СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. С. А. ЯНОВСКОЙ

УЧПЕДГИЗ
МОСКВА — 1936

СБОРНИК СТАТЕЙ
ПО
ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Проф. С. А. ЯНОВСКОЙ

Утверждено Наркомпросом РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1936

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответственный редактор В. Молодший
Технический редактор М. Хасина

Сдано в набор 7/XII 1936 г. Подписано к печати 27/IV 1936 г.

Формат бумаги 62 × 94 1/16. Бум. фабрики Вишхимз Тираж 3 тыс. экз.
Издат. листов 8 1/2. Бум. листов 4 1/4. Авт. листов 10,76 В 1 бум. листе 108 тыс. тип. знаков.

Учпедгиз № 7882 У—9 Заказ № 1558.
Уполномоченный Главлита Б— 22 682

18-я тип. «Полиграфкнига», Москва, Шубинский пер., д. 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Сборник подготовлен в основном коллективом профессоров и научных сотрудников Института математики при Московском государственном университете к двадцатипятилетию ленинского «Материализма и эмпириокритицизма»[1].

Когда Ленин писал свой «Материализм и эмпириокритицизм», в центре внимания философов и естествоиспытателей был кризис физики. Хотя в эту пору уже развертывалась дискуссия, связанная с парадоксами теории множеств, и намечались контуры трех основных направлений современной буржуазной философии математики (логистика, формализм, интуиционизм), но собственно о кризисе в математике речи еще не было. Глубокий кризис основ математики был констатирован интуиционистом Вейлем лишь после мировой войны. С тех пор, если и наметилось некоторое сближение во взглядах борющихся групп, то в основном — идущее имен. но по линии признания интуиционистских установок Броуэра и Вейля. Кризис основ математики есть таким образом явление уже послевоенное. Неудивительно, что философским вопросам математики в «Материализме и эмпириокритицизме» непосредственно посвящены лишь отдельные замечания. Тем интереснее была для нас попытка выяснить приложимость ленинской характеристики причин и сущности кризиса физики к кризису основ математики. Эту задачу и поставил перед собой сектор истории и философии математики Математического института МГУ в связи с двадцатипятилетием «Материализма и эмпириокритицизма».

Как и следовало ожидать, гениальная ленинская характеристика сущности и основных черт кризиса физики оказалась полностью приложимой и к кризису основ математики. И здесь кризис был порожден самим ростом науки, приведшим к ломке всех ее основных понятий и методов; и здесь причиной его возникновения оказался философский идеализм, паразитирующий на росте науки, развивающейся в атмосфере неразрешимых для буржуазии противоречий империалистического капитализма; и здесь, по существу, на самом деле, математика оказалась рождающей отнюдь не идеализм, а диалектический материализм; и здесь идет борьба партий в философии, за которой скрывается, как ее собственная причина, порождающая поляризацию сил, классовая борьба. Повторяем, все эти черты, подмеченные Лениным на кризисе физики, оказались полностью применимыми и к кризису основ математики. Это не значит, конечно, будто кризису основ математики не присущи какие-либо именно для него специфи-

[1] Помещаемый в сборнике материал был доложен авторами на II Всесоюзном съезде математиков в июне 1934 г. (в секции истории и философии математики).

ческие особенности. Это значит лишь, что уже на кризисе физики Лениным были подмечены общие и основные черты развития **всей науки** в условиях империализма. «Наука,— говорит товарищ Сталин,— потому и называется наукой, что она не признает фетишей, не боится поднять руку на отживающее, старое и чутко прислушивается к голосу опыта, практики». Именно в силу этого своего — по существу революционного — характера подлинная наука не может без кризисов развиваться в условиях империализма, не может не приходить в противоречие с капиталистическим строем и характерной для него идеологией.

В соответствии с поставленной нами задачей находится и форма настоящего сборника. Он не представляет собой случайного собрания несвязанных друг с другом статей. В целом сборник должен дать характеристику современной математики, вскрыть причины и сущность кризиса ее основ, осветить борьбу партий в современной философии математики.

В соответствии с этим планом в первых статьях сборника содержится характеристика той коренной ломки понятий и методов математики, которая была обусловлена бурным ростом этой науки в конце XIX и начале XX вв. Статья А. Н. Колмогорова дает общую характеристику современной математики. В статье П. С. Александрова речь идет о роли теории множеств в современной математике, т. е. об основных характерных для нее, в отличие от математики прошлых столетий, понятиях и методах. Статьи Г. А. Куроша и В. Н. Молодшего посвящены специально характеристике современных алгебры и геометрии.

Непосредственной причиной возникновения кризиса науки является, по Ленину, попытка идеализма паразитировать на росте науки, сделать идеалистические выводы из происходящей в ней коренной ломки основных понятий и методов, той коренной ломки, при которой в действительности наука, по выражению Ленина, рождает диалектический материализм. Это ленинское положение, повторяем, оказалось полностью применимым и к математике. Об этой стороне вопроса речь идет в статье С. А. Яновской «Идеализм и математика».

Специальной характеристике кризиса основ математики на современном этапе его развития посвящена статья В. И. Гливенко.

Для характеристики взглядов партий, борющихся в философии математики, читатель найдет материал в статьях А. М. Фишер и С. А. Яновской. А. М. Фишер знакомит нас с философией математики Гонсета, стихийно приближающегося к точке зрения диалектического материализма. В статье С. А. Яновской «Современные течения в буржуазной философии математики» характеризуются основные идеалистические направления, фактически господствующие в современной буржуазной философии математики, и выясняется вопрос о том, куда она растет.

Наконец, в статье «О так называемых определениях через абстракцию» рассматривается вопрос о характере математической абстракции. В задачу автора входило здесь выяснение происхождения математических абстракций из реальной материальной действительности, т. е. попытка приложения к математике ленинской теории отражения.

Настоящий сборник мы рассматриваем лишь как первый. В его задачу входило выяснить наше отношение к процессам, происходящим в современной математике, показать, что кризис основ математики обусловлен именно идеалистическим к ней подходом и что, следовательно, нашей математике — математике страны социализма — не угрожают никакие кризисы основ. Так как, с другой стороны, советская математика развивается на почве самой передовой практики человечества — практики социализма, то из этого следует, что в ее распоряжении имеется все необходимое и достаточное для реализации лозунга вождя народов великого Сталина о ликвидации отставания теории от практики. Дело, таким образом, за самими математиками, за их готовностью работать по-новому, за их решимостью по-настоящему включиться в борьбу за осуществление этой задачи.

Не все статьи сборника одинаковы по трудности. Авторы ставили перед собой задачу, не снижая требований к научной строгости, писать легко и просто, популярно. К сожалению, им это не всегда удавалось. Отчасти в этом повинны, конечно, и сложность рассматриваемых вопросов, и трудности, связанные с неизбежностью особой символики, и отсутствие литературы по основаниям математики на русском языке. Мы надеемся все же, что сборник в целом будет доступен преподавателям старших классов полной средней школы.

С. Яновская.

1 января 1936 г.

А. Колмогоров.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.

Что такое современная математика? Есть ли это математика последнего десятилетия или математика всего XX в., или же, наконец, под этим именем естественно объединять математику последних ста лет? Только на первый взгляд кажется, что вопрос этот чисто терминологический и что на него по произволу можно дать тот или иной ответ. В действительности, выбрав слишком короткий промежуток времени (например, последнее десятилетие), мы будем в состоянии лишь перечислить ряд разрозненных, случайно попавших в него достижений и не сможем уловить в этих достижениях общих черт, характеризующих современную математику и отличающих ее от математики предшествующего периода. Наоборот, объединив под названием современной математики, например математику последних ста лет, мы потеряем возможность выделить наиболее характерные особенности м а т е м а т и к и   н а с т о я щ е г о   в р е м е н и и противопоставить современные тенденции развития математики тем представлениям недавнего прошлого, с которыми они еще находятся в борьбе.

Возникновение в XVII в. анализа бесконечно-малых и аналитической геометрии положило начало современной математике. В конце XIX в. (и даже в начале XX в.) многие были склонны представлять в качестве основной заслуги XIX в. переработку наследия XVII и XVIII вв. в направлении логической строгости изложения. Действительно, в течение XIX в., начиная с Гаусса и Коши и кончая Вейерштрассом, была завершена работа по строго логическому обоснованию классического анализа. Геометрия к концу века также получила строгое обоснование. Однако теперь мы склонны думать, что XIX в. принес с собой гораздо более глубокое изменение самого предмета математических исследований, а не только метода изложения. Факты, приведшие к созданию совершенно новой общей концепции математики, стали накапливаться еще в начале XIX в.; во второй его половине с созданием общей теории множеств появилась возможность понять их и положить в основу новых представлений о предмете математики; XX в. характеризуется широким развитием больших новых теорий, уже целиком стоящих на почве этих новых представлений. Вот примерные хронологические рамки возникновения тех новых явлений, которые мы считаем характерными для современной математики. Попытаемся осветить их по существу, разобрав несколько примеров.

Математика, как ее представляли себе в середине XIX в., состояла в основном из теории целых чисел, действительных и комплексных величин и соотношений и зависимостей между ними (теория чисел, алгебра, анализ), с одной стороны, и геометрии трехмерного евклидового пространства — с другой. Если некоторые теории и не укладывались в эту схему, то они были немногочисленны и не нарушали общей картины. Такой состав математики отвечал тому запасу реальных соотношений, с изучением которых математика была связана еще задолго до XVII и XVIII вв. — периода создания новой математики.

Вряд ли есть необходимость объяснять читателю реальные основы интереса к геометрии трехмерного евклидового пространства или к натуральным числам. Но присмотримся ближе к исключительной роли действительного числа в математике: она естественна с точки зрения измерения расстояний, площадей земельных участков, количества товаров и т. п. Но при внимательном изучении явлений природы или технических проблем мы сразу наталкиваемся на более общие виды величин, которые лишь искусственным образом заменяются действительными числами. Скорость по существу есть вектор, лишь искусственно разлагаемый на компоненты по координатам. Состояние упругого напряжения в какой-либо точке изогнутого твердого тела при введении координатной системы может быть охарактеризовано шестью числами (три растяжения по направлениям осей и три кручения), но по существу есть новая неразложимая величина (симметричный тензор). Новейшая же квантовая механика характеризует состояние системы всегда бесконечно-мерными величинами, которые лишь искусственно приводятся к выражению через действительные или комплексные числа (при помощи бесконечных матриц) или функции с числовыми значениями и аргументом (при помощи волновых функций). Первая попытка дать общую теорию величин была сделана Грассманом (1834). Дальнейшее развитие пошло по двум путям: одно направление (Гамильтон, Фробениус) стремилось сохранить за новыми величинами возможно большее сходство с обычными числами; отсюда возникла современная теория линейных алгебр, интерес к которой в самые последние годы вновь оживился, так как оказалось, что она имеет глубокие применения к вопросам алгебры и теории чисел; другое направление смело следовало за соотношениями, подсказываемыми геометрическими, механическими и физическими задачами. Созданное по преимуществу физиками (Томсон, Максвелл, Гиббс, Хэвисайд) векторное исчисление в самом конце XIX в. трудами Леви-Чивита и Риччи было освобождено от всех случайных ограничений, лишь усложняющих изложение, и в форме современного тензорного исчисления сделалось не только неизбежным аппаратом современных физических исследований, но и естественной большой главой самой математики. Что касается бесконечномерных величин, то они составляют предмет еще более молодой ветви математики — теории линейных пространств. В важнейшем частном случае геометрия этих пространств была развита Гильбертом (1904—1910). Теория линейных пространств, и в частности гильбертова пространства, все в большей мере делается теоретической основой всего функционального анализа (теории интегральных уравнений, вариационного исчисления и т. д.) и квантовой физики.

Неслучайно в предыдущем изложении уже появился термин «пространство» и притом в несбычном смысле бесконечно-мерного пространства. Дело в том, что системы величин, рассматривавшиеся выше, образуют частный случай «пространств» в современном абстрактном понимании этого слова. Неизбежность расширения понятия пространства можно было бы предвидеть в самый момент создания аналитической геометрии. Если точки обычного трехмерного пространства могут быть заменены во всех математических рассмотрениях тройками действительных чисел (координат точки), то естественно ожидать, что и четверки действительных чисел, рассматриваемые как образующие «четырехмерное пространство», должны обладать многими свойствами, аналогичными точкам обычного пространства, и что возможно теорию функций трех переменных излагать в геометрических терминах, подобно тому как теория функций двух переменных может быть рассматриваема как теория поверхностей в пространстве трех измерений. Исходя из внутренних потребностей самой геометрии, обычное евклидово пространство дополнили бесконечно-удаленными элементами, получив таким образом проективное пространство. Далее оказалось целесообразным в некоторых вопросах геометрии рассматривать прямые трехмерного пространства как первоначальные элементы. Таким образом возникло четырехмерное пространство прямых (Плюккер, 1846). Все эти частные случаи подходят под общее понятие n-мерного многообразия, с полной отчетливостью сформулированное Риманом (1854). Понятие многообразия имеет необычайно широкую область применений. Состояния механической системы с n степенями свободы, возможные при заданном уровне энергии, образуют многообразие $(2n-1)$ измерения, и вся современная теория динамических систем строится на геометрических рассмотрениях в этом $(2n-1)$-мерном «фазовом пространстве» (Пуанкаре, Биркгоф). Однако в качестве первого по времени примера теории, на первый взгляд ничего не имеющей общего с геометрией и однако разработанной геометрическими методами, можно указать на грассмановскую теорию многообразия цветовых ощущений. Предложенный им метод, при котором каждое цветовое ощущение рассматривается как точка «пространства цветов» (в этом пространстве проводятся «прямые», «плоскости» и т. д.), стал вполне общепринятым в цветоведении.

Еще работами Гаусса была подготовлена римановская теория метрических свойств многообразий,— то, что в собственном смысле этого слова называют теперь «римановой геометрией». Дальнейшее развитие заложенных здесь идей привело к построению современной диференциальной геометрии различных связностей (Леви-Чивита, Картан и др.), столь тесно связанной с физической теорией относительности. Однако из внутренних потребностей самой математики оказалось необходимым обобщить понятие пространства далеко за пределы понятия n-мерного многообразия. Таковы, например, функциональные бесконечно-мерные пространства, геометрия которых столь существенна для современного анализа. В качестве логически вполне естественного, объединяющего все отдельные типы пространств понятия появились наконец общие топологические пространства (Фреше, 1905).

Каков же общий итог очерченного развития понятия пространства для понимания того, что такое геометрия? Оказалось, что с точки зрения математики евклидово трехмерное пространство является лишь частным случаем многообразия с определенной специальной метрикой (способом измерять углы и расстояния). Одни и те же методы пригодны при изучении пространств различного числа измерений и с различной метрикой. Очень большая часть теорем евклидовой трехмерной геометрии является лишь частным случаем теорем, с той же простотой доказываемых для весьма общих типов пространств. При этих условиях ограничивать геометрию изучением трехмерного евклидова пространства было бы невозможно. Но, с другой стороны, распространение геометрических методов на новые пространства приводит к тому, что стирается грань между геометрией и не-геометрией. Вся та часть математики, в которой играет роль непрерывность, грозит сделаться геометрией, так как множество любых математических объектов (например, функций), в котором могут быть установлены топологические соотношения, может быть объявлено пространством. Таким образом, вместе с геометризацией всей непрерывной математики намечается исчезновение геометрии как самостоятельной и до известной степени противоположной всей остальной математике науки.

Заметим здесь, что развитие общих геометрических идей в значительной мере задерживалось философскими спорами о природе пространства. В случае, положим, действительных чисел все давно привыкли к тому, что одни и те же действительные числа применяются к измерению площадей, объемов, скоростей, скажем прямо, в различных применениях обозначают совершенно различные вещи (площади, объемы и т. д.). Усвоить аналогичную точку зрения по отношению к геометрии, привыкнуть к тому, что геометрия есть абстрактная наука и что обычная ее интерпретация есть только одна из возможных, в других же применениях геометрии «точки» пространства могут оказаться состояниями динамической системы, цветовыми ощущениями или, наконец, прямыми обычной геометрии, оказалось значительно труднее. Зато только после окончательного установления понятия абстрактного математического пространства приобрел ясный смысл и вопрос об устройстве физического пространства. Теперь вопрос этот ставится в такой форме: какое из многочисленных могущих быть построенными абстрактных математических пространств отражает с точностью, соответствующей нашим экспериментальным возможностям, строение физического пространства? Ответ на этот вопрос естественно может эволюционировать с ростом наших знаний.

Новому развитию алгебры посвящена в этом сборнике особая статья, поэтому мы можем ограничиться здесь общими выводами. В центре этого развития стоит понятие группы — опять абстрактное понятие, построенное по принципу сохранения ряда чисто формальных свойств и применимое к самым разнообразным системам объектов. При всей кажущейся полной разнородности отдельных примеров групп возможна богатая содержанием общая теория групп, применимая во всех этих отдельных случаях. Таковы же и дальнейшие понятия современной алгебры (понятия кольца, тела, идеала и т. п.).

* * *

Что математика изучает общие («чистые») формы конкретного бытия и что универсальная применимость математических формул основана на том, что одни и те же общие формы могут быть свойственны самому различному конкретному бытию, — все это не является, конечно, какой-либо новостью, вытекающей из новейшего развития математики. Натуральное число может выражать число предметов любой природы, действительное число может быть мерой величин тоже самого различного характера. Новостью, вполне понятой лишь к концу XIX в., было то, что и геометрия, как математическая наука, находится в таком же положении и ни в какой мере не связана с тем, что мы обычно привыкли называть точками, прямыми и т. д. Новостью XIX в. было также открытие целого ряда новых математических форм, не укладывающихся в старые рамки и применимых так же, как понятие натурального числа, к чрезвычайно разнообразным объектам. Таково, например, понятие группы. Наиболее же существенным является то, что к XX в. математика вполне овладела секретом построения новых математических форм в соответствии с поставленными ей извне или возникшими в ее собственных пределах задачами. Если в XIX в. введение бесконечно-удаленных элементов в проективной геометрии, идеалов в теории чисел или римановских поверхностей в теории аналитических функций было связано с большими трудностями, не сразу совершалось в логически законченной форме и, наконец, нередко встречало известное непонимание и сопротивление, то сейчас аналогичные построения могут уже производиться сразу с полной уверенностью и логической безупречностью. При этом новые математические теории строятся сразу в полной общности, без чего каждое новое применение теории (новая интерпретация ее основных понятий) требовало бы полной ее переделки. Укажу в виде примера на общую теорию меры Каратеодори и на общую теорию интегрирования Фреше и ту легкость, с которой обе эти теории применяются к построению основных понятий такой, казалось бы, своеобразной науки, как теория вероятностей.

Все это возможно благодаря *аксиоматическому методу*, который позволяет выделить чисто формальные свойства изучаемой системы объектов и отношений между ними, необходимые для развития данной теории. Природа элементов двух систем, удовлетворяющих одной и той же системе аксиом, может быть совершенно различной: на этом и основана множественность интерпретаций одной и той же теории. Система аксиом называется полной, если две удовлетворяющие ей системы неизбежно *изоморфны*, т. е. могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с сохранением всех изучаемых в данной системе аксиом соотношений. Это понятие изоморфизма, возникшее первоначально на почве алгебры, играет чрезвычайно большую роль во всей современной математике. Мы говорим, например, что трехмерное евклидово пространство изоморфно системе троек действительных чисел, если в этой последней системе надлежащим образом (в соответствии с общеизвестными формулами аналитической геометрии) определены расстояния и другие основные геометрические понятия. Две изоморфные системы, рассматриваемые с точки зрения их внутренних формальных свойств, ничем не отличаются друг от друга — математика всегда изучает системы тех или иных элементов, связанных теми или иными соотношениями, лишь с точностью до изоморфизма. Так, например, когда в теории групп ставят задачу нахождения всех групп данного порядка, то дело идет лишь о нахождении всех типов не изоморфных друг другу групп.

Не случайно абстрактная точка зрения на предмет математической теории возникла раньше всего в применении к теории конечных групп. При изучении конечной группы легко отвлечься от конкретной природы ее элементов и конкретного значения групповой операции (умножения), так как элементов—конечное число, их можно обозначить теми или иными символами и записать при помощи этих символов таблицу попарных произведений элементов (квадрат Кэли). Иными словами, все формальные свойства изучаемой системы (конечной группы) могут быть записаны в виде конечной символической схемы. Две группы изоморфны, если их устройство может быть изображено при помощи одной и той же схемы (если при надлежащем обозначении элементов их квадраты Кэли тождественны). Но если, как это бывает в большинстве математических теорий, множество элементов изучаемой системы бесконечно, то все предшествующие рассуждения о системах аксиом, о различных возможных интерпретациях одной и той же системы аксиом, об изоморфизме и т. д. оказываются по существу опирающимися на ряд понятий общей теории бесконечных множеств. Общая теория множеств оказывается той наукой, которая в состоянии создать основу для изучения всех возможных математических форм — всевозможных множеств элементов, связанных теми или иными соотношениями. На первом месте, в порядке логической систематики, оказываются естественно те свойства множеств, которые не связаны с установлением каких бы то ни было отношений между их элементами. Два множества, в которых не дано никаких отношений между элементами, изоморфны, если их можно поставить во взаимно-однозначное соответствие, т. е. если они эквивалентны. Два конечных эквивалентных множества имеют одно и то же число элементов, и наоборот — два множества с одним и тем же числом элементов эквивалентны. Таким образом, число элементов оказывается единственной формальной характеристикой конечного множества, рассматриваемого в чистом виде без какихлибо отношений между элементами. Мы естественно приходим к арифметике натуральных чисел как первой главе математики. В случае бесконечных множеств ту же роль, как понятие натурального числа для конечных множеств, играет понятие мощности, введенное создателем современной теории множеств Кантором (1879). Понятие мощности или кардинального числа охватывает как частный случай и натуральные числа (рассматриваемые как количественные числа).

По-видимому, самым простым типом отношений между элементами множества, которые могут повести к построению уже достаточно богатой содержанием теории, являются отношения порядка. Теория упорядоченных множеств приводит, в частности, к понятию порядкового, или ординального, числа. Порядковые числа могут быть конечными или бесконечными; в последнем случае они называются порядковыми трансфинитными числами. Порядковые трансфинитные числа, также введенные Кантором, являются естественным аппаратом многих исследований в современной алгебре, топологии и теории функций, в порядке же логической систематики принадлежат к числу простейших и основных объектов математического исследования. Почти так же естественно в порядке логического развития теоретико-множественных идей появляются все основные понятия современной алгебры. Важность этих понятий, понятая сначала индуктивно, исходя из многочисленности и разнообразия их применений, находит здесь и логическое оправдание.

Иначе дело обстоит со всеми математическими понятиями, опирающимися на идею *непрерывности*. Несмотря на то, что мы умеем аксиоматически определить понятие непрерывности в чисто теоретико-множественных терминах, оно остается генетически чуждым теоретико-множественной точке зрения: развивая теорию множеств самое по себе, мы, возможно, никогда бы не пришли к геометрическим идеям, в то время как алгебра была бы при этом построена примерно в том же виде, как она существует сейчас. Непрерывность в ее чистом виде, отделенную от всех отношений другого типа, изучает *топология*. С логической точки зрения мы склонны видеть в алгебре и топологии, после теории множеств, лежащей в основе всего дальнейшего развития, два главных источника, порождающих в их соединении все более сложные математические образования, служащие предметом изучения других математических дисциплин.

Несмотря на абстрактность последних наших выводов, можно утверждать, что новейшее развитие математики делает ее ближе к *действительности*, позволяет ей охватить большее разнообразие реальных явлений и изучать их с меньшей степенью схематизации, чем это могла делать классическая математика. Это обстоятельство достаточно подчеркивалось в предшествующем изложении при рассмотрении отдельных примеров.

П. Александров.

О НОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МЫСЛИ, ВОЗНИКШИХ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ МНОЖЕСТВ.

Мировая математика XX в. во многих отношениях отличается от математики предшествующего века; отличается как своей проблематикой, так и своими методами и, если так можно выразиться, своим стилем; отличается, наконец, и распределением своих сил по различным отделам.

Основным фактором, определившим стиль, а в значительной степени и проблематику «новой» математики, несомненно, является создание теории множеств Г. Кантором в 70—80-х годах XIX в. Если до того времени бесконечность появлялась в математике лишь в виде неограниченно возрастающей (или неограниченно убывающей) переменной величины, то со времени Кантора математики стали смело рассуждать, правда, не о бесконечных величинах, но о бесконечных совокупностях, бесконечных множествах. Что это такое, читатель легче всего поймет из следующих простых примеров.

Самым простым примером бесконечного множества является совокупность всех целых положительных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots .$$

В этом множестве можно рассматривать различные бесконечные же подмножества (части первоначально данного множества всех целых положительных чисел), например множество всех четных чисел:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots ,$$

множество чисел, делящихся на 5:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20, \ldots ,$$

множество чисел, являющихся третьей степенью какого-нибудь целого числа:

$$1 = 1^3,\ 8 = 2^3,\ 27 = 3^3,\ 64 = 4^3,\ 125 = 5^3, \ldots ,$$

и т. п.

Другими примерами бесконечных множеств являются: множество всех вещественных чисел, множество всех вещественных чисел интервала (0,1) (т. е. множество всех чисел, больших чем 0 и меньших чем 1). Кроме того, множество всех эллипсов, проходящих через данные три точки, не лежащие на одной прямой; множество всех прямых, проходящих через данную точку; множество всех функций, определенных на интервале (0,1) и непрерывных на этом интервале, и др.

Понятие о бесконечном множестве, войдя в состав современной математики, коренным образом революционизировало ее. Эта революция проходила во многих направлениях.

Теория множеств прежде всего позволила завершить перестройку математического анализа. Эта работа, начатая Коши еще 100 лет назад, могла быть доведена до удовлетворительного конца лишь после того, как была построена как следует теория пределов, для чего в свою очередь понадобилось строгое определение иррационального числа, данное только Дедекиндом, Вейерштрассом и Кантором, впервые воспользовавшимися по этому поводу теоретико-множественными понятиями[1].

Но строгое обоснование анализа — это только первое, хотя и очень важное, следствие введения в математику общего понятия о множестве.

Вторым следствием явилось возникновение целого ряда новых математических дисциплин, непосредственно связанных с понятием множества. Такими дисциплинами являются: 1) теория множеств (как абстрактная, посвященная общему понятию бесконечного множества произвольных элементов, так и специально теория точечных множеств, о которых речь еще впереди); 2) теория функций действительного переменного со всеми ее многочисленными разветвлениями (теория интегрирования, теория тригонометрических рядов, общая теория разрывных функций и т. д.); 3) теоретико-множественная топология; 4) функциональный анализ.

Эти дисциплины имеют чрезвычайно большой принципиальный удельный вес в современной математике; а с чисто количественной стороны приходится отметить, что число математиков, работающих в названных областях и у нас и за границей, составляет очень большой процент общего числа математиков.

Третьим, едва ли не самым важным следствием создания основных идей теории множеств является проникновение теоретико-множественных методов и так называемой теоретико-множественной точки зрения в громадное большинство математических дисциплин. Почти каждая область современной математики или постоянно пользуется конкретными методами теории множеств или же, что с принципиальной точки зрения еще важнее, определяет самый предмет своих исследований как некоторое множество объектов, удовлетворяющих известной системе соотношений. Что касается методов теории множеств, то они в настоящее время проникли решительно во все области, прежде всего математического анализа. Такие классические части анализа, как теория функций комплексного переменного, теория диференциальных уравнений, вариационное исчисление и т. п., немыслимы без хорошо разработанного теоретико-множественного аппарата.

Что касается теоретико-множественной точки зрения в самом опреде-

[1] Дедекиндово определение иррационального числа уже давно вошло в элементарные учебники; оно содержится, например, в особом приложении к «Алгебре» Киселева. Введением в теорию множеств может служить книга П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова «Введение в теорию функций действительного переменного», а также классическая книга Бэра «Теория разрывных функций». Подготовляется к печати русский перевод капитального труда Хаусдорфа (Hausdorf) «Теория множеств».

лении того, чем занимается данный раздел математики, то она прежде всего проникла в геометрию и алгебру. Со времен классических работ по основаниям геометрии, — я разумею в первую очередь работу Гильберта, — стало ясным, что в основе всякой геометрии — будь то элементарная (евклидова) «метрическая» геометрия, проективная геометрия или теория n-мерных диференциально-геометрических многообразий — лежит некоторая система аксиом, характеризующих соотношений между основными исследуемыми объектами. Значит то, что подлежит изучению, есть некоторое множество объектов (например точек, прямых, плоскостей в случае элементарной геометрии), связанных между собой некоторыми соотношениями (пересечения прямых или плоскостей, порядковое расположение точек на прямой, соотношения конгруентности, т. е. равенства отрезков, углов, треугольников и т. п.).

Не менее разителен оказался переворот, произведенный теоретико-множественной точкой зрения в воззрении на то, чем, собственно говоря, занимается алгебра. «Алгебра учит рассуждать о величинах» — с этих слов начинался тот учебник алгебры, по которому учился пишущий эти строки; «алгебра изучает уравнения любой степени» — так определяют так называемую «высшую» алгебру; «алгебра есть учение о целой рациональной функции» — так звучит одно из определений, низводящее алгебру, одну из наиболее законополагающих дисциплин современной математики, до ступени какой-то вводной главы в анализ. По нашему мнению, основанному на всем развитии математики от Галуа (1812—1832) до наших дней, алгебра не есть ни то, ни другое, ни третье: если алгебра учит о чем-нибудь рассуждать, то о первых четырех действиях—о сложении, вычитании, умножении и делении. Но, спросит недоумевающий читатель, над чем же производятся эти четыре действия, если не над величинами? Ответ дает теоретико-множественная точка зрения, и ответ этот гласит: «над чем угодно»: дано множество каких-то неопределяемых элементов, для которых установлены соотношения вида $a+b=c$, $a\cdot b=d$, причем должны выполняться основные, известные из элементарной алгебры свойства этих соотношений, а именно: $(a+b)+c=a+$ $+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$; $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$; также $a+b=b+a$ и $a\cdot b=b\cdot a$. Кроме того, должен существовать среди элементов нашего множества элемент н у л ь — такой, что для любого a имеем $a+0=a$; наконец, для всяких двух элементов a и b и для всяких двух элементов c и d, $c\neq 0$ должны существовать элементы f и g такие, что $a+f=$ $=b$; $c\cdot g=d$.

Такие множества элементов называются *алгебраическими телами*. И х - т о и и з у ч а е т а л г е б р а. Последние два требования (о существовании элементов f и g) можно формулировать, говоря, что во всяком теле уравнения $a+x=b$ и $cx=d$ $(c\neq 0)$ должны быть разрешимы. Оказывается, всякое алгебраическое тело K содержится в таком («более обширном») теле L, что любое уравнение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, где $a_0, a_1,.., a_n$ суть элементы из K, решается в теле L (т. е. имеет решение, принадлежащее к L). Переход от тела K к телу L, изучение строения тела L (определяемого при некоторых дополнительных условиях однозначно) и составляет главное содержание основной части алгебры — теории уравнений.

Алгебраические тела характеризуются тем, что в них определены две операции сложения и умножения, и обратные к ним операции: вычитания и деления. Если потребовать существования в данном множестве лишь одной операции (которую можно назвать как угодно — умножением или сложением) и обратной к ней операции (деления или соответственно вычитания), то получим не тела, а так называемые группы. Понятие группы есть одно из тех алгебро-теоретико-множественных построений, которые во всех решительно отделах математики — в анализе, в геометрии, в самой алгебре — играют роль творческого фактора исключительной силы и интенсивности. Без этого понятия современная математика вообще не могла бы существовать.

Я так подробно остановился на современной алгебре, основанной в этом виде Дедекиндом, во-первых, потому, что не знаю более яркого примера проникновения теоретико-множественной точки зрения в одну из классических областей, и, во-вторых, потому, что повышение интереса к алгебре и чрезвычайное усиление ее влияния на все остальные отделы математики является одной из характерных черт в развитии математики истекшей трети XX в. Я думаю, можно без преувеличения сказать, что алгебра является одним из столпов всего современного математического мышления.

Одним, но не единственным. Вторым таким столпом все более и более делается молодая, но чрезвычайно быстро развивающаяся ветвь математики — топология. При своем возникновении топология была небольшой частью геометрии, трактовавшей о «качественных свойствах» простейших геометрических фигур, т. е. о таких их свойствах, которые не зависят от измерения длин и углов, а также от понятия прямолинейности. Топологические свойства геометрической фигуры — это такие ее свойства, которые сохраняются, если подвергать фигуру любым непрерывным взаимно-однозначным преобразованиям. Чтобы лучше понять, о чем идет речь, надо представить себе фигуру сделанной из какого-нибудь гибкого и растяжимого материала, например резины, и подвергать ее всевозможным растяжениям, сжатиям, словом, всяким искажениям, при которых не произойдет ни разрывов, ни, наоборот, склеиваний[1]. Свойства фигуры, которые при этом сохраняются, суть свойства топологические. Если мы возьмем, например, прямолинейный отрезок и окружность, то непрерывным взаимно-однозначным преобразованием можно отрезок (сделанный из резины) превратить в сколь угодно искривленную извилистую кривую, но его нельзя превратить ни в какую замкнутую кривую, в частности в окружность. Наоборот, окружность можно превратить в эллипс, также в любую другую замкнутую кривую самой неправильной формы, но ее нельзя превратить ни в отрезок (для этого пришлось бы окружность разорвать), ни в кривую, имеющую форму восьмерки (для этого пришлось бы склеить между собой две точки окружности). Свойства кривой быть «незамкнутой» (такой, как отрезок или дуга окружности), «простой замкнутой» (как окружность или эллипс) или «многосвязно-замкнутой» (как восьмерка) линией могут служить примерами топологических свойств.

[1] Отсутствие разрывов характеризует непрерывность преобразования, отсутствие склеиваний — его взаимную однозначность.

Топология, будучи учением о свойствах фигур, сохраняющихся при непрерывных взаимно-однозначных преобразованиях, очень скоро стала общим учением о непрерывности, и как таковое превратилась в обширную дисциплину, проникшую в самые различные области математики, как анализа, так и геометрии; в последнее время происходит чрезвычайно интенсивное взаимодействие между алгеброй и топологией: внося в некоторое множество элементов алгебраические соотношения (типа $a+b=c$ и т. д.), касающиеся каждый раз лишь конечного числа элементов, мы получаем алгебраические построения («алгебраические области») — тела, группы и т. п. Внося в некоторое множество элементов соотношения непрерывности, мы получаем так называемые топологические пространства. Их проще всего определить, как это сделал впервые Фреше, введя отношения сходимости, предела, т. е. установив, что некоторые бесконечные последовательности элементов нашего множества сходятся к некоторым элементам этого множества, как к своим пределам. При этом приходится потребовать, чтобы выполнялись основные свойства перехода к пределу, известные из элементов теории вещественных чисел[1].

Логический анализ структуры современной математики показывает, что основные математические соотношения в конечном счете сводятся к алгебраическим и к топологическим соотношениям; четыре действия алгебры, с одной стороны, и понятие предела, с другой — вот два основных мотива, бесконечные вариации, расширения, обобщения которых в значительной степени определяют собой содержание математической науки. Это содержание оказалось возможным раскрыть лишь на основе теоретико-множественных концепций.

Я должен, наконец, сказать еще об одном явлении в жизни современной математики, которое возникло в связи с теорией множеств. Это — критический пересмотр логических основ математики, который наполняет в значительной степени философию математики, как она складывается в Западной Европе в течение последних десятилетий, приводя в конце концов к тяжелым философским конфликтам, выпутаться из которых буржуазная философия математики не в состоянии. Эти конфликты, этот кризис математического мировоззрения современной Западной Европы возникли из попытки разрешить методами идеалистической или позитивно-механистической философии гносеологические проблемы, возникшие в связи с основными понятиями теории множеств. Относящиеся сюда вопросы породили ряд враждующих между собой философско-математических течений (формализм Гильберта, интуиционизм Брауэра, наивный эмпиризм Бореля и др.), которые, несмотря на ряд отдельных интереснейших достижений, не в силах справиться с поставленными задачами.

Развитие математики всегда происходило в тесной связи с естествознанием и техникой. Весь математический анализ как в своей элементарной части (диференциальное и интегральное исчисления), так и в своих

---

[1] Кратким введением в топологию может служить обзорный доклад, прочитанный автором этой статьи на Всероссийском математическом съезде 1927 г., а также две книжки того же автора (совместно с В. А. Ефремовичем), тоже пригодные для этой цели («О простейших понятиях современной топологии» и «Краткое введение в топологию»).

высших, наиболее сложных частях (диференциальные уравнения, а также вариационное исчисление и интегральные уравнения с возникшим на их почве общим функциональным анализом) возник как метод решения задач механики, физики и техники. Это оплодотворяющее влияние естественных наук на математику, так же как и обратный процесс воздействия математики на точное естествознание, с неослабевающей силой продолжается и сейчас. Так называемые уравнения математической физики (работы Адамара, Куранта и др.) были и остаются одной из центральных частей математического анализа. Но современная физика требует от математики совершенно новых методов, гораздо более отвлеченных и теоретичных. Построение теории относительности Эйнштейна оказалось возможным лишь при помощи весьма сложных и отвлеченных методов многомерной диференциальной геометрии и тензорного анализа; теория квант опирается, с одной стороны, на теорию вероятностей, с другой — на весь аппарат современной абстрактной алгебры и теории функциональных пространств, т. е. как раз на те дисциплины, которые являются наиболее изысканными и отвлеченными достижениями нового развития математики, возникшего на почве теории множеств. Общая динамика и принципиальные теоретические вопросы небесной механики опираются, с одной стороны, на топологию, с другой стороны, на новую и приобретающую все большее значение главу теории множеств, на общую теорию меры. Эта последняя теория является своеобразной геометрией множеств, зависящей от непрерывности (и, следовательно, от топологии), она основана лишь на количественной оценке множества с точки зрения его меры (длины, площади, объема и т. д.). Эта теория наряду с топологией составляет второй аспект теории точечных множеств и подобно топологии также проникает в целый ряд математических дисциплин, в анализ, в геометрию и в особенности в теорию вероятностей. Что касается, в частности, этой последней, то при новых системах обоснования и изложения теории вероятностей предмет ее в сущности становится частным случаем упомянутой общей теории меры[1]. Уже этим одним достаточно определяются практические приложения общей теории меры.

Таким образом взаимодействие между математикой и естествознанием ни в какой степени не уменьшилось от того нового и, казалось бы, вполне отвлеченного и теоретического развития, которое получила математическая мысль от возникновения теории множеств. Только взаимодействие это перешло на новую, более высокую ступень.

Дальнейшее развитие математики таит в себе возможности двух крупных философских ошибок. И та и другая может быть охарактеризована как «обеспредмечивание» математики, как лишение ее реального предмета исследования. В одном случае «обеспредмечивание» происходит путем подмены этого реального предмета голыми идеалистическими схемами и субъективными «логическими фантазиями». Вторая опасность — это заблуждение грубого «прикладничества», которое отрицает самостоятельный предмет математической теории, низводя ее на ступень какой-то

[1] См. по этому поводу статью А. Н. Колмогорова «Общая теория меры и исчисление вероятностей» в «Трудах секции точных наук Коммунистической академии», т. 1, стр. 8—21.

коллекции *разрозненных* фактов и методов, ценных лишь постольку, поскольку они непосредственно годятся для приложения. По поводу этой грубой недооценки роли теоретического познания и его необходимо обобщающей природы уместно вспомнить слова одного из величайших математиков-естествоиспытателей, Лапласа, уж конечно знавшего ценность конкретного единичного факта: Si l'homme s'etait borné recueillir des faits, la science ne serait qu'une nomenclature stérile et jamais il n'eût connu les grandes lois de la nature.[1]

Еще в худшем виде эта опасность недооценки роли общей математической теории выступает, когда к ней примешивается элемент своеобразного, довольно мелкого эстетства, когда математические результаты оцениваются с точки зрения их «занятности», представляемого ими интереса «спортивной» трудности и т. п.

Всем этим (и многим другим) искажениям действительной природы математического мышления мы противопоставляем математику как учение об общих формах, свойственных материальному бытию, математику, не ощупью (и с опозданием) решающую лишь в уже готовых формулировках предложенные ей задачи, но как цельную и мощную теорию, ликвидирующую свое отставание от самой передовой практики человечества — практики социалистического строительства; математику как учение, устанавливающее общие, но не неподвижные, а постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных специальных запросов естествознания и техники.

Процесс построения этих теорий есть процесс постоянного преодоления противоречия между единичным фактом и обобщающей его математической теорией, между конкретной данностью опыта и той математической системой, которая от этого опыта отвлекается, в которой этот опыт теряется, для того чтобы в ней претвориться в возможность предугадания нового, гораздо более совершенного опыта, и за ним опять новой, еще более сильной теории.

---

[1] «Если бы человек ограничивался собиранием фактов, наука превратилась бы в бесплодную номенклатуру, и никогда человек не познал бы великих законов природы».

А. Курош.

СОВРЕМЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ.

Что такое алгебра?

I.

Три слова, составляющие подзаголовок настоящей статьи, возможно заставят читателя насторожиться. Если все знакомство этого читателя с математикой ограничивается курсом средней школы, то он вспомнит изучавшийся в школе предмет, не очень трудный, но достаточно скучный, достойный, конечно, всякого уважения, но уже более или менее основательно забытый. «В алгебре решают квадратные уравнения и по таблицам ищут логарифмы», скажет этот читатель. Но что здесь можно сказать еще? Читатель, имеющий некоторое знакомство с элементами математического анализа, например инженер, прошедший курс втузовской математики, будет удивлен этим возвращением к элементарным вещам, к тому, что кажется ему просто формальным аппаратом, необходимым для «настоящей» (т. е. «высшей») математики. Наконец, читатель, изучавший математику в университете, вспомнит о курсе высшей алгебры, вспомнит, возможно, те определения алгебры, которые ему пришлось слышать, и решит, что в этих определениях уже содержится ответ на вопрос «что такое алгебра».

Мы не собираемся, однако, употребляя слово «алгебра», говорить о той элементарной алгебре, которая изучается в средней школе. Мы не связываем равным образом это название и с тем пестрым и неопределенным конгломератом фактов и методов, каким и до сих пор еще остается читающийся на младших курсах университетов курс алгебры — высшей алгебры, как принято говорить, хотя эпитет «высший» невольно хочется взять в кавычки. Говоря об алгебре, мы в действительности говорим об одной из основных математических дисциплин, о науке, имеющей многовековую историю, о науке, переживающей сейчас период бурного расцвета и одновременно период коренной перестройки, период пересмотра точек зрения, пересмотра объектов изучения. С каждым днем расширяется область применения алгебраических методов, все глубже проникает алгебра в другие ветви математики — геометрию, анализ, и все более важной становится роль алгебры в различных приложениях, в частности в современных физических исследованиях (квантовая механика).

