состояния наук о человеке», что явно нежелательно, ведь «современная наука родилась как раз как оппозиция антропоцентризму». Ему вторил Дж. Бернал: «А если электрон обладает свободной волей,

ние последующих поколений физиков и представителей смежных профессий. Хорошо известны изнурительные споры Бора и Эйнштейна об интерпретации квантовой теории. Эйнштейн так и не принял до конца жизни новых идей и надеялся на возврат к предшествующей картине мира.

Тем более все это не дошло до гуманитариев. Те же из них, кто тянулся, в духе времени, к точным наукам, предпочитали вдохновляться старой картиной мира, отвергнутой квантовой теорией. Удивительное исключение представляет наш соотечественник М. М. Бахтин, который упоминает теорию наблюдения в квантовой физике в своих поздних записях [9]. В воображаемом диалоге, вполне в стиле книги Гейзенберга, могли бы встретиться физик Эйнштейн и филолог Бахтин. В ответ на излюбленный вопрос Эйнштейна «Изменяется ли состояние горы, если ее наблюдает мышь?» Бахтин бы ответил: «Событие, которое имеет наблюдателя, как бы он ни был далек, скрыт и пассивен, уже совершенно иное событие».

Инакомыслие в биологии

Скажем теперь несколько слов о биологии, о том, что она «опровергла эволюционизм» — третий тезис, отстаиваемый Тростниковым. Здесь говорить о каких-то результатах, дающих повод сомневаться в эволюционизме, по-видимому, нельзя. Новомировский автор очень неудачно соединяет идею эволюционизма (придавая ей специально зауженный смысл) и механизм эволюции («автоматизм развития», в его словах). В современной биологии эти вещи тщательно различаются, и отношение к ним очень разнится. Если по поводу механизмов эволюции имеется довольно много противников общепринятой теории эволюции — наследницы дарвинизма, то против самой идеи эволюции в наше время отваживаются выступать лишь находящиеся вне науки общественные течения (вроде креационистов в Америке). У нас они рисковали бы оказаться в глазах научного сообщества где-то рядом со сторонниками Лысенко со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Говоря о современных противниках принятых в биологии представлений о механизмах эволюции, интересно отметить, что среди них есть весьма известные физики и математики. В уже упомянутых диалогах Гейзенберга *Часть и целое* приводится такая беседа Дж. фон Неймана с одним биологом по этому вопросу:

> Биолог был убежденным приверженцем современного дарвинизма, фон Нейман относился к дарвинизму с недоверием. Математик подвел биолога к окну своего кабинета и сказал: «Вы видите вон там на холме прекрасный белый дом? Он возник случайно. В течение миллионов лет геологические процессы образовали этот холм,

---

то почему бы не обладать ею человеку?» А ведь, действительно, почему бы?

деревья вырастали, сохли, разлагались и снова вырастали, потом ветер покрыл вершину холма песком, камни туда забросило, наверное, каким-то вулканическим процессом, и они случайно вдруг легли друг на друга в определенном порядке. Так все и шло. Естественно, в ходе истории Земли благодаря этим случайным неупорядоченным процессам возникало большей частью все время что-то другое, но однажды через много, много времени возник этот дом, потом в него вселились люди и живут в нем сейчас». Биологу было, разумеется, немного не по себе от такой логики. Но ведь фон Нейман все-таки не биолог, и я [Гейзенберг — *Авт.*] не осмеливаюсь выносить суждение о том, кто тут прав [10].

Подобная критика сопровождала дарвинизм с момента его возникновения. Один из первых и наиболее содержательных трудов на эту тему *Дарвинизм* Н. Я. Данилевского, вышел в России в 1888 г. Впоследствии появился *Номогенез, или эволюция на основе закономерностей* Л. С. Берга (1922), где была сделана попытка построения новой теории эволюции. В своем подходе Берг отверг основанный на случайности естественный отбор Дарвина как главную движущую силу эволюции, отведя ему лишь вспомогательное место. На место отбора он оставил присущие всему живому внутренние законы, управляющие ходом эволюционного процесса. К сожалению, Бергу не удалось сформулировать эти законы достаточно убедительным образом.

Надо заметить, что обычная реакция большинства ученых на критику дарвинизма (а также рационализма и редукционизма) состоит в обвинении ее в бесплодности. И некоторая доля истины здесь есть. Это же верно и по отношению к попыткам построения альтернативных теорий эволюции. Немецкий математик Герман Вейль, явно вставший бы на сторону фон Неймана в приведенном выше диалоге, довольно сурово оценил в своей книге *Философия математики и естествознания* (1949) многие из таких попыток:

> Мыслимо ли, что нематериальные факторы типа образов, идей, «созидательных планов» вмешивались в процесс эволюции живого мира в целом? $< \cdots >$ Сейчас дела обстоят таким образом, что утверждение о существовании трансцендентных созидательных сил (идей), является ли оно с философской точки зрения опасным или наоборот желательным, ни в коей мере не помогает решению конкретных и актуальных проблем биологии [11].

И все же попытки представить эволюционный процесс не случайным и механическим, но созидательным и творческим делались неоднократно. Мы приведем здесь соображения, развитые французским биологом и философом Реймоном Рюйе [12].

Он начинает так же, как и фон Нейман, с примера, объясняющего суть дарвиновского естественного отбора. Пример Рюйе носит совсем шутовской характер: компания обезьян, барабанящих по клавишам пишущих машинок. Дайте срок, появятся и *Илиада*, и *Война и мир*. Впервые нечто подобное возникло, кажется, у Свифта в его описании познавательной активности лагадских академиков и с тех пор кочует по страницам философской и популярной литературы.

Чтобы получить с помощью подобных действий *Войну и мир*, нужно выудить из моря случайного хлама роман и это невозможно сделать, не зная, что же нам нужно найти. Поэтому текст произведения должен быть дан заранее. Согласно Рюйе это можно представить следующей схемой:

Текст *Войны и мира*	Случайные удары по клавишам	Отбор нужных кусков текста

На первый взгляд кажется, что весь этот процесс можно поручить машине. Но ведь кто-то должен создать текст! Таким образом, творческий акт неминуем. Он просто перенесен в сознание этого кого-то, кто тоже должен войти в схему. С другой стороны, можно сомневаться что имеется готовый план (текст) эволюции. Скорее всего, он существует лишь в потенции (возможности). И гораздо ближе к подлинному эволюционному процессу ситуация, описываемая второй схемой

Смутно ощущаемая „тема“ (или „идея“) стихотворения	Перебор слов	Оценка слов, как соответствующих „теме“

Здесь Рюйе предлагает сравнить процесс эволюции с подлинно творческой деятельностью — сочинением стихов. Из самонаблюдений многих поэтов известно, что сочинение стихов (как, впрочем, и многие другие творческие акты) укладывается, хотя бы грубо, в эту схему. Весьма обнаженно это описано Маяковским в его *Как делать стихи*. Интересно, что смутное ощущение «темы» («идеи») имеет часто форму некоторой мелодии или ритма.

С точки зрения скептика, эта аналогия есть, в лучшем случае, объяснение одного неизвестного (эволюция) через другое (творчество). Ситуация изменится, если мы добавим еще одно сравнение с уже знакомым нам процессом наблюдения (познания) в квантовой теории. Выше мы использовали пример из зрительного восприятия (картины-перевертыши), чтобы пояснить характерные черты квантовой теории. Воспользуемся снова этим же приемом. Процесс наблюдения в квантовой теории будет выглядеть тогда так:

Картина сама по себе + все, что только можно на ней увидеть	Показ картины наблюдателю	Узнавание какого-либо конкретного образа

Начальная стадия этого процесса представляет собой реальность, непотревоженную наблюдением и находящуюся в состоянии возможности. Последнее действие (узнавание) носит мгновенный, скачкообразный характер и известно в физике под названием «квантового скачка». В творческом процессе ему соответствует так называемая вспышка озарения. На существование аналогии между творческим процессом человека и актом наблюдения в квантовой теории указывали разные авторы. Параллели между творчеством и эволюцией в биологии отмечали и Берг, и Вейль, и многие другие. Наибольшую известность приобрела *Творческая эволюция* Анри Бергсона.

В этом треугольнике (эволюция, творческий процесс, квантовая теория) остается сравнить еще теорию наблюдения и эволюционный процесс. В отличие от предыдущего, это сравнение носит более отрывочный характер. Совершенно независимо на эту последнюю аналогию обратили внимание два человека.

Первый — американский палеонтолог и эволюционист Г. Дж. Симпсон который даже ввел термин «квантовая эволюция» [13]. Он заметил, что имеется некоторое сходство между «квантовым скачком» и быстрыми, резкими изменениями в эволюционном процессе, такими, как, например, возникновение млекопитающих из рептилий [3)]. Таким образом, его замечание относится лишь к последней стадии приведенной выше схемы.

На первую, начальную стадию этого процесса обратил внимание Гейзенберг в своих диалогах. Он предложил соотнести ее с «идеальным планом» эволюции и заметил, что последний очень похож на идею универсального Живого Существа, содержащего в себе в качестве потенции все живые существа. Эта мысль восходит к Платону и была подробно разработана на морфологическом уровне Гёте в его работах о метаморфозе растений. В современной ситуации эту роль мог бы, по Гейзенбергу, выполнять геном организма. Иначе говоря, «нуклеиновая кислота [ДНК — *Авт.*] — это идея живого существа» [4)] [14].

[3)] Более точно «квантовая эволюция» — это стадия эволюционного процесса, которая за короткие (в геологическом смысле) промежутки времени приводит к внезапному резкому сдвигу популяции из одной адаптивной зоны в другую и появлению новых крупных таксономических единиц (семейств, отрядов, классов и т. д.).

[4)] Если здесь понимать под словом «идея», что-то вроде текста, описания живого организма, то мы возвращаемся к самой первой из наших схем, т. е. к status quo современной биологии. Если же мы хотим иметь аналогию с первой стадией процесса наблюдения в квантовой теории, то ДНК должна обладать свойствами потенциальности и универсальности, которые она по современным воззрениям явно не имеет. Тростников пытается выразить эту мысль, утверждая при этом, что она вытекает из уже достигнутого современной молекулярной биологией. Помимо этого, его намеки на роль бесконечности в строении гипотетической универсальной ДНК, находятся в резком противоречии с духом финитизма, пронизывающим молекулярную биологию.

Первые итоги

Таким образом, собирая сказанное вместе, можно утверждать, что современная наука довольно последовательно придерживается тех идей и концепций, которые она, по мнению Тростникова, полностью опровергла. И это вряд ли является случайностью. По-видимому, следование концепциям рационализма, редукционизма, финитизма отвечает пока еще каким-то психологическим потребностям большинства людей, делающих науку. Лишь немногие могли бы оценить эти концепции так, как это сделал П. А. Флоренский в начале двадцатых годов [15]:

> Но ведь это они [рационалисты — *Авт.*] раздробили всякую форму на кирпичики; это они расстригли Слово Божие на строчки и слова, язык растолкли в звуки, организм измельчили до молекул, душу разложили в пучок ассоциаций и поток психических состояний, Бога объявили системою категорий, великих людей оценили как комочки, собравшиеся из пыли веков, — вообще все решительно распустили на элементы, которые распустились в свой черед, приводя бывшую действительность к иллюзии формы и ничтожеству содержания.

Увы, дух времени делает свое дело, и вот теперь Флоренского делают предтечей структурализма, истово поклонявшегося всему тому, против чего о. Павел выступал за много лет до появления структурализма на свет.

Наука и религия

И, наконец, о последней части статьи Тростникова. Как связаны наука и религия? Здесь он затрагивает самый интересный и важный для переживаемого нами времени вопрос. Несколько вольно, его точка зрения сводится к тому, что наука на всех парах движется к Богу. Мне приходилось слышать в середине 70-х годов от замечательного математика и мыслителя А. И. Лапина такое выражение этой мысли: «В прошлом веке ученые были христианами, а наука — антихристианкой, теперь же наука стала христианкой, а ученые — антихристианами». Ясно, что это образное выражение не претендует на буквальную точность. Замечу, кстати, что многие мысли Тростникова, выраженные к тому же в более подобающей им поэтической форме, содержатся в работах А. И. Лапина, имевших некоторое хождение в самиздате. Лишь одна из них, *Наследник человека*, была в те годы опубликована [16].

И все же можно ли утверждать, что в научном мировоззрении нашего столетия появились какие-то точки соприкосновения с религиозным мировоззрением? Приведенный выше обзор новых открытий в математике, физике и биологии дает, скорее, лишь повод для размышлений. Однако, одна вполне конкретная точка соприкосновения появилась, и именно в физике. В течение всей истории человечества мифологические и религиозные системы содержали в себе космологические представления о начале Вселенной, о том, что у нее есть возраст. Отвергнутое наукой Нового времени, это представление возродилось в 20-х годах в рамках общей теории относительности и впоследствии лишь подкреплялось экспериментальными данными и теоретическими разработками. Появление таких моделей Вселенной (открытых А. А. Фридманом и через пять лет, независимо, аббатом Ж. Леметром и получивших впоследствии известность, как модели Большого Взрыва) было настолько неожиданным, что многие физики, и прежде всего создатель теории относительности, приняли их не без внутреннего сопротивления. Его причины хорошо видны из следующего отрывка из юбилейного доклада И. Пригожина к столетию Эйнштейна: «Леметр, которого я хорошо знал, сказал мне как-то, что когда он попытался обсудить с Эйнштейном возможность более точно представить себе начальное состояние Вселенной, чтобы понять, может быть, природу космических лучей, Эйнштейна это не заинтересовало: «Это слишком похоже на акт творения, — сказал он Леметру, — сразу видно, что Вы священник!»»

Предчувствие не обмануло Эйнштейна. Много лет спустя, уже после войны, в космологии (точнее в умах нескольких физиков) возникла следующая загадка. В первые моменты своего развития после Большого Взрыва Вселенная должна быть весьма малых размеров. Следовательно, она как целое должна подчиняться законам квантовой теории, о которых мы говорили выше. Это приводит к каверзному вопросу о наблюдателе этого события. В 1973 г. Уилер так сформулировал этот вопрос: «Не могла ли Вселенная $< \cdots >$ быть в каком-то странном смысле «ввергнута в бытие» при участии кого-то, кто действительно является участником происходящего?» — и предложил заменить термин «наблюдатель» на более точный — «участник» [17].

Как бы ни относиться к этим идеям, ясно, что их осмысление требует более широкого культурного и, прежде всего, философского контекста. И тут надо, конечно, вспомнить, что этот вопрос неоднократно обсуждался многими представителями русской религиозно-философской мысли, которые лишь сейчас, да и то с большими трудностями, возвращаются в нашу культуру. Об этом писали И. Киреевский, Чаадаев, Достоевский, Соловьев, Леонтьев, Розанов, Флоренский, Булгаков, Е. Трубецкой, Франк, И. Ильин, хотя для большинства из них эта тема и не лежала в центре их интересов [18].

Ясно, что конкретные выражения тех или иных взглядов по этому вопросу зависят, помимо прочего, и от особенностей личной судьбы философа. В качестве иллюстрации приведу два высказывания. 30 июля 1889 г. Константин Леонтьев, медик по образованию, писал из Оптиной пустыни Розанову: «Как хотите, а значительной частью того [науки] или другого [религии] надо пожертвовать. Я для моей *личной* жизни давно, давно и *с радостью* пожертвовал наукой».

Этому предшествовали такие его размышления в *Записках отшельника*:

> Человечество ко временам Ария, Николая Мирликийского, Василия Великого и Юлиана Богоотступника отказалось надолго и сознательно, философски отказалось, от дальнейшего движения по пути Гиппократов и Плиниев, Аристотеля и т. д.
>
> Варварские нашествия благоприятствовали, правда, этому построению умов, но разлившись во всей силе гораздо позднее, не они его создали. Создало его отрицательное отношение новых и вполне сознаваемых ученых идей к результатам и к практике предыдущей образованности.
>
> Вопрос, не близится ли то время, когда человечество снова откажется от предыдущих выводов и предыдущих (европейских) пристрастий?

Леонтьев считает, что это было бы весьма желательно, и добавляет: «Если же все имеет свой предел, то почему же и точным наукам не наткнуться наконец на свои геркулесовы столпы» [19].

А вот слова Ивана Ильина [20]:

> Необходима новая философия научной очевидности, отправляющаяся от пересмотра идей метода и доказательства и освобождающая науку от порабощения чувственному восприятию; это необходимо для того, чтобы осмыслить гибельный фантом противорелигиозной науки и трагическую немощь противонаучной религии; чтобы развязать предметные крылья и науки и религии, и помочь ученым возродить в себе созерцание своего предмета при свете высоких духовных Предметов.

Многообразие имеющихся точек зрения по поводу соотношения науки и религии (и не только в русской философии) можно в первом приближении резюмировать так:

1. Наука и религия относятся к совершенно разным сферам бытия и, следовательно, должны заниматься каждая своим делом.

2. Наука и религия говорят разное об одном и том же (скажем, об устройстве мира или о морали) и поэтому противоречат друг другу. Это приводит к той или иной форме борьбы между ними [5)].

Характерный пример — точное следование религиозным предписаниям по отношению к покойникам делает невозможной медицину, основанную на анатомии.

3. Независимо от отношения друг к другу, наука и религия должны войти в единое целостное мировоззрение, соединяющее их вместе.

Приведенные выше высказывания Леонтьева и Ильина относятся, соответственно, ко второй и третьей точкам зрения. Первой, пожалуй, наиболее распространенной, придерживался, например, Семен Франк, по-

---

5) Имеет смысл сравнить это также с отношениями между христианством как мировой религией и национальными языческими религиями. Очень непростая история их совместного бытования в России также была темой напряженных размышлений в русской философии и литературе. Их, явно не завершенные плоды –мысли о. Павла Флоренского о крестьянском православии, рассказ Лескова *На краю света* о столкновении православного миссионерства и шаманства, страстная критика христианства Розановым и его симпатии иудаизму, образы Богородицы Матери-Земли и русское народное понимание Христа у Достоевского.

святивший ее обоснованию книгу *Религия и наука* (1925). К ней склонялся поначалу и Розанов, но затем, под влиянием Леонтьева, приблизился к его взглядам. Позднее, в *Темном лике*, он смотрел на дело так [21]:

> Трудно постигнуть, кто выживет и одолеет, — в судьбах истории и мира, — Лик ли Христов с Его испепеляющей красотою, покоряющею всякое сердце, покорившею языческий мир, или — столп земли с его тяготами, с механикой и геометрией.

Наименее известной является последняя точка зрения. Обсуждая ее, следует иметь в виду не приспособление религии к науке, когда последняя (к тому же в ее нынешней форме) выбирается в качестве верховного судьи (например, как это получилось в философии Тейяра де Шардена).

Конечно, поначалу возможность такого единого мировоззрения, объединяющего науку и религию, кажется совершенно невероятной. Впрочем, история говорит нам о существовании многочисленных традиционных обществ, соединявших принимаемую *всеми* религию с весьма тонкими и нетривиальными знаниями о мире. То, что науки, по крайней мере, некоторые из них, как-то легче уживаются с языческими религиями, подметил Розанов в своих комментариях к письмам Леонтьева [22]:

> ...астрономия, геометрия, «звездочетство» и измерение «градуса меридиана» входило в древние религии «волхования» и не входит в религию только сейчас, у нас. Наша религия — «скорбей сердца» и «утешения» для «плачущих», «алчущих» и «гонимых». Что им даст «звездочетство»? Просто — оно им не нужно. Но только им. Нами и нашим душеустроением не исчерпывается религия, не кончается; и, особенно, не была начата в истории. А «творение миров», а идея и факт «Творца миров»? Он зовет астронома, направляет трубу его телескопа. И алгебра, и механика здесь у места.

(Это написано лет за двадцать до того переворота в космологии, о котором мы писали выше [23].)

Более близкий современному ученому пример того, как могли бы соединиться наука и религия, — это упоминавшиеся выше дополнительные картины мира в физике, например, корпускулярная и волновая, которые противоречат друг другу, но оказались включенными в квантовую теорию. Не надо, впрочем, принимать эту аналогию слишком буквально. Из приведенных выше примеров дополнительных картин к обсуждаемому нами вопросу ближе всего дополнительность смысла и формальной структуры высказывания в языкознании. Другие примеры явно не подходят, так как обладают очевидной симметрией между дополнительными картинами. А никакого равноправия между научной и религиозной картинами мира быть не может.

И если теперь вернуться к высказываниям философов, то мне лично ближе позиция Ильина и близкие к ней взгляды Киреевского, Соловьева, Флоренского (последний был одним из немногих, кто предпринял содержательную попытку соединения науки и религии).

Тем не менее, думаю, что интеллектуальная честность и мужество Леонтьева позволили ему проникнуть в самую суть проблемы: наука вообще, а не только ее теперешнее состояние, противоречит религии. И не стоит это обстоятельство как-то замазывать и сглаживать. Если бы это было не так, то весь русский атеизм, от Белинского до Платонова, использовавший науку в качестве дубины против религии, стоил бы немного.

Чтобы не быть голословным, приведу одну малоизвестную историю из шестидесятых годов XIX века — беседу М. А. Бакунина и А. О. Ковалевского. Молодой студент-зоолог, собиравшийся разрабатывать проблемы, выдвинутые Дарвином, испытывал угрызения совести, что направляет жизнь по пути своих личных устремлений, в то время как все вокруг отдают ее «делу», полезному для общества. В ответ на его смущенное признание Бакунин сказал: «…для нашего дела Вы, действительно, не годитесь. Из пистолета Вы в цель несомненно не попадете, бомбы не бросите, если понадобится, да и доверить ее Вам я бы лично не решился бы. Вы говорите о Ваших планах в области эволюции. Ну что же, если они удадутся, то Вы этим изготовите для нас такую бомбу, перед которой спасуют, быть может, все бомбы начиненные динамитом» [24].

И таких «бомб» было изготовлено немало. Вот один из бесчисленных примеров их действия. За три года до революции маленький Юра (потом Георгий, а затем Джордж) Гамов, внук митрополита Арсения Лебединцева и будущий автор идеи генетического кода и горячей модели Большого Взрыва как начала Вселенной, получил от отца в подарок микроскоп. Направив его на Святые Дары, он не нашел в них ни малейшего следа Тела и Крови Христовых. В конце жизни Гамов писал об этом так: «Думаю, что это был эксперимент, который сделал меня ученым» [25].

Примеры эти можно было бы продолжить…

Вернемся к вопросу, с которого мы начали — о конфликте между наукой и обществом. Нет сомнения, что отрицательное влияние науки и техники на жизнь связано и с неправильными действиями людей, их применяющих. Но все же должны быть более глубинные основания этого явления, коренящиеся в самом научном методе. В этом нас убеждает вся история науки, сопровождавшаяся ее борьбой с религией. Наука оказалась слишком удобным инструментом для бунта человека против Бога. Все остальное — лишь следствие.

Я не знаю, по силам ли человеку разрешить противоречие между наукой и религией, найти знание «глубже и высшее нашей науки» [26], но вот осознание этой проблемы — вполне посильная задача возрождающейся религиозной мысли, важная и для судьбы самой науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. См. *Мир через полвека* (Вопросы философии. 1989. № 1) и *О письме Александра Солженицына «Вождям Советского Союза»* (Знамя. 1990. № 2). Ответ на последнюю статью (появившуюся в 1974 г.) см., *Солженицын А. И.* Сахаров и критика «Письма вождям» (Континент. 1975. № 2).

2. Их список я предоставил редакции *Нового Мира*.

3. *Хокинг С.* Виден ли конец теоретической физики // Природа. 1982. № 5.

4. *Волькенштейн М. В.* Современная физика и биология // Вопросы философии. 1989. № 8.

5. *Гейзенберг В.* Часть и целое. — М., Наука, 1990. С. 219–220.

6. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. — М., Наука. С. 173. В этой же книге изложены и другие вопросы философии квантовой механики, которые мы затрагиваем ниже. Более доступное изложение см. *Холтон Дж.* Корни Дополнительности // В кн. *Холтон Дж.* Тематический анализ науки. — М.: Прогресс, 1981. С. 159–210; и *Алексеев И. С.* Концепция дополнительности. — М.: Наука, 1978.

7. *Wheeler J. A.* A Septet of Sibils // The American Scientist. V. 44. № 4, October. 1955.

8. *Балонов Л. Я., Деглин В. Л.* Слух и речь доминантного и недоминантного полушарий. — Л.: Наука, 1975; *Брагина Н. Н., Доброхотова Т. А.* Функциональные асимметрии человека. — М.: Медицина, 1981.

9. *Бахтин М. М.* Эстетика словесного творчества. — М.: Искусство, 1979. С. 340.

10. *Гейзенберг В.* loc. cit. С. 235.

11. *Вейль Г.* Избранные труды. — М.: Наука, 1984. С. 359–350.

12. В работах 40-х и 50-х гг. Мы приводим схему Рюйе с небольшими изменениями, основываясь на книге *Назарова В. И.* Финализм в современном эволюционном учении. — М.: Наука, 1984.

13. *Симпсон Дж. Г.* Темпы и формы эволюции. — М.: ИЛ, 1948.

14. *Гейзенберг В.* loc. cit. С. 350.

15. *Флоренский П. А.* Имена // В кн.: *Священник Павел Флоренский* Сочинения в четырех томах. Т. 3(2). — М.: Мысль, 1999. С. 186.

16. В Вестнике РХД (1978, № 125) под псевдонимом А. Филиппов.

17. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 3. — М.: Мир, 1977. С. 487–488. В самое последнее время отношение к этим идеям

в профессиональной среде начинает меняться. См. высказывания активного участника современных космологических исследований А. Д. Линде в его кн. *Физика элементарных частиц и инфляционная космология* (М.: Наука, 1990. С. 211, 245, 248), и предисловие А. А. Старобинского к кн. *Шредера Дж. Л.* Шесть дней Творения и Большой Взрыв. — Иерусалим–Москва, 2000.

18. Мы сознательно ограничиваемся здесь отечественными мыслителями. Почти все они могли опираться в своих размышлениях на живой, религиозный опыт, чего нельзя сказать о подавляющем большинстве современных им мыслителей Запада.

19. *Леонтьев К. Н.* Собрание сочинений. Т. VII. — СПб, 1913. С. 355, 357.

20. *Ильин И. А.* Религиозный смысл философии. — Париж, 1924. С. 113.

21. *Розанов В. В.* Темный лик. Метафизика христианства. — СПб., 1911.

22. *Константин Леонтьев* Письма к Василию Розанову. — Лондон, 1981. С. 99–100.

23. Розанов стоял также и у начала отечественной критики дарвинизма, о которой мы упоминали выше. См. например, его, статью *Красота в природе и ее смысл* (в сб. *Природа и история*. СПб., 1900). Она появилась в ответ на *Красоту в природе* В. С. Соловьева, в которой явно выразилась плененность великого философа идеями дарвинизма.

24. *Давыдов К. Н.* А. О. Ковалевский как человек и как ученый // Труды ИИЕТ. Т. 31. История биологических наук. Вып. 6. 1960. С. 336.

25. *Гамов Дж.* Моя мировая линия (неформальная автобиография). — М.: Наука, 1994.

26. *Достоевский Ф. М.* Сон смешного человека // Полное собрание сочинений в тридцати томах. Т. 25. — М.: Наука, 1983. С. 113.

ПУТЕШЕСТВИЕ ДАНТЕ В АД

Тема путешествия на тот свет довольно распространена в мировой литературе. Одним из наиболее величественных ее воплощений является путешествие в Ад Вергилия и Данте в *Божественной Комедии*. Оно основано на определенном устройстве Космоса, которое в изложении Данте представляет собой творческую переработку общепринятых представлений христианского мира того времени.

В книге *Мнимости в геометрии* (М.: Поморье, 1922) П. А. Флоренский предложил использовать методы точного естествознания для построения математической модели Космоса *Божественной Комедии*. Основное содержание книги составляет новая интерпретация комплексных чисел: использование одной, передней стороны плоскости как вместилища действительных чисел, а другой, оборотной, для чисто мнимых чисел. Связывая свою конструкцию с гауссовой теорией поверхностей и теорией потенциала, Флоренский имел в виду и другое. В работе[1] *Иконостас* (1922) он писал:

> По первым словам летописи бытия, Бог «сотворил небо и землю» (Быт. 1:1) и это деление всего сотворенного надвое всегда признавалось основным... Но эти два мира — мир видимый и мир невидимый—соприкасаются. Однако их взаимное различие так велико, что не может не встать вопрос о *границе* их соприкосновения. Она их разделяет, но она же их и соединяет. Как же понимать ее?

Проведенный Флоренским анализ путешествия Данте содержит в качестве важнейшего элемента мотив переворачивания (иначе, оборотничества):

> ...когда поэты достигают приблизительно поясницы Люцифера, оба они внезапно *переворачиваются*, обращаясь ногами к поверхности Земли, откуда они вошли в подземное царство, а головою –в обратную сторону (Ад, песнь XXXIV, 74–94).

Другой существенный элемент, выделяемый им, таков:

> ...Дант все время движется по прямой и на небе стоит — обращенный ногами к месту своего спуска; взглянув же оттуда, из Эмпирея, на Славу Божию, в итоге оказывается он, без особого возвращения назад, во Флоренции.

Подход о. Павла к изучаемому им произведению состоял в том, чтобы анализировать описываемый Данте космос так же, как физик анализирует окружающий мир, т. е. признавая его такой же реальностью—мысль для своего времени весьма новаторская. Она выражена в следующих строках:

[1] См. Богословские Труды. Сб. 9. — М., 1972. См. также *Священник Павел Флоренский* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. — М.: Мысль, 1996. С. 419–526.

Путешествие его [Данте] было действительностью; но если бы кто стал отрицать последнее, то во всяком случае оно должно быть признано поэтическою действительностью, т. е. представимым и мыслимым, — значит содержащим в себе данные для уяснения его геометрических предпосылок.

Приняв этот общий принцип в качестве исходного, Флоренский так формулирует аналогию с геометрией физического мира:

...двигаясь все время вперед по прямой и перевернувшись раз на пути, поэт приходит на прежнее место в том же положении, в каком он уходил с него... Значит поверхность, по которой двигается Дант, ... 1) как содержащая замкнутые прямые, есть римановская плоскость и 2) как переворачивающая при движении по ней перпендикуляр, есть поверхность односторонняя. Эти два обстоятельства достаточны для геометрического охарактеризования Дантова пространства, как построенного по типу эллиптической геометрии...

и

...с точки зрения современной физики мировое пространство должно быть мыслимо именно как пространство эллиптическое, и признается конечным, равно как и время, — конечное, замкнутое в себе.

Обнаруженная Флоренским замкнутость кратчайших линий (прямых) в мире Данте действительно находит свою аналогию в замкнутых, т. е. конечных и не имеющих границы, моделях Вселенной общей теории относительности. Впрочем уравнения общей теории относительности допускают в качестве решений и открытые модели, которые соотносятся с замкнутыми моделями как, скажем, плоскость и сфера. Вопрос о том, какая модель отвечает физической реальности, находится вне рамок теории.

Неэвклидовость мира Данте указывалась рядом исследователей и до Флоренского (они цитируются в *Мнимостях*). Более тонкое свойство замкнутости было, помимо Флоренского, указано немецким математиком А. Шпайзером[2] в 1925 г.

Свойство односторонности (иначе, неориентируемости) — оригинальное наблюдение Флоренского.

Космос Данте можно сопоставить с поистине бесконечным разнообразием космологических представлений, от гесиодова Тартара до карты мира орочских шаманов. Два мотива — оборотничество и дальняя дорога, возникающие в рассуждениях Флоренского, являются универсалиями, распространенными по всему миру. Достаточно вспомнить русскую сказку: «ударился серый волк о сыру землю — стал конем золотогривым», а мотив дороги, «за тридевять земель, в тридесятое царство», существует в качестве реликта и в современной цивилизации: свадебные путешествия, побеги детей из дома, ...

[2] См. *Speiser A.* Klassische Stücke der Mathematik. — Zürich, 1925, и обсуждение в кн. *Weyl H.* Philosophy of Mathematics and Natural Science. — Princeton, 1949. P. 109.

То, что эти два способа перехода по ту сторону бытия могут быть *эквивалентными*, — принципиальный факт, непосредственно вытекающий из открытия Флоренского. В самом деле, для того, чтобы перейти с одной стороны неориентируемой поверхности (такой как лист Мёбиуса) на другую, есть две возможности. Одна состоит в инверсии (отражении), совершаемой в данной точке; другая — в достаточно далеком путешествии по самой поверхности.

Несомненно также, что наблюдения Флоренского должно иметь гораздо более широкое применение. На это указывает такое распространенное в фольклоре явление как многократное (как правило, троекратное) повторение оборотничества (инверсии) одного и того же персонажа. Классический пример—самый распространенный в русской сказке сюжет [3] «Три царства — медное, серебряное, золотое». Геометрические свойства инверсии показывают, что для перехода на другую сторону число повторений должно быть, во всяком случае, *нечетным*. В точности это и имеет место в фольклоре.

