Издание
осуществлено при финансовой поддержке
Российского гуманитарного научного фонда
(РГНФ)
проект № 96-03-16085

Серия "Научная философия"

Е.Д.Смирнова
Логика и философия. – М.: "Российская политическая энциклопедия" (РОССПЭН), 1996. – 304 с.

В книге на основании достижений современной логики исследуются философские проблемы онтологии и теории познания. Рассматривается роль логики в обосновании теоретического знания. Исследуются концепции Д.Гильберта и И.Канта.

ISBN 5-86004-039-3

ВВЕДЕНИЕ

Формальная логика всегда была связана с принципиальными философскими проблемами гносеологического и онтологического характера. С превращением формальной логики в символическую она стала применять сложный технический аппарат исчислений, а также использовать достаточно богатые математические средства. Однако это не отдалило логику от философии, как может показаться на первый, поверхностный, взгляд. Связь формальной логики с философией, особенно с теорией познания, стала более глубокой, многосторонней и основательной.

Интенсивное развитие современной логики, ее применение к философии математики, методологии наук, вычислительной техники, программированию, информатике и логическому анализу естественных языков привели к возникновению логических систем различного типа. В этой связи остро встала проблема обоснования логики, выявления природы логического знания, единства логики, ее взаимосвязи с другими научными дисциплинами.

В книге предлагается подход к исследованию оснований логики, базирующийся на средствах и методах логической семантики. Согласно развиваемому подходу, логика основывается не на законах и формах мышления как некоторого природного процесса психической деятельности людей, а на определенных онтологических и гносеологических предпосылках. Этот подход позволяет с единой позиции обосновать широкий класс логических систем, предложить новые методы анализа интенсиональных контекстов, исследовать концептуальный аппарат, лежащий в основе логических систем, выявить глубинную связь логики с философскими, теоретико-познавательными проблемами.

Именно логическая семантика как раздел логики, ориентированный на обоснование логических правил и процедур, существенно опирается на теорию познания. Однако в каждом конкретном случае при характеристике логических процедур используются лишь отдельные аспекты знания. Так, для обоснования классической логики достаточно понятия истинности как соответствия утверждений положениям дел. При этом приходится отвлекаться от многих важных самих по себе аспектов знания и процесса познания. Более того, чтобы выполнить свою задачу обоснования той или иной системы логических способов рассуждения, логическая семантика строится на основе очень сильных идеализаций. Выявить эти идеализации, указать границы правомерности их использования — одна из основных задач философского осмысления логики и логической семантики.

Достаточно серьезные проблемы связаны с определением новых методов и направлений развития логики в целом. Семантические интерпретации формально — логических языков, с одной стороны, опираются на мощные технические средства, а с другой — на гносеологические предпосылки. Поэтому философия важна не только для обоснования уже известных логик, но и для выработки программы дальнейших логических исследований.

Характерной чертой развития формальной логики является расширение сферы логического. Аристотель детально разработал теорию силлогистического вывода, стоики развили теорию умозаключений, основанную на структуре условных, разделительных и других сложных утверждений. Выдвинутая Лейбницем программа применения методов исчисления к логическим проблемам привела к существенному обогащению сферы логического — к построению в XIX в. Г.Фреге и Ч.Пирсом логики предикатов. Последнее позволило исследовать умозаключения,

основанные на высказываниях об отношениях, была развита теория квантификации. В XX столетии были построены модальные, временные, интенсиональные логики. Появились логики, альтернативные классической логике и ее расширениям. Это прежде всего интуиционистская логика, релевантная, многозначные, паранепротиворечивые и другие логические системы.

Сам факт конструирования многообразия формальных систем нередко расценивается как показатель отрыва формальных, логистических систем от "реальных", интуитивно обоснованных способов рассуждения. Следует четко различать два круга вопросов. Одно дело — исследование того, что понимать под "реальными", приемлемыми способами рассуждения и чем обусловлена эта их приемлемость: обоснованы ли они практикой обыденных рассуждений, то есть определенными соображениями прагматического характера, или же структурой выражений естественных языков. Другое дело вопросы "технического" порядка, связанные с конструированием самих формализмов. Формальные системы могут изначально предназначаться для формализации определенных способов рассуждения — тогда на первый план выступают вопросы их адекватности. Однако формальные системы могут разрабатываться "впрок"- тогда работа ведется на уровне теории исчислений. Это тоже важный, но достаточно самостоятельный круг вопросов. Обоснование построенных формализмов лежит в дальнейшем на путях поиска адекватной их интерпретации.

Что изучает логика? Является логика наукой эмпирической или теоретической? Имеет ли она собственный базис или ее основания лежат в психологии, теории познания, математике? Освещение этих вопросов во многом связано с критикой психологизма в логике, который являлся господствующим направлением в конце XIX в. Согласно учению представителей этого направления, логика — эмпирическая наука, ее объекты существуют независимо от нее самой так же, как существуют процессы, изучаемые физикой, химией и т.д. Логика лишь изучает способы рассуждений, существующие до нее и независимо от нее. Т.Липпс писал, что логика есть физика мышления или же логика вообще не существует. Согласно Дж.Ст.Миллю, "логика не обособленная от психологии, а соподчиненная ей наука... она есть часть или ветвь психологии... своими теоретическими основаниями она целиком обязана психологии"[1]. Мышление есть психический процесс, и логика изучает законы и формы этого процесса. Ссылка на то, что логика изучает законы и формы правильного мышления, ничего не меняет в этом плане, поскольку правильное мышление есть тоже мышление, и логика, изучая его закономерности, является частью эмпирической психологии. Нормативный характер логики также не меняет существа дела, поскольку обосновываться он может по разному. В частности, логические нормы и правила могут объясняться закономерностями объективно протекающего процесса человеческого мышления — тем, "как люди мыслят". При таком подходе вопросы обоснования логики по существу снимаются; изучай, как люди мыслят, в том числе и закономерности правильного мышления, — и только. Такой плоский эмпиризм в трактовке логических форм и законов естественным образом приводит к пониманию логических форм как изначально данных, делает невозможной саму постановку вопроса об информативности логических форм и законов, об их отношении к реальности. Поэтому критика эмпиризма в логике была важной и необходимой предпосылкой разработки и обоснования современной логики.

Важными вехами в критике психологизма в логике явились работы Б.Больцано, Г.Фреге, Э.Гуссерля и других видных логиков и философов. Э.Гуссерль противопоставлял эмпирическому истолкованию логических связей (в духе психологизма) не их нормативный характер, а то, что они носят невременной, непричинный характер. Он подчеркивал, что это — связи идеальные. Однако идеальный характер логических связей Гуссерль трактовал в духе своей феноменологии (в конечном счете это

[1] *Милль Дж.Ст.* Система логики силлогистической и индуктивной. М., 1914.

приводило к своеобразной форме субъективизма, сочетаемого с элементами платонизма). Критика Гуссерлем психологизма в логике не утратила своего значения и в наши дни. В то же время концепция Гуссерля не дает возможности выявить специфику логики как теоретической науки, выявить природу идеальных связей, лежащих в основе логических систем.

Логические законы носят нормативный характер не потому, что мы так *должны* мыслить, следуя природе нашего ума. Люди вполне могут мыслить, нарушая законы логики. Необходимый характер логических законов — это не та необходимость, которую имеют законы гравитации, отмечал Г.Фреге.

В любом случае при истолковании логических форм и законов как априорных форм человеческой деятельности вопрос обоснования логических систем и способов рассуждения естественным образом снимается. Соответственно теряют смысл вопросы онтологических или теоретико-познавательных предпосылок логики. В таком случае семантические рассмотрения не имеют ничего общего с исследованием логических структур и законов.

Но и сторонники крайне негативного отношения к психологизму в логике, рассматривающие логику как теоретическую науку об объективных, идеальных связях и отношениях, приходят нередко к другому крайнему заключению, что логика вообще не имеет отношения к изучению законов и форм мышления и трактовка ее как науки о законах и формах мышления есть возврат к психологизму. Так, Я.Лукасевич пишет: "Однако неверно, что логика — наука о законах мышления. Исследовать, как мы действительно мыслим или как должны мыслить, — не предмет логики. Первая задача принадлежит психологии, вторая — относится к области практического искусства, наподобие мнемоники"[2]. Лукасевич подчеркивает, что логика и ее законы не есть нечто субъективное, нечто присущее природе

[2] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959. С.48.

человеческого ума. Логика изучает вполне объективные отношения, ни от нашего ума, ни от познания не зависящие. (Так, силлогистика базируется на объективных отношениях в сфере общих терминов, фактически — объемов понятий.) Это такие же объективные отношения, как и отношения, изучаемые математикой, например, в сфере чисел. Именно на таком основании (на основании объективного характера отношений, лежащих в основе логики) Лукасевич делает вывод, что законы логики вообще не имеют никакого отношения к нашему мышлению. "Логика имеет дело с мышлением не более, чем математика. Вы, конечно, должны думать, когда вам нужно сделать вывод или построить доказательство, так же как вы должны думать, когда вам надо решить математическую проблему. Но при этом законы логики к вашим мыслям имеют отношение не в большей мере, чем законы математики"[3]. Из текста видно, что само мышление Лукасевич понимает в духе того же психологизма, как чисто психическое явление. При подходе Лукасевича снимается вопрос о теоретико-познавательных предпосылках логики, так как сами логические отношения объективированы.

В качестве альтернативы выдвигались различного рода версии конвенционалистского истолкования законов логики. В этом случае нормативный характер логических принципов вытекает из принимаемых соглашений относительно терминов языка и, прежде всего, логических констант. Принятие тех или иных способов рассуждений обусловливается чисто прагматическими соображениями, их теоретико-познавательное обоснование рассматривается как псевдовопрос. Крайняя форма этого направления нашла выражение в логическом позитивизме. Особенно характерен в этом плане "принцип терпимости" Р.Карнапа. Однако логическое знание не есть знание, относящееся лишь к языку.

Можно считать, что логические связи настолько фундаментальны и первичны, что не нуждаются вообще в обосновании.

[3] Там же.

Напротив, логическое знание — наиболее обоснованная, надежная и универсальная часть нашего знания. Во всяком случае логика, полагают, нуждается в обосновании меньше, чем математика. По разным основаниям такое понимание присуще и логицизму, и И.Канту.

Отметим, что именно абсолютизация разграничения формы и содержания мышления приводит либо к пониманию логических форм как изначально данных, независимых от содержания познания, либо к истолкованию их как произвольных, варьируемых в соответствии с конвенциями относительно правил языка.

Одна из важнейших задач логики — описать правильные способы рассуждения. Но какие выводы считать правильными? Те, что соответствуют правилам? Но почему принимаются те, а не иные правила, те, а не другие логические системы? Вопрос стоит о законности, оправданности способов рассуждения. И ответ состоит не в ссылке на особенности нашего интеллекта и не в указании на принимаемые правила оперирования со знаками или на соглашения об употреблении логических констант. В теории дедуктивных рассуждений обязательным образом требуется: правила вывода должны с необходимостью гарантировать при истинности посылок истинность заключения.

Таким образом, нормативный характер логических законов и правил определяется не свойствами нашего ума, как это полагал Кант, не априорными формами мышления, а определенными объективными связями между нашими высказываниями, определенной объективной зависимостью истинности одних наших утверждений от истинности (ложности) других.

Логические законы, способы рассуждения, тем самым, не являются абсолютными, раз и навсегда данными, они — продукт научного и культурного развития. Логическая семантика, имеющая дело с отношением наших утверждений к действительности, и является средством, с помощью которого происходит обоснование логических процедур.

Понятие истинности является центральным, основным понятием логической семантики. Суть дела заключается в *особом* *отношении логики к понятию истинности.* Если психологию, например, истинность интересует, как любую другую науку, ибо любая наука заинтересована в истинности своих положений, то в логике истинность включается собственно в ее предмет. Можно строить различные системы формального вывода. Однако, какова бы ни была структура допускаемых способов рассуждения, в логике к ним предъявляется одно обязательное требование: они должны воспроизводить отношение логического следования. В зависимости от того, каким условиям отвечает принимаемое в семантике понятие истинности, находят свое оправдание и обоснование те или иные правила логики.

Ни логика, ни логическая семантика не создают новых принципиальных концепций истинности. Логическая семантика заимствует учение об истинности из теории познания, обрабатывает его для решения своих задач. Таким образом, *обоснование логики,* как мы постараемся показать далее, *является философской, теоретико-познавательной задачей.* Попытка учесть в логике все более глубокие теоретико-познавательные характеристики истины приводит к появлению новых логических систем.

Логика как таковая не рассматривает, использует ли некто такие-то и такие-то способы рассуждения. Ее задача иная — выявить и систематическим образом описать способы рассуждения, которые гарантируют при истинности посылок истинность заключения. Разработав и обосновав приемлемые способы рассуждений, логики надеются, что ими будут пользоваться в науке, культуре, в общении друг с другом, а возможно, они будут переданы компьютерным системам.

Современная логика является не только теорией дедуктивных способов рассуждения и не только теорией определимости и определений, индуктивных способов рассуждения. Значительное место в ней занимает разработка процедур поиска доказательств. Хотя Ф.Энгельс противопоставлял формальную логику так называемой диалектической, но и он признавал, что "даже формальная логика представляет собой прежде всего метод для отыскания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному"[4] .

Этот аспект интенсивно разрабатывается в настоящее время, особенно в связи с проблемами, объединенными именем "искусственный интеллект". Не заставляет ли обращение к проблемам разработки методов поиска (и ряду других) оставить жесткие антипсихологические установки и вернуться к некоторой новой версии психологизма? Б.В.Бирюков в этой связи пишет: "Ныне в свете работ по "искусственному интеллекту" — происходит как бы возрождение "логического психологизма", правда, на ином, более высоком уровне, чем это было ранее, например, в эпоху такого резкого критика психологизма в логике, каким был Г.Фреге"[5] . На наш взгляд, логические методы поиска доказательств не преследуют цель изучить, как человек изобретает доказательства. Интерес концентрируется на изучении возможных методов поиска доказательств, их сравнении и систематизации независимо от того, как и кем они реализуются — людьми или компьютерами. В общем, способ реализации процедур интеллектуального характера, который разработан в рамках "искусственного интеллекта", может существенным образом отличаться от тех процедур, которые осуществляются человеком. Аналогично, произведенные орудия и механизмы не обязательно копируют биологические органы, идея колеса не нашла реализации в живых организмах. П.Уинстон очень четко формулирует эту "антипсихологическую" установку: "Заметим, что желание заставить вычислительные машины быть разумными — это не то же самое, что желание заставить вычислительные машины моделировать интеллект. Искусственный интеллект привлекает людей, которые хотят вскрыть принципы, применимые ко всем интеллектуальным информационным процессорам, а не только к тем, которые почему-то сделаны из влажной нервной ткани, а не из сухих электронных компонентов. Поэтому у нас нет желания копировать человеческий ин-

[4] *М Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т.20. С.138.

[5] *Бирюков Б.В.* Актуальные проблемы философско-кибернетических исследований // Философские науки. 1081. N2. С.32.

теллект, как нет и предубеждений против использования методов, которые, по видимому, используются в интеллекте человека". И далее Уинстон пишет: "Точно так же, как сведения из психологии, касающиеся обработки информации у людей, могут способствовать совершенствованию компьютеров, так и теории, построенные исключительно на основе размышления о вычислительных машинах, часто наводят на различные соображения о том, как можно было бы улучшить образование людей. Иначе говоря, методология, используемая, чтобы сделать разумнее машины, может быть, видимо, использована и для того, чтобы сделать разумнее самих людей"[6].

Мы бы сказали еще резче: задача логики состоит не в том, чтобы описать, как из посылок извлекаются следствия человеком или компьютером (или как ищутся им доказательства), а в том, чтобы обосновать возможные способы рассуждения, методы поиска доказательств и т.д. Логика, как и математика, не является эмпирической наукой. Ни первая, ни вторая не обосновываются ссылкой, что некто так рассуждает или вычисляет. Расширение горизонтов логики не дает оснований вернуться к "логическому психологизму" даже на новом уровне.

Сказанное не означает, что между логикой (в особенности в части, связанной с поиском доказательств) и психологией (психологией мышления и психологией творчества) нет и не может быть взаимодействия[7]. Однако ни психология, ни computer science не могут обосновать логику (равным образом математику и методологию).

В настоящее время в логике исследуются системы рассуждений, в семантике которых учитываются определенные характеристики познающего субъекта, носителя языка, — его установки, концептуальный аппарат, способности суждения, оценка им условий истинности высказываний и т.д. Это вовсе не означает — как это иногда полагают — возврата к эмпиризму,

[6] *Уинстон П.* Искусственный интеллект. М., 1980. С.14.

[7] Интересная программа такого взаимодействия изложена в статье *С.Ю.Маслова* "Теория поиска вывода и вопросы психологии" (Семиотика и информатика. Вып.13. М., 1979. С.17-46).

психологизму в логике. Логика по-прежнему остается теоретической наукой, исследующей не “природные способности” мышления человека, а способы рассуждения, *объективно* обеспечивающие истинность заключения при истинности посылок.

Как отмечалось, понятие истинности является одним из центральных в семантических построениях. Однако проблемы философских оснований логики к этому не сводятся. Другая линия связана с проблемой предметности, проблемой методов семантического анализа смысла и значения выражений логических систем. Это сложный и философски насыщенный круг проблем.

Традиционно этот круг вопросов связан с философской проблемой универсалий, с борьбой платонистического реализма, номинализма и концептуализма. В целом встает проблема онтологических допущений, к которым обязывает принимаемая система логики, возникает вопрос об информативности самих логических форм и законов.

Казалось бы, логические формы, логические законы не зависят от предметной области, от характера объектов рассмотрения. Кант полагал, что общая (формальная) логика имеет дело лишь с необходимыми и всеобщими правилами мышления вообще, она исследует их “без различия объектов, то есть материи, являющейся предметом мысли” и посему она отвлекается от всякого содержания знания. “Общая логика открывает только форму мышления, но не материю. Она отвлекается от всякого содержания познания”[8].

Касаясь проблемы “эмпиризма” в истолковании логических форм и законов, следует четко различать истолкование законов и форм логики как законов и форм некоторого естественного процесса ментальной деятельности людей и отношение логических форм и законов к определенным онтологическим предпосылкам, связанным с объектами рассмотрения.

Логика не зависит от конкретных положений дел в действительности, от эмпирических характеристик объектов рассмот-

[8] *Kant I.* Gesamelte Schriften. Bd.XVI. B., 1924 (фр.1627).

рения. В этом смысле она действительно не зависит от содержания познания, как это утверждал И.Кант. Логика — теоретическая, а не эмпирическая наука. Но она не зависит лишь от конкретного содержания познания. Однако в процессе познания мы имеем дело не только с эмпирическими данными и “эмпирическими” объектами, но и с результатами абстрагирующей познавательной деятельности людей, с конструированием идеальных объектов рассмотрения. Логика и принимаемые способы рассуждения “реагируют” на это, а этом плане логика зависит от содержания познания, от принимаемых предпосылок познавательной деятельности (см. гл. VI).

Важно выявить, какие законы логики и способы рассуждения зависят от предметной области, от типа объектов рассмотрения, а какие — от познающего субъекта, от его концептуального аппарата, от используемых им понятий истинности, ложности, суждения, вывода. (Эти вопросы рассматриваются в гл.V.)

Важным методом решения рассматриваемого круга проблем является построение искусственных языков с точным образом заданными синтаксисом и семантикой. Человек в своей деятельности использует разнообразные семиотические системы,прежде всего устные и письменные естественные языки. Возникновение науки потребовало стандартизации некоторой части естественных языков, а затем и созданию особой символики и даже особых специализированных языков. Становление новой отрасли науки, как правило, сопровождалось и созданием специализированных языков. Так были созданы номенклатуры в биологии, язык химических формул. В развитых науках в той или иной мере используются языки математики. Важность создания стандартизированных языков науки всегда осознавалась классиками науки. Так, Э.Кондильяк отмечал, что язык — не только средство общения, но и *аналитический метод*. “Науки малоточные — это науки, язык которых плохо построен”. “Если бы люди заметили, что языки также являются аналитическими методами, было бы нетрудно найти правила искусства рассуждать”. Далее Кондильяк подчеркивал, что наш

способ умозаключения совершенствуется с усовершенствованием языка[9]. Мысль Кондильяка развивает Лавуазье в “Элементах химии”: “Занимаясь этим трудом (“Элементами химии”. — *Е.С.*), я лучше, чем прежде, осознал очевидность принципов, изложенных аббатом Кондильяком в его “Логике” и некоторых других его сочинениях. Он утверждает, что мы мыслим при помощи слов и языки суть истинные аналитические методы; алгебра, которая есть более простой, более точный и лучше приспособленный к своему предмету способ выражения, есть вместе язык и аналитический метод; наконец, искусство умозаключения сводится к хорошо обработанному языку. И в самом деле, между тем, как я думал, что я занимался номенклатурою и усовершенствовал язык в химии, мое сочинение незаметно преобразовалось в моих руках”[10].

Использование стандартных, типовых способов описания необходимо в любой науке. Типовой способ описания уже предполагает абстрагирование от несущественных для данного рассмотрения факторов, возможность использования уже выработанных методов постановки и решения проблем. Для того, чтобы производить вычисления и делать умозаключения, необходимо сформулировать исходные данные и посылки в стандартной форме. С осознания этого началось развитие логики и математики. Чтобы использовать силлогистические способы рассуждения, необходимо выразить посылки и утверждения в четкой форме категорических утверждений, что было сделано Аристотелем. Развитие логики состояло и состоит в расширении запаса стандартных способов представления логических структур. Стоики ввели в оборот способы рассуждения, основанные на структуре сложных утверждений. В XIX в. стандартные способы выражения посылок и заключений были существенным образом обогащены, что знаменовало новый этап в развитии логической науки. Тенденция к расширению и обога-

[9] Цит. по: *Зеленогорский Ф.Л.* О математическом, метафизическом, индуктивном и критическом методах исследования и доказательства. Харьков, 1977. С.194.

[10] Там же. С.202.

щению выразительных средств, входящих в компетенцию логики, характерна и для современного этапа развития логики.

Представляя знание в стандартной, типовой форме, можно ставить перед собой разные задачи. При этом для разных целей наиболее удобными могут оказаться разные формы представления. Можно искать формы представления, удобные для хранения информации, ее сообщения другим лицам, способствующие ее понятности. Для логики наиболее важной является такая форма представления знания, которая позволяет делать умозаключения. Способ выражения знания должен гарантировать возможность умозаключения по форме, содействовать повышению оперативности языка. Именно поэтому использование специально построенных языков с точными правилами образования и преобразования является одним из важнейших методов в логике.

Развитие логических методов, особенно создание различных вариантов семантики возможных миров, позволяет анализировать достаточно сложные по своей структуре способы выражения, учитывать не только объективные, но и прагматические условия использования языка и утверждения предложений. Эти успехи позволяют сближать достаточно хорошо стандартизированные фрагменты естественного языка с искусственными языками логики. При этом имеются две возможности: во-первых, исследовать стандартизированные фрагменты естественных языков теми же методами, как и искусственные языки логики; во-вторых, исследовать стандартизированные фрагменты естественного языка путем установления их отношений к специальным логическим языкам, путем перевода выражений естественного языка на искусственный. Решение этих задач открыло мощное комплексное направление исследований — логический анализ естественных языков.

Внедрение в науку и практику ЭВМ, широкая компьютеризация направляют развитие современной формальной логики по пути разработок новых формализованных языков для представления знаний и логических процедур, а также поиска новых средств логического анализа естественного языка. Исследование особого рода формализованных языков, построенных как средство воспроизведения логических рассуждений, может быть использовано для выработки аппарата воспроизведения интеллектуальных процедур другого типа, для разработок в области искусственного интеллекта. Рассмотрение более богатых логических систем, способных выражать интенсиональные связи, учитывать определенные характеристики познающего субъекта, приобретает в этом плане особое значение.

Глава первая
ФОРМАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ, ЯЗЫКИ И ЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Исторические предпосылки возникновения общей теории знаковых систем

Общую теорию знаковых систем вызвали к жизни те процессы, которые имели место в логике, философии математики, лингвистике и ряде наук о культуре.

Знаки и знаковые системы в определенных аспектах изучались лингвистами, логиками, философами, математиками, антропологами и социологами. В этике и эстетике также рассматривались определенные типы знаковых систем. "Человеческая цивилизация невозможна без знаков и знаковых систем, человеческий разум неотделим от функционирования знаков..."[1]. Однако сама идея создания общей теории знаков и знаковых систем, общего учения о знаках и их функционировании родилась на рубеже XIX — XX вв. Знаковыми системами являются естественные, исторически сложившиеся языки, искусственные языки, в том числе формальные логические исчисления, различные системы сигнализации в человеческом обществе (например, система знаков уличного движения), системы сигнализации в мире животных ("язык" пчел), языки программирования, системы культовых, обрядовых действий и так далее. Семиотика изучает любого типа системы вещей, но только в одном единственном аспекте: в их функции знаков. Вещи и свойства вещей, выступающие в функции знаков, составляют предмет ее рассмотрения. Поэтому она и является основой, инструментом любой конкретной науки, в которой определенные типы объектов, явлений, действий изучаются не сами по себе, а в их роли знаков.

[1] *Моррис Ч.* Основания теории знаков // Семиотика. М., 1983. С.37-38.

Развитие общей теории знаковых систем во многом стимулировалось успехами в области символической логики, а также задачами исследования структуры языков науки. К началу века эти исследования постепенно выкристаллизовывались и складывались в особую отрасль знания. Изучение языка науки предполагает использование особого рода знаков, относящихся к знакам и выражениям рассматриваемых языков. Последнее означает, что "метанаука должна использовать семиотику как свой органон"[2]. Язык науки рассматривается не только с точки зрения его синтаксической структуры, но и в отношении к обозначаемому. Метод конструирования особых искусственных языков логики и математики во многом стимулировал развитие семиотических исследований. Возможность представить определенного типа содержательные процессы рассуждения точным образом посредством оперирования с символами по определенным правилам значительно обогатила наше понимание языка и расширила представления о структуре знаковых систем, адекватных для воспроизведения логической дедукции.

Идея семиотики как общей теории знаковых систем была выдвинута независимо друг от друга логиком, философом и математиком Чарльзом Пирсом, швейцарским лингвистом Фердинандом де Соссюром, немецким философом, логиком, основоположником феноменологической школы Эдмундом Гуссерлем. Большую роль в разработке искусственных языковых сис-

[2] Там же.

тем и исследовании их репрезентативной функции сыграли работы логика и математика Г.Фреге.

Именно Г.Фреге (1848-1925) поставил задачу построения особого рода искусственного языка (идеографии), в котором бы правила оперирования с комбинациями символов — наглядными чувственно воспринимаемыми объектами — воспроизводили отношение логического следования. Г.Фреге полагал, что естественный язык неадекватен для представления структуры логических рассуждений, и он строит язык, написанный специальными символами, с которыми надо манипулировать по установленным правилам, — некоторый род исчисления. Фреге видел свою задачу не в том, чтобы представить логику в виде формул, подобных формулам алгебры или арифметики, и применить математические, алгебраические методы к логике, а в том, чтобы построить специальный искусственный язык символов для "чистого мышления", адекватным образом воспроизводящий отношения между понятиями и отношение логического следования между высказываниями. Он ставил своей целью освободить логические процедуры от влияния тех частных специфических средств выражения, которые накладываются естественным языком. Фреге подчеркивал методологическую, гносеологическую роль искусственных языковых систем как инструмента исследования содержательных процедур.

Ч.Пирс (1839-1914), один из родоначальников математической логики в ее современной форме, предложил создать общую теорию знаковых систем и назвать ее семиотикой[3]. В разработке идей семиотики Пирс прежде всего идет от задач и проблем математической логики. Точность логических рассуждений обеспечивается применением к логике методов математики, она опирается на не вызывающую сомнения наглядность, на математическое, то есть диаграмматическое, или "иконическое" мышление. Знак есть, прежде всего, материальное образование, вещь или свойство вещи. Пирс рассматривает, как в процессе коммуникации конкретные, наглядные, чувственно воспринимаемые объекты становятся знаками. Знаками является такой объект, который некоторому лицу (интерпретатору) представляет, замещает некоторую вещь, процесс, ситуацию: знак есть нечто, представляющее что-либо некоторому лицу в некотором отношении. Пирс разработал подробную классификацию знаков. Среди различных аспектов предложенной им классификации особое значение сохранило подразделение знаков на иконические, знаки — индексы и символы. Это подразделение знаков непосредственно связано с анализом того механизма, посредством которого одна вещь (знак) может репрезентировать вещи, процессы, отношения. Пирсом были заложены основы общей теории знаковых систем, разработана целостная теория знаков. Однако семиотические идеи Пирса становятся широко известными гораздо позднее, после выхода в свет в 1938 г. работы Морриса "Основания теории знаков", в которой систематизируются и получают дальнейшее развитие идеи Пирса, относящиеся к семиотике.

Вторая, европейская, линия развития семиотики связана с именем Ф. де Соссюра (1857-1913), с задачами, идущими от лингвистики, от анализа структуры естественных языков. Прочитанный Ф. де Соссюром в 1908 г. курс общей лингвистики был опубликован в 1916 г. (новый русский перевод опубликован в 1977 г.)[4]. Лингвистику де Соссюр рассматривал как ветвь общей теории знаковых систем. Необходима наука, которая лежала бы в основе как языкознания, так и ряда других наук о знаках. Он называет такую единую науку о знаках семасиологией. Ему первому принадлежит сравнение языковой системы с шахматной игрой: роль отдельных знаков или выражений языка определяется их положением в системе. Идеи де Соссюра оказали огромное влияние на развитие лингвистики. Построение формальных грамматик, применение математических методов в лингвистике тесно связаны с разработкой семиотических

[3] См.: *Мельвиль Ю.К.* Чарльз Пирс и прагматизм. М., 1968.

[4] *де Соссюр Ф.* Труды по языкознанию. М., 1977.

идей в лингвистике. Для современной лингвистики характерно использование структурных, математических методов. Лингвистика переходит от задач описательного характера — чисто эмпирического исследования исторически сложившихся языков — к построению их теоретических моделей. Это сближает лингвистику с логикой, математикой и другими дисциплинами, использующими метод конструирования искусственных языковых систем. Лингвистика при таком подходе имеет дело с некоторыми общими свойствами языков и дает лишь упрощенное, идеализированное воспроизведение реально существующих языков.

Развитие семиотики тесно связано с развитием логики, с процессом размежевания логики и психологии. Большое влияние в этом направлении оказали работы Г.Фреге и Э.Гуссерля (1859-1938). Э.Гуссерль — философ, основоположник феноменологической школы современной философии. Однако логические исследования Гуссерля связаны с борьбой против психологизма в логике и теории познания[5]. Согласно Гуссерлю, чистая теория познания изучает не психические феномены сознания, а некоторые "идеальные сущности", "идеальные предметы", не существующие в пространстве и времени. Они — результат абстрагирующей деятельности, интуитивного усмотрения предмета, результат особой идеирующей абстракции. Выявляя природу логики, сущность логических законов, Гуссерль выступал против психологической трактовки законов логики. Гуссерлю принадлежат исследование природы знака, ряд интересных семантических идей, анализ видов значений знаков языка (категорий значения). Теория семантических категорий,

[5] Психологическая трактовка логики имеет место в работах Дж.С.Милля, Н.Я.Грота, Х.Зигварта, Т.Липпса, Б.Эрдмана и др. Э.Гуссерль следующим образом характеризует указанную традицию: "Логика, теория познания, эстетика, этика и педагогика приобрели, наконец, благодаря ей (экспериментальной психологии) точный фундамент, мало того, они уже на пути к тому, чтобы преобразоваться в экспериментальные дисциплины. Вообще строгая психология, говорят нам, само собой разумеется, есть основа всех наук о духе и в не меньшей степени основа метафизики" (*Гуссерль Э.* Философия как строгая наука // Логос, кн.1. М.,1911). Я.Лукасевич характеризует психологизм в логике как признак упадка логики в современной философии (см.: *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1969).

разрабатываемая позднее в польской школе логиков, идейно восходит к категориям значения Гуссерля.

Выделим некоторые общие *принципиальные установки*, тенденции, связанные с семантикой. Они легли в основу ряда наук, исследующих знаковые системы, в первую очередь в основу логики и лингвистики.

Одной из таких установок явился антипсихологизм. В XIX в. основу логики и даже теории познания, этики, эстетики видели в психологии: логика — часть психологии, она изучает закономерности нашего мышления как психической деятельности, то, как мы мыслим. Как уже отмечалось, с психологизмом в логике связано эмпирическое истолкование законов логики. Логика превращается в некоторую "физику мышления", науку, изучающую "естественные законы мышления".

Развитие логики показало, что логика изучает не психические процессы мышления, а правила, нормы перехода от одних утверждений к другим, обеспечивающие при истинности исходных утверждений истинность получаемых заключений. Логические законы, способы рассуждения, не являются абсолютными, раз и навсегда данными, априорно присущими нашему мышлению. Вне языка "логические фигуры" не существуют, лишь в языке получают они свою "непосредственную действительность", свое выражение.

Следующая идея, связанная с разработкой семиотики, состоит в признании возможности и правомерности синхронного изучения знаковых систем. Важнейшим завоеванием XIX в. была идея развития, эволюции; исторические методы применялись в биологии, социологии, языкознании. Языкознание изучало естественные, исторически сложившиеся языки. Основным методом исследования был сравнительно-исторический метод. Де Соссюр не отрицал идеи эволюции языка. Не отрицая правомерности изучения последовательных состояний языка (каждое данное состояние есть результат предшествующего состояния), он предполагает метод синхронного изучения языка, метод рассмотрения языка на данном срезе его развития.

Речь идет не о двух способах существования языка (реальные языки всегда развиваются во времени), а о двух различных *способах описания языка*, о двух различных подходах к языковым системам. Рассмотрение языка на данном срезе его развития — методологический прием. Мы рассматриваем язык как единую функционирующую систему. Абстрагируясь от проблемы изменения системы, мы изучаем отношения в этой системе. "...Для описания данной шахматной композиции совершенно незачем вспоминать, что случилось на доске десять секунд тому назад"[6]. Синхронный метод не объясняет возникновения системы, законов ее развития, но он позволяет исследовать структуру, взаимодействие элементов системы, механизм ее работы. "Следуя за эволюцией языка, лингвист уподобляется наблюдателю, который передвигается с одного конца Юрских гор до другого, отмечая при этом изменения перспективы"[7]. Конструируя искусственные языки логики, мы абстрагируемся от проблемы развития логики, абстрагируемся, но вовсе не считаем, что логика и ее законы неизменны, раз и навсегда нам даны.

С синхронным способом описания знаковых систем непосредственно связано применение структурно-функциональных методов в логике и лингвистике. Структура, взаимосвязь элементов системы объясняются условиями функционирования системы в целом. Мы не можем объяснить сущности человека, рассматривая изолированного, "абстрактного" человека. Человек как социальное существо есть продукт общественных отношений. Поведение, сущность объекта, включенного в некоторую систему отношений, объясняются его ролью, местом в этой системе, а не его абстрактной природой.

В семиотических системах вещи, процессы наделяются особыми свойствами, приобретают значение не сами по себе, в силу своей природы и физических свойств, а в силу их отношений к чему-то, что они в этой системе репрезентируют. Деревянная фигурка является королем в шахматной игре не в силу своих природных качеств, а благодаря той роли, которую она выполняет в системе. Таков же характер религиозных культовых действий. Вне семиотической системы они теряют свой смысл. С другой стороны, изучение семиотического аспекта религиозных культовых действий не объясняют ни происхождения обрядов, ни их социальной функции — для этого надо выйти за рамки семиотической системы.

[6] *Соссюр Ф. де.* Указ. соч. С.122.

[7] Там же. С.115.

Смысл, значение знаков и выражений языка невозможно объяснить, рассматривая их изолированно, вне их места и роли в знаковой системе. Смысл и значение знаков языка можно установить, лишь выявляя условия и принципы функционирования данной знаковой системы.

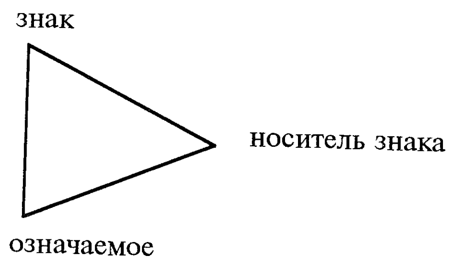
§ 2. Синтаксический, семантический и прагматический аспекты языка

Исследуя искусственные или естественные языки как особого рода знаковые системы, мы всегда имеем дело с некоторой системой знаков. Только в процессе коммуникации складываются такого рода знаковые системы. Вне определенного коллектива, вне коммуникативной функции рассматриваемые системы вещей остаются системами вещей, но не являются знаковыми системами.

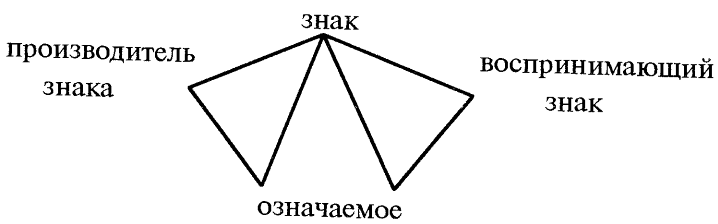
Уровень рассмотрения, устанавливающий, какие объекты включены в знаковую систему, какие комбинации знаков в качестве средств общения допустимы, называется *синтаксическим.*

Комбинации материальных объектов являются знаками в силу того, что участники знакового общения связывают с ними нелингвистические объекты и ситуации. Отношение системы материальных объектов, являющихся знаками, к обозначаемым ими объектам и ситуациям является предметом *семантики.* К области семантики относится также и тот смысл, который связывается со знаками участниками знакового общения. Отношение носителей языка к знаковым комбинациям и выражаемому ими содержанию, а также отношения лиц в процессе знакового общения составляют предмет *прагматики*.

Обычно для объяснения механизма использования одного объекта в качестве знака другого объекта выделяют некоторую абстрактную ситуацию, когда некоторое лицо (носитель знака, или интерпретатор) воспринимает нечто (предметы, положения дел) не непосредственно, а благодаря наличию некоторого объекта (знака). Такого рода отношение выделяется как "исходная клеточка" анализа и описывается посредством так называемого треугольника:



Но, поскольку язык является средством коммуникации, следует рассматривать более сложную схему:



Чтобы имело место *понимание*, объект, репрезентируемый знаком для производителя знака, должен совпадать с объектом, репрезентируемым знаком для лица, воспринимающего знак.

С помощью знаков в процессе общения не только передается информация о нелингвистическом положении дел, но и выражается отношение носителей языка к этой информации. То, что используются не отдельные знаки, а организованные системы знаков, позволяет передавать информацию посредством структуры и взаимного расположения знаков.

Очевидно, что вне знаковой деятельности, вне отношения лиц в процессе коммуникации не может быть семантического аспекта, то есть отношения знаков к означаемому. Однако, изучая знаковые системы, мы используем достаточно сильные абстракции и идеализации и даже "оборачиваем" порядок исследования. Мы можем исследовать знаковые системы не как средство общения, а только как средство фиксации, переработки и хранения информации. Таким образом, первая абстракция — это отвлечение от того, что язык является средством общения. В таком случае язык перестает быть собственно языком в лингвистическом смысле. Так, в логике мы используем знаковые системы не как средство общения. Мы отвлекаемся от отношения лиц, использующих язык. Но, как отмечалось выше, изучение феномена понимания предполагает включение в рассмотрение отношений между лицами. Схема "носитель языка — знак — означаемое" является результатом абстракции.

Знаковые системы, рассматриваемые только с точки зрения формальных, синтаксических связей между знаками, не могут рассматриваться как механизмы хранения и переработки информации — для этого необходимо учитывать по крайней мере семантический аспект. Но при исследовании языков мы можем допускать и эту абстракцию и начинать исследование с чисто синтаксических связей.

Таким образом, хотя именно роль в процессе практической познавательной деятельности людей определяет и формирование, и структуру, и интерпретацию знаковых систем, порядок исследования аспектов знаковых систем может быть обратным.

Сказанное определяет план нашего изложения. Сначала формальные системы будут рассмотрены с чисто синтаксической точки зрения. Затем в рассмотрение будет включен семантический аспект. Это дает уже достаточно мощный аппарат для исследования логических средств и выразительных возможностей достаточно богатых языков. Мы покажем это на основе логико-семантического анализа достаточно богатого языка, языка первопорядковой арифметики. В дальнейшем, в процессе логико-семантического анализа интенсиональных контекстов, будут включены некоторые аспекты прагматики. Рассмотрение языка как средства общения и проблемы понимания лежит за пределами настоящего исследования.

§ 3. Искусственные и естественные языки

Логика изучает интеллектуальные процедуры, и прежде всего умозаключения. Для этого необходимо, чтобы посылки и заключения формулировались стандартным образом. Более того, формальный характер рассуждения, при котором правильность рассуждения усматривается из формы посылок и заключения, обязывает особо внимательно анализировать языковые способы представления знания, информации. Особую роль для исследования логических процедур приобретает метод конструирования искусственных, формализованных языков.

Построение специальных формализованных языков для задач логики послужило мощным стимулом ее развития. Дело не в использовании специальных символов. Именно возможность представлять содержательные логические отношения и процедуры (например, логические рассуждения) точным и эффективным образом в исчислении послужило основой развития новых областей и разделов логики. За короткий период в логике произошли изменения, несоизмеримые со всей ее прежней историей. Использование языков с точным образом заданной структурой дало новые средства выявления и воспроизведения логических связей.

Особую роль для изучения языка и логических процедур приобретает метод конструирования искусственных языков.

Искусственные языки создаются не для замены естественных языков, у них разные цели. Естественные языки складываются в процессе коммуникативной деятельности людей и являются прежде всего средством общения, передачи информации. Отсюда их многогранность, многоплановость, гибкость. В отличие от них искусственные языки ориентированы на строго ограниченные, специальные задачи.

При таком подходе искусственные языки можно рассматривать как фрагменты, модели определенных аспектов естественных языков. Собственно, уже синхронное описание естественного языка в лингвистике дает не реальное, исторически сложившееся, состояние этого языка, а некоторую "проекцию этого состояния на неподвижный экран исследователя". Такое синхронное описание языка Ф.де Соссюр сравнивал с проекцией тела на плоскость. Проекция тела на плоскость непосредственно зависит от проецируемого тела и в то же время представляет иную, отличную от самого тела, вещь[8]. Аналогично, языки, задаваемые формальными грамматиками, могут рассматриваться как определенные "проекции" естественных, исторических языков. Правила конструирования в таких языках могут задаваться таким образом, чтобы объекты, порождаемые этими правилами, предложения искусственных языков, отвечали тем же грамматическим, структурным требованиям, которым отвечают осмысленные выражения естественного языка. Искусственные языки в этом случае выполняют роль некоторых "моделей порождения" грамматически правильных единиц естественного языка. Точно также построение искусственных языков логики позволяет моделировать различные способы рассуждений.

Однако искусственные языки в лингвистике и логические системы являются не только приблизительными моделями и описаниями естественных языков или "естественных" способов рассуждения, они играют и самостоятельную роль. Искусствен-

[8] См.: *Соссюр Ф. де.* Указ. соч.

ные языки математики, логики, химии стали важным инструментом исследования, средством для достижения определенных научных целей.

Бытует мнение, что в естественных языках можно сформулировать все то, что фиксируется средствами специализированных искусственных языков. Предполагается, что все отличие искусственных языков от естественных состоит, в принципе, в замене обычных слов и выражений специальными символами. Таким путем достигается определенный эффект краткости, сжатости сообщений, как бы некоторая их стенограмма. Такое понимание роли искусственных языков в познании не является верным. Во-первых, существенную роль при создании искусственных языков играют вопросы эффективности. Искусственные языки могут вводиться как инструмент эффективного представления определенных связей и отношений. При переводе с искусственного языка на естественный может теряться этот оперативный характер искусственных языков, особенно возможность проведения достаточно сложных рассуждений.

Цель использования искусственных языков в логике — не замена слов естественного языка некоторыми специальными символами в процессе описания логических процедур и правил, а воспроизведение логической дедукции. логические системы строятся таким образом, чтобы репрезентировать адекватно логические структуры и связи, порой даже "в ущерб краткости и легкости общения". Г.Фреге отмечал, что тенденция к краткости не всегда оправдана даже в языках математики, она приводила ко многим неточным выражениям, а "они оказывали обратное действие, открыв дорогу ошибочным определениям. ..Логическую правильность нельзя приносить в жертву краткости выражения"[9]. Таким образом, искусственные языки нельзя рассматривать просто как системы специальных символов, вводимые для краткости и простоты сообщений и играющие по отношению к естественным языкам роль языков стенографии.

[9] *Frege G.* Was ist eine Funktion? // Boltzmann. Festschreft. Leipzig, 1904. S.665-666.

Далее, способы рассуждения не являются чем-то раз и навсегда данным, от природы присущим людям. Нельзя принимать за некий эталон те способы рассуждения, которые нашли свою реализацию именно в естественном языке. Построение искусственных языков логических систем позволяет выявлять и конструировать новые способы рассуждения. Посредством искусственных языков реализуются определенные шаги конструирующей, познавательной деятельности людей.

Таким образом, искусственные языки в большинстве случаев — не просто упрощенные фрагменты естественных языков, но дополнительные специализированные знаковые системы, играющие важную роль в познании. Они служат особым вспомогательным средством для достижения определенных научных задач. Одна из них — сделать явными те предпосылки, которые принимаются в теории, представить точным образом логические связи и структуру рассуждений.

Отметим еще одну важную функцию искусственных языков. Построение искусственных языков с точным синтаксисом и семантикой позволяет исследовать — путем реконструкций — определенные интеллектуальные, познавательные процедуры, выяснить онтологические допущения, связанные с ними. Так, построение точных семантик для логических систем позволяет выявлять теоретико-познавательные предпосылки, связанные с принимаемыми способами рассуждений, выявлять ту информацию, которую несут логические законы. Особое развитие получают вопросы связи языка и мышления, исследование выразительных возможностей языков и отношения языка и реальности.

Именно как инструмент исследования, инструмент решения определенных познавательных задач рассматривал Г.Фреге искусственные языки. Он считал, что отношение построенного им языка "исчисления понятий", специального языка формул для чистого мышления, к естественному языку "лучше всего можно пояснить, если сравнить его с отношением микроскопа к глазу. Глаз, в силу широкой сферы его применения, в силу его способности приспосабливаться к различным обстоятельствам, обладает большим преимуществом по сравнению с микроскопом... Но как только научные задачи предъявляют более сильные требования к остроте различения, оказывается, что глаз не в состоянии с ними справиться. Напротив, микроскоп самым совершенным образом подходит для решения именно таких задач и как раз поэтому непригоден для решения всех иных. Так и данное исчисление понятий является созданным для определенных научных целей вспомогательным средством, которое поэтому не следует осуждать за то, что для других целей оно не подходит"[10].

Остановимся еще на одном круге вопросов, связанных с ролью искусственных языков в анализе определенных контекстов естественных языков. Речь идет о роли искусственных языков логики в выявлении логической структуры предложе-ний естественных языков. Разработка искусственных языков, "моделирующих" различные логические структуры и способы рассуждения, позволяет все более точным образом репрезентировать логическую форму предложений естественных языков. С другой стороны, интенсивная разработка в последние годы различного типа модальных и интенсиональных логик, построение точных семантик для них позволяют включать в сферу логического анализа все более широкий круг контекстов естественных языков.

§ 4. Конструктивные объекты, исчисления над словами алфавита

Хотя классическая логика в своих семантических основах исходит из теоретико-множественных принципов, имеются основания строить логический синтаксис в рамках конструктивного направления в математике, по крайней мере для стандартных логических систем. Конструктивное

[10] *Frege G.* Begriffschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, 1879. S.5.

направление в математике и логике состоит в том. что исследование ограничивается конструктивными объектами и проводится в рамках абстракции потенциальной осуществимости, без привлечения абстракции актуальной бесконечности[11]. Конструктивными называются объекты, которые или непосредственно представлены (атомарные объекты), или задаются эффективными способами порождения из ранее построенных объектов.

Атомарные объекты задаются списком их представителей, называемым алфавитом. Природа этих объектов не играет никакой роли. Существенно, чтобы они были жесткими, дискретными, рассматривались как целое и чтобы их можно было эффективно различать и отождествлять. Элементы алфавита **A** будем называть буквами. При рассмотрении этих элементов используется абстракция отождествления: две графически равные буквы выступают как реализация абстрактной буквы.

Конструктивные объекты, построенные из элементов некоторого алфавита **A**, вводятся посредством фундаментального индуктивного определения.

Структура фундаментальных индуктивных определений следующая. С помощью прямых пунктов устанавливается, что является объектом рассмотрения; в косвенном пункте утверждается, что рассматриваются лишь объекты, порожденные согласно прямым пунктам. В свою очередь, прямые пункты подразделяются на базисные и индуктивные. Базисные пункты указывают исходные объекты, индуктивные — способы порождения новых объектов из построенных.

Типичным примером конструктивных объектов являются слова в алфавите **A**:

1. Если α есть элемент алфавита **A**, то α есть слово в **A**;
2. Пустое слово есть слово в алфавите **A**;
3. Если α есть слово в алфавите **A** и β есть элемент алфавита **A**, то результат присоединения β справа к α, то есть $\alpha\beta$, есть слово в алфавите **A**.

[11] См.: *Марков А.А.* О логике конструктивной математики // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1 (Математика, механика). 1970. N2. С.7-29.

4. Ничто другое не есть слово в алфавите **А**.

Пункты 1-3 являются прямыми, причем первый и второй — базисные, третий — индуктивный; пункт 4 — косвенный. В данном случае имеется одна двухместная операция, порождающая из слова в **А** и элемента в **А** новое слово в **А**.

Заметим, что любой конструктивный объект может быть представлен как слово в некотором алфавите **А**. Так, натуральные числа могут быть рассматриваемы как слова в однобуквенном алфавите.

Пусть **А** = { | }, то есть алфавит **А** состоит из одного элемента. Именем этого элемента будет "1". Для описания результата применения порождающей операции будем использовать скобки: "(*a*1)" означает "результат применения 1 к *a*". Например, "((11)1)" есть имя объекта "| | |". (В дальнейшем в описании слов алфавита круглые скобки опускаются.)

Натуральное число вводим посредством следующего фундаментального индуктивного определения:

1. 1 есть натуральное число;

2. Если *a* есть натуральное число, то результат приписывания к *a* справа 1 есть натуральное число;

3. Ничто другое не есть натуральное число.

Далее помимо слов мы будем рассматривать конструктивные объекты более сложной структуры, элементы которых необязательно расположены линейно. Однако любой конструктивный объект, образованный из элементов алфавита **А**, может быть закодирован в виде некоторого слова в расширении алфавита А; более того, слова любого алфавита могут быть представлены словами в двухбуквенном алфавите[12].

На множестве введенных конструктивных объектов мы можем определять некоторые предикаты и функции, вводить некоторые процедуры рассуждения, оправдываемые способом порождения объектов.

Структура нефундаментальных индуктивных определений

[12] См.: *Марков А.А.* Указ. соч.

та же самая, что и фундаментальных. Различие между ними функциональное: фундаментальные индуктивные определения вводят объекты рассмотрения; нефундаментальные индуктивные определения вводят предикаты над ранее порожденными объектами.

Примером нефундаментального индуктивного определения может служить следующее определение нечетного числа:

1. 1 есть нечетное число;

2. Если *a* есть нечетное число, то результат присоединения к *a* справа двух черточек есть нечетное число;

3. Ничто другое не есть нечетное число.

Предикаты, введенные с помощью нефундаментальных индуктивных определений, называют индуктивными, или рекурсивно перечислимыми, предикатами.

Как фундаментальные, так и нефундаментальные индуктивные определения оправдывают способы рассуждений, носящие название рассуждений методом математической индукции.

В теории рекурсивных функций разработан один из путей уточнения понятия эффективной процедуры. Теория эта строится непосредственно для натуральных чисел, в ней рассматриваются операции над числами и уточняется понятие вычислимой функции (разрешимого предиката). Но имеются и иные эффективные процедуры, например, процесс порождения слов в алфавите **А** или процедуры порождения более сложных конструктивных объектов.

Возможны два пути изучения этих объектов. Первый — сопоставить им определенные числа, а функциям и предикатам, заданным на этих объектах, — соответственно теоретико-числовые функции и предикаты. Тогда операции над конструктивными объектами опишутся в теории рекурсивных функций. Разработаны различные методы отображения конструктивных объектов на натуральный ряд. Эти способы получили название геделизации (геделевской нумерации объектов).

Второй путь состоит в разработке своей теории рекурсии над конструктивно порождаемыми объектами, аналогичной теории рекурсии над натуральными числами. Хотя ничего принципиально нового этот подход не дает, однако процедуры введения функций и предикатов над конструктивно порождаемой нечисловой системой объектов существенно упрощаются. Этот путь реализован в статье Р.Петер[13] .

Под исчислением над системой конструктивных объектов мы понимаем систему правил, разрешающую производить над этими объектами некоторые точным образом установленные действия.

Понятия исчисления и эффективной процедуры (операции) взаимосвязаны: одно из них может уточняться на основании другого.

Первый шаг в уточнении понятия исчисления состоит в том, что конструктивные объекты произвольной природы замещаются стандартными объектами — словами некоторого алфавита **А**. Поскольку мы приняли тезис, что любой конструктивный объект может быть закодирован словом в некотором алфавите, то общность рассмотрения при этом не теряется. Операции в исчислении заключаются в преобразовании одних слов в другие. Следующий шаг уточнения состоит в установлении действий, допустимых над словами в алфавите **А** — в задании системы правил, позволяющей строить из одних слов другие. Задача состоит в том, чтобы любые действия, допустимые над словами в **А**, заменить некоторой системой локальных действий стандартного типа. В качестве таких стандартных действий Пост допускает лишь переходы типа:

$$B_i P \rightarrow P\ C_i$$

где P — произвольное, а B_i и C_i — фиксированные слова в **А**, $\rightarrow$ — знак перехода от слова вида B_iP к слову вида PC_i. Нормальным исчислением Поста в алфавите **А**, определяемом словами B_i и C_i ($1 \leq i \leq n$), называют систему правил, разрешающих последовательно производить действия указанного вида, исходя из какого-нибудь слова в алфавите **А**.

Слово Q выводимо из слова P в нормальном исчислении

[13] *Peter R.* Uber die Verallgemeinerung der Recursionbegriffe fur abstrakte Mengen als Definitions bereiche // Infinitistic Methods. N.Y.- P.- Warszawa, 1961.

Поста (*П*), если и только если Q графически равно P или Q получено из P в результате применения действий, допустимых в исчислении *П*. Некоторые слова могут приниматься за исходные (аксиомы). Тогда все слова, выводимые из них, называют словами, доказуемыми в исчислении.

Задав исчисление (систему допустимых действий над словами в алфавите **А**), мы тем самым задаем "механизм", порождающий одно за другим слова некоторого типа. Уточнив понятие исчисления (например, в смысле Поста), мы на этой основе можем уточнить понятие эффективности процедуры, эффективно порождаемого множества. Мы говорим, что некоторое множество слов в алфавите **А** рекурсивно перечислимо, если и только если оно совпадает с множеством слов, доказуемых в некотором исчислении над словами в алфавите **А**.

Нормальные исчисления Поста являются специальными видами исчислений. Однако имеются основания принять тезис, согласно которому любое исчисление (в содержательном, неуточненном смысле) с эффективными процедурами вывода может быть представлено в нормальном исчислении в смысле Поста, эквивалентном ему относительно **А**. Для всякого индуктивного (рекурсивно перечислимого) предиката R, заданного на множестве слов в алфавите **А**, можно найти такое нормальное исчисление *П* над словами в алфавите **А**, что для любого слова B в алфавите **А** $B \in R$, если и только если B доказуемо в *П*.

Построенное исчисление может быть таким, что для каждого слова в **А** можно решить, является оно доказуемым в этом исчислении или нет. Тогда множество слов, доказуемых в исчислении, разрешимо относительно всего множества слов в **А**. Мы говорим, что предикат R разрешим, если он сам и его дополнение рекурсивно перечислимы. Тогда можно построить исчисления, порождающие все элементы R и порождающие ("перечисляющие") все элементы $\overline{R}$.

Уточнение понятия исчисления — это один из путей уточнения понятия рекурсивной перечислимости. Понятие разрешимого предиката (вычислимой функции) вводится как производное. Но имеются и прямые пути уточнения понятия разрешимого предиката. Одним из естественных уточнений понятия эффективной процедуры является понятие нормального алгорифма Маркова.

Как и в системах Поста, конструктивными объектами, над которыми производятся действия, являются слова в алфавите А. От исчислений алгорифмы отличаются в двух отношениях: во-первых, они не просто разрешают производить некоторые действия, а предписывают совершать их; во-вторых, алгорифмы не оставляют свободы в выборе последовательности применения правил.

В качестве стандартных, локальных действий А.А.Марков выбирает действия, состоящие в замене первого вхождения слова C_i в P на слово C_j. элементарное предписание состоит в требовании заменить первое фиксированное вхождение C_i на C_j $C_i \to C_j$. Сам алгорифм задается схемой алгорифма, то есть упорядоченным списком элементарных предписаний, причем некоторые элементарные предписания могут иметь точку при стрелке. Схема алгорифма в алгорифме **А** имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{l} C_{i_1} \to C_{j_1} \\ \quad\vdots \\ C_{i_k} \to\cdot C_{i_k} \\ \quad\vdots \\ C_{i_n} \to C_{j_n} \\ \quad\vdots \\ C_{i_m} \to C_{j_m} \end{array}\right.$$

Здесь C_i и C_j есть слова в расширении алфавита **А**. Порядок применения элементарных предписаний жестко фиксирован. Сначала применяется первая строка; если она неприменима, то переходят к следующей. Если применима строка с точкой, то делается требуемое преобразование и процесс обрывается; если применена k-я строка без точки, то делают требуемое преобразование и переходят к первой строке. Применение алгорифма заканчивается, если последним его шагом было применение предписания с точкой или ни одна строка более неприменима.

Простым примером нормального алгорифма в алфавите **А** будет, например, алгорифм обращения слова, который задается

следующей схемой (буквы α, β, γ не являются элементами **А** и отличны друг от друга, x и y — переменные, пробегающие по буквам алфавита А):

$$\begin{array}{rl} \alpha xy & \to y\alpha x \\ \alpha x & \to \beta x \\ \alpha\beta & \to \gamma \\ \gamma x & \to x\gamma \\ \gamma\beta & \to \gamma \\ \gamma & \to \bullet \\ & \to \alpha \end{array}$$

Нумерация слов алфавита А, который состоит из k отличных друг от друга букв, может быть осуществлена исключительно просто: каждой букве сопоставится число k-ичной записи. Если мы хотим проводить нумерацию в определенной, например, десятичной системе записи, то переход к ней от k-ичной ($k \geq 1$) осуществляется стандартным методом. В этом случае функции и предикаты над словами алфавита А с буквами являются не чем иным, как теоретико-числовыми функциями и предикатами) в терминах k-ичной арифметики.

§ 5. Многослойные конструктивные объекты

Мы уже отмечали, что любого рода конструктивные объекты можно представить стандартным образом в виде слов в некотором алфавите. Однако имеет смысл выделить конструктивные объекты особого рода. Для изучения логических систем полезно ввести понятие дерева в алфавите **А**. Здесь мы рассматриваем лишь конечные деревья.

Как и понятие слова, понятие дерева в алфавите А вводится посредством фундаментального индуктивного определения. Но основная порождающая операция (или операции) преобразует не слово и букву в новое слово, а пару деревьев в дерево. Деревья могут записываться линейно или двумерно (в виде графов на плоскости). Дадим точное определение:

1. Если α есть элемент **А**, то α есть дерево в **А**;
2. Если α и β — деревья в **А**, то $\langle\alpha\beta\rangle$ есть дерево в **А**;

имеются и прямые пути уточнения понятия разрешимого предиката. Одним из естественных уточнений понятия эффективной процедуры является понятие нормального алгорифма Маркова.

Как и в системах Поста, конструктивными объектами, над которыми производятся действия, являются слова в алфавите А. От исчислений алгорифмы отличаются в двух отношениях: во-первых, они не просто разрешают производить некоторые действия, а предписывают совершать их; во-вторых, алгорифмы не оставляют свободы в выборе последовательности применения правил.

В качестве стандартных, локальных действий А.А.Марков выбирает действия, состоящие в замене первого вхождения слова C_i в Р на слово C_j. элементарное предписание состоит в требовании заменить первое фиксированное вхождение C_i на C_j $C_i \to C_j$. Сам алгорифм задается схемой алгорифма, то есть упорядоченным списком элементарных предписаний, причем некоторые элементарные предписания могут иметь точку при стрелке. Схема алгорифма в алгорифме **А** имеет вид:

$$\begin{cases} C_{i_1} \to C_{j_1} \\ \vdots \\ C_{i_k} \to . C_{i_k} \\ \vdots \\ C_{i_n} \to C_{j_n} \\ \vdots \\ C_{i_m} \to C_{j_m} \end{cases}$$

Здесь C_i и C_j есть слова в расширении алфавита **А**. Порядок применения элементарных предписаний жестко фиксирован. Сначала применяется первая строка; если она неприменима, то переходят к следующей. Если применима строка с точкой, то делается требуемое преобразование и процесс обрывается; если применена k-я строка без точки, то делают требуемое преобразование и переходят к первой строке. Применение алгорифма заканчивается, если последним его шагом было применение предписания с точкой или ни одна строка более неприменима.

Простым примером нормального алгорифма в алфавите **А** будет, например, алгорифм обращения слова, который задается

следующей схемой (буквы α, β, γ не являются элементами **А** и отличны друг от друга, x и y — переменные, пробегающие по буквам алфавита А):

$$\begin{aligned} \alpha x y &\to y \alpha x \\ \alpha x &\to \beta x \\ \alpha\beta &\to \gamma \\ \gamma x &\to x\gamma \\ \gamma\beta &\to \gamma \\ \gamma &\to \bullet \\ &\to \alpha \end{aligned}$$

Нумерация слов алфавита А, который состоит из k отличных друг от друга букв, может быть осуществлена исключительно просто: каждой букве сопоставится число k-ичной записи. Если мы хотим проводить нумерацию в определенной, например, десятичной системе записи, то переход к ней от k-ичной ($k \geq 1$) осуществляется стандартным методом. В этом случае функции и предикаты над словами алфавита А с буквами являются не чем иным, как теоретико-числовыми функциями и предикатами) в терминах k-ичной арифметики.

§ 5. Многослойные конструктивные объекты

Мы уже отмечали, что любого рода конструктивные объекты можно представить стандартным образом в виде слов в некотором алфавите. Однако имеет смысл выделить конструктивные объекты особого рода. Для изучения логических систем полезно ввести понятие дерева в алфавите **А**. Здесь мы рассматриваем лишь конечные деревья.

Как и понятие слова, понятие дерева в алфавите А вводится посредством фундаментального индуктивного определения. Но основная порождающая операция (или операции) преобразует не слово и букву в новое слово, а пару деревьев в дерево. Деревья могут записываться линейно или двумерно (в виде графов на плоскости). Дадим точное определение:

1. Если α есть элемент **А**, то α есть дерево в **А**;
2. Если α и β — деревья в **А**, то <αβ> есть дерево в **А**;

3. < > есть дерево (пустое) в **A**;

4. Ничто другое не есть дерево в **A**.

Мы предполагаем, что угловые скобки не являются элементами алфавита **A**.

Легко видеть, что дерево в алфавите **A** является словом над **A**, то есть словом в расширении **A**: **A'** = **A** ∪ {><}.

На плоскости дерево будет иметь вид графа:

1. Если α — элемент **A**, то α есть дерево в **A**;
2. Если α и β — деревья в **A**, то ${}^{\alpha}\vee^{\beta}$ есть дерево в **A**;
3. • есть дерево (пустое) в **A**;
4. Ничто другое не есть дерево в **A**.

Понятие дерева в алфавите **A** расширяется, если вместо двухместной операции вводится система k-местных операций (k ≥1) над деревьями. При этом может быть не одна, а несколько операций одного и того же числа мест, например, двухместных.

Деревья с одной двухместной операцией нередко называют словами с операцией конкатенации (сочленения).

Заметим, что эту ведущую операцию конкатенации следует отличать от операции соединения слов, вводимой следующим рекурсивным определением:

$$\begin{cases} B*a = Ba \\ B*Ca = (B*C)a, \end{cases}$$

где a есть буква алфавита **A**, а B и C — слова в **A**. Операция соединения слов ассоциативна, а операция сочленения нет.

С помощью нефундаментальных индуктивных определений над деревьями в **A** вводятся индуктивные (рекурсивно перечислимые) предикаты. Как и над словами, над деревьями в **A** может быть разработана теория разрешимых предикатов и функций аналогично теории, построенной над натуральными числами.

Деревья можно закодировать числами (провести геделизацию), и не развивая самостоятельной теории рекурсивных функций и предикатов над словами и деревьями, а используя лишь теорию рекурсивных функций над натуральными числами.

Один из способов геделизации деревьев заключается в следующем. Элементам алфавита **A** сопоставим нечетные натуральные числа; если дереву α сопоставлено число n, а дереву β — число m, то дереву <αβ> сопоставляется число $2^{n}\cdot 3^{m}$. Если имеется не только двухместная, но и другие, k-местные, операции (для каждого k по одной), то дереву с k составляющими <α_1 ... α_k> сопоставляется номер $P_1^{n1}\cdot P_2^{n2}\cdot\ldots\cdot P_k^{nk}$, где P_i — есть i-е простое число, а n_i — есть число, сопоставленное дереву α_i. При таком способе геделизации каждому дереву сопоставлено одно единственное число. Отметим, что при наличии более чем одной порождающей операции от того же числа мест указанный способ геделизации непригоден.

До сих пор мы представляли конструктивные объекты как объекты, построенные из элементов некоторого алфавита. Это были слова и деревья в алфавите **A**. Однако ничто не мешает нам, в свою очередь, порождать из этих объектов новые объекты иного типа, например, последовательности слов.

Рассматривая слова в некотором алфавите **A**, в качестве исходных элементов посредством фундаментального индуктивного определения введем понятие последовательности слов в **A**:

1. Если α есть слово в A, то α — последовательность слов в **A**;

2. Если β есть последовательность слов в **A** и α — слово в **A**, то (βα) есть последовательность слов в **A**;

3. Ничто иное не есть последовательность слов в **A**.

Аналогично можно ввести последовательность деревьев, дерево слов, деревья деревьев. Нередко при построении исчислений в качестве алфавита, из элементов которого строятся слова и деревья слов, выступает потенциально бесконечное множество слов в некотором алфавите **A**. Так возникают слова и деревья в потенциально бесконечных алфавитах. Например, говорят о потенциально бесконечном списке переменных P_0, P_1, P_2, ... Но в принципе можно обойтись конечным алфавитом, рассматривая переменные как слова определенного типа в алфавите {P,|}. Множество переменных **П** вводится посредством рекурсивного определения:

$$\begin{cases} \Pi(P) \\ \Pi(\alpha 1) \equiv \Pi(\alpha) \end{cases}$$

Аналогично, последовательности и деревья формул можно рассматривать как слова и деревья в алфавите формул. Все логические системы и языки являются многослойными.

Обратим внимание на следующую особенность: объекты высшего уровня строятся не просто из слов, а из слов специального вида, всегда выделяются из фундаментальных объектов низшего уровня с помощью рекурсивных процедур (эффективно).

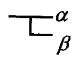
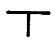
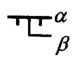
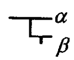
Рассмотрение системы конструктивных объектов с несколькими порождающими операциями от одного и того же числа мест представляет двоякий интерес: во-первых, можно применять удобные методы нумерации конструктивных объектов; во-вторых, мы получаем возможность трактовать логические связки не как знаки особых объектов, а как способы связи составных частей сложных объектов. Более того, при таком подходе мы можем сразу порождать интересующие нас виды конструктивных объектов, а не выделять их эффективным образом из объектов, порожденных фундаментальным определением.

Пусть **A** есть потенциально бесконечный алфавит пропозициональных переменных. Имеются одна одноместная и три двухместные операции, порождающие из объектов (деревьев) в алфавите **A** новые объекты (деревья). Результаты применения различных операций будем изображать скобками различного вида: результат применения одноместной операции к объекту α изобразим $[\alpha]$, первой двухместной операции к объектам α и β — $|\alpha\beta|$, второй и третьей операций к тем же объектам — соответственно $\lfloor\alpha\beta\rfloor$ и $\lceil\alpha\beta\rceil$. Тогда можно дать следующее фундаментальное определение объекта — пропозициональной формулы:

1. Всякая пропозициональная переменная (то есть элемент **A**) есть формула;
2. Если α — формула, то $[\alpha]$ — формула;
3. Если α и β — формулы, то $|\alpha\beta|$, $\lfloor\alpha\beta\rfloor$, $\lceil\alpha\beta\rceil$ суть формулы;
4. Ничто другое не есть формула.