Но что есть алгебра? Дать сколько-нибудь удовлетворительный ответ на этот вопрос очень трудно. Главные трудности происходят из невозможности исчерпывающим образом описать задачи науки, все еще продолжающей развиваться, науки, находящейся, так сказать, в процессе становления.

Всякое определение непременно является неполным, не учитывающим всего многообразия фактов и в точности пригодным разве лишь для того момента, когда оно дается. Так, целью настоящей статьи будет выяснение современных алгебраических воззрений; это приведет к формулировке основной задачи алгебры, как мы ее сейчас понимаем, но, конечно, трудно сказать, в какой мере эта формулировка останется пригодной через десять лет.

Рассмотрению понятий, являющихся сейчас объектом алгебраического исследования, должен предшествовать просмотр того, чем занималась алгебра раньше, сто или тридцать лет назад. С такого просмотра, весьма схематичного, начнем и мы. Меньше всего, однако, собираемся мы превращать настоящую статью в очерк по истории алгебры; поэтому мы не будем указывать никаких дат и по возможности никаких имен — будет дана лишь схема того, как постепенно менялись стоящие перед алгеброй задачи.

II.

Все, вероятно, согласятся с тем, что центральной задачей элементарного курса алгебры является решение уравнений. В этом курсе мы встречаемся, правда, лишь с простейшими типами уравнений — с уравнениями первой степени, с системами уравнений первой степени относительно нескольких (двух или трех) неизвестных и с квадратными уравнениями с одним неизвестным. Решать такие уравнения умели уже, однако, древние греки.

Дальнейшее развитие алгебры шло по двум направлениям, намечающимся еще в элементарном курсе. Одно из них вырастает из изучения систем уравнений первой степени, или, как говорят, линейных уравнений. Вместо системы из двух или трех уравнений можно изучать систему с бо̀льшим числом уравнений и неизвестных, систему n линейных уравнений с n неизвестными. Можно далее изучать такие системы, в которых число уравнений не равно числу неизвестных, причем, вообще говоря, такая система или не имеет ни одного решения или имеет их бесконечно много. Из всего этого вырос один из наиболее важных отделов классической алгебры — линейная алгебра, методы которой необходимы в самых различных областях геометрии, механики и теоретической физики.

Долгое время казалось, однако, что важнее другое направление, которому и приписывалось, собственно, название «высшая алгебра». В элементарном курсе после изучения уравнений первой степени переходят к изучению квадратных уравнений. Совершенно естественным было перейти к изучению уравнений более высокой степени — третьей, четвертой и т. д., все еще ограничиваясь случаем одного уравнения с одним неизвестным. Всем известны формулы для решения квадратного уравнения, выражающие корни этого уравнения через коэфициенты с помощью элементарных алгебраических операций и радикалов. Уже несколько столетий назад (в XVI в.) были найдены аналогичные формулы для решения кубичных уравнений и уравнений четвертой степени [1], правда, очень сложные и практически весьма мало применимые. Для практического решения каждого частного типа даже кубичных уравнений приходилось изобретать особый прием, и

[1] Заметим, что изучаемые в элементарном курсе биквадратные уравнения являются лишь весьма частным случаем уравнений четвертой степени.

алгебра в это время была скорее искусством решать уравнения, чем наукой.

Мы сказали, что для уравнений третьей и четвертой степеней удалось найти формулы, выражающие корни этих уравнений через коэфициенты с помощью радикалов. Начавшиеся после этого поиски общих формул для решения уравнения пятой или более высокой степени не увенчались успехом. Наоборот, в начале прошлого века норвежский математик Абель показал, что эти поиски были заранее обречены на неудачу: он доказал, что корни уравнения пятой или более высокой степени не могут быть, вообще говоря (т. е. за исключением некоторых частных случаев), выражены через коэфициенты с помощью радикалов. Отсюда появилась необходимость разработки методов приближенного решения уравнений любой степени, что, однако, уже выходит за пределы алгебры.

III.

Мы не умеем в большинстве случаев для уравнений достаточно высокой степени точно находить корни. Тем естественнее вопрос о том, всякое ли уравнение вообще обладает корнями, т. е. для всякого ли уравнения можно указать такое число, которое, будучи вставлено вместо неизвестного, превращает левую часть уравнения в нуль. Ответ на этот вопрос может быть дан лишь после того, как будет точно установлено, где мы будем искать корни уравнений, т. е. о каких числах идет речь.

Сперва несколько слов о том, как развивается понятие числа. Если мы рассматриваем **натуральные** (т. е. целые положительные) числа, то сумма и произведение двух таких чисел снова являются натуральными числами. Вычитание и деление будут, однако, не всегда выполнимыми, если мы не знаем никаких других чисел кроме натуральных; эти две операции делаются выполнимыми лишь после того, как наш запас чисел будет расширен введением отрицательных и дробных чисел. Мы приходим к системе **рациональных чисел**. Потребности геометрии заставили дальше расширять полученный нами запас чисел — к рациональным числам присоединяются числа иррациональные, и получается система действительных (или вещественных) чисел. Эти числа изображаются геометрически точками прямой линии — всякой точке прямой соответствует действительное число и наоборот.

Дальнейшим шагом в развитии понятия числа явилось введение **комплексных чисел**. Те из читателей, которые лишь в курсе средней школы встречались с «мнимыми» числами, относятся, конечно, к этим числам с большим недоверием, вырастающим, однако, лишь из весьма малого знакомства с ними. В действительности ничего мистического, «мнимого», в комплексных числах нет. Если действительные числа изображаются геометрически точками прямой линии, то комплексные числа могут быть изображены точками плоскости, для которых некоторым специальным образом определены «сложение» и «умножение», т. е. указано, как для двух данных комплексных чисел, т. е. двух точек плоскости, может быть найдена третья точка, называемая их суммой, или точка, называемая их произведением. Алгебраические операции над комплексными числами определяются так, что среди комплексных чисел содержатся, в частности, все действительные числа[1] и далее содержится такое число, квадрат которого равен минус единице,— явление, невозможное в случае действительных чисел; это число обозначают буквой i и называют мнимой единицей, хотя это есть некоторая вполне определенная точка плоскости и ничего «мнимого» в ней нет.

Теперь можно пояснить, что мы хотели сказать, спрашивая, где мы ищем корни уравнения. Уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет своими корнями рациональные числа 2 и 3. Уравнение $x^2-2=0$ уже не имеет рациональных корней, но его корни $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ будут действительными числами. Наконец, уравнение $x^2+1=0$ не может быть решено с помощью действительных чисел и лишь среди комплексных чисел удается найти его корни; это будут числа $+i$ и $-i$. Отсюда следует, что для различных уравнений корни находятся в более или менее далеко расширенном запасе чисел.

Нам уже известно, что не всякое уравнение с целыми коэфициентами может быть решено с помощью действительных чисел. Но, быть может, недостаточно и комплексных чисел. Быть может, существуют уравнения, не имеющие ни одного корня даже среди комплексных чисел, и не нужно ли поэтому дальше расширять запас чисел? Где, далее, нужно искать корни для уравнений с любыми действительными или любыми комплексными коэфициентами? Оказывается, однако, что с точки зрения решения уравнений комплексных чисел вполне достаточно: в с я к о е у р а в н е н и е с л ю б ы м и ч и с л о в ы м и к о э ф и ц и е н т а м и — рациональными, действительными или даже комплексными — и м е е т к о р н и с р е д и к о м п л е к с н ы х ч и с е л[2], причем число корней равно степени уравнения. Этим утверждается существование корней у всякого уравнения, хотя, как сказано выше, у нас нет способа для практического нахождения этих корней.

Это предложение, называвшееся раньше о с н о в н о й т е о р е м о й а л г е б р ы, в действительности лежит в фундаменте всей классической алгебры и является одним из крупнейших фактов всей математики в целом. В настоящее время эта теорема уже не считается, однако, алгебраической теоремой. Причина этого в том, что при введении действительных и комплексных чисел мы прибегаем к геометрической интуиции или к понятию непрерывности, и поэтому основная теорема не может быть доказана чисто алгебраическим путем. Действительно, при доказательстве этой теоремы многочлен, стоящий в левой части уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — любые числовые коэфициенты, приходится считать функцией комплексного переменного x (такие функции называются в анализе целыми рациональными), и всякое доказательство (а различных доказательств существует очень много) принуждено опираться на те или иные

---

[1] Точнее, множество комплексных чисел содержит часть (или подмножество), изоморфную множеству всех действительных чисел. О понятии изоморфизма см. ст. В. Н. М о л о д ш е г о и С. А. Я н о в с к о й («Идеализм и математика»).

[2] Напоминаем, что рациональные числа являются частным случаем действительных, а действительные — частным случаем комплексных.

факты, касающиеся поведения этой функции при изменении x, т. е. должно в той или иной форме иметь дело с непрерывностью.

На теорему о существовании корня опираются почти все понятия и результаты того отдела классической алгебры, который называется высшей алгеброй. Весь этот отдел должен поэтому существенно опираться на методы анализа, методы, связанные с непрерывностью, и еще сравнительно недавно казалось, что алгебра перестает существовать как отдельная наука и что она поглощается математическим анализом, превращаясь в тот отдел его, который занят изучением целых рациональных функций. Вместо слова «алгебра» стали даже употреблять термин «алгебраический анализ».

Последние десятилетия характеризуются прямо противоположными тенденциями. Говорить о поглощении алгебры анализом теперь уже совершенно невозможно. Удалось установить далее, что понятия уравнения и его корня не зависят от понятия числа и что можно поэтому строить алгебру, не прибегая ни к каким числам. Больше того, оказалось, что изучение и решение уравнений вовсе не является центральной задачей алгебры и что последняя в действительности занимается изучением алгебраических операций — сложения и умножения, вычитания и деления. Лишь благодаря этой перестройке, вызванной проникновением в математику теоретико-множественных точек зрения, оказалось возможным то бурное развитие, которое переживает в настоящее время алгебра. Мы постараемся сейчас обо всем этом кратко рассказать.

IV.

Мы описали уже—как постепенно развивалось понятие числа. Сейчас мы должны обратить внимание на то обстоятельство, что хотя переход от рациональных чисел к действительным и затем от действительных чисел к комплексным осуществляется путем присоединения новых элементов, новых чисел, но основные свойства алгебраических операций остаются при этом расширении запаса чисел без изменения. Действительно, если мы рассматриваем систему рациональных чисел, то в ней всегда выполнимы операции сложения и умножения и обратные им операции вычитания и деления (кроме деления на нуль). При сложении рациональных чисел слагаемые можно переставлять: $a+b=b+a$ (говорят, что сложение коммутативно) и, далее, при сложении трех чисел скобки можно ставить на любом месте: $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сложение ассоциативно). Умножение рациональных чисел также коммутативно и ассоциативно, т. е. $ab=ba$ и $a(bc)=(ab)c$. Наконец, умножение связано со сложением дистрибутивным законом, выражающим возможность раскрытия скобок: $a(b+c)=ab+ac$. Все эти законы известны читателю (хотя без названий) еще из элементарного курса алгебры. Если мы будем теперь рассматривать вместо системы рациональных чисел систему действительных или систему комплексных чисел, то сложение и умножение вместе со своими обратными операциями продолжают оставаться выполнимыми, причем сохраняются все описанные выше основные законы операций. Таким образом, по свойствам своих алгебраических операций эти три числовые системы походят друг на друга и отличаются, например, от системы целых рациональных чисел, где не всегда выполнимо деление, или от системы положительных рациональных чисел, где не всегда удается выполнить вычитание.

Но что такое алгебраическая операция? Если мы складываем (или перемножаем) два числа, то на самом деле мы ищем третье число, которое называется суммой (или произведением) двух первых, т. е. в нашем запасе чисел указываем по определенному правилу третье число, которое ставится в соответствие первым двум числам. Но при таком взгляде на алгебраическую операцию нет уже необходимости ограничиваться сложением и умножением чисел: если мы рассматриваем совершенно произвольный запас, произвольное множество некоторых вещей, называемых элементами множества, то можно говорить, что в этом множестве введены алгебраические операции, если всяким двум элементам множества по некоторому закону ставится в соответствие некоторый определенный третий элемент этого же множества, называемый их *суммой*, и некоторый определенный элемент, называемый их *произведением*.

Понятно, что такое приведение в соответствие всякой паре элементов нашего множества некоторого третьего элемента может быть сделано многими различными способами; естественно требовать поэтому, чтобы алгебраические операции, введенные в множестве произвольных элементов, напоминали алгебраические операции, производимые над числами, т. е. чтобы были выполнены все описанные выше законы операций и чтобы существовали обратные операции. Мы приходим сейчас к одному из основных понятий современной алгебры, понятию тела[1].

Телом называется всякое множество, в котором введены описанным выше способом операции сложения и умножения, причем эти операции должны обладать следующими свойствами: сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; они, далее, связаны между собой дистрибутивным законом, и, наконец, однозначно выполнимы обратные операции: вычитание (для всяких двух элементов a и b существует единственный третий элемент c, сумма которого с b дает a; c будет разностью $a-b$) и *деление* (кроме деления на элемент, играющий роль нуля; такой элемент существует во всяком теле).

Можно говорить, следовательно, о теле рациональных, теле действительных и теле комплексных чисел, в то время как целые рациональные числа уже не образуют тела ввиду невыполнимости деления.

Можно указать, кроме уже известных нам числовых тел, много других примеров тел. Существуют даже тела, состоящие лишь из конечного числа элементов. Мы опишем сейчас тело, состоящее из двух элементов; читатель, которому этот пример покажется не вполне ясным, может без всякого ущерба для дальнейшего его опустить.

Дано множество, состоящее из двух элементов a и b. Для установления алгебраических операций в этом множестве будем наделять элемент a свойствами четных целых чисел, а элемент b — свойствами нечетных чисел. Мы полагаем теперь, что $a+a=a$ по аналогии с тем, что «четное плюс четное есть четное», $a+b=b$ («четное плюс нечетное есть нечетное»), $b+b=a$ («нечетное плюс нечетное есть четное»),

[1] В русском языке нет для этого понятия установившегося термина, и очень часто вместо слова *тело* употребляют слово *поле*, иногда говорят даже *корпус*,

$a \cdot a = a$ («произведение четного на четное есть четное»), $a \cdot b = a$ («произведение четного на нечетное есть четное»), и $b \cdot b = b$ («произведение нечетного на нечетное есть нечетное»), причем предполагаем, что операции коммутативны. Легко показать, что сложение и умножение, определенные таким образом в множестве из двух элементов, обладают всеми свойствами, входящими в определение тела, и что, в частности, выполнимы обратные операций; роль нуля играет в этом теле элемент a, а элемент b является единицей.

V.

О значении для алгебры и для всей математики описанного выше перехода от чисел к абстрактным телам будет сказано несколько позже. Сперва мы хотим рассказать, как отражается этот переход на вопросе о решении уравнений.

Об уравнениях с какими-либо числовыми коэфициентами говорилось уже в начале статьи; мы знаем, что, например, корни уравнения с рациональными коэфициентами будут или рациональными числами или же их нужно искать в более широком теле, чем тело рациональных чисел — в теле действительных или теле комплексных чисел. Мы покажем сейчас, как все это может быть перенесено с числовых тел на любые абстрактные тела.

Пусть рассматривается произвольное тело K. Мы будем говорить, что формально написанное уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

задано в теле K, если все коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ являются некоторыми элементами из K, x будет, как и в элементарной алгебре, неизвестным, «буквой», присоединенной к телу K. Если b есть такой элемент тела K, что выражение

$$a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n$$

(где возведение в степень, умножение и сложение нужно понимать в смысле операций, определенных в теле K) равно нулю тела K[1], то естественно сказать, что b есть корень нашего уравнения. Возможно, однако, что это уравнение не имеет корней в теле K, но для него можно будет уже найти корни, если мы перейдем от тела K к более широкому телу L. Отсюда следует, что нельзя говорить просто о корнях уравнения, а необходимо точно сказать, в каком теле мы эти корни ищем.

Но, быть может, существуют такие уравнения, заданные в теле K, которые не имеют корней нигде? В действительности это невозможно. Можно доказать — и это есть один из замечательнейших фактов во всей этой теории, — что для всякого уравнения с коэфициентами из тела K можно найти такое тело L, более широкое, чем K (K будет частью L), что в L наше уравнение уже имеет хотя бы один корень. Больше того, всегда можно расширить тело, так что в новом более широком теле это урав-

[1] Это выражение есть, конечно, элемент тела, и было бы нелепо говорить о равенстве его числовому нулю.

нение будет иметь уже столько корней, какова его степень. Наконец, всегда можно найти такое новое тело, содержащее тело K внутри себя, что все уравнения с коэфициентами из K имеют в этом новом теле все свои корни.

Значение этой последней теоремы с точки зрения классической алгебры таково: если тело K есть тело рациональных чисел, то для него телом, содержащим все корни уравнений, будет, как мы знаем, тело комплексных чисел. Однако тело, содержащее корни всех уравнений с рациональными коэфициентами, может быть теперь построено совершенно абстрактно, не прибегая к понятию числа, т. е. указанная нами выше теорема, называвшаяся ранее «основной теоремой алгебры», теряет уже свое значение.

Переход от чисел к произвольным телам означает в действительности освобождение понятия алгебраической операции от числовой оболочки. Тело есть множество, в котором определены две основные алгебраические операции — сложение и умножение [1], и вопрос, из чего устроены элементы этого множества, какова природа этих элементов, нас не интересует: это могут быть числа, но могут быть и любые другие вещи. Если даны два тела, отличающиеся друг от друга природой своих элементов (элементы одного из них отличны от элементов другого), но обладающие одинаковыми свойствами с точки зрения операций, определенных в этих телах, то *для алгебры* эти два тела будут неразличимыми. Так, точки прямой линии не являются, конечно, действительными числами, но тем не менее для точек можно так определить сложение и умножение, что получится тело, не отличающееся от тела действительных чисел.

VI.

Область применимости алгебраических методов расширяется еще больше, когда мы переходим от понятия тела к понятию **группы**. Говоря о теле, мы предполагаем, что в множестве определены две операции, связанные дистрибутивным законом. Но чаще приходится иметь дело с такими множествами, в которых определена лишь **одна** алгебраическая операция, причем снова нас интересуют лишь законы, которым эта операция подчинена, и не интересует совсем, из чего сделаны элементы рассматриваемых множеств. Это приводит нас к понятию группы.

Группой называется всякое множество, в котором определена одна алгебраическая операция, которую можно по произволу называть сложением или умножением, *причем эта операция должна быть ассоциативной* (т. е. всегда $a\,(bc) = (ab)\,c$, если групповая операция названа умножением); *обратная операция также должна быть всегда без всяких ограничений выполнимой.*

Так, все *целые рациональные* или все *рациональные* числа образуют группу, если в качестве операции мы выбираем обыкновенное сложение и забываем о существовании другой операции (т. е. умножения). Все рациональные числа без нуля или только положительные рациональные числа образуют группу с обыкновенным умножением в качестве груп-

[1] Вычитание и деление являются, как мы много раз говорили, обратными для сложения и умножения и не считаются поэтому основными.

повой операции. Векторы на плоскости образуют группу, если в качестве групповой операции выбрать обычное сложение векторов; заметим, что эта группа по своей алгебраической структуре не отличается от группы всех комплексных чисел с их сложением в качестве групповой операции. От этих двух групп — группы векторов и группы комплексных чисел — по существу не отличается группа, построенная следующим образом: будем рассматривать всевозможные сдвиги плоскости по всем направлениям; всякие два сдвига, выполненные последовательно, могут быть заменены одним сдвигом, который мы имеем право назвать суммой двух первых. Мы получаем группу, элементами которой будут сдвиги плоскости, а групповой операцией — последовательное выполнение двух сдвигов.

Мы не требовали, давая определение группы, чтобы групповая операция была коммутативной, т. е. чтобы всегда ab и ba были одним и тем же элементом группы, и некоторые читатели уже решили, вероятно, что здесь допущена ошибка. В действительности это было сделано сознательно. Очень часто приходится иметь дело с такими системами, в которых определена операция, отличающаяся от обычных операций над числами лишь тем, что произведение зависит в ней от порядка сомножителей. Таковы, например, лежащие в основе всякой геометрии группы движений плоскости, и изучать такие группы было необходимым, хотя читатель не привык, конечно, к тому, что в произведении иногда нельзя бывает переставлять сомножители.

Мы видим, что не уравнения и тем более не функции, а сами алгебраические операции интересуют сейчас алгебру. Будет ли это группа, т. е. множество с одной единственной алгебраической операцией, будет ли это тело, т. е. множество с двумя операциями, будет ли это множество, в котором определены две операции, но не предполагается существование обратной операции для умножения, как, например, в множестве целых чисел (такие алгебраические образования называются *кольцами*) — всякий раз нас интересуют лишь те законы, по которым производятся операции, и те факты, которые можно вывести из существования этих операций.

Изучение операций, заданных в множествах произвольной природы, — так можно сегодня охарактеризовать основную задачу алгебры.

В. Молодший.

К ВОПРОСУ О ПРОИСХОЖДЕНИИ И ЗНАЧЕНИИ АКСИОМ ГЕОМЕТРИИ.

«Познание есть вечное, бесконечное приближение мышления к объекту.

Отражение природы в мысли человека надо понимать не «мертво», не «абстрактно», ***не без движения,*** не без противоречий, а в вечном процессе движения, возникновения противоречий и разрешения их».

Ленин.

Когда в последней четверти XIX столетия математика вступила в новый период исканий своих основоначал, вновь возник вечно старый и вместе с тем вечно юный вопрос о происхождении и значении аксиом геометрии. На этот вопрос пытались ответить многие философы и математики: достаточно вспомнить работы Гельмгольца, Клейна, Ли, Пуанкаре и в особенности Гильберта.

Я не собираюсь критиковать учения названных ученых. Несмотря на содержащиеся в их трудах чуждые диалектико-материалистическому мировоззрению моменты, полученные ими положительные результаты составляют одно из лучших достижений человеческой культуры. Я попытаюсь очертить то, что, быть может, можно будет назвать первым приближением к диалектико-материалистическому ответу на вопрос о происхождении и значении аксиом геометрии.

I. О ПРОИСХОЖДЕНИИ АКСИОМ ГЕОМЕТРИИ.

§ 1. Необходимость обоснования математики.

Вопрос о происхождении аксиом геометрии является частью более общего вопроса о законах развития оснований математики. Но что значит обосновать математику, и в зависимости от чего меняется ее обоснование?.

В глубокой древности математика была собранием разрозненных сведений о простейших пространственных формах и числовых соотношениях. Скудному содержанию математики вполне соответствовала элементарная форма его обоснования: в лучшем случае «доказательство» геометрической теоремы сводилось к слову «смотри».

Повидимому, эмбриональный период развития математики был преодолен уже школой Пифагора; она дала имевшемуся в ее распоряжении фактическому содержанию математики некоторое обоснование и тем самым вывела математику на путь теоретического развития. Этот переход рано или поздно должен был иметь место. Как всякая научная дисциплина, математика не может обойтись без соответствующего ее предмету теоретического обоснования. В задачу обоснования математики входит выяснение ее предмета и места в системе наук, изучение внутренней структуры и взаимосвязей различных математических дисциплин, раскрытие основных законов развития математики. Но все это не из одного только чисто теоретического «интереса». Обоснование математики должно преследовать действенную цель: на основе изучения существующих методов и выяснения законов их развития создать новые, более мощные методы исследования. Последняя цель особенно важна. Недаром многие крупнейшие математики считали обоснование математики жизненным, если оно позволяло развить новые теории, решить ранее неразрешимые задачи.

Идя по пути теоретического развития, математика все больше и больше подразделяется на самостоятельные математические дисциплины, каждая из которых разветвляется в свою очередь дальше. Так, анализ, основным предметом которого является понятие функции и предельного перехода, подразделяется на диференциальное и интегральное исчисления, вариационное исчисление и другие дисциплины, хотя и связанные между собой, но изучающие эти понятия со стороны их особых свойств и форм. Геометрия изучает пространство со стороны метрических, проективных, топологических и других свойств, что также обусловливает внутреннее подразделение геометрии с соответствующим выделением диференциальной геометрии, проективной геометрии и топологии.

Но наряду с усиливающейся диференциацией в развитии математики имеется и обратное течение — к синтезированию отдельных дисциплин. Не существует абсолютно изолированных друг от друга математических дисциплин, они все объединены общностью изучаемого математикой предмета, они все фактически обусловливают друг друга. Так, теория линейных интегральных уравнений теснейшим образом связана с алгеброй. Точно так же взаимно обусловлено развитие алгебры и топологии [1].

В замечании о развитии тригонометрии из синтетической геометрии Энгельс с гениальной ясностью отметил и эту сторону развития математики [2].

Важным следствием взаимопроникновения математических дисциплин является необходимость изучения основных свойств и закономерностей развития математики в целом. С особой силой эта необходимость проявилась в конце XIX столетия, о причинах чего я скажу в дальнейшем. До этого же времени, как справедливо отмечал Кутюра, математика была собранием отдельных математических дисциплин, внутренние взаимосвязи которых в лучшем случае интуитивно использовались, но не осознавались до конца. Точнее, до последней четверти XIX столетия математики занимались изысканием основоначал отдельных математических дисциплин или групп их, не ставя себе задачей изыскание основоначал всей математики. Лишь в конце XIX столетия положение вещей изменилось. Возникли

---

[1] См., например, доклад проф. П. С. Александрова на II Всесоюзном математическом съезде о взаимосвязях в развитии алгебры и топологии.

[2] Энгельс, Диалектика природы, изд. 3-е, стр. 152—153.

особые математические дисциплины, в противоположность указанным выше изучающие не отдельные совокупности математических объектов, а наиболее важные для всех этих групп понятия и закономерности их развития. В области анализа роль такой дисциплины играет теория функций действительного переменного, изучающая понятия функции и предельного перехода с точки зрения их наиболее общих свойств, причем базой служит теория множеств и теория меры. По отношению к геометрии роль теории множеств и теории меры играют основания геометрии. Не в меньшей мере важна роль алгебры. Совокупность названных и им подобных дисциплин образует систему обоснования математики. Следовательно, система обоснования математики имеет своим предметом наиболее общие соотношения (свойства) и формы современного ей содержания математики; тем самым анализ общих методов математики включается в ее предмет, и система обоснования выступает как некоторая форма, в рамках которой развивается в дальнейшем фактическое содержание математики. Проникая в сущность фактического содержания математики, система обоснования дает и наиболее мощные методы его развития. Она позволяет оценить с единой точки зрения вновь открываемые факты, глубже разобраться во взаимосвязях и различиях математических дисциплин и взвесить относительную силу методов последних. Она предопределяет логику доказательства (и изложения) наличного содержания математики, развивая при этом «шестое чувство математиков» — понимание строгости доказательств. Таким образом, система обоснования составляет одну из частей математики, ее фактического содержания, но притом часть, имеющую особое значение. Лишь с помощью системы обоснования математика оформляется как единая, целостная дисциплина.

Однако стоит лишь поставить вопрос: возможно ли развить такую систему обоснования математики, которая всеобъемлюще отразит общие соотношения, законы etc. как современного, так и будущего фактического содержания математики, чтобы стало ясно, что на него можно дать только отрицательный ответ. Методы математики развиваются вместе с ростом ее фактического содержания. Всеобъемлющая, вечная система обоснования математики невозможна так же, как невозможен гипотетический гений Лапласа, способный в одной математической формуле объять прошлое, настоящее и будущее вселенной.

Многовековая история математики показывает, что на определенной ступени своего развития фактическое содержание математики неизбежно приходит в противоречие с существующей системой его обоснования. Фактическое содержание перерастает существующую систему обоснования, которая из фактора роста, по мере углубления этого противоречия, все более и более превращается в тормоз развития математики. Тогда неизбежно наступление периода перестройки, доработки или даже создания новой системы обоснования математики. Старая система при этом, как правило, не отбрасывается, а правильнее, следуя Гегелю, сказать — снимается: в своем положительном содержании она удерживается новой системой. Короче говоря, между развитием системы обоснования математики и ее фактическим содержанием осуществляется диалектическое взаимодействие на основе роста фактического содержания, обусловленного раньше всего практическими потребностями применения математических теорий.

В проявлении закона взаимодействия фактического содержания математики с системой ее обоснования есть одна существенная особенность, обусловленная содержанием предмета математики. В некотором смысле система обоснования математики обладает двойственной природой. С одной стороны, во всякой развитой системе обоснования существует часть, которая составляет ее фактическое содержание; таковы, например, аксиоматика, учение о множествах и т. п. С другой стороны, над этой фактической частью системы обоснования воздвигается общий взгляд на природу предмета математики. Он суммарно выражает характер и степень понимания математиками основных законов их «математического» мышления и особенностей предмета их науки и является тем моментом в развитии системы обоснования, который связывает математику с философией. Важность такой «надстройки» в системе обоснования непосредственно очевидна; только исходя из отчетливого ее понимания, можно развить систему обоснования, отвечающую современному уровню развития математики.

История математики знает много бурь и потрясений, обусловливавшихся каждый раз тем, что рост фактического содержания математики опрокидывал старую систему ее обоснования и создавал базу для развития новой. Но каждый раз сила потрясений была наибольшей тогда, когда новый фактический материал заставлял отказываться от такой «надстройки» в системе обоснования. В этом случае приходилось не только развивать новую надстройку, но и обратно — соответственно ей перестраивать как фактическое содержание системы обоснования, так и содержание математики в целом. Только после такой работы вновь открывалась возможность представить математику как целое, данное во всем богатстве взаимосвязей его фактического содержания, и развить более мощные методы исследования.

Математика два раза коренным образом меняла «надстройку» в системе своего обоснования [1]. В первом периоде, от зарождения математики до XVI—XVII вв., основное содержание математики исчерпывалось арифметикой и геометрией Евклида, т. е. рассмотрением постоянных количеств с постоянными между ними отношениями. За эти рамки выходили только известные уже и в этом периоде начатки алгебры и анализа. Возникновение в XVII в. аналитической геометрии и анализа бесконечно-малых положило начало второму периоду развития математики. Факты, известные до этого в началах алгебры и анализе, — исследование переменных величин с постоянными между ними отношениями [2] — были поняты достаточно широко и привели к коренному изменению взглядов на предмет и общие методы математических исследований. Это привело к бурному развитию новых математических дисциплин, как то: диференциальных уравнений, вариационного исчисления, диференциальной геометрии и теории функций комплексного

---

[1] Подробно останавливаться на этом вопросе я не буду, желающим познакомиться с ним подробнее рекомендую прочесть статьи проф. Яновской, Колмогорова, Александрова, Куроша в настоящем сборнике.

[2] Что равносильно исследованию некоторых постоянных отношений.

переменного, которые дали механике, физике и астрономии прекрасные методы изучения форм **движения материи**, т. е. то, о чем не смела мечтать математика в первом периоде своего развития. Потребности в развитии все более и более мощных методов исследования привели к тому, что в конце XIX столетия стали рассматривать как переменные не только изучаемые количества (объекты), но и отношения между ними[1]. На основе этого выросла новая «надстройка», первым выражением которой явилась теоретико-множественная точка зрения на предмет математики, приведшая к еще более крутой перестройке и бурному развитию математики, чем это имело место в XVII и XVIII вв. Ближайшим следствием теоретико-множественного подхода к проблемам математики явилось новое обоснование классического анализа. Но самым основным достижением было развитие базирующихся на новых идеях чрезвычайно общих, более мощных методов исследования, проникновение которых в математику привело как к зарождению новых, так и к исключительно бурному развитию ранее существовавших математических дисциплин. Общее учение о множествах, теория функций действительного переменного, топология и функциональный анализ — вот те основные дисциплины, развитие которых целиком связано с теоретико-множественным обоснованием математики. Многочисленные проблемы теории диференциальных уравнений, вариационного исчисления, интегральных уравнений, теории вероятностей и даже теории чисел или не могут быть решены, или сужаются до крайности без применения методов, базирующихся на теоретико-множественном обосновании математики. Так, например, теория интегральных уравнений получает общность только при применении интегралов Лебега и Стильтьеса и т. д. Наконец, в третьем периоде развития математики создалась объективная основа к разработке единой системы обоснования математики, чего на предшествующих этапах своего развития математика была лишена.

С целью конкретизировать высказанные мной общие соображения, а главное для того, чтобы проиллюстрировать их специально на развитии основ геометрии, я остановлюсь несколько на основных моментах взаимодействия между ростом фактического содержания геометрии и развитием науки об ее основах — аксиоматики.

§ 2. Основные исторические предпосылки современной аксиоматики геометрии.

После пифагорейской школы развитие математики в древней Греции характеризовалось исключительным ростом фактических знаний как в области арифметики и алгебры, так по преимуществу и в области геометрии. Достаточно напомнить, что начиная с V в. до н. э. древнегреческие математики занимались идеей бесконечности. Материалист Демокрит, элеец Зенон и другие математики анализируют проблему бесконечности и закладывают первые камни здания анализа бесконечно-малых.

Растущие знания требовали все лучше и лучше отвечающей им системы обоснования. Пифагор, Демокрит, Зенон, Эвдокс — все направляют внимание на критику и разработку основоначал математики, в первую очередь

[1] Что равносильно исследованию **связи** между **законами**.

геометрии. Каждый из них дал много для научного обоснования математики. Но наиболее цельная и последовательная система аксиоматического обоснования геометрии (из дошедших до нас) содержится лишь в «Началах» Евклида.

Можно спорить о причинах, обусловивших систему «Начал»; несомненным, повидимому, остается одно: Евклид стремился дать строго дедуктивную систему геометрии и лучше, чем кто-либо из его предшественников и современников, преуспел в этом направлении.

Фундаментом «Начал» служат описания основных пространственных образов (которые сам Евклид называет определениями), постулаты и аксиомы; все остальное содержание «Начал» в той или иной степени является логическим следствием развития этих посылок.

Для нас достаточно подчеркнуть две особенности «Начал»:

1) Определения Евклида допускают одну и только одну интерпретацию, в которой нетрудно усмотреть идеализированные образы наших элементарных пространственных представлений.

2) Постулаты и аксиомы Евклида неразрывно связаны с его определениями: они выражают основные свойства и отношения пространственных форм, описанных в определениях.

Ближайшим следствием такого взгляда на предмет геометрии было признание геометрии Евклида единственно возможным учением о пространстве.

В течение более чем двух тысяч лет, вплоть до XIX в., эти основные предпосылки «Начал» Евклида не претерпели сколько-нибудь существенных видоизменений. Архимед пополнил список постулатов «Начал». Комментаторы накопили большой материал по вопросу об эквивалентности аксиом геометрии и развили критическое отношение к основоначалам геометрии Евклида. Математики XVII и XVIII столетий включили в геометрию исключительное богатство фактического содержания. Но для всех попрежнему «Начала» были непревзойденным образцом дедуктивного обоснования геометрии. Лучше всего это можно усмотреть в геометрии Лежандра, который в основных посылках не ушел ни на шаг от Евклида. Творению Евклида нужно было подражать; в лучшем случае «Начала» можно было исправлять, но их нельзя было превзойти.

Причины этого легко обнаружить. Как ни грандиозны открытия геометров XVII и XVIII столетий, однако в подавляющем большинстве они опирались на привычные всем, описанные Евклидом в определениях, пространственные представления. Благодаря этому аксиоматика Евклида играла действенную роль, была методом открытия нового в фактическом содержании геометрии, а потому и не могла уступить (да и не кому было уступать!) своего первенствующего значения. Ее «час» тогда не наступил. Только XIX столетие преодолело основные методологические предпосылки аксиоматики Евклида.

Главные усилия комментаторов были направлены на доказательство V постулата Евклида. Исходя из всех остальных постулатов и аксиом Евклида, доказать V постулат,— так ставили проблему комментаторы.

В решении этой проблемы крупных результатов достигли Саккери, Ламберт и Лежандр.

Так как, не принимая заранее V постулата, можно высказать относительно суммы углов четырехугольника S три взаимоисключающих предположения:

$$S < 4d, \quad S = 4d, \quad S > 4d,$$

и так как второе предположение ($S = 4d$) оказывается эквивалентным V постулату, то Саккери и Ламберт[1] надеялись доказать, что присоединение первой и третьей гипотез к остальным постулатам и аксиомам Евклида приведет к противоречию, откуда вытекала бы справедливость V постулата. Очень изящными рассуждениями они обнаружили, что присоединение третьей гипотезы ведет к противоречию. Но никакие усилия не привели Саккери, Ламберта и Лежандра к подобному же заключению о первой гипотезе. Саккери чувствовал, что получаемые в предположении первой гипотезы результаты не содержат в себе противоречия. Но он отказался и от первой гипотезы, так как одним из ее следствий было доказательство возможности асимптотического сближения прямых линий, что, по мнению Саккери, противоречило «природе прямой линии». Пример Саккери показывает нам, как некогда прогрессивная методологическая основа евклидовой аксиоматики превратилась в свою противоположность, стала оказывать тормозящее влияние, не позволив развить геометрию гиперболического пространства. Лежандр также не достиг цели, ибо он, как и многие, ввел предположение, эквивалентное V постулату. Только Ламберт оказался способным хотя бы в своих предположениях преодолеть устаревшие, ставшие тормозом развития геометрии предпосылки аксиоматики Евклида. Основываясь на неудаче попыток отвергнуть первую «гипотезу», Ламберт пришел к мысли о возможности существования другой геометрии, отличной от геометрии Евклида. Он дерзнул высказать мысль, что не одной геометрии Евклида «дано» копировать природу пространства.

Бесплодность многочисленных попыток доказать V постулат, строгость и стройность результатов, получаемых в предположении первой гипотезы, привели (и укрепили) в Лобачевского в мысли о существовании геометрии, отличной от евклидовой. В 1826 г. он выступил с изложением основных принципов новой геометрии, как мы теперь говорим,— геометрии гиперболического пространства. Почти одновременно с ним гиперболическую геометрию открыли Гаусс и Больэ.

Все основное в содержании новой геометрии было открыто Лобачевским и Больэ, так как они не ограничились анализом начальных данных гиперболической геометрии, но и развили ее метрику.

В геометрии Лобачевского — Больэ все кажется необычным, а с точки зрения «непосредственного» восприятия пространства — даже «неестественным». По этой геометрии в природе существует абсолютная постоянная, площадь любого треугольника не может превзойти некоторой постоянной величины, сумма углов треугольника — величина переменная, меньшая $2d$, и притом способная стать сколь угодно близкой к нулю — таковы некоторые выводы геометрии Лобачевского.

Так впервые в истории три гениальных математика «дерзнули» считать геометрию Евклида не единственно

[1] Лежандр рассматривал аналогичные три гипотезы относительно суммы углов треугольника.

возможным учением о пространстве и развили новое учение о пространстве — гиперболическую геометрию.

Современники Лобачевского и Больэ не поняли значения их открытия. Когда Лобачевский и Больэ опубликовали свои работы, в научном мире они не встретили никакого отклика. Даже Гаусс считал невозможным выступить в защиту нового учения, несмотря на то, что был одним из его творцов. Отвечающая обычным, повседневным представлениям пространства, дающая базу механике Ньютона и являющаяся орудием повседневной и научной практики, освященная столетиями и философией Канта, геометрия Евклида попрежнему казалась естественным, единственно возможным учением о. пространстве. Наоборот, геометрия Лобачевского — Больэ, как казалось, не только не давала никакой базы для механики и практики, но вела к недоразумениям, коль скоро пытались связать ее выводы с наглядными, принятыми Евклидом представлениями прямой и плоскости. На основании этого делался вывод, что геометрия Лобачевского — Больэ не имеет никаких данных для претензий на степень достоверности евклидовой геометрии. Основу этих возражений нетрудно усмотреть: развив математически безупречное учение о гиперболическом пространстве, Лобачевский — Больэ не нашли тех объектов, пространственные формы которых отражались бы их геометрией. Благодаря этому они ничего, кроме логической безупречности их учения, не могли противопоставить своим противникам.

Потребовались новые усилия, чтобы разбить силу привычки мыслить, опираясь только на образы «Начал», исходить от методологических предпосылок аксиоматики Евклида, чтобы сдвинуть и направить творческую энергию ученых на разработку идей неевклидовых геометрий.

В 1827 г. Гаусс опубликовал мемуар под названием «Общие исследования о кривых поверхностях». Данные в этом мемуаре методы привели к развитию диференциальной геометрии и послужили орудием Бельтрами и Риману.

Занимаясь вопросами картографии, Бельтрами обнаружил, что на участках поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществляется планиметрия Лобачевского — Больэ. При этом роль прямых линий на этих поверхностях играют геодезические линии. Значение работ Бельтрами заключается в первую очередь в том, что они показали реальные образы, пространственные формы которых отражаются планиметрией Лобачевского — Больэ. Стало ясным, что геометрия Евклида является не единственной наукой, дающей правильное описание пространственных форм материальной действительности, и потому постепенно отошли в прошлое все возражения против геометрии Лобачевского — Больэ. Эти соображения сыграли важную роль как в развитии геометрии в целом, так и в философском осмысливании полученных результатов.

Идеи Бельтрами получили особое значение в свете работы Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Используя, как и Бельтрами, методы Гаусса и исходя от значительно более широкого понятия пространства, Риман развил особую геометрию, в которой отрицаются существование параллельных линий и аксиома об однозначном определении прямой линии двумя точками.

Риман показал, что три геометрии: Евклида, Лобачевского — Больэ и та, которую он открыл сам, представляют частные случаи общего учения о пространстве постоянной кривизны. Если кривизна равна нулю, мы имеем геометрию Евклида, если кривизна постоянна и больше нуля,— мы приходим к геометрии Римана, наконец, если кривизна постоянна и меньше нуля,— мы получаем геометрию Лобачевского — Больэ.

Только после блестящих открытий Римана и Бельтрами начинается детальная разработка неевклидовых геометрий, а вместе с ними и геометрии в целом. Кели, Клейн, Гельмгольц, Ли, Пуанкаре и другие закладывают первые этажи величественного здания современной геометрии. Одним из важнейших для аксиоматического обоснования геометрии результатов этой работы было развитие имеющейся уже у Бельтрами идеи интерпретации, которая преодолела вторую методологическую предпосылку «Начал» — веру в неразрывную связь между определениями и аксиомами.