Другое следствие модели состоит в том, что понятие ориентации, т. е. различие между правым и левым, между внешней стороной и внутренней теряет абсолютный смысл. Локально, в небольшой окрестности каждой точки поверхности («нашего мира») внутренняя и внешняя стороны отличны друг от друга, от одной на другую можно перейти только с помощью отражения (инверсии), и лишь для всей поверхности («мира в целом») это различие теряет смысл.

Христианское представление о Мире (нынешнем, падшем мире) содержит в качестве важной составной части утверждение о его незавершенности. Миру еще предстоит восстановить утраченную в грехопадении целостность. В апокрифическом Евангелии от Фомы Иисус говорит: «...когда вы сделаете внутреннюю сторону как внешнюю сторону, и внешнюю сторону как внутреннюю сторону, и верхнюю сторону как нижнюю сторону... тогда вы войдете в царствие» (перевод М. К. Трофимовой). Эти слова поразительным образом согласуются с размышлениями Флоренского о космосе Данте.

Наряду с *Мнимостями* в двадцатых годах появились и другие работы с новым подходом к фольклорному и этнографическому материалу. В. Г. Богораз обратил внимание на близость ряда эффектов теории относительности (например, замедления времени) к событиям, происходящим в сказках и мифах [4]. Он же предлагал изучать мифологический мир так же, как это делает физика с окружающим нас миром (та же мысль, что и у Флоренского).

Совсем другая структура, не похожая на непрерывный континуум естествознания, возникла в книге В. Я. Проппа *Морфология сказки*

[3] *Пропп В. Я.* Исторические корни волшебной сказки. — Л. 1946. С. 261, 264–265.
[4] См. *Богораз В. Г.* Эйнштейн и религия. — М.–Пг., 1923.

(1928) и его позднейших замечаниях о природе шаманских путешествий. Пропп вдохновлялся натурфилософскими идеями Гёте. Он заметил, что, если отвлечься от конкретных реалий сказки и проанализировать её сюжет (имеющиеся персонажи и их функции), то можно написать некоторую универсальную сказку (аналог гётевского Urpflanze), по отношению к которой все известные сказки будут ее (частичными) реализациями. В универсальной сказке должно быть 7 персонажей и 31 функция. Впоследствии Пропп дополнил этот анализ и весьма детальным изучением конкретных реалий и сюжетов, включая разные способы перехода в другой мир («переправа через огненную реку», «избушка на курьих ножках» и др., см. loc. cit.).

Весь этот всплеск идей оказал лишь частичное влияние на развитие фольклористики и этнографии. Если идеи Флоренского и Богораза были полностью забыты [5)], то идеи Проппа развивались лишь в рамках скользящего по поверхности явлений структуралистского направления. Тем более не ставился вопрос о связи между этими подходами.

В глазах многих гуманитариев математические модели в этнографии или литературоведении ведут к привнесению сухого, безжизненного начала в эти науки. И с этим нельзя, в какой-то степени, не согласиться. Но не может ли союз гуманитарных и точных наук со временем повернуть само естествознание к более поэтичному взгляду на мир? Русская религиозно-философская мысль явно склонялась к такой возможности [6)]:

> Можно спросить себя: возможна ли наука, как поэзия, или поэтическая наука? Иначе говоря, может ли быть установлено отношение между поэзией и познанием более интимное, чем существующее? Еще иначе, может ли поэзия стать рапсодией мира, освободиться от своей мечтательности, и наука развиться от своего прозаизма?

Слова о. Павла Флоренского в *Мнимостях*, что «разрывая время, *Божественная Комедия* неожиданно оказывается не позади, а впереди нам современной науки» –конкретное предчувствие этой возможности.

[5)] Мне известен подобный подход к фольклору и этнографии в неопубликованных работах А. И. Лапина 80-х годов. В них он исследовал многочисленные параллели с физикой, в частности, аналогии между оппозициями типа левое/правое и дискретными симметриями квантовой теории.

[6)] *Булгаков С.* Философия имени. — Париж, 1953. С. 144.

ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ И СИММЕТРИЯ *)

Копенгаген. Дом Нильса Бора. Сентябрь 1926.

Шрёдингер. Если нельзя избавиться от этих проклятых квантовых скачков, то я жалею, что вообще связался с квантовой теорией.

Бор. А вот мы, со своей стороны, очень благодарны Вам за то, что Вы сделали, поскольку Ваша волновая механика с ее математической ясностью и простотой представляет огромный прогресс по отношению к прежним формам квантовой механики.

(из книги *В. Гейзенберга* Часть и целое)

Брюссель. Сольвеевский институт. Октябрь 1927.

Со своей стороны Эйнштейн насмешливо спрашивал нас, неужели мы действительно верим, что божественные силы прибегают к игре в кости, а я на это отвечал, что уже мыслители древности указывали на необходимость величайшей осторожности в присвоении провидению атрибутов, выраженных в понятиях повседневной жизни.

(из диалога Н. Бора и А. Эйнштейна)

Копенгаген. Институт теоретической физики. Февраль 1931.

На стуле сидит крепко привязанный Ландау, с плотно заткнутым ртом. Говорит, стоящий перед ним Бор:

— Погодите, погодите, Ландау, дайте мне хоть слово сказать.

(рисунок Дж. Гамова по воспоминаниям Л. Розенфельда)

Так, или примерно так, в первой половине XX века рождалась, в муках и спорах, квантовая теория. Споры вокруг нее не утихают и по сей день. Нетривиальность ситуации видна даже из терминологии, используемой спорящими сторонами. Так, принятая, зачастую молчаливо, большинством физиков копенгагенская интерпретация квантовой теории, предложенная Бором, Гейзенбергом, Паули и другими, называется, как правило, ортодоксальной интерпретацией. Словечко, имеющее в современной научной среде скорее негативный оттенок. Заметим, что общепринятую интерпретацию, скажем, теории относительности ортодоксальной никто не назовет.

---

*) В основе этой работы лежит доклад автора в Институте истории естествознания и техники РАН в марте 2000 г. Я глубоко благодарен Вл. П. Визгину, М. И. Зеликину и Ю. В. Чайковскому, прочитавшим первый вариант текста и сделавшим ряд ценных замечаний.

Тем более не повезло тем философским концепциям, которые выросли из квантовой теории. Прежде всего, к ним относится концепция дополнительности. Она не стала таким общенаучным понятием, как, например, представление о симметрии, которое уходит своими корнями в глубокую древность и о котором написано так много. Насколько мне известно, связь между двумя этими двумя концепциями никогда явно не высказывалась и не анализировалась. Цель этой работы состоит в том, чтобы установить такую связь и тем самым расширить представление о дополнительности.

Идеи, о которых я хотел бы здесь говорить, возникли у меня довольно давно, но непосредственным толчком для рассказа послужило недавнее изучение лекций отца Павла Флоренского *Анализ пространственности и времени в художественно-изобразительных произведениях*, которые он читал в начале 20-х годов. На первый взгляд, эти лекции посвящены довольно специальному вопросу об изображении пространства в живописи и вообще в изобразительных искусствах. На самом же деле это весьма обманчивое впечатление, и лекции Флоренского имеют гораздо более широкое значение — не только для искусствознания, но и для психологии и физиологии человека, для понимания отношения человека к окружающему миру и даже, может быть, для физики этого мира.

Сначала я изложу свое представление о дополнительности, с акцентом на тех ее характерных чертах, которые в дальнейшем мы будем искать в явлениях окружающего нас мира. Затем мы будем говорить о проблеме симметрии, точнее, о нарушении симметрий, связанных прежде всего с человеком: нарушении симметрии в морфологии, физиологии и психологии человека. Здесь же у нас впервые появятся некоторые соображения о роли дополнительности в этой ситуации. Наконец, две последние части будут посвящены анализу лекций о. Павла Флоренского, где мы попытаемся собрать все вместе, чтобы придти к довольно определенным выводам.

Дополнительность

Дополнительность возникла при анализе хорошо известного фундаментального факта квантовой механики — соотношения неопределенностей, которое было обнаружено и положено в основу этого раздела физики Вернером Гейзенбергом в 1927 г. Это соотношение относится в своей простейшей форме к ситуации, когда мы имеем материальную частицу массы m и она движется в пространстве, пусть это будет одномерное пространство $\mathbb{R}$ с координатой x, со скоростью v. Тогда Гейзенберг доказал, что в квантовой теории, если мы пробуем измерить координату и скорость, мы не можем измерить их одновременно сколько угодно точно. Между ошибками измерения Δx и Δv этих переменных существует взаимно обратное соотношение,

$$(\Delta x)(\Delta v) \cong h/m,$$

где h — это постоянная Планка. Постоянная Планка –это то, что характеризует наше вхождение в квантовый мир. Если она равняется нулю, то мы находимся в классическом мире, где все можно измерить сколь угодно точно.

Если же она отлична от нуля, то мы попадаем в мир квантовых явлений. Предметы окружающего нас и близкого нам мира настолько велики (или, скорее, имеют настолько большую массу m), что постоянная Планка может считаться равной нулю. Для электронов или атомов это уже неверно (так, для электрона $h/m \approx 1$ см^2/сек). Наличие подобного соотношения связано с тем, что квантовые частицы одновременно проявляют и волновые свойства, при этом длина волны λ связана со скоростью v частицы согласно соотношению де Бройля

$$mv = h/\lambda,$$

в которое также входит постоянная Планка.

Корпускулярно-волновой дуализм, восходящий к работам Эйнштейна о квантах света, и соотношение неопределенностей, которое Гейзенберг вывел в своей работе, опираясь на классическую оптику (теорию микроскопа, за незнание которой его лет за семь до этого выгнали с экзамена по физике в Мюнхенском университете), и были теми удивительными фактами, которые потрясли воображение физиков и показали, что открывшаяся им квантовая реальность абсолютно непохожа на известный до того классический мир.

Интерпретация Бором этой ситуации состояла в том, что у нас есть разные приборы для измерения, соответственно, координаты и скорости. Более того, это не просто разные приборы, а, измеряя либо одну переменную, либо другую, мы находимся в разных экспериментальных ситуациях, которые *невозможно* соединить вместе. Эти ситуации являются *дополнительными*: либо мы смотрим в микроскоп и как можно более точно локализуем, где находится частица, либо мы, скажем, ставим дифракционную решетку и пытаемся измерить ту самую длину волны λ, чтобы найти скорость.

Этим выводам Бора предшествовала жизнь в науке, в течение которой он, начиная с самых ранних своих работ по теории атома, вдохновлялся многими образами — и философскими, и психологическими, и из окружающего нас мира. Эти образы подсказывали ему как должен вести себя квантовый мир. Поэтому Бор всегда считал, что те явления, которые физики обнаружили по отношению к элементарным частицам, по отношению к атому, должны в какой-то форме проявляться и в окружающей нас действительности, в той ситуации, когда мы можем что-то потрогать и увидеть. Они не являются чем-то эзотерическим.

В многочисленных работах Бора на эту тему приводится зачастую довольно расплывчатые описания таких ситуаций, когда, по его мнению, должна проявляться дополнительность. В частности, хорошо известны интересы Бора к биологии и психологии. Например, он считал, что для изучения живого организма возможны два подхода, или две дополнительные «экспериментальные» ситуации. Один — это подход, когда мы можем общаться с организмом, наблюдать его, можем попытаться понять его мотивы, намерения, желания и т. д. А можем поставить его в «башню молчания», привязать, обездвижить, выделить рефлекторную дугу и т. д. Затем вторгнуться внутрь этого организма, вторгнуться с теми представлениями о его устройстве, которые есть в (классической) физике, и описать его как физико-химическую систему.

По мнению Бора, эти два подхода дополнительны в том смысле, что они взаимоисключают друг друга и, двигаясь до логического конца в каждом из этих направлений, мы полностью исключаем другой подход. В частности, вторжение в организм с целью получения его физико-химического описания, если мы хотим его сделать полным и окончательным, приводит к его смерти, он выпадает из живого мира. С другой стороны, исторически здесь нет ничего удивительного. Современная биология, точнее физиология, возникла, когда появилась анатомия[1)].

Эти взгляды Бора вызвали определенный резонанс, но как ни странно не у биологов, не у психологов, не у философов (может быть за какими-то редкими исключениями), а у физиков. Целый ряд физиков были поражены этим и пытались развить мысли Бора дальше [1]. Я приведу лишь замечательные слова из книги Германа Вейля, скорее математика, чем физика, в которой он анализирует концепцию дополнительности и уточняет те мысли Бора, о которых я говорил. Вейль пишет [2]:

> Ученые были бы неправы, игнорируя тот факт, что теоретические построения не являются единственным подходом к рассмотрению жизни; нам открыт и другой путь –понимание изнутри (интерпретация). $< \cdots >$ Я сам из моих ощущений, мысли, воли, чувств и поступков обладаю непосредственным знанием, совершенно отличным от теоретического знания, которое представляет в символах «параллельные» мозговые процессы. Это внутреннее осознание самого себя является основой моего понимания окружающих меня людей, которых я принимаю за существа моего вида и с которыми я иногда сообщаюсь настолько интимно, что могу делить с ними радость и горе. Если я даже не настолько проникаю в их сознание, чтобы ощущать его как свое собственное, тем не менее мое «интерпретационное» понимание его обладает неоспоримой адекватностью. Его яркий свет направлен не только на людей, окружающих меня; он проникает, хотя все более тускло и неразличимо, глубоко и в мир животных. $< \cdots >$
>
> Бесплодно отмахиваться от этого подхода к природе «изнутри» как антропоморфического и превозносить объективность теоретических построений. Оба пути ве-

---

1) Интерес Бора к биологии мог возникнуть еще в детстве, под влиянием дискуссий в окружении его отца, известного физиолога Кристиана Бора. Последний участвовал в спорах «механицистов» и «виталистов», не склоняясь, впрочем, ни на какую сторону (см. *Whitaker A.* Einstein, Bohr and the Quantum dilemma. — Cambridge, 1995; *Холтон Дж.* Тематический анализ науки. — М.: Прогресс, 1981. С. 188–190).

дут, как это бывает, в противоположные стороны: то, что является наиболее темным для теории — человек, для понимания изнутри является наиболее ясным (luminous), а к элементарным неорганическим процессам, которые наиболее просты для теории, интерпретация не находит никакого подхода.

Далее Вейль добавляет, что было бы соблазнительно распространить понятие дополнительности на эти два подхода. Конечно, при общении с человеком, нам и в голову не приходит, что он как-то устроен. Если же мы возьмем предмет неживой природы, например, камни, то здесь понимание «изнутри», т. е. общение, не дает нам почти что ничего, в то время как физико-химический анализ дает достаточно много. Впрочем, кому это нам? Искусство дает для понимания камней «изнутри» тоже кое-что, вспомним хотя бы пейзажную живопись.

Попытки распространить дополнительность за пределы физики [2] существуют уже очень долго и, надо признать, ни к чему существенному не привели. Если говорится, что в каком-то явлении имеет место дополнительность, то дальше этого дело не идет. Эти слова не приводят к более глубокому пониманию этого явления, и не приводят к развитию самого понятия дополнительности. По мнению ряда физиков, подобные рассуждения являются либо тривиальными, либо бессодержательными.

Чтобы попытаться разрешить эту проблему и показать, что дополнительность может работать в обе стороны — для понимания какого-то явления и себя самой, я хотел бы уточнить те физические ситуации, когда возникает эта концепция.

Вернемся к измерению координаты и скорости частицы. Что же удивительного в их дополнительности, которая возникает в квантовой теории? Чтобы понять это, обратимся к тому, как мы воспринимаем мир в обычной классической механике. Любое материальное тело задается двумя наборами параметров: координатами и скоростями. Наличие этих двух типов параметров необходимо потому, что уравнения, которые описывают все, что может происходить в механике, являются дифференциальными уравнениями второго порядка (уравнения Лагранжа), и координат не достаточно, нужны еще их первые производные — скорости (или импульсы). Как только мы знаем начальное состояние, мы можем, согласно уравнениям Лагранжа, рассчитать дальнейшую траекторию системы. Когда мы обращаемся к квантовой теории, то, поскольку мы не можем одновременно измерить координаты и скорость, понятие траектории теряет смысл. Частицы движутся как бы скачками, если мы пытаемся применить к ним классические понятия.

---

[2] Много размышлял на эти темы, и вообще о аналогиях квантовой теории в биологии (особенно, эмбриологии), этнографии, фольклоре покойный А. И. Лапин. К сожалению, эти его работы остались неопубликованными. Мой интерес к философским вопросам квантовой теории возник под влиянием многолетнего общения с Андреем Ивановичем.

Важнейшим инструментом квантовой теории, который заменяет понятие траектории, является понятие вероятностного распределения, или волновой функции. С каждой частицей (рассмотрим опять свободную частицу на прямой $\mathbb{R}$) мы связываем волновую функцию $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, которая, впрочем, не совсем является вероятностью. Это важный технический момент в квантовой теории: функция $\psi(x)$ является комплексной, и только квадрат ее модуля является вероятностью обнаружить частицу в точке x нашей прямой. Более точно, вероятность обнаружить частицу в интервале $(x, x+dx)$ равна $|\psi(x)|^2 dx$.

Первый фундаментальный факт квантовой теории состоит в том, что это есть *все*, что мы можем знать про частицу. Волновая функция — это и есть полное описание ее состояния. Если в данный момент времени t волновая функция известна, то в дальнейшие моменты она определяется уравнением Шрёдингера (оно первого порядка по времени и заменяет в квантовой теории уравнения Лагранжа). Итак, в классической теории есть два числа x и v и пространство возможных состояний двумерно, а в квантовой теории имеем, вместо этого, всевозможные функции координаты x, и пространство состояний бесконечномерно.

Здесь возникает естественный вопрос. Ведь мы можем измерять и скорость. И поскольку мы не можем знать и координату и скорость одновременно, то почему бы нам не ввести распределение вероятностей и для скоростей? Конечно, мы можем его ввести и измерять в соответствующей экспериментальной ситуации. Обычно, вместо скорости рассматривают импульс $p = mv$. Обозначим распределение для импульсов через $\varphi(p)$.

Второй принципиальный факт, который будет стержнем нашего анализа, состоит в том, что в квантовой теории это второе распределение $\varphi(p)$ не является независимым, оно полностью определяется функцией $\psi(x)$, а именно

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \exp\left(\frac{ipx}{h}\right) dx,$$

т. е. эти функции связаны между собой *преобразованием Фурье*. Преобразование Фурье — это стандартное и фундаментальное понятие в математике. Оно выходит далеко за пределы анализа и является, по существу, общематематическим, связанным с понятием двойственности.

В нашем простейшем примере координаты x лежат на вещественной прямой $X \cong \mathbb{R}$. Что же такое прямая X', на которой лежат скорости частицы? Важно, что и X и X' являются группами (в алгебраическом смысле). И эти две группы двойственны друг другу в смысле теории коммутативных групп (они есть группы характеров друг друга). Преобразование Фурье — это общая конструкция, которую можно построить, если у нас имеются две произвольные коммутативные группы X и X', двойственные друг другу. Каждой функции на X отвечает функция на X', ее преобразование Фурье и наоборот. В диаграмме проекций

$$X \leftarrow X \times X' \rightarrow X'$$

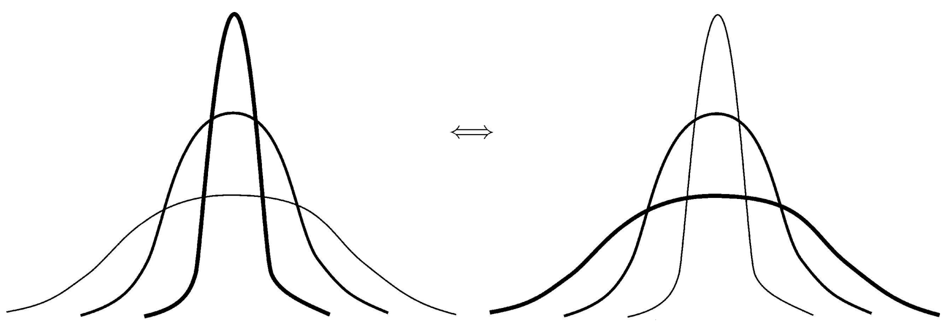
функции на X можно поднять на $X \times X'$, умножить на $\exp(i\langle\,.\,,\,.\,\rangle)$ и затем отправить, интегрируя по слоям правой проекции, на X'. Это понятие можно еще более расширить, на некоммутативные группы и даже на негрупповые многообразия. Также его можно применять не только к функциям, но и к дифференциальным формам, когомологиям, расслоениям и т. п. Это — общекатегорная конструкция, которая пронизывает очень многие области математики.

Важно, что у нас имеется обратное преобразование Фурье,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(p) \exp\Big(-\frac{ipx}{h}\Big)\, dp,$$

и, произведя его, мы получим исходную функцию $\psi(x)$. Это означает, что преобразование Фурье является инволюцией и его можно рассматривать как симметрию второго порядка.

Именно из наличия преобразования Фурье, с помощью простых математических соображений, немедленно вытекает соотношение неопределенностей Гейзенберга. Дело в том, что преобразование Фурье функции, сконцентрированной в окрестности какой-то точки, будет расплываться тем больше, чем более «сжата» исходная функция. Это же верно и для обратного преобразования. Для $|\psi(x)|$ и $|\varphi(p)|$ мы имеем такую картинку:



В пределе, если скорость известна точно, $v = v_0$, то $\varphi(p) = \delta(p - p_0)$ — функция, «сосредоточенная» в одной точке $p_0 = mv_0$. Тогда, волновая функция имеет вид бесконечной волны, $|\psi(x)| = 1$, и частица находится с равной вероятностью в *любой* точке прямой.

Мы видим, что в основе понятия дополнительности лежит очень общая и прозрачная математическая конструкция, в которой уже встречаются некоторые соображения симметрии. У нас есть переход из одной картины в другую, и можно сказать, что дополнительные картины мира являются симметричными[3]. В данный момент это наблюдение не выглядит особенно глубоким[4]. Мы просто зафиксируем его и пойдем дальше.

Как я уже говорил, понятие дополнительности возникло в конкретной экспериментальной ситуации. Его можно распространить и на частицы в трехмерном пространстве, на наборы частиц, системы с взаимодействием и т. д. Однако, теперь я рассмотрю совсем другой пример.

В квантовой теории, в отличие от классической физики, есть такие переменные, характеризующие состояние физических объектов, которые очень непохожи на координаты и скорость. Они являются дискретными, а не непрерывными. В частности, такими являются проекции спина, собственного момента количества движения частицы, на оси координат. В квантовой теории доказывается, что они могут принимать лишь дискретные значения, целочисленные кратные постоянной Планка h. Есть и другие «квантовые числа».

Для них тоже выполняется соотношение неопределенности, имеет место картина дополнительности. Чтобы почувствовать дополнительность в этой ситуации, приведем такой квазифизический пример.

Представьте себе лабораторию, в которую привезли груду экспериментального материала для исследований. При первом осмотре обнаружилось, что это просто камешки, имеющие разный цвет (красный, белый) и разную форму (шарики, кубики). В одну коробку были отсортированы камешки красного цвета, в другую — белого, дальше была произведена классификация по форме. В итоге была получены четыре коробки. Каково же было удивление экспериментаторов, когда камешек, взятый наудачу из коробки с надписью «красные шарики», оказался белого цвета. Обнаружилось, что таких камешков очень много и отнести

---

[3] Конечно, дополнительность имеет место и в более общей ситуации канонически сопряженных переменных, когда соотношение неопределенностей получается из перестановочных соотношений для некоммутирующих операторов. О принципиально несимметричной дополнительности см. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971. С. 142–143.

[4] На самом деле рассмотренная нами симметрия второго порядка представляет собой хотя и простой, но нетривиальный пример симметрии. Так, соединяя вместе несколько симметрий второго порядка, можно получить весьма сложные группы (дискретных) симметрий, как конечные, так и бесконечные. Многие кристаллографические группы симметрий евклидова пространства порождены элементами второго порядка — зеркальными отражениями. (См. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М., 1972. Главы IV–VI.) Наконец, в каждой группе Ли G непрерывных симметрий имеется конечная подгруппа — группа Вейля. Последняя всегда порождена элементами второго порядка — отражениями в пространстве корней алгебры Ли группы G (*Вейль Г.* Избранные труды. — М., 1984. С. 100–197.) В частности, преобразование Фурье в квантовой механике на прямой тесно связано с симплектическим преобразованием $x \mapsto p$, $p \mapsto -x$ двумерного фазового пространства $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Это преобразование является образующей группы Вейля группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (см. *Ленг С.* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. — М., 1977; *Лион Ж., Вернь М.* Представление Вейля, индекс Маслова и тета-ряды. — М., 1983).

этот факт к небрежности тех, кто занимался этой работой, нельзя. После многочисленных опытов было обнаружено поразительное явление: камешек, когда на него смотрят, меняет после этого форму, а после того, как его ощупывают, меняет цвет. Возник вопрос, есть ли какие-то механизмы, которые ответственны за эти превращения? Работа кипела день и ночь, однако не продвинулась ни на шаг. Никаких механизмов обнаружено не было. Кому-то из присутствовавших физиков пришла в голову безумная мысль, что их может и не быть. На него посмотрели косо.

Вот, вкратце, та ситуация, которая возникла с дополнительностью в квантовой теории. Чтобы приблизить ее к физике, давайте представим себе, что камешки были привезены в наглухо закрытых коробках, недоступных для исследования. Была, однако, построена система трубок, по которым их можно перегонять, один за другим, из одних коробок в другие. При этом на трубках размещены «приборы», которые позволяют сделать некоторые выводы о состоянии этих «камешков». Приборы двух сортов. На некоторых трубках есть маленькое стеклянное окошко. Когда камень проскакивает, мы видим его цвет, но не можем видеть, какой он формы. В другом месте в железной трубке сделан разрыв и вставлен кусок из мягкого материала. Когда камешек проходит это место, его можно пощупать и определить форму, не видя, какого он цвета.

Теперь представьте, что все что было сказано выше, повторилось. Вот тут уже никакой мистики не должно быть. Тут уже ясно, что есть какой-то механизм изменений. Но поскольку мы не имеем возможности открыть трубки и заглянуть по ту сторону явления, можно только строить догадки о том, как этот механизм работает. Строя эти догадки, можно вычислять, к каким экспериментальным следствиям они приводят.

Что же мы знаем первоначально, не имея никаких механизмов? Когда измеряется цвет, то имеется вероятность, скажем, 1/2 для красного цвета и вероятность 1/2 для белого. Когда мы измеряем форму, то опять с вероятностью 1/2 получаем частицы-шарики или частицы-кубики. Когда мы делаем последовательные измерения *разных* свойств, то каждое следующее измерение полностью уничтожает распределение, полученное перед этим. Если у нас были только красные камешки, то после измерения их формы, мы снова их разложим с вероятностью 1/2 на две части, красные и белые. Итак, результат носит чисто вероятностный характер, и ничего больше мы сказать не можем.

Конечно, деятельность физиков этой лаборатории и состояла в том, чтобы найти какие-то механизмы этих превращений. Ясно, что эти механизмы должны давать какие-то новые экспериментальные следствия, отличные от тех вероятностных распределений, которые я только что описал. Если механизм не имеет никаких *других* следствий, то его придумывание бессмысленно, что он есть, что его нет! Но все механизмы, придуманные в этой лаборатории, дали такие изменения вероятностных распределений, которые противоречили эксперименту. Ни один из них не подошел в качестве разгадки этого удивительного явления.

Теперь уже можно сказать, что такие механизмы в квантовой теории носят название *скрытых параметров*. Они вводились в квантовой теории с самого ее возникновения. Те ограничения, которые возникают, когда мы ими пользуемся, называются неравенствами Белла и были сформулированы как некая добавочная информация о квантовом мире. В большом количестве экспериментов было показано, что все виды неравенств Белла нарушаются.

Таким образом, мы можем сделать фундаментальный вывод из той ситуации, которая встречается в концепции дополнительности. Основной принцип квантовой теории состоит в том, что за этим явлением не стоит ничего другого, он ни к чему не сводим, он *первичен*. Это — принцип, объяснять который дальше в тех терминах, к которым мы привыкли за триста лет развития естествознания, не имеет никакого смысла. Последнее заключение является мета-научным, оно не есть прямой вывод из каких-то экспериментов, скорее, из многочисленных неудачных экспериментов [5)]. Оно принадлежит к тому, что называется копенгагенской интерпретацией квантовой теории, которая оспаривалась многими физиками и философами, от Эйнштейна и до Поппера и Пригожина [6)]. Окончательное понимание ситуации еще, по-видимому, далеко. Именно, аналогии с другими областями науки, в духе Бора, могли бы тут что-то прояснить.

Мы видим, что понятие вероятности входит в квантовую теорию совсем не так, как в классической теории вероятностей. Оно происходит не от нашего незнания и волновая функция, являясь полным описанием реальности, дает эту реальность не в актуальном виде, а в виде *возможности* (говорить о цвете или форме камешка до соответствующего измерения не имеет смысла, их конкретные значения лишь возможны). Только акт наблюдения позволяет этой возможности реализоваться. Как писал Гейзенберг, это является возрождением представления о потенции, развитого Аристотелем в его *Метафизике* [7)].

[5)] Новейшее развитие этого направления в квантовой теории привело, довольно неожиданно, к вполне «позитивным» результатам и надеждам весьма практического свойства (таким как квантовая криптография и телепортация, см. *Zeilinger A.* Quantum Teleportation // Scientific American. 2000. April. P. 32–41; http:// www.quantum.at).

[6)] Некоторое представление об эмоциональном накале происходящей тут борьбы, или скорее атаки, можно получить из кн. *Wick D.* The Infamous Boundary. — N.-Y., 1995.

[7)] См. *Гейзенберг В.* loc. cit. С. 32, 153, и его кн. *Шаги за горизонт*. — М.: Прогресс, 1987. С. 222–223. В *О возникновении и уничтожении* (II, 7, 334b20-25) Аристотель пишет: «теплое в действительности есть холодное в возможности, а холодное в действительности — теплое в возможности». Заменяя теплое/холодное, например, на белое/красное, получаем в точности описанную нами выше ситуацию.

Зафиксируем еще для дальнейшего, что за явлением дополнительности в физике стоит также ясный математический механизм — преобразование Фурье. Отметим кстати, что преобразование Фурье существует также и для дискретных переменных и можно с его помощью описать и второй приведенный нами пример дополнительности [8].

И тем самым, неверно представлять дополнительные стороны действительности как перпендикулярные, как не имеющие отношения друг к другу. На самом деле наличие преобразования Фурье показывает, что между обеими дополнительными картинами мира существует точная и нетривиальная связь.

Симметрия и асимметрия человека

Мы начнем с симметрии, которая наблюдается у животных различных классов на **морфологическом** уровне. Существует плоскость (сагиттальная плоскость), которая делит тело на две части, и можно сказать, что, в первом приближении, эти части одинаковы. Эта билатеральная симметрия выражается, в частности, в наличии у человека парных сенсорных органов, в парности конечностей и в наличии парной структуры головного мозга — левого и правого полушарий.

Как известно, человек с помощью сенсорных органов воспринимает окружающий мир, при этом происходит передача восприятия одной стороны пространства в определенное полушарие и наоборот. Здесь мы встречаемся с первым нетривиальным фактом билатеральной симметрии: при зрительном восприятии происходит перекрест зрительных импульсов. Зрительное восприятие левой стороны пространства попадает в правое полушарие, а правой стороны — в левое. Поле зрения каждого глаза делится на две части и, соответственно, левая часть «идет» в правое полушарие, а правая — в левое.

Однако, уже на морфологическом уровне мы наблюдаем первые грубые нарушения билатеральной симметрии: смещение непарных органов относительно плоскости симметрии. Именно, сердце у человека смещено влево, а печень — вправо. Кроме того, имеются более мелкие отклонения, например, в массе конечностей.

Итак, в первом приближении можно сказать, что человек является симметричным. Более внимательное изучение показывает, что эта симметрия нарушена. Интересно, что это обстоятельство носит также и хронологический характер. На ранних стадиях развития эмбриона имеется даже не билатеральная, а сферическая симметрия, затем появляет-

[8] Нужно взять в качестве X циклическую группу второго порядка. Тогда $X' \approx X$, пространство состояний будет двумерным, а преобразование Фурье — матрицей второго порядка. Наблюдаемым величинам «форма» и «цвет» отвечают базисы из собственных векторов, *развернутые* относительно друг друга. Последнее свойство и влечет дополнительность «формы» и «цвета».