Мы можем в дальнейшем интерпретировать $[\alpha]$ как отрицание α, $|\alpha\beta|$ — как конъюнкцию, $\lfloor\alpha\beta\rfloor$ — как дизъюнкцию и $\lceil\alpha\beta\rceil$ — как импликацию и, рассматривая $(\urcorner\alpha)$ как сокращение для

$[\alpha]$, $(\alpha\&\beta)$ — для $|\alpha\beta|$, $(\alpha\vee\beta)$ — для $\lfloor\alpha\beta\rfloor$ и, наконец, $(\alpha\supset\beta)$ как сокращение для $\lceil\alpha\beta\rceil$, мы получим обычную форму записи. Буквы $\urcorner$, &, $\vee$, $\supset$ указывают лишь на иную форму скобок и тем самым на разные способы конструирования объектов.

Рассмотренный подход позволяет понять некоторые идеи Фреге, приведшие его к графическому способу записи молекулярных предложений. Логические связки не рассматриваются как обозначающие выражения. В качестве системы связок, на базе которой строится пропозициональная логика, принимаются импликация и отрицание. При указанном выше подходе порождающими операциями будут $[\alpha]$ и $\lceil\alpha\beta\rceil$. Переходя к графической записи деревьев, $\lceil\alpha\beta\rceil$ можно записать, следуя символике Фреге, в виде , $[\alpha]$— в виде  α. Конъюнкция тогда запишется в виде , дизъюнкция — . Указанный подход позволяет исключить логические связки как особые выражения языка. Мы имеем дело лишь с различными способами сочленения одного предложения с другими.

Построение конструктивных объектов посредством нескольких порождающих операций определяет и способ нумерации этих объектов. Каждому типу объектов, порождаемому соответствующей операцией, удобно сопоставлять определенный класс чисел — геделевских номеров этих объектов. Так, можно каждому объекту, порождаемому операцией за номером k, сопоставить число, остаток от деления которого на n равен k, где n — число принимаемых порождающих операций ($k = 0, 1, ..., n$).

Поскольку у нас есть двухместные операции, нам нужна функция, нумерующая пары натуральных чисел. Такой функцией, как известно из арифметики, может служить функция:

$$J(k,l) = \frac{(k+l-1)(k+l-2)}{2} + l$$

Так, в нашем примере каждой i-й пропозициональной переменной сопоставим число $5i$ (например, переменной "P_1" сопоставится число 5, переменной "P_2" — 10 и т.д.). Объекту вида [α] сопоставим число $5i+1$, где i — номер объекта α, объектам |αβ|, ⌊αβ⌋, ⌈αβ⌉ — соответственно числа $5J(i, j)+2$; $5J(i, j)+3$ и $5J(i, j)+4$, где i и j — номера объектов α и β (любым двум объектам, образованным из одних и тех же составляющих α и β посредством различных операций, сопоставляются, очевидно, разные числа).

§ 6. Об употреблении термина "язык" в логике

Термины "язык", "языковая система" в разных контекстах и разными авторами употребляются неоднозначно. Это обусловлено, на наш взгляд, прежде всего тем, что одно и то же явление может рассматриваться в различных аспектах. В частности то, что называют языками (языковыми системами) в логике, как правило, отличается от того, что называют языками в лингвистике. Поскольку искусственный язык в логике создается не для целей общения, а в первую очередь для того, чтобы представить в нем процессы логической дедукции, поскольку естественно понимать под языками в логике знаковые системы, включающие процедуры логического вывода.

Если ограничиться рамками синтаксического и семантического аспектов рассмотрения и процессами дедукции, то можно выделить следующие системы, часто называемые языками:

1. Язык как множество правильно построенных выражений, состоящих из элементов некоторого фиксированного множества (алфавита языка). Такое понимание характерно для структурной лингвистики[14].

2. Язык как множество правильно построенных интерпретированных выражений. В этом случае фразы, выражения — не просто допустимые последовательности языка, но и знаки, имеющие смысл, нечто сообщающие.

3. Язык как множество правильно построенных выражений

[14] См.: *Хомский Н.* Синтаксические структуры. // Новое в лингвистике. Вып.II. М., 1962.

вместе с процедурами преобразования одних выражений в другие. Такого рода системы описываются не только правилами образования правильно построенных выражений, но и правилами преобразования (аксиомы и правила вывода). Эти системы чаще всего называют формальными системами, а когда выполняется требование эффективности — логистическими системами[15]. Согласно А.Черчу, системы, не удовлетворяющие требованиям эффективности, "не подходят для использования (или интерпретирования) в качестве языков... При нарушении требований эффективности нарушаются и функции языка как средства общения"[16]. Вместо термина "формальная система" употребляют термины: "исчисление", "формализм", "формальное исчисление", "неинтерпретированное исчисление", "синтаксическая система", "формальный язык" и др.

4. Язык как множество правильно построенных интерпретированных выражений вместе с определенными процедурами логической дедукции. Эти системы в логике обычно называют формализованными языками[17].

Семантическими системами мы будем называть, как обычно, системы, имеющие интерпретацию. (Таковы системы 2 и 4.) Термины "семантическая система", "интерпретированная знаковая система" будем употреблять как синонимы. Языками в собственном смысле слова, с нашей точки зрения, являются только интерпретированные знаковые системы. Выражениям этих систем приписываются "вполне конкретные и для нас понятные значения, а те выражения, которые мы называем высказываниями, остаются высказываниями также при переводе их на разговорный язык" (А.Тарский). Если же последовательности элементов ("фразы", "выражения") системы не несут информации, не выражают ничего, то такого рода система, в на-

[15] См.: *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966; *Черч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.

[16] *Черч А.* Указ. соч. С.52.

[17] *Tarski A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen // Studia Philosophca. 1935. v.1; *Черч А.* Указ. соч.

шем понимании, не является языком[18]. Она представляет собой нелингвистическое явление — звуки, чернильные значки на бумаге и тому подобное.Описание языка является точным и ясным, если имеются эффективные процедуры, позволяющие за конечное число шагов устанавливать для любого выражения языка, является ли оно термом, формулой, предложением и так далее. Такого рода языки называют языками с эффективно заданной структурой. В таком случае имеются процедуры, позволяющие выделить определенные классы выражений эффективным образом — только по виду символов и способам их сочленения, — не прибегая к их смыслу и значениям. Такое описание языка является чисто структурным и относится к синтаксису.

Однако не любые комбинации символов могут выступать как языки в логике. В логике используются знаковые системы особого рода. Прежде всего это системы конструктивных объектов — слов в некотором алфавите **А**. Кроме того, в логическом синтаксисе рассматриваются только такие свойства конструктивных объектов, которые детерминируются правилами синтаксиса.

"Языки" первого типа в логике определяются следующими классами выражений: "исходные символы", "термины", "формулы" (предложения). Исходные символы (алфавит, или словарь языка) вводятся перечнем, если их множество конечно, и индуктивным определением — если словарь счетно-бесконечен. (Логические системы стандартного типа, как правило, строятся с не более чем счетными словарями.) Посредством фундаментального индуктивного определения задается множество слов в алфавите **А**. Применяя нефундаментальные индуктивные определения к этим объектам, описывают классы термов, формул, предложений в **А**.

В системах такого рода мы имеем дело с эффективно порождаемым множеством слов в некотором алфавите. Правила

[18] Когда мы говорим, что такого рода системы не несут никакой информации, то имеется в виду информация об объектах вне этой системы. Несомненно, что всякая организованная система содержит определенную информацию о своей собственной организации, структуре, но это уже совершенно другой вопрос.

образования синтаксиса можно представить как правила, разрешающие производить точно определенные действия над словами в алфавите **А**, то есть как правила некоторого исчисления. Под термином "язык" в логическом синтаксисе понимаются особого рода исчисления, правила которых устанавливают, какого рода объекты являются переменными, термами, формулами (предложениями).

От "языков" в этом смысле отличают "языки", подходящие для описания логических процедур, — исчисления, задаваемые двумя группами правил: правилами образования и правилами преобразования (это системы третьего типа, формальные или логистические системы). Правила преобразования устанавливают, какого рода слова (последовательности или деревья слов) являются аксиомами, формальными выводами из посылок, формальными доказательствами. Эти правила также можно представить как правила, разрешающие производить определенные действия над словами в некотором алфавите.

В качестве исходных элементов такого рода исчислений, порождающих формальные доказательства, выступают не буквы алфавита **А**, а формулы, то есть слова в **А**, доказуемые в исчислении, задаваемом правилами образования. Таким образом, формальные, логистические системы описываются в логическом синтаксисе обычно как "двухъярусные" исчисления, определяемые двумя упомянутыми группами правил.

Порождая определенные типы знаковых комбинаций, правила логического синтаксиса накладывают ограничения (определенные рамки) на возможные интерпретации знаковых систем. Системы первого и четвертого типов полностью описываются в языке синтаксиса. Собственно, интерпретироваться могут любые типы знаковых систем. Однако семантика как строгая теоретическая наука может быть построена только для языков с точным образом описанной структурой. Для стандартных языков принадлежность к определенным классам выражений (выступающих при интерпретации как осмысленные выражения языка) устанавливается эффективным образом. Так, прежде чем установить значение определенных последовательностей слов в алфавите **А**, надо иметь эффективную процедуру, позволяющую относить их к классу формул, предложений или формальных доказательств. В качестве языков в логике рассматриваются знаковые системы, удовлетворяющие сильным требованиям эффективности: системы, в которых классы переменных, термов, формул (предложений), а также классов аксиом и формальных доказательств разрешимы относительно множества слов в алфавите **А**.

Существуют два пути построения логической теории. В одном случае в качестве языков, подходящих для представления логических процедур, принимают системы третьего типа — формальные, логистические системы — и к описанию этих систем присоединяют некоторую интерпретацию. При таком подходе в каждом языке существует лишь одно понятие доказательства. Логика, процедуры логической дедукции выступают как нечто исходное, задаваемое в виде явно сформулированных правил преобразования. Можно говорить лишь о различных интерпретациях систем: правильных, превращающих логические системы в языки с логикой, и неправильных.

Но возможен и другой путь построения логической теории, при котором мы исходим из предположения, что принципы логической дедукции определяются семантикой языка. Язык в этом случае задается только правилами образования и семантическими правилами. Допустимые правила вывода детерминируются семантикой языка. При таком подходе вопросы формулировки законов и правил дедуктивной логики отделяются от вопросов их аксиоматизации.

С точки зрения нашей интуиции термин "язык", пожалуй, более естественно относить к системе второго типа (без правил преобразования). Черч также отмечает возможность двоякого понимания термина "язык" в логике: "По другой точке зрения, которая, как может показаться, больше соответствует повседневному употреблению слова "язык", следовало бы определить "язык" как состоящий из исходных символов, понятия правильно построенной формулы и некоторой интерпретации, а аксиомы и правила вывода следовало бы считать образующими "логику" языка. В этом случае вместо того, чтобы говорить о правильной или неправильной интерпретации логистической системы, мы говорили бы о правильной или неправильной для языка логике. В пользу этой точки зрения можно было привести некоторые доводы"[19]. Однако Черч предпочитает употреблять термин "язык" применительно к интерпретированным логистическим системам, то есть "таким образом, что во всяком языке существует лишь одно понятие доказательства. Поэтому введение дополнительной аксиомы или правила вывода, так же как и изменение какой-либо аксиомы или правила вывода, дает новый, отличный от исходного язык". Такое употребление термина "язык" в логике Черч принимает отчасти из нежелания менять уже хорошо разработанную терминологию, отчасти потому, что считает, что "новая терминология потребовала бы двоякого подразделения предметов синтаксиса и семантики в зависимости от того, рассматривается ли язык-объект отдельно или вместе с какой-либо его логикой"[20]. Такое подразделение предметов синтаксиса и особенно семантики в зависимости от характера рассматриваемых систем представляется Черчу "неестественным" и "бесполезным".

Вопрос, конечно, не в терминологии, не в том, какого рода системы предпочтительнее называть языками в логике. Речь идет о принципах принятия логических процедур, их обосновании. На наш взгляд, описанный путь построения логической теории не является "неестественным" или "бесполезным". Во-первых, он дает возможность показать в явном виде зависимость системы дедуктивной логики от принимаемой семантики. Во-вторых, правила логической дедукции не выступают как нечто данное, исходное, а обосновываются семантикой языка.

[19] *Черч А.* Указ. соч. Прим. 116.
[20] Там же. С.3.

Глава вторая

ТЕОРИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ И ПОНЯТИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

§ 1. Логические языки без операторов

Обратимся к анализу структуры выражений интерпретированных знаковых систем. Предполагается, что в любом из известных языков, как искусственных, так и естественных, осмысленные выражения языка удовлетворяют определенным структурным требованиям. Не любые знаковые системы, описываемые правилами образования, могут интерпретироваться таким образом, что допускаемые комбинации символов превращаются в осмысленные предложения или термины. Возникает вопрос об общих структурных особенностях, связанных именно с осмысленностью выражений, с теми видами значений, которые могут им сопоставляться при интерпретации. Теория семантических категорий, или категорий значений выражений языка, позволяет выявить общие структурные требования, соблюдения которых является необходимым (хотя и недостаточным) условием осмысленности выражений интерпретированных систем.

Учение о семантических категориях восходит к Фреге и Гуссерлю. Но наиболее интенсивную разработку оно получило в польской школе логики. Очень близка к концепции семанти-

ческих категорий теория типов Б.Рассела. Однако надо отметить, что если у Б.Рассела теория типов была введена как средство для предотвращения парадоксов, то в польской школе логики у Ст.Лесневского, А.Тарского, К.Айдукевича теория семантических категорий связана с глубокими философскими и лингвистическими проблемами. Для них элиминация парадоксов логики — не единственный и не главный стимул для введения теории семантических категорий.

Ст.Лесневский использует теорию семантических категорий в исследовании оснований дедуктивных наук. А.Тарский дает классификацию формализованных языков в зависимости от порядка и числа семантических категорий, к которым принадлежат переменные языка. Целый ряд важнейших результатов Тарского (о том, что метаязык, в котором определяется понятие истины, должен быть богаче объектного языка; о невозможности семантического определения истины для языков бесконечного порядка без использования трансфинитной индукции) невозможно даже точно сформулировать, не предполагая определенной теории семантических категорий. В работе К.Айдукевича[1] систематически разработана теория синтаксических категорий (аналог теории семантических категорий), позволяющая выявлять структурные особенности осмысленных выражений языка; в то же время она явилась первой работой, заложившей основу для внедрения теории семантических (синтаксических) категорий не только в логику, но и в лингвистику[2] .

---

[1] *Ajdukiewicz K.* Die Syntaksische Konnexitat // Studia Philosophica. 1935, V.1.

[2] Метод рассмотрения структуры выражений на основе теории семантических категорий получает в последние годы все большее признание. В первую очередь следует отметить работы Р.Сушко (*Suszko R.* Syntactic structure and semanticl reference // studia Logica. 1958. V.VIII); Л.Борковского (*Borkowski L.* On proper quantifiers // Studia Logica. 1958. V.VIII); Р.Монтегю (*Montague R.* Formal Philosophy: Selected Papers of R.Montague. New Haven, 1974); М.Кресвелла (*Cresswell M.J.* Logics and Languages. L., 1973) и И.Ламбека (*Ламбек И.* Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика. М., 1964). Интересно отметить,что метод анализа структуры выражений языков по непосредственно составляющим в структурной лингвистике по существу воспроизводит метод Айдукевича (см.: *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. М., 1970; *Хомский Н.* Синтаксические структуры, // Новое в лингвистике. вып.II. М., 1962). Однако у Айдукевича имеется в виду именно типология значений и построение определенной иерархии категорий.

На основе теории семантических категорий нам представляется также возможным уточнить понятие логической формы высказываний, имеющее существенное значение для логики[3].

Членение выражений языка на осмысленные единицы может совершаться на различных уровнях. Можно говорить о членении слов на определенные (осмысленные) составляющие словоморфы (пере-чит-ыва-ющ-ий), сложных предложений – на простые или предложений — на слова и (осмысленные) словосочетания. Естественно, возникает вопрос, каковы принципы членения на осмысленные составляющие единицы.

Исходными элементами некоторого языка будем считать слова этого языка. Сложные выражения рассматриваются как конечные деревья слов. Как упоминалось выше, может быть много операций, порождающих деревья. Мы будем представлять выражения языка как конечные деревья вида $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$. Указанного вида деревья допускают двоякое истолкование.

Во-первых, $\psi< \alpha_1, ..., \alpha_k >$ можно представить как дерево, порожденное из деревьев $\alpha_1, ..., \alpha_k$ посредством операции ψ. Выше было показано, что двухместные пропозициональные связки (конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и так далее) можно представить как особые операции, порождающие из двух деревьев новое дерево, а не как самостоятельные выражения языка. При данном подходе ψ — также не самостоятельное выражение языка, а лишь изображение порождающей операции, то есть синкатегорематическое выражение, наподобие скобок. В таком случае для каждого k должно быть несколько k-местных операций, порождающих из деревьев $\alpha_1, ..., \alpha_k$ различные выражения.

Во-вторых, $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$ можно рассматривать как дерево, порожденное k+1-местной операцией из деревьев $\alpha_1, ..., \alpha_k$ и ψ. При таком подходе для каждого k имеется всего одна k-местная порождающая операция, $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$ является выражени-

[3] См. *Смирнова Е.Д.* Теория отражения и логическая семантика // Ленинская теория отражения и современная наука, т.1. София, 1973. Гл.19.

ем языка (деревом). Однако роль ψ и деревьев $\alpha_1, ..., \alpha_k$ в построении дерева $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$ различна: ψ будет главной частью, а $\alpha_1, ..., \alpha_k$ — подчиненными частями дерева $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$.

Представление выражений языка в виде дерева $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$ с выделением главной и подчиненных частей назовем членением выражений языка на функтор и его аргументы. Первая из описанных выше трактовок деревьев вида $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$ соответствует номиналистическому пониманию функторов как необозначающих, синкатегорематических выражений. Второе истолкование соответствует платонистическому истолкованию функторов как выражений, обозначающих функции.

В естественном языке выражение "Онегин убил Ленского" естественно рассматривать как выражение, состоящее из трех частей: главная часть — "убил", две остальные — подчиненные. Тогда это предложение запишется следующим образом:

убил <Онегин, Ленский>

В данном примере главную часть естественно трактовать как обозначающее выражение.

Рассмотрим выражение "мать мужа". В виде дерева оно запишется: *<мать, муж>. Этот пример естественно трактовать как дерево, построенное из двух выражений ("мать" и "муж") с помощью особой порождающей операции, выражаемой в русском языке родительным падежом второго слова, в английском и немецком — особыми словами "of" и "von". Главную часть можно считать выражением языка, обозначающим функцию, известную в логике под названием относительного произведения бинарных отношений.

Представление выражений естественного языка в виде деревьев указанного вида (с главной и подчиненными частями) не является тривиальной задачей. По существу это одна из основных задач структурной лингвистики.

Если фиксирован определенный способ разбиения выражений языка, то этим еще не установлено, является выражение правильно построенным или нет. Мы должны уметь различать типы сложных выражений и их составляющих. Это достигается посредством теории семантических категорий.

Предположим, что мы умеем как-то выделять предложения языка. Будем говорить, что *два выражения рассматриваемого языка принадлежат к одной и той же семантической категории,* тогда и только тогда, когда имеется предложение языка, в которое входит одно из этих выражений, и для всякого предложения результат замещения в нем одного из этих выражений на другое вновь является предложением. Так, выражения русского языка "стул" и "молоток" принадлежат к одной и той же семантической категории, ибо заведомо существуют предложения русского языка, в которые входит слово "стул" (например: "Стул стоит под деревом") и в любом предложении замена слова "стул" на слово "молоток" даст в результате опять-таки предложение. Выражения "маленький" и "меньше" или же "стул" и "лежит на" принадлежат к различным семантическим категориям.

Поскольку отношение "принадлежать к одной и той же семантической категории" является отношением типа эквивалентности, то применяя так называемое определение через абстракцию, можно ввести понятие семантической категории. При этом все множество выражений будет подразделено на взаимно непересекающиеся подмножества (семантические категории).

Следует отметить, что указанный способ разбиения выражений языка на непересекающиеся классы (семантические категории) предполагает очень сильную идеализацию. Чтобы установить, принадлежат ли два выражения к одной и той же семантической категории, надо просмотреть все высказывания языка, содержащие одно из этих выражений. Но осуществить это эмпирическим путем невозможно. Можно просмотреть лишь достаточно большое число случаев или сослаться на интуицию, "чувство языка". Чтобы не прибегать к перебору бесконечного множества предложений, приходится принять основной принцип теории семантических категорий: если существует некоторое предложение, в которое входит выражение α, и если результат замены α на β в этом предложении есть предложение, то для всякого другого предложения замена α на β дает предложение. Другими словами, для установления того, что два выражения α и β принадлежат к одной и той же семантической категории, достаточно знать, как влияет замена одного из них на другое всего в одном предложении. Это означает, что принимается очень сильное допущение, что любое выражение языка принадлежит к одной и только одной семантической категории: категория его значения в данном языке остается одной и той же в любом осмысленном контексте, в котором оно встречается.

К построению теории семантических категорий, на наш взгляд, можно подойти двумя способами: первый условно назовем анализирующим, второй — синтезирующим.

Оба подхода в качестве предварительной части предполагают, что имеется фиксированный способ разбиения сложных выражений на составляющие. Здесь мы принимаем, что выражения языка членятся указанным выше образом на функтор и аргументы.

Введенное выше понятие семантической категории (как класса взаимозаменимых выражений) лежит в основе анализирующей теории семантических категорий. Анализирующая теория семантических категорий основывается на следующих предпосылках:

1. Предполагается, что имеется способ распознавания правильно построенных формул (предложений), не прибегая к анализу их внутренней структуры.
2. Принимается основной принцип теории семантических категорий. Анализирующая теория семантических категорий исходит из предпосылки, что язык задан множеством всех возможных предложений; задача теории состоит в том, чтобы открыть грамматику языка, то есть найти элементарные семантические категории этого языка и способы образования из выражений одних семантических категорий других.

Принятый способ членения выражений языка на функтор и аргументы делает естественным допущение, что категория функтора зависит от числа и категорий аргументов и от категории выражения, образованного приложением функтора к аргументам. Удобную форму представления такой зависимости предложил К.Айдукевич[4]. Он обозначает категорию функторов в виде дроби: в числителе дроби стоит знак категории всего выражения в целом (образованного приложением функтора к его аргументам), а в знаменателе — знаки категорий аргументов.

Пока нам дана только одна категория выражений языка — категория предложений. Обозначим ее знаком *s*, и будем называть этот знак индексом категории предложений. Тогда категории унарных и бинарных логических связок, таких, как $\neg$, &, $\supset$ и так далее обозначатся соответственно *s/s* и *s/ss*.

Чтобы установить категории выражений, являющихся функторами, отличными от логических связок, необходимо найти категории выражений, которые не являются функторами, а играют только роль аргументов. Выражения, которые встречаются на местах аргументов, но никогда не встречаются в роли функторов, мы будем называть именами и обозначим категорию имен буквой *n*. Естественно, что для различных языков число основных категорий может быть различным.

Теперь мы имеем средства для решения следующего типа задач: зная категорию выражения в целом и категории аргументных выражений, мы можем устанавливать категории функторов. Так, выражение "7 > 3" является предложением и, следовательно, принадлежит категории *s*, "7" и "3" принадлежат категории *n*. Таким образом, ">" принадлежит категории *s/nn*. Категория выражения "5 + 7" —*n*, категория выражений "7" и "5" — также *n*. Категория функтора "+", следовательно, *n/nn*. Соответственно категория выражения "красный" (красный цветок) — *n/n*, а выражений "брат", "старше", "современник" (Иван брат Алексея) — *s/nn*. Таким путем получаем определенную классификацию функторов: категории предметных функторов; *n/n*, *n/nn*, *n/nnn*, ... — предикаторов; *s/n*, *s/nn*, *s/nnn*, ... — пропозициональных связок.

[4] *Ajdukiewicz K.* Die syntaksische Konnexitat // Studia Philosophica. Lwow, 1935, V.1.]

Таким образом, используя членение выражений языка по схеме "функтор и его аргументы", для любого функтора мы можем установить его категорию по категории выражения в целом и категориям аргументов. Но можно решать и другую задачу: зная категории выражений, стоящих на местах функтора и аргументов, установить категорию сложного выражения в целом и, в частности, решить вопрос о его правильной построенности.

Айдукевич предложил простую процедуру, позволяющую установить, является ли выражение языка структурно правильно построенным ("синтаксически связанным" — в его терминологии). Категория выражения в целом определяется следующим образом:

1. Пишется категория функтора.
2. Вслед за категорией функтора выписываются категории аргументов.
3. Производится последовательно сокращение справа налево — по обычным правилам сокращения дробей.

Выражение будет правильно построенным, если в результате сокращения получаем один индекс, целый или дробный. Полученный в результате индекс указывает, к какой категории принадлежит выражение в целом.

По существу, указанный метод установления "синтаксической связанности" выражений языка предполагает, что любые (осмысленные) выражения языка могут быть представлены в виде деревьев вида $\psi<\alpha_1, ..., \alpha_k>$, что любое правильно построенное выражение должно до конца члениться на части по схеме "функтор и его аргумент". Но этого недостаточно. Необходимо еще, чтобы каждому функтору, принадлежащему определенной семантической категории, соответствовало определенное число аргументов, и чтобы сами аргументы принадлежали определенным семантическим категориям. На синтаксическом уровне это выливается в правила сокращения индексов и требование, чтобы после такого сокращения оставался экспонент, состоящий из одного индекса.

Анализирующая теория семантических категорий позволяет установить "эмпирическим" путем определенную систему семантических категорий рассматриваемого языка.

Теперь мы имеем возможность построить теорию семантических категорий строгим синтезирующим методом. Мы не рассматриваем язык как нечто данное — как заданную совокупность всех его возможных предложений. От нас не требуется "божественной" способности распознавать предложения языка, не вдаваясь в анализ их структуры, и не нужен основной принцип теории семантических категорий. Систему категорий мы строим дедуктивно:

1. Выделяются основные (исходные) категории.
2. Устанавливается метод построения иерархии категорий. Над исходными категориями выражений "вырастают леса" категорий — иерархия категорий, представленных их индексами.
3. Наконец, устанавливается, каким образом каждому выражению языка может быть сопоставлен определенный индекс (то есть как оно может быть отнесено к определенной категории).

При построении синтезирующей теории категорий мы фактически "оборачиваем метод": не предполагается, что мы умеем распознавать осмысленные выражения, являющиеся предложениями, — и мы начинаем построение с некоторых категорий выражений, принимаемых за основные. Какого рода сущности сопоставляются выражениям этих категорий, первоначально не указывается.

Не нарушая общности рассмотрения, можно считать, что каждое сложное выражение образовано из двух выражений посредством одноместной операции приложения функтора к аргументу (то есть двухместной операции порождения дерева). В дальнейшем результат одноместной операции приложения функтора ψ к аргументу α мы будем обозначать: $(\psi\alpha)$.

Понятие индекса категории вводится индуктивно:

1. n и s есть индексы категорий.
2. Если α и β есть индексы категорий, то α/β есть индекс категории.

Пусть n — индекс категории имен, s — индекс категории предложений. Заметим, что в качестве исходных индексов могут быть приняты индексы иных категорий.

Определим произведение индексов:

1. Если α есть индекс категории, то α есть произведение индексов.

2. Если α и β суть произведения индексов, то $(\alpha\beta)$ есть произведение индексов.

Определим функцию φ, которая каждому исходному (примитивному) знаку исследуемого языка сопоставляет некоторый индекс и каждому сложному выражению (AB) сопоставляет произведение индексов $(\alpha\beta)$, где α и β суть произведения индексов, сопоставленные функцией φ выражениям A и B соответственно.

Пусть α, β и γ — индексы категорий и α имеет вид дроби γ/β. Тогда произведение индексов $(\alpha\beta)$ может быть заменено индексом γ. Эту процедуру назовем процедурой сокращения индексов.

Выражение будем считать *правильно построенным*, если сопоставленное ему произведение индексов после процедуры сокращения преобразуется в индекс категории.

Выражения, которым приписывается один и тот же индекс, мы относим к одной и той же синтаксической категории и сами индексы рассматриваем как обозначения соответствующих категорий.

Система, построенная в соответствии с данной иерархией синтаксических категорий, еще не будет языком. Отнесение выражений формальной системы к определенным категориям устанавливается в синтаксисе. Такого рода систему можно превратить в язык посредством семантических правил. На наш взгляд, семантические правила естественно подразделяются на два типа. Правила первого типа фиксируют общие аспекты интерпретации, то есть указывают, какого рода системы объектов могут приписываться выражениям соответствующих синтаксических категорий.

Утверждение "область X приписывается категории α" употребляется как сокращение для "X есть область изменения переменных категорий α, и X есть множество, элементы которого приписываются константам категории α".

К семантическим правилам первого типа относятся:

1. Правила, устанавливающие, какого рода области объектов приписываются основным синтаксическим категориям;
2. Правила, устанавливающие, какие области приписываются производным синтаксическим категориям, то есть категориям типа α/β, если известно, какие области приписываются категориям α и β.

Так, выражениям категории *n* сопоставляется некоторая область индивидов. Правила первого типа не фиксируют определенной индивидной области — это дело правил второго типа. Выражениям категории *s* сопоставляется область истинностных значений. Для уточнения понятия семантической категории несущественно, какова эта область истинностных значений. Однако для систем, основанных на классической логике, R_o = {**и**, **л**}. (Выбор области истинностных значений мы будем относить к правилам первого типа.) Выражениям категории α/β — сопоставляется множество функций, область определения которых — множество, сопоставленное β, и область значений — множество, сопоставленное α, то есть категории α/β приписывается множество X^Y, где Y сопоставлено β, а X — категории α. Так, выражениям синтаксической категории s/n приписываются функции, областью определения которых является индивидная область, а областью значений — область истинностных значений R_o. Синтаксической категории s/nn приписывается множество функций, область определения которых — множество упорядоченных пар индивидов, а область значения — R_o. Поскольку индивидная область не фиксирована, приписывание областей этим категориям релятивизировано относительно приписывания области объектов синтаксической категории *n*. Синтаксической категории s/s приписывается множество унарных пропозициональных функций. Правила первого типа, даже обогащенные правилом выбора области истинностных значений, не устанавливают значения, скажем знака $\urcorner$, а только указывают, что оно может быть одним из четырех (если R_o = {**и**, **л**}). Таким образом, посредством *семантических правил первого типа* система *синтаксических категорий* превращается в *систему семантических категорий.*

Правила второго типа из всех возможных областей, приписываемых категории *n*, фиксируют одну определенную область (например, множество натуральных чисел) и из всех возможных приписываний объектов дескриптивным выражениям языка фиксируют одно определенное. Если фиксированы приписывания областей основным синтаксическим категориям, то тем самым фиксируются области, приписываемые производным синтаксическим категориям. Так, синтаксической категории s/n сопоставится множество свойств натуральных чисел, если категории *n* сопоставлено множество натуральных чисел.

Параллелизм между синтаксическими и семантическими категориями оказался возможным благодаря наличию двух предпосылок: выражения основных категорий рассматривались как обозначающие и все функторы рассматривались как категорематические выражения.

Выше отмечалось, что с чисто синтаксической позиции функтор можно рассматривать не как особое выражение языка, а как метку способа образования (порождения) сложного выражения из составляющих. Семантические правила первого типа могут быть построены так, что не всем синтаксическим категориям сопоставятся семантические.

Рассмотрим пример такого построения. Семантические правила формулируются следующим образом:

1. Выражениям категории *n* приписывается индивидная область.
2. Если категории β приписана область Y, то категории s/β приписана область 2^Y.
3. Если категории β приписана область Y, то категории n/β приписана область X^Y, где X есть область, приписанная категории *n*.

Построенная система есть система семантических категорий с двумя видами функторов — имяобразующими и высказываниеобразующими. Отметим, что выражения категории s, так же как и выражения категорий s/s, $(ss)/s$ и так далее не будут обозначающими.

В этом случае понятие семантической категории выражений может быть введено индуктивно следующим образом:

1. n — семантическая категория;
2. Если α — семантическая категория, то s/α и n/α семантические категории;
3. Никакая другая категория не является семантической.

В соответствии с двумя способами истолкования функторов логические константы могут рассматриваться как обозначающие выражения и могут рассматриваться как синкатегорематические — им не приписываются значения[5]. В первом случае должны вводиться дополнительные семантические правила, приписывающие значения логическим константам. Во втором — должны иметься правила, позволяющие сводить значения сложных выражений, образованных посредством этих функторов, к значениям составляющих. Осуществляется это посредством правил истинности (выполнимости).

На базе построенной указанным образом теории семантических категорий можно уточнить понятие логической формы выражений[6].

В современной логике следует, на наш взгляд, различать два понятия формы выражений. Первое понятие формы синтаксическое. Мы говорим о формальном рассмотрении выражений языка, если оно касается лишь вида знаков, их порядка и способов сочленения. Второе понятие формы, понятие логи-

[5] Относительно важности подразделения выражений языка на категорематические и синкатегорематические интересные соображения выдвигались уже в логике схоластов, об этом см.: *Смирнова Е.Д.* Проблема уточнения понятия логической формы // Логика и методология научного познания. М., 1974.

[6] *Смирнова Е.Д.* Формализованные языки и логическая форма // Логическая структура научного знания. М., 1965; *Она же.* Теория семантических категорий: синтаксическая структура и логическая форма предложений // Проблеми на логиката. София, 1973; *Она же.* Проблема уточнения понятия логической формы // Логика и методология научного познания. М., 1974; *Она же.* Универсалии и логическая структура языка // Логико-методологические исследования. М., 1980.

ческой формы, является семантическим; оно апеллирует к значениям определенных знаков языка — логических констант, хотя и не зависит от значений конкретных терминов, составляющих "материю" высказывания. "Если вы удалите из силлогизма все конкретные термины, заменив их буквами, — вы удалите материю силлогизма, и то, что остается, называется его формой"[7].

Под логической формой выражений языка понимают обычно результат замещения дескриптивных знаков (одинаковых — одинаковыми) переменными. Конкретные термины, подставляемые вместо этих переменных, представляют "материю" высказываний. Полагают, что, заменив конкретные термины переменными, мы тем самым удалим "материю" рассуждения и получим его логическую форму.

Нам кажется такое представление логической формы неадекватным, если в качестве переменных выступают переменные объектного языка. В таком случае результат замещения дескриптивных терминов переменными даст нам формулу того же языка, а не логическую форму его выражений. Логическая форма выражений некоторого языка не есть формула этого же языка; она должна описываться не в объектном языке, а в его метаязыке.

Если же дескриптивные термины замещать переменными метаязыка, то тогда эти переменные предварительно должны быть отнесены к определенным типам, категориям — в таком случае они просто выполняют роль индексов категорий замещаемых терминов.

Дело в том, что при появлении логической формы высказывания мы не просто освобождаемся от "материи" высказывания (это действительно достигается удалением дескриптивных терминов и заменой их переменными), но мы должны еще выявить тип удаляемых выражений. Таким образом, к логической форме высказываний помимо логических терминов относятся указания места и категорий удаляемых дескриптивных терминов (что

[7] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1969. С.50.

может быть достигнуто введением особого рода символики)[8]. Существенную роль в анализе логической формы, как нам представляется, играет сам принцип членения выражений на составляющие, например, способ связи функтора с его аргументами.

Понятие логической формы языковых выражений можно ввести более точным образом, если в основу анализа структуры выражений положить определенную теорию семантических категорий.

Под *логической формой первого уровня* выражения *A* будем иметь в виду результат замещения всех примитивных знаков выражения *A* индексами соответствующих категорий.

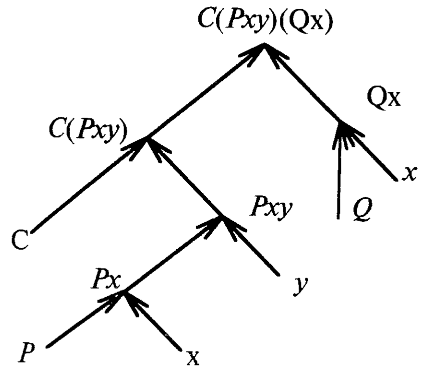
Выражение *A* по своей структуре представляет собой дерево; его мы можем записывать линейно с использованием скобок, как было показано выше, или двумерно в виде (ориентированного) графа выражения *A*. Точка, в которую входят две стрелки, представляет сложное выражение; две точки, из которых выходят эти стрелки, представляют составляющие выражения; точка, в которую не входит ни одна стрелка, представляет примитивное выражение; Точка, из которой не выходит ни одна стрелка, представляет собой анализируемое выражение — эту точку графа будем называть главной вершиной графа[9].

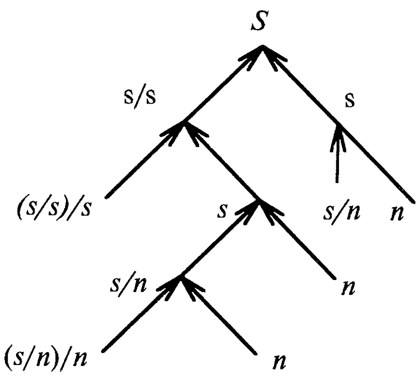
[8] Отметим, что такое понимание логической формы высказываний предполагает предварительное подразделение знаков языка на логические и дескриптивные. Но какие знаки считать логическими, а какие — дескриптивными, и по какому принципу? Обычно в качестве логических знаков рассматривают именно те знаки, которые относятся к логической форме, к тому, что остается после удаления "материи" высказывания, то есть после удаления дескриптивных терминов. Из анализа природы самих знаков мы не можем установить, какие из них логические, а какие — дескриптивные, ибо это не синтаксические их свойства. Только разграничение семантических правил, уточнение способов приписывания значений различным типам знаков языка намечает путь подразделения знаков на логические и дескриптивные.

[9] Метод представления структуры сложных выражений языка посредством диаграмм разрабатывался Р.Сушко (*Suszko R.* Syntactic structure and semantical reference // Studia Logica, 1058. V. VIII). Об использовании метода диаграмм в лингвистике см., напр.: *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. М., 1970; *Хомский Н.* Синтаксические структуры // Новое в лингвистике. Вып.II. М., 1962. Однако существенные преимущества этот метод дает для анализа выражений с операторами и кванторами так, как это предлагается ниже, а также для анализа предложений с интенсиональными операторами и предикатами (см. гл. IV).

Логическую форму (первого уровня) выражения *A* удобно изображать в виде графа с произведением индексов, приписанных каждой его точке. Логическая форма правильно построенного выражения имеет вид графа, каждой точке которого сопоставляется произведение индексов, сокращаемое до индекса. Индекс, приписанный главной вершине графа, есть индекс категории всего выражения в целом.

Рассмотрим структуру выражения $C(Pxy)(Qx)$, записанного для удобства анализа в польской символике. Мы принимаем соглашение об ассоциации влево, без которого указанное выражение, рассматриваемое как результат двухместной операции порождения дерева, следовало бы записать $((C((Px)y))(Qx))$. Чертеж внизу слева дает графическое изображение структуры рассматриваемого выражения. Логическую форму первого уровня этого выражения представляет граф справа.





Введенное выше понятие логической формы недостаточно для обоснования дедуктивных рассуждений. Для того, чтобы логическая форма выражений обосновывала дедуктивные рассуждения — рассуждения по форме — необходима дополнительная информация:

1. О тождестве и различии выражений, входящих в состав данного выражения.

2. О подразделении знаков языка на логические и дескриптивные и о значении логических констант.

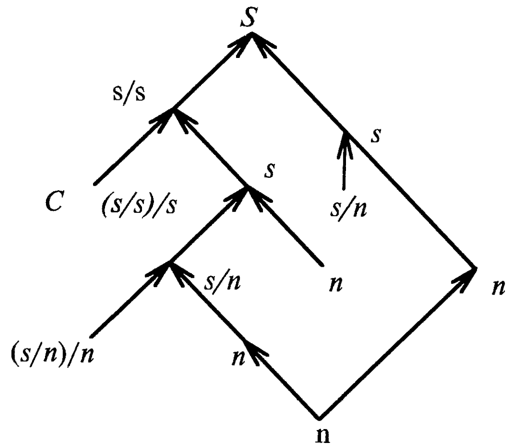
Информация о тождестве и различии составляющих выражений может быть включена в описание структуры выражения; для этого выражению сопоставляется более сложный граф. Новый граф, назовем его условно обобщенным древом, отличается от исходного тем, что исходные точки с тождественными выражениями соединяются, как бы склеиваются в одну. Для этого из некоторой третьей точки в них проводятся стрелки. Отсюда ясно, что в схеме в виде обобщенного дерева все исходные точки попарно различны.

Более точное определение обобщенного графа следующее:

1. Изолированная точка с приписанным ей атомарным выражением есть обобщенный граф. Эта точка является и главной и исходной вершиной графа.
2. Если Γ_1 и Γ_2 есть обобщенные графы выражений A и B, то мы получим граф выражения (AB), если проделаем следующие операции: фиксируем некоторую новую точку, которой припишем выражение (AB), в эту точку проводим стрелки из главных вершин графов Γ_1 и Γ_2; если некоторой исходной вершине графа Γ_1 и некоторой исходной вершине графа Γ_2 приписаны графически равные атомарные выражения, то фиксируем некоторую новую точку, проводим из этой новой точки стрелки в точки с графически равными атомарными выражениями и при этой новой точке пишем это атомарное выражение. Главной вершиной вновь образованного графа будет точка, из которой не выходит ни одна стрелка, а исходными вершинами — точки графа, в которые не входит ни одна стрелка.

Под *логической формой второго уровня*, учитывающей значения логических констант. Будем иметь в виду граф в виде обобщенного дерева, при вершинах которого стоят индексы категорий соответствующих выражений и при точках, соответствующих логическим константам, кроме того, стоят сами логические константы.

Логическую форму второго уровня выражения $C(Pxy)(Qx)$ представляет граф:



Именно понятие логической формы второго уровня соответствует приведенному выше предварительному, неуточненному понятию логической формы. Оно учитывает значения логических констант; дескриптивные термины удалены, и следовательно, удалена "материя" высказывания, но на местах вхождения удаленных терминов стоят показатели их семантического типа — индексы соответствующих семантических категорий.

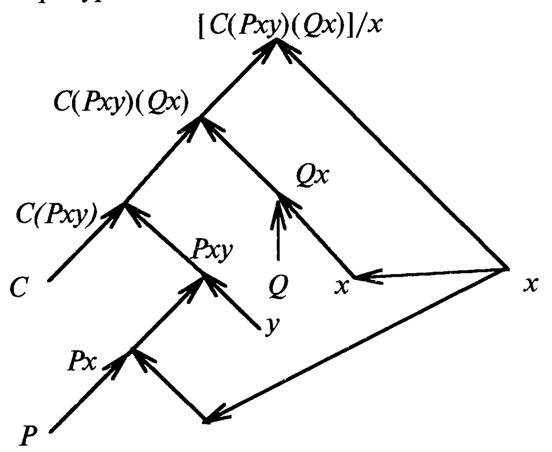
§ 2. Логические языки с операторами

Рассмотрим структуру языков, содержащих операторы, то есть функторы, связывающие переменные. На наш взгляд, основное отличие этих языков от языков без операторов состоит не просто в том, что вводятся новые семантические категории выражений, но прежде всего в том, что *добавляются новые способы образования одних выражений из других.* Для описания структуры выражений, составленных с помощью логических операторов, недостаточно одной только операции приложения функтора к аргументу, необходима обратная операция — операция абстракции. Эта операция состоит в вычеркивании всех вхождений некоторого выражения B в A. В дальнейшем мы будем вычеркивать только переменные, то есть далее неразложимые выражения (поэтому не возникает опасности наложения одних вхождений B в A на другие).

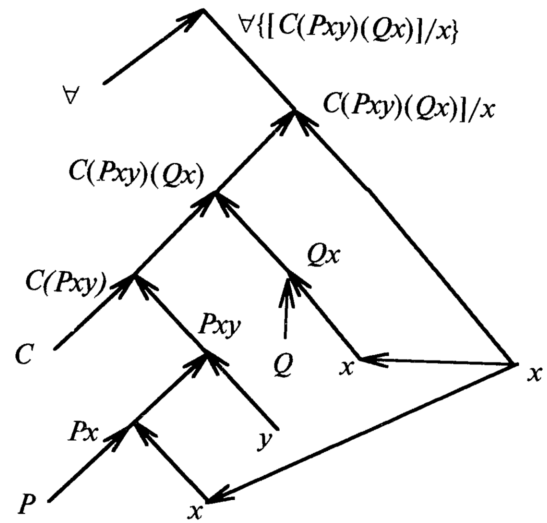
Как и для операции сочленения, у нас нет особого знака для операции абстракции, и ни та, ни другая операции не относятся ни к одной из семантических категорий. Результат применения операции абстракции к выражению A по переменной B будем представлять фигурой A/B и изображать его графически следующим образом: главная вершина графа, представляющего А, соединяется с новой точкой, которая теперь становится главной вершиной, из новой вершины проводится стрелка в исходную точку, при которой стоит переменная В, по которой производится абстракция.

Граф, сопоставленный выражению с операцией абстракции, будем называть *обобщенным деревом с замыканием*. Так же как и просто в обобщенном дереве, все исходные точки в нем отличны друг от друга.

Граф, сопоставленный выражению $[C(Pxy)(Qx)]/x$, будет следующая фигура:



Графическим изображением выражения $\forall\{[C(Pxy)(Qx)]/x\}$ является следующий граф:



Категорию операторов, связывающих индивидные переменные, следует, как нетрудно усмотреть, установить следующим образом:

для кванторов по индивидным переменным — $s/(s/n)$, для операторов типа i — оператора — $n/(s/n)$.

В общем случае индекс категории квантора по переменной категории α имеет вид $s/(s/\alpha)$; для операторов типа λ-оператора по переменной категории α — $\alpha/(s/\alpha)$.

Под логической формой выражений языков с операторами будем иметь в виду граф в виде обобщенного дерева с замыканиями; вместе с индексами, приписанными каждой точке графа, при точках соответствующих логическим константам, помимо индексов написаны сами эти константы. *При указанном подходе кванторы и другие операторы, связывающие переменные различных семантических категорий, сами относятся к различным семантическим категориям.* Другими словами, указанный способ анализа не устраняет типовой неопределенности операторов.

Как видим, при указанном способе анализа структуры выражений языка выявляется особая роль самих способов образования сложных выражений из составляющих, они включаются в анализ логической формы выражений языка. Основное отличие структуры выражений языков с операторами заключается не в появлении новых семантических категорий, а в появлении *новых способов образования сложных выражений из составляющих*. В языках без операторов единственной операцией образования сложных выражений является операция приложения функтора к аргументу. В языках с операторами необходима также операция абстракции.

Чтобы перейти к более стандартной, линейной форме записи, следует:

1. древовидную фигуру записывать в виде линейной последовательности символов в расширении основного алфавита путем добавления скобок;
2. вместо A/x писать xA, где от x идут стрелки ко всем свободным вхождениям x в A; каждое вхождение x в xA связано.

Правила приписывания категорий выражениям примут следующий вид:

1. Каждый примитивный знак (константа или переменная) относится к определенной категории.
2. Вводится конечный или потенциально бесконечный перечень логических предикатов; в частности, $\forall^{\alpha}$ и $\exists^{\alpha}$ — принадлежат категории $s/(s/\alpha)$.
3. Если A есть выражение категории α/β и B есть выражение категории β, то (AB) есть выражение категории α.
4. Если A есть выражение категории α и B есть переменная категория β, то BA есть выражение категории α/β.

Линейная форма записи структуры вышеприведенного выражения $\forall xC((Px)(Qx))$ имеет вид $\forall x((C((Px)y))(Qx))$, а его логической формы — $\forall^n n((C[(s/n)/n]n)n))((s/n)n))$.

Существенно не то, графически или линейно запишем мы структуру выражений языка, важно, что в анализ логической структуры включается способ порождения (сложных) выражений из составляющих, а также трактовка порождающих операций.

В языках с операторами операция абстракции выступает как новая порождающая выражения операция, а не как самостоятельное выражение языка: она *показана* определенным расположением символов (точно так же как и операция приложения функтора к аргументам), но не *обозначена*. Возникает вопрос, какова категория выражений, образованных посредством этой операции. Рассматривая систему категорий с двумя видами функторов — имяобразующими и высказываниеобразующими — и определяя понятие семантической категории для языков с операторами, в приведенном выше определении семантической категории следует добавить пункт, устанавливающий категории выражений, полученных в результате применения операции абстракции:

если A — выражение категории s или n, v — переменная категории β и v входит свободно в A, то vA — выражение семантической категории s/β или n/β соответственно.

§ 3. Языки с неопределенно-местными функторами

Нам неизвестны работы, в которых систематически рассматривались бы языки с неопределенно-местными функторами. Введение подобного рода языков в логику представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Неопределенно-местные функторы рассматриваются нами только как пример того, что возможны языки, не удовлетворяющие основному принципу теории семантических категорий.

С помощью рекурсивных определений на основе известных конечно-местных логических связок могут быть определены неопределенно-местные пропозициональные связки, например:

$$\begin{cases}\sum pq = p \vee q \\ \sum \alpha q = \sum \alpha \vee q\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}Dpq = p \& \neg q \vee \neg p \& q \\ D\alpha q = D\alpha \& \neg q \vee \neg(\sum \alpha) \& q\end{cases}$$

где α есть метапеременная, пробегающая по конечным последовательностям пропозициональных переменных;

Σ — символ нестрогой дизъюнкции от любого конечного числа аргументов больше 1; его аналогом в естественном языке будет выражение "по крайней мере одно из..."

D — строгое "либо", применяемое к любому конечному числу аргументов больше 1; "одно и только одно из...".

Примерами неопределенно-местных предикатов в естественных языках могут служить предикаты типа "братья", "сотрудники", "современники" и т.п.: *a* и *b* суть братья; *a, b* и *c* суть братья...

Функторы Σ и D относятся к одной и той же семантической категории, но их категория отлична от категорий s/s, $s(s/s)$ и тому подобное. Безусловно, система индексации категорий, предложенная К.Айдукевичем, непригодна для этих функторов, но она, по-видимому, может быть перестроена для языков с неопределенно-местными функторами с привлечением конструктивных ординалов.

Рассмотрим языки только с пропозициональными функторами. Пропозициональный функтор от k аргументов есть функтор категории s/s^k; неопределенно-местные функторы от двух и более мест, например, функторы Σ и D — функторы категории $s/s^{\omega+2}$. Функтор L, вводимый посредством рекурсивного определения:

$$\begin{cases} L = f \\ L\alpha p = L\alpha \vee p \end{cases}$$

принадлежит к категории s/s^{ω}; f — константа — всегда ложное предложение.

При установлении того, является ли выражение правильно построенными, будем исходить из двух правил:

1. $(s/s^n)s$ есть s/s^{n-1}, если $n>0$ и n — конечное число, или s/s^{ω}, если n есть ω.
2. Индекс s/s^{ω} отождествляем с s, если и только если s/s^{ω} стоит изолированно или является вторым сомножителем произведения индексов: $s/s^{\omega} = s$ и $(\alpha/s)(s/s^{\omega}) = \alpha$.

Так, выражения D и Dp не являются предложениями. Первое из них принадлежит к категории $s/s^{\omega+2}$, второе — к $(s/s^{\omega+2})s = s/s^{\omega+1}$.

Выражения вида Dpq, Dpqr, D$p_1...p_k$ будут предложениями. Действительно,

$$\frac{s}{s^{\omega+2}}ss = \frac{s}{s^{\omega}} = s,$$

$$\frac{s}{s^{\omega+2}}sss = \frac{s}{s^{\omega+2-3}} = \frac{s}{s^{\omega}} = s,$$

$$\frac{s}{s^{\omega+2}}\underbrace{s\ldots s}_{k} = \frac{s}{s^{\omega+2-k}} = \frac{s}{s^{\omega}} = s,$$

где $k \geq 2$.

Таким образом, основной принцип теории семантических категорий не имеет места для языков с неопределенно-местными функторами. Так, *Kpq*, где *K* — знак обычной конъюнкции в польской символике, и Dpq являются выражениями категории s, но *K* и D не принадлежат к одной и той же семантической категории; выражение Dpqr есть правильно построенная формула, но *Kpqr* не является таковой.

В результате мы видим, что теорию семантических категорий необязательно связывать с так называемым основным принципом теории семантических категорий. Может быть построена обобщенная синтезирующая теория семантических категорий и для языков с неопределенно-местными функторами.

Теория семантических категорий в ее синтезирующей форме является хорошей основой для определения логической формы и установления синтаксической связанности высказываний достаточно широкого класса формализованных языков.

§ 4. Классификация языков, удовлетворяющих теории семантических категорий

Построение системы семантических категорий служит базой для анализа языков. Принимаемая система семантических категорий обусловливает определенную классификацию выражений языка. На этой основе можно построить также классификацию самих языков в зависимости от того, к какого рода семантическим категориям относятся выражения, допустимые в этих языках. Таким образом, определенный тип иерархии семантических категорий обусловливает иерархию языков.

Вслед за А.Тарским введем понятие порядка семантических категорий:

1. Порядок основных категорий (s и n) равен 0.
2. Если функтор совместно с аргументом образует выражение категории порядка $\leq m$ и порядок категорий аргументов $\leq m$ (при этом по крайней мере одно аргументное выражение принадлежит к категории порядка m), то функтор принадлежит к категории порядка $m+1$.

Таким образом, порядок семантической категории — это число, сопоставленное этой категории в соответствии с приведенным определением. Порядок категории функтора зависит не от числа его аргументов, а от того, к какому наивысшему порядку принадлежат категории его аргументов, а также от порядка категории всего выражения в целом. Например, категории одноместных, двухместных и вообще любых n-местных предикатов от индивидов имеют порядок 1; категории предикатов от предикатов (первого порядка) имеют, соответственно, порядок 2, а категории вида n/n, $n/(nn)$относятся к порядку 1.

А.Тарский предлагает классификацию языков в зависимости от того, к каким семантическим категориям принадлежат встречающиеся в них переменные. Соответственно языки подразделяются на 4 группы.

К *первой* относятся языки, в которых все переменные принадлежат к одной и только одной семантической категории, например, языки исчисления высказываний, алгебры классов, любые первопорядковые языки без пропозициональных и предикатных переменных (в том числе язык первопорядковой арифметики без предикатных и функциональных переменных).

Ко *второй* группе относятся языки, в которых переменные принадлежат более чем к одной категории, но число ка-

тегорий переменных конечно. Примером языка второй группы является одноместное исчисление предикатов с предикатными переменными.

К *третьей* группе относятся языки, в которых число категорий, к которым принадлежат переменные, бесконечно, но порядок категорий переменных при этом не превосходит некоторое данное число k, то есть конечен. Примером языка третьей группы служит обычное первопорядковое исчисление предикатов с предикатными переменными, а также любое исчисление предикатов k-го порядка для любого конечного $k\geq 2$.

Наконец, к *четвертой* группе относятся языки, в которых порядок категорий, к которым принадлежат переменные, бесконечен. Язык простой теории типов — типичный пример такого рода языка.

Приведенная классификация языков осуществляется по двум основаниям:

1. По порядку семантических категорий, к которым принадлежат переменные, языки делятся на языки конечного и бесконечного порядков. Языки первых трех групп являются языками конечного порядка.
2. По числу семантических категорий, к которым принадлежат переменные, языки делятся на языки с конечным числом семантических категорий и языки с бесконечным числом семантических категорий.

Более принципиальной является классификация языков по высшему порядку категорий *квантифицируемых* переменных. В этом случае классификация языков на основе иерархии семантических категорий является расширением и своеобразным вариантом теоретико-типового подхода. При таком подходе исчисление предикатов с предикатными переменными называют исчислением второго порядка лишь в том случае, если имеются кванторы по предикатным переменным.

Глава третья
ПОНЯТИЕ ИСТИННОСТИ В РЕФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СЕМАНТИКЕ, ВЫРАЗИТЕЛЬНЫЕ И ДЕДУКТИВНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМАЛИЗМОВ

§ 1. Классическое понятие истинности и его роль в логике

Основная идея, основной принцип теории отражения — понимание знания как копирования, отображения, воспроизведения действительности. Логическая семантика конкретизирует и использует его с учетом своих специфических задач. Более того, дальнейшее развитие логической семантики, проблемы интерпретации модальных, интуиционистских, временных логик приводят к необходимости учета и более глубоких принципов теории отражения.

В зависимости от того, каким условиям отвечает принимаемое в семантике понятие истинности, находят свое оправдание и обоснование те или иные правила логики. Собственно говоря, именно различные способы истолкования высказываний, условий их истинности в классической и конструктивных логиках, объясняют различие процедур рассуждения, допустимых в них[1] .

[1] "...По крайней мере две из обычных шести логических связок: "и", "или", "если..., то", "неверно, что", "при всяком", "существует... такой, что" — понимаются в конструктивной математике иначе, чем в классической. Другое понимание логических связок, естественно, требует и другого обращения с ними, других правил действия, одним словом, другой логики" (*Марков А.А.* О логике конструктивной математики // Вестн. Моск. ун-та. 1970, N2.

В философии выдвигались различные концепции истинности: классическая, утилитаристская (прагматическая), теория когерентности и др. В основе семантики классической логики лежит понятие истинности, восходящее еще к Аристотелю[2] . Оно предполагает основной принцип теории отражения, является его реализацией. Альтернативные концепции истинности отвергают основной принцип теории отражения, отказываются рассматривать знание как отражение действительности[3] .

В логической семантике принимается классическое, аристотелевское понятие истинности, которое получает техническую разработку, уточнение, необходимые для реализации стоящих перед нею задач.

Прежде всего необходимо ответить на вопрос, к какого рода объектам относится термин "быть истинным", какова его область определения. Так, областью определения "делиться на 3" являются целые числа, а областью определения термина "млекопитающие" — живые организмы. Иногда термин "истинно" употребляют таким образом, что он относится к самим вещам. Например, говорят об истинном друге и так далее. Имеется даже философская концепция, согласно которой истинность есть свойство вещей и истинными являются те вещи, которые соответствуют своему понятию. Эту концепцию развивал Гегель. Ее объективно-идеалистический характер очевиден. Большинство философов не разделяют этой мистической концепции Гегеля и в теоретико-познавательных контекстах не употребляют термин "истинно" по отношению к вещам и событиям материального мира, полагая (независимо от того, какой концепции они придерживаются — классической, утилитаристской или когерентной), что истинными могут быть лишь наши мысли, утверждения, но не объекты материальной действительности.

[2] В литературе его обычно называют классическим (аристотелевским) понятием истинности (См. *Tarski A.* Der Wahreitsbegriff in der formalisirten Sprachen // Studia Philosophica. 1935. V.1.).

[3] Понятие истинности, лежащее в основе классической и интуиционистской логик, различны, однако в обоих случаях они основываются на основном принципе теории отражения.

Можно ли оценивать как истинные и ложные ощущения образы восприятия, памяти и воображения, понятия, наконец, такие формы мысли, как предписания, нормы, вопросы, или же термины "истинно" и "ложно" относятся только к суждениям, утверждениям?

В теории познания термин "истинно" нередко употребляют по отношению к ощущениям, образам восприятия, памяти и воображения, а также к понятиям. В логике, как правило, областью определения свойства истинности считают только суждения. На наш взгляд, надо различать содержание термина "истинно" в зависимости от его применения к ощущениям, восприятиям и понятиям, с одной стороны, или к суждениям — с другой. В первом случае "истинно" является синонимом "адекватно". И ощущения, и образы восприятия, памяти и воображения, так же, как и понятия, можно сравнивать с теми или иными фрагментами действительности и судить об их адекватности или неадекватности. Но само сравнение происходит извне, сами образы и понятия не включают в себя этот акт сравнения, тогда как суждения являются самими этими актами сравнения, отчетом о его результатах. Термин "истинно", применяемый к суждениям, и термин "истинно" (адекватно), применяемый к образам и понятиям, различаются и формальными свойствами: первый является одноместным предикатом, тогда как второй — двухместным.

Иногда оценивают как истинные и ложные также умозаключения; мы будем их характеризовать как допустимые, правильные, если они воспроизводят отношение логического следования. Применимость терминов "истинно" и "ложно" к вопросам, предписаниям, желаниям, нормам в настоящее время широко обсуждается. Нам представляется, что если и можно применять истинностную характеристику к указанным формам мысли, то лишь в смысле, отличном от понятия истины, относящегося к суждениям. Истинностная характеристика вопросов, норм и так далее отвечает совершенно иным условиям, нежели в случаях применения к обычным суждениям.

Вообще говоря, вопрос стоит шире. Каковы критерии осмысленного применения свойства "быть истинным" в логике? К любым ли суждениям оно применимо (например, к суждениям о несуществующих объектах типа: "Нынешний король Франции лыс", "Гамлет не черноволос")? Пока не уточнены условия и особенности истинностных характеристик суждений, не выявлено четко, какая философская концепция истины лежит в основе, лишено смысла обсуждение вопроса о действии таких логических законов, как закон непротиворечия и закон исключенного третьего, бессмысленно решать, могут ли наши утверждения быть ни истинными, ни ложными или одновременно и истинными, и ложными.

Кажется, все согласны, что суждения выражаются в повествовательных предложениях того или иного языка. Но что это значит? Означает ли это, что имеется некий идеальный объект — суждение, который лишь находит выражение в предложении? С чисто формальной — синтаксической — точки зрения предложения языка можно рассматривать как особого рода последовательности дискретных элементов некоторого конечного алфавита. Построить формальную грамматику языка — значит указать по виду и способам сочленения элементов языка, какие последовательности языка являются грамматически правильными, а какие — нет, и в частности, какие последовательности элементов являются предложениями. Такой чисто формальный, синтаксический, способ построения и анализа языка реализуется для искусственных языков логики. (Имеются серьезные попытки применить аналогичные методы к анализу естественных языков.)

Может ли предложение, рассматриваемое с такой синтаксической точки зрения, быть истинным? Ответ на этот вопрос только отрицательный, так как предложение в этом случае есть некоторая материальная вещь (или вид, схема вещей, если графически равные формулы отождествляются). Чтобы быть оцененными в качестве истинных или ложных, грамматически правильные последовательности должны соотноситься с внелингвистическими ситуациями, представлять их.

Одна вещь может представлять другую вещь, быть знаком этой вещи только при наличии системы, использующей одни материальные процессы в качестве средств описания других. Точно так же предложения могут задавать определенные положения дел, внелингвистические ситуации лишь в определенной системе, системе употребления языка. Это относится и к искусственным языкам логики, логическим системам. Необходимо также учитывать, что суждения выносит субъект. Произнося или записывая предложение, выражающее суждение, субъект совершает некоторый акт утверждения (отрицания), отличный от актов повеления, предписания или запроса информации. В логической семантике на определенном уровне рассмотрения мы отвлекаемся от прагматического аспекта, от учета субъекта, совершающего акт суждения (хотя само суждение невозможно без этого аспекта), но не отвлекаемся от самого акта суждения. В силу сказанного, мы имеем дело не с суждениями непосредственно, а с интерпретированными предложениями, выражающими суждения. Такого рода предложения будем называть высказываниями. Свойства "быть истинным" и "быть ложным" относятся к высказываниям, то есть интерпретированным предложениям.

Пока мы принимаем довольно сильное допущение, что каждое отдельно взятое высказывание может быть оценено как истинное или ложное. Это допущение не столь очевидно, как представляется на первый взгляд, и, возможно, придется отказаться от него или модифицировать его. Дело в том, что часто сопоставляются с действительностью не отдельно взятые высказывания, а целые системы высказываний, научные теории в целом; предложения же, взятые изолированно от системы, не получают самостоятельного значения интерпретации. Но пока мы примем сформулированное выше допущение.

Истинными считаются высказывания, соответствующие действительности, ложными — не соответствующие действительности. Другими словами, если то, что утверждает высказывание, имеет место, то высказывание истинно, в противном случае — ложно. Подобное понимание истинности было сформулировано еще Аристотелем. Содержательно оно является достаточно ясным, однако для использования в логике должно получить более точную формулировку. Следует однозначным образом задать условия применения понятия "быть истинным" к высказываниям. Подобное уточнение классического понимания истинности применительно к языкам с точным образом описанной структурой предложил А.Тарский. Согласно Тарскому, предикат "быть истинным" должен удовлетворять следующей схеме:

X — истинное высказывание тогда и только тогда, когда p, где вместо p подставляется любое высказывание, а вместо X — его имя. Это, конечно, *не определение* предиката "быть истинным высказыванием", но *схема*, выявляющая общее условие, которому должно удовлетворять любое определение, чтобы быть определением понятия истинного высказывания в классическом смысле. Введенное по определению понятие истинности будет адекватным только в случае, если для него верны (могут быть доказаны) все случаи подстановки в данную схему. Таким образом, схема Тарского не связана с каким-либо новым пониманием истинности (ложности) наших утверждений, она лишь уточняет обычные условия истинности, сформулированные еще Аристотелем.

Согласно схеме, утверждать истинность некоторого высказывания означает то же, что и утверждать само это высказывание. Каков тогда смысл применения предиката "истинно" и не являются ли случаи подстановки в схему просто тавтологиями? Однако легко усмотреть, что в левой части эквивалентности речь идет о высказывании (дается определенная его оценка), а в правой — не о высказывании, а об определенном положении дел в действительности, утверждаемом этим высказыванием. Описываемое употребление предиката "истинно" вполне согласуется с обычным его употреблением. Однако при достаточно естественных условиях требования схемы Тарского не всегда могут быть реализованы. Может оказаться, что имеет место то, о чем говорит предложение, и в то же время оно не будет истинным.

Говорят, что язык *семантически замкнут*, если в нем для каждого выражения может быть построено его имя (или описание) и если он включает семантические понятия, относящиеся ко всем выражениям этого языка, например, предикат "истинно", определенный на всех высказываниях языка. Если язык семантически замкнут, то нетрудно средствами этого языка построить предложение, утверждающее свою собственную неистинность. Если мы, к тому же, допустим, что действует обычная классическая логика, то предложение, говорящее о своей собственной неистинности, оказывается одновременно истинным и ложным (неистинным). Тем самым получаем известный со времен античности парадокс Лжеца, или парадокс Эпименида. Аналогично можно сформулировать другие семантические парадоксы, связанные с понятием определимости и обозначения.

Каким образом можно справиться с такого рода парадоксами? Наряду с семантическими парадоксами, хорошо известны логические, или теоретико-множественные, парадоксы. Теоретико-множественные (логические) парадоксы разрешаются различными методами:

1) путем принятия простой теории типов, то есть путем введения ограничений на правила образования предложений;

2) путем ослабления аксиомы свертывания: мы не можем образовать множество по любому заданному условию, с помощью условия можно лишь выделить некоторое подмножество из известного множества;

3) путем изменения правил логики.

Наиболее принятым в теории множеств является второй способ устранения логических парадоксов, хотя и остальные два представляют значительный интерес.

Семантические парадоксы можно также устранить различными способами. Исторически первым является разветвленная теория типов Б.Рассела. В разветвленной теории типов имеются различные уровни внутри одного и того же типа, в частности, нет единого типа предложений. Поэтому мы не имеем и единого понятия истинности. Разветвленная теория типов налагает чрезмерно жесткие ограничения на выразительные возможности и способы образования понятий; в силу этого она не получила широкого распространения.

Второй, широко известный метод элиминации семантических антиномий был сформулирован А.Тарским. Он предложил ограничиться семантически не замкнутыми языками, разграничив объектный язык и метаязык. В объектном языке не содержатся и не могут быть определены семантические понятия, относящиеся ко всем выражениям этого языка. Подход Тарского запрещает некоторые процедуры самоприменимости, в частности, в семантически не замкнутом языке не может быть сформулировано предложение, утверждающее свою собственную неистинность. Но это требование не устраняет любые процедуры самоприменимости, в частности, в достаточно богатом языке может быть сформулировано предложение, утверждающее свою недоказуемость.