Когда в геометрии Лобачевского — Больэ мы говорим о плоскости, прямой, треугольнике и т. п., то воспитанный на образах евклидовой геометрии человек склонен и образы геометрии Лобачевского — Больэ трактовать в духе, унаследованном от геометрии Евклида. Однако Бельтрами показал, что плоскость Лобачевского — это поверхность постоянной отрицательной кривизны, прямые — геодезические линии этой поверхности и т. д. И так как аксиоматика геометрии Лобачевского — Больэ отличается от аксиоматики геометрии Евклида только аксиомой о параллельных, то пусть недостаточно отчетливо, но все же становилось ясным, что аксиомы геометрии не неразрывно связаны с одной системой пространственных форм.

Последующие исследования целиком подтвердили это предположение. Оказалось, что не только различные геометрические системы отражают различные системы пространственных форм, но что и каждая в отдельности геометрическая система отражает пространственные формы различных многообразий объектов. Каждое из таких многообразий пространственных форм, которые отражаются данной геометрией, стали, следуя Бельтрами, называть интерпретацией этой геометрии.

Возьмем, например, геометрию Евклида. Неизощренное пространственное представление связывает основные понятия этой геометрии с идеализированными образами ребра линейки, натянутой нити (прямая), конца ребра линейки (точка) и, скажем, поверхности стола, доски (плоскость) и т. п. Но эти объекты — не единственные, пространственные формы которых отражаются во взаимосвязях геометрией Евклида. Современная математика может указать на ряд множеств объектов, совершенно не похожих друг на друга, отношения между пространственными формами которых отражаются, однако, той же геометрией Евклида. Из числа таких систем объектов одной из простейших можно считать систему, указанную Пуанкаре,— я говорю о связке сфер и окружностей, рассматриваемых в том же пространстве Евклида. Так же легко указать систему объектов евклидова пространства, основные отношения между которыми будут выражаться аксиомами геометрии Лобачевского — Больэ. Планиметрия пространства Римана (сферического) есть ни что иное, как сферическая геометрия [1].

Наконец, Гельмгольц показал, что система цветов спектра удовлетворяет аксиомам геометрии Евклида; тем самым было установлено, что пространственные формы являются не единственно возможными интерпретациями геометрических систем. Стало быть, в природе существуют качественно различные системы объектов, отношения между которыми (или между пространственными формами которых) могут быть отражены, описаны одной геометрией. Следовательно, аксиомы геометрии имеют *переменное* содержание, благодаря чему их нельзя неразрывно связывать с определениями в смысле описаний.

В порядке вызревания идеи интерпретации становилась ясной необходимость коренной переработки аксиоматики как евклидовой геометрии, так и геометрии в целом. Задача переработки диктовалась потребностями самой геометрии: не отвечающие разросшемуся фактическому содержанию геометрии методологические предпосылки аксиоматики Евклида делали ее тормозом развития геометрии. Кроме того, рост отдельных геометрических дисциплин, например геометрии положения, а также проблематика анализа с несомненностью показывали неполноту аксиоматики Евклида, что также усилило потребность в переработке аксиоматики геометрии. Но если вплоть до второй половины XIX столетия всегда существовавшая проблема аксиоматического обоснования геометрии неизменно отождествлялась с проблемой улучшения аксиоматики Евклида, то теперь она стала проблемой ее преодоления. Она стала проблемой разработки такой аксиоматики геометрии, которая, содержа полный для современного ей уровня геометрии список аксиом, целиком и полностью отвечала бы идее интерпретации. Новая аксиоматика не должна была связывать свои основные положения с обычными наглядными представлениями, должна была придать им характер форм с переменным содержанием, как того требовала идея интерпретации.

Первые попытки решить эту проблему относятся к 80-м годам прошлого столетия и связаны с анализом аксиоматики геометрии положения. В первую очередь тут надо указать на работу Паша [2], который пополнил список аксиом Евклида аксиомами порядка, ставшими теперь неотъемлемой частью синтетической и проективной геометрий. Последние в «Началах» явно не формулировались и применялись как само собой разумеющиеся. К этому времени относится начало изысканий о постулате непрерывности, что было связано с развитием теоретико-множественного обоснования анализа. Впоследствии целые школы геометров — в особенности итальянская во главе с Пеано — занимались разработкой аксиоматики геометрии. Результаты их изысканий составили фундамент построения современной аксиоматики геометрии.

---

[1] Конечно, при одном условии: две точки сферы, диаметрально противоположные, не должны быть рассматриваемы как различные. Обо всем этом см. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. II, Одесса, 1907.

[2] «Vorlesungen über neuere Geometrie», 1882.

Впервые задача разработки новой аксиоматики геометрии была полностью решена Гильбертом.

II. ЗНАЧЕНИЕ АКСИОМ ГЕОМЕТРИИ.

Переходя к вопросу о значении аксиом геометрии, позволю себе сделать несколько предварительных замечаний.

Ограничив себя выяснением объективного в содержании современной аксиоматики геометрии, я сосредоточу главное внимание как на логике ее развития, так по преимуществу и на значении ее для развития геометрии.

Несколько замечаний об идеалистической трактовке вопроса о значении аксиом геометрии будет сделано ниже.

Я буду иллюстрировать развиваемые здесь положения примерами, преимущественно заимствованными из «Оснований геометрии» Гильберта. Такой выбор не случаен: я не знаю ни одной книги по основаниям геометрии, в которой с такой же силой и всеобъемлемостью, как в этой книге Гильберта, были бы отражены все моменты логического развития современного аксиоматического обоснования геометрии.

§ 3. Цели современного аксиоматического обоснования геометрии.

В 1899 г. Гильберт опубликовал книгу «Grundlagen der Geometrie», которая определила на многие годы направление работ в области аксиоматического обоснования геометрии.

Даже при беглом ознакомлении с содержанием этого труда легко обнаружить, что по существу автор ставил себе задачей развить аксиоматику пространства Евклида, которая удовлетворяла бы следующим взаимно связанным условиям:

1. Система аксиом должна удовлетворять идее интерпретации.
2. Система аксиом должна быть полной.
3. Система аксиом должна создавать базу для познания отличия и сходства пространства Евклида от неевклидовых (гиперболического, эллиптического, неархимедова и т. д.).
4. На некотором этапе своего развития аксиоматика должна обращаться в метод исследования в геометрии. Последняя задача имела относительный смысл: требовалось развить аксиоматику более действенной силы, чем аксиоматика Евклида и других исследователей.

§ 4. Элементы и аксиомы геометрии.

Современное аксиоматическое построение теории начинается с установления системы аксиом, рассматриваемой обособленно от фактического содержания геометрии.

Форма и степень обособления аксиоматики от геометрии зависит от «надстройки» в системе обоснования геометрии. Исходя из методологических предпосылок Евклида, совершенно не приходится говорить об обособленности аксиом от геометрии. Наоборот, у Гильберта и его последователей, исходящих из познанной идеи интерпретации, обособление аксиом от геометрии достигает максимальной силы, благодаря чему аксиоматика выступает самостоятельным учением. Именно в самостоятельности основа действенной силы современной аксиоматики геометрии.

Гильберт начинает изложение «Оснований» на первый взгляд исключительно формальным утверждением: «Мы,— пишет он,— мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем их A, B, $C, \ldots$; вещи второй системы мы называем *прямыми* и обозначаем их a, b, $c, \ldots$; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем их α, β, $\gamma, \ldots$».

«Мы мыслим точки, прямые, плоскости,— продолжает Гильберт,— находящимися в известных взаимных отношениях и обозначаем эти отношения словами «лежит на», «между», «параллельный», «конгруентный» и «непрерывный»[1].

Не довольствуясь таким связанным с традиционной терминологей геометрии формальным заданием элементов и отношений между ними, современные авторы, в том числе и сам Гильберт (см., например, D. Hilbert und P. Bernays, «Grundlagen der Mathematik», Berlin, 1934), задают аксиомы геометрии на языке математической логики.

Идея интерпретации должна нам подсказать, что такой формализм имеет объективное значение. Аксиомы задаются теперь как формы с переменным содержанием, как допускающие множество интерпретаций описания отношений между изучаемыми геометрией объектами. Этим решается упомянутая выше первая задача современного аксиоматического обоснования геометрии.

В «Основаниях геометрии» Гильберт распределяет аксиомы евклидовой геометрии на пять групп:

I_{1-8} — аксиомы сочетания,
II_{1-4} — аксиомы порядка,
III_{1-5} — аксиомы конгруентности,
IV — аксиома параллельности,
V_{1-2} — аксиомы непрерывности.

Первая и третья группы аксиом, а также четвертая аксиома имеются и у Евклида. Гильберт уточнил и пополнил содержание этих групп аксиом. Вторая группа аксиом — детище конца XIX столетия; ее впервые разработал Паш. Выделяется пятая группа аксиом. На первом месте стоит известная аксиома Архимеда. Вторая и последняя аксиома пятой группы — аксиома полноты. Введение вместо обычной аксиомы непрерывности Дедекинда аксиомы Архимеда и аксиомы полноты вызвано двумя соображениями: во-первых, аксиома Архимеда позволяет естественнее перейти от аксиоматики пространства Евклида к аксиоматике не-архимедова пространства; во-вторых, аксиома полноты позволяет яснее представить идею интерпретации.

---

[1] «Основания геометрии», русский перевод, стр. 2.

Впоследствии система аксиом Гильберта подвергалась изменению как самим Гильбертом, так и другими исследователями в двух направлениях. Вначале в аксиоматику Гильберта вносились изменения, направленные на исключение из списка аксиом всех предложений, которые могут быть доказаны с помощью оставшихся аксиом. Далее были проделаны исследования, выясняющие взаимную независимость аксиом Гильберта. В этом направлении главные результаты принадлежат Пеано, Шуру, Веблену, Пиери и Кагану. Но развитие проективной геометрии и в особенности топологии показало, что аксиоматика Гильберта далека от совершенства и в других отношениях. Дело в том, что в аксиоматике Гильберта аксиомы топологические не отделены ни от проективных, ни от метрических, почему их неудобно использовать в топологии. Тем самым была поставлена и сейчас еще целиком нерешенная задача разработки аксиоматики евклидовой геометрии с разделенными в ней топологическими, проективными и метрическими аксиомами. В этом направлении интересные результаты (относящиеся к проективной геометрии) получил А. Колмогоров.

§ 5. Взаимная непротиворечивость и независимость аксиом.

Когда задана система аксиом как система форм с переменным содержанием, задача аксиоматического обоснования геометрии вступает во вторую стадию, оборачивается,—надо знать, существует ли хоть одна система математических объектов, отношения между которыми отражаются заданной системой аксиом (задача выполнимости).

Но что значит существовать в математике?

По этому труднейшему для математики вопросу я ограничусь здесь некоторыми общими замечаниями, необходимыми для выяснения значения аксиом геометрии.

Как и во всякой науке, в математике имеет право на существование то, что отражает в конечном счете какую-либо сторону материальной действительности, а потому к чему-нибудь применимо. Следовательно, критерием истинности математических теорий в конечном счете является практика: «Человек идет к объективной истине через практику» (Ленин).

Это исходное положение диалектического материализма идеалисты-математики пытаются дискредитировать, трактуя его грубо эмпирически как требование «примерять на-глазок» тождество понятий математики с объектами внешнего мира, как игнорирование материализмом роли логики в развитии математики.

Нет нужды доказывать, что диалектический материализм отнюдь не предполагает тождества научных понятий с действительностью. Против такого понимания говорит лежащая в его основе теория отражения.

Точно так же диалектический материализм не отрицает роли логики в развитии математики. Хотя это — элементарная истина, однако, имея в виду дальнейшее, я предпочту подтвердить ее указаниями классиков марксизма-ленинизма о роли логики для развития науки.

«Логика,— писал Ленин,— есть учение не о внешних формах мышления, а о законах развития «всех материальных, природных и духовных вещей», т. е. развития всего конкретного содержания мира и познания его, т. е. итог, сумма, вывод *истории* познания мира»[1]. Благодаря этому мы можем с успехом применять логику к развитию научного знания, в частности математики. Кстати, из сказанного Лениным следует, что диалектический материализм можно «упрекнуть» только в одном: он не отбрасывает и не фетишизирует, а объясняет значение логики для науки, в частности математики.

Столь же определенно о роли логики высказался и Энгельс:

«Над всем нашим теоретическим мышлением,— писал Энгельс,— господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они не могут противоречить друг другу в своих конечных результатах, а должны согласоваться между собой. Факт этот является бессознательной и безусловной предпосылкой нашего теоретического мышления»[2].

Основываясь на этом заключении, Энгельс прямо говорил, что «если наши предпосылки верны и если мы правильно применяем к ним законы мышления, то результат должен соответствовать действительности, точно так же как вычисление в аналитической геометрии должно соответствовать геометрическому построению, хотя то и другое являются совершенно различными методами»[3]. «Но,— продолжает Энгельс,— к сожалению, этого почти никогда не бывает или это достигается лишь в совершенно простых действиях».

Хотя Энгельс говорил о роли диалектической логики, но сказанное им относится и к формальной логике. Формальная логика[4] содержательна и не отбрасывается, а снимается материалистической диалектикой. Являясь отражением достаточно общих отношений между объектами материальной действительности, «формальная логика представляет, прежде всего, метод для отыскивания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному, и то же самое, только в гораздо более высоком смысле, представляет диалектика, которая к тому же содержит в себе зародыш более широкого мировоззрения, так как она прорывает тесный горизонт формальной логики»[5].

Из сказанного о существовании в математике следует, что если, задав какую-либо систему аксиом, мы сможем указать систему объектов или образовать совокупность правильных (существующих в математике) математических объектов, отношения между которыми выражаются нашей системой аксиом, то это значит, что наша система аксиом правильна. Правильную систему аксиом справедливо называют непротиворечивой; нельзя притти к формально логическому противоречию, если правильно рассуждать о правильных математических объектах, что возможно

---

[1] «IX Ленинский сборник», изд. 1-е, стр. 23.
[2] Энгельс, Диалектика природы, изд. 3-е, стр. 94.
[3] Маркс и Энгельс, Соч., т. XIV, стр. 377.
[4] Точнее та часть логики, которая обычно так называется.
[5] Энгельс, Анти-Дюринг, изд. 3-е, стр. 123.

лишь в случае правильности исходной системы аксиом. Гарантией же правильности системы аксиом является существование математических объектов, относительно которых оказывается справедливой заданная система аксиом. Поэтому считают систему аксиом правильной, непротиворечивой, если существуют математические объекты, отношения между которыми выражаются этой системой аксиом.

Приведенное нами определение непротиворечивости, однако, не избавляет от необходимости проверять истинность математических теорий в непосредственной практике. Действительно, учение о непротиворечивости ставит в безусловную зависимость истинность каждой системы аксиом от существования по крайней мере одной системы объектов, ей удовлетворяющих, т. е. от истинности другой системы аксиом. Значит, в конце концов для какой-либо системы аксиом доказательство ее непротиворечивости должно быть осуществлено вне математики. Такой системой должна быть система аксиом арифметики[1]. Frege пытался доказать непротиворечивость системы аксиом арифметики посредством сведения к вопросу о непротиворечивости законов формальной логики. Однако открытые Russel'ем и другими парадоксы в области формальной логики и общей теории множеств закрыли возможность использования предложенного Frege пути. Бесплодность многочисленных попыток доказать с помощью формальной логики непротиворечивость системы аксиом арифметики заставила некоторых исследователей, в том числе и Гильберта, поставить вопрос о возможности использовать для этой цели объекты действительности. Немногие, например Gonseth, ответили на этот вопрос утвердительно. Однако Гильберт считает и этот путь не приводящим к цели. Для доказательства непротиворечивости системы аксиом арифметики необходимо существование бесчисленного множества объектов. По мнению же Гильберта, в действительности ничего бесконечного нет, почему и вопрос о существовании бесконечного множества не может быть решен апелляцией к объектам, лежащим вне математики, но должен быть решен внутри самой математики[2]. Поэтому Гильберт считает необходимым вновь искать решения проблемы непротиворечивости системы аксиом арифметики средствами формальной логики. С мнением Гильберта согласиться нельзя: он вынужден при этом постулировать арифметику натурального числа как

[1] Это утверждение, базирующееся на практике математических исследований, содержит в скрытом виде гипотезу: если система аксиом непротиворечива, то существует система объектов арифметической природы, удовлетворяющая этой системе аксиом.

[2] Мы можем в действительности познавать только конечное: так говорит Гильберт (D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, стр. 17). «Это совершенно верно лишь постольку, поскольку в сферу нашего познания попадают лишь конечные предметы. Но это положение нуждается в дополнении: «По существу мы можем познавать только бесконечное». Действительно, всякое реальное, исчерпывающее познание заключается лишь в том, что мы в мыслях извлекаем единичное из его единичности и переводим его в особенность, а из этой последней во всеобщность,— заключается в том, что мы находим бесконечное в конечном, вечное в преходящем». «Бесконечность есть противоречие» (Энгельс, Анти Дюринг, изд. 3-е, стр. 333 и 45).

обоснованную особой способностью нашего духа — наглядным созерцанием. Между тем, правильность арифметики натурального числа также доказана тысячелетиями практики человечества. Кроме того, если бы и удалось свести доказательство непротиворечивости системы аксиом арифметики к вопросу о непротиворечивости какого-либо формально-логического исчисления, то и тогда вопрос еще не был бы решен до конца; непротиворечивость последнего пришлось бы подтвердить экспериментально — его выполнимостью для какой-либо системы объектов, реально заданной (осуществленной) хотя бы в виде написанной на бумаге таблицы. По существу можно сказать, что без фактически построенного примера невозможна никакая общая теория. Последняя есть не только созерцание, но раньше всего действование. И при этом не над бесплотными «духами» наглядного созерцания, как это представляют себе интуиционисты, а над реально заданными объектами. Ибо мысленный эксперимент возможен лишь как отражение действительного.

Именно потому, что непротиворечивость в конечном счете всегда означает выполнимость, доказательство непротиворечивости некоторой системы аксиом дает нам уверенность в правильности получаемых из этих аксиом заключений в применении к удовлетворяющим данной системе аксиом объектам.

Если непротиворечивость есть следствие выполнимости, то наоборот (формальная) противоречивость системы аксиом свидетельствует о ее невыполнимости. В противном случае два противоречащих друг другу положения без борьбы, без какого бы то ни было изменения или развития спокойно сосуществовали бы одно наряду с другим, и наша логика оказалась бы совершенно бесплодной. Ибо из внутренне противоречивой системы аксиом вытекает как следствие правильность любого утверждения, т. е. отождествление истины с ложью. Так как в действительности это не имеет места, то из противоречивости некоторой системы аксиом мы делаем вывод о несовместности их друг с другом. Например, из аксиом обычной арифметики следует, что $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$; кроме того, отношение равенства по самому своему смыслу удовлетворяет следующему требованию: равные величины можно подставлять друг вместо друга. Определим теперь аксиоматически некоторую новую операцию * так: $\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

Если $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\frac{c}{d}=\frac{5}{7}$, то установленная нами операция дает $\frac{3}{4}*\frac{5}{7}=\frac{3+5}{4+7}=\frac{8}{11}=\frac{120}{165}$. Подставим в это равенство $\frac{6}{8}$ вместо $\frac{3}{4}$, от чего по сказанному выше результат не должен был бы измениться. Однако мы получаем: $\frac{6}{8}*\frac{5}{7}=\frac{6+5}{8+7}=\frac{11}{15}=\frac{121}{165}$, откуда следует, что $120=121$. Мы пришли к противоречию, что свидетельствует о несовместимости введенной операции с остальными аксиомами арифметики.

Кроме вопроса о непротиворечивости некоторой системы аксиом, существенную роль для аксиоматического метода и выяснения сущности аксиом играет вопрос об их взаимной независимости.

Установить независимость аксиомы А от других аксиом непротиворечивой системы — значит доказать непротиворечивость другой системы аксиом, отличающейся от первоначальной только одной аксиомой, противоположной А. Следовательно, из выполнимости системы аксиом, содержащей вместо аксиомы А противоположную ей, следует независимость аксиомы А от остальных аксиом системы.

Вейль считает решение вопроса о взаимной независимости аксиом скорее желательным, чем обязательным[1]. Целиком согласиться с мнением Вейля нельзя. Доказательство независимости аксиом является одним из важнейших моментов современного аксиоматического метода. Вейль частично прав только в отношении задачи развития внутреннего содержания непротиворечивой системы аксиом; для доказательства теорем одной геометрии важнее всего непротиворечивость исходной системы аксиом. Но знание взаимной независимости аксиом позволяет яснее представить роль каждой аксиомы в доказательстве тех или иных теорем геометрии.

Будучи обосновано, учение о непротиворечивости позволяет подойти к оценке границ современного аксиоматического обоснования математики, в частности ясно представить себе границы открываемых аксиоматическим методом возможностей отыскания новых фактов в геометрии. На этом вопросе, очевидно, имеющем принципиальное значение, я остановлюсь подробнее. Конкретно я разберу три момента, ограничивающих действенную силу аксиоматического метода.

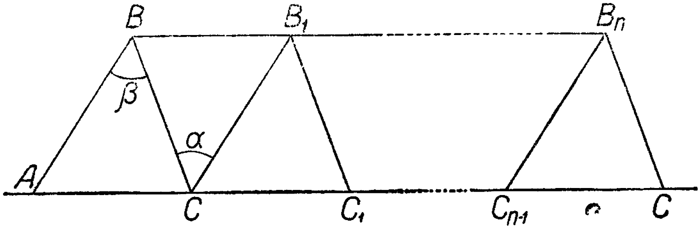
Допустим, что при каком-либо исследовании оказалось целесообразным образовать систему, состоящую из n аксиом. Для использования образованной системы аксиом сперва необходимо доказать ее непротиворечивость. Обычно знают, что входящие в эту систему $n-k$ аксиом совместны, т. е. образуют непротиворечивую систему аксиом. Поэтому вопрос о непротиворечивости ставят так: из всех систем объектов, подчиняющихся $n-k$ аксиомам, найти хотя бы одну, подчиняющуюся всем n аксиомам. Как ни ясна такая постановка задачи, однако практика математических исследований показывает, что сплошь и рядом решение ее представляет исключительные трудности.

В современной математике вопрос о невозможности решения каких-либо задач играет выдающуюся роль. С аксиоматической точки зрения этот вопрос эквивалентен проблеме доказательства противоречивости некоторых систем аксиом. Например, проблему Ферма можно заменить задачей доказательства противоречивости системы аксиом, составленной из аксиом арифметики целых чисел, и аксиомы, содержащей утверждение, противоположное теореме Ферма. Но противоречивость некоторой системы аксиом, очевидно, приходится доказывать непосредственно — путем действительного приведения к противоречию. Обычный метод при этом таков:

Пусть исследуемая система содержит n аксиом. Для достижения цели сперва стараются доказать непротиворечивость системы из $n-k$

[1] Г. Вейль, О философии математики, ГТТИ, 1934 г., стр. 50.

аксиом, выбранных целесообразно из исследуемой системы. Если далее удается показать, что присоединение $(n-k+1)$-й аксиомы исследуемой системы ведет к противоречию, то цель достигнута. Действительно, если бы существовала область объектов, отношения между которыми описывались бы исследуемой системой из n аксиом, то мы могли бы перенести на нее изоморфно все выводы из $n-k+1$ аксиом вплоть до полученных противоречий. Возьмем, например, все аксиомы геометрии Евклида, за исключением аксиомы о параллельных. Из такой системы аксиом можно развить своеобразную геометрию, которую Больэ назвал



Черт. 1.

абсолютной геометрией. Название не совсем удачное, но в нем есть и положительное зерно: абсолютная геометрия непротиворечива и содержит факты, являющиеся общими для геометрии Евклида и Лобачевского — Больэ. Частично эти факты изложены Евклидом в 27 первых предложениях «Начал».

Образуем теперь новую систему аксиом, для чего присоединим к аксиомам абсолютной геометрии утверждение: сумма углов треугольника больше $2d$. В число аксиом абсолютной геометрии входит аксиома Архимеда, которая (в терминах арифметики) утверждает: каковы бы ни были два числа a и b, если $a<b$, то существует такое целое n, что $na>b$.

Легко, однако, показать, что наша система аксиом приводит к утверждению, противоположному аксиоме Архимеда. Доказательство — принадлежащее Гауссу и Лежандру — легко усмотреть из чертежа 1.

Действительно, так как по нашему предположению сумма углов треугольника $>2d$, то $\angle\beta>\angle\alpha$ и, следовательно, $AC>BB_1$. Положим $C_iC_{i+1}=B_iB_{i+1}+\varepsilon$, где, очевидно, $\varepsilon=\mathrm{const}$. Так как отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками, то

$$AB+BB_1+\ldots\quad+B_{n-1}B_n+B_nC_n>AC+CC_1+\ldots\ +C_{n-1}C_n,$$

откуда

$$AB+BC+nBB_1>(n+1)(BB_1+\varepsilon),\ \text{или}\ \mathrm{const}>n\varepsilon$$

п р и в с я к о м n. Мы пришли к противоположному аксиоме Архимеда утверждению; оно говорит, что в области, удовлетворяющей аксиомам абсолютной геометрии, сумма углов треугольника не может быть больше 2d, или, иначе, что выставленная нами система аксиом противоречива.

Итак, противоречивость некоторой системы аксиом может быть доказана лишь путем фактического указания противоречия. Это противоречие в каждом отдельном случае должно быть фактически получено, и никаких универсальных, общих методов его обнаружения аксиоматический метод как таковой не содержит.

Заметим: из сказанного следует, что к проблеме противоречивости или непротиворечивости системы аксиом принцип исключенного третьего неприменим. Действительно, непротиворечивость обычно означает «выполнимость» в какой-либо системе объектов, противоречивость же — фактически полученное (внутри данной дедуктивной системы) противоречие. Непротиворечивость и противоречивость поэтому не являются простыми (формальными) противоположностями, из которых одна есть только отрицание другой.

Аксиоматический метод предполагает, что относительно любого математического объекта α можно сказать, подчиняется или не подчиняется он некоторой известной уже непротиворечивой системе аксиом; без положительного ответа на этот вопрос ни о каких правильных заключениях об α не может быть и речи. Однако легче предполагать возможность ответа на такой вопрос, чем дать такой ответ. Трудности возрастают, когда мы начинаем рассматривать математические понятия в их взаимосвязях, в их развитии. Каждый раз, когда из старых математических понятий развиваются новые, не сводящиеся к старым, т. е. подчиняющиеся какой-то пока неизвестной нам системе аксиом, мы должны оставить аксиоматический метод исследования и рассматривать эти понятия сами по себе. Мы должны изучить своеобразие свойств новых понятий, и только после этого вновь создается возможность аксиоматического их изучения; в этом случае мы идем не от аксиом к новым понятиям, а наоборот — от новых понятий к новым аксиомам. Чтобы сделать сказанное ясным, я приведу два примера.

До начала XIX в. математики не ставили вопроса о сходимости бесконечных рядов, оперируя с ними как с простыми алгебраическими суммами. Однако вскоре заметили, что это приводит к противоречиям, так как в зависимости от порядка членов некоторых рядов их «сумма» принимала различные числовые значения. Что мог сказать нам аксиоматический метод по существу этого противоречия? Понятие ряда создавалось в терминах арифметики и как будто не выходило за ее рамки, поэтому аксиоматический метод мог сказать лишь, что либо неправильны исходные предпосылки, либо же следует отбросить, как неверное, новое понятие. Напрасно было бы искать в самом аксиоматическом методе указаний на то, как следует изменить новое понятие, чтобы сохранить, с одной стороны, все богатство получаемых с его помощью правильных следствий, исключив, с другой, возможность неверных выводов. Аксиоматический метод неспособен был бы предуказать также, что понятие бесконечного ряда окажется обладающим более глубокими качественно своеобразными свойствами, отличными от свойств алгебраических сумм. Между тем такое изменение понятия «суммы» в применении к бесконечным рядам было сделано Риманом на основе изучения бесконечных рядов в их развитии и оказалось в высшей степени плодотворным.

Другой пример дает полемика Кантора с противниками его учения об актуально бесконечном. Несмотря на метафизичность своей идеалистической философии, Кантор как гениальный математик не мог не заметить, что подобные вышеприведенному противоречия, получающиеся от простого перенесения на новую область справедливых для исходной области законов, не говорят против нового учения. «Все так называемые доказательства против возможности актуально бесконечных чисел,— писал Кантор,— заранее приписывают или скорее навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем бесконечные числа, если только вообще их должно мыслить в какой-нибудь форме, должны образовать, благодаря своей противоположности к конечным числам, совершенно новый числовой вид, свойства которого вполне зависят от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола или наших предрассудков»[1].

Подобных примеров можно привести большое количество; здесь достаточно напомнить, например, еще историю развития понятия числа. Все они говорят за то, что в развитии математики, помимо **формальной постановки вопроса о противоречии**, необходима и **содержательная**. В первом случае речь идет лишь о доказательстве **несовместимости**. Напротив, во втором—о противоречии, преодоление которого невозможно при помощи аксиоматического метода. Такие противоречия мы называем **содержательными**. **Содержательные противоречия являются выражением развития новых математических понятий, основные свойства которых надо изучить раньше, чем их можно задать аксиоматически.**

Но всегда ли можно ожидать появления содержательных противоречий в математической теории? Математика не есть «свободное» творчество «не загрязненных» соприкосновением с действительностью «чистых» математиков. Она практически применима лишь потому, что изучает свойства и отношения между реально существующими предметами, что отражает, значит, нечто реальное, независимо от нас и нашего мышления существующее. Поэтому, когда в силу теоретических или практических задач приходится создавать новые, необходимые для их решения понятия, вопрос о распространении на них каких-нибудь математических законов сопряжен с преодолением возникающих при этом содержательных противоречий.

Современный аксиоматический метод является поэтому только моментом рассмотрения математических понятий в их взаимосвязях, в их развитии. Попытка раз навсегда обосновать математику с помощью аксиоматического метода, предпринятая Гильбертом, даже в случае, если бы Гильберту удалось доказать непротиворечивость арифметики, не может в силу этого считаться приводящей к цели.

§ 6. Аксиоматический метод как орудие отыскания новых фактов.

Когда доказана непротиворечивость системы аксиом и по возможности их взаимная независимость, аксиоматика вступает в последний этап своего развития,

[1] «Новые идеи в математике», сборн. № 6, стр. 81.

возвращается к исходному пункту, т. е. к фактическому содержанию геометрии.

Такое завершение не представляет простого возврата к исходному пункту. Так, современная аксиоматика геометрии, в частности аксиоматика Гильберта, позволяет глубже вскрыть взаимосвязи в наличном ее содержании, т. е. дать утверждениям геометрии более строгое доказательство. Но не только со стороны более глубокого проникновения внутрь уже известного важна новая аксиоматика: при возврате к исходному пункту своего развития она перерастает в метод отыскания нового в геометрии, и в этом (о чем подробнее ниже) ее главное значение. Предварительно, однако, одно небольшое замечание

Из одних только аксиом еще не следует полностью все содержание геометрии. Даже если аксиомы являются явно выраженными описаниями элементов и отношений между ними, благодаря этому еще не вырисовывается с необходимостью картина целого, картина исследуемых объектов, так как последние не механически складываются из элементов. Так, из аксиом геометрии Евклида не следует содержание понятий треугольника, угла, окружности и т. п. Аксиомы только составляют базу для введения этих понятий, поскольку они выражают отношения между элементами этих пространственных форм. Чтобы вернуться от аксиоматики к геометрии, надо не только явно выразить элементы, но и определить основные объекты (пространственные формы).

Короче говоря, вопреки мнению многих, геометрия не является следствием только явно выраженных аксиом. Аксиомы, «вставленные в логическую машину», не могут — хотя бы в силу бесконечности числа вытекающих из них следствий — заставить выйти из нее весь ряд теорем: чтобы вырисовывалась картина научной дисциплины, необходимы еще определения основных объектов (пространственных форм).

Защищаемая часто точка зрения на определения как на простые сокращения (Рёссел, например), которые поэтому могут быть полностью элиминированы из научной теории, явно недостаточна, ибо она не объясняет, *почему* рассматриваются именно такие, а не другие комбинации элементов. Но, оставаясь внутри данной системы, в большинстве случаев нельзя бывает ответить на вопрос о причине выбора именно таких, а не других определений. Последнее может потребовать выхода за пределы данной научной теории, обращения к отражаемым этой системой объектам и отношениям между ними.

Три взаимно связанных момента характеризуют современную аксиоматику, в частности аксиоматику Гильберта, как метод отыскания нового в геометрии. Они являются специфическими для современной аксиоматики; их не было и не могло быть в аксиоматическом методе Евклида, ограниченном одной системой объектов.

Первый — решающий — момент современного аксиоматического метода выражен в идее изоморфизма, базирующейся на идее интерпретации.

Пусть R — интерпретация непротиворечивой системы аксиом A. В развернутой форме R включает не только явно выраженные понятия элементов, но и соответственно им и аксиомам установленные понятия основных объектов (пространственных форм). Пусть R_1 — в развитой форме вторая интерпретация той же системы аксиом A. Если в R_1 можно выделить такие основные элементы, отношения между которыми задаются системой аксиом A так же, как задаются этой же системой A отношения между соответственными элементами R, и обратно, то мы говорим, что R и R_1 изоморфны. Каждое предложение, доказанное относительно объектов интерпретации R, в тех же терминах — но с иным, в зависимости от явно выраженных элементов, содержанием — справедливо относительно соответственных объектов интерпретации R_1, и нет ничего, что было бы справедливо в R, не будучи справедливо в R_1, и наоборот. Благодаря этому нам нет необходимости порознь доказывать все теоремы об объектах R и R_1. Достаточно доказать теоремы относительно объектов R, после чего все они могут быть перенесены на соответственные объекты R_1. Примером такого переноса является принцип двойственности в проективной геометрии. Метод координат Декарта позволяет пространство Евклида изоморфно отобразить на область операций линейной алгебры. Красивым примером изоморфного отображения является геометрия кругов.

Широко используемая в современной математике идея изоморфизма оказывается действенным орудием даже при изучении некоторых вопросов физики. Основываясь на законе Грассмана, согласно которому между любыми четырьмя цветами существует линейное соотношение, но в то же время между тремя цветами найти линейное соотношение иногда невозможно, можно изобразить цвет вектором трех измерений. Установив понятие суммы, удается связать учение о цвете с геометрией Евклида. «Представим себе,— говорит Вейль,— сеть проводников постоянного тока, состоящую из отдельных однородных проволок, разветвляющихся в узловых точках, и назовем «точкой» произвольное распределение тока, которое сообщает каждой проволоке s силу тока I_s. В такой системе имеют силу законы евклидова пространства с центром в O и такого количества измерений, сколько есть проволок в сети... Эта изоморфия вовсе не носит характера игры, ибо благодаря ей простые и важные геометрические понятия ставятся в соответствие с простыми и важными, касающимися распределения тока в сети понятиями физики. Например, основная задача: при заданной величине напряжений в каждой проволоке — определить получающееся в сети проводников распределение сил тока—тождественна с геометрической задачей перпендикулярного проектирования точки на заданную плоскость. Очевидно, что математика немедленно гарантирует однозначную решимость этой задачи, а также дает в руки метод вычисления решения ее»[1].

Второй момент современного аксиоматического метода связан с существованием различных геометрий.

Мы знаем, что существуют различные геометрии, которые определяются отчасти общими, отчасти различными или противоположными аксиомами. Поэтому, обратно, мы можем взять произвольную комбинацию из этих аксиом, добавить порой еще несколько необходимых с нашей точки зрения аксиом и искать новую геометрию, подчиняющуюся заданной нами системе аксиом. Наиболее положительные результаты достигаются при

[1] Г. Вейль, О философии математики, ГТТИ, 1934 г., стр. 55—56.

этом тогда, когда удается доказать непротиворечивость заданной системы аксиом; мы открываем новую геометрию. Если система аксиом оказывается противоречивой (несовместной), то и в этом случае мы приходим к некоторому положительному результату: мы можем отрицать существование области математических объектов, подчиняющихся заданной системе аксиом.

Третий момент современного аксиоматического метода связан как с возможностью существования различных геометрий, так и с идеей изоморфизма.

Пусть даны две непротиворечивые системы аксиом. Пусть наряду с различными аксиомами они содержат по n одинаковых аксиом. Тогда все, что можно доказать на основании этих аксиом в любой интерпретации первой системы, может быть изоморфно перенесено на любую интерпретацию второй. Как известно, на этом пути особенно блестящих результатов добился Гильберт. Ему, например, удалось в плоскости и независимо от аксиомы Архимеда[1] обосновать учение Евклида о пропорциях. Исходя из полученных результатов, т. е. опять-таки независимо от аксиомы Архимеда, Гильберт обосновал учение Евклида о площадях. Тем самым он доказал, что учение о площадях и пропорциях одинаково как для пространства Евклида, так и для неархимедова пространства.

Точно так же плодотворно используется частичное совпадение аксиоматик учения о векторах и кватернионах, обычного анализа и анализа векторного и т. п.

В свете третьего момента современного аксиоматического метода становится особенно ясной необходимость доказательства взаимной независимости аксиом, а также стремление многих авторов (в частности Гильберта) исключить из аксиом лишние составные части, доказуемые на основании других аксиом.

Все перечисленные моменты современного аксиоматического метода, в особенности идея изоморфизма, дают основание современному взгляду на полноту системы аксиом.

Непротиворечивая система аксиом может быть названа полной, если для всякого, относящегося к любой ее интерпретации, суждения a разрешим вопрос: «истинно ли a или не $= a$». Однако ответ на такой вопрос не всегда возможен. Предположим, что некоторая непротиворечивая система аксиом (A_1, A_2, ... A_n) может быть расширена, т. е. возможно образовать непротиворечивую систему аксиом (A_1, A_2, ... A_n, M). Существование системы аксиом (A_1, A_2, ... A_n, M) свидетельствует о невозможности решить относящиеся к интерпретациям системы (A_1, A_2, ... A_n) вопросы, требующие для своего решения аксиомы M. Например, пусть система аксиом (A_1, A_2, ... A_n) есть система аксиом Гильберта без аксиомы II_2, которая утверждает, что «если A и C — точки одной прямой, то существует по меньшей мере одна точка B, лежащая между A и C, и по меньшей мере одна точка D такая, что C лежит между A и D». С помощью такой системы аксиом невозможно доказать, ни что между любыми двумя точками прямой существует бесконечное множество точек, ни что его не существует. Следовательно, необходимым (но достаточным ли?) условием полноты непротиворечивой системы аксиом является невозможность

[1] Т. е. на основании I_{1-3} и II—IV групп аксиом.

ее расширения. Исследования Паша, Гильберта и плеяды его последователей, да и вообще вся история развития геометрии, говорят за то, что мы еще далеки от полной системы аксиом геометрии Евклида. Но несомненно также и то, что система аксиом Гильберта более полна, чем система аксиом Евклида. Полнота — это высшая ступень развития аксиоматики, к которой мы приближаемся шаг за шагом,

С этой точки зрения интересен вывод Геделя. Он показал, что для всякой ф о р м а л ь н о й дедуктивной системы можно сформулировать в ее же терминах такие положения, которые неразрешимы ее средствами. Поэтому вполне естественно такое современное определение полноты системы аксиом: система аксиом полна, если все ее интерпретации необходимым образом изоморфны.

§ 7. Заключение.

Перехожу к заключительным замечаниям об истолковании представителями математического идеализма вопросов современного аксиоматического обоснования геометрии.

Общеизвестна гениальная ленинская характеристика философского идеализма. «Философский идеализм,— писал Ленин,— есть *только* чепуха с точки зрения материализма грубого, простого, метафизического. Наоборот, с точки зрения *диалектического* материализма философский идеализм есть *одностороннее*, преувеличенное, überschwengliches (Dietzgen) развитие (раздувание, распухание) одной из черточек, сторон, граней познания в абсолют, *оторванный* от материи, от природы, обожествленный» [1].

Ясно, что характеристика Лениным философского идеализма целиком относится и к математическому идеализму, что нас обязывает не отбрасывать, а преодолевать его.

Ленин объяснил, почему философский идеализм не представляет т о л ь к о чепухи, простого пустословия. «Познание человека,— много раз подчеркивал Ленин,— не есть (respective — не идет по) прямая линия, а кривая линия, бесконечно приближающаяся к ряду кругов, к спирали. Любой отрывок, обломок, кусочек этой кривой линии может быть превращен (односторонне превращен) в самостоятельную, целую, прямую линию, которая (если за деревьями не видеть леса) ведет тогда в болото, в поповщину (где ее *закрепляет* классовый интерес господствующих классов). Прямолинейность и односторонность, деревянность и окостенелость, субъективизм и субъективная слепота — voila гносеологические корни идеализма» [2].

И с этой стороны ленинская характеристика философского идеализма относится к математическому идеализму. В частности, математический идеализм также односторонне превращал и превращает спираль развития аксиоматики в прямую линию, что вело к одеревенению и ограничению понимания ее сути.

С одним из таких моментов мы уже встречались, когда шла речь

---

[1] Л е н и н, Собр. соч., т. XIII, изд. 2-е, стр. 304.

[2] Там же.

о стремлении Гильберта использовать аксиоматический метод как универсальное средство обоснования математики и притом обоснования раз навсегда.

Нужно признать, что мы почти ничего не сделали в направлении научной критики современного математического идеализма. Главный наш порок заключается в том, что мы привыкли отбрасывать, а не преодолевать математический идеализм. И это, несмотря на то, что работы классиков марксизма - ленинизма,— «Материализм и эмпириокритицизм» в особенности,— дают блестящие образцы не только критики идеализма, но и его преодоления.

С. Яновская.

ИДЕАЛИЗМ И МАТЕМАТИКА.

К математике идеалистическая философия питает особое пристрастие. Начиная с древних времен, философы-идеалисты используют математику для доказательства возможности «чистого», априорного познания, ничего не отражающего в материальном мире. Если можно, задавая вопросы мальчику, привести его не только к констатированию математического факта, но и к доказательству последнего, то не служит ли это, спрашивал Платон, доказательством того, что математические положения уже были заранее известны мальчику, что их знание заложено в его духе, и ему нужно только *вспомнить* (анамнезис) усвоенные во время предыдущей жизни в мире «идей» факты. И так же в новое время Кант использует математику для доказательства возможности априорного, но в то же время содержательного познания, для обоснования своего трансцендентального идеализма, согласно которому разум предписывает законы природе, и время и пространство являются не объективной реальностью, а формами человеческого созерцания.

Пожалуй, самую распространенную среди современных буржуазных философов и математиков точку зрения на математику выразил Дюринг. «Относительно всей чистой математики,— пишет Энгельс,— господин Дюринг думает, что он может ее... вывести априорно, т. е. прямо из головы, не прибегая к опыту из внешнего мира. В чистой математике, уверяет он, рассудок занимается «своими собственными свободными творениями и фантазиями»; понятия числа и фигуры составляют «достаточный для нее и создаваемый ей самой объект», и таким образом она имеет «значимость, не зависящую от частного опыта и реального содержания мира»[1].