ся сагиттальная плоскость, и на стадии бластулы зародыш становится симметричным относительно этой плоскости. Позднее появляется нарушение и билатеральной симметрии. Таким образом, в индивидуальном развитии человека имеются определенные моменты, когда довольно резко происходит уменьшение имевшейся перед этим симметрии организма [9)].

Если говорить о функциях, т. е. о физиологии человека, то здесь будет еще больше нарушений симметрии. Появляется то, что называется **функциональной** асимметрией человека. Самая известная асимметрия связана с разным уровнем активности конечностей. Прежде, чем описывать функциональную асимметрию человека, нужно сделать очень важное замечание. С точки зрения асимметрии, все люди делятся на две группы.

Прежде всего, выделяется очень большая, доминирующая (порядка 70%) группа *правшей*. Это люди, у которых более развита, более ловкая правая рука. Исследования показали, что многочисленные другие асимметрии человеческого организма сильно коррелируют со стороной, левой или правой. Существует как бы таблица асимметрий, в которой определенные свойства можно записать слева, другие — справа. Это верно в отношении тех людей, которых мы условно называем правшами и совершенно неверно по отношении к остальной части человечества. Те люди, которых часто называют левшами, леворукими, амбидекстры (двусторонне симметричные), демонстрируют гораздо большее количество типов асимметрии. У них нет жесткой привязки определенных функциональных предпочтений той или другой стороны тела. То есть можно сделать вывод о том, что есть некоторый доминирующий тип, где асимметрии жестко связаны друг с другом. И есть большое количество типов, где встречаются самые разнообразные варианты. В дальнейшем я буду говорить, в основном, об этом доминирующем типе, о правшах, к которым относится большинство людей.

Какие же существуют функциональные асимметрии человека? Существует понятие *моторной* или *двигательной* асимметрии и, соответственно, все, что относится к правой руке, можно отнести и ко всем видам двигательной активности. Двигательные органы человека, относящиеся к правой стороне, развиты обычно лучше, чем относящиеся к левой.

[9)] Это развитие похоже на фазовые переходы при остывании физического тела. В эмбриологии даже имеется понятие «температуры», действительно уменьшающейся в онтогенезе. Аналогичная картина наблюдается во временной эволюции Вселенной, согласно современным теориям Большого Взрыва. По мере остывания Вселенной происходит уменьшение группы симметрии и выделение различных типов взаимодействий. Такая аналогия могла бы быть современном вариантом известного всем народам соответствия макрокосма и микрокосма. Интересную параллель современной инфляционной космологической модели в эмбриогенезе см. *Павленко А. Н.* Бытие у своего порога. — М.: ИФ РАН, 1997. С. 137–138.

Второй важный вид функциональной асимметрии — *сенсорная* асимметрия. Если рассматривать парные органы чувств — глаза, уши, ноздри, различные стороны кожного покрова, то, как правило, правая сторона воспринимает мир более обостренно, чем левая.

Третья, наиболее тонкая часть функциональной асимметрии, свойственная лишь человеку, это — *речевая* асимметрия. Речевая асимметрия связана с тем хорошо известным фактом, что центр речи находится в левым полушарии. При поражениях его, при травме, человек теряет речь полностью или нарушается стройность его речевого поведения.

Какие же особенности, связанные с речью, проявляются как асимметрии полушарий мозга?

В речи, как будто, главную роль играет левое полушарие (напомним, что речь все время идет о правшах) и, тем не менее, правое полушарие имеет для речи также очень большое значение. Проводились эксперименты, целью которых было понять, какие свойства речи «характерны» для левого и для правого полушарий. Само подобное представление о распределении функций появилось довольно поздно, во второй половине XIX века, в исследованиях невропатологами больных с различными поражениями полушарий мозга. Однако впоследствии были созданы и экспериментальные методики для получения таких данных [3].

Каковы же результаты? Они выглядят весьма интригующе. Если мы посмотрим, как нарушается речь человека при тех или иных повреждениях, или при той или иной инактивации *левого* полушария, то (подчеркну, что это огромная область исследований, поэтому то, о чем идет речь, излагается далее обобщенно и кратко) происходит нарушение понимания смысла слов, потеря словарного запаса, нарушение грамматической структуры высказывания, резко ухудшается восприятие звуков, связанных с артикуляционной структурой речи, резко снижается разборчивость в восприятии отдельных фонем, слогов, изолированных слов.

При отключении *правого* полушария все те явления, о которых я только что говорил, не имеют места и проявляется совсем другое: нарушения просодических характеристик речи, интонации, узнавания голоса конкретного человека, различения мужского голоса от женского, крайне плохо воспринимаются невербальные стимулы (предметные шумы, мелодии). При нарушениях в левом полушарии эти явления не имеют места. Любопытно, что, хотя восприятие фонем, т. е. основ фонологической структуры речи, «относится» к левому полушарию, имеются данные, хотя и противоречивые, что левое полушарие лучше воспринимает согласные, а правое — гласные.

Важно отметить одно принципиальное обстоятельство, связанное с функциональной асимметрией. Когда говорят, что то или иное свойство присуще тому или иному полушарию, это совсем не означает, что это свойство «присуще» ему *абсолютно*. Исключением является речевой центр, который находится в левом полушарии. При отключении левого полушария речь исчезает полностью.

Все остальные свойства, которые можно как-то измерить, например разборчивость слогов, могут варьироваться и преимущество того или другого полушария носит не абсолютный, а *относительный* характер. Результаты таких измерений, естественно, представляются в виде *вероятностных* распределений.

Еще было обнаружено явление, которое можно обозначить как противоположность между последовательными и параллельными действиями. В частности, в языке восприятие грамматической структуры, языковых парадигм проходит во времени последовательно и гораздо лучше воспринимается левым полушарием. Что касается схватывания смысла фразы, мелодии, интонации, т. е. целостного образа, развертывающегося во времени, но воспринимаемого сразу, мгновенно, то это более характерно для правого полушария.

Подобного рода явления обнаруживаются и для других сенсорных модальностей, в частности, в зрительном восприятии. При восприятии какой-то картины внешнего мира существуют тоже две возможности: сразу схватить всю картину, не вычленяя отдельные предметы, или «ощупывать» предметы глазами, переходя от одного к другому. Такие способности схватывания и расчленения соотносятся с разделением функций между правым и левым полушариями. Эти различия часто формулируют, говоря, что правое полушарие склонно к целостному синтетическому восприятию окружающего мира, в то время как для левого полушария характерен более логический, аналитический способ видения мира.

Приняв подобный вывод, попробуем теперь применить в этой ситуации понятие дополнительности. Рабочая гипотеза состоит в том, что свойства, характерные для левой и для правой стороны человека, являются дополнительными друг другу.

Как уже было сказано, левая часть нашего организма склонна действовать во времени последовательно, а правая часть предпочитает воспринимать все одновременно или параллельно. Чтобы понять это явление, обратимся к материалу, собранному в совсем других областях знания — в фольклористике, этнографии, истории религии. В мифологиях разных народов мира есть представление о двух видах речи: о речи человеческой и речи божественной. Важно, что, хотя эти два вида речи резко отличаются друг от друга, человек понимает обращенное к нему слово богов.

Несколько замечаний по этому поводу сделал в своей *Исповеди* Августин, в том ее месте, где он дал свой анализ понятия времени. Говоря о различии между языком человека и языком Бога, Августин указывает, что слова человеческие начинаются и кончаются во времени, они следуют одно за другим. Слова Божественные не имеют ни начала, ни конца. Они звучат вечно, и они звучат все одновременно [4].

Чтобы проанализировать эту ситуацию, заменим слово «вечно», как не имеющее пока естественно-научного эквивалента, на «бесконечно долго» и рассмотрим математическую конструкцию, использованную выше для анализа дополнительности в физике, т. е. преобразование Фурье. Применим к этой картинке математическую конструкцию, использованную выше для анализа дополнительности в физике, т. е. преобразование Фурье. Его более простой вариант называется разложением в ряд Фурье. Каждую (периодическую) функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \sum_n a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt),$$

т. е. в виде суперпозиции гармонических колебаний — простейших волн.

Теперь представим себе слова человеческой речи как (периодические) функции времени. Их можно разложить на гармоники. Каждую такую гармонику можно представить в виде бесконечно долго звучащей волнообразной кривой. Тем самым они обладают свойствами слов Божественной речи. Мы видим, что стандартный математический образ хорошо совпадает с этими чисто качественными рассуждениями [10)].

Итак, «последовательность» человеческой речи и «параллельность» речи Божественной находят свое выражение в математической конструкции преобразования Фурье, и я думаю, что это первый серьезный аргумент в пользу дополнительности в этой ситуации.

Есть и другие аргументы такого рода в поддержку этой точки зрения. В немецкой мистической традиции имеется небольшое сочинение *Theologia Deutsch* XV века, одна из глав которого говорит о духовном зрении. Имеет смысл сопоставить эти представления о речи и зрении как путях общения с Богом [11)]:

> У созданной души человека два глаза: один может созерцать вечное, другой только временное и сотворенное. Но эти два глаза нашей души могут делать свое дело не

[10)] На самом деле, обычная речь не является, конечно, периодической и нужно использовать не разложение в ряд Фурье, а именно преобразование Фурье, с непрерывным спектром гармоник. Заметим еще, что «содержание» божественных слов находится в коэффициентах a_n, b_n, а не в «скучнейших» синусоидах. Кроме того, мы вовсе не пытаемся дать математическую интерпретацию Божественной речи, что было бы нелепо. Скорее, богословские понятия могут тут что-то прояснить и помочь, скажем, лингвистике, все еще немощной в вопросе о природе языка.

[11)] См. «Der Franckforter» *Theologia Deutsch*. Einsiedeln, 1980. S. 48. (Мы использовали перевод архиеп. Луки (Войно-Ясенецкого) из его книги *Дух, душа и тело*. — Брюссель, 1988. С. 148–149).

В письме В. Паули В. Гейзенбергу от 19 октября 1926 г. встречается такая иллюстрация соотношения неопределенностей между импульсом p и координатой q: Man kann die Welt mit dem p-Auge und man kann sie mit dem q-Auge ansehen, aber wenn man beide Augen zugleich aufmachen will, dann man irre (*Pauli W.* Wissenschaftlicher Briefwechsel. Bd. I. — Berlin, 1979. S. 347). Я обязан этим замечанием Вл. П. Визгину.

оба разом, а только так, что когда наша душа вперяет свой правый глаз в вечность, левый ее глаз должен отказаться вполне от своей деятельности и пребывать в бездействии, как бы умирать. Когда же действует левый глаз души, т. е. когда ей приходится иметь дело с временным и сотворенным, тогда от деятельности своей, т. е. от созерцания, должен отказаться правый глаз. Поэтому, кто хочет смотреть одним глазом, должен освободиться от другого, ибо никто не может служить двум господам.

Отношения левого и правого, временнóго и вечного выражены тут весьма ясно.

Но вернемся к асимметрии полушарий. Между полушариями в процессе их *совместной* работы имеются так называемые реципрокные взаимодействия. Одно из них старается подавить другое. Оказывается, что характерные для того или иного полушария свойства проявляются наиболее сильно, если противоположное полушарие инактивировано. Разборчивость фонем человеческой речи при слуховом восприятии левого полушария существенно выше, если при этом правое полушарие «не работает». Это взаимодействие частей тела очень напоминает то, что мы имеем в концепции дополнительности, когда речь идет об измерении координаты и скорости. Чем точнее мы измеряем координату, тем больше разброс возможностей при измерении скорости. И наоборот.

Теперь перейдем к более сложным формам асимметрии человека, которые проявляются в **психической** жизни. Здесь я буду пользоваться результатами многолетних исследований невропатологов и психиатров Т. А. Доброхотовой и Н. Н. Брагиной. Эти исследования были изложены в целом ряде их монографий и в статьях, опубликованных в журнале *Вопросы философии* [5]. К сожалению, они не привлекли к себе должного внимания. В течение многих лет исследователи наблюдали больных с различными поражениями мозга, и их сводка психических нарушений содержит следующие интересные наблюдения. Мы выделим только два феномена, относящихся к право- и левосторонним поражениям мозга правшей.

У людей с *правосторонними* нарушениями встречается так называемое онейроидное состояние, возникает «вспышка пережитого». Это же происходит при раздражениях коры головного мозга справа. Человек, который находится в подобном припадке, в момент самого приступа неподвижен, лицо его ничего не выражает. Он как бы полностью отключен от реального мира и погружен в свои собственные переживания и ощущения. Когда приступ проходит, больной может рассказать о нем, т. е. дать субъективную характеристику того, что с ним происходило. По его словам, он попадает в какой-то период своей прошлой жизни и заново переживает то, что тогда с ним происходило. Например, описан случай, когда взрослый мужчина смог снова почувствовать себя семилетним мальчиком, едущим в машине вместе со своим отцом, шофером, переживая все так, как будто это было на самом деле.

С другой стороны, при *левосторонних* поражениях наблюдается «сумеречное состояние», характерным примером которого является психический автоматизм («лунатизм»), связанный с двигательной активностью человека. Во время такого приступа человек может совершать чрезвычайно сложные движения, выйти из дома, пользоваться транспортом, добраться, совершая множество непростых операций, к себе на работу. Когда приступ заканчивается, больной ничего не помнит. Поэтому единственной характеристикой происходившего является чисто объективная характеристика, данная наблюдателем со стороны.

Мы видим, что в этих двух явлениях имеется очевидная противоположность. Если в первом случае результатом этого описания является жизнь, прожитая чувственно, сенсорно, то во втором случае сенсорная часть полностью отсутствует, а имеются только моторные действия. Важно еще и то, что во время онейроидного приступа больной как бы отсутствует и не общается с окружающим пространством, во время же «сумеречного состояния» он находится в реальном времени и в реальном пространстве и взаимодействует с ним. В первом случае у него есть память о том, что с ним происходило, во втором случае память отсутствует.

Итак, мы имеем два способа взаимоотношения с реальностью, сенсорный и двигательный, и *оба* они представлены как в левом, так и в правом полушариях. Левое полушарие получает сенсорные данные от правой половины тела, а правое — от левой. Это же верно и для двигательной активности. Тем не менее, мы можем сказать, что правое полушарие более склонно к сенсорным действиям, а левое — к моторным. Попытаемся представить это как дополнительность этих двух сфер деятельности человека. Сначала это выглядит довольно произвольным допущением [12)]. Однако в пользу такого предположения говорят и приведенные выше другие проявления взаимоотношений полушарий между собой.

Кроме того, к приведенным примерам психической асимметрии человека, существующим лишь в патологии, тесно примыкает феномены, которые были проанализированы в известной книге Анри Бергсона *Материя и память* [6]. Я имею в виду его концепцию двух видов памяти, сопровождающих нормальную деятельность человека.

Одна память привязана к определенному моменту во времени. Это память-воспоминание, «вспышка прошлого» хотя и является уникальной чувственной картиной определенного момента в прошлом, но ее можно повторять снова и снова.

[12)] Если не знать, что по предположению историков науки концепция дополнительности восходит, возможно, к изучению Бором главы о потоке мышления в *Принципах психологии* У. Джемса. В частности, сам термин появляется у Джемса при описании расщепления сознания у некоторых больных (*James W.* Principles of Psychology. — N.-Y.: Dover, 1950. V. 1. P. 206). См. *Джеммер М.* loc. cit. С. 338–339; *Холтон Дж.* loc. cit. С. 183–188.

С другой стороны, существует память-привычка. Она связана с двигательной активностью, когда человек научился что-то делать и после этого он может производить это движение снова и снова. Его нельзя привязать к определенному моменту, оно существует как бы вне времени. Это и есть движение как целое.

Эти два вида памяти резко отличаются друг от друга, они естественным образом сопоставляются с теми психическими отклонениями, о которых я только что говорил [13].

Как же сами исследователи представляют себе природу данного явления? Вывод, который делают в своих книгах психиатры, состоит в том, что они предлагают представить человека, находящимся в двух пространствах, левом и правом. Мы вернемся к этой идее позднее. А сейчас мы попробуем описать эти явления с точки зрения квантовой теории. Предположим, в стиле платоновского мифа из *Пира*, что человек состоит не из двух половин, а как бы из двух людей: «левого» человека и «правого» человека. К «левому» человеку мы отнесем те «левополушарные» явления, которые мы описывали, причем возьмем их в самом резком, крайнем виде. «Левый» человек обладает речью, артикулирует свои высказывания, он движется, но ничего не воспринимает из окружающего мира.

«Правый» человек воспринимает мелодии, звуки, схватывает все одновременно и сразу, находится в состоянии сенсорной одержимости, он замер и не движется вовсе. Реально эти два состояния в природе, конечно, не могут встречаться. Их надо понимать как два вектора в смысле квантовой теории. Реальный человек — это суперпозиция этих двух векторов или состояний, хотя правильнее сказать, что левая половина человека — это суперпозиция «левого» и «правого» человека с гораздо большим удельным весом левой компоненты, а правая половина — суперпозиция с большим удельным весом «правого» человека [14]. Более

[13] Приведем еще один пример такого соответствия между левым/правым и функциями организма. В цитированных книгах Доброхотовой и Брагиной отмечается, что для левополушарных поражений мозга характерны состояния тревожной депрессии. Больной испуган, непоседлив, обеспокоен будущим, иногда объят страхом. В правополушарной ситуации встречается тоскливая депрессия: больной заторможен, погружен в свои мысли, типичная эмоция — тоска, печаль. Эти же эмоции встречаются и при психических отклонениях, сопутствующих некоторым соматическим заболеваниям: страх при болезнях сердца (находящегося слева), тоска при болезнях печени (находящейся справа) (*Банщиков В. М., Невзорова Т. А.* Психиатрия. — М.: Медицина, 1969. С. 153, 145). Подобное соответствие нашло отражение и в языковых данных — «печаль» и «печень» имеют родственные корни.

[14] На первый взгляд, отмеченная выше повышенная чувствительность правой стороны тела у правшей противоречит такому определению. Однако, каждая сенсорная модальность представляет собой сложное образование, имеющее наряду с чувственной стороной и активный, двигательный элемент (см. об этом ниже на примере зрения). Поэтому для выделения чисто сенсорной, пассивной стороны в каком-либо акте восприятия требуется его тщательный анализ. И, по существу, это возможно лишь

того, состояние человека меняется во времени и, если ночью, во время сна, он — почти «правый» человек, то днем, при бодрствовании, «левое» состояние берет верх. В очень близких терминах, именно как два состояния, которые «в нормальной жизни тесно перемешиваются и проникают друг в друга, теряя, при этом, как то, так и другое, часть своей первоначальной чистоты», описывает человека Бергсон — как существо воспринимающее и действующее. В одной крайности человек существует постоянно «*грезя и воображая*», а в другой он «непрестанно *разыгрывал* бы свое существование, не имея возможности по-настоящему его представить» [15].

Несколько отклоняясь от нашей основной линии — дополнительности, попробуем теперь представить, что же происходит с меньшей частью человечества — так называемыми левшами. Если для большинства людей, т. е. правшей, отмеченные нами комбинации являются более или менее определенными, то для остальных эти жесткие зависимости нарушаются и комбинации гораздо более многообразны. Можно дать такую «физическую» модель этой ситуации.

Представим себе ось, на которую насажены отрезки или векторы, которые могут вращаться вокруг этой оси. Каждый такой отрезок — это какое-то свойство: левое/правое, моторное/сенсорное, последовательное/одновременное, логическое/интуитивное, общее/единичное, внешнее/внутреннее и т. д. Между ними существуют связи, их можно представить в виде соединяющих их «резинок». Для большинства людей, правшей, эти векторы почти идеально соответствуют друг другу, все они смотрят в одну сторону. Но «резинки» зависят от «температуры». Если температура не слишком высокая, то связи заморожены и векторы лишь слегка подвижны. Когда же температура повышается, они могут двигаться и становятся более независимыми друг от друга. Если же температура превышает некоторую критическую, то связи «расплавляются» и исчезают вовсе. Тогда мы получим векторы, направленные в разные стороны, и возникают самые разнообразные комбинации свойств, которые не соответствуют ни одной определенной картине.

в некотором идеальном пределе. Заметим еще, что, например, кожная чувствительность у правшей все-таки выше на левой руке (*Брагина Н. Н., Доброхотова Т. А.* Функциональные асимметрии человека. — М. — 1981. С. 44).

[15] «Первый никогда не выходил бы за пределы частного и даже индивидуального $< \cdots >$, второй же, неспособный, без сомнения, *мыслить* общее $< \cdots >$ все же пребывал бы в измерении всеобщего, так как привычка для действия — это то же, что общее для мысли». См. А. Бергсон [6], с. 257–258. Конечно, Бергсон писал это задолго до квантовой механики, также он не связывает эти состояния с левой или правой сторонами тела.

Интересно сравнить это с замечаниями С. М. Эйзенштейна о левой половине лица, как представляющей типовое, или родовое в человеке, и правой половине, носящей больше индивидуальных черт (см. *Подорога В. А.* Феноменология тела. — М.: 1995. С. 293).

Тем самым оказывается, что левша не является зеркальным изображением правши, на самом деле это совсем другая ситуация, где отсутствует однозначная картина, характерная для правшей [16].

Графика и живопись (из лекций о. Павла Флоренского)

Лекции об изображении пространства в произведениях искусства Флоренский читал в Высших Художественных Мастерских (ВХУТЕМАС'е) в 1924 г. Они не были опубликованы и в течение многих десятилетий лежали в виде рукописей в архиве семьи Флоренских и лишь недавно, в 1993 г., появились в печати[7].

Одна из тем лекций — наличие двойственности между подходом к отображению реального мира графиком и живописцем. В этой двойственности, введенной, по-видимому, самим Флоренским, проявляется принципиальное различие и вместе с тем глубокая связь, существующая между этими двумя подходами.

Главное, что есть в работе графика — это резец, штихель, передача мира с помощью движения руки, вырезание линии через активное двигательное отношение к миру.

> В графике существенны направления и движения и не существенно, какими именно пассивно воспринимаемыми знаками эти направления и эти движения доводятся художником до нашего сознания. Иначе говоря, графика основывается на двигательных ощущениях и, следовательно, организует *двигательное пространство*. Ее область — область активного отношения к миру. Художник тут не *берет* от мира, а *дает* миру. Не воздействуется миром, а воздействует на мир [7, с. 77].

Любое движение человека, любой его жест есть явление *того же* самого ряда, что и подход графика к изображению реальности.

Говоря о живописи, Флоренский указывает, что основной элемент тут — мазок. В пределе точечный мазок, т. е. изображение чего-то ограниченного, пятно, нечто неподвижное и статичное.

> [При этом] мазок достаточно малый, чтобы не иметь форму, соперничающей с формою целого, целой картины, но не настолько малый, чтобы быть качественно инородным сравнительно со всею поверхностью. Тут художник показывает, как наступает на него мир. Отдельные моменты этого пассивного восприятия мира даются касаниями, прикосновениями. Это пассивное пространство строится осязанием. Осязание предполагает наименьшее возможное наше вмешательство во внешний мир при наибольшем возможном проявлении им себя [7, с. 80].

---

[16] Некоторое подтверждение нашей модели доставляют языковые данные. Во многих языках название для «правого» имеется, как правило, одно, в то время как для «левого» есть гораздо больше выражений (см. *Hertz R.* The Pre-eminence of the Right Hand: A Study in Religious Polarity // In: Right& Left. Essays on Dual Symbolic Classification. Ed. R. Needham. — Chicago, 1973. P. 11).

Более того, эти два способа противоположны друг другу:

> Графика, по существу, линейна. [Она состоит] в построении всего пространства и, следовательно, всех вещей в нем — движениями, т. е. линиями. Как только в произведении графики появляются точки, пятна, залитые краской поверхности, так это произведение уже изменило графической активности подхода к миру, двигательному построению своего пространства, жесту волеизъявления, т. е. допустило в себя элементы живописные $< \cdots >$ Пассивное восприятие в мире чувственной данности противоречит основам графики [7, с. 78].

Таким образом, отец Павел выделяет как в графике, так и в живописи те черты, которые характеризуют их в чистом виде, и затем говорит, что в графике проявляются прежде всего графические черты, а в живописи — преимущественно живописные, хотя в реальном произведении искусства присутствуют как черты графические, так и живописные.

Далее он описывает борьбу этих двух принципов искусства:

> Доведенные до окончательной чистоты, искусства зрительного осязания [т. е. живопись — *Авт.*] и зрительной двигательности [т. е. графика — *Авт.*] сами уничтожаются; первое — как непонятное, второе — как невоспринимаемое. В самом деле, хотя график и отвлекается от чувственных свойств, начертываемых им линий и от фактуры и цвета использованной им поверхности, но восприятие этих линий и этой поверхности все-таки возможно лишь при наличии чувственного и графика вполне нечувственная может быть лишь в качестве предмета отвлеченных рассуждений [7, с. 95].

> Движения без осязания пусты, а осязания без движений слепы [7, с. 92].

> Таким образом, каждое из этих основных искусств пользуется в действительности не одной, а *двумя* перво-способностями.
>
> Если в живописи при главенстве пятна-точки имеется и линия, то в графике господствующее начало, линия, не безусловно исключает пятно и предел его, точку. Но в живописи пятно и, соответственно, точка есть логически первое, а линия — второе, тогда как в графике — наоборот [7, с. 95].

Поскольку для художника ведущим служит все-таки зрение, Флоренский уделяет много места тому, как осязательность и двигательность входят в процесс зрительного восприятия [7, с. 92–93]. Тут и его любимая мысль о зрении как осязании ретиной, подкрепленная эмбриологическими данными, и представление о глазе как двигательном органе — общепризнанный факт современной психологии [17)].

[17)] См. *Гиппенрейтер Ю. Б.* Глаз как двигательный орган. В сб. *Восприятие и деятельность.* — М.: изд-во МГУ, 1976. С. 28–54.

Отметим еще, что двойственность в зрении возникает и на анатомическом уровне. Сетчатка глаза состоит из палочек и колбочек, образующих две разные зрительные системы. Палочки обладают высокой чувствительностью к свету, размещаются больше к краям глазного яблока, используются преимущественно при неярком, сумеречном освещении, как система имеют невысокую разрешающую способность, но хорошо воспринимают движения (боковое зрение). Колбочки не очень чувствительны к свету, концентрируются ближе к центру сетчатки, работают при сильном свете, имеют все вместе высокую разрешающую способность. Центральная ямка сетчатки, В следующих лекциях Флоренский излагает математические конструкции, необходимые для объяснения этой двойственности. Две лекции он посвящает хорошо известной в математике двойственности в проективной геометрии. Предположим, мы имеем проективную плоскость $\mathbb{P}$, на ней есть точки и прямые. Тогда между ними есть отношение, которое состоит в том, что прямая проходит через точку или, что то же, точка лежит на прямой. Фундаментальный принцип двойственности состоит в том, что, если имеется некоторое утверждение, включающее эти предметы и свойства, то оно сохраняет свою справедливость, если мы заменим точки на прямые, а прямые на точки, и, соответственно, сохраним отношения между ними. Оказывается, что после такого преобразования многие теоремы превращаются в весьма нетривиальные утверждения, совершенно непохожие на то, что было в начале. Классический пример — переход теоремы Паскаля в теорему Брианшона [8]. Более простой пример:

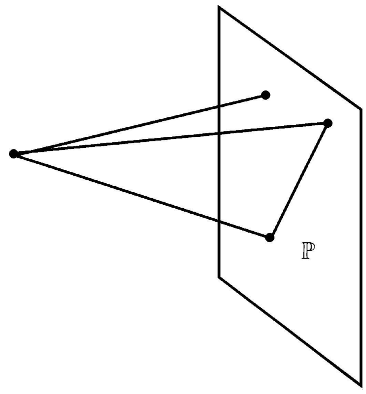
через две различные точки проходит ровно одна прямая
$\Updownarrow$
две различные прямые пересекаются ровно в одной точке

Объяснив проективную двойственность и заметив, что она является частным случаем более общего понятия двойственности в топологических пространствах, Флоренский в следующей 37-й лекции должен был перейти к объяснению того, как это математическое понятие связано с теми соображениями о природе искусства, о которых мы только что говорили. Но записи этой лекции в тексте нет. В следующих лекциях он уже о проективной двойственности не говорит. Перед нами встает загадка: что же хотел сказать о. Павел? Каким образом эти математические понятия двойственности связаны с той самой двойственностью между графикой и живописью?

Чтобы ответить, начнем с чисто математического обсуждения этого вопроса. Свяжем двойственность в проективной геометрии с ситуацией зрительного восприятия, использованной Флоренским для описания графики и живописи. Пусть «глаз» смотрит на картину.

используемая при ощупывании пространства линией взора, состоит исключительно из колбочек (см. *Восприятие* (*механизмы и модели*). — М.: Мир, 1974. С. 125–129, 134; *Милнер П.* Физиологическая психология. — М.: Мир, 1973. С. 228–230). В последней книге указывается, что некоторые авторы прямо говорят о двойственности этих двух систем и что аналогичное строение характерно и для других сенсорных систем высших животных (рассмотреть анатомию зрительной системы мне предложил Ю. В. Чайковский). Заметим также, что и рассмотренная выше двойственность сенсорного и моторного имеет свой морфологический коррелят. Сенсорные зоны полушарий расположены сзади, а двигательные спереди от роландовой борозды.

Будем считать, что плоскость картины — это наша проективная плоскость $\mathbb{P}$, т. е. она бесконечно удалена от «глаза». В этой плоскости есть и точки, и прямые («следы движения»). Если мы соединим эти геометрические образы с помощью световых лучей с точкой взора (соединяя, для простоты, оба глаза в один), то получим прямые и плоскости в трехмерном векторном пространстве. Это — хорошо известное представление проективной плоскости в виде множества прямых («световых лучей»). Оказывается, что двойственность в проективной геометрии возникает из двойственности векторных пространств, имеющейся в линейной алгебре.



Пусть у нас есть трехмерное векторное пространство E и двойственное к нему пространство E'. Если $F \subset E$ — его подпространство, то ему можно сопоставить подпространство $F^{\perp} \subset E$,

$$F^{\perp} = \{e \in E' \mid \langle e, f\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in F\},$$

где $\langle\,.\,,.\,\rangle$ — каноническая билинейная форма на $E \times E'$ (форма двойственности). Если F — прямая, то $F^{\perp}$ — плоскость и наоборот, и это именно то соответствие, которое определяет двойственность в проективной плоскости. Как мы видели на рисунке, прямые и плоскости в пространстве E однозначно определяют, соответственно, точки и прямые на проективной плоскости $\mathbb{P}$.

В этой ситуации можно определить преобразование Фурье функций на пространствах E и E'

$$\hat{f}(e') = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^{\dim(E)} \int_E \exp(i\langle e, e'\rangle) f(e)\, de,$$

где f — функция на E, а f' — функция на E'. Поскольку $E'' = E$, то имеется и обратное преобразование Фурье функций на E' в функции на E. С каждым подпространством $F \subset E$ естественно связывается его характеристическая функция δ_F (дельта-функция, сосредоточенная на F). Нетрудно проверить, что

$$\hat{\delta}_F = \delta_{F^{\perp}},$$

т. е. интересующая нас двойственность может быть *определена* через преобразование Фурье.

Если пространство E снабжено евклидовой метрикой (как наше трехмерное пространство), то $E = E'$ и форма $\langle\,.\,,.\,\rangle$ является скалярным произведением. Соответствие $F \mapsto F^{\perp}$ имеет тогда простой смысл: прямая (плоскость) $F^{\perp}$ ортогональна F.

Итак, проективная двойственность, которая имеется в геометрии и о которой говорит отец Павел, является частным случаем общей конструкции преобразования Фурье.

Вернемся теперь к словам Флоренского о двойственности точки, точки как чувственного, сенсорного образа, как того, что мы осязаем, и линии, которую вырезает наша рука для графического произведения или скульптуры (пластика тоже относится к предмету его анализа). Мы можем назвать их *дополнительными*, и эта дополнительность будет выражаться той самой математической конструкцией, которую мы обнаружили в квантовой теории, т. е. преобразованием Фурье.

Далее, учитывая, что эти две картины — графическая и живописная, по словам Флоренского, борются друг с другом (в том смысле, который мы использовали применительно к левому и правому полушариям), противоречат друг другу, доведенные до своего логического предела, они полностью уничтожают противоположную картину, мы можем сказать, что перед нами есть, в точном смысле слова, проявление дополнительности, причем дополнительности не в микроскопическом квантовом мире, а в той части человеческой жизни — искусстве, где ее наличие, по-видимому, никому не приходило в голову [18].