Иногда говорят, что ограничение языками семантически не замкнутыми, есть не решение, а простое отбрасывание семантических парадоксов. Возможно, это и так. Однако способ устранения семантических парадоксов, разработанный А.Тарским, с четким подразделением на объектный язык и метаязык привел к искючительно важным результатам. Во-первых, точными средствами удалось исследовать дедуктивные и выразительные возможности логических систем со стандартной формализацией. Далее, были получены важные характеристики семантических понятий, в том числе и понятия истинности, применительно к стандартным логическим языкам; исследовано отношение истинности к доказуемости. Этот круг вопросов рассматривается ниже, в последующих параграфах.

Однако имеется и принципиально иной способ преодоления семантических парадоксов. Можно поставить под сомнение осмысленность парадоксального утверждения Лжеца, во всяком случае возможность его истинностной оценки. Дело не просто в "устранении" семантических парадоксов. Парадоксы типа парадокса Лжеца связаны с важным кругом логико-семантических понятий. Анализ причин их возникновения ведет к выявлению наших допущений относительно истинности и смысла высказываний, их семантической корректности. Это, в свою очередь, позволяет рассмотреть те средства, которые "блокируют" ведущие к противоречиям допущения.

Предложение, утверждающее свою собственную неистинность, приводит к противоречию при допущении, что понятие истинности является всюду определенным: относительно любого высказывания можно утверждать, что оно истинно или ложно. Предполагается также, что никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Отказ от этих допущений позволяет избежать семантических парадоксов *без подразделения языка на объектный и метаязык.* Но логические правила в такого рода семантически замкнутых системах не совпадают с правилами классической логики. Одним из первых такой способ преодоления парадоксов предложил в 1938 г. Д.А.Бочвар. Логика для языков с частично определенными функциями была построена С.Клини. В 1975 г. С.Крипке, с одной стороны, и Р.Мартин с П.Вудруффом — с другой, положили начало новому этапу в исследованиях семантически замкнутых языков. Этого рода вопросы рассматриваются нами в пятой главе.

§ 2. Референциальная семантика для первопорядковых языков

Стандартный первопорядковый прикладной язык строится из дескриптивных нелогических констант, множество которых будем называть словарем **A** данного языка **L**, счетного числа индивидных переменных x_1, x_2, ..., логических констант &, V, $\supset$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$, =, скобок и запятой. Среди знаков словаря **A** могут быть индивидные константы a_1, a_2, .., n-местные предикатные константы R_1^n, R_2^n, ..., где n>1, k-местные функциональные константы f_1^n, f_2^n, ... (k>1). Индивидные константы можно рассматривать как нуль-местные функциональные константы.

Стандартным образом определяем понятия терма и формулы.

1. Индивидная константа и индивидная переменная суть термы.

2. Если α есть k-местная функциональная константа и t_1, ... t_k — термы, то α(t_1,... t_k) суть терм.

Теперь определим понятие формулы:

1. Если t_1 и t_2 — термы, то (t_1 = t_2) — формула.

2. Если P — n-местная предикатная константа и t_1,... t_n — термы, то P(t_1,... t_n) — формула.

3. Если α — формула, то $\urcorner\alpha$ — формула.

4. Если α и β — формулы, то (α&β), (αVβ), ($\alpha\supset\beta$) — формулы.

5. Если α — формула и x — индивидная переменная, то и $\forall x\alpha$ и $\exists x\alpha$ — формулы.

Стандартным образом определяем понятия свободного и связанного вхождений переменной. Предложение есть формула без свободных вхождений индивидных переменных.

Построенная формальная система пока еще не является языком, то есть выражения не имеют интерпретации.

При построении референциальной семантики мы можем дать интерпретацию выражениям нашего языка двояким образом. Во-первых, мы можем интерпретировать выражения языка L, указав для каждого выражения (терма и формулы) его перевод в метаязык. Естественно, метаязык мыслится как уже интерпретированный. Именно так поступает А.Тарский в своей известной работе "О понятии истины в формализованных языках". Но возможен и другой путь: можно сопоставить каждому выражению языка некоторый нелингвистический объект. Естественно, само это сопоставление описывается в метаязыке. В метаязыке мы можем описывать выражения исследуемого языка, некоторые объекты и отношения между выражениями этого языка и объектами. Остановимся на втором пути. Будем предполагать, что наш метаязык достаточно богат, в частности, мы можем говорить на нем о множестве объектов, об отношениях между объектами данного множества и так далее, то есть практически будем рассуждать в рамках теории множеств.

Под *интерпретацией* I языка $\mathbf{L_A}$ (то есть языка $\mathbf{L}$ со словарем $\mathbf{A}$) на непустую область U будем понимать функцию, которая каждой индивидной константе словаря $\mathbf{A}$ сопоставляет элемент из U, каждой n-местной предикатной константе сопоставляет множество n-ок U и каждой k-местной функциональной константе — функцию из U^k в U, где U^k — декартово произведение степени k.

Пару $<U,I(\mathbf{A})>$ будем называть *возможной реализацией* языка $\mathbf{L_A}$. Возможная реализация есть реляционная система (система с отношениями), соотнесенная с языком. Для обозначения возможных реализаций будем использовать букву $\mathbf{M}$, возможно с индексами.

Пусть φ, ψ... суть переменные метаязыка, пробегающие по функциям, сопоставляющим индивидным переменным элементы из U. Введем предикат "ψ приписывает всем переменным, кроме, возможно, x, те же значения, что и φ", сокращенно $\psi\underset{x}{=}\varphi$. Теперь мы можем ввести понятие истинности формулы в возможной реализации $\mathbf{M}$ относительно приписывания значений индивидным переменным φ и понятие значения терма t в возможной реализации $\mathbf{M}$ относительно приписывания значений свободным переменным φ. Последний предикат для краткости будем обозначать Зн(t,φ), опуская указание, что речь идет о значении в данной возможной реализации Зн$(t,\varphi,\mathbf{M})$. Этот предикат вводим с помощью индуктивного определения:

Зн$(t,\varphi) = I(t)$, если t есть индивидная константа;

Зн$(t,\varphi) = \varphi(t)$, если t есть индивидная переменная;

Зн$(f(t_1,..., t_k),\varphi) = (I(f))($Зн$(t_1,\varphi),...,$Зн$(t_k,\varphi))$.

Теперь мы также индуктивно вводим предикат "A истинно в возможной реализации $\mathbf{M}$ относительно приписывания свободным переменным φ", сокращенно $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$:

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} t_1 = t_2 \Leftrightarrow$ Зн$(t_1,\varphi) =$ Зн(t_2,φ);

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} P(t_1,..., t_n) \Leftrightarrow (J(P))($Зн$(t_1,\varphi),...,$Зн$(t_n,\varphi))$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A\&B \Leftrightarrow \mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$ и $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} B$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A\vee B \Leftrightarrow \mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$ или $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} B$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A\supset B \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$, или $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} B$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} \forall xA \Leftrightarrow$ для всякой ψ, такой, что $\psi\underset{x}{=}\varphi$, $\mathbf{M}\Vdash^{\psi} A$;

$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} \exists xA \Leftrightarrow$ для некоторой ψ, такой, что $\psi\underset{x}{=}\varphi$, $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A$.

Формула A *общезначима* в возможной реализации $\mathbf{M}$ (сокращенно $\mathbf{M}\models A$), если и только если для всякой функции приписывания значений φ A истинно в $\mathbf{M}$ относительно φ, то есть $\forall\varphi$ $(\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A)$. Формула A *выполнима* в возможной реализации $\mathbf{M}$ (сокращенно Вып$(A,\mathbf{M})$), если и только если существует такое приписывание φ, что A истинно в $\mathbf{M}$ при φ:$\exists\varphi(\mathbf{M}\Vdash^{\varphi} A)$. Про предложение, то есть замкнутую формулу, вместо того, чтобы говорить, что оно общезначимо в $\mathbf{M}$, мы будем говорить, что оно *истинно* в $\mathbf{M}$.

Нетрудно показать, что предложение истинно в $\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда оно выполнимо в $\mathbf{M}$. Формула A *общезначима в области* U, если и только если она общезначима в $\mathbf{M} = <U,I(A)>$ при всякой интерпретации I; аналогично вводится понятие выполнимости в U. Наконец, в достаточно богатом метаязыке можно ввести понятие общезначимости и выполнимости. Формула A *общезначима*, если и только если она общезначима во всех возможных реализациях. Для общезначимости примем сокращение: $\models A$. Формула A *выполнима*, если и только если она выполнима по крайней мере в одной возможной реализации.

Целесообразно ввести два оператора. Множеству предложений (или формул) Σ можно сопоставить множество возможных реализаций, в которых она истинна:

$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathbf{M}|\forall A\ (A\in\Sigma\Rightarrow\mathbf{M}\models A)\}$

Возможная реализация, в которой истинно каждое предложение Σ, является *моделью* Σ.

С другой стороны, каждому классу возможных реализаций можно сопоставить класс всех предложений, истинных в каждой из возможных реализаций:

$Th(K) = \{A \mid \forall \mathbf{M}(\mathrm{M} \in K \Rightarrow \mathbf{M} \models A)\}$

Мы по традиции пишем Th, но могли бы писать Tr [4]. Дело в том, что $Th(K)$ замкнуто относительно отношения логического следования и является теорией. В частности, если K есть пустой класс, то $Th(K)$ есть противоречивое множество формул и совпадает с классом всех формул.

Общезначимые формулы иначе называют *логически истинными* формулами.

Наряду с понятием логической истинности на основе введенного понятия истинности мы можем ввести необходимое нам семантическое понятие логического следования. Мы различаем три отношения. Начнем со случая, когда речь идет об отношениях между двумя формулами.

Из *A логически следует B* тогда и только тогда, когда для всякой возможной реализации **M** и для всякого приписывания значений переменным φ если A истинно в **M** относительно φ, то B истинно в **M** относительно φ. Символически:

$A \models B \Leftrightarrow \forall \mathbf{M}\ \forall \varphi\ (\mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} A \Rightarrow \mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} B)$.

Из *A следует B* тогда и только тогда, когда для всякой возможной реализации **M** если A истинно в **M**, то B истинно в **M**, то есть: из A следует $B \Leftrightarrow \forall \mathbf{M}\ \forall \varphi\ (\mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} A \Rightarrow \mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} B))$.

Легко видеть, что первое отношение сильнее второго. Приведем пример, когда имеет место отношение следования, но не имеет места отношение логического следования. Из $A(x)$, следует $\forall x A(x)$, но из $A(x)$ не следует логически $\forall x A(x)$. Если A и B суть предложения, то понятия следования и логического следования совпадают. Наконец, мы можем ввести еще более слабое отношение.

[4] Последнюю терминологию мы используем в нашей книге "Логическая семантика и философские основания логики" (М., 1986) и ряде статей.

Из *A следует B относительно общезначимости* тогда и только тогда, когда, если A общезначимо, то B общезначимо.

Из общезначимости A следует общезначимость B:

$\forall \mathbf{M}\ \forall \varphi\ (M \overset{\varphi}{\Vdash} A) \Rightarrow \forall \mathbf{M}\ \forall \varphi\ (\mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} B)$

Указанные отношения могут быть обобщены до отношений между двумя множествами формул. Эти отношения целесообразно ввести на семантическом уровне, так как известное секвенциальное построение можно рассматривать как непосредственную формализацию отношения логического следования между множествами формул.

Пусть Γ и Δ — множества формул.

Из Γ логически следует Δ тогда и только тогда, когда для всякой возможной реализации **M** и всякой функции приписывания φ, если каждая формула A из Γ истинна в **M** при φ, то существует такая формула B из Δ, что она истинна в **M** при φ. Символически:

$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \forall \mathbf{M} \forall \varphi (\forall A (A \in \Gamma \Rightarrow \mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} A) \Rightarrow \exists B (B \in \Delta \wedge \mathbf{M} \overset{\varphi}{\Vdash} B))$.

Хорошо известно, что отношения логического следования, так же как и свойство логической истинности для первопорядкового языка, могут быть формализованы. Возможны разные способы формализации семантического отношения логического следования: аксиоматический, натурального вывода, секвенциальный, основанный на понятии дерева поиска доказательства. Имеются также разные способы доказательства равнообъемности семантических понятий логического следования и общезначимости и соответствующих им синтаксических понятий доказуемости и выводимости. Наиболее известен метод Генкина. Однако очень нагляден метод, основанный на хинтикковских модельных множествах. Ниже мы дадим модифицированное доказательство формализуемости отношения логического следования, реализуя идеи, опубликованные нами в 1976 г.[5]

[5] См.: *Смирнова Е.Д.* Упрощение бетовско-хинтикковского доказательства полноты исчисления предикатов первого порядка // VII Всесоюзный симпозиум по логике и методологии науки. Киев, 1976.

Обычно логика сначала строится как чисто синтаксическая, формальная система. Затем строится семантика для этой логической системы и соответственно возникает вопрос об адекватности построенной семантики этой формальной системе.

Но возможен иной путь. Сначала вводятся семантические понятия и лишь затем ставится вопрос о возможности формализации этих семантических понятий. Таким образом одна и та же задача формулируется двояко. В первом случае говорят о полноте данной формальной системы относительно данной семантики; во втором — о возможности полной формализации семантических свойств или отношений, то есть о возможности построения исчисления, такого, что рассматриваемое семантическое понятие (понятия) по объему совпадает с синтаксическим.

Мы приняли второй путь построения. Формализовать мы будем не свойство общезначимости формул, а отношение логического следования. При этом удобнее рассматривать отношение логического следования не между множеством формул и формулой, а между двумя множествами формул.

Для классической логики рассмотрение отношения логического следования между двумя множествами формул облегчает нахождение формальной системы, являющейся формализацией этого отношения, и доказательство полноты проведенной формализации. Можно построить формальную систему, в которой отсутствует сечение: понятие логического следования формализуется многосукцедентным секвенциальным исчислением без сечений. В этом случае создается определенный параллелизм между семантическими и синтаксическими понятиями и тем самым облегчается доказательство полноты.

Как хорошо известно, для секвенциальной многосукцедентной формулировки классической логики имеет место теорема об устранимости сечения. Понятию логического следования между двумя множествами формул мы сопоставляем секвенциальное исчисление без сечений. Это существенно облегчает доказательство полноты, так как исчисление без сечений прямо копирует отношение логического следования. Если же формализовать отношение логического следования между множеством формул и формулой, то этому отношение должно соответствовать односукцедентное исчисление секвенций. Как хорошо известно, проблема элиминации сечений для односукцедентного исчисления — задача отнюдь не тривиальная и достигается не прямо, а только косвенным образом — посредством погружения классической логики в конструктивную. Можно, конечно, доказывать адекватность логическому следованию исчисления с сечением, но в этом случае приходится использовать иной способ доказательства.

Для реализации намеченного пути доказательства проделаем некоторую предварительную работу. Установим свойства, присущие отношению логического следования, они подскажут нам, какие правила должны быть приняты в соответствующем исчислении. Эти свойства будут сформулированы в лемме 1.

Лемма 1. Имеют место следующие эквивалентности:

$\Gamma \models \Delta \cup \{A \supset B\} \Leftrightarrow \{A\} \cup \Gamma \models \Delta \cup \{B\}$;

$\{A \supset B\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{A\}$ и $\{B\} \cup \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta \cup \{A \& B\} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{A\}$ и $\Gamma \models \Delta \cup \{B\}$;

$\{A \& B\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \{A, B\} \cup \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta \cup \{A \vee B\} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{A, B\}$;

$\{A \vee B\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \{A\} \cup \Gamma \models \Delta$ и $\{ B\} \cup \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta \cup \{\neg A\} \Leftrightarrow \{A\} \cup \Gamma \models \Delta$;

$\{\neg A\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{A\}$;

$\Gamma \models \Delta \cup \{\forall x Ax\} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{A\mathrm{w}\}$; где

$\forall x Ax$ есть $\forall x F^{w}_{x} Ax$ и свободная переменная w не входит в формулы Γ, Δ и $\forall x Ax$;

$\{\forall x Ax\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \{At\} \cup \Gamma \models \Delta$,

где t есть произвольная свободная переменная;

$\Gamma \models \Delta \cup \{\exists x Ax\} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta \cup \{At\}$;

$\{\exists x Ax\} \cup \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \{Aw\} \cup \Gamma \models \Delta$.

(В последних двух случаях ограничения те же, что и в двух предыдущих.)

Наконец, $\Gamma \cap \Delta \neq 0 \Rightarrow \Gamma \models \Delta$.

Докажем первую эквивалентность.

(1) $\{A\}\cup\Gamma \vDash \Delta\cup\{B\}\Leftrightarrow$

(2) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\{A\}\cup\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C(C\in\Delta\cup\{B\}\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(3) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\{A\}\vee D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C((C\in\Delta\vee C\in\{B\}\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(4) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\{A\}\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\wedge\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C(C\in\{B\}\wedge$
$\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C)\vee\exists C(C\in\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(5) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}A\wedge\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}B\vee\exists C(C\in\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(6) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow(\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}A\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}B\vee\exists C(C\in\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C)))\Leftrightarrow$

(7) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}A\supset B\vee\exists C(C\in\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(8) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C(C\in\{A\supset B\}\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C)\vee$
$\exists C(C\in\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(9) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C((C\in\{A\supset B\}\vee C\in\Delta)\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(10) $\forall\mathbf{M}\forall\varphi(\forall D(D\in\Gamma\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Rightarrow\exists C(C\in\{A\supset B\}\cup\Delta\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C))\Leftrightarrow$

(11) $\Gamma\vdash\Delta\cup\{A\supset B\}$.

Переход от (1) к (2) совершается на основании определения $\vDash$. От (2) к (3) переходим, используя свойства теоретико-множественного объединения; от (3) к (4) — на основании эквивалентностей $A\vee B\supset C\Leftrightarrow(A\supset C)\&(B\supset C)$ и $(A\vee B)\&C\Leftrightarrow A\&C\cup B\&C$ и свойств $\forall$ и $\exists$; от (4) к (5) — в силу того, что $\forall D(D\in\{A\}\Rightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}D)\Leftrightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}A$ и $\exists C(C\in\{B\}\wedge\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}C)\Leftrightarrow\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}B$. От (5) к (6) переходим в силу того, что $A\&B\supset C\vee D\Leftrightarrow B\supset(A\supset C\vee D)$; от (6) к (7) — в силу семантических правил для импликации; от (7) к (8) — на тех же основаниях, что и от (4) к (5); от (8) к (9) — в силу свойств $\exists$ и закона дистрибутивности; от (9) к (10) — на основании свойств теоретико-множественного объединения; от (10) к (11) — по определению логического следования **ЛС**. Остальные эквивалентности доказываются аналогично.

Утверждения леммы 1 описывают условия следования сложной формулы (совместно, дизъюнктивно, с множеством других) из данного множества формул, и вопрос сводится к следованию более простых формул, составляющих сложную. С другой стороны, вопрос о следовании из сложной формулы (совместно с множеством других) сводится к вопросу о следовании из множеств, включающих уже не саму сложную формулу, а ее составлявшие.

Таким образом, вопрос об отношении логического следования между двумя множествами формул, в одно из которых входит сложная формула, сводится к вопросу об отношении следования между двумя множествами формул, в которые уже входят составляющие части сложной формулы.

Перейдем к построению исчисления, формализующего отношения логического следования. В исчислении будем оперировать объектами, называемыми секвенциями. Под секвенцией имеется в виду выражение вида $\Gamma\to\Delta$, где Γ и Δ — множества формул (возможно, пустые). Исчисление строится таким образом, что секвенция $\Gamma\to\Delta$ доказуема в исчислении тогда и только тогда, когда $\Gamma\vDash\Delta$.

Сформулированным выше семантическим соотношениям сопоставляются синтаксические аналоги. Первым 12 соотношениям леммы 1, прочитанным справа налево, соответствуют правила вывода исчисления, или, как мы будем их называть, фигуры заключения. 13-му соотношению леммы 1 соответствуют основные секвенции.

В исчислении секвенций вместо $\{A\}\cup\Gamma\to\Delta\cup\{B\}$ будем просто писать $A,\Gamma\to\Delta,B$. Основная секвенция:

$\Gamma_1,A,\Gamma_2\to\Delta_1,A,\Delta_2$

Правила вывода (фигуры заключения) подразделяются на правила введения логических знаков слева и справа:

$$\to\supset\ \frac{A,\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\supset B}\qquad\qquad \supset\to\ \frac{\Gamma\to\Delta,A\quad\ B,\Gamma\to\Delta}{A\supset B,\Gamma\to\Delta}$$

$$\to\&\ \frac{\Gamma\to\Delta,A\quad\ \Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\&B}\qquad\qquad \&\to\ \frac{A,B,\Gamma\to\Delta}{A\&B,\Gamma\to\Delta}$$

$$\to\vee\ \frac{\Gamma\to\Delta,A,B}{\Gamma\to\Delta,A\vee B}\qquad\qquad \vee\to\ \frac{A,\Gamma\to\Delta\quad\ B,\Gamma\to\Delta}{A\vee B,\Gamma\to\Delta}$$

$$\to\neg\ \frac{A,\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\neg A}\qquad\qquad \neg\to\ \frac{\Gamma\to\Delta,A}{\neg A,\Gamma\to\Delta}$$

$$\to\forall\ \frac{\Gamma \to \Delta, Aw}{\Gamma \to \Delta, \forall xAx} \qquad \forall\to\ \frac{At, \forall xAx, \Gamma \to \Delta}{\forall xAx, \Gamma \to \Delta}$$

$$\to\exists\ \frac{\Gamma \to \Delta, \exists xAx, At}{\Gamma \to \Delta, \exists xAx} \qquad \exists\to\ \frac{Aw, \Gamma \to \Delta}{\exists xAx, \Gamma \to \Delta}$$

На $\to\forall$ и $\exists\to$ накладываются обычные ограничения: w не должна входить в Γ и Δ. $\forall xAx$ есть $\forall xF^w_x Aw$ и $\exists xAx$ есть $\exists xF^w_x Aw$, где подстановка правильна.

Мы предполагаем, что правила применяются независимо от порядка вхождения формул. При более точном подходе мы должны были бы переписать правила введения логических знаков, например, для $\to\supset$, следующим образом:

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to \Delta_1, B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, A \supset B, \Delta_2}$$

Аналогично для других правил. Или же надо постулировать два правила перестановки:

$$\frac{\Gamma, C, D, \Delta \to \Theta}{\Gamma, D, C, \Delta \to \Theta} \text{ и } \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Theta}$$

Под доказательством мы понимаем фигуру в виде конечного дерева. Понятие доказательства вводим индуктивно:

1. Основная секвенция S есть доказательство и S — его последняя секвенция.
2. Если α и β — доказательства, s_1 и s_2 — их последние секвенции, $\frac{s_1}{s}$ и $\frac{s_1 s_2}{s}$ — фигуры заключения (правила вывода), $\frac{\alpha}{s}$ и $\frac{\alpha\beta}{s}$ суть доказательства и s — их последняя секвенция.

Секвенция s доказуема, если существует доказательство, последняя секвенция которого есть s.

Введенное выше исчисление обозначим **GK** (классическое исчисление в генценовской форме); в приведенной выше форме оно было сформулировано Кангером (1963).

Теорема 1. Если секвенция Γ→Δ доказуема в **GK**, то Γ ⊨Δ.

Доказательство проводится индукцией по построению доказательства (высоте доказательства) на основе леммы 1. Основная секвенция воспроизводит отношение логического следования, и фигуры заключения позволяют перейти от одних утверждений о логическом следовании к другим.

Чтобы доказать полноту исчисления **GK**, построим вспомогательное исчисление **BK**[6] . Оно отличается от уже построенного GK двумя особенностями: 1) дается иная форма записи секвенций и 2) вместо понятия доказательства вводится понятие дерева поиска доказательства.

Мы дали первоначально запись секвенций с использованием стрелки, так как эта форма записи более привычна, а также потому, что она "копирует" запись утверждения о логическом следовании. Изменим форму записи секвенций: вместо того, чтобы использовать стрелку →, отметим некоторым значком, например "T", формулы, стоящие слева от стрелки, и знаком "F" — формулы, стоящие справа от стрелки. Тогда, например, секвенция $A\supset$B, $\urcorner(A\supset C)\to B\supset C$ запишется: $TA\supset B$, $T\urcorner(A\supset C)$, $FB\supset C$.

Подчеркнем, что изменилась только форма записи. Секвенции можно записывать и другими способами, например как пару множеств (Γ;Δ); можно отмечать лишь формулы, стоящие с одной стороны от стрелки. Новая форма записи дает некоторые технические преимущества при доказательстве полноты. Формулы со знаками T и F будем называть *отмеченными*.

Фигуры заключения теперь примут следующий вид[7] (# есть последовательность отмеченных формул):

$$F\supset\ \frac{TA, FB, \Sigma}{FA\supset B, \Sigma} \qquad T\supset\ \frac{FA, \Sigma \quad TB, \Sigma}{TA\supset B, \Sigma}$$

---

[6] Мы называем исчисление BK по имени Бета.

[7] В отличие от обычной формулировки правил для аналитических таблиц мы приводим их в "перевернутой" форме: они применяются не сверху вниз, а снизу вверх. Тем самым подчеркивается тесная связь аналитических таблиц с секвенциальными исчислениями.

$$F\,\&\,\frac{FA,\Sigma \qquad FB,\Sigma}{FA\&B,\Sigma} \qquad T\,\&\,\frac{TA,TB,\Sigma}{TA\&B,\Sigma}$$

$$F\vee\frac{FA,FB,\Sigma}{FA\vee B,\Sigma} \qquad T\vee\frac{TA,\Sigma \qquad TB,\Sigma}{TA\vee B,\Sigma}$$

$$F\neg\frac{TA,\Sigma}{F\neg A,\Sigma} \qquad T\neg\frac{FA,\Sigma}{T\neg A,\Sigma}$$

$$F\forall\frac{FAw,\Sigma}{F\forall xAx,\Sigma} \qquad T\forall\frac{TAt,\Sigma,T\forall xAx}{T\forall xAx,\Sigma}$$

$$F\exists\frac{FAt,\Sigma,F\exists xAx}{F\exists xAx,\Sigma} \qquad T\exists\frac{TAw,\Sigma}{T\exists xAx,\Sigma}$$

Ограничения те же самые, что и при формулировке фигур заключения для секвенций со стрелками. Мы имеем те же правила с точностью до порядка членов.

Правила $T\forall$ и $F\exists$ переформулируем следующим образом:

$$\frac{TAt_1,\ldots,TAt_k,\Sigma,T\forall xAx}{T\forall xAx,\Sigma} \quad \text{и} \quad \frac{FAt_1,\ldots,FAt_k,\Sigma,F\exists xAx}{F\exists xAx,\Sigma}$$

где $t_1,\ldots t_k$ — все свободные переменные, входящие в Σ и $\forall xAx$ ($\exists xAx$) или $t_1 = w_o$, если в Σ и $\forall xAx$ ($\exists xAx$) нет вхождений свободных переменных[8] . Естественно, эта замена не изменяет класса доказуемых формул. Множество отмеченных формул будем называть замкнутым, если существует такая формула A, что $TA\in\Sigma$ и $FA\in\Sigma$.

Под процедурой поиска доказательства множества отмеченных формул Σ (секвенций Σ) будем понимать следующую процедуру:

1. Проверяется, будет ли множество Σ замкнутым; если оно замкнуто, то процедура заканчивается; если не замкнуто, то применяем к самому левому вхождению неатомарной отмеченной формулы одну из фигур заключения (снизу вверх) и переходим к следующему этапу. Если ни одно из правил не применимо, то процедура заканчивается.

[8] Мы даем новую формулировку правил T∀ и F∃, чтобы каждому множеству отмеченных формул сопоставлялось одно-единственное дерево поиска доказательства.

2. Пусть осуществлено k шагов процедуры; результатом построения будет конечное дерево с m вершинами. На k+1-м шаге проверяем, будет каждое множество отмеченных формул, стоящее при каждой вершине, замкнутым или нет. Если множество замкнуто, то это множество оставляем без изменений (и это множество не является вершиной дерева, построенного на k+1-м шаге). Если не замкнуто, то применяется одна из фигур заключения (снизу вверх к самой левой неатомарной формуле). Если ни одна из фигур заключения не применима по крайней мере к одной вершине, то процесс обрывается. Если множества отмеченных формул, стоящих при всех вершинах, замкнуты, то процедура заканчивается.

Напомним, при применении правил $T\exists$ и $F\forall$ переменная w есть первая в алфавитном порядке свободная переменная, не входящая в нижнюю секвенцию.

В результате указанной процедуры получаем конечное дерево поиска доказательства, если процедура закончена. Если процедура не может быть окончена, будем считать, что в результате этой процедуры мы имеем бесконечное дерево поиска доказательства.

Отмеченное множество формул Σ (секвенцию Σ) назовем доказуемым, если дерево поиска доказательства конечно и каждая нить оканчивается замкнутой секвенцией.

Предложенная процедура поиска дерева доказательства организована таким образом, что каждой секвенции сопоставляется одно-единственное дерево поиска доказательства.

Теорема 2. Каждому замкнутому дереву поиска доказательства секвенции $T\Gamma$, $F\Delta$ в системе **BK** соответствует доказательство секвенции $\Gamma\to\Delta$ в **GK** и каждое доказательство секвенции $\Gamma\to\Delta$ в **GK** может быть перестроено таким образом, что оно будет замкнутым деревом поиска доказательства секвенции $T\Gamma$, $F\Delta$ в **GK**.

Как отмечалось выше, запись в форме секвенций и запись с отмеченными формулами — лишь различные способы записи правил. Правила того и другого исчисления по существу идентичны: их различие — только в форме записи.

Доказательство теоремы 2 непосредственно вытекает из этого параллелизма фигур заключения, отличающихся лишь иной формой записи. В **GK** мы имеем понятие доказательства, в **BK** — понятие не доказательства, а дерева поиска доказательства. Мы убеждаемся, что каждое дерево поиска доказательства системы **BK** после "перефразировки" правил вывода преобразуется в доказательство **GK**. И наоборот, каждое доказательство в **GK** после соответствующей перефразировки правил **GK** превращается в замкнутое дерево поиска доказательства системы **BK**.

Если дерево поиска доказательства не замкнуто, то возможны два случая:

(1) Процесс построения обрывается; в этом случае имеется нить дерева, оканчивающаяся незамкнутым множеством отмеченных формул. Поскольку ни одно правило к нему не применимо, оно представляет собой множество атомарных отмеченных формул.

(2) Процесс построения не обрывается. Мы имеем бесконечное дерево. По лемме Кенига бесконечное дерево с конечным ветвлением имеет по крайней мере одну бесконечную нить. Эта нить не содержит замкнутых множеств отмеченных формул. Если бы она содержала замкнутые множества, то, согласно принятым правилам построения дерева поиска, процесс оборвался бы и нить была бы конечной.

Пусть $\mathcal{J}_1$ есть конечная нить, соответствующая случаю (1), а $\mathcal{J}_2$ есть бесконечная нить, соответствующая случаю (2):

$\mathcal{J}_1 = \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$

$\mathcal{J}_2 = \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$

$\Sigma_1 = \Sigma$ есть исходное множество отмеченных формул, для которого строилось дерево поиска доказательства. Обозначим буквой U теоретико-множественное объединение множества из $\mathcal{J}_1$ в первом и из $\mathcal{J}_2$ во втором случае:

$$U = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i \qquad (1 \le i \le k)$$

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \qquad (i \ge 1)$$

Лемма 2. Если $\mathcal{J}$ — незамкнутая нить дерева поиска доказательства, U — теоретико-множественное объединение множеств, принадлежащих нити $\mathcal{J}$ и W — множество всех свободных переменных, входящих в формулы множества U, то $\langle U, W\rangle$ есть хинтикковская пара[9].

Пару $\langle H, W\rangle$, где H есть множество отмеченных формул и W — множество всех свободных переменных, входящих в формулы H, назовем хинтикковской, если выполняются следующие условия.

Ни одна атомарная формула не может входить в H одновременно с отметкой T и отметкой F.

Если $TA \supset B \in H$, то $FA \in H$ или $TB \in H$.

Если $FA \supset B \in H$, то $TA \in H$ и $FB \in H$.

Если $TA \& B \in H$, то $TA \in H$ и $TB \in H$.

Если $FA \& B \in H$, то $FA \in H$ или $FB \in H$.

Если $TA \vee B \in H$, то $TA \in H$ или $TB \in H$.

Если $FA \vee B \in H$, то $FA \in H$ и $FB \in H$.

Если $T\rceil A \in H$, то $FA \in H$.

Если $F\rceil A \in H$, то $TA \in H$.

Если $T\forall xAx \in H$, то $\forall w(w \in W \Rightarrow TAw \in H)$.

Если $F\forall xAx \in H$, то $\exists w! w \in W \wedge FAw \in H)$.

Если $T\exists xAx \in H$, то $\exists w(w \in W \wedge TAw \in H)$.

Если $F\exists xAx \in H$, то $\forall w(w \in W \Rightarrow FAw \in H)$.

Доказательство леммы 2 получаем из сравнения конструкции дерева поиска доказательства с определением хинтикковского множества.

Объединение всех множеств, стоящих в вершинах одной и той же незамкнутой нити дерева поиска, образует хинтикковское множество, поскольку переход от нижней вершины к вышестоящей осуществляется по правилам (правила **BK**), удовлетворяющим определению хинтикковского множества.

[9] Отмеченные формулы вместе с множеством свободных переменных, входящих в эти формулы и удовлетворяющих перечисленным выше условиям, Хинтикка называет модельным множеством; Смульян ввел термин "хинтикковское множество", мы предпочитаем говорить о "хинтикковской паре".

До сих пор речь шла о синтаксических конструкциях. Нижеследующая лемма 3 устанавливает связь между синтаксическими и семантическими свойствами.

Лемма 3. Для всякого хинтикковского множества H с множеством свободных переменных W найдутся индивидная область X, функция φ, приписывающая значения свободным переменным, и интерпретация J на X, такие, что

$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{W}}$ (X и W равномощны);

$TA \in H \Rightarrow \langle X,I\rangle \Vdash^{\varphi} A$;

$FA \in H \Rightarrow \langle X,I\rangle \nVdash^{\varphi} A$.

Лемму докажем индукцией по степени формулы (числу логических знаков).

Базис. Пусть H — множество отмеченных атомарных формул, W — множество свободных переменных. Пусть X конечное или счетное множество, такое, что мощность X равна мощности W; φ — функция, приписывающая различным индивидным переменным различные значения из области X. Тогда может быть найдена интерпретация I предикатных констант на область X, такая, что φ выполняет каждую атомарную формулу, стоящую под знаком T, и не выполняет ни одной атомарной формулы, стоящей под знаком F. Таким образом при некоторой интерпретации I и приписывании φ атомарные формулы, отмеченные знаком T, истинны, а отмеченные знаком F — ложны.

Индукционный шаг. Поскольку нам надо доказать, что существует такая функция приписывания значений свободным переменным φ и такая интерпретация I, что если $TA \in H$, то φ выполняет A в возможной реализации $\langle X,I\rangle$, и если $FA \in H$, то φ не выполняет A в $\langle X,I\rangle$, в качестве такой функции φ и такой интерпретации I мы выбираем те самые φ и I, которые удовлетворяют условиям базиса. В процессе всего доказательства φ и I фиксированы.

Допустим, что лемма 3 верна для всех формул степени $\leq k$, тогда она верна и для формул степени $k+1$.

Доказываем по случаям. Пусть $TA \supset B \in H$. Так как H есть хинтикковское множество, то из условия получаем $FA \in H$ или $TB \in H$. Если $FA \in H$, то $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} A$. По семантическим правилам $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} A \Rightarrow \langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A \supset B$, отсюда если $FA \in H$, то $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A \supset B$. Аналогично если $TB \in H$, то $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A \supset B$. Следовательно, если $TA \supset B \in H$, то $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A \supset B$.

Пусть $FA \supset B \in H$. Поскольку H — хинтикковское множество, получаем $TA \in H$ и $FB \in H$. По индуктивному допущению $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A$ и $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} B$, и отсюда по семантическим правилам $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} A \supset B$.

Пусть $T\forall xAx \in H$. Так как H — хинтикковское множество, то $\exists w(w \in W \Rightarrow TAw \in H)$. По индуктивному допущению $TAw \in H \Rightarrow \langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} Aw$. Отсюда $\forall w(w \in W \Rightarrow \langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} Aw$. Но поскольку φ приписывает различным переменным различные значения и при этом все возможные значения из области X, то $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} \forall xAx$.

Пусть $F\ \forall xAx \in H$. Поскольку H — хинтикковское множество, то $\exists w(w \in W \wedge FAw \in H)$. По индуктивному допущению $\exists w(w \in W \wedge \langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} Aw)$. Но поскольку φ приписывает различным переменным все возможные значения, то найдется такая переменная, при которой φ припишет w такое значение, что при нем формула Aw будет ложной, поэтому $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} \forall xAx$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Теорема 3. Если дерево поиска доказательства множества отмеченных формул Σ_1 не замкнуто, то существуют такая область X, приписывание значений свободным переменным φ и интерпретация I, что если $TA \in \Sigma_1$, то $\langle XI\rangle \Vdash^{\varphi} A$, и если $FA \in \Sigma_1$, то $\langle XI\rangle \nVdash^{\varphi} A$.

Доказательство. Пусть дерево поиска доказательства секвенции Σ_1 не замкнуто. Тогда существует конечная или бесконечная последовательность незамкнутых множеств Σ_1, Σ_2, ... По лемме 2, объединение U множеств этой последовательности будет хинтикковским и, по лемме 3, найдутся такая область X, приписывание φ и интерпретация I, что каждая формула, отмеченная знаком T, выполняется, а находящаяся под знаком F не выполняется. В частности, это относится и к формулам Σ_1.

Теорема 4. Если из Г логически следует Δ, то секвенция $\Gamma \to \Delta$ доказуема.

Доказательство. Пусть $\Gamma \to \Delta$ не доказуема. Тогда по теореме 2 дерево поиска доказательства множества $(T\Gamma, F\Delta)$ не замкнуто. Отсюда по теореме 3 существует конечная или счетно-бесконечная область X, функция φ и интерпретация I, такие, что $A \in \Gamma \Rightarrow \langle XI \rangle \Vdash^{\varphi} A$ и $B \in \Delta \wedge \langle XI \rangle \nVdash^{\varphi} \forall B$. Но это противоречит условию теоремы, так как $\Gamma \vDash \Delta$ тогда и только тогда, когда $\forall I \forall X \forall \varphi (\forall A (A \in \Gamma \Rightarrow \langle XI \rangle \Vdash^{\varphi} A) \Rightarrow \exists B (B \in \Delta \wedge \langle XI \rangle \Vdash^{\varphi} B)$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3 может быть усилена. Процедура поиска доказательства может быть перестроена таким образом, что в том случае, если секвенция не замкнута, процедура поиска будет продолжаться (даже если все формулы секвенции атомарны). При такой перестройке в теореме 3 утверждение "существует такая область *X*" можно заменить на "существует такая счетно-бесконечная область *X*".

Приведенное выше доказательство полноты идейно восходит к Бету (1955) и Хинтикке (1955). Однако рассмотренное доказательство отличается от оригинальных. В частности, мы специально везде говорим о процедуре поиска доказательства, а не о процедуре поиска контрпримера, так как, с нашей точки зрения, это всего лишь два разных способа речи и имеющее место подчеркивание процедуры поиска контрпримеров не является существенным. Дело в том, что когда процедуру поиска строят в секвенциональных исчислениях, то подчеркивается, что ищется именно доказательство. Когда же процедура поиска строится методом аналитических таблиц, то обычно акцентируется, что идет поиск контрпримера, знаки *T* и *F* (которые у нас просто отмечали, где стоит формула) приобретают содержательный смысл. Именно считается, что при семантическом истолковании *T* придается значение "истинно", а *F* — "ложно". Поиск в таком случае — это поиск опровержения некоторого тезиса. Приписываем тезису значение *F*, то есть допускаем, что он ложен, и начинаем искать контрпримеры тезису. Если в процессе поиска нить замыкается, мы считаем, что на этой нити контрпримера найти нельзя. Если нить не замыкается, то она и

дает контрпример для тезиса. Если контрпримеров нет, то есть каждая нить замыкается, то наше допущение ложности тезиса несостоятельно, тем самым мы доказали тезис. Такой ход рассуждения типичен для Бета и Хинтикки. В этом случае подчеркивается семантический характер процедуры поиска.

Мы избрали иной подход. *T* и *F* рассматривались нами как отметки, и речь шла не о процедуре поиска контрпримера, а о процедуре поиска доказательства. Мы подчеркивали синтаксический характер построения аналитических таблиц. В таком случае ищем мы контрпример или ищем доказательство — по существу одно и то же. Процедуры совпадают. Процедуру поиска мы строим чисто синтаксически и уже затем доказываем, что она воспроизводит семантическое отношение логического следования.

Подчеркивание поиска контрпримера в случае аналитических таблиц полезно для выявления близости аналитических таблиц семантике, но, с другой стороны, затушевывается различие между синтаксическим и семантическим подходами.

При выбранном нами подходе различия между секвенциальным методом и методом аналитических таблиц нет. Имеют место разные способы обозначения и только.

В доказательстве мы не вводили индивидных констант, их роль выполняют свободные переменные. Нам представляется также, что введение понятия логического следования как отношения между двумя множествами формул приводит к некоторым упрощениям.

Проблема полноты исчисления предикатов первого порядка была поставлена Гильбертом и Аккерманом в 1928 г.[10] Доказательство полноты впервые было дано К.Гёделем[11] ; Генкиным было предложено более прозрачное доказательство[12] , упрощенное затем Хазенегером[13] . Иной путь доказательства полноты основан на методах алгебры и топологии.

[10] См.: *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947.
[11] *Godel K.* Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktioenkalkus //Monatshefte fur Mathematik und Pysik. 1930. Bd.37. S.349-360.
[12] *Henkin L.* THe completness of the first-order functional calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1949, v.14, p.159-166.
[13] *Hesenjaeger G.* Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis fur die Vollstandigkeit des Pradikatenkalkus der ersten Stufe // The Journal of Symbolic Logic. 1953. v.18. p.42-48.

Таким образом, удается дать семантическое обоснование классической логики. Отношение логического следования для первопорядковой логики может быть формализовано: правила логики предикатов первого порядка будут гарантировать при истинности посылок истинность заключения.

Говоря о семантическом обосновании классической логики, мы допускаем некоторую условность, так как само обоснование строится при допущении очень сильных идеализаций. По существу, используются методы теории множеств. Для доказательства теоремы полноты необходима лемма Цорна или лемма Кёнига, эквивалентные аксиоме выбора теории множеств. Когда Д.Гильберт ставил вопрос о полноте классической логики предикатов, то он имел в виду нечто другое, чем построение теоретикомножественной семантики для первопорядковой логики предикатов. Попытки найти более эффективную интерпретацию классической логики предпринимались многими авторами. А.А.Марков, наконец, получил решение, показав полноту классической логики на основе более конструктивной семантики[14].

Далее, иногда возражают, что введенное понятие логической истинности как истинности во всех непустых индивидных областях основано на внелогическом допущении, ибо допущение непустоты области рассмотрения является действительно нелогическим. В принципе, можно построить логику, в которой класс доказуемых формул будет совпадать с классом формул, общезначимых во всех областях. Эта формализация была осуществлена А.Мостовским[15]. В этом случае формула $A(y)\supset\exists xA(x)$ не будет общезначимой, но ее замыкание всеобщности уже будет общезначимым. Формализация получается путем рассмотрения в качестве аксиом замыканий всеобщности всех стандартных аксиом и наложением некоторых ограничений на modus ponens.

---

14 *Марков А.А.* О полноте классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике // ДАН СССР. 1974. т.215, N2, с.266-269.

15 *Mostowski A.* On the rules of proof in the pure functional calculus of first-order // Yhe Journal of Symbolic Logic. 1951. v.15. p.107-111.

Наряду с понятием истинности центральную роль играет другое семантическое понятие — понятие *определимости*. В логике понятие определимости используется в двух смыслах: можно говорить об определимости (семантической или синтаксической) одних терминов через другие и можно говорить об *определимости внелингвистических объектов* (отношений, свойств, индивидов) *средствами некоторого языка*. В первом смысле термин определимости терминов используется в формулировках теоремы Бета (об эквивалентности явной и неявной определимости). Мы будем говорить об определимости во втором смысле, то есть об определимости внелингвистических объектов. Заметим, что между этими понятиями определимости имеется тесная связь.

Пусть **L** — первопорядковый язык и **M**=$\langle U,I\rangle$ — некоторая возможная реализация L. Рассмотрим некоторое n-местное отношение R на области U. Мы можем расширить язык **L**, введя для каждого элемента a из U его имя $\mathfrak{D}a$. Такое расширение называют элементарным. Пусть $F^{x_1\ldots x_n}_{t_1\ldots t_n}A$ есть результат подстановки вместо свободных вхождений переменных x_1, ..., x_n соответственно термов t_1, ... , t_n. Мы предполагаем, что подстановка правильна. Будем говорить, *n-местное отношение R (на области U) определимо* в **L**, если и только если существует формула α языка **L** ровно с n свободными переменными x_1, ..., x_n, такая, что:

(1) если $R(a_1, ..., a_n)$, то $\alpha(\mathfrak{D}a_1, ..., \mathfrak{D}a_n)$ истинно в **M**;

(2) если неверно, что $R(a_1, ..., a_n)$, то $\alpha(\mathfrak{D}a_1, ..., \mathfrak{D}a_n)$ неистинна в **M**.

Вообще говоря, мы могли бы обойтись без введения в язык **L** дополнительных имен объектов. Для каждого набора объектов a_1, ..., a_n найдется такая функция φ приписывания значений индивидным переменным языка **L**, что $\varphi(x_1)=a_1$, ..., $\varphi(x_n)=a_n$. Тогда наше определение определимости n-местного отношения R примет следующий вид:

n-местное отношение R определимо в L, если и только если существует формула $\alpha(x_1, ..., x_n)$ ровно с n свободными переменными x_1, ..., x_n, такая, что:

(1) если $R(a_1, ..., a_n)$ и $\varphi(x_1)=a_1, ..., \varphi(x_n)=a_n$, то $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}\alpha(x_1, ..., x_n)$;

(2) если неверно, что $R(a_1, ..., a_n)$ и $\varphi(x_1)=a_1, ..., \varphi(x_n)=a_n$, то $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}\neg\alpha(x_1, ..., x_n)$.

Аналогично может быть введено понятие определимости функций и индивидов.

K-местная функция f определима в L, если и только если существует терм $t(x_1, ..., x_k)$ ровно с k свободными переменными $x_1, ..., x_k$, такой, что:

$f(a_1, ..., a_n)=b \Rightarrow \forall\varphi(\varphi(x_1)=a_1\wedge...\wedge\varphi(x_k)=a_k\wedge\varphi(x_{k+1})=\mathrm{b} \Rightarrow \mathbf{M}\Vdash^{\varphi}t(x_1, ..., x_k) = x_{n+1})$.

Элемент a определим в L, если и только если существует терм t без свободных переменных, такой, что:

$\forall\varphi(\varphi(x_1)=\mathrm{a} \Rightarrow \mathbf{M}\Vdash^{\varphi}t=x_1)$.

Однако для обобщений понятии определимости в техническом отношении удобно иметь дело с элементарными расширениями языка, то есть с обогащением языка именами индивидов.

Вместо $\mathbf{M}\Vdash^{\varphi}A$ мы могли бы писать $A\in Th(\mathbf{M})$. *Обобщение понятия определимости* состоит в следующем. $Th(\mathbf{M})$ есть класс всех предложений, истинных в возможной реализации M. Вместо этого класса предложений можно взять *произвольный* непротиворечивый класс предложений K, замкнутый относительно синтаксического отношения выводимости. Это может быть класс всех истинных предложений в некоторой возможной реализации **M**, истинных в некотором классе возможных реализаций, а может совпасть с классом доказуемых формул. Это обобщение принадлежит А.Мостовскому[16] .

Теперь можно ввести понятие *K-определимости*: n-местное отношение R (на элементах области U) K-определимо, если и только если существует формула $\alpha(x_1, ..., x_n)$ ровно с n свободными переменными $x_1, ..., x_n$, такая, что:

(1) если $R(a_1, ..., a_n)$, то $\alpha(\mathcal{D}a_1, ..., \mathcal{D}a_n)\in K$;

(2) если неверно, что $R(a_1, ..., a_n)$, то $\neg\alpha(\mathcal{D}a_1, ..., \mathcal{D}a_n) \in K$.

16 *Mostowski A.* Sentences undecidable in formalized Arithmetic. Amsterdam, 1952. p.117.

Аналогично вводятся понятия для K-определимости функций.

Если K совпадает с классом истинных предложений в **M**, то есть $K=Th(\mathbf{M})$, то мы имеем, рассмотренное выше понятие определимости, которое будем называть формальной определимостью.

Если K совпадает с классом доказуемых предложений некоторой теории T, то мы имеем *доказуемостную определимость.*

Эти обобщенные понятия определимости позволяют единым методом доказать известные теоремы о дедуктивных и выразительных возможностях формализмов.

§ 3. Выразительные и дедуктивные возможности формализмов

Хотя подразделение языка на объектный язык и метаязык исключает из сферы корректного использования семантически замкнутые языки и приводит к запрету некоторых видов самосоотнесенности, однако не запрещает самосоотнесенность как таковую. Более того, анализ логических систем, в рамках которых можно формулировать самосоотнесенные предложения, позволяет как сделать принципиальные заключения о выразительных и дедуктивных возможностях систем со стандартной формализацией, так и дать некоторую характеристику ряда семантических понятий. и прежде всего понятия истинности.

Мы будем иметь дело со стандартными формальными системами, кратко называемыми формализмами. Для этих систем эффективным образом описывается, что есть переменная, терм, формула. Сам синтаксис исследуемого языка описывается в некотором метаязыке. Мы предполагаем, что понятие формулы является рекурсивным[17] . Стандартный формальный язык используется в логике, чтобы проводить рассуждения, из

17 В логике и формальной грамматике рассматриваются языки с нерекурсивным понятием формулы. Понятие формулы в языках общего типа трансформационной грамматики Хомского является рекурсивно-перечислимым. Исследуются также языки с несчетным словарем. Все они выпадают из области стандартных языков.

одних утверждений выводить другие. Поэтому помимо правил образования имеются правила преобразования формул. Эти правила являются *финитными*, то есть разрешают переходить от конечного числа формул к некоторой формуле. Во-вторых, эти правила структурны и эффективны, то есть только форма, структуры посылок и заключения принимаются во внимание, при этом сама форма посылок и заключения распознается механически, эффективно. Правила из пустого множества посылок суть схемы аксиом.

Помимо задания самих правил вывода нужно описать и их применение. Обычно эффективным путем вводится понятие формального вывода из множества посылок (или понятие формального доказательства). Эти понятия также являются эффективными.

Синтаксис, естественно, строится в некотором метаязыке. Все перечисленные понятия переменной, терма, формулы, правила вывода, формального вывода принадлежат метаязыку, так же, как и утверждения синтаксического характера.

До сих пор мы имели дело с прикладными первопорядковыми языками и логическими системами. Однако языки второго и более высоких порядков как и язык простой теории типов, являются языками со стандартной формализацией.

Мы все время подчеркивали, что основные синтаксические понятия — терма, формулы, вывода — в системах со стандартной формализацией должны быть эффективными. Однако это не относится ко всем синтаксическим понятиям. Так, понятия выводимости и доказуемости необязательно должны быть эффективными, рекурсивными. Для языков со стандартной формализацией эти понятия будут рекурсивно-перечислимыми.

Исследуемая формальная система, поскольку она предназначается для формулировки утверждений и проведения рассуждений, должна быть интерпретирована. Семантика, как и синтаксис, описывается также в метаязыке. Но к семантическим понятиям не предъявляется требование, чтобы они были эффективными.

Исследуемые стандартные теории могут быть достаточно

богатыми, в частности содержать в качестве подтеории рекурсивную арифметику. Рассмотрим именно такие первопорядковые теории. Для определенности рассмотрим первопорядковую арифметику. Ее алфавит содержит знак следования «'», знаки операций сложения и умножения. Понятия терма и формулы определяются стандартным образом. Кроме логических аксиом исчисления предикатов первого порядка имеются стандартные аксиомы арифметики **P**.

В метаязыке мы можем построить как синтаксис, так и семантику для **P**. В этом метаязыке мы можем говорить как о числах, так и о выражениях и формальных конструкциях системы **P**. В самом языке системы **P** объектами наших утверждений являются числа.

Естественно, встает вопрос, нельзя ли выражения языка **P** и последовательности таких выражений закодировать с помощью чисел. К.Гёдель предложил метод кодирования формальных выражений натуральными числами. Этот метод получил название гёделизации. К настоящему времени предложены различные способы геделизации выражений и их последовательностей.

Предикаты, заданные на натуральных числах, будем называть числовыми. Следует различать два вопроса: на какой области задан предикат, и определим ли он средствами первопорядковой системы. Если предикат задан на числовой области, то, как сказано выше, мы будем называть его числовым, независимо от того, каким способом он может быть представлен. Предикат, определимый в первопорядковой арифметике, будем называть арифметическим. В дальнейшем будет показано, что не всякий числовой предикат является арифметическим.

Понятие определимости позволяет выявить важные характеристики предикатов (свойств и отношений). Рассмотрим первопорядковую арифметику, сформулированную в терминах функций следования, сложения и умножения. Эти функции являются примитивно-рекурсивными.

Формулы первопорядкового языка в предваренной нормальной форме могут быть расклассифицированы следующим образом. Последовательность одних кванторов общности (одних кванторов существования) причисляем к одной группе. Затем подсчитываем число таких групп, то есть число перемен кванторов. Учитываем также, с какого квантора начинается приставка. Если приставка начинается с квантора общности и имеется *n* перемен кванторов, то формула относится к типу Π_n, если с квантора существования и имеется *n* перемен кванторов, то к типу Σn. Бескванторная формула относится к типу Π_o и $\Sigma_o(\Pi_o = \Sigma_o)$.

Теперь мы можем дать *классификацию числовых предикатов*, определимых в первопорядковой арифметике, по типам формул, определяющих эти предикаты. Предикаты типа Σ_o являются рекурсивными, типа Σ_1 — рекурсивно-перечислимыми. Классификация арифметических предикатов по типу формул, их определяющих, предложена А.Мостовским и С.К.Клини и носит название классификации Мостовского-Клини.

Эта классификация может быть обобщена на случай систем высших порядков. Известно, что каждая формула теории типов может быть приведена к совершенной предваренной форме. В этой форме сначала идут кванторы самого высшего порядка. Формулы классифицируются по типам Σ_n^k и Π_n^k, где верхний индекс обозначает тип высшего квантора, а нижний — число перемен высших кванторов.

Числовые предикаты, определимые с помощью формул типа Σ_n^1 или Π_n^1, то есть во второпорядковой арифметике, носят название аналитических (от слова "анализ"). Для нас будут представлять интерес наислабейшие из аналитических предикатов, принадлежащих множеству $\Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$, они носят название гиперарифметических.

Вернемся к рассмотрению синтаксиса и семантики первопорядковой арифметики. Выражения и последовательности первопорядковой арифметики, как было отмечено выше, могут быть геделизированы, то есть им однозначным образом сопоставлены натуральные числа.

Более того, имеется возможность синтаксическим и семантическим понятиям сопоставить некоторые числовые предикаты.

Числовым предикатом, *вполне соответствующим синтаксическому или семантическому предикату*, будем называть предикат, выполняющийся на тех и только тех числах, которые являются геделевскими номерами выражений или формальных объектов, на которых выполняется соответствующий синтаксический или семантический предикат.

Что касается синтаксических предикатов "терм", "переменная", "формула", "доказательство", то вполне соответствующие им числовые предикаты будут примитивно-рекурсивными и определимыми в **P**. Числовой предикат, вполне соответствующий синтаксическому предикату "быть доказуемой формулой **P**", не является рекурсивным (об этом речь пойдет впоследствии), но является рекурсивно-перечислимым, то есть определимым с помощью формулы типа Σ_1^o.

Таким образом, синтаксис первопорядковой арифметики и вообще любой формальной системы со стандартной формализацией может быть арифметизирован. Утверждениям синтаксиса системы Р соответствуют в таком случае утверждения, сформулированные в самой системе Р. В формальной системе, содержащей рекурсивную арифметику, мы можем говорить о синтаксических свойствах этой системы и любой системы со стандартной формализацией.

При этом следует различать вопрос о выразительных возможностях формальной системы и вопрос о ее дедуктивных возможностях. Выразительных средств первопорядковой арифметики достаточно для формулировки ее синтаксических утверждений (точнее, числовых утверждений, соответствующих синтаксическим), но, как будет показано ниже, ее дедуктивных средств недостаточно для доказательства всех верных утверждений синтаксиса.

Иначе обстоит дело с семантическими предикатами и утверждениями. Если бы числовой предикат, вполне соответствующий семантическому предикату "быть истинным предложением **P**", был определим в **P**, то есть был бы арифметическим, то вновь возник бы семантический парадокс. Ниже будет показано, что он не определим в **P**.

Тот факт, что некоторый числовой предикат, вполне соответствующий синтаксическому или семантическому, принадлежит к некоторому типу в иерархии Клини-Мостовского или обобщенной классификации Клини-Мостовского, устанавливается стандартно. Для этого требуется некоторая работа, но не нужны новые идеи.

Иначе обстоит дело с установлением отрицательного результата — что некоторый предикат не принадлежит к данному классу в иерархии Мостовского-Клини. Общий метод дает следующая теорема о *K-неопределимости*. Она была установлена А.Мостовским[18] .

Теорема 1. Для любого непротиворечивого и замкнутого класса формул K класс $K \cap \Pi$ не является K-определимым. $K \cap \Pi$ означает здесь класс предложений из K, Π — класс всех предложений языка системы **P**.

При формулировке понятия определимости мы предполагали, что для каждого объекта можно построить его имя. В случае арифметики полезно выделить особые термы, которые назовем нумералами. Пусть s — функция приписывания справа единицы. Тогда[19] :

$$\begin{cases} \mathbf{1} \text{ есть нумерал;} \\ \text{Если } \alpha \text{ нумерал, то } s(\alpha) \text{ — нумерал.} \end{cases}$$

Значениями нумералов являются натуральные числа:

$$\begin{cases} \text{Зн}(\mathbf{1}) = 1; \\ \text{Зн}(s\alpha) = \text{Зн}(\alpha) + 1. \end{cases}$$

Нам потребуется также функция, обратная функции, приписывающей значение нумералам; обозначим ее буквой Δ. Эта функция натуральным числам сопоставляет нумералы, то есть термы объектного языка. Ее можно определить рекурсивно:

[18] *Mostowski A.* Op.cit. p.117.

[19] Жирная единица есть имя палочки объектного языка.

$$\begin{cases} \Delta(1) = \mathbf{1}; \\ \Delta(n+1) = s\Delta(n). \end{cases}$$

При геделизации функции Δ сопоставляется вполне соответствующая ей числовая функция. Она будет примитивно-рекурсивной.

Нумералы являются термами объектного языка и при геделизации им сопоставляются числа — геделевские номера этих нумералов. Если α — некоторое выражение языка **P**, то пусть $g(\alpha)$ есть его геделевский номер. В свою очередь, каждому числу, в том числе и $g(\alpha)$, сопоставляется нумерал. Нумералам, соответствующим числу $g(\alpha)$, будет $\Delta(g(\alpha))$, сокращенно будем записывать его $\Delta\alpha$ (нумерал геделевского номера выражения α).

В синтаксисе вводится операция правильной подстановки вместо индивидной переменной x_i терма t в формулу A:$F^{x_i}_{t}A$. Числовая функция, ей вполне соответствующая, примитивно-рекурсивна.

Для доказательства теоремы нам нужен особый случай подстановки, когда термом, подставляемым в формулу A, является нумерал геделевского номера A, то есть подстановка вида $F^{x_i}_{\Delta_A}A$. Вполне соответствующей ей функцией будет $F^{i}_{\Delta_k}k$, где k — геделевский номер A, а i — геделевский номер x_i. Эта функция является диагональной функцией. Она примитивно-рекурсивна. Эта функция дает возможность формулировать самосоотнесенные утверждения. Пусть Док(A) означает "A доказуема", а $\neg$Док(A) — "неверно, то A доказуема". Тогда $F^{x}_{\Delta\neg Док(A)}\neg$Док($A$) говорит о своей собственной недоказуемости.

Теперь приступим к доказательству сформулированной выше теоремы.

По условию класс формул K непротиворечив, отсюда следует, что его подкласс $K \cap \Pi$, то есть класс предложений из K, тоже непротиворечив. Допустим, что класс $K \cap \Pi$ является K-определимым. Тогда дополнение этого класса, то есть $(K \cap \Pi)'$ также будет K-определимым (это следует из того, что булева комбинация

K-определимых классов будет K-определимой). $F^i_{\Delta_n} n$ является K-определимой. Из последних двух утверждений следует, что $F^i_{\Delta_n} n \in (K \cap П)'$ также K-определим.

Отсюда мы можем заключить, что существует формула B с одной свободной переменной, такая, что для всякого n

$$F^i_{\Delta_n} n \in (K \cap П)' \Rightarrow B(\Delta_n) \in K$$

$$\text{и } F^i_{\Delta_n} n \notin (K \cap П)' \Rightarrow \urcorner B(\Delta_n) \in K.$$

Проделав элементарные преобразования, получаем, что для всякого n

$$F^i_{\Delta_n} n \notin K \cap П \Rightarrow B(\Delta_n) \in K \cap П$$

$$\text{и } F^i_{\Delta_n} n \in K \cap П \Rightarrow \urcorner B(\Delta_n) \in K \cap П$$

Поскольку сформулированные утверждения имеют место для любого n, они имеют место и для $n = B$, и мы имеем:

$$F^i_{\Delta_B} B \notin K \cap П \Rightarrow B(\Delta_B) \in K \cap П$$

$$\text{и } F^i_{\Delta_B} B \in K \cap П \Rightarrow \urcorner B(\Delta_B) \in K \cap П$$

Поскольку из $\urcorner A \Rightarrow A$ следует A, то из первого утверждения получим:

$$B(\Delta_B) \in K \cap П.$$

Из второго утверждения и только что полученного имеем:

$$\urcorner B(\Delta_B) \in K \cap П.$$

Таким образом, $B(\Delta_B) \in K \cap П$ и $\urcorner B(\Delta_B) \in K \cap П$, то есть класс $K \cap П$ противоречив. Но это противоречит условию, что K — непротиворечивый класс формул. Поэтому допущение, что $K \cap П$ K-определим, неверно. Следовательно, класс $K \cap П$ не является K-определимым. Теорема доказана.

Доказательство велось для любого непротиворечивого и замкнутого класса формул системы **P**. Мы доказали для всякого K, что если K есть непротиворечивый и замкнутый класс формул, то предикат $n \in K \cap П$ не является K-определимым в **P**.

Следствие 1. Если K — непротиворечивый и замкнутый класс формул, то K не является K-определимым в **P**.

Доказательство:

1. $K \cap П$ не является K-определимым в **P** в силу доказанной теоремы.
2. Класс $П$ K-определим в **P**; предикат $n \in П$ примитивно-рекурсивен, следовательно, T-определим в **P** и тем самым K-определим в **P**.
3. Если $П$ и K K-определимы в **P**, то $K \cap П$ K-определим в **P**.
4. Следовательно, класс K не является K-определимым.

Иными словами, если K — непротиворечивый и замкнутый класс формул, то неверно, что найдется такая формула A системы **P**, содержащая в точности одну свободную переменную a_i, для которой выполняется условие: $\forall n[(n \in K \Rightarrow A(\Delta_n) \in K) \wedge (n \notin K \Rightarrow \urcorner A(\Delta_n) \in K)]$.

Последнее эквивалентно тому, что найдется такое число n, которое "нарушает" условие K-определимости класса K, то есть $\exists n[(n \in K \wedge A(\Delta_n) \notin K) \vee (n \notin K \wedge \urcorner A(\Delta_n) \notin K)]$.

Поскольку теорема и следствие 1 доказаны для любого непротиворечивого класса формул K, в качестве K можно взять любой класс формул **P**, относительно которого доказано, что он непротиворечив и замкнут. Если в качестве K взять класс Tr, то как следствие получаем *теорему Тарского о неопределимости.*

Следствие 2. Класс истинных предложений **P** не определим в **P**.

Класс общезначимых формул системы **P** непротиворечив и замкнут. Для случая $K = Tr$ как следствие доказанной теоремы получаем: класс $Tr \cap П$ не является Tr-определимым в **P**. Класс истинных предложений **P** не определим в **P**. Аналогично: класс общезначимых формул Tr не определим в **P**.

Это означает, что семантика формальной арифметики **P** не может быть описана в языке самой арифметики. Любые утверждения, относящиеся к синтаксису **P**, могут быть выражены в языке **P**: числовые предикаты и функции, вполне соответствующие синтаксическим, Tr-определимы в **P**. При этом не только рекурсивные предикаты (функции), вполне соответствующие синтаксическим, но и предикат "быть доказуемой формулой" — $n \in T$ — формально определим в **P**. Выразительных средств языка элементарной арифметики достаточно для описания формальных, структурных свойств системы **P** (и даже любой более богатой системы, содержащей арифметику). Но семантические свойства и отношения системы **P** не могут быть представлены в **P**: предикат, выполнявшийся на геделевских номерах истинных предложений, не определим в **P**. Иными словами, этот предикат не может быть представлен посредством числовых предикатов и операций над числами, выразимых (Tr-определимых) в языке арифметики первого порядка. Парадоксы типа парадокса Лжеца, парадокса Ришара в принципе не могут быть реконструированы в **P**.

Следствие 3. (Теорема Россера) . Класс доказуемых предложений **P** не является *T*-определимым в **P**.

Класс *T* непротиворечив и замкнут. Теорема 1 и следствие 1 верны для случая *K*=*T*. Класс теорем элементарной арифметики **P** не определим рекурсивно в **P**. Поскольку класс рекурсивных предикатов и функций эквивалентен классу предикатов и функций, *T*-определимых в **P**, как следствие теоремы 1 мы получили результат Россера: класс теорем арифметики первого порядка не рекурсивен. Проблема разрешения для элементарной арифметики не разрешима.

Неразрешимость чистого исчисления предикатов первого порядка вытекает из доказательства неразрешимости некоторой конечно-аксиоматизируемой первопорядковой теории *T*. Пусть Σ — конъюнкция замыканий аксиом некоторой неразрешимой теории *T*. Обозначим через A^+ результат замещения всех дескриптивных констант свободными переменными, различных — различными и одинаковых — одинаковыми. Тогда для любого предложения *A*, сформулированного на языке теории *T*, имеет место: *A* доказуемо в *T* тогда и только тогда, когда $(\Sigma \supset A)^+$ доказуема в чистом исчислении предикатов первого порядка. Если бы проблема разрешения для чистого исчисления предикатов была разрешима, то тогда имелся бы метод, позволяющий для каждой формулы исчисления предикатов, в том числе и для формул вида $(\Sigma \supset A)^+$ устанавливать, доказуема она или нет. Но в таком случае мы имели бы разрешающую процедуру и для теории *T*.

В качестве теории *T* можно, например, взять систему Р.Робинсона, являвшуюся подсистемой системы **P**. Система эта представляет собой первопорядковую формальную систему с конечным числом аксиом; непротиворечивость этой системы доказывается финитными средствами. Из того, что проблема разрешения для системы Робинсона неразрешима легко получается результат А.Черча о неразрешимости проблемы разрешения для чистого исчисления предикатов первого порядка[20] .

Следствие 4. Дополнение к классу *T* не является рекурсивно-перечислимым.

Как известно, если класс *Q* и его дополнение *Q'* рекурсивно-перечислимы, то оба класса рекурсивны. Если имеется рекурсивная функция, перечисляющая один за другим элементы класса *Q*, и есть рекурсивная функция, один за другим перечисляющая элементы класса *Q'*, то класс *Q* разрешим. Поскольку класс *T* рекурсивно-перечислим, но, согласно следствию 3, не рекурсивен, следовательно, класс *T* не является рекурсивно перечислимым.

Отсюда, в частности, следует, что множество рекурсивно-перечислимых предикатов и множество формально определимых предикатов не совпадают. Все рекурсивно-перечислимые предикаты формально определимы в **P**. Однако существуют формально определимые предикаты, не являющиеся рекурсивно-перечислимыми. Так, предикат $n \in T$ (быть теоремой) формально определим в **P**, следовательно, *Tr*-определим в *T* и предикат $n \in T$ (класс *T*). Но предикат $n \in T'$ не является, по доказанному, рекурсивно-перечислимым.

Следствие 5. Элементарная арифметика **P** не полна, то есть существует такое предложение *A*, что ни *A*, ни $\neg A$ не доказуемы в **P**.