Если эта точка зрения была распространена уже в XIX в., то в эпоху империализма и пролетарских революций она является поистине господствующей в буржуазных странах[2].

Самый рост науки, все развитие математики последних 50 лет говорит как будто в пользу этой точки зрения. В самом деле, не лежит ли в основе

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 38.

[2] Либеральному эклектизму и в этой области все в большей и большей мере приходит конец. И среди математиков буржуазных стран происходит расслоение: с одной стороны, половинчатые установки в их среде эволюционируют в сторону откровенного идеализма, приобретающего положение господствующей идеологии, с другой,— растет и число математиков, открыто становящихся на сторону диалектического материализма.

современной математики теория множеств, созданная Кантором в борьбе с стремившимися ограничить полет его фантазии Кронекером и большинством математиков того времени, в борьбе, в которой Кантор выступал под лозунгом: «сущность математики в ее свободе»? И не означает ли эта «свобода» право рассудка заниматься в математике «своими собственными свободными творениями и фантазиями»? Не доказало ли это развитие возможности существования бесчисленного множества различных геометрий, не только 3-и 4-мерных (пространство — время), но и многомерных и неевклидовых. И не подтверждает ли оно, таким образом, точку зрения не только Дюринга, но и Пуанкаре, что математик сам творит математические факты «или, скажем иначе, их творит его каприз»[1], что «математика есть то из творений человеческого ума, для которого он меньше всего заимствовал извне», почему, мол, и «полезны известные математические умозрительные построения, вроде тех, например, которые относятся к исследованию постулатов необычных геометрий, функций со странными свойствами. Чем более эти построения удаляются от самых обычных концепций и, следовательно, от природы и приложений, тем яснее видно для нас, что может сделать человеческий ум, когда он освобождается все более и более от тирании внешнего мира»[2].

Так ли это? Действительно ли математика сама по себе есть столь проникнутая духом идеализма наука, что самое обучение ей, как того хотел Герман Коген, равносильно проповеди идеализма?

«Герман Коген,— говорит Ленин,— доходит до того, что проповедует введение высшей математики в школы — для ради внедрения в гимназистов духа идеализма, вытесняемого нашей материалистической эпохой»[3].

Правильный ответ на этот вопрос для нас тем более важен, что и у нас встречается еще убеждение в идеалистическом характере математики, что и у нас полагают иногда, будто выход из кризиса физики, состоящего, как известно, в том, что «исчезла материя, остались одни уравнения», лежит на пути изгнания из физики уравнений и математики вообще. А между тем Ленин считал приближение физики «к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку», прогрессом науки, крупным успехом естествознания. Больше того, на математике блестящим образом подтверждается точка зрения Ленина, что в условиях капиталистического общества эпохи империализма, вся обстановка которого толкает буржуазного ученого в объятия реакционной идеалистической философии, реакционные поползновения порождаются самим прогрессом науки, прогрессом, не опровергающим, а подтверждающим в действительности точку зрения диалектического материализма.

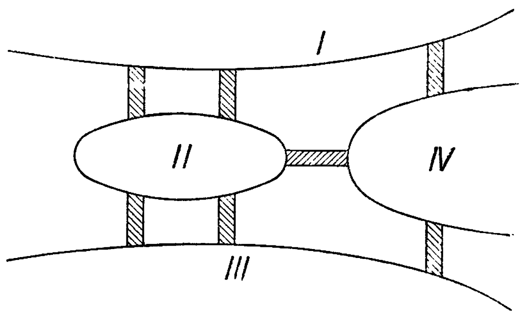
Ленинский анализ кризиса физики оказывается полностью приложимым и к кризису основ математики. Попытка сделать упомянутые нами на вид как будто бы само собой разумеющиеся идеалистические выводы из роста математики и связанной с ним крутой ломки ее понятий и методов на деле приводит лишь к кризису ее основ (освещению которого посвя-

[1] Пуанкаре, «Наука и метод», стр. 17.
[2] Там же, стр. 25—26.
[3] Ленин, «Материализм и эмпириокритицизм». Соч., изд. 2-е, т. XIII, стр. 252.

щена статья проф. В. И. Гливенко). И в этом нет ничего удивительного. Ибо, повторяю, развитие математики, как и всей вообще науки в целом, в действительности идет по пути, предвиденному классиками марксизма-ленинизма. Особый и притом весьма абстрактный характер математики может затушевать ее происхождение из внешнего мира, диалектико-материалистический характер ее развития, но отменить его он не может. Показать это хотя бы в общих чертах и является задачей настоящей статьи.

Математика, говорит Энгельс, это — наука, имеющая своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Общей чертой как пространственных форм, так и количественных отношений является их *безразличие* к особому характеру тех предметов, которые обладают пространственными формами или находятся в количественных отношениях. Если мы знаем о предмете только то, что он есть «шар», мы еще ничего не можем сказать о том особом роде *вещей*, к которому он принадлежит, между тем как, если он есть «яблоко», то принадлежит непременно к роду «плодов». Точно так же, если нам известно, что некоторая совокупность вещей характеризуется числом 5 (содержит их в числе 5), мы еще ничего не можем сказать о п р и р о д е тех предметов, которые входят в эту совокупность. Какую бы совокупность, характеризуемую числом 5, мы при этом ни взяли, ее можно так привести в соответствие с любой другой совокупностью, тоже содержащей пять вещей, что каждому предмету одной совокупности будет соответствовать некоторый предмет другой и, наоборот, каждому предмету второй — некоторый предмет первой, и притом так, что разным предметам первой совокупности будут соответствовать разные предметы второй, и наоборот. Подобное соответствие называется в математике взаимно однозначным.



Черт. 1.

Так, представим себе, что мы сбили пятью выстрелами пять мишеней. Легко видеть, что таким путем мы установили требуемое нами взаимно однозначное соответствие между совокупностью выстрелов и совокупностью мишеней и что число 5 характеризует общее свойство этих совокупностей, сохраняющееся при замене одной из них другой.

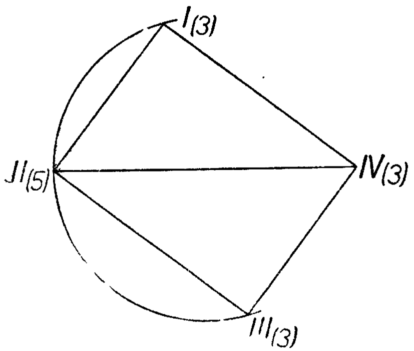
Число—это «чистейшее количественное определение» (Э н г е л ь с)—оказывается, таким образом, общей характеристикой тех совокупностей вещей, которые могут быть приведены во взаимнооднозначное соответствие друг с другом. Совершенно ту же картину мы можем наблюдать решительно во всех областях математики. В качестве примера рассмотрим известную задачу Эйлера о кенигсбергских мостах.

В Кенигсберге протекает река Прегель, образующая два рукава. Неподалеку от места разветвления на реке есть остров. Остров и участок земли между рукавами соединены между собой и с берегами семью мостами, как показано на прилагаемом чертеже (черт. I). Требуется совершить прогулку по Кенигсбергу, пройдя раз и только один раз по каждому мосту.

Чтобы решить эту задачу, Эйлер поступил таким образом: все четыре участка земли, отмеченные у нас на чертеже римскими цифрами, он заменил точками, а мосты, связывающие их, линиями. Получилась следующая, примерно, картина (см. чертеж 2); (форма линий, связывающих точки, совершенно безразлична).

Задача прогуляться по Кенигсбергу заменилась при этом задачей описать непрерывным движением пера (не отрывая его от бумаги) нарисованную на чертеже 2 картинку, не двигаясь при этом более одного раза по одной и той же линии.

Ясно, что последняя задача невыполнима, ибо, попав в некоторую точку по одному пути, мы всегда должны иметь возможность (если только эта точка не является концом) выйти из нее по другому, а для этого требуется, чтобы число путей, сходящихся у этой точки, было четным. Поэтому для выполнимости задачи необходимо, чтобы все точки, за исключением двух, которые могут быть выбраны за конечные, были «четными». Между тем на чертеже 2 ни одной «четной» точки нет.



Черт. 2.

Перед нами опять пример взаимно однозначного соответствия; каждому участку земли на чертеже 1 мы поставили в соответствие точку на чертеже 2, каждому связывающему участки земли мосту на чертеже 1 — линию, связывающую точки на чертеже 2. Вещи и связи (отношения между ними) одной системы мы заменили вещами и связями (отношениями) другой, сохранив, таким образом, в неизменности только общую «структуру» этих систем. Именно с этой общей «структурой» различных систем и совокупностей вещей, сохраняющейся при взаимно однозначном «отображении» их друг на друга, мы имеем всегда дело, когда речь идет о т. наз. *количественных отношениях*. «Безразличие» такой *количественной* «структуры» состоит в том, что она не изменится, если данную систему (или совокупность) вещей a, b, $c, \ldots$, связанных отношениями α, β, $\gamma, \ldots$, заменить ей «изоморфной», как говорят математики, т. е., вообще говоря, совершенно от нее отличной, но такой, чтобы между вещами и отношениями первой системы и вещами и отношениями второй можно было установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу отношения связывали бы и соответствующие друг другу пары или группы вещей. Понятно поэтому, что для того, чтобы изучить эти пространственные формы и количественные отношения «в их чистом виде, следует их оторвать совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела» (Энгельс) [1]. Отсюда — чрезвычайно абстрактный характер математики. Отсюда — утверждение математика, что для построения геометрии, например, ему не надо знать, что такое «точка», «прямая», «лежит на», «между» и т. п., а важен только выражаемый системой аксиом «узел отношений» между этими предметами (и отношениями).

«Как и прочие науки, математика возникла из потребностей человека: из измерения земли и вместимости сосудов, из исчисления времени и механики» (Энгельс)[2]. При этом на первых ступенях развития она состояла из двух отдельных наук: арифметики, т. е. науки о числе, и притом первоначально только целом числе, и геометрии, т. е. науки о пространственных формах. Примерно в конце XVI — начале XVII столетия, т. е. в эпоху, когда в рамках феодализма шло первоначальное капиталистическое накопление, стала остро ощущаться потребность в общем научном методе.

Ремесленная техника покоится на строгих правилах и предписаниях, передаваемых мастером ученику. Каждой задаче a соответствует при этом правило b, ее решающее, и различных правил может быть столько же, сколько различных задач. Пока число задач еще не очень велико, один мастер в состоянии запомнить все нужные в его ремесле правила. Однако уже благодаря мануфактуре и развитию мировой торговли в XVI и XVII столетиях число задач столь сильно увеличилось, самые задачи настолько диференцировались и усложнились, что неизбежно выдвинулась проблема обобщения, проблема научной теории. Темпы жизни ускорились, все чаще и чаще приходилось попадать в обстановку, которая требовала умения ориентироваться в новых условиях, ставила такие задачи, на которые не было готового ответа у самых признанных авторитетов. Передовые мыслители того времени почувствовали потребность не в еще одном десятке, сотне или тысяче новых правил, решающих тысячу новых задач, а именно в общем методе, способном дать ключ к решению любой лишь могущей возникнуть задачи. Проблема метода стала центром исследований Бэкона, Декарта, Лейбница и других ученых и философов XVII столетия.

Так как наиболее развитыми науками к тому времени были механика и астрономия, где количественные отношения играют наиболее существенную роль, то эти поиски общего метода сразу же направились в сторону математики. Декарт впервые выдвинул идею универсальной математики как науки о наиболее общих количественных отношениях, проявляющихся как в области чисел, так и в пространственных фигурах. На этом пути им и была создана синтезирующая алгебру с геометрией аналитическая геометрия. Этот переход от изучения соотношений между индивидуальными числами и отдельными геометрическими фигурами к изучению общих количественных отношений был связан с переходом от математики постоянных величин к математике переменных.

В самом деле, для того, чтобы изучить в чистом виде отношения,

---

[1] К. Маркс и Фр. Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 39.
[2] Там же.

имеющие место среди чисел, например для того, чтобы сформулировать переместительный закон умножения или сложения, недостаточно написать, что $3+5=5+3$ или $3\times5=5\times3$. Можно написать неограниченно много таких отдельных равенств, и, однако, ими еще не будет выражен общий закон. Для того, чтобы сформулировать этот закон как всеобщий, надо ввести переменную величину и связанное с ней буквенное исчисление. Лишь в форме $a+b=b+a$ и соответственно $a\cdot b=b\cdot a$ этот переместительный закон сложения и умножения получает надлежащее выражение. Вообще нужно сказать, что для того, чтобы выделить в чистом виде и подвергнуть особому изучению отношение между вещами, нельзя просто механически отделить вещи от отношений, ибо отношение не есть особая вещь, существующая наряду с другими вещами. Чтобы «выделить в чистом виде» отношение, надо сделать вещи переменными.

Рассматривая соотношения между переменными отрезками, с которыми он, вводя операции сложения, вычитания, умножения и деления отрезков, оперирует как с числами, Декарт и установил тождество этой геометрической алгебры с алгеброй чисел и связал, таким образом, арифметику с геометрией.

С другой стороны, введение переменной величины в математику дало последней возможность отобразить движение, благодаря чему вслед за аналитической геометрией Декарта «немедленно стало необходимым диференциальное и интегральное исчисление» (Энгельс).

Подобный этому переворот претерпела математика и в конце XIX — начале XX столетия. Но теперь стали — и притом вполне сознательно — рассматривать как переменные не только вещи, между которыми установлены какие-нибудь отношения, но и сами эти отношения. Так, в формуле $a+b=b+a$ можно считать переменными не только величины a и b, но, например, и знак операции «плюс», т. е. можно подвергнуть рассмотрению различные возможные операции «сложения». Чтобы сделать это более понятным, приведем простой пример. Высказывание «$2+2=4$» представляет один из наиболее обычных, можно сказать, классических примеров абсолютной истины, недоступной изменению. (И оно действительно является таковым при обычном определении сложения.). Между тем в действительности не каждые два предмета, присоединенные к двум другим предметам того же рода, обязательно дают четыре таких же предмета. Так, имея на тарелке две группы по два ртутных шарика в каждой, нетрудно, соединив их друг с другом, получить в результате не четыре отдельных ртутных шарика, а только один [1]. И можно и математически представить себе такую операцию «сложения», для которой $2+2$ уже не только 4. Так, в теории чисел при рассмотрении так называемых сравнений сумма $2+2$ считается равносильной нулю по модулю 4 и еди-

[1] Для масс соотношение $2+2=4$, конечно, сохранит силу. Здесь, однако, речь идет не о массе, а о простом подсчете предметов. Если бы кто-либо устроил такие «счеты», «костяшки» которых в процессе счета сливались бы друг с другом, как ртутные шарики, или—еще хуже—вступали бы в химическую реакцию, его «изобретение» вряд ли могло бы быть запатентовано в качестве счетного инструмента, несмотря на то, что закон сохранения массы сохранил бы силу.

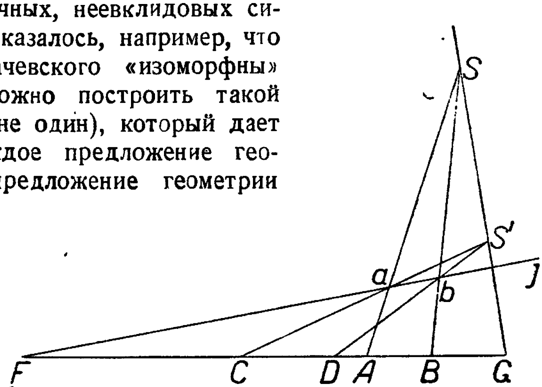
нице по модулю 3. Интересно, что такая, например, область, как генетика, создает потребность в особых новых математических операциях, не подчиняющихся больше законам обыкновенной арифметики (работы проф. А. С. Серебровского).

Отсюда — возможность существования различных «алгебр» как характерная особенность современной математики, где наряду с обыкновенной алгеброй существуют алгебра векторная, тензорная, алгебра кватернионов и др.

Отсюда — современная абстрактная теория групп как учение об алгебраических операциях весьма общего вида.

Совершенно такой же процесс, как в области алгебры, произошел к этому времени и в области геометрии.

Здесь, собственно, даже раньше, чем в алгебре, выяснилась возможность существования различных, неевклидовых систем геометрии. При этом оказалось, например, что геометрии Евклида и Лобачевского «изоморфны» друг другу, т. е. что можно построить такой «словарь» (и притом даже не один), который дает возможность перевести каждое предложение геометрии Лобачевского в предложение геометрии Евклида или наоборот.



Черт. 3.

Чтобы дать возможность читателю представить себе, как это делается, опишем в общих чертах один из таких «словарей». В геометрии толкуют о таких «вещах», как «точка», «прямая», «плоскость» и т. д., между которыми установлены отношения, выражаемые словами «лежит на», «между», «конгруентно», «параллельно» и т. п. Представим себе теперь, что мы умеем разговаривать на языке обыкновенной евклидовой геометрии, т. е. знаем, что такое *точка, прямая* в привычном смысле этого слова, и рассмотрим, кроме того, необычные «точки», «прямые», под которыми будем понимать, однако, некоторые не выходящие за пределы геометрии Евклида предметы и отношения. Итак, у нас есть два рода *точек, прямых* и т. д.: одни в кавычках, другие без. Смысл тех, которые в кавычках, разъясним с помощью следующего «словаря»:

«точка» = точка внутри данного круга O,

«лежит на» = лежит на, «между» = между,

«конгруентность отрезков прямой» = проективное равенство отрезков прямой[1] относительно точек ее, лежащих на окружности O, и т. д.

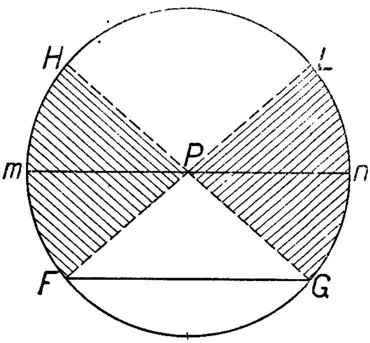
---

[1] Два отрезка AB и CD (черт. 3) проективно «равны» относительно двух данных точек F и G, если оба они являются проекциями одного и того же отрезка ab, лежащего на прямой, проходящей через точку F, причем центры проекции S и S' лежат на прямой, проходящей через точку G.

Нетрудно показать, что точки F и G играют по отношению к такому определению «равенства» роль бесконечно удаленных.

Можно показать теперь, что для наших «точек», «прямых» и т. д. выполняются все аксиомы геометрии Евклида, за исключением одной — аксиомы о параллельных. Так, ясно, например, что две «точки» определяют одну и только одну «прямую», что две «прямые» пересекаются не более, чем в одной «точке», что через каждую «точку», лежащую вне некоторой «прямой», можно провести «прямую», не пересекающую данную. Однако не одну, как это требуется аксиомой о параллельных геометрии Евклида, а бесчисленное множество. В самом деле, ни одна из «прямых», лежащих внутри углов HPF и LPG и проходящих через «точку» P, не пересекает «прямой» FG (черт. 4).

Получается картина, полностью соответствующая требованиям геометрии Лобачевского, но каждая теорема геометрии Лобачевского оказывается при этом некоторой теоремой из геометрии Евклида. Этим было доказано, что если бы удалось найти противоречие в геометрии Лобачевского, то немедленно обнаружилось бы противоречие и в геометрии Евклида, т. е. была выяснена **независимость** аксиомы о параллельных геометрии Евклида от остальных аксиом этой геометрии.



Черт. 4

Оказывается таким образом, что даже если бы мы поставили перед собой только проблему выяснения внутренних связей и строения геометрии Евклида[1], в частности захотели бы доказать, что аксиома о параллельных действительно аксиома, а не теорема, нам пришлось бы для решения этой задачи сделать переменными основные понятия и соотношения геометрии Евклида с целью выделить в чистом виде ее «структуру».

Неудивительно поэтому, что один из крупнейших математиков современности—Гильберт начинает свои знаменитые «Основания геометрии» словами: «Мы мыслим три различные системы вещей: вещи **первой** системы мы называем **точками** и обозначаем их A, B, C, . . . ; вещи **второй** системы мы называем **прямыми** и обозначаем их a, b, c, . . . ; вещи **третьей** системы мы называем **плоскостями** и обозначаем их α, β, γ, . . . Мы мыслим точки, прямые, плоскости находящимися в известных взаимоотношениях и обозначаем эти отношения словами: «лежит на», «между», «параллельно», «конгруентно» и «непрерывно». Точное и для математических целей полное описание этих отношений дается **аксиомами геометрии**»[2]. При этом под «точкой», «прямой», «лежит на», «конгруентно», «между» и т. д. Гильберт разрешает понимать все, что угодно, лишь бы соблюдались выраженные аксиомами соотношения, связывающие эти предметы и отношения друг с другом. Если бы он этого не «разрешил», нельзя было бы составлять «словари»,

[1] Неевклидовы геометрии имеют и сами по себе большое значение в современной математике и физике.

[2] Д. Гильберт, Основания геометрии, стр. 2.

подобные вышеприведенному, т. е. немыслимо было бы исследование внутренней «структуры» геометрии Евклида, являющееся задачей этой работы Гильберта.

Но таким образом оказалось, что изучаемые геометрией соотношения носят *количественный*, в смысле безразличного к. содержанию предметов, среди которых они имеют место, характер Больше того, было обнаружено, что они могут быть справедливы не только для физического пространства, но и для других областей реальной действительности, например, как показал Гельмгольц, аксиомы геометрии Евклида осуществляются в области цветов спектра[1]. Точнее, не соотношения, упоминаемые непосредственно аксиомами, а отношения между этими отношениями, потому что самые отношения, как «между», «эквивалентно», «лежит на» и т. д., в этих «аксиоматических» исследованиях надо понимать, как уже было выяснено, как переменные, на место которых могут быть подставлены любые конкретные соотношения (так же, как на место буквы *a* или *b* можно подставить какое угодно число). И совершенно так же, как некоторое содержащее неизвестные величины уравнение лишь при определенных значениях этих величин превращается в тождество, так и наша система аксиом только для некоторых «интерпретаций» упоминаемых в ней переменных вещей и отношений между ними превращается в систему правильных утверждений. Можно сказать, что подобно тому как, переходя от отношений между данными числами к уравнениям, мы переворачиваем задачу и идем не от величин к отношениям между ними, а по отношениям между величинами ищем самые эти величины, так и здесь с переходом к аксиоматике задача оборачивается — ищутся не законы, характерные для какой-либо области объектов, а по уже данным закономерностям подыскиваются удовлетворяющие им объекты.

При этом подобно тому, как системы уравнений, имеющие хотя бы одну систему решений, называются *совместными*, так и выполняющиеся хотя бы в одной области объектов и отношений между ними системы аксиом считаются *непротиворечивыми*. Рассмотрим два уравнения:

$$3x + 7y = 10; \quad 1{,}5x + 3{,}5y = 4{,}5.$$

[1] Любопытный пример такого рода содержится в статье Гильберта «Познание природы и логика»: «Дрозофила—маленькая мушка, но велик наш интерес к ней; она была предметом обширнейших, тщательнейших и плодотворнейших опытов размножения. Эта муха обычно серого цвета, с красными глазами, без пятен, с круглыми и длинными крыльями. Но встречаются и мухи с уклоняющимися отдельными признаками: вместо того, чтобы быть серыми, они желты, вместо красных у них белые глаза и т. д. Обычно пять этих признаков встречаются соединенными, т. е. если муха желтого цвета, то она и белоглаза и пятниста, с расщепленными и комковатыми крыльями. А если у нее комковатые крылья, то она и желта и белоглаза и т. д. Однако при надлежащих скрещиваниях в потомстве попадаются относительно более резкие уклонения от этих обычных соединений признаков, и притом в определенном постоянном процентном отношении. Для чисел, экспериментально при этом находимых, удовлетворяются линейные евклидовы аксиомы конгруентности и аксиомы, относящиеся к геометрическому понятию «между», и таким образом законы наследственности выступают как применения линейных аксиом конгруентности, т. е. элементарных геометрических предложений об откладывании отрезков; столь просто и точно — и одновременно столь чудесно, как вряд ли могла бы их сочинить даже самая смелая фантазия».

Если мы попробуем «исключить» из них одну неизвестную, например x, то непременно «исключится» и вторая, и мы придем к «следствию»:

$$10 = 9.$$

Так как это невозможно, то мы заключаем, что наши уравнения несовместны, т. е. не существует таких значений x и y, которые им одновременно удовлетворяли бы.

Подобно этому, если бы какая-нибудь система постулатов привела нас к формальному противоречию [1], например к выводу $0 = 1$, мы заключили бы, что не существует системы объектов, ей удовлетворяющих. Наоборот, существование такой системы объектов, для которой осуществляется данная система аксиом, математики считают доказательством *непротиворечивости* этой системы. Таким образом, доказательства «непротиворечивости», по существу, носят (в большинстве) материалистический характер. Требуя «непротиворечивости» какой-нибудь системы аксиом, математик фактически требует существования хотя бы одной области объектов, для которой его формулы имели бы конкретный, содержательный смысл, к которой они были бы приложимы, отображением которой служили бы.

Подводя итог, мы можем сказать:

1. Математика изучает лишь некоторую сторону действительного мира, лишь такие его отношения, которые безразличны к особой природе вступающих в них объектов, т. е. некоторое «весьма реальное содержание» (Энгельс).

2. Чтобы изучить это содержание—запомним, что речь идет о содержании рассматриваемых математикою отношений,— нужно выделить эти отношения в чистом виде. А для этого необходимо отвлечься от содержания самих объектов, между которыми они имеют место, «устранить его как нечто безразличное для дела» (Энгельс). Иными словами, для того, чтобы изучить содержание количественных отношений, нужно отвлечься от содержания вступающих в эти отношения вещей, а не от содержания вообще.

3. В действительности, однако, не существует отношений без вещей. Сколь бы безразличны к особой природе вещей, между которыми они имеют место, ни были математические отношения, одному требованию они всегда должны удовлетворять: должна существовать хотя бы одна область объектов, для которых они выполняются. Именно это и имеют обычно в виду математики, когда требуют «непротиворечивости».

4. Развитие математики, в частности проблема изучения внутренней структуры математических дисциплин и связей их друг с другом, приводит к необходимости изучения соотношений между самими (количественными) отношениями. При этом становятся переменными не только вещи, но и отношения, и мы поднимаемся на высшую ступень абстракции. Она невозможна, однако, без предшествующей ей низшей ступени. Иначе не существует области объектов, отношения которых изучаются, и нельзя дать доказательства «непротиворечивости» в вышеупомянутом смысле слова.

5. Таким образом, лишь те соотношения имеют право на существование в математике, которые абстрагированы в конечном счете из реального,

[1] Формальное противоречие предполагает простое, спокойное сосуществование исключающих друг друга противоположностей.

материального мира. Тот факт, что содержание математики «проявляется в крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира», но не может отменить того обстоятельства, что такие понятия математики, как понятие фигуры или понятие числа, «заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли вовсе в голове из чистого мышления» (Энгельс)[1].

* * *

Мы видим таким образом, что развитие математики действительно подтверждает точку зрения материализма, и притом именно диалектического материализма. Ибо оно идет от постоянного к переменному, ибо объекты математики начинают рассматриваться в их взаимной связи и сцеплении, и развитие ее происходит по диалектическому закону борьбы и единства противоположностей. В самом деле, в процессе этого развития диалектическое единство вещи и отношения (отношения существуют лишь между вещами, но и вещей нет без отношений между ними) раздваивается на: 1) вещи и 2) отношения. Для выделения последних в чистом виде нельзя устранить, однако, вещи, а нужно сделать их переменными. При этом роли, как уж было отмечено, меняются: если раньше мы изучаем отношения на вещах, то затем, наоборот, мы идем уже не от вещей к отношениям между ними, а от отношений к вещам, им удовлетворяющим. Подобный этому диалектический процесс — специально в применении к обоснованию диференциального исчисления — Маркс проследил в своих математических рукописях. Он показал, как из соотношений элементарной математики вырастает специфическая для диференциального исчисления символика, отражающая вполне реальные математические процессы, и как в дальнейшем роли меняются: ищется не диференциальный символ, отображающий данный реальный процесс, а, наоборот, по данному символу—соответствующее ему реальное соотношение.

Однако тот, кто не проследил этого развития, начиная действительно с реальных вещей и количественных отношений между ними, кто метафизически оторвал логическое от исторического, результат от пути, к нему ведущего, кто начинает сразу же, с самого начала геометрию с аксиоматики или алгебру с теории групп,— тот поступает так же, как Ньютон и Лейбниц, которые начинали диференциальное исчисление прямо с диференциалов (или «моментов») и приходили поэтому к мистике.

Но есть и существенная разница. Ньютон и Лейбниц не хотели мистики, связанной с бесконечно-малым. Они старались избежать ее, и поэтому у них нередки даже высказывания, предваряющие позднейшие, более правильные точки зрения на основные понятия диференциального исчисления. Но они были слишком поглощены разработкой самого исчисления, чтобы иметь возможность по существу выяснить его основы. Сделанные ими в этом направлении попытки должны были скорее оправдать, чем обосновать новое исчисление. А современные буржуазные философы математики не только делают идеалистические выводы из роста этой

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 39.

науки, но подчас не могут скрыть радости, когда выводы эти приводят их к кризису основ математики.

Современная математика действительно невозможна без множества различных алгебр и геометрий, но эта возможность таинственна не в большей мере, чем возможность существования различных уравнений (и систем уравнений). Всякий обучавшийся алгебре в средней школе, даже если он уже основательно позабыл математику, помнит, вероятно, все же, что одну и ту же задачу можно решать иногда разными способами (с помощью различных уравнений) и что, наоборот, к одному и тому же уравнению можно притти от различных задач. Из этого не следует, однако, будто выражаемые уравнением отношения между величинами не отражают ничего существенного для данной задачи, а следует только, что они отражают лишь количественную, т. е. безразличную к особой природе рассматриваемых предметов, ее сторону. Поэтому одно и то же уравнение может решать задачи и на бассейны, и на торговлю яйцами, и на путешественников, и многие другие. Но поэтому же нелепо пытаться ответить на вопрос о свежести яиц у колхозницы с помощью такого уравнения. Между тем по отношению к геометрии такие фокусы проделываются. Точнее, из того, что одной только геометрии недостаточно для ответа на вопрос о природе физического пространства, что одному и тому же пространству могут соответствовать различные изоморфные друг другу геометрии и что, наоборот, одной и той же геометрии — различные системы объектов, ей удовлетворяющие, делается вывод, что геометрия ничего не отражает в реальном мире вообще и физическом пространстве в частности. Сначала ограничивают себя в изучении природы физического пространства средствами математики, а потом удивляются тому, что на этом пути можно изучить эту природу лишь с точностью до изоморфного ее отображения. Так, Пуанкаре, например, предполагает сначала, что возможно такое чисто количественное изменение всех отношений нашего пространства, которое никак не отразится на природе тел, не приведет ни к каким качественным изменениям, а потом сам изумляется тому, что в таком случае два изоморфных пространства будут тождественны (неразличимы друг от друга).

«Предположим,— пишет Пуанкаре,— что в какую-нибудь ночь все измерения вселенной станут в тысячу раз бо́льшими: мир останется *подобным* самому себе (здесь слово *подобие* имеет тот смысл, который ему дан в третьей книге геометрии). То, что было равно метру, будет впредь измеряться километром, миллиметр станет равным по длине метру. Кровать, на которой я лежу, и мое собственное тело увеличатся в той же пропорции. Какое же чувство я испытаю завтра по случаю такой поразительной трансформации, когда проснусь? Да просто я ровно ничего не замечу. Самые точные измерения ничего не откроют мне об этом перевороте, потому что метры, которыми я буду пользоваться, изменятся в той же пропорции, что и предметы, подлежащие измерению»[1].

Ясно, что по этому пути можно пойти и дальше. Ибо *подобие* есть только частный случай изоморфизма, а с чисто геометрической стороны две изоморфные системы тождественны друг другу: в этом, как мы видели, суть математики. Но ясно также, что для того, чтобы

[1] «Наука и метод», стр. 75.

изучить эти изоморфные системы в их отличии друг от друга, нужно заняться особой природой тех объектов, из которых они составлены, и если отличия их носят уже не количественный, а качественный характер, то средств математики для их изучения будет недостаточно. Придется прибегнуть к физике и другим наукам. Поэтому с помощью математики можно изучить только ту сторону физического пространства, которая не зависит от особого характера наполняющей это пространство материи.

А между тем из этого «количественного» характера математики делается, повторяю, вывод, что мы вообще не можем изучить природу физического пространства и что геометрия ровно ничего не отражает в действительном мире, — вывод, о котором уже шла речь в начале этой статьи.

Но допустим на минуту, что математика действительно ничего не отражает во внешнем мире, что математик сам творит математические факты, «или, скажем иначе, их творит его каприз» (Пуанкаре), что «сущность математики в ее свободе» (Кантор),— чем плохи в таком случае такие математические аксиомы, которые приводят к выводу $0=1$? Оказывается, просто тем, что если допустить хоть одно такое формально противоречивое предложение в математику, можно будет доказать все, что угодно, любое предложение и притом с отрицанием вместе. А наука, в которой все доказуемо, равносильна науке, в которой не доказано ничто.

На пресловутую «свободу» математики, под которой, как мы видели, понимается полный произвол и каприз, приходится все же наложить поэтому «небольшое» ограничение, выражаемое требованием непротиворечивости. Не все понятия и предложения, «свободно творимые» рассудком математика, могут, оказывается, пользоваться правом на существование в математике, но только те из них, которые не ведут к противоречию.

«Математика,— говорит Пуанкаре,— не зависит от существования материальных вещей; в математике слово существовать может иметь только один смысл,— оно означает устранение от противоречия»[1].

Однако «маленькое» это ограничение в действительности оказывается непомерно тяжелым, если не хотеть его понимать материалистически, если настаивать на том, что «математика не зависит от материальных вещей», если свободу понимать не как познанную необходимость, а как произвол и каприз. В самом деле, требование «непротиворечивости» фактически (за исключением некоторых по преимуществу тривиальных случаев, когда число принципиально различных следствий ограничено) оказывается выполнимым именно в том случае, когда, наоборот, под «непротиворечивостью» понимают *существование*, причем существование в подлинно материалистическом смысле этого слова: как действительное существование хотя бы одной системы объектов—либо непосредственно вещественных, либо в свою очередь отражающих нечто в реальной действительности, т. е. тоже абстрактных, но находящихся на низшей, вообще говоря, ступени абстракции,— объектов, удовлетворяющих данной системе

[1] Пуанкаре, Наука и метод, стр. 124.

постулатов (аксиом)[1]. «Капризу» математика в таком случае предоставляется «свобода» «творить» такие математические факты, которые отражают в конечном счете нечто реально, т. е. независимо от него и от его капризов, во внешнем мире существующее. И это объявляется «освобождением от тирании внешнего мира»!

К какому же выводу мы окончательно пришли?

Неверно, что математика сама по себе идеалистична. Такой вывод могут сделать только метафизики, начинающие с конца, отрывающие отношения от вещей, между которыми они имеют место, и искусственно пересаживающие их на почву «чистого», т. е. ничего в действительности не отражающего, мышления, на которой, однако, ничего, кроме кризиса, и произрасти не может. Все положительное, что сделано даже современной буржуазной философией математики, подтверждает на самом деле материалистическую точку зрения, подтверждает правильность ленинского анализа кризиса естествознания, анализа, актуального и для настоящего времени, несмотря на 25 лет, отделяющие нас от выхода в свет «Материализма и эмпириокритицизма».

Правильность этих выводов подтверждена историей. Ленин недаром назвал «идею» Германа Когена — внедрить посредством высшей математики дух идеализма в школьников — «вздорным мечтанием реакционера». Нет, не для нас оказалась страшной высшая математика! Нигде в мире этой науке не обучается такое количество людей, как у нас. И это в то время, как в буржуазных странах закрываются школы (в особенности старшие классы, где возможно обучение высшей математике), пустеют университеты, уничтожаются такие центры мировой математической мысли, как Геттинген. Ибо капиталистическое общество достигло уже такой ступени развития, где оно пришло в непримиримое противоречие с развитием науки и техники, а мы идем к такому обществу, «где наука и искусство будут пользоваться условиями, достаточно благоприятными для того, чтобы добиться полного расцвета» (Сталин)[2].

---

[1] Так называемые прямые доказательства непротиворечивости, противополагаемые обычно доказательствам через существование (интерпретацию), которыми школа Гильберта пользуется в своих попытках доказательства непротиворечивости арифметики, также опираются на самом деле на существование определенной области объектов, для которых рассматриваемая система аксиом представляет систему истинных предложений. «Непротиворечивость», таким образом, и здесь не противостоит истинности, а оказывается ее следствием. Однако этому вопросу следовало бы посвятить особую статью.

[2] И. Сталин, Вопросы ленинизма, X изд., стр. 193.

В. Гливенко.

КРИЗИС ОСНОВ МАТЕМАТИКИ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ ЕГО РАЗВИТИЯ.

(В свете ленинского учения о кризисе науки в капиталистическом обществе.)

§ 1. Общая характеристика кризиса науки.

По Ленину кризис современной науки «состоит в отступлении ее от прямого, решительного и бесповоротного признания объективной ценности ее теорий»[1]. Наука перестает видеть в своих теориях отражение объективной реальности, начинает видеть в ней только символы и приходит к отрицанию существования объективной реальности, независимой от нашего сознания и отражаемой им: материалистическая теория познания, стихийно принимавшаяся прежней наукой, сменяется агностической и идеалистической[2].

По Ленину есть два момента в развитии самой науки, которые способствуют возникновению такого «научного» идеализма. Прежде всего идеалистические настроения порождаются самим прогрессом науки. Прогресс в анализе строения материального мира открывает новые возможности математической обработки самых общих отношений и порождает забвение материальной основы этих отношений. На новой ступени развития и как будто по-новому получается старая кантианская идея: разум предписывает законы природе[3]. Другой источник «научного» идеализма — это принцип релятивизма, относительности нашего знания, который с особенной силой навязывается ученым в период крупной ломки старых теорий, когда все истины науки, вплоть до считавшихся бесспорными и незыблемыми, оказываются относительными истинами. То, что относительные истины являются относительно верными отражениями реальности, существующей независимо от человеческого сознания, что эти отражения становятся все более верными,— эти положения диалектики чужды теории познания капиталистического общества. Поэтому, когда обнаруживается относительная истинность всего добытого наукой, из этого делается тот вывод, что никакой объективной истины, не зависящей от человеческого

[1] «Материализм и эмпириокритицизм», изд. 3-е, 1931 г., стр. 250.
[2] Там же, стр. 210.
[3] Там же, стр. 251—252.

сознания, нет и быть не может. Принцип релятивизма при непонимании диалектики неизбежно ведет к идеализму[1].

С того времени, как Ленин написал «Материализм и эмпириокритицизм», развитие науки вполне подтвердило его выводы о наличии, сущности и источниках кризиса науки.

Мало того, с того времени кризис этот расширился и углубился и стал гораздо ярче во всех своих проявлениях.

С одной стороны, рост завоеваний науки до мировой войны в направлении анализа самых общих отношений и крутая ломка старых представлений перестали быть новинками, над которыми работали и задумывались лишь немногие, на них воспиталось уже целое поколение ученых, с самого начала своей деятельности выраставшее в атмосфере сомнения в том, что научные истины являются отражением независимой от человеческого сознания объективной реальности. Идеализм стал модным, прежний стихийный материализм науки потерял характер общераспространенного научного мировоззрения.

С другой стороны, чрезвычайно углубившийся после мировой войны кризис капиталистического общества в целом привел к тому, что сомнения в объективной ценности науки стали перерастать в убеждение в ее неценности. Идеализм стал агрессивным, стал стремиться подчинить себе науку со всей ее проблематикой и методами.

§ 2. Кризис основ математики: формализм.

Кризис основ математики, о котором мы будем подробно говорить дальше, развернулся на фоне давно укоренившихся и распространенных среди математиков формалистических воззрений на предмет своей науки.

Под формализмом мы понимаем точку зрения, согласно которой сущность математики заключается не в содержании ее утверждений: математика сама по себе является только учением о том, каким образом выводить из данных формул при помощи определенных правил новые и новые формулы. Поэтому с точки зрения формализма ценность математического исследования определяется по существу его внутренними качеставами: как необходимое условие — формально логической непротиворечивостью, а сверх того такими качествами, как универсальность метода, как оригинальность идеи, как обнаружение скрытых дотоле соотношений между различными областями науки, или выяснение неясных дотоле отличительных свойств конкретных объектов той или иной области знания и т. п., *безотносительно* к тому, что именно дает все это исследование для познания общих отношений объективной реальности.

Естественно, что формалисты являются крайними сторонниками «свободы» математического исследования. Любые «посягательства» на нее не могут не вызвать с их стороны самого решительного отпора, вплоть до попыток последовательного обоснования законности в целом *всего* того, что сделано и делается в математике.

Такие посягательства на «свободу» математического исследования действительно имеются, прежде всего, со стороны эффективизма, про-

[1] «Материализм и эмпириокритицизм», 3-е изд., 1931 г., стр. 252—253.

поведуемого парижской школой и имеющего сторонников среди некоторых итальянских, польских и даже советских ученых. С точки зрения эффективизма ценность математического исследования определяется степенью раскрытия в нем отношений между предметами, принадлежащими человеческому интеллекту, до конца доступными ему с присущей ему логикой. С этой точки зрения из математики изгоняется многое и далеко не мелочи: объявляются не имеющими смысла идеи и результаты такого крупного значения, как, например, доказательство существования неизмеримых множеств.

Несколько иного рода посягательство мы видим со стороны и н т у и ц и о н и з м а, исходящего из голландской школы и нашедшего сторонников среди некоторых швейцарских и австрийских ученых. Для интуиционизма в математическом исследовании ценно раскрытие в нем интуитивных априорных суждений сознания, не исчерпывающихся обычной логикой и не выразимых обычным языком, ценность же всего того, что не может быть последовательно истолковано в этом смысле, по меньшей мере относительна. С этой точки зрения запрещается даже рассматривать континуум как множество точек.

При этом эффективисты и интуиционисты обосновывают свои доводы не личными вкусами, а ссылаются на противоречия — так называемые парадоксы, встреченные в общей теории множеств, к которым неизбежно приводят логические построения, не направляемые лежащими вне их самих постановками задач.

Наиболее яркую, полную и глубокую аргументацию со стороны формалистов против запретов эффективистов и интуиционистов мы находим в еще незавершенной, но в основных чертах уже вполне определившейся теории обоснования математики Гильберта[1]. По выражению самого Гильберта его теория имеет своей целью окончательное уничтожение всяких сомнений в непротиворечивости математических выводов[2].