Вернемся теперь к предыдущей части работы и сопоставим эти мысли Флоренского с теми представлениями о дополнительности левого и правого, сенсорики и моторики, о которых мы говорили выше. В работах Доброхотовой и Брагиной высказывается мысль о наличии двух пространств, левого и правого, в которых суждено жить и действовать человеку. По существу, Флоренский говорит о том же самом, но только на другом материале, у него встречается чисто двигательное пространство и чисто осязательное пространство. Одно активное, другое — пас-

---

[18] Здесь нужно сделать замечание о роли предметов искусства для нашего анализа. Дело в том, что с точки зрения устройства мира, физиологии человека, его места во Вселенной, т. е. с точки зрения современного естествознания, искусство есть некая «рябь на воде», некоторый узор. Представьте себе, есть дом, где надо жить, в нем должны быть тепло, свет, удобства и т. д. Ну а наличники на окнах — это дань традиции, нечто не очень существенное, без чего в принципе можно и обойтись. С той точки зрения, на которой стоит отец Павел, искусство не есть надстройка над материальным базисом, а это есть нечто, что отражает сущность человека и его место в мире.

Вся история культуры говорит, что дом, само понятие дома, представляет собой образ человеческого тела, поэтому все эти фронтоны, узоры, наличники, петушок наверху — все это имеет для человека, сакрально укорененного в мире, весьма нетривиальный смысл (то, что это выветрилось у современного человека есть особенность нашего исторического развития). Поэтому мы имеем полное право, вослед о. Павлу, соединить все вместе: и устройство человека, и его физиологию, и живопись, и картину как феномены в устройстве мира, для того, чтобы сделать из этого общие выводы.

сивное. Я бы сказал, что в одном пространстве существуют точки, или тела, а в другом — движения в своей целостности. Можно еще вспомнить Бергсона и сказать, что в одном пространстве находятся *вещи*, а в другом *процессы*[19].

Теперь самое время обратиться к концепции дополнительности, как она возникает в квантовой теории — дополнительности координатного и импульсного представления — одно описывает точки, их координаты, другое скорости, т. е. движения. Мы видим, что

$$\begin{array}{ccc} \text{правое, осязательное пространство} & \sim & \text{пространство координат} \\ \text{левое, двигательное пространство} & \sim & \text{пространство импульсов} \end{array}$$

И круг замкнулся. Мы вернулись к тому, с чего мы начали. Возникает вопрос: какая же связь между двумя этими явлениями, между пространствами в биологии и физике? Не есть ли это *одно и то же*? Этот вывод был бы совершенно поразительным, потому что все мыслители, которые размышляли о том, в какой форме может проявляться дополнительность, в биологии, в психологии, в чем угодно, говорили об аналогии, о явлении, которое лишь *похоже* на нее. Здесь же мы как будто получаем не просто похожее, а то же самое[20].

Впрочем для полного совпадения нужно еще появление в физиологической ситуации постоянной Планка h. Если это не так и здесь имеется лишь аналогия, то в физиологии должна появиться *своя* фундаментальная мировая константа.

Естественно спросить: может ли наше зрительное восприятие использоваться для наблюдения квантового мира? Я не берусь давать здесь окончательный ответ на этот вопрос, но хотел бы обратить внимание на примечательный факт, приведенный в книге С. И. Вавилова *Глаз и Солнце*. Описывая свойства глаза, Вавилов говорит о возможности восприятия отдельных или небольших групп квантов света [9] и добавляет, что «глаз $< \dots >$ близок по своим свойствам к *идеальному прибору* в смысле чувствительности». Впрочем, здесь речь идет не об измерении координат, а о восприятии энергии, что ближе к измерению импульса (или скорости). Как бы то ни было, глаз, тем самым, может рассматриваться как экспериментальное устройство для квантовых измерений.

[19] См. *Бергсон А.* Опыт о непосредственных данных сознания. В кн. *Бергсон А.* Собрание сочинений. Т. 1. — М., 1992. С. 98; то, что Бергсон говорит тут о движении, хорошо согласуется с идеей дополнительности. В частности, он сравнивает движение как целое с единством музыкальной фразы (при этом траектория движения есть лишь его след). Заметим, что музыкальную фразу можно разложить на элементарные составляющие — тоны, и такое описание будет дополнительным к представлению фразы как целого. Переход от одного описания к другому задается, по существу, преобразованием Фурье (ср. с примером двух видов речи, разобранным выше).

[20] Если в пространстве E зафиксировать объем (т. е. элемент в $\wedge^3(E')$), то это дает канонический изоморфизм пространства прямых $\wedge^2(E)$ с кокасательным пространством T_E во всех точках E, т. е. с пространством скоростей или импульсов.

Немного философии: антиномии и оппозиции

Вернемся, однако, к лекциям Флоренского. Его построения могут иметь и более общее, философское значение. В 32-й лекции Флоренский так приоткрывает завесу над возможным исходным пунктом своих размышлений:

> Тут невольно припоминается кантовское «понятия без ощущения пусты, а ощущения без понятий — слепы». И это не внешнее сопоставление, ибо по Канту понятиями сказывается наша активность, а ощущениями же — пассивность. Итак, движения без осязания пусты, а осязания без движений слепы [7, с. 92].

Приведенные тут о. Павлом слова Канта даны в его собственном переводе из *Критики чистого разума*. Это слова из введения к трансцендентальной логике находятся в следующем окружении:

> Ни одну из этих способностей [мыслить и иметь наглядные представления] нельзя предпочесть другой. Без чувственности ни один предмет не был бы нам дан, а без рассудка ни один не был бы мыслим. Мысли без содержания пусты, а наглядные представления без понятий слепы [в оригинале: Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind]. Поэтому в одинаковой мере необходимо понятия делать чувственными (т. е. присоединять к ним предмет в наглядном представлении), а наглядные представления делать понятными (т. е. подводить их под понятия). Эти две способности не могут замещать своих функций одна другой. Рассудок не может ничего наглядно представлять, а чувства не могут ничего мыслить. Только из соединения их может возникнуть знание. Однако это не дает нам права смешивать пределы их участия в знании; существуют важные основания заботливо обособлять и отличать одну от другой. Поэтому мы отличаем эстетику, т. е. науку о правилах чувственности вообще от логики, т. е. науки о правилах рассудка вообще (перевод Н. О. Лосского) [10].

Этот текст показывает, как о. Павел отталкивался в своих построениях от столь нелюбимого им Канта. В пробной лекции 1908 г. в Московской Духовной Академии он так резюмировал суть кантовских антиномий, прежде всего антиномии конечного и бесконечного: «статическая множественность понятий и динамическое их единство несовместны друг с другом» и далее «первая из норм рассудка требует остановки мысли, а вторая — беспредельного движения мысли» [11]. Это же повторяется в послесловии к *Столпу* [12]. Здесь уже видны в зародыше те мысли, которые будут развиты в лекциях 1924 г.

Под первой из норм рассудка Флоренский имеет в виду закон тождества в логике, а под второй — закон достаточного основания. Именно эти мысли предваряют антиномизм о. Павла, его знаменитое «истина есть суждение само-противоречивое», вызвавшее столь много возражений. Наиболее ясно эти возражения были сформулированы Е. Н. Трубецким, посчитавшим наличие антиномий признаком мышления падшего, греховного мира. Чаемое Преображение его должно устранить и антиномии [13].

Не входя в богословскую сторону дела, мы укажем здесь на понятие дополнительности как на выход из создавшегося положения. По словам о. Павла, «тезис и антитезис [т. е. высказывание и его отрицание] *вместе* образуют выражение истины. Другими словами, истина есть *антиномия*, и не может не быть таковою» [12, с. 147]. Мы можем предположить, что антиномия — это противоречащие друг другу высказывания об одном и том же, но делаемые в разных, дополнительных ситуациях. Короче, можно сказать, что

антиномия = дополнительность.

Об антиномиях философы размышляли задолго до Канта, и здесь стоит вспомнить слова Аристотеля [21)]: «в возможности одно и то же может быть вместе [обеими] противоположностями, но в действительности нет».

Как мы уже отмечали, и в самом деле дополнительные стороны явления описываются в квантовой теории вероятностными распределениями (волновыми функциями), представляющими не актуальное знание, но лишь знание в возможности [22)].

Возвращаясь к Флоренскому, заметим, что в *Столпе*, обсуждая антиномии он называет антитезисы противосуждениями, «которые исходят из сторон жизни, дополнительных к данным» [12, с. 146]. Более того, в словах

> по природе своей разум имеет закал антиномический, ибо разум дву-законен, дву-центрен, дву-осен. А именно, в разуме *статика* его и *динамика* его исключают друг друга, хотя вместе с тем они не могут быть друг без друга [11, с. 30]

он, по существу, говорит о дополнительности положения (т. е. координат) и движения (т. е. импульса).

Далее Флоренский пишет:

> Основа разума — закон тождества, и уток его –закон достаточного основания. Ткань разума — сотканная из *конечности* и *дурной бесконечности* (беспредельности) — раздирается в противоречиях. Разум *равно* нуждается в *обеих* своих нормах и ни без *одной* (т. е. без начала конечности), ни без *другой* (т. е. без начала бесконечности) работать не может. Он *не* может работать, однако, и при пользовании *обеими* ими, ибо они несовместимы. Нормы разума необходимы, но они — и невозможны.

---

21) *Аристотель* Метафизика. IV, 5, 1009a35. Близкое высказывание делает и Боэций восемьсот лет спустя: «Ничто не мешает двум противоположностям быть в одном и том же, но только не в действительности, а в возможности» (*Боэций* «Утешение философией» и другие трактаты. — М.: Наука, 1990. С. 372, перевод Г. Г. Майорова).

22) По-видимому, Бор, обдумывая понятие дополнительности, интуитивно искал что-то близкое к антиномии. Известны его слова: «глубокая истина — эта та истина, отрицание которой тоже есть глубокое утверждение». Герб, выбранный Бором в 1947 г., содержал такие слова: contraria sunt complementa (см. *Холтон Дж.* cit. loc. С. 166). О связи антиномий и дополнительности размышлял также И. С. Алексеев (см. *Алексеев И. С.* cit. loc. С. 231–252).

Разум оказывается насквозь антиномическим, — в своей тончайшей структуре [11, с. 32].

Имеющийся тут образ ткани — совсем не метафора. Взаимоотношение основы и утка, горизонтальной и вертикальной структуры, носит характер двойственности, как мы ее описывали выше[23].

Свойства, которые у нас встречались и которые мы рассматривали как дополнительные, крайне распространены в мифологических системах в виде так называемых оппозиций, или противоположностей [14]. Бинарная оппозиция — термин, который возник в работах структуралистов в середине XX века, когда появились общие принципы для описания всевозможных знаковых систем языка, родства, обмена в первобытном обществе и т. п.

К ним относятся как уже встречавшиеся у нас левое/правое, последовательное/параллельное, сенсорное/двигательное, так и многие другие: мужское/женское, горячее/холодное, тяжелое/легкое, мокрое/сухое, внешнее/внутреннее и т. д.

Я думаю, что эти противоположности устроены гораздо более сложно и правильнее считать их антиномиями — они действительно противоречат друг другу, действительно борются друг с другом, а бинарная оппозиция есть выхолощенная, предельно схематизированная, антиномия, всего лишь сухой остаток от полнокровного, живого понятия антиномии.

Одна из таких оппозиций встречается у Аристотеля в *Метафизике*, в пифагорейской таблице противоположностей. Это — покоящееся и движущееся. Одним из самых потрясающих событий Нового Времени, когда родилась наша цивилизация, был удар Галилея, когда он вдребезги разбил аристотелевскую картину мира. Он уничтожил эту оппозицию движения и покоя. То, что казалось фундаментальным принципом для осмысления окружающего мира, было сведено до простой ошибки и заменено принципом относительности, тогда еще не эйнштейновской, а галилеевской.

Представление о левом и правом пространстве позволяет на современном научном уровне восстановить то, что уничтожил движимый желанием разрушить аристотелевскую картину мира Галилей, а именно *абсолютную* противоположность движения и покоя. «Левый» человек всегда движется, а «правый» –всегда в покое.

О. Павел Флоренский был прав — эти картины мира не позади нас, они все еще впереди.

[23] Его можно еще сравнить с примерами, разобранными выше: двумя видами речи и разложением музыкальной фразы на тоны(ноты), где явно просматривалось разложение в ряд Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бор Н.* Избранные научные труды. Т. II. — М.: Наука, 1971; *Бор Н.* Проблема причинности в атомной физике // Успехи физ. наук. 1985. Т. 147, вып. 2. С. 343–355; *Гейзенберг В.* Физика и философия. — М., 1963; *Зоммерфельд А.* Пути познания в физике. — М.: Наука, 1973. С. 116, 124; *Вейль Г.* Квантовая физика и причинность // В сб. *Прикладная комбинаторная математика.* — М., 1968. С. 326–339; *Паули В.* Физические очерки. — М.: Наука, 1975; *Бом Д.* Квантовая теория. — М.: Физматгиз, 1961; *Heitler W.* On the Complementarity of Living anf Lifeless Matter. — K. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 1978. P. 1–12; *Delbrück M.* A Physicist's renewed Look at Biology: Twenty years later // Science. 1970. V. 168. P. 1312–1315. Хороший обзор этих работ был дан историком Дж. Холтоном в статье *Корни дополнительности* в его кн. *Тематический анализ науки.* — М.: Прогресс, 1981. С. 159–210; см. также *Алексеев И. С.* Концепция дополнительности (историко-методологический анализ). — М.: Наука, 1978; *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. — М.: Наука, 1985. Детальную библиографию см. *Scheibe E.* // Philosophia Naturalis. 1967. V. 10. P. 249–290.

2. *Weyl H.* Philosophy of Mathematics and Natural Science. — Princeton, 1949. Appendix E. (Имеется перевод: Сб. *Прикладная комбинаторная математика.* — М.: 1968. С. 358–359.)

3. Сводки полученных результатов см. *Ludwig W.* Das Rechts-Links Problem im Tierreich und beim Menschen. — Berlin: Springer-Verlag, 1932; *Балонов Л. Я., Деглин В. Л.* Слух и речь доминантного и недоминантного полушарий. — Л.: Наука, 1976; *Леушина Л. И., Невская А.А., Павловская М. Б.* Асимметрия полушарий головного мозга с точки зрения опознания зрительных образов. В сб.: *Сенсорные системы.* — Л., 1982; *Porac C., Coren S.* Lateral Preferences and Human Behavior. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1981; *Спрингер С., Дейч Г.* Левый мозг, правый мозг. — М.: Мир, 1983; и цитированные ниже монографии Т. А. Доброхотовой и Н. Н. Брагиной.

4. *St. Augustine* Confessions. — London, 1973. XI, 6–7, p. 258–259 (имеется перевод: *Аврелий Августин* Исповедь. — М.: Renaissance, 1991. С. 286–287). Эти представления встречается у него и в других местах (De Civitate Dei, XI,21). Близкие мысли высказывали Боэций (Consol., IV, 6), Николай Кузанский (*Сочинения.* Т. 2. — М.: Мысль, 1980. С. 55–57), Я. Беме (см. *Фейербах Л.* История философии. Т. 1. — М.: Мысль, 1974. С. 196). Ср. также замечания К. Г. Юнга (*Jung C. G.* Synchronicity. An Acausal Connecting Principle. — L., 1972. P. 142).

5. *Доброхотова Т. А., Брагина Н. Н.* Функциональная асимметрия и психопатология очаговых поражений мозга. — М., 1977; *Брагина Н. Н.,*

Доброхотова Т. А. Функциональные асимметрии человека. — М., 1981; *Доброхотова Т. А., Брагина Н. Н.* Асимметрия мозга и асимметрия сознания человека // Вопросы философии. 1993. № 4. С. 123–134.

6. *Бергсон А.* Собрание сочинений. Т. 1. — М., 1991. С. 205–242.

7. *Флоренский П. А.* Анализ пространственности и времени в художественно-изобразительных произведениях. — М.: Прогресс, 1993.

8. См. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. — М.–Л.: ОНТИ, 1936. С. 109; *Флоренский П. А.* loc. cit. С. 101–102.

9. *Вавилов С. И.* Глаз и Солнце. — М.: Наука, 1976. С. 98–102; *Hecht S., Schaer S., Pirenne M. H.* Energy, quanta and vision // J. of General Physiology. 1942. V. 25. P. 819–840; *Pirenne M. H.* Vision and the Eye. — London, 1948.

10. *Иммануил Кант* Критика чистого разума. — СПб, 1993. С. 70. Ср. анализ этих двух сторон акта познания по Канту, данный о. Сергием Булгаковым примерно в то же время (*Булгаков С. Н.* Философия имени. — Спб., 1998. С. 161–164).

11. *Флоренский П. А.* Космологические антиномии Иммануила Канта. В кн. *Священник Павел Флоренский* Собрание сочинений. Т. 2. — М.: Мысль, 1996. С. 32.

12. *Свящ. Павел Флоренский* Столп и Утверждение Истины. (см. *Флоренский П. А.* Сочинения. Т. I(1). — М.: Правда, 1990. С. 483–489.

13. *Трубецкой Е. Н.* Свет Фаворский и Преображение ума // Вопросы философии. 1989. № 12. С. 117–123.

14. См. Right & Left. Essays on Dual Symbolic Classification. R. Needham (ed.) — Chicago, 1973; *Иванов В. В., Топоров В. Н.* Исследования в области славянских древностей. — М.: Наука, 1974; *Granet M.* La pensée chinoise. — Paris: Albin Michel, 1968; *Леви-Строс К.* Структурная антропология. — М., 1983.

АНТИЧНАЯ НАТУРФИЛОСОФИЯ И СОВРЕМЕННАЯ НАУКА *)

Считается, что в истории науки есть два пути: один — вживание в эпоху, культурную среду, понимание научного достижения в контексте своего времени, и другой –изучение того же достижения с точки зрения современной нам науки. Как соотносятся эти два пути, можно ли их сопоставлять или переходить от одного к другому — об этом написано много, но единой точки зрения, похоже, нет (см. [11]). Одни считают, что наука древних принципиально отличается от современной (самое проникновенное изложение этого взгляда дал, наверное, Освальд Шпенглер в своем *Der Untergang des Abendlandes*), другие смотрят на нее как на предпосылку современности («гениальные, но наивные догадки древних»).

Мне хотелось бы указать здесь на возможный третий путь. Чтобы его представить, вспомним, что до середины XIX века в математике не было теории действительного числа. Она была построена Р. Дедекиндом в виде теории сечений в множестве рациональных чисел. После этого историки обнаружили, что конструкция Дедекинда по сути совпадает с теорией пропорций в V книге *Начал* Евклида [3*]. До этого времени, две тысячи лет, эта часть знаменитого сочинения выглядела загадочной и непонятно зачем написанной.

Итак, наука не развивается линейным накоплением знаний, в ней есть непонятые анклавы, которые столетиями находятся в латентном состоянии и затем вдруг полноправно входят в науку, как будто их-то и не хватало. Еще один пример — корпускулярная теория света Ньютона, пролежавшая в научных запасниках триста лет и затем водворенная в парадные анфилады науки Эйнштейном в начале XX века.

Таким образом история науки могла бы быть *и* источником идей для *будущего* развития науки. Чтобы проиллюстрировать эту мысль, я представлю здесь фрагмент античной натурфилософии, связанный с так называемыми оппозициями или противоположностями. Мы увидим, как современная наука, опять две тысячи лет спустя, постепенно приходит к весьма близким представлениям.

---

*) В основе этой заметки лежит выступление автора на международной конференции памяти В. П. Зубова 7 октября 2000 г. в усадьбе Крутец недалеко от Александровской слободы. Я обязан Вик. П. Визгину и А. П. Василевичу рядом ценных замечаний.

* * *

В середине XX века этнографы отошли от прежних взглядов на первобытные народы как на «дикарей», неспособных даже к логическому мышлению. В мифах и ритуалах стали находить нетривиальные структуры, носящие иногда и математический характер [1)].

Наиболее известны благодаря их канонизации структурализмом оппозиции, выступающие в философии как противоположности — непременная принадлежность диалектики. Оппозиции, по терминологии современной этнографии, это такие пары, как, например,

белое	тяжелое	быстрое
черное	легкое	медленное

и т. п., используемые у первобытных народов для классификации предметов и явлений окружающего мира (см. фундаментальную сравнительную сводку [18] и для античного материала [17]).

Заметим, что естественный следующий шаг так и не был сделан: мифологическое не стало изучаться точно так же, как мы изучаем «обычный» окружающий нас мир [2)].

В настоящей заметке мы ограничимся оппозициями из античной натурфилософии — в основном, Платона и Аристотеля. Здесь они выступают уже не как фрагмент мифологического мышления, а как его осознанная переработка. Самым знаменитым примером набора оппозиций, своего рода категориальной сетки, накидываемой на окружающий мир, служит пифагорейская таблица противоположностей

предел	беспредельное
нечетное	четное
единое	множество
правое	левое
мужское	женское
покоящееся	движущееся
прямое	кривое
свет	тьма
хорошее	дурное
квадратное	продолговатое

Ее сохранил для нас Аристотель в своей *Метафизике* (A5 986a23). Поражает соединение абстрактных понятий (таких как предел/беспредельное, нечетное/четное, единое/множество, квадратное/продолговатое), носящих, по существу, математический характер, и оппозиций чувственного характера, явно видимых в окружающем нас мире. Мы ограничимся рассмотрением лишь последних, добавив к ним оппозиции, играющие

[1)] Например, описание систем родства, аксиоматизированное Андре Вейлем [7].

[2)] Немногочисленные исключения представляют работы таких отечественных ученых, как В. Г. Богораз, В. Я. Пропп и П. А. Флоренский.

основополагающую роль в теории четырех элементов у Аристотеля, и еще одну (верхнее/нижнее). Наш список оппозиций будет следующим:

единое	многое	мужское	женское	сухое	влажное
правое	левое	верхнее	нижнее	теплое	холодное
		светлое	темное	хорошее	дурное
		сухое	влажное		
		теплое	холодное		

Мы рассмотрим по очереди [3] три выделенных блока оппозиций, опираясь на два фрагмента античной натурфилософии: одно место из платоновского *Федра* и учение Аристотеля о качествах, и сравним их с выводами таких современных научных дисциплин, как физиология человека, физиология растений и психолингвистика.

Phaedrus 266a и асимметрии человека

Во второй половине XX века физиология человека обнаружила и довольно активно изучает такое явление, как асимметрия мозга (см. [5; 25]). Она представляет собой далеко идущее обобщение такой известной уже с незапамятных времен асимметрии, как ведущая правая рука у правшей. Нам будет нужна здесь асимметрия, проявляющаяся в зрительном восприятии. Из анатомии известно, что левая половина зрительного поля связана с правым полушарием мозга, а правая — с левым. Это дает возможность изучить особенности зрительного восприятия, характерные для каждого из полушарий. В экспериментах по восприятию было обнаружено, что правое полушарие более склонно к целостному, мгновенному восприятию зрительной картины, а левое полушарие «предпочитает» последовательное, детальное «ощупывание» окружающего мира [4] [14].

Сопоставим этот результат с первыми двумя оппозициями нашей таблицы — единое/многое, правое/левое. Мы сразу видим, что современные эксперименты с ней согласуются. Действительно, правое ассоциируется с единым, целостным, а левое с детальным, т. е. многим. Однако в такой форме эта связь выглядит слишком неопределенной. Хотелось бы иметь не просто правое/левое, а именно правую/левую стороны человеческого тела. Также желательно и уточнение оппозиции единое/многое в направлении данных физиологии восприятия. Поразительно, но в античности именно такое соответствие встречается в одном из диалогов Платона.

Я имею в виду одно довольно загадочное место из *Федра*. Ему предшествуют две речи Сократа, которые выделяют два вида «помешатель-

[3] Этим объясняются имеющиеся в этих блоках пересечения.

[4] Заметим, что в реальном восприятии все это слито вместе и выделить каждый вид восприятия не так то просто.

ства» или экстаза. Их отличительные свойства таковы (*Phaedrus* 265d,e; курсив везде мой):

> Охватывая все общим взглядом, *возводить к единой идее* разрозненные повсюду явления

и

> обратное действие — умение *разделять на виды* почленно, сообразно с их природой, стараясь не раздробить ни одной части, то есть не по способу дурных поваров.

Это в точности совпадает с теми двумя способами зрительного восприятия, о которых мы только что говорили. И вот как Платон уподобляет их сторонам тела (*Phaedrus* 266a,b):

> И подобно тому, как в едином человеческом теле имеется кое-что вдвойне — с одинаковым названием, лишь с обозначением «левое» или «правое», — так обстоит дело и с состоянием, не подчиненным рассудку. Хотя обе наши речи признали, что оно в нас от природы составляет единый вид, но одна речь выделила из него *часть, обращенную налево*, затем опять-таки разделила ее и не остановилась на этом делении, пока не нашла там какую-то, можно назвать, *левую любовь*, которую вполне справедливо и *осудила*. Другая же наша речь ведет нас к *правой стороне исступленности*, обозначаемой тем же названием, что и в первом случае, и находит там какую-то божественную любовь, выдвигает ее и *восхваляет* как причину величайших для нас благ.

Не все в отрывке понятно, но общая направленность совершенно ясна и она явно лежит в русле новейших открытий в физиологии человека. Отметим еще, что представление о разделении человека на две половины — левую и правую — встречается в нескольких диалогах Платона. Дихотомический процесс деления тела на две части играет центральную роль в мифе о происхождении людей в *Пире*. В том же *Федре* душа человека представляется (во второй речи Сократа) в виде упряжки из двух лошадей. Описывая эти две «половины» души, Платон сопоставляет их с теми же двумя видами любви, что и в приведенном выше отрывке[5)].

Рассмотренные нами параллели между античными представлениями и физиологией можно продолжить несколько дальше, если обратиться к мифологическому материалу. Ф. Ницше принадлежит замечательное описание двойственности между Аполлоном и Дионисом, лежащей, по его мнению, в основе греческой трагедии (см. его *Рождение трагедии из духа музыки*[19]). Прежде чем обратиться к наблюдениям Ницше, заметим, что образы Аполлона и Диониса непосредственно связаны с той основной оппозицией единое/многое, которой мы только что занимались, анализируя *Федра*.

Огромная греческая традиция связывает Диониса с разделением, раздроблением на части, а Аполлона с объединением раздробленного в единое целое. Наиболее ясно это выражено в комментариях Прокла

[5)] Не связывая их, однако, с левой или правой сторонами. Интересно, что обе половины выступают тут как относительно самостоятельные существа.

и Олимпиодора к таким диалогам Платона, как *Тимей, Алкивиад I, Кратил*. Конечно, в этих комментариях дается уже философская обработка мифологических образов. Вот как это выглядит в пересказе А. Ф. Лосева комментария Прокла к *Тимею* [15, с. 594], где

> аполлоновская монада противопоставляется диаде Диониса и в то же время воссоединяется с ней: демиург, с одной стороны, приводит мировой ум к дроблению, чтобы из него появились отдельные существа и вещи, — и на мифическом языке это есть растерзание Диониса на семь частей, — с другой стороны, демиург воссоединяет раздробленную мировую цельность, и делает это с помощью Аполлона, который будучи гебдомагетом (седмичником), воссоединяет члены тела растерзанного на семь частей Диониса, так что воссоединенное множество теперь уже перестает быть безразличным и нераздельным единством, но становится *порядком* и *гармонией*.

У Олимпиодора этот же процесс описан более кратко. Он говорит [15, с. 600], что

> Дионис, смотрясь в зеркало, испытывает растерзание, а Аполлон, будучи богом очищения, воссоединяет его [6)].

В *Рождении трагедии* Ницше сопоставляет аполлоническое и дионисическое начала с такими физиологическими явлениями, как *сновидение* и *опьянение*. Во время сна человек бездвижен, но может находиться в мире своих сновидений и может рассказать о них по пробуждении. Примером состояния опьянения для Ницше служат самозабвенные вакхические пляски. Эти состояния человека можно сопоставить с обнаруженными в психиатрии нарушениями в психике человека проявляющимися соответственно, при поражениях мозга справа и слева [5; 22].

Человек с *правосторонним* поражением мозга испытывает приступы, во время которых он неподвижен, лицо его не выражает ничего. Он полностью отключен от реального мира и погружен в свои собственные переживания. Когда приступ проходит, больной может рассказать о нем. Часто он, по его рассказу, попадает во время приступа в какой-то период своей прошлой жизни и заново переживает то, что с ним тогда происходило.

С другой стороны, при *левосторонних* поражениях наблюдается «сумеречное состояние», характерным примером которого является психический автоматизм («лунатизм»). Во время такого приступа человек может совершать чрезвычайно сложные движения: выйти из дома, добраться, совершая множество непростых операций, к себе на работу. Когда приступ заканчивается, больной ничего не помнит.

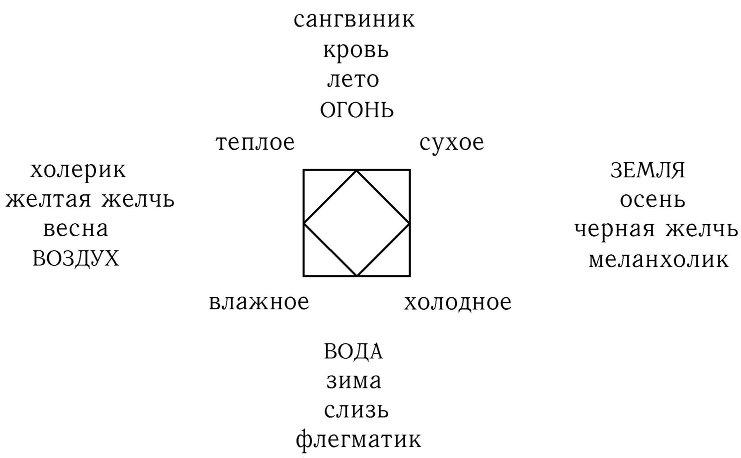
Мы видим много общего с состояниями, о которых пишет Ницше. Есть, правда, и различия. Если автоматизмы довольно близко подходят к описаниям дионисических плясок, то аполлонические сны, скорее, вещие, т. е. направлены в будущее, а не в прошлое.

[6)] Добавим, что согласно традиции имя Аполлон производится от α-$\pi o\lambda\lambda o\iota$, что означает «отрицание множественности».

Вернемся, однако, к *Федру* Платона. Мы сравнили только две оппозиции с точки зрения учения об асимметрии человека. На самом деле в физиологии их обнаружено гораздо больше, например, последовательное/одновременное, сенсорное/моторное, переднее/заднее и т. д. (см. [5; 25; 22]). Особенно интересно было бы обнаружить связь между правым/левым и мужским/женским. Об этом пишет Аристотель в своих биологических сочинениях. Так, семя, попадая в правую половину матки, приводит к мужскому зародышу и наоборот (*De generatione animalium* Δ1 764a). Эти взгляды как будто не подтверждаются современной наукой. Многообразные попытки установить связь пола и правого/левого дали пока противоречивые результаты (см. [25, гл. 6]). Интересно, что и у Аристотеля эти связи не встречаются в его общей теории качеств и элементов, к изложению которой мы и переходим.

Качества у Аристотеля и регуляция пола растений

В центре космологической картины мира у Аристотеля находится неподвижная Земля. Она окружена сферами элементов, планет и неподвижных звезд (детали нам не очень важны, см., впрочем, [6; 9; 12; 16]). Важно, что весь космос делится сферой Луны на две сильно различающиеся области — подлунную и надлунную. Именно в подлунной области все состоит из четырех элементов — огня, воздуха, воды и земли. В свою очередь элементы состоят из двух пар противоположностей — теплое/холодное и сухое/влажное. Такое устройство элементов объясняет их взаимопревращения и многочисленные связи с космосом и человеком. Часть этих связей видна на известной диаграмме



Не все эти связи встречаются у Аристотеля, наиболее полно они представлены в сочинениях врача и философа Галена. Такие натурфилософские схемы были распространены вплоть до Нового времени, когда народившаяся наука оттеснила их на обочину культуры (см. [4]).

Мы хотим здесь показать, что в физиологии растений за последние 30–40 лет были произведены эксперименты, результаты которых очень близки к таким схемам. Речь пойдет об опытах по регуляции пола растений, описанных в книге М. Х. Чайлахяна и В. Н. Хрянина [26]. В центре этих опытов стоит, однако, оппозиция мужское/женское, которой нет в картине мира по Аристотелю. Впрочем, она присутствует в его биологических сочинениях (см. выше), не говоря уже о пифагорейской таблице противоположностей.

Начнем с описания опытов. В искусственных условиях оранжереи выращивались растения (такие, как конопля, шпинат, огурцы). Во время роста они подвергались воздействию *различных* внешних факторов. Все эти растения — двудомные (один и тот же индивидуум может иметь, как мужские, так и женские цветки). Было обнаружено, что (для конопли) длинный световой день или повышенная температура или сухая атмосфера, (т. е. *каждое* из этих условий) приводит к явному увеличению числа мужских цветков. Противоположные условия приводили к увеличению числа женских цветков. Таким образом, эти эксперименты подтверждают фрагмент приведенной выше таблицы, состоящий из четырех оппозиций. Чайлахян и Хрянин повторили и расширили эти опыты, добавив к ним многочисленные другие внешние факторы (в основном, биохимического характера). Мы укажем здесь еще на два интересных и весьма нетривиальных факта, обнаруженных ими.