1. Согласно следствию 2, класс истинных предложений **P** — $Tr \cap \Pi$ не является формально определимым. Класс доказуемых предложений $T \cap \Pi$ формально определим. Следовательно, $\neg T \cap \Pi \neq Tr \cap \Pi$.

[20] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С.76.

2. $T \cap П \subseteq Tr \cap П$.

3. Следовательно, существует такое предложение, которое принадлежит классу истинных предложений $Tr \cap П$ и не принадлежит классу доказуемых предложений $T \cap П$. Символически: $\exists A(A \in Tr \cap П) \wedge (A \notin T \cap П)$. Не все истинные предложения **Р** доказуемы в Р. Отсюда легко показать, что существует неразрешимое предложение **Р**. Обозначим A^* то самое предложение **Р**, которое принадлежит классу $Tr \cap П$ и не принадлежит $T \cap П$, тогда:

4. $(A^* \in Tr \cap П) \wedge (A^* \notin T \cap П)$.

5. Класс $Tr \cap П$ непротиворечив:
$\forall A \rceil [(A \in Tr \cap П) \wedge (\rceil A \in Tr \cap П)]$.

6. $\rceil [(A^* \in Tr \cap П) \wedge (\rceil A^* \in Tr \cap П)]$. 5; $\forall$у.

7. $A^* \in Tr \cap П$. 4; $\&_{у}$

8. $\rceil A^* \notin Tr \cap П$. 7; в силу непротиворечивости класса Tr.

9. $\rceil A^* \notin T \cap П$. 8; поскольку $T \subseteq Tr$.

10. $A^* \notin T \cap П$. 4; $\&_{у}$.

11. $(\rceil A^* \notin T \cap П) \wedge (A^* \notin T \cap П)$. 9;10; $\&_{В}$.

12. $\exists A[(\rceil A \notin T \cap П) \wedge (A \notin T \cap П)]$. 11; $\exists_{В}$.

Таким образом, как следствие теоремы 1 мы получили теорему Геделя о неполноте элементарной арифметики с неконструктивным доказательством; идея доказательства принадлежит А.Тарскому.

Теорема о K-неопределимости непротиворечивого и замкнутого класса формул K позволяет получить единым методом доказательства ряда важнейших теорем, связанных с принципиальной ограниченностью стандартных формальных систем, содержащих элементарную арифметику.

Теорема Тарского (следствие 2) устанавливает ограниченность выразительных возможностей системы **Р**. Семантика теории Р не может быть погружена в саму систему **Р**. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики (следствие 5) говорит о принципиальной ограниченности дедуктивных средств систем со стандартной формализацией, типа системы **Р**.

Мы можем усилить дедуктивные средства **Р**, добавив, например, в качестве аксиомы неразрешимое предложение, но в усиленной таким путем системе возникнут новые неразрешимые предложения, которые строятся по той же схеме. Система **Р**, не только не полна, но и существенно непополнима, а это означает, что класс истинных предложений арифметики не является рекурсивно-перечислимым, его нельзя представить как класс доказуемых формул некоторой стандартной формальной системы.

Если некоторый класс рекурсивно-перечислим, то он Tr-определим в **Р**. Но класс истинных предложений арифметики – $Tr \cap П$, согласно следствию 2, не определим в **Р**.

Несколько иначе обстоит дело о результатами Россера и А.Черча (следствие 3). Результат Россера означает, что для предиката "быть теоремой элементарной арифметики" не существует такой формальной системы, в которой этот предикат был бы T-определим. Если принять тезис Черча, отождествляющий понятие эффективности с одним из его уточнений, например, с понятием T-определимости в **Р**, то доказанная теорема (следствие 3) означает, что свойство "быть теоремой формальной арифметики" не является эффективным ни в одном из точных смыслов этого понятия.

Теоремы Тарского, Геделя и Черча-Россера (следствия 2, 3, 5) показывают принципиальную ограниченность стандартных формальных систем и приводят к ряду важных философских следствий. Однако, прежде чем перейти к обсуждению ряда следствий ограничительных теорем, отметим, что можно дать конструктивное доказательство теоремы о K-неопределимости класса K в том смысле, что это доказательство предполагает наличие точного метода построения таких предложений, которые нарушают условия K-определимости класса K. Этот метод является также методом построения неразрешимого предложения системы Р и позволяет осуществить конструктивное семантическое доказательство теоремы Геделя о неполноте формальной арифметики[21].

[21] Изложение этого метода см.: *Смирнова Е.Д.* Формализованные языки и проблемы логической семантики. М., 1982. с.114-120.

§ 4. Философский смысл теорем о выразительных и дедуктивных возможностях формализмов

Рассмотренные в предыдущем параграфе теоремы Тарского, Гёделя, Черча-Россера, равно как и теорема о полноте первопорядкового исчисления предикатов, имеют важное философское значение, связанное с оценкой выразительных и дедуктивных возможностей формальных систем со стандартной формализацией и с исследованием такого гносеологического понятия, как истинность. Значение этих теорем выходит за пределы специальной проблематики, носит методологический характер. Влияние ограничительных теорем на стиль мышления науки XX столетия можно сопоставить, пожалуй, только с влиянием фундаментальных открытий в области физики (теория относительности, квантовая физика).

Теоремы о дедуктивных и выразительных возможностях формализмов связаны с фундаментальными вопросами стиля мышления, истолкованием природы необходимого, теоретического знания, роли и характера абстракций и идеализаций, исследованием возможностей дедуктивного представления научного знания, выявлением связей концептуального аппарата и принимаемых логических процедур.

Результаты, сформулированные в предыдущих параграфах, имеют место не только для системы первопорядковой арифметики, но и для любых формальных систем со стандартной формализацией, удовлетворяющих определенным требованиям. Под стандартными языками имеются в виду языки с конечными или счетными алфавитами, для которых эффективным образом определены основные синтаксические понятия: индивидная переменная, терм, формула, предложение. При этом предполагается, что все выражения языка являются конечными последовательностями символов алфавита.

В стандартной формальной системе (в формальной системе со стандартной формализацией), построенной над некоторым стандартным языком, дополнительно, также эффективным (рекурсивным) способом, описывается, что есть аксиома, правило вывода, формальный вывод. При этом правила вывода носят финитный и эффективный характер, то есть это правила, разрешающие от конечного числа посылок определенного вида перейти к заключению. Формальный вывод представляет собой также финитную конструкцию.

Такого рода формальными стандартными системами является построенная выше первопорядковая арифметика, таковыми являются и арифметика второго порядка и арифметика любого конечного порядка. Некоторые из прикладных теорий со стандартной формализацией могут оказаться полными, то есть для всякой замкнутой формулы, сформулированной в языке этой теории, либо она сама либо ее отрицание являются теоремами теории. Однако выразительные возможности таких систем ограничены: в терминах их языков нельзя сформулировать синтаксис этих теорий. Если же в терминах теории определимы примитивно-рекурсивные функции, то хотя такая теория неполна по своим дедуктивным средствам (согласно теореме Гёделя), ее выразительные возможности позволяют сформулировать синтаксис этой теории в языке самой этой теории. Из теоремы Тарского следует, что для всякого языка со стандартной формализацией найдется некоторое отношение, свойство, не определимое средствами этого языка. Универсальный язык, в котором были бы определимы все отношения (между объектами типа объектов системы натуральных чисел) невозможен. Отсюда всегда встает проблема выбора языка с достаточно богатыми выразительными возможностями для данных целей. Это отнюдь не тривиальный вопрос. Скажем, достаточен ли первопорядковый язык, или необходимы и языки высших порядков, или возможно ограничиться расширением первопорядкового языка дополнительными средствами выражения типа кванторов Мостовского или кванторов Генкина? Во всяком случае универсальный язык с неограниченными выразительными возможностями в принципе невозможен. Все программы его создания являются иллюзорными.

Теорему Тарского, а также теоремы Гёделя и Черча-Россера принято называть теоремами об ограниченностях формализмов. Однако это название не совсем адекватно выражает их смысл и значение. Прежде всего отметим, что сами теоремы не говорят о какой-то ущербности формальных систем. Но они действительно характеризуют возможности формальных систем и границы их применимости. Однако их смысл этим не ограничивается: они дают возможность выявить важные характеристики таких содержательных понятий, как истинность, доказуемость, логическое следование.

Введение понятий определимости свойств и отношений в формализованном языке позволяет выявить существенные характеристики самих этих свойств и отношений, провести их классификацию. Класс (отношенис), определимый в первопорядковой арифметике, называют арифметическим; определимый формулой второпорядковой арифметики — аналитическим. Более детальную классификацию свойств и отношений дает обобщенная иерархия Клини-Мостовского. Как было отмечено уже, формулы в предваренной форме могут быть разбиты на классы в зависимости от того, с какого квантора (общности или существования) начинается приставка, от указания типа высшего квантора (верхний индекс) и числа перемен кванторов высшего типа (нижний индекс). Каждая формула таким образом относится к типу Π^m_n или Σ^m_n. На этой основе можно построить соответствующую *иерархию классов и отношений*, указав типы формул, с помощью которых определимы эти классы или отношения. К типу $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0$ относятся все рекурсивные классы и отношения, к типу Σ^0_1 — рекурсивно-перечислимые, к типу $\Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$ — арифметические, к типу $\Pi^1_1 \cap \Sigma^1_1$ — гиперарифметические, к типу $\Pi^1_n \cup \Sigma^1_n$ — аналитические.

Для того чтобы установить место того или иного класса (или отношения) в иерархии Клини-Мостовского, необходимо указать минимальный класс, к которому он принадлежит, и максимальный, к которому он не принадлежит.

Семантические понятия относятся непосредственно к лингвистическим объектам, но, как было показано выше, лингвистические объекты можно закодировать с помощью чисел. Семантическим понятиям можно сопоставить вполне соответствующие им теоретико-числовые. Поэтому можно ставить вопрос о месте семантических понятий, включая понятие истинности, в иерархии Клини-Мостовского.

Теорема Тарского говорит, что понятие истинности для первопорядковой арифметики не определимо в первопорядковой арифметике, и тогда оно не принадлежит к типу $\Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$, то есть не является арифметическим. Однако было бы неправильно полагать, что понятие истинности для первопорядковой арифметики вообще не определимо в формализованных языках. Нет, оно определимо, то есть может быть охарактеризовано формулой некоторой формальной системы со стандартной формализацией. Можно показать, что оно определимо во второпорядковой арифметике. В общем случае для системы порядка n, содержащей теорию рекурсии, понятие истины определяется в расширении этой системы до порядка $n+1$ (результат Тарского, 1939)[22] .

Таким образом, понятие "истинное предложение первопорядковой арифметики" определимо во второпорядковой арифметике и является аналитическим. Можно уточнить тип этого понятия, оно является гиперарифметическим (то есть принадлежит к типу $\Pi^1_1 \cap \Sigma^1_1$). Таким образом, теорему Тарского можно рассматривать как теорему, характеризующую понятие истинности, определенное для высказываний данного стандартного языка. При этом теорема характеризует не "бедность", а *"богатство" этого понятия.*

Что касается синтаксических понятий формальных систем со стандартной формализацией, то все они являются по крайней мере рекурсивно-перечислимыми, то есть принадлежат к

[22] См. также: *Смирнова Е.Д., Таванец П.В.* Семантика в логике // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.

типу Σ_1^0. В частности, понятие доказуемости для каждой формальной системы (со стандартной формализацией), как первопорядковой, так и высших порядков, является рекурсивно-перечислимым. Таким образом, класс теорем первопорядковой арифметики $T \in \Sigma_1^0$ и $T \notin \Sigma_0^0$ в силу упомянутого выше результата Россера.

Теорему Гёделя можно также рассматривать как *результат, характеризующий понятие истинности.* Она выявляет, что понятие истинности для первопорядковой арифметики не является рекурсивно-перечислимым, так как найдется истинная, но не доказуемая формула, в частности, формула, утверждающая свою собственную недоказуемость.

Не следует полагать, адресуясь к результату Гёделя, что всякая первопорядковая теория неполна. Нетрудно привести примеры полных первопорядковых теорий (например, теорию плотного линейного порядка без первого и последнего элементов). Для них понятия истинности и доказуемости совпадут. Более того, поскольку теории представлены как формальные системы, а в формальных системах допускается только рекурсивное множество аксиом, множество теорем таких теорий также будет рекурсивным. Отсюда и понятие истинности для таких теорий будет разрешимым. Но если теория содержит примитивно-рекурсивную арифметику, то такая теория неполна и понятие *истинности* для нее *не является рекурсивно-перечислимым.*

В связи с рассмотренными характеристиками понятия истинности целесообразно сделать одно замечание общегносеологического характера. Включает ли содержание понятия истинности критерий истинности? Приведенные результаты показывают, что классическое понятие истинности (истинного высказывания) этому условию не удовлетворяет, так как для достаточно богатых языков понятие истинности не будет рекурсивным и даже рекурсивно-перечислимым.

Вопрос об отношении между понятиями истинности и доказуемости является вопросом об отношении между семантическим и синтаксическим понятиями. Одним из инструментов

логики является метод сопоставления семантическим понятиям равнообъемных им синтаксических. Логику прежде всего интересуют понятия логической истинности и логического следования. Как же обстоит дело с понятием логической истинности? Для первопорядковых языков понятие логической истинности по объему совпадает с понятием доказуемости, тем самым является рекурсивно-перечислимым. Это известный результат Геделя о полноте первопорядкового исчисления предикатов. Таким образом, формализация первопорядковой логики оказывается осуществленной. Но как обстоит дело с понятием логической истинности и логического следования для второпорядковой логики?

Нетрудно видеть, что предложение A истинно во второпорядковой арифметике тогда и только тогда, когда логически истинна формула $P^* \supset A$, где P^* есть конъюнкция аксиом Пеано для второпорядковой арифметики. Отсюда поскольку понятие истинности для второпорядковой арифметики не принадлежит $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1$, то таковыми будут и понятие логической истинности и логического следования для второпорядковой логики предикатов. Тем самым понятие логического следования не является рекурсивно-перечислимым и не может быть описано с помощью формальной системы со стандартной формализацией.

В первопорядковой арифметике схема аксиом индукции относится только к свойствам, определимым в первопорядковой арифметике, но имеются и свойства, не определимые в ней. Отсюда и неполнота характеристики системы натуральных чисел. Аксиомам первопорядковой арифметики могут удовлетворять и системы объектов, отличные от системы натуральных чисел. Во второпорядковой арифметике система аксиом Пеано является категоричной, из нее логически следуют (в семантическом смысле) все истинные утверждения второпорядковой арифметики. Система объектов теории (система натуральных чисел) характеризуется в этом случае полностью, с точностью до изоморфизма. Причина неполноты аксиоматически построенной второпорядковой арифметики обусловлена не ограниченностью собственно арифметических аксиом, а невозможностью охарактеризовать с помощью исчисления стандартного типа второпорядковое отношение логического следования. Неполнота возникает из-за "большой силы" отношения логического следования. Второпорядковое отношение логического следования полностью не формализуемо (посредством систем со стандартной формализацией). Первоначально Гедель доказывал теорему о неполноте не для первопорядковой арифметики, как она была сформулирована и доказана выше, а для простой теории типов (модифицированной системы **PM**). Поэтому теорему о неполноте можно рассматривать не как свидетельство невозможности, с точностью до изоморфизма, описать (посредством аксиом) систему натуральных чисел, а как свидетельство невозможности формализовать отношение логического следования второпорядкового языка и языков более высоких порядков.

Следующий важный вопрос, связанный с формализацией, — это вопрос о существовании алгоритма, по виду формулы устанавливающего, является она доказуемой или нет. Известно, что для логики высказываний такая эффективная процедура существует, то есть по виду формулы можно установить, доказуема она или нет; проблема разрешения для классического исчисления высказываний разрешима. Г.Лейбниц полагал, что существует единый метод установления, доказуема некоторая формула или нет, говоря современным языком, он полагал, что проблема разрешения для всей логики разрешима. Однако оказалось, что уже для исчисления предикатов первого порядка проблема разрешения неразрешима. Это составляет содержание теоремы А.Черча. Как невозможен единый завершенный универсальный язык, так невозможен и метод, решающий все массовые проблемы. Существуют алгоритмически неразрешимые массовые проблемы.

Уточнение интуитивного понятия алгоритма явилось значительным достижением научной мысли. Конечно, тезис, согласно которому предложенные точные понятия алгоритма (T-определимости в арифметике, алгорифма Маркова, машины Тьюринга, частично рекурсивной функции, систем Поста и другие)

являются уточнениями интуитивного понятия эффективности и вычислимости, представляет собой содержательное утверждение. Этот тезис по своей природе не может быть объектом формального доказательства. Его принятие, как и принятие многих фундаментальных принципов типа законов сохранения, оправдывается научной практикой, всем стилем научного мышления. Аргументы в пользу его принятия хорошо известны.

Таким образом, ограничительные теоремы явились важным этапом в исследовании формальных систем как средства изучения и репрезентации содержательных понятий. Не менее существенна их роль в исследовании тех средств и методов, которые используются при описании формальных систем и их интерпретаций, то есть при исследовании *выразительных и дедуктивных средств метатеорий.* В этом плане ограничительные теоремы явились переломным моментом в исследованиях по философии математики. Прежде всего они засвидетельствовали несостоятельность программы обоснования математики Д.Гильберта в ее первоначальном виде и открыли новые горизонты в исследованиях по основаниям математики. Связь методов семантического анализа с определенными методологическими установками, с исследованием "стиля мышления" особенно ярко выступает в гильбертовской программе обоснования математики, в его методе "идеальных элементов" и трактовке смысла и значения идеальных предложений. Эти вопросы будут рассмотрены в шестой главе.

Не следует думать, что ограниченности стандартных формализмов связаны только с отрицательными теоремами, прежде всего, теоремами Тарского и Гёделя. "Позитивные" теоремы, прежде всего теорема о полноте первопорядкового исчисления предикатов, также связаны с некоторыми ограниченностями формализмов. Остановимся на понятии характеризуемости класса возможных реализаций. В логической литературе, вслед за А.И.Мальцевым, чаще используется термин "аксиоматизируемость класса реляционных систем". Поскольку термин "аксиоматизируемость" "занят" будем использовать термин — "характеризуемость".

Пусть $\mathcal{M}$ — класс возможных реализаций; этому классу мы можем сопоставить класс $Th(\mathcal{M})$, то есть класс всех предложений, истинных в $\mathcal{M}$. $Th(\mathcal{M})$ есть теория, и ей мы можем сопоставить класс всех ее моделей $\mathrm{Mod}(Th(\mathcal{M}))$. Совпадает ли класс всех моделей этой теории с первоначальным классом $\mathcal{M}$? Нетрудно показать, что $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}(Th(\mathcal{M}))$. Но имеет ли место обратное, то есть будет ли $\mathcal{M} = \mathrm{Mod}(Th(\mathcal{M}))$? Другими словами, можно ли представить любой класс возможных реализаций как множество всех моделей некоторой теории? Существует ли такое множество предложений **Г**, что они истинны в каждой реализации из $\mathcal{M}$, и класс моделей этого множества предложений в точности совпадает с $\mathcal{M}$: $\mathrm{Mod}(\mathbf{\Gamma}) = \mathcal{M}$? В общем случае это не имеет места. Класс возможных реализаций назовем *характеризуемым* в первопорядковом языке, если и только если он совпадает с классом моделей некоторой теории.

Некоторые классы реализаций могут быть охарактеризованы таким образом, что множество предложений **Г** рекурсивно, в частном случае — конечно. Тогда множество **Г** может рассматриваться как система аксиом теории, характеризующая класс $\mathcal{M}$. Однако в общем случае не требуется, чтобы **Г** было конечным или рекурсивным.

Не всякий класс возможных реализаций может быть охарактеризован средствами первопорядкового языка. Например, множество всех конечных реализаций не характеризуемо средствами первопорядкового языка.

Утверждение, что не всякий класс возможных реализаций может быть охарактеризован в первопорядковом языке, является видом ограничительной теоремы относительно выразительных возможностей языка. Этот результат следует из теоремы о полноте исчисления предикатов первого порядка и из теоремы об ультрапроизведениях.

Обычно считают, что результаты об ограниченности систем со стандартной формализацией вытекают из известных теорем Тарского и Геделя. Однако, на наш взгляд, не меньший интерес представляет оценка выразительных возможностей стандартных формализованных языков, в частности первопорядковых, связанная с понятием характеризуемости. Речь идет о системах объектов — возможных реализациях ("мирах") данного языка и возможностях их описания в этом языке. Но что понимать под возможностью описания систем в языке? Понятие *характеризуемости* позволяет уточнить это отношение между языками и возможными реализациями.

Можно установить ряд теорем о невозможности рекурсивной характеризуемости или конечной характеризуемости некоторых классов реляционных систем.

Более того, оказывается, что средствами первопорядковых теорий мы не можем охарактеризовать какую-либо выделенную возможную реализацию. Пусть дана какая-то фиксированная возможная реализация **М***. Ни одна теория, даже такая широкая, как класс всех предложений, истинных в **М***, не может однозначным образом характеризовать эту возможную реализацию. Во-первых, в силу теоремы об изоморфизме, если **М*** есть модель множества высказываний Σ, то всякая возможная реализация **М**, изоморфная **М***, также будет моделью Σ. Из этой теоремы следует, что невозможно задать множество высказываний, которое было бы истинно в одной-единственной реализации и тем самым характеризовало бы именно эту и только эту реализацию. Означает ли последнее, что возможные реализации языка можно характеризовать (в первопорядковых теориях) только с точностью до изоморфизма? Оказывается, что и это верно только для конечных моделей. Если возможная реализация бесконечна, то ее невозможно охарактеризовать средствами первопорядкового языка даже с точностью до изоморфизма. Это положение непосредственно следует из теорем о полноте и об ультрапроизведениях. Действительно, пусть **М** — некоторая бесконечная возможная реализация, например, с несчетной областью. Этой реализации можно сопоставить класс предложений, истинных в ней, — $Th(\mathbf{M})$. Класс этот непротиворечив и, согласно теореме о полноте, имеет счетную модель (или не более чем счетную модель, если логика с равенством). Таким образом, если была дана несчетная модель, то найдется и счетная. Если имеется модель некоторой произвольной бесконечной мощности, то, согласно теореме об ультрапроизведениях, можно построить модель большей мощности. Таким образом, если теория имеет бесконечную модель, то ее нельзя охарактеризовать даже с точностью до изоморфизма. Точным образом это можно выразить, используя понятие элементарной эквивалентности: две возможные реализации элементарно эквивалентны, если все предложения, истинные в одной реализации, истинны и в другой. Элементарно эквивалентные возможные реализации неразличимы средствами первопорядкового языка: все, что истинно для одной, истинно и для другой. Имеет место теорема: если две возможные реализации изоморфны, то они элементарно эквивалентны. Однако обратное не имеет места: существуют элементарно эквивалентные, неизоморфные модели.

Если мы установим, что некоторый класс возможных реализаций характеризуем в первопорядковом языке, то это дает нам существенную информацию об объектах нашего рассмотрения. Важно установить зависимость между характеризуемостью классов возможных реализаций и их свойствами. Возникает вопрос о более тонких связях между некоторыми типами характеризуемости (рекурсивной, конечной и так далее) и свойствами, структурой, организацией соответствующих им возможных реализаций. Чтобы рассмотреть эту зависимость, полезно ввести другого типа описания классов возможных реализаций.

Рассмотрим классы возможных реализаций, замкнутые относительно определенных преобразований. Например, класс возможных реализаций может быть замкнут относительно изоморфизма. Класс возможных реализаций замкнут относительно изоморфизма, если и только если всякая возможная реализация, изоморфная одной из реализаций, принадлежащих $\mathcal{M}$, сама принадлежит $\mathcal{M}$. Аналогично можно говорить о замкнутости относительно элементарной эквивалентности, ультрапроизведений, подсистем, декартовых произведений систем и так далее.

Имеются связи между характеризуемостью (и определенными ее видами) классов возможных реализаций, с одной стороны, и замкнутостью этих классов относительно определенных операций — с другой. Установлено, что класс возможных реализаций $\mathcal{M}$

(1) характеризуем тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений;

(2) конечно характеризуем тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ и его дополнение $\mathcal{M}'$ замкнуты относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Помимо рекурсивной и конечной характеризуемости рассматриваются другие классификации этого свойства, например по виду формул, характеризующих данные классы возможных реализаций. Виды характеризуемости могут описываться на основе классификации формул Клини-Мостовокого по виду кванторных приставок (Π^o_n-характеризуемость и Σ^o_n-характеризуемость) или на основе других классификаций (хорновские, позитивные). Этим различным видам формул, характеризующих классы возможных реализаций, соответствуют различные условия замкнутости этих классов.

Понятие характеризуемости позволяет формулировать зависимости между определенными свойствами самих объектов рассмотрения (классов возможных реализаций) и свойствами теорий, посредством которых эти объекты характеризуются. Раскрывается определенная зависимость между синтаксическими и семантическими свойствами теорий.

Вернемся к ограничительным результатам, связанным с понятием характеризуемости систем объектов в языках первопорядковых теорий. Тот факт, что не всякий класс возможных реализаций может быть охарактеризован и, в частности, что одна отдельно взятая реализация не характеризуема средствами первопорядкового языка, имеет важные теоретико-познавательные следствия в связи с проблемами интерпретации эмпирических теорий.

Относительно эмпирических теорий следует различать исследование логической структуры этих теорий и вопросы их эмпирической интерпретации. Первый аспект не выводит нас за рамки методологии дедуктивных наук. Остается в силе проблема Гильберта — проблема аксиоматизации физики как фундамента эмпирических наук.

Второй аспект предполагает уточнение понятия эмпирической интерпретации теорий. Можно понимать под этим выделение из класса всех возможных реализаций теории, в которых истинны все утверждения теории, некоторой подразумеваемой модели **M*** и под эмпирической интерпретацией иметь в виду именно эту выделенную модель. Но как выделить **M***? Множество предложений, истинных в **M***, выделяет не единственную модель, а целый класс моделей, элементарно эквивалентных в общем случае и изоморфных в случае, если область **M*** конечна. Таким образом, задать подразумеваемую модель с помощью постулатов значения, то есть средствами первопорядкового языка, мы не можем. Это прямо следует из описанных выше ограничительных результатов для первопорядковых языков. Возникает сомнение, можно ли вообще методологию эмпирических наук строить на основе методологии дедуктивных наук. В литературе известны попытки преодолеть указанные трудности при описании эмпирической интерпретации. Один из подходов состоит в том, чтобы эмпирическую интерпретацию характеризовать не одной возможной реализацией, а целым классом возможных реализаций. Именно такой путь предлагает М.Пшелецкий[23] . С помощью постулатов значения мы не можем выделить класс реализаций фиксированной мощности (если эта мощность бесконечна). Согласно Пшелецкому, выделение области данной мощности должно реализоваться не с помощью постулатов значения, а другими, внеязыковыми средствами. При таком подходе под эмпирической интерпретацией не имеется в виду непременно интерпретация в терминах наблюдения (сведение содержания осмысленных утверждений к данным наблюдения).

[23] *Przelecki M.* The Logic of Empirical Theories. L., 1969.

Глава четвертая

РОСТ ЗНАНИЯ, КОНКРЕТНОСТЬ ИСТИНЫ, СЕМАНТИКА ВОЗМОЖНЫХ МИРОВ И ЯЗЫКИ С ИНТЕНСИОНАЛЬНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

§ 1. Проблема истинности утверждений о будущем, возможном и необходимом

В предыдущих главах было показано, какие важные результаты вытекают из простого классического понимания истинности как соответствия знания действительности, примененного к стандартным экстенсиональным теориям. Однако классическая концепция истинности сталкивалась с трудностями при применении к анализу утверждений о будущем и прошлом, к модальным утверждениям о возможном, необходимом, случайном. Так, чему в настоящем соответствуют утверждения о будущих событиях? Может ли утверждение о завтрашнем событии рассматриваться как истинное сегодня, и если да, то чему оно соответствует? Если действительность понимать в духе атомизма Витгенштейна, как совокупность наличных фактов, ситуаций, решить проблему невозможно. При таком понимании действительности нет иной необходимости, кроме логической. Но можно рассматривать действительность не просто как совокупность наличных ситуаций, а как то, что включает взаимосвязи, содержит в себе тенденции и возможности будущих состояний. С другой стороны, настоящее содержит последствия прошедших событий, обусловлено предшествующим состоянием. Такой более глубокий подход к пониманию действительности в своеобразной форме реализуется в так называемой семантике возможных миров. Сохраняется классическая концепция истинности, но для ее сохранения при переходе к модальным и временным контекстам приходится учитывать отношения между возможными состояниями действительности, или, как говорят, между возможными мирами.

Речь идет не об исследовании реальных закономерностей развития, не об иных реальных мирах, отличных от нашего мира, в смысле иных планет, галактик и т.д. Такое рассмотрение лежит за рамками логики. "Возможные миры" моделируют перебор обстоятельств, альтернативных положений дел, возможных относительно данного состояния или относительно некоторых фиксированных условий. Одно дело реально существующее в мире положение дел, другое — положение дел, допустимое в соответствии с нашим знанием или концептуальным аппаратом, законами логики, принимаемыми гипотезами, нормами и т.д. Особое место занимают положения дел, согласующиеся с нашими установками — желанием, верой, мнением, полаганием, с этическими установками и, наконец, даже с мирами мечты или фантазии.

Семантика возможных миров фактически *моделирует* — где-то схематизируя и огрубляя — *определенные аспекты реального процесса познания*. Реально люди учитывают более чем один возможный ход развития событий, и если рассматривать понятийный аппарат, который используется при этом, то следует учитывать возможные направления развития событий, отличные от того направления, по которому пошло действительное развитие.

Идея возможного мира не является необходимой при построении семантики стандартной классической логики, при введении понятия истинности для экстенсиональных контекстов, однако она уже нужна при определения понятия логической истинности и логического следования. Выше было введено понятие возможной реализации, то есть множества индивидов вместе с функцией интерпретации, — это и есть один из способов "описания мира", репрезентации возможного положения дел. При другом подходе возможный мир задается множеством атомарных высказываний или их отрицаний (описания состояний). В этом случае под возможным миром имеется в виду совокупность фактов, задаваемых этими высказываниями. Среди всех описаний состояний только одно согласуется с тем, что имеет место в действительности и является истинным описанием состояния. Но и в этом случае нельзя понимать это так, что мир таков, каким он представлен посредством описания состояния. Следует подчеркнуть, что есть простые и сложные высказывания, посредством которых могут описываться возможные положения дел (возможные миры), но нет атомарных фактов, из которых составлялся бы мир.

Можно, применив оборачивание метода при построении семантики возможных миров, исходить из множества возможных миров как чего-то данного и ввести одну-единственную функцию интерпретации, но в таком случае эта функция будет зависеть от двух аргументов — нелогической константы и возможного мира. При указанном подходе все миры выступают как равным образом данные; отношение достижимости между мирами задается таким образом, что оно не дает эффективной процедуры выделения некоторого мира и установления в нем истинности A в случае, если утверждается, что существует такой мир, в котором высказывание A истинно. Идеи эти восходят к лейбницевской концепции возможных миров. Если Кант исходил из логики как чего-то данного и потому сама идея возможного мира выступала производной, то у Лейбница идея возможного мира является первичной и логические, необходимые истины определяются как истины во всех возможных мирах.

Основополагающая установка при построении семантики для неэкстенсиональных языков состоит в том, что понятие возможного мира привлекается не для уточнения логической истинности, а для уточнения понятия истинности высказываний. Каждый возможный мир рассматривается как элемент некоторой совокупности миров, наделенной некоторой структурой. Иногда можно встретить утверждение, что семантика возможных миров слишком абстрактна и является скорее формальным средством исследования интересующих нас систем, чем содержательным их истолкованием. Однако, как нам представляется, дело обстоит иначе.

Начнем с наиболее ясного случая — стандартной временной логики. Чтобы не загружать изложение техническими подробностями, остановимся только на пропозициональной временной логике. Помимо обычных классических связок, включаются временные связки H, P, G, F, имеющие соответственно следующее интуитивное содержание: "всегда было так, что... ", "когда-то было так, что... ", "всегда будет так, что...", "когда-нибудь будет так, что..." Понятие формулы логики высказываний вводится стандартным образом. Под возможными мирами понимаются мгновенные "срезы", состояния мира в некоторый момент или просто моменты времени. Один из способов описания структуры временных связей осуществляется с помощью отношения "раньше", имеющего место между моментами. Пусть W есть некоторое множество моментов (необязательно всех) и R — бинарное отношение, Rt_1t_2 означает, что t_1 раньше t_2. Пару $<W,R>$ назовем модельной временной структурой. Каковы свойства отношения R, зависит от принимаемой концепции времени. Следует отметить, что для различных целей, в различных теориях могут допускаться различные идеализации относительно структуры временных отношений. Так, в классической механике и классической физике структура времени отождествляется со структурой действительной прямой. В специальной теории относительности свойства временного порядка отличаются от свойств временного порядка классической механики частиц. При изучении дискретных процессов принимают идеализирующие допущения о дискретности времени. Изучение вычислительных процессов помимо идеализации дискретности приводит к необходимости отказаться от условия линейности временного порядка. Вообще говоря, свойства времени могут описываться не только с помощью временного порядка между моментами времени, но и путем задания на множестве моментов группы или даже некоторой топологии. Нас в настоящий момент интересует тот случай, когда временная структура описана с помощью бинарного отношения предшествования. Семантическая характеристика временных операторов вводится обычным образом. Пусть $<W,R>$ — модельная временная структура. Подмножества W естественно рассматривать как некоторые события, то есть при таком подходе положение дел описывается множеством миров, в которых оно имеет место[1] .

Пусть φ — функция, сопоставляющая каждой пропозициональной переменной некоторое подмножество из W. Теперь стандартным образом вводим понятие истинности высказываний относительно приписывания значений φ:

$a \overset{\varphi}{\models} p \Leftrightarrow a \in \varphi(p)$

$a \overset{\varphi}{\models} A\&B \Leftrightarrow a \overset{\varphi}{\models} A \wedge a \overset{\varphi}{\models} B$

$a \overset{\varphi}{\models} \rceil(A\&B) \Leftrightarrow$ неверно, что $a \overset{\varphi}{\models} A$

$a \overset{\varphi}{\models} GA \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \overset{\varphi}{\models} A)$

$a \overset{\varphi}{\models} FA \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \overset{\varphi}{\models} A)$

$a \overset{\varphi}{\models} HA \Leftrightarrow \forall b(Rba \Rightarrow b \overset{\varphi}{\models} A)$

$a \overset{\varphi}{\models} PA \Leftrightarrow \exists b(Rba \wedge b \overset{\varphi}{\models} A)$

Формула общезначима в данной модельной структуре, если и только если она общезначима в каждом возможном мире, т.е.

[1] В англоязычной литературе для обозначения мыслимого положения дел часто используется термин "proposition". Отметим, что Г.Фреге различал три понятия: "Satz", "Urtheil" и "Gedanke", что на русский язык переводится соответственно как "предложение", "суждение" и "мысль" или "мыслимое положение дел". При переводе на английский термину "Gedanke" сопоставляют обычно термин "proposition". Поэтому сложившаяся традиция переводить "proposition" как "суждение" не является адекватной. Видимо, под влиянием этой традиции переводчик работы Г.Фреге на русский язык переводит "Gedanke" как "суждение" (Семиотика и информатика, вып. 8. М., 1977, с.177-210).

в каждый момент из множества W. Формула универсально общезначима, если и только если она общезначима в каждой модельной структуре данного класса. Сам класс модельных структур детерминируется принимаемой концепцией времени.

Уже то допущение, что структура временного порядка описывается с помощью бинарного отношения между моментами времени и неявно принимается, что "b позже a" является обращением отношения "a раньше b", детерминирует некоторую "минимальную" временную логику. Именно в этой логике общезначимы формулы вида $H(A \supset B) \supset (HA \supset HB)$, $G(A \supset B) \supset (GA \supset GB)$, $FA \equiv \neg G \neg A$, $PA \equiv \neg H \neg A$, $A \supset GPA$ и $A \supset HFA$, при общезначимости формулы A общезначимы и формулы GA и HA (то есть обоснованы правила A/GA и A/HA).

Стандартными методами может быть доказано, что пропозициональная логика, расширенная указанными схемами аксиом и дополнительными правилами вывода, является полной формализацией класса общезначимых формул "минимальной логики", то есть той логики, которая получится когда на временное отношение R не накладывают дополнительных условий. Описанную систему обычно обозначают $\mathbf{K}_t$.

Еще раз подчеркнем, что при более общей схеме описания временной структуры указанная система $\mathbf{K}_t$ вовсе не будет минимальной. Были рассмотрены временные системы, основанные на других условиях сопряженности будущего и прошлого[2].

Однако если принимается схема описания временной структуры с помощью отношения "раньше", то $\mathbf{K}_t$ действительно будет минимальной логикой. Как было отмечено выше, концепции времени, используемые в различных областях науки, накладывают дополнительные онтологические условия на временное отношение. В настоящее время достаточно хорошо исследованы различные временные логики, детерминируемые различными системами допущений о временном порядке. Особый философский интерес представляют системы, допускающие ветвление в будущее. Они связаны с отказом от жесткого механического детерминизма (в свою очередь связанного о допущением линейности временного порядка). Важно отметить следующие моменты:

во-первых, удается распространить классическую концепцию истинности как соответствия знания действительности на временные высказывания;

во-вторых, семантика возможных миров для временной логики является содержательной и интуитивно ясной;

в-третьих, существует четкая корреляция между способами рассуждения, способами оперирования с временными операторами и онтологическими допущениями о свойствах временных отношений; связь логики с онтологией налицо.

Семантику, основанию на отношениях между моментами времени или в общем случае между возможными мирами предложили называть реляционной семантикой[3], в отличие от других форм семантики возможных миров, в частности окрестностных. Семантика возможных миров в форме реляционной семантики первоначально была сформулирована не для временных, а для модальных логик С.Кангером, Я.Хинтиккой, С.Крипке и рядом других исследователей. На множестве возможных миров фиксировалось некоторое отношение достижимости (альтернативности), удовлетворяющее определенным свойствам (рефлексивность, транзитивность, симметричность и т.д.). Таким путем удалось построить достаточно естественные семантики для ранее построенных систем модальной логики **T**, **S4**, **B**, **S5**, **S**4.3 и многих других. Иногда утверждают, что реляционная семантика абстрактна и потому не вскрывает содержания таких понятий, как алетическая (онтологическая) необходимость или возможность. Однако привлекая дополнительную

[2] См.: *Смирнов В.А.* Временные логики с нестандартными условиями сопряженности будущего и прошлого // Модальные и интенсиональные логики. Материалы к VIII Всесоюзной конференции "Логика и методология науки , 1982". М., 1982.

[3] См.: *Смирнова Е.Д.* Об отношении между алгебраическими и реляционными семантиками модальных и временных логик // Логика и методология. Вып.1. М., 1974. Предложенный термин был принят и вошел в обиход (См.: *Кузнецов А.В.* Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев. 1980).

информацию, можно дать и более содержательную интерпретацию алетическим модальностям. Так, реляционная семантика для временных логик опирается на свойства временного отношения, обусловленные определенной концепцией времени.

Однако еще со времен античности алетические модальности пытались определить в терминах временных операторов. Диодоровская необходимость понимается как то, что есть и всегда будет, а возможность — как то, что есть или когда-нибудь будет, то есть символически: $\Box A \equiv GA\&A$ и $\Diamond A \equiv A \vee FA$. Это понимание возможности необязательно трактовать в духе фатализма, так как FA при стандартной интерпретации понимается как "возможно когда-нибудь будет A". Лишь в случае постулирования линейности в будущее "возможно когда-нибудь будет A" совпадает с "обязательно когда-нибудь будет A". Логики с оператором "обязательно когда-нибудь будет A", так называемым пирсовским оператором, в последние годы начали интенсивно исследоваться[4]. Второе истолкование модальностей — мегаро-аристотелевское: $\Box A \equiv HA\&A\&GA$, то есть необходимо то, что всегда было, есть и всегда будет и $\Diamond A \equiv PA \vee A \vee FA$. В.А.Смирнов ввел новое определение модальностей через временные операторы следующим образом: возможность он трактует как то, что могло быть, то есть $\Diamond A \equiv PFA$, а необходимость — как HGA[5].

Трактовка алетических модальностей в терминах временных, безусловно, придает им столь же содержательную интерпретацию, как и временным операторам, и также зависит от принимаемой концепции времени.

По-видимому, алетические (онтологические) модальности отличаются от логических модальностей, на чем настаивает Я.Хинтикка. Можно ли дать интерпретацию логических модальностей в терминах семантики возможных миров? На наш

[4] См.: *Смирнов В.А.* Логики с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики (Тезисы координационного совещания). М., 1978.

[5] Там же.

взгляд, определенный свет на эту проблему проливают успехи, достигнутые в построении так называемой доказуемостной логики. В.Куайн неоднократно подчеркивал, что необходимость является скорее метапредикатом, а не оператором объектного языка. Еще К.Гёдель в 30-е годы поставил проблему аксиоматизации модальной логики, в которой модальный оператор понимается как аналог метапредиката доказуемости. В языке арифметики **P** можно сформулировать предложение, которое является переводом с метаязыка Док($\lfloor A \rfloor$). $\lfloor A \rfloor$ есть гёделевский номер предложения А, а метаязыковому предикату доказуемости вполне соответствует некоторый числовой предикат, определимый в арифметике. Цель состоит в том, чтобы $\Box A$ модальной логики интерпретировать как перевод утверждения арифметики Док($\lfloor A \rfloor$). Над этой задачей интенсивно работали К.Гёдель, П.С.Новиков, Р.Монтегю. Решение было найдено Р.М.Соловьем[6]. Логикой, формализующей подобное понимание необходимости, оказывается система $K4W$, введенная К.Сегербергом в качестве одной из систем временной логики. Ее аксиоматика проста: к булевым тавтологиям добавляются $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$, $\Box A \supset \Box\Box A$ (аксиомы системы $K4$), формула Лёба $\Box(\Box A \supset A) \supset \Box A$; правилами вывода являются modus ponens и правило Гёделя $A/\Box A$. Значительный вклад в разработку локализуемостных логик внес А.В.Кузнецов[7].

Поставим следующую проблему. Понятие логической истинности для первопорядковых языков, как хорошо известно, формализуемо и равнообъемно понятию доказуемости в исчислении предикатов первого порядка. Этот предикат определим в арифметике. Какова будет пропозициональная логика, если $\Box A$ интерпретировать как утверждение о *логической* доказуемости A?

С другой стороны, мы знаем, что понятие логической истины для языка второго и более высоких порядков является арифметическим. Это проливает свет на скепсис Я.Хинтикки о

[6] *Solovay R.M.* Probability interpertations of modal logic // Journal Mathematic. 1967. N25. p.287-304; *Guaspari D., Solovay R.M.* Rosser sentences // Annals of mathematical logic. 1979. v.16. p.81-99.

[7] См.: *Кузнецов А.В., Муравицкий А.В.* Доказуемость или модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.

возможности формализовать понятие логической необходимости. По-видимому, это можно сделать для логики первого порядка, но не второго.

Итак, мы видим, что семантика возможных миров, в частности в форме реляционной семантики, дает вполне содержательную для некоторых систем интерпретацию временным и модальным операторам. Это, конечно, не означает, что мы должны ограничиться исследованием только тех систем, которые к данному моменту обладают содержательной интерпретацией. Выработка целого класса логических систем, детерминируемых различными условиями, налагаемыми на отношение достижимости, так сказать, впрок, — необходимое условие успешного развития логической науки.

В результате разработки семантики возможных миров удалось реализовать классическую концепцию истинности и относительно овремененных и модальных утверждений.

§ 2. Реляционная семантика интуиционистской логики и проблема роста и накопления знания

Теоретико-множественная семантика, которая была описана в предыдущих главах, полностью абстрагируется от того, что знание не дано раз и навсегда, что познание есть процесс. Даже в §1 этой главы, где речь шла о временных логиках, сам фактор времени учитывался в объективном, онтологическом плане. В построенных семантиках знание понималось как описание действительности и истинность как соответствие знания действительности. Но знание нам не дано, оно есть результат познавательной деятельности. Мы стоим перед дилеммой: или отказаться от чрезмерно сильных идеализаций теоретико-множественной семантики, или же попытаться ввести дополнительные факторы, не пересматривая основных идеализаций теоретико-множественного подхода.

В логике вопрос о познании как процессе встал, в частности, в связи о построением и истолкованием интуиционистской логики. Еще А.Гейтинг в одной из ранних работ противопоставил интуиционистскую логику как логику знания классической логике, охарактеризованной им как логика бытия[8] . Представляет интерес построение конструктивной семантики — семантики, свободной от теоретико-множественных допущений, — для интуиционистской и даже классической логики[9] .

Но это особый вопрос. Однако оказалось возможным построить теоретико-множественную семантику возможных миров для интуиционистской логики. Это было осуществлено С.Крипке и А.Гжегорчиком[10] . Погружение классической логики в интуиционистскую позволяет рассматривать последнюю как некоторое обогащение классической логики. Известна тесная связь интуиционистской логики с модальной системой **S4**. Поэтому идея построения для интуиционистской логики реляционной семантики, аналогичной реляционной семантике для **S4**, вполне естественна.

Однако имеется существенное различие в содержательном истолковании интуиционистской и временных или модальных алетических логик. В последних под возможным миром имеется в виду возможное состояние внелингвистических, внелогических объектов, отношение достижимости (или временное отношение) понимается как объективное отношение, отношение между онтологическими сущностями.

---

[8] *Heyting A.* La conception intuitioniste de la logique // Les etudes philosophiques. 1956. N2. p.226-233.

[9] См.: *Шанин Н.А.* О конструктивном понимании математических суждений // Труды математического института им.В.А.Стеклова. T.LII: Проблемы конструктивного направления в математике. М.-Л., 1958; *Марков А.А.* О логике конструктивной математики // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1 (Математика, Механика). 1970. N2; *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972; *Заславский И.Д.* Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1978. См. также серию статей А.А.Маркова в ДАН СССР за 1974 г.: О языке $Я_0$ (т.214, №1); О языке $Я_1$ (т.214, №2); О языке $Я_2$ (т.214, №3); О языке $Я_3$ (т.214, №4); О языке $Я_4$ (т.214, №5); О языке $Я_\omega$ (т.214, №6); О языке $Я_{\omega+1}$ (т.215, №1); О полноте классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике (т.215, №2).

[10] *Kripke S.* Semantical analysis of intuitionistic logic // Formal Systems and Recursive Functions. Amsterdam, 1965; *Grzegorczyk A.* Philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic // Indagations Mathematical. 1964. v.20.

При построении семантики возможных миров интуиционистской логики под "возможными мирами" понимаются *состояния знания.* Временное отношение (отношение достижимости) понимается как носящее не онтологический, а гносеологический характер. Знание, как и объекты исследования, не дано раз и навсегда. С прогрессом познания может расширяться предметная область и запас знания. При построении семантики интуиционистской логики принимаются достаточно сильные идеализации. Во-первых, предполагается, что объекты познания могут появиться, но не могут исчезнуть. Пусть $a, b, c, \ldots$ — возможные миры, R есть временное отношение между состояниями знания (предполагается, что оно транзитивно и рефлексивно, то есть трактуется как "раньше или одновременно"). φ есть функция, сопоставляющая каждому моменту времени (состоянию знания, возможному миру) область объектов, доступных исследователю в этот момент. Первое предположение формулируется в виде $Rab \Rightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Во-вторых, принимается сильное допущение, что знание растет шаг за шагом, но уже добытое знание не забывается, оно не может отбрасываться и корректироваться, то есть принимается $Rab \wedge a \models A \Rightarrow b \models A$. Логические связки — конъюнкция и дизъюнкция — понимаются так же, как в классической логике[11]. Но отрицание и импликация интерпретируются по-новому. Отрицание понимается не как неистинность утверждения в данный момент (и не как утверждение, что в данный момент истинность утверждения неизвестна), а как принятие того, что оно не будет истинным ни в один из последующих моментов, как бы долго исследование не продолжалось, то есть

$$a \Vdash^{\varphi} \neg A \Leftrightarrow \forall b\, (Rab \Rightarrow b \nVdash^{\varphi} A)$$

Аналогично по-другому трактуется и импликация:

[11] В семантике Бета для интуиционистской логики дизъюнкция интерпретируется способом, отличным от классического и крипкевского.

$$a \Vdash^{\varphi} A \supset B \Leftrightarrow \forall b\, (Rab \Rightarrow (b \Vdash^{\varphi} A \Rightarrow b \Vdash^{\varphi} B))$$

Квантор существования интерпретируется так же, как в классической логике, а квантор общности — следующим образом:

$$a \Vdash^{\varphi} \forall x A \Leftrightarrow \forall b \forall \psi\, (Rab \wedge \psi \underset{x}{=} \varphi \Rightarrow b \Vdash^{\psi} A)$$

Эта семантика является адекватной для интуиционистской логики.

Таким образом удается учесть факт *роста и накопления знания.* Нам представляется, что подобного рода семантика пригодна не только для итуиционистской логики и математики, но и для семантического анализа эмпирического, экспериментального знания. Во всяком случае это интересное направление исследований.

Проблема роста и накопления знания является лишь одним аспектом более широкой проблемы изменения и развития знания. Другим, также частным аспектом этой проблемы является вопрос об отбрасывании гипотетических (и даже неадекватных) элементов в нашем знании. В гипертрофированной форме эта проблема рассматривалась К.Поппером, который прогресс знания усматривал в последовательной фальсификации гипотез. Но реальная проблема здесь имеется, и она может быть исследована с помощью хорошей логической модели. Мы можем построить формальную систему, двойственную интуиционистской логике. Известно, что интуиционистская логика может быть построена в виде секвенциального исчисления, с теми же правилами вывода, что и классические логики, но с одним ограничением: сукцедент секвенции не может содержать более одной формулы. Мы получим систему, двойственную интуиционистской, если потребуем, чтобы, в отличие от классического случая, антецедент секвенции содержал бы не более одной формулы[12]. Для нас важна семантика этой логики. Семантика

[12] Мы отвлекаемся здесь от проблем интерпретации импликации в антиинтуиционистской логике и связки, дуальной импликации. Об антиинтуиционистской логике см.: *Chermak J.* A remarks on Gentzen's calculs of sequents // NDJFL. 1977. v.XVIII. p.471-474; *Goodman N.D.* The Logic o contraduction // ZMLGM. 1981. Bd.22. p.119-126; *Смирнов В.А.* Об одной системе пара-

основывается на допущениях, двойственных допущениям семантики интуиционистской логики. Вместо условия сохранности истинности постулируется условие сохранности ложности. Если нечто на данном шаге исследования мы отбрасываем, признаем за ложное, то с прогрессом познания оно никогда не может стать истинным. В более общем контексте к этого рода проблемам мы вернемся в гл.V.

§ 3. Семантика возможных миров и интенсиональные контексты

В работе 1967 г., анализируя теорию смысла, мы отмечали, что "в логике до сих пор нет удовлетворительной теории смысла"[13] . Трактовка смысла и значения выражений зависит от *методов семантического* анализа. В той же работе рассматривались те трудности, которые должна преодолевать теория смысла: парадоксы теории именования, проблемы единичных высказываний существования, утверждений тождества, проблемы, связанные с пустыми именами, трактовка истинности высказываний с пустыми именами и дескрипциями. Особую трудность вызывает анализ предложений мнения, знания и вообще косвенных контекстов. В работе был сделан обзор семантических теорий, в которых рассматриваются и частично преодолеваются эти трудности. Наиболее радикальное решение состоит в том, чтобы ограничиться чисто экстенсиональными стандартными языками и строить чисто экстенсиональные семантики для них. Но при таком подходе указанные трудности не решаются, они просто отбрасываются, не принимаются во внимание. Конечно, для некоторых целей действительно можно ограничиться экстенсиональными языками. Однако тезис экстенсиональности Р.Карнапа, согласно которому для любых целей достаточен экстенсиональный язык, сомнителен. "Для того, чтобы устранить антиномию (отношения именования) посредством исключения всех неэкстенсиональных контекстов, необходимо было бы показать, что для целей всякого логического или эмпирического исследования может быть построена экстенсиональная языковая система; другими словами, что для любой неэкстенсиональной системы имеется экстенсиональная система, в которую первая может быть переведена. Утверждение это известно как *"тезис экстенсиональности"*[14] . Вопрос о том, выполняется ли полностью этот тезис, представляется Карнапу еще не решенным. Однако, обсуждая вопрос, может ли быть сформулировано полное семантическое описание даже неэкстенсиональной системы в экстенсиональном языке (содержащем только экстенсиональные предложения), Карнап склонен думать, что такое описание можно сделать. Но это и означало бы фактически возможность перевода всех неэкстенсиональных предложений системы на экстенсиональный язык. Исследование своеобразия интенсиональных контекстов, расширение класса таких контекстов, анализируемых в современной логике, явно показывает несостоятельность тезиса экстенсиональности.

непротиворечивой логики // Паранепротиворечивые, релевантные и многозначные логики (Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФ АН СССР). М., 1984.

[13] *Смирнова В.Д., Таванец П.В.* Семантика в логике// Логическая семантика и модальная логика. М., 1967, с.29.

Теория смысла Г.Фреге, семантика Б.Рассела, метод интенсионала и экстенсионала Р.Карнапа, прагматические теории смысла В.Куайна и М.Уайта не решают всех указанных выше трудностей, хотя и содержат идеи, важные для построения теории смысла. Введение понятия интенсионала (интенсии) играет существенную роль в анализе неэкстенсиональных контекстов, в которых проходит *принцип замены L-эквивалентных выражений*. Однако возникает вопрос, какова роль этого понятия в существенно интенсиональных контекстах, в которых не действует этот принцип замены L-эквивалентных выражений.

Интенсиональные языки отличаются прежде всего наличием особых интенсиональных предикатных выражений (знаков)

[14] *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 1959, С.215.

и операторов (например, типа "верит, что...", "знает, что...", "а ищет..." и т.д.). Естественно, особую роль приобретает семантическая интерпретация такого рода знаков, методы выявления их смысла и значения. Можно ли приписывать им значения в изоляции, какого рода сущности могут им тогда сопоставляться? Или же они выступают как определенного типа синкатегорематические знаки; смыслом, значением наделяются не они сами, а контексты определенного вида, их содержащие? Каков тогда способ интерпретации такого рода контекстов и каким образом в них смысл сложного зависит от смысла составляющих? Все эти вопросы касаются принципиальных особенностей интенсиональных контекстов, и уже это говорит об определенных принципиальных отличиях их семантик.

Более того, не ясно, в чем суть отличия указанных интенсиональных контекстов от модальных неэкстенсиональных контекстов, в которых проходит замена *L*-эквивалентных выражений. Зависит это от иной интерпретации модальных операторов, отличной от интерпретации интенсиональных операторов и предикатов, или же дело в ином способе истолкования сложных контекстов, содержащих эти операторы. Во всяком случае то, что замена *L*-эквивалентных выражений не проходит в интенсиональных контекстах, подводило к выводу, что на базе понятия *L*-эквивалентности вообще нельзя уточнить понятие интенсии, что такое понятие не адекватно понятию смысла. Или же предполагалось, что для интенсиональных контекстов требуется более сильное отношение эквивалентности, нежели *L*-эквивалентность, например, отношение интенсионального изоморфизма, предполагающее выявление синтаксической структуры выражений и установления *L*-эквивалентности составляющих элементов. Но при таком подходе совершенно непонятны способы выявления и сопоставления соответствующих единиц.

Разработка проблем теории смысла и тесно связанных с ней методов анализа интенсиональных контекстов в последние годы существенно продвинулась. Особое значение в этом плане

имеет разработка семантик возможных миров для интенсиональных логик. Основополагающими в этой области являются работы Р.Монтегю, Д.Скотта, М.Кресвелла[15].

Как отмечалось, при подходе Карнапа понятия экстенсионала и интенсионала (экстенсии и интенсии) определяются на основе понятий эквивалентности и *L*-эквивалентности выражений. Замена эквивалентных выражений служит критерием различения экстенсиональных, интенсиональных и неэкстенсиональных контекстов. Однако с развитием реляционных семантик и семантик типа Монтегю появляется возможность ввести понятия экстенсионала и интенсионала (и соответственно провести разграничение различных типов контекстов) независимо от понятий эквивалентности и *L*-эквивалентности.

Особый интерес в семантиках типа Монтегю представляют трактовка интенсиональных операторов, их отличие от модальных. Релятивизация понятий экстенсионала и интенсионала относительно точек соотнесения (возможных миров) позволяет включать в анализ содержания контекстов определенные прагматические аспекты. Интенсионалы высказываний при указанном подходе включают определенные аспекты употребления этих высказываний (учет лиц, моментов времени и т.д.). Не случайно семантики типа Монтегю получили широкое применение в логико-семантическом анализе контекстов естественных языков.

Следует также отметить интересное новое направление в методах семантического анализа высказываний — так называемую ситуационную семантику. Эта семантическая теория, альтернативная семантике возможных миров, служит базой построения пропозициональной логики ("не-фрегевской логики"), представляющей собой фактически интенсиональную логику. Направление это менее известно, но начинает интенсивно раз-

---

[15] *Montegue R.* Formal Philosophy: Selected Papers of R.Montegue. New Haven, 1974; *Монтегю Р.* Прагматика и интенсиональная логика // Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981; *Он же.* Прагматика // Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981; *Скотт Д.* Советы по модальной логике // Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981; *Cresswell M.J.* Logic and Languages. L. 1973.

рабатываться в настоящее время. В работах Б.Вольневича анализируются методологические аспекты указанного подхода; в работах Р.Сушко и его учеников разработаны принципы ситуационной семантики и не-фрегевских логик на этой основе[16]. Еще одно интересное направление в разработке логической семантики и теории смысла представлено теоретико-игровым подходом в семантике[17]. Указанный подход также дает широкие возможности для логико-семантического анализа сложных контекстов естественных языков.

Ниже мы развиваем собственную концепцию анализа интенсиональных контекстов, в которой разрабатываются идеи семантик возможных миров, но в отличие от подходов Г.Монтегю и Д.Скотта помимо особой трактовки интенсиональных операторов существенную роль играет *способ установления интенсионалов выражений, включающих эти операторы.* Именно таким путем выявляется принципиальное отличие интенсиональных контекстов от экстенсиональных.

В первой главе был дан синтаксический анализ языков с разными способами приложения функторов к аргументам, в этом разделе развивается семантический аспект этого вопроса. Тем самым, как нам представляется, мы все более приближаемся к исследованию сложных логико-семантических связей естественных языков.

Мы будем подразделять предикатные знаки на экстенсиональные и интенсиональные. Каждому осмысленному выражению языка сопоставляются как экстенсионал, так и интенсионал, и при этом не вводятся особые обозначения для интенсионалов. Семантика строится таким образом, что интенсиональным предикатным знакам и операторам также сопоставляются как интенсионал, так и экстенсионал и при этом *отличные от интенсионалов и экстенсионалов обычных предикатных и операторных знаков.* Таким образом, интенсиональные языки отличаются наличием двух типов предикатных знаков и операторов, и при этом разного типа предикатным знакам (аналогично — операторам) приписываются разного типа интенсионалы и разного типа экстенсионалы. Указанные условия в той или иной форме и в той или иной мере реализовались в логической литературе. Однако, как представляется, принципиальное отличие предлагаемого подхода к анализу интенсиональных языков состоит не в выделении двух типов предикатных и операторных знаков, а в выявлении существенно *иного способа связи интенсиональных функторов с их аргументами*; разрабатывается идея *двух семантически различных способов приложения функторов к аргументам.*

[16] См.: *Вольневич Б.* Понятие факта как модального оператора // Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974; *Сушко Р.* Не-фрегевская логика и теории, основанные на ней // Неклассическая логика. М., 1978. См. также гл.VI, §4.

[17] *Hintikka J.* Logic, Language-Games and Inaformation. Oxford, 1973; *Хинтикка Я.* Логико-эпистемологические исследования. М., 1980; Game-Theoretical Semantics. Dordrecht, 1979.

Но прежде, чем переходить к реализации этой идеи, мы рассмотрим экстенсиональные языки, в которых имеются только экстенсиональные предикатные знаки и только один способ приложения функторов к их аргументам. Для этих языков может быть построена семантика возможных миров, и каждому правильно построенному выражению приписывается как экстенсионал, так и интенсионал. Мы сформулируем подобного рода семантику и сравним ее с референциальной.

Начнем с референциальной семантики и ограничимся первопорядковым языком. Пусть **L** есть первопорядковый прикладной язык, **A** — его словарь нелогических символов, X — некоторая непустая область, I — интерпретация **A** на X. Тогда $<X,I(\mathbf{A})>$ есть возможная реализация языка **L**. Семантические понятия, включая понятие истинности, релятивизируются относительно возможных реализаций. Одна из возможных реализаций выделяется как актуальная. Семантические понятия подразделяются на два типа: относящиеся к данной выделенной возможной реализации и относящиеся ко всем возможным реализациям. Последние называются **L**-понятиями; к их числу относятся понятия логической истинности, логического следования, выполнимости. Для стандартных логических систем именно таким образом строится семантика. В референциальной семантике понятия смысла, интенсии не являются исходными и необходимыми.

Как указывалось выше, для стандартных языков может быть построена семантика, основанная на идее возможных миров. Хотелось бы подчеркнуть, что мы не рассматриваем последний подход как нечто предпочитаемое по сравнению с референциальным подходом, когда речь идет о стандартных экстенсиональных языках. Но этот подход создает предпосылки для исследования интенсиональных языков.

Пусть K есть класс возможных миров. Под "возможным миром" можно понимать мыслимую совокупность положений дел. Однако, при других конкретных интерпретациях это может быть просто класс точек соотнесения. На данном этапе мы не конкретизируем, что мы понимаем под возможным миром, хотя читатель может понимать под возможным миром мыслимую совокупность положений дел, пока не будут сделаны специальные оговорки по этому поводу.

Мы рассматриваем языки, основанные на стандартной теории синтаксических категорий с основными категориями: n (категория собственных имен) и s (категория предложений). Если α есть индекс категории и β есть индекс категории, то α/β есть индекс категории. Каждому исходному (примитивному) выражению языка приписана некоторая категория, сложные правильно построенные выражения строятся из исходных с помощью двух операций — операции приложения и операции абстракции: если A есть выражение категории α/β и B есть выражение категории α, то $A(B)$ есть выражение категории α; если A есть выражение категории α, x есть переменная категории β и x входит свободно в A, то λxA есть выражение категории α/β.

Пусть U — непустая индивидная область. Интерпретация I сопоставляет каждому знаку словаря A некоторый объект, а именно выражению категории n — объект типа U^K, то есть функцию, сопоставляющую каждому возможному миру некоторый индивид; индивидной константе сопоставляется индивидный концепт; выражению категории s сопоставляется объект

типа 2^K. 2^K есть множество всех подмножеств K (или класс функций из K в $2 = \{t,f\}$), то есть предложению сопоставляется пропозициональный концепт, отождествляемый с мыслимым положением дел). В общем случае выражению категории α/β сопоставляется объект типа $(AB)^{K}$, где A^K есть объект, сопоставленный выражению категории α и B^K — объект, сопоставленный выражению категории β Модельная структура есть тройка $<K,U,I>$.

Пусть наш язык содержит только индивидные переменные. Под функцией приписывания значений индивидным переменным имеется в виду функция, сопоставляющая каждой переменной объект типа U^K. Пусть $\varphi \Vdash_{\overline{x}} \psi$ означает, что φ отличается от ψ возможно приписыванием значения x.

Введем понятие *интенсионала в данной модельной структуре* и понятие *экстенсионала в возможном мире данной модельной структуры*. Все эти понятия релятивизированы относительно приписывания значений свободным переменным φ.

Если A есть формула, то вместо понятия экстенсионала этой формулы в мире H при приписывании φ будем использовать понятие истинности формулы A в мире H при приписывании φ: $H \overset{\varphi}{\Vdash} A$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(A,\varphi) = t$.

Одновременно индукцией введем понятия интенсионала и экстенсионала (для формул — L-истинности):

1. Если $a \in \mathbf{A}$, то $\mathrm{Int}(a,\varphi) = I(a)$.
2. Если x — индивидная переменная, то $\mathrm{Int}(x,\varphi) = \varphi(x)$.
3. Если $a \in \mathbf{A}$, то экстенсионал a в мире H относительно приписывания φ есть значение $I(a)$ в H, то есть $(I(a))(H)$.
4. Если x есть индивидная переменная, то экстенсионал x относительно приписывания φ есть значение $\varphi(x)$ в H, то есть $(\varphi(x))(H)$.
5. Если A — атомарная формула, то есть имеет вид $\Phi(t_1, ..., t_n)$, то $H \overset{\varphi}{\Vdash} \Phi(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow <(\varphi(t_1))(H) ... (\varphi(t_n))(H)> \in (J(\Phi))(H)$.
6. $H \overset{\varphi}{\Vdash} A\&B \Leftrightarrow H \overset{\varphi}{\Vdash} A$ и $H \overset{\varphi}{\Vdash} B$.

7. $H \Vdash^{\varphi} \neg A \Leftrightarrow \neg(H \Vdash^{\varphi} A)$.

8. $H \Vdash^{\varphi} \forall xA \Leftrightarrow \forall\psi(\varphi \Vdash_{\overline{x}} \psi \Rightarrow H \Vdash^{\varphi} A)$.

9. Если A — формула, то $\mathrm{Int}(A,\varphi) = \{H \mid H \Vdash^{\varphi} A\}$.

Формула A общезначима в данной модельной структуре $<K,U,I>$, если и только если $\mathrm{Int}(A,\varphi) = K$ при любом приписывании φ.

Если сложное выражение получено из составляющих по схеме приложения функтора к аргументу, то интенсионал сложного выражения определяется интенсионалами составляющих и вычисляется по схеме $(A^B)^K \otimes B^K \rightarrow A^K$.

Такой способ вычисления интенсионалов относится не только к сочленению предикатного знака с индивидным, но и к образованию сложных высказываний с помощью пропозициональных связок. Так, $\mathrm{Int}(A\&B,\varphi) = \mathrm{Int}(A,\varphi) \cap \mathrm{Int}(B,\varphi)$ и $\mathrm{Int}(\neg A,\varphi) = K - \mathrm{Jnt}(A,\varphi)$, что нетрудно обосновать, исходя из определений.

Аналогично, экстенсионал выражения, составленного из функтора и аргумента, в данном мире вычисляется по экстенсионалам составлявших в данном возможном мире по схеме $A^B \otimes B \rightarrow A$.

Каждое выражение, в том числе содержащее кванторы, имеет как интенсионал, так и экстенсионал. Экстенсионал выражения с кванторами также зависит от экстенсионалов подкванторного выражения и может быть определен без обращения к понятию интенсионала.

Семантика возможных миров открывает иные подходы даже для экстенсиональных языков. Для простоты рассмотрим язык без индивидных констант. Модельная структура есть четверка $<K,U,I,\psi>$, где ψ есть функция, сопоставляющая каждому возможному миру индивидную непустую область $\psi(H)$; будем обозначать ее также U_H, $U_H \subseteq U$. Введем особый предикат существования **E** или кванторы $\forall.$ и $\exists.$ со следующими условиями истинности:

$$H \Vdash^{\varphi} \forall.xA \Leftrightarrow \forall\psi(\varphi \underset{x}{=} \psi \wedge (\psi(x))(H) \in U_H \Rightarrow H \Vdash^{\psi} A),$$

$$H \Vdash^{\varphi} \exists.xA \Leftrightarrow \exists\psi(\varphi \underset{x}{=} \psi \wedge (\psi(x))(H) \in U_H \wedge H \Vdash^{\psi} A),$$

Кванторы $\forall.$ и $\exists.$ означают (соответственно), что речь идет обо всех или некоторых объектах данного мира, а не обо всех или некоторых возможных объектах.

Если мы определим понятие значимости в данном возможном мире Н как значимость относительно всякого приписывания значений свободным переменным, то формула $\forall.xAx \supset Ay$ не будет значимой. Однако все замыкания всеобщности доказуемых формул исчисления предикатов значимы в данном возможном мире и во всех возможных мирах. Но чтобы класс общезначимых формул совпадал с классом доказуемых формул стандартного исчисления предикатов, можно дать другое определение значимости в мире H: формула A со свободными переменными x_1, ..., x_n значима в мире H если и только если для всякого приписывания φ, удовлетворяющего условию $(\varphi(x_i))(H) \in U_H$ $(i \leq n)$, $H \Vdash^{\varphi} A$.

