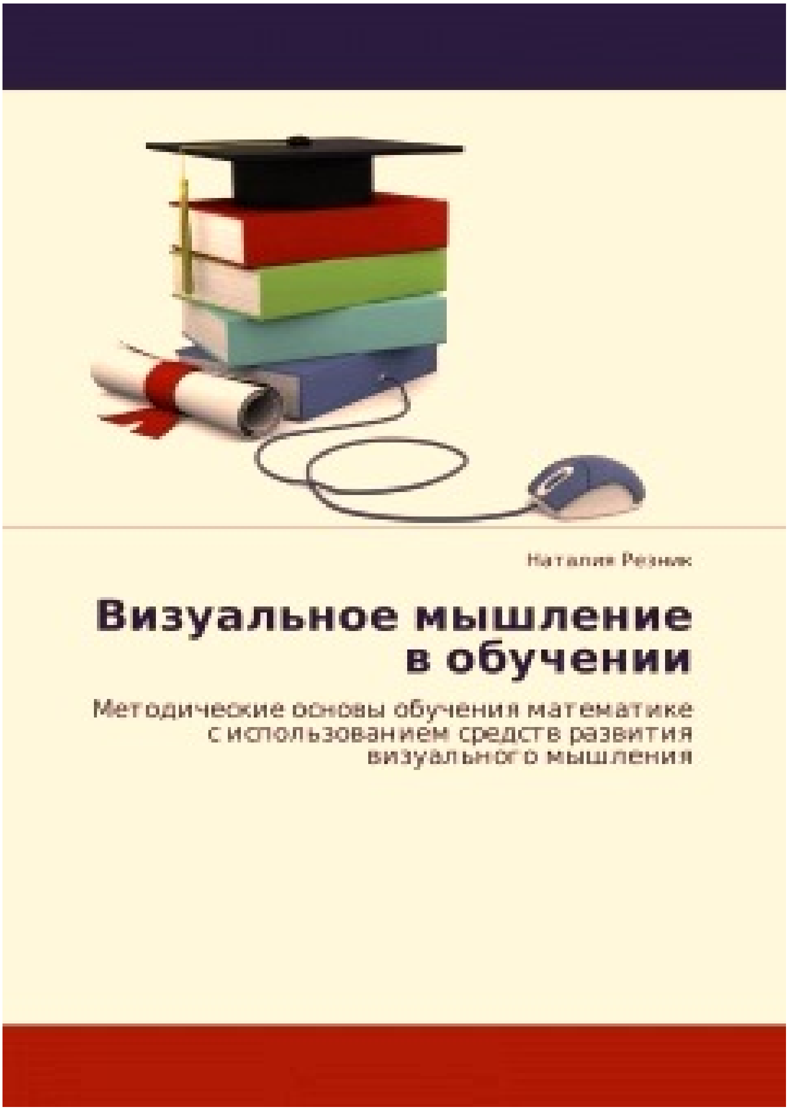
Наталия Резник

Визуальное мышление в обучении



Наталия Резник

Визуальное мышление в обучении

Методические основы обучения математике с использованием средств развития визуального мышления

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-8484-0460-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия XX века в основной школе и старших классах школы сформировались новые тенденции в подходе к математическому образованию: гуманизация и гуманитаризация преподавания математики, поворот к личности школьника, внимание к его возможностям и потребностям – основной упор ставится на развитие интеллекта ученика, определяющим является развивающее обучение.

При новых подходах выявляются противоречия, формирующиеся и развивающиеся в процессе изменения школьного образования.

1. Порожденный бурным развитием науки и техники последней трети XX века "информационный бум" повлек за собой необходимость перестройки образования в целом, что породило противоречие между содержанием школьного образования и реальными потребностями общества в его результатах.

2. Увеличение количества предметов в учебных планах общеобразовательной школы, продиктованное социальным заказом общества, происходит в настоящее время в рамках устоявшихся временных сроков (период обучения в школе по-прежнему ограничивается 10-11 годами обучения).

В результате перегрузка школьников достигает критических пределов, возникает реальная угроза их физическому и психическому здоровью, снижаются мотивы к обучению, что приводит к противоречию между объемом школьного образования и возможностями учеников, получающих его.

3. Компьютеризация средств общения приводит к увеличению числа детей и подростков, обращающихся в своей повседневной жизни к компьютеру, позволяющему моделировать практически любую предметную область, создавать различные учебные ситуации. Усиливающееся влияние на подрастающее поколение различных образовательных телевизионных программ и широкое распространение всевозможных компьютерных коммуникаций существенно повлияли на отношение школьников к традиционному обучению.

Профессионально написанные тексты учебников и учебных пособий, ориентированные на вдумчивую работу мысли, сейчас меньше привлекают школьников, чем красочная виртуальная реальность, возникающая на экране телевизора или мониторе ЭВМ, логическая составляющая обучения математике уступает место визуальному восприятию. Следовательно, к очередному противоречию мы относим несогласованность между возможностями обучаемых, владеющих общими приемами общения с информационной средой, и предлагаемыми им методами обучения в школе.

4. Методы развивающего обучения недостаточно используются в практике преподавания математики, так как требуют для своей реализации гораздо больше учительских усилий и технических средств, чем традиционные способы обучения.

Таким образом, налицо противоречие между общими целями образования и существующими средствами достижения этих целей.

5. Дидактические средства поддержки учебного процесса являются одним из важнейших инструментов в работе учителя математики. Количественная недостаточность и малая вариативность этих средств ограничивает свободу учителя в подборе материала. Аспекту технологичности в передаче методического опыта в настоящее время уделяется недостаточно также внимания.

Таким образом, выделяется противоречие между существующими формами сохранения и передачи методического и педагогического опыта и теми возможностями, которые дают новые информационные технологии.

6. В настоящее время в различных предметных областях школы все больше прибегают к математическим моделям для раскрытия сущности изучаемого явления. Несогласованность программ учебных дисциплин приводит к тому, что математические понятия вводятся в нематематические учебные тексты без представления их хотя бы на интуитивном уровне, без учета возможности их знания и понимания школьником на соответствующем этапе обучения.

Это приводит к противоречию между математическим содержанием учебных текстов гуманитарных и естественнонаучных дисциплин и возможностями школьников к интерпретации этого содержания в рамках конкретного школьного предмета.

7. На уроках математики школьники получают большой объем теоретического материала, приобретают необходимые умения и навыки в решении разнообразных математических задач. Однако, при переносе полученных знаний в ситуации нематематического характера, ученики оказываются не в силах применить готовые алгоритмы в поисках выхода из тупика.

Данное несоответствие обилия фактического материала умению использовать его в нестандартных условиях все больше и больше обнажает противоречие между репродуктивными и развивающими способами обучения.

Перечисленные противоречия были выделены на основе полученных эмпирических данных о результативности процесса обучения математике, практики автора и учителей-экспериментаторов использования и развития визуального мышления в процессе обучения математике, теоретического анализа разнообразных литературных источников (диссертаций, монографий, статей, учебников, учебных пособий, задачников и т.д.) и явились мотивом для проведения настоящего исследования, определив его **актуальность**.

Актуальность данного исследования определяется еще и тем, что перечисленные выше противоречия привели к необходимости нового подхода к реализации принципа наглядности в обучении математике. От взгляда на наглядность как одного из вспомогательных средств обучения математике мы переходим к полноценному использованию и развитию визуального мышления школьника в процессе становления его математического образования.

Благодаря актуальности, исследование вошло в Комплексную Программу северо-западного отделения Российской Академии Образования «Информационные технологии и их влияние на развитие личности в процессе обучения» (тема: «Взаимодействие человека и информационной среды в процессе обучения», сроки исполнения 1995-1997 годы) и в Региональную Комплексную программу Российской Академии Образования «Образование и образовательные системы Северо-Запада России» (тема: «Технология развития визуального мышления учащихся», сроки выполнения: 1996-1998 годы).

К научно-теоретическим предпосылкам исследования относятся:

– общие психолого-педагогические особенности развития личности в процессе обучения

(Л.С. Выготский [32-34], В.В. Давыдов [56-57], Т.В. Кудрявцев [95], М.И. Махмутов [109], Н.А. Менчинская [20], Д.Б. Эльконин [203] и другие);

– основы информационного моделирования процесса обучения

(П. Линдсней [103], М. Минский [111], В.М. Монахов [113], Ю. Нивергельт [117], С. Пейперт [127] и другие);

– результаты исследований психологов и физиологов, обнаружение новых закономерностей психической деятельности человека, связанные со зрительным восприятием, позволяющие расширить возможности активной работы учащихся

(Р. Арнхейм [3-7], П.Я. Гальперин [35], Р.М. Грановская [48], Р. Грегори [49-50], У. Джеймс [60], Б.Б. Коссов [88], В.А. Крутецкий [94], А.К. Тихомиров [183-184], М.С. Шехтер [198-199] и другие);

– исследования по проблемам передачи информации и распознавания образов

(В.П. Зинченко [68-69], М. Иден [74-75], П. Колерс [83], С.И. Шапиро [195], С.А. Шапоринский [196] и другие);

– труды, ориентированные на проблемы преподавания математики

(В.И. Крупич [93], Д. Пойя [133-135], В. Серве [173], Р. Фейнман [186], Л.М. Фридман [187-188], Э. Фройденталь [189-190], И.С. Якиманская [205-206] и другие);

– новые подходы к определению содержания и методов обучения математике

(А.Д. Александров [1], В.В. Афанасьев [8], М.И. Башмаков [11-15], Н.Я. Виленкин [30], В.А. Гусев [54-55], М.Ю. Колягин [85], А.Г. Мордкович [114], З.И. Слепкань [174], А.А. Столяр [177] и другие).

Практическими предпосылками исследования явились неизбежные изменения в условиях обучения, которые связаны с появлением закона об образовании: реализация принципа адаптивности системы образования к уровням и особенностям развития и подготовки школьника становится определяющей. Это обусловлено изменениями, происходящими в общественном сознании в связи с широким распространением персональных компьютеров.

Другим источником исследования является 37-летний практический педагогической опыт автора и его 22-летний опыт исследовательской работы в области преподавания математики, из которых более 20 лет посвящено изучению роли визуального мышления в процессе обучения математике.

В целом педагогическим исследованиям были подвергнуты около 20 средних школ (во многих из которых эксперимент длился от трех до пяти лет), около 8000 учащихся, около 40 классов и более 30 преподавателей различной специализации.

В качестве **проблемы исследования** мы выдвигаем проблему реализации принципа наглядности в обучении на основе развития и использования визуального мышления учащихся.

Рассматривая в качестве **объекта исследования** процесс обучения математике в средних и старших классах школы (с учетом различных типов учебных заведений), мы выбрали непосредственным **предметом исследования** ту деятельность ученика во время обучения, которую можно охарактеризовать как его визуальное мышление в ходе изучения школьного предмета, заключающееся в восприятии знаковых структур, порождении новых визуальных образов, конструировании новых визуальных форм, делающих видимым содержание этих образов и выводящих наружу логические взаимосвязи между ними.

Гипотеза исследования может быть представлена в виде двух групп гипотетических положений, которые легли в основу диссертационной работы.

Проблема реализации принципа наглядности в обучении математике в школе может получить принципиально новое решение, если удастся найти такое методическое обеспечение деятельности ученика, которое позволит включить способности его визуального мышления для получения продуктивных результатов в овладении математическими понятиями, для усиления развивающей функции обучения математике.

Иными словами использование наглядных образов в обучении математике может превратиться из вспомогательного, иллюстрирующего приема в ведущее, продуктивное методическое средство, способное обеспечить при определенных условиях широкий спектр параметров математического развития учащихся.

Современные информационные технологии позволяют комплексно разработать методическое обеспечение указанной выше задачи на пути конструирования специальных информационных сред, приспособленных для продуктивной работы визуального мышления.

При этом решающим моментом, который позволит технологизировать процесс создания необходимых информационных сред, явится использование возможностей современной компьютерной и информационной техники для генерирования, трансформирования и передачи визуальных образов как накопленных педагогическим опытом, так и вновь создаваемых в процессе обучения.

Для экспериментальной проверки первой части гипотезы выбраны два ведущих параметра развивающей функции обучения математике: развитие алгоритмического мышления и рост уровня поисковой деятельности учащихся.

Экспериментальная проверка второй части гипотезы, говорящей о возможности конструирования необходимых информационных сред, основана на широте апробации создаваемых методических средств (как по применимости на различных этапах обучения математике, так и по их переносимости в различные условия обучения). Другим важным моментом проверки гипотезы должна явиться возможность применения самой технологии создания визуальных информационных сред в методике обучения другим школьным дисциплинам.

Для достижения поставленных целей были выделены и решены следующие **задачи исследования.**

1. Уточнить характер деятельности ученика, включаемой в понятие “визуальное мышление”, исследовать особенности представления и оформления содержания учебного знакового материала с целью определения возможных способов его выражения, выяснить характер взаимосвязей между этими способами, определить основные принципы их использования.

2. Разработать методики: организации деятельности визуального мышления школьников при решении математических задач; формирования математических стандартных зрительных образов; образования на уроках математики навыков поисковой деятельности с широким использованием визуального мышления.

3. Решить проблему конструирования визуальной информационной среды, пригодной для работы визуального мышления на уроках математики, выделив ее основные параметры, средства и приемы ее использования в других предметных областях школьного образования

4. Сформировать специальный класс учебных задач, позволяющих использовать и развивать визуальное мышление в ходе изучения учебной теории.

5. Предложить новые способы и приемы визуализации учебных математических текстов для представления их на мониторе компьютера.

6. Составить модели нового вида уроков, на которых при изучении теории и решении практических задач основной упор ставится на визуальное восприятие учеником учебного знакового материала.

7. Выявить возможности и перспективы применения визуальной технологии обучения математике в нематематических предметных областях основной школе и старших классов школы.

Основные этапы и организация исследования

На первом этапе (1975-1980) происходило накопление фактов возможности использования визуального мышления в процессе обучения математике. Поисковый эксперимент проводился на базе учебных заведений, в которых мотивация обучения математике была снижена или практически отсутствовала (музыкальное училище г. Мурманска и ПТУ г. Ленинграда).

В результате возникла гипотеза о том, что если планомерно и целенаправленно развивать визуальное мышление учащихся в процессе обучения математике, то это приведет к более успешной реализации различных развивающих функций этого процесса.

Для экспериментальной проверки данной гипотезы нами были выбраны три функции обучения математике. Первая из них – формирование алгоритмической культуры. Вторая и третья функции – это умение переносить полученные знания в новую ситуацию и рост уровня поисковой деятельности.

На втором этапе исследования (1980-1986) продолжались поиски технологичных путей обучения математике. Основное внимание было уделено двум направлениям:

1) конструирование визуальных дидактических средств обучения математике,

2) организация поисковой деятельности учащихся в процессе обучения математике.

Апробировались различные ситуации учебной деятельности на уроках математики, уточнялись целевые установки исследования, проводились выборочные обследования учителей и школьников с целью выяснения возможностей использования визуального мышления при обучении математике. В этот период была сформулирована концепция *Визуальной Среды Обучения*.

Экспериментальные данные были получены в результате проведения учебной работы на подготовительных вечерних курсах при Мурманском высшем морском инженерном училище (МВИМУ) им. Ленинского комсомола и в экспериментальной группе подготовительного отделения этого вуза, а также на отдельных занятиях I курса МВИМУ (судоводительский, технологический, электромеханический факультеты), в 10-11 классах Мурманского морского лицея.