Растения выращивали, удаляя у одних часть листьев, а у других — часть корней. Первое приводит к преимущественно женским растениям, второе — к мужским [26, с. 73–83]. Итак, к нашему списку добавляется еще оппозиция верхнее/нижнее. Вернувшись на время к человеку, его морфологии, отметим, что мужская и женская фигуры различаются в точности по такому же параметру — широкие/узкие плечи или таз.

Другое важное обстоятельство состоит в том, что для других растений (некоторых видов огурцов и шпината) соответствия могут быть обращенными, например, светлый день приводит к преимущественно женским цветкам. Это показывает, что сам факт наличия *какого-то* соответствия более фундаментален, чем его конкретное проявление. Это же обстоятельство замечено и в истории культуры. Так, в китайской традиции хорошее ассоциируется с левой стороной, а не с правой, как в Европе.

Конечно, приведенные факты говорят о совпадениях лишь для части оппозиций. В частности, мы не видим оппозиции правое/левое в этих экспериментах. И это понятно: в отличие от людей, растения обладают осевой симметрией[7]. Чтобы попытаться проверить и эту часть воззре-

[7] Существуют левые и правые формы как различные индивидуумы [13, с. 69–72], но, по-видимому, левая и правая стороны одного и того же индивидуума морфологически не проявляются. Хотя в реальных условиях у растений иногда можно выделить, например, северную и южную стороны.

ний древних, попробуем *создать* у растения билатеральную симметрию. Вспомним, что в мифологическом мышлении растение часто представляет человека (многочисленные примеры этого известны в этнографии еще со времен *Золотой ветви* Фрезера). Возьмем теперь в качестве образца для растения человека, стоящего на земле с распростертыми руками, направленными на запад и восток (известная фигура позднейшей натурфилософии). Как мы видели, связь человека и растения находит некоторое экспериментальное «подтверждение».

Первая часть эксперимента тогда должна состоять в создании у растения плоскости симметрии, например, имитируя в оранжерее движение солнца. Будем считать, что после достаточно долгого «обучения» растение приобретает правую/левую стороны, направленные соответственно на восход и заход «солнца».

Вопрос 1. Если теперь удалять листву (или корни) справа или слева, то будет ли возникать половая асимметрия в соответствии с таблицей оппозиций? [8)]

Можно, конечно, подумать и о других способах выявления билатеральной симметрии.

Качества у Аристотеля и метод семантического дифференциала

Во второй книге *De generatione et corruptione* Аристотель обсуждает вопрос о противоположностях, возникающих при восприятии осязаемого тела — таких, как гладкое/шероховатое, теплое/холодное, грубое/тонкое, тяжелое/легкое и т. п. Он утверждает (B2 330a25), что все они сводятся к двум, уже встречавшимся у нас: теплое/холодное и сухое/влажное. В экспериментальной психологии появился метод, позволяющий нам «проверить» высказывания Аристотеля.

Это — метод семантического дифференциала Чарльза Осгуда [20; 24]. Интересующий нас эксперимент выглядит так. Пусть заданы два набора слов: существительные и отдельно прилагательные-антонимы, например:

дом	светлый/темный
мышь	глубокий/мелкий
коробка	сильный/слабый
...	.../...

8) Если ответ на этот вопрос положителен, то соответствующий эффект должен быть достаточно слабым. Дело в том, что за связью оппозиции верхнее/нижнее с полом стоит «грубый» физиологический механизм — производство гормонов противоположного пола в листьях и корнях [19, с. 92]. В случае оппозиции левое/правое такого механизма может и быть не быть.

Каждая такая пара определяет шкалу степеней соответствующего свойства, например

очень светлый
светлый
светловатый
ни светлый, ни темный
темноватый
темный
очень темный

(см. [20, с. 29], где использованы в качестве степеней сравнения — extremely, quite, slightly).

Затем приглашается группа испытуемых и каждому предлагается оценить слова (существительные) из списка по всем имеющимся шкалам. При этом оценка должна производиться мгновенно, без содержательного обдумывания результата. Это естественно, ибо далеко не всегда можно осмысленно применить шкалу к какому-то слову. Скажем, сколь «сильной» является коробка или «глубокой» мышь?

Следующий шаг состоит в усреднении результата для каждых слова и шкалы по всем испытуемым. Таким образом, мы получаем «объективную» характеристику различий между словами по каждой из шкал (представляющих их «свойства»). Такой эксперимент — разновидность обычного для психологии языка ассоциативного эксперимента, известного еще по работам молодого Юнга.

Факторный анализ достаточно представительной выборки показывает, что все шкалы можно разбить на три группы, внутри которых есть сильная корреляция (т. е., если слово получило какую-то оценку по шкале из одной группы, то его оценка по шкале из той же группы должна быть близкой [9)]). По результатам Осгуда группы эти таковы

«оценочный» фактор	(I)	хороший/плохой счастливый/грустный священный/светский
«силовой» фактор	(II)	твердый/мягкий большой/малый сильный/слабый
фактор «активности»	(III)	быстрый/медленный горячий/холодный активный/пассивный

Приведенные здесь пары свойств даны для иллюстрации и, вообще говоря, не характеризуют полностью соответствующие факторы.

[9)] На самом деле имеются дополнительные факторы, не укладывающиеся в основные группы, но они имеют существенно меньшую значимость.

Этим результатам можно придать наглядный геометрический вид. Построим евклидово пространство, в котором координатными осями будут наши шкалы. Оно имеет очень большую размерность (в опытах использовались десятки пар прилагательных). Каждое слово из списка существительных определяет *точку* в этом пространстве.

Отдельно построим трехмерное евклидово пространство с осями, отвечающим трем выделенным факторам I, II и III. В этом пространстве каждое слово тоже представляется своей точкой. И, наконец, имеется проекция большого пространства на трехмерное. Основной результат Осгуда состоит в том, что множество точек-слов из первого пространства переходит при этой проекции в соответствующее множество точек трехмерного пространства «почти» взаимно однозначно. Итак, в разумном приближении пространство «свойств» или, как его называет Осгуд, семантическое пространство *трехмерно*.

Этот факт интересен и удивителен сам по себе, но нам он нужен в связи с рассуждениями Аристотеля. В них можно выделить несколько слоев:

• все свойства сводятся к небольшому числу основных (это подтверждается экспериментом);

• это число равно 2 (мы получили 3);

• основные свойства суть теплое/холодное и сухое/влажное (одно свойство совпадает).

Эти результаты можно несколько улучшить. Напомним, что свойства Аристотеля относятся лишь к подлунному миру, а в экспериментах Осгуда изучаются по возможности *все* слова. Поэтому естественно добавить еще и надлунный мир — область небесного. Небесная область — это область Блага и тут появляется оппозиция хорошее/дурное, не сводящаяся, по Аристотелю, к предыдущим (см. обсуждение в [8, с. 403]). Таким образом, и по Аристотелю, основных оппозиций, по существу, три, и две из них совпадают с осями по Осгуду. Гораздо хуже обстоит дело с третьей оппозицией — сухое/влажное, которая явно не принадлежит к осям, выделенным Осгудом. Вот результаты факторного анализа [20, с. 37]:

	I	II	III
хорошее/дурное	88	5	9
теплое/холодное	−4	−6	46
сухое/влажное	8	7	−3

Итак, имеется некоторое расхождение между результатами психолингвистики и представлениями Аристотеля. Впрочем, скорее надо удивляться наличию каких-то совпадений. К тому же в экспериментах по семантическому дифференциалу все существительные (предметы), как и прилагательные (свойства), свалены в одну кучу [10]. Аристотель же рассматривает противоположности, связанные с осязанием и в применении к тому, что можно осязать. Естественно возникает

Вопрос 2. Повторить эксперимент, отобрав слова в соответствии с выбором Аристотеля. Получится ли универсальное пространство размерности 2 с оппозициями теплое/холодное и сухое/влажное в качестве координатных осей?

Вариант этого вопроса — когда изучаются прилагательные, связанные и с другими сенсорными модальностями. Ведь по Аристотелю все они происходят из осязания [11].

* * *

Мы видим, что имеются явные соответствия между достижениями современной науки и некоторыми представлениями античной натурфилософии. Преувеличивая, можно сказать, что наука стихийно возвращается к Аристотелю, своему главному противнику в период возникновения естествознания. Понятно, что это возвращение начинается прежде всего в биологии и психологии. Эти науки никогда полностью не порывали со своим основателем. Есть, однако, попытки переоценить и физику Стагирита.

Более осознанное движение такого рода должно начаться с естественно-научного осмысления общих принципов философии Аристотеля — таких, как форма и материя, возможность и действительность, учение о четырех причинах (также важен и исторический анализ взглядов Аристотеля) [8; 9; 10; 12; 16].

Вернемся теперь к общим замечаниям о развитии науки, сделанным в начале. Можно и нужно сравнить это развитие с эволюцией живых организмов. Эволюция, как она понимается в современной науке, очевидно, не носит линейный поступательный характер. Классический пример — динозавры, в период господства которых рядом бегал маленький зверек, вроде землеройки или мыши. И кто бы мог подумать, что скоро настанет время, когда от динозавров останутся лишь следы, а маленький зверек даст огромное племя млекопитающих. Не так ли и наша наука, тешащая себя сегодня могучими «динозаврами» и не замечающая небольшие ростки, некоторые из которых мы попытались тут описать.

---

[10] Также очень важен правильный выбор модели семантического пространства. Огромный произвол в построениях Осгуда состоит в выборе именно евклидова пространства в качестве такой модели. Представляется, что здесь более естественна комбинаторная структура типа p-адического дерева, рассмотренного в [21].

[11] Заметим еще, что Осгуд, как и Аристотель, начинал с обдумывания корреляций между оппозициями в мифологическом мышлении [20, с. 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель.* Метафизика. В кн.: *Аристотель.* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 1. — М.: Мысль, 1975.

2. *Аристотель.* О возникновении и уничтожении. В кн.: *Аристотель.* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 3. — М.: Мысль, 1981.

3. *Аристотель.* О возникновении животных. — М.–Л., 1940.

3*. *Башмакова И. Г.* Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. 1958. Вып. XI.

4. *Böhme G., Böhme H.* Feuer, Wasser, Erde, Luft. Eine Kulturgeschichte der Elemente. — München: C. H. Beck, 1996.

5. *Брагина Н. Н., Доброхотова Т. А.* Функциональные асимметрии человека. — М.: Медицина, 1981.

6. *Визгин В. П.* Качества в картине мира Аристотеля // Природа. 1977. № 7. С. 68–77.

7. *Weil A.* Collected Papers. V. 1. — N.-Y.: Springer, 1979. P. 390–397.

8. *Визгин В. П.* Генезис и структура квалитативизма Аристотеля. — М.: Наука, 1982.

9. *Гайденко П. П.* Эволюция понятия науки. — М.: Наука, 1980. Гл. 4.

10. *Гайденко П. П.* Онтологический горизонт натурфилософии Аристотеля // В кн.: *Философия природы в античности и в средние века.*. Часть 1. — М., 1998.

11. *Демидов С. С.* Презентизм и антикваризм в историко-математическом исследовании // Вопросы истории естеств. и техн. 1994. № 3. С. 3–12.

12. *Зубов В. П.* Аристотель. — М., 1963.

13. *Касинов В. Б.* Биологическая изомерия. — Л.: Наука, 1973.

14. *Леушина Л. И., Невская А. А., Павловская М. Б.* Асимметрия полушарий головного мозга с точки зрения опознания зрительных образов // В сб.: *Сенсорные системы.*. — Л.: Наука, 1982. С. 76–91.

15. *Лосев А. Ф.* Мифология греков и римлян. — М.: Мысль, 1996.

16. *Lloyd G. E. R.* Aristotle: the Growth & Structure of his Thought. — Cambridge, 1990.

17. *Lloyd G. E. R.* Polarity and Analogy. Two types of argumentation in early Greek thought. — Bristol, 1992.

18. *R. Needham.* (ed.) Right & Left. Essays on Dual Symbolic classification. — Chicago University Press, 1973.

19. *Ницше Ф.*. Сочинения в двух томах. Т. 1. — М.: Мысль, 1990.

20. *Osgood Ch. E., Suci G. J., Tannenbaum P. H.* The Measurement of Meaning. — Urbana, 1967.

21. *Паршин А. Н.* Размышления над теоремой Геделя // Вопросы философии. 2000. № 6. С. 92–109. (См. с. 67–101 наст. изд.)

22. *Паршин А. Н.* Дополнительность и симметрия // Вопросы философии. 2001. № 4. С. 84–104. (См. с. 138–170 наст. изд.)

23. *Платон.* Федр. (Перевод А. Н. Егунова.) — М.: Прогресс, 1989.

24. *Слобин Д., Грин Дж.* Психолингвистика. — М.: Прогресс, 1976.

25. *Спрингер С., Дейч Г.* Левый мозг, правый мозг. — М.: Мир, 1983.

26. *Чайлахян М. Х., Хрянин В. Н.* Пол растений и его гормональная регуляция. — М.: Наука, 1982.

НАУКА И РЕЛИГИЯ
ВО ВЗГЛЯДАХ П. А. ФЛОРЕНСКОГО [*)]

Павла Александровича Флоренского часто называют русским Леонардо да Винчи. И действительно, видя всю огромную широту его интересов, занятия в самых разных областях науки, можно, конечно, с этим только согласиться. И все же есть в этом глубокая неправота. Дело в том, что занятия о. Павла Флоренского отдельными науками не были занятиями человека, охваченного просто неуемной жаждой познания. Эти занятия скреплялись в единое целое некоторой задачей — задачей, которую он поставил себе еще в юности. Учась в Московском университете, он писал своим родителям: «сейчас ближайшая задача — не моя, конечно, а задача времени — создать религиозную науку и научную Религию». Он ставил целью своей жизни «произвести синтез церковности и светской культуры... воспринять все положительное учение Церкви и научно-философское мировоззрение вместе с искусством».

Идя по этому пути, Флоренский пришел к самой безжалостной критике современного научного метода. Ему принадлежат слова о «похоти познания», ничем не ограниченного в своей экспансии. В работе *Итоги* (1922 г.) Флоренский предсказывал возрожденческой науке, вершиной и символом которой и был Леонардо, такое же гибельное будущее, как первобытным магическим представлениям, но «более суровое, более беспощадное, поскольку и сама она была беспощадна к человеку». И если по отношению к магическим представлениям он не исключал возможности, что где-нибудь и когда-нибудь они восстановятся, то достигнутое наукой П. А. характеризовал так: «Но это не соборность, не синтез, не творческое объединение, а разложение, механическая смесь, — словом, не жизнь, а смерть. И смерть — не от злой воли того или другого деятеля культуры, а необходимое последствие самого хода ее».

В своих попытках создания целостного мировоззрения, объединяющего науку и религию, о. Павел опирался на русскую философскую традицию, у истоков которой стоял Иван Васильевич Киреевский. Именно Киреевский, пройдя выучку школы немецкой классической философии, обратился к православному учению Отцов Церкви и пришел к выводу, что «простое развитие его, соответственное современному состоянию науки и сообразное требованиям и вопросам современного разума, составило бы само собой новую науку мышления». На сегодняшний взгляд,

*) Выступление на вечере в Центральном доме литераторов 17 февраля 1989 г.

эта точка зрения выглядит, быть может, слишком простодушной, но это именно то простодушие, которого нам так не хватает. К этой же линии развития безусловно относятся и Владимир Соловьев с его *Критикой отвлеченных начал*, и взгляды на науку в *Сне смешного человека* Достоевского.

Вот эта линия в истории взаимоотношений науки и религии является сейчас для нас особенно актуальной и важной в связи с тем, какое огромное разрушительное воздействие оказывает все здание современной науки вместе со всеми ее применениями на жизнь человека и окружающий его мир. Но если мы обратимся к истории русской общественной мысли, то мы увидим, что это направление находилось, так сказать «на задворках», оно ютилось где-то сбоку в глазах большей части образованных людей — тех, что составили русскую интеллигенцию второй половины XIX века. Та обстановка, в которой творили русские религиозные философы начиная с середины прошлого века и кончая началом нынешнего века, это обстановка твердого и мужественного противостояния тому, что без всяких преувеличений, совершенно справедливо может быть названо либеральным террором.

И это не просто слова, если мы посмотрим на судьбы почти всех русских религиозных философов, то мы увидим, что каждый из них должен быть начинать как бы с нуля, почти каждый из них прошел в молодости через искушение атеизмом и нигилизмом.

Возвращаясь к современности и думая о том, что могут дать нам взгляды П. А. на научное познание теперь, обратимся к той критике в адрес науки, которую мы так часто слышим в наши дни, а именно представлению, что современная наука противоречит этическим нормам человечества. На этот счет имеются два мнения. Первое, что сама по себе наука является вполне безразличной по отношению к этике, она не является ни злой, ни доброй, злым может быть лишь ее использование в руках недобрых людей. И вторая точка зрения, что безнравственное и, можно сказать даже сильнее, греховное содержится в самом научном методе. Следует кратко сформулировать в чем же он состоит, каковы его основные принципы. Вот они. Результаты теоретических наук должны быть оформлены, изложены по правилам **логики**, а по отношению к природе они должны проверяться на **опыте**. Я хочу подчеркнуть, что эти принципы ничего не говорят нам о том, как добывается научная истина. Этот вопрос остается до сих пор абсолютно непóнятым. Однако, одно обстоятельство, несомненно, имеет место: истина должна быть **красивой**.

Не останавливаясь подробно на аргументах в пользу приведенных выше точек зрения на соотношение науки и этики, укажем лишь на простые языковые наблюдения, которые могут дать пищу именно для второй из них. Вспомните такие выражения, как «логичен до идиотизма», или «дьявольски красиво», а также бывшее в ходу несколько столетий такое самоназвание ученых как, как «естествоис**пытатель**». Подобного рода соображения были бы не чужды и Флоренскому. Анализ глубинной семантики слова как исходной точки для всестороннего изучения какого-либо вопроса — характерная черта его философского метода.

Говоря о выходе из создавшегося положения, можно видеть тоже две возможности — либо наука войдет в качестве составной части в единое целостное мировоззрение, устраняющее то противоречие, о котором мы говорили, либо, как ни жутко это говорить, ей суждено погибнуть. Приведенные выше высказывания Флоренского, сделанные им в зрелом возрасте, все же, мне кажется, не дают оснований думать, что он склонялся ко второй точке зрения. Скорее можно думать, что мировоззрение, которое он искал всю жизнь, должно подвергнуть кардинальному изменению основные принципы научного познания.

Я хочу отметить здесь две черты этого будущего мировоззрения, найденные и обоснованные в трудах о. Павла. Первая — это роль космологических представлений в жизни общества. Если мы посмотрим на христианское общество в Средние века, то наряду с нравственными императивами в этом обществе имелись представления об устройстве мира. Целостность средневекового мировоззрения состояла и в том, что эти две его составные части находились в органической и неразрывной связи. Начиная с эпохи Реформации в христианском сознании западного мира произошел фундаментальный сдвиг. Стало необязательным следовать библейской космологии, на смену пришла противоречащая ей научная картина мира. Это обстоятельство, которое теперь кажется несущественным, на самом деле знаменовало собой начало падения западного христианства. Протестанство превратило службу, культ, по словам о. Павла, из тайнодействия в сплошную проповедь-лекцию. А ведь в христианском мировоззрении служба и храм, в котором она происходит, глубочайшим и самым интимным образом связаны с устройством всего космоса. Отбросьте эту связь, откажитесь от нее, и действительно останется одна лекция.

В своей работе *Мнимости в геометрии* Флоренский, анализируя современную космологию, которая после теории относительности, слегка, я подчеркиваю, слегка повернулась к средневековому представлению о мире, говорил, что та система мира, которая изложена, например, в *Божественной комедии*, не есть пройденный нами этап, она находится не позади нас, а впереди. И вторая черта будущего целостного мировоззрения, о котором говорил П. А., это личностный характер подлинного, неизвращенного познания — «познание не есть захват хищным гносеологическим субъектом мертвого объекта, а есть живое нравственное общение личностей». И вот это представление об истинном познании Флоренский находит в мировоззрении крестьянской России, в ее системе ценностей, обычаях, нравах, в ее космосе и быте. Удивительно, но из всех философов русского религиозного возрождения именно Флоренский обратил на это внимание. В 1909 г. в книге *История религий*, в создании которой участвовали, в частности, о. Александр Ельчанинов и Владимир Францевич Эрн, школьные товарищи Флоренского, он писал, в главе посвященной Православию, каким образом в сознании русского крестьянина сплотились вместе далекое языческое прошлое и более поздняя православная вера.

Вот его слова: «Травы, птицы, деревья, насекомые, всякие животные, земля, — каждая стихия вызывает к себе у крестьянина непонятное сочувствие. Послушайте, как крестьянин разговаривает со скотиною, с деревом, с вещью, со всею природою: он ласкает, просит, умоляет, ругает, проклинает, беседует с нею, возмущается ею и порой ненавидит. Он живет с природой в тесном союзе, борется с нею и смиряется перед нею. Вся природа и все вещи — нечто живое и личное».

Мы не найдем параллелей этому в русской философии XX века, но лишь в литературе. Близкое мироощущение мы найдем в *Поэзии заговоров и заклинаний* Блока и позднее в *Ключах Марии* Есенина. С тех пор прошло более семидесяти лет, уничтожена крестьянская Россия, пресечена русская философская традиция, и вдруг как чудо в середине семидесятых годов в русской литературе, именно в литературе, появилось произведение, на страницах которого было воссоздано то, что так ясно чувствовал о. Павел. Я имею в виду повесть *Прощание с Матерой*, сцену прощания старухи Дарьи, единственной из всей деревни, со своей избой, прощания как бы с живым человеком. Вот этого **как бы** не было для отца Павла, его, смею думать, нет для автора *Матеры*, а перестанет ли оно существовать для нас—от этого, пожалуй, зависит наше будущее.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ «ФИЛОСОФСКОЙ» КРИТИКИ [*)]

...мне давно хотелось поделиться с Вами своими наблюдениями и соображениями по поводу происходящего в последние годы возвращения в нашу культуру русской религиозно-философской мысли, в сохранении которой роль YMCA-Press столь значительна.

Сейчас модно сравнивать нынешнюю эпоху с предреволюционными годами начала века, и, во многом, такое сравнение правомерно. Но вот в сфере философской жизни очевидно резкое отличие этих двух эпох: творческий подъем «серебряного века» и реставраторский, консервирующий дух нашего времени. Нынешние философы заняты, прежде всего и по преимуществу, изданием, комментированием, биографическими разысканиями и обзорами, иногда изложением идей. И совсем уж немного места занимает дальнейшее развитие нашего философского наследия.

Основным способом осмысления отечественной мысли стало ныне то, что естественно назвать *философской критикой*, которая в значительной степени определяется политическими, идеологическими, национальными и другими пристрастиями ее авторов. Расцветшую в последнее время издательско-комментаторскую деятельность можно было бы назвать тогда *философоведением*. Эти слова приходят на ум неслучайно. Дело в том, что подавляющее большинство людей, которые причастны к нынешнему философскому оживлению, а также являются, так сказать, потребителями этого процесса, покупателями, читателями, — это люди, так или иначе связанные с литературными кругами. Во всяком случае, по моим наблюдениям, до других слоев нашего образованного общества, скажем, интеллигенции, ориентированной на естественные науки, это доходит весьма мало [1)].

Говоря о философской критике, нельзя не заметить, что наиболее острые споры в последнее время как по резкости высказываний, так и по объему выступлений, вызывает имя отца Павла Флоренского. Недавно (№ 160) Ваш журнал опубликовал статью Н. К. Бонецкой «П. А. Флоренский и «Новое религиозное сознание»», которая и явилась для меня поводом написать это письмо. Мне кажется, на примере этой статьи

[*)] Из письма в редакцию Вестника РХД.

[1)] А жаль! Ведь русская религиозно-философская мысль развивалась под определенным влиянием естественно-научных представлений и современный «технарь» мог бы почерпнуть из нее кое-что полезное даже и для своей профессии.

можно почувствовать тот уровень и стиль обсуждения философского наследия, который является доминирующим в современной общественной жизни.

Основная мысль, которую хочет выразить автор, состоит в том, что Флоренский не является православным мыслителем. Автор неоднократно подчеркивает свое желание судить Флоренского со строгих православных позиций. Но вот строгости позиции зачастую и не видно: например, хотелось бы знать, кто считает Флоренского «православным писателем» (с. 92) и что сие значит? Другая странность для ревнителя православия: Флоренский ни разу не назван отцом Павлом, хотя все другие встречающиеся в статье духовные лица называются в соответствии с православной традицией (при этом на с. 92 говорится о его священническом сане). Но мне не хотелось бы пойти здесь по легкому пути придирок к многочисленным дефектам логики и стиля, а разобрать статью по существу.

Прежде всего возникает вопрос, в каком смысле можно говорить о православии или неправославии того или иного мыслителя, сознательно причисляющего себя к православной традиции, а в данном случае — прежде всего священника. Я думаю, что возможны две точки зрения. Первая — это отношение к данной личности, представляющее собой соборное мнение Церкви. Нет нужды приводить здесь хорошо известные исторические примеры. Разумеется, и отдельные представители церкви и их группы, и не только клирики, но и миряне, безусловно имеют полное право выражать свое мнение по этим вопросам. Так что можно было бы думать, что статья Н. К. Бонецкой, много лет занимавшейся исследованием работ Флоренского, представляет собой искреннее мнение благочестивой мирянки, которой неожиданно открылся неправославный дух изучаемого автора. Однако стиль статьи Бонецкой это, скорее, стиль научной работы, в которой делается попытка разобрать идеи анализируемых сочинений Флоренского так, как это делается скажем в истории религий или культурологии. Это и есть вторая возможная точка зрения при рассмотрении интересующего нас вопроса. Такая чисто научная точка является до некоторой степени ущербной (вспомните первую строку *Столпа*), но мы будем, вслед за Бонецкой, использовать ее в дальнейшем.

Способ, который выбирает Н. К. Бонецкая для осуществления своего замысла, состоит в следующем. Она предлагает рассмотреть те портреты духовных лиц, которые в *разные* моменты своей жизни и по *разным* поводам делал о. Павел, и сравнить их с тем, что она называет «православным антропологическим каноном».

Автор разбирает портреты четырех духовных лиц, созданные Флоренским. Это преподобный Сергий Радонежский и три современника о. Павла: авва Исидор, который был духовным отцом Флоренского в годы учения в Московской Духовной Академии, о. Серапион Машкин, оптинский монах, и московский батюшка о. Алексей Мечев.

Преподобный Сергий. Основное обвинение состоит в том, что о. Павел дал гностический образ преподобного (с. 96). Оно обосновывается тем, что о. Павел «называл Преподобного Ангелом-Хранителем Руси» и, по мнению Бонецкой, это утверждение «не имеет православных аналогов и кажется неким гностическим положением». Вот что писал о. Павел о преподобном Сергии [2]:

> В церковном сознании, не том скудном сознании, которое запечатлено в богословских учебниках, а в соборном, через непрерывное соборование и непрерывное собирание живущем духовном самосознании народа, Дом Живоначальныя Троицы всегда сознавался и сознается сердцем России, а строитель этого Дома, Преподобный Сергий Радонежский, — «особым нашего Российского царствия хранителем и помощником», как сказали о нем цари Иоанн и Петр Алексеевичи в 1689 году, — особым покровителем, хранителем и вождем русского народа — может быть, точнее было бы сказать — Ангелом-Хранителем России.

О. Павел называет преподобного Сергия еще Ангелом Земли Русской, (loc. cit., с. 66), Основоположником, Строителем и Ангелом России (loc. cit., с. 84). Ничего неправославного и, тем более, гностического в этих высказываниях нет. Представление о существовании ангелов-хранителей не только отдельных личностей, но целых народов явно выражено в Священном Писании и в святоотеческой литературе [3]. Существовании ангельских чинов, приставленных к странам, стихиям и другим природным реалиям, хотя и может быть поводом для дискуссий, но и не выглядит, при правильном понимании, чем-то неправославным [4].

Более сложен вопрос: в каком смысле священнослужителей и святых можно именовать ангелами? По мнению Бонецкой, подобные именования носят исключительно характер поэтических образов. В том, что это не так, можно убедиться, обратившись к тому же Св. Дионисию Ареопагиту [5] или к преподобному Никите Стифату [6]:

> Кто действие внешних чувств заменяет внутренними, — зрение устремлением ума к зрению света животного, слух — вниманием душевным, вкус — разумным рассуждением, обоняние — умным постижением (ощущением, чувством), осязание — бодренным трезвением сердечным: тот Ангельскую на земле проводит жизнь, — для людей он и есть и видится человеком, для Ангелов же и есть и понимается Ангелом.

---

[2] *Свящ. Павел Флоренский* Троице-Сергиева Лавра и Россия. Собрание сочинений. Т. 1. — Париж: YMCA-Press, 1985. С. 66.

[3] См. *Святого Дионисия Ареопагита о Небесной Иерархии.* — М., 1898. С. 39–41.

[4] См. Материалы к *Богословско-церковному словарю.* Богословские труды. 1986. № 27. С. 326.

[5] Loc. cit. С. 43–44. Именно этому вопросу посвящена вся глава XII.

[6] *Преп. Никита Стифат* Первая деятельных глав сотница. Добротолюбие. Т. 5. — М., 1900. С. 84. Можно было бы привести огромное количество высказываний такого рода из святоотеческой литературы. Я уж не говорю о символическом и отнюдь не метафорическом представлении Небесных Сил священнослужителями во время литургии.

Это место Флоренский цитирует в *Столпе* (с. 734). Не заметить его исследователю творчества Флоренского, пытающемуся делать столь далеко идущие выводы, согласитесь, довольно странно.

Далее автор пытается увязать высказывания о. Павла с известными рассуждениями о. Сергия Булгакова о связи Иоанна Крестителя с ангельским миром [7], приписывая о. Сергию утверждение, что Иоанн — это воплотившийся ангел. Вот подлинные слова о. Сергия. Говоря о том, что монашеский путь «именуется Церковью *приятием ангельского образа*», он продолжает:

> И это есть *путь Предтечи*, который совершил его и на себе показал его возможность, «пределы естества превзошед» (Служба 29 августа, канон первый, песнь 1 тропарь 2). Предтеча есть истинный родоначальник монашества, приятия ангельского образа, ибо сам он явился ангелом, следовательно, достиг полного и совершенного бесстрастия [с. 226–227]. В Предтече принятие ангельского образа совершилось в полной мере, почему он и именуется не «ангелом подобник», как пророк Илья, но просто ангел, или же «земной ангел и небесный человек» [с. 230–231].

Характеризуя особенности земного пути Предтечи по сравнению с путем Богоматери, о. Сергий замечает: «Отсюда проистекает и вся относительность или, вернее, условность приятия ангельского образа, которое имеет значение лишь как путь, но не по существу» (с. 229).

Я не хочу сказать, что в книге о. Сергия нечего оспорить, но для этого, думаю, восьми строчек маловато. Кроме того, само использование книги о. Сергия лишь потому, что он — «друг и ученик» (?!) о. Павла, «в своих разработках очень часто идущий прямо-таки по пятам учителя», позволяет, как говорится, «шить дело». Ведь никаких упоминаний или ссылок на Флоренского у Булгакова нет!

Позволю еще высказать свое личное мнение о поэтических образах в Священном Писании и Богослужебных текстах. Думаю, что никаких **только** поэтических образов или метафор, аллегорий и т. п. там нет. Все они имеют (тот или иной) **онтологический** смысл. И это есть один из основных выводов русской православной мысли начала века. Вывод, все еще недостаточно оцененный, но, думаю, сыграющий фундаментальную роль в будущем развитии русской философии.

Авва Исидор. Первый упрек состоит в том, что Флоренский не использует ни для старца, ни для других своих современников житийных принципов жизнеописания. Но это как раз и означает, что о. Павел идет в русле строгой православной традиции. Жития пишутся святым, уже канонизированным или близким к этому. Автору удается усмотреть влияние софиологической концепции на образ старца, созданный о. Павлом, в сочинении, не содержащем ни слова о Софии. По мнению Бонецкой, фраза «незримые нити связывали старца с сокровенным сердцем твари»

[7] *Прот. Сергий Булгаков* Друг Жениха. (О православном почитании Предтечи.) — Париж: YMCA-Press, 1927.