Под *интенсионалом одноместного предикатного знака* имеется в виду объект типа $(2^U)^K$, то есть функция из K в 2^U. Под *охватом* предикатного знака Φ в мире H будем понимать значение функции $I(\Phi)$ в точке H. Но $(I(\Phi))(H)$ есть некоторое подмножество U, однако оно не обязательно является подмножеством U_H. Под объемом предикатного знака Φ в мире H будем понимать $(I(\Phi))(H) \cap U_H$, то есть объем — это класс объектов мира H, обладающих свойством Φ, а охват — это класс всех возможных объектов (из универсума U), обладающих свойством Φ.

Установим связь между референциальной семантикой и семантикой возможных миров в сформулированной выше форме.

Индивидная область возможной реализации референциальной семантики — это область U_H. Определим теперь интерпретацию: для одноместной предикатной константы $I_H(\Phi) = (I(\Phi))(H) \cap 2^{U_H}$, то есть одноместному предикатному знаку сопоставляется его объем, подмножество из U_H. Поэтому $<U_H, I_H>$ есть возможная реализация. φ_H есть функция приписывания значений переменным из области U_H, то есть $\varphi_H(x) = (f(x))(H)$ при условии, что значение $(\varphi(x))(H)$ принадлежит U_H. Отсюда, если $H \overset{\varphi}{\Vdash} A$ для всех φ, выполняющих условие $(\varphi(x))(H) \in U_H$, то A значима для всех φ в возможной реализации $<U_H, I_H>$.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех возможных реализаций, а K — класс их индексов; класс K находится во взаимооднозначном соответствии с $\mathcal{M}$. Класс индексов K будем рассматривать как класс возможных миров. Пусть U_i и I_i — соответственно индивидная область и интерпретация некоторой возможной реализации, имеющей индекс i.

Под U имеется в виду $\bigcup_{i \in K} U_i$. Пусть $I_i(\Phi)$ — некоторое произвольное расширение функции $U_i \to \{t,f\}$ до $\bigcup_{i \in K} U_i \to \{t,f\}$. Аналогично для других констант. Тогда I есть функция, сопоставляющая каждому индексу i из K интерпретацию I_i'. Пусть φ такова, что $(\varphi(x))(i) = \varphi_i(x)$, тогда если всякое φ_i выполняет A в $<U,I>_i$, то A истинна в $\mathbf{M}_i$ при приписывании φ.

Таким образом, в терминах семантики возможных миров могут быть определены все необходимые семантические понятия для обоснования стандартной логики.

§ 4. Языки с интенсиональными знаками

Интенсиональные языки отличаются, как отмечалось, от стандартных экстенсиональных языков наличием особых предикатных знаков и операторов, например, типа "верит, что...", "знает, что...", "ищет...", "необходимо, что...". Мы предполагаем строить рассматриваемые языки на базе теории синтаксических категорий. Для этого следует расширить понятие индекса категории, а именно:

1. n и s суть индексы категорий (n — категория имен, $\mathbf{s}$ — категория предложений).

2. Если α и β индексы категорий, то α/β и $\alpha//\beta$ суть индексы категорий.

Выражения типа α/β назовем экстенсиональными, а типа $\alpha//\beta$ — интенсиональными. Таким образом имеются *экстенсиональные* одноместные *предикатные знаки* (типа s/n, для них будем использовать курсивные заглавные латинские буквы P, Q и т.д.) и *интенсиональные* (типа $s//n$, для них используем полужирные латинские заглавные буквы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и т.д.), аналогично имеются два типа одноместных пропозициональных операторов, например, $\urcorner$ есть оператор типа s/s, а $\Box$ — типа $s//\mathbf{s}$. В общем случае предикатный знак или оператор может быть интенсионален относительно одних и экстенсионален относительно других аргументов. Такое разграничение на интенсиональные и экстенсиональные знаки нередко принимается. Однако одного признания двух типов знаков недостаточно, чтобы построить язык с интенсиональными терминами, удовлетворяющий требованиям теории синтаксических категорий.

Мы принимаем два способа сочленения функтора с аргументами. Для каждого функтора существует один способ сочленения с аргументом, но интенсиональный и экстенсиональный функторы сочленяются со своим аргументом разными способами. Стандартный, экстенсиональный предикатный (или операторный) одноместный знак сочленяется с аргументом с помощью круглых скобок — $P(x)$; интенсиональный предикатный одноместный знак сочленяется с аргументным знаком с помощью квадратных скобок — $\mathbf{Q}[x]$.

В литературе имеется подход, когда допускаются разные способы приложения одного и того же предикатного знака к аргументу. Например, утверждения "P необходимо присуще a" (символически: $P[a]$), "P случайно присуще a" (символически: $P<a>$), "P присуще a" (символически: $P(a)$) можно рассматривать как результаты приложения одного и того же предикатного знака к аргументу, но приложения, осуществляемого разными способами. Признание разных типов приложения одного и того же предиката к аргументу восходит к работе К.А.Васильева[18] и в последующем разрабатывалось В.А.Смирновым и

[18] *Васильев Н.А.* Логика и металогика. Логос. В 2 кн. М., 1912-1913

В.И.Маркиным[19]. Такой подход ориентирован на проблематику модальностей de re, а не на интенсиональные контексты. Отметим, что указанный подход плохо согласуется с известной теорией семантических категорий. Напротив, принятие разных типов знаков наряду с разными способами приложения функтора к аргументу позволяет сохранить требования теории семантических категорий. Каждый примитивный знак будет иметь интенсионал и экстенсионал (в данном возможном мире). Пусть K — множество возможных миров, U — индивидная область. Тогда интенсионалом одноместного экстенсионального предикатного знака является объект типа $(2^U)^K$, то есть функция из K в 2^U, а интенсионалом одноместного интенсионального знака — объект типа $(2^{(U^K)})^K$, экстенсионалами в данном возможном мире — соответственно объекты типа 2^U и $2^{(U^K)}$. Аналогично, для одноместного интенсионального оператора его интенсионалом будет объект типа $(2^{(2^K)})^K$, а экстенсионалом (в данном мире) — $2^{(2^K)}$.

Следует отметить, что развиваемый нами подход согласуется с интерпретацией интенсиональных операторов Д.Скоттом и Р.Монтегю. Согласно Д.Скотту, одноместному интенсиональному оператору в качестве значения приписывается объект типа $(2^K)^{2^K}$, а согласно Монтегю — типа $2^{K \otimes 2^K}$. Однако объекты типа $(A^{B^K})^K$, $(A^K)^{(B^K)}$ и $A^{K \otimes B^K}$ изоморфны в теоретико-категорном смысле. Преимущество предлагаемого подхода состоит в возможности приписывать в качестве значений не *только интенсионалы или только экстенсионалы* (как у Д.Скотта и Р.Монтегю), но и экстенсионалы и интенсионалы.

Следующий вопрос, который необходимо рассмотреть, — это вопрос о статусе индивидных и пропозициональных знаков. Если имеются одноместные предикатные знаки двух типов — интенсиональные и экстенсиональные, то не следует ли это

[19] *Смирнов В.А.* Логические взгляды Н.А.Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1969.; *Маркин В.И.* Экспликация модальностей de re // Модальные и временные логики. Материалы II советско-финского коллоквиума по логике. М ., 1979.

деление распространить и на предложения? Ведь предложения можно рассматривать как нуль-местные предикатные знаки. Пустое декартово произведение Ux...xU обозначим < >, соответственно пустое декартово произведение U^Kx...xU^K есть также < >. Поэтому $(2^{\underbrace{U^K \times \ldots \times U^K}_{n}})^K$ при $n = 0$, тождественно $(2^{\underbrace{U^K \times \ldots \times U^K}_{n}})^K$ и тождественно 2^K. Аналогично, индивидный знак можно рассматривать как нульместный функциональный знак: тогда в качестве интенсионала ему сопоставляется U^K и $\{U^{<>}\}^K = U^K$. Таким образом, нет оснований для введения двух типов индивидных переменных; также нет оснований для введения двух типов предложений — интенсиональных и экстенсиональных.

В ранее упоминавшихся работах[20] построен язык без операций абстракции, и семантика соответственно строилась для такого языка. В данном изложении мы отказываемся от этого ограничения. Поскольку имеются две операции приложения функтора к аргументу, естественно иметь и две операции абстракции. Одну из них будем обозначать λ, соответствующую операции приложения ( ), другую — σ. Допустим нам понятно, что означает выражение "формула А имеет экстенсиональное вхождение переменной x" и "формула А имеет интенсиональное вхождение переменной x". Ниже мы формулируем эти понятия точным образом.

Если А — формула, имеется но крайней мере одно экстенсиональное вхождение x в А и не имеется ни одного интенсионального вхождения x в А, то λxА есть выражение категории s/n. Другими словами, мы можем образовать экстенсиональный предикат по формуле, в которую x входит экстенсионально, но не входит интенсионально. Другой тип абстракции — σ-абстракции по x — может быть образован по любой формуле, в которую входит x: если A — формула и x входит в A, то $\sigma x A$

[20] См.: *Смирнова Е.Д.* Подход к семантике первопорядковой интенсионально логики // Релевантные логики и теория следования. Материалы II советско-финского коллоквиума по логике. М., 1979.

есть выражение категории $s//n$. Принятые условия позволяют каждому экстенсиональному предикату сопоставить интенсиональный. Так, по экстенсиональному предикату P строим формулу $P(x)$, по этой формуле образуем интенсиональный предикат $\sigma x P(x)$. Однако по интенсиональному предикату нельзя построить экстенсиональный; пусть $\mathbf{Q}$ — интенсиональный предикат, тогда $\mathbf{Q}[x]$ есть формула, но по ней нельзя с помощью λ-абстракции построить экстенсиональный предикат, так как x в $\mathbf{Q}[x]$ входит интенсионально. Содержательно принятое ограничение можно оправдать следующим образом:

λxA рассматривается как *класс индивидов*, удовлетворяющих условию A, σxA — как *класс индивидных концептов*, удовлетворяющих условию A. Ясно, что если в A переменная входит интенсионально, то можно с помощью A охарактеризовать класс индивидных концептов, но не класс индивидов. Отсюда и принятые ограничения.

При наличии операторов абстракции кванторы естественно рассматривать как одноместные второпорядковые предикаты. При этом эти предикаты будут экстенсиональными, то есть типа $s/(s//n)$ или $s/(s/n)$.

Имеется четыре предиката универсальности:

$\bigwedge.(\lambda xA)$ истинно в H, если U_H включается в экстенсионал (в мире H) λxA;

$\bigwedge(\lambda xA)$ истинно в H, если U включается в экстенсионал (в мире H) λxA;

$\forall(\sigma xA)$ истинно в H, если U^K включается в экстенсионал (в мире H) σxA;

$\forall.(\sigma xA)$ истинно в H, если $(U_H)^K$ включается в экстенсионал (в мире H) σxA.

Последний предикат не имеет достаточно прозрачного интуитивного смысла. Соответственно этим предикатам вводятся четыре квантора общности: $\bigwedge.xA$, $\bigwedge xA$, $\forall xA$, $\forall.xA$. Аналогично имеем четыре квантора существования: $\bigvee.xA$, $\bigvee xA$, $\exists.xA$, $\exists.xA$.

Мы имеем все необходимые средства, чтобы точным образом построить первопорядковый язык с интенсиональными

знаками и сформулировать для него семантику в терминах возможных миров.

Язык строится на основе теории синтаксических категорий. Определим, что есть индекс категории:

1. n и s суть индексы категорий;

2. если α и β — индексы категорий, то α/β и $\alpha//\beta$ суть индексы категорий.

Нелогический словарь **A**, интенсионального языка содержит предикатные знаки типов s/n, $s//n$, $(s/n)/n$, $(sn)//n$, $(s//n)/n$, $(s//n)//n$ и так далее (то есть типа α/n или $\alpha//n$, где α есть s или является категорией предикатного знака). Для простоты мы рассматриваем языки без индивидных констант и функциональных знаков.

К логическим знакам принадлежат: индивидные переменные x, y, z, ... (возможно, с индексами); пропозициональные связки и операторы, то есть выражения категорий s/s, $s//s$. α/s, $\alpha//s$, где α есть категория пропозициональной связки или оператора; второпорядковые логические предикаты $\bigwedge.$, $\bigwedge$, $\forall.$, $\forall$, $\bigvee.$, $\bigvee$, $\exists.$, $\exists$; знак экстенсионального равенства $=$ (категории $(s/n)/n)$) и знак интенсионального равенства $\doteq$ (категории $(s//n)//n)$.

При желании можно расширить словарь за счет введения пропозициональных переменных и предикатных переменных для каждой предикатной категории (но введение кванторов по ним приводит уже к второпорядковому языку).

Обратим внимание, что исходные знаки первопорядкового языка будут иметь категории вида:

n для индивидных переменных; α/n или $\alpha//n$ — для предикатных знаков словаря А или равенств;

α/s или $\alpha//s$ — для пропозициональных связок и операторов; $s/(s/n)$ или $s/(s//n)$ — для второпорядковых логических предикатов.

Определим понятие выражения со свободными экстенсиональными и интенсиональными вхождениями переменных:

1. Если A есть предикатный знак словаря **А** или равенство категории α/n ($\alpha//n$), то A есть выражение категории α/n ($\alpha//n$) с пустыми списками экстенсиональных и интенсиональных свободных вхождений индивидных переменных.
2. Если A есть выражение категории α/n со списком **И** интенсиональных свободных вхождений индивидных переменных и списком **Э** экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных и x есть индивидная переменная, то $A(x)$ есть выражение категории α со списком **И** интенсиональных и списком **Э**$\cup\{x\}$ экстенсиональных свободных вхождений переменных.
3. Если A есть выражение категории $\alpha//n$ со списком **И** интенсиональных свободных вхождений и списком **Э** экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных и x — индивидная переменная, то $A[x]$ есть выражение категории α со списком **И**$\cup\{x\}$ интенсиональных и списком **Э** экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных.
4. Если А есть выражение категории α со списком **И**$_1$ интенсиональных и списком **Э**$_1$ экстенсиональных свободных вхождений переменных и B есть выражение категории s со списком **И**$_2$, интенсиональных и списком **Э**$_2$ экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных, то $A(B)$ есть выражение категории α со списками **И**$_1\cup$**И**$_2$ и **Э**$_1\cup$**Э**$_2$ свободных вхождений индивидных переменных.
5. Если А есть выражение категории $\alpha//s$ со списками **И**$_1$ интенсиональных и **Э**$_1$ экстенсиональных свободных вхождений переменных и B есть выражение категории α со списками **И**$_2$ интенсиональных и **Э**$_2$ экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных, то $A[B]$ есть выражение категории α со списком **И**$_1\cup$**И**$_2\cup$**Э**$_2$ интенсиональных и списком **Э**$_1$ экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных.

6. Если A есть выражение категории s со списком **И** интенсиональных и списком **Э** экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных, $x\notin$**И** и $x\in$**Э**, то λxA есть выражение категории s/n со списками **И** интенсиональных и **Э** — $\{x\}$ (**Э** за вычетом x) экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных.
7. Если A есть выражение категории s со списками **И** и **Э** интенсиональных и экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных и $x\in$**И**$\cup$**Э**, то σxA есть выражение категории $s//n$ со списком **И** — $\{x\}$ интенсиональных и списком **Э** — $\{x\}$ экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных.
8. Если A есть выражение категории s/n со списками **И** и **Э** интенсиональных и экстенсиональных свободных вхождений индивидных переменных, то $\wedge.(A)$, $\wedge(A)$, $\forall(A)$ и $\forall$(A) суть выражения категории s со списками **И** и **Э** свободных вхождений индивидных переменных.

Таким образом, под выражением понимается или предикатное выражение или формула. Формула есть выражение категории s.

В некоторых дополнительных комментариях нуждается пункт 5 индуктивного определения выражения. Согласно этому пункту определения все свободные вхождения индивидной переменной, находящейся в области действия интенсионального пропозиционального оператора, считаются интенсиональными вхождениями.

Мы предполагаем, что к числу пропозициональных связок принадлежат классические связки $\urcorner$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$. Двухместные связки — это связки категории $(s/s)/s$. Вопрос об интенсиональных операторах здесь не рассматривается. Для них даются только схемы при описании семантики. К числу интенсиональных операторов могут принадлежать операторы необходимости и случайности в смысле некоторых модальных систем, эпистемические операторы типа "знает, что..." и т.д.

Перейдем к систематическому определению семантики. Под *модельной структурой* для языка **L** со словарем **А** и множеством интенсиональных операторов **B** будем понимать четверку <K,U,ψ,I>, где K есть непустое множество возможных миров, U — непустое множество индивидов, ψ — функция, сопоставляющая каждому возможному миру подмножество U ($\psi(H)$ в дальнейшем будем обозначать также U_H, H пробегает по возможным мирам, U_H есть индивидная область мира H), I есть функция, сопоставляющая каждой логической (то есть пропозициональным связкам, равенствам, операторам из **B** и логическим предикатам) и нелогической константам значения по формулируемым ниже правилам.

Каждой предикатной константе сопоставляется объект по следующим правилам:

1. Если P есть предикатное выражение категории s/n, то $I(P)$ есть объект типа $(2^U)^K$.
2. Если R есть предикатное выражение категории $s/.../n$, то $I(R)$ есть объект категории $(2^{U...U})^K$.
3. Если **Q** есть выражение категории $s//n$, то $I(Q)$ есть объект категории $(2^{(U^K)})^K$.
4. Если **S** есть выражение категории $s//...//n$, то $I(S)$ есть объект категории $(2^{(U^K...(U^K)})^K$.

Естественно, что для каждого предикатного знака указывается не тип объекта, а сам объект.

Классическим пропозициональным связкам приписываются следующие значения.

Пусть $\begin{cases} f_1(t)=t \\ f_1(f)=t \end{cases}$ $\begin{cases} f_2(t)=t \\ f_2(f)=f \end{cases}$ $\begin{cases} f_3(t)=f \\ f_3(f)=t \end{cases}$ $\begin{cases} f_4(t)=f \\ f_4(f)=f \end{cases}$

Определим функцию из $\{t,f\}$ в $\{f_1, f_2, f_3, f f_4\}$:

$$\begin{cases} m(t)=f_2 \\ m(f)=f_1 \end{cases}$$

Придадим значения отрицанию и импликации:

$J(\neg) = h$, где $h(H)= f_3$ для всех $H\in K$,

$J(\supset) = g$, где $g(H)= m$ для всех $H\in K$.

Значения другим классическим связкам можно приписать аналогичным образом.

Мы не фиксировали интенсиональные операторы. Поэтому зафиксируем схему приписывания им значений. Одноместному пропозициональному интенсиональному оператору приписывается объект типа $(2^{(2^K)})^K$. Как мы отмечали, это согласуется с подходом Монтегю, который приписывает объект типа $2^{K\times 2^K}$, и подходом Д.Скотта, который приписывает объект типа $(2^K)^{(2^K)}$. Аналогично приписываются значения интенсиональным операторам от большего числа мест. Естественно каждому конкретному оператору приписывается функция, на которую накладываются дополнительные условия. Для стандартных модальных операторов они хорошо известны.

§ 5. Семантика первопорядковой интенсиональной логики

Мы имеем все необходимое, чтобы точным образом построить семантику первопорядковой интенсиональной логики. Но прежде всего заметим, что в нашем названии нет ничего парадоксального. Согласно Монтегю, интенсиональная логика может быть самое меньшее второпорядковой. У Монтегю собственно интенсиональные предикаты не являются атомарными, они вводятся с помощью экстенсиональных предикатов и интенсиональных операторов. Принятие двух способов приложения функторов к аргументам и двух операций абстракции позволяет вводить интенсиональные предикаты без обращения к интенсиональным операторам. К тому же интенсиональные предикаты могут входить в словарь атомарных предикатов.

Для простоты мы примем, что выражения строятся не с помощью одноместных функций приложения функтора к аргументу, а функтор прилагается к n-ке аргументов; при этом, естественно, требуется указать, какие аргументные места являются экстенсиональными, а какие — интенсиональными (в последнем случае аргументное место будем заключать в прямые уголки $\lfloor\ \rfloor$). Язык содержит только одноместные интенсиональные операторы $\square_i$, где i -номер интенсионального оператора.

Под интерпретацией I нелогических констант будем иметь в виду функцию, которая каждому миру H сопоставляет функцию I_H, которая, в свою очередь, каждому предикатному знаку R^n сопоставляет множество кортежей длины n, причем если i-е аргументное место интенсионально, то i-ый член последовательности есть элемент из U^K, если экстенсионально — то из U.

Каждому интенсиональному оператору $\square_i$ сопоставляется функция Θ_i из K в 2^K. Для каждого оператора имеются условия, которым должна удовлетворять функция Θ_i.

Функция φ приписывания значений индивидным переменным есть функция, сопоставляющая каждой переменной объект из U^K.

Под модельной структурой будем иметь в виду последовательность $<K,N,U,I,\Theta,\psi>$, где K — непустое множество возможных миров, N — множество нормальных миров ($N\subseteq K$), U — непустая индивидная область, Θ — функция, сопоставляющая каждому интенсиональному оператору соответствующий объект, и ψ — функция из K в 2^U, $\psi(H)$ — в дальнейшем будем писать U_H — непустая индивидная область возможного мира H.

Мы не будем непосредственно приписывать значения пропозициональным связкам, предикатам универсальности и непустоты, но определим все контексты, в которых они встречаются.

Ниже индукцией по структуре выражения определим понятие интенсионала для формул и индивидных выражений и экстенсионала (но не интенсионала) для предикатных выражений. Для первопорядковой логики понятие интенсионала предикатного выражения нам не требуется. Поэтому наша задача существенно упрощается.

Заметим также, что λ-абстракция и σ-абстракция применяются только к формулам, но не, предикатным выражениям.

Пусть «$\varphi \underset{x}{=} \varphi'$» есть сокращение для «$\varphi'$ есть функция приписывания, отличающаяся от φ, возможно, приписыванием

значения переменной x», а «$\varphi \underset{Hx}{\equiv} \varphi'$» есть сокращение для «$\varphi'$ в мире H приписывает всем переменным, кроме, возможно, x, тот же индивид, что и φ в мире H». Нетрудно видеть, что если $\varphi \underset{Hx}{\equiv} \varphi'$, то $\varphi \underset{x}{=} \varphi'$.

Одновременной индукцией определим понятия интенсионала формулы и индивидного выражения относительно приписывания φ значений свободным переменным (символически: $\mathrm{Int}(A, \varphi)$) и экстенсионала индивидного выражения, формулы и предикатного выражения в мире H относительно приписывания φ значений свободным переменным:

1. $\mathrm{Int}(x, \varphi) = \varphi\ (x)$;
2. $\mathrm{Ext}_H(x, \varphi) = \varphi(x)(H)$;
3. $\mathrm{Ext}_H\ (R, \varphi) = I_H(R)$;
4. $\mathrm{Ext}_H(R(\ldots, \lfloor x \rfloor, \ldots\ x_j, \ldots), \varphi) = t \Leftrightarrow <\ldots,\ \varphi(x),\ \ldots\ \varphi(x_j)(H)\ldots> \in$ $\mathrm{Ext}_H\ (R,\varphi)$;
5. Если A-формула, то $\mathrm{Int}(A,\varphi) = \{H \mid \mathrm{Ext}_H(A,\ \varphi) = t\}$; в другой форме $\mathrm{Ext}_H(A,\varphi) = t \Leftrightarrow H \in \mathrm{Int}(A,\varphi)$;
6. $\mathrm{Int}(A\&B,\varphi) = \mathrm{Int}(A,\varphi) \cap \mathrm{Int}(B,\varphi)$;
7. $\mathrm{Int}(\rceil A,\varphi) = K - \mathrm{Int}(A,\varphi)$;
8. $\mathrm{Int}(\square_i A,\varphi) = \{H \mid \mathrm{Int}(A,\varphi) \in \Theta_i(H)\}$;
9. $\mathrm{Int}(x=y,\varphi) = \{H \mid \varphi(x)(H) = \varphi(y)(H)\}$;
10. $\mathrm{Ext}_H(\lambda xA,\varphi) = \{m \in U \mid \forall\varphi'(m=\varphi'(x)(H) \wedge \varphi' \underset{Hx}{\equiv} \varphi \Rightarrow H \in \mathrm{Int}(A,\varphi')\}$;
11. $\mathrm{Ext}_H(\sigma xA,\varphi) = \{w \in U^K \mid \forall\varphi'(w=\varphi'(x) \wedge \varphi' \underset{x}{=} \varphi \Rightarrow H \in \mathrm{Int}(A,\varphi')\}$;
12. $\mathrm{Ext}_H(\Lambda(\lambda xA),\varphi)=t \Leftrightarrow U \subseteq \mathrm{Ext}_H(\lambda xA,\varphi) \Leftrightarrow \forall\varphi'(\varphi' \underset{Hx}{\equiv} \varphi \Rightarrow H \in \mathrm{Int}(A,\varphi'))$;
13. $\mathrm{Ext}_H(\Lambda.(\lambda xA),\varphi)=t \Leftrightarrow U_H \subseteq \mathrm{Ext}_H(\lambda xA,\varphi)$;
14. $\mathrm{Ext}_H(\forall(\sigma xA),\varphi)=t \Leftrightarrow U^K \subseteq \mathrm{Ext}_H(\sigma xA,\varphi)$;
15. $\mathrm{Ext}_H((\lambda xA)(y),\varphi)=t \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_H(y,\varphi) \in \mathrm{Ext}_H(\lambda xA,\varphi)$;
16. $\mathrm{Ext}_H((\sigma xA)[y],\varphi)=t \Leftrightarrow \mathrm{Int}_H(y,\varphi) \in \mathrm{Ext}_H(\sigma xA,\varphi)$.

Мы не вводим предикат $\forall.$ в силу неясности его употребления. Кванторы вводятся как сокращения:

$\Lambda xA \rightleftharpoons \Lambda(\lambda xA)$,

$\forall xA \rightleftharpoons \forall(\lambda xA)$,

$\Lambda.\ xA \rightleftharpoons \Lambda.(\lambda xA)$.

Из 10-14 легко получить:

17. $\mathrm{Ext}_H(\Lambda xA),\varphi)=t \Leftrightarrow \forall\varphi'(\varphi' \underset{\overline{Hx}}{=} \varphi \Rightarrow H\in \mathrm{Int}(A,\varphi'))$;

18. $\mathrm{Ext}_H(\forall xA),\varphi)=t \Leftrightarrow \forall\varphi'(\varphi' \underset{x}{=} \varphi \Rightarrow H\in \mathrm{Int}(A,\varphi'))$;

19. $\mathrm{Ext}_H(\Lambda .xA),\varphi)=t \Leftrightarrow \forall\varphi'(\varphi' \underset{\overline{Hx}}{=} \varphi)$.

Если не вводить λ- и σ-операторов, то вместо 10-16 можно принять 17-19.

Можно ввести и квантор ∀.:

$\mathrm{Ext}_H(\forall .xA),\varphi)=t \Leftrightarrow \forall\varphi'(\varphi' \underset{x}{=} \varphi \wedge \varphi'(x)(H)\in U_H \Rightarrow H\in \mathrm{Int}(A,\varphi'))$.

Формула A истинна в мире H, если и только если $\mathrm{Ext}(A,\varphi)=t$ при всех приписываемых φ. Формула A общезначима в данной модельной структуре, если и только если она истинна во всех нормальных мирах этой структуры. Формула общезначима, если и только если она общезначима во всех модельных структурах данного типа.

Назовем построенную систему ИПЛ (интенсиональная предикатная логика). Квантор ∀ связывает переменные относительно их интенсионалов. Для этого квантора общезначимы все соответствующие аксиомы и правила вывода стандартного исчисления предикатов. Квантор Λ связывает переменные относительно их экстенсионалов. Если переменная имеет хотя бы одно интенсиональное вхождение, то она не может быть связана квантором Λ. Для этого квантора также общезначимы все соответствующие аксиомы и правила вывода стандартного исчисления предикатов. Однако квантификация по объектам данной области не подчиняется всем законам стандартного исчисления. В частности формула $\Lambda .xA\supset A$ неверна. Каково отношение между кванторами? Легко проверить, что $\forall xA\supset\Lambda xA$ и $\Lambda xA\supset\Lambda .xA$ общезначимы, при условии, конечно, что все свободные вхождения x в A суть экстенсиональные вхождения; в противном случае формула ΛxA не будет правильно построенной.

Введенная нами система позволяет увидеть *причину* трудностей, связанных с принципом замены равного равным. Этот принцип обычно формулируется или в виде $x=y\supset Ax\equiv Ay$ (I) или в виде $\forall x\forall y(x=y\supset Ax\equiv Ay)$ (II), где Ax есть формула с выделенным свободным вхождением x в A, Ay есть результат замены выделенного вхождения x на y.

Напомним известные рассуждения.

Холм, под которым погребена Троя, носит название Гисарлык. Эту посылку можно записать так:

1. Холм, под которым погребена Троя, — Гисарлык.

Пусть имеет место:

2. Шлиманн искал холм, под которым погребена Троя. Согласно принципу замены равного равным (I):
3. Если холм, под которым погребена Троя, тождествен Гисарлыку, то Шлиманн искал холм, под которым погребена Троя, тогда и только тогда, когда Шлиманн искал Гисарлык.

Из этих трех утверждений получаем:

4. Шлиманн искал Гисарлык.

Посылки 4-2 истинны, но заключение ложно.

Ситуация проясняется, если мы учтем различие между интенсиональными и экстенсиональными вхождениями индивидных терминов. Так, в утверждении "Шлиманн искал холм, под которым погребена Троя" термин "Шлиманн" входит экстенсионально, а термин "холм, под которым погребена Троя" — интенсионально.

В обозначениях сформулированной нами выше системы это утверждение имеет вид: $(R(a))[b]$, где R — сокращение для "искал", a — для "Шлиманн", b — для "холм, под которым погребена Троя". Пусть c есть сокращение для "Гисарлык". Тогда принцип замены равного равным, используемый в приведенном выше рассуждении, имеет вид: $b=c\supset(R(a))[b]\equiv(R(a))[c]$.

Но этот принцип не доказуем в построенной нами системе. Пусть $A(b)$ обозначает фиксированную формулу A с экстенсиональным вхождением индивидного терма b (в случае переменной — со свободным экстенсиональным вхождением), а $A(c)$ — результат замены вхождения b на c. Аналогично $A[b]$ будет обозначать формулу с фиксированным интенсиональным вхождением, а Ab — с выделенным интенсиональным или экстенсиональным вхождением.

Тогда принцип замены равного равным вида $b=c\supset A(b)\equiv A(c)$ будет общезначим в системе интенсиональной логики, а принцип $b=c\supset A[b]\equiv A[c]$ не общезначим.

Аналогичным образом могут быть проанализированы ситуации, когда осуществляется замена равного равным в контекстах, которые входят в область действия модальных операторов. Обратимся к примеру В.Куайна:

1. Число планет равно 9 (посылка).
2. Необходимо, что 9 равно 9 (посылка).
3. Если число планет равно 9, то необходимо, что 9 равно 9 тогда и только тогда, когда необходимо, что число планет равно 9 (принцип замены равного равным).

Из 1, 2 и 3 получаем:

4. Необходимо, что число планет равно 9.

Посылки 1 и 2 истинны, заключение 4 ложно. Отсюда принцип замены равного равным в форме $a=b\supset\Box(A(a))\equiv A(b))$ неверен.

В развиваемой нами системе он действительно неверен, так как вхождения a и b в формуле $\Box(A(a))\equiv A(b))$ находятся в области действия оператора необходимости и тем самым являются интенсиональными.

Вообще говоря, то, когда терм стоит на аргументном интенсиональном месте, и то, когда он находится в области действия интенсионального оператора, — разные вещи. В данном рассмотрении мы игнорируем это важное различие.

В рамках сформулированной системы ИПЛ могут быть преодолены и другие трудности, связанные с интенсиональными контекстами.

Естественным расширением системы КПЛ является система с понятием интенсионального равенства и интенсиональной эквивалентности. Но эти расширения требуют дополнительных исследований.

Достоинством системы ИПЛ является то, что: 1) каждое выражение имеет и интенсионал и экстенсионал; 2) интенсиональные контексты отличаются от экстенсиональных не только приписыванием особых значений интенсиональным предика-

там (операторам), но и способом сочленения их с аргументами; 3) интенсионал любого сложного экстенсионального выражения является функцией интенсионалов составляющих; 4) экстенсионал сложного интенсионального выражения является функцией экстенсионала функтора и интенсионалов аргументных выражений. Тем самым выявляется существенное отличие интенсиональных контекстов от экстенсиональных.

Разработка указанных методов позволяет более точным, адекватным образом представлять логико-семантическую структуру широкого круга контекстов естественных языков.

§ 6. Проблемы конкретности истинности в логической семантике. Точки соотнесения и контексты использования

Уже в §2 гл.IV мы видели, что в семантике возможных миров не обязательно отождествлять "возможный мир" с возможной реализацией или о описанием состояния. Интерпретация в терминах возможных реализаций является лишь одной из возможных. В целом можно учитывать целый набор факторов как объективного, так и субъективного, прагматического характера, относительно которых релятивизируется истинность высказываний. Вслед за Д.Скоттом в этой более общей ситуации целесообразно использовать термин "точки соотнесения". Сама точка соотнесения является кортежем различных факторов: собственно возможных миров, объективного и познавательного времен, условий, в которых делаются утверждения, лиц, их высказывающих, и т.д.

Этот подход позволяет учесть важную гносеологическую идею конкретности истинности, то есть зависимость истинности высказываний от условий, места, времени и других обстоятельств.

Следует отметить, что, развивая семантику возможных миров в более обобщенном виде, Р.Монтегю в ранних своих работах под точками соотнесения имел в виду исключительно прагматические аспекты. Поэтому свой семантический подход он называл не семантикой, а теоретической прагматикой. Мы думаем, что такое отождествление неправомерно. В более поздних работах сам Р.Монтегю подразделяет точки соотнесения на два подкласса — мы бы сказали, семантико-онтологические и прагматические. В последнем случае он использует термин "контексты использования" (context of use). Это дает ему возможность наряду с понятием значения (Meening) ввести понятие смысла (Sense). Первое можно отождествлять с интенсионалами, где под интенсионалами выражений имеются в виду функции, сопоставляющие каждому возможному миру (то есть компонентам точки соотнесения, не являющимся прагматическими) экстенсионалы этих выражений в этом мире. Смысл выражения отождествляется с функцией, сопоставляющей каждой точке использования (то есть совокупности прагматических факторов) некоторый интенсионал. Мы не будем входить в технические детали этого подхода.

Отметим только, что, на наш взгляд, при обсуждении проблемы смысла необходимо учитывать деятельностный характер познания, от чего абстрагируются при развиваемом теоретико-множественном подходе. Однако, что для нас особенно здесь важно, теоретико-множественная семантика возможных миров позволяет учесть зависимость истинности утверждений от объективных и субъективных обстоятельств, то есть учесть философскую идею конкретности истинности. С другой стороны, семантика возможных миров расширяет сферу логического, позволяя анализировать точными методами не только экстенсиональные, но и интенсиональные контексты.

В связи с достижениями в этой области открываются новые перспективы логического анализа естественных языков. С одной стороны, логическими методами могут быть реконструированы отдельные фрагменты естественных языков. С другой стороны, построение логических систем с достаточно богатыми выразительными возможностями позволяет переводить достаточно сложные утверждения естественных языков на логические языки и тем самым дает в руки средства для исследования и естественных языков. Во всяком случае успехи семантики возможных миров открывают новые перспективы для сотрудничества логиков и лингвистов.

Глава пятая

НЕСТАНДАРТНЫЕ СЕМАНТИКИ И ПРОБЛЕМА СЕМАНТИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ

§ 1. Расширение ортодоксальной семантики и ее альтернативы

Решение семантических парадоксов, предложенное А.Тарским, состояло в требовании исключить из сферы рассмотрения семантически замкнутые языки. Семантически замкнутые языки, в предположении, что сохраняется обычная классическая логика, являются самопротиворечивыми и непригодными для употребления. Этот подход явился плодотворным. Однако он основывался на очень сильных идеализациях. Семантические парадоксы просто устранялись, но не изучались.

Вслед за работой А.Тарского появились критические статьи и альтернативные предложения. Большинство из них основывалось на непонимании конструкций Тарского и были направлены не столько против действительной теории, сколько против фантомов, изобретенных самими авторами. Это замечание, естественно, не относится к пионерским работам Д.А.Бочвара, Ф.Фитча и ряда других авторов, которые предложили действительно альтернативные решения.

Как было отмечено выше, Д.А.Бочвар в 1938 г. предложил оригинальный способ преодоления логических и семантических парадоксов. Он не отказывается ни от неограниченного

принципа свертывания, ни от семантической замкнутости. Парадоксы преодолеваются за счет отказа от принципа бивалентности, то есть не предполагается, что каждое высказывание является либо истинным, либо ложным, могут быть бессмысленные, абсурдные утверждения. Такой подход приводит к необходимости формулировать новую логику.

Исключение из сферы рассмотрения семантически замкнутых языков позволило разработать исключительно богатую семантическую теорию. Успехи, достигнутые в теории моделей (стандартной референциальной семантики), семантике возможных миров, сделали возможным вернуться на новой основе к альтернативным способам преодоления семантических парадоксов. Новый стимул был придан работами С.Крипке, Р.Мартина и П.Вудруфа (1975).

Стандартная семантика, включая семантику возможных миров, носит ярко выраженный экстенсиональный, теоретико-множественный характер. Свойства и отношения в этой семантике задаются указанием их объемов. Даже тогда, когда вводится понятие интенсионала, сам интенсионал выражения отождествляется с теоретико-множественной функцией, сопоставляющей каждому миру объем этого выражения в данном мире.

Далее, предполагалось, что функции и предикаты являются всюду определенными. Это относится и к семантическим предикатам, таким, как предикат "истинное высказывание".

Разработка теории рекурсивных функций неизбежно приводит к идее не всюду определенной (частичной) рекурсивной функции. Рекурсивной функции сопоставляется алгорифм, вычисляющий по аргументам функции ее значение. Но алгорифм может не закончить работу, то есть соответствующая ему функция может оказаться не всюду определенной. В общем случае мы не имеем метода распознания, будет ли функция, создаваемая алгорифмом, всюду определенной или нет. Идея частичной рекурсивной функции является более фундаментальной, чем идея всюду определенной рекурсивной функции. Более того, частичнорекурсивные фикции позволяют преодолеть трудности, связанные с диагонализацией[1] .

При теоретико-множественном подходе функции $f(x_1,...,x_n)$ может быть сопоставлен предикат $R(x_1,...,x_n,y)$, удовлетворяющий условию единственности $R(x_1,...,x_n,y)\&R(x_1,...,x_n,z)\supset y=z$. В случае всюду определенной функции должно выполняться дополнительное условие $\forall x_1,..., \forall x_n \exists y\ R(x_1,...,x_n,y)$. Для частичной функции последнее условие не выполняется. Таким образом, при теоретико-множественном истолковании функций они, в том числе и частичные функции, заменяются предикатами.

Но в некотором смысле понятие функции является более фундаментальным, нежели понятие класса и отношения. Рекурсивное n-местное отношение можно рассматривать как задаваемое n-местной характеристической функцией, то есть функцией типа $X^n \rightarrow \{0,1\}$. Если характеристическая функция n-местного предиката является не всюду определенной, а только частичной, то мы имеем не всюду определенные предикаты. В целом это соответствует нашей интуиции. Еще Г.Гегель отмечал, что о духе нельзя сказать, что он зеленый, как нельзя сказать, что он незеленый.

Такой подход приводит к идее, что и понятие истинности не является определенным на всем классе высказываний. Так, высказывания "Дух зеленый", "Гай Юлий цезарь есть простое число" не будут ни истинными, ни ложными. Эти идеи приводят к сильной трехзначной логике Клини. По существу, эту логику можно рассматривать как двузначную логику с не всюду определенным понятием истинности. Наконец, встает вопрос о необходимости восстановления симметрии между истинностью и ложностью. Даже в конструктивной логике истинность в некотором смысле понимается более операционно, чем ложность; ложность трактуется просто как неистинность.

Мы начнем с проблемы не всюду определенных предикатов, включая понятие истинности. В некотором смысле такой

---

1 *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.

подход является не столько альтернативным ортодоксальному подходу (подходу Тарского), сколько его расширением и обогащением. Мы учтем также симметрию истинности и ложности, хотя на этом этапе не откажемся от теоретико-множественных предпосылок, как и от неоперационного характера семантики. Затем мы перейдем собственно к анализу альтернативных подходов к преодолению семантических парадоксов.

2. Семантика с не всюду определенным понятием истинности

Предварительно мы построим семантику для логики высказываний, исходя, во-первых, из идеи симметрии между истинностью и ложностью и, во-вторых, допуская истинностные провалы. Мы будем строить семантику, используя идею возможных миров. Пусть W — непустое множество возможных миров, на этом множестве могут быть заданы некоторые отношения или введена некоторая топология. К этому вопросу мы вернемся позже.

Пусть φ — функция, приписывающая каждой переменной пару множеств $<H_1,H_2>$. Примем обозначения: $\varphi_T(p) = H_1$ и $\varphi_F(p) = H_2$, $\varphi_T(p)$ — это класс миров, в котором p истинно, а $\varphi_F(p)$ — класс миров, в котором p ложно. В другой терминологии $\varphi_T(p)$ — событие, подтверждающее p, $\varphi_F(p)$ — событие, опровергающее p.

Можно потребовать, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $\varphi_T(p)\cap \varphi_F(p) = \phi$,

(2) $\varphi_T(p)\cup \varphi_F(p) = W$.

При принятии (1) и (2) мы имеем стандартную семантику; при принятии (1) и отбрасывании (2) — семантику с истинностно-значными провалами (gap); при принятии (2) и отбрасывании (1) — двойственную ей семантику с пресыщенной (glut) оценкой. Наконец, четвертый случай — при отбрасывании (1) и (2) — дает нам релевантную семантику.

Введем условия приписывания значений сложным формулам:

$\varphi_T(\sim A) = \varphi_F(A)$; $\varphi_F(\sim A) = \varphi_T(A)$;

$\varphi_T(A\&B) = \varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)$; $\varphi_F(A\&B) = \varphi_F(A)\cup\varphi_F(B)$;

$\varphi_T(A\vee B) = \varphi_T(A)\cup\varphi_T(B)$; $\varphi_F(A\vee B) = \varphi_F(A)\cap\varphi_F(B)$;

$\varphi_T(A\supset B) = \varphi_F(A)\cup\varphi_T(B)$; $\varphi_F(A\vee B) = \varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)$.

Все введенные связки, как можно видеть, являются сильными связками трехзначной клиневской логики.

Мы могли бы ввести и импликацию, соответствующую импликации Лукасевича:

$\varphi_T(A\xrightarrow{Ł}B)=\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B)\cup(\varphi_T(A)\cup\varphi_F(B))'$ и $\varphi_F(A\xrightarrow{Ł}B)=\varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)$.

Нематериальные импликации и отрицания могут быть введены дополнительно на основе отношений достижимости. Однако, к этому мы вернемся позже.

Определим оценку последовательностей формул:

$\varphi_T(A_1,...,A_n) = \varphi_T(A_1)\cap\ ...\ \cap\varphi_T(A_n)$;

$\varphi_F(A_1,...,A_n) = \varphi_F(A_1)\cup\ ...\ \cup\varphi_F(A_n)$.

Теперь мы можем ввести понятие истинности в данном мире модельной структуры при данном приписывании:

$a \overset{\varphi}{\Vdash} A \Leftrightarrow a \in \varphi_T(A)$.

Аналогично может быть введено понятие ложности при данном приписывании в данном мире: $A \dashv\!| a \Leftrightarrow a\in\varphi_F(A)$.

Будем говорить, что A *тавтологично*, если и только если $\forall\varphi(\varphi_T(A)=W)$. A — *неопровержимо*, если и только если $\forall\varphi(\varphi_F(A)=\phi)$.

Если принимаются условия (1) и (2), то класс тавтологических формул совпадает с классом неопровержимых формул и совпадает с классом тавтологий классической логики.

Если принимаем условие (1), но не принимаем условие (2), то мы имеем дело с собственно клиневскими связками или — в более общем случае — с семантикой с истинностно-значными провалами. При отождествлении возможного мира с обобщенным описанием состояния (множеством атомарных предложений или их отрицаний) условие (1) запрещает противоречивые описания состояния, а условие (2) — неполные описания состояния. В терминологии обобщенных описаний состояний семантика разрабатывается Е.К.Войшвилло.

В рассматриваемом случае — с не всюду определенным понятием истинности — класс тавтологий будет пуст. Нетрудно показать, что класс *неопровержимых* формул совпадает с классом доказуемых формул классической логики высказываний.

При нашем подходе мы могли бы ввести не одно, а целый класс отношений логического следования. Для простоты введем отношения следования между двумя формулами. Мы вводим шесть таких отношений:

[*a*] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(B)$

[*b*] $\varphi_F(A) \subseteq \varphi_F(B)$

[*c*] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(B)$ и $\varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A)$

[*d*] $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_F(B)'$, т.е. $\varphi_T(A)\cap\varphi_F(B) = \phi$

[*e*] $\varphi_F(A)' \subseteq \varphi_T(B)$, т.е. $\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B) = W$

[*f*] $\varphi_T(A)\cap\varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A)\cup\varphi_T(B)$

Если принимаются допущения (1) и (2), то все введенные отношения логического следования оказываются эквивалентными. Действительно, из (1) следует: $\varphi_T(A)\subseteq\varphi_F(A)'$ и $\varphi_F(A)\subseteq\varphi_T(A)'$, из (2) следует: $\varphi_F(A)\subseteq\varphi_T(A)$ и $\varphi_T(A)'\subseteq\varphi_F(A)$. Таким образом, $\varphi_F(A)'=\varphi_T(A)$ и $\varphi_T(A)'=\varphi_F(A)$. Отсюда легко видеть, что [*a*]-[*e*] эквивалентны. Эквивалентность [*f*] следованию типа [*a*] также имеет место:

$$\varphi_T(A)'\cap\varphi_F(B)\subseteq\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B) \Leftrightarrow \varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)\cap(\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B))'=\phi$$
$$\Leftrightarrow \varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_T(A)\cup\varphi_T(B)'=\phi \Leftrightarrow \varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)' =\phi \Leftrightarrow \varphi_T(A)\subseteq\varphi_T(B).$$

Логикой, формализующей все эти отношения, будет обычная классическая логика.

Рассмотрим вопрос о формализуемости отношений логического следования [*a*]-[*f*] при допущении условия (1), то есть в семантике с не всюду определенным понятием истинности.

Рассмотрим следование в смысле [*a*]. Оно может быть обобщено на случай множества посылок Г:

$A_1...,A_n \overset{[a]}{\Vdash} \mathrm{B} \Leftrightarrow \varphi_T(A_1)\cap...\ \cap\varphi_T(A_n)\subseteq\varphi_T(B)$.

Для этого вида следования верен modus ponens, так как $\varphi_T(A)\cap\varphi_T(A\supset B)\subseteq\varphi_T(B)$. Действительно, $\varphi_T(A)\cap\varphi_T(A\supset B) = \varphi_T(A)\cap(\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B)) = \varphi_T(A)\cap\varphi_T(B))$.

Но: $\varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)\subseteq\varphi_T(B)$.

Но для следования $[a]$ неверна теорема дедукции: если $\varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)\subseteq\varphi_T(C)$, то $\varphi_T(B)\subseteq\varphi_T(A\supset C)$.

Если ограничиться только конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием, то аксиоматизацией отношения следования типа $[a]$ будет логика Хао Вана. Пусть $\vdash$ есть синтаксический аналог следования типа $[a]$. Тогда аксиоматизация А.Роуза логики Хао Вана следующая[2] :

A1. $A \vdash A\vee B$.

A2. $A\vee B \vdash B\vee A$.

A3. $A\&B \vdash A$.

A4. $A\&B \vdash B\&A$.

A5. $\sim\sim A \vdash A$.

A6. $A \vdash \sim\sim A$.

A7. $A\&(B\vee C) \vdash A\&B\vee A\&C$.

A8. $\sim(A\&B) \vdash \sim A\vee\sim B$.

A9. $\sim A\vee\sim B \vdash \sim(A\&B)$.

A10. $\sim(A\vee B) \vdash \sim A\&\sim B$.

A11. $\sim A\&\sim B \vdash \sim(A\vee B)$.

A12. $A\&\sim A \vdash B$

Правила вывода:

$$R_1\ \frac{A\vdash C \qquad B\vdash C}{A\vee B\vdash C}\ ;$$

$$R_2\ \frac{A\vdash B \qquad A\vdash C}{A\vdash B\&C}\ ;$$

$$R_3\ \frac{A\vdash B \qquad B\vdash C}{A\vdash C}\ .$$

Мы формулируем систему в виде аксиомных схем, без правила подстановки.

Импликация $\supset$ может быть введена с помощью определения $A\supset B\dashv\vdash\sim A\vee B$; или достаточно добавить две схемы: $A\supset B\vdash\sim A\vee B$ и $\sim A\vee B\vdash A\supset B$. Это клиневская импликация.

[2] *Ермолаева Н.М., Мучник А.А.* Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана. Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., 1974.

Заменив аксиому A12 на A13: $B\vdash A\vee\sim A$, мы получаем логику, двойственную логике Хао Вана. Система с аксиомами A12 и A13 эквивалентна классической логике. Наконец, логика Хао Вана без аксиомы A12 есть логика де Моргана. Возможна логика со схемой аксиом $A\&\urcorner A\vdash B\vee\urcorner B$ вместо A12.

Логику Хао Вана нетрудно переформулировать в виде секвенциального исчисления. Основные секвенции есть секвенции вида:

$A,\Gamma\vdash\Delta,A$;

$A,\sim A,\Gamma\vdash\Delta$.

В качестве знака секвенции вместо стрелки мы используем знак штопора ($\vdash$).

Логические фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,A \qquad \Gamma\vdash\Theta,B}{\Gamma\vdash\Theta,A\&B} \qquad \frac{A,B,\Gamma\vdash\Theta}{A\&B,\Gamma\vdash\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,\sim A,\sim B}{\Gamma\vdash\Theta,\sim(A\&B)} \qquad \frac{\sim A,\Gamma\vdash\Theta, \qquad \sim B,\Gamma\vdash\Theta}{\sim(A\&B),\Gamma\vdash\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,A,B}{\Gamma\vdash\Theta,A\vee B} \qquad \frac{A,\Gamma\vdash\Theta \qquad B,\Gamma\vdash\Theta}{A\vee B,\Gamma\vdash\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,\sim A \qquad \Gamma\vdash\Theta,\sim B}{\Gamma\vdash\Theta,\sim(A\vee B)} \qquad \frac{\sim A,\sim B,\Gamma\vdash\Theta}{\sim(A\vee B),\Gamma\vdash\Theta}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,A}{\Gamma\vdash\Theta,\sim\sim A} \qquad \frac{A,\Gamma\vdash\Theta}{\sim\sim A,\Gamma\vdash\Theta}$$

Имеются обычные фигуры перестановки и сечение:

$$\frac{\Gamma\vdash\Theta,M \qquad M,\Delta\vdash\Theta}{\Gamma,\Delta\vdash\Theta,\psi}$$

Построенное исчисление эквивалентно системе Адана Роуза в следующем смысле: $A_1,\ldots,A_n\vdash B_1,\ldots,B_m$ доказуема в секвенциальном исчислении тогда и только тогда, когда $A_1\&\ldots\&A_n\vdash B_1\&\ldots\&B_n$ доказуема в системе А.Роуза.

Нетрудно также доказать теорему об устранимости сечения для секвенциального исчисления.

Теперь мы можем расширить логику Хао Вана, введя клиневскую сильную импликацию как она была семантически описана выше. (Предостережение: не путать $\supset$ с $\to$ Хао Вана, то есть наш метазнак $\vdash$ с $\supset$!)

Правила введения и удаления для клиневской импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \sim A, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \supset B} \qquad \frac{\sim A, \Gamma \vdash \Theta \qquad B, \Gamma \vdash \Theta}{A \supset B, \Gamma \vdash \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, A \qquad \Gamma \vdash \Theta, \sim B}{\Gamma \vdash \Theta, \sim (A \supset B)} \qquad \frac{A, \sim B, \Gamma \vdash \Theta}{\sim (A \supset B), \Gamma \vdash \Theta}$$

Обозначим логику Хао Вана в секвенциальной форме вместе с правилами для клиневской импликации **GCl**$_1$. Для этой системы верна теорема об устранимости сечения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если секвенция $\Gamma \vdash A$ доказуема в системе **GCl**$_1$, то $\varphi_T(\Gamma) \subseteq \varphi_T(A)$[3].

Доказательство. **GCl**$_1$ эквивалентна системе Хао Вана в аксиоматизации А.Роуза, расширенной схемами аксиом: $A \supset B \vdash \sim A \vee B$ и $\sim A \vee B \vdash A \supset B$.

Дальнейшее доказательство теоремы сводится к проверке аксиом и правил вывода.

А1. $A \vdash A \vee B$. Надо доказать, что $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(A \vee B)$. Используя условия для $\vee$, достаточно доказать, что $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_T(A) \vee \varphi_T(B)$. Аналогично для других аксиом. Для А12:

$\varphi_T(A) \cap \varphi_T(\sim A) \subseteq \varphi_T(B)$;

$\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A) \subseteq \varphi_T(B)$.

Но $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A)$, согласно условию (1), эквивалентно пустому классу. Таким образом, достаточно убедиться, что $\emptyset \subseteq \varphi_T(B)$, что, естественно, имеет место.

При доказательстве теоремы о полноте мы используем модифицированный хинтикковский метод модельных множеств[4].

[3] В более общем виде: если $\Gamma \vdash \Delta$ в системе **GCl**$_1$, то $\varphi_T(\Gamma) \subseteq \varphi_T(\Delta^D)$, где Δ^D есть дизъюнкция формул из Δ.

Теорема 2 (полнота). Если $\varphi(\Gamma) \subseteq \varphi_T(B_1) \cup \ldots \cup \varphi_T(B_n)$, то секвенция $\Gamma \vdash B_1, \ldots B_n$ доказуема в **GCl**$_1$.

При семантическом определении логического следования не предполагалось, что множество посылок или множество следствий конечно. Поэтому при более точной формулировке теоремы мы должны были бы ее сформулировать следующим образом: если из Γ логически следует (в смысле [*a*]) одна из формул Δ, то найдутся такие конечные подмножества $\Gamma^0 \subseteq \Gamma$ и $\Delta^0 \subseteq \Delta$, что секвенция $\Gamma^0 \vdash \Delta^0$ доказуема в **GCl**$_1$. Однако, чтобы не затруднять понимания, мы будем предполагать конечность Γ и Δ.

Для доказательства теоремы целесообразно переформулировать исчисление секвенций, положив в основу не понятие доказательства секвенций, а понятие дерева поиска доказательства. Все наши правила сформулированы таким образом, что подформулы формулы, входящей в сукцедент нижней секвенции, являются формулами сукцедента верхней секвенции, аналогично для антецедентных формул. Мы предполагаем известным понятие нити дерева поиска доказательства. Каждой точке дерева поиска соответствует пара множеств формул $<S,T>$, где S — множество антецедентных формул, а T — множество сукцедентных формул. Пусть $<S,T>$ — пара, где S — объединение антецедентных множеств, а T — объединение всех сукцедентных множеств секвенций, расположенных в одной и той же нити.

Нить замкнута, если и только если найдется формула A такая, что $A \in S$ и $A \in T$, или $A \in S$ и $\sim A \in S$.

Дерево поиска доказательства замкнуто, если и только если каждая его нить замкнута.

Обобщенной хинтикковской парой назовем пару множеств формул $<M,N>$, удовлетворяющую следующим условиям:

если $A \& B \in M$, то $A \in M$ и $B \in M$;

если $A \vee B \in M$, то $A \in M$ или $B \in M$;

если $A \supset B \in M$, то $\sim A \in M$ или $B \in M$;

[4] См.: *Смирнова Е.Д.* Упрощение бетовско-хинтикковского доказательства полноты исчисления предикатов первого порядка // VII Всесоюзный симпозиум по логике и методологии науки. Тезисы. Киев, 1976.

если $\sim(A\&B)\in M$, то $\sim A\in M$ или $\sim B\in M$;
если $\sim(A\vee B)\in M$, то $\sim A\in M$ и $\sim B\in M$;
если $\sim(A\supset B)\in M$, то $A\in M$ и $\sim B\in M$;
если $\sim\sim A\in M$, то $A\in M$.

Аналогично для N. Пересечение M и N пусто, то есть $M\cap N=\phi$; не существует формулы A такой, что $A\in M$ и $\sim A\in M$.

Лемма 1. Если $<M,N>$ — обобщенная хинтикковская пара множеств, то существует такая функция приписывания значений пропозициональным переменным φ и такой возможный мир a, что: $a\in\varphi_T(M)$ и $\forall A(A\in N\Rightarrow a\notin\varphi_T(A))$.

Лемма 2. Незамкнутая нить дерева поиска доказательства является обобщенной хинтикковской парой.

С помощью лемм 1 и 2 доказываем теорему. Пусть секвенция $\Gamma\vdash\Delta$ недоказуема в $\mathbf{GCl}_1$. Тогда найдется по крайней мере одна незамкнутая нить доказательства секвенции $\Gamma\vdash\Delta$. По лемме 2 она будет обобщенной хинтикковской парой и по лемме 1 существует такая функция приписывания значений пропозициональным переменным φ, что $a\in\varphi_T(M)$ и $\forall A(A\in N\Rightarrow a\notin\varphi_T(A))$. (I)

Но это противоречит условию, что из Γ логически следует Δ, то есть $\forall\varphi\forall a(a\in\varphi_T(\Gamma)\Rightarrow\exists A(A\in\Delta\wedge a\in\varphi_T(A)))$. (II)

Из определения нити следует, что $\Gamma\subseteq M$ и $\Delta\subseteq N$.

1. $a\in\varphi_T(M)\wedge\forall A(A\in N\Rightarrow a\notin\varphi_T(A))$	$\exists_y$; I
2. $\Gamma\subseteq M$	
3. $a\in\varphi_T(\Gamma)$	1,2
4. $a\in\varphi_T(\Gamma)\Rightarrow\exists A(A\in\Delta\wedge a\in\varphi_T(A))$	$\forall_y$; II
5. $\exists A(a\in\Delta\wedge a\in\varphi_T(A))$	3,4
6. $A\in\Delta\wedge a\in\varphi_T(A)$	$\exists_y$,5
7. $\Delta\in N$	
8. $A\in N$	6,7
9. $a\notin\varphi_T(A)$	1,8
10. $a\in\varphi_T(A)\wedge a\notin\varphi_T(A)$	5,9
11. Противоречие.	

Таким образом, допущение неверно, и секвенция $\Gamma\vdash\Delta$ доказуема в $\mathbf{GCl}_1$.

Обратимся теперь к следованию в смысле [*b*]. В более общем виде: $\Gamma\overset{[b]}{\Vdash}A\Leftrightarrow\varphi_F(A)\subseteq\varphi_F(\Gamma)$ и $\Gamma\overset{[b]}{\Vdash}\Delta\Leftrightarrow\varphi_F(\Delta^D)\subseteq\varphi_F(\Gamma)$.

Формализацией этого отношения (при допущении, что $\varphi_T(A)\cap\varphi_F(A)=\phi$) будет логика, двойственная логике Хао Вана (с импликацией). В секвенционной формулировке логика $\mathbf{GCl}_2$, двойственная $\mathbf{GCl}_1$, получается заменой основной секвенции $\mathbf{GCl}_1$ вида A, $\sim A$, $\Gamma\vdash\Delta$ на основную секвенцию $\Gamma\vdash\Theta$, A, $\sim A$.

Теорема 3. $\Gamma\vdash\Delta$ доказуема в $\mathbf{GCl}_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_F(\Delta^D)\subseteq\varphi_F(\Gamma)$.

Теорема доказывается стандартными методами. Отметим, что для следования в смысле [*b*] неверен modus ponens (естественно, без допущения (2), с последним допущением он верен), но верна теорема дедукции. Действительно,

1. $\varphi_F(B)\subseteq\varphi_F(A)\cup\varphi_F(\Gamma)$ по условию;
2. $\varphi_F(A)\cap\varphi_F(B)\subseteq\varphi_T(A)\cap(\varphi_F(A)\cup\varphi_F(\Gamma))$ из 1 по $\dfrac{A\subseteq B}{C\cap A\subseteq C\cap B}$;
3. $\varphi_F(A\supset B)\subseteq(\varphi_T(A)\cap\varphi_F(A))\cup\varphi_F(\Gamma))$ из 2;
4. $\varphi_F(A\supset B)\subseteq\varphi_F(\Gamma)$ из 3 и усл.(1).

Рассмотрим теперь отношение следования типа [*c*]; оно имеет место, когда имеют место одновременно и отношение следования типа [*a*] и отношение типа [*b*]. Для отношения типа [*c*] не имеет места modus ponens и не имеет места теорема дедукции. Это отношение формализуется логикой, полученной из логики де Моргана добавлением в качестве основных секвенций вида A, $\sim A$, $\Gamma\rightarrow\Delta$, B, $\sim B$. Эта логика является фрагментом логики Лукасевича. Обозначим ее буквой **Л**, а ее секвенциальный вариант — **GЛ**.

Назовем отношение следования типа [*c*] сильным следованием.

Теорема 4. Из Γ сильно следует Δ тогда и только тогда, когда секвенция $\Gamma\vdash\Delta$ доказуема в **GЛ**.

Обратимая теперь к следованию типа [d]. Выше было отмечено, что формула **B** доказуема классически тогда и только тогда, когда она неопровержима, то есть $\varphi_F(B)=\phi$. Из Г классически выводима формула А, если и только если формула $\Gamma^K \supset A$ доказуема классически, то есть если и только если $\varphi_F(\Gamma^K \supset A)=\phi$, то есть $\varphi_T(\Gamma) \cap \varphi_F(A)=\phi$. Таким образом, отношение логического следования типа [d] формализуется выводимостью классической логики.

Отношение типа [*e*] в логике с истинностными провалами является пустым, то есть ни одна формула не находится в отношении следования типа [*e*] с любой другой, в частности, ни одна формула логически не следует из самой себя.

Отношение логического следования типа [*f*] в логике с истинностными провалами совпадает с отношением типа [*d*]. Действительно, пусть имеет место отношение [*d*], то есть $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)=\phi$, но $\phi \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$ и отсюда $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$, то есть имеет место [*f*]. Пусть имеет место отношение логического следования типа [*f*], то есть $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$. Используя соотношение, что если $X \subseteq Y$, то $X \cap Y\,'=\phi$, имеем: $(\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)) \cap \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)'=\phi$. Отсюда получаем: $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \cap \varphi_F(A)' \cap \varphi_T(B)'=\phi$.

Но $\varphi_T(A) \subseteq \varphi_F(A)'$, так как $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(A)=\phi$ и $\varphi_F(B) \subseteq \varphi_T(B)'$ на том же основании.

Используя предыдущее равенство, имеем: $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)=\phi$.

Таким образом, если имеет место отношение [*f*], то имеет место и [*d*]. Отсюда отношение логического следования типа [*f*] формализуется классическим исчислением высказываний.

Подведем некоторый итог. Исходя из клиневского понимания пропозициональных связок, то есть развивая семантику с истинностными провалами, мы ввели ряд отношений логического следования, которые формализуются различными исчислениями. Дадим сводку. Пусть **ХВ** — логика Хао Вана, **ДХВ** — логика, двойственная **ХВ**, **Л** — логика Лукасевича, **С** — классическая логика, [*a*] — [*f*] — введенные выше отношения логического следования, **П** — пустая логика.

Логическое следование	[*a*]	[*b*]	[*c*]	[*d*]	[*e*]	[*f*]
Логика	ХВ	ДХВ	Л	С	П	С

Как мы отмечали выше, семантика с истинностными провалами — это то же самое, что семантика с не всюду определенным понятием истинности или, при другом подходе, семантика, допускающая неполные описания состояния. В семантике с не всюду определенным предикатом истинности имеются и отношения логического следования: [*a*], [*b*], [*c*] и [*d*] = [*f*]. Между ними, как было показано выше, имеют место следующие отношения включения:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & {[a]} & \\
{[c]} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & {[d]} \arrow[ul, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
 & {[b]} \arrow[ul, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

Хотелось бы подчеркнуть, что все четыре отношения могут быть формализованы в одном и том же формальном исчислении.

§ 3. Семантика с пресыщенными оценками. Невозможные возможные миры

В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос, когда понятия, и в частности, понятие истинности, не являются всюду определенными. Предикатному знаку в каждом мире приписывались объем и антиобъем. Не всюду определенность означала просто, что объединение объема и антиобъема необязательно тождественно всей области объектов. Но имеется и другая сторона в соотношении объема и антиобъема предикатного знака. Достаточно ли четко они отделимы друг от друга? Не может ли быть, то граничные элементы принадлежат объему и антиобъему? Если некоторому предикатному знаку в качестве объема приписывается замкнутое (в топологическом смысле) множество n-ок, а в качестве антиобъема — замыкание дополнения объема, то пересечение объема и антиобъема может оказаться непустым.

В случае семантик для пропозициональных логик мы рассмотрим случай, когда выполняется условие (2) $\varphi_T(P) \cup \varphi_F(P) = W$, но необязательно выполняется условие (1) $\varphi_T(P) \cap \varphi_F(P) = W$. В другой терминологии, возможна супероценка, когда высказывание одновременно истинно и ложно. Иначе говоря, допускаются невозможные возможные миры, или, в терминах описания состояния, допускаются противоречивые описания состояния. Это более трудное для понимания допущение, нежели допущение не всюду определенных предикатов. Возможны различные содержательные истолкования невозможных возможных миров. Одно из них является гносеологическим: миры, допускаемые субъектом, так называемые эпистемически возможные миры, могут быть как логически возможными, так и логически невозможными. Такова позиция Я.Хинтикки. Противоречивые миры допускаются по чисто гносеологическим основаниям, в силу недостаточности информации субъекта. Но возможна и более онтологическая интерпретация, когда границы между объемами и антиобъемами оказываются смежными. Ф.Энгельс допускал такую онтологическую возможность, в равной мере допуская и гносеологическую возможность граничных элементов: знание содержит как истину, так и ложь, в предельных случаях граница между истиной и ложью не является четкой.

В этом параграфе мы будем исходить из допущения, что всякое утверждение либо истинно, либо ложно, но некоторые утверждения могут быть и истинными и ложными одновременно, то есть мы принимаем условие:

(2) $\varphi_T(P) \cup \varphi_F(P) = W$,

но не принимаем условия:

(1) $\varphi_T(P) \cap \varphi_F(P) = \phi$

Семантика с пресыщенными оценками двойственна семантике с истинностными провалами.

Нетрудно убедиться в том, что класс тавтологий будет совпадать с классом классически доказуемых формул. Класс неопровержимых формул будет пуст.

Отношение логического следования типа [*a*] формализуется логикой, двойственной логике Хао Вана, то есть секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ доказуема в $\mathbf{GCl}_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_T(\Gamma) \subseteq \varphi_T(\Delta^D)$. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству, данному в предыдущем параграфе, — для этого надо модифицировать понятие обобщенной хинтикковской пары. Отношение логического следования типа [*b*] формализуется логикой Хао Вана, то есть секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ доказуема в $\mathbf{GCl}_2$, тогда и только тогда, когда $\varphi_F(\Delta^D) \subseteq \varphi_F(\Gamma)$.

Отношение логического следования типа [*c*] формализуется логикой **Л**, то есть $\Gamma \vdash \Delta$ доказуема в **GЛ** тогда и только тогда, когда $\varphi_T(\Gamma) \subseteq \varphi_T(\Delta^D)$ и $\varphi_F(\Delta^D) \subseteq \varphi_F(\Gamma)$.

Отношение логического следования в смысле [*d*] является пустым, то есть не выполняется ни для одной пары формул.

Отношения логического следования типов [*e*] и [*f*] при допущении (2) эквивалентны между собой и формализуются классической логикой высказываний. Покажем, что [e] эквивалентно [*f*]. Пусть имеет место [*e*], то есть $\varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) = W$. В W включается любой класс, отсюда $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq W$ и тем самым $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$, то есть [*f*].

Пусть $\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \subseteq \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)$.

Используя соотношение, что если $x \subseteq y$, то $x' \cup y = W$, имеем: $(\varphi_T(A) \cap \varphi_F(B))' \cup (\varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)) = W$.

Отсюда получаем: $\varphi_T(A)' \cup \varphi_F(B)' \cup \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) = W$.