На третьем этапе (1986-1997) уточнялась концепция исследования, разрабатывался проект системы эффективного использования визуального мышления в предметном обучении. На основе предложенной концепции были сформулированы принципы формирования нового типа обучения – визуального урока, апробировано применение этих принципов в реализации такого урока в других предметных областях школы (химия, физика, биология, русский язык, немецкий язык, география, сольфеджио и музыкальная грамота).

Экспериментальные данные в этот период были получены в результате проведения учебной работы в школах и лицеях г. Мурманска, сельских и поселковых школах Мурманской области, а также на практических занятиях и лекциях I и II курсов технологического факультета Мурманского государственного технического университета.

В результате сформировался принципиально новый подход к проблеме использования природного механизма – зрения – в процессе обучения.

В основу данного подхода положены:

1) информационная среда обучения, основанная на различных способах представления учебной знаковой информации;

2) дидактическая компонента обучения математике, обеспеченная набором визуальных средств обучения, определяющих действия учителя и помогающих учащимся в усвоении программного материала.

Научная новизна и теоретическая значимость данного исследования состоит в том, что в нем

– разработано новое научное направление в теории и методике преподавания математики, основанное на использовании визуального мышления учащегося как одной из ведущих сторон его учебной деятельности в обучении математике;

– впервые доказана возможность построения информационных сред, обеспечивающих широкий спектр параметров математического развития учащихся.

Практическая значимость работы состоит в разработке конкретных моделей учебной деятельности, создающих основу для визуальных способов и приемов обучения математике, в разработке общих приемов конструирования визуальной среды процесса обучения в целом.

На основе результатов исследования созданы
учебные пособия:

- «Векторы на плоскости и в пространстве» (конструирование информационной среды обучения);

- «Тригонометрия» и «Углы» (формирование и развитие стандартных зрительных образов);
- «Визуальная алгебра. Многочлены» (развитие поисковой деятельности учащихся);

а также книги для учителей:

- «Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея» (класс визуальных задач и методические указания к их применению в процессе обучения),
- «Визуальные уроки» (модели визуальных уроков и распространение визуальной технологии обучения на другие предметные области школы).

На защиту выносятся основные результаты:

1. Теоретическое обоснование роли визуального мышления в процессе обучения математике.

2. Информационная среда как средство хранения, структурирования и представления информации, передачи, переработки и обогащения учебных информационных данных.

3. Общий подход к анализу взаимодействия ученика с информационной средой в процессе обучения математике, основанный на множественности форм представления и восприятия взаимосвязей математического знания.

4. Новый класс учебных математических задач, в решении которых ведущую роль играет зрение.

5. Модель дидактического обеспечения использования и развития визуального мышления в процессе обучения математике.

6. Структура гипертекстовых связей *Визуальной Среды Обучения*, основанная на специальных способах и приемах визуализации учебных математических текстов для представления их на мониторе компьютера.

7. Новые подходы к организации продуктивной учебной деятельности в процессе изучения математики.

Внедрение результатов исследования осуществлялось в период с 1989 по 1997 годы.

В период с 1989 по 1990 год при участии автора были внедрены комплекты дидактических материалов для преподавания математики в школах и ПТУ, построенные на основе модели комплексного использования различных дидактических материалов на бумажной основе.

С 1994 по 1997 автором были разработаны и внедрены учебные пособия «Векторы на плоскости и в пространстве» (в 2 частях), «Тригонометрия» (в 2 частях), комплекты визуальных дидактических материалов по различным темам математических курсов для 8-11 классов.

На втором этапе исследования (1989-1993) продолжались поиски технологичных путей обучения математике, основное внимание было уделено двум направлениям: моделированию традиционных дидактических средств обучения математике, и моделированию поисковой деятельности учащихся в процессе обучения математике.

Апробировались различные ситуации учебной деятельности на уроках математики, уточнялись целевые установки исследования, проводились выборочные обучение учителей и обследования школьников с целью выяснения возможностей использования визуальной технологии при обучении математике.

В результате была сформулирована концепция *Визуальной Среды Обучения*, методика использования которой была применена автором на лекционных и практических занятиях по высшей математике, в практике работы учителей математики города на уроках различных нематематических дисциплин в школах Октябрьского и Кольского округов Мурманской области.

Апробация результатов исследования была осуществлена на конференциях и семинарах:

1. Научно-практическая конференция МВИМУ (1988, 1994).

2. Научно-методическая конференция профессорско-преподавательского состава (МПИ, 1993).

3. Научно-практическая конференция учителей ПТУ Ленинграда и Ленинградской области (Ленинград, 1986).

4. Семинары по проблемам методики преподавания математики в Научно-Методическом Центре Математического Образования (Ленинград, 1984, 1989).

5. Научно-теоретическая конференция преподавателей вузов Министерства рыбной промышленности, секция физики и математики, МВИМУ им. Ленинского комсомола (Мурманск, 1986).

6. Научно-теоретическая конференция ЛГПИ им. Герцена, Герценовские чтения, секция «Методика преподавания математического анализа» (Ленинград, 1989).

7. Сейфуллинские чтения, подсекция «Методика преподавания математики и информатики» (Целиноград, 1989).

8. Третья Ленинградская научно-методическая конференция «Проблемы образования в области информатики, вычислительной техники и автоматизации», секция «Информатика в средних учебных заведениях» (Ленинград, 1989).

9. Семинары НИЧ ЛЭТИ (лаборатория преподавания математики, 1989-1990).

10. Научно-технические конференции профессорско-преподавательского состава МГАРФ, (Мурманск, 1994, 1997).

11. Областные и районные конференции и семинары учителей математики Мурманской области (Мурманск, 1992-1997).

12. Семинары по проблемам методики преподавания математики в Институте Продуктивного Обучения РАО (Санкт-Петербург, 1994, 1996).

13. Международная научно-методическая конференция «Математика в вузе – стандарты образования – Базовая подготовка» (Кострома, 1996).

14. 8-я научно-техническая конференция МГТУ (Мурманск, 1997).

15. Международная научно-методическая конференции «Северные университеты» (Мурманск, 1997).

Применение основных практических результатов данной работы отражено в 35 актах о внедрении, а также в 9 отчетах по НИР:

- «Представления учебной математической информации и их роль в развитии мышления обучающихся». №01860047056. – Мурманск, МГАРФ. – 3 этапа.
- «Разработка концептуальных основ перестройки математического образования» (НИЧ ЛЭТИ, УДК 519; 331/86.001.8: 51 № гос. рег. 0189001785, 1989).
- «Формирование и методические обеспечение курса математики в системе "Школа–Лицей–ВУЗ"». №0189001785, – Мурманск, МГАРФ 1994. – 3 этапа.
- Отчет по НИР ИПО РАО (договор №7/1 от 05.05.94).
- Монография «Человек в информационной среде» (НИР ИПО РАО в соавторстве 1996).

Основное содержание диссертации отражено практически более чем в 30 публикациях, среди которых здесь выделяем следующие:

1. Об изучении геометрии учащимися, обучающимися музыке // Математика в школе, №1, 1994.

2. Развитие визуального мышления на уроках математики (в соавторстве) // Математика в школе, №1, 1991.

3. Векторы на плоскости и в пространстве. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для уч-ся морского лицея, средних школ, курсантов (студентов) младших курсов вуза: – В 2 ч. – Мурманск, 1993. – Ч.I – 166 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

4. Векторы на плоскости и в пространстве. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для уч-ся морского лицея, средних школ, курсантов (студентов) младших курсов вуза: – В 2 ч. – Мурманск, 1993. – Ч.II – 159 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

5. Тригонометрия. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для уч-ся 8-9 кл. морского лицея и ср. школ. – В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч.I – 122 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

6. Тригонометрия. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для уч-ся 8-9 кл. морского лицея и ср. школ. – В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч.II – 159 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

7. Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея. Экспериментальные материалы для учителей и родителей. В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч.I – 146 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

8. Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея. Экспериментальные материалы для учителей и родителей. В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч.II – 180 с. – (Ком. РФ по рыболовству. МГАРФ).

9. Восстановление утраченных знаний и навыков (в соавторстве) // Математика в школе, №6, 1996.

10. Визуальные уроки. Книга для учителя. – СПб.: Свет, 1996.

11. Визуальная алгебра. Многочлены. Наглядные материалы для учителя и ученика – СПб.: издательство ТОО Компания БалтРус, 1997.– 112 с.

12. Визуальная алгебра. Многочлены. Наглядные материалы для учителей и родителей – СПб.: изд-во ТОО Компания БалтРус, 1997. – 131 с.

13. Информационная среда обучения. Монография (в соавторстве) – СПб.: Свет, 1997. – 400 с.

14. Визуальные тетради «Углы»: Визуальные материалы для учителя и ученика (5-7 классы). – Мурманск, 1997. – 45 с. – (Ин-т продуктивного обучения РАО, Мурманский гос. техн. ун-т).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Объем диссертации 350 страниц, из них на список использованной литературы приходится 18 страниц.

Основной текст работы содержит 100 иллюстраций и 17 таблиц, приложение, состоящее из пяти частей, занимает 150 страниц, пары которых (четная и нечетная) объединены либо по структуре, либо по принципу содержательной общности.

Практически все примеры и рисунки к ним, иллюстрирующие нашу идею, являются оригинальными и прошли экспериментальную проверку в различных классах общеобразовательной школы. Подавляющее большинство из них относится к предметной области «Математика», в отдельных случаях такие примеры будут содержать материалы других дисциплин, что позволит наглядно представить и обосновать общность важнейших положений нашего исследования.

Для удобства изложения большинство иллюстраций отнесены в приложение, нумерация страниц и иллюстраций которого продолжает нумерацию страниц и иллюстраций исследования.

Структурные связи содержания исследования с приложением отражает рисунок 01.

Таким образом, данное приложение является неотъемлемой частью самой диссертации.

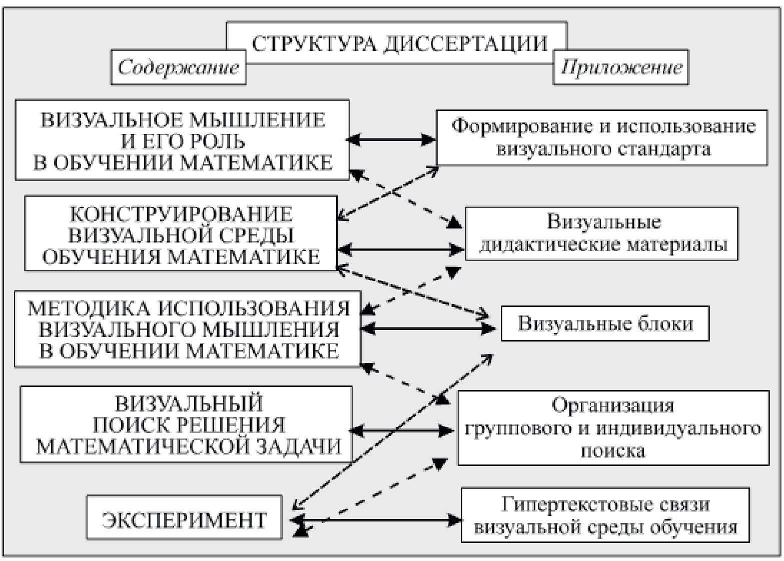


Рис. 01.

Структура диссертационного исследования

Глава I
ВИЗУАЛЬНОЕ МЫШЛЕНИЕ
И ЕГО РОЛЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Комплекс предметов естественного и гуманитарного циклов общеобразовательной школы должен способствовать обогащению духовной сферы человека. Сюда, прежде всего, следует отнести возбуждение жажды к знаниям, интереса к предмету наряду с воспитанием уверенности в своих силах, неограниченности познавательных возможностей, ценности и неповторимости своей личности.

При этом необходимо внимательно и бережно относиться к индивидуальным особенностям ученика, руководствуясь замечательным правилом, изложенным В. Серве, которое можно применить практически к любому учебному предмету:

> «Лучше скромная математика, хорошо усвоенная, чем недоступная математика, которую ненавидят, что хуже, чем полное отсутствие математики» [173, с. 26].

Обучение школьным предметам должно внести определенный вклад в развитие эмоциональной сферы учащегося. Красота строгих построений и рассуждений, смелость и неожиданность ассоциаций, богатство и красочность языка должны противостоять скуке и формализму, бедности и однообразию, часто царящих на уроках алгебры и геометрии, физики и химии, русского языка и биологии.

Важной развивающей функцией процесса обучения в школе является стимулирование самостоятельности ученика, развитие его индивидуальных способностей, формирование навыков работы с книгой. В связи с развитием компьютерных технологий обучения на первый план мы выдвигаем роль визуального мышления.

«Человечество слишком мало использует зрение в обучении» – эти слова Фреда Хойла, одного из крупнейших астрофизиков нашего времени [192], мы взяли в качестве направляющего мотива всей нашей работы.

§1. Структура визуальной деятельности ученика

Понятие визуального мышления как особого вида человеческой деятельности широко использовалось философами, психологами, искусствоведами, прежде всего, для изучения психологии искусства, художественного восприятия и творчества, где особенно важным представлялось найти чувственный аналог интеллектуального познания. Р. Арнхейм в книге «Искусство и визуальное восприятие» пишет:

> «Восприятие не является механическим регистрированием сенсорных элементов, оно оказывается поистине творческой способностью мгновенного схватывания действительности, способностью образной, проницательной и прекрасной. Качества, характеризующие деятельность мыслителя и художника, свойственны любому проявлению разума… Любое восприятие есть также и мышление... любое наблюдение разума – также творчество» [7, с. 20-21].

Широкое распространение получил термин “визуальное мышление”, означающий, как пишет Арнхейм [5, с. 98], «мышление посредством визуальных (зрительных) операций» А.Р. Лурия, исследуя познавательные процессы, выделяет [105, с. 108] «ум, который работает с помощью зрения, *умо-зрительно*». В основе наших рассуждений лежит следующее определение, данное В.П. Зинченко [69, с. 46]:

> «**Визуальное мышление – это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих значение видимым**».

Таким образом, феномен “визуального мышления” рассматривается нами как психический механизм, ответственный за неоднократно повторяющуюся обработку поступающей через зрение, “обновляющейся” и преобразовывающейся информации.

Нам представляется это тем более важным, что

> «... элементы мышления в восприятии и элементы восприятия в мышлении дополняют друг друга. Они превращают человеческое познание в единый процесс, который ведет неразрывно от элементарного приобретения сенсорной информации к самым обобщенным теоретическим идеям» [7, с. 107].

В настоящее время мысль о продуктивном характере визуального мышления получила достаточно широкое признание.

Педагогика, методики преподавания, опыт работы учителей накопили богатый материал, подтверждающий необходимость целенаправленного использования визуального мышления в практике обучения.

Попытаемся трансформировать эти идеи применительно к потребностям математики и других школьных дисциплин.

1.1. Продуктивный характер визуального мышления

Интеллектуальное развитие школьников, проявляющееся в раскрытии и обогащении различных сторон их мышления, качеств и черт, их личности и характера, происходит в процессе обучения. Разработанная психологами типология мышления выделяет такие его виды, как абстрактное и конкретное, речевое и эмоциональное, логическое и алгоритмическое и т.п.

Выделим две стороны того вида человеческой деятельности в процессе обучения, который мы называем визуальным мышлением.