говорит о связи аввы с Софией. Далее дается совет, что было бы «естественнее соотнесение (?) святого (т. е. аввы Исидора? — *Авт.*) с Христом» — и это говорится о старце, непрестанно совершавшим, по словам о. Павла, Иисусову молитву. Не по душе Н. К. Бонецкой и «догматические» построения аввы Исидора. Сравните, пожалуйста, написанное ею: «Вольномыслие старца — представления, вроде того, что Христос родил Церковь из бока и что произошло это, когда Его на кресте пронзили копьем, — похоже на простонародное богословствование в кружке протопопа Аввакума» (с. 98) с тем, что написал о. Павел [8]:

> Нередко он сопоставлял «рождение» пра-матери Евы из бока Адамова с «рождением» Матери-Церкви из бока Христова. Чудесный сон Адама о. Исидор приравнивал таинственному смертному сну Господа, вынутие ребра у Адама — прободению Господа в бок копьем; чудесное истечение из раны Христовой крови и воды он приурочивал к самому рождению Церкви.

и как этот же вопрос излагается Св. Андреем Кесарийским в его *Толкованиях на Апокалипсис* [9]

> Невесту Христа правильно называть женою, ибо закланный Агнец Христос уневестил ее Себе Своею Кровию. И как Адаму была создана во время сна его жена из взятого у него ребра, так и церковь через излияние Крови из ребра Христова во время Его вольной смерти на кресте сочеталась с Ним, уязвленным ради нас.

Также я не нашел никаких указаний в тексте о. Павла на то, что образ отца Исидора «в принципе не мог удовлетворить глубинных вопрошаний и исканий рафинированной и совсем не простой души мыслителя из Сергиева Посада». Думаю, что мог удовлетворить, и рискну привести в качестве гипотезы такое место из *Сказания*:

> ...на одном из камней «Фиваиды» сидела большая лягушка. Авва же, низко склонив седую бороду над бессловесною тварью и смотря своими ясными глазами прямо в глаза лягушке, пел ей старческим голосом псалмы Кроткого Царя Давида [с. 29].

Это место из шестой главы *Сказания*, которую о. Павел заканчивает словами, что авва Исидор «был воистину печальником за мир и аввою (что значит: *отец*) не для людей только, но и для всего, что дышит и живет на земле» [10].

Бонецкая придерживается в оценке *Сказания* распространенной ошибки интеллигентского сознания, что между простонародным и интеллектуальным лежит «дистанция огромного размера». Вдохновенную отповедь такому взгляду о. Павел дал в своей академической речи *Общече-*

[8] *Соль земли то есть Сказание о жизни Старца Гефсиманского Скита Аввы Исидора*. Монастырь Св. Германа Аляскинского. 1984. С. 62–63.

[9] См. *Литературная учеба*. 1991. Кн. 2. С. 126.

[10] Здесь сразу на память приходит образ старца Зосимы, созданный Достоевским. Подобная традиция в Православии особенно значима теперь в эпоху экологического кризиса и споров о роли христианства в его возникновении. (См. архиепископ (ныне митрополит) Кирилл (Гундяев), *К экологии духа* // Символ. 1989. № 22. С. 127–131.)

ловеческие корни идеализма (1908), относящейся к тому же времени, что и *Сказание*.

О. Серапион Машкин. Главный аргумент Бонецкой тут — разные «страшные» подробности из жизни и сочинений о. Серапиона. Как можно интересоваться и восхищаться таким человеком? Приведу достаточно очевидные, на мой взгляд, соображения.

1. О. Павел ни в коей мере не претендует на изображение святого. Но даже если бы это было так, то и в этом случае рассуждения Н. К. Бонецкой остаются уязвимыми: в истории церкви можно найти святых, совершавших такие поступки, рядом с которыми поведение о. Серапиона выглядит очень и очень невинно.

2. Флоренский явно указывает на неприятие некоторых взглядов и поступков о. Серапиона как оптинскими монахами, так и им самим [11]:

> Даже лица, сильно настроенные против о. Серапиона за его радикализм в политике и за его несколько «гностические», натурфилософские (как у Оригена и Соловьева) стремления в области философии и религии и жажду абсолютного знания, не могли не признать его нравственной высоты. Отец Э., считавший, что о. Серапион был «в прелести», в то же время заявил, что покойного удерживало на высоте преуспеяние в двух основных добродетелях монаха: «смирении и полной нестяжательности». Я не берусь, конечно, согласовывать обе половины этого заявления: с одной стороны, «прелесть», а с другой, — «смирение с нестяжательностью». Но необходимость для лица враждебно-настроенного признать «смирение с нестяжательностью» говорит очень много об успехах о. Серапиона в борьбе с собою.

Публикацию писем и сочинений о. Серапиона Флоренский предваряет таким замечанием: «Во избежание всяких недоразумений указываю en toutes lettres, что далеко не во всем солидарен с содержанием этих писем» (loc. cit. С. 173). Все эти недвусмысленные указания Н. К. Бонецкая обходит полным молчанием.

3. Существенное место у Бонецкой занимают весьма резкие высказывания о. Серапиона о современном ему монашестве, монастырях и церкви вообще. Возможно, ей кажется, что так мог писать кто-нибудь вроде Белинского или Салтыкова-Щедрина. Однако вот высказывания на сходную тему Святителя Игнатия Брянчанинова [12]:

> Время страшное! Решительно оскудели живые органы Божественной благодати; в облачении их явились волки: обманывают и губят овец.

---

[11] См. *Флоренский П.* К почести вышняго звания // В сб.: *Вопросы религии*. — М., 1906. С. 161–162.

[12] Извлеченные из его писем 40–60 годов XIX века М. А. Новоселовым. См. *Новоселов М. А.* Письма к друзьям. (Готовится к печати в YMCA-Press Е. С. Полищуком, которому я признателен за любезную возможность ознакомиться с рукописью.) [Парижское издание не вышло. Книга опубликована в 1994 г. Православным Свято-Тихоновским Богословским Институтом.]

Положение монастырей в России в нравственном и духовном отношениях самое бедственное. За сто лет до нас святитель Тихон сказал,что истинное благочестие почти исчезло, а заменено оно лицемерством для обмана людей с целью вещественной выгоды.

На монастыри плоха надежда: они внутри выпрели и уничтожились, их еще поддерживает рука Божия ради нескольких благонамеренных иноков...

О монашестве я писал Вам, что оно доживает в России, даже повсюду, данный ему срок. Восстановления не ожидаю... Восстановлять некому.

4. Безусловно, очень интересен вопрос: чем же так привлекал о. Серапион Флоренского? Более поздняя публикация, содержащая подробную хронологию жизни о. Серапиона, дает возможность заключить, что сильнейшее впечатление на о. Павла произвел путь о. Серапиона от знания к вере, сохранившего на этом пути способность к абстрактному умозрению. В частности, о. Павла не могли не поразить рассуждения о. Серапиона о бесконечности [13]:

После многолетних исканий, упорным трудом самостоятельной мысли о. Серапион вышел, наконец, хотя и с другой стороны, к тому же открытому месту, к которому вышла и математика, а отчасти и философия.

О. Павел указывает, что «о. Серапион ничего не знал о работах Кантора по математической теории бесконечности», которые и математикам-то были в то время почти неизвестны. В то же время интерес к математическому представлению о бесконечности в связи с богословием имеет некоторую традицию в русской духовной литературе. Весьма тонкие замечания на этот счет можно найти в *Аскетических опытах* Св. Игнатия Брянчанинова. (См. третий том его собрания сочинений.) В целом весь этот вопрос заслуживает непредвзятого исторического исследования.

5. И, наконец, последнее, наиболее сложное — о так называемой «шаблонной морали». В расхожих выражениях современной публицистики эту тему можно обозначить как церковь и гуманизм, или соотношение религиозных и общечеловеческих ценностей. Другими словами, в какой мере этические ценности и нормы современного секуляризованного общества, нормы появившиеся в результате распада средневекового воцерковленного общества, могут использоваться для оценки явлений духовной сферы?

Именно эта главная проблема стоит за рассуждениями Бонецкой об о. Серапионе Машкине. Чтобы сформулировать ее в наиболее чистом виде, обратимся к образу одного из наиболее чтимых на Руси угодников — Алексия, человека Божьего, чье житие было одним из самых любимых в среде верующего народа. В подвиг святого неотъемлемой частью входит его отношение к родителям, которое с чисто гуманистической точки зрения выглядит жестоким, можно сказать безжалостным. Тысячи

[13] *Священник Павел Флоренский* Данные к жизнеописанию архимандрита Серапиона (Машкина). — Сергиев Посад, 1917. С. 5.

читателей жития умилялись этим подвигом и ни в коей мере не стремились при этом к нарушению пятой заповеди, т. е. своего долга перед родителями. Таким образом, то, что представляется аморальным для обычного человека, может не быть таковым для святого. Примеры этого отнюдь не единичны. Я думаю, что ответить на этот вопрос можно так. Для секуляризованного сознания не имеют смысла первые четыре заповеди, относящиеся к отношениям человека с Богом. Для верующего же человека десять заповедей не есть собрание равнозначных и независимых предписаний. Они иерархически упорядочены и первая заповедь действительно стоит на первом месте; по отношению к пятой заповеди прямое подтверждение этому есть и в Евангелии (Мф. 10, 37; Лк. 14, 26). Более детальный анализ этого вопроса представляется мне весьма желательным, поскольку столь многие уповают в последнее время на возврат морали, духовности и т. п. путем восстановления былой роли церкви в обществе, не очень хорошо отдавая себе отчет в приоритетах имеющихся здесь ценностей. Тема эта имеет к тому же давнюю традицию в русской литературе — вспомним хотя бы леонтьевскую критику «розового христианства» Достоевского и защиту последнего Лесковым.

О. Алексей Мечев. Надгробное слово отца Алексея, опубликованное о. Павлом вместе с обширным комментарием, наверняка будет камнем преткновения для многих исследователей, озабоченных православностью Флоренского. Удобно разбить мои возражения Н. К. Бонецкой на четыре части.

1. Прежде всего с изумлением узнаешь, что «построения Флоренского $< \cdots >$ не выдержали проверки жизненной фактичностью. Поскольку выяснилось, что «надгробного слова» самому себе отец Алексей не писал, концепция Флоренского оказалась несостоятельной» (с. 106). В первой публикации *Слова* можно узнать, что оно было «заимствовано им [о. А. — *Авт.*], с большими сокращениями и с приспособлением к собственному случаю, из слова иеромонаха Григория Борисоглебского перед чином погребения Оптинского иеросхимонаха Амвросия (18.X.1870)» [14]. Независимый источник — воспоминания епископа Арсения (loc. cit., с. 51) — содержит указание на то, что батюшка Алексей действительно писал перед кончиной в Верее свое посмертное завещание и оно было прочитано на его похоронах. Конечно, при желании можно усомниться в том, что это один и тот же документ. Однако автор статьи в «Вестнике» просто опускает эти несомненно известные ей факты. В новейшей публикации всего комплекса материалов, связанных с о. Алексеем и о. Павлом, содержатся дополнительные сведения [15], подтверждающие, что о. Павлу вскоре после написания его статьи стал из-

[14] *Отец Алексей Мечев* Проповеди. Письма. Воспоминания о нем. — Париж: YMCA-Press, 1970. С. 353. Примечание Н. А. Струве.

[15] *Иг. Андроник* Русский пастырь на приходе. — Москва. 1990. № 12. С. 161.

вестен образец, которым руководствовался о. Алексей. Однако, о. Павел не стал ничего менять в своем тексте.

2. Отец Павел называет поступок о. Алексея, написавшего, по его мнению, надгробное слово самому себе, да еще с перечислением своих достоинств, поступком юродивого. Обвиняя Флоренского в непонимании психологии юродства, Бонецкая смешивает (с. 108) три разные вещи: заявление о своем юродстве, признание этого юродства при жизни и признание святости юродивого после кончины. Подобный стиль рассуждений уже и не вызывает удивления, после того как несколько раз споткнешься о ту беззаботность, с которой автор относится к слову «святой» (см. выше).

Я не могу судить, возможен ли такой поступок для юродивого (кажется, литературное творчество для них не очень характерно), но из текста статьи как-то не видно, что автор настолько глубоко погрузился в агиографию, чтобы делать такие категоричные выводы.

3. Наиболее принципиальным является поднимаемый Н. К. Бонецкой вопрос о покаянии. По ее мнению, «хорошо известно, что духовный путь Церкви — это покаяние». Но по словам преподобного Серафима Саровского, это, прежде всего, — стяжание благодати Духа Святого, а уж каким путем это будет достигнуто — это следующий вопрос. Заметим к тому же, что и надгробное слово батюшки Алексея кончается, как и положено, словами покаяния.

Как же представляет Н. К. Бонецкая взгляды о. Павла на покаяние? По ее словам, он считал, что «покаяние — удел избранных», «и только для них покаяние — духовный путь» (с. 107). Приводимое в этом месте высказывание Флоренского говорит о том, что, в отличие от большинства верующих, подвижники, стоящие на высокой ступени совершенства, исповедовали не только *свои* грехи, но и грехи мира. Сказано это очень ясно, и, чтобы сделать те выводы, которые делает Бонецкая, нужны мыслительные ходы, мне, во всяком случае, недоступные. Дальнейшие утверждения, что «покаяние, по Флоренскому, приумножает грех» или что для него кончина старца «оказывается откровенным, чуть ли не циничным спектаклем» — пусть останутся на совести автора.

Кульминацией всех рассуждений Бонецкой является ее отношение к описываемому о. Павлом «выхождению из себя» о. Алексея перед самой его кончиной, когда и было написано надгробное слово. Приведем ее слова: «Когда же имеет место экстаз, бытийственный выход из себя и, действительно, видение себя «со стороны», то с уверенностью можно утверждать, что не найдется ни одного свидетельства в духе предположения Флоренского. Пребывая в Боге, подвижники видели свои грехи — и *только*. Вынесение из мистического опыта какого бы то ни было сознания собственных достоинств в православной традиции всегда беспощадно связывалось с бесовской прелестью».

Это не так, точнее, не совсем так. Пребывая в Боге, подвижники видят *не только* свои грехи. Вот запись в дневнике Святого Иоанна Кронштадтского [16]:

Мысленными очами сердца вижу я, как мысленно вдыхаю в сердце свое Христа, как Он входит в него и вдруг упокоевает и услаждает его. О, да не пребуду я един, без Тебя Жизнодавца, дыхания моего, радования моего! Худо мне без Тебя,

вынесенная, надо полагать, из мистического опыта. Это всего лишь один пример явлений Христа, а также и Богородицы и Небесных Сил, о которых мы узнаем из житийной литературы.

Конечно, верно, что чем ближе к Богу, тем тоньше духовное зрение подвижника и тем больше своих грехов они различают [17], но в том и состоит невидимая брань, чтобы их побеждать. И подвижник должен иметь возможность в этом убеждаться. Необходимые средства обсуждаются в аскетической литературе. Так, один из вопросов, предложенных Св. Исааку Сирину, гласил: «В чем заключается совокупность всех частных подвигов жительства, то есть безмолвия, чтобы по ней подвижник мог уразуметь, что он достиг совершенства в жительстве?» [18]. При этом надо, конечно, отчетливо понимать, что победа над какой-либо страстью, грехом не означает, разумеется, победы раз и навсегда.

И еще — о «сознании собственных достоинств». Здесь тоже не все просто. Вот как описывает Н. А. Мотовилов слова, которые говорил своему келейнику преподобный Серафим Саровский [19]:

...не твое дело беседовать с теми, которые убого Серафима слова жаждут и к нему приезжают в Саров. И я сам, убогий, не свое им говорю, но что Господь изволил мне открыть для назидания. Не мешайся не в свои дела. Себя самого знай, а учить никогда никого не смей: не дал Бог тебе этого дара — ведь он подается недаром людям, а за их заслуги перед Господом Богом нашим и по особенной Его милости и Божественному о людях смотрению и Святому промыслу Его.

Я привожу эти слова, разумеется, не для того, чтобы говорить о сознании собственных достоинств преподобным Серафимом (к тому же Мотовилов мог, передавая разговор, и переставить какие-то акценты). Но то, что преподобный *мог* со стороны выглядеть таким образом, это несомненно. Можно привести и другие свидетельства такого рода из его жизни. Так что критические замечания Н. К. Бонецкой к образу о. Алексея можно было бы вполне отнести и к некоторым чертам образа преподобного Серафима, имеющимся в православной литературе. Серьезность

[16] *Св. праведный Иоанн Кронштадтский* Моя жизнь во Христе. Т. 1. — Валаам, 1991. С. 27.

[17] *Преподобного отца нашего аввы Дорофея душеполезные поучения и послания.* — Оптина пустынь, 1900. С. 44.

[18] Цит. по *Св. Игнатий Брянчанинов* Слово о человеке // Богословские труды. 1989. № 29. С. 289.

[19] *Беседа старца Серафима с Н. А. Мотовиловым о цели христианской жизни.* — М., 1991. С. 5.

исследования как раз и определяется вниманием автора к возможности подобных сопоставлений. Вообще надо сказать, что в своем анализе Бонецкая практически не использует конкретных образов православных подвижников, ограничиваясь высказываниями типа «как хорошо известно» и т. п.

4. Последнее, что уместно обсудить в связи с о. Алексеем Мечевым, это обвинения о. Павла в его вольном отношении к канону, уставу службы[20]. Надо сказать, что это место статьи Бонецкой (с. 94) написано с полным пренебрежением к элементарной логике. Сначала утверждается, что «Флоренский никоим образом не ратовал за отмену канона», а затем, что он «искал истину по ту сторону церковных форм». Я не стал бы останавливаться на этом ребусе, если бы не критические замечания Н. К. Бонецкой по поводу «магизма» о. Павла в его понимании таинств, сделанные ею в другом месте[21]. В этих замечаниях он упрекается в механистическом подходе к таинствам, в «гарантированности» их исполнения. Но именно против духа фарисейства направлены как упомянутые выше места из статьи об о. Алексее, так и кристально ясные мысли об антиномии закона и свободы в работе *Христианство и культура*[22]. Итак, в *одном* месте можно обвинить о. Павла, в том что он слишком формален, а в *другом*, — что слишком свободен, т. е. в фарисействе и саддукействе одновременно.

Мне кажется, я рассмотрел все ключевые места из работы. Хотелось бы сделать еще несколько общих замечаний о том сравнительном анализе портретов духовных лиц, который пытается провести Бонецкая. Подобный подход к сочинениям о. Павла представляется мне весьма интересным, я бы сказал, что он является интересной методической находкой. Безусловно, анализ тех черт духовности или святости, которые были наиболее близки о. Павлу, представляет большой интерес. Все дело в том, насколько содержательно и объективно автор пытается решить эту задачу и в какой мере он опирается на *всю* совокупность имеющихся данных. На мой взгляд, который я аргументировал выше, все, что делает в своей статье Н. К. Бонецкая, является тенденциозной и неверно интерпретированной выборкой из имеющегося материала, призванной подкрепить тот тезис, который она взялась отстаивать.

И такое пишется по поводу работ Флоренского, которые переполнены идеями, мыслями, соображениями, прямо-таки взывающими к их продумыванию и дальнейшему развитию. Воистину подобная философская критика занята самым усердным закапыванием дарованного ей таланта.

[20] См. его рассуждения о духовной свободе в статье об о. Алексее. (Ж-л «Москва». 1990. № 12. С. 174.)

[21] См. комментарии Н. К. Бонецкой в кн. *Флоренский П. А.* Сочинения. Т. 2. У Водоразделов мысли. — М., 1991. С. 418, 419, 437.

[22] Написанной в 1924 г. и опубликованной (с купюрами) в ЖМП. 1983. № 4. (См. с. 56.)

РУССКАЯ РЕЛИГИОЗНАЯ МЫСЛЬ: ВОЗРОЖДЕНИЕ ИЛИ КОНСЕРВАЦИЯ? [*)]

Десять лет назад мы совершили прыжок в царство свободы. И свобода стала во всем, как пресловутое золото в прикосновениях Мидаса, или как священная корова, которую не тронь.

Одновременно со свободой вернулась вера, и это настоящее чудо нашего времени. Впрочем, она никуда не уходила, она жила незримо от всего общества, а теперь стала зрима и признана. Радоваться этому или задуматься, видя как бывшие гонители стоят со свечкой на службе, нисколько не изменившись изнутри?

Некоторыми мыслями о возвращении Православия в жизнь общества мне хотелось бы поделиться. Но не о личной вере или социальной роли церкви пойдет тут речь, мы зададимся вопросом о религиозной мысли, о философском осмыслении Православия. Перед Октябрьской революцией имелось в России так называемое религиозно-философское возрождение, когда многие из интеллигенции обратились к вере предков, но почему-то им было мало верить просто, нужно было еще размышлять о глубинных основах своей веры. Так возникла философия Серебряного века, чей путь был оборван революцией. Куда он вел тогда, мы вряд ли можем теперь сказать. Но что эта философия может значить теперь — попытаться понять это вполне в нашей власти.

Около церковной ограды

Одним из чудес конца 80-х гг. было неожиданное, да еще по решению верхов, появление этих книг, Соловьева, Бердяева, Булгакова, Флоренского, Франка и многих других. Еще недавно их знали и с невероятными усилиями добывали немногочисленные любители и знатоки. И вот имена эти у всех на слуху, залы ломятся от желающих узнать о жизни философов, издания выходят одно за другим.

По примерным оценкам, около трех сотен книг русских религиозных философов вышли за семь-восемь лет, начиная с 1988 г., не говоря о многочисленных журнальных публикациях, значительная часть которых появилась на страницах *Вопросов философии*. Затем интерес пошел

[*)] В основе этой статьи лежит выступление автора на семинаре в Институте истории естествознания и техники РАН весной 2001 г. Я глубоко благодарен участникам семинара за стимулирующую критику и многочисленные замечания.

на убыль. Помимо естественного насыщения, просто круто изменилась жизнь. Те, кто заполнял залы в начале 90-х, теперь заняты выживанием, им не до философии.

Кроме того, для значительной части нашей интеллигенции такой поворот к отечественному философскому наследию вряд ли был особенно желанным. Для нее скорее западная философская мысль является точкой отсчета для суждений о мысли отечественной — и суждений, как правило, критических.

И все же есть те, кто продолжают интересоваться и что-то делать, еще выходят книги, хотя и гораздо реже, устраиваются, впрочем нечасто, конференции, люди ведут разыскания в архивах, пишут комментарии. Как бы то ни было, процесс за последние лет пять явно устоялся, стал стационарным и конец десятилетия, не говоря уже о рубеже веков, дает повод о нем поговорить.

Первая характерная черта этого процесса — преимущество отдано переизданиям, комментариям, биографиям. Попытки развития самой философской мысли занимают гораздо меньшее место. Более того, создается впечатление, что комментаторы и публикаторы сознательно склоняются к такому ограничению — **сначала** мы все издадим, а **потом** уже можно и развивать философию дальше. Конечно, низкий поклон всем этим людям за их жертвенный подвиг, делающих свое дело в такую эпоху, ради идеи, без всяких «заморских» денег.

Но все же, все же –не Пушкин для пушкинистов, а пушкинисты для Пушкина. Если основное — консервация, даже и любовная, то не напоминает ли эта активность возведение новой Александрийской библиотеки, с такой же, быть может, исторической судьбой. А время сейчас грозное, и мысль, подлинная мысль, должна бы быть в цене. Да и темп эпохи — не поздний эллинизм! Никакого **потом** может и не быть.

Еще несколько характерных черт. Журнала русской философии за эти десять лет так и не смогли создать. Но это хоть как-то понятно — новому правящему классу и зарубежным радетелям такой не нужен, если не сказать сильнее. Но почему за эти годы в десятимиллионной Москве (целая страна) не возник семинар по русской философии (а те, что появлялись, быстро исчезали), где можно открыто и регулярно ее обсуждать, вот это уже уму непостижимо. Здесь спонсоры не нужны, здесь чего-то не хватает в нас самих.

Но я был бы неправ, если бы утверждал, что все (такие невеликие) силы идут только на издания. Публикуются и статьи о... о Соловьеве, о Флоренском, о Карсавине, о Лосеве, о... И как-то все больше выходит — какие они были «нехорошие», там чего-то не поняли, тут не доглядели. Я бы назвал многие исследования такого рода даже не критикой, а, скорее, обличительной литературой [1].

---

[1] Об одном таком произведении мне уже приходилось писать в начале десятилетия, см. Вестник РХД. 1991. № 162/163. С. 155–170. (См. с. 189–200 наст. изд.) Автор тот «успешно» продолжает и далее в том же стиле.

Впрочем, наличие эмоций — не самое худшее, что может быть. Все таки, это что-то живое. Но эмоции эти таковы, что, пожалуй, тянут, скорее, на ненависть, чем на критику. Не идут ли эти чувства из нашего недавнего вчера? Неудивительно, что многие авторы, занимающиеся русской религиозной философией, едины в своем отрицании большевизма и предшествующего царству свободы «тоталитарного режима». Похоже, когда режим пал и ненавидеть стало вроде бы нечего, чувства эти поневоле переходят на то, о чем можно было бы писать как-то помягче. Ну, в самом деле, ведь никто не заставляет теперь заниматься нелюбимым автором, вполне можно выбрать того, к кому лежит душа.

Видимо, этот эмоциональный пласт сильно укоренен в нашем обществе и пока он есть и доминирует, можно скорее ожидать гражданской войны всех против всех, чем надеяться на конструктивное развитие.

Но я был бы совсем неправ, если бы не сказал, что попытки такого содержательного развития русской философии все же делаются. Их немного, но они есть. Среди них видное место занимают работы С. С. Хоружего.

Ему принадлежат, прежде всего, большие аналитические статьи о целом ряде философов Серебряного века. В них Хоружий, как правило, подвергает серьезной критике взгляды этих мыслителей. Основной упрек — приверженность платонизму, выступающему, по его словам, в русской философии как философия всеединства. Конечно, платонизм во всех своих версиях проходит мимо личностного начала в мире, но ведь и физика, к примеру, такова. Что не мешает ее успешно развивать, даже не разделяя глобалистских претензий этой науки.

В противовес этой, платоновской, линии в развитии русской философии Хоружий предлагает создать философию, использующую представление о Божественных энергиях, которое восходит к Святителю Григорию Паламе. Основываясь на детальном изучении православной аскетики, исихастской монашеской практики, Хоружий обосновывает в философии примат «энергийного дискурса» над «эссенциальным» (сущностным). Важный момент его рассуждений состоит в том, что философскому осмыслению подвергается не догмат, не богословие, казалось бы, наиболее близкие к философии, а молитва и аскетическая практика[2].

Выделяя в православной практике два пути — обожение и освящение, Хоружий отдает безусловное предпочтение первому. Первый путь —

[2] Можно указать еще и на другой исток «энергийного» мышления, вполне возможный для профессионального физика-теоретика. В физике XX века развитие шло по пути освоения все более высоких энергий. В «обычной» квантовой механике пространственно-временное и импульсно-энергетическое описания явления эквивалентны, но уже в квантовой теории поля, в ведение которой входят элементарные частицы, это не так и полностью доминирует «энергийная» картина. Если встать на общепринятую парадигму: теория элементарных частиц — это по-настоящему фундаментальная физика, а все остальное можно к ней свести, то естественно считать эту высокоэнергийную область бытием более высокого онтологического уровня.

путь подвижника, свободной личности, стремящейся к соединению с Богом.

Второй путь, реализуемый в культе, т. е. богослужении, является, с его точки зрения, чем-то низшим. Он прямо называет его уступкой мифологическому, магическому пласту в сознании [3]. В работах Хоружего этому пути уделяется совсем немного места и такая невысокая оценка культа является также и основным мотивом его критики философии о. Павла Флоренского.

Мы не беремся судить о причинах столь жесткого отношения к христианскому культу, вызывающего в памяти разве что высказывания деятелей эпохи Реформации. Отметим лишь, что поднимаемый здесь вопрос о взаимоотношении язычества и Православия представляется нам весьма важным и о нем мы будем говорить.

Для дальнейшего нам, впрочем, наиболее интересна и близка неоднократно высказанная Хоружим мысль о необходимости в России собственной философии, основанной на Православии. Изучение им исихастской практики преследует именно эту цель.

Но сначала спросим себя, возможна ли вообще такая философия?

С другого берега

Если есть вера, то зачем еще к ней, или рядом с ней, нужна философия? Вопрос этот, конечно, имеет давнюю историю, но чтобы иметь какую-то точку отсчета, приведем чеканные слова позднего Шеллинга [4]:

> тот, кто хочет и может верить, не философствует, а тот, кто философствует, именно этим извещает о том, что ему одной лишь веры недостаточно.

Близкие слова повторил и Владимир Соловьев, с критик которого и начался русский религиозно-философский ренессанс.

Слова, по моему мнению, очень точные, но тогда зачем мы здесь собрались? Не лучше ли встать и проехать две остановки на метро, одни перейдут через дорогу в новоявленный Храм, а другие войдут в привычные академические стены.

[3] В своем существе, она [установка освящения — *Авт.*] типична и характерна для мифологического, магического, символического сознания, иначе говоря, для языческой религиозности, откуда и передалась Православию; вполне показательно, что в богословие она проникала, прежде всего через псевдо-Ареопагита, этого главного внедрителя и проводника неоплатонизма в христианстве. Имея весьма общую природу, она разнообразна в своих проявлениях; помимо отношения к институтам власти, она находит для себя почву в обряде (обрядоверие), в присущей Православию тенденции к гипертрофированию храмового и литургического символизма и т. п. Но в то же время, в отличие от аскетической установки обожения, прямо и непосредственно воспроизводящей устремления первохристианского и новозаветного сознания, его отношение к Богу и миру, — установка освящения имеет лишь шаткую, оспоримую опору в Писании и вероучении (*Хоружий С.* О старом и новом. — СПб.: Алетейя, 2000. С. 212–213).

[4] *Шеллинг Ф. В. Й.* Философия откровения. Т. 1. — СПб.: Наука, 2000. С. 27.

Но что-то в душе этому сопротивляется, чувствуется, что ответ не столь прост. Это сопротивление и есть исток и задача всей русской религиозной мысли: как соотносятся Бог и мир? Одна из книг об о. Сергии Булгакове так и называется. Вопрос этот можно рассматривать на разных уровнях: как соотносится вера и обыденная жизнь, каковы взаимоотношения веры и знания, веры и культуры ?

Простой непредвзятый взгляд на русскую историю показывает, что русский народ в последние сто пятьдесят лет дал свой — и довольно решительный ответ на эти вопросы. С середины XIX века начался все более ускоряющийся отход русских людей от православной веры. Когда пришла революция и богоборческая власть стала рушить храмы, то, по большому счету, мужская часть русского народа не встала на их защиту, а женская, сохранив веру в глубине сердец, все стерпела. Это видно, что называется, невооруженным глазом, да и в литературе есть об этом. Обратитесь хотя бы к шукшинскому рассказу *Крепкий мужик*, где герой рушит деревенскую церковь.

Конечно, были и воинствующие комсомолки, но сколько их потом переступили порог храма. Этот очевидный факт новейшей русской истории, раскол народа по вере на две половины, мужскую и женскую, почти никогда не подвергался осмыслению, ни в историческом, ни в социологическом, ни в богословском плане. Какими бы тяжелыми ни были последствия этого раскола, именно русская женщина сохранила веру предков.

Не пытаясь проникнуть в глубинные причины отхода от веры, упомянем лишь несколько факторов, сыгравших свою роль в этом процессе.

1. Роль **язычества** в русской жизни. Легкий приход христианства на Русь не означал полного перехода всего народа в новую веру. Отнюдь не все идолы были утоплены в Днепре, еще в двадцатые годы XX века в лесу у вологодского села Чаронда стояли деревянные статуи «дяди Саши» и «тети Ани» — покровителей семьи, а последняя и ткачества, и из села приходили их кормить. Это — лишь один из бесчисленных примеров того, что получило название русского двоеверия. Наряду с православной верой, в народе никогда полностью не исчезали языческие обряды и обычаи. Церковь вела с ними борьбу, но вряд ли очень успешную [5].

Языческая стихия находила себе выход в предреволюционные годы в многообразных сектах и полностью вышла на поверхность после революции. Представление о марксизме как о своеобразной вере наоборот, несмотря на провозглашаемый атеизм — является теперь, пожалуй, общим местом. Говоря в *Диалектике мифа* о «коммунистической мифоло-

[5] См. сводку: *Гальковский Н. М.* Борьба христианства с остатками язычества в древней Руси. — Харьков, 1916 (репринт, М., 2000). Исследования этнографов уже советского времени добавили к этим данным многочисленные живые свидетельства.

гии» и приводя штампованные клише воинствующего атеизма, А. Ф. Лосев, непосредственный свидетель эпохи, далее продолжает[6]:

Кроме того, везде тут «*темные* силы», «*мрачная* реакция», «*черная* рать *мракобесов*»; и в этой тьме — «*красная* заря» «мирового пожара», «*красное* знамя» восстаний... Картинка! И после этого говорят, что тут нет никакой мифологии.