Но так как $\varphi_T(A) \cup \varphi_F(B) = W$, то $\varphi_T(A)' \subseteq \varphi_F(A)$; аналогично $\varphi_F(B)' \subseteq \varphi_T(B)$. Отсюда из предыдущего равенства (и учитывая, что если $X \subseteq Y$ и $X \cup Z = W$, то $X \cup Z = W$) получаем $\varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) = W$, то есть [*e*].

Отношение [*e*] и эквивалентное ему [*f*] формализуются классическим исчислением высказываний.

В итоге при пресыщенном означивании мы имеем следующую ситуацию:

Логическое следование	[*a*]	[*b*]	[*c*]	[*d*]	[*e*]	[*f*]
Логика	ДХВ	ХВ	Л	П	С	С

Отношения логического следования находятся в следующем взаимоотношении:

$$\begin{array}{ccc} & [b] & \\ \subseteq & & \supseteq \\ [c] & & [e]=[f] \\ \subseteq & & \supseteq \\ & [a] & \end{array}$$

Отметим, что все четыре отношения могут быть формализованы в одном и том же исчислении.

Логики, построенные на идее пресыщенных оценок, оказываются двойственными логикам, построенным в рамках семантики с истинностными провалами.

Теперь остается рассмотреть случай, когда не принимается ни условие (1), ни условие (2), то есть возможны как истинностные провалы, так и пресыщенные оценки.

В этом случае класс тавтологий и класс неопровержимых формул пусты. Отношения логического следования типов [*a*], [*b*] и [*c*], хотя и неэквивалентны, все формализуются логикой де Моргана (**М**). Отношения логического следования типов [*d*] и [*e*] пусты, а отношение типа [*f*] формализуется классической логикой. Интересно отметить, что отношение логического следования типа [*f*] формализуется классической логикой независимо от того, принимаются или нет допущения (1) и (2).

Результаты о формализации отношений логического следствия, полученные в этом и предыдущем параграфах, сведем в таблицу:

	[c]	[a]	[b]	[d]	[e]	[f]
$(\overline{1}),(\overline{2})$	М	М	М	Пуста	Пуста	С
$(1),(\overline{2})$	Л	ХВ	ДХВ	С	Пуста	С
$(\overline{2}),(1)$	Л	ДХВ	ХВ	Пуста	С	С
$(1),(2)$	С	С	С	С	С	С

Если возможные миры задавать с помощью описаний состояний, то в стандартных логиках описания состояния должны быть полными и непротиворечивыми. Семантика с истинно-значными провалами будет ассоциироваться с допущением неполных (но обязательно непротиворечивых) описаний состояний. Семантика с пресыщенными оценками свяжется с допущением противоречивых (но в любом случае полных) описаний состояний. Наконец, семантике с истинностными провалами и пресыщенными оценками будет соответствовать допущение как неполных, так и противоречивых состояний.

Исследование проблемы в терминах противоречивых и неполных описаний состояний было осуществлено Е.К.Войшвилло[5]. Он исходит из фиксированного, стандартного определения отношения логического следования, обозначенного нами как [*a*]. Разные следования проявляются в результате допущения или недопущения противоречивых и неполных описаний состояний. Недопущение противоречивых описаний соответствует нашему условию (1), то есть $\varphi_T(P)\cap\varphi_F(P)=\phi$, а недопущение неполных описаний состояний — условив (2), то есть $\varphi_T(P)\cup\varphi_F(P)=W$. Если допускаются противоречивые и неполные описания состояний, то получаем логику де Моргана. Если противоречивые состояния не допускаются, но допускаются неполные, то получаем логику Хао Вана, при допущении противоречивых и недопущении неполных — логику, двойственную логике Хао Вана. Если не допускаются ни противоречивые, ни неполные описания состояния, то получим классическое следование. Более того, Е.К.Войшвилло формулирует ограничения на описания состояния, при которых мы получаем фрагмент логики Лукасевича (Л). Чтобы получить Л, следует принять условие, что всякое противоречивое описание состояния является полным; в терминах Е.К.Войшвилло:

$$\forall\alpha((\exists p(p\in\alpha\wedge\overline{p}\in\alpha)\supset\forall p(p\in\alpha\vee\overline{p}\in\alpha)).$$

[5] См:.*Войшвилло Е.К.* Семантика релевантной логики и вопрос о природе логических законов // Разум и культура. Труды международного франко-советского коллоквиума. М., 1983.

Мы анализировали не только истинностные провалы и пресыщенные оценки, что соответствует принятию неполных и противоречивых описаний состояний, но и рассматривали различные способы введения понятий логического следования [a] — [f]. При таком подходе мы получили логику де Моргана, логику Хао Вана и ей двойственную, а также описанный выше фрагмент логики Лукасевича (Л) и классическую логику. Это достигалось за счет варьирования определения логического следования. Нам представляется, что это важное нововведение. Этот подход мы попытаемся развить в следующем параграфе при рассмотрении модальных и релевантных импликаций в логических системах с истинностными провалами и пресыщенными оценками.

§ 4. Модальные и релевантные импликации в системах с истинностными провалами и пресыщенными оценками

Помимо логик с клиневскими связками, включая клиневскую импликацию, мы могли бы ввести импликацию, соответствующую трехзначной логике Лукасевича. Условия истинности и ложности для нее следующие:

$$\varphi_T(A \xrightarrow{Ł} B) = \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B) \cup (\varphi_T(A) \cup \varphi_F(B))';$$

$$\varphi_T(A \xrightarrow{Ł} B) = \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B).$$

В секвенциальной форме этой импликации соответствуют следующие правила введения:

$$\frac{A, \sim B, \Gamma \vdash \Theta, \sim A, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \xrightarrow{Ł} B} \qquad \frac{\sim A, \Gamma \vdash \Theta \quad B, \Gamma \vdash \Theta \quad \Gamma \vdash \Theta, A, \sim B}{A \xrightarrow{Ł} B, \Gamma \vdash \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, A \qquad \Gamma \vdash \Theta, \sim B}{\Gamma \vdash \Theta, \sim (A \xrightarrow{Ł} B)} \qquad \frac{A, \sim B, \Gamma \vdash \Theta}{\sim (A \xrightarrow{Ł} B), \Gamma \vdash \Theta,}$$

Мы не будем рассматривать здесь логические системы с импликацией Лукасевича. Модальные и релевантные импликации также связаны с отношением логического следования. Введен-

ные нами различные отношения логического следования подсказывают нам и различные способы введения импликаций. В системах льюисовской импликации семантические условия для импликации формулируются в терминах бинарного отношения достижимости. Пусть R есть бинарное отношение на элементах W. Мы можем ввести следующие условия истинности и ложности для импликаций, аналогичные отношениям логического следования:

$$(A) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(A)' \cup \varphi_T(B)) \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_T(A) \cap \varphi_T(B)') \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_F(B)' \cup \varphi_F(A)) \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_F(B) \cap \varphi_F(A)') \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(A)' \cup \varphi_F(B)') \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_T(A) \cap \varphi_T(B)' \cup \varphi_F(B) \cap \varphi_F(A)') \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(A)' \cup \varphi_F(B)') \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)) \end{cases}$$

$$(E) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)) \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_F(A)' \cup \varphi_T(B)') \end{cases}$$

$$(F) \quad \begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(A)' \cup \varphi_F(B)' \cup \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)) \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B) \cap \varphi_F(A)' \cap \varphi_T(B)') \end{cases}$$

В каждом пункте условия сформулированы таким образом, что ложность импликации является классическим отрицанием истинности импликации. Представляет интерес ввести такие импликации, условие истинности которых берется из одной пары, а условие ложности — из другой.

Прежде всего рассмотрим импликацию, условие истинности для которой вводится пунктом E, а ложности — D, то есть:

$$\begin{cases} a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_F(A) \cup \varphi_T(B)) \\ a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)) \end{cases}$$

Без дополнительных предпосылок необязательно, чтобы $A \to B$ была истинной или ложной и не невозможно, чтобы она была и истинной и ложной. Целесообразно пересмотреть и другие возможности: TA-FB, TB-FA и т.д.

Естественно, накладывая на R различные условия (рефлексивность, транзитивность, связность и другие), мы получаем различные импликации.

Необходимо отметить еще условие наследуемости. Поскольку понятия истинности и ложности независимы, можно сформулировать принцип сохранности истинности и принцип сохранности ложности:

(I) $a \in \varphi_T(p) \wedge Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(p)$;

(II) $a \in \varphi_F(p) \wedge Rab \Rightarrow b \in \varphi_F(p)$.

Естественно, имеются четыре возможности: когда принимаются и I и II (классический случай), когда принимается I, но не принимается II (интуиционистский), когда принимается II, но не принимается I (антиинтуиционистский) и, наконец, когда не принимаются ни I, ни II (модальный).

Д.М.Данн[6] предложил семантику для системы RM. Условия истинности для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания те же, что были сформулированы выше. Семантические условия для импликации имеют следующий вид (в нашей системе обозначений):

$$a \in \varphi_T(A \to B) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow (b \in \varphi_T(A)' \cup \varphi_T(B)) \wedge (b \in \varphi_F(B)' \cup \varphi_F(A))).$$

Таким образом, условие истинности Данна совпадает со случаем TC.

Условие ложности $A \to B$ Данн формулирует следующим образом: $a \in \varphi_F(A \to B) \Leftrightarrow a \in \varphi_T(A \to B)$ или $a \in \varphi_F(A) \cap \varphi_F(B)$.

Условие ложности, предложенное Данном для импликации, выпадает из нашей классификации.

Следование Данн трактует в смысле нашего следования [a].

Аналогичным способом могут быть введены унарные модальные операторы.

Мы имеем два условия истинности и два — ложности:

(1) $a \in \varphi_T(\Box A) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \in \varphi_T(A))$;

(2) $a \in \varphi_T(\Box A) \Leftrightarrow \forall b(Rab \Rightarrow b \notin \varphi_F(A))$;

(а) $a \in \varphi_F(\Box A) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \notin \varphi_T(A))$;

(б) $a \in \varphi_F(\Box A) \Leftrightarrow \exists b(Rab \wedge b \in \varphi_F(A))$.

6 *Dunn J.M.* Kripke-style semantics for *R*-Mingle // Studia Logica. v.XXXV. 1976. n.2. p.163-172.

Соответственно мы получим 4 оператора, определяемых условиями 1а, 1б, 2а и 2б.

Аналогично вводятся четыре типа отрицания. Мы не будем развивать здесь логики с этими операторами, хотя само это рассмотрение представляет несомненный интерес.

§ 5. Неортодоксальные рассмотрения семантических антиномий

Семантические идеи, изложенные в предыдущих параграфах, могут быть реализованы относительно логики предикатов. Интерпретация каждой нелогической константе приписывает в каждом возможном мире некоторый объем и антиобъем. В общем случае не предполагается ни то, что объем и антиобъем не пересекаются, ни то, что их объединение совпадает с универсумом. Это же относится к семантическим предикатам.

Прежде всего рассмотрим ситуацию, когда пересечение объема и антиобъема пусто. Абстрактно говоря, имеются четыре возможности.

(1) Как стандартные, так и семантические предикаты могут быть не всюду определенными.

(2) Стандартные, то есть несемантические предикаты, могут быть не всюду определенными; но семантические предикаты всюду определены.

(3) Стандартные предикаты являются всюду определенными, но семантические предикаты могут быть и не всюду определенными.

(4) Как стандартные, так и семантические предикаты всюду определены.

Последний случай является хорошо разработанным ортодоксальным случаем. Семантически замкнутые языки с всюду определенными стандартными и семантическими предикатами противоречивы.

Начнем анализ с первого случая. Повторяем, что на данном этапе мы предполагаем, что объем и антиобъем предикатных знаков не пересекаются.

Схема, которой должен удовлетворять предикат "истинное высказывание" в случае, когда имеются не всюду определенные предикаты, естественно, меняет свой смысл. Какого типа эквивалентность скрывается за словами "если и только если" в схеме "X истинное высказывание, если и только если P"? Очевидно, что в случае с не всюду определенными предикатами она не является материальной эквиваленцией. Это эквиваленция, совпадающая с материальной в случае всегда определенности левой и правой части и истинная на объектах, на которых обе части не определены, и ложная в противном случае. Ее можно задать таблицей:

$\cong$	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

В принятой в предыдущих параграфах терминологии имеем следующие условия истинности и ложности:

$\varphi_T(A\cong B)=[\varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)]\cup[\varphi_F(A)\cap\varphi_F(B)]\cup[\varphi_T(A)'\cap\varphi_F(A)'\cap\varphi_T(B)\cap\varphi_T(B)']$;

$\varphi_F(A\cong B)=[\varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)]\cup[\varphi_F(A)\cap\varphi_T(B)]\cup[\varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_F(B)']$
$\cup[\varphi_F(A)\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_F(B)']\cup[\varphi_T(A)\cap\varphi_F(A)'\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_F(B)']$.

Аналогично можно ввести импликацию $\underset{\sim}{\supset}$, такую, что $A\cong B$ тогда и только тогда, когда $A\underset{\sim}{\supset}B$ и $B\underset{\sim}{\supset}A$. Она определяется следующей трехзначной матрицей:

$\underset{\sim}{\supset}$	t	f	u
t	t	f	f
f	t	t	t
u	t	f	t

то есть получается из матрицы для импликации трехзначной логики Лукасевича заменой u на f в значениях таблицы. Условия истинности для этой импликации следующие:

$\varphi_T(A\underset{\sim}{\supset} B)=\varphi_F(A)\cup\varphi_T(B)]\cup[\varphi_T(A)'\cap\varphi_F(A)'\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_F(B)']$;

$\varphi_F(A\underset{\sim}{\supset} B)=[\varphi_T(A)\cap\varphi_F(B)]\cup[\varphi_T(A)\cap\varphi_T(B)'\cap\varphi_F(B)']\cup[\varphi_T(A)'\cap\varphi_F(A)'\cap\varphi_F(B)]$.

Формализацией отношения типа [a] в логике с истинностными провалами является, как было показано выше, логика Хао Вана, в секвенциальной форме (вместе с клиневской симпликацией) — система $\mathbf{G}_1$. Можно расширить систему $\mathbf{G}_1$, обогатив ее правилами для $\underset{\sim}{\supset}$ и $\cong$. Для системы $\mathbf{GKl}_1$ (то есть при условии, что $\varphi_T(p)\cap\varphi_F(p)=\phi$) правила введения для $\underset{\sim}{\supset}$ и ее отрицания следующие:

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Theta,B\quad \sim B,\Gamma\vdash\Theta,\sim A}{\Gamma\vdash\Theta,A\underset{\sim}{\supset}B}\qquad \frac{\sim A,\Gamma\vdash\Theta\quad B,\Pi\vdash\Theta\quad \Gamma\vdash\Theta,A,\sim A,B,\sim B}{A\underset{\sim}{\supset}B,\Gamma\vdash\Theta}$$

Отметим, что в $\mathbf{GKl}_1$ производны правила:

$$\frac{\sim A,\Gamma\vdash\Theta,A}{\sim A,\Gamma\vdash\Theta}\ \text{и}\ \frac{A,\Gamma\vdash\Theta,\sim A}{A,\Gamma\vdash\Theta}$$

Действительно, в $\mathbf{GKl}_1$ имеет место A, ~A $\vdash\Theta$, отсюда:

$$\dfrac{\dfrac{\sim A,\Gamma\vdash\Theta,A\quad A,\sim A\vdash\Theta}{\sim A,\sim A,\Gamma\vdash\Theta,\Theta}\ \text{— сечение;}}{\sim A,\Gamma\vdash\Theta}\ \text{— сокращение.}$$

Для интересующей нас эквивалентности $\cong$ правила введения будут следующими (опять-таки в системе с истинностными провалами!):

$$\frac{A,\Gamma\vdash\Theta,B\quad \sim B,\Pi\vdash\Theta,\sim A\quad B,\Gamma\vdash\Theta,A\quad \sim A,\Gamma\vdash\Theta,\sim B}{\Gamma\vdash\Theta,A\cong B}$$

$$\frac{\sim A,\sim B,\Gamma\vdash\Theta\quad A,B,\Gamma\vdash\Theta\quad \Gamma\vdash\Theta,A,\sim A,B,\sim B}{A\cong B,\Gamma\vdash\Theta}$$

Мы не формулируем здесь правил для введения отрицания эквиваленции $\cong$ справа и слева. При желании эти правила можно извлечь из семантических условий.

Безусловно, детальное исследование обобщенного исчисления $\mathbf{GKl}_1$ с дополнительной связкой $\cong$ является интересной и важной задачей.

Нас интересует схема, которой должен удовлетворять предикат "истинное высказывание". Нетрудно убедиться, что в логике с истинностными провалами, то есть в $\mathbf{GKl}_1$, обогащенной правилами для $\equiv$, из $A\equiv\sim A$ не следует $A\&\sim A$. В этом нетрудно убедиться и с помощью семантических выкладок, и посредством семантических процедур поиска доказательства секвенции $A\equiv\sim A \vdash A\&\sim A$.

Таким образом, в системе с не всюду определенными предикатами, в том числе и с не всюду определенным предикатом "быть истинным высказыванием", формулировка предложения, говорящего о своей собственной неистинности, не приводит к противоречиям.

Можно ввести понятие K-определимости не всюду определенных отношений и свойств (классов). Не всюду определенное отношение R K-определимо, если и только если существует такая формула $A(x_1, \ldots, x_k)$, что выполняются следующие условия:

$R(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow A(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \in K$;

$\urcorner R(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \sim A(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \in K$.

R не определено на $<\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n> \Rightarrow A(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \notin K \wedge \sim A(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \notin K$.

В случае с не всюду определенными предикатами теорема о К-неопределимости класса К не имеет места.

В связи с развиваемым подходом возникает интересный вопрос о классификации частичных функций и предикатов. Частичная рекурсивность сохраняется относительно комбинаций с помощью сильных клиневских связок ($\&$, $\vee$, $\sim$, $\supset$) и ограниченных кванторов, но неограниченные кванторы выводят за пределы частичной рекурсивности. Можно ли провести классификацию частичных функций и предикатов, аналогичную классификации Клини-Мостовского? Насколько нам известно, этот вопрос не исследован.

Рассмотрим второй подход. При этом подходе несемантические понятия могут быть не всюду определены, а семантические являются всюду определенными. Рассматриваемый подход, на наш взгляд, восходит к идеям Д.А.Бочвара. Д.А.Бочвар различает внутренние и внешние связки. Внутренние связки — это связки, которые С.К.Клини позже назвал слабыми трехзначными связками. Введем принятым нами способом внутренние бочваровские связки: бочваровскую конъюнкцию $\Cap$ и альтернативное отрицание $\sim$. Условия для $\sim$ совпадает с введенными ранее, то есть.

$\varphi_T(\sim A) = \varphi_F(A)$;

$\varphi_F(\sim A) = \varphi_T(A)$.

Для бочваровской конъюнкции имеем следующие условия:

$\varphi_T(A \Cap B) = \varphi_T(A) \cap \varphi_T(B)$;

$\varphi_F(A \Cap B) = \varphi_F(A) \cap \varphi_F(B) \cup \varphi_F(A) \cap \varphi_T(B) \cup \varphi_T(A) \cap \varphi_F(B)$.

Помимо внутренних связок в логике Бочвара имеется внешняя связка. Д.А.Бочвар обозначает ее знаком $\vdash$. Но поскольку этот знак "занят," вслед за Херцбергером будем обозначать ее буквой h (от слова horisontal). Херцбергер называет эту связку бочваровско-фрегевской[7]. У Г.Фреге горизонтальная черта перед A является функцией, которая в случае не всюду определенности A делает — A ложной. Семантические условия для h следующие:

$\varphi_T(hA) = \varphi_T(A)$;

$\varphi_F(hA) = \varphi_T(A)'$.

На основе введенных могут быть определены связки $\urcorner$, $\downarrow$, $-$:

$\urcorner A \rightleftharpoons h\sim A$; $\downarrow A \rightleftharpoons (h\sim A) \Cap (\urcorner A)$; $\overline{A} \rightleftharpoons \sim hA$.

Отметим, что введенная нами выше импликация $\tilde{\supset}$ может быть определена через h и импликацию Лукасевича $\xrightarrow{\text{Ł}}$. $A \tilde{\supset} B$ тогда и только тогда, когда $h(A \xrightarrow{\text{Ł}} B)$.

В этом случае предикат истинности аналогичен операции внешнего утверждения Д.А.Бочвара. Его смысл следующий: $\lfloor A \rfloor$ истинно тогда и только тогда, когда A определено и имеет место A:

[7] *Herzberger H.G.* Truth and Modality in semantically closed languages // *Martin R.M.* (ed.0. The Paradox of the Liar. Yale, 1990. p.29.

$\varphi_T(Tr(\llcorner A \lrcorner) = \varphi_T(A)$;

$\varphi_F(Tr(\llcorner A \lrcorner) = \varphi_T(A)'$.

При предыдущем подходе $\varphi_F(Tr(\llcorner A \lrcorner) = \varphi_F(A)$.

В этом случае схема, которой должен удовлетворять всюду определенный предикат "быть истинным высказыванием", должна быть видоизменена, например, следующим образом:

если X определено, то X истинно, если и только если p;

если X не определено, то X не истинно.

Вместо "p" мы подставляем высказывание, а вместо "X" — его имя.

Представляет интерес видоизменить условие адекватности Тарского следующим образом:

X истинно, если и только если $h(p)$.

В этом случае семантическое понятие Tr будет аналогом объектной связки h, подобно тому как в доказуемостной логике синтаксическому предикату Док($\llcorner A \lrcorner$) мы сопоставляем формулу объектного языка $\Box A$.

Третий подход — когда несемантические понятия являются всюду определенными, а семантические являются только частичными (не всюду определенными) понятиями, — на наш взгляд, лежит в основе построений С.Крипке[8] и целого ряда других исследователей[9].

Прежде всего следует обратиться к оригинальным исследованиям ван Фрассена по пресуппозициональным языкам. Учение о пресуппозициях возникло в результате ошибочной критики расселовской теории дескрипций. Стросон[10], а затем многие другие авторы, рассматривая расселовскую теорию дескрипций, игнорировали вопрос об области действия дескрипции. Сама по себе расселовская теория дескрипций безупречна, ее критика Стросоном и другими основана на непонимании. Однако возможны альтернативные теории дескрипций,

[8] *Kripke S.* Outline of a theory of truth // The journal of Philosophy. 1975. v.92. p.690-715.

[9] *Martin R.L., Woodruff P.W.* On representing "true-in-L" in L // Philosophia (Israel). 1975. v.5. p.213-217.

[10] *Strawson P.F.* On refering // Mind. 1950. v.59. p.320-344. (Русский перевод в кн.: Новое в зарубежной лингвистике. т.XIII. М., 1982).

не опирающиеся на необходимость указания области действия дескрипций. Согласно одной из них, прежде чем вводить неопределенную дескрипцию, необходимо доказать существование объекта, удовлетворяющего условию, по которому образуется дескрипция: в случае определенной дескрипции необходимо помимо существования доказать и единственность. Третий подход состоит в возможности образовывать дескрипцию по любому условию. Это приводит к ε-исчислению Гильберта и так называемым свободным логикам.

Неправомерная критика расселовского подхода породила интересное направление исследований — учение о пресуппозициях, предпосылках. Так, утверждая "Нынешний король Франции лыс" (1), неявно предполагают, что утверждение "Король Франции существует" (2) истинно. Вне принятия (2) вопрос об истинности (1) бессмысленен. Оценка (1) как истинного или ложного возможна только при условии, что (2) оценено как истинное[11].

Наиболее интересные результаты в этом направлении в исследовании пресуппозиций получены ван Фрассеном. Ван Фрассен предложил и исследовал так называемые пресуппозициональные языки[12]. Говорят, что B есть предпосылка A (A предполагает B) если и только если из A логически следует B и из *неA* логически следует B. Очевидно, что если логика классическая, то предпосылкой может быть только логически истинное утверждение B. Ван Фрассен вводит некоторое отношение пресуппозиции — N, означающее, что A есть предпосылка X; это отношение отлично от стандартного классического понятия оценки, Ван Фрассен вводит понятие супероценки. Пусть X — некоторое множество предложений. *Супероценка*, индуцируемая множеством X, есть функция s, которая удовлетворяет следующим условиям:

[11] Заметим, что свободная логика (логика, свободная от экзистенциальных предпосылок) может быть построена независимо от принятия концепции пресуппозиций.

[12] *Frassen B.C. van.* Presuppositions, supervaluations and free logic // The Logical Way of Doing Things (ed. Lambert). New Haven, 1969; *Frassen B.C. van.* Presuppositions, Implications and Self-reference // Journal of Philosophy. 1968. v.65. p.136-152; *Frassen B.C. van.* Truth and paradoxal consequences // PAradox of the Liar (ed. Martin R.l.) Yale, 1970.

$s(A) = T$, если $\forall \upsilon(\forall B(B\in X \Rightarrow \upsilon(B)=T) \Rightarrow \upsilon(A)=T)$;

$s(A) = F$, если $\forall \upsilon(\forall B(B\in X \Rightarrow \upsilon(B)=F) \Rightarrow \upsilon(A)=F)$;

$s(A)$ — не определена в остальных случаях.

Другими словами, s приписывает значение T формуле A, если всякая оценка, приписывающая всем формулам из X значения $T(F)$, приписывает $T(F)$ и формуле A; s не определена в остальных случаях.

В качестве X можно взять насыщенное множество, то есть выполнимое множество формул, замкнутое относительно классического отношения логического следования и отношения пресуппозиции N (если X_1NA и $X_1 \subseteq X$, то $A \in X$). В этом случае супероценка называется *допустимой оценкой*. На этой основе определяется отношение логического следования для пресуппозиционного языка: из Г логически следует A, если и только если всякая допустимая оценка, выполняющая Г, выполняет A. Очевидно, что допустимая оценка не обязательно всюду определена. Идея супероценок применяется ван Фрассеном к анализу семантических парадоксов. Он рассматривает язык со связкой Т, являющейся формальным аналогом предиката "быть истинным высказыванием". Возможна итерация связки **Т**: $\mathbf{T}^{n+1}A = \mathbf{T}(\mathbf{T}^n,A)$ и $\mathrm{T}^o(A) = A$. Возможны случаи, когда A неистинно и неложно, но **Т**A ложно; также возможен случай, когда ни B, ни **Т**B неистинны и неложны, но **Т**(**Т**B) ложно и т.д. Эта итерация может быть продолжена до достаточно высоких ординалов.

В свое время А.Тарский показал, что стандартное понятие истинности можно сформулировать в теоретико-типовой системе уровня $n+1$ для языка уровня n. Целый ряд авторов в 50-е и 60-е годы исследовали эту проблему (Дк.Кемени, Хао Ван, В.Куайн)[13].

При рассмотрении семантически замкнутых языков все авторы исходят из требования, чтобы было единое понятие истинности, а не особые для каждого уровня. При итерации Т может оказаться, что самоприменимое предложение формули-

13 См. обзор этой проблемы: *Смирнова Е.Д., Таванец П.В.* Семантика в логике // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.

руется не на конечном уровне, а на достаточно высоком трансфинитном уровне. Идеи итерации выдвигались уже в конце 60-х годов, однако, новый стимул к их исследованию был дан работами К.Крипке, Р.А.Мартина и П.В.Вудруффа.

Остановимся несколько подробнее на идеях С.Крипке[14]. Пусть **L** — первопорядковый язык, достаточный для описания собственного синтаксиса. Предикаты и функции этого языка являются всюду определенными. Пусть фиксирована некоторая интерпретация этого языка.

Расширим язык **L**, добавив к нему одноместный предикат **Т**. Обозначим этот расширенный язык буквой $\mathcal{L}$. Помимо формул языка **L**, язык $\mathcal{L}$ содержит и формулы вида $\mathbf{T}(\llcorner A \lrcorner)$, где "$\llcorner A \lrcorner$" — геделев номер формулы "A", а также формулы, построенные из них посредством логических связок и кванторов. Перейдем к интерпретации языка $\mathcal{L}$. Все несемантические предикаты интерпретируются так же, как в **L**. Предикат **Т**, в отличие от остальных предикатов объектного языка, не всюду определен. Ему приписываются объем S_1 и антиобъем S_2, при этом пересечение объема и антиобъема пусто, то есть $S_1 \cap S_2 = \phi$; в то же время объединение S_1 и S_2 не равно универсуму. Не нарушая общности рассмотрения в качестве объектов индивидной области можно рассматривать натуральные числа; предикат **Т** суть первопорядковый предикат. Значение предикату **Т** приписывается посредством индукции. Поскольку язык $\mathcal{L}$ содержит не всюду определенный предикат, в качестве логических связок естественно рассматривать сильные клиневские связки и кванторы. Приписывание значений сложным выражениям, в том числе содержащим предикат **Т**, осуществляется индуктивно. На некотором шаге предикату **Т** приписывается пара (S_1,S_2), где S_1 есть объем **Т**, а S_2 — его антиобъем; этим определяется вся интерпретация языка $\mathcal{L}$ на этом шаге. Обозначим интерпретацию языка $\mathcal{L}$ на шаге α посредством $\mathcal{L}(S_1,S_2)$. Пусть ϕ — функция, сопоставляющая паре (S_1, S_2), полученной на шаге α, пару

14 *Kripke S.* Op.cit.

$\phi(S_1,S_2)=(\phi(S_1),\phi(S_2))$, которая приписывает значение **T** на "следующем" шаге. Индукция ведется по всем ординалам. Ниже подробнее рассмотрим это индуктивное определение.

С.Крипке требует, чтобы ϕ (индуктивный шаг, оператор скачка) был монотонным, то есть удовлетворял следующему условию: если $(S_1^1,S_2^1)\subseteq(S_1^2,S_2^2)$, то $\phi(S_1^1,S_2^1)\subseteq\phi(S_1^2,S_2^2)$. Под $(S_1^1,S_2^1)\subseteq(S_1^2,S_2^2)$ имеется в виду, что $S_1^1\subseteq S_1^2$ и $S_2^1\subseteq S_2^2$).

Предполагается также, что $(S_1,S_2)\subseteq\phi(S_1, S_2)$

. А это означает, что индуктивный переход может лишь сузить область неопределенности, но не превращает истинные на предыдущем шаге высказывания в ложные или неопределенные, аналогично и ложные — в истинные или в неопределенные.

Чтобы введенный в объектный язык предикат **T** выступал как предикат, соответствующий содержательному предикату истинности, необходимо, чтобы он выполнял конвенцию Тарского или ее аналог. Обратим внимание на то, что конвенция Тарского может быть сформулирована как в объектном языке, так и в метаязыке. Поскольку **T** не всюду определен, конвенция в объектном языке формулируюся в виде:

(1) $\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\cong A$[15].

Отметим, то из $A\cong\neg A$ не следует $A\&\neg A$.

Обратим внимание, что языки с не всюду определенными предикатами рассматриваются в стандартном метаязыке, использующем классическую логику. Следует также различать предикат истинности, используемый в объектном языке, то есть **T**, и семантическую оценку, даваемую в метаязыке.

Индуктивный уровень, на котором истинна эквивалентность $\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\cong A$ (уровень, на котором выполняются условия (1)), будем называть *фиксированной точкой* (неподвижной точкой).

Сразу же отметим, что в фиксированной точке некоторые утверждения могут не получать истинностного значения. Так, утверждение, говорящее о своей собственной ложности, не имеет истинностной оценки в фиксированной точке.

---

[15] Напомним, что $A\cong B$ истинна, если A и B истинны, или A и B ложны, или A и B не определены, и ложна во всех остальных случаях.

Индуктивная интерпретация языка $\mathcal{L}$ с предикатом **T**, предложенная С.Крипке, гарантирует существование фиксированной точки.

Мы введем индуктивную семантику С.Крипке в терминах, отличных от используемых самим Крипке.

Пусть $\alpha\Vdash A$ — метаязыковый предикат, означающий, что формула A истинна на уровне α, а $\alpha\Dashv A$ означает, что A ложна на уровне α.

Истинность и ложность атомарных формул языка **L** на уровне **o**, вводится стандартным образом:

$\mathbf{o}\Vdash P(a)\Leftrightarrow I(a)\in I(P)$;

$\mathbf{o}\Dashv P(a)\Leftrightarrow I(a)\notin I(P)$.

Для пропозициональных связок на любом уровне α имеем:

$\alpha\Vdash A\&B\Leftrightarrow\alpha\Vdash A$ и $\alpha\Vdash B$;

$\alpha\Dashv A\&B\Leftrightarrow\alpha\Dashv A$ или $\alpha\Dashv B$;

$\alpha\Vdash A\vee B\Leftrightarrow\alpha\Vdash A$ или $\alpha\Vdash B$;

$\alpha\Dashv A\vee B\Leftrightarrow\alpha\Dashv A$ и $\alpha\Dashv B$;

$\alpha\Vdash\neg A\Leftrightarrow\alpha\Dashv A$;

$\alpha\Dashv\neg A\Leftrightarrow\alpha\Vdash A$;

$\alpha\Vdash\forall xA(x)\Leftrightarrow\alpha\Vdash A(a)$ для любых $a\in\mathbf{D}$;

$\alpha\Dashv\forall xA(x)\Leftrightarrow\alpha\Dashv A(a)$ для некоторого $a\in\mathbf{D}$.

Если $\alpha=\beta+1$, то

$\alpha\Vdash\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\Leftrightarrow\beta\Vdash A$;

$\alpha\Dashv\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\Leftrightarrow\beta\Dashv A$.

Если λ — предельный ординал, то:

$\lambda\Vdash\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\Leftrightarrow\forall\beta<\lambda(\beta\Vdash A)$;

$\lambda\Dashv\mathbf{T}(\lfloor A\rfloor)\Leftrightarrow\forall\beta<\lambda(\beta\Dashv A)$.

Оценки удовлетворяют условию:

$a<b$ и $a\Vdash A\Rightarrow b\Vdash A$;

$a<b$ и $a\Dashv A\Rightarrow b\Dashv A$.

Чтобы перейти к терминологии С.Крипке, положим:

$S_{1(\alpha+1)}=\{\lfloor A\rfloor\mid\alpha\Vdash A\}$;

$S_{2(\alpha+1)}=\{\lfloor A\rfloor\mid\alpha\Dashv A\}$.

Для предельных ординалов:

$S_1\lambda = \{\lfloor A \rfloor \mid \forall a < \lambda(a \Vdash A)\}$;

$S_2\lambda = \{\lfloor A \rfloor \mid \forall a < \lambda(a \dashv A)\}$

На аргументном месте **T** могут стоять только номера предложений, поэтому при определении **T** мы не оговариваемся, что это номера ложных предложений предшествующего уровня или номера объектов, не являющихся формулами.

При главной интерпретации формула $\mathbf{T}(\lfloor A \rfloor)$ не определена на нулевом уровне, то есть $S_{1o} = \phi$ и $S_{2o} = \phi$.

Последовательность $<S_{1\alpha},S_{2\alpha}>$ является неубывающей. Эта последовательность состоит из строго возрастающей части и постоянной части, то есть существует ординал ρ такой, что для всех $\beta>\rho$ $(S_{1\rho},S_{2\rho}) = (S_{1\beta},S_{2\beta})$. Легко видеть, что $\rho \Vdash \mathbf{T}(\lfloor A \rfloor)$ тогда и только тогда, когда $\rho \Vdash A$; и $\rho \dashv \mathbf{T}(\lfloor A \rfloor)$ тогда и только тогда, когда $\rho \dashv A$. В ρ также истинна эквивалентность $\mathbf{T}(\lfloor A \rfloor) \cong A$.

Таким образом, ρ является искомой фиксированной точкой. Более того, существует такое ρ, что ρ есть фиксированная точка для всех $\alpha<\rho$ $(S_{1\alpha},S_{2\alpha}) \subset (S_{1\rho},S_{2\rho})$, где $\subset$ — знак строгого включения.

То, что построенное индуктивное означивание формул со знаком **T** гарантирует существование фиксированной точки, конечно, нуждается в доказательстве. Однако это доказательство имеет общий характер и его лучше вычленить из контекста. Это прекрасно сделано в статье Стива Ябло[16]. Он рассматривает абстрактный объект, называемый индуктивным пространством. Пусть U — универсум и P — семейство подмножеств такое, что пустое множество ϕ является элементом P и объединение возрастающей (относительно включения) последовательности элементов P принадлежит P.

На P задан оператор J, те есть функции $J:P \to P$, удовлетворяющий условию монотонности: если $S_1 \in P$, $S_2 \in P$ и $S_1 \subseteq S_2$, то $J(S_1) \subseteq J(S_2)$.

[16] *Yablo S.* Grounding, Dependence and Paradox // Journal of Philosophical Logic. 1982. v.11. p.117-138.

Этот оператор называется оператором *скачка*. Тройка $<U,P,J>$, удовлетворяющая сформулированным условиям, называется индуктивным пространством. S называется нормальным (sound), если $S \subseteq J(S)$.

С помощью индукции по ординалам можно определить последовательность $<J^\alpha(S)>$ для нормального S:

$J^o(S) = S$;

$J^\alpha(S) = J(J^{\alpha-1}(S))$, если α — не предельный ординал;

$J^\lambda(S) = \bigcup\limits_{\beta<\lambda} J^\beta(S)$, если λ — предельный ординал.

Нетрудно доказать следующие утверждения:

1. Последовательность $< J^\alpha(S)>$ неубывающая.

2. Существует единственный ординал ρ такой, что:

(1) для всех α и β таких, что $\alpha< \beta<\rho$, $J^\alpha(S) \subset J^\beta(S)$;

(2) для всех $\gamma\geq\rho$ $J^\gamma(S)=J^\rho(S)$.

Доказательство — в упомянутой статье С.Ябло.

Возвратимся к индуктивной семантике Крипке. Фиксированную точку главной интерпретации (в этом случае на нулевом уровне объем и антиобъем **T** — пустые) будем называть наименьшей фиксированной точкой. Но возможны интерпретации (неглавные), в которых **T** имеет на нулевом шаге непустой объем или антиобъем.

Введенная семантика позволяет осуществить тонкий анализ предложений, содержащих предикат истинности **T**, выделить различные типы такого рода предложений. Предложение A С.Крипке называет *обоснованным* (grounded), если и только если оно имеет истинностное значение в наименьшей фиксированной точке; в противном случае A не обосновано.

К числу необоснованных предложений относятся, например, такие самоприменимые предложения, которые говорят о своей собственной ложности — "я не истинно" и о своей собственной истинности — "я истинно". Уже на интуитивном уровне усматривается различие между этими предложениями. Первое — интуитивно парадоксально, второе же не является таковым, хотя и то и другое не обоснованны. Важно провести различие между ними точным образом. Индуктивная семантика Крипке позволяет сделать это.

При индуктивном определении объема и антиобъема предиката **T** в главной интерпретации принималось допущение, что на нулевом шаге **T** имеет пустой объем и пустой антиобъем. Это вполне естественное допущение, так как вопрос об объеме и антиобъеме **T** на данном шаге сводится к вопросу о том, какие предложения принимаются или отбрасываются на предыдущем уровне (или множестве предыдущих уровней, если данный уровень характеризуется предельным ординалом). Фиксированная точка, к которой приводит эта конструкция, является минимальной.

Однако могут быть индуктивно введены другие объемы и антиобъемы предиката **T**. Так, можно постулировать, что на нулевом уровне предикату **T** приписывается непустой обьем, например, в объем предиката включается предложение, утверждающее свою собственную истинность. В остальном конструкция не отличается от исходной. Сама конструкция в известном смысле искусственна, поскольку решение, какое предложение включить в объем **T** на нулевом уровне, ничем не обосновано. Конструкция имеет фиксированную точку. В этой точке предложение, утверждающее свою собственную истинность, будет истинным. Помимо данной конструкции, могут быть построены и иные, имеющие фиксированную точку.

На базе проведенных семантических конструкций можно уточнить понятия парадоксального предложения, выявить его отличие от других самоприменимых предложений, включающих предикат истинности. Предложение A парадоксально, если оно не имеет истинностного значения ни в одной фиксированной точке. Всякое парадоксальное предложение необоснованно, но не наоборот. Так, предложение, утверждающее свою собственную неистинность, парадоксально и тем самим необоснованно. Но предложение, постулирующее свою собственную истинность, не парадоксально, хотя и необоснованно.

С.Крипке вводит и другие характеристики предложений,

позволяющие провести важные разграничения в исследовании предложений, содержащих предикаты истинности и ложности. Фиксированная точка максимальна, если и только если она не имеет собственных расширений. С помощью леммы Цорна можно доказать, что всякая фиксированная точка может быть расширена до максимальной. Предложение, утверждающее свою собственную истинность (хотя и необоснованно, то есть неистинно в минимальной фиксированной точке), истинно в любой максимальной фиксированной точке. Но, как отмечает С.Крипке, существуют необоснованные предложения, имеющие истинностное значение только в некоторых максимальных фиксированных точках.

Фиксированная точка называется *внутренней* (intrinsic), если и только если нет предложения, истинностное значение которого в этой точке отлично от его значения в любой другой фиксированной точке.

Предложение A имеет *внутреннее истинностное значение*, если и только если существует внутренняя фиксированная точка (S_1,S_2) такая, что $A \in S_1 \cup S_1$[17] .

Предложение, утверждающее, что оно само или его отрицание истинно, является примером необоснованного, непарадоксального предложения, имеющего внутреннее истинностное значение. Предложение "Я истинно или ложно" необоснованно, но внутренне истинно; предложение "Я не истинно и не ложно" необоснованно, но внутренне ложно.

Рассмотренная конструкция семантик показывает возможность введения в объектный язык предиката "Быть истинным высказыванием" (как это делается в естественных языках) и в то же время выявляет условия его непротиворечивого употребления. Язык, казалось бы, ***становится семантически замкнутым, возможно построение самоприменимых высказываний, утверждающих собственную истинность или неистинность, однако парадокс не возникает. Это достигается за счет того, что предикат истинности не является всюду определенным.***

[17] С.Крипке отмечает, то класс внутренних фиксированных точек относительно $\subseteq$ образует полную решетку.

Если предикат **T** является всюду определенным, то объектный язык, его содержащий, будет противоречивым. Индуктивная семантика с объектным предикатом **T** никоим образом не отменяет традиционных исследований А.Тарского, а дополняет и развивает их. Как было отмечено выше, семантикой, двойственной семантике с провалами значений, является семантика с пресыщенными оценками, то есть на некотором уровне пересечение объема и антиобъема может быть непустым. В рамках этой двойственной семантики может быть рассмотрен язык с предикатом истинности[18]. В более общем случае можно перейти к "релевантному" случаю, допускающему как истинностные провалы, так и пресыщенные оценки. Семантика такого рода называется часто аппроксимативной семантикой[19]. Для логики высказываний она была построена нами выше. Конечно, анализ парадоксальных утверждений в рамках этой семантики представляет несомненный интерес.

Другое направление исследований разрабатывают Гупта и Херцбергер[20]. Вместо индуктивного пространства рассматриваются так называемые полуиндуктивные пространства. В случае предельных ординалов образуется не бесконечное объединение, а берется предел. В каждой точке предикат является всюду определенным, но истинностное значение может меняться от точки к точке. Обоснованным высказываниям будут соответствовать высказывания, где значение начиная с некоторой точки стабилизируется. Парадоксальные предложения — это систематически нестабильные предложения. Подход Херцбергера можно рассматривать как модернизацию и крипкевского подхода и первоначального подхода Р.Мартина и П.Вудруффа[21].

Парадокс Лжеца поднимает важные философские вопросы,

[18] *Woodruff P.W.* Approximate semantics and interative theories of truth // 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts of Sect. 5 and 12. v.2. Salzburg, 1983. p.228-231.

[19] *Woodruff P.W.* Op.cit.

[20] *Herzberger H.* Notes on Naive Semantics // Journal of Philosophical Logic. 1982. v.11. N2. p.61-102; *Gupta A.* Truth and Paradox // Ibid. p.1-60.

[21] *Martin R.L., Woodruff P.W.* On representing "true-in-L" in L.

связанные с анализом языка и мышления, с анализом таких понятий, как суждение, высказывание, истинность, ложность, отрицание, осмысленность, с выявлением условий, при которых высказывание имеет истинностное значение. Особое значение приобретет выявление тех допущений, которые приводят к парадоксам.

В настоящее время неортодоксальный анализ семантических парадоксов как, впрочем, в целом проблема истинности находится в центре внимания логиков и философов. Это одна из точек роста[22].

При всей важности проблемы неортодоксального решения семантических парадоксов другие проблемы, прежде всего построение семантики для не всюду определенных предикатов, а также семантики, исследующей граничные условия (пресыщенные оценки) имеют самостоятельное значение. Именно эти соображения послужили основанием для избранной последовательности изложения в данной главе.

[22] См. специальный выпуск: Journal of philosophical Logic. 1982. v.1. N1. Из более ранних работ фундаментальное значение имеет книга: Martin R.M. (td.). Recent Essays on Truth and Liar Paradox. Oxford, 1984.

Глава шестая

ЯЗЫК, СЕМАНТИКА И ОНТОЛОГИЯ. ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§1. Структура формализованных языков и онтологические допущения

Рассматривая проблему изменения и развития научного знания, следует различать его уровни и аспекты. Изменение знания может происходить на уровне принятия некоторых положений. Последние могут выступать как результаты эксперимента, могут приниматься как гипотезы, как результат доказательства или каких-то иных способов обоснования. Изменения могут происходить на уровне принятия новых теорий. На этом уровне возникают проблемы сравнения, сопоставления научных теорий в плане их дедуктивных и выразительных возможностей, в плане их объяснительной силы. Существенную роль в такого рода рассмотрениях играет логика.

Наконец, изменения могут происходить на уровне концептуальных схем. Меняется сам каркас, в рамках которого происходит описание явлений, формулировка теорий. Изменяются категориальная сетка, структура языка теорий, способы рассуждения. С точки зрения логики и теории познания, на каждом этапе познания имеются определенные концептуальные схемы, которые фиксируются в языке — не только в терминах языка. Но и в его

структуре, — способах рассуждения, допускаемых приемах абстракции и идеализации. Именно такого рода изменения связываются, на наш взгляд, с понятием стиля мышления.

Любой "стиль мышления" включает логику, ее средства и методы, но необязательно одну и ту же логику. Более того, принятие определенных способов рассуждения, определенных логических процедур коррелятивно принятию определенных абстракций и идеализаций, то есть в конечном счете определенных концептуальных схем.

Центральный и наиболее сложный вопрос — исследование *концептуального аппарата*, лежащего в основе того или иного типа логических систем. Философия XVII-XVIII вв. по существу исходила из предпосылки единственности и универсальности логики. Для Канта, в центре рассмотрения которого была проблема обоснования необходимого теоретического знания, не возникало вопроса о статусе логических законов или правомерности тех или иных способов рассуждений. Как отмечалось, он исходил из логики как данного; система формальной логики, восходящая к Аристотелю, является для него замкнутой и универсальной.

Именно развитие логики, отбросив идею универсальности логики, поставило вопрос о различных системах логики и соответственно о критериях принятия того или иного типа логических систем. В математике с ее сложной, многоступенчатой системой абстракций особую роль приобретает вопрос допустимости тех или иных логических средств рассуждения. Принятие определенного рода абстракций и идеализаций связано с допущением вполне определенных логических средств. Так, классическая логика, по мнению интуиционистов, "была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... Забывая об этом ограниченном происхождении, впоследствии эту логику ошибочно приняли за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и, в конце концов, стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств"[1] . Дело в том (как мы это пока-

[1] *Брауэр Л.* Цит. по: *Клини Ст.* Введение в математику. М., 1957. С.48.

жем ниже), что логические фигуры заключений хотя и не зависит от конкретного содержания понятий, возникающих в той или иной области знания, но зависят от концептуального аппарата в целом, от принимаемого типа абстрактных понятий, от "идеальных образов", допускаемых в теории.

Стиль мышления в логике, *типы логических систем* определяются *способом анализа логической формы.* Логические законы и логические структуры не есть прямое, "зеркальное" отражение природных связей и отношений вещей. Их выявление предполагает поэтому *определенную систему категориального анализа* в логике, выделение той или иной системы семантических категорий.

Принимаемая система семантических категорий служит важной характеристикой формализованного языка. Построение того или иного формализованного языка базируется на принятии (явном или неявном) определенной системы семантических категорий. Следует различать типы, категории самих сущностей и категории языковых выражений.

Учение о типах символов представляет собой скорее формальное разграничение выражений по чисто синтаксическим признакам с целью, например, устранения антиномий. Теоретико-типовое разграничение символов полезно и удобно, когда речь идет о чисто синтаксической форме выражений, детерминирующей допустимые процедуры рассуждения.

На наш взгляд, принятие той или иной системы семантических категорий коррелятивно принятию определенной системы анализа познаваемого мира и тем самым принятию определенных онтологических предпосылок. Иерархия семантических категорий, положенная в основу формализованного языка, определяет *способ анализа логической структуры выражений этого языка* и тем самым *допустимые способы рассуждения.* Так, язык стандартной логики (системы фреге-расселовского типа) и язык системы онтологии Лесневского отличаются прежде всего тем, что в их основе лежат разные системы семантических категорий. В качестве основных категорий в языках фреге-расселовского типа выступают собственные имена (имена предметов индивидной области) и высказывания. Общие имена, такие, как "металл", "человек", "электропроводное вещество" и т.д., относятся не к категории имен, а к категории s/n, то есть рассматриваются как одноместные предикаты. В силу этого в языках фреге-расселовского типа субъект к предикат высказывания не могут принадлежать к одной и той же семантической категории, тогда как в традиционной силлогистике и онтологии Лесневского — могут[2]. По существу, принципиально меняется само понятие предиката. В логических языках, где общие имена отнесены к той же семантической категории, что и собственные, логическая структура высказывания "Жучка-собака" (в системе Айдукевича) принимает вид: $[s/(n'n')]n'n'$, где $s/(n'n')$ — категория константы "есть", а n' — категория имен (общих и собственных). В системах фреге-расселовского типа структура указанного высказывания принимает вид: $(s/n)n$, где s/n — категория одноместных предикатных функций, а n — категория собственных имен. Соответственно, в аристотелевской силлогистике логические константы *A, E, J, O* ("все суть", "ни одно не суть" и т.д.) следует отнести к категории $s/(n'n')$.

Дело в том, что логическую структуру суждений (высказываний) нельзя рассматривать как нечто абсолютное, раз и навсегда данное, независимое от принципов анализа логической формы, от выявления семантики логических констант[3]. Логи-

[2] Я. Лукасевич отмечает, что "для аристотелевской силлогистики существенно то, что один и тот же термин без какого-либо ограничения может быть использован и как субъект и как предикат. Во всех трех известных Аристотелю фигурах силлогизма имеется термин, который встречается один раз как субъект, а затем как предикат: в первой фигуре — это средний термин, во второй фигуре — больший, а в третьей фигуре — меньший" (*Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1969. С.44).

[3] Подобное понимание логической формы возможно, если абсолютизировать разграничение содержания и форм мышления и познания. По Канту, поскольку общая (формальная) логика изучает только форму мышления, а не материю, она полностью абстрагируется от всякого содержания познания: "Общая логика открывает только форму мышления, но не материю. Она абстрагируется от всякого содержания познания" (*Kant J.* Gesamte Schriften. Bd.XVI. B., 1924, фрагмент 1627). Поскольку исследуются лишь необходимые и всеобщие правила мышления вообще "без различения объектов, то есть материи, являющейся предметом мысли", наука, исследующая их, отвлекается от всякого содержания знания. При таком подходе только содержание мышления связано с познаваемым, логические же формы носят априорный характер и не имеют теоретико-познавательного значения.

ческая форма не зависит от особенностей лингвистической структуры конкретных языков (английского или японского, например). Но она зависит от способов выделения объектов рассмотрения, от допускаемых приемов абстракции, идеализации, обобщения.

При построении иерархии семантических категорий речь идет о разработке *определенной типологии значений*, а это познавательная задача. Следует заметить опять-таки, что речь идет о стабильных значениях выражений, а не о тех аспектах содержания, которые зависят от контекста употребления, — это уже вопрос прагматики. Дело не во введении особых символов в качестве логических констант, а в способах приписывания им значений. Трактовка категорий кванторов, логических связок, операторов, даже предикатов зависит от методов семантического анализа и, в конечном счете, от истолкования природы логического знания, той информации, которую несут логические структуры. Точно так же способ членения выражений на составляющие, выявление категорий значения этих составляющих — не формальная, синтаксическая, задача. Само выделение исходных семантических категорий диктуется определенными теоретико-познавательными предпосылками, а именно принципами различения объектов — предметов мысли, то есть аспектами, относящимися к "материи", к содержанию познания.

В качестве основных категорий выражений Г.Фреге по существу принимал категорию собственных имен предметов индивидной области и категорию предложений, и это определялось самим методом анализа логической структуры. Выражения указанного типа Фреге рассматривал как "насыщенные", "завершенные" — имеющие самостоятельное значение в изоляции. Анализ логической структуры Фреге, естественно, начинал с такого рода "насыщенных", завершенных выражений.

Основное, принципиальное отличие принятого им способа анализа логической формы Фреге видел в том, что анализ он начинает с высказываний, мысленно расчленяя их по схеме "выражения функциональных связей и их аргументы". Такой способ членения Фреге заимствовал из языка математики, но,

перенося его в логику, существенно расширил понятие функции, ввел логические функции. Свойства, отношения объектов рассмотрения он понимал как особого рода логические функции, область значения которых — истинностные значения; логические связки также получили функционально-истинностное истолкование. Анализируя предложения (пропозициональные формы), например, "$1^2=1$", Фреге отмечал, что если замещать знак "1" другими константами, обозначающими объекты индивидной области, то есть константами типа "2", "3" и т.д., то в результате получим опять-таки предложения (истинные или ложные). Рассматриваемые выражения при этом расчленяется на знаки аргументов — "собственные имена" (в нашем случае: "1", "2", "3" и т.д.) — и общую для них неизменяющуюся часть: "$( )^2 =$ ", выражающую понятие "корень квадратный из... " или свойство объектов "быть корнем квадратным из"[4] . Такого рода выражения, включающие пустые места для аргументных выражений, Фреге рассматривал как "ненасыщенные", незавершенные и относил их к категориям функторов. Так, "$( ) > 0$", "$( ) = ( )$", "( ) современник ( )" выражают одноместные и двухместные предикатные функции. Скобки в указанных выражениях символизируют операцию приложения функтора к его аргументам и таким образом операцию образования завершенных, обозначающих выражений. Переменные "x" и "y" в пропозициональных формах "$(x)^2 = 1$", "(x) современник (y)" и т.д. не относятся к выражению функции, они — показатели мест и типа аргументных выражений языка.

По существу, в основе *семантического* метода Фреге лежит *разграничение предметов и функций* (свойств, операций), то есть принятие предпосылок, относящихся к *содержанию познания*[5] . Утверждение о том, что общая (формальная) логика, рассматривая всеобщие правила мышления, полностью отвлекается от

[4] "Подпадать под понятие" Фреге трактует как "обладать (соответствующим) свойством".

[5] Понятия предмета и функции в анализе Фреге являются исходными. По Фреге, невозможно дать "школярски правильное определение функции", ибо это есть нечто простое, "логически далее неразложимое". Предмет — это то, о чем что-то может утверждаться, короче, можно сказать, что предмет есть все то, что не есть функция.

всякого содержания знания, не соответствует тому, что мы находим в логике при исследовании ее оснований.

Принятие Г.Фреге *принципиально иного способа анализа логической структуры*, отказ от традиционного членения суждений на субъект и предикат приводит к созданию особой теории логического вывода — теории квантификации. Иной способ анализа логической структуры, связанный с иными теоретико-познавательными предпосылками, приводит к конструированию логических систем совершенно иной категориальной структуры. Как в традиционной логике, отмечает Фреге, так и в логике Буля анализ логической формы начинают *не с высказываний* (суждений), а с *понятий* и уже из понятий, выявляя отношения между ними, конструируют высказывания. "У Аристотеля, именно как у Буля, образование понятий через абстракцию является первоначальной логической деятельностью, а суждение и умозаключение получаются путем непосредственного или опосредованного сравнения понятий по объему. Различие состоит только в том, что Аристотель выдвигает на первый план случай, когда объем одного понятия полностью включается в объем другого, случай соподчинения таким образом, в то время, как Буль все другие случаи сводит к случаю равенства объемов"[6] . При таком способе анализа основными логическими отношениями, определяющими допустимые логические преобразования, являются *отношения понятий по объему*. Соответственно, основной, исходной категорией выражений языка выступают термины, выражающие эти понятия, то есть общие имена.

Фреге отмечал, что точно так же, как мы различаем понятия (функции) и предметы (единичные объекты), "следует отличать случай соположения понятий от случая, когда мы имеем дело с подпаданием предмета под понятие, хотя в языке оба могут выражаться одинаковым образом"[7] .

Таким образом, исторически сложившиеся типы логических систем опираются на различные способы анализа логической

[6] *Frege G.* Schrifften zur Logik. Aus dem Nachlass. B., 1973. S.180.

[7] Ibid. S.185.

структуры высказываний (суждений); различного типа системы семантических категорий лежат в их основе.

Соотношение структуры языка и систем объемов, о которых может идти речь в языке — часть более широкого вопроса об онтологических допущениях, к которым обязывает нас логическая структура принимаемого языка. По существу это глубокая философская проблема отношения структуры языка и мышления к структуре мира, соотношения логики и онтологии. Анализ категориальной структуры языка и мышления и их роли в формировании картины мира стоял в центре философских изысканий Канта, Гумбольдта, а в новейшей философии – Витгенштейна, Лесневского, Айдукевича, Карнапа.

Проблему "структуры мира и структуры языка" остро поставил Л.Витгенштейн в "Логико-философском трактате"[8] и решил ее с позиций определенной роли структуры языка. Более того, именно язык, фактически даже синтаксическая структура высказываний (вид и расположение символов) изображает, копирует, "рисует" структуру атомарных фактов (изобразительная, "картинная" теория языка). Именно язык своей структурой определяет наше видение мира, создает ту сетку, которая детерминирует нашу картину мира (подробнее см. §5 этой главы). В дальнейшем проблема роли и природы языковых структур подробно рассматривалась представителями логического позитивизма, особенно Р.Карнапом (теория "языковых каркасов"). Именно с позиций конвенционализма решался Карнапом вопрос о взаимоотношении языковых структур и типов объектов, о которых может идти речь в языке. Построение языка той или иной категориальной структуры ("языкового каркаса") является, согласно Р.Карнапу, вопросом целесообразности, удобства и ни в коей мере не теоретико-познавательным вопросом. Вместе с тем само введение определенного типа объектов рассмотрения диктуется принятием определенного языкового кар-

[8] "Тот факт, что мир есть мой мир, проявляется в том, что границы языка (единственного языка, который понимаю я) означают границы моего мира" (*Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1958, С.62).

каса и тем самым также становится вопросом удобства, конвенции[9]. Вопрос о введении объектов рассмотрения не связан ни с исследованием объективной реальности, ни с какими-то вообще теоретико-познавательными предпосылками; "...принятие какого-либо языкового каркаса не должно рассматриваться как подразумевающее некую метафизическую доктрину, касающуюся реальности рассматриваемых объектов"[10].

Принципиально по-иному рассматривается и решается эта проблема отношения логики и реальности с позиций немецкой классической философии и диалектико-материалистической концепции отражения: не только содержание мышления, но и его формы, категориальная структура отражают объективный мир. "Над всем нашим теоретическим мышлением господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собою... Материализм XVIII в. вследствие своего по существу метафизического характера исследовал эту предпосылку только со стороны ее содержания. Он ограничился доказательством того, что содержание всякого мышления и знания должно происходить из чувственного опыта... Только новейшая идеалистическая, но вместе с тем и диалектическая философия — и в особенности Гегель — исследовала эту предпосылку также и со стороны формы"[11].

Но, во-первых, не вполне ясно, каким "одним и тем же общим законам" подчиняются субъективное мышление и объективный мир. Но если даже два процесса подчинены определенным общим законам и в чем-то согласуются между собой, отсюда вовсе не следует, что формы одного из них проистекают из другого, что формы мышления и знания — как и их содер-

[9] "Если кто-либо хочет говорить на своем языке о новом виде объектов, он должен ввести систему новых способов речи, подчиненную новым правилам; мы назовем эту процедуру построением языкового каркаса для рассматриваемых новых объектов" (*Карнап Р.* Эмпиризм, семантика и онтология // Значение и необходимость. М., 1959. С.300.

[10] Там же. С.311.

[11] *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т.20. С.581.

жание — происходят из чувственного опыта. Это особенно неприемлемо в отношении форм и законов логики. Более того, принципы организации знания — его, например, целостность, системность, связанность, субординация — не суть принципы, относящиеся к самим объектам. Законы и принципы познавательной деятельности в целом — переход от незнания к знанию, от одних положений к другим, формы рассуждений, логические операции над поднятиями и т.д. — не являются законами и принципами самих объектов. Другое дело — вопрос о том, зависят ли законы и принципы логики от определенных предпосылок, относящихся к объектам рассмотрения. Во всяком случае, они не являются прямым отражением отношений и связей объективного мира, хотя могут зависеть от предпосылок относительно универсума рассмотрения, от определенных предпосылок гносеологического характера и тем самым несут определенную информацию о мире.

Проблема взаимоотношения между способами речи и типами объектов, о которых может идти речь в языке, сформулированная в терминах теории семантических категорий, означает нечто большее, чем вопрос о корреляции между принятием новых способов речи, нового "языкового каркаса" и объектами, о которых может идти речь в языке. Дело в том, что нам дан не просто список категорий, а имеется иерархия категорий и помимо самих категорий даны способы образования одних выражений из других. Поэтому должен обсуждаться не только вопрос корреляции способов речи и типов объектов, но и вопрос корреляции между способами образования выражений и принимаемыми способами анализа. Но решаться этот вопрос не может в духе изобразительной концепции языка, при которой рассматриваемая корреляция заменяется простым кодированием.

Обсуждение в теории семантических категорий проблемы информативности логических структур, методов анализа смысла и значения выражений языка различных категорий является в определенном смысле иной формулировкой известной проблемы статуса универсалий.

Проблема универсалий многогранна. В логике эта проблема встает прежде всего как проблема допущения абстрактных сущностей, мыслимых объектов в качестве объектов рассмотрения. Существенную роль в решении этого вопроса играет критерий Куайни. Можно вводить выражения языка, относящиеся к идеальным сущностям, мысленным объектам, но это еще не означает, что тем самым соответствующие объекты включаются в универсум рассмотрения. Указанные выражения языка — хотя по свой форме они и выступают как десигнативные — могут трактоваться в зависимости от принимаемых методов семантического анализа как необозначающие выражения, — неполные символы в смысле Б.Рассела. Так возникают линии *номинализма* и *платонизма* в трактовке искусственных, да и естественный языков. С другой стороны. Проблема универсалий трансформируется в проблему способов "членения" познаваемого, введения соответствующих идеализаций, относящихся к познаваемому (предметы, свойства, отношения, ситуации, множества, возможные миры и т.д.), и влияния этих способов членения на логическую структуру выражения языка. В семантическом плане выражения соответствующих категорий могут трактоваться как обозначающие выражения или как синкатегорематические знаки. Такой статус, например, нередко приписывается логическим связкам, а иногда и предикатным знакам.

На синтаксическом уровне выражения языка могут рассматриваться как конечные линейные последовательности символов-элементов некоторого алфавита. При таком подходе выражения строятся из исходных атомов с помощью одной порождающей операции, именно операции присоединения элемента алфавита справа. Но чтобы вскрыть структурные, логические связи, необходимо не просто представление выражений языка в виде линейных цепочек символов, но и выявление глубинных структур — способов связи между составляющими выражениями. Сложные выражения языка выступают в таком случае как результат построения из составляющих, а в конечном счете из исходных, с помощью одной или нескольких операций сочленения одних выражений с другими. В этом случае способ построения выражения из составляющих естественным образом представляется не в виде линейной последовательности, а в виде дерева. Чтобы от такого представления структуры в форме дерева перейти к линейному, необходимо расширить алфавит. Выражение в форме дерева получит представление в виде определенной последовательности символов, но не исходного словаря, а обогащенного дополнительными символами, например, правой и левой скобками, если дерево строилось с помощью одной операции сочленения, или несколькими парами скобок, соответственно числу операций сочленения. Следует подчеркнуть, что первоначальные элементы алфавита и дополнительные (скобки, например) играют разную роль: если первые при семантическом анализе могут рассматриваться как обозначающие, то вторые — не являются обозначающими, они является показателями перехода от одного (глубинного) способа представления к другому (поверхностному). Дополнительные символы типа скобок показывают, каким образом одни выражения строятся из других. Поверхностному и глубинному прочтению линейных последовательностей соответствуют разные способы их геделизации: в первом случае геделевские номера приписываются всем символам последовательности, включая дополнительные (скобки); во втором случае дополнительные символы не имеет геделевских номеров[12].

В символической логике, начиная с Г.Фреге, принимается следующее: каждое сложное выражение образовано из составляющих с помощью одной операции сочленения; среди непосредственно составляющих можно выделить главную часть и несколько дополнительных. Как отмечалось, главную часть Фреге рассматривает как функтор (выражение функции), а дополнительные части — как имена аргументов. При таком подходе каждое выражение выступает как результат операции приложения функтора к именам аргументов. Не подсказывает ли нам членение выражений по схеме "функтор-аргументы" при-

[12] См. гл.I, §5.

нятие на семантическом уровне наряду с сущностями, соответствующими именам аргументов, также сущностей, соответствующих функтору, сущностей более высокого порядка, то есть универсалий? Прежде чем отвечать на этот вопрос, рассмотрим альтернативную возможность на чисто синтаксическом уровне.

Во-первых, можно отказаться от идеи выделять среди непосредственно составляющих главную часть и дополнительные, все непосредственно составляющие рассматриваются как равноправные. С другой стороны, можно не ограничиваться одной-единственной операцией сочленения. Поясним эту мысль на примере языка исчисления высказываний. Мы можем не вводить логические связки в качестве элементов алфавита и не рассматривать их как самостоятельные знаки. Конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию высказываний можно рассматривать как новые высказывания, полученные из составляющих с помощью разных способов сочленения. При многомерной записи эти операции сочленения изображались бы особым взаиморасположением составных частей. Но при переходе к представлению в виде линейных последовательностей, естественно, потребуются вспомогательные знаки. Так, можно ввести несколько пар скобок: посредством (*AB*) изображается конъюнктивная связь, [*AB*] — дизъюнктивная, [*AB*) — импликативная, (*A*] — отрицание *A*. Мы могли бы скобки записывать иначе, считая обычную форму записи — $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\urcorner A)$ — другим способом записи различных скобок. Знаки &, V, ⊃, ⌉ указывают лишь на иную форму скобок и тем самим на разные способы конструирования выражений. Именно таким образом трактовались логические связки у Фреге (или так может быть истолкован Фреге): он не рассматривал их как самостоятельные знаки языка; логические связи между высказываниями изображались определенными способами взаиморасположения высказываний: импликация — в виде $\top\!\!\sqsubset {}^{B}{}_{A}$, отрицание — $\top A$. Указанный подход позволяет исключить логические связки как особые выражения. Связок нет, имеется лишь различные способы сочленения исходных высказываний в сложное.

Такой подход может быть распространен по крайней мере на чисто синтаксическом уровне и на анализ структуры атомарных предложений. Обычно принимается, что атомарное предложение является результатом приложения предикатного знака к индивидным. При альтернативном подходе атомарное предложение строится из индивидных констант посредством различных способов их расположения относительно друг друга. Разные соотношения выражаются разными способами соединения индивидных знаков, при линейной записи этого можно добиться, например, индексируя пары скобок. В качестве таких индексов могут использоваться буквы, принимаемые при указанном подходе за предикатные знаки. Предикатные знаки рассматриваются не как самостоятельные, категорематические знаки, а как вспомогательные знаки — показатели особых способов сочленения индивидных знаков друг с другом при представлении выражений языка в виде линейных последовательностей.

Итак, на чисто синтаксическом уровне язык логики предикатов (без кванторов и операторов) может рассматриваться двояким образом. Можно принять, что имеются следующие типы знаков: индивидные знаки, предикатные знаки, логические связки. Все выражения языка представляют собой по своей глубинной структуре результаты приложения главных знаков (называемых функторами) к их аргументам. Более подробная типология выражений и функторов вводится на основе теории синтаксических категорий. При переходе на семантический уровень, естественно, возникает вопрос нв только о том, к какого рода сущностям относятся индивидные знаки, но и что означают функторы, в частности предикатные знаки и логические связки. Конечно, необязательно постулировать, что каждой синтаксической категории соответствует семантическая. При втором подходе логические связки и предикатные константы выступают как вспомогательные символы; по существу, нет ни предикатных знаков, ни логических связок. Имеются только индивидные знаки и различные способы сочленения одних выражений с другими. В таком случае вопрос о том, что обозначают предикатные знаки, просто не может быть поставлен. Отметим, что и при втором подходе применима техника синтаксических категорий, но *производные категории* характеризуют теперь не типы выражений, а *способы сочленения* одних выражений с другими.