По идее Гильберта, математика — все, что до сих пор называется математикой,— может быть строго формализована. Вся она может быть изложена одними только формулами, которые отличаются от обычных математических формул лишь тем, что в них входят, кроме математических, еще и логические обозначения, как, например, обозначение $\rightarrow$ для логического вывода и т. п.[3].

Такой символический метод выражения логических фактов предложил еще Буль, современник Кэли. Элементами построения символической логики являются суждения, причем принимается во внимание только свойство суждений быть истинными или ложными, но отнюдь не их предметное содержание, и в основе всего построения лежит отражение процессов формально логического мышления в операциях, при помощи которых из одних суждений $P, Q, \cdots$ получаются другие, истинность или ложность которых определяется только истинностью или ложностью суждений P, Q... Так, например, имея суждения P и Q, можно высказать суждение:

«Если суждение P истинно, то и суждение Q истинно».

Это новое суждение обозначается так: $P \rightarrow Q$.

[1] См., например, «Logische Grundlagen der Mathematik», Mathem. Annalen 88 (1922), стр. 151—165.

[2] Там же, стр. 151.

[3] Там же, стр. 152.

Связь истинности или ложности суждений, получаемых подобными операциями, с истинностью или ложностью суждений, из которых они получаются, определяется аксиоматически. За аксиомы можно принять, например, истинность суждений, выражаемых следующими формулами:

$$P \to [(P \to Q) \to Q], \tag{1}$$

$$(P \to Q) \to [(Q \to R) \to (P \to R)] \tag{2}$$

и т. д. Выводы из этих аксиом мы можем делать, пользуясь принципом вывода, который можно наглядно выразить следующей схемой:

$$\frac{\begin{matrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P \to Q} \end{matrix}}{\boldsymbol{Q}}, \tag{I}$$

что означает: если формулы P и $P \to Q$ выражают истинные суждения, то и формула Q выражает истинное суждение. Таким образом мы можем получать новые формулы, а также и новые схемы вывода. Для примера выведем следующую новую схему вывода:

$$\frac{\begin{matrix} \boldsymbol{P \to Q} \\ \boldsymbol{Q \to R} \end{matrix}}{\boldsymbol{P \to R}}. \tag{II}$$

По аксиоме (2) мы имеем:

$$(\boldsymbol{P \to Q}) \to [(\boldsymbol{Q \to R}) \to (\boldsymbol{P \to R})]. \tag{α_1}$$

Допустим, что формула

$$\boldsymbol{P \to Q} \tag{α_2}$$

выражает истинное суждение. Применяя к (α_2) и (α_1) принцип вывода (I), мы получаем:

$$(\boldsymbol{Q \to R}) \to (\boldsymbol{P \to R}). \tag{α_3}$$

Допустим еще, что формула

$$\boldsymbol{Q \to R} \tag{α_4}$$

также выражает истинное суждение. Применяя к (α_4) и (α_3) принцип вывода (I), мы получаем:

$$\boldsymbol{P \to R}.$$

Таким образом, мы доказали при двойном допущении, что формулы $\boldsymbol{P \to Q}$ и $\boldsymbol{Q \to R}$ выражают истинные суждения, формула $\boldsymbol{P \to P}$ выражает также истинное суждение; но это и есть схема вывода (II).

Кроме операции $\to$ и ей подобных, возможны также и операции несколько иного рода. Так, имея суждения P о предмете x, — что обозначается кратко через $P(x)$, — можно высказать суждение:

«Каково бы ни было x, суждение $P(x)$ истинно».

Это суждение обозначается так:

$$(x)P(x).$$

Можно высказать также суждение:

«Существует x, о котором суждение $P(x)$ истинно»

Это суждение обозначается так:

$$(Ex)P(x).$$

$P(x)$ — суждение P о предмете x может иметь смысл: «предмет x обладает свойством P», или смысл: «предмет x принадлежит множеству P». (Присущность предмету x свойства P или принадлежность предмета x множеству P мы можем рассматривать как различные формулировки одного и того же логического факта.)

Связь истинности или ложности суждений, получаемых операциями (x) и (Ex), с истинностью или ложностью суждений, из которых они получаются, определяется также аксиомами, например следующими:

$$(x)P(x) \to P(x). \tag{3}$$

$$P(x) \to (Ex)P(x). \tag{4}$$

В связи с этими новыми операциями мы имеем и новые принципы вывода. Формула $P(x)$ называется зависящей от x, когда в нее входит x, но не входят знаки (x) или (Ex): последние так же уничтожают зависимость формулы $P(x)$ от x, как, например, знак определенного интеграла уничтожает зависимость функции от аргумента. Пусть же Q — формула, не зависящая от x. Тогда мы имеем принцип вывода, выражаемый схемой:

$$\frac{Q \to P(x)}{Q \to (x)P(x)}, \tag{III}$$

а также принцип вывода, выражаемый схемой:

$$\frac{P(x) \to Q}{(Ex)P(x) \to Q}. \tag{IV}$$

Существуют также суждения вида $P(x,y)$ — отношения между предметами x и y. Здесь возможны такие операции, как например: $(Ex)(y)P(x,y)$, что означает $(Ex)[(y)P(x,y)]$. Как пример формулы, выводимой из аксиом (3) и (4) и принципов вывода (III) и (IV), приведем следующую формулу:

$$(Ex)(y)P(x,y) \to (y)(Ex)P(x,y). \tag{5}$$

По аксиоме (3) мы имеем:

$$(y)P(x,y) \to P(x,y), \tag{β_1}$$

а по аксиоме (4):

$$P(x,y) \to (Ex)P(x,y). \tag{β_2}$$

Применяя к (β_1) и (β_2) выведенную нами выше схему вывода (II), мы получаем:

$$(y)P(x,y) \to (Ex)P(x,y). \tag{β_3}$$

Затем, применяя к (β_3) принцип вывода (III), мы получаем

$$(y)P(x,y) \to (y)(Ex)P(x,y), \qquad (\beta_4)$$

Наконец, применяя к (β_4) принцип вывода (IV), мы получаем:

$$(Ex)(y)P(x,y) \to (y)(Ex)P(x,y),$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (5), в свою очередь, пользуясь принципом вывода (I), можно получить новую схему вывода:

$$\frac{(Ex)(y)Q(x,y)}{(y)(Ex)Q(x,y)}. \qquad (V)$$

Это сделать легко, мы предоставляем это самому читателю.

Таковы характерные черты построения символической, или — как ее принято теперь называть — математической логики. Приведем теперь примеры записи математических предложений в виде формул с помощью символов математической логики. Мы приведем два примера. Во-первых, определение *равномерной* сходимости последовательности функций $f_1(t), f_2(t),\ldots f_n(t),\ldots$ к функции $f(t)$. Обозначим через ε любые положительные числа и через N — целые положительные числа. Тогда определение равномерной сходимости, как легко видеть, можно выразить так:

$$(\varepsilon)(EN)(t)[(n>N) \to (\mid f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon)] \qquad (6)$$

(«каково бы ни было ε, найдется такое N, что для всякого t при $n>N$ будет иметь место неравенство $\mid (f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon$»). В качестве второго примера возьмем определение *обыкновенной* сходимости последовательности функции $f_1(t)$, $f_2(t),\ldots f_n(t),\ldots$ к функции $f(t)$. Его, как легко видеть, можно выразить так:

$$(\varepsilon)(t)(EN)[(n>N) \to (\mid f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon)] \qquad (7)$$

(«каково бы ни было ε, для всякого t найдется такое N, что при $n>N$ будет иметь место неравенство $\mid (f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon$»). При такой записи, между прочим, выпукло выступает разница между обоими определениями: как показывают формулы (6) и (7), она сводится к разнице в порядке применения операций (EN) и (t). Интересно проследить, как можно, пользуясь этими записями, получить доказательство теоремы: «из равномерной сходимости вытекает обыкновенная сходимость». Отбросим в формулах (6) и (7) операцию (ε). Мы получим формулы:

$$(EN)(t)[(n>N) \to (\mid f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon)], \qquad (6\ bis)$$
$$(t)(EN)[(n>N) \to (\mid f_n(t)-f(t) \mid < \varepsilon)]. \qquad (7\ bis)$$

Схема вывода (V) прямо показывает нам, что из формулы (6 bis) вытекает формула (7 bis). Что это будет иметь место и после введения в эти формулы операции (ε), т. е. после возвращения к формулам (6) и (7),— это очевидно: это, разумеется, можно доказать и строго формально, следуя перечисленным аксиомам и принципам вывода, но доказательство требует длинных выкладок, и мы его опустим.

По идее Гильберта, когда математические предложения и их доказательства таким образом формализованы, остается обосновать полученную систему формул, т. е. доказать ее непротиворечивость. Изучение ее с этой целью является предметом уже не самой математики, но некоторой надстройки над ней — метаматематики. В ней — в противоположность чисто формальным выводам в самой математике — будут делаться содержательные выводы, но единственно для доказательства непротиворечивости аксиом. Таким образом, развитие всей математической науки в целом будет осуществляться двояким путем: получением новых формул из аксиом при помощи формальных выводов и введением новых аксиом с доказательством их непротиворечивости при помощи содержательных выводов[1].

Чтобы яснее представить себе, в чем заключается доказательство непротиворечивости аксиом, мы приведем пример такого доказательства. Возьмем аксиомы (1) и (2), относящиеся к операции $\rightarrow$. Поставим в соответствие истинности суждения некоторый знак, например $+$, и ложности — другой знак, например $-$. Истинность или ложность суждения $P \rightarrow Q$, в зависимости от истинности или ложности суждений P и Q, мы определим следующей таблицей:

P	Q	$P \rightarrow Q$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$

(T)

Теперь, чтобы определить истинность или ложность суждения, выражаемого формулой (1), достаточно применить эту таблицу несколько раз, и мы получим:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$	$P \rightarrow [(P \rightarrow Q) \rightarrow Q]$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Мы видим, что формула (1) всегда выражает истинное суждение. К тому же приводит и аналогичный анализ формулы (2). Возьмем еще принцип вывода (I), в котором также участвует операция $\rightarrow$. Здесь заранее делается допущение, что суждения P и $P \rightarrow Q$ истинны. Достаточно одного взгляда на нашу таблицу (T), чтобы увидеть, что при этом двойном допущении суждение Q тоже будет истинным. Итак, существует такая интерпретация формул, в которых применяется одна операция $\rightarrow$, что все эти формулы,

[1] «Logische Grundlagen der Mathematik», Matem. Annalen, 88 (1922), стр. 153.

если только они выведены из аксиом (1) и (2) при помощи принципа вывода (I), выражают истинные суждения. Это — интерпретация посредством комбинаций из двух знаков + и —, и поскольку содержательные суждения о комбинациях из двух объектов не вызывают ни у кого никаких сомнений, постольку вопрос о непротиворечивости названных формул нашими содержательными суждениями о расположении знаков + и — окончательно решается. Таким же образом шаг за шагом доказывается непротиворечивость и других формул, выражающих математические предложения. При этом существенные трудности возникают для операций (x) и (Ex). Здесь Гильберт предлагает поступать следующим образом. Введем функцию

$$\tau(P),$$

которая ставит в соответствие каждому суждению $P(x)$ некоторый вполне определенный предмет $\tau(P)$, или, подробнее, $\tau_x\ [P(x)]$, так как его определение зависит, вообще говоря, и от класса предметов, о которых высказывается суждение $P(x)$. Этот предмет должен удовлетворять трансфинитной аксиоме:

$$P[\tau(P)] \rightarrow P(x).$$

Другими словами,— это предмет, обладающий тем свойством, что если суждение о нем $P[\tau(P)]$ истинно, то суждение $P(x)$ всегда истинно. Возможность образования функции $\tau(P)$ мы поясним ниже. Пока же, приняв трансфинитную аксиому, условимся определять истинность или ложность суждения $(x)P(x)$ в зависимости от истинности или ложности суждения $P[\tau(P)]$ при помощи следующих формул:

$$(x)\,P(x) \rightarrow P[\tau(P)] \qquad (8)$$
$$P\,[\tau(P)] \rightarrow (x)\,P(x) \qquad (8\text{ bis})$$

Применяя к формуле (8) и трансфинитной аксиоме схему вывода (II), мы получаем:

$$(x)P(x) \rightarrow P(x).$$

Это — аксиома (3). Таким образом, если принять трансфинитную аксиому, то существует такая интерпретация операции (x), в которой аксиома (3) оказывается просто доказуемой формулой. Это — интерпретация посредством формул (8) и (8 bis). Аналогичным образом обстоит дело и с аксиомой (4). Итак, все сводится к возможности образования функции $\tau(P)$, т. е. к непротиворечивости самой трансфинитной аксиомы. Эту возможность можно пояснить следующим образом. Если суждение $P(x)$ в действительности всегда истинно, то за предмет $\tau(P)$ можно принять любой предмет x: и для него, в частности, суждение $P[\tau(P)]$ будет истинно, и, следовательно, в силу первой строки таблицы (T) трансфинитная аксиома всегда будет выражать истинное суждение. Если же суждение $P(x)$ не всегда истинно, то за предмет $\tau(P)$ можно принять один из предметов x, для которых суждение $P(x)$ ложно: в силу третьей и четвертой строк таблицы (T) трансфинитная аксиома и здесь всегда будет выражать истинное суждение. Впрочем, это *пояснение* отнюдь еще не *доказа-*

тельство непротиворечивости трансфинитной аксиомы. Оно представляет собой содержательное суждение о классе предметов x и не вызывало бы ни в ком никаких сомнений только тогда, когда речь шла бы о комбинациях из **конечного** числа предметов: но как раз такого рода содержательные суждения и приводят к парадоксам в некоторых случаях **бесконечных** классов предметов x. Было бы безнадежно искать доказательства непротиворечивости трансфинитной аксиомы в ее общем виде: его придется проводить отдельно для различных случаев. Гильбертом предпринята и производится еще незавершенная до сих пор работа по доказательству непротиворечивости трансфинитной аксиомы во всех случаях, с которыми имеет дело математика, чем и должно достигаться обоснование математики с точки зрения формализма. Так или иначе из изложенного уже ясно, что все обоснование математики с точки зрения формализма сводится к доказательствам непротиворечивости, а эти последние — к содержательным суждениям о конечном числе предметов. При этом Гильберт уклоняется от выяснения вопроса, почему именно содержательные суждения о конечном числе предметов обладают безусловной доказательностью; он довольствуется не вполне ясным утверждением, что «человеческая мысль конечна».

Надо со всей решительностью подчеркнуть, что формализация математики у Гильберта еще не кризис основ математики. Работа Гильберта целиком предпринята для того, чтобы оправдать ценность всего, что сделано в математике; и, в частности, в этой работе вовсе не высказывается сомнений в объективной ценности математики с точки зрения познания объективной реальности. Если с самого начала подойти к основным предложениям — к аксиомам, принципам вывода и т. д. — как к отражению в нашем сознании общих отношений объективной реальности, вся эта работа не потеряет смысла как новый и очень серьезный вклад в изучение таких отношений. Исследования о возможности формализации математики в целом столь же важны для глубокого познания объективной реальности, как, скажем, формализация арифметических действий, называемая алгеброй и преподаваемая во всех школах.

Но так же верно и то, что формалисты, не высказывая сомнений в объективной ценности математики с точки зрения познания объективной реальности, сами, как мы уже говорили, вовсе не ценят математики с этой точки зрения. Напротив, они этой точки зрения избегают: это чрезвычайно ярко проявляется в том, что они стараются остаться во что бы то ни стало в области человеческого сознания, отгораживаясь от внешнего мира; что в конечном счете они сводят все обоснование математики к изучению «знаков». Поэтому у формалистов остается нерешенным основной вопрос обоснования науки: откуда именно возникают те, а не другие аксиомы и принципы вывода? Их глубочайшие исследования, исследования в сущности общих отношений материального мира, порождают уже у них самих забвение материальной основы этих отношений. Вопрос о соотношении математических теорий с объективной реальностью они решают так: математика применяется по существу не к изучению самой действительности, а к научным теориям об этой действительности. Таким образом, еще не являясь сам по себе выражением тех разочарований в объективной ценности науки, которые приводят к кризису науки в капиталистическом обществе, формализм все же не может ничего противопоставить этим разочарованиям по существу. В силу этого он не только не предупреждает кризиса основ математики, но и подготовляет для него благодарную почву.

§ 3. Кризис основ математики: эффективизм.

Первым поводом к выступлению эффективистов явилась провозглашенная Zermelo в начале нашего столетия аксиома произвольного выбора и доказанная им при помощи этой аксиомы теорема о существовании для любого множества такого отношения порядка между его элементами, при котором оно оказывается вполне упорядоченным. Борель[1] немедленно открыл кампанию против этой теоремы, а следовательно, и против аксиомы, из которой она вытекает, и сплотил вокруг этой кампании крупнейших французских ученых и их единомышленников в других странах.

Аксиома произвольного выбора гласит: каково бы ни было множество $\boldsymbol{A}$ множеств A без общих элементов, существует множество, имеющее с каждым из A, входящих в $\boldsymbol{A}$, по одному и только по одному общему элементу.

Чтобы возможно нагляднее показать, чем эта аксиома не удовлетворяет эффективистов, мы приведем основанное на ней доказательство теоремы о существовании неизмеримых множеств.

Возьмем окружность длины единица и нанесем на ней координаты x, начиная от определенной точки и выбрав определенное направление отсчета за положительное. Точки с координатами, отличающимися на целые числа, очевидно, будут тождественными. Какова бы ни была точка x нашей окружности, обозначим через $A(x)$ множество всех точек вида $x+r$, где r — какое угодно рациональное число, такое, что $0 \leqslant r < 1$. Очевидно, что каждые два таких множества $A(x_1)$ и $A(x_2)$ либо вовсе не имеют общих точек, либо полностью совпадают. Возьмем множество $\boldsymbol{A}$ всех различных множеств $A(x)$. На основании аксиомы произвольного выбора существует множество A_0, имеющее с каждым из $A(x)$ по одной и только по одной общей точке. Обозначим через A_r множество всех точек вида x_0+r, где r — фиксированное рациональное число, $0 \leqslant r < 1$, а x_0 — произвольная точка множества A_0. Предположим, что множества A_r измеримы. Множество A_0 превращается в любое из множеств A_r простым перемещением всех его точек по окружности на r, и потому

$$\text{mes } A_r = \text{mes } A_0 \tag{1}$$

(mes — знак меры).

Далее, никакие два множества A_r не имеют общих точек. Действительно, пусть это не так и множества A_{r_1} и A_{r_2} $(r_1 \neq r_2)$ имеют общую точку x. Тогда A_0 содержит точки $x-r_1$ и $x-r_2$. Эти две точки, отстоя друг от друга на рациональное расстояние $(x-r_1)-(x-r_2)=r_1-r_2$, принадлежат одному и тому же множеству $A(x-r_1)$. Но это противоречит определению множества A_0, поскольку A_0 может иметь с $A(x-r_1)$ только одну общую точку.

Наконец, сумма всех множеств A_r есть не что иное, как сама окруж-

[1] См., например, «Leçons sur la théorie des fonctions», 2-е и 3-е изд., стр. 147—160.

ность. Действительно, каждая точка x окружности принадлежит множеству $A(x)$, с которым A_0 имеет по определению одну общую точку, скажем x_0. Но тогда $x - x_0$ есть некоторое рациональное число, r, и $x = x_0 + r$ содержится в A_r. Следовательно, каждое x содержится в некотором A_r.

Таким образом, мы имеем счетную систему неперекрывающихся множеств A_r, в сумме заполняющих всю окружность. По основной теореме теории меры

$$\sum_r \operatorname{mes} A_r = 1. \qquad (2)$$

Сопоставим теперь равенства (1) и (2). Они показывают, что сумма счетного множества одинаковых слагаемых $\operatorname{mes} A_0$ равна 1, что невозможно, ибо если $\operatorname{mes} A_0 = 0$, то и $\sum_r \operatorname{mes} A_r = 0$, а если $\operatorname{mes} A_0 > 0$, то $\sum_r \operatorname{mes} A_r = \infty$. Следовательно, наше исходное предположение неверно, и по крайней мере одно из множеств A_r должно быть неизмеримо. Очевидно, что и каждое из них, например A_0, неизмеримо.

Таким образом, из аксиомы произвольного выбора получилось неожиданное следствие: существование неизмеримых множеств, ни одного индивидуального примера которых до сих пор не удалось построить. Наше множество A_0 не может служить таким индивидуальным примером, так как остается неопределенным, какие именно точки в него входят.

А с точки зрения Бореля существование имеет смысл лишь постольку, поскольку оно является существованием в н а ш е м сознании: хорошо знакомая точка зрения идеалистической философии! Что же касается множества A_0, то ни одного его элемента мы указать не можем: следовательно, таких элементов, а значит и самого множества не существует.

Отсюда — и отрицание доказательств существования и вообще каких бы то ни было доказательств при помощи аксиомы произвольного выбора.

Но раз так, то речь пойдет уже не только о таких экзотических образованиях, как неизмеримые множества. Обнаружилось, что аксиома произвольного выбора в неявном виде употреблялась в анализе задолго до того, как она была формулирована.

Возьмем, например, два определения *непрерывности* функции $f(x)$.

(I) Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для всякой последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$, для которой

$$\lim_{p \to \infty} x_p = a,$$

будет также

$$\lim_{p \to \infty} f(x_p) = f(a).$$

(II) Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всякого x, для которого

$$|x - a| < \delta,$$

будет также

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В анализе мы постоянно пользуемся тем фактом, что из (I) вытекает (II) и обратно. Оказывается, однако, что строгое доказательство того, что из (I) вытекает (II), опирается на аксиому произвольного выбора.

Доказательство это проводится так. Предположим, что $f(x)$ не непрерывна в точке $x=a$ в смысле определения (II). Это значит: существует такое $\varepsilon>0$, что для каждого $\delta>0$ найдется x, удовлетворяющее неравенству

$$|x-a|<\delta \tag{3}$$

и в то же время неравенству:

$$|f(x)-f(a)|>\varepsilon. \tag{4}$$

Обозначим через A_n множество чисел x, удовлетворяющих неравенству (3) при $\delta=\frac{1}{n}$, но уже не удовлетворяющих ему при $\delta=\frac{1}{n+1}$, и в то же время удовлетворяющих неравенству (4). Очевидно, что существует бесконечная последовательность непустых множеств A_n. Пусть это будет последовательность $\boldsymbol{A}$ множеств $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$ Это будут множества без общих элементов. Следовательно, в силу аксиомы произвольного выбора существует бесконечная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, принадлежащих соответственно множествам $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$; очевидно, что

$$\lim_{p\to\infty} x_p = a$$

и что в то же время не имеет места равенство

$$\lim_{p\to\infty} f(x_p) = f(a).$$

Таким образом, функция $f(x)$ не непрерывна и в смысле определения (I).

Замечательно, что применение здесь аксиомы произвольного выбора существенно. Серпинский доказал[1], что если мы примем как данное, что из (I) вытекает (II), то из этого можно получить уже как следствие аксиому произвольного выбора для того случая, когда $\boldsymbol{A}$ — любая последовательность любых множеств A действительных чисел. Доказательство это просто по идее, но слишком сложно по выкладкам, чтобы его имело смысл воспроизводить здесь. Итак, употребление нами аксиомы произвольного выбора отнюдь не являлось следствием субъективного неумения поступить иначе.

Изгоняя из анализа аксиому произвольного выбора, мы вынуждены поставить под сомнение объективную ценность многих фундаментальных достижений анализа. Поэтому критика эффективистов — это уже подлинный кризис основ математики.

Теория доказательства Гильберта, о которой мы говорили выше, уделяет особое внимание как раз вопросу о непротиворечивости аксиомы произвольного выбора в тех ее частных случаях, которые находят применение в анализе. Если бы ему удалось довести свою работу до конца, то критика эффективистов потеряла бы значение, так как эффективисты не делают всех выводов с принципиальной последовательностью, потому что

---

[1] «Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе», Математический сборник, 31 (1923), стр. 114—118.

не решаются отрицать основу теории Гильберта — возможность интерпретации истинности и ложности суждений двумя знаками. Но кризис этим все-таки еще не упраздняется, так как не исключается возможность более последовательного приведения той же идеалистической точки зрения, на которой стоят эффективисты. Его мы находим у интуиционистов.

Необходимо все же, прежде чем перейти к этим последним, отметить, что принципиальная непоследовательность эффективистов не помешала им за последние годы стать агрессивными. Они не ограничиваются больше, как это было еще недавно, философскими комментариями в дополнениях и приложениях к книгам или размышлениями в популярных журналах. Они делают попытки перестроить самое математику со своей точки зрения, и мы уже находим работы в этом направлении в строго научных изданиях типа Fundamenta Mathematicae и т. п. При этом самая непоследовательность, стремление выйти из положения так, чтобы и волки были сыты и овцы целы, обеспечивает им сравнительно большой успех среди математиков во всем мире.

Привлекательным в учении эффективистов является их стремление решать каждую задачу путем эффективного нахождения решения.

Исследования их имеют также значение для выяснения взаимоотношений между так называемыми эффективными и неэффективными методами. Ценность этого выяснения неоспорима. Однако все это не дает основания закрывать глаза на философское обоснование критики эффективистов, базирующейся на своеобразном идеалистическом фетишистском понимании эффективного (несмотря на то, что и у самих представителей эффективизма есть большие разногласия в его понимании), ведущее к абсолютному запрету тех методов, которые не представляются эффективными данному исследователю.

§ 4. Кризис основ математики: интуиционизм.

Это направление, возникшее также в начале нашего столетия, но окончательно оформившееся уже в течение мировой войны, возглавляется двумя крупнейшими учеными: голландцем Броуэром и швейцарцем Вейлем. Интуиционисты, как и эффективисты, во-первых, отказываются понимать существование в математике в смысле в о з м о ж н о с т и реализации: установить существование можно, только р е а л и з о в а в возможность; и, во-вторых, понимают реализацию только как реализацию в ч е л о в е ч е с к о м м ы ш л е н и и. Но выводы отсюда интуиционисты делают более последовательные, нежели эффективисты. Поясним это на примере.

Возьмем последовательность Π натуральных чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., составленную таким образом, что каждый ее член равен сумме двух членов, ему непосредственно предшествующих. Обратим внимание на простые числа, встречающиеся в этой последовательности. До настоящего времени неизвестно, есть ли среди них последнее число p, так что все следующие за ним члены последовательности будут уже составными числами, или же такого последнего числа p нет, и последовательность Π содержит бесконечное множество простых чисел. Применяя логический принцип исключенного третьего, мы можем высказать только такое утверждение P: «Или число p существует, или существование числа p невозможно». Но если существование в математике имеет смысл только как реализация возможности в человеческом мышлении, то утверждение *P* нельзя считать безусловно верным. В самом деле, с этой точки зрения суждение «число *p* существует» может означать только то, что человеческому мышлению доступен способ указать число *p* и доказать, что оно — последнее из простых чисел в последовательности *П*. Суждение же «существование числа *p* невозможно» с этой точки зрения может означать только то, что человеческому мышлению доступен способ опровергнуть предположение о существовании числа *p* в только что указанном смысле, приведя это предположение к противоречию. И нельзя заранее утверждать, что или то или другое непременно должно находиться в пределах человеческого мышления. Интуиционисты делают из этого вывод, что логический принцип исключенного третьего не всегда применим. Нельзя сказать, что всякое суждение непременно или истинно или ложно. Гильбертова интерпретация истинности и ложности всякого суждения при помощи двух и только двух знаков искажает действительные соотношения между истинностью и ложностью суждений.

Понятно, что с этой точки зрения очень многие результаты, полученные математикой, объявляются заблуждением «наивных» умов, полагающих, «будто» возможна какая-то реальность вне человеческого мышления. Возьмем хотя бы такое фундаментальное для всего математического анализа понятие, как континуум действительных чисел. В конечном счете это есть множество последовательностей натуральных чисел, так как каждое действительное число можно рассматривать как такую последовательность, например как последовательность знаменателей изображающей его непрерывной дроби или как последовательность знаков изображающей его десятичной дроби. Обыкновенно представляют себе подобную последовательность как существующую целиком на всем ее бесконечном протяжении. Но если существование в математике имеет смысл только как реализация возможности в человеческом мышлении, то последовательность натуральных чисел существует только тогда, когда человеческому мышлению доступен способ указать, по какому закону каждый член последовательности получается после членов, ему предшествующих. Таков как раз случай вышеприведенной последовательности *П*. Однако таким путем можно выделить из континуума только те или другие действительные числа. В силу несчетности континуума он таким путем никогда не может быть исчерпан полностью. В целом континуум действительных чисел может рассматриваться только как еще не определенная до конца, только как *становящаяся* последовательность натуральных чисел, в которой можно произвольно задать любое конечное число членов, но остается неопределенным, какие члены будут следовать за уже заданными. А раз так, то континуум вообще — не какое-то существующее множество действительных чисел. Он — только «среда свободного становления».

Интуиционизм не только представляет собой кризис основ математики, но и сознает себя как кризис. Броуэр и Вейль с большой настойчивостью, можно сказать даже со злорадством, отрицают объективную ценность основных достижений математического анализа.

Мы далеки от того, чтобы со своей стороны полностью отрицать ценность интуиционистской критики. Как в свое время диалектическая философия Гегеля дала много ценного для материалистической философии, так и теперь мы находим у Броуэра в его борьбе с формализмом ряд заслуживающих внимания положений: только их следует поставить с головы на ноги.

Так, интуиционисты лучше, чем сами формалисты, понимают происхождение формальной логики. Они считают законы формальной логики отражением в нашем сознании общих отношений, имеющих место для конечных множеств: «логика вытекает из математики, а не наоборот». И это, конечно, правильно. Только сами названные отношения, по мнению интуиционистов, являются плодом своего рода логической интуиции, а не плодом опыта, не выражением строения существующего вне нашего сознания материального мира.

Так, интуиционистами правильно указывается, что если почему-либо возникает вопрос о различении между теоретическим установлением существования тех или других предметов и их фактическим построением, то к последнему надо подходить с иной «логикой», чем к первому,— это как раз тот пункт, до которого не решаются дойти эффективисты: фактические построения, конструктивное творчество подчиняются своей особой «логике» решения задач, которая интуиционистами прекрасно изучена и представляет собой интереснейший вклад в науку[1]. Только интуиционисты, руководствуясь изложенными выше соображениями, противопоставляют эту вновь построенную логику обычной логике суждения, как якобы единственную имеющую смысл, между тем как на деле первая вполне согласуема со второй и должна рассматриваться просто как новая область исследования, отнюдь не отменяющая всего найденного в науке другими путями[2].

Но при всем том нельзя ни на минуту забывать, что как эффективизм, так и в еще большей степени интуиционизм, взятые как целостные концепции, и представляют проявление в математике того, о чем мы говорили в самом начале: идеализма, ставшего агрессивным и стремящегося подчинить себе науку со всей ее проблематикой и методами.

---

[1] См., например, Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitz. der Preuss. Akad. der Wiss., 1930, три статьи.

[2] Kolmogoroff, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Mathem. Zeitschr., 35 (1932), стр. 58—65.

С. Яновская.

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В БУРЖУАЗНОЙ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ. (ИНТУИЦИОНИЗМ И ФОРМАЛИЗМ).

§ 1. Характерная особенность современной математики.

В современной математике есть одна особенность, отличающая ее от математики прошлых столетий. Она рассматривает бесконечное множество принципиально с той же точки зрения, что и конечное, т. е. как данное во всей совокупности входящих в него предметов. Так, например, говоря о натуральном ряде чисел 1, 2, 3, 4..., считают весь ряд до бесконечности одним законченным целым и даже пишут следующие за всем этим рядом так называемые трансфинитные числа

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2, \ldots, \omega.2,\ \omega.2+1, \ldots,\ \omega.\omega,\ \omega^2+1, \ldots,\ \omega^{\omega}, \ldots .$$

Так, иррациональное число $\sqrt{2}$ вводят следующим образом: разбивают все рациональные числа на два класса: таких, квадрат которых меньше двух, и таких, квадрат которых больше двух. Так как нет такого рационального числа, квадрат которого равнялся бы двум, то каждое рациональное число (дробь) действительно должно попасть в один из этих двух классов, и перед нами сечение (подразделение) области всех рациональных чисел на два класса, обладающее тем свойством, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго. Всякое подобное сечение области всех рациональных чисел называют вещественным числом, и если оно, как в нашем случае, не производится каким-нибудь рациональным числом, то его называют числом иррациональным. О совокупности всех рациональных чисел (всех дробей) при этом рассуждают так, как если бы вся она полностью лежала перед нами, заранее данная и готовая, и мы лишь должны были разложить все дроби по двум ящикам. Ящики (одного класса) считаются при этом равными, если они содержат только одинаковые дроби, если же в одном ящике есть такие дроби, которых нет в другом, то ящики считаются различными. Таким образом, фактически вещественное число рассматривается как «ящик», наполненный бесконечным множеством чисел рациональных [1].

[1] Ясно, что сечение вполне определяется заданием одного из его классов, например первого, в состав которого должны войти все числа, меньшие любого числа второго класса.

Всякая современная аксиоматически построенная дисциплина начинается с утверждения: «Существует некоторая область объектов, называющихся» и т. д. И все объекты этой области, хотя их бесконечно много, рассматриваются при этом как уже данные и готовые, опять-таки во всей их совокупности.

Эта так называемая экзистенциальная[1] точка зрения — не пустой привесок к современной математике. Она лежит в основе теории множеств, на которой в свою очередь основывается анализ, она же характерна для всей современной аксиоматики, иными словами, без нее нет современной математики.

§ 2. Трудности, связанные с экзистенциальной точкой зрения.

Между тем с этой точкой зрения на бесконечные совокупности связаны трудности. Чтобы выяснить их характер, подойдем к этому вопросу несколько со стороны.

Применимость к формулам так называемой математической логики, законов обычной формальной логики обусловливается тем, что за исходный пункт берут «предложения», т. е. выражения A, B, $C, \ldots$, относительно которых может быть неизвестно, какие из них истинны и какие ложны, но во всяком случае известно, что каждое либо истинно, либо ложно и при том только одно из двух. Применимость обычных законов формальной логики (законы: тождества, противоречия и исключенного третьего) к этим исходным выражениям, таким образом, просто постулируется. Если они этому требованию почему-либо не удовлетворяют, мы их, по условию, должны исключить из рассмотрения. Но если они этому требованию удовлетворяют, то ему же, по определению, удовлетворяют и те их комбинации, которые образованы из них с помощью терминов «и», «или», «если... то», «равносильно» и отрицания. Достигается это с помощью такого определения этих операций, которое для каждого возможного распределения значений истинности или ложности у исходных предложений соотносит одно и только одно из этих двух значений к рассматриваемой комбинации. Так, отрицание A рассматривается как предложение $\bar{A}$ — ложное, когда A истинно, и истинное, когда A ложно, т. е. определяется с помощью следующей таблицы: (истинность мы будем обозначать знаком $+$, ложность знаком $-$):

A	$\bar{A}$
$+$	$-$
$-$	$+$

Имея два предложения A, B, мы можем образовать из них новое сложное предложение «A или B» по следующему правилу: будем считать выражение «A или B» ложным, когда оба предложения A, B лож-

[1] От слова Existenz — существование. Термин «экзистенциальная» по-русски звучит очень неблагозвучно, но я не знаю лучшего.

ны, и истинным во всех остальных случаях. Иными словами, зададим значение комбинации «A или B» с помощью следующей таблицы:

A	B	A или B
+	+	+
+	—	+
—	+	+
—	—	—

Точно так же значение комбинации «A и B» зададим с помощью таблицы:

A	B	A и B
+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	—

Мы видим, что по самому определению выражения $\bar{A}$, «A или B», «A и B» в случае, когда A и B суть предложения, тоже должны быть предложениями (в рассматриваемом смысле слова). В случае конечности рассматриваемой области объектов то же справедливо и для выражений, образованных с помощью терминов «все» и «существует». Ибо в этом случае утверждение «все a суть A» (соответственно: «все a обладают свойством A») эквивалентно выражению: «α есть A, и β есть A, и, $\cdots$, и ξ есть A», а утверждение «существует a, обладающее свойством A» (соответственно: «некоторые a суть A») эквивалентно выражению: «α есть A, или β есть A, или γ есть A, или..., или ξ есть A». Но подобного рода выражения в случае, когда каждое из выражений «a есть A» есть предложение, в силу установленных нами правил тоже должны быть предложениями, т. е. либо истинными, либо ложными и притом только одно из двух.

Однако, если рассматриваемая область бесконечна, утверждать это — даже в случае, когда каждое из выражений «a есть A» есть «предложение», — мы еще не имеем оснований. В самом деле, в этом случае мы не можем построить *конечной* таблицы, которая каждому распределению значений истины и лжи для выражений «α есть A», «β есть A» и т. д. соотносила бы одно и только одно из обоих этих значений[1]. Иными словами,

[1] В этом случае определение терминов «все» и «существует» аналогичное определению их для конечной области опиралось бы на эти же термины «все» и «существует». В самом деле, мы должны были бы сказать: предложение «все x обладают свойством A» истинно в том и только в том случае, если истинны *все* предложения: «a обладает свойством A», где a — любой объект рассматриваемой нами области. И точно так же: предложение «существует x, обладающий свойством A», истинно в том и только в том случае, если *существует* истинное предложение «a обладает свойством A», где a — некоторый объект нашей области.

Пожалуй, нужно еще заметить, что a priori нельзя считать исключенной и возможность несовместности бесконечности некоторой области с постулированной нами применимостью законов формальной логики к каждому из выражений **A** (a), не содержащему терминов «все» и «существует» (где a — любой объект рассматриваемой области).

в случае бесконечной области объектов у нас нет оснований утверждать применимость законов формальной логики к суждениям, касающимся всех объектов этой области или выражающим существование в ней объектов определенного рода.

Может показаться, что выйти из положения не так уж трудно. В самом деле, мы ведь просто постулировали, т. е. требовали применимости законов формальной логики к нашим исходным выражениям, исключив из рассмотрения те из них, которые этому требованию не удовлетворяют. Нельзя ли и тут применить тот же прием: потребовать, чтобы выражения, образованные с помощью терминов «все» и «существует», были предложениями и в случае бесконечной области, заранее исключив из рассмотрения те из них, которые этому требованию не удовлетворяют? Легко показать, что поступать таким образом, вообще говоря, нельзя. Так, приняв приведенные выше определения логических операций, нельзя, например, потребовать, чтобы выражение «(A или $\overline{B}$) и B» было всегда истинным. Ибо в случае, когда B ложно, или B истинно, но A ложно, оно заведомо ложно. *Вводить новое требование можно, если доказана его совместность со всеми предыдущими.*

Между тем математики, говоря о бесконечной области объектов, постулируют применимость к ней законов формальной логики без какого бы то ни было доказательства совместности этих законов с допущением о бесконечности рассматриваемой области. Они, как уже было отмечено, рассматривают бесконечную совокупность принципиально с той же точки зрения, как и конечную, т. е. механически переносят, экстраполируют на первую законы, установленные для последней.

Но, быть может, можно выйти из затруднения, рассмотрев непосредственный смысл суждений общности и существования и доказав на этом пути, что к ним должны быть применимы законы формальной логики? Для материалиалиста-диалектика ясно, что такая попытка обречена на неудачу, ибо успех ее означал бы право пользоваться формальной логикой именно как формальной, т. е. без какого бы то ни было конкретного анализа рассматриваемой проблемы (или круга проблем) по существу. И действительно, попытка обратиться к непосредственному смыслу общих и экзистенциальных суждений не приводит к цели, а наоборот — доказывает неправомерность формального распространения на бесконечные совокупности законов формальной логики. Для иллюстрации приведем пример, обычно рассматриваемый — хотя по существу совсем в других целях — интуиционистами[1].

Допустим, я утверждаю, что в бесконечной последовательности знаков числа π:

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

есть где-то место, начиная с которого, подряд идут следующие десять цифр:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9,$$

[1] См. статью В. И. Гливенко в настоящем сборнике, стр. 69.

а вы спорите со мной и говорите, что такого места *нет*. Больше того, допустим, что я утверждаю существование этого места потому, что достаточно далеко вычислила число π и такое место действительно нашла. Тогда непосредственный смысл моего утверждения существования и состоит в этом «нашла». Его *простым отрицанием* было бы «не нашла». Но ведь, если бы вам даже удалось найти ошибку в моем вычислении, вы еще не опровергли бы моего утверждения существования. Ибо из этого еще не следовало бы, что, вычисляя далее, я такое место не найду, а перебрать все знаки числа π вы не можете, так как их бесконечно много. Ваше отрицание могло бы иметь смысл лишь в том случае, если бы вам удалось доказать, что предположение о наличии искомого места противоречит закону образования знаков числа π.

Рассмотрим теперь два предложения: одно — «нашла», другое — «пришел к противоречию».

Непосредственно они отнюдь не контрадикторны друг другу. Каждое имеет свое собственное, положительное, независимое от другого содержание. А два положительных предложения, даже несовместимые друг с другом, а priori отнюдь не противостоят друг другу так, что никакое третье уже невозможно. Иными словами, к ним может быть неприменим закон исключенного третьего, согласно которому отрицание одного из этих предложений означало бы утверждение другого.

Но это значит, что и к математике нельзя применять законы формальной логики как таковые, что и тут решает вопрос не форма, а содержание: лишь на основе содержательного анализа можно решить, исключают ли два предложения друг друга так, что никакое третье уже невозможно, или нет. Иными словами, пользоваться законом исключенного третьего можно лишь после того, как будет доказана его применимость к данному случаю. Математики же пользуются им как законом формальной логики, т. е. без какого бы то ни было специального (содержательного) исследования рассматриваемой области объектов.

§ 3. Генетическая математика интуиционистов.

Интуиционисты (Броуэр) предлагают простой выход из этого положения. Простой, но настолько тяжелый, что в своих собственных математических работах Броуэр сам ему не следует. Они предлагают просто выбросить из математики все те дисциплины или их отделы, которые невозможны без экзистенциального подхода, и строить математику не экзистенциально, а генетически. Это значит, положив в основу систему простейших объектов, например натуральный ряд чисел, рассматриваемый не как ставший, а всегда лишь как становящийся (потенциально, а не актуально бесконечный), развивать затем последовательно (генетически) понятие числа, получая на этом пути сначала целые (положительные и отрицательные) числа, затем дроби, вещественные и, наконец, комплексные числа. Вещественное число определяется при этом уже не как множество рациональных чисел, а как бесконечная последовательность вложенных друг в друга, как матрешки в детской игрушке, неограниченно суживающихся рациональных интервалов, причем отдельная, определенная с помощью какого-либо закона последовательность интервалов, каждый член которой может быть вычислен, определяет собой отдельное же вещественное число, а свободно становящаяся последовательность интервалов — континуум.