Первая из них связана с формированием устойчивых зрительных образов (понятий) и овладением различными мыслительными операциями над ними. Эти операции аналогичны таким общим процессам, как абстрагирование, отделение главного от второстепенного, структурирование, логические рассуждения и т.п.

Вторая сторона связана с изучением специфики визуального мышления как самостоятельной системы, использование которой в обучении предполагает определенную подготовку учителя и ученика. Остановимся коротко на этой стороне.

Правомерно ли выделение визуального мышления в особую систему, требующую специального внимания и методов ее развития?

Духовное и интеллектуальное развитие ученика, являясь главной целью и главным содержанием процесса обучения и воспитания, вызывает к жизни самостоятельно развивающиеся подсистемы (мышления), богатство и разнообразие которых обеспечивает успешное функционирование всей системы в целом. Многочисленные данные – опорные конспекты, аудиовизуальные средства, монитор персонального компьютера, стремление авторов учебных пособий и учителей наглядно изложить учебный материал и, главное, исследования отечественных и зарубежных психологов – убеждают нас в необходимости внимания к особой подсистеме мышления, предназначенной поднять работу чувственного, визуального восприятия на уровень полноценной продуктивной мыслительной деятельности.

Одним из важнейших результатов исследований психологии восприятия является вывод о необходимости специального обучения "искусству видеть". Р. Грегори в книге «Разумный глаз» [50, с. 7] пишет:

«… понимать – значит видеть вещи определенным образом».

В другой книге [49, с. 223], следуя Гельмгольцу, он еще более четко определяет:

«... чтобы правильно видеть вещи, необходимо обучение».

Обучение умению "правильно видеть", а значит, и понимать содержание предметных абстрактных образов, становится актуальной задачей методик преподавания школьных дисциплин.

Отметим, словами того же Грегори, что

> «... видеть вещи и явления можно лишь в ходе процесса, аналогичного решению задач. Все сенсорные факты – ощущения – суть вопросы, задаваемые мозгу рецепторами, а все восприятия – ответы, иногда верные, иногда неверные» [см. там же].

Обратимся теперь к основной стороне визуального мышления, состоящей в порождении новых визуальных форм, наполнении их богатой смысловой нагрузкой, в продуктивной трансформации этих форм, делающих видимым их внутренний смысл и приводящих к содержательным результатам.

При изучении многих школьных предметов учащимся предъявляется достаточно трудный для усвоения, зачастую идеализированный материал. Естественно, что у них возникает настоятельная потребность овеществить абстракцию.

> «Дело заключается в том, и это особенно важно отметить, что... мышление формирует для себя чувственную основу в виде схем, графиков, моделей и т.п. Именно поэтому усиление роли мыслительных компонентов может приводить и к усилению взаимодействия и взаимосвязи чувственных и собственно логических компонентов» [196, с. 51].

К сожалению, как показывает практика, результаты преподавания в этом отношении обнаруживают значительный пробел.

Какие бы межпредметные связи мы ни приводили, как бы их ни интерпретировали, все равно в большинстве случаев для учеников формула это одно, а словесное описание какого-либо соответствующего (например, физического) закона – это нечто иное.

По-видимому, этим и объясняется то, что на уроках естественно-научного цикла учащиеся с трудом применяют известные правила преобразований (например, при составлении химических формул или решении физических задач).

На наш взгляд, это происходит потому, что элементы мышления и элементы восприятия еще не объединены сознанием в единую систему. Однако

> «восприятие и мышление нуждаются друг в друге, их функции взаимодополнительны» [4, с. 153],

и, более того,

> «восприятие без мышления было бы бесполезно, мышлению без восприятия не над чем было бы размышлять» [см. там же].

Для превращения познания в единый непрерывный процесс необходимо, чтобы элементы мышления в восприятии и восприятия в мышлении дополняли друг друга, образовывали новую сторону (ступень) мышления, которую понятнее было бы назвать визуально-логической.

Такая сторона мышления должна работать не только при изучении математики.

Одной из основных функций многих школьных предметов является усвоение учащимися научного метода познания.

При этом мышление, особые параметры которого задаются свойствами знакового материала, должно функционировать всегда, когда есть возможность изложить содержание изучаемого процесса (явления) в визуально представимой форме.

Это естественно, поскольку, как пишет Иден,

> «... те образы, которые можно видеть, поддаются изучению значительно легче, чем эфемерные образы, воспринимаемые слуховой или сенсорной системами» [75, с. 247].

Получая в свое распоряжение некоторую визуальную информацию, учащийся начинает образовывать визуальные понятия, т.е. новые образы.

> Он может оперировать ими как некоторыми визуально определяемыми объектами, создавать новые визуальные образы.
>
> При всем этом значение самих понятий и операций над ними становится видимым.

Учтем еще одно обстоятельство.

Предметы естественнонаучного цикла, а также ряд гуманитарных дисциплин имеют свой собственный язык – язык символов (знаки, графики, рисунки и т.п.), и, соответственно, все визуальные формы имеют строгую логическую структуру, организованную по определенным правилам, которые также визуально обозримы.

Итак, учащийся получил абстрактный (знаковый) материал, овеществленный в виде формул, графиков, картинок-иллюстраций. Даже если все это сопровождается словесными интерпретациями, то он, разумеется, не сразу начинает мыслить (вникать в содержание теории или решать задачу).

> На данном этапе у него активно работает зрение и зрительное восприятие.
>
> Любые объяснения, комментарии в этот момент будут несвоевременны, – учащийся, прежде всего, должен рассмотреть то, о чем пойдет речь, обдумать, проанализировать, что он видит, воспринять (принять!) предлагаемый материал.

Если учащемуся предложить материал неизвестного ему содержания и непривычного оформления, то он не воспримет, не увидит (в разбираемом смысле) ничего.

Обратимся к школьной практике.

Мы цитируем фрагмент учебного текста, описывающий строение химического вещества [157].

> «Чтобы понять, как происходит образование химических связей в молекуле метана перекрыванием облаков и почему молекула метана имеет тетраэдрическое строение, нужно вспомнить учебный материал о гибридизации электронных облаков...
>
> На рис. 1.01 показано, как происходит гибридизация, т.е. взаимное выравнивание *s*- и *p*-электронных облаков в атоме углерода (*а* и *б*). Эти облака после гибридизации располагаются в пространстве так, что их оси оказываются направленными к вершинам тетраэдра (*в*). При образовании молекул метана CH_4 вершины этих облаков перекрываются с облаками электронов атомов водорода (*г*)».

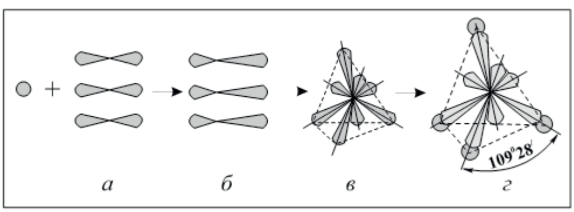


Рис. 1.01.
Формирование
тетраэдрического строения молекулы метана

Мы не затрагиваем все трудности, которые могут возникнуть у школьника десятого класса при чтении этого текста (например, словосочетание “вершины облаков”). Обратим внимание лишь на то, что чтение его должно сопровождаться (как предлагает учебник) анализом соответствующей иллюстрации, демонстрирующей структурирование пространственной модели молекулы метана.

Конечную структуру этой молекулы нужно предоставить в виде каркаса тетраэдра, знакомство с которым в курсе математики отнесено в программу 11-го класса. Учитель химии либо должен пояснить, охарактеризовать, проиллюстрировать неизвестные ученикам такие понятия, как “тетраэдрическое строение” и “вершина тетраэдра”, либо предположить, что они им знакомы.

Сам же рисунок может внести дополнительную путаницу в визуальные представления учеников: каркас – это фигура, обозначенная пунктирными линиями, набор “бантиков”, или то и другое вместе.

В силу этого главная цель данного фрагмента текста (объяснить процесс образования структуры молекулы метана с помощью описания и иллюстрации) может оказаться не реализованной.

Ожидать получения хороших результатов обучения при подобном невнимании к визуальному восприятию было бы, по меньшей мере, наивно. Нельзя видеть, не понимая, «... слово “видеть” имеет два значения: зрительно воспринимать что-либо и понимать что-либо» [51, с. 7].

Однако степени “понимания” могут быть различны: от смутного ощущения до полной ясности.

В большинстве случаев при любом новом “повороте” обучения – новой информации – глаз видит предъявляемое, но мозг не успевает (не умеет, не может) данную новизну обработать (составить достаточно точное и полное предоставление о содержании).

Чтобы оптимизировать процесс усвоения материала, нам нужно указать ученику, что именно и в каком порядке он может рассматривать для достижения хотя бы относительной ясности:

> «... разумное восприятие представляется главным путем, по которому следует ребенок в поисках порядка в беспорядочном мире» [4, с. 163].

1.2. Начальные операции визуального мышления

Как облегчить учащемуся проникновение в содержание, значение предъявляемых зрительных образов? Прежде всего, этому должно способствовать качество самих этих образов.

> Как нельзя научить понимать живопись, показывая бездарную мазню и убогие репродукции, так нельзя научить математике, физике, географии или химии, показывая безграмотные чертежи, неверные формулы, неправильно подобранные иллюстрации, непродуманно составленные (с точки зрения визуального восприятия) опыты или демонстрации.

Любую учебную знаковую информацию можно подразделить на отдельные относительно самостоятельные образования, среди которых встретятся знакомые, одинаковые или же неизвестные.

> Эти образования, в свою очередь, «... отличаются целостностью, но нерасчленимой целостностью. Их понимание и усвоение требует одновременно и абстрактного мышления и “картинного” воображения» [195, с. 45].

В посильном для изучения материале учащийся находит некоторые известные ему объекты, материализованные, к примеру, в виде символов, обозначений элементарных функций (в математике), химических формул,

функциональных обозначений гармонических последовательностей (в теории музыки) и т.д.

Ученик выделяет их в структуре информационных сообщений, дифференцирует по степени сходства и однородности, наконец, определяет известный ему структурный стандарт по отношению ко всему информационному сообщению или его отдельному блоку.

Например, в полной (включая знак произведения) записи выражения

$$(\sin x)^2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + (\cos x)^2$$

ученик восьмого класса может увидеть нечто знакомое.

- Во-первых, одинаковые (повторяющиеся) символы.
- Во-вторых, что эти символы есть обозначения некоторых, пока еще неизвестных ему объектов.
- В-третьих – сам структурный стандарт – формулу сокращенного умножения, которую “завуалировали” данной “архитектурой”.

Девятиклассник в этом выражении должен опознать

“тригонометрическую” единицу: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

плюс синус удвоенного аргумента: $2\sin x \cos x = \sin 2x$.

На уроке русского языка таким стандартом может выступать определенная часть речи или хорошо известный член предложения.

В физике им может оказаться закон Кулона, опираясь на который можно решать различные задачи, связанные с электростатикой и т.д.

Визуальный анализ данных позволяет соответствующим образом обрабатывать поступившую информацию, подготовиться к должному свертыванию – получению результата.

Однако практика показывает, что (в большинстве случаев) при решении практических задач учащиеся затрудняются в опознании “одинаковых” или “стандартных” (хорошо известных, основополагающих) элементов информации.

Даже в более простых ситуациях наблюдается, что у них отсутствует восприятие знаковых структур как некоторых зрительно воспринимаемых образований – визуальных образов, особенности которых поддаются активному зрительному анализу.

Традиционно преобразование выражений, подобных

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}x+\frac{a+b}{a-b}y}{\frac{a+b}{a-b}m-\frac{a+b}{a-b}n},$$

путем “поточечной передачи изображения в мозг”,

т.е. следующим образом:

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}x+\frac{a+b}{a-b}y}{\frac{a+b}{a-b}m-\frac{a+b}{a-b}n}=\frac{(ax+bx+ay+by)(a-b)}{(am+bm-an-bn)(a-b)}.$$

Далее идут варианты группировок, приводящие к окончательному, не всегда верному, результату.

Только наиболее подготовленные видят:

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}x+\frac{a+b}{a-b}y}{\frac{a+b}{a-b}m-\frac{a+b}{a-b}n}=\frac{\frac{a+b}{a-b}(x+y)}{\frac{a+b}{a-b}(m-n)}.$$

Если бы задача воспитания (в данном случае “математического”) зрения учащихся была нами осуществлена, ответ можно было бы получить моментально.

Достаточно лишь оттолкнуться именно от визуальных особенностей этой конструкции – отметить общий множитель, присутствующий в каждом слагаемом числителя и знаменателя, и “погасить” его (рис. 1.02, см. также рис. III.01 на стр. 547).

Анализ

$$\frac{\boxed{\frac{a-b}{a+b}}x+\boxed{\frac{a-b}{a+b}}y}{\boxed{\frac{a-b}{a+b}}m-\boxed{\frac{a-b}{a+b}}n}$$

Рис. 1.02.
Анализ структуры алгебраической дроби

Итак, первый этап процесса восприятия и переработки визуальной знаковой информации мы характеризуем как анализ ее структуры.

Этому должны способствовать два основных параметра – нацеленность учащихся на такое восприятие и специальная организация учебного материала, поскольку

> «мышление осуществляется посредством структурных характеристик, встроенных в образ, и потому образ должен быть сформирован и организован разумно, чтобы наиболее важные его свойства были видимы» [4, с. 168].

1.3. Создание новых образов

Перейдем к следующему этапу работы визуального мышления.

Визуальная информация обладает тем замечательным свойством, что она позволяет при помощи ее специальной организации и оформления естественным путем влиять на различные стороны мышления, в том числе и на абстрактную или логическую.

Однако это свойство необходимо правильно реализовать – применить так, чтобы значение понятий, порождающих информацию, стало видимым.

Приведем мнение психолога:

«Не исключено, что нарушение каких-то благоприятных для интуиции условий является неизбежным, однако учитель все время должен отчетливо представлять себе, какова цена такой односторонности в обучении, что он теряет, всецело полагаясь на один только интеллект» [6, с. 37].

Зрительные ориентиры (визуальные стандарты) дают возможность осуществить второй этап визуального анализа – классифицировать характер фрагмента учебной теории или конкретного практического задания, представленных знаковым образом, и на основе этого перейти к созданию новых визуальных образов и форм.

Здесь полезно напомнить некоторые из операций мышления, с помощью которых осуществляется классификация понятий [173, с. 43]:

1. Установление признаков объектов, подлежащих классификации.
2. Сравнение между собой объектов по общим и специальным признакам.
3. Разделение объектов на классы в соответствии с полученным основанием классификации.

Предварительно бегло просматривая изображение (формулу, рисунок, отрывок учебного текста), учащийся перемещает взгляд от одной детали к другой, сравнивает их, возвращаясь к основным моментам каждого фрагмента, анализирует отдельные элементы. Получение начальных данных, предлагаемых явным способом, приводит к вычленению признаков объекта, которые являются основой для формирования его **первичного** образа, и потому

«... образ должен быть сформирован и организован разумно, чтобы наиболее важные его свойства были видимы» [4, с. 169].

Поиск возобновляется, и учащийся приступает к уточнению и детализации инвариантов. Он выстраивает их в системы, сравнивает визуальные комбинации с некоторым **обобщенным** образом (стандартом, эталоном).

Распознавание стандартной ситуации, стандарта происходит как по постановке задачи, так и по схеме “специализация – обобщение”. Это может быть

1) узнавание стандартной формулы в новых обозначениях,
2) отождествление заданного числа со значением известной функции в некоторой точке,
3) сопоставление нотного символа с функциональным значением его в соответствующей гармонической последовательности,
4) уяснение частного вида знакомого понятия и т.д.