Теоретико-множественная семантика, по существу платонистическая, выражениям каждой синтаксической категории сопоставляет объекты определенного типа: индивидным константам (n) — объекты из непустой индивидной области X, предложениям (s) — из области истинностных значений {и,л}, выражениям категории $s/(\alpha_1,..., \alpha_n)$ — функцию с областью определения в декартовом произведении множеств, сопоставленных категориям $\alpha_1,..., \alpha_n$, и областью значений в множестве, сопоставленном категории s. При таком подходе все синтаксические категории являются семантическими.

Возможен подход, когда не всякая синтаксическая категория является семантической. Основываясь на изложении такого подхода в гл.II, рассмотрим следующий пример построения систем категорий: n — индекс синтаксической категории, являющейся семантической, но синтаксическая категория s не является семантической. Другими словами, предложения не рассматриваются как обозначающие выражения. Они могут быть истинными или ложными, но они не обозначают абстрактные сущности — Истину и Ложь. Категория вида $s/(\alpha_1,..., \alpha_n)$ будет семантической тогда и только тогда, когда $\alpha_1,..., \alpha_n$ семантические категории. В этом случае предикатные знаки, то есть знаки категорий s/n, s/nn,..., имеют самостоятельное значение и рассматриваются как обозначающие, но логические связки (то есть выражения категорий типа s/s, s/ss,...) ничего не обозначают и не имеют самостоятельного значения.

Наконец, в качестве обозначающих можно рассматривать только выражения категории n. В этом случае не только логическое связки, но и предикатные знаки ничего не обозначают и не имеют самостоятельного значения.

В гл.II. мы проанализировали языки, содержащие операторы и построенные по схеме приложения функтора к аргументам. Наша общая установка состояла в том, что для анализа такого рода языков выражения необходимо рассматривать как построенные посредством двух порождающих операций: операции приложения функтора к аргументам и обратной ей операции абстракции. При этом принятие абстракции по выражениям некоторой категории принуждает рассматривать эту категорию как семантическую, что соответствует известному критерию Куайна: "Быть объектом рассуждения — означает быть значением квантифицируемой переменной".

Основная задача оставшейся части параграфа состоит в обосновании возможности такой интерпретации исчисления предикатов первого порядка (без предикатных и пропозициональных переменных), при которой в качестве обозначающих признаются только индивидные знаки. Хотя ни пропозициональные связки, ни предикатные знаки (как и скобки) сами ничего не обозначают, предложения, построенные с их помощью, являются осмысленными и могут быть истинными или ложными. Интерпретация предложений, содержащих предикатные и пропозициональные знаки, формулируется в виде правил выполнимости и истинности в духе работы А.Тарского. Таким образом, указанная интерпретация возможна.

Языки второго порядка своей структурой заведомо принуждают принять универсалии, то есть ввести в универсум рассмотрения такие сущности, как свойства и отношения и рассматривать предикатные знаки как обозначающие. В этой связи привлекает внимание интенсивная разработка обобщенных первопорядковых языков: с кванторами Генкина, Мостовского, с бесконечно длинными формулами и так далее. По выразительным возможностям они приближаются к второпорядковым языкам, но в отличие от них допускают номиналистическую интерпретацию.

Возможность номиналистической трактовки первопорядкового языка, в особенности рассмотрения предикатных знаков как синкатегорематических, вызывает естественную ассоциацию с "Логико-философским трактатом" Л.Витгенштейна. Имеются основания истолковывать "Логико-философский трактат" как попытку построить некоторый идеальный язык без предикатных знаков. Так понимает "Трактат" Кюнг[13]. Я.Хинтикка в своей исключительно интересной реконструкции Витгенштейна, к сожалению, исходит из трактовки предикаторов как обозначающих выражений. Обратимся к самому Витгенштейну. Согласно тезису 3.22 только имена являются обозначающими знаками. Предложения ничего не обозначают. "Положения вещей могут быть описаны, но не названы. (Имена подобны точкам предложения — стрелкам, они имеют смысл)" (3.344). "Мы не должны говорить: "Комплексный знак "aRb" означает, что a находится в отношении R к b, но должны говорить: "то, что "a" стоит в определенном отношении к "b", означает, что aRb" (3.1432)[14]. То есть синтаксическое отношение между знаками a и b задает смысл предложения aRb, R не есть знак отношения между объектами a и b. Отношения не обозначаются, они выражаются через взаиморасположение имен. "Сущность пропозиционального знака станет ясной, если мы будем представлять себе его составленным не из письменных знаков, а из пространственных объектов (например, столов, стульев, книг). Пространственное взаиморасположение вещей выразит тогда смысл предложения". В тезисе 4.22 читаем: "Элементарное предложение состоит из имен. Оно есть связь, сцепление имен". С нашей точки зрения, Витгенштейн дает номиналистическую трактовку логики: не только логические связки, но и предикатные знаки трактуются им как синкатегорематические[15].

Как отмечалось выше, у Витгенштейна отношение элементарного предложения к соответствующему факту, по существу, отождествляется с проецированием и кодированием. Обязательно ли связывать отказ от рассмотрения предикатных знаков как обозначающих выражений с такой установкой? Мы полагаем, не обязательно. Возможен подход, основанный на идее активности познающего субъекта. В последнем случае предложения можно рассматривать как отчет о результате взаимодействия с объектом. С предикатным знаком при таком подходе связывается алгоритм или алгоритмоподобное предписание. Во всяком случае, трактовка предикатных знаков как необозначающих выражений напрямую не связана с "изобразительной" концепцией языка.

[13] *Kung C.* Ontology and Logistic Analysis Language. Dordrecht, 1967.

[14] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1957.

[15] *Смирнова Е.Д.* Универсалии и логическая структура языка // Логико-методологические исследования. М., 1980. С.332-340.

§ 2. Методы обоснования вводимых идеализаций и финитная установка Д.Гильберта

По общему признанию целью гильбертовской программы обоснования математики является доказательство непротиворечивости аксиоматически построенной математики. Иногда дело представляется таким образом, что поскольку были обнаружены теоретико-множественные парадоксы, то возникла необходимость в доказательстве непротиворечивости математических теорий. У Френкеля и Бар-Хиилеля мы находим следующую характеристику задач, стоящих перед Гильбертом: "Нужно показать, что применяемые в математике методы доказательства достаточно сильны для того, чтобы получить всю классическую математику, в том числе всю канторовскую теорию множеств, исходя из подходящим образом выбранных аксиом, но в то же время не настолько сильны, чтобы вывести из аксиом противоречия"[16]. Бесспорно, непротиворечивость теории более чем желательный результат. Но почему доказательство непротиворечивости будет являться обоснованием математики? "Неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, — писал Брауэр, — не становится от этого менее неправильной, подобно тому, как преступное поведение, не установленное правосудием, не становится от этого менее преступным"[17].

[16] *Френкель А., Бар-Хилкл И.* Основания теории множеств. М., 1966, С.318-319.

[17] Цит. по: *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957, С.56-57.

Нередко сам Гильберт давал основания полагать, что основной целью его программы обоснования математики является доказательство ее непротиворечивости. Так, в ответ на возражение, что если даже какое-либо понятие может быть введено "без опасений", то есть без появления противоречий, и это может быть доказано, то все же это понятие не является в достаточной мере оправданным, Гильберт пишет: "...если, помимо доказательства непротиворечивости, может иметь смысл еще и вопрос о законности некоторого мероприятия, то таким вопросом может быть только вопрос о том, сопровождается ли это мероприятие соответствующим успехом иди нет"[18].

Нам представляется, что основным содержанием подхода Гильберта является обоснование вводимых идеализаций, а не доказательство непротиворечивости само по себе. Мы покажем, что при тех допущениях, которые принимал Д.Гильберт, доказательство непротиворечивости эквивалентно доказательству устранимости. Поэтому он имею полное право заменять требование устранимости требованием формальной непротиворечивости. Мы постараемся выяснить, учитывая теоремы об ограниченности формализмов, в каком отношении находятся проблема непротиворечивости формальной системы и вопрос об устранимости идеальных образований. В вопросе об элиминируемости непосредственно неинтерпретируемых терминов и образований, на наш взгляд, возможны следующие подходы. Самый жесткий состоит в требовании элиминируемости всех неинтерпретируемых терминов. Это требование можно уточнить: каждый термин, не имеющий непосредственной интерпретации, должен быть явно определим посредством интерпретированных терминов системы. Понятие явной определимости формулируется следующим образом (для случая предикатных терминов): k-местная предикатная константа Q явно определима в терминах высказывания X тогда и только тогда, когда существует такая формула H, с k свободными переменными,

[18] *Гильберт Д.* Основания геометрии. М., 1948. С.340.

сформулированная в терминах X, отличных от Q, такая, что из X выводима: $\forall x_1,..., \forall x_k(Q(x_1,..., x_k) \equiv H(x_1,..., x_k))$, где $\equiv$ есть знак эквиваленции.

Более либеральная установка ограничивается требованием переводимости всех предложений, содержащих неинтерпретированные термины или новые способы образования, в предложения, их не содержащие. Это прежде всего контекстуальная определимость в смысле Б.Рассела. Так, определенные дескрипции, выражения абстракции и другие "неполные символы" неопределимы явно, но все контексты (в данном случае формулы), их содержащие, могут быть устранены, то есть заменены формулами, их не содержащими. Естественно, всякий термин, определимый явно, определим и контекстуально, но не наоборот.

Логицизм, пытаясь свести математику к логике, требует контекстуальной (но необязательно явной) определимости всех математических терминов в логических и выводимости всех математических утверждений из логических. Хорошо известно, что первое осуществимо, второе — нет. Уточним понятие контекстуальной определимости, сформулировав его в терминах отношения некоторой формальной системы и ее расширения.

Пусть система $\mathbf{S}_2$ является расширением системы $\mathbf{S}_1$. Будем говорить, что новое правило образования контекстуально определимо, если существует такая рекурсивная функция φ, что: (1) для всякого предложения A системы S_2 существует предложение B системы S_1, что $\vdash_{S_2} \varphi(A) \equiv B$; (2) если A есть формула S_2, то $\vdash_{S_2} \varphi(A) \equiv A$; (3) если $(A_1,...,A_k)/E$ есть правило вывода S_2, то $[\varphi(A_1),..., \varphi(A_k)]/\varphi(E)$ является производным правилом S_2.

Правило вывода $(A_1,...,A_k)/E$ производно в системе S, если в S может быть построен вывод формулы E из посылок $A_1,...,A_k$. Правило вывода допустимо, если его добавление к S в качестве основного не расширяет класс доказуемых формул. Всякое производное правило допустимо, но не наоборот.

Можно ослабить условия контекстуальной устранимости символов, вводимых в систему посредством новых правил образования, заменив требование (3) условием (3'):

Если $(A_1,...,A_k)/E$ есть правило вывода в S_2 то $[\varphi(A_1),..., \varphi(A_k)]/\varphi(E)$ является допустимым правилом вывода S_1.

В случае явной определимости интерпретацию получают термины, в условиях контекстуальной определимости и устранимости термина интерпретацию получают предложения, содержащие эти термины, тогда как отдельно взятый термин может и не иметь интерпретации.

Можно пойти еще дальше и потребовать,чтобы интерпретацию получали не отдельно взятые предложения, а вся теория в целом. Это понятие элиминируемости было выработано Д.Гильбертом при формулировке им программы обоснования математики.

Обоснование можно понимать по-разному. Можно считать теорию обоснованной, если каждая аксиома этой теории истинна и способы рассуждения таковы, что при истинности посылок они гарантируют истинность заключения. Однако "выставить общее требование, согласно которому каждая отдельная формула сама по себе допускала бы истолкование, отнюдь не разумно, — писал Д.Гильберт, — ...напротив, сущности теории соответствует, что при ее развитии нет необходимости, между прочим, возвращаться к наглядности или значимости". Даже в физике мы не можем требовать проверяемости каждого утверждения, выводимого из законов физики, тем более бессмысленно предъявлять подобные требования ко всем высказываниям математической теории, "...только известная часть комбинаций и следствий из физических законов может быть контролируема опытом, подобно тому как в моей теории доказательства только реальные высказывания могут быть непосредственно проверяемы"[19] .

Иными словами, Д.Гильберт не предполагает редукции каждого утверждения математики, его интерпретации в терминах конкретных объектов.

Гильберт считает, что мы не можем отказаться от высказываний об идеальных элементах, мы должны обосновать теорию,

[19] *Гильберт Д.* Указ.соч. С.381.

существенно использующую понятие актуальной бесконечности, если хотим сохранить всю классическую математику в полном объеме.

Поэтому обоснование математики Д.Гильберт видел в обосновании правомерности использования идеальных образований – в доказательстве устранимости идеальных высказываний. "Мы должны бесконечное, в смысле бесконечной совокупности, в тех случаях, где оно еще и теперь встречается в выводах, понимать как нечто кажущееся, подобно тому, как в предельных процессах исчисления бесконечно малых оказалось возможным показать, что бесконечное, в смысле бесконечно малого и бесконечно большого, есть просто оборот речи"[20] .

Как известно, все предложения математики Гильберт подразделяет на реальные и идеальные. Он не отказывается ни от чистых теорем существования, ни от высказываний о трансфинитных объектах. Но только реальные предложения математики имеют самостоятельное значение, сопоставимы с действительностью; это содержательные сообщения о конструктивных объектах, которые могут быть построены в рамках абстракции потенциальной осуществимости и представлены в виде конечных, наглядных конфигураций. В элементарной теории чисел это содержательные сообщения о числовых знаках, о "конкретных образах наглядного созерцания": ($2 < 3$; $3 + 5 = 8$; $10^{10} > 100$).

В формальных системах, как известно, все математические формулы выступают как объекты наглядного созерцания, они выполняют ту же функцию, что и числовые в элементарной теории чисел.

Утверждение о непротиворечивости формальной системы при таком подходе рассматривается как реальное предложение: исходя из наглядных, конкретных свойств принимаемых конструкций, мы утверждаем, что объект определенного вида (например, формальное доказательство с заключительной формулой $0 \neq 0$) не может быть построен в нашей системе по тем правилам построения, которые приняты.

[20] Там же, с.339.

Согласно концепции Гильберта, основу собственно математического знания, его устойчивое, не зависящее от логики содержание определяют не гипотезы, не конструирующие способности ума и не интуиция, а определенные конкретные, внелогические объекты, "непосредственно данные в созерцании до всякого мышления". Об объектах наглядного созерцания мы рассуждаем содержательным образом, опираясь на их обозримые, конкретные свойства. Обычные законы логики вполне надежны, если они применяются к реальным предложениям. Отсюда та "надежность заключений, которая имеет место в обыкновенной, низшей теории чисел, в которой никто не сомневается и где возникают противоречия и парадоксы только вследствие нашей невнимательности"[21] .

Идеальные предложения не являются утверждениями об объектах, рассматриваемых в математике — это предложения о фикциях. Они не рассматриваются как содержательные сообщения и являются лишь "идеальными образами нашей теории". Естественно, к ним неприменимы содержательные способы рассуждения, обычные законы логики.

Логические операции над ними не могут проводиться содержательно, они заменяются внешними действиями с этими высказываниями — как с наглядными вещами, согласно принятым правилам.

Мы не можем отказаться от высказываний об идеальных элементах, если хотим сохранить классическую математику во всем ее объеме. Однако именно использование абстракций и идеализаций приводит нас к высказываниям, которым ничто не соответствует в действительности не только в том смысле, что в действительности нет конкретных объектов или совокупностей с указанными свойствами, но и в том смысле, что такого рода объекты и не могут в принципе существовать, не могут быть построены, даже если отвлечься от материальных, пространственно-временных возможностей их построения.

[21] Там же. С.350.

Более того, использование произвольных способов абстракций приводит к антиномиям.

Использование абстракций, идеализаций всегда означает "отлет" от реальности (идеальная прямая, мнимые числа, бесконечно удаленные точки и так далее), но все дело в том, что теория с идеальными элементами должна быть построена таким образом, чтобы всегда имелся "обратный путь" к реальным предложениям. Для Гильберта это означает, что допускаемые идеализации не привносят ничего нового в наше знание относительно подлинных объектов математики. Идеальные элементы можно вводить в теорию лишь в том случае, если те соотношения, которые выявляются в ней после расширения для прежних объектов при исключении идеальных образов, верны в старой области[22] . Другими словами, идеальные элементы принимаются, если все то, что можно сделать с их помощью, можно сделать и без них. Они вводятся лишь для простоты, удобства, единообразия применяемых методов.

Д.Гильберт в своей установке на элиминируемость идеальных образований не требует явной определимости всех терминов или переводимости всех идеальных предложений в реальные (или того, чтобы все дополнительные правила вывода были производными); его установка сводится к устранимости идеальных предложений, более широко — к устранимости некоторых способов образования выражений и способов умозаключений из контекста всей теории. Понятие устранимости в смысле Гильберта хорошо иллюстрируется процедурой устранимости неопределенных дескрипций (ε-термов).

Понятия явной определимости терминов, контекстуальной определимости, обозначений, устранимости, по Гильберту, по существу устанавливают отношение между теорией, не содержащей определенных терминов, способов образования выражений и правил заключения, и теорией, их содержащей.

Пусть **S** и Φ — системы с обычным синтаксисом, и пусть **LS** — язык системы **S** — является расширением языка **LФ** сис-

[22] Тем же. С.376.

темы **Φ**. Будем говорить, что между **S** и **Φ** имеет место отношение устранимости (в смысле Гильберта), если для любой формулы *A* языка **LΦ** из того, что она доказуема в **S**, следует, что она доказуема в **Φ**.

Если между **S** и **Φ** имеет место отношение устранимости, мы будем говорить, что **S** является консервативным расширением **Φ**.

Теорема I. Если между **S** и **Φ** имеет место отношение устранимости, и если **Φ** непротиворечива, то **S** непротиворечива. Другими словами, каждое консервативное расширение непротиворечивой системы непротиворечиво.

Действительно, допустим, что **S** противоречива. Тогда для всякой формулы, в том числе для формулы $A \in$ **LΦ**, доказуема формула *A* и доказуема формула $\sim A$. Из условия теоремы и того, что $A \in$ **LΦ** (*A* не содержит идеальных терминов) и $\vdash_{S} A$, получаем $\vdash_{\Phi} A$. Поскольку $A \in$ **LΦ**, то и $\sim A \in$ **LΦ**, отсюда из условия теоремы и того, что $\vdash_{S} \sim A$, получаем, что $\vdash_{\Phi} \sim A$. Таким образом, система **Φ** противоречива. Но мы приняли, что система предложений **Φ** непротиворечива. Следовательно, наше допущение неверно, и имеет место, что система **S** непротиворечива.

Теорема II. Если система **Φ** полна и является подсистемой **S** (то есть если $\vdash_{\Phi} A$, то $\vdash_{S} A$) и **S** непротиворечива, то между **S** и **Φ** имеет место отношение устранимости. Иными словами, всякое непротиворечивое расширение полной системы консервативно.

Полноту и непротиворечивость мы понимаем в синтаксическом смысле. Мы будем говорить, что система **Φ** полна, если для формулы *A* доказуема она сама либо ее отрицание. Теорема верна и при таком определении полноты. Естественно, большинство систем неполно в этом смысле. При обычном понятии синтаксической полноты — для любой замкнутой формулы доказуема она или ее отрицание — устранимость **S** относительно **Φ** проходит соответственно для замкнутых формул.

Допустим, что формула *A* языка **LΦ** доказуема в **S**. Согласно условию, **S** непротиворечива, следовательно, неверно, что $\vdash_{S} \sim A$. Поскольку **Φ** — подсистема **S** и $\sim A$ не доказуема в **Φ**,

тогда в силу полноты системы **Φ**: $\vdash_{\Phi} A$. Таким образом, если формула языка **LΦ** доказуема в **S**, то она доказуема в **Φ**.

Сформулированная теорема верна, если под полнотой и непротиворечивостью системы иметь в виду семантическую полноту (система **Φ** полна, если истинная — относительно данной интерпретации *I* — формула языка **LΦ** доказуема в **Φ**) и семантическую непротиворечивость (система **Φ** непротиворечива, если всякая доказуемая формула **Φ** — истинная в *I*). Формула со свободными переменными истинна, если и только если истинен каждый ее подстановочный случай. Действительно, если формула языка **LΦ** доказуема в **S**, то она истинна и, в силу семантической полноты системы **Φ**, доказуема в **Φ**.

Объединяя результаты двух вышеприведенных теорем, получаем *теорему III*: Если система **Φ** полна и непротиворечива, то всякое расширение ее непротиворечиво тогда, когда оно консервативно.

Но будет ли верным утверждение теоремы II, если отбросить условие полноты системы **Φ**?

Очевидно, не будет. Не всякое непротиворечивое расширение **Φ** консервативно: не всегда, если **Φ**$\subseteq$**S** и **S** непротиворечива, то между **S** и **Φ** имеет место отношение устранимости.

Действительно, пусть $\mathbf{S}_k$ — классическая арифметика первого порядка, *A* — неразрешимое предложение системы $\mathbf{S}_k$. Расширим $\mathbf{S}_k$, присоединив в качестве аксиомы неразрешимое предложение *A*, и получим систему $\mathbf{S}_k'$. $\mathbf{LS}_k = \mathbf{LS}_k'$. $\mathbf{LS}_k$ # $\mathbf{LS}_k'$, система $\mathbf{LS}_k'$ непротиворечива. Однако отношения устранимости между $\mathbf{S}_k'$ и $\mathbf{S}_k$ нет: $\vdash_{S_k'} A$, но $\nvdash_{S_k} A$, где *A* — неразрешимое предложение.

Аналогично, пусть **Φ** — множество доказуемых утверждений рекурсивной арифметики, **S** — множество истинных формул арифметики (необязательно замкнутых). **Φ S** (для всякой формулы *A* если $A \in$ **Φ**, то $A \in$ **S**), система **S** непротиворечива, но **S** не является консервативным расширением **Φ**, так как в языке **LΦ** может быть сформулировано истинное предложение *B* (например, утверждение о непротиворечивости Φ). $B \in \mathbf{S}$ и недоказуемо в $\mathbf{\Phi}$.

Таким образом, доказательство непротиворечивости системы $\mathbf{S}$ может отождествляться с доказательством устранимости относительно $\mathbf{\Phi}$ в том и только в том случае, если система $\mathbf{\Phi}$ полна и непротиворечива.

Гильберт не только считал, что финитная система мышления полна и содержится в достаточно богатой системе, например, арифметике первого порядка, но и полагал, что все рассуждения о непротиворечивости (и тем самым об элиминируемости) можно осуществить финитными средствами.

Суть метода идеальных элементов, предлагаемого Гильбертом, как раз и состоит в том, что к системе реальных предложений присоединяют идеальные образы, высказывания о фикциях, без них невозможно сохранить классическую математику в полном объеме.

Обоснованием правомерности привлечения идеальных образований служит доказательство непротиворечивости системы с идеальными предложениями, ибо при тех предпосылках, которые Гильберт принимал относительно $\mathbf{\Phi}$, доказательство непротиворечивости эквивалентно доказательству устранимости идеальных элементов. "...С применением метода идеальных элементов связано одно условие, одно-единственное, но необходимое — это доказательство непротиворечивости. Именно расширение посредством приобщения идеальных элементов дозволено только в том случае, когда при этом в старой более узкой области не возникает никаких противоречий, то есть если отношения, которые выявляются для старых образов при исключении идеальных образов, всегда остаются справедливыми в старой области"[23]. Иными словами, Гильберт явно отождествляет доказательство непротиворечивости расширения $\mathbf{S}$ относительно $\mathbf{\Phi}$ с доказательством отношения устранимости между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Phi}$.

[23] *Гильберт Д.* Указ.соч. С.376.

Гильберт стремился оправдать использование фикций в языке самой математики, перенося весь комплекс проблем, связанных с обоснованием, в метаматематику. Другое дело, что само доказательство непротиворечивости Гильберт полагал осуществить в рамках финитной системы мышления, не прибегая к фикциям, то есть рассматривая его как задачу, которая "принципиально лежит в области наглядного рассмотрения".

В связи со всем вышесказанным нам представляется, что финитная установка Д.Гильберта может быть оценена как весьма своеобразный номинализм, Гильберт хочет сохранить "канторовский рай" в полном объеме, разрешить пользоваться актуально бесконечным в доказательствах. Однако для этого все идеальные образования и утверждения, выводящие за пределы высказываний о конкретных конфигурациях, реализуемых в пространстве и времени, следует рассматривать как фикции, используемые лишь для удобства выводов. В отличие от обычного номинализма, требующего элиминируемости идеализаций из всех контекстов ("способы речи") Гильберт требует устранимости идеализаций в рамках всей теории. Его номинализм более глубок и гибок.

Если под обоснованием теории $\mathbf{S}$ с идеальными элементами понимать доказательство того, что она является консервативным расширением некоторой системы реальных предложений $\mathbf{\Phi}$, то возникает вопрос, какого рода системы можно рассматривать как системы реальных предложений математики.

Пусть $\mathbf{\Phi}_1$ есть множество бескванторных предложений арифметики, тогда $\mathbf{\Phi}_1$ полна, непротиворечива и является подсистемой формальной арифметики $\mathbf{S}_K$. В этом случае из непротиворечивости $\mathbf{S}_K$ следует, что $\mathbf{S}_K$ есть консервативное расширение. Но система $\mathbf{\Phi}_1$ бедна, в языке этой системы не может быть сформулировано, в частности, утверждение о непротиворечивости $\mathbf{\Phi}_1$.

Пусть $\mathbf{\Phi}_2$ есть множество доказуемых формул рекурсивной арифметики (например, арифметики Скулема или арифметики Гудстейна), тогда $\mathbf{\Phi}_2$ является подсистемой формальной арифметики. В рамках этой системы может быть сформулировано утверждение о непротиворечивости формальной арифметики (и вообще любой стандартной формальной системы). Но система рекурсивной арифметики неполна. В таком случае доказательство непротиворечивости формальной арифметики не обеспечивает доказательства того, что формальная арифметика является консервативным расширением финитной системы $\mathbf{\Phi}_2$.

Известно, что вопрос о непротиворечивости классической арифметики может быть сведен к вопросу непротиворечивости интуиционистской арифметики. При этом само доказательство относительной непротиворечивости осуществляется финитными средствами, например, с помощью погружающих операций, предложенных Гёделем. Интуиционистская арифметика $\mathbf{S}_\mathrm{I}$ является подсистемой классической арифметики $\mathbf{S}_\mathrm{K}$, но $\mathbf{S}_\mathrm{K}$ не является консервативным расширением $\mathbf{S}_\mathrm{J}$. Действительно, пусть B — предложение, не разрешимое в $\mathbf{S}_\mathrm{K}$, но в $\mathbf{S}_\mathrm{K}$ доказуема $B\vee\sim B$. В интуиционистской системе $\mathbf{S}_\mathrm{J}$ для любого высказывания A высказывание $A \vee\sim A$ доказуемо тогда и только тогда, если $\vdash_{S_J} A$ или $\vdash_{S_J} \sim A$. Отсюда, в $\mathbf{S}_\mathrm{K}$ доказуемо предложение $B\vee\sim B$, недоказуемое в $\mathbf{S}_\mathrm{J}$, то есть $\mathbf{S}_\mathrm{K}$ не является консервативным расширением $\mathbf{S}_\mathrm{J}$.

Таким образом, из того, что одна система непротиворечива относительно своей подсистемы, еще не следует, что она является ее консервативным расширением. Отметим также, что если под обоснованием теории $\mathbf{S}$ понимать доказательство того, что она является консервативным расширением некоторой подтеории $\mathbf{\Phi}$, для неполных систем (а именно они, достаточно богатые системы, нуждаются в обосновании) в качестве $\mathbf{\Phi}$ нельзя брать интуиционистскую подсистему.

Как было показано выше, вопрос о непротиворечивости (непротиворечивости $\mathbf{S}$ относительно $\mathbf{\Phi}$) эквивалентен вопросу об устранимости между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Phi}$ при допущении, что подсистема полна. Однако мы видим, что определение системы реальных предложений математики представляет значительные трудности. Целесообразно задачу обоснования переформулировать следующим образом: вместо требования устранимости между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Phi}$ выдвигается условие, согласно которому каждая доказуемая формула $\mathbf{S}$, сформулированная на языке финитной системы $\mathbf{\Phi}$, то есть бескванторная формула, представленная в терминах вычислимых предикатов и функций, эффективно истинна.

Формируя задачу в терминах консервативного расширения относительно $\mathbf{\Phi}$, мы ставим эту задачу в рамках синтаксического подхода и должны определить систему $\mathbf{\Phi}$. Вторая формулировка предполагает только характеристику языка $\mathcal{P}$ и его семантику с эффективным понятием истинности.

До сих пор мы отвлекались от того, какими средствами могут быть доказаны непротиворечивость некоторой системы, непротиворечивость одной системы относительно другой, отношение устранимости между системами. Пусть $\mathbf{\Phi}$ есть финитная система мышления, например, рекурсивная арифметика. В языке финитной системы могут быть сформулированы утверждения о непротиворечивости стандартных формальных систем, относительной непротиворечивости и устранимости. Если рассматриваемая система $\mathbf{S}$ содержит $\mathbf{\Phi}$ как подсистему, то, естественно, средствами финитной системы $\mathbf{\Phi}$ нельзя доказать непротиворечивость $\mathbf{S}$. Однако непротиворечивость одной системы относительно другой может быть доказана средствами финитной системы мышления. Если вместо непротиворечивости системы $\mathbf{S}$ доказывать непротиворечивость $\mathbf{S}$ относительно другой, более приемлемой системы $\mathbf{\Phi}$, то нет необходимости выходить за рамки финитной установки Гильберта. Какими средствами может быть доказано отношение устранимости между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Phi}$? Заметим, что сформулированная выше теорема I, согласно которой устранимость имплицирует непротиворечивость, доказывается применением очень простых средств. Допустим, что отношение устранимости между $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Phi}$ доказывается внутри системы $\mathbf{M}$, тогда если $\mathbf{M}$ содержит средства, используемые при доказательстве первой теоремы, что является очень слабым требованием, то в $\mathbf{M}$ доказуема непротиворечивость $\mathbf{S}$. Но согласно второй теореме Гёделя, если в $\mathbf{M}$ доказуема непротиворечивость **S**, то **M** не содержится в **S**. Отсюда, если в **M** доказуема теорема об устранимости между **S** и **Ф**, то **M** не содержится в **S**. Иными словами, гильбертовская программа не проходит, если предполагается, что устранимость между **S**, системой с идеальными элементами, и системой реальных предложений **Ф**(**Ф**⊂**S**) доказывается финитными средствами, формализуемыми в **S**.

Выдвигая свою программу Д.Гильберт фактически стремился, по удачному выражению Крайзела, изъять задачу обоснования математики из-под опеки философии и решить ее чисто математическими средствами.

Результаты Гёделя действительно показывают, что обоснование математики невозможно в рамках финитной математики Д.Гильберта. С философской точки зрения это свидетельствует о невозможности обоснования всей математики в рамках последовательного номинализма. Вся осмысленная математика несводима к высказываниям о конкретных, обозримых, реализуемых в пространстве объектах. Выход за пределы финитной установки Гильберта означает, что для обоснования математики приходится использовать абстрактные понятия, "существенно принадлежащие второй и более высокой ступени"[24], относящиеся не к свойствам и отношениям конкретных объектов, таких, как формальные доказательства, числовые знаки или формулы, а к "мысленным образам".

Трансфинитная индукция до ε_0, с помощью которой доказывается непротиворечивость арифметики, "является способом умозаключения, согласованным с принципом конструктивного понимания бесконечности"[25]. Однако истинность рекурсии до ε_0, нельзя сделать непосредственно наглядно очевидной. К типу абстрактных понятий относится и понятие вычислимой функции конечного типа над натуральными числами, используемое Гёделем в доказательстве непротиворечивости теории чисел[26]. Такого типа абстрактные понятия нельзя рассматривать как "абстрактные бессмыслицы", "способы речи", устранимые из контекста всей теории. В процессе доказательства мы существенно опираемся на их смысл и содержание.

[24] *Гёдель К.* Об одном еще нв использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.

[25] *Генцен Г.* Новое доказательство непротиворечивости // Математическая теория логического вывода. М., 1967, С.189.

Таким образом, философский аспект проблемы обоснования математики вновь восстанавливает свое значение.

Если обоснование математики, в силу теоремы Гёделя, требует выхода за пределы финитной гильбертовской математики, то сама поставленная Д.Гильбертом задача обоснования вводимых реализаций остается полностью в силе. В большинстве случаев оказывается, что доказательство непротиворечивости теории чисел является по существу доказательством устранимости идеальных элементов, предполагавших абстракцию актуальной бесконечности.

Нам представляется, что расширение финитной установки Гильберта совершается по двум линиям. Или существенно расширяется понятие системы реальных предложений математики, системы **Ф**. Под системой **Ф** понимается некоторая "приемлемая" система мышления, предложения которой рассматриваются как осмысленные предложения математики, несмотря на то, что в них могут использоваться абстрактные понятия, относящиеся к идеальным конструкциям "второй и более высокой ступени". Каждому предложению (формуле) *A* системы **S**, содержащей "неоправданные" идеальные сущности, не допускаемые нами способы идеализации, некоторым эффективным способом сопоставляется предложение (формула) *A*' — дается метод его построения, — принадлежащее системе **Ф** (в качестве **Ф** может, например, выступать рассматриваемая Гёделем система **T** функционалов конечного типа). **Ф** при таком подходе может и не быть подсистемой **S** и **LФ** может не принадлежать языку **LS**. Доказательство непротиворечивости классической теории чисел сводится к доказательству непротиворечивости T.

[26] *Гёдель К.* Указ.соч.

Указанный путь обоснования математических теорий предполагает, в общем, что можно выделить некоторую совокупность формализмов, таких, что содержание их свободно от вызывающих сомнения элементов теоретико-множественного подхода и непротиворечивость их доказывается на основании выражаемого ими содержания (опираясь существенно на смысл используемых абстрактных понятий). Затем непротиворечивость исследуемого формализма сводится уже финитными в гильбертовском смысле средствами к непротиворечивости формализмов этой совокупности. О возможности такого пути обоснования математики пишет П.С.Новиков[27].

При указанном подходе речь не идет об отношении устранимости между **S** и **Ф**, **S** не является консервативным расширением **Ф**, невозможно говорить об эквивалентности доказательства непротиворечивости доказательству устранимости в смысле Гильберта. Однако гёделевское доказательство непротиворечивости теории чисел включает в определенном смысле доказательство устранимости неконструктивных идеальных сущностей. Формуле A системы **Z** с идеальными элементами эффективным образом сопоставляется формула B системы **T**, содержащая соответствующие функционалы конечного типа Q, таким образом, что если в **Z** доказуема A, то B доказуема в **T**. Доказуемость формулы с идеальными элементами сводится к доказуемости соответствующего осмысленного утверждения расширенной финитной системы **T** (содержащей абстрактные понятия функционалов конечного типа).

Другой путь доказательства непротиворечивости теории чисел связан с существенным расширением той системы, средствами которой доказывается непротиворечивость **S**. И хотя доказательство ведется в рамках средств, свободных от сомнительных элементов теоретико-множественной концепции, использование метода трансфинитной индукции до ε_0 означает отказ от финитной, номиналистической установки гильбертовской теории доказательства.

[27] См.: *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М., 1973, С.35.

Пусть **Ф** — множество реальных предложений арифметики. Понятие "наличия редукционного предписания" выступает у Генцена как формальный аналог понятия истинности. Высказывания "в себе" у Генцена, как и идеальные предложения у Гильберта, не имеют смысла и не являются действительными предложениями математики. Это высказывания об "абстрактных бессмыслицах". Допустимость подобных абстракций в **S** обосновывается доказательством того, что для каждой формулы A, если она доказуема в **S**, имеется редукционное предписание, то есть для нее имеется финитное истолкование. Это отнюдь не означает, что **S** есть консервативное расширение **Ф**, но это означает, что генценовское доказательство непротиворечивости обеспечивает элиминируемость идеальных элементов из контекста всей теории **S**, в том смысле, что каждое доказуемое утверждение **S** получает финитное истолкование (стоит только редуцировать его доказательство и само это утверждение автоматически редуцируется вместе с ним).

§3. Роль идеальных образов у Гильберта и Канта

Мне представляется, что проблема идеальных образов, допускаемых типов абстракций и идеализаций является глобальной, ключевой проблемой, позволяющей анализировать теоретическое знание и мышление. В постановке И.Канта основной вопрос состоит в том, что и насколько может быть познано рассудком и разумом независимо от всякого опыта, а не в том, как возможна сама способность мышления. Я полагаю, что именно такая, глобальная постановка проблемы оказывается ключевой и по сегодняшний день. Д.Гильберт также во главу угла по существу ставит вопрос о том вкладе, который вносят в наше познание, с одной стороны, опыт, а с другой — мышление[28]. Иными словами, вопрос

[28] "Сегодня мы намерены... обсудить старую философскую проблему, а именно вызвавший множество споров вопрос о том, какой вклад в наше познание вносят, с одной стороны,

Указанный путь обоснования математических теорий предполагает, в общем, что можно выделить некоторую совокупность формализмов, таких, что содержание их свободно от вызывающих сомнения элементов теоретико-множественного подхода и непротиворечивость их доказывается на основании выражаемого ими содержания (опираясь существенно на смысл используемых абстрактных понятий). Затем непротиворечивость исследуемого формализма сводится уже финитными в гильбертовском смысле средствами к непротиворечивости формализмов этой совокупности. О возможности такого пути обоснования математики пишет П.С.Новиков[27].

При указанном подходе речь не идет об отношении устранимости между **S** и **Ф**, **S** не является консервативным расширением **Ф**, невозможно говорить об эквивалентности доказательства непротиворечивости доказательству устранимости в смысле Гильберта. Однако гёделевское доказательство непротиворечивости теории чисел включает в определенном смысле доказательство устранимости неконструктивных идеальных сущностей. Формуле *A* системы **Z** с идеальными элементами эффективным образом сопоставляется формула *B* системы **T**, содержащая соответствующие функционалы конечного типа *Q*, таким образом, что если в **Z** доказуема *A*, то *B* доказуема в **T**. Доказуемость формулы с идеальными элементами сводится к доказуемости соответствующего осмысленного утверждения расширенной финитной системы **T** (содержащей абстрактные понятия функционалов конечного типа).

Другой путь доказательства непротиворечивости теории чисел связан с существенным расширением той системы, средствами которой доказывается непротиворечивость **S**. И хотя доказательство ведется в рамках средств, свободных от сомнительных элементов теоретико-множественной концепции, использование метода трансфинитной индукции до ε_0 означает отказ от финитной, номиналистической установки гильбертовской теории доказательства.

[27] См.: *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М., 1973, С.35.

Пусть **Ф** — множество реальных предложений арифметики. Понятие "наличия редукционного предписания" выступает у Генцена как формальный аналог понятия истинности. Высказывания "в себе" у Генцена, как и идеальные предложения у Гильберта, не имеют смысла и не являются действительными предложениями математики. Это высказывания об "абстрактных бессмыслицах". Допустимость подобных абстракций в **S** обосновывается доказательством того, что для каждой формулы *A*, если она доказуема в **S**, имеется редукционное предписание, то есть для нее имеется финитное истолкование. Это отнюдь не означает, что **S** есть консервативное расширение **Ф**, но это означает, что генценовское доказательство непротиворечивости обеспечивает элиминируемость идеальных элементов из контекста всей теории **S**, в том смысле, что каждое доказуемое утверждение **S** получает финитное истолкование (стоит только редуцировать его доказательство и само это утверждение автоматически редуцируется вместе с ним).

§3. Роль идеальных образов у Гильберта и Канта

Мне представляется, что проблема идеальных образов, допускаемых типов абстракций и идеализаций является глобальной, ключевой проблемой, позволяющей анализировать теоретическое знание и мышление. В постановке И.Канта основной вопрос состоит в том, что и насколько может быть познано рассудком и разумом независимо от всякого опыта, а не в том, как возможна сама способность мышления. Я полагаю, что именно такая, глобальная постановка проблемы оказывается ключевой и по сегодняшний день. Д.Гильберт также во главу угла по существу ставит вопрос о том вкладе, который вносят в наше познание, с одной стороны, опыт, а с другой — мышление[28]. Иными словами, вопрос

[28] "Сегодня мы намерены... обсудить старую философскую проблему, а именно вызвавший множество споров вопрос о том, какой вклад в наше познание вносят, с одной стороны,

заключается в том, какие идеализации и идеальные объекты являются порождениями нашего разума и рассудка, каков их статус в научных теориях и, наконец, каково их отношение к опытному знанию?

И Гильберт, и Кант поднимают вопросы о том, каковы методы введения идеальных образов, что им соответствует, каковы условия, сфера и границы их применения. Проблема заключается в правомерности введения понятий, выходящих за границы всякого возможного опыта, за границы объектов любого возможного созерцания.

Для Канта все наше знание в конечном счете относится к возможным созерцаниям, так как только посредством них дается предмет. Тогда условием применения чисто рассудочного знания, имеющего свой источник только в рассудке, служит то, что предметы нам даны в созерцании, к которому это знание может быть приложено. "В самом деле, без созерцания всякое наше знание лишено объектов и остается в таком случае совершенно пустым"[29] .

Для Гильберта также стоит проблема "гармонии между бытием и мышлением". Бесконечное, в смысле актуально бесконечного, нигде не реализуется, его нет в природе, и поэтому оно недопустимо как основа нашего разумного мышления. "Что касается понятия "бесконечное", мы должны уяснить, что "бесконечное" не имеет созерцательного значения и *без дальнейшего исследования вообще не имеет никакого смысла*" (выделено мной. — *Е.С.*). И далее: "Мы видели: бесконечное нигде не реализуется, его нет в природе, недопустимо оно без соответствующих предосторожностей и как основание нашего мышления"[30] . Однако в основе классической математики лежат такие

мышление, а с другой — опыт. Этот старый вопрос вполне правомерен, потому что ответить на него, в сущности, означает установить, к какому роду относится все наше естественнонаучное познание вообще и в каком смысле все наше знание, которое мы накапливаем в наших естественнонаучных исследованиях, истинно" (*Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. Калининград. 1990. С.117.

29 *Кант И.* Соч. М., 1964. Т.3. С.162.

30 *Гильберт Д.* Указ.соч. С.120.

понятия как множество натуральных чисел, комплексные числа, трансфинитные числа, бесконечно удаленная точка и т.д., таким образом, мы используем понятия, образованные разумом, но выходящие за пределы всякого опыта. С одной стороны, сохранение классической математики предполагает такого рода понятия ("Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор"), с другой — "реакция не заставила себя ждать". "Надо согласиться, — пишет Гильберт, — что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадокса... невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений... приводят к нелепостям. Где же иметь надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?"[31] .

Кант также говорит о заманчивости и соблазнительности пользоваться одними чистыми рассудочными знаниями и основоположениями, выходя при этом даже за пределы опыта, однако н этом случае "рассудок рискует посредством пустых умствований применять формальные принципы чистого рассудка как материал и судить без различия о предметах, которые нам не даны и даже, может быть, никоим образом не могут быть даны"[32] . Кант отмечет "склонность разума к расширению за узкие границы возможного опыта". Там, "где ни эмпирическое, ни чистое созерцание не держат разум в видимых рамках... он крайне нуждается в дисциплине, которая укрощала бы его склонность к расширению за узкие границы возможного опыта и удерживала бы его от крайностей и заблуждений, так что вся философия чистого разума имеет дело только с этой негативной пользой"[33] . Именно склонность к подобному расширению ведет соответственно к появлению в чистом разуме "целой системы иллюзий и фикций, связанных друг с другом и объединенных принципами".

31 *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л., 1948. С.348, С.349.

32 *Кант И.* Указ.соч. С.162.

33 Собственно, вопрос о подобном расширении и условиях выхода за границы возможного опыта составляет суть метода идеальных элементов (см. §2 этой главы).

В силу этого "требуется совершенно особое, и при этом негативное, законодательство, создающее... из принципов разума и предмета его чистого применения как бы *систему предосторожностей и самопроверки* (выделено мной. — *Е.С.*)"[34]. Таким образом, стоит проблема статуса вводимых идей, идеальных объектов, проблема правомерности их использования в познании.

Что касается математики и ее метода, Кант отмечает, что сами "мастера математического искусства" вряд ли философствовали по поводу своей математики, так как это трудное дело. "Откуда же получаются понятия, которыми они занимаются... — этот вопрос вовсе не беспокоит их, и вообще им кажется бесполезным исследовать происхождение чистых рассудочных понятий..."[35]. Однако именно математика являет, с точки зрения Канта, блестящий пример чистого разума, "удачно расширяющегося самопроизвольно, без помощи опыта". Последнее отнюдь не означает, что чистый разум и в иной сфере может столь же удачно и основательно расшириться в своем трансцендентальном применении, как это ему удается в математике, и применить тот же метод достижения аподиктической достоверности, что и в математике. Вопрос стоит о надеждах и возможностях чистого разума "проникнуть за пределы опыта в заманчивые области интеллектуального"[36].

Фреге и Дедекинд стремились к тому, чтобы такие основные понятия математики, как понятие конечного числа, *не опирались на наглядные представления*, а определялись бы в чисто логических терминах, однако при этом существенно использовалось понятие бесконечного множества. "Фреге и Дедекинд, сделавшие очень много для обоснования математики, оба, независимо друг от друга, применили актуальную бесконечность для того, чтобы обосновать арифметику независимо от всякого наглядного представления и опыта, на чистой логике..."[37]. Отказ от обращения к опыту, к наглядному созерцанию (в любом

[34] *Кант И.* Указ. соч. С.598, 599.
[35] Там же. С.608.
[36] Там же. С.609.
[37] *Гильберт Д.* Основания геометрии. С.346.

смысле) при обосновании аподиктического математического знания чреват при этом подходе умножением сущностей, ничем не ограничиваемым введением идеальных объектов (соответственно и таких, как множество всех множеств или множество всех нормальных множеств и т.д.).

Нам хотелось бы подчеркнуть (ниже мы остановимся на этом подробнее), что Д.Гильберт в своей программе обоснования математического знания существенно опирается на идеи и подход И.Канта. "Уже Кант учил — и это составляет существенную часть его учения, — что математика обладает *не зависящим от всякой логики устойчивым содержанием*, и поэтому она никогда не может быть обоснована только с помощью логики, вследствие чего, между прочим, стремления Дедекинда и Фреге должны были потерпеть крушение (выделено мной. — *Е.С.*)"[38]. И хотя Кант и Гильберт понимают логику по-разному, по нашему мнению, именно от Канта берет Гильберт идею обоснования математики независимо от логики.

На наш взгляд, существенно выделить два аспекта в этом вопросе. Во-первых, Кант подчеркивает, что математические истины не могут быть получены *на основе только анализа математических понятий* — в таком случае все математические положения носили бы аналитический характер, не расширяли бы наше знание за пределы того, что уже дано в дефинициях. Если нам дано понятие треугольника, то сколько мы ни будем размышлять над этим понятием, мы не добудем ничего нового. Мы можем лишь расчленить это понятие, выделить составляющие понятия, но при этом не откроем новых свойств, которые не входят в содержание этих понятий. Одно дело, согласно Канту, выявить, что мы мыслим в понятии треугольника (это дело дефиниции треугольника), другое — "выйти за пределы этого понятия к свойствам, которые не заключаются а нем, но все же принадлежат к нему"[39]. Таким образом обосновывал Кант невозможность получения математических истин дискур-

[38] Там же. С.350-351.
[39] *Кант И.* Указ.соч. С.603.

сивным путем (хотя, естественно, некоторые математические утверждения являются аналитическими).

Но существует иной аспект в проблеме соотношения логики и математики. Речь может идти не о сведении математических истин к чисто логическим, а о более широкой проблеме соотношения логики и математики. Зависит ли, например, логика от универсума рассмотрения, от определенных онтологических предпосылок относительно объектов рассмотрения? Собственно, этот вопрос стоит в центре исследований Д.Гильбертом сферы логического. И хотя имеется существенное расхождение в трактовке общей логики у Канта и Гильберта, в решении вопроса об условиях и границах применения общей логики Гильберт существеннейшим образом опирается на кантовское понимание природы математического знания. В противоположность логицизму, Гильберт не только полагает, что математика не может быть обоснована с помощью логики, но наоборот, "кое-что уже дано в нашем представлении в качестве *предварительного условия для применения логических выводов и для выполнения логических операций: определенные внелогические конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления*" (выделено мной. — *Е.С.*). И далее: "для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью во всех частях; их свойства, их отличие, их следование, расположение одного из них наряду с другим даются непосредственно наглядно, одновременно с самими объектами... Это — та *основная философская установка*, которую я считаю *обязательной как для математики, так и для всякого научного мышления*, понимания и общения и *без которой совершенно невозможна умственная деятельность*" (выделено мной. — *Е.С.*)[40].

Таким образом, необходимым условием применения содержательных логических выводов для Гильберта является наличие конкретных, четко различимых объектов наглядного созерцания. Но не получится ли в таком случае, что арифметические законы, числовые соотношения относятся просто к вещам,

[40] *Гильберт Д.* Основания геометрии. С.351.

объектам наглядного созерцания и в этом плане содержательные математические утверждения приобретают характер утверждений об определенного рода эмпирических объектах? Тем более, что сам Гильберт пишет: "В частности, в математике *предметом нашего рассмотрения являются конкретные знаки сами по себе*, облик которых, согласно нашей установке, непосредственно ясен и может быть впоследствии узнаваем" (выделено мной. — *Е.С.*)[41]. Не получается ли, таким образом, что математика есть просто наука о знаках и комбинациях знаков и даже не о том, что за ними стоит. Уже при переходе от содержательной теории чисел к алгебраическим исчислениям мы обращаемся, согласно Гильберту, к буквенным выражениям как самостоятельным образам (мы отвлекаемся от их содержания). Вместо содержательных сообщений выступают тогда последовательности символов — формулы, а содержательные теоретико-числовые доказательства заменяются внешними действиями с формулами по определенным правилам. "Если мы этот взгляд обобщим, то математика сведется к совокупности формул, во-первых, таких, которым соответствуют содержательные сообщения конечных высказываний... и, во-вторых, других формул, которые сами по себе никакого значения не имеют и которые являются *идеальными образцами нашей теории*" (выделено мной. — *Е.С.*)[42].

На деле подход Гильберта, его трактовка природы математического знания, математических объектов, на наш взгляд, могут быть поняты только сквозь призму кантовской концепции чистого созерцания и принципиального разграничения объектов чистого и эмпирического созерцаний.

Обычно суть гильбертовской программы видят в том, чтобы построить математику формальным образом — представить ее в виде исчисления — и затем доказать непротиворечивость полу-

[41] Там же. С.351.

[42] Там же. С.357. И далее: "Так Как идеальные высказывания, именно формулы, сами по себе не имеют значения, поскольку они не выражают конечных утверждений, то логические операции над ними не могут производиться содержательно..." Соответственно содержательные логические операции также репрезентируются формально — заменяются действиями с символами по соответствующим правилам. Формулы логического исчисления также сами по себе не имеют никакого содержательного значения и суть идеальные высказывания.

ченной аксиоматической системы. Конечно, доказательство непротиворечивости построенной теории является необходимым и весьма желательным условием. Но можно ли это рассматривать как обоснование математики, как обоснование законности ее положений? Как отмечалось выше (2), суть подхода Гильберта мы видим в обосновании вводимых идеализаций, "идеальных образов", теории, а не в доказательстве непротиворечивости самом по себе. Поэтому метод Гильберта — это "метод идеальных элементов", по собственному его признанию. Гильберт стремится сохранить всю классическую математику в полном объеме — включая канторовскую теорию множеств (весь "канторовский рай"), обычную, неурезанную классическую логику — и в то же время обеспечить непротиворечивость теории.

С точки зрения Гильберта, дело не а законах и правилах обычной классической логики, а ***в соблюдении условий, предпосылок ее применения.*** Закон исключенного третьего, полагает Гильберт, не повинен ни в малейшей степени в возникновении известных парадоксов теории множеств; парадоксы возникают потому, что пользуются "недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий". Последнее напоминает кантовские размышления относительно непрочной, зыбкой почвы трансцендентальных понятий и связанной с этим задачи определения точным образом границ чистого разума в его трансцендентальном применении.

Согласно Гильберту, содержательное логическое мышление нас "обманывало только тогда, когда мы принимали *произвольные абстрактные способы образования понятий*; мы в этом случае как раз недозволенно применяли содержательные выводы, т.е. мы, очевидно, не обратили внимания на предпосылки, необходимые для применения логического вывода" (выделено мной. — *Е.С.*)[43].

В силу сказанного, Гильберт подразделяет все высказывания математики на реальные и идеальные. Только реальные предложения математики, как отмечалось выше (см. §2), имеют самостоятельную содержательную интерпретацию. Такого рода

[43] Там же. С.350.

высказывания, будучи содержательными сообщениями об *объектах наглядного созерцания*, могут оцениваться как истинные или ложные.

Стремление сохранить классическую математику во всем объеме означает, что мы не может отказаться от обычных простых законов классической логики, но тогда мы должны к реальным высказываниям ***присоединять идеальные высказывания, не являющиеся содержательными сообщениями***, так как им ничто не соответствует в действительности, и не столько в том смысле, что в действительности нет объектов или совокупностей с указуемыми свойствами, но и в том смысле, что такого рода объекты и не могут в принципе существовать, не могут быть построены в рамках абстракции потенциальной осуществимости. Тем самым это — высказывания об "идеальных образах нашей теории" и, не являясь содержательными сообщениями об объектах теории, они не могут оцениваться как истинные или ложные соответственно. Само возникновение такого рода высказываний связано, как отмечалось, с введением понятий, выходящих за границы всякого опыта, за границы объектов любого возможного созерцания (таковы, например, понятия бесконечно удаленной точки и бесконечно удаленной прямой в проективной геометрии, комплексно-мнимых величин в алгебре и др.).

Что же представляют собой подлинные объекты математики, элементарной теории чисел, например? К какого рода объектам, иными словами, относятся содержательные сообщения теории? Чем являются эти "конкретные объекты наглядного созерцания"? Ответить на эти вопросы можно, с нашей точки зрения, только в ключе кантовской идеи схематизма чистого созерцания. Дело в том, что конечные числа трактуются у Гильберта — в отличие от классического теоретико-множественного подхода — не как свойства (или классы) множеств, а как конкретные объекты, результаты содержательно-наглядных конструкций. Так, в теории чисел мы имеем знаки: I, II, III, IIII,... Каждый такой числовой знак можно распознать в отличие от любого знака, благодаря тому, что в нем за I всегда следует I и ничто иное в него не входит. Дан метод конструирования такого рода объектов — некоторое точным образом описанное, содержательное правило построения. Эти числовые символы и являются объектом нашего рассмотрения (в элементарной теории чисел Гильберта). Но сами по себе эти символы не имеют никакого самостоятельного значения, они ничего не обозначают. Они — объекты содержательно-наглядных конструкций и только. Можно ввести знаки "2" и "3" как сокращенные записи числовых знаков II и III соответственно. Тогда "3 > 2" — пример реального предложения, содержательного сообщения, что числовой знак (объект) III следует за числовым знаком (объектом) II. Что же, таким образом, представляют собой объекты элементарной теории чисел? Это, естественно, не свойства (или классы) классов, а объекты наглядного созерцания, конструируемые по *определенному правилу* (правилам), по *определенной* схеме. Отметим здесь два момента: объекты математики, во-первых, конструктивные объекты (в строгом смысле слова) и, во-вторых, объекты наглядного созерцания. Возвращаемся опять к вопросу: не трактуется ли в таком случае элементарная теория чисел как наука, изучающая определенного рода "вещи", предметы и их соотношения, то есть как своего рода "эмпирическая" наука?

Однако суть дела в том, что гильбертовские объекты теории чисел — не просто материальные образования. Они являются ***знаковой репрезентацией определенных конструирующих операций и их результатов*** (например, последовательного повторения однородного действия во времени). В гильбертовском подходе, по крайней мере в теории чисел, реализуется, на наш взгляд, как раз центральная кантовская идея, что познание в математике не есть "познание разумом посредством понятий", но есть познание "посредством конструирования понятий". Но, согласно Канту, конструировать понятие — значит показать априори соответствующее ему созерцание. "Следовательно, — пишет Кант, — для конструирования понятия требуется ***не эмпирическое созерцание***, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие"[44]. Точно так же гильбертовские числовые знаки I, II и т.д. как эмпирические созерцания представляют собой единичные объекты, но, связанные с процессом конструирования понятия конечного числа, они должны репрезентировать общее — "общезначимость" — для всех возможных вещей (созерцаний), подпадающих под конструируемое понятие. Конструируется мыслимая вещь (предмет в чистом созерцании, по Канту), соответствующая данному понятию, затем выбирается определенная репрезентация конструируемых величин, например, на бумаге, и тогда уже в виде единичных фигур, знаков — объектов обычного эмпирического созерцания.

"Так, я конструирую, — пишет Кант, — треугольник, показывая предмет, соответствующий этому понятию, или при помощи одного лишь воображения в чистом созерцании, или ***вслед за этим также на бумаге в эмпирическом созерцании***, но и в том и в другом случае совершенно не заимствуя для этого образцов ни из какого опыта" (выделено мной. — *Е.С.*)[45].

Точно такую же функцию выполняют гильбертовские числовые знаки — I, II, III,... — поэтому они "сами по себе не имеют никакого значения" (не обозначают, например, некоторый идеальный объект — число); в этом плане они сами выступают как объекты нашего мышления, эмпирические и наглядные при этом. Но тогда понятно, почему Гильберт, с одной стороны, характеризует как ***данные в представлении*** "определенные внелогические, конкретные объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве непосредственных переживаний", с другой стороны, говорит, что свойства этих объектов, их различие, расположение и т.д. ***даются наглядно***". Единичные, эмпирические вещи потому репрезентируют общее, "общезначимое", что они фактически кодируют "общие прави-

[44] *Кант И.* Указ.соч. С.600.
[45] Там же.

ла", "действия по конструированию понятия". У Гильберта: "В основу наших исследований мы сначала кладем мыслимую вещь I (единицу). Соединение этой вещи самой с собой по два, по три или по нескольку раз, как-то: II, III, IIII, мы будем называть комбинацией вещи I с самой собой; точно также любые комбинации этих комбинаций..."[46]

Предмет, соответствующий конструируемому понятию, априори дан в чистом созерцании, но его репрезентация "вслед за этим на бумаге" есть уже эмпирический объект, данный в наглядном созерцании. Именно в этом смысле числовые знаки выступают объектами рассмотрения в математике, они — лишь способ репрезентации в единичном, конкретном, эмпирическом созерцании процессов, связанных с конструированием понятий в математике. "Единичная нарисованная фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, — пишет далее Кант, — так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только действие по конструированию понятия..."

Именно таким путем удается избежать и того нежелательного обращения к эмпирии, к практическому подтверждению при обосновании математических истин, которое Фреге и Дедекинд пытались устранить обращением к логике и анализу дефиниций математических терминов.

При кантовском подходе к обоснованию математического знания речь идет не о том, что мы начинаем с конкретных предметов исследования, обобщая их в понятии, подводя эти предметы под данное понятие на основании объективно присущих им общих признаков, наоборот, мы априори имеем схему, "механизм", посредством которого мы конструируем предмет понятия.

Мы выходим за рамки тех свойств, которые заложены в дефиниции, например, треугольника, присоединяя в чистом созерцании — точно так же, как мы это делаем в эмпирическом созерцании — только те свойства и соотношения, которые относятся "к схеме треугольника вообще, стало быть, к его понятию". В то же время "схема" не есть образ, картина предмета понятия, она есть правило, общий метод репрезентации соответствующего понятию образа общих условий конструирования, должна быть приложима также и к объекту конструируемого понятия". Тем самым достигается универсальность ("общезначимость") полученных математических истин, с одной стороны, и обеспечивается их аподиктическая достоверность при условии расширения математического знания — с другой.

[46] *Гильберт Д.* Основания геометрии. С.325. См.также ниже: "...а положенная а основу мыслимая вещь I будет называться простой вещью".

В основе объяснения аподиктического и в то же время конструктивного характера действительного математического знания — и здесь одно как раз связано с другим — лежит именно кантовская идея схематизма нашего рассудка в отношении явлений. Понятию о треугольнике вообще не соответствовал бы никакой образ треугольника, согласно Канту. В основе наших чистых чувственных понятий рассудка "лежат не образы предметов, а схемы". "Схема же чистого рассудочного понятия есть нечто такое, что нельзя привести к какому-то образу"[47]. Дело в том, что рассматриваемые понятия рассудка относятся не к предметам опыта и не к образам этих предметов (например, образам треугольника, величины и т.д.), а к соответствующей схеме, то есть общему способу, посредством которого строится соответствующий понятию образ. Схему ни в коем случае нельзя понимать буквально, как схему предмета понятия, повторяющую, рисующую его, пусть обобщенно, в отвлечении от каких-то сторон и связей (это была бы "картинная" трактовка чистого созерцания!). Таким образом, в основе математики, в основе ее действительных понятий лежат не образы предметов, а схемы, правила конструирования мыслимых, воображаемых объектов, соответствующих понятиям. Не из анализа понятия (треугольника, например) извлекаем мы соответствующие объекты математики, а из схемы, правил конструирования соответствующего образа (даже если бы в мире не существовало ни одного треугольника). Математическое знание не есть тем са-

[47] *Кант И.* Указ.соч. С.223.

мым область эмпирически данного. Это скорее всего знание не о том, что дано, а о возможном, конструируемом согласно определенным "схемам", правилам. Другое дело — вопрос о рамках такого конструирования. Именно кантовский схематизм чистого созерцания позволяет преодолевать эмпиризм в трактовке математического знания, не прибегая ни к логике как основанию математического знания, ни к анализу понятий (или терминов)[48].

"Так, если я полагаю пять точек одну за другой, то это образ числа пять, если же я мыслю только число вообще, безразлично, будет ли это пять или сто, то такое мышление есть скорее представление о методе (каким представляют в одном образе множество, например, тысячу) сообразно некоторому понятию, чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием. Это представление об общем способе, каким воображение доставляет понятию образ, я называю схемой этого понятия"[49]. Хотелось бы здесь отметить особый характер кантовского априоризма в истолковании необходимо математического знания (синтетические суждения априори). Априорность понимается в особом смысле — как общие условия, алгоритм конструирования объектов в соответствии с правилами и сообразно понятию.

Далее, "схема", не будучи образом предмета понятия, опосредует в то же время связь между понятием и наглядным представлением (но не эмпирическим, данным наблюдением).

Интересно отметить, что согласно Канту, математика конструирует величины не только "как это делается в геометрии, но и величину как таковую (quantitas), как это делается в алгебре", но при таком конструировании мы "совершенно отвлекаемся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины". Именно в таком случае, с нашей точки зрения, особо зримо, что сам метод познания посредством конструирования понятий никак не опирается на какие-то свойства подпадающих под понятие объектов. И здесь, чтобы представить в созерцании "все операции, производящие и изменяющие величину", необходим специальный символизм. Надо выбрать определенные обозначения "для всех конструирований величин вообще (чисел)" — каковыми выступают операции сложения, вычитания, извлечения корня и т.д. — и все эти операции с величинами изобразить в созерцании — соответственно определенным общим правилам — действиями с соответствующими им знаками, и "таким образом с помощью *символической конструкции*, так же, как геометрия с помощью остенсивной, или геометрической, конструкции (самих предметов)", алгебра достигает того, чего "дискурсивное познание посредством одних понятий никогда достигнуть не может"[50]. Именно эта идея использования специальных символических конструкций для изображения" в созерцании мысленных конструирований" получила свое развитие в формализме Гильберта. В целом, *именно идея схематизма нашего рассудка* является ключом к пониманию Гильбертом подлинного математического знания, реальных предложений.

Однако, как отмечал Гильберт, даже элементарная математика "уже не остается на точке зрения наглядной теории чисел". Уже элементарная математика не ограничивается "содержательными сообщениями конечных высказываний" и наряду с реальными включает идеальные высказывания, предполагающие введение в рассмотрение "идеальных элементов", "идеальных образов" теории, то есть объектов, которые не могут быть даны ни в эмпирическом, ни в чистом созерцании. В этом плане метод идеальных элементов Гильберта как бы предполагает выход математического знания за рамки познания посредством

---

[48] Не из наблюдения за множествами, совокупностями предметов, например парами объектов, извлекаем мы истинность утверждения, что 2+2=4, сколь бы регулярно мы ни обнаруживали это в опыте.

По Б.Расселу, это и не априорное знание о мире. Но в чем же основа тогда такого рода истин? "Это на самом деле просто словесное знание. "3" означает "2+1", а "4" означает "3+1". Отсюда следует (хотя доказательство и длинное), что "4" означает то же, что "2+2". Таким образом, математическое знание перестало быть таинственным (См.: *Рассел Б.* История западной философии. И., 1959. с.839).

[49] *Кант И.* Указ.соч. С.222-223.

[50] *Кант И.* Указ.соч, С.603.

конструирования понятий. Это было бы действительно так, однако, с нашей точки зрения, все дело в том, каков статус, придаваемый Гильбертом этим "идеальным образам".

Гильберт четко определяет обязательное условие, с которым связывается введение идеальных элементов, — доказательство *элиминируемости их из контекста всей теории* (см. §2 этой главы). Расширение сферы математического "посредством приобщения идеальных элементов дозволено только в том случае, когда при этом *в старой более узкой области* не возникает никаких противоречий, т.е. если соотношения, которые выявляются *для старых образов при исключении идеальных образов*, всегда остаются справедливыми в этой старой области" (выделено мной. — *Е.С.*)[51]. Идеальные элементы вводятся лишь для простоты, удобства и единообразия применяемых методов.

Представляется, что, только обращаясь к Канту, можно уяснить идейную, философскую установку метода идеальных элементов. "Бесконечное нигде не реализуется, — пишет Гильберт, — его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления... Роль, которая остается бесконечному, — это только роль идеи, если, согласно Канту, под идеей подразумевать понятие, образованное разумом, которое выходит за пределы всякого опыта и посредством которого конкретное дополняется а смысле целостности..."[52]. Именно такая трактовка статуса идеальных элементов определяет суть метода, предлагаемого Гильбертом.

Идеями Кант называет чистые *понятия* разума, "предмет которых *не может* быть дан ни в каком опыте"[53]. Такими понятиями, являющимися "только идеями", выступают, например, понятия "Мир в целом", "причина всех причин", "величина мира" и т.д. Если мы обратимся к сфере чистых идей, то здесь мы имеем дело не с природой или вообще с какими-то данными объектами, а только с понятиями, имеющими свой

[51] *Гильберт Д.* Основания геометрии. С.376.
[52] Там же. С.364.
[53] *Кант И.* Пролегомены. М.-Л., 1934. С.216.

источник исключительно в "нашем разуме", — имеем дело с *только* мысленными сущностями. Высказывания о такого рода сущностях — как и гильбертовские "идеальные высказывания" – фактически не могут (без противоречия) оцениваться как истинные или ложные. "Если я теперь спрашиваю о величине мира в пространстве и во времени, то для всех моих понятий одинаково невозможно признать мир бесконечным или конечным. Ибо ни то, ни другое не может содержаться в опыте, так как опыт невозможен и относительно *бесконечного* пространства или бесконечного протекшего времени и относительно *ограничения* мира пустым пространством или предшествующим пустым временем; это все только идеи"[54]. Здесь уже заложен источник антиномий чистого разума.

Напомним, что Г.Фреге в качестве исходных, базисных понятий взял понятия функции и предмета. При этом предмет Фреге понимает очень широко — это любой объект рассмотрения, любой объект, о котором нечто может утверждаться. Таким образом, предметами выступают и мейнонговские объекты, вроде золотой горы, круглого квадрата, множества, множества всех множеств и т.д. Именно такая широкая трактовка предметной области у Г.Фреге приводит, как известно, к возникновению парадоксов. Для Канта и Гильберта быть мыслимым объектом (мыслимой сущностью) еще не означает быть включенным в качестве предмета, выступать в качестве объекта научного знания.

Кант во главу угла ставит разграничение познавательных способностей (различение "познаний совершенно разного рода"), соответственно идет разграничение понятий, относящихся к этим различным родам познания и ставится задача выявления источников этих понятий. Так, Кант разграничивает чистые понятия разума (идеи) и категории (чистые рассудочные понятия) как "познания совершенно разного рода, происхождения и употребления". Все чисто *рассудочные познания* отличаются той особенностью, что их понятия направлены на пред-

[54] Там же. С.236.