В системе интуиционистов основную роль играет не аксиома, а определение, ибо новые понятия вводятся с помощью определений, и существующим считается лишь то, что действительно может быть построено из доступного нашему наглядному созерцанию (интуиции) материала. Утверждение существования, не подкрепленное действительно выполнимой (хотя бы в принципе) конструкцией (вроде приведенного выше утверждения о существовании среди знаков числа π группы 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9), не имеет смысла и равносильно векселю, на котором не указан срок его оплаты.

Более подробное освещение характера интуиционистской математики не входит в наши задачи. Отметим лишь, что она означает не только принесение в жертву целого ряда живых полнокровных частей современной математики, но и чудовищное усложнение всех тех ее частей, которые в этой математике сохраняются.

§ 4. Аксиоматика формалистов.

Один из крупнейших математиков современности, Давид Гильберт, пытается избежать тех выводов, которые сделали интуиционисты. Он решил обосновать и по отношению к бесконечным совокупностям право на рассуждение следующего типа: «либо в бесконечной совокупности S есть элемент a, либо допущение о его существовании противоречит закону образования этой совокупности», т. е. право пользоваться законом исключенного третьего и в применении к бесконечным совокупностям.

С нашей, т. е. с диалектико-материалистической, точки зрения ясно, что такого доказательства в общем виде дать вообще нельзя, что его можно провести лишь по отношению к определенным совокупностям и при том на основе содержательного подхода к рассматриваемой области объектов, и что и после этого оно не может быть автоматически распространено на любую бесконечную область. И действительно, фактически проделанный Гильбертом и его школой путь подтверждает правильность этой точки зрения.

Чтобы обосновать современную экзистенциальную математику, Гильберт раньше всего придал ей аксиоматическую форму, — вплоть до арифметики вещественного числа, лежащей в основе анализа (вещественное число Гильберт предложил вводить не генетически, а как систему объектов, удовлетворящую выставленной им системе аксиом, описывающей характерные для этих чисел соотношения), после чего сделал попытку превратить всю математику в некоторое исчисление. При этом он воспользовался усовершенствованной им и его школой математической логикой Рессела, в отношении которой поставил перед собой задачу показать ее совместность с арифметикой как одной из наук о бесконечных совокупностях, трактуемых экзистенциально. С этой целью Гильберт заменил всю арифметику системой формул, чисто механически выводимых — по определенным правилам — из «аксиом» (в свою очередь рассматриваемых лишь как комбинации знаков), и попытался доказать непротиворечивость системы, составленной из аксиом не только арифметики, но и логики, т. е. невозможность вывода из этих аксиом таких двух формул, из которых одна представляет собой отрицание другой. Реальный смысл этого доказательства непротиворечивости и состоит именно в доказательстве совместности законов логики, абстрагированных из изучения конечных совокупностей, с предположением о бесконечности исследуемой в арифметике области объектов[1]. И вот здесь-то и оказалось, что провести это доказательство можно, лишь предпославши (формализованной Гильбертом) экзистенциальной математике содержательную, и притом строящуюся генетически, метаматематику.

Аксиоматической арифметике, имеющей вид некоторого (формального) исчисления, пришлось при этом предпослать обыкновенную содержательную (генетическую) арифметику как науку о становящемся (лишь потенциально бесконечном) натуральном ряде 1, 2, 3, 4,... и операциях над составляющими его числами. Больше того, так как при этом нельзя ограничиться одним только доказательством совместности законов логики с предположением о бесконечности области, к которой они применяются, но приходится давать специальное доказательство для случая области, удовлетворящей тем специфическим требованиям, которые выражаются аксиомами арифметики (включая свойства рассматриваемых в ней операций), то и содержательное (генетическое) построение арифметики пришлось провести достаточно далеко.

§ 5. Сравнение с математическими рукописями Маркса.

В рамках краткой статьи трудно действительно выяснить читателю все значение этого факта. Чтобы сделать его более ясным, воспользуемся сравнением с математическими рукописями Маркса. В эпоху Маркса речь не шла еще об обосновании всей математики, под ударом был только анализ, и Маркс поставил перед собой задачу обосновать диференциальное исчисление. Рассматривая предшествующую историю обоснования этого исчисления, Маркс замечает, что всех занимавшихся этим вопросом математиков можно разбить на две группы: одни, особенно создатели диференциального исчисления, Лейбниц и Ньютон, начинают сразу же, с самого начала с диференциалов (dx, dy) как готовых и заранее данных объектов; другие — Лагранж например, — желая избазиться от связанных с такой точкой зрения трудностей, начинают с алгебры, из которой хотят развить новое исчисление. Не выяснив происхождения диференциальных символов, не вскрыв всего пути их возникновения и развития, рассматривая их «как дитя рядом со своей матерью до того, как та была беременна» (Маркс), первые не могут обосновать нового — приводящего их к блестящим результатам — диференциального исчисления. Наоборот, остановившись лишь на проблеме возникновения, вторые так и не доходят до собственно диференциального исчисления, не могут использовать поэтому всех связанных с ним, как исчислением диференциалов, преимуществ. Маркс, подобно Лагранжу, начинает с алгебры.[2] Диференциальные символы возникают сначала как отражение некоторых реальных матема-

[1] т. е. в доказательстве возможности постулировать в частности принцип исключенного третьего в применении к арифметике.

[2] Хотя не так, как это делает Лагранж.

тических процессов. Исходный пункт лежит при этом в алгебре, и реальный процесс происходит на свободной от диференциальных символов стороне. Однако Маркс не останавливается на этом. Он показывает, как применение тех же методов с неизбежностью приводит в дальнейшем к необходимости оборвать пуповину, связывающую новорожденного с матерью, поставить дитя на собственные ноги, больше того, обернуть соотношение между ними и сделать диференциал исходным пунктом нового диференциального исчисления. Теперь, с одной стороны, можно рассматривать диференциальные символы как уже данные и готовые, изучать и пользоваться специфическими для них соотношениями; с другой — исчезают те трудности, которые непреодолимы с точки зрения, рассматривающей диференциалы как заранее, сразу, наряду с обыкновенными математическими величинами данные и готовые.

Современная экзистенциальная математика рассматривает бесконечную область объектов принципиально с той же точки зрения, с какой подходили к диференциалам Лейбниц и Ньютон, именно как во всех своих частях и элементах заранее данную и готовую; она наталкивается при этом на трудности, связанные с применением к бесконечным совокупностям закона исключенного третьего. Современная генетическая математика останавливается, подобно Лагранжу, на самом процессе порождения и никогда не имеет дела с уже готовой бесконечной совокупностью, она не может рассуждать о бесконечной совокупности как о целом во всех его взаимоотношениях как с другими целыми, так и со своими собственными частями и элементами. Она не может охватить поэтому всего богатства современной математики и ее приложений и вынуждена остановиться на полдороге к ней.

В действительности же аксиоматический метод не исключает генетического, а предполагает его. Сначала математические соотношения содержательно исследуются на конкретной области объектов[1] и лишь затем исходный пункт можно обернуть: начать с установления системы отношений, заданных аксиоматически, т. е. исходя лишь из требования существования удовлетворяющей системе аксиом области (соответственно системы областей) объектов.

В основе современной математики лежит поэтому содержательно трактуемая арифметика (повидимому, и геометрия), и никакое аксиоматическое построение ее невозможно без этого содержательного исходного пункта[2].

Экзистенциальная математика при этом выступает не как противополагающаяся генетической, а наоборот, как (не только исторически, но и) логически ее предполагающая.

---

[1] «Принципы — не исходный пункт исследования, а его заключительный результат» (Энгельс). Это же верно и по отношению к математическим аксиомам, которые, впрочем, следует по-разному трактовать на разных ступенях логического (и исторического) развития математики. В то время как на первой ступени они суть содержательные истины, в аксиоматике они играют роль определения для удовлетворяющих им систем объектов, т. е. превращаются в истинные предложения лишь при определенных значениях входящих в них переменных.

[2] Не следует думать, будто содержательным в математике является только исходный пункт. В статье «Идеализм и математика» мы старались показать, в чем состоит особое содержание современной аксиоматической математики.

Между тем, современный кризис основ математики состоит именно в том, что, избрав экзистенциальную математику, мы попадаем в паутину связанных с ней логических трудностей; избрав генетическую, не доходим до современной математики. Используя же примененный Марксом в его математических рукописях метод, мы получаем возможность не только ориентироваться в современных спорах между представителями обеих точек зрения, но и занять в них собственную, на практике оказывающуюся единственно правильной и возможной, позицию, с точки зрения которой мы получаем возможность не отбросить с порога, а действительно преодолеть и интуиционизм и формализм, использовав все, что есть живого и ценного в трудах буржуазных математиков по основаниям их науки, не попадая, однако, при этом в кризис ее основ[1].

§ 6. Крах претензии на „нейтральность" в споре между материализмом и идеализмом.

Откуда берется, однако, содержание генетической математики? На этот вопрос еще с глубокой древности существовали два, в корне противоположных, ответа: одни (Платон, в новое время Кант) утверждали, что математические объекты непосредственно познаются нашим духом, будучи, таким образом, независимыми от опыта продуктами чистого мышления; другие видели в них абстракции, т. е. отвлечения от материальной действительности,—именно, отражения «пространственных форм и количественных отношений действительного мира» (Энгельс). В начале XX столетия среди математиков широко распространилась «третья», претендующая на «нейтральность» в этом споре между идеализмом и материализмом точка зрения. Представители этой точки зрения, так называемые конвенционалисты[2], утверждали, что математика нейтральна-де потому, что в ее основе вообще лежит не истина, а произвольное соглашение. Исходным пунктом математики является с точки зрения конвенционалистов система аксиом, рассматриваемая как система произвольных соглашений, выбор которых регулируется лишь соображениями целесообразности и «экономии мышления». Развитие математики (неевклидовы и многомерные геометрии, современные алгебра и теория групп), казалось, подтверждало эту точку зрения, очень удобную на определенном этапе для буржуазной философии: она давала возможность «опровергать» материализм, не выступая открыто с защитой идеализма, неприемлемого еще в ту пору для большинства естествоиспытателей.

Однако и конвенционалисты должны были признать, что не всякую систему произвольных соглашений можно положить в основу математики. Нельзя, например, ввести три символа i, k, j, потребовав соблюдения следующих соотношений:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$i \cdot j = k,$$

[1] С этой точки зрения интересен результат Курта Геделя, доказавшего, что интуиционистская математика Броуэра вполне достаточна в качестве метаматематики для обоснования всей современной экзистенциальной математики.

[2] Родоначальником которых является Пуанкаре.

а также коммутативного и ассоциативного закона умножения. Ибо отсюда будет следовать, что $+1=-1$.

В самом деле[1]:

$$+1=(-1)\cdot(-1)=i^2\cdot j^2=(i\cdot i)\cdot(j\cdot j)=(i\cdot j)\cdot(i\cdot j)=k\cdot k=-1.$$

Произвол в выборе соглашений пришлось поэтому ограничить требованием непротиворечивости, казалось, отнюдь не противоречившим конвенционалистским установкам. Ибо непротиворечивость рассматривалась как независимая от истины и даже противополагалась ей: нас-де, говорили конвенционалисты, интересует отнюдь не истинность, а лишь непротиворечивость нашей системы соглашений. Однако уже первые попытки действительно доказать непротиворечивость некоторой системы аксиом (например, какой-либо неевклидовой геометрии) показали, что это удается в том случае, когда можно указать систему объектов, для которых данная система аксиом превращается в систему истинных предложений. Требование непротиворечивости некоторой системы аксиом оказалось, таким образом, равносильным требованию существования хотя бы одной системы объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Поскольку, однако, такой моделью бывала в свою очередь некоторая система математических же объектов, непротиворечивость таким образом удавалось доказать лишь относительно. Так, давая евклидову модель неевклидовой геометрии Лобачевского, сводили вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости геометрии Евклида, существование арифметической модели для которой в свою очередь сводило вопрос о непротиворечивости геометрии к непротиворечивости арифметики. Ясно, что на этом пути нельзя двигаться бесконечно: для арифметики приходится уже искать прямого доказательства ее непротиворечивости. Именно эта задача, тесно связанная с вопросом о применимости закона исключенного третьего к бесконечным совокупностям (ибо ищется доказательство непротиворечивости, т. е. совместности арифметики с основными законами так называемой математической логики), и привела Гильберта к его содержательной метаматематике, лишь опираясь на которую он мог пытаться доказать непротиворечивость арифметики. В основу метаматематики приходится, однако, класть не систему произвольных соглашений, а ряд *содержательных* истин, по отношению к которым никакая «третья», кроме материалистической или идеалистической, точка зрения уже невозможна.

В своем «Материализме и эмпириокритицизме» Ленин с гениальной прозорливостью вскрыл подлинную идеалистическую сущность претендующей на «нейтральность» махистской философии и предсказал путь ее дальнейшего развития.

История полностью подтвердила поставленный Лениным прогноз, в том числе и в философии математики. Путаные махистские, конвенционалистские установки не желавшим материалистических выводов буржуазным математикам и философам математики пришлось заменить откровенным идеализмом и фидеизмом.

---

[1] Пример заимствую из книжки Гельдера «Математический метод» (O. Hölder, Die mathematische Methode), стр. 212, написанной специально с целью ознакомления широких кругов с философскими проблемами математики.

§ 7. Куда растет буржуазная философия математики?

Основаниями математики плодотворно занимаются за границей не философы, а математики, и притом не как философской, а как чисто математической дисциплиной. И нужно признать, что подлинную научную ценность имеют как раз те их результаты, которые получены именно на этом пути. Но, как мы старались уже выяснить, эти же результаты не только не противоречат точке зрения диалектического материализма, но фактически именно с его помощью могут быть правильно и плодотворно истолкованы. Ибо они стихийно идут в направлении от формальной к содержательной (диалектической) логике, для которой «абстрактной истины нет, истина всегда конкретна» (Ленин), которая не разрешает в частности механически переносить законы, установленные для конечной области объектов, на бесконечные области, но требует особого для последних исследования.

Занимаясь основаниями математики, нельзя, однако, избежать и специально философских проблем. Особенно, когда речь идет о происхождении тех содержательных истин, которые, как мы видели, неизбежны при обосновании математики. И вот здесь опять полностью подтверждается указание Ленина, что ни одному из этих буржуазных специалистов, способных давать самые ценные работы в своей области, нельзя верить ни в одном слове, когда речь заходит о философии.

В подтверждение достаточно привести две цитаты. Первая излагает попытку интуициониста Броуэра «генетически» обосновать натуральный ряд чисел, вторая демонстрирует те трудности, в которые попадает формалист Гильберт при попытке объяснить применимость математики к технике и естествознанию.

Отказавшись от материалистического объяснения происхождения натурального числа, отказавшись вообще видеть в понятиях математики отражения реальных отношений материальной действительности, Броуэр вынужден искать «содержание» математики в... мистике. Время, причина, мир — для Броуэра все это не существует, все это лишь результат «первофеномена распада одного момента жизни на два различных образа, из которых один переживается как отделяющийся от другого, но, так сказать, сохраняющий его в акте воспоминания, причем одновременно от «я» отделяется «мир».

Математика с точки зрения Броуэра — не теория, а действование (как будто для действования не нужна теория!). И при том «возникающее преимущественно из двух деятельных форм воли к жизни, движущих отдельным человеком, именно: 1) из «математического рассмотрения» и 2) из примыкающей к этому рассмотрению «математической абстракции». Математическое рассмотрение проявляется в двух активных установках: во «временной установке» и в «причинной установке».

Они-то и состоят в уже упомянутом «первофеномене». «Созданная временной установкой в форме первоначально двучленной временной последовательности явлений временная двоица затем в свою очередь может быть трактуема как один из членов некоторой новой двоицы, благодаря чему мы приходим к «временной последовательности явлений произвольной численности. Каузальная установка проявляется теперь в волевом акте «отождествления» различных временных последовательностей явлений, причем возникает устанавливаемый как каузальная последовательность субстрат отождествленных последовательностей». «Единственное оправдание этого «математического рассмотрения», — пишет Дубислав[1] (по которому мы излагаем Броуэра),— состоит при этом для математического активиста Броуэра в целесообразности вытекающего из математического рассмотрения «математического действования», благодаря которому человеку удается добиться опосредованно, на пути вычисления, того, что он хочет иметь».

«Полного оформления математическое действование достигает, однако, лишь через «математическую абстракцию». С помощью последней ранее упомянутая двоица освобождается от своего содержания, и мы приходим так к некоторой пустой форме как общему субстрату всех содержательных двоиц. «Этот общий субстрат всех двоиц и образует первоинтуицию математики». С помощью этой первоинтуиции производят в дальнейшем через конструкции, подобные тем, которые привели к образованию двоицы, натуральные числа. И таким образом создается прочное основание для всех математических образований.

Мы просим извинения у читателя за растрату его внимания и времени. Однако вряд ли можно лучше разоблачить подлинную сущность философской позиции интуиционизма, чем это делает сам Броуэр. На путях идеализма вскрыть действительное происхождение натурального числа невозможно. Мистический туман, напущенный Броуэром, не случаен: он должен не выяснить, а скрыть подлинное содержание математики, ибо этим содержанием являются реальные соотношения материального мира, т. е. нечто, никак не вяжущееся с идеализмом.

Но с точки зрения идеализма нельзя не только вскрыть подлинное происхождение основных понятий математики, а следовательно, и обосновать эту науку,— с этой точки зрения невозможно объяснить и приложимость математики к технике и наукам о природе. Вынужденный (в своей метаматематике) сделать выбор между идеализмом и материализмом Гильберт в конце концов выбирает идеализм. «Философы, — пишет Гильберт, — и Кант является классическим представителем этой точки зрения — утверждали, что, кроме логики и опыта, мы обладаем еще a priori известными познаниями о действительности... Я полагаю, что и математическое познание покоится в последнем счете на подобного рода наглядном узрении (anschauliche Einsicht) и что для построения теории числа нам даже необходима определенная наглядная установка a priori[2]»

Таким образом, в метаматематике Гильберт становится на точку зрения интуиционизма. Но в таком случае приложимость математики к наукам о природе, обнаружение в природе удовлетворяющих математическим соотношениям объектов Гильберт может объяснить лишь... предустановленной гармонией, читай: вмешательством боженьки, благосклонно написавшего книгу природы на языке математики, благодаря чему последняя оказалась

---

[1] В изложении самого Броуэра все это еще туманнее и невразумительней. См. W. **Dubislav**, Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, S. 44.

[2] D. Hilbert, Naturerkennen und Logik, «Naturwissenschaften», H. 47—49, 1930, S. 961. Гильберт все же пытается при этом хотя бы отчасти противопоставить свою точку зрения кантианской.

«инструментом, осуществляющим связь между теорией и практикой, между мышлением и наблюдением»[1].

Если не видеть в научных понятиях отражения свойств материальной действительности, если выводить математику из «чистого» наглядного созерцания a priori как особой способности нашего духа, тогда приложимость математики к этой действительности есть мистическая тайна и тогда неизбежным становится выступление на сцену боженьки для объяснения гармонии подчиняющегося математическим законам мира.

Откровенная мистика и фидеизм — вот куда растет буржуазная философия математики, вот к чему ведет избранный ею идеалистический исходный пункт.

Но фидеизм и мистика несовместимы с наукой. Поэтому отнюдь не все даже буржуазные математики мирятся с таким положением вещей. Тем более, что крах буржуазной демократии в странах фашизма, с одной стороны, успехи социализма в СССР и те исключительно благоприятные условия, в которые поставлены в Советском союзе наука и ученый (математика в том числе) — с другой, обращают их внимание в сторону философии пролетариата и заставляют знакомиться с основами диалектического материализма. Неудивительно, что не только у нас, но и за границей растет число математиков, приближающихся в своих установках к позициям диалектического материализма (Гонсет) или даже вполне сознательно становящихся на его точку зрения (Стрьюк и др.). Другого выхода для ученого нет: либо вместе с буржуазной философией в болото мистики и фидеизма, либо вместе с пролетариатом борьба за социалистическую культуру и науку с позиций марксизма-ленинизма.

---

[1] D. Hilbert, Naturerkennen und Logik, «Naturwissenschaften», H. 47—49, 1930, S. 962.

А. Фишер.

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ Ф. ГОНСЕТА.

XIX в. отличается бурным ростом математики. Создается неевклидова геометрия, создаются новые методы в анализе, и в конце XIX в. возникает теория множеств. Наряду с новыми открытиями появляется требование большей строгости доказательств, все большей и большей общности методов, что ведет к усилению абстрактности, а подчас и к отрыву математики от материальной действительности. Теория множеств завоевывает понемногу все области математики, теоретико-множественная точка зрения становится ведущей. Теория множеств кладется в основу учения о пределе, об иррациональном числе, о непрерывности и, следовательно, в основу всякой непрерывной геометрии. Но в дальнейшем развитии абстрактной теории множеств обнаруживаются трудности, антиномии, не укладывающиеся в рамки обычной классической формальной логики. Появление антиномий требовало объяснения, и оно было дано в двух направлениях. Одни видели причину ненормальности в неправильном *применении* классической логики, другие — в неправильности *самой* логики. Но современный действительный кризис основ математики вырос не на почве этого различия, а по другим причинам. В то время как часть математиков, стараясь спасти все достижения своей науки, пыталась и еще пытается подвести под нее достаточно прочное обоснование, другие (например Вейль), полные недоверия к возможности такого обоснования, призывают к отказу от всех тех частей математики, которые опираются на теорию множеств. Именно этот вполне сознательный отказ, лишение математики ее крупнейших достижений, результатов последних десятилетий, и является характерным признаком кризиса.

Борьба, развившаяся вокруг теории множеств, заставляет математиков серьезно заниматься основами своей науки и направляет математическую мысль в сторону философии. В этой области, как всегда, происходит разделение на два лагеря. Все ведущие математические школы формалистов, интуиционистов, эффективистов, логистов стоят на идеалистических позициях. Они считают математику *свободным творением* человеческого разума и признают нечто абсолютное, свыше данное, будь то логика или интуиция. Против этого подавляющего большинства все же и на Западе сначала в одиночку, а затем и более многочисленными группами восстают математики, по существу материалисты, считающие математику *отражением действительности*, математические понятия и законы — абстракциями из материальной действительности. Они борются за приближение математики к естественным наукам, за новое понимание истинности математических построений, видя в этом пути единственный правильный выход из кризиса. Окруженные со всех сторон идеалистической философией, эти математики, конечно, не в состоянии выдержать вполне точно диалектически-материалистическое воззрение. В их труды входят остатки самых разнообразных идеалистических философий, хотя их исследования направлены против идеализма. К числу этих немногих математиков принадлежит швейцарец Ф. Гонсет. В своей книге «Основания математики»[1], в ряде докладов и меньших работ и в готовящейся к печати книге об основах математики Гонсет создает свою философию, по существу близкую к материализму, несмотря на то, что, как мы увидим в дальнейшем, в его философской установке ясно чувствуются следы влияния философии Канта, особенно в учении о происхождении и возникновении абстракций.

В предлагаемой работе я считаю своей задачей только в общих чертах изложить философию математики Гонсета, не вдаваясь в критику тех или иных ее положений, чтобы лишь ознакомить советского читателя с одним из близких ему, но мало знакомых стремлений на Западе.

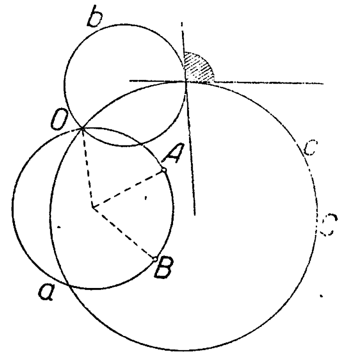
§ 1. Геометрия.

Начнем с геометрии и попробуем понять, как у человека могли образоваться самые простые геометрические понятия точки и прямой. В то время, когда у древних народов зарождались первые математические навыки, когда геометрия и практическое измерение и землемерие сливались в одно неразделимое целое, первой геометрической операцией было измерение длины. Оно производилось при помощи собственной ноги, шага, или же при помощи канатов, палок, цепей и т. д. Все эти измерения содержали что-то общее, что через абстракцию дало понятие длины, расстояния. Здесь толщина употребляемых канатов не играла роли так же, как и в том случае, если канат должен был быть проложен так, чтобы он соприкасался с заранее вбитыми в землю колышками. Отсюда опять через абстракцию образовалось понятие линии, определяемой у Евклида как «длина без ширины». Вбитый в землю колышек определял место и определял его тем точнее, чем он был тоньше. Человек мысленно продолжил уменьшение толщины колышка безгранично и такой идеализацией опытных данных образовал понятие точки, «не имеющей никаких измерений» (Евклид).

Такой же принцип создания элементарнейших геометрических понятий имеет место у наших современных ребят, изучающих впервые планиметрию. Мы им покажем ребро кристалла, край доски и листа бумаги, линейку и в конце концов луч света и будем требовать, чтобы ребята нашли общее всем этим вещам свойство, прямоту. Только таким образом через абстракцию от свойств материальных тел и реальных вещей — но через сознательно проведенную абстракцию — получается, можно сказать, создается понятие геометрической прямой. Путем такой же абстракции из отношений между материальными телами мы достигаем аксиом геометрии. Ясно, что эти абстракции будут всегда зависеть от уже достигнутого

[1] «Les fondements des mathématiques». Paris, Blanchard, 1926.

научного, общекультурного и технического уровня. Человек, изучающий природу при помощи лишь своего собственного тела, не может заметить тех отношений в действительности, которые заметит человек, вооруженный точными микроскопами, измерительными приборами и т. д. и богатством научных теорий, построенных предшествующими поколениями. Поэтому «аксиома не есть ни высказывание трансцендентной истины, ни произвольное определение. Это, наоборот, операция, глубоко входящая в описание реального, операция, которая, схватывая реальное, дает ему отпечаток, одновременно идеальный и предварительный, соответственно структуре нашего духа»[1]. Таким и только таким образом через абстракцию от свойств и отношений материальных тел получились определения, аксиомы и постулаты Евклида и в более обработанной, еще более абстрактной форме система аксиом Гильберта. Здесь «точка», «прямая», «плоскость» рассматриваются как чисто логические понятия, аксиомы—как чисто логические отношения. Совокупность тех и других определяет логическую структуру. Когда эта ступень абстракции, или, скажем, аксиоматизации, достигнута, то некоторые свойства и отношения твердых материальных тел могут быть рассматриваемы как р е а л и з а ц и и заданной логической структуры. Если же данная логическая структура осуществляется в виде геометрического построения или чертежа, то обычно говорят о м о д е л и. Модель по отношению к реализации представляет уже абстракцию. Для геометрии Евклида, т. е. для системы аксиом Гильберта и вытекающих из нее теорем, можно дать разные равноправные модели. Одна из них — обычная элементарная геометрия. Другая (на плоскости) получается, например, таким образом. На обычной плоскости будем называть точками все точки кроме одной O, которую будем считать несуществующей. «Прямой» пусть будет всякая окружность, проходящая через O. Углом между двумя «прямыми» будем называть обычный угол между двумя окружностями. Расстояние AB на «прямой» a определяется выражением



Черт. 1.

$$\operatorname{cotg} \overset{\wedge}{OB} - \operatorname{cotg} \overset{\wedge}{OA},$$

где $\overset{\wedge}{OA}$ и $\overset{\wedge}{OB}$ равны половине центральных углов, соответствующих дугам OA и OB на окружности, проходящей через O, A и B. Нетрудно убедиться, что в этой модели выполнены все аксиомы Гильберта.

При исследовании этих двух моделей возникает вопрос: что в обоих общего и чем они отличаются друг от друга? Общее в них — логическая структура. Различны в них свойства более наглядные, еще доступные нашему чувственному восприятию, свойства, более близкие к материальной

[1] G o n s e t h, La vérité mathématique et la réalité. Enseignements math. 31 (1932), 96. В этом высказывании Гонсета видны следы влияния философии Канта.

действительности. При переходе к высшей ступени абстракции, к логической структуре, эти свойства пропадают. Именно эти свойства Гонсет считает **специфически геометрическими**.

Проследив развитие геометрии от первых ее начал до современной аксиоматики, мы видим такую картину: геометрическая модель, являющаяся абстракцией по отношению к материальной действительности, одновременно представляет конкретный объект для дальнейшей абстракции на более высокой ступени формальной логики. В этом смысле Гонсет говорит, что в геометрии, представляющей после своего создания некоторую «реальность», невозможно вполне отделить конкретное от абстрактного. Конкретное и абстрактное выступает здесь как «две стороны одной и той же реальности», и мы замечаем больше ту или другую, в зависимости от того, смотрим ли мы с позиций геометрии в сторону логики или в сторону материальной действительности.

Еще более ясным становится положение геометрии, если вместо системы аксиом Гильберта рассматривать систему Гейгера. Гейгер, профессор философии и логики, упрекает Гильберта в недостаточной абстрактности его системы, так как Гильберт все же еще употребляет геометрические термины «точка», «прямая» и т. д. и пользуется вспомогательным средством чертежа. Мы рассмотрим лишь несколько аксиом Гейгера.

Аксиома I_1. Существуют три категории вещей:

$$\begin{aligned} &\text{вещи } A, B, C, \ldots \\ &\text{вещи } a, b, c, \ldots \\ &\text{вещи } \alpha, \beta, \gamma, \ldots \end{aligned}$$

Далее для двух вещей разных категорий вводится логическое отношение J ($*$, $**$) и его отрицание $\overline{J}$ ($*$, $**$).

Аксиома II_1. Отношение J всегда имеет смысл для двух вещей разных категорий.

Аксиома II_2. Для одних и тех же двух вещей разных категорий не может быть одновременно J и $\overline{J}$.

Дальше вводится для трех вещей первой категории логическое отношение $O(*, *, *)$ и его отрицание $\overline{O}(*, *, *)$[2]. Одна из аксиом гласит:

Аксиома. Для трех вещей A, B, C выполнено:

$$\text{или } O(A, B, C) \text{ или } \overline{O}(A, B, C)$$
$$\text{или } J(A, a) \;\&\; J(B, a) \;\&\; J(C, a).$$

Сравнение аксиом Гейгера с аксиомами Гильберта показывает, что по существу первые ничего нового не содержат. Высшая степень логичности заключается только в устранении геометрических терминов.

Гейгер утверждает, что его система аксиом есть свободное творение человеческого разума и что она создает геометрию Евклида. Но рассмотрение этих аксиом немедленно показывает, что без знания элементарной

[1] Гейгер, повидимому, уверен, что для существования какой-нибудь вещи достаточно аксиоматически потребовать этого существования.

[2] Хотя $\overline{O}$ и несовместно с O, но логическое отрицание отношения $\overline{O}$ **не** равносильно O.

геометрии, без реальных конкретных геометрических представлений невозможно построить такую логическую систему. Аксиомы не в состоянии также «создать» геометрию, что вытекает хотя бы из того, что для логической структуры системы Гейгера может быть построена и геометрическая и арифметическая модель.

Система Гейгера	Геометрическая интерпретация	Арифметическая интерпретация
Вещи A, B, C,...	Точки (A, B, C,...)	Различные тройки чисел (x, y, z).
Вещи a, b, c,...	Прямые (a, b, c,...)	Различные системы двух уравнений первой степени с тремя неизвестными.
Вещи α, β, γ,...	Плоскости (α, β, γ,...)	Различные уравнения первой степени с тремя неизвестными x, y, z.
J (*, **)	Инцидентность: точка лежит на прямой, плоскость проходит через точку и т. п.	Тройка чисел удовлетворяет двум уравнениям первой степени с тремя неизвестными, соответственно одному уравнению и т. п.
O (*, *, *)	Ориентировка[1]: (отношение, устанавливаемое между тремя точками A, B, C, не лежащими на одной прямой, и определяющее направление от A к B и далее к C или от A к C и далее к B)	Некоторый определитель $>$, соответственно <0.

Система Гейгера опирается на все предшествующее историческое развитие геометрии. При всей ее абстрактности ее глубокие жизненные корни находятся в материальной действительности.

§ 2. Арифметика.

В развитии арифметики Гонсет различает три периода. Первый период «интуитивный», период создания примитивного понятия числа. Его можно проследить в истории математики, где оказывается, что для счета большинство народов пользовалось пальцами рук и потому создало десятич-

[1] В этой интерпретации последняя из приведенных нами аксиом Гейгера гласит: «Три точки либо лежат на одной прямой, либо же определяют правую или левую ориентировку».

ную систему. Счет на этой ступени — просто регистрация предметов, причем для осуществления счета предметы должны одновременно рассматриваться как различные и как равные, что здесь не представляет формально логического противоречия. Картина примитивного счета развертывается перед нами также в первых арифметических занятиях ребенка. Ребенок отсчитывает предметы, как свои пальцы. Сложение производится следующим образом: отсчитывается первая группа предметов, затем вторая и, наконец, все вместе, начиная с начала. Операция сложения выполняется экспериментально. Ребенок замечает, что отсчет одной и той же группы предметов останавливается на одном и том же номере, независимо от порядка отсчитываемых предметов; некоторое свойство остается неизменным при всех перестановках. Но и разные группы предметов могут обладать тем общим свойством, что их отсчет останавливается на одном и том же номере. Только путем такого длительного опыта, долго после того как ребенок уже бойко считает, сравнительно очень поздно образуется абстрактное понятие числа.

Когда арифметика стоит уже на высокой ступени развития, начинается второй период — период первых попыток аксиоматизации арифметики. Он может быть охарактеризован формулировкой теории целых чисел, данной Пеано.

В основе лежат четыре арифметические аксиомы:

1. За всяким числом a следует число a'.
2. Только число 1 не следует ни за каким числом.
3. Всякое число следует непосредственно или посредственно за числом 1.
4. Ряд чисел, начиная с любого, построен так же, как ряд чисел, начиная с 1.

Всякая последовательность, удовлетворяющая этим четырем аксиомам, построена одинаково с последовательностью натуральных чисел. Аксиомы представляют собой абстракцию из опытных данных и очень явно опираются на отношения предметов в действительности. На основе четырех указанных аксиом может быть определено сложение и умножение. Теперь можно, так же, как в геометрии, стоя на этой ступени развития арифметики, рассматривать модели. Нетрудно убедиться, что теории, построенной на четырех приведенных нами аксиомах, удовлетворяет как ряд натуральных чисел, так и ряд только четных чисел [1]. Оба ряда представляют две различные модели одной и той же логической структуры, так же, как это имело место для двух различных моделей евклидовой геометрии. И так же, как в геометрии, те свойства, которые отличают эти два ряда чисел друг от друга, те свойства, которые стираются при переходе на высшую ступень абстракции, могут быть названы специфически арифметическими. Ряд чисел по отношению к материальной действительности представляет абстракцию, по отношению к логической структуре тот же ряд чисел является конкретным объектом исследования.

Аксиоматика арифметики не остановилась на системе Пеано. Так же, как в геометрии, появилось стремление создать аксиоматику, вполне

---

[1] Во второй модели сложение определяется как обычно, при умножении берется половина обыкновенного произведения.

оторванную от той действительности, из которой была абстрагирована арифметика натурального числа. Числа становятся идеальными элементами, не обладающими сперва никакими свойствами. Их свойства определяются рядом аксиом, причем система аксиом сама по себе (так же, как и в геометрии) должна создавать числа. Первые аксиомы такой системы, например, следующие:

1. Один из элементов называется единица; его символ 1.

2. Ко всякой паре чисел a и b принадлежит определенное число c, их сумма: $c = S(a, b)$, или $c = a + b$.

3. Не может быть $a + 1 = 1$.

Арифметика становится чисто логическим построением. Число определено, создано лишь тогда, когда перечислены все аксиомы. Но существование логического отношения требует *двух* элементов; отношение суммы возможно лишь при наличии *трех* элементов. Следовательно, в самое построение чисто логических аксиом уже входит менее абстрактное, самое примитивное понятие числа. Чисто логическая система аксиом арифметики опирается на все предыдущее развитие и свои самые глубокие корни пускает в материальную действительность.

Рассмотрим теперь некоторые идеалистические высказывания о математике. Эйнштейн в своей брошюре «Геометрия и опыт» писал об аксиоматике: «Шаг вперед, сделанный аксиоматикой, заключается в том, что она точно отграничила логически формальное от вещественного, или видимого, содержания; согласно аксиоматике только логически формальное составляет предмет математики. Все же остальное содержание математики, не связанное с логически формальным и соответствующее видимым или иным вещам, к математике не относится». Как видно, Эйнштейн не только считает возможным отрыв логически формального от вещественного содержания, но и видит в этом отрыве особое преимущество современной аксиоматики. «Чистая» математика, абстрактная рациональная наука, противопоставляется экспериментальным естественным наукам. Но тогда требует объяснения то все большее и большее значение, которое завоевывает математика в естественных науках, в технике, в машиностроении, несомненная применимость математики к изучению действительности. Эйнштейн дает ответ: «Почему возможно такое превосходное соответствие математики с действительными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, независимым от всякого опыта. Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем одного только размышления, положить основы существующих вещей. По моему мнению ответ на этот вопрос простой: поскольку положения математики относятся к действительности, постольку они не верны; и они верны только постольку, поскольку они не относятся к действительности». Развивая свою мысль дальше, Эйнштейн приходит к убеждению, что, например, геометрия для того, чтобы стать применимой к действительности, должна дополниться заключениями, происходящими из опыта, и из «чистой аксиоматической геометрии» превратиться в «практическую геометрию», которую Эйнштейн считает естественной наукой.

Все историческое развитие математики от первых начал до современной аксиоматики доказывает неправильность взглядов Эйнштейна. Логически формального нельзя точно отграничить от вещественного содержания, так как одно логическое не охватывает всего богатства математики. Мы видим, что много специфически геометрических и арифметических свойств не входит в область формальной логики, что они до-логичны. И как бы высока ни была достигнутая ступень абстракции, она все же опирается на все предыдущее развитие и в конечном счете на вещественное содержание, от которого она, следовательно, никогда не может освободиться вполне. Если в наше время так распространено мнение, что математика представляет свободное творение человеческого разума, то это объясняется бурным ростом математики, созданием областей (теория множеств, многомерные и абстрактные пространства), не так непосредственно доступных наглядному представлению, как элементарная геометрия и арифметика, и отрывом современных теорий от их исторического развития. Правильное понимание современной математики невозможно без знания всей ее истории.

Отношение вещественного к формально логическому, конкретного к абстрактному в математике, как и во всякой науке, далеко не так просто, как предполагает Эйнштейн. Возьмем для примера какой-нибудь кристалл. На первый взгляд мы видим прямые ребра, гладкие, плоские грани и правильную форму. Для первого описания создаются понятия элементарной геометрии, физики, химии. Но чем глубже вникает наше исследование в сущность конкретного кристалла, тем абстрактнее должны становиться теории, объясняющие эту сущность. Непрерывность ребра уничтожается вследствие атомного строения, доказанного экспериментально при помощи рентгенограммы, которая в свою очередь требует высоких математических и физических теорий. С самого начала умственной деятельности человека до наших современных достижений конкретное и абстрактное в науке переплетается в сложную ткань. На основе опыта создается теория, требующая новых экспериментов, которые в свою очередь обусловливают создание новых, более глубоких теорий. Математика, как и всякая другая наука, говорит Гонсет, не есть ни чистая эмпирия, ни свободное создание человеческого разума, а сложное переплетение того и другого. Материальная действительность и формальная логика представляют как бы два берега, между которыми возникает наука[1].

Фраза Эйнштейна, что математические положения постольку, поскольку они относятся к действительности, неверны, применима к любой другой, хотя бы самой «экспериментальной», науке. Одновременно с абстракцией происходит схематизация (т. е. упрощение или огрубление) опытных данных. Всякое научное понятие и всякий закон есть в этом смысле схема, которой вещи и отношения в действительности соответствуют лишь до некоторого предела.

[1] Как видит читатель, здесь опять сказываются в установке Гонсета элементы кантианства. Из дальнейшего, однако, будет видно, что самое формальную логику Гонсет тоже рассматривает как абстракцию от действительности. Недостаточно ясен ему, повидимому, лишь самый процесс абстракции (отвлечения).

Вторая цитата, которой мы займемся, так как она в наши дни очень часто повторяется в среде западных математиков, принадлежит Кронекеру: «Целые числа сотворил бог; все остальное дело человека». Понятие целого числа возводится в абсолют, во что-то данное свыше. Современная физика теорией квант подорвала значение непрерывности. Многие математики, идеалисты в своих философских воззрениях, но ссылающиеся на действительность, понимаемую ими, однако, лишь в смысле совокупности переживаний, интуиции и т. д., приходят к убеждению, что и в математике понятие непрерывности логически должно быть сводимо к понятию целого числа. В то время как целое число дано в «действительности», непрерывность не существует, и, следовательно, она и в математике должна играть лишь роль вспомогательного понятия. Против этих тенденций сведения всей математики в конечном счете к арифметике целого числа Гонсет возражает. Как мы видели при рассмотрении алгебры, понятие целого числа так же отвлечено от некоторых отношений действительности, как и понятие прямой. В действительности так же существуют два каких-нибудь предмета, как существуют ребро кристалла или луч света, но **понятие** числа «два» в действительности так же не реализовано (как таковое), как понятие прямой или понятие «дерева вообще». Вейль ведет борьбу против непрерывности, потому что он в обосновании иррационального числа обнаружил порочный круг. Если даже признать существование порочного круга, то таковой еще не есть логическое противоречие и отнюдь не заставляет нас отказаться от непрерывности. Появление порочного круга указывает лишь на невозможность логического сведения понятия непрерывности к понятию целого числа. Кроме того, порочный круг в более скрытом виде содержится и в аксиомах целого числа, как было указано в разделе об арифметике. Мнение Гонсета по отношению к порочному кругу можно выразить следующими словами: порочный круг лишь указывает на невозможность чисто логического доказательства. Он в явном или скрытом виде появляется везде, когда исследование достигает достаточной глубины. Он появляется потому, что для построения более высокой ступени абстракции неизбежно употребление тех же понятий, созданных на низшей ступени.

Роль действительности в арифметике и геометрии, в образовании целого и иррационального числа одна и та же. Материальная действительность дает отношения, от которых могут быть отвлечены эти понятия, она наталкивает человеческий разум на их создание[1].

§ 3. Истинность математики и логика.

Вопрос об истинности математических построений стоит в центре философии математики. Истинной считали еще во времена Гаусса и Лобачевского геометрию Евклида, предполагая, что аксиомы **очевидны** и не требуют доказательства, истинной в том смысле, что она вполне адекватна действительности, т. е. что пространство Евклида вполне совпадает с физическим пространством. Такое убеждение послужило у Гаусса поводом к его геодезическим измерениям, которые должны были доказать истин-

[1] Опять следы кантианства (в учении об абстракции).