Вследствие проделанной работы учащийся получает (выявляет) новую дополнительную информацию.

При этом он еще раз уточняет и проверяет инварианты, оценивает однородность и контрастность деталей, аномальности относительно первоначально исследованного эпизода и другие морфологические особенности.

Учащийся все время должен решать, достаточна ли информация для достижения поставленной цели? Приходится сортировать, отбрасывать избыточную информацию, уточнять и корректировать необходимую. В случае, когда речь идет об определенном важном фрагменте учебной теории, в памяти учащегося происходит окончательное закрепление – образование **содержательных** (опорных) образов (сигналов).

Таким образом, вся деятельность визуального восприятия учащегося при работе со знаковым материалом может быть рассмотрена как непроизвольное самообучение, которое приводит к развитию навыков поиска – фиксации (классификации) своеобразия информационных визуальных сообщений.

Повторение отдельных этапов, итеративное (неоднократное) совершенствование навыков визуальной деятельности постоянно направлены на распознавание и формирование целостной системы, отвечающей поставленной задаче.

Такая система быстро восстановится, сработает всякий раз, как возникнет необходимость, даже и по истечении значительного времени.

Ярким примером этого является обучение математике, которое связано со специфической материализацией математических объектов и отношений между ними.

Любая фраза, раскрывающая содержание отдельного утверждения математической теории, может быть зафиксирована в виде “фактов” (знаки, схемы или рисунки), т.е. при помощи материальных предметов, представляющих математические объекты (их свойства и связи между ними).

Именно эти “факты” и применяются для восприятия, усвоения и переработки информационных сообщений. Новейшие исследования психологов последних лет подтверждают правомерность наших рассуждений.

В книге «Как обучить ребенка математике» американский детский врач Г. Доман настойчиво обращает внимание читателей на то, что способность усваивать ***фактический*** (воспринимаемый органами чувств) материал является одним из самых ценных даров природы человека:

«... если вы учите малыша *фактам* из какой-то определенной области знаний, он сам откроет закономерности, существующие в данной области... ребенок обладает недюжинной способностью открывать закономерности, если мы учим его фактам» [61, с. 41].

1.4. Визуальный поиск

Желание искать и способность находить решение учебной задачи у многих учащихся отсутствует вовсе не потому, что это свойственно только способным (или даже очень способным) из них.

Процесс обучения в школе по многим причинам “гасит желание попробовать свои силы” в решении трудных примеров и задач. Они не только не под силу многим учащимся, но, что хуже, неинтересны им.

В 1994 году Мировой Банк опубликовал проект доклада «Российское образование в переходный период». Эксперты Банка проанализировали результаты тестирования по математике тринадцатилетних школьников из семи стран [136] (рис. 1.03).

Оценка производилась по трем категориям:

(А) общее знание фактической информации;

(Б) применение этой информации для решения проблем;

(В) использование для новых и непредвиденных задач.

По первому параметру показатели школьников из бывшего Советского Союза, Венгрии и Словении лучше, чем в других странах.

Но советские школьники намного хуже используют свои знания в аналитических ситуациях, чем их английские, французские, канадские и израильские сверстники.

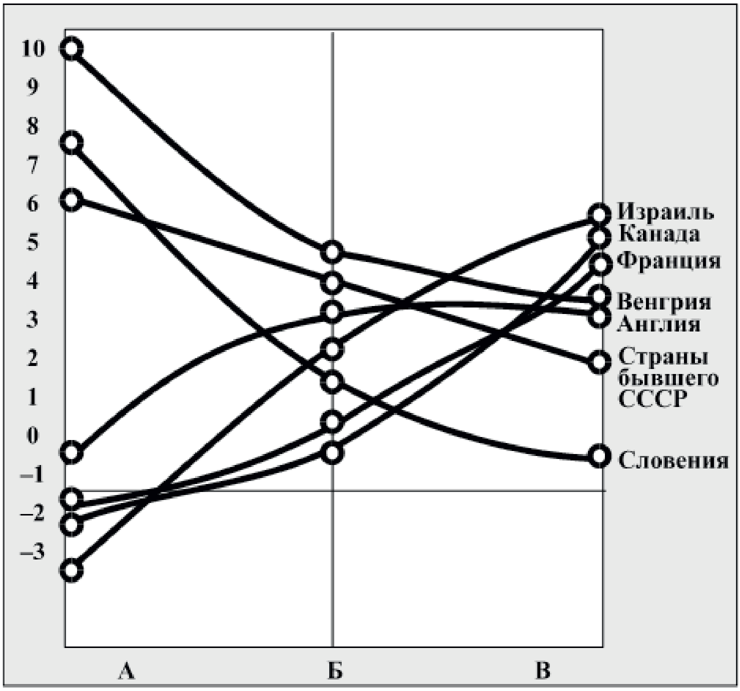


Рис. 1.03.
Результаты тестирования по математике
тринадцатилетних школьников из семи стран в 1994 году

Проблема организации поисковой деятельности в процессе обучения математике (и не только математике!) является одной из самых сложных и трудноосуществимых. В предисловии к книге Д. Пойя «Математика и правдоподобные рассуждения» С.А. Яновская пишет:

> «Над вопросом о том, возможна ли теория, предметом которой являются не математические доказательства, а способы догадываться о таких доказательствах, открывать математические истины и решать математические задачи, люди бьются еще со времен античной древности. Вопросы этого рода не могут

не интересовать каждого математика, каждого преподавателя математики или обучающегося ей» [207, с. 13].

Основная трудность, на наш взгляд, заключается в том, что поисковая деятельность сама по себе предполагает громадный "запас эвристик".

В целом такая деятельность, по-видимому, алгоритмизации, подчинению определенным, четко сформулированным правилам не поддается. Тем не менее, в результате изучения научной и методической литературы [2-9, 17-18, 20-22, 26, 32-36, 39, 42-43, 47-51, 53-61, 64-66, 68-69, 82-83, 85, 87-88, 91, 94-97, 100-101, 103, 105-106, 109-112, 117, 120, 124-125, 127-131, 133-135, 137-141, 143, 155, 161-162, 168-169, 172-174, 176-177, 179, 181-185, 187-191, 193, 195-196, 198-207] и в ходе наших исследований выяснилось, что в учебном процессе объективно существуют такие моменты, которые позволяют подготовить почву для движения мысли ученика по таким "эвристическим руслам".

Причем, каждый из этих моментов мы полагаем в значительно большей мере зависящим от уровня визуального восприятия и подготовленности учащегося, чем это считалось ранее или не предполагалось вообще.

> «Интуиция и интеллект являются в равной мере важными и в равной мере необходимыми способностями. Ни одна из них не имеет преимущественного положения в какой-либо человеческой деятельности; нет такой области человеческой деятельности, где не участвовала бы какая-либо из этих способностей. В основе механизма действия интуиции лежит способность воспринимать и понимать общую структуру конфигурации, тогда как интеллект направлен на выяснение особенностей отдельных элементов, явлений или событий в каждом отдельном контексте и на их определение "как таковых" ...

Интуиция и интеллект действуют не порознь, а почти всегда кооперативно. Если в процессе обучения мы пренебрегаем одной способностью в пользу другой или сознательно держим их на расстоянии друг от друга, то мы попросту калечим головы тем ученикам, которых призваны учить и воспитывать» [6, с. 41].

В процессе визуального анализа информационного сообщения формируется тактика переработки информации в соответствии с поставленными задачами. Это объясняется тем, что

«... приспосабливаясь к... широкому разнообразию видов структур, человеческий разум взял на вооружение две... процедуры – интуитивное восприятие и интеллектуальный анализ» [см. там же].

Этап мысленного составления плана работы является самым важным в ходе визуального анализа предъявленных данных.

Ученик должен:

1) определить порядок дальнейших действий,
2) постараться в уме свернуть некоторые из хорошо знакомых ему операций,
3) осуществить "прогонку" вариантов.

По своим целям и учебным возможностям этот этап следует отнести к поисковой деятельности.

Мы считаем, что некоторые особые приемы и навыки такой деятельности явным или скрытым образом "программируются" самой знаковой информацией.

Любая формула, рисунок или текст подразумевают подсказку, нужно лишь нацелить учащегося на поиск такой подсказки, дать инструмент к ее извлечению и применению.

Путь к этому лежит через воспитание визуального мышления.

Краткие итоги

Каждый геометрический или символический образ имеет определенную структуру, позволяющую зрительно выделить и проанализировать его логический "фундамент".

Подобная структура есть некоторая визуальная модель информационного сообщения, которую можно активно использовать в ходе решения поставленной задачи. Однако чтобы вложить в нее необходимое содержание, требуется достаточно высокая культура визуального мышления, образование важнейших параметров которого есть длительный и сложный процесс.

Вопросы, предлагаемые самой информацией, учителем или возникшие в голове ученика, концентрируют внимание учащегося на определенном фрагменте текста, деталях формулы или рисунка.

Детали, привлекшие внимание своей схожестью или различием, новизной или привычностью обозначения или оформления, могут побудить учащегося к преобразованию предъявленной информации.

Это повлечет за собой отыскание визуально определяемого ответа, нахождение скрытых в содержании необходимых сведений, для получения результата или постановки проблемы, неразрешимой имеющимися средствами.

Таким образом, имеется возможность учитывать различную эмоциональную и образовательную зрелость, интеллектуальный "порог" отдельных учебных групп, общую профессиональную направленность обучения.

§2. Способы представления учебной математической информации

Исходным толчком для начала мыслительной деятельности учащегося является предъявление ему некоторой информации. Это может быть объяснение или вопрос учителя, напечатанный учебный текст, чертеж или рисунок и т.д. Разумеется, каждый раз все это предлагается, для того чтобы ученик осмыслил данные, обнаружил связи между ними, осуществил необходимые преобразования и, в конечном итоге, получил искомый результат.

Составляющие подобного процесса отчетливо отражает определение, данное А.К. Тихомировым в книге «Информационные и психологические теории мышления»:

> «Информация – это... система знаков или символов; переработка информации – различного рода преобразования этих знаков по определенным правилам... Информационная модель... – сведения о задаче, представленные или накапливаемые (в виде нового описания) в памяти решающей системы» [183, с. 329].

Здесь мы ориентируемся на строго определенный вид информации – учебную знаковую информацию, предназначенную и направленную на усвоение содержания учебной теории и ее практических приложений.

Учебная знаковая информация, которая также есть система знаков (слов, формул, иллюстраций), призвана помочь учащимся воспринять материал, побудить их к поискам решений возникающих проблем.

> Это особенно важно – мы должны ориентироваться на значительные усилия самого ученика и не столько снабжать его запасом сведений, сколько организовывать, представлять возможности для их получения.

Обсудим те “элементарные” средства, с помощью которых передаются и воспринимаются учебные знания.

Доминирующим способом введения учебной информации является вербальный. При этом способе учащийся слушает или читает описание, включающее математические, химические, музыкальные или иные термины и их обозначения.

Законченный фрагмент информации, предъявленной вербальным образом, мы для краткости будем называть ТЕКСТОМ.

Сам способ такого введения данных здесь будет именоваться также словесным или описательным.

Другим способом представления учебной знаковой информации является так называемый визуальный или образный, наглядный, геометрический способ. При данном виде информационного сообщения его главная часть сосредоточена на рисунке, графике, наглядном пособии, экране.

Это может быть один кадр, последовательность изображений или сложно организованная модель. Основной упор во всех случаях делается на зрительно воспринимаемый образ.

Для краткости фрагмент информации, предъявляемый визуально, будем называть РИСУНКОМ (изображением, картинкой, иллюстрацией).

Многие науки имеют еще один специфический способ записи своего содержания, который мы называем формульным (синонимы – символьный, аналитический, знаковый). Он отличается от геометрического тем, что использует лишь стандартные обозначения из некоторого алфавита (списка) и имеет четкие правила организации. Ввиду особой важности различных формул для всех предметов естественно-научного цикла, а также для ряда гуманитарных дисциплин, мы выделяем этот вид записи особо.

Совокупность символов, фиксирующую связи между отдельными объектами предлагаемой информации с помощью общепринятых или специально введенных (например, стенографических) знаков, будем называть ФОРМУЛОЙ.

В процессе обучения все три способа подачи информации рассматриваются нами как относительно равноправные, взаимозаменяемые и постоянно действующие. Их можно назвать также языками предъявления (задания, введения) учебной информации.

Приведем пример введения одной и той же математической информации на всех трех языках.

Развернутые наименования теорем представляют собой пример вербального способа.

Так, теорему «Признак скрещивающихся прямых» можно предложить в развернутом виде:

«Теорема о двух прямых, одна из которых лежит в заданной плоскости, а вторая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой».

Данную информацию можно представить в виде формулы (цепочки формул), используя принятые обозначения: $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = M$, $M \notin a$.

Те же самые сведения можно представить с помощью рисунка (рис. 2.01).

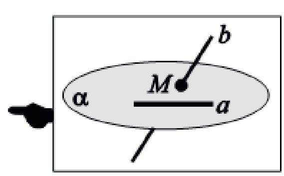


Рис. 2.01.
Рисунок к теореме
о скрещивающихся прямых

2.1. Геометрический способ

Геометрический способ предъявления учебной информации обладает богатыми возможностями, поскольку, как констатирует Колерс,

> «… восприятие не является результатом простой поточечной передачи изображения из рецепторов в мозг. При восприятии некоторой картины человек группирует одни ее части с другими частями, так что вся картина в целом воспринимается как нечто определенным образом организованное» [82, с. 26].

С помощью рисунка можно:

- ввести понятие, опираясь на визуальное восприятие;
- интерпретировать определение понятия;
- визуально представить термин;
- сопоставить слово и образ;
- вывести наружу скрытые закономерности;

Недаром многие преподаватели используют на уроках различные мнемонические процедуры и конструкции.

Например, многие учащиеся со слабой математической подготовкой плохо помнят значения функций углов

$$\mathbf{0^\circ},\quad \mathbf{30^\circ},\quad \mathbf{45^\circ},\quad \mathbf{60^\circ},\quad \mathbf{90^\circ}.$$

Специально оформленная таблица поможет им (рис. 2.02).

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sinα	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Рис. 2.02.

Таблица значений синусов углов
первой четверти единичной окружности

- представить понятие с помощью специального образа;
- изложить наглядно трудно воспринимаемые положения учебной теории;
- показать связи между понятиями;
- проследить ход рассуждений, приводящих к искомому заключению.

На рисунке 2.03 (см. также рис. II.08 на стр. 512) ход рассуждений представлен различными средствами: оттенком (цветом), акцентом на симметрию (указателями, стрелками), рядом чисел (столбиком цифр).

Анализируя этот рисунок, учащиеся вполне могут самостоятельно сделать вывод:

для острых углов

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha .$$

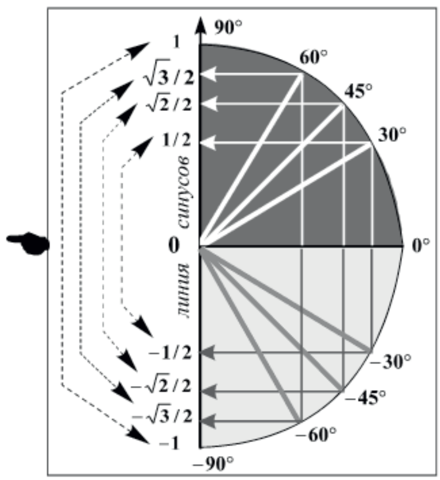


Рис. 2.03.
Иллюстрация к выводу формул приведения

- заменить абстрактные выкладки наглядным представлением факта;
- объединить факты учебной теории в единый зрительный образ;
- выявить подсказку к решению задачи;

Например:

“Сравнить объемы пирамид, при условии равенства их оснований” (рис. 2.04).