меты возможного опыта, а "их основоположения опытом подтверждаются"[55]. Какой бы абстрактный характер ни носили эти понятия, к каким бы идеализированным объектам ни относились, они направлены на возможный опыт. Что касается трансцендентных познаний, то их *идеи* никогда не встречаются в опыте и их положения никогда не могут быть ни подтверждены, ни опровергнуты опытом[56].

Для разума как познавательной способности характерно стремление к полноте, целостности и завершенности картины познания, и это вполне правомерное стремление. Однако разум, "подражая рассудку", стремится представить эту полноту как особый *предмет*. Разум хочет видеть абсолютное, безусловное воплощенным в одном предмете. Так возникает целая система иллюзий и фикций. В познании мы имеем, например, бесконечную последовательность причин и следствий, мы можем двигаться вдоль этой бесконечной цепи, но разум склонен представить ее как особый объект, склонен — выходя за пределы всякого возможного опыта — представить бесконечность как нечто завершенное. Так порождаются такие "мысленные сущности" (только мысленные), как бесконечно удаленная точка, причина всех причин, мир в целом и т.д. собственно аналогичные основания для порождения мысленных сущностей, "идеальных элементов", усматривает Д.Гильберт. "Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность *непосредственного узрения* (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность на самом деле *вовсе не была нам дана*, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса"[57].

Применение идеальных образов *выводит рассудок за его собственные пределы*. Нельзя безоговорочно переносить принципы и методы рассудка, оправданные применительно к объектам возможного опыта, на "запредельные объекты". И у Канта и у Гильберта обычная логика не является источником парадоксов, дело в используемых понятиях. Так, анализируя две первые антиномии, Кант показывает, что в основе их лежит пустое понятие и этим объясняется, почему в случае обеих антиномий тезис и антитезис *оба ложны*. "Ибо логический признак *невозможности данного понятия* состоит именно в том, что при его предположении два противоречивых положения будут одновременно ложны, и следовательно — так как между ними не мыслимо третье, — данным понятием не будет выражаться *совсем ничего*"[58].

Однако ни Кант, ни Гильберт не отбрасывают такого рода идеальные образы. Почему? Введение такого рода понятий — необходимый момент познавательной деятельности. В чем же их роль? "Хотя мы и должны сказать о трансцендентальных понятиях разума, что *они суть только идеи*, тем не менее нам ни в коем случае нельзя считать их излишними и пустячными. В самом деле, хотя с помощью их и нельзя определить ни один объект, тем не менее они в сущности и незаметно служат рассудку каноном его широкого и общего применения; правда, с помощью идей он познает только те предметы, которые познал бы на основе своих понятий (т.е. они не выводят за пределы "старой области", — ср. с гильбертовской идеей элиминируемости. — *Е.С.*), но все же они направляют его лучше и еще дальше в этом его познании"[59].

Кант рассматривает идеи разума как эвристические, регулятивные принципы. Их использование приводит нашу рассудочную деятельность к ясности, полноте и синтетическому единству. Основной вопрос действительно есть вопрос достижения единства, целостности и системности нашего знания. Это как раз то, что не дано в опыте и не принадлежит в принципе опыту. Тут как раз сказывается регулятивная функция идей,

[55] Там же. С.217.
[56] См.: Там же.
[57] Цит. по: *Клини С.* Введение в метаматематику. М., 1957. С.55.

[58] *Кант И.* Пролегомены. С.235.
[59] *Кант И.* Соч. Т.6. С.360.

позволяющая охватывать опыт в его целостности, но сами полнота, целостность, а также системность не принадлежат самому опыту, не извлекаются из него. Именно этот аспект выделяет И.Кант. Рассматриваемое единство есть единство познания, а не единство познаваемого объекта, отсюда — регулятивная роль трансцендентальных идей, определяющих "систематическое единство" рассудочной деятельности. "...Хотя абсолютная целостность опыта и невозможна, однако только идея целостности познания может вообще *доставить нашему познанию род единства*, именно единство *системы*, без которого оно есть нечто бессвязное и негодное для высшей цели... *я* разумею здесь не только практическую, но и высшую умозрительную цель разума (выделено мной. — *Е.С.*)[60] . Аналогично расценивает роль "идеальных образов" (идеальных элементов) Д.Гильберт; они выполняют функцию кантовских идей. Согласно Гильберту, "гениальный метод идеальных элементов," широко и плодотворно используемый в математике — да и не только в математике, — служит определенным теоретическим целям. Он выполняет задачу сохранения единства и целостности системы, единообразия ее законов и в то же время не приносит ничего в сферу ее подлинных объектов. "Так же, как было введено $i = \sqrt{-1}$ для того, чтобы удержать законы алгебры в простейшем виде, например, теорему о существовании и числе корней уравнения; так же как произошло введение идеальных факторов, опять-таки для того, чтобы оставить в силе простейшие законы делимости для целых алгебраических чисел, когда мы, например, вводим общий идеальный делитель чисел 2 и $1 + \sqrt{-5}$, хотя в действительности таковой не существует; точно также и здесь к *конечным высказываниям мы должны присоединить идеальные высказывания* для того, чтобы удержать формально простые законы обычной аристотелевой логики"[61] . Таким образом, Гильберт гениально использует метод идеальных элементов с целью сохранения законов классической логики в полном объеме.

[60] *Кант И.* Пролегомены. С.248.
[61] *Гильберт Д.* Основания геометрии. С.356.

Возвращаясь к вопросу, поставленному в начале параграфа – чтó в нашем познании дается в опыте и чтó определяется мышлением, независимо от опыта, — отметим, что определенный свет на эту сложную проблему проливает именно анализ роли "идеальных образов" теории — идей разума, по Канту, идеальных элементов у Гильберта.

Трансцендентные понятия разума не являются, по Канту, врожденными идеями. В то же время они порождаются разумом в его стремлении, как отмечалось, достигнуть целостности, завершенности и системности познания и определяются этой целью. Они задают определенные принципы познавательной рассудочной деятельности. Будучи принципами систематизации знаний, они не извлекаются из содержания опыта и не направлены на объекты. Именно этот важнейший аспект использования идеальных объектов определяет возможность конструирования теоретических моделей мира, определяет принципиально иной подход к трактовке теоретического знания. Теоретическое познание, таким образом, не сводится к суммированию и обработке данных опыта. Это создает относительную независимость теоретических конструктов, возможность их "отрыва" от эмпирии.

В то же время такое мысленное конструирование не произвольно, но подчинено, как мы видим, строгим принципам и предполагает определенные "заградительные меры". Тем самым важнейший момент теоретической познавательной деятельности связан именно с активностью мыслящего субъекта, активностью мышления. И именно идеальные предложения играют особую роль в формировании теоретической картины мира. "Вейль замечает, — пишет Ст.Клини. — что в теоретической физике с опытом согласуются не отдельные утверждения, а вся теоретическая система в целом. В результате получается *не истинное описание того, что дано, а теоретическое, чисто символическое построение мира.* (Он также утверждает, что наш теоретический интерес не заключается *исключительно и даже преимущественно в "действительных предложениях"*, например в том, что данная стрелка находится возле такого-то деления на шкале, а скорее в идеальных предложениях, например, в предложении, что электрон является универсальным электрическим квантом)" (выделено мной. — *Е.С.*)[62] .

В случае теоретического конструирования мира, естественно, решающую роль играют не действительные, "реальные" предложения, а идеальные предложения, служащие "строительными лесами" в таком конструировании. И все же "глубокий философский вопрос состоит в том, какая "истина" или объективность соответствует этому теоретическому построению мира, далеко выходящему за пределы непосредственного опыта"[63] .

Встает еще один важнейший философский вопрос об источниках нашего знания. Мы не просто навязываем априорные схемы миру, но существует определенная сетка, идущая от концептуального аппарата и логики, определяющая принципы познавательной, систематизирующей деятельности. Здесь априоризм выступает в совершенно особом смысле. Речь идет не о признании существования еще и третьего источника знания, "помимо дедукции и опыта". Идея "схематизма" пронизывает не только познание посредством конструирования понятий, но ее аналог — и, конечно, в ином ключе — возникает при рассмотрении регулятивной роли чистых понятий разума. Априоризм в этом случае выступает как признание независимых от опыта условий теоретического конструирования.

Интересна оценка кантовского априоризма Д.Гильбертом, во главу угла ставившим идею гармонии бытия и мышления, не принимавшим никаких особых источников знания помимо опыта и дедукции. "Я допускаю, — пишет Гильберт, — что уже для каркаса теоретических структур требуются определенные априорные усмотрения и что нечто подобное лежит в основе осуществления нашего познания... и что даже при построении теории чисел нам приходится прибегать к определенным созерцательным представлениям a priori. Следовательно, всеобщая

[62] *Клини Ст.* Введение в математическую логику. С.57.
[63] *Клини Ст.* Указ.соч. С.58.

основополагающая мысль кантовой теории познания тем самым сохраняет свое значение, а именно следует согласится с существованием философской проблемы вышеуказанного созерцательного представления a priori и тем самым с необходимостью *исследовать условия возможности всякого понятийного познания* и одновременно всякого опыта. Я полагаю, что именно это, по существу имеет место в моих исследованиях принципов математики. A priori тем самым есть не более и не менее как полагание или выражение *определенных неизбежных предисловий мышления и опыта*. Но границу между тем, чем мы обладаем a priori, с одной стороны, и тем, для чего необходим опыт, с другой стороны, мы должны провести иначе, чем Кант; Кант сильно переоценил роль и объем априорного"[64] .

В рамках рассматриваемых вопросов коснемся определенных философских следствий, вытекающих из результатов Гёделя. В связи с расширением финитной установки Гильберта встает вопрос о трактовке действительных (реальных) предложений математики, о соотношении действительных объектов и "мысленных образов". Результаты Гёделя показали, что для доказательства непротиворечивости даже таких простых систем, как первопорядковая арифметика, необходимо выйти за рамки финитной системы мышления в смысле Гильберта. Это означает, что для доказательства непротиворечивости в метатеории нужны определенные абстрактные, то есть не наглядные, понятия, относящиеся не к конкретным объектам наглядного созерцания, а к мысленным образам. Иными словами, мы выходим за рамки чисто синтаксических рассмотрений, относящихся к чисто формальным объектам (см.§2 этой главы). Означает ли в таком случае расширение финитной установки Гильберта выход за рамки познания "посредством конструирования понятий"?

К.Гёдель, вслед за Бернайсом, различает в финитной установке два момента. Во-первых, конструктивный момент — наличие эффективного метода построения соответствующего понятию объекта. Во-вторых, "специфически финитистский эле-

[64] *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. Вып.15. С.122-123.

мент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания... были наглядными... Именно от второго требования приходится отказаться"[65] .

Таким образом, финитизм Гильберта — благодаря работам Г.Генцена и К.Гёделя — претерпевает изменения в том направлении, что приходится отказываться, по существу, от номиналистической установки — от требования "наглядной очевидности". С нашей точки зрения, это отказ от требования представить "общее in concreto (в единичном созерцании)" посредством остенсивных или знаковых конструкций. Но сохраняется Кантова идея, связанная со "схемой", — наличие общего способа, посредством которого строится объект, сообразно некоторому понятию. В то же время это все же отказ от идеи созерцательного характера математического знания, от понимания схемы "как правила синтеза воображений". Однако априорный, аподиктический характер математического знания ("аподиктическая достоверность") сохраняется, поскольку мы обращаемся к тем свойствам, которые относятся к схеме, определяются правилами конструирования объекта.

Ни для Канта, ни для логицизма не стояла задача обоснования самой логики. Однако работа по обоснованию математики показала, что в обосновании нуждается не только математика, но и сама логика. Мы уже видели, что принятие тех или иных законов логики коррелятивно принятию определенных допущений — онтологического и гносеологического порядка — относительно объектов рассмотрения.

§ 4. Семантика и вопросы обоснования логических систем

Если бы логические формы и законы являлись естественными, природными законами и формами психической деятельности людей или были бы априорно присущи человеческому уму, то проблема их обоснования, естественно, снималась бы. Не являются они и прямым, зеркальным отображением связей и отношений объектов реальности (у них нет прямых прообразов в действительности). Связи эти, как отмечалось во введении, носят идеальный характер и тем самым требуют обоснования. Не являются они также просто связями феноменов сознания, ибо это означало бы по существу возврат к определенной форме психологизма в логике; но главное — в таком случае невозможно обосновать связь с познаваемой реальностью в том плане, что выводы, основанные на этих законах и протекающие в данных формах, обеспечивают истинность заключений при истинности посылок. В каком же тогда смысле можно говорить об идеальном и в то же время объективном характере логических связей? Именно этот вопрос — на наш взгляд — составляет суть проблемы обоснования логического знания.

Как отмечалось, построение формальных, логистических систем составляет важную самостоятельную задачу. Однако на роль собственно логических систем могут претендовать только формальные системы, имеющие соответствующую семантическую интерпретацию. Таким образом, мы будем четко различать вопросы обоснования формальных, логистических систем (это, в конечном счете, вопросы доказательства адекватности этих систем относительно построенной семантики, то есть вопросы доказательства непротиворечивости и полноты) и вопросы обоснования определенных типов логик, определенных систем рассуждений.

Не существует абсолютных законов логики, которые не изменялись бы с изменением определенных предпосылок. Задача заключается как раз в том, чтобы вычленить те эпистемические и онтологические предпосылки, которые лежат в основе семантик того или другого типа. В то же время это и вопрос роли и необходимости абстрактных сущностей в семантическом анализе. Конечно, используемые в семантике средства, вводимые идеальные сущности нуждаются, в свою очередь, в обосновании. Однако первый шаг, который необходимо сделать, состоит в построении адекватной семантики и выявлении тех идеа-

[65] *Гёдель К.* Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.

лизаций, которые при этом допускаются. Обоснование их приемлемости — второй шаг. Его мы отчасти рассматривали в предыдущих двух параграфах.

С нашей точки зрения можно выделить два типа теоретико-познавательных предпосылок, от которых зависят логики. Во-первых, это предпосылки — назовем их *предпосылками онтологического характера*, — налагаемые на миры, на объекты универсума рассмотрения (например, "воображаемые миры" Васильева или реальные и реальные объекты у Гильберта). Во-вторых, это предпосылки, связанные с *концептуальным аппаратом познающего субъекта*: с принимаемыми понятиями истинности, ложности, логического следования, суждения, отрицания и т.д. Именно с предпосылками такого рода связано, на наш взгляд, включение в логику, в обоснование логических систем, субъекта познания.

В соответствии с указанными двумя типами теоретико-познавательных предпосылок нам представляется рациональным разграничить два типа законов логики. Мы не считаем, что все логические законы и структуры принадлежат одному и тому же уровню рассмотрения. Разграничение двух пластов теоретико-познавательных предпосылок семантики приводит к выделению *двух типов логических законов.*

Интересно отметить, что в России в логике еще в начале XX века наметилась идея разграничения логических законов на законы собственно логики и законы металогики. Идеи эти развивались русским логиком Н.А.Васильевым. Законы собственно логики Васильев трактовал как эмпирические в том смысле, что они зависят от объектов универсума рассмотрения. Согласно Васильеву, "мы можем мыслить другие миры, чем наш, в которых некоторые логические законы будут иными, чем в нашей логике"[66]. Так возникает "воображаемая логика", законы которой детерминируются допущением противоречивых объектов. В такой логике не действует, например, традиционный закон несовместимости двух контрадикторных суждений. В противоположность этим законам собственно логики законы мета-

[66] *Васильев Н.Н.* Логика и металогика // Логос, кн. первая и вторая. М., 1912-1913. С.57.

логики, связанные с понятиями истины, ложности, суждения и т.п., являются универсальными и неизменными. Так, одно и то же суждение не может быть одновременно истинным и ложным. Этот закон несовместимости истинности и ложности является *универсальным* законом. Допущение универсальных и неизменных законов логики базируется у Васильева фактически на идее неизменности познающего субъекта, его рациональных функций — способности суждения и вывода. "Прежде всего мы предполагаем неизменность познающего субъекта и его рациональных функций... Где этого нет, нет и логики, а, значит, логику нечего делать с этим предположением..."[67].

В отличие от Васильева, в четвертой главе (§4) развивалась идея, что и законы логики, связанные с концептуальным аппаратом познающего субъекта — с понятиями истинности, ложности, отрицания, следования и т.д., не являются неизменными и универсальными. Таким образом, нет единой, присущей субъекту универсальной логики. Коренным вопросом в таком случае становится вопрос, какого типа логические системы и каким образом зависят от такого рода познавательных предпосылок.

Никакие онтологические предпосылки относительно миров или объектов рассмотрения при таком подходе не принимаются. Изменяются только понятия истинности и ложности и соответственно варьируется понятие логического следования. Вводится — целый спектр отношений типа логического следования. *Независимость понятий истинности* и ложности определяет различные отношения между областями и антиобластями высказываний. Именно эти отношения, то есть в конечном счете отношения между истинностью и ложностью, определяют *типы семантик*. Так возникают нестандартные семантики возможных миров. Различные логические системы (система Хао Вана, двойственная система, система де Моргана, классические системы и др.) определяются различными отношениями между областями и антиобластями высказываний и различными отношениями логического следования.

[67] Там же.

Что касается онтологических предпосылок, то принятие онтологических допущений определенного рода также варьирует типы допустимых логических систем. Методы семантического анализа выражений языка, в том числе и предложений, позволяют выделять и различать определенные аспекты смысла и значения этих выражений. Тем самым в область семантических рассмотрений вводятся соответствующие идеализации. Так, если предложения рассматриваются как десигнативные выражения, как это делается в методе отношения именования, то им должны сопоставляться соответствующие референты. Л.Витгенштейн в "Трактате" не рассматривает предложения как обозначающие выражения. У предложений нет референтов. Только собственные имена замещают объекты. Связь имен с объектами, которые они именуют, чисто конвенциональная. Какова же связь предложения (элементарного) с соответствующим фактом? Связь здесь не конвенциональная. Каким же образом, впервые выслушивая предложение, мы понимаем, какое положение дел им утверждается? Согласно концепции Витгенштейна, атомарные предложения выступают как некоторые "логические картины", диаграммы элементарных положений вещей (фактов). Структура высказывания изображает, рисует атомарное положение вещей, и потому мы понимаем смысл нового высказывания — мы понимаем, что оно изображает. Именно таким путем осуществляется связь языка и мира: предложение как сложный знак-иероглиф рисует структуру положения дел, о котором оно говорит[68]. Указанная трактовка предложений — путь к построению ситуационных семантик.

Иной путь построения семантик определяет метод отношения именования. Если предложения рассматриваются как имена (десигнативные выражения), смыслы предложений, то есть выражаемые ими мысли, задают соответствующие положения дел. Но если абстрагироваться (полностью) от содержаний предложений, то задаваемые положения дел становятся "неразличимыми", о них можно сказать только одно — что они в мире реализуются или не реализуются. Отсутствие положения дел, задаваемого предложением, также расценивается как некоторый особый, "негативный факт (das Falsche). При таком подходе мы имеем дело только с двумя абстрактными фактами и они выступают в качестве референтов предложений, так что два предложения, например, "Волга впадает в Каспийское море" и "5 > 3", имеют один и тот же референт. От абстрактных фактов, референтов предложений, следует отличать предикаты "истинно" и "ложно", выражающие свойства наших высказываний.

[68] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1958. 3.143, 3.1431. Подробнее см. в §5 этой главы.

Введение таких особых абстрактных сущностей, как das Wahre (наличествующее положение дел) и das Falsche (отсутствующее положение дел) в качестве объектов универсума рассмотрения определяет классическую логику высказываний. Логические связки определяются как функции, задаваемые на множестве, состоящем из этих двух особых объектов. Абстрактные положения дел — das Wahre и das Falsche — могут трактоваться как факты, взаимосвязанные таким образом, что оба вместе они не могут приписываться предложению (принцип однозначности). Далее, поскольку отсутствие положения дел, задаваемого предложением, само трактуется как особое положение (das Falsche), каждое предложение, не обозначающее das Wahre, обозначает факт das Falsche и наоборот. Таким образом, каждое предложение обозначает по крайней мере один из этих фактов — предложения выступают как собственные имена, удовлетворяющие условиям непустоты и единственности.

Указанная трактовка значения атомарных предложений приводит к классическим описаниям состояний вида: $\{p,q\}$, $\{\bar{p},q\}$, $\{p,\bar{q}\}$, $\{\bar{p},\bar{q}\}$ — для двух предложений, где включение "p" означает наличие соответствующего p положения дел, а включение "p" — отсутствие такового. То же самое можно представить в иной записи: $\{p,q\}$, $\{q\}$, $\{p\}$, $\{\ \}$ соответственно.

Высказывание p оценивается как истинное: $p \in$ Ист, если и только если репрезентируемый им факт имеет место, т.е. p = das Wahre, и $p \notin$ Ист, т.е. $p \neq$ das Wahre, что равнозначно тому, что p есть das Falsche.

Если же факты das Wahre и das Falsche рассматривать как *независимо вводимые объекты*, тогда p (отсутствие положения дел p) не означает, что p = das Falsche. Предложению по-прежнему нельзя одновременно приписать два референта: das Wahre и das Falsche, однако возможно вводить противоречивые описания состояний типа $\{p, \overline{p}\}$ — миры, в которых одновременно задается и наличие, и отсутствие некоторого положения дел. Это возможно, например, для миров знания, веры и т.д.

Описания состояний $\{p\}$ и $\{p, \overline{q}\}$ теперь неравнозначны: включение "$\overline{q}$" в описание состояния означает, что положение дел q не имеет места, а невключение "$\overline{q}$" в описание этого не означает. Открывается возможность для *неполных описаний состояний* (относительно фиксированных фактов p, q, r...). Введение непротиворечивых и неполных описаний состояний означает отказ — по сравнению с классикой — от некоторых предварительных *предпосылок относительно миров* — от предпосылки их непротиворечивости и от полноты описаний. Включение p (или $\overline{p}$) в описание состояния означает, что соответствующее положение дел есть факт das Wahre (имеющее место). Возникает фактически двоякое истолкование отрицания истинности высказываний — $p \notin$Ист. Пусть α — фиксированное описание состояния, тогда:

1) $p \notin$Ист в α означает в одном случае просто, что $p \notin \alpha$, т.е. что $p \neq$das Wahre в α, но *не означает*, что $\overline{p}$=das Falsche, т.е. что $\overline{p} \in \alpha$ и

2) $\overline{p} \in \alpha$, то есть $\overline{p}$=das Wahre (отсутствие положения дел p — это то, что имеет место в α), — в другом.

Отсюда возможность двоякого истолкования логической связки отрицания — $\neg p$:1) $\neg p \in Ист \rightleftharpoons p \notin Ист$ и 2) $\neg p \in Ист \rightleftharpoons \overline{p} \in \alpha$.

Таким образом, различного типа трактовки референтов атомарных высказываний (абстрактных фактов) и их отношений дают основу для отличного от классической логики истолкования пропозициональных связок. Более того, пересматривается статус "универсальных" логических "законов". Например, в случае противоречивых описаний состояний имеет место: $(p \in Ист) \& (\neg p \in Ист)$, а в случае

неполных не действует закон исключенного третьего[69]. Таким путем, в зависимости от методов семантического истолкования значений предложений, возникает база для пропозициональных логик различного типа (например, релевантных).

Однако предложениям могут сопоставляться не только абстрактные факты das Wahre и das Falsche (истинностные значения фактически). Два различных предложения могут утверждать одно и то же положение дел, задавать одну и ту же ситуацию, ("Число планет > 4" и "Число планет >2^2"; "Греки победили персов под Платеями", "Персы были побеждены греками под Платеями" и т.д.). Если мы понимаем предложение, мы знаем, какое положение дел (ситуация) в нем утверждается, и можем сравнивать предложения в этом плане. Мы отождествляем предложения в этом аспекте — независимо от того, имеет место утверждаемая ситуация или не имеет. Выделение такого аспекта позволило Льюису ввести особый вид (модус) значения — *сигнификат* предложения[70].

Идейно *ситуационные семантики* и соответственно базирующиеся на них "не-фрегевские логики" восходят к философской концепции Л.Витгенштейна — миру как совокупности положений вещей (фактов), задаваемых атомарными высказываниями, логическому пространству как пространству существования или несуществования элементарных положений вещей (der Sachverhalt). Эти идеи получили развитие и реализацию в работах Б.Вольневича и Р.Сушко[71]. При построении "не-фрегевской логики" предложения не рассматриваются как десигнативные выражения и нет смысла говорить об их референтах. Предложениям не сопоставляются такие объекты как das Wahre и das Falsche, и предложения рассматриваются как тождественные не в случае тождества их истинностных значений, а в слу-

---

[69] См. *Войшвилло Е.К.* Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Сб.трудов 2-го Советско-финского коллоквиума. Ин-т философии АН СССР. Релевантные логики и теория следования. М., 1979. Именно Е.К.Войшвилло принадлежит идея нестандартных описаний состояний и построения на их базе семантики релевантных систем.

[70] См.: *Lewis C.* The modes of meaning. Ed. Linsky. Semantics and the philosophy of language. Urbana, 1932.

[71] *Suszko R.* Ontology in the tractatus of L.Wittgenstein. Notre Dame J.Form.Log. 1968. v.9. p.7-33.

чае тождества утверждаемых в них *ситуаций* (положений дел). Тем самым построенная на этой базе пропозициональная логика представляет собой фактически разновидность интенсиональной логики. Но и в"логике ситуаций", какою является, например, логика Р.Сушко, особую роль играют *абстрактные ситуации* (естественно, иные, чем у Фреге): универсальная, необходимая ситуация, охватывающая все логическое пространство, и пустая, невозможная, ситуация. Ситуации, задаваемые пропозициональными тавтологиями, отождествляются, "склеиваются", рождая единую абстрактную, необходимую ситуацию; аналогично "склеиваются" ситуации, задаваемые логическими противоречиями. Выделение особых ситуаций, отвечающих тавтологиям и противоречиям, а также особой связки тождества (ситуаций) позволяет вводить по определению модальные понятия[72].

Дальнейший анализ значений предложений приводит к включению в семантику таких абстрактных сущностей, объектов, как "возможные миры" и интенсионалы предложений. В классике понимать предложение — значит знать, какое положение дел должно иметь место, чтобы предложение было истинным. Это понимание условий истинности верно, если предложение рассматривается изолированно, в отрыве от контекста, от условий, задаваемых другими высказываниями, а это очень сильное допущение. Однако на определенном уровне исследования правила истинности в семантике могут учитывать и этот аспект. Истинностная оценка предложения может включать те условия, при которых реализуется предложение. Появляется понятие *области предложения*. Понятие "область предложения" — это еще одно уточнение смыслового аспекта высказываний. Ситуации, задаваемые предложениями, могут быть нетождественными (так, даже ситуации, соответствующие предложениям "1 < 5" и "1 < 5", могут рассматриваться как нетождественные), но они таковы, что реализуются в одних и тех

[72] *Suszko R.* Indentity Connective and Modality // Studia Logica. 1971. t.27. См. также гл.IV, §3 данной главы. В последние годы идеи ситуационной семантики, но на иной основе получили развитие в работах Дж.Барвайза и Дж.Перри (См.: *Барвайз Дж., Перри Дж.* Ситуации и установки. Философия, логика, язык. М., 1987. С.264-282.).

же условиях — "возможных мирах", временных точках, описаниях состояний. Именно в этом плане могут отождествляться предложения, и это общее составляет один из аспектов их содержания — так появляется понятие *интенсионала* (*интенсии*) предложения (см. гл IV, §3). Все тавтологии, естественно, L-эквивалентны; область этих предложений — множество всех описаний состояний (всех "возможных миров"), то есть универсальная область (все "логическое пространство" возможностей). Так, понятие "интенсионал тавтологии" (вводимое в семантиках "возможных миров") отвечает понятию необходимой и универсальной, идеальной ситуации, соответствующей тавтологиям в не-фрегевских логиках.

Понятие интенсионала вводится как определенный экспликат понятия смысла (содержания). Но что общего у предложений p и q, если они L-эквивалентны? Что значит "иметь один и тот же интенсионал"? Знаковая форма у такого рода высказываний может быть различной, информация, сообщаемая ими, также может различаться, только области совпадают. Это означает, что оба предложения выражают *одинаковую зависимость* утверждаемых ими фактов от положений дел, хода событий. Поэтому интенсионал (интенсия) предложения определяется еще как функция, область определения которой — "возможные миры" — K, а область значения — истинностные значения $\{t,f\}$; как отмечалось, ее называют *пропозициональным концептом.* Тождество интенсионалов ("пропозициональных концептов") — достаточное условие замены предложений в алетических *модальных* контекстах. Однако в общем случае выражения в неэкстенсиональных контекстах не могут заменяться ни на эквивалентные, ни на L-эквивалентные — с гарантией сохранения истинности.

Своеобразие интерпретации высказываний в семантиках "возможных миров" заключается в том, что модальные и интенсиональные высказывания не просто репрезентируют факты и положения дел действительного мира. Условия их истинности предполагают включение таких понятий, как возможные положения дел ("возможные миры"). Но как согласовать такую трактовку модальных утверждений с классической концепцией истинности как соответствия действительности? В свое время против классической концепции истинности выдвигалось возражение, что она не охватывает условий истинности высказываний о будущем, возможном, необходимом. Если действительность понимать просто как совокупность наличных фактов, то эти трудности непреодолимы. Однако действительность понимается не просто как совокупность наличных положений дел, она характеризуется и теми возможностями, которые в ней заложены. Эта фундаментальная идея находит в последние десятилетия своеобразную реализацию в логической семантике. Мы имеем в виду семантические модели, построенные в духе Крипке и Монтегю и служащие базой для модальных и интенсиональных логик (см. гл.IV). В этих семантиках "мир" не характеризуется совокупностью фактов (как в описаниях состояний). Для определения условий истинности высказываний с модальными, временными операторами нужна ссылка на миры, "достижимые" из данного. В такого рода семантиках при определении истинности, например, модального высказывания типа $\Box A$ в некотором фиксированном мире w_i принимаются во внимание не все возможные миры, заданные как то актуально — в духе Лейбница, — а все миры, возможные относительно w_i, "достижимые" из него — в терминологии Крипке. Таким образом, множество возможных миров рассматривается вместе с отношением возможности одного мира относительно другого, то есть вместе с отношением "достижимости".

Термину "возможные миры" Хинтикка по соображениям методологического характера предпочитает термин "альтернативные положения дел", "альтернативные пути развития событий". И в случае отношения достижимости, и в случае отношения альтернативности, совозможности, эти отношения естественно релятивизируются относительно предпосылок — законов логики, или законов природы, или принятых постулатов, норм и т.д. Но это неизменно приводит к идее, что модальности не абсолютны, а контекстно зависимы, релятивизированны. И именно это определяет в конечном счете свойства отношений достижимости или альтернативности. В реляционных семантиках эти свойства характеризуются лишь общим образом, выявляется лишь тип зависимости трактовки модальных высказываний от способов конструирования множеств возможных миров. Так, например, для построения реляционной семантики для модальной системы **S4** рассматриваются модельные структуры с рефлексивным и транзитивным отношением достижимости R. Очевидно, что интерпретация модальностей может быть конкретизирована, как это и рассматривалось в гл.IV. Понятие "возможный мир" — абстракция. Под возможными мирами могут, как мы видели, иметься в виду моменты времени, "точки соотнесения", разного типа положения дел, согласующиеся с установками, законами, постулатами и т.д.

Обращение к языкам с более богатыми выразительными возможностями, обогащение понятия истинного высказывания предполагают, как правило, введение в семантике все более сильных абстракций, все более сложных идеальных конструкций. Уже семантический анализ смысла и значения обычных высказываний предполагал, как отмечалось выше, включение в семантику наряду с экстенсиональными таких сущностей, как интенсионалы. Если U — множество индивидов, а K — множество возможных миров, то в семантиках типа Крипке и Монтегю одноместной предикатной константе в качестве интенсионала (интенсии) сопоставляется функция $(2)^K$; а индивидной константе — функция U^K (*индивидный концепт*), сопоставляющая каждому миру $w_i \in K$ объект из универсума U. На этом пути решается вопрос тождества (взаимозаменимости) составляющих в алетических модальных контекстах.

Если вообще в рассмотрение включаются модальные и иные интенсиональные контексты, вопросы семантического анализа усложняются. Интенсионал сложного выражения есть функция интенсионалов составляющих. Но какого рода сущности приписываются в качестве интенсий (интенсионалов) модальным операторам (типа "необходимо, что...", "знает, что..." и т.д.), а также интенсиональным предикатам? Иными словами, какого рода *абстрактные сущности* предполагает семантический анализ такого рода контекстов? Как указывалось в главе четвертой, Д.Скотт сопоставляет такого типа интенсиональным знакам *функции, определенные* не на экстенсионалах выражений, а на их *концептах*. Так, одноместным интенсиональным пропозициональным операторам приписывается в качестве значения *объект типа* $(2^K)^{(2^K)}$, то есть функция, сопоставляющая пропозициональным концептам пропозициональные концепты. При подходе Монтегю таким операторам сопоставляются отношения между объектами из K и 2^K, то есть объекты типа $2^{K \times 2^K}$ — подмножества множества своеобразных пар вида $<w_i,S>$, где $w_i \in K$, а S — *семейство миров* (т.е. область предложения). Смысл таких пар $<w,S>$: мирам сопоставляются их "окрестности" — положения дел, "связанные" с ними. Пусть G — отношение этого типа, то есть $G = 2^{K \times 2^K}$, тогда $w_i \models \Box p \rightleftharpoons w_i G S$, где $S = \{w | w \models p\}$.

Мы не только обращаемся к положению дел в данном мире или даже в возможных мирах, но мы *вводим классы положений дел, "сопряженных" с данным миром*, и рассматриваем функции и отношения, заданные на такого рода объектах. Таким образом, интенсиональные функторы и, аналогично, предикаты отличаются *типом сопоставленных им сущностей*. Это определяет особую логическую структуру интенсиональных контекстов, особый тип связи интенсиональных функторов (предикатов) с их аргументами (см. гл. IV, §4)[73]. Таким образом, условия истинности модальных и временных высказываний предполагают еще большую "перестройку" того, что понимается под положениями дел (ситуациями), сопоставляемыми высказываниям.

Еще более своеобразно меняется понятие ситуации, положений дел, сопоставляемых высказываниям, при переходе к

[73] См. также: *Смирнова Е.Д.* An Approach to the Semantics of Non-Extensional Context. Abstracts 6-th International Congress of Logic, Methodology and Philisophy of Science. Hanover, 1979.

первопорядковым семантикам. Семантики типа Крипке и Монтегю — второпорядковые. Под структурой в первопорядковых семантиках имеется в виду тройка $<K,R,\Pi>$, где K — непустое множество миров, R — бинарное отношение на K, в Π — непустое семейство подмножеств K. Выделение особого множества $\Pi \subseteq 2^K$, по объектам которого пробегают пропозициональные переменные, ставит вопрос, какого рода *сущности* (*ситуации*) сопоставляются в таком случае высказываниям. Предполагается, что множество Π необязательно совпадает с множеством всех подмножеств возможных миров 2^K. Второпорядковая структура $<K,R>$ в семантиках типа Крипке и Монтегю равнозначна первопорядковой структуре $<K,R,2^K>$. Значение выделения особого множества семейств возможных миров Π для логики очень существенно. Нетрудно усмотреть, что если формула A значима в структуре $<K,R>$, то она значима и в $<K,R,\Pi>$ для каждого Π. Обратное не имеет места. Томасон показывает, что первопорядковая семантика адекватна для всех возможных логик, и строит пример временной логики, для которой второпорядковая семантика не является адекватной.

Предполагается, что множество Π может выделяться некоторым разумным образом. Мы можем некоторым образом характеризовать семейства возможных миров, например, это могут быть те семейства возможных миров $S_1, ..., S_k$, в которые входит p, то есть $S_i = \{w | w \models p\}$ и $S_i = 2^K$ $(1<i<k)$, или, наоборот, которые исключают p, r и т.д. Множества таких семейств возможных миров $\{S_1,S_2,S_3\}$, $\{S_1,S_4\}$ и т.д. также выступают как определенного рода описания положений дел в мире: если предложение характеризуется множеством миров S_i, в которых оно истинно, то такие множества $S_1,..., S_k$ выступают как своеобразные *"ситуации", элементы описания состояния* h на новом уровне. *Описания на этом уровне* задаются не совокупностью фактов (положений дел), имеющих место в описываемом мире, то есть *не посредством высказываний*, а посредством *пропозициональных концептов*; различные наборы областей предложений (пропозициональных концептов) выступают в этих описаниях в

качестве *элементарных* "ситуаций". Пусть, например, h — множество таких семейств миров, в которые входит некоторый "стандартный", выделенный мир w_i (некоторый идеальный мир или, наоборот, мир действительный w^*), тогда получаем некоторый аналог аксиомы свертывания $\exists h \forall a (a \in h \equiv w_j \in a)$, где $h \subseteq 2^K$ и h объединяет такие семейства возможных миров, которые "совместимы" с выделенным миром (мирами) — миром знания, веры или иллюзий некоторого лица или действительным миром w^*.

Процесс познания не есть процесс прямого, зеркального отображения связей и отношений действительности. Объекты, лежащие в основе логических систем, логические связи и структуры не лежат на поверхности, не даны непосредственно. Мы видим, в каком смысле они действительно являются *идеальными* (и в то же время объективными). Мы не находим их в самой действительности, но они не есть и феномены, присущие самому сознанию, они — результат познавательной, активной, конструирующей деятельности. Выявление, как и порождение такого рода конструктов в семантике, анализ их правомерности и границ использования имеют фундаментальное значение для обоснования логики, позволяют вскрывать философские аспекты логики, ее неразрывную связь с теорией познания.

Первый шаг в обосновании логических систем состоит в построении адекватных семантик. Однако построение адекватных семантик для достаточно богатых логических систем ведет к умножению абстрактных сущностей в семантическом анализе. Кроме того, в доказательстве семантических утверждений используются очень сильные — во всяком случае нуждающиеся в обосновании — математические средства. Так, для доказательства теоремы о полноте первопорядкового исчисления предикатов относительно свойства общезначимости существенным образом используется лемма Цорна, эквивалентная аксиоме выбора. Не получается ли так, что семантически обосновывая правильные способы рассуждения, мы одну проблему заменяем более сложной? Тем более что из результатов Тарского вытекает, что для построения адекватной семантики достаточно богатого формализованного языка необходим язык, существенно более богатый, содержащий переменные более высокого порядка, чем объектный язык. Финитная установка Гильберта по существу поднимает тот же круг вопросов, связанных с теми идеальными сущностями, которые допускаются в метатеоретических построениях. Это старая проблема — четко сформулированная еще А.Черчем — о необходимости абстрактных сущностей в семантике. Это философская проблема роли и обоснования используемых идеальных конструктов, "идеальных образов", но теперь перенесенная в область семантических рассмотрений. Обоснование логических систем, логических норм и законов неизменно сталкивается с этой проблемой. Проблемой "платоновских сущностей", вновь и вновь возникающих — в разных обликах — в нашей познавательной деятельности.

В предыдущих параграфах мы проанализировали гильбертовскую программу обоснования математики и ее исторические судьбы. Какие следствия можно извлечь из работ по реализации программы Гильберта? Еще раз напомним, что Д.Гильберт предполагает, что реальные предложения являются вполне интерпретированными, имеющими ясную семантику. Обосновать математическую систему с реальными предложениями — это доказать, что она является консервативным расширением некоторой подсистемы реальных предложений.

Логика предикатов первого порядка содержит как реальные предложения — таковыми будут бескванторные предложения, так и идеальные — формулы с неограниченными кванторами. Можно ли доказать, что исчисление предикатов первого порядка является консервативным расширением бескванторной логики высказываний? Исчисление предикатов можно сформулировать в секвенциальной форме, все фигуры которой обладают свойством подформульности (кроме фигуры, называемой сечением). Всякая секвенция, доказуемая в этом исчислении, будет доказуема без использования сечения. Отсюда следует, что если бескванторная формула доказуема в исчислении предикатов, то она доказуема и средствами исчисления высказываний. Таким образом, исчисление предикатов является консервативным расширением исчисления высказываний. Доказательство допустимости сечения, как и остальные шаги, является финитным.

Указанный способ обоснования, скажем, первопорядковой логики, идет совершенно в духе первоначальной программы Д.Гильберта. Но этот способ обоснования оставляет некоторое чувство неудовлетворенности. Мы все же стремимся рассматривать утверждения с кванторами, по крайней мере некоторые предложения, не просто как вспомогательные утверждения, а как осмысленные утверждения.

Представители интуиционистского и конструктивного направлений в математике рассматривают квантифицированные утверждения как осмысленные. Но смысл кванторов совершенно иной. Существование понимается как возможность построения соответствующего объекта. Если принимать, что интуиционистское исчисление предикатов имеет в основе достаточно оправданную интуиционистскую семантику, то можно обосновать классическое исчисление предикатов, погрузив его в интуиционистское исчисление, тем самым классическим связкам и кванторам придается новый смысл. Более прямое обоснование классической логики с позиций конструктивной семантики было дано А.А.Марковым.

Означает ли ориентация на более конструктивную и операциональную семантику отказ от классических, теоретико-множественных разработок семантики? Нам представляется, что хотя теоретико-множественная семантика и оставляет необоснованными многие сильные допущения, но в ряде случаев она более проста, более мощна в своих технических возможностях и проливает новый свет даже на системы, ориентированные на нестандартную, свободную от теоретико-множественных реализаций семантику. Прекрасным примером тому может служить семантика возможных миров для интуиционистской логики.

§ 5. "Строительные леса" мира и логика. Необычный мир "Трактата" Л.Витгенштейна

Можно выделить два аспекта философских исследований. Одна линия связана с построением "картины мира" и направлена на мир. Вторая связана с выявлением границ познания и мышления. В Трактате Витгенштейна разрабатываются оба эти аспекта, более того, они тесно взаимосвязаны. Однако проблема возможностей и границ познания и мышления рассматривается сквозь призму языка и логики. И это не случайна. В Трактате, по существу, ставится задача, сходная с поставленной И.Кантом, — установить границы наших способностей познания. Философские исследования Витгенштейна идут именно в этом русле: что и как мы можем мыслить, каковы границы "моего мира", границы языка и логики?

Логика не выходит за границы мира, "границы мира являются также ее границами" (5.61). "Субъект не принадлежит миру, но он есть "граница мира" (5.632). Чем же определяется эта "граница мира"? Мы не можем мыслить нечто, выходящее за границы языка и логики, "границы моего языка означают границы моего мира" (5.6)[74]. Что же представляет собой в таком случае мир Трактата Витгенштейна? В каком смысле границы моего языка означают границы моего мира? И какую роль играет при этом логика? Не есть ли это своеобразная форма солипсизма и конвенционализма: язык, построенный, "следуя правилу", детерминирует мир познающего субъекта? Каким образом и в каком смысле язык своими структурами может определять мир? Весь этот комплекс вопросов неразрывным образом связывает язык, логику и онтологию. Глубинная связь логики и философии, роль логических структур в построении картины мира — вот ключ, на наш взгляд, к прочтению Трактата[75].

[74] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1957; *Wittgenstein L.* Tractatus Logico-philosophicus. L., 1963.

[75] Тем более что сам Виттенштейн пишет: "То, что в действительности подразумевает солипсизм, вполне правильно, только это не может быть сказано, а лишь показывает себя" (5.62).

Центральная проблема, решаемая в Трактате, — это проблема коррелятивности принимаемых методов анализа и "картины мира". В конечном счете это оказывается и вопросом пересмотра общей концепции логики.

Таким образом, цель Витгенштейна не в разработке философии языка, цель иная — построение "картины мира"; через исследование определенных формальных, логических свойств языка выявить метод конструирования модели мира. Речь по существу идет о логическом моделировании, построении логических моделей познаваемого.

В Трактате новацией выступает не просто изобразительная концепция языка, как это обычно отмечается, но и принимаемые методы логико-философских рассмотрений. Необычен и тот мир, который высвечивается сквозь призму проведенного в Трактате анализа. Мы постараемся показать, что хотя логическая нотация в Трактате в основном повторяет фреге-расселовскую, метод анализа, принимаемый в Трактате, весьма своеобразен и отличается от того метода, который восходит к Фреге и Расселу и в целом получил закрепление в современной логике, а также от иных методов логико-семантического анализа.

Не случайно Л.Витгенштейн базирует свой анализ на целом комплексе таких логико-семантических понятий, как "логическое пространство", "логическая форма" и "форма действительности", "логический образ", "логическая форма отображения".

Мы возвращаемся опять к вопросам: являются ли логические формы и законы законами и формами некой природной ментальной деятельности людей? Априорны они или апостериорны? Каково их отношение к миру, реальности? Может быть, практика употребления естественных языков (результаты "языковых игр") закрепляется фигурами логики?

Из всего вышесказанного естественно вырастает вопрос о статусе самой логики; является ли логика теорией? Тогда ее законы изучаются как законы иных теоретических наук, например физики. Или же она не является теорией, она — лишь способ познания, способ отображения мира и ее законы носят неэмпирический и априорный характер? Чем диктуется в таком случае этот априоризм? Общими условиями познавательной деятельности ума или же структурами языка ("единственного языка, который я понимаю")?

И все же разберемся, о какого рода языке идет речь в Трактате. Идет ли речь о свойствах и закономерностях обычных естественных языков как они функционируют в коммуникативной деятельности людей или же о неком "идеальном" языке, моделирующем определенные аспекты" естественного? Используемый символизм адресует нас к искусственным языкам логики, однако Витгенштейн подчеркивает, что речь идет о мире, соответствующем именно обычному естественному языку (5.62). Язык с необходимостью перестает действовать на своей демаркационной линии и позади нее может быть только молчание. То, чего нельзя помыслить, нельзя выразить в языке (3.031). В языке можно представить только мир, отвечающий законам логики. Нельзя представить в языке нечто, противоречащее логике. Такова взаимосвязь *языка* и *логики.* Все логическое уже закреплено в языке.

Необходимость, определяющая границы языка, носит у Витгенштейна абсолютный характер. Он выводит эту необходимость не из случайных черт, присущих тому или иному языку, а из существенной природы языка, которая может быть выделена в любом реальном языке. Из природы языка следует, что любой естественный язык может, например, анализироваться как язык, содержащий элементарные (атомарные) предложения, и эти предложения служат отправной точкой, исходя из которой и опираясь на внутреннюю структуру которых устанавливаются границы любого языка. Витгенштейн работает как бы в рамках структуры данного естественного языка (того "единственного языка, который понимаю я" (5.62)), пытается в принципе выявить границы любого языка. Таким образом, на деле речь идет об "идеальном" (идеализированном) языке. Поэтому-то Витгенштейн говорит о единственном (!) языке, "который понимаю я". Он — единственный потому, что он "идеальный", потому что он воспроизводит, моделирует общие принципы и структуры любого языка — рассматриваемого, конечно, в репрезентативном аспекте. Именно относительно такого, идеального языка можно ставить вопрос о "мире языка" вообще. Речь идет о языке как "сетке", способе репрезентации мира. В этом плане красноречиво сравнение "мира языка" с полем зрения глаза. Мы видим то, что находится в нашем поле зрения, но то, чего мы не видим, что в принципе не может попасть в поле зрения нашего глаза — это наш глаз. Имея дело только с тем, что лежит в поле зрения глаза, мы не можем знать, что это поле зрения нашего глаза. Чтобы сделать такое заключение мы должны выйти вовне, за границы этого поля зрения, — только тогда мы могли бы установить, что имеем дело с картиной, видимой, охватываемой именно глазом. "Не из чего в поле зрения нельзя заключить, что оно видится глазом" (5.633).

Аналогично, только выход за границы мира, определяемого языком, позволил бы выявить, что мы имеем дело с миром языка. "Нелогичный мир" мы просто не можем мыслить, как не можем увидеть то, что лежит вне поля зрения глаза, включая собственный глаз. Именно поэтому логические структуры и формы не могут репрезентироваться, описываться в языке. Мы не можем в языке изображать то, что само отображено в нем, — мы не можем репрезентировать в нем саму форму отображения.

В этом же плане ведется речь о "логических строительных лесах" мира. Предложения логики (L-предложения) задают "строительные леса мира" — das Gerust (6.124). Именно логика очерчивает общие границы мира, границы возможного в мире, логика — а не теории, подобные физике.

Ни язык, ни логика не детерминируют картину мира — совокупность *существующих* положений вещей. Наоборот, мы не можем говорить в логике: "это и это существует в мире, а то — нет. Ибо это, по-видимому, предполагало бы, что мы исключаем определенные возможности, а этого не может быть, так как для этого логика должна была бы выйти за пределы мира: чтобы она могла рассматривать эти границы также с другой стороны" (5.61). Поэтому *логика не теория, а отображение мира*. Логика трансцендентальна (6.13). Пересмотрена по существу, с нашей точки зрения, сама концепция логики.

Логика — не наука, изучающая нечто данное, выявляющая законы и формы некоего процесса. Она сама — способ конструирования, она знает "строительные леса" мира, допускаемые формы отображения. Чтобы понять, почему и в каком смысле логика не является теорией и каково ее отношение к миру, надо учесть, что речь идет о способах описания мира, о различных "сетках", которые мы используем при конструировании "картины мира", моделей мира.

Каждая теория (ньютоновская механика, например) дает определенную сетку описания, "видения" мира и тем самым "приводит описание мира к *единой форме*". "Представим себе белую поверхность, на которой в беспорядке расположены черные пятна... какую бы картину они ни образовывали, я всегда могу сделать ее описание сколь угодно точным, покрывая эту поверхность достаточно частой сеткой, составленной из квадратных ячеек и говоря о каждом квадрате, белый он или черный. Таким образом я буду приводить описание поверхности к единой форме. Эта форма произвольна, поскольку я мог бы с таким же успехом применить сетку из треугольных и шестиугольных ячеек... Различным сеткам соответствуют различные системы описания мира" (6.341). То, что картина может быть описана той или иной сеткой ничего не говорит о самой картине, сетка, описание *не принадлежат* самой *картине*, и она может описываться и иными сетками (не любыми!). Но то, что она может полностью описываться сеткой определенного рода, уже *характеризует* картину (6.342). То же самое относительно языка и логики, логической сетки. Сама логическая сетка не принадлежит миру, не входит в картину мира, но то, что эта картина может быть задана такой сеткой, характеризует эту картину мира — этот необычный мир Трактата Витгенштейна.

Однако формы отображения, присущие научным теориям и присущие языку с логикой, принципиально *различны*. Логика, в отличие от научных теорий, знает общую сетку описания мира и в этом смысле она "не теория, а отображение мира". Именно логика детерминирует те "строительные леса", которые определяют *общие принципы* построения *картины мира*. Тем самым логика детерминирует все возможные положения вещей (Sachverhalten) — и реализуемые и не реализуемые в действительности. Поэтому "логика наполняет мир; границы мира являются также ее границами" (5.61), логика определяет наше поле зрения. *Невозможно выйти за границы всех возможных положений вещей, как невозможно увидеть то, что вне поля зрения.*

Выйти за границы языка и логики, т.е. за границы "сетки", способов репрезентации, диктуемых языком и логикой, значило бы, по Витгенштейну, перейти к репрезентации самой формы отображения, значило бы извне рассматривать отношения логики и мира, а это так же невозможно, как включать в поле зрения глаза сам глаз. Как глаз (и его возможности) не входит в поле зрения глаза, так задание логического пространства посредством логических "строительных лесов" не входит в "поле зрения" логики. Отношение языка и логики к миру, к логическому пространству, по Витгенштейну, не может быть "сказано" в языке, сама форма отображения в языке может быть только показана.

Пространство возможностей, логическое пространство, дано априори (и, как у Канта, это означает не "до опыта", а "вне опыта"). Логика априори устанавливает границы "возможных положений дел" (Sachverhalten). *Ситуацию, нарушающую логическую "сетку", нельзя помыслить.* Нельзя в языке сконструировать образ того, что противоречит структуре положения вещей; нельзя посредством предложения репрезентировать такое положение вещей. То, что мыслимо, также возможно. *Предложению принадлежит возможность соответствующего положения вещей.* То, что (логически) невозможно, не может отображаться в языке посредством предложения. Опять-таки "невозможно представить в языке нечто, противоречащее логике" (3.032). Так мы приходим к идее общей картины мира, детерминируемой логикой.

Можно только поставить вопрос (важный вопрос!) о единственности "сетки", налагаемой языком — тем идеализированным, "единственным" языком с определенной логикой, о котором шла речь выше. В принципе возможны иные сетки, детерминирующие иные способы конструирования картины мира. Возможно, что принятие иных методов анализа языка и логических структур детерминирует иную "сетку" и тем самым иной способ конструирования картины мира. Мы получаем не единственный, а различные идеализированные языки с различными языковыми каркасами и речь пойдет об онтологиях (предпосылках), связанных с ними. Важнейшим вопросом в этом случае становится вопрос о предпосылках принятия того или иного языкового каркаса.

Однако сам Л.Витгенштейн не поднимал *вопроса о возможности иных логических "сеток"*. Логические структуры однозначно детерминируются принимаемым в Трактате методом анализа языка и трактовкой отношения отображения (и тем самым рамками того "единственного языка" в котором они реализуются). Тем самым ключом к пониманию всей философской концепции Витгенштейна становится уяснение своеобразия метода анализа, примененного в Трактате, и того концептуального аппарата, который лежит в его основе. Постановка же вопроса об иных методах анализа, иных логических структурах и о возможности иных форм отображения означала бы опять-таки выход за границы мира, за границы того, что может репрезентироваться в языке.

Еще раз вернемся к вопросу трактовки языка в Трактате. В принципе, следует выделить, два плана в рассмотрении языка и языковых структур: во-первых, те языковые структуры и правила, которые связаны с коммуникативным аспектом употребления языка, во-вторых, те, которые связаны с репрезентативным, познавательным аспектом языка. В первом случае речь идет о том, каким образом закономерности коммуникативной речевой деятельности преломляются в правилах языка, каково их влияние на грамматические структуры. Различные аспекты этого плана (речевые акты различного типа, цели, задачи речевой деятельности и т.д.) должны получать свою репрезентацию в языке, закрепляться определенными правилами и структурами языка.

Во втором случае речь идет о закономерностях репрезентативного аспекта языка и их закреплении в структурах и правилах. Встает вопрос, нельзя ли выводить структуры и границы языка из чисто логических предпосылок, обосновывать их чисто логическими структурами[76]. В первую очередь это касается рассмотрения глубинных структур предложений.

Но если принять, что логические структуры являются определяющими по отношению к языковым, то в таком случае различия в структурах (грамматиках) различных языков должны рассматриваться как вариации на одну тему, диктуемую логико-семантическими основаниями. Те глубинные структуры, которые детерминируются логикой, не должны затрагиваться этими вариациями. (Инвариантное в глубинных структурах предложений связано с логическими основаниями). Так мы приходим опять к той модели идеализированного языка, которая присутствует в Трактате. Само обоснование логико-языковых структур не ищется тогда в закономерностях коммуникативного аспекта употребления языка, но — в отношениях с реальностью — связывается с проблемой репрезентации картины мира. Так, предложение своей структурой, формой репрезентирует определенную связь вещей. Поневоле мы в этом случае исходим из единой логики, "абсолютности" ее структур и единой картины мира (по крайней мере — способов ее построения). (Нам представляется, что одно из основных отличий второго периода работы Витгенштейна (концепция языка в "Философских исследованиях") заключается как раз в отказе от определяющей роли картины мира в обосновании правил языка, его границ и структуры.)

На наш взгляд, нет оснований противопоставлять, как это нередко делается, философскую концепцию языка раннего и

76 "...если грамматика должна обладать познавательной силой (то есть иметь объяснительные основы), то следует попытаться перекинуть мост между семантико-логическими признаками, с одной стороны, и синтаксическими отношениями и классами, с другой" (*Строссон П.* Грамматика и философия. Новое в зарубежной лингвистике, вып.XVIII, М., 1986, С.165.

позднего Витгенштейна: подходы к анализу языка, разрабатываемые в Трактате и в "Философских исследованиях", цели исследований — разные. В Трактате язык рассматривается как сложившаяся, единая система и ставится задача выявления репрезентативного познавательного аспектов языка в принципе — независимо от того, идет речь об искусственных или естественных языках. В сущности Витгенштейн разрабатывает *модель репрезентативной функции языка.* В поздний период ставится задача исследования механизма функционирования языка в системе. Закономерности и факты этого плана иные. В этом случае принимается во внимание субъект-носитель языка, наделенный определенными целями, знанием и т.п., по-иному стоят вопросы анализа смысла и значений выражений языка.

В первом случае язык рассматривается изолированно, вне контекста употребления и исследуется в плане репрезентации картины мира. Во втором — в системе, а его структуры и границы определяются многоаспектными взаимодействиями, проистекающими "извне", из системы, в которую он включен. Естественно, мы получаем иную модель языка, иные закономерности.

Речь идет не о двух формах или способах существования языка. Речь идет о правомерности выделения двух планов рассмотрения языка. Любой действительный язык как единое, живое, функционирующее целое имеет оба эти аспекта и не может быть понят вне их взаимосвязи. Но факты и закономерности этих двух планов существенно разные, их нельзя смешивать. Одно дело — механизм функционирования языка в контексте всей человеческой деятельности, другое — вопрос о его познавательном аспекте: как и что мы можем сообщать о мире средствами языка и какова тут связь с познавательной деятельностью?

Таким образом, речь идет о двух различных подходах к языковым системам. В Трактате реализуется один из них, в "Философских исследованиях" — другой, и нет смысла их противопоставлять. Трактат — попытка дать метод конструирования модели познавательного аспекта языка. Идеальный язык выступает как сложившаяся система, где новые предложения порождаются согласно схеме, следуя правилам — внутренним правилам системы, не выходя за ее границы.

В "Философских исследованиях", с нашей точки зрения, ставится задача моделирования аспекта функционирования языка. Язык — открытая, незавершенная система, где новые аспекты функционирования дают новые схемы порождения "согласно правилам". Вопрос тут один: есть ли это эмпирическое исследование (результат эмпирических рассмотрений) или же возможна теория такого рода моделирования? Этот вопрос аналогичен проблеме принципов построения прагматики: как возможна теоретическая прагматика? Разработка теоретических моделей функционирования языка означала бы также разработку метода конструирования моделей определенного рода деятельности — "языковых игр".

Исследование структуры и границ языка — задача, проходящая через все исследования Витгенштейна. Но хотелось бы подчеркнуть, что идея *конструирования "следуя правилу"* присуща не только позднему Витгенштейну — она проходит красной нитью через обе работы и играет решающую роль при разработке и обосновании "изобразительной" концепции языка в Трактате.

Посредством какой же "сетки" осуществляется описание мира с помощью логических "строительных лесов? Что нового вносит метод анализа, принимаемый в Трактате? Попробуем суммарно выделить некоторые основные моменты.

За логическими "строительными лесами", за принимаемым подходом к языку встает совершенно необычная онтология, необычная картина мира — "мира" Трактата Витгенштейна, мира, лишенного вещей, свойств, отношений, похожего скорее на топологическую картину в пространстве возможностей.

Трактату присуща совершенно своеобразная, отличная от общепринятой трактовка структуры простых (атомарных) предложений как структуры, *проецирующей* положения вещей (факты). Предложение выступает как логическое отображение фактов.

Необычен и метод семантического истолкования выражений языка: предложений, имен, логических связок, предикатных знаков.

И главное — в основе анализа языка и логики лежит совершенно особая трактовка образа и отношения отображения. Она же ведет к необычному истолкованию смысла (атомарных) предложений и, отсюда, фактов действительности.

Как отмечалось, развивается нестандартная концепция логики.

Вместо подразделения на объектный и метаязык проводится разграничение того, что в языке может быть сказано, и того, что в нем может быть только показано. "То, что может быть показано, не может быть сказано" (4.1212).

Развивается своеобразная теория неполных символов, синкатегорематических выражений языка. По-иному идет разграничение линий номинализма и платонизма в анализе языка и логики.

Наконец, язык не создает мир, но он задает ту *сетку*, которую мы используем, *конструируя картину* мира.

Базисными понятиями метода Г.Фреге, как отмечалось, являются понятия предмета и функции. Витгенштейн также начинает анализ языка с высказываний (атомарных предложений). Однако а отличие от Фреге, предложения не являются обозначающими выражениями и дело также не в способе их членения. Главное в методе Витгенштейна — трактовка простого предложения как образа положения вещей (Sachverhalt). "Предложение — образ действительности. Предложение — модель действительности, как мы ее себе мыслим" (4.61).

Ключом к принимаемому истолкованию предложения служит *особая* трактовка *образа* и *отношения отображения*. Речь идет не о "сходстве", "похожести" образа и отображаемого, а о *конструировании согласно правилу*. Образ понимается как модель, проекция, и правило является законом проекции.

Внутреннее образное отношение между языком и миром состоит не в том, что они "походят", что язык копирует реальность, воспроизводит ее. В чем же заключается тогда их внутреннее сходство? Витгенштейн сравнивает образное отношение между языком и миром с образным отношением, которое имеет место между граммофонной записью, музыкальной мыслью и партитурой. Это разные объекты, совершенно несходные при эмпирическом рассмотрении, но они *имеют общую логическую структуру,* внутреннее сходство. И оно состоит в том, что имеется "*общее правило* благодаря которому музыкант может извлекать из партитуры симфонию, благодаря которому можно воспроизвести симфонию из линий на граммофонной пластинке и — по первому правилу — снова воспроизвести партитуру, — в этом заключается внутреннее сходство этих, казалось бы, совершенно различных явлений. И *это правило* есть *закон проекции,* который проектирует симфонию в языке нот..." (4.0141, выделено мной. — *Е.С.*). Здесь речь идет о логике отображения в принципе и общее трактуется как закон проекции. Именно такого рода отображение имеет место между простым предложением и положением вещей (Sachverhalt).

Нам представляется, что витгенштейновская трактовка образа неожиданно и интереснейшим образом перекликается с кантовским учением о схематизме чистого созерцания. Существует глубинная связь между трактовкой образа как проекции, как конструирования в соответствии с правилом и кантовским пониманием *схемы* как общего способа, посредством которого воображение "доставляет понятию образ", не прибегая при этом к опыту, априори (см. §3 гл. VI).

Только уяснение витгенштейновской трактовки отношения отображения позволяет отойти от общепринятого упрощенного понимания изобразительной, "картинной" концепции языка. Только учет "следования определенному правилу — уже здесь в трактате — и, следовательно, *"проективной" концепции образа* позволяет понять отношение *языка* и *онтологии* в Трактате. Предложение — не имя истинностного значения или даже ситуации. Правила, относящиеся к пропозициональному знаку (языковому выражению предложения) таковы, что предложение должно порождать то, что он называет связью вещей (Sachverhalt). Таким образом, онтология, к которой принуждает трактовка предложений, — это онтология наличия или отсутствия положений вещей (Sachverhalt).

Соответственно характеру правил, относящихся к пропозициональному знаку, это положение вещей выступает как связь, сцепление, конфигурация вещей[77].

Метод Л.Витгенштейна тем самым исключает обычный анализ по схеме: предметы — свойства — отношения. Мир онтологии Трактата лишен таких сущностей как свойства и отношения. Именно в силу такой онтологии возникает трактовка предикатных знаков как *необозначающих выражений* (см. анализ предикатных знаков в §1 этой главы). Связи, "сцепления" предметов в элементарном положении дел в языке не могут быть "сказаны", а могут быть только "показаны". Соответственно знаки свойств и отношении трактуются как синкатегорематические, необозначающие. Да и сами объекты не существуют вне пространства возможных элементарных положений вещей (Sachverhalt). Поэтому мир онтологии Трактата — *совокупность фактов,* а не *вещей;* таков соответствующий ему способ репрезентации мира.

Семантика Витгенштейна, в отличие от традиционной, носит не теоретико-множественный, а необычный, "проективный", топологический характер. Вещи не наделены свойствами; аргументное место означает определенную точку в, например, цветовом пространстве[78]. Соответственно отношения между высказываниями "Красный (а)", Бел(а) и т.д. определяются *логической структурой этого пространства.* Совсем иная трактовка предикатных знаков, связанная с идеей "показа" в языке положений вещей в соответствующих "пространствах". В этом смысле "логическая сетка" лежит в основе любого описания, любого отображения — будь то геометрическое описание или "сетка" ньютоновской механики, в основе лежит логический аппарат. "Например для двух цветов невозможно находиться в одном и том же месте в поле зрения, и именно логически невозможно, так как это исключается логической структурой цвета... Утверждение, что точка в поле зрения в одно и то же вре-

77 "В атомарном факте объекты примыкают друг к другу как звенья цепи" (2.03).

78 "Пятно в поле зрения не должно быть обязательно красным, но оно должно иметь цвет, оно окружено, так сказать, цветным пространством" (2.0131).

мя имеет два различных цвета, есть противоречие" (6.3751). То же можно сказать о других характеристиках объектов — и это зависит от способа "видения" объектов, задаваемого *"логическими строительными лесами"* — таких, например, характеристиках как скорость, вес и т.д. (то, что стандартно трактуется в логике как предметные функторы). Частица не может в одно и то же время обладать двумя скоростями, так как она не может быть в двух местах в одно и то же время". Логика — в этих рамках — выступает как основа теоретического конструирования моделей, картин мира (см. §3 гл. VI о роли реализации в теоретическом, символическом построении моделей мира). У Витгенштейна совершенно своеобразно трактуется роль логического в построении теоретических описаний мира, в построении теоретических моделей.

Что касается солипсизма Витгенштейна, то это скорее своеобразный априоризм, но идущий (в отличие от Канта) от репрезентативной сетки языка и логики. Мой язык с логикой знает самую универсальную сетку, определяющую границы всех возможных положений дел — невозможно выйти за пределы пространства логических возможностей. Модель мира — модель, определяемая этой сеткой, и выйти за пределы этого поля зрения нельзя. "Априорность логики заключается в том, что нельзя нелогически мыслить" (5.4731).

* *
*

В заключение еще раз подчеркнем, что применение точных методов к логике и логической семантике, сближение логики в некоторых аспектах с математикой, использование искусственных, формализованных языков, построенных по типу исчислений, не только не удаляет логику от философских, теоретико-познавательных проблем, но, наоборот, поднимает целый пласт важнейших философских, теоретико-познавательных вопросов.

Нам кажется странным, когда об абстрактных сущностях и связях, используемых в семантических построениях, говорят как о формальных, оторванных от познавательной деятельности. (Особенно достается в этом плане реляционным семантикам.) Это возможно лишь при упрощенном понимании самой познавательной деятельности. На самом деле создание системы таких абстрактных, идеальных конструктов, как "строительные леса", в ходе этой познавательной деятельности — важнейший аспект, суть самой этой деятельности.

Абстрактные, обобщенные понятия — возможные миры, альтернативы, отношения "достижимости", семейства миров, пропозиции, интенсионалы, идеальные элементы, *K*-определимость и т.д. — тесно переплетены с глубокими философскими устремлениями, с размышлениями о времени, фактах, детерминизме, принципах познавательной деятельности и проливают подчас неожиданный свет на эти традиционные философские вопросы.

Согласно одной притче, китайский ученый задумал необычную книгу "Сад расходящихся тропок" — книгу-шараду, бесконечный лабиринт, ключ к которой — время. Книга, на первый взгляд, казалась бессмыслицей, ворохом разноречивых набросков (герой умирал, например, в третьей главе, а в четвертой он действовал как живое лицо и т.п. пока не нашелся ключ: альтернативы, "развилки", даны не в пространстве, а во времени. "Стоит герою любого романа очутиться перед несколькими возможностями, как он выбирает одну из них, отметая остальные; в неразрешимом романе Цюй Пэна он выбирает все разом. Тем самым он творит различные будущие времена, которые в свою очередь множатся и ветвятся... в книге Цюй Пэна реализуются все... исходы, каждый из них дает начало новым развилкам. Иногда тропки этого лабиринта пересекаются: вы, например, явились ко мне, но в каком-то из возможных вариантов прошлого вы — мой враг, а в ином — друг" (*Борхес Х.Л.* Проза разных лет. М., 1984).

Содержание

Глава пятая
НЕСТАНДАРТНЫЕ СЕМАНТИКИ И ПРОБЛЕМЫ СЕМАНТИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ

Глава шестая
ЯЗЫК, СЕМАНТИКА И ОНТОЛОГИЯ. ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.Д.СМИРНОВА

ЛОГИКА И ФИЛОСОФИЯ

серия "НАУЧНАЯ ФИЛОСОФИЯ"

МОСКВА
РОССПЭН
1996