ность евклидовой геометрии. Другое понимание истинности вышло из философской школы Платона и особенно распространено между современными математиками. Предполагается существование какого-то особого, абсолютного, т. е. независимого от материальной действительности, мира (у Платона это мир идей), в котором очищенный от всего вещественного человеческий разум в состоянии воспринять абсолютную истину во всей ее полноте. В современной философии математики в роли этого «особого мира» выступает у интуиционистов интуиция, у формалистов — классическая формальная логика[1]. Гонсет не признает ни истинности в первом, слишком упрощенном, «экспериментальном» виде, ни во втором, чисто «рациональном». Неправильность первого понимания была доказана открытием неевклидовой геометрии и возможностью интерпретации физического пространства в смысле той или другой геометрии. Неправильность «рационального» понимания истинности Гонсет пытается (по отношению к формалистам) доказать тем, что он лишает классическую формальную логику ее абсолютного значения, показывая, что и ее законы представляют абстракции из действительности.

В классической логике большую роль играет понятие вещи в смысле Аристотеля, т. е. вещи, данной нам во всей полноте, со всеми свойствами и признаками. Как создалось это логическое понятие вещи? Изучение умственной деятельности ребенка показало, что у ребенка впечатления окраски, формы, звука, исходящие от одного и того же предмета, не соединяются с самого начала в одно единое целое. Ребенок даже не в состоянии осознать тождество предмета в его различных положениях. Лишь после длительного опыта все разрозненные впечатления сливаются в одно целое, и образуется первая примитивная абстракция, схематическое понятие предмета. Из опыта с предметами повседневной жизни человек узнает, что предмет остается одним и тем же при всех своих изменениях, что он может присутствовать или отсутствовать, что эти две возможности исключают друг друга. Эти экспериментальные законы вещественного предмета становятся основой дальнейшей абстракции. Предмет преобразуется в логическое понятие «вещи», присутствие и отсутствие обобщается в понятие существования (присутствие где-нибудь) и несуществования (отсутствие везде). Первые законы логики существования и несуществования гласят:

1. Всякая вещь остается тождественной самой себе.

2. Всякая вещь или существует или не существует (примитивная формулировка принципа исключенного третьего).

3. Эти две возможности исключают друг друга (принцип противоречия).

Логика на этой ступени, логика существования и несуществования, есть не что иное как физика любого предмета.

В жизни изречение может быть правдиво или ложно, причем для обычных высказываний легко решить, что имеет место. Путем абстракции из этих отношений получается логика истинного и ложного, в которой также (в соответственном виде) выполняются законы (2) и (3).

От логики существования и несуществования и логики истинного и ложного на пути дальнейшей абстракции переходим к чистой формальной логике. Здесь A, B не имеют больше никакого реального значения; они —

[1] В основе которой лежит, впрочем, та же интуиция.

пустые символы. С позиции этой ступени абстракции логика существования и логика истинного представляют две равноправные модели для одной и той же формальной структуры. Так же, как в геометрии и алгебре, при переходе к последней ступени абстракции теряются специфические свойства существования и несуществования, истинного и ложного. И так же, как в геометрии и алгебре, эта последняя абстрактная, формальная система не в состоянии создать логики существования и логики истинного, а, наоборот, опирается на нее и на все предыдущее развитие. Для самых простых законов логики двух предметов могут быть даны, кроме логических, например и алгебраическая модель, как это сделано в нижеследущей таблице.

A	A существует	A истинно	число A положительно	+
A	A не существует	A ложно	число A отрицательно	—
B	B существует	B истинно	число B положительно	+
$\bar{B}$	B не сущест«ует	B ложно	число B отрицательно	—
A&B	A существует и B существует	A истинно и B истинно	A положительно и B положительно	++
A&$\bar{B}$	A существует и B не существует	A истинно и B ложно	A положительно и B отрицательно	+—
$\bar{A}$&$\bar{B}$	A не существует и B не существует	A ложно и B ложно	A отрицательно и B отрицательно	——
$\bar{A}$&B	A не существует и B существует	A ложно и B истинно	A отрицательно и B положительно	—+

Наше исследование приводит нас к заключению, что и формальная логика не есть нечто априорное, свыше данное, а по существу такая же абстракция из материальной действительности, как геометрия и алгебра. Разрушена абсолютность формальной логики, и следовательно, разрушена истинность математики в смысле Платона, разрушена ее незыблемость.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос об истинности математических построений. Если какая-нибудь математическая теория приводит в конечном счете к явному противоречию, то она неправильна. Но одна формальная логика не дает нам возможности доказать непротиворечивость математики. Это, повидимому, осознал и высказал в своих последних работах даже основоположник формализма Гильберт. Уничтожение критерия абсолютной логики сближает математику с естественными науками. Истинность для математики есть достаточное «схематическое соответствие» (Гонсет) ее построений с окружающей нас действительностью. Достаточность этого схематического соответствия не может быть проверена путем логически формальных рассуждений; она проверяется всей **деятельностью** человечества.

С. Яновская.

О ТАК НАЗЫВАЕМЫХ „ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ЧЕРЕЗ АБСТРАКЦИЮ“

Еще некоторое время тому назад среди математиков, особенно тех из них, которые были склонны к махизму, большой популярностью пользовалось крылатое изречение Ресселла, что «математика — это наука, не знающая, ни о чем она говорит, ни верно ли то, что она говорит». Но в результате новых исследований по основаниям математики стало ясно, что современная «беспредметная» аксиоматическая математика[1], которую имел в виду Ресселл, невозможна — не только исторически, но и логически — без предшествующей ей «предметной» генетической математики, т. е. математики, которая знает, о чем она говорит, и знает, верно ли то, что она говорит. Оказалось что в основе современной математики должна лежать арифметика натурального числа, которая знает, что такое *число*, что значит *сложить*, *умножить* и т. д. Оказалось, что по существу «геометрия есть не что иное, как та часть всего здания понятий физики, которая отображает возможные соотношения взаимного расположения твердых тел в мире действительных вещей» (Гильберт).

Здесь под основными понятиями нельзя больше понимать «все, что угодно», но нужно уметь отвечать на вопрос: «Что это такое?» —и нельзя уклониться от ответа на этот вопрос[2].

Что понятия математики носят отвлеченный, абстрактный характер, что в природе нет непосредственно геометрических точек без измерений, чисел как таковых и т. д., — это люди знали еще с глубокой древности. И с глубокой же древности существовали две, в корне различные точки зрения на характер абстракции в математике: материалистическая и идеалистическая. Вопрос о характере математической абстракции, о способах образования понятий в математике не сходил с тех пор с арены философских споров и борьбы партий в философии. Особенную остроту он приобрел снова в последнее время, когда и для математиков стало выясняться, что нельзя оставаться на позициях «нейтральности» в споре между материализмом и идеализмом; что нельзя, в частности, обосновать анализ, не ответив на вопрос, что такое натуральное число; что и в математике нельзя, иными словами, ограничиться одними только аксиомами и правилами вывода, но, хотя бы для доказательства непротиворечивости, прихо-

[1] О действительном предмете этой «беспредметной» математики см. статью «Идеализм и математика».

[2] См. статью «Современные течения в буржуазной философии математики», § 6.

дится ставить и вопрос о происхождении и определении основных математических понятий.

Для материалиста научные понятия суть копии, слепки, снимки с материальной действительности. Математические понятия, поскольку они действительно научны, должны удовлетворять тому же требованию, и мы вправе ожидать поэтому, что в основном характер математической абстракции ничем не отличается от характера абстракции, с помощью которой образуются понятия в других науках, как естественных, так и общественных.

Наоборот, идеализм заинтересован в подчеркивании «особого» характера математической абстракции. Недаром и Платон, и Кант стремились изобразить математику наукой, обладающей особым априорным, т. е. независимым от опыта, источником познания; недаром современный идеализм видит в понятиях математики «свободные творения чистого разума», или «фантазии рассудка». Это дает ему возможность использовать математику в борьбе против материализма для «доказательства» превосходства духа над материей, духа, способного-де из собственных недр произвести законы, которым подчиняется реальный внешний мир, природа.

Стоит, однако, обратиться к действительной математике (и ее истории) и попытаться на основе фактического материала выяснить характер того процесса абстракции, с помощью которого образуются в ней основные понятия, чтобы убедиться во вздорности идеалистической басни об «особом» характере математического познания, чтобы обнаружить и в математических понятиях такие же копии, слепки, снимки с материальной действительности, с какими мы имеем дело во всех других науках о природе и обществе.

В настоящей статье мы делаем именно такую попытку сличить процесс образования понятий в математике с процессом образования их в других науках. Чтобы яснее выявить диалектико-материалистический по существу характер этого процесса, мы взяли за образец «Капитал» Маркса, именно первые его главы, содержащие определение понятий стоимости и денег. Выяснению вопроса в его наиболее общей постановке мы предпошлем разбор понятия о целом (положительном) числе, собственно, даже не о числе вообще, а о первых простейших количественных числах, логическое (и историческое) возникновение которых сличим с возникновением денег по «Капиталу».

§ 1. Число как свойство множеств вещей.

1. Определение равночисленности.

Чтобы выяснить, что отображает в действительности, например, число 5, обратим внимание на те вещи и отношения, для которых это число характерно. Вероятно, в первую очередь нам придет в голову, что «5» — это число пальцев человеческой руки, число частей света на земле. Но 5 есть и число букв в слове «число», или в слове «буква», или в слове «слово»; 5 есть число различных правильных многогранников, число лепестков в цветке герани или лютика. При этом свойство быть в числе 5, характерное, например, для лепестков всякого цветка из семейства бобовых, есть не нечто случайное, а одна из присущих именно этому семейству особенностей, существующая независимо от того, считаем ли мы эти лепестки или нет. Таким образом, уже из этих примеров ясно, что число 5 отражает какие-то реальные свойства вещей действительного, материального, т. е. независимо от нашего мышления существующего мира. Но, узнав только то, что некоторое собрание вещей характеризуется числом 5, мы еще решительно ничего не сумеем сказать о природе вещей этого собрания, о том, что это за вещи. Число, таким образом, оказывается «чистейшим количественным определением» (Энгельс) и в смысле полного безразличия к природе тех предметов, для которых оно характерно. Точнее говоря, некоторому собранию вещей может отвечать какое-нибудь определенное число, но одному и тому же числу соответствуют самые разнообразные собрания вещей.

Все это, однако, еще не дает нам возможности точно определить хотя бы число 5. Чтобы подойти к этому определению, попробуем выяснить, что общего есть между собранием букв в слове «буква» и собранием их в слове «число». Нетрудно увидеть, подписав эти слова друг под другом:

$$\begin{array}{ccccc} б & у & к & в & а \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ч & и & с & л & о, \end{array}$$

что каждой букве верхнего собрания можно поставить в соответствие букву нижнего и наоборот, и притом так, что различным[1] буквам верхнего собрания будут отвечать различные буквы нижнего, а различным буквам нижнего — различные буквы верхнего. Такое соответствие называется в математике *взаимно-однозначным*. Для его установления не требуется знать число вещей каждого собрания, а нужно только уметь приводить их в соответствие друг с другом. Однако установление такого соответствия дает нам возможность утверждать *равночисленность* двух множеств. Так, если мы знаем, что в театре спектакль шел с аншлагом, но людей без места не было, то, хотя бы мы и не знали числа мест этого театра и числа проданных билетов, мы можем утверждать, что число зрителей в этот день было равно числу мест в театре. Равенство двух чисел, таким образом, можно установить, не зная самих этих чисел: в самом деле, мы имеем уже возможность определить понятие равночисленности двух множеств, хотя не умеем еще определить характерное для них *число*. Именно, мы будем говорить, что два множества равночисленны — иногда говорят равномощны, — если их можно привести во взаимно-однозначное соответствие друг с другом.

Но теперь мы имеем возможность определить и наше число 5. В самом деле, что общего имеют все равномощные множества? Всякий умеющий

---

[1] Различными считаются при этом все элементы каждого собрания. Так, например, в слове «слово» нужно отличать одно о от другого (иначе в этом слове различаемых нами букв будет не пять, а только четыре). Это можно сделать хотя бы так: первое о назвать «средним», второе — «крайним» (чтобы не пользоваться еще на этой ступени именами числительными). Можно было бы воспользоваться также их различием в произношении. Вообще уменье различать и отождествлять вещи должно предшествовать определению их числа.

уже считать и пользующийся счетом человек, конечно, скажет, что все равномощные друг другу множества характеризуются одним и тем же числом и что, наоборот, всякие два характеризующиеся одним и тем же числом множества равномощны. Но в таком случае число можно определить как общее свойство всех равномощных друг другу множеств. В применении к числу 5 ясно, что достаточно выбрать, например, множество пальцев человеческой руки, чтобы определить число 5 как общую характеристику всех множеств, равномощных этому. Итак, «5» — это общее свойство всех множеств, равномощных множеству пальцев человеческой руки. Точно так же «4» можно определить как общее свойство всех множеств, равномощных, например, множеству углов квадрата, или число «2» как общее свойство всех множеств, равномощных множеству ног у человека, и т. д., и т. п.

2. Транзитивность и симметричность.

Ясно, однако, что с таким определением могут быть связаны трудности. В самом деле, ведь я могу определить число 5 и как общее свойство всех множеств, равномощных множеству пальцев человеческой руки, и как общее свойство множеств, равномощных совокупности (основных) частей света, и еще многими другими способами, выбирая за представителя всего класса равномощных друг другу множеств одно из них. Где у нас гарантия, что все эти «определения» определяют действительно один и тот же класс, одну и ту же совокупность эквивалентных друг другу множеств вещей? Ведь если бы, например, мы захотели определить класс множеств, бо́льших данного, то не смогли бы сделать это заданием произвольного элемента этого класса, ибо, зная лишь, что к классу множеств, «бо́льших» данного, принадлежит множество из пятнадцати элементов, мы не можем решить, не принадлежит ли к этому классу и некоторое множество из четырнадцати элементов.

Вообще ясно, что класс вещей b, находящихся в данном отношении R к вещи a, определяется выбором этой последней. Так, например, класс целых чисел, делящихся на a, определяется выбором числа a. Выбрав за a двойку, мы получим при этом класс всех четных чисел, выбрав тройку — класс всех кратных трем и т. д.; однако, наоборот, указание любого элемента b каждого такого класса, вообще говоря, еще не определяет этот класс. Так, например, зная лишь, что к некоторому из наших классов принадлежит число 6, мы еще не будем знать, идет ли речь о классе четных чисел или о классе кратных трем или шести. Для отношения равномощности этой опасности, однако, нет. Здесь каждое множество может принадлежать только одному классу равномощных друг другу множеств вещей, и поэтому достаточно указать любой элемент некоторого класса равномощных друг другу множеств, чтобы этим весь класс был определен.

Это связано с особыми свойствами равномощности, именно с тем, что если, например, множество пальцев человеческой руки равномощно множеству частей света, то и наоборот: множество частей света равномощно множеству пальцев человеческой руки, и, кроме того, всякое множество, равномощное одному из них, равномощно и другому. Отношение равномощности, как говорят в математике, симметрично и транзитивно. (Если из того, что вещь a находится в отношении R к вещи $b: aRb$, следует, что и вещь b находится в отношении R к вещи $a: bRa$, то отношение R называется *симметричным*. Отнюдь не всякое отношение симметрично. Так, отношение *подобия*, конечно, симметрично, но отношение «сын», например, не обладает этим свойством. Ибо из того, что «a — сын b», никак не следует, что «b — сын a». *Транзитивным* называется такое отношение R, для которого из aRb и bRc следует aRc. Так, если «a подобно b», а «b подобно c», то и «a подобно c». Но если «a есть сын b», а «b — сын c», то a — отнюдь не «сын c».) Именно эти особенности отношения равномощности и позволяют нам выбрать *любое* из равномощных друг другу множеств в качестве представителя всего их класса. При этом совершенно безразлично, какое из всех равномощных множеств выбрать за представителя всего класса, но какое-нибудь выбрать необходимо.

3. Логическое и историческое в определении числа.

Приведенное здесь нами определение числа (пока только отдельных, индивидуальных чисел, а не числа вообще и, тем более, не всего их ряда) принадлежит Кантору и Фреге. Мы видим, что оно предполагает существование вещей и совокупностей вещей (множеств), что число 5 нельзя определить, не указав хотя бы одного собрания вещей, имеющего ровно 5 предметов, и что для определения числа необходимо не только понимать, но и действовать: нужно уметь приводить вещи в соответствие друг с другом, а для этого нужно уметь их различать и отождествлять. Что все это далеко не простая задача, об этом свидетельствуют как история счисления, так и способы счета людей первобытной культуры. «Заблуждением было бы думать, — пишет Леви-Брюль, — что «ум человеческий» сконструировал себе числа для счета: меж тем на самом деле люди производили счет путем трудных и сложных приемов, прежде чем выработать понятие о числе как таковом». Чтобы продемонстрировать, насколько сложна эта операция при отсутствии соответствующей практики и насколько необходимым моментом ее является уменье приводить вещи в соответствие друг с другом (причем на первых ступенях именно вещи с вещами, а не вещи с числами), приведу пример из Леви-Брюля, заимствованный явно из колонизаторской «практики» белых «цивилизаторов».

Леви-Брюль пишет: «Вот пример, взятый у дайяков с острова Борнео. Дело шло о том, чтобы известить определенное число восставших, но затем покорившихся селений относительно суммы штрафа, который они должны были уплатить. Как должен был поступить в данном случае туземный посланец? Он принес несколько сухих листьев и разделил их на кусочки. Однако я заменил ему эти кусочки листьев клочками бумаги, более удобными. Он разложил эти клочки один за другим на столе, пользуясь одновременно пальцами для счета до 10. Затем он положил на стол ногу, считая на ней каждый палец, указывая одновременно на клочок бумаги, который должен был соответствовать названию селения с именем его вождя, с числом его воинов и суммой штрафа. Когда он перебрал все пальцы ног, он снова вернулся к пальцам рук. К концу всего списка перед ним было 45 кусков бумаги, разложенных на столе. Тогда он попросил меня снова повторить мое поручение, что я и сделал, в то время как он в прежнем порядке, подсчитывая пальцы ног и рук, перебирал свои клочки бумаги. «Вот,— сказал он,— какие наши буквы: вы, белые, вы не считаете так, как мы». Поздно вечером он в точности повторил все, кладя по очереди палец на каждый клочок бумаги»[1].

Если в настоящее время мы отнюдь не всегда отдаем себе отчет в том, что определение (количественного) числа предполагает действительное наличие некоторого множества вещей, для которого это число характерно и которое служит, так сказать, общим эквивалентом для всех равномощных ему множеств, то происходит это потому, что для нас в роли «вещей», совокупности которых образуют такие эквивалентные множества, выступают сами знаки чисел: 1, 2, 3, 4, 5...., к которым мы и относим в процессе счета сосчитываемые предметы. Ряд чисел, освобожденных от своего первоначального предметного значения, свидетельствовавшего о связи их с какими-нибудь определенными множествами вещей, игравшими роль стандартных, например, с пальцами рук и ног, костяшками «счетов» и т. п., выступает при этом в роли стандартного множества вещей, играющего роль всеобщего эквивалента. Число, являющееся производным понятием по отношению к множеству вещей, выступает при этом как предшествующее вещам, заранее существующее до всякого счета и необходимое даже в качестве промежуточной ступени для установления соответствия между множествами вещей. Так, при посадке деревьев в ямы фактически осуществляется взаимнооднозначное соответствие между множеством деревьев и множеством ям. Однако равномощность этих двух множеств обычно проверяют предварительно, пересчитывая их каждое в отдельности.

Подлинно материалистическое определение числа, таким образом, может быть только диалектическим, вскрывающим диалектику развития этого понятия, начиная с реальных множеств вещей, для которых оно служит эквивалентом, и кончая тем моментом, когда, пользуясь выражением Маркса, «роли оборачиваются» и число выступает уже не как производная от множества вещей их характеристика, а как нечто, предшествующее этим множествам. Для того, кто этой диалектики развития не видит, кто берет числа сразу в виде так называемого натурального ряда, предшествующего каким бы то ни было вещам и их множествам, понятие числа необходимо должно быть окутано мистическим покровом тайны и представляться возникшим в голове из чистого мышления. На самом же деле, «понятие числа... заимствовано именно из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первое арифметическое действие, представляют что угодно, но только не свободное творение рассудка. Для счета необходимы не только объекты счета, но также уже и способность при рассмотрении этих объектов отвлекаться от всех их свойств, кроме их числа, а эта способность — продукт долгого исторического, эмпирического развития... Как и прочие на-

---

[1] Л. Леви-Брюль, Первобытное мышление, стр. 126 и 135. Приведенный пример показывает как раз, что никакого особого «первобытного» мышления нет: логическая основа счета у людей первобытной культуры и у современного математика одна и та же — установление взаимнооднозначного соответствия.

уки, математика возникла из потребностей человека... Но, как и во всех областях мышления, отвлеченные от действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир»[1].

Подводя итог, мы можем сказать:

1. Для того чтобы могло возникнуть понятие числа, необходимо наличие реальных вещей и их совокупностей (множеств) и действенное (практическое) отношение человека к ним, состоящее в уменьи комбинировать вещи в множества, различать внутри множества как целого отдельные элементы и приводить эти множества в соответствие друг с другом.

2. Однако, раз возникнув, числа сами выступают в дальнейшем как стандартные множества вещей, к которым относятся при счете элементы сосчитываемых множеств. И этот «переворот в методе», исторически сопряженный с превращением чисел из характеристики некоторых равномощных друг другу множеств вещей в особые, до всяких вещей и их множеств существующие «вещи», неизбежно ведет к мистике при метафизическом способе мышления, для которого логическое не включает в себя историческое, т. е. определение предмета не включает истории его возникновения и развития. Такую мистику числа мы встречаем у всех народов, у которых имена числительные существуют уже не как названия для каких-нибудь определенных совокупностей вещей, а именно как имена числительные. Стоит вспомнить хотя бы числовую мистику пифагорейцев с их представлением о числе, как о чем-то «среднем между чувственным и мыслью».

4. Аналогия между числом и стоимостью.

От читателя, вероятно, не ускользнуло сходство самых общих черт развития понятия о числе — начиная с равномощности двух множеств и кончая множеством чисел, выступающим как предшествующее вещам и их множествам,— с общим ходом идей в первых главах «Капитала» Маркса. И в этом нет ничего удивительного. Характеризуя примененный Марксом в «Капитале» метод, Ленин пишет: «Таков же должен быть метод изложения (resp. изучения) диалектики вообще (ибо диалектика буржуазного общества у Маркса есть лишь частный случай диалектики)»[2]. Правда, в силу особо абстрактного характера математики вопрос о приложимости и к ней того же метода мог возбуждать сомнения. Однако, из опубликованных недавно математических рукописей Маркса ясно, что он его решал в положительном смысле. Ибо применяемый им метод тот же, каким он пользуется в «Капитале». Ставя себе задачу обосновать диференциальное исчисление, Маркс начинает «с самого простого, обычного, массовидного» — с обыкновенной алгебры и притом с простой суммы и разности двух чисел, вскрывая «в этом простейшем явлении... все противоречия (resp. зародыши всех противоречий)»[3] диференциального исчисления. Больше того, самое изложение диалектики развития диферен-

---

[1] Маркс и Энгельс, Соч., т. XIV, стр. 39.
[2] Ленин, Соч., изд. 2-е, т. XIII, стр 302.
[3] Там же, стр. 302.

циала напоминает (конечно, только в самых общих чертах) общий ход развития понятия о деньгах в «Капитале». Диференциальные символы возникают сначала как символические эквиваленты некоторых реальных алгебраических процессов и лишь в ходе дальнейшего развития меняются с ними ролями: когда мы вступаем на собственную почву диференциального исчисления, исходным пунктом становится не реальный процесс, а (эквивалентный ему) диференциальный символ. И Маркс показывает, как забвение этой диалектики развития диференциала, попытка метафизически начать сразу с этого понятия как уже готового, заранее данного символа приводят к мистике бесконечно малых, рассматриваемых как особый, таинственный сорт величин («мистическое диференциальное исчисление» Ньютона и Лейбница). Не удивительно, что тот же метод оказывается применимым и по отношению к простейшему исходному математическому понятию — количественному числу, что диалектика развития понятия о числе также оказывается частным случаем диалектики вообще. Больше того:

1) Маркс начинает «Капитал» с обмена товаров, приравниваемых друг другу, несмотря на совершенно различную их природу.

Приведенный нами анализ числа начинается с установления равномощности двух множеств, совершенно независимо от особой природы входящих в эти множества элементов.

2) Общей характеристикой всех обмениваемых друг на друга товаров оказывается их стоимость («то общее, что выражается в меновом отношении или меновой стоимости товара, и есть его стоимость»).

Общей характеристикой всех равномощных друг другу множеств вещей оказывается их число, т. е. нечто третье, отличное от всех этих множеств (ибо число не есть просто то конкретное множество объектов, которое необходимо для его определения, а именно общее свойство всех равномощных этому множеству множеств вещей)[1].

3) Развитие форм стоимости («от простейшей, наиболее скромной формы и вплоть до ослепительной денежной формы») начинается с «простой, единичной или случайной формы стоимости» как отношения между двумя обмениваемыми друг на друга товарами A и B и через «полную, или развернутую форму» идет ко «всеобщей» форме стоимости, впервые действительно выражающей собой то, что имеется общего у данного товара со всеми другими товарами. Уже в этой «полной, или развернутой, форме стоимости», которая выражается уравнением: «Z товара $A = u$ товара B, или $= v$ товара C, или $= w$ товара D, или $= x$ товара E, или $=$ и т. д. (20 аршин холста равняются 1 сюртуку, или $= 10$ фунтам чаю, или $= 10$ фунтам кофе, или $= 1$ квартеру пшеницы, или $= 2$ унци-

[1] Нужно, однако, твердо помнить, что в то время как арифметика не изучает какие-либо вещи и отношения между ними в их специфике, т. е. как именно для такой-то, а не другой области действительности характерные, но рассматривает их с чисто количественной стороны,— политэкономия не может ограничиться констатированием факта обмена разных товаров друг на друга и наличия у них общей характеристики — стоимости, но должна ставить вопрос о причине, порождающей эту общность, т. е. о труде, равно как и вопрос, почему труд выражается в стоимости и в каком обществе это имеет место.

ям золота, или $= {}^1/_2$ тонны железа, или $=$ и т. д.)»,— случайный характер отношения двух индивидуальных товаровладельцев отпадает. Теперь, благодаря тому, что отношение обмена симметрично, т. е. что уравнение, выражающее равенство такого-то количества товара *А* такому-то количеству товара *В*, обратимо, может возникнуть «всеобщая» форма стоимости, и стоимость всех обмениваемых друг на друга товаров может быть выражена в стоимости одного из них, служащего «всеобщим эквивалентом». И дальше: «специализировавшийся на роли быть всеобщим эквивалентом товар «выталкивается» всеми другими товарами из их среды», и этот специфический товарный вид становится денежным товаром или функционирует в качестве денег.

Приведенное нами в общих чертах развитие понятия о числе также начинается с установления простого единичного соотношения равномощности между двумя отдельными множествами вещей. Чтобы от него прийти к понятию числа, нужно еще пройти через «развернутую» форму (и показать, что если множество *А* равномощно множеству *В*, а множество *В* — множеству *С*, то множество *А* равномощно множеству *С*). И лишь затем, доказав симметричность отношения равномощности, т. е. то его свойство, что если *А* равномощно *В*, то и, наоборот, *В* равномощно *А*, мы получаем возможность выразить то общее, что характерно для всех равномощных друг другу множеств, с помощью одного из них, играющего для них роль «всеобщего эквивалента». Наконец, превращение возникающего на этом пути множества таких «всеобщих эквивалентов»[1] в «вытолкнутое из среды» других множеств вещей стандартное множество числовых знаков (или имен числительных), играющее роль «всеобщего эквивалента» при счете вещей, завершает этот процесс логического развития понятия о числе (количественном). И этот процесс логического развития отражает и процесс исторического развития, аналогично тому, как это имеет место и в отношении понятия о деньгах в «Капитале».

Повторяю, здесь не простая аналогия, а общность метода. И это тем более справедливо, что всякая попытка построить просто аналогию, забыть о специфических особенностях политэкономии, с одной стороны, арифметики — с другой, не только обречена неизбежно на провал, но и находится в прямом противоречии с методом диалектического материализма и ведет поэтому к явно неправильным выводам. Так, например, стремление продлить аналогию между определением стоимости и определением тяжести, на которую указывает сам Маркс, приводит к тому, что чисто общественное отношение начинают рассматривать как естественное, «возникает представление, что сюртук своей эквивалентной формой, своей способностью непосредственно обмениваться на другие товары обладает от природы совершенно так же, как железо обладает тяжестью и теплоемкостью». Играющий роль всеобщего эквивалента товар, например золото, выступает при этом в виде от природы наделенного особыми свойствами, создавая, таким образом, загадку денег,

---

[1] По началу последние имеют хотя и стандартный уже, но еще предметный характер. Именно, изображаются с помощью частей тела («пять» от «пясть»; ср. «запястье»!), а то и просто черточек или палочек.

неразрешимую для грубого взгляда буржуазного экономиста, не видящего общественного характера категории стоимости.

Специфика политэкономии как науки, изучающей именно общественные отношения, ярко выступает для всякого, кто обратится непосредственно к первой главе «Капитала». Метод диалектического материализма тем и отличается, что, будучи единым общим методом, он приобретает, однако, специфическую форму в применении к каждой особой области действительности. Если здесь мы обратили внимание на момент общности метода, то сделали это для того, чтобы продемонстрировать наглядно, что достигнутые математикой в конце XIX столетия успехи в деле обоснования понятия о числе объективно подтверждают правильность материалистической диалектики и являются результатом стихийного применения именно этого метода. Чтобы это выступило еще нагляднее, чтобы действительно показать, что черты сходства в развитии понятия о числе, с одной стороны, и денег — с другой, являются не простой, поверхностной аналогией, нам придется остановиться несколько подробнее на так называемом определении «через абстракцию», с помощью которого и было у нас введено понятие о числе.

§ 2. Об определении „через абстракцию".

1. Роль равенства в образовании абстрактных понятий.

Чтобы получить понятие о числе вещей некоторого множества, нужно отвлечься полностью от особой природы этих вещей и сохранить только их количество. Число есть, таким образом, результат абстракции. Однако самый процесс *абстракции*, или *отвлечения*, не надо понимать при этом упрощенно, т. е. так, как его понимают обычно эмпирики: дана вещь x, обладающая свойствами a, b, c, d; чтобы выделить в чистом виде свойство d, достаточно-де просто отбросить свойства a, b, c. В статье «Идеализм и математика» мы указали, что для того, чтобы выделить в чистом виде отношение между вещами, нельзя просто отбросить эти вещи, а нужно сделать их переменными. Если бы мы не умели изменять мир, мы не могли бы познавать его. Теперь речь у нас будет итти тоже о выделении (или абстрагировании) в чистом виде, но не отношения, а свойства вещей.

Для того чтобы показать, как это происходит, начнем с примера, приводимого Марксом. Пусть нам нужно определить вес головы сахара. Поскольку мы хотим узнать только ее вес, мы должны, конечно, абстрагироваться от всех ее прочих свойств, кроме свойства тяжести. Как мы это отвлечение осуществляем? «Голова сахара как физическое тело имеет определенный вес, но ни одна голова сахара не дает возможности непосредственно увидеть... ее вес. Мы берем поэтому куски железа, вес которых заранее определен. Телесная форма железа, рассматриваемая сама по себе, столь же мало является формой проявления тяжести, как и голова сахара. Тем не менее, чтобы выразить голову сахара как тяжесть, мы приводим ее в весовое отношение к железу. В этом отношении железо является телом, в котором нет ничего, кроме тяжести. Количества железа служат поэтому мерой веса сахара и по отношению к физическому телу сахара представляют воплощение тяжести, или форму проявления тяжести. Эту роль железо играет только в пределах того отношения, в которое к нему вступает сахар или другое какое-либо тело, когда отыскивается вес последнего»[1].

Итак, чтобы отвлечься от всех свойств головы сахара, кроме тяжести, мы не просто отбрасываем их все, за исключением этого одного, что было бы просто невыполнимо ввиду их бесчисленности, а приравниваем данную вещь к вещи, вообще говоря, совершенно от нее отличной и равной ей только в одном, данном отношении. Лишь в этом отношении вещь, служащая эквивалентом, в нашем примере железо, теряет все свои конкретные свойства, кроме одного, выразителем которого она и выступает. Но для этого необходимо, чтобы она этим свойством действительно обладала. «Если бы оба тела не обладали тяжестью, они не могли бы вступать в это отношение и одно из них не могло бы стать выражением тяжести другого»[2]. Свойство, таким образом, предшествует отношению, через которое оно, однако, выделяется.

Существенной чертой этого процесса абстрагирования является то обстоятельство, что в нем особую роль играет отношение равенства. Лишь с его помощью — приравнивая друг другу различные вещи — мы выделяем то общее, что делает их равными. Именно так мы поступили с числом, которое определили через равночисленность, т. е. через некоторое отношение типа равенства. Именно так Маркс пришел к понятию стоимости как к «тому общему, что выражается в меновом отношении или меновой стоимости товара». Меновое отношение, в котором вещь обменивается на ей эквивалентную, есть, конечно, тоже некоторое отношение типа равенства: при обмене различные вещи приравниваются друг другу.

2. Примеры

Эта роль отношения равенства при определении новых понятий была известна еще древним грекам. Именно с его помощью в школе Евдокса — Евклида определяли то, что в греческой математике играло роль нашего вещественного числа, — понятие *логоса*, или отношения величин.

Пока греческие математики могли думать, что величины одного и того же рода соизмеримы между собой (имеют общую меру), они могли определять *отношение* двух величин примерно таким образом:

«Если X есть общая мера двух величин A и B и если $A=mX$, $B=nX$, то говорят, что отношение величины A к величине B есть (дробь) $\frac{m}{n}$». Однако открытие иррациональностей сделало такое определение невозможным, ибо греки не могли сомневаться, например, в том, что диагональ квадрата находится в определенном отношении к его стороне, хотя это отношение и не может быть выражено никакой дробью. И вот Евдокс вышел из трудности, определяя «отношение» через «пропорцию», т. е. через равенство «отношений». В самом деле, для равенства двух «отношений»[3] $A:B$ и $C:D$ соизмеримых друг с другом величин необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары чисел m, n:

1) если $mA>nB$, то одновременно и $mC>nD$;

[1] К. Маркс, Капитал, стр. 24—25, изд. 1920 г. Разрядка моя. — *С. Я.*

[2] Там же. Разрядка моя. — *С. Я.*

[3] Чтобы не смешивать геометрическое отношение величин $A:B$ с общим понятием об отношении вещей, мы первое ставим в кавычки.

2) если $mA < nB$, то и $mC < nD$, наконец,

3) если бы оказалось, что $mA = nB$, то и $mC = nD$.

Однако этот критерий пропорциональности величин («равенства отношений» $A:B$ и $C:D$) не предполагает обязательно существования общей меры, т. е. наличия такой пары чисел (m, n), для которой имеет место именно третий случай — случай равенства: $mA = nB$. Поэтому он может быть распространен и на случай несоизмеримых величин.

Но теперь пропорциональность двух пар величин (A, B) и (C, D) можно определить с помощью этого критерия, иными словами, определить «равенство отношений», не опираясь при этом на понятие «отношения».

И мы действительно находим именно такое определение пропорции у Евдокса. Однако теперь, имея ряд пропорциональных величин: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \ldots$, мы можем выбрать одно из выражений: $\frac{A}{B}$ или $\frac{C}{D}$ и т. д. — в качестве представителя всего ряда и определить таким образом некоторое «отношение»[1]. Отношение в таком случае было бы определено через «равенство отношений».

Отношение параллельности есть тоже некоторое отношение типа равенства. В самом деле:

1) если прямая a параллельна прямой b, то и, наоборот, прямая b параллельна прямой a, т. е. отношение параллельности симметрично;

2) если прямая a параллельна прямой b, а прямая b — прямой c, то прямая a параллельна прямой c (транзитивность);

3) наконец, всякая прямая параллельна самой себе (рефлексивность — третье свойство равенства, отличающегося, как известно, тем, что всякая вещь *равна* самой себе, между тем как ни один человек не есть, например, *сын* самого себя).

Поэтому мы вправе ожидать, что через отношение параллельности можно «определить» (точнее, выделить, абстрагировать) свойство, общее всем параллельным прямым. И действительно, таким свойством прямой является ее *направление*. Направление прямой, таким образом, может быть определено через параллельность ее другим прямым.

Геометрические образы и тела имеют определенную форму, или *фигуру*. Как выделить в чистом виде эту «фигуру», т. е. некоторое свойство тел? Мы делаем это опять-таки через отношение, именно через отношение подобия, которое, как легко убедиться, обладает всеми свойствами «равенства». И тогда «фигуру» тела можно определить как общее свойство всех подобных друг другу тел, совершенно так же, как число, характеризующее некоторое множество, мы определили как общее свойство всех равномощных этому множеству множеств вещей.

---

[1] Ограниченность греков школы Евдокса — Евклида можно видеть, однако, в том, что они не определили понятия об «отношении» вообще, а ограничились применением учения о пропорциях к определению отдельных, индивидуальных отношений. Но это связано у них с их определением существования через построение. С евдоксовой теорией иррациональности читатель может познакомиться подробнее по статье H. Hasse и H Scholz «Кризис основ древнегреческой математики», Kantstudien, 1927, некоторые положения которой представляются, однако, спорными. На этом комплексе вопросов, связанных с так называемым методом исчерпывания у древних греков, я надеюсь иметь возможность специально остановиться.

Чтобы показать, наконец, насколько общий характер имеет этот способ образования понятий, приведем еще одну цитату из Маркса.

«В некоторых отношениях,— пишет Маркс,— человек напоминает товар. Так как он родится без зеркала в руках и не в качестве фихтеанского философа: «Я есмь я»,— то человек сначала смотрится, как в зеркало, только в другого человека. Лишь относясь к человеку Павлу как к себе подобному, человек Петр начинает относиться к самому себе как к человеку. Вместе с тем и Павел как таковой, во всей его павловской телесности, становится для него формой проявления рода «человек»[1].

Итак, мы видим, что человек образует понятие «человек» лишь через сравнение себя с другими людьми, через отношение подобия между людьми.

3. Точка зрения Вейля.

Против этих «определений через абстракцию», особенно против приведенной нами трактовки их, выдвигается, однако, целый ряд возражений.

Одни, как например, идеалист Вейль, не отвергают значения этих «определений» в математике, наоборот — ценят их очень высоко. Но они пытаются истолковать их идеалистически. Больше того, их высокая оценка в значительной степени связана именно с тем идеалистическим истолковыванием, которое они пытаются этим «определениям» придать. Идеалиста при этом прельщает то, что о т н о ш е н и е в этих «определениях» как бы предшествует определяемому о б ъ е к т у: равночисленность предшествует числу, пропорция, т. е. равенство отношений,— отношению, обмен — стоимости. Стоит заявить, что этими «определениями» не в ы д е л я е т с я уже с у щ е с т в у ю щ е е — и притом существующее независимо от сравнения их друг с другом — общее свойство приравниваемых друг другу вещей, а п р о и з в о д и т с я (недаром Вейль называет «определения через абстракцию» *творческими*) некоторый новый «идеальный объект», чтобы, с одной стороны, сохранить все преимущества, связанные с употреблением этих «определений», с другой же — лишить теорию абстракции ее материалистического содержания. И идеалистическую невинность соблюсти и капитал приобрести!

Если для того, чтобы выделить в чистом виде «стоимость» как общее свойство всех товаров, Маркс исходит из обмена товаров, в котором стоимость их *проявляется*, то идеалист полагает, что акт обмена не только выделяет, но и *порождает* стоимость. Если для того, чтобы «определить» число, нужно начать с определения равночисленности, чтобы «определить» фигуру,— с определения подобия, чтобы «определить» направление,— с определения параллельности, то идеалист Вейль делает отсюда вывод, что с помощью этих отношений не только выделяются, но и порождаются свойства, творятся новые «идеальные объекты».

4. Возражения Дубислава.

Другие, как, например, махист Дубислав, для которого математика есть только «беспредметная» наука, отрицают вообще правомерность этих определений за их «метафизический» (читай: по существу, материалисти-

[1] К. М а р к с, Капитал, стр. 20, изд. 1920 г.

ческий) характер. Известно, что махисты надеются «расправиться» с материализмом, обзывая его «метафизикой».

Чтобы показать вздорность притязаний идеализма на «определения через абстракцию», чтобы выяснить их действительный смысл и значение, продемонстрировать подлинный диалектико-материалистический характер этого способа образования понятий, нам придется несколько подробнее остановиться на предпосылках, лежащих в основе этого метода.

Начнем с возражений, приводимых Дубиславом.

«Последователи определений через абстракцию,— говорит Дубислав,— поступают следующим образом, когда вводят новый символ с помощью определения через абстракцию.

В противоречие с правилом Оккама: «Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem»[1] они допускают, что если между двумя предметами имеет место транзитивное и симметричное отношение, то эти предметы всегда имеют общее свойство в форме некоторого нового идеального «нечто». Это допущение пытаются оправдать тем, что обычно обладание двумя предметами некоторым общим свойством влечет за собой в качестве следствия наличие транзитивного и симметричного отношения между ними. Поэтому, чтобы при случае произвести (или обнаружить) в качестве значения вновь вводимого символа некоторое идеальное нечто, достаточно, полагают, показать, что между двумя предметами из области данной дисциплины имеет место транзитивное и симметричное отношение.

То общее свойство (Beschaffenheit), которое в переносном смысле слова имеет своим следствием это транзитивное и симметричное отношение и существование которого рассматривается как установленное, а само оно — как достаточно отграниченное от других свойств, считается при этом безупречно произведенным (или обнаруженным). В силу этого можно произвольно отнести это свойство в качестве значения к вновь вводимому символу»[2].

«Но как обстоит дело с оправданиями, которые в действительности приводят обычно сторонники определений через абстракцию? Все обоснование сводится к отягощению построения точной дисциплины почти метафизической аксиомой или предрассудком наперекор эвристическому правилу — строить точную науку независимо от допущений о существовании или порождении идеальных в платоновском смысле предметов»[3], — допущений, которые, далее, он называет «необоснованными и, пожалуй, даже опровержимыми».

Фокус, состоящий в подсовывании материализму платоновских «идей», в смешении материализма с идеализмом кантовского или платоновского толка, не нов: с его помощью все махисты пытаются «опровергать» материализм. Гениальное его разоблачение содержится в ленинском «Материализме и эмпириокритицизме». Не ново и обвинение материалистов в незаконном оборачивании некоторых теорем.

Но возражениями Дубислава по данному частному случаю стоит все же

---

[1] «Не следует приумножать сущностей без необходимости».