Подсказка здесь дается в тексте и на иллюстрациях.

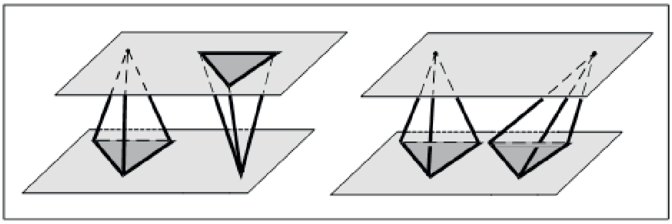


Рис. 2.04.
Изображение пирамид
с равными основаниями и общей высотой

- наглядно проиллюстрировать формулу (рис. 2.05.1).

Широко известна геометрическая интерпретация одной из формул сокращенного умножения: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Подобные визуальные идеи (модели) можно распространить и на большее число составляющих (рис. 2.05.2).

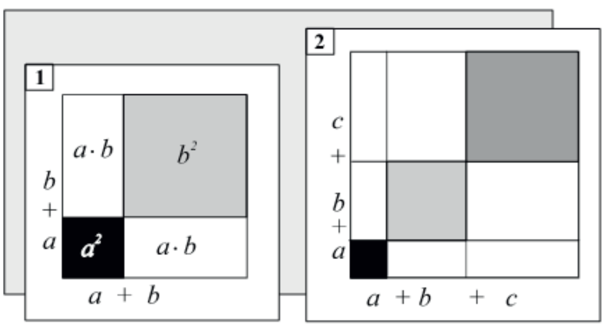


Рис. 2.05. Геометрическая интерпретация формул сокращенного умножения: $(a+b)^2$ (1) и $(a+b+c)^2$ (2)

Одним из главных отличий рисунка (как средства предъявления учебной информации) является неопределенность поставленной задачи.

«Ни само техническое умение создавать изображения, ни достоверная реальность образов не дают гарантий, что материал передает именно то, что нужно» [4, с. 168].

Рисунок нуждается в комментариях. Это может быть и описание (заголовок к предлагаемой иллюстрации), и формула, фиксирующая существенные моменты содержания.

Рисунок, несомненно, есть один из важнейших способов передачи знаний. Можно сказать, что хорошо составленные иллюстрации удачно “кодируют” знания, визуальные доводы служат “сигналами”. В таком случае рисунки приобретают значение, равное символическим и описательным способам изложения.

Л.С. Выготский в статье «История развития высших психических функций» [34А] пишет:

«Мы видим,… что рисование является графической речью, возникающей на основе словесной речи. Схемы, отличающие первые детские рисунки, в этом смысле напоминают нам словесные понятия, которые сообщают только существенные признаки предметов».

Игнорируя или недооценивая возможности изображений, предлагая ученикам небрежные или неквалифицированно выполненные иллюстрации, мы теряем многое.

Приведем достаточно красноречивый пример из статьи «Двойственная природа разума: интуиция и интеллект» [6, с. 22-42].

«Известная фигура Пифагора красива в том смысле, что дает ясное зрительное представление о тех отношениях, которые предстоит изучить – это треугольник, лежащий в центре фигуры, и три квадрата, приложенные к его сторонам (рис. 2.06-а).

Данная фигура, отображающая ситуацию решения математической проблемы, должна храниться в голове учащегося до самого конца процесса доказательства, оставаясь непосредственно связанной с каждым шагом доказательства до тех пор, пока учащийся не поймет, о чем идет речь. Однако вместо этого происходит нечто прямо противоположное.

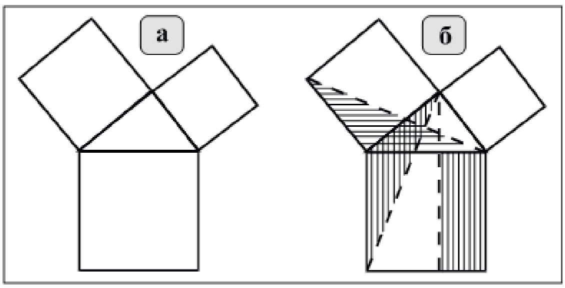


Рис. 2.06.
Иллюстрации к теореме Пифагора:
отражающие ее содержание (а), разрушающие ее идею (б)

Обычно учителя проводят три вспомогательные прямые, которые, словно пущенный в окно камень, разбивают структуру исходной проблемной ситуации или, точнее, вероятно, было бы сказать, перечеркивают изображение, которое предназначалось ученику для работы (рис. 2.06-б).

Это дополнительное построение, в ходе которого каждая из сторон прямоугольного треугольника как-то некрасиво соединяется с некоторой стороной одного из квадратов, образуя основание нового треугольника, портит изначальный замысел, воплощенный в фигуре Пифагора. Под действием этих новых загадочных форм исходный рисунок исчезает, но лишь для того, чтобы снова неожиданно возникнуть... в конце доказательства. Доказательство это весьма остроумно, но крайне некрасиво» [6, с. 35].

Что же происходит в мышлении учащегося, при изучении доказательств, «в которых происходит единое и согласованное изменение исходной конфигурации»?

> «Как и в первом случае, произошла перестройка первоначальной структуры, изменившая проблемную ситуацию, однако здесь перегруппировка произведена над структурой в целом. Она оставляет исходный рисунок видимым прямо на новом, так что сопоставление двух фигур – исходной и построенной – может быть произведено интуицией. Перед нами доказательство, которое математики называют “красивым”» [6, с. 38].

Замечательное доказательство теоремы Пифагора было известно еще в Древней Индии. Для этого в квадрате со стороной $a+b$ изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин a и b.

После этого писали только одно слово:

“Смотри!” (рис. 2.07).

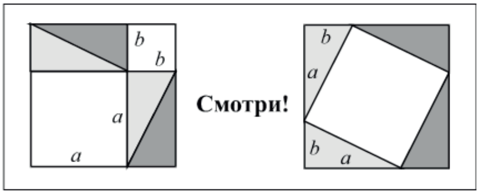


Рис. 2.07.
Древнее доказательство
теоремы Пифагора

В математике наиболее распространенными и важными случаями применения чертежа являются графики элементарных функций.

Сочетание точности в соблюдении их пропорций и конфигурации с предельной ясностью исполнения должно быть обязательным.

Например, геометрическое представление кубической функции требует внимания к ее поведению в окрестности нуля. График функции $y = x^3$ необходимо строить так, чтобы касательная в ее особой точке визуально воспринималась строго горизонтальной (рис. 2.08, в центре, см. также рис. V.16 на стр. 602).

Для восприятия деталей графика полезны:

- "точки опоры" в виде отдельных цифровых обозначений на осях координат,
- выделение самой кривой среди всех прочих вспомогательных линий и т.д. (рис. 2.08, справа и слева).

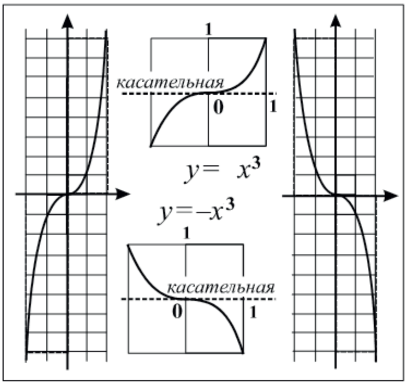


Рис. 2.08.
Важное условие
построения кубической параболы

«Математические чертежи, подобно произведениям живописца или поэта, должны быть красивыми. Идеи, как и краски или слова, должны гармонично соответствовать друг другу. Красота является ... пробным камнем; безобразной математике нет места в этом мире» [208, с. 28].

Несмотря на то, что полезность рисунка в обучении школьным предметам неоспорима, существуют определенные трудности из-за несогласованности в понимании его роли и терминологии.

Так, к примеру

- в учебнике географии постоянно предлагается разграничивать понятия: рисунок, фотография и чертеж;
- в учебниках же химии и физики подобное разграничение между рисунком и чертежом практически отсутствует.

В дальнейшем мы еще раз вернемся к этому вопросу.

Здесь же подчеркнем, мы понимаем термин "рисунок" как то, что можно увидеть, обозреть, воспринять как некоторый конкретный факт.

Термин "образ" имеет несколько толкований.

Художественный образ трактуется как «обобщенное художественное отражение действительности, облеченное в форму конкретного, индивидуального явления» [125], что бесспорно может применяться в обучении гуманитарных и естественнонаучных дисциплин

Преследуя цели активизировать и совершенствовать визуальное мышление учащихся в процессе обучения математике, мы принимаем интерпретацию данного термина и как

«вид, толкование; живое, наглядное представление о ком-(чем)-нибудь» [см. там же].

и вводим понятие визуального стандарта (стандартного образа или просто стандарта), который более подробно будет освещен во второй главе данной диссертации.

Заканчиваем мы обзор свойств рисунка как средства предъявления учебной знаковой информации и его роли в постижении ее содержания словами Гильберта [40, с. 6]:

«Руководствуясь непосредственным созерцанием, мы сможем уяснить многие... факты... и благодаря этому... изложить в наглядной форме методы исследований и доказательств».

2.2. Аналитический способ

Под аналитическим (формульным, символическим) заданием учебной информации понимается запись содержания фрагмента информации с помощью значков и букв. Следует разграничивать средства данного способа предъявления информации на символически формульный и символически наглядный.

К символически формульным отнесем такие средства оформления учебного текста, которые мало ассоциируются с наглядным представлением учащихся.

Например,

- алгебраические выкладки типа

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y} \text{ или } |x| = \begin{cases} x, \text{ при } x \geq \mathbf{0} \\ -x, \text{ при } x < \mathbf{0} \end{cases};$$

- знаковая "терминология" теории функций, подобная

$$x \in D(f) \qquad \text{или} \qquad y = f(x);$$

- теоретико-множественная символика типа

$$A \cap B \neq \varnothing \qquad \text{или} \qquad N \cup M = M;$$

- физические и химические символы

(например, $\vec{F}$ и $\mathbf{H_2O}$);

- нотные и функциональные обозначения музыкальной теории

(𝅘𝅥𝅯 или $D_{\mathbf{4}_3}$ – доминантовый квартсекстаккорд) и т.п.

Действительно, подобные символы (или цепочки их) плохо сопоставляются со зрительными и слуховыми представлениями. Они относятся к искусственно созданным обозначениям. Их написание и правила организации нуждаются в специальном запоминании, а применение – в соответствующей “тренировке”.

К символически наглядным средствам предъявления учебной знаковой информации отнесем символы, которые своими начертаниями (формой) дают возможность визуального восприятия их смысла.

Таким образом, символически-наглядные средства есть условные знаки – чувственные образы, которые имеют чувственно-наглядную форму и видимую связь между этой формой и смыслом, который они выражают.

В математике к ним можно причислить знаки монотонности, некоторые отношения между основными понятиями геометрии и т.д. Например, символ “$\nearrow$” в сочетании с обозначением функции ($f\nearrow$) дает представление о движении вверх (слева направо), возрастании.

Разделяя все средства символьного способа предъявления информации на упомянутые основные группы, можно изыскать возможность для лучшего запоминания и усвоения области их применения.

Не страшно, если учитель самостоятельно введет в употребление несколько “личных” понятных символов.

Однако при этом необходимо проявлять чувство меры. Важно также, чтобы ученик в любой момент мог письменно или устно расшифровать каждое из нестандартных обозначений.

В большинстве случаев “личные” символы предполагается употреблять для сокращения записей.

(Широко известны знаки подобные:] – пусть, дано; (•) – точка и т.п.).

По аналогии с чертежом отметим особые свойства символических образований сложной конструкции типа

- “многоэтажные” дроби,
- формулы логарифмической функции,
- символические задания сложной функции в математике,
- блок-схемы типа “цикл” и “ветвление” в информатике,
- структурные связи между химическими элементами в органике...

Все “жесткие” случаи каждого из языков предъявления учебной знаковой информации будут обсуждаться подробно в следующих разделах. Здесь же на одном примере (рис. 2.09.1-3) покажем, какие ошибки может делать ученик при восприятии небрежно оформленных знаковых структур.

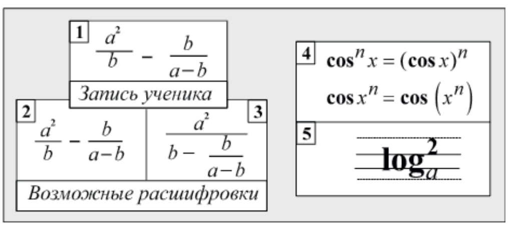


Рис. 2.09.

Неаккуратная запись алгебраического выражения (1)
и её возможные интерпретации (2-3),
примеры соблюдения расположения элементов в формулах (4-5)

Правильность понимания содержания подобных образований зависит от четкости написания – соблюдения “уровней” и “этажей” в расположении “деталей”, составляющих формулу (рис. 2.9.4-5).

Требуется научить учащихся анализировать “иерархию” элементов, входящих в такие формулы, что также является одним из объектов методики и будет освещено во второй главе данной работы.

Формализация аналитического языка с помощью символики – важная сторона обучения. Умение читать формулу, составленную из знаковых конструкций, является одним из общеобразовательных умений, закладываемых в школе.

Укажем на некоторые черты этого умения, за которыми надо следить особенно внимательно:

Независимость от обозначений.

Если на вопрос, что такое функция, ученик отвечает, что это $y = f(x)$, есть опасность, что он, встретившись с функциональными зависимостями между переменными, обозначенными непривычным образом, не сможет узнать самые простые вещи.

Правильная запись порядка действий.

Кроме общепринятых правил, позволяющих, к примеру, различать $\cos x \sin x$ и $\cos \sin x$, полезно применять специальные, указывающие порядок операций – оформление алгоритмов и программ, разумное использование скобок, обозначение промежуточных результатов.

Использование логических связок.

Употребление логических, математических и теоретико-множественных знаков как стенографических.

При целенаправленном обучении формирование умения видеть содержание в символических образах может дать инструмент к познанию.

«Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность по существу является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения» [177, с. 72].

2.3. Вербальный способ

К вербальному (описательному) способу предъявления учебной знаковой информации относится раскрытие ее содержания на родном языке. Представление знаковой информации вербальными средствами – задача чрезвычайно сложная. Требование детерминированности, однозначности понимания условия является основным. Текст должен быть рассчитан на уровень восприятия ученика, его предшествующую подготовку, запас терминов.

Даже такие “элементарные вещи”, как приставки и предлоги могут озадачить ученика (рис. 2.10), поэтому при малейшей возможности следует ***показывать*** “нюансы”, порождаемые ими (см. также рис. II.06 на стр. 510, в центре).

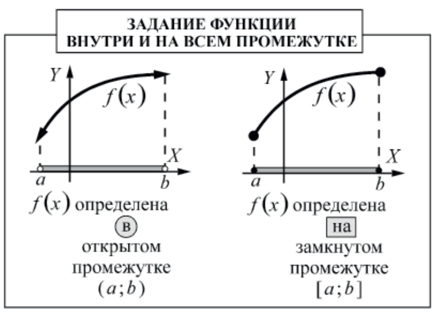


Рис. 2.10.
Иллюстрация “действия” предлогов
в описании математического объекта

Приведем пример того, с чем приходится сталкиваться нашим ученикам при чтении учебников и учебных пособий. В данном случае мы рассмотрим небольшой фрагмент текста учебника по географии для 6-го класса.

«**Масштабом** называют дробь, у которой числитель единица, а знаменатель – число, указывающее, во сколько раз расстояния на плане меньше, чем на самой местности... Чем больше число в знаменателе дроби, тем больше уменьшение...» [38].

Ни в самом тексте, ни на рисунках, прилагаемых к нему, нет ни одного примера записи масштаба в виде такой дроби. Масштаб записывается только как на рисунке учебника (рис. 2.11).

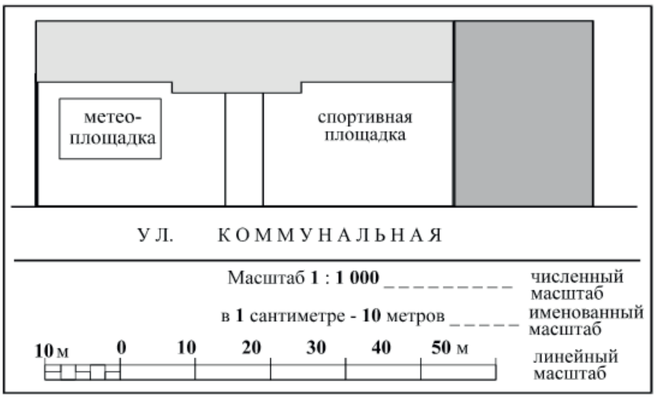


Рис. 2.11.

Иллюстрация к определению понятия “масштаб”
в учебнике географии для 6-го класса

Данный текст школьники читают тогда, когда представления об обыкновенных дробях, их видах (правильная и неправильная) еще не сформированы, поскольку в сентябре, как правило, идет повторение материала и восстановление утраченных за летние каникулы, умений и навыков за предшествующий класс школы. Действия над дробями с разными знаменателями, следовательно, и сравнение таких дробей изучаются гораздо позже.

Не сформировано у школьников и понятие обратной зависимости, поэтому фраза “Чем больше число в знаменателе дроби, тем больше уменьшение” также может оказаться непонятным для них. Обратим внимание также на то, что иллюстрация, способствует образованию неправильных представлений: начало отсчета сдвинуто так, что непонятно, откуда же собственно производится отсчет.

С помощью вербальных интерпретаций новых терминов, визуальных демонстраций структур незнакомых понятий можно хотя бы частично компенсировать несогласования между содержанием различных дисциплин.

Так, ранее приведенный пример из учебника географии для 6 класса можно было бы поддержать специальной иллюстрацией (рис. 2.12).

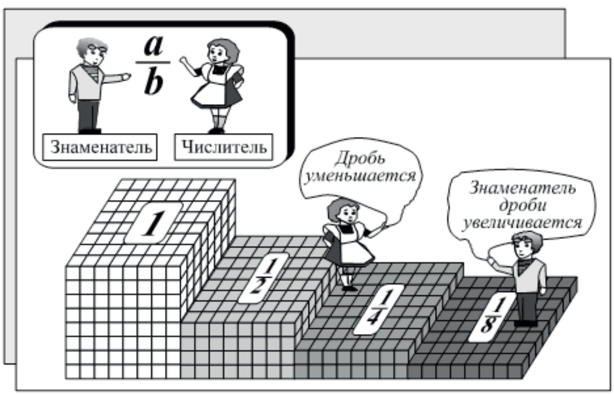


Рис. 2.12.
Возможная иллюстрация к фразе
«Чем больше число в знаменателе дроби, тем больше уменьшение»

Словесный способ предъявления знаковой информации предполагает выбор специальных терминов, составление определений, отработку формулировок теорем и правил. Каждый учитель знает, какую важную роль играет даже порядок слов в формулировке.

Требование ясности, четкости, недвусмысленности учебного текста является традиционным.

Меньше внимания уделяется использованию богатства родного языка для формирования правильных представлений, разветвленных и динамических ассоциаций, разгрузки памяти, повышения интеллектуального уровня учащихся.

Использование синонимов отнюдь не мешает точности и правильности применения специальной терминологии. Следует преодолеть боязнь называть по-разному одинаковые (или близкие) математические или иные понятия.

Нужно помнить, что в научной, справочной и учебной литературе

нет (и не может быть) полного единства в терминологии.

В основном это объект методики, поэтому здесь мы, продолжая аналогию с чертежом и "многоэтажной" формульной конструкцией, ограничимся одним из видов представления текстовой информации на родном языке учащегося – заголовка (наименования) к определенной порции его сообщения.

Заголовок – наименование к определенному фрагменту информационного сообщения – это особый вид словесных интерпретаций формулы или рисунка. В нем мы предполагаем явное отражение существа дела, краткость описания, понятность изложения.

Вслед за названием самого объекта могут следовать:

прилагательные, определяющие его свойства,

глаголы, описывающие его связи и т.д. и т.п.

Заголовок ***к каждой*** "порции" отдельного теоретического положения или практического задания – это не просто указание к действиям (типа: найди, упрости, вычисли, отметь и т.д.). Заголовком должна быть фраза, в которой самым ясным образом определяется существо дела. Например (рис. 2.13):

“Разложение числа на множители”,

“Вынесение общего множителя”,

“Основное свойство дроби ”, и т.д. (см. также рис. II.05 на стр. 509).

Рис. 2.13.

Примеры заголовков к иллюстрациям
отдельных положений учебной математической теории

Заголовок предлагает содержание информации и направляет ее перевод с одного языка предъявления на другие, предопределяя важный момент:

любое знаковое сообщение должно сопровождаться (предваряться) письменным или устным оформлением (интерпретацией).

Преобразование информационных блоков связано с осмыслением последствий изменения их структуры, укрупнения “элементарных единиц”, перераспределения ролей их отдельных фрагментов.

При этом вербализация умственных действий как бы переносится в мысленный план. Тем более, что учебная математическая (как и прочая) литература приучает читающего осуществлять такие действия “про себя”.

Различные формульные выкладки зачастую сопровождаются указаниями типа “Очевидно, что...”, “Осуществляя необходимые преобразования..., имеем...”, “Отсюда следует...” и т.д. и т.п. В процессе обучения требования подробных описаний, совершающихся трансформаций, перенос мысленных комментариев в устную речь обычно опускается, хотя каждый преподаватель стремится, чтобы его ученики владели таким переводом. Достижение этой цели мы видим в формировании техники таких переводов.

Краткие итоги

В заключение отметим следующее:

если образно принять, что картинка и формула есть как бы “аверс и реверс” письменного предъявления некоторой локальной идеи (факта, определения, утверждения, вывода), то необходимую связь между ними образует слово.

§3. Визуальные переводы учебной математической информации

В начальных параграфах настоящего исследования мы уточнили характер психической деятельности ученика, включаемой в понятие “визуальное мышление”, затем обсудили особенности изложения и оформления содержания учебного знакового материала. На данном этапе мы обращаемся к очередной задаче: выяснить взаимоотношения между различными способами работы с учебной знаковой информацией.

Понятие “визуальный перевод” в наших рассуждениях является центральным.

Под **визуальным переводом** мы подразумеваем ту умственную деятельность учащегося, которая осуществляется в ходе визуального восприятия начальных или промежуточных данных информационного сообщения путем расшифровки их с помощью запаса готовых, известных заранее визуальных форм, символических образований или терминов-наименований.

Уже здесь отметим немаловажное обстоятельство.

В зависимости от ситуации, целей и средств обучения каждый из способов предъявления информации может трактоваться неоднозначно.

> Текст может восприниматься как формула, если речь идет, к примеру, об анализе его структуры, выделении и отождествлении его объектов, что так характерно для уроков родного и иностранных языков.
>
> Рисунок также может интерпретироваться как некоторый символ.
>
> С другой стороны, в отдельных случаях формула выступает как рисунок или текст и т.д.

Таким образом, визуальный перевод (или, для краткости, просто перевод), есть не что иное, как установление связей между рисунком, текстом и формулой.

Цикличность обусловливается возможностью (а в большинстве случаев и необходимостью) сопровождения каждого из этапов приема, анализа и преобразования информации соответствующими словесными, формульными или иллюстративными “комментариями”. Несомненно, что этот процесс должен рассматриваться двусторонне.

Учитель рассказывает, объясняет.

Ученик смотрит и слушает, вникает и запоминает.

Однако в этой схеме, как известно, возможны вариации.

> Учитель превосходно владеет материалом, доходчиво объясняет содержание. Но слушатель не готов воспринимать его интерпретацию – нет прочной базы, не владеет “языком”, посредством которого излагается информация и т.д., и если (в силу каких-то обстоятельств) не учитываются возможности учащихся, то, как результат, следует “неудача обучения”.

То же можно сказать и об обратной стороне дела.

В книге «Педагогика математики» [177, с. 67] А.А. Столяр пишет:

> «Трудности, связанные с реализацией принципа сознательности, обусловлены отчасти... тем, что до сих пор недостаточно изучен механизм понимания. Мы по существу не знаем точно, что означает “понимать”... Заключение... что ученик понял (а не только знает) материал, является лишь правдоподобным, но не достоверным».

По-видимому, ни знания, ни умения, ни даже они вместе не являются гарантией понимания.

> Можно знать, для чего предназначен, как работает, какую продукцию может изготовить тот или иной механизм, можно уметь обращаться с ним. Но это еще не означает понимания принципов его работы, его скрытых, подчас неожиданных возможностей эксплуатации, действия в нестандартной ситуации.

Так, например, нередки случаи, когда учащийся с хорошей слуховой памятью достаточно точно цитирует несложный фрагмент вербального математического текста (определение или теорему), но затрудняется в применении его положений, не владеет инструментами к выявлению его содержательной стороны, основы.

Один из путей решения проблемы понимания мы видим в использовании различных языков предъявления информации и развитии навыков перевода с одного языка на другой. Рассмотрим некоторые из возможных отношений между текстом, рисунком и формулой.

3.1. Вербализация и визуализация

Проанализируем изложение одной из геометрических теорем в различных учебных пособиях, чтобы акцентировать внимание на том общем, что присуще традиционным способам изложения учебного теоретического материала.

ПРИМЕР 1. *Теорема 10.2. (признак параллельности прямой и плоскости).*

> «Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в ней, то она параллельна и этой плоскости» [132, с. 57].

ПРИМЕР 2. *Теорема 1. (признак параллельности прямой и плоскости).*

> «Пусть прямая a не лежит в плоскости π. Если в плоскости π

есть прямая b, параллельная прямой a, то прямая b параллельна плоскости π» [12, с. 82].

ПРИМЕР 3. *Теорема 15.2. (признак параллельности прямой и плоскости).* «Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости» [1, с. 159].

Хотя все три текста дают один и тот же ясный визуальный образ, даже эта несложная теорема совсем не просто усваивается учащимися.

В примерах 1 и 3 вся информация дается в одном предложении сложной структуры. Для понимания смысла каждого из них (т.е. для понимания их содержания) необходима достаточно высокая культура и навык чтения подобных текстов.

В примере 2 структура более четкая: в первом предложении определяются основные объекты, и только затем описывается третий, после чего следует вывод.

Однако символ “π”, обозначающий здесь простейшее геометрическое понятие “плоскость”, может внести путаницу в головы наших учеников (привычно воспринимать греческую букву π как радианную меру угла).

Не все мо гут сразу отождествить его с текстом и записать формулу (рис. 3.01):

$$\left.\begin{array}{c} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \pi$$

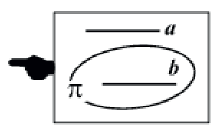


Рис. 3.01.
Рисунок к признаку параллельности прямой и плоскости

Подобные тексты порождаются требованиями определенного уровня строгости введения математических определений, т.е. соблюдения четкости, точности, полноты, непротиворечивости и т.д.

Как результат специфика математического изложения должна определять:

знание вида тех или иных фигур (символов),

умение выделять их среди множества объектов данной природы,

навыки изображения их, понимание как эти изображения строятся

и еще, к тому же, решать разнообразные задачи.

Обратим внимание на важное обстоятельство, столь характерное для предметов математического цикла.

Каждую новую теорему учебника обычно сопровождает "директива" учителя: "Выучить формулировку и доказательство теоремы №...".

Ученик, занимаясь дома по одному из рекомендованных учебных пособий, усваивает не столько само содержание, сколько все особенности изложения (порядок слов, их соподчинение, обозначения и т.п.), принимая именно их за основу.

Ввод теоремы (определения, следствия) жестко закреплен реализованной в тексте конструкцией "посылка-заключение".

Подобные тексты выступают как отдельные самостоятельные (изолированные) фрагменты учебной теории, психологически обусловливая дискретность восприятия содержания текста параграфа в целом. Непрерывность в осознании идей и методов формируется в лучшем случае при обобщении, обзорном повторении.

Нумерация теорем еще более способствует дроблению восприятия, одновременно обезличивая каждое из математических высказываний. К тому же некоторые авторы выносят теоремы в раздел задач, которые не всегда решаются, что значительно затрудняет их применение в конкретной ситуации.

Таким образом, теоретическая часть курса выделяется из всей массы учебного материала в некоторую особую подсистему.

Она изолируется от прочих видов учебной математической информации (задач, упражнений, вопросов и проблемных ситуаций) не только по своему способу предъявления, но и по целям, принципам их реализации.

"Моменты" (этапы) процесса познания при изучении теорем вынуждено "строятся" по-иному, нежели вся основная учебная деятельность.

Тем самым как бы намеренно организуется разрыв между теорией и практикой – наша "математическая щепетильность" оборачивается против нас самих.

Потребность думать, наблюдать, искать, проявлять самостоятельность у учащихся обычно ослабляется или вообще исчезает при введении теоретических положений курса.

Теоремы предлагаются для принятия к сведению, без включения активного мыслительного действия, без поисков, ошибок, нахождения выходов из тупиковых ситуаций.

Есть готовый текст и нужно лишь разобраться (если сможешь!) и выучить, что написано в учебниках или тетрадях.

Требование описания самими учащимися подобных математических ситуаций обычно "опускается".

Практически оно невыполнимо даже на основе более удачных, чем приведенные выше, текстов из-за отсутствия навыков перевода визуальных данных на вербальный способ их задания и наоборот.

В лучшем случае такой результат приходит гораздо позднее, чем этого требует процесс обучения. Следовательно, помимо проблемы изложения учебного знакового материала здесь налицо опять-таки проблема перевода.

Перевод слова в образ может сопровождать все основные этапы изучения вербального фрагмента.

При этом значительно возрастают требования к выполнению рисунка-иллюстрации.

Хороший рисунок "молчит, но говорит" (*Tacet, sed loquitur*), помогая усвоению содержания текста.

Действительно, геометрическая интерпретация данных позволяет: охватить содержание информации "в целом",

- выделить стандартные визуальные образы (рис. 3.02.1),
- определить общие или различные элементы, с помощью которых можно выйти на правильное решение (рис. 3.02.2),
- обобщить на уровне зрительного восприятия многие теоретические положения (рис. 3.02.3, см. также рис. II. 16. на стр. 520).

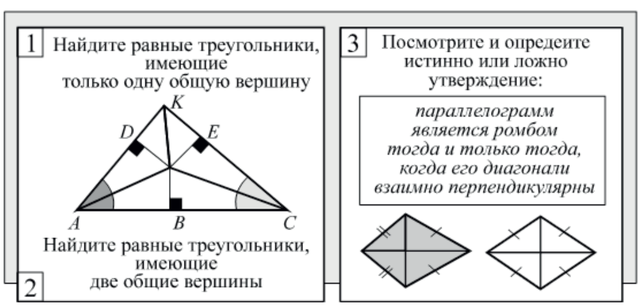


Рис. 3.02.

Визуальные задания: на анализ данных рисунка (1-2), на проверку по рисунку истинности теоретического утверждения (3)

Этот момент мы полагаем чрезвычайно важным. Он создает необходимую основу для взаимно-обратного перевода с “языка слов” на “язык зрительных образов”.

Приведем прекрасные рекомендации, которыми предваряет одно из заданий заочная физико-математическая школа при МФТИ.

> «Выполняя чертеж (рисунок), стремитесь сделать его соответствующим условиям задачи...
>
> Хороший чертеж – это удобный для восприятия наглядный способ записи условия... он может стать помощником в решении ... подсказать правильный ход рассуждений. В то же время даже самый аккуратный... чертеж сам по себе ничего не доказывает. Все, что “увидено” из чертежа должно быть обосновано соответствующим выводом» [107, с. 3].

Чертеж (как рисунок, иллюстрация) позволяет:

- охватить содержание информации “в целом”,
- выделить основополагающие учебные стандарты,
- определить особые (общие или индивидуальные) элементы, с помощью которых можно получить подсказку к решению,
- создать на уровне зрительного восприятия предпосылку к усвоению теоретического положения.

Рассмотрим пример. Ученику предлагается следующая задача:

> “В треугольнике *ABC* биссектрисы углов *A* и *C* пересекаются в точке *O*, через которую проведена прямая *DE*, параллельная *AC*. Доказать, что длина отрезка *DE* равна сумме отрезков боковых сторон, прилежащих основанию *AC*”.

Текст достаточно велик, чтобы можно было благополучно охватить содержание целиком, непосредственно из него делать какие-то выводы.

Переведя текст в картинку (рис. 3.02.2), ученик имеет визуальную интерпретацию словесного описания в свернутом, но наглядном виде.

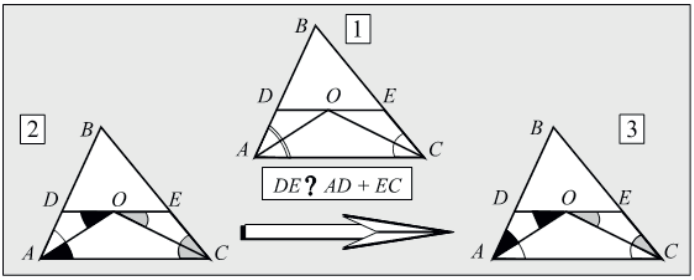


Рис. 3.03.
Геометрическое представление
текста учебной задачи (2) и плана её решения (1) $\Rightarrow$ (3)

Составляя план решения задачи и обосновывая результат, ученик продолжает работать с рисунком, по которому можно проследить ход его мысли (рис. 3.03.1 и 3.03.3).

Однако догадаться о возможности и необходимости преобразования рисунка, для того чтобы ответ стал видимым, могут не все. Нужны определенные ориентиры и алгоритмы для подобной деятельности.

Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости разработки методических приемов перевода вербальной информации на язык образов. И отсюда же естественным образом вытекает соответствующая методическая проблема – создание класса учебных задач, в которых исходной посылкой является рисунок.

Геометрическая интерпретация данных при изложении математического материала обычно применяется либо в качестве иллюстрации того или иного положения теории, либо демонстрации содержания конкретной учебной задачи. Однако на самом деле, ее роль более многогранна.

Американский исследователь М. Иден достаточно четко формулирует существенное свойство визуальной информации (в его обозначении – письменной речи):

> «Легче поддается изучению письменная речь. Она достаточно устойчива и, ... является своим собственным визуальным предоставлением...
>
> Она позволяет людям обмениваться с помощью зрительных образов по существу той же информацией, которой они могли бы обмениваться в устном разговоре» [74, с. 174].

Среди многих аспектов использования картинки (чертежа) можно добавить к уже перечисленным (см. стр. 47-49) следующие:

- картинка как разъяснение содержания фрагмента учебного текста;
- картинка как решение определенного вопроса;
- картинка как макет для разрешения поисковой ситуации, средство выхода из тупиковой ситуации, когда все формульные или вербальные средства исчерпаны;
- картинка как собирательный образ нескольких фактов математической учебной теории;

Например, образ, представленный на рис. 3.04, порождается соответствующим текстом: "медиана треугольника делит его на две равновеликие части".

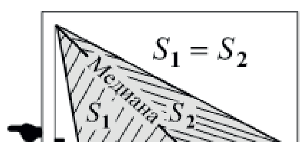


Рис. 3.04.
Иллюстрация свойства медианы треугольника

Как результат данный образ представляет собрание фактов:

медиана, опущенная из вершины треугольника,
делит его противоположную сторону на две равные части,
а сам треугольник – на два таких, площади которых равны.

Данный пример лишний раз убеждает в том, что рисунок, изображающий даже частный на первый взгляд случай, может нести в себе информацию, свойственную полному объему понятия.

Аналог этому можно найти у Биркгоффа [18, с. 72]:

> «Любая ... форменная одежда – стюардессы авиалайнера, официанта, железнодорожного служащего или полицейского – это знак, который показывает нам все многообразие связей этого человека с нами и обществом, знак очень точный, ясный и потому экономичный в смысле “спрессованности” огромного объема информации, содержащегося в нем».

- картинка как материал для формирования параллелей и аналогий.

Представление о сложности создания визуальных аналогий можно почерпнуть в книге Бернана Ноэля «MAGRITTE»:

> «Аналогия – творческое средство; оно состоит в сходстве отношений; от природы этих отношений зависит сила или слабость сотворенного образа. Образ не создается, если сравниваются (всегда приблизительно) две реальности, не имеющие между собой никаких отношений» [122, с. 60].

Этот сложный и глубокий вопрос выходит за рамки данного исследования, однако укажем, что ценность его в обучении несомненна.

> «В какой степени полезны модели? Интересно, что модели очень часто помогают в работе, и большинство преподавателей физики пытаются учить тому, как пользоваться моделями, чтобы выработать хорошую физическую интуицию. Но всегда выходит так, что величайшие открытия абстрагируются от модели, и модель оказывается ненужной. Максвелл создал электродинамику, наполнив пространство массой воображаемых шестеренок и зубчатых колесиков. Но колесики и шестеренки мы отбросили, а теория осталась. Дирак

же открыл правильные законы релятивистской квантовой механики, просто угадав уравнение» [186, с. 49].

3.2. Рисунок – формула – текст

Перейдем к следующей визуальной комбинации. Обсудим комбинацию “рисунок → формула”, роль которой особенно велика в предметах математического цикла.

В книге «Язык, музыка, математика» [28] приведены семь специально оформленных таблиц чисел натурального ряда от единицы до ста. Авторы пишут:

«Эти таблицы говорят сами за себя. При взгляде на них становятся заметным многие важные свойства делимости».

Читателю нетрудно догадаться – нужно, глядя на определенную таблицу, сформулировать важное свойство делимости натуральных чисел.

Практически здесь предлагается – “*exipsa fonte bibere*” –

испить из самого источника.

Обсудим фрагмент одной из таких таблиц (рис. 3.05, слева).

На этой части таблицы выделены столбики чисел, оканчивающихся на **2**, **4**, **6**, **8** и **0** (рис. 3.05, слева).

Продолжая процесс визуального анализа левой таблички, мы извлекаем из нее дополнительные сведения-подсказки и оформляем свои догадки словами-терминами (числа четные) (рис. 3.06).

Провести очередное исследование и оформить заключение можно так, как показано на рис. 3.07 (см. также рис. II.13 на стр. 517).

1	$\boxed{2}$	3	$\boxed{4}$	5	$\boxed{6}$	7	$\boxed{8}$	9	10
11	$\boxed{12}$	13	$\boxed{14}$	15	$\boxed{16}$	17	$\boxed{18}$	19	20
21	$\boxed{22}$	23	$\boxed{24}$	25	$\boxed{26}$	27	$\boxed{28}$	29	30
31	$\boxed{32}$	33	$\boxed{34}$	35	$\boxed{36}$	37	$\boxed{38}$	39	30
41	$\boxed{42}$	43	$\boxed{44}$	45	$\boxed{46}$	47	$\boxed{48}$	49	50

1	2	$\boxed{3}$	4	5	$\boxed{6}$	7	8	$\boxed{9}$	10
11	$\boxed{12}$	13	14	$\boxed{15}$	16	17	$\boxed{18}$	19	20
$\boxed{21}$	22	23	$\boxed{24}$	25	26	$\boxed{27}$	28	29	$\boxed{30}$
31	32	$\boxed{33}$	34	35	$\boxed{36}$	37	38	$\boxed{39}$	30
41	$\boxed{42}$	43	44	$\boxed{45}$	46	47	$\boxed{48}$	49	50

Рис. 3.05.

Числовые таблицы в книге «Язык, музыка, математика»

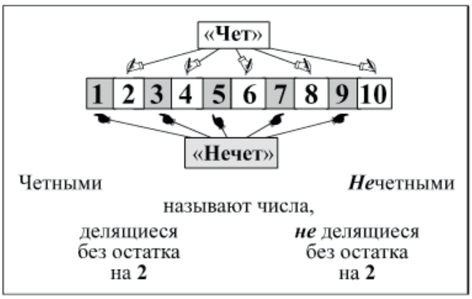


Рис. 3.06.

Начальное знакомство с понятием (вверху),
разъяснение терминов (в центре) и введение формул (внизу)

Число	Сумма цифр числа
3	**3**
6	**6**
9	**9**
12	**1 + 2 =**
15	**1 + 5 =**
18	**1 + 8 =**
21	**2 + 1 =**
24	**2 + 4 =**
27	**2 + 7 =**

1	**2**	□	**4**	**5**	□	**7**	**8**	□	**10**
11	□	**13**	**14**	□	**16**	**17**	□	**19**	**20**
□	**22**	**23**	□	**25**	**26**	□	**28**	**29**	□
31	**32**	□	**34**	**35**	□	**37**	**38**	□	**30**
41	□	**43**	**44**	□	**46**	**47**	□	**49**	**50**

Сумма цифр числа, делящегося на **3**, делится на □

Число	Сумма цифр числа
30	**3 + 0 = 3**
33	
36	
39	
42	
45	
48	
51	
54	

Рис. 3.07.

Карточка, организующая ситуацию учебного поиска
для вывода признака делимости на **3**

Комбинация “рисунок $\rightarrow$ формула” позволяет расширить возможности символически-наглядного способа представления информации.

Так, к примеру, специальным образом распределяя символы, входящие в формулу можно составить рисунок, который позволяет:

- организовать поисковую ситуацию, основанную на анализе данных рисунка-иллюстрации (рис. 3.08, см. также рис. I.10 на стр. 488 и рис. III.03 на стр. 549);

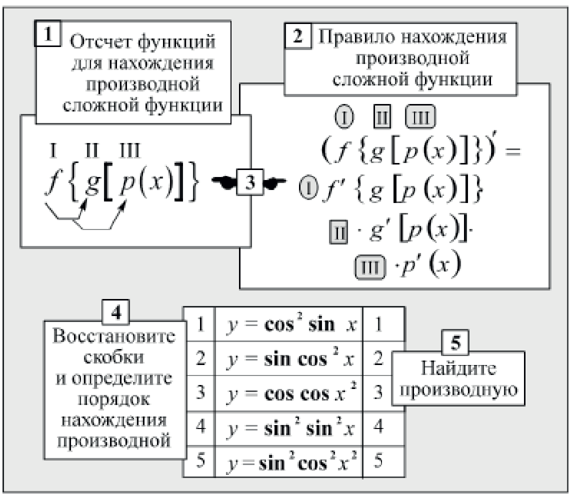


Рис. 3.08.
Визуализация преобразования формулы сложной функции
в период формирования начальных представлений
о нахождении ее производной

- разобраться в тонкостях взаимосвязанных операций (рис. 3.08.1-2);
- оформить структуры, направленные на формирование алгоритма (рис. 3.08.3);
- применить алгоритм в соответствующих ситуациях (рис. 3.08.4-5).

Невнимание к потребностям визуального мышления школьников приводит к тому, что задания типа:

“Скажите, о чем говорится в задаче?”,

“Определите, что изображено на картинке?”,

“Уточните, чему посвящено содержание теоремы?”

часто ставят их в тупик.

На вопрос

> “Возникают ли в вашей учебной деятельности ситуации, когда преподаватель спрашивает, а вы даже не знаете, о чем нужно говорить?”

ответ (во все годы и в различных группах) однозначен:

“Почти всегда”.

Данное явление объясняется тем, что учащиеся не умеют из информации, предъявленной им тем или иным образом, выявить понятие, являющееся центральным, т.е. осуществить хотя бы частичный перевод.

Такой перевод станет возможен, если учащийся сумеет произвести

> «разбиение изучаемого материала на небольшие порции по смысловому содержанию с выделением опорных пунктов в форме тезисов, заголовков, вопросов» [177, с. 79].

Применительно к основной поставленной в данной работе задаче (обосновать и осуществить объединение трех способов предъявления учебной знаковой информации) данное положение будет трактоваться как основа для перевода.

Мы полагаем, что не только для запоминания, но и для понимания содержания учебной задачи, полезно сформировать у учеников умение разбивать предлагаемую информацию на порции, для того чтобы выделить объект, определить “радиус его действия” и затем уже описать сопутствующие явления.

При перечисленных условиях, которые автор «Педагогики математики» сформулировал как основу для запоминания (а мы принимаем и как руководство к пониманию), должны более успешно протекать процессы осмысления и усвоения учащимся учебного знакового материала.

Разбор любой визуальной задачи можно начинать в рамках известной конструкции Пойя: Что? Где? Когда? (Какой? Почему? и Как?) [16, 132].

Действительно, к примеру, описание свойств изображенного на некотором рисунке объекта должно, прежде всего, начинаться с определения:

“ЧТО задано?” (О чем говорится?).

Именно этот вопрос вызывает наибольшие затруднения.

Учащийся не понимает, что на самом деле его спрашивают:

“Что здесь изображено (записано)?”

А раз неясен изначальный вопрос, то отсюда, как следствие, и непонимание, в каком направлении проводить анализ данных, и требование описания свойств данного понятия им не выполняется

Подобная ситуация может возникнуть при решении задачи, посвященной вопросу о сумме трех векторов, направленных от центра тяжести треугольника к его вершинам, представленной на рисунке 3.09.

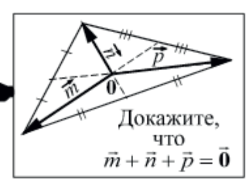


Рис. 3.09. Иллюстрация к задаче о центре тяжести треугольника

Желая помочь ученику, преподаватель спрашивает:

“Что рассматривается?”.

Это трудный вопрос – на рисунке много визуально определяемых объектов, классифицировать которые можно по разным признакам. Распознать сразу в каком направлении вести исследования мешает возможная альтернатива, которая, как правило, и создает соответствующий "тупик" в диалоге.

Следующим по порядку идет ГДЕ-вопрос.

В предлагаемом ниже примере он может быть поставлен так :

1. На каком из участков области определения функции ее график совпадает: с параболой?

   с прямой $y = x$?

   с прямой $y = \mathbf{1}$?

1. На каком отрезке функция возрастает?
2. В какой точке обращается в нуль (рис. 3.10)? и т.д.

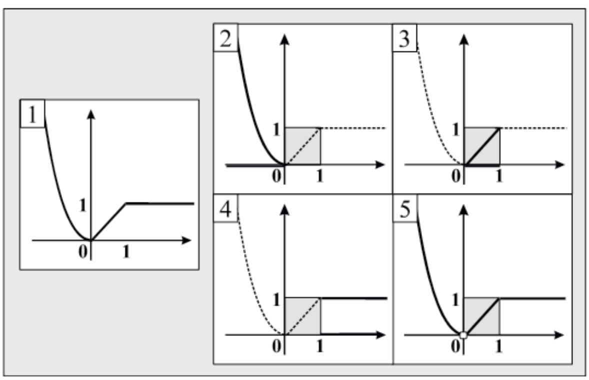


Рис. 3.10.

Иллюстрация к ГДЕ-вопросу о поведении функции

КОГДА-вопрос предполагает в ответе определенное мастерство описания, квалифицированное подведение итогов наблюдения и анализа. Для того же примера (рис. 3.10):

когда x стремится к $\mathbf{0}$ слева, функция $f\left(x\right)$ стремится к $\mathbf{0}$ сверху (убывает, оставаясь положительной).

Таким образом, все сводится к умению учащихся понимать и выстраивать словесные, а затем или же одновременно и формульные описания визуальной информации по определенному алгоритму.

У Пойя [133, с. 103] эти рекомендации несколько расширены:

«Ваши лучшие пять друзей: Что? Почему? Где? Когда и Как? Если вам нужен совет обратитесь к Что, обратитесь к Почему, обратитесь к Где, Когда и Как – и больше ни к кому не обращайтесь».

Здесь, на наш взгляд, должно в первую очередь сработать начальное “звено цепочки”, с неизменно заложенными в ней связями:

картинка–наименование–формула.

Все это мы рассматривали со стороны ученика.

Теперь обсудим эту же проблему со стороны учителя.

При постановке вопросов полезно учитывать положение Стила Белнапа (из книги «Логика вопросов и ответов» [16, с. 29]):

«По числу предоставляемых альтернатив вопросы можно разбить на два класса. В один класс попадают вопросы, которые задают небольшое или… ограниченное число альтернатив, а в другой – вопросы, которые задают бесконечное или, по крайней мере, большое число альтернатив».

Например, отвечая на первый вопрос рисунка 3.11, углы “**1**” и “**2**” можно охарактеризовать как равные, тупые, вертикальные и т.д. В школьной практике подобные альтернативы весьма полезны – каждый

Рис. 3.11.
Задача, предлагающая в ответах конечное число альтернатив

ученик может дать свой ответ или принять точку зрения другого. При этом учитель имеет возможность получить информацию о полноте и точности их представлений.

Итак, изучение картинки сопровождается серией вопросов. Однако если вопрос содержит слишком большое число альтернатив, то он ставит ученика в тупик. Следовательно, необходимы вопросы, которые предусматривают определенные, достаточно четкие альтернативы.

Такие вопросы могут формироваться принципами, изложенными Пойя [133, с. 14]:

> «Характерные черты, общие для всех вопросов и ответов таковы: здравый смысл и общность. Будучи выведенными из простого здравого смысла... они могут сами собой прийти в голову ученику. Будучи общими, они оказывают ненавязчивую помощь, они просто дают общее направление, оставляя учащемуся обширное поле деятельности».

Как показала практика, отказ от использования теоретико-множественной символики большого облегчения в обучение не принес.

> Учащийся, живущий в современном мире, волей-неволей вынужден применять различных символы, аббревиатур в повседневной жизни.
>
> Лишая преподавание его важнейшего инструмента – символьного способа предъявления информации, уменьшая поле его действия и значение, мы, по-видимому, противоречим возникающим новым способам общения.

При целенаправленном обучении формирование умения видеть в символических образах содержание может дать инструмент к познанию.

«Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность по существу является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения» [177, с. 72].

Геометрическая интерпретация данных с параллельной фиксацией их в виде цепочки символов позволяет составлять план описания рисунка (иллюстрации, чертежа).

Так, к примеру, действуя по принципу "вижу-пишу-говорю", можно обосновать все логические переходы в решении задачи:

"Дать определение возрастающей на заданном промежутке функции по рис. 3.12".

Если ученик применит алгоритм "Что? Где? Когда?" при переводе на символический язык, то он сможет фиксировать:

$f(x)\uparrow$, если

а) $x_1, x_2 \in [a; b]$;

б) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

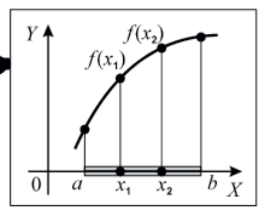


Рис. 3.12.
Иллюстрация,
для составления определения
возрастающей функции

Несмотря на то, что переход от рисунка к формуле наиболее прост, не всегда такой рисунок в тексте задан.

Следовательно, нужно разработать такую методику, которая направляла бы ученика как можно чаще переводить формульную информацию в геометрический образ и уже от него переходить к формуле-результату.

Ярким примером такой методики является часто применяемый учителями способ получения общего решения тригонометрического уравнения.

Например, для решения уравнения $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, рекомендуется

сначала изобразить соответствующие точки на тригонометрическом круге (рис. 3.13),

затем записать решение в виде формулы: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$

или $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k \ (k \in Z)$.

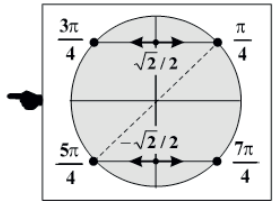


Рис. 3.13. Геометрическая интерпретация решения тригонометрического уравнения

К данному вопросу мы вернемся в дальнейших параграфах данного исследования.

Здесь же для полноты общей картины кратко обсудим отношение “формула → рисунок”.

Как мы уже сказали, переход от рисунка к формуле осуществить достаточно легко. С переходом от формулы к рисунку дело обстоит значительно сложнее. Здесь совершенно необходимо абстрагирование от конкретных условий.

Продемонстрируем этот процесс на примере следующей задачи:

“Выяснить, какое из трех чисел больше: $\mathbf{3}^{5/4}$, $\mathbf{3}^{\sqrt{2}}$ или $\mathbf{3}^{3/2}$?”.

Что может и что должен увидеть ученик в ряду заданных чисел?

Явным образом просматривается общее основание – число **3**, все остальные знаки – показатели его степеней. Требование выстроить искомые числа ($\mathbf{3}^{5/4}$, $\mathbf{3}^{\sqrt{2}}$, $\mathbf{3}^{3/2}$) по принципу сравнения, также вполне очевидно.

Исходные данные на деле распределяются в последовательности: $\mathbf{5/4 = 1{,}25}$, $\mathbf{\sqrt{2} \approx 1{,}4}$, $\mathbf{3/2 = 1{,}5}$.

Чтобы ответить на сам вопрос задачи, достаточно извлечения фрагмента теории, который позволит получить результат с помощью визуально-логических умозаключений, а не путем вычислений (рис. 3.14, см. также рис. III.02 на стр. 548).

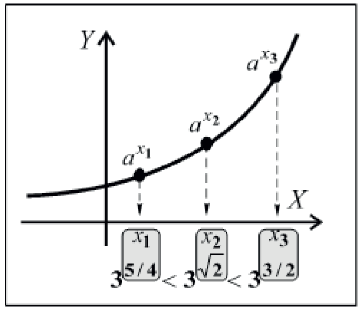


Рис. 3.14.
Геометрическая интерпретация решение задачи на сравнение чисел

Абстрагирование в большинстве подобных случаев можно осуществить с помощью введения стандартного визуального образа, связи между элементами которого дадут необходимые для решения действия. В наших исследованиях этот момент составления визуальной модели мы назвали “Анализом”.

Итак, имеем комплекс “формула $\rightarrow$ рисунок”.

Его анализ полезен еще и тем, что он одновременно реализует решение в виде постановки отдельных конкретных исходных данных в полученную (визуально) формулу.

Данный алгоритм позволяет активно использовать стандартные зрительные образы, образуя у ученика прочный навык извлечения их из памяти и применения при решении учебных задач.

Здесь мы явным образом применили принцип “геометрического познания” (по терминологии Биркгоффа, автора книги «Математика и психология»). По его мнению

> «Блестящие достижения греческой математики зависели от сочетания логики со зрительным воображением, без предпочтения той или другой составляющей» [18, с. 39].

При переходе от текста к формуле (особенно при изучении математики) активным образом работает абстрагирование. Обратимся к определению абстрагирования, взятого из «Педагогики математики»:

> «Абстрагирование – это мысленное отвлечение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных свойств рассматриваемых объектов или отношений и отбрасывание... этих несущественных свойств» [177, с. 24].

Например, решая задачи конкурса «Кенгуру», его участники в каждой задаче должны, учитывая реальные или искусственные условия, положенные в основу ее сюжета, абстрагироваться от конкретной ситуации.

Избыточность и недостаточность “информации”, поставляемой, к примеру, рисунком 3.15, направлена на дифференциацию данных по степени существенности их вхождения в условие задачи.

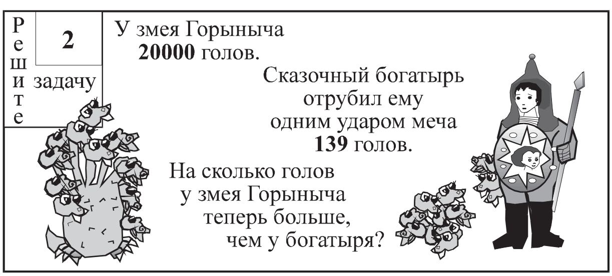


Рис. 3.15.

Иллюстрация к тексту задачи о змее Горыныче и богатыре

Ясно, к примеру, что “портрет дамы сердца” рыцаря на его щите к условию задачи непосредственного отношения не имеет, точно так же, как несущественным является количество “живых и мертвых” голов первого персонажа, тогда как у второго она только одна.

Подробно такие условия математических заданий будут обсуждаться нами далее. Здесь же приведем соответствующий пример.

Задача. “Какова область определения функции $y = \mathbf{log}_5^5 \, \mathbf{log}_{0,5} x$?”.

Для того чтобы понизить уровень сложности поиска, необходимо учесть (рис. 3.16):

– степень функции $\mathbf{log}_5 \mathbf{log}_{0,5} x$ в данном случае на ее область определения не влияет:

$$y = \mathbf{log}_5^5 \left(\mathbf{log}_{0,5} x \right) = \left[\mathbf{log}_5 \left(\mathbf{log}_{0,5} x \right) \right]^5,$$

– основания логарифмов существенны только лишь в приближенном оценочном значении по отношению к числовому “эталону” (больше или меньше единицы):

$$y = \mathbf{log}_a \mathbf{log}_b x : \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases},$$

– и, главное, чрезвычайно важным является не только последовательность проведения экспертных оценок, но и условия их совместимости (рис. 3.16).

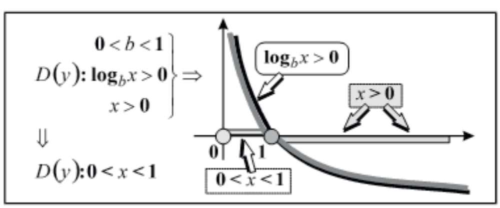


Рис. 3.16.
Перевод формулы в рисунок
при нахождении области определения
функции $y = \mathbf{log}_5^5 \, \mathbf{log}_{0,5} x$

С позиций того, что

> «абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что подлежит абстрагированию» [177, с. 24],

мы можем составить следующий план перехода формулы в картинку:

а) определение общего (в большинстве случаев одинакового),

б) отброс несущественного в этом общем (в ряде случаев – конкретных числовых значений),

в) переход к визуальному образу (выявление структурных связей),

г) подстановка изъятых данных (возвращение, внедрение несущественного, конкретного),

д) получение ответа.

Таким образом, мы приходим к схеме – алгоритму расшифровки формульной информации визуальными средствами (рис. 3.17).

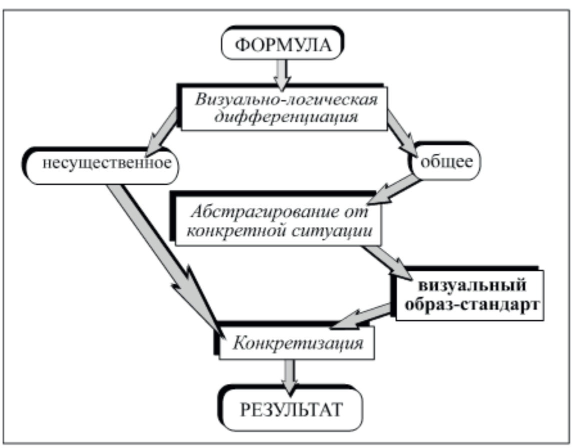


Рис. 3.17.
Схема визуализации формульной информации

Краткие итоги

Решение всех выдвинутых проблем основано на следующем.

Многообразие способов предъявления учебной знаковой информации, различных приемов их сочетаний лежит в основе эффективности процесса обучения в школе.

Основа любого умения есть понимание. Чтобы понять, нужно знать: что искать, где искать и как искать. В связи с этим вырисовывается целый спектр задач методического характера.

Главная из них – разработка методики перевода с одного языка предъявления информации на другие. Эта задача подразумевает решение следующих, более локальных вопросов:

а) разработка методических приемов перевода вербальной информации на язык образов;

б) создание нового класса учебных задач, в которых исходной посылкой является рисунок;

в) разработка методики, направляющей ученика как можно чаще переводить формульную информацию в рисунок и уже от него переходить к формуле-результату;

г) создание методических приемов для формирования учения анализировать формульную информацию, выделяя в ней общие элементы и главные структурные связи;

д) создание визуальных образов-стандартов.

Умение пользоваться всеми видами предъявления информационных сообщений, переводить их с одного языка на другие есть основной инструмент в арсенале методических средств обучения.

Выводы

1. Начало данному исследованию положило замечательное свойство математики – визуально организуемое и зрительно наблюдаемое представление ее рассуждений. Мы приняли, что при изучении математических (и иных школьных дисциплин) особую роль может играть зрение. Отталкиваясь от определения В. Зинченко, мы выделили две стороны человеческой деятельности, которая называется визуальным мышлением, и рассмотрели его применительно к процессу обучения в школе.

Первая из них связана со взглядом на визуальное мышление, как на некоторую подсистему (по отношению к мышлению в общепринятом смысле), призванную поднять свойства чувственного зрительного восприятия на уровень полноценной продуктивной мыслительной деятельности.

Вторая – основная сторона – состоит в порождении новых визуальных форм, в активной трансформации этих форм, делающей обозримым их внутренний смысл и приводящей к содержательным результатам.

2. Мы выделили три этапа восприятия и переработки визуальной информации.

Первый из них обозначен нами как анализ ее структуры. Ему должны соответствовать два важнейших параметра – нацеленность учащихся на активное (продуктивное!) восприятие и специальная организация учебного знакового материала. Мы пришли к выводу о необходимости формирования у учащихся зрительных образов – стандартов, позволяющих ученику найти путь решения задачи.