На такой явно языческий момент в действиях новой власти, как вал переименований обратил внимание о. Павел Флоренский в *Именах*[7].

Наряду с новым «коммунистическим» язычеством продолжало существовать и старое. Так, в последние советские десятилетия самыми массовыми были посещения могил на кладбищах в пасхальные дни. Культ предков — одна из самых глубоко укорененных религиозных доминант человека, идущая из незапамятных языческих времен.

Это, конечно, лишь несколько разрозненных проявлений язычества в русской жизни в его *разных*, иногда диаметрально противоположных формах. Полная картина еще не написана, да и сама история еще не окончена.

2. **Расколы** в обществе на «мы» и «они».

По крайней мере два таких раскола: церковный XVII века, которому предшествовали более ранние споры нестяжателей и иосифлян, и петровский раскол на высшие «образованные» классы и «темный» народ должны были внести свой вклад в изменение народного мировоззрения.

Здесь важно само наличие раскола, в течение длительного времени народ жил с ощущением разорванного мира, разорванного по многим значимым оппозициям — состояние для русского самосознания невыносимое. Разрывы эти остро чувствовали первые славянофилы. Вспомним Хомякова: барин возвращается с бала, мужик встает работать. Ивану Киреевскому принадлежат слова о раздробленности жизненного облика западного человека, которые вполне можно отнести и к определенной части российского общества того времени [8]:

Западный человек легко мог поутру молиться с горячим, напряженным, изумительным усердием; потом отдохнуть от усердия, забыв молитву и упражняя другие силы в работе; потом отдохнуть от работы не только физически, но и нравственно, забывая ее сухие занятия за смехом и звоном застольных песен; потом забыть весь день и всю жизнь в мечтательном наслаждении искусственного зрелища.

Результаты расколов не заставили себя ждать. Кажется, Петр Струве сказал, что революция XX века — это бунт XVII века против века XIX-го.

Поразительно, но в революцию даже часть старообрядцев поначалу поддержала большевиков. Такова была степень разорванности крестьянского мира.

[6] *Лосев А. Ф.* Из ранних произведений. — М., 1990. С. 488.

[7] С другой стороны, хорошо известны и связи социалистических учений с христианскими ересями апокалиптического толка (см. булгаковские *Два града*).

[8] *Киреевский И. В.* Критика и эстетика. — М.: Искусство, 1979. С. 283.

3. По-видимому, процесс отхода от веры резко убыстрился начиная с середины XIX века. В *Дневнике писателя* Достоевского (за 1873 г.) есть жуткая история мужика Власа и его попытки расстрелять Святые Дары. Да, одновременно были оптинские старцы, но и в это же время были написаны откровенные признания Святителя Игнатия Брянчанинова об полном упадке монастырской жизни.

Большую роль в отходе от веры сыграли просветительские усилия интеллигенции, но я не стал бы их переоценивать. В народную жизнь вторгались куда более мощные силы. Именно, в середине XIX века в жизнь крестьянской России стала входить **техническая цивилизация.** По воспоминаниям современников, железная дорога, паровоз были чем-то вроде вторжения «инопланетян», выражаясь языком нашей эпохи. Они никак не укладывались в космос крестьянской жизни и не могли в него уложиться. Надо было выбирать — или Бог, или мир, такой мир. И русский мужик свой выбор сделал. Дальнейшая пропаганда, от народников до большевиков, лишь эксплуатировала этот первый, тяжелый удар.

Техника страшна не только своими последствиями, о которых теперь много говорят в связи с экологией (со временем все корыстнее эксплуатируя эту тему). Техника страшна сама по себе, когда все отлично работает и никаких отходов нет. В XX веке до этого додумался Хайдеггер, вспомните его рейнский мост и плотину: «Гидроэлектростанция не встроена в реку так, как встроен старый деревянный мост, веками связывающий один берег с другим. Скорее река встроена в гидроэлектростанцию» (*Вопрос о технике*). Перекрытый плотиной, Рейн выступает как поставщик энергии и только.

В рассказе Шукшина именно трактор, владение техникой, позволяют расправиться со стоявшей сотни лет церковью, и защитные слова учителя (интеллигенции) о культуре, памятнике искусства, выглядят жалкими и нелепыми. То же явно выразил задолго до него и Розанов: Реймский собор погиб не тогда, когда по нему палили пушки, но когда он перестал быть домом Божьим и стал лишь произведением искусства[9].

Мир крестьянства в средние века только выглядел *целостным*, в нем загадочным образом долгое время поддерживалось хрупкое равновесие между Православием и языческими обычаями. После отпевания были поминки, куда батюшка не ходил, но особенно их и не запрещал. Но, как мы теперь видим, это было, скорее, перемирие.

[9] Приведенные нами черты русской истории можно лицезреть воочию, если пройти по некрополю Александро-Невской лавры в Петербурге–Ленинграде. XVIII век удивительно беден христианской символикой даже, если учесть, что при большевиках что-то тут посшибали. Следующий век, представленный уже людьми литературы и искусства, разнообразнее — наряду с крестами мы видим и целую струю попыток возродить народную культуру, скорее языческих, чем христианских. Россия как-бы выбирает свое будущее. И, наконец, советская эпоха — прямо перед собором надгробие в виде какого-то механизма, с шестеренками, винтами и пр.

Как только мир напрягся, трещины его падшей природы разошлись и он в одночасье рухнул. Как писал Розанов, «переход в социализм и, значит, в полный атеизм совершился у мужиков, у солдат до того легко, точно «в баню сходили и окатились новой водой». Это совершенно точно, это действительность, а не дикий кошмар». Да и сам Василий Васильевич был в значительной степени выразителем языческой стихии в русском религиозном сознании.

Когда русский человек не смог принять мира Божьего вместе с Господом, то он отвернулся от Бога, как сделал Иван в *Карамазовых*, и попытался устроиться на земле по-своему. Новое землеустройство и было воплощением русской богоборческой стихии в XX веке. Николай Федоров, русский космизм, Андрей Платонов — ее вершинные проявления, мужской переворачивающий землю и весь космос проект.

И сейчас, из нового века оборачиваясь на век прошедший, мы видим миллионы русских мужчин, энергичных, грамотных, строящих новый мир и уверенных в себе. Они — русские люди, любящие свою землю, клавшие за нее живот свой. Но вера предков, отделенная всего одним-двумя поколениями, для них пустой звук, нечто архаичное и бессмысленное. И теперь, в начале века нового, русский атеизм не исчез, все его вызовы сохранены, он еще может сказать свое слово.

Не видеть этого в эпоху телевизионных служб—значит быть бесчувственным к грозному облику эпохи. И не стоит надеяться на «образованную» часть общества. Именно в ней атеизм сохранился вполне осознанно, там были не только «дежурные» преподаватели научного атеизма, читающие нынче курсы религиоведения.

Да, русский народ показал миру высокие образы святости, но он же вел и отчаянную борьбу с Богом. Народ-богоносец, но он же и народ-богоборец. Люди разные, а народ один. Эта борьба есть вызов, на который до́лжно дать ответ.

Ответ верующего человека ясен: прости им, Господи, ибо не ведают, что творят.

Ответ богослова — каждая ересь в жизни Церкви рождала всплеск богословской мысли, раскрытие глубин веры, сокровенно до того прикрытых. Такова эпоха каппадокийцев и Вселенских соборов.

Ответ мыслящего человека и есть задача русской философии в наступившем веке. Задача эта скромнее, она не должна вторгаться со своим человеческим несовершенством в мир веры, но она своя и она есть!

На перепутье

Конечно, в начале прошлого века русская религиозная философия была, как бы к ней не относиться. Именно она и была **ответом** на волну атеизма в обществе и народе. Или, скорее, попыткой ответа на вызов русского атеизма, попыткой, как видно теперь из будущего, запоздалой и не вполне удавшейся.

Среди прочего, размышления над язычеством в русской жизни проходят через русскую философию красной нитью. Не говоря о Розанове, можно вспомнить и Достоевского, и мысли Флоренского о крестьянском православии, и особенно о. Сергия Булгакова с его софиологией. Последняя представляет собой уже попытку богословского осмысления того развода Бога и тварного мира, которое явилось причиной русского бунта. Начинал же он с проникновенных слов «Мать сыра земля» в *Свете невечернем*. Ему же принадлежит и такая оценка язычества в его связи с отношением человека к природе[10]:

> Поскольку природа есть священный иероглиф Божества и по-своему знает тайну боговоплощения, ее мистическое постижение при известной глубине уже становится «естественным богословием», также как и «язычество» в *истинном* своем существе должно быть понято, как естественный Ветхий Завет, содержащий в себе «сень» и обетование Христова воплощения.

Позднее, уже в преддверии своих основных богословских работ, о. Сергий писал более определенно[11]:

> Что боги языческие не суть пустое место < ... и >, если отпадение в язычество из христианства есть служение бесам, то изначальное пребывание в язычестве, особенно при неведении христианства, *может быть* естественным благочестием и, более того, «естественным» откровением, — божественных сил, софийности космоса.

Я не хочу сказать, что софиология решает вопрос о связях язычества и Православия, но то, что она есть нетривиальный шаг в этом направлении — это несомненно. Сейчас софиология считается ересью, хотя, наверное, последнее слово о ней не сказано. Но даже понимаемая как ересь, она входит в русский вызов, на который богословской мысли нужно дать свой ответ.

Другой вызывающей «ересью» внутри церковной ограды является имяславие. О нем сейчас говорят и пишут, пожалуй, больше, чем о софиологии. Отбросить его еще труднее, ибо на его стороне и св. Иоанн Кронштадтский и многие другие известные священнослужители.

Какой вклад может внести сюда философская мысль? Я не думаю, что, скажем, верующие (и тем более неверующие) люди с философскими или богословскими интересами должны устремиться в эти сферы и заняться развитием богословия. Даже и академическое богословское образование сколько раз не спасало от пристрастности и уклонов в ереси. «Живой религиозный опыт, как единственный законный способ познания догматов» — так начинается *Столп* о. Павла Флоренского, и дей-

[10] *Булгаков С.* Тихие думы. — Париж: YMCA-Press, 1976. С. 137. (Курсив мой — *А. П.*)

[11] *Булгаков С. Н.* Философия имени. — СПб., 1998. — С. 286–287. (Курсив мой — *А. П.*)

ствительно так, из опыта, прежде всего аскетического, и вырастали догматы богословия.

Мыслитель, скорее, должен взглянуть на пограничную территорию между церковной оградой и окружающим ее секуляризованным миром и увидеть, что она остается невозделанной. Как писал о. Павел [12]:

> Христианское миропонимание есть именно миропонимание, жизнепонимание, но не отвлеченная от жизни система. Великая неправда сказать о *какой угодно* сфере жизни, будто Церковь к ней *безразлична*, предоставляет ее самой себе, ибо не находит в себе оснований определенным образом *смотреть* на нее и сил –*просветлять* ее.

Так что остается лежащий на этой границе вопрос о соотношении веры и знания. Здесь реальная трещина между земным и небесным. Как же ее заделать?

В начале 70-х годов многие в окружавшей меня интеллигентской среде обратились к вере. Этому предшествовали долгие споры, в которых и обсуждаемым нами проблемам находилось свое место. Но как только человек приходил к вере, он тут же переставал участвовать не только в спорах, но и вообще в разговорах на какие-либо религиозные темы. И это не удивительно, открывается целый мир, новый смысл и цель жизни; и мир этот самодостаточен, и предыдущие споры, скажем, о происхождении Вселенной или эволюции жизни, кажутся мелкими и ненужными. Соединить Шестоднев с наукой — зачем все это?

Мое впечатление, что для многих новообращенных их вера еще так хрупка и так, конечно, ценна́, что любое обсуждение, где ответ заранее неясен и может что-то поколебать, лучше обойти. Но ведь такое поведение и есть продолжение того разлада, который привел нас к обвалу в прошлом веке.

Мне уже приходилось писать о возможных отношениях науки (куда можно в широком смысле включить и технику и, вообще цивилизацию) и религии [13]. До сих пор считается, что либо между ними связи никакой нет и тем самым они не могут друг другу противоречить, либо, конечно, наука выше и богословие «нуждается» в исправлении в соответствии с современными научными данными. Похоже, что в глубине души многие из новообращенных образованных людей придерживаются таких взглядов.

Как-то мне пришлось обсуждать в таком кругу не такой уж неразработанный вопрос — о периодизации истории. Речь шла о представлениях, имеющихся в современной исторической науке. Мой вопрос, как же быть с христианской картиной истории, с ее тремя основными событиями — Творением мира, Боговоплощением и Концом света, просто повис в воздухе. Никто не хотел даже слова об этом сказать. Но все эти лю-

[12] *Священник Павел Флоренский* Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 3(2). — М.: Мысль, 1999. С. 368. (Курсив мой — *А. П.*)

[13] *Паршин А. Н.* Еще раз о «научной картине мира» // Вестник РХД. 1990. № 160. С. 117–138. (См. с. 115–133 наст. изд.)

ди ходят в храм, празднуют Воскресение Христово и, выходя из храма после службы, видят каждый раз изображение Страшного Суда.

Вот, по-моему, пример реальной проблемы, в продолжение наших старых проблем, и в части науки, я думаю ответ, должен быть таков. Конечно, же наука не должна противоречить истинам веры. И если она все же им противоречит, то не вера неправа (наивна, несовременна, архаична), а наука все еще неразвита.

Современное научное сообщество с гордостью верит, что почти все уже понято, еще немного и основные законы природы будут у нас на столе и дальше надо только их «применять». В физике таковыми служат единые теории взаимодействий элементарных частиц. Окончательный их вариант ожидается вот-вот, а название для него заготовлено уже давно — TOE, theory of everything (теория всего). В биологии описание генома наивно принимается за полное описание жизни, хотя это, несомненно, лишь часть ее. И, наконец, огромные успехи в технологии и медицине считаются научными достижениями в познании природы. Но ведь к фундаментальной науке они *никакого* отношения не имеют.

Жизнь науки вся пронизана своими догмами, зачастую весьма заскорузлыми и неприкасаемыми. Почему нельзя представить, что даже и в физике могут появиться новые фундаментальные законы не где-то за планковскими масштабами, а совсем рядом с нами, скажем, на уровне термодинамики. Догма редукционизма[14)] не дает даже помыслить об этом, но ведь она, действительно, только догма нехитрой философии и ничего больше. Сюрпризы тут могут быть самые неожиданные. Слова Ньютона о мальчике, отыскивающем камешки на берегу непознанного океана истины, еще откроются будущим поколениям ученых в своей суровой простоте.

Но вернемся к нашей теме: наука и богословие, так мы ее сузим для дальнейшего обсуждения. Не как наука может подпереть богословие (или тем более «исправить»), а что богословие может дать науке. Вот, по моему мнению, правильная постановка вопроса, не грозящая к тому же вторжением в вероучительные истины. Высшие сферы бытия должны просветлять низшие, а не наоборот.

В России есть и святые люди, есть и мыслящие люди. Будет ли пустующее пространство между ними расширяться или сужаться, на то, конечно, воля Божья.

Мы лишь приведем несколько примеров, как эта пустота могла бы быть заполнена. Их легко можно дополнить.

Философия имени и языкознание.

[14)] Биология сводится к генетике, генетика к химии, химия к физике, а физика к теории элементарных частиц... Как ни примитивно это звучит, но сколь многие ученые и просто образованные люди верят в это, как в абсолютную истину.

В начале было Слово, и Слово было у Бога и Слово было Бог (Евангелие от Иоанна, 1:1).

Так мы относимся к Слову, входя в ограду храма. А выйдя из нее, говорим слова, слова, слова... Для современной науки, как и для рядового человека — это прежде всего колебания воздуха. Главное в слове, его смысл, точному определению никак, увы, не поддается. Семантика — самая темная и неразработанная часть лингвистики.

Когда в начале века произошла церковная смута и возникло имяславческое движение, русские философы П. А. Флоренский и С. Н. Булгаков поняли, что покуда вероучительная сторона имяславия еще не развита и неизвестно когда разовьется, можно попытаться построить философию имени, находящуюся как раз на границе между богословием и языкознанием. Появились имяславческие главы *Водоразделов мысли* и *Философия имени* (позднее к ним присоединился и А. Ф. Лосев со своей *Философией имени* и ряд других мыслителей). Книги эти до сих пор не востребованы языкознанием, хотя даже простое их чтение могло бы подвинуть эту науку несколько дальше. Для теперешней лингвистики слово—это финитный знак, означающее, и только.

В богословии же говорится о связи слов человеческих и Слов Божественных. Эта связь может прояснить природу слова, даже если находиться на чисто научных позициях [15]. Философия имени естественным образом приводит к вопросу о том, где же находится слово (ну не в воздухе же в самом деле). Богословское представление об умопостигаемом сверхчувственном мире подсказывает как придать языку пространственный статус [16]. *Строение слова* Флоренского (одна из немногих глав *Водоразделов*, опубликованных в советские 70-е) говорит о бесконечности семемы слова, его смысловой оболочки. Доступная даже и обыденному сознанию, эта бесконечность в слове не может быть понята, если мы не имеем правильного представления о пространстве, в котором находится язык.

Время и вечность.

Эти богословские понятия лишь немного вошли в соприкосновение с наукой и философией. Время физиков, бесконечная прямая на протяжении веков, вдруг стало в прошлом веке отрезком, обрело начало и, может быть, конец. Так чуть-чуть сошлись наука с верой. Все же это *одно и то же* время, и наука началась с того, что без всяких колебаний разошлась с верой в вопросе об его устройстве.

Но даже и теперь время, конечный отрезок, представляется гладким, без каких-либо отметин; все наши праздники, дни памяти, для физиче-

[15] См. некоторые соображения в работе автора *Дополнительность и симметрия*. — Вопросы философии. 2001. № 4. С. 84–104. (См. с. 138–170 наст. изд.)

[16] Подступы к этому имеются в работе автора *Размышления над теоремой Гёделя*. — Вопросы философии. 2000. № 6. С. 92–109. (См. с. 67–101 наст. изд.)

ского времени просто не существуют, хотя и самый заядлый атеист не откажется отметить день своего рождения. Представление о связи памяти и времени как фундаментальный закон в устройстве космоса науке еще предстоит освоить.

А еще осталась вечность, совсем не обозначенная в науке, и лишь немного в философии. И почти никаких намеков, что она могла бы для науки значить.

Платонизм и космология.

Провозглашаемое в неделю Торжества Православия анафематствование платонизма означает лишь отвержение претензий платонизма выйти за пределы «своей компетенции». Никто, однако, не будет отрицать, что платонизм поставил, в рамках человеческого познания, вопрос о существовании умопостигаемого сверхчувственного мира и о его связи с миром чувственным. Более того[17], «во многих своих положениях неоплатонизм приближается к христианской истине и тем завершает исторический процесс естественного откровения через творчество человеческой мысли». Так что говорить о «внедрении» платонизма в христианство, я думаю, нет оснований.

Анализ платонизма, учения о мире идей, особенно важны для понимания взаимоотношения науки и религии. Если научное знание, принадлежащее миру идей, имеет онтологический статус, то ему должно найтись свое место, свой locus, в устройстве космоса[18]. Но в современной космологии, при всей ее изощренности, этого совсем не видно. Можно еще спросить: если до «момента» Большого Взрыва ничего не было, то не «было» ли и самой космологической теории, или она все же «существовала»?

* * *

Мы привели эти примеры прежде всего для иллюстрации. Тут наверняка можно сказать гораздо больше. Пойдет ли развитие нашей мысли в таком направлении, покажет, конечно, будущее. Хотелось бы думать, что даже для самой церковной жизни, не говоря о науке, подобное развитие, не ставящее своей целью «вторжение» в богословие, было бы полезным.

В отличие от других христианских конфессий, Православие полнее и глубже сохранило чистоту первоначального христианства. Сохранило зачастую из благоговейного отношения к святыне, просто отклоняя все

[17] *Старокадомский М. А.* Неоплатонизм и христианство // Богословские труды. Сб. 12. — М., 1974. С. 216.

[18] Некоторые шаги в математической интерпретации платонизма, вдохновленные в значительной мере идеями Флоренского, предприняты в упомянутой выше работе автора о теореме Гёделя.

попытки убрать якобы отжившее, несовременное, ненужное. Переживаемое нами время особенно характерно этими обновленческими атаками, готовностью отдать пронесенное через века под вполне благовидными предлогами—облегчить, улучшить, упростить. Атаки эти вполне сродни горделивой вере науки, что «почти» все уже понято и изучено. Но в накопленных Церковью богатствах, особенно богослужебных, как много таится еще действительно непонятого и только выглядящего архаичным. Может быть, такое «светское» применение внесет свою лепту в сохранение этого богатства.

Не хотелось бы, как это уже было в нашей истории, опаздывать. Последние события церковной жизни — волна протестов против «электронной переписи» очень уж напоминают, даже и по деталям, некоторые выступления старообрядцев.

Разумеется, сказанное выше — это лишь один из возможных путей развития русской религиозной мысли. Могут быть, конечно, и другие, например, ориентированные на социальную жизнь общества. Здесь говорилось преимущественно о более близкой мне науке.

Я убежден, что вызовы русской жизни, о которых мы говорили выше и которые привели к обвалу в прошлом веке, **полностью** сохранены и в настоящее время. Если на них не будет дан адекватный ответ, то **новый** обвал неминуем.

Когда-то Бердяев довольно метко сказал, что есть эпохи органические и эпохи критические, в первые пишут что-то, во вторые о чем-то. Десять лет мы писали о чем-то, давно пора, наконец, писать это что-то.

СВЕТ И СЛОВО
(к философии имени)

> Что тверже, неизменней, могущественнее слова: словом мир сотворен и стоит *нося всяческая глаголом силы Своея* (Евр. 1, 3).
>
> *Святой праведный*
> *Иоанн Кронштадтский*

Богословские споры сопровождали Православие на всем его историческом пути. Их обострение происходило, как правило, вблизи от переломных эпох человеческой истории. Так, тринитарные споры шли на фоне распада Римской империи, иконоборчеству предшествовало появление мусульманства, споры о Фаворском свете развернулись перед концом Византии. Казалось, что с наступлением Нового времени споры такого масштаба прекратились.

Прошло несколько столетий, и в начале XX века возникло русское имяславие, в канун перелома истории России и Европы. События эти долгое время не привлекали особенного внимания и лишь теперь, в новую переломную эпоху, вышли на поверхность и стали обсуждаться. За последние годы появилось несколько книг, содержащих основные документы имяславческого движения, переизданы *На горах Кавказа* о. Илариона и *Апология* о. Антония Булатовича, написана подробная история движения в целом [1].

Наступает время понять, в чем была суть богословских споров вокруг имяславия и что может внести в них наше время. Основная проблема состоит в понимании природы Имени Божия — есть ли оно творение человека, придуманное для общения с Господом, или же оно принадлежит Божественному миру. Этот вопрос можно уточнять: Имя Божие тварно или нетварно? Оно находится во времени или в вечности и совечно Богу? И если мы принимаем последнюю возможность, то можно ли считать Имя Божие божественной энергией?

Чтобы встать в определенное отношение к этим вопросам, нужно вспомнить, что в истории Православия богословские истины были рациональным «оформлением» духовного опыта [2]. Не является исключени-

---

[1] См. сборник *Имяславие* (антология) (М.: Факториал пресс, 2002) и книгу еп. Илариона (Алфеева) *Священная тайна церкви.* (СПб.: Алетейя, 2002).

[2] Когда эта связь разрывалась, то и богословие стояло на месте, превращаясь в разновидность мирской «науки».

ем и история имяславия. Хотя об именах Божиих много написано почти у всех отцов Церкви, непосредственный толчок богословскому движению дал духовный опыт св. Иоанна Кронштадтского с его знаменитой формулой: **Имя Божие есть Сам Бог**, вокруг которой и скрестились все копья.

Можно думать, что решение имяславческих проблем зависит *прежде всего* от нового духовного опыта, зреющего в глубинах Церкви, в аскезе ее подвижников. Но есть и другая сторона вопроса.

Изучая историю имяславия, мы видим, что чисто светские представления о природе языка играли огромную роль в происходившей тогда борьбе. Более всего это относится к вопросу о реализме или номинализме в понимании природы имени и вообще слова. Когда в начале века произошла церковная смута и возникло имяславческое движение, русские философы о. Павел Флоренский и о. Сергий Булгаков поняли, что для развития вероучительной стороны имяславия имеет значение и построение реалистической философии имени, находящейся на границе между богословием и языкознанием. Появились имяславческие главы *Водоразделов мысли* и *Философия имени* (позднее к ним присоединился и А. Ф. Лосев со своей *Философией имени* и ряд других мыслителей).

В лингвистике XX века восторжествовала, однако, соссюровская теория произвольности языкового знака. Слова одного из борцов с имяславием С. В. Троицкого: «имена сами по себе нисколько не связаны с предметами $< \cdots >$ Имя есть лишь условный знак, символ предмета, созданный самим человеком», по оценке современного филолога, как будто списаны с теперешнего учебника по языкознанию. Неудивительно, что философия имени до сих пор почти не востребована языкознанием, хотя даже простое ее изучение могло бы подвинуть науку несколько дальше[3)].

Мы думаем, что такой процесс вполне возможен — не истолковывание богословских истин с помощью мирской науки (как это случилось во время имяславческих споров), а движение в обратном направлении. Это относится не только собственно к имяславию или философии имени, но вообще к тем представлениям о слове, которые имеются в Священном Писании и святоотеческой традиции.

В отличие от языкознания, не занимающего центральное место в современной науке, в богословии слово находится в центре мироздания. Вспомним: «В начале было Слово, и Слово было у Бога и Слово было Бог» (Ин. 1, 1).

В книгах отцов Церкви рассыпаны многочисленные высказывания о языке, о природе слова, которые использовались в качестве пояснений

---

3) В самое последнее время положение начинает меняться. См. книгу Камчатнова А. М. *История и герменевтика славянской Библии* (М.: Наука, 1998); и сборник *Современная философия языка в России* (М.: Ин-т языкознания РАН, 1999).

богословских истин. Говоря о Боговоплощении, неописуемом в земных словах соединении Божественной и человеческой природы в Богочеловеке, богословие, тем не менее, нашло для этого такие слова: **нераздельно и неслиянно**. Не ограничиваясь этим, отцы Церкви находили многочисленные параллели соединению двух природ. Вот одна такая линия аналогий:

Божественная природа	человеческая природа
Слова Божественные	слова человеческие
душа	тело
смысл слова	форма (тело) слова

Мы не обсуждаем, как такие примеры могут помочь понять истины веры, вспомним, что апофатическое богословие выше катафатического, но предлагаем пойти обратным путем, вниз с горних высей к нашей земной жизни.

Именно, высшие истины могут что-то просветить в наших попытках понять связь души и тела (в психологии), смысла слова и его формы (в языкознании). Во всех приведенных нами примерах мы видим пары, которые сопрягаются друг с другом антиномично, как об этом писал о. Павел Флоренский. Мы можем попытаться отнести то, что написано у отцов Церкви о двух природах, Божественной и человеческой, или о двух видах слов, к более низшим уровням бытия, чтобы, в частности, понять взаимоотношения смысла и формы слова. Такой подход можно уже развивать в рамках чистой науки. Напомним, что главное в слове — его смысл, точному определению никак не поддается. Семантика — самая темная и малоразработанная часть лингвистики.

Приняв такую точку зрения, мы неизбежно приходим к необходимости рассматривать гораздо более широкий круг вопросов. Для понимания природы языка в свете святоотеческого учения нам нужно подумать и об устройстве мира, и о природе времени, и об умопостигаемом свете, и о многом другом. По нашему глубокому убеждению, изолированное изучение языковых проблем в свете богословия вряд ли приведет к существенному продвижению в их понимании.

Этим объясняется, что далее затрагиваются и вопросы, строго говоря, не относящиеся к имяславию и даже языкознанию. И прежде всего возникает фундаментальный вопрос: если мы стоим на позиции реализма, а мы действительно на ней стоим, то где же находится язык? Его материальная, звуковая оболочка — это колебания воздуха окружающего нас физического пространства. А само слово, его смысл?

Начнем поэтому с выяснения, что говорит богословие об устройстве тварного мира.

Умопостигаемый тварный мир

«По первым словам летописи бытия, Бог «сотворил небо и землю» (Быт. 1, 1), и это деление всего сотворенного надвое всегда признавалось основным. Так и в исповедании веры мы именуем Бога «Творцом видимых и невидимых», Творцом как видимого, так, равно, и невидимого». Этими словами начинает свой *Иконостас* о. Павел Флоренский, много пытавшийся понять это деление тварного мира и строивший для этого даже и математические модели.

В богословии известны и другие слова для обозначения этих двух сфер бытия: духовный и вещественный миры, умопостигаемый (умозрительный, мысленный, сверхчувственный) и чувственный, бестелесный и телесный. К первому принадлежат ангелы и души людей, ко второму — окружающий нас физический мир.

Священное писание и духовный опыт не так много говорят об устройстве умопостигаемого мира, но один вывод представляется несомненным — этот мир имеет иерархическое, ярусное или уровневое строение. *Небесная иерархия* св. Дионисия Ареопагита дает подробное описание девяти чинов ангельской иерархии и их связи друг с другом. При этом подчеркивается, что сколько существует чинов небесной иерархии и какие они, нам в точности неизвестно.

Одна из основных «функций» иерархии — созерцание Божественного света и передача его от более высоких ступеней иерархии к более низших. Можно сказать, что ангельский мир связывает транцендентный Божественный мир и мир физический. Один из наиболее известных образов этой связи — лествица Иаковлева (Быт. 28, 12–13), идущая от земли на небо, и ангелы Божии, восходящие и нисходящие по ней. Близкими образами переполнен и мировой фольклор (разногласия состоят лишь в том, сколько имеется уровней или небес).

Если о телесном, физическом мире наука в лице естествознания знает довольно много, то что дают мирские знания о мире умопостигаемом? Здесь больше всего постаралась философия — платоновское учение о мире идей. Резкое отличие платонизма от богословских представлений состоит в том, что идеи не являются личностями. Тем не менее, многие понятия неоплатонизма были использованы отцами Церкви при богословском оформлении истин веры.

Как и в античные времена мы знаем, что идеи существуют, например, идеальные понятия в математике. В чувственном мире треугольников не найдешь, что не мешает многим людям свободно с ними обращаться. Для треугольников и вообще математических понятий остается лишь умопостигаемый, сверхчувственный мир. Говоря таким образом, мы неявно подразумеваем, что миры духовный и телесный — действительно отдельные миры, обособленные друг от друга. Но такое предположение весьма далеко от истинного положения дел. Чтобы понять его, обратимся снова к богословским аналогиям, о которых мы говорили выше. Вот как их излагает св. Максим Исповедник [4].

> Мир умопостигаемый находится в чувственном, как душа в теле, а чувственный мир соединен с умопостигаемым, как тело соединено с душой. И един мир, состоящий из них обоих, как один человек, состоящий из души и тела. Каждый из этих миров, сращенных в единении, не отвергает и не отрицает другого, по закону [Творца], соединившего их. И, соответственно этому закону, в них заложен логос единообразующей силы, не позволяющей быть в неведении, несмотря на природную инаковость [двух миров], относительно тождества их по ипостаси в [этом] единении.

Вопрос о существовании тварных идей — прообразов вещей, их «логосов» является, по-видимому, спорным. Различные взгляды отцов Церкви на это были собраны В. Н. Лосским [5].

Принимая, что умопостигаемый мир содержит математические понятия [6], мы увидим, что и естествознание после долгого развития пришло к близким выводам. Окружающие нас физические тела, доступные органам чувств, состоят из так называемых элементарных частиц, которые, по существу, являются чисто математическими конструкциями. Чем глубже мы погружаемся в материальный мир, тем дальше мы от него отдаляемся в направлении мира идеального.

Впрочем, естествознание началось с дуализма Декарта, закрепившего раскол мира на две субстанции — мысленную и протяженную. Последняя, которая и есть вещество, была ввергнута Декартом в физическое декартово пространство, и этот шаг обусловил все дальнейшее развитие науки и все ее успехи. Каждый такой успех состоял в том, что в рамки декартова пространства были вставлены сначала механика, тяготение, потом электричество, свет, теплота, ...

Интересно, что в ту же эпоху, что и Декарт, Лейбниц размышлял о том, как описать мысленную субстанцию, включая сюда понятия, идеи, высказывания. Он пришел к своей универсальной характеристике, представляющей, по существу, попытку построить *свое* пространство для умопостигаемого мира. Его идеи были основательно забыты вплоть до XX века [7].

---

[4] *Преподобный Максим Исповедник* Мистагогия // В кн. *Творения*. Кн. I. — М.: Мартис, 1993. С. 167–168.

[5] *Лосский В. Н.* Очерк мистического богословия Восточной Церкви. Гл. V. Тварное бытие.

[6] В *Догматическом богословии* Лосский, говоря об отличии единства ангельского мира от единства (по природе) мира человеческого, называет первое «гармоническим единством» и подчеркивает «удивительное сближение между музыкой и математикой, с одной стороны, и ангельскими мирами — с другой» (*Лосский В. Н.* Догматическое богословие. III (12). Первородный грех).

[7] См. обсуждение в работе автора *Размышления над теоремой Гёделя*. Историко-математические исследования. Вып. 5 (40). — М.: Янус, 2000. С. 39–40, 50–51. (См. также с. 80, 93–95 наст. изд.)

Учитывая исторический опыт естествознания (а это тоже опыт, к которому мы должны прислушаться), можно было бы начать с построения умопостигаемого мира как некоторого пространства. Причем возможно понимать такое пространство только как философскую категорию или же сделать следующий шаг и представить его более конкретно как математическую конструкцию. И *затем* соединить два мира или два пространства — физическое и умопостигаемое в одно целое, как и должно быть.

Вернемся теперь к имяславию и богословским представлениям о природе слова. Один из самых активных борцов с афонскими монахами-имяславцами архиеп. Никон сравнивал имена с идеальными математическими понятиями, точкой, прямой и т. д., имея в виду, что их нет в окружающем нас мире. Находясь, в отличие от архиеп. Никона, на позиции реализма, мы можем обернуть его аргументы против реального существования имен и признать, что имена существуют вполне реально, но не в вещественном, физическом мире, а в мире умопостигаемом, сверхчувственном. Более точно, имена и вообще слова имеют «тело» — звуковую оболочку, находящуюся в чувственном мире, и «душу» — смысл, обитающий в умопостигаемом мире.

И если мы примем на время, что есть не просто умопостигаемый мир, но и отвечающее ему пространство, то это пространство и будет, среди прочего, вместилищем для языка.

Дерево и пространство языка

Как же подступиться к такой задаче — построению умопостигаемого пространства? Так же как в физике геометрия была исходным пунктом для рассуждений Декарта, возьмем логику понятий, как она была развита в античности. Описание понятий с помощью диарезиса, процесса деления надвое — одна из сквозных тем диалогов Платона, обыгрываемая им постоянно. Более «научно» эта же процедура описана в *Категориях* Аристотеля и комментариях к ним Порфирия. Если дан какой-то признак или атрибут, то все предметы или вещи делятся на два класса:класс обладающих этим признаком и класс необладающих. Взяв еще один признак, мы можем продолжить деление. Структура, которая получается в итоге, будет иметь вид дерева, каждая ветвь которого разветвляется на последующие ветви. Каждая точка разветвления будет *родом* по отношению к последующей, а та будет по отношению к ней *видом*. Процесс всегда занимает конечное число шагов и является наглядным представлением *акта классификации*.

Такие деревья играют важную роль в языкознании, при анализе синтаксической структуры предложения или морфологической структуры слова. Каждому высказыванию естественно соответствует древесная структура: сначала предложение делится на группу подлежащего и группу сказуемого, затем каждая группа делится далее (выделяются определения, дополнения и т. д.), пока не будет найдены все члены предложения. Оказалось, что такая (поверхностная) структура не полностью отражает грамматику предложения и во многих случаях приходится дополнять дерево новыми «невидимыми» ветвями, отражающими так называемую глубинную структуру. Только тогда можно понять многие законы синтаксиса, например, переход от повествовательных предложений к вопросительным (трансформационная грамматика Н. Хомского).

Предложим для начала описывать предложения языка такими деревьями. Они, однако, содержат не так много от исходного предложения и, на первый взгляд, не очень годятся для такой роли. Выход состоит в том, чтобы перейти от деревьев с конечным числом точек разветвления к деревьям, ветвящимся до бесконечности, со все более «тонкими» листочками. Подобный переход был бы аналогичен переходу от античного пространства в геометрии, состоящего из конечного числа наглядно представленных геометрических тел, к декартову пространству — бесконечному, однородному, пустому и вмещающему в себя какие угодно геометрические тела. В нашей ситуации получается единое пространство, имеющее вид бесконечного универсального дерева, в которое можно вложить все те деревья, которые мы рассматривали. Такую программу можно реализовать для математического языка, для самой простой его части — языка элементарной арифметики[8].

Для обычного языка такой подход означал бы, что за каждым высказыванием языка, за каждым словом стояло бы бесконечное дерево, выражающее его *полностью*. И все такие деревья содержались бы в едином универсальном пространстве (можно сказать, Мировом Дереве). Иначе можно сказать, что «настоящая» глубинная структура должна быть бесконечной.

Философия языка, развитая в России в начале XX века, отчетливо сознавала, что без явного учета бесконечности языковые явления поняты быть не могут. Этим она резко отличалась от представлений структуралистов, которые позднее стали доминировать в лингвистике.

Несколько характерных мнений:

> Слово хочет быть услышанным, понятым, отвеченным и снова отвечать на ответ, и так ad infinitum. Оно вступает в диалог, который не имеет *смыслового* конца (но для того или иного участника может быть физически оборван).
>
> Не может быть изолированного высказывания. Оно всегда предполагает предшествующие ему и следующие за ним высказывания. Ни одно высказывание не может быть ни первым, ни последним. Оно только звено в цепи и вне этой цепи не может быть изучено[9].

---

[8] См. цитируемую выше работу автора, где приведены аргументы в пользу перехода к бесконечному дереву.

[9] *Бахтин М. М.* Эстетика словесного творчества. — М.: Искусство, 1979. С. 306, 340.

Что касается до семемы слова береза, то по самому существу дела душу слова невозможно исчерпать хотя бы приблизительно [далее идут мифы, биология, искусство, поэзия. — *Авт.*] неуловимые эмоциональные оттенки, что говорящий, вот сейчас, в данном случае, вкладывает в произносимое им слово береза: может быть растроганности воспоминаниями о далекой родине, а может быть хозяйственной скорби о дороговизне дров и т. д. до бесконечности [10].

Если принять, что приведенная нами конструкция может служить умопостигаемым пространством, то возникает вопрос как же быть с бесконечностью с богословской точки зрения? По представлениям западного богословия (прежде всего, томизма) бесконечность есть неотъемлемый атрибут Бога, тварной бесконечности быть не может. Похоже, что другие богословы не столь категоричны в этом вопросе. Заметим, что и основатель математической теории бесконечности — теории множеств Георг Кантор, который во многом исходил из представлений о бесконечности в (схоластическом) богословии, тем не менее, считал, что бесконечность есть и в тварном мире. Наконец, нелишним будет отметить, что по теории Кантора бесконечностей много, что дает пищу для дальнейших размышлений.

Возвращаясь к описанию языка деревьями (в графическом смысле слова), нельзя не отметить, что связь слова и дерева (в обычном смысле) присутствует в фольклоре и мифологии многих народов, проглядывает в известных языковых метафорах и даже в лингвистической терминологии («корень слова»). А. А. Потебня весьма внимательно разобрал символическое представление слова как листа дерева в славянском фольклоре. В *Слове о полку Игореве* имеется весьма загадочный образ «мысленного дерева» (отсюда «растекаться мыслью по древу»). Исследователи отождествляют его с древом песен и поэзии и, что нам наиболее интересно, с райским древом жизни [11].

В Православии древом является сам Крест, на котором Сын Божий, Бог Слово, принял страдания, и древо жизни книги Бытия прообразовательно его представляет. Стихиры и тропари праздника Воздвижения доставляют тому многочисленные примеры.

Время и вечность

Наш телесный, физический мир находится не только в пространстве, но и во времени. Применима ли категория времени к Именам Божиим — одно из основных разногласий во время имяславческих споров. Если имена суть творения людей, то их когда-то не было и, возможно, когда-то и не будет. Имяславцы отстаивали противоположное представ-

[10] *Строение слова* // В кн. *Священник Павел Флоренский* Сочинения в 4-х томах. Т. 3(1). — М.: Мысль, 1999. С. 218–219.

[11] Словарь-справочник *Слова о полку Игореве*. Вып. 3. — Л.: Наука, 1969. С. 120–123.

ление о вечном существовании имен Божиих. Они опирались на ряд мест святоотеческой литературы, где такое мнение выражено явно.

Одно из таких мест — комментарий к псалму 71 св. Афанасия Александрийского. По его словам, 17-й стих псалма «Прежде солнца пребывает имя Его» показывает, что Сей, неумерщвленный вместе с младенцами, есть прежде сложения мира сущий со Отцем [12]. Здесь святитель сопоставляет «прежде солнца» и «прежде сложения мира», с одной стороны, и Бога Сына и Его Имя, с другой.

Другое такое место — Слово на Обрезание Христово св. Дмитрия Ростовского, где говорится [12], что

> Сие спасительное имя Иисус прежде всех веков в Тройческом Совете было предуготовано, написано и до сего времени было хранимо для нашего избавления < ... >
>
> Неизвестна была сила имени Иисусова, пока скрывалась в Предвечном Совете, как бы в сосуде. Но как скоро то имя излилось с небес на землю, то тотчас же, как ароматное миро, при излиянии во время обрезания младенческой крови, наполнило вселенную благоуханием благодати, и все народы ныне исповедуют «яко Господь Иисус Христос в славу Бога Отца» (Флп., 2, 11).

Стих 9 того же Послания к Филиппийцам говорит, что Бог-Отец «дал Ему имя выше всякого имени», т. е. Имя Иисус имеет божественное, а не человеческое происхождение.

В соответствии с нашим общим подходом мы не беремся делать отсюда вывод о нетварной природе имени Иисус и вообще Имен Божиих, а попытаемся применить эти высказывания к сделанному выше предположению, что имена (и слова) находятся в тварном, но умопостигаемом мире. Могут ли имена при этом существовать в *вечности*, вне времени?

В богословии (особенно западном) распространено мнение, что вечность (как и бесконечность) — атрибут Бога, тварный мир находится во времени [13]. Заметим, что именно такой взгляд вынуждает отнести идеи «вещей», их первообразы к Божественному миру. Православный взгляд на эту проблему более определен. Кратко он формулируется так: есть *разные* вечности, в том числе и тварная вечность; в последней и пребывает умопостигаемый мир.

Вот как описывает тварную вечность В. Н. Лосский, опираясь на учение св. Максима Исповедника. Сказав сначала о времени как о форме бытия чувственного, он продолжает:

> Но есть еще и другая вневременная форма тварного существования, свойственная бытию сверхчувственному. Это — эон ($\alpha\iota\omega\nu$). «Эон, — говорит святой Максим Исповедник, — это неподвижное время, тогда как время — это эон, измеряемый движением» (PG, t. 91, col. 1164 BC) $< \cdots >$ Эон находится вне времени, но, имея, как

[12] *Творения*. Том 4. — Свято-Троицкая Сергиева Лавра. 1903. С. 244.

[12] *Жития святых, на русском языке изложенныя по руководству Четьих-Миней св. Дмитрия Ростовского*. Кн. 5. Часть 1. — М., 1904. С. 8, 11.

[13] Тем не менее уже у блаж. Августина в *Граде Божьем* (XII, 16) есть рассуждения о «вечных временах», не совечных Богу и относящихся к ангельскому миру.

и оно, начало, он соразмерен времени. Только вечность Божества неизмерима, и это относится как ко времени, так и к эону [14].

Святой Максим Исповедник подчеркивает, что вечность мира умопостигаемого — «вечность тварная»: пропорции, истины, неизменяемые структуры космоса, геометрия идей, управляющих тварным миром, сеть математических понятий — это *эон*, эоническая вечность, имевшая, подобно времени, начало (откуда и название –эон: потому что он берет свое начало «в веке», *εν αιωνι*, и переходит из небытия в бытие); но это вечность неизменяющаяся и подчиненная вне-временному бытию. Эоническая вечность стабильна и неизменна; она сообщает миру взаимосвязанность и умопостигаемость его частей. Чувствование и умопостижение, время и эон тесно связаны друг с другом, и так оба они имеют начало, они взаимно соизмеримы. Эон — это неподвижное время, время — движущийся эон. И только их сосуществование, их взаимопроникновение позволяет нам мыслить время [15].

Подобное мнение существовало в патристике задолго до св. Максима. В Беседе 1 на Шестоднев св. Василий Великий говорит, что «еще ранее бытия мира было некоторое состояние, приличное премирным силам, превысшее времени, вечное, присно продолжающееся», в котором Творец создал умосозерцаемых тварей, а для создания материального мира было произведено «преемство времени, всегда поспешающее и протекающее и нигде не прерывающее своего течения» [16].

Противопоставление времени и вечности нашло свое выражение и в богослужении. Литургическое богословие различает Евхаристию и остальные службы, принадлежащие богослужению времени, одному из трех его кругов: дневному, седмичному и годовому. Сама же Литургия находится вне времени, это всегда как бы одна и та же служба, как Святые Дары — всегда одно и тоже Тело и Кровь Христовы [17].

О вечности божественной Священное Писание и святоотеческая традиция говорят гораздо меньше. По словам Лосского, «Если Бог живет

---

[14] *Лосский В. Н.* Очерк мистического богословия Восточной Церкви. Гл. V. Тварное бытие.

[15] *Лосский В. Н.* Догматическое богословие. II, (8) Творение: время и вечность. О разных видах эонов св. Максим Исповедник пишет еще в гл. 85 и 86 Второй сотницы богословских глав, содержащейся в греческом Добротолюбии и выпущенных в русском переводе (см., однако, перевод в кн. *Творения преподобного Максима исповедника*. Кн. 1. — М.: Мартис, 1993. С. 251–252).

[16] См. обзор мнений отцов Церкви о времени происхождения мира ангелов в кн. архиеп. Макария *Православно-догматическое богословие*. СПб, 1868. Том I. С. 382–388. Особенно интересны слова блаж. Иеронима: «нашему миру не исполнилось и шести тысяч лет. А сколько, должно полагать, и до него протекло вечностей (aeternitates), сколько времен, сколько неизреченных веков, в продолжение которых ангелы, престолы, власти и прочие силы служили Господу и существовали по воле Его, без всякого измерения и перемены времен» (с. 386).

[17] *Прот. А. Шмеман* Введение в литургическое богословие. — Париж, 1961. С. 49–54.

в вечности, эта живая вечность должна превосходить противопоставление движущегося времени и неподвижной вечности» [18].

Итак, умопостигаемое пространство, вместилище языка должно находиться вне времени, в вечности, в некотором эоне. Наука усвоила себе категорию времени, и в физике пространство и время теперь неразрывны. Но представление о вечности наукой Нового времени было отвергнуто, хотя в античности философия (и прежде всего платонизм) интенсивно об этом размышляла.

Попытаемся тем не менее найти для этого понятия чисто научное выражение.

Слова Божественные и слова человеческие

В патристике есть представление о двух видах речи: о речи человеческой и речи божественной. Важно, что, хотя эти два вида речи резко отличаются друг от друга, человек понимает обращенное к нему слово Бога.

Несколько замечаний по этому поводу сделал в своей *Исповеди* блаж. Августин, в том ее месте, где он дал свой анализ понятия времени. Говоря о различии между языком человека и языком Бога, Августин указывает, что слова человеческие начинаются и кончаются во времени, они следуют одно за другим. Слова Божественные не имеют ни начала, ни конца. Они звучат вечно, и они звучат все одновременно [19].

Похожие мысли высказывали св. Василий Великий [20]:

> Но мысль наша доискивается: кто бе в начале? Сказано: Слово. Какое Слово? Человеческое ли слово? или слово Ангельское? Апостол открыл нам что и Ангелы имеют свой собственный язык, когда сказал: аще языки человеческими глаголю и Ангельскими (1 Кор. 13, 1). Притом понятие слова двояко: есть слово, произносимое голосом, и оно по произношении исчезает в воздухе; и есть слово внутреннее, заключенное в сердцах наших, мысленное.
>
> Ибо и наше слово — порождение ума, рождаемое бесстрастно; оно не отсекается, не отделяется, не истекает; но всецелый ум, пребывая в собственном своем составе, производит всецелое и совершенное слово; и происшедшее слово заключает в себе всю силу породившего ума.

Так же писал об этом и Святитель митрополит Филарет Московский [21]:

---

[18] Интересно, что, в полном соответствии с апофатическим богословием, у нас даже нет специального термина для выражения этой божественной вечности. Слово «вечность» происходит в индоевропейских языках от «век», т. е. «эон».

[19] *St. Augustine* Confessions. XI, 6–7. (См. русский перевод: *Аврелий Августин* Исповедь. — М.: Renaissance, 1991. С. 286–287.) Эти представления встречаются у него и в других местах (De Civitate Dei, XI, 21).

[20] *Св. Василий Великий* Беседа 16 на слова: *В начале бе Слово* (Ин. 1, 1). В его кн. *Творения*. Часть IV. — М. 1846.

[21] Цит. по *Лосский В. Н.* Очерк мистического богословия Восточной Церкви. Гл. V. Тварное бытие.

Слово Божие не похоже на слова человеческие, кончающиеся и исчезающие в воздухе, как только сходят с уст. В Боге нет ничего, что исчезало бы и что бы рождалось. Его Слова исходят, но не преходят. Он сотворил не на некоторое время, а на всегда. Он привел тварь к бытию Своим творческим словом. «Ибо утверди вселенную, яже не подвижится» (Пс. 92, 1).

Существует математическая (и физическая) конструкция, доставляющая поразительную аналогию этому описанию. Она называется разложением в ряд Фурье какого-либо процесса (или функции), протекающего во времени. Его можно представить в виде суперпозиции (или суммы) гармонических колебаний — простейших волн. Каждая такая гармоника имеет форму синусоиды без начала и конца. Иначе говоря, все такие гармоники звучат бесконечно долго, т. е. всегда, и они звучат все одновременно.

Тем самым они обладают свойствами слов Божественной речи. Сказать, что они звучат в вечности, может быть, слишком сильно, но некоторые свойства вечности, и прежде всего эонической вечности, здесь хорошо отражены. Каждая отдельная гармоника — это застывшая волна, неподвижное теперь (мы и не услышим ее никогда).

Близкая конструкция имеется и в музыке, где мелодия «состоит» из отдельных тонов (звуков-волн определенной частоты), что находит свое выражение в нотной записи.

Вспомним теперь нашу богословскую аналогию и будем считать, что в этих математических конструкциях речь идет не о Божественных словах и словах человеческих, а о двух сторонах «обычных» слов — одной физической, находящейся в здешнем, чувственном пространстве, и другой смысловой, обитающей в пространстве сверхчувственном. Их весьма нетривиальная связь находит свое выражение в математическом аппарате разложения в ряд Фурье (в физике его называют еще спектральным анализом). Подобное «диалектическое» отношение можно проследить и в других областях человеческого познания: в физике оно известно как дополнительность, а в философии как антиномия [22].

Тем самым мы видим, что тварные умопостигаемое пространство и чувственное пространство суть две стороны бытия, которые отнюдь не противопоставлены друг другу, не обособлены, а действительно взаимопроникают, взаимодействуют друг с другом.

И богословская терминология здесь будет очень к месту: дополнительные или антиномичные, стороны мира связаны между собой так, что они неслиянны, но они и нераздельны.

[22] Об этом более подробно см. работу автора *Дополнительность и симметрия*. Вопросы философии. 2001. № 4. С. 93–94, 102. (См. также с. 152–154, 165–167 наст. изд.)

Акт именования

Первое упоминание об использовании человеком способности говорить содержится во второй главе книги Бытия: «И нарек человек имена всем скотам и птицам небесным и всем зверям полевым» (2, 19–20).

Тем самым акт именования является первичным и наиболее фундаментальным действием (языка) человека. По словам о. Сергия Булгакова, «имя существительное $< \cdots >$ выражает не только идею, но и существование, опредмеченность этой идеи, бытие ее в некотором предмете. Оно, кроме своего выразимого в слове содержания, имеет молчаливый, но выразительный мистический и по смыслу своему онтологический жест: *это есть*. В этом онтологическом жесте и заключается природа *имени*» [23].

В языке имеется часть речи — местоимение, которая свободна от имеющегося у существительных предметного значения и представляет этот онтологический жест, так сказать, в чистом виде.

В современной лингвистике подобное употребление имени отнесено к разряду т.н. пустых знаков. Э. Бенвенист описывает их так: «Язык разрешил эту задачу [общения между субъектами. — *Авт.*], создав серию пустых знаков, свободных от референтной соотнесенности с «реальностью», всегда готовых к новому употреблению и становящихся полными знаками, как только говорящий принимает их для себя, вводя в протекающий акт речи» [24]. В точности такая же ситуация встречается и в математике. Вспомним какой-нибудь математический текст: «Пусть x — площадь треугольника …» Здесь x — то, что в математике называется переменной. Трансцендентный смысл понятия переменной x состоит в том, что она может принимать бесконечно много значений и это *невозможно* понять ни на каком конкретном примере. Тем не менее, в школе нам удается (или иногда не удается) освоиться с переменными и научиться их использовать.

Таким образом, правильнее было бы называть местоимения и переменные не пустыми, а сверхполными знаками — до своего употребления они могут быть чем угодно, и в акте их использования указательный жест выбирает одно, конкретное значение из этого «что угодно».

Мы можем связать местоимения в языке и переменные в математике, если вспомним еще об одной части речи — числительных, и посмотрим на их развитие с исторической точки зрения. Происхождение чисел связано со счетом и акт счета содержит жест (указание пальцем) — один, два, … Тем не менее, число сохраняет «элемент» потенциальности, возможности; где-то в их семеме живет память об этом. Особенно это верно для числа «один». Благодаря этому его можно использовать как неопределенный артикль (а $=$ *один из, некоторый*, в английском

[23] *Булгаков С. Н.* Философия имени. — СПб.: Наука, 1998. С. 71.

[24] *Бенвенист Э.* Общая лингвистика. — М.: Прогресс, 1974. С. 288.

языке), или как начало в русском фольклоре: в *одной* деревне, у *одного* царя …

Одним из наиболее интересных и неожиданных открытий в истории математики было обнаружение, что конкретные числа могут выступать в качестве переменных, как это было у Диофанта Александрийского (в его *Арифметике* число 5 вполне могло обозначать неизвестный параметр, который нужно еще найти и который отнюдь не будет равен пяти [25)]).

Отметим еще, что в раннем развитии человека местоимение *Я* появляется не сразу и с некоторым трудом. В самом деле, как жест *Я* есть указание на самого себя, т. е. предполагает выход из себя [26)]. Неудивительно, что в духовной (а до недавнего времени и в научной) литературе не принято употреблять это местоимение первого лица.

Слово и слава. Умопостигаемый свет

Хотя мир умопостигаемый и называется сверхчувственным, для общения с ним у человека есть другие «органы чувств» и, прежде всего, умственное зрение. Это отнюдь не метафора. Отцы Церкви говорят об этом много, ведь духовный опыт и возможен благодаря этим «чувствам». Вот как о том пишет Симеон Новый Богослов [27)]:

> 11. Как стоящий на берегу моря видит безмерный океан вод, но не может достичь предела их, а лишь видит некую часть, так и удостоенный через созерцание узреть безмерный океан славы Божией и умственно видеть его, не в полную меру видит его, но настолько, насколько [к этому] способны умственные очи его души. $< \cdots >$
>
> 22. Бог от начала сотворил два мира — видимый и невидимый, но одного царя над видимым, имеющего в себе характерные черты обоих миров — как в своем видимом [облике], так и в том, что умопостигаемо. В двух мирах соответственно сияют и два солнца — одно чувственное, другое мысленное. И чем для видимого и чувственного является солнце, тем же для невидимого и мысленного является Бог, ибо Он есть и зовется Солнце правды. $< \cdots >$
>
> 24. $< \cdots >$ Чувственное [солнце], сияя в чувственном саду, теплотой своих лучей только иссушает влажность земли, но не питает растения и семена; мысленное же, воссияв в душе, делает и то и другое — иссушает сырость страстей, очищая происходящую от них скверну, и подает мысленной земле души удобрение, питаясь которым мало-помалу возрастают деревья добродетелей.

Мы видим, что умственное зрение сопоставляется с чувственным, хотя и нельзя сказать, что оно ему во всем подобно. Попутно отметим, что в связи с устройством души преподобный упоминает и о деревьях.

Для нас важно, что приведенные высказывания — лишь небольшая

---

25) *Башмакова И. Г., Славутин Е. И.* История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. — М.: Наука, 1984.

26) В логике такая ауотреференция может приводить к парадоксам или порочному кругу.

27) *Преподобного отца нашего Симеона Нового Богослова.* Главы богословские, умозрительные и практические. — М.: Зачатьевский монастырь, 1998. С. 73–74, 79, 81.

часть того, что говорится в Священном Писании и свято-отеческой литературе о Божественном Свете, том свете, что явлен трем апостолам на горе Фавор и которым сияют лики святых в момент их прославления.

Дополним имевшуюся у нас таблицу такой парой:

Божественный свет   чувственный (физический) свет

и используем эту аналогию для подхода к задаче, с которой мы начали: что такое смысл слова и как обозреть все его значения? Во всяком случае, можно предположить, что постижение смысла слова связано с особым светом и зрением[28]. Связь умственного зрения и познания хорошо известна в философии, фольклоре, проявляется в языковых метафорах, но, кажется, основательно еще не продумана.

Поразительно, но в Писании, богословии и жизни Церкви есть образ, представляющий собой связующее звено между словом и светом. Это образ Божественной Славы:

> Моисей сказал: покажи мне славу Твою. И сказал Господь: Я проведу проведу пред тобою всю славу Мою, и провозглашу имя Иеговы пред тобою (Исх. 33, 18-19).
>
> И город не имеет нужды ни в солнце, ни в луне для освещения своего, ибо слава Божия осветила его, и светильник его — Агнец (Откр. 21, 23).

Связь славы и слова — одна из наиболее устойчивых языковых и поэтических метафор. Да и этимологически *слово* и *слава* весьма близки.

Наконец, Слава Божия имеет и зримый облик: на многих иконах она представлена концентрическими кругами разных оттенков зеленого и голубого цвета, пронизанных тончайшим золотым светом.

Итак, *первая* наша *гипотеза* состоит в том, что смысл слова представляет собой волну (умопостигаемого) света, находящуюся в сверхчувственном пространстве. При этом восприятие слова не просто связано с восприятием света, а оно и *есть* восприятие света, только умного света.

Когда волны распространяются свободно, без всяких препятствий, то спектр их колебаний непрерывен. Это соответствует тому, что слово (данное слово) может обозначать что угодно, его семема беспредельна. Мы же знаем, что в реальном языке это не так: есть устойчивый набор основных значений, есть их вариации и индивидуальные слово-употребления, наконец, есть дремлющие внутри слова те его смыслы, которые еще будут когда-то использованы.

По словам о. Павла Флоренского (*Строение слова*), слово имеет внешнюю форму («тот неизменный, общеобязательный, твердый состав, которым держится все слово; его можно уподобить телу организма»)

---

[28] Заметим, что в (более позднем) богословии Божественному нетварному Свету противопоставляются два вида тварного света — умопостигаемый и чувственный. Это явно выражено в *Святогорском Томосе*, составленном на Афоне во время споров о Фаворском свете (см. *Лосский В. Н.* loc. cit. Гл. XI. Божественный Свет; Он же *Богословие и Боговидение*. — М., 2000. С. 99, 265).

и внутреннюю, которую «естественно сравнить с душою этого тела, бессильно *замкнутой в самое себя*, покуда у нее нет органа проявления, и *разливающую* вдаль *свет* сознания, как только такой орган ей дарован». К внешней форме слова относятся его фонема («костяк слова») и морфема («ткани тела»). Семема, смысловая оболочка представляет внутреннюю форму.

Далее о. Павел представляет эту схему таким наглядным образом [29]:

> Слово может быть представлено как последовательно обхватывающие один другой круги, причем ради наглядности графической схемы слова полезно фонему его представлять себе как основное ядро, или косточку, обвернутую в морфему, на которой в свою очередь держится семема.

И поскольку мы уже говорили о связи слова и славы, этот образ концентрических кругов или сфер следует сопоставить с образом небесной Славы на иконах, с ее круговой структурой.

Это подсказывает нам, что слово имеет иерархическое устройство, очень похожее на устройство атома в физике — в основе лежит твердое ядро, а вокруг электронные оболочки. Если атом не возбужден, то он *замкнут в себе* и ничего не излучает. Спектр же его возможных состояний дискретен, имеется наиболее вероятные основные «значения», и даже эти основные состояния немного размыты (свойство спектральных линий). Последнее отвечает оттенкам в индивидуальном употреблении значений слова. Более высокие уровни размазываются, сливаются друг с другом, образуя ту колышащуюся *бесконечную* семему, о которой писал о. Павел.

И это *вторая* наша *гипотеза* об устройстве слова, более конкретная и явно открытая для дальнейшей работы [30].

Такие фразеологизмы, как «спектр значений» слова или его «смысловые обертоны», имеют все права существования в языке, но, думается, у них есть возможность существовать и как понятия в науке. И тогда слова Вильгельма фон Гумбольдта, что, общаясь, мы ударяем «по одной и той же клавише своего духовного инструмента», обретут свой подлинный и точный смысл.

Вместо заключения

Мы использовали в наших рассуждениях лишь часть богословских аналогий, соотносящих мир Божественный и мир тварный. Они долж-

[29] Имеющаяся в этих двух описаниях инверсия внешнего и внутреннего является безусловно не случайной. Её можно проследить и в богословии, связана она и с другими работами о. Павла (*Мнимости в геометрии, Иконостас*).

[30] Выше мы уже пользовались некоторыми физическими аналогиями. Все они довольно хорошо согласуются друг с другом. Так к описанию акта именования (и вообще употребления слова в текущей речи) можно добавить, что он вполне аналогичен акту наблюдения в квантовой теории: выбор значения слова происходит как редукция, или коллапс волновой функции — иначе стягивание волнового пакета.

ны дать основу для дальнейшего продумывания уже тех богословских рассуждений, которые имеют прямое отношение к имяславию. Скажем немного и о них.

По словам преподобного Серафима Саровского, цель христианской жизни — стяжание Духа Святого, приобретение божественной благодати. Благодать освящает наши действия, но и материальные предметы, «вещи» тварного мира. Некоторым из них принадлежит особая роль в жизни Церкви:

иконы
мощи святых
Крест Господень
Святые Дары

С ними можно сопоставить

Фаворский Свет
Имя Божие

Место Имени Божия в этой иерархии неоднократно обсуждалось. С Крестом и с иконами Имя Божие сравнивал св. Иоанн Кронштадтский. О почитании икон в этой связи говорилось особенно много. Сама история иконоборчества очень напоминает споры вокруг имяславия. Как и слово, икона имеет две стороны: сакральную и материальную — лишь последняя произведена руками человека, как и в Имени Божием его звуковая сторона выходит из уст человека. Наконец, есть и прямая связь иконы и имени. Освящение иконы неразрывно с ее «наречением», надписанием имени. Впрочем, несмотря на явные исторические и смысловые параллели, поставить знак равенства между иконами и именами, видимо, нельзя.

Параллели с Фаворским Светом, по-видимому, глубже, хотя и менее продуманы. Об этом есть у о. Сергия Булгакова в его *Философии имени*, где он придерживается мнения, что Имя Божие есть божественная энергия в смысле св. Григория Паламы, и пишет, что «Имя Божие занимает в онтологической иерархии то же место, что свет Фаворский». Говоря о генеалогическом древе Иисуса, о. Сергий также подчеркивал, что в имени есть и древесная структура [31].

Не касаясь его богословских выводов, заметим лишь, что, пытаясь понять природу слова в языке человека, мы пришли выше к таким же выводам о световой и древесной природе слова.

[31] «Поэтому личное имя, строго говоря, всегда осложнено и конкретизировано родовым именем, генеалогией, которая есть в этом смысле не что иное, как расширенное имя, полное имя $< \cdots >$ Ясно, что все имена предков [Иисуса] суть в расширенном смысле и имена Сына Давидова и Сына Авраамова, образуют фотосферу, наружные покровы имени» (loc. cit., с. 315). «Слова как предикаты, как идеи, суть лучи умного света, пробивающегося через облачную атмосферу» (с. 115).

Мы закончим эти мысли, вызванные у нас имяславием, словами В. Н. Лосского, написанными в 30-е годы прошлого века и относящимися к богословской стороне дела. Предрекая, что православное учение об именах должно привести к новому Торжеству Православия, как уже было с иконопочитанием и Фаворским Светом, он заключает[32]:

«Когда будет ясная формула, исполненная духовного опыта и «очевидная» духовно — многие вопросы сами собой отпадут, и многия сложности представятся детски простыми».

[32] Цит. по кн. *Схимонах Иларион* На горах Кавказа. — СПб.: Воскресение, 1998. С. 930.

ОГЛАВЛЕНИЕ