[2] W. Dubislav, Die Definition, S. 46, 1931.

[3] Там же, стр. 50.

заняться по существу. Это даст нам возможность не только лишний раз вскрыть подлинную сущность применяемых махизмом приемов, но и точнее отразить нашу собственную точку зрения на «определения через абстракцию». Суть примененного Дубиславом приема заключается в следующем:

1) Он смешивает идеалистический подход к «определениям через абстракцию», как «творчески созидающим» некоторый новый «идеальный объект», с материалистической точкой зрения на эти «определения», как лишь на способ выделения (абстрагирования) уже существующего независимо от нас свойства вещей, рассуждая о «сторонниках» определений через абстракцию вообще, а не о материалистических или идеалистических их сторонниках.

2) Этих «вообще сторонников» определений через абстракцию он обвиняет, далее, в том, что они незаконно переделывают некоторую прямую теорему в обратную. Если несколько предметов обладают общим свойством, например все они зеленые, то между этими предметами можно установить некоторое отношение типа равенства или подобия: именно, они все равны по цвету, т. е. между ними существует некоторое транзитивное и симметричное отношение. Отсюда, говорит Дубислав, «сторонники» «определений через абстракцию» умозаключают, что и наоборот: если в некоторой области предметов имеет место транзитивное и симметричное отношение, то существует общее всем находящимся в этом отношении предметам свойство. Простейшая логическая ошибка, в которой, по Дубиславу, должен быть повинен и Маркс, умозаключивший от факта обмениваемости товаров к существованию у них чего-то общего — стоимости.

3) Наконец, для случая, если бы «сторонник» этих «определений» попытался «вывернуться» из положения, заявив, что для него существование общего свойства у равных в каком-либо отношении предметов — отнюдь не нуждающаяся в доказательстве теорема, а новая, независимая от прямого предложения аксиома, у Дубислава припасено... обвинение в метафизике. Такую-де аксиому вводить без доказательства! Да ведь это метафизика чистейшей воды! И платоновского толка к тому же!

Мы покажем, однако, что возражения Дубислава на самом деле затрагивают только идеалистическую трактовку «определений через абстракцию», по отношению к которой они в значительной мере справедливы[1]. К материалистической же их трактовке они не имеют ни малейшего отношения.

5. Система «постулатов», лежащих в основании «определений через абстракцию».

Чтобы это стало ясным, займемся, как было обещано, системой постулатов, или посылок, лежащих в основании «определений через абстракцию».

а) Связь рефлексивности с симметричностью и транзитивностью. Понятно, во-первых, что одних только требований симметричности и транзитивности для отношения, лежащего в основе «определения

[1] Собственные попытки Дубислава обойтись вообще без «определений через абстракцию» насквозь идеалистичны.

через абстракцию», недостаточно. Всякое равенство не только симметрично и транзитивно, но и рефлексивно, т. е. каждая вещь «равна» самой себе. Иногда делают ошибку и «выводят» рефлексивность равенства из одних только его симметричности и транзитивности (без дополнительного требования непустоты для области).

При этом рассуждают обычно так: из транзитивности следует, что если вещь a находится в отношении R к вещи b, а вещь b — в отношении R к вещи a, то вещь a должна находиться в отношении R к вещи a, т. е. к самой себе. Так как в силу симметричности отношения R посылка этого условного предложения выполнена, то, следовательно, выполняется и заключение, т. е. вещь a действительно находится в отношении R к самой себе, или отношение R рефлексивно.

Стоит, однако, записать это рассуждение на языке математической логики, чтобы наглядно выступила содержащаяся в нем ошибка.

В самом деле, требование симметричности записывается так:

$$xRy \rightarrow yRx \tag{1}$$

($\rightarrow$ знак «следования», или иначе: «если ...то»). Требование же транзитивности записывается так:

$$(xRy \mathbin{\&} yRz) \rightarrow xRz \tag{2}$$

(& — знак «и»).

Подставляя во вторую формулу x вместо z, мы получаем

$$(xRy \mathbin{\&} yRx) \rightarrow xRx, \tag{2*}$$

и для того, чтобы получить отсюда формулу

$$xRx, \tag{3}$$

выражающую рефлексивность отношения R, нам нужно иметь доказанной формулу:

$$xRy \mathbin{\&} yRx. \tag{4}$$

(В этом случае мы могли бы воспользоваться логическим правилом вывода, согласно которому из двух формул: (1) S и (2) $S \rightarrow T$ получается новая формула — T.)

Однако формула (4) отнюдь не совпадает с формулой (1), как мы это допустили в нашем первом «рассуждении».

Из этого затруднения нельзя выйти и путем замены формулы (2) формулой

$$(xRy \rightarrow yRx) \rightarrow xRz, \tag{5}$$

ибо формулы (2) и (5) неравносильны, и закон транзитивности нельзя, следовательно, выразить в форме (5). (Неравносильность этих формул видна, впрочем, уже на простейших примерах. В самом деле, предложение: «Если будет туман и будет пурга, то летчик не сможет вылететь», явно неравносильно предложению: «Если из того, что будет туман, следует, что будет пурга, то летчик не сможет вылететь». Ибо первое из них ставит невылет летчика в зависимость от тумана и пурги, второе же — в зависимость лишь от с в я з и между пургой и туманом, не предполагая фактического наличия ни тумана, ни пурги.)

б) Требование непустоты для «поля» отношения. Вейль избегает этой ошибки, просто внося рефлексивность в число требований, соблюдение которых необходимо для законности «определения через абстракцию». Дубислав — вместе с большинством математиков — присоединяет к требованиям симметричности и транзитивности требование, чтобы «поле» рассматриваемого отношения R не было пусто, т. е. чтобы действительно существовали находящиеся в отношении R друг к другу вещи.

В этом случае рефлексивность можно доказать следующим образом. Возьмем какую-нибудь вещь a, принадлежащую полю отношения R, т. е. для которой существует находящаяся к ней в отношении R вещь b. В таком случае имеем:

$$aRb. \tag{6}$$

Подставляя в формулу (1) $x=a$, $y=b$, получаем:

$$aRb \to bRa, \tag{1*}$$

и по правилу вывода это дает нам

$$bRa. \tag{7}$$

Наличие формул (6) и (7) дает возможность установить формулу:

$$aRb \ \& \ bRa, \tag{8}$$

а последняя в связи с формулой:

$$(aRb \ \& \ bRa) \to aRa, \tag{2**}$$

получаемой из формулы (2) путем подстановки $x=a$, $y=b$, $z=a$, приводит к нужной нам формуле: aRa. Так как рассуждение это применимо к любой вещи, принадлежащей полю отношения R, то рефлексивность этого отношения этим действительно доказана.

Второй метод (т. е. требование непустоты для поля отношения R) несомненно лучше первого, ибо он больше соответствует фактическому положению вещей. Ведь в действительности отношение только в том случае имеет смысл, если существуют находящиеся в этом отношении вещи. А кроме того, вещь отнюдь не изначально «равна» самой себе в каком-нибудь отношении, т. е. рефлексивность не есть свойство равенства одного порядка с его симметричностью и транзитивностью. Вспомним уже приведенные слова Маркса, что человек не родится с зеркалом в руках и не в качестве фихтеанского философа: «Я есмь я», — но начинает относиться к самому себе как к человеку лишь через отношение свое к другим людям как себе подобным. И в логике, отражающей действительное положение вещей, совершенно естественно поэтому выводить рефлексивность из симметричности и транзитивности, а не присоединять ее просто к ним в качестве особого дополнительного требования. Но только выводить, конечно, правильно (т. е. лишь в предположении непустоты области).

в) Исключение тождества. Однако и добавление, которое делает Дубислав (или Вейль), еще недостаточно для подлинной возможности «определить» что-нибудь «через абстракцию». В самом деле, всем приводимым Вейлем или Дубиславом требованиям можно удовлетворить и с помощью такого отношения xRy, которое, хотя и обладает свойствами симметричности, транзитивности и рефлексивности, но и осуществляется только в случае $x=y=a$. Такое отношение действительно существует: это — отношение полного тождества. Ясно, однако, что с помощью этого отношения нельзя отвлечься ни от какого свойства вещи, нельзя отделить от других и выделить в чистом виде ни одного из ее свойств, нельзя получить ничего, кроме пустой тавтологии: «А есть А», «роза есть роза», «прямая есть прямая» и т. д. Ни одно из этих предложений не содержит в действительности никакого сравнения и не может быть поэтому положено в основу «определения через абстракцию». В основе «определения через абстракцию» должно лежать именно отношение «равенства», а не «тождества». «Равенство» поэтому может быть определено только через «различие», может быть только равенством отличных друг от друга вещей. А это значит, что нельзя ограничиться одним только требованием непустоты для поля отношения R, но нужно, кроме того, требовать, чтобы это поле содержало по меньшей мере две различные вещи или, — если не желать пользоваться понятием «два», помня, что самое число «определяется» «через абстракцию», — чтобы поле отношения R содержало отличные друг от друга вещи, «равные» друг другу лишь в этом отношении R.

г) Сравнение не должно изменять сравниваемых вещей. Легко, однако, показать, что и этого ещё не достаточно. Представим себе, что мы стали бы приводить друг другу в соответствие солдат двух полков с целью установить, равномощны ли эти полки друг другу, а солдаты вздумали бы в это время перебегать из одного полка в другой (пример А. Пуанкаре)[1], или допустим, что весы, на которых производится взвешивание, устроены так, что как только на них попадает кусок сахару, он начинает разлагаться на составляющие его химические ингредиенты, — словом, что в процессе сравнения происходит изменение сравниваемых друг с другом вещей. Ясно, что в таком случае мы ничего не смогли бы «определить через абстракцию». Ибо не было бы именно того свойства, которое мы хотим выделить: оно изменялось бы в самом процессе сравнения. Процесс сравнения должен быть поэтому организован так, чтобы под влиянием его не изменялись сравниваемые вещи[2]. Конечно, на практике это не всегда возможно, точнее: возможно лишь с неко-

[1] Статистикам хорошо известно, как трудно провести правильно перепись населения (т. е. установить взаимно-однозначное соответствие между множеством людей, населяющих некоторую территорию, и множеством учетных карточек), если в течение переписи часть населения передвигается.

[2] Взятые сами по себе, т. е. именно как вещи, а не как моменты данного отношения R. Чтобы выяснить это различие, заметим, что одна и та же вещь может находиться в разных отношениях к различным другим вещам рассматриваемой области, между тем как момент отношения не имеет смысла независимо от этого именно отношения (и остальных его моментов). Так, «числитель» не существует независимо от «знаменателя» и «дроби», т. е. от отношения между числителем и знаменателем. И точно так же «отрицательное число» не существует без «положительного», «север» — без «юга», «правая сторона» — без «левой». Это и означает, однако, что «числитель», «знаменатель», «север», «юг» сами по себе суть не вещи, а лишь моменты отношений между вещами.

Отсюда видно, между прочим, насколько нелепы попытки идеализма представить современные учения о числе, как подтверждающие именно его точку зрения, как растворяющие вещь (субстанцию) в отношении (функции). Приводя высказывание Дедекинда, с которого последний начинает свою дедукцию понятия о числе и в котором идет речь о «способности духа относить вещи к вещам, устанавливать соответствие между одной вещью и другой», Кассирер («Познание и действительность», стр. 53—54) пишет: «Дедекинд, повидимому, исходит здесь вполне в духе традиционной доктрины из множества вещей и из способности духа отображать их; но при более глубоком рассмотрении его взглядов оказывается сейчас же, что традиционные торым приближением, повышение точности которого, однако, в нашей власти. Так, в процессе взвешивания или обмена происходит некоторая потеря веса или товара, но мы заинтересованы в том, чтобы она имела наименьшее значение, была настолько незначительна, чтобы мы имели право отвлечься от нее, не принимать ее в расчет. «Определение через абстракцию» предполагает таким образом и некоторый момент отвлечения, или идеализации, в обычном смысле слова, в смысле огрубления, о котором говорит Ленин как о необходимом признаке всякой абстракции, снимаемом, однако, в процессе познания — на пути через относительную истину к абсолютной. Добиваясь наиболее адекватного отражения действительности, мы не успокаиваемся на констатировании неизбежности некоторой неточности, но стремимся к наиболее совершенной (наиболее близкой к идеальной) организации процесса «сравнения». Мы жестоко боремся с «усушкой» и «утечкой» (во лжи, в обмане пролетарского государства и потребителя заинтересован классовый враг), мы стараемся провести перепись в разных местах одновременно и притом в наикратчайший срок и т. п. Иными словами, мы добиваемся такой организации процесса «сравнения», при которой приравниваемые вещи не изменялись бы в процессе их сравнения.

названия приобрели здесь совершенно новое содержание и новое значение. «Вещи», о которых идет речь в дальнейшей дедукции, не принимаются за некоторые самостоятельные, существовавшие до всякого отношения реальности; они приобретают все свое содержание — поскольку это имеет значение для математики — лишь в отношениях, которые высказываются о них и вместе с этими отношениями. Они — относительные члены, которые никогда не могут быть «даны» раздельно, но всегда лишь в идеальной связи».

Вещей, «существующих до всякого отношения», вообще не существует. Ибо вещи существуют в связях, в отношениях с другими вещами. Однако вещи суть не только моменты отношения, его «относительные члены». Одни и те же вещи могут фигурировать в разных отношениях, и в этом смысле существуют отношения, относительно которых они имеют самостоятельное существование. Отношение R, в котором происходит их сравнение, должно быть именно последнего рода. Для образования понятия о числе с помощью *отображения* Дедекинду необходима поэтому вещь, а не момент отношения. И Кассирер неправ поэтому, утверждая, что когда Дедекинд говорит о множествах вещей и их отображении друг на друга, то «при более глубоком рассмотрении его взглядов оказывается сейчас же, что традиционные названия (имеются в виду «вещь» и «отображение». — *С. Я.*) приобрели здесь совершенно новое содержание и новое значение»: «вещь»-де не есть вещь, а лишь «относительный член» и т. п. Нет, именно «здесь» они не приобрели — и не могли приобрести — никакого нового содержания или значения, несмотря даже на то, что сам Дедекинд — тоже идеалист и что его построение теории целого числа отличается от построений Кантора и Фреге своим по существу аксиоматическим характером.

Больше того, даже те реально существующие стороны и моменты вещей, которые отражаются в абстрактных понятиях, в известном смысле сами могут выступать как ненавистные Кассиреру «вещи», которые «могут быть «даны» раздельно» (а не лишь как моменты отношения): когда речь идет об абстракциях более высокого порядка, абстракции низшего порядка должны иметь независимое от того отношения R, в котором происходит их сравнение, существование, а не быть только его «относительными членами».

Связанным с последним вопросом диалектическим «переворотом в методе» («Umschlag in der Methode»), о котором говорит Маркс в своих математических рукописях (и который, как мы видели, имеет место и в отношении понятия о числе), следовало бы, однако, специально заняться.

Итак, отношение R должно обладать свойством не изменять вещей, в него вступающих. Оно должно быть в некотором смысле «внешним» для этих вещей, «безразличным» к ним[1]. Но в таком случае ясно, что с его помощью нельзя «создать» никакого нового свойства этих вещей, а можно только выделить уже существующее. Иными словами, свойство xRa, определенное через отношение xRy, должно быть эквивалентно некоторому «простому» свойству, существующему независимо от отношения R. В противном случае некоторая вещь, обладающая свойством xRa, приобретала бы это новое свойство лишь будучи приведена в отношение к другой вещи, т. е. изменялась бы в процессе сравнения. А такие процессы (и соответствующие им отношения R) мы, как только что выяснено, должны исключить, когда идет речь об «определении через абстракцию».

Наше требование, чтобы вещи не изменялись от приведения их в отношение R друг к другу, равносильно, таким образом, некоторому «постулату сводимости» [выражающему требование, чтобы свойство, «определенное» через отношение (сравнение), было эквивалентно («сводимо») к некоторому простому свойству, существующему независимо от процесса сравнения]. Именно это и имеет в виду Маркс, когда в связи с определениями стоимости и веса замечает, что «свойства вещи не создаются ее отношением к другим вещам, а лишь обнаруживаются в таком отношении»[2].

Теперь мы можем вернуться опять к Вейлю и Дубиславу, ибо теперь, с одной стороны, ясно, что с помощью «определения через абстракцию» не «творится» никакой новый «идеальный объект», а с другой — видно, что это определение не основано ни на каком незаконном оборачивании каких бы то ни было теорем и не опирается ни на какую «метафизическую» аксиому. Ибо если в процессе сравнения, не изменяющем свойств вещей, удается обнаружить какое-нибудь свойство, которым обладают все «подобные» друг другу в некотором отношении вещи, то ясно, что мы имеем дело с общим им всем свойством, существующим в вещах реально и независимо от того отношения, в котором мы их сравниваем. Иначе отношение это не могло бы быть «внешним», т. е. не изменяющим свойств вступающих в него вещей.

Но в таком случае не остается места ни для какой мистики и метафизики, действительно связанных с «творческими» определениями Вейля, и критика Дубислава лишается почвы. Правда, для идеалиста самое существование вещей (и их свойств) независимо от нашего сознания уже есть «метафизика». Но против такой «метафизики» мы ничего не имеем. Ибо это не метафизика, а материализм.

д) Не формальное, а реальное общее. При правильном, материа-

---

[1] Именно лишь в смысле требования не изменять свойств, вступающих в это отношение вещей. Во всем остальном установление этого отношения должно быть обусловлено существом дела, а не наличием внешнего сходства между вещами.

[2] «Раньше, чем люди могли прийти к понятию фигуры, должны были существовать вещи, которые имели форму и формы которых сравнивали» (Энгельс). Разрядка моя. — *С. Я.*

листическом истолковании «определений через абстракцию» упрек в незаконном оборачивании некоторой теоремы, как уже было отмечено, лишается почвы. В действительности мы можем утверждать и нечто большее: сама пресловутая «прямая теорема» не вполне верна. Ибо из наличия чего-то общего между вещами отнюдь не следует еще действительное право приравнять их друг другу, подвести под одно общее понятие, которое можно считать научно обоснованным. Так, из того, что как идеалист, так и материалист могут выступать в защиту «определений через абстракцию», не следует реальное право приравнять их, как «сторонников» этого способа образования научных понятий, друг другу. Ибо в данном случае существенно не сходство, носящее формальный, поверхностный характер, а именно различие между ними. Попытка приравнять одних другим, как уже было отмечено, преследует лишь цель подменить материализм идеализмом. Повторяю, формальное наличие общего признака у разных вещей без конкретного, содержательного анализа не дает еще права рассматривать их как равные; точнее, не может служить достаточным основанием к введению нового научного понятия. Последовательный неокантианец Кассирер в этом вопросе умнее путаного махиста Дубислава, ибо он замечает: «Если, пользуясь метким примером Лотце, мы подводим вишни и мясо под группу красных, сочных, съедобных тел, то мы таким путем получаем не какое-нибудь пригодное логическое понятие, а лишь ничего не значащий набор слов, не дающий нам ровно ничего для понимания отдельных случаев. Таким образом, ясно, что общее формальное правило само по себе недостаточно, что скорее оно молчаливо дополняется каким-то другим логическим критерием» [1]. Нужно только заметить, что подобного рода общее понятие, обладающее в одной конкретной обстановке лишь формальным смыслом, при изменившихся условиях может стать содержательным.

Так, приравнивание различных конкретных видов труда по времени, требуемому для производства данной потребительной стоимости, образование категории абстрактного труда, труда вообще, формально могло быть, конечно, осуществлено и в древнем рабовладельческом обществе. Но реальный смысл оно приобрело лишь после того, как развилась такая общественная формация, «при которой индивиды с легкостью переходят от одного вида труда к другому и при которой какой-либо определенный труд является для них случайным и потому безразличным... Здесь... абстрактная категория «труда», «труда вообще», труда sans phrase, этот исходный пункт современной экономической науки, становится впервые практической истиной» [2]. Мы видим, таким образом, насколько конкретный характер должен носить самый процесс образования абстракций, как самое образование именно таких, а не других абстрактных понятий зависит от конкретной исторической обстановки, как «даже самые абстрактные

[1] Эрнст Кассирер, Познание и действительность, стр. 16, изд. «Шиповник», 1912.

[2] К. Маркс, К критике политической экономии, 1930, стр. 74. В предшествующем абзаце Маркс пишет: «Труд кажется в высшей степени простой категорией. Древним является также представление о нем в этой всеобщности — как о труде вообще. Однако «труд», экономически рассматриваемый в этой простой форме, есть столь же современная категория, как и отношения, которые порождают эту простейшую абстракцию».

категории, несмотря на то, что именно благодаря своей абстрактности они имеют силу для всех эпох, в самой определенности этой абстракции являются не в меньшей мере продуктом исторических условий и обладают полной значимостью только для этих условий и внутри их» [1].

Чтобы показать, наконец, насколько большую роль при этом играет практика, в частности, на своей шкуре испытанный житейский урок, стоит вспомнить образ короля Лира, пришедшего к понятию «человек вообще», а не только «король» и «подданный», лишь в результате жестоких испытаний, поставивших его на одну доску с последним нищим.

6. Прямое определение объектов, „определенных через абстракцию".

Разбор предпосылок, выполнение которых является необходимым условием правомерности «определения через абстракцию», мы на этом закончим. Основной результат, к которому мы пришли, состоит при этом в том, что с помощью этих «определений» не создается и, собственно говоря, даже не определяется [2] какой-либо новый объект, а лишь выделяется уже существующее общее свойство. Но в таком случае ясно, что «определение через абстракцию» не исключает, а предполагает в дальнейшем поиски прямого определения, непосредственно указывающего, в чем состоит сущность того общего, которое содержится в двух различных приравниваемых друг другу вещах.

«Возьмем, — пишет Маркс, — два товара, например, пшеницу и железо. Каково бы ни было их меновое отношение, его всегда можно выразить уравнением, в котором данное количество пшеницы приравнивается известному количеству железа, например: 1 квартер пшеницы = 2 центнерам железа. Что говорит нам это уравнение? Что в двух различных вещах: в 1 квартере пшеницы и в 2 центнерах железа существует нечто общее равной величины» [3]. Вывод, который Маркс делает отсюда, гласит:

«Следовательно, обе эти вещи равны чему-то третьему, которое само по себе не является ни первой, ни второй из них».

Но Маркс не останавливается на этом констатировании существования чего-то третьего, общего для обеих равных друг другу вещей. Он ставит вопрос: в чем же состоит это третье? И в качестве иллюстрации, подтверждающей закономерность такой постановки вопроса, выбирает пример из математики.

«Иллюстрируем это, — пишет он, — простым геометрическим примером. Для того чтобы определять и сравнивать площади всех прямолинейных фигур, последние рассекают на треугольники. Самый треугольник сводят к выражению, совершенно отличному от его видимой фигуры, — половине произведения основания на высоту. Точно так же и меновые стоимости товаров необходимо свести к чему-то общему для них, количественные видоизменения чего они представляют».

---

[1] К. Маркс, К критике политической экономии, 1930, стр. 75.

[2] Слово «определение» в смысле определения через абстракцию мы потому всегда брали в кавычки.

[3] «Капитал», т. I, стр. 3, цит. изд. Разрядка моя. — *С. Я.*

Этим общим и оказывается в результате дальнейшего анализа количество труда или количество рабочего времени, общественно необходимого для изготовления данных потребительных стоимостей.

Однако, задача действительно указать то общее, которое делает вещи равными, отнюдь не принадлежит обычно к числу легких. Правда, бывают случаи, когда это общее установить нетрудно, анализируя самое данное отношение равенства. Так, подобие, как уже было указано, есть отношение типа равенства, а то общее, что сохраняется, например, у всех подобных друг другу многоугольников, есть величина их углов и отношений их сторон. Так, рассматриваемое в теории чисел сравнение по данному модулю есть отношение типа равенства, но то общее, что сохраняется во всех сравнимых друг с другом числах, есть остаток от деления их на число, служащее модулем.

Для разобранного выше примера определения пропорции по Евдоксу указать это «общее» уже значительно труднее. Остановимся на этом примере несколько подробнее и попробуем охарактеризовать явно то общее, что сохраняется для всех пропорциональных друг другу величин. Из определения Евдокса следует, что если бы мы построили три ящика: I, II, III, и в зависимости от того, какое из трех соотношений: 1) $mA > nB$, 2) $mA = nB$, 3) $mA < nB$, имеет место для данной пары чисел (m, n), стали бы бросать эту пару либо в первый, либо во второй, либо в третий ящик, то, так как каждая пара при этом должна была бы попасть в определенный ящик, совокупность всех возможных пар (m, n) (всех рациональных чисел, или дробей $\frac{m}{n}$) оказалась бы разбитой (подразделенной) на три части (второй ящик может содержать максимум одну пару или не содержать ни одной). Это разбиение или сечение совокупности рациональных чисел будет одним и тем же только для пропорциональных величин. В самом деле, если отношение $C:D$ не равно отношению $A:B$, то обязательно найдется такая пара (m, n), для которой $mC > nD$, но $mA < nB$ (или наоборот), т. е. которая для величин C, D должна попасть в первый (третий) ящик, между тем как в разбиении, производимом отношением $A : B$, эта же пара (m, n) попадает в третий (первый) ящик. Таким образом, все равные друг другу отношения производят одно и то же сечение области рациональных чисел на три класса (поскольку средний может оказаться пустым, обычно сводят эти три к двум), почему Дедекинд и определил вещественное число как сечение области всех рациональных чисел. С этим определением, однако, связаны трудности, обусловленные тем, что рациональных чисел бесконечно много, мы же рассуждали о них так, как рассуждали бы и в случае, если бы их было лишь конечное число. Древним были известны парадоксы, связанные с такого рода употреблением бесконечного, и поскольку потребность в математике еще была невелика, они предпочли (и могли последовательно провести это) отказаться вообще от отыскания того общего, которое лежит в основе равенства отношений — пропорции, и остаться лишь при этом равенстве. Греки школы Евдокса—Евклида не могли поэтому ввести и понятия площади, но должны были говорить лишь о равенстве площадей (или их отношений, т. е. пропорциональности). А это значит, что они не могли поступать так, как мы поступаем теперь и как об этом говорит Маркс, именно: сводить «треугольник... к выражению, совершенно отличному от его видимой фигуры,— к половине произведения основания на высоту».

Когда греку Евдоксу надо было определить «отношение» величин, он правильно начал с определения «равенства отношений» и... остановился на этом.

Не самый метод «определения через абстракцию», а именно эту остановку на отношении, в котором приравниваются сравниваемые вещи, имеет в виду

Лейбниц, когда в пятом письме к Кларку пишет: «Впрочем, я поступил приблизительно так, как и Евклид: когда он не мог прямо определить абсолютный смысл какого-нибудь геометрического отношения, то он указывал, что̀ следует понимать под равными отношениями».

Правда, Лейбниц признает при этом, что «дух, однако, не удовлетворяется этим соответствием: он ищет тождества, вещи, которая действительно была бы той же самой, и представляет ее себе как бы находящейся вне субъекта». Но, как видим, Лейбниц противопоставляет «определение через абстракцию» прямому определению, поиски которого объясняет лишь стремлением нашего духа к превращению равенства («соответствия») в тождество, свойства — в вещь. В диалектическом взаимоотношении тождества и различия, вещи и свойства, отдельного и общего, он, таким образом, отбрасывает одну из сторон, перенося ее в «дух». Общее (свойство или отношение) существует при этом для Лейбница не объективно, а лишь в субъекте.

Неудивительно, что интуиционист Вейль, стоящий на точке зрения идеалистической трактовки «определений через абстракцию», считает родоначальником этого вида определений именно Лейбница. Неудивительно, что все современные махистские, т. е. по существу тоже идеалистические, попытки, отказавшись от «определений через абстракцию», сохранить доставляемые ими преимущества [1] также связаны с превращением того общего, чем обусловлено равенство вещей, в фикцию, «неполный символ», не имеющий непосредственно смысла и вводимый лишь из соображений упрощения («экономия мышления») (Кутюра, Ресселл). К сожалению, мы не имеем здесь возможности разобрать эти попытки по существу. Необходимо лишь отметить то фактическое единство, которое существует между идеалистическими сторонниками «определений через абстракцию» и махистскими их противниками. Общее — не формальное, а реальное — существует, оказывается, не между материалистическими и идеалистическими «сторонниками» определений через абстракцию, а между махистами и идеалистами, независимо от того, «отвергают» или «принимают» они эти определения!

Возвращаясь к вопросу о действительном указании того общего, которое по существу не определяется, а лишь выделяется (абстрагируется) с помощью «определений через абстракцию» (иными словами, к вопросу об обнаружении того «простого» свойства, которому должно быть эквивалентно свойство, определенное через абстракцию), нужно отметить, что в условиях недостаточного конкретного развития на пути к решению этой задачи могут встретиться очень значительные трудности, преодоление которых — в этих конкретных условиях — может оказаться не под силу даже наиболее передовым ученым эпохи. Пример такого рода, объясняющий, почему древние не могли прийти к понятию стоимости, мы находим у Маркса.

«Гений Аристотеля,— говорит Маркс,— обнаруживается именно в том, что в выражении стоимости товаров он открывает отношение равенства.

[1] О характере «чудовищного усложнения» (Дубислав) математики, связанного с отказом от этих определений, читатель может составить себе представление, попытавшись, например, выкинуть из своего научного багажа понятие площади и рассматривать всегда только равенство или пропорциональность площадей.

Лишь исторические границы общества, в котором он жил, помешали ему раскрыть, в чем же именно состоит «в действительности» это отношение равенства»[1].

«Он говорит:

«5 постелей = 1 дому»

«не отличается» от:

«5 постелей = такому-то количеству денег».

«Он понимает, далее, что отношение стоимости, в котором заключается это выражение стоимости, свидетельствует в свою очередь о качественном отождествлении дома и постели и о том, что эти чувственно различные вещи без такого равенства их сущности не могли бы относиться друг к другу как соизмеримые величины. «Обмен,— говорит он,— не может иметь места без равенства, а равенство — без соизмеримости».

(Напомним, что соизмеримость, как уже было указано, означает наличие о б щ е й меры. Таким образом, Аристотель из сравнимости предметов делает вывод о наличии у них чего-то общего, а не сводит, наоборот, общее к голой сравнимости, как это делает идеалист Лейбниц, отрицающий на основе того, что общее не есть вещь, объективное существование этого общего в вещах.)

«Но здесь он останавливается в затруднении и прекращает дальнейший анализ формы стоимости. «Однако, в действительности невозможно, чтобы столь разнородные вещи были соизмеримы», т. е. качественно равны. Такое приравнивание может быть лишь чем-то чуждым истинной природе вещей, следовательно, лишь «искусственным приемом для удовлетворения практической потребности».

«Итак, Аристотель сам показывает нам, что именно сделало невозможным его дальнейший анализ: это — отсутствие понятия стоимости. В чем заключается то равное, т. е. та общая субстанция, которую представляет дом для постелей в выражении стоимости постелей? Ничего подобного «в действительности не может существовать»,— говорит Аристотель. Почему? Дом представляет нечто равное постели, поскольку он представляет то, что действительно обще им обоим: и постели и дому. А это человеческий труд. Но тот факт, что в форме товарных стоимостей все виды труда выражаются как равный и, следовательно, равнозначный человеческий труд,— этот факт Аристотель не мог вычитать из самой формы стоимости, так как греческое общество покоилось на рабском труде и, следовательно, имело своим естественным базисом неравенство людей и их рабочих сил. Равенство и равнозначимость всех видов труда, поскольку они являются человеческим трудом вообще,— эта тайна выражения стоимости может быть расшифрована лишь тогда, когда понятие человеческого равенства уже приобрело прочность народного предрассудка. А это возможно лишь в таком обществе, где товарная форма есть общая форма продукта труда, а следовательно, отношение людей друг к другу, как товаровладельцев, является господствующим общественным отношением»[2].

Больше двух тысяч лет, таким образом, прошло от открытия Аристотелем отношения равенства в выражении стоимости товаров, от момента

[1] «Капитал», стр. 21—22. Цит. изд.

[2] Там же, стр. 21.

констатирования у них чего-то общего (соизмеримости) до действительного обнаружения сущности этого общего,— от выделения общего с помощью «определения через абстракцию» до его прямого определения.

Здесь нужно, впрочем, заметить, что, говоря о прямом (т. е. независимом от того отношения, в котором происходит сравнение вещей) определении того общего, которое делает вещи равными друг другу, мы не обязательно имеем в виду именно явное[1] его определение. Для наиболее основных понятий науки последнее не всегда возможно. Ибо нечто всегда определяется через другое, в науке же нужно начать с некоторых понятий как исходных. Эти исходные понятия науки должны во всяком случае безусловно удовлетворять требованию быть отвлеченными, абстрагированными из реальной, материальной действительности, причем должен быть ясен путь, способ их образования. Последний и выясняется в частности с помощью «определений через абстракцию», без которых невозможно, повидимому, закономерное образование именно основных, исходных понятий науки. Полное, хотя, быть может, и не всегда явное, определение этих понятий дает само дальнейшее развитие науки. Из того, что некоторое понятие в данной научной системе определяется лишь неявно (причем, однако, нам известен способ его образования, именно: как и от чего оно отвлечено), никак не следует, что для нас должно остаться неизвестным то реальное, отражением которого служит данное научное понятие. Наоборот, всякое истинное предложение, формулируемое с помощью этого понятия, есть ступень на пути к полному познанию отображаемого этим понятием момента действительности.

Быть может, именно такое положение имеет место в отношении рассмотренного нами в начале статьи, повидимому, первого, и исторически и логически, понятия математики — понятия о (количественном) числе[2]. Мы установили, что с помощью этого понятия выражается то общее, чем обладают все равномощные друг другу множества. В чем состоит, однако, это общее? Ясно, что не в особых свойствах составляющих их элементов и даже не в порядке их расположения. Иногда говорят, что числом выражается количество. Взаимоотношение математического понятия о числе с философской категорией количества при этом, однако, ближе не исследуется.

Но если и очень трудно свести понятие о числе к чему-нибудь еще более простому или общему, то, «определяя» его через равночисленность, мы вскрываем все же связь этого основного понятия математики с реально существующими множествами (агрегатами) вещей. Некоторые математики

[1] Примером неявного определения может служить, например, определение числа с помощью уравнения, которому оно должно удовлетворять.

[2] Ср. также примечание на стр. 115. Повидимому, с тем же положением мы имеем дело и в отношении понятия величины. Математика,— пишет Энгельс,—«недостаточно определяет последнюю и прибавляет затем внешним образом, в качестве аксиом, другие элементарные определенности величины, которые не фигурируют в дефиниции. После этого они кажутся недоказанными и, разумеется, так же недоказуемыми математически. При анализе понятия величины все эти определения аксиом окажутся необходимыми свойствами величины» (Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 397—398).

полагают, что для математических целей обнаружение этой связи вообще не играет роли, что математик может не знать, что такое число и как оно связано с действительностью,— нужно-де только уметь оперировать с числами,— и что поэтому нельзя ожидать и от развития математики, чтобы оно лучше выяснило природу того общего свойства равномощных множеств, которое выражается их числом. В действительности это не так. На самом деле и для внутриматематических целей необходимо знать, что такое количественное число, именно, как оно связано с множеством. И дальнейшее развитие математики проливает на эту связь новый свет. Так, для конечных множеств немедленно устанавливается факт независимости числа от порядка счета, которому Минковский дал следующую формулировку:

«Если мы хотим уложить в некоторое количество ящиков бо́льшее количество вещей, то, по крайней мере, в одном из этих ящиков окажется одновременно два или бо́льшее число предметов» (принцип Дирихле).

На этом, по видимости чрезвычайно простом, принципе основывается доказательство многих глубоких теорем теории чисел.

7. Диалектический характер рассмотренного способа образования понятий.

В настоящей статье мы не имели в виду исчерпать все богатство проблем, связанных с «определениями через абстракцию».

Перед нами стояла конкретная задача: показать, сличив «определения через абстракцию» в математике с методом выведения стоимости и денег в «Капитале», что, несмотря на своеобразие предмета математики, характер математического познания, способ образования основных математических понятий по существу не отличается от способа их образования в других науках и объективно носит — там, где он применяется правильно,— материалистический характер. Именно эта сторона вопроса нас поэтому и занимала больше всего. В заключение необходимо только отметить, что, как всякий последовательно материалистический метод, этот способ образования понятий носит ярко выраженный диалектический характер.

Чтобы в этом убедиться, достаточно остановиться вкратце на основных его особенностях:

1. Основное, что характерно для «определения через абстракцию», состоит в том, что нечто единичное становится характеристикой всеобщего. Вес данного куска железа становится характеристикой свойства тяжести для всех равных ему по весу тел. Пять пальцев руки становятся выражением свойства «быть в числе 5» всех множеств вещей, равномощных множеству пальцев человеческой руки. Данный треугольник выражает фигуру всех подобных ему треугольников, данный товар становится выразителем стоимости всех эквивалентных ему товаров. Характеризуя метод изложения «Капитала» как частный случай диалектики вообще, Ленин именно эту особенность: отдельное есть общее — в первую очередь и выделяет. «Значит,— пишет он,— противоположности (отдельное противоположно общему) тождественны: отдельное не существует иначе, как в той связи, которая ведет к общему. Общее суще-

ствует лишь в отдельном, через отдельное. Всякое отдельное есть (так или иначе) общее. Всякое общее есть (частичка, или сторона, или сущность) отдельного. Всякое общее лишь приблизительно охватывает все отдельные предметы. Всякое отдельное неполно входит в общее и т. д. и т. д. Всякое отдельное тысячами переходов связано с другого р о д а отдельными (вещами, явлениями, процессами) и т. д.»[1].

Б. Ресселл — философ, много занимавшийся обоснованием математики,— высмеивал диалектику, издеваясь именно над утверждением Гегеля, что отдельное есть общее. Все дело, говорит Ресселл, в неточности языка. Мы употребляем одно и то же слово «есть» в двух смыслах: во-первых, в смысле тождества — «A тождественно B», во-вторых, в смысле включения элемента a в класс B — «груша есть плод», «береза есть дерево» и т. п. Стоит-де уничтожить эту двусмысленность путем введения подходящей символики, и никакой «диалектики» не останется.

В действительности, стоит сопоставить это утверждение Ресселла с приведенным нами местом из Ленина, чтобы убедиться, что Ленин вовсе не смешивает обоих значений слова «есть», а подчеркивает диалектический характер с в я з и между ними, полностью исчезающий для метафизика Ресселла. То обстоятельство, что Ленин говорит об этом в связи с «Капиталом», уже само по себе при этом знаменательно. Ибо Маркс рисует в «Капитале» яркую картину того, как е д и н и ч н ы й товар становится выразителем о б щ е г о свойства эквивалентных ему товаров. И это же, как мы видели, происходит при всяком определении «через абстракцию». «Отдельное е с т ь общее» означает при этом не только то, что некоторое отдельное включается как элемент в более общий класс, но и то, что именно отдельное является выразителем (и представителем) общего. Уничтожение этой «двусмысленности» означает не только уничтожение диалектики, столь желательное Ресселлу, но вместе с нею и всей науки. Это видно, в частности, и на методе абстракции, без которого нет науки, математики в первую очередь.

2. Второй особенностью «определения через абстракцию» нужно признать то обстоятельство, что в нем к о н к р е т н о е выступает как форма проявления своей противоположности — а б с т р а к т н о г о: конкретное множество вещей становится формой проявления абстрактного свойства «быть в числе 5», конкретный треугольник, нарисованный на чертеже, рассматривается как форма проявления абстрактного свойства — «быть треугольником вообще» или «быть треугольником, подобным (в некотором отношении) данному», «конкретный труд становится формой проявления своей противоположности — абстрактного человеческого труда» (М а р к с).

3. Легко заметить, что «определение через абстракцию» опирается на единство т о ж д е с т в а и р а з л и ч и я. Собственно, об этом уже шла речь, ибо мы выяснили необходимость р а з л и ч и я для выделения общего. Общее же и есть сохраняющееся, т о ж д е с т в е н н о е в различном.

4. И, наконец, четвертая особенность этого «определения» состоит в том, что в нем в е щ ь выступает представителем с в о й с т в а, в более общем случае — о т н о ш е н и я.

Так, ч и с л а, как мы видели, оказываются свойствами множеств (агре-

[1] Л е н и н, Соч., изд. 2-е, т. XIII, стр. 302—303.

гатов, совокупностей) вещей, но формой проявления этих свойств служат сами множества, обладающие ими. Мне представляется вполне вероятным, что именно в силу этого выражения абстрактного свойства в овеществленной конкретной форме число и выступало для древних пифагорейцев как «нечто среднее между чувственным и мыслью»[1]. И можно сказать, что понятие числа не только для древних пифагорейцев, но и для крупнейших математиков и философов современности не лишено мистического налета.

О современной науке Ленин пишет по поводу пифагорейцев: «А теперь та же связь (научного мышления и мифологии), но пропорция науки и мифологии иная». О числе теперь, правда, никто не скажет, что оно есть «среднее между чувственным и мыслью». Однако, наиболее распространенным является представление о нем как о «мысленной вещи», непосредственно данной нам в интуиции,— интуиции в смысле кантовского наглядного созерцания à priori, т. е. особой способности нашего духа, занимающей некоторое среднее положение между чувственным и мыслью... Тех же щей, но пожиже влей...

Перед нами, таким образом, яркий пример того, как непонимание диалектических черт процесса образования абстракций, метафизическое отделение единичного от всеобщего, конкретного от абстрактного, вещи от отношения приводят к мистике и используются идеализмом, который из того обстоятельства, что конкретная вещь выступает в качестве представителя (и выразителя) абстрактного свойства, делает вывод, что самое это свойство есть «мысленная вещь», «чистое творение фантазии и рассудка».

Подводя итог, нужно только заметить, что и здесь приходится вести борьбу на два фронта, ибо одни вместе с Лейбницем считают возможным остановиться на констатировании отношения равенства между вещами, определить не число, а только равночисленность, не отношение, а лишь пропорцию (равенство отношений); другие же хотят, чтобы общим была непременно вещь. Диалектическое взаимоотношение вещи и отношения, таким образом, разрывается: одни уничтожают вещь, другие — отношение. Понятно, что вещей не любят идеалисты; наоборот, с отношением не может справиться механицизм. Поэтому одни смотрят на «определение через абстракцию» как на творческий акт создания «идеальных объектов», другие же хотят осязать «пространство» и питаться плодами как таковыми».

---

[1] «Числа, где они? Отделенные пространством, обитают ли они сами по себе на небе идей? Они не суть непосредственно сами вещи, так как вещь, субстанция, есть ведь нечто другое, чем число,— тело не имеет никакого сходства с последним» (Гегель, История философии, «Пифагорейская философия»).

Цена 1 руб. 30 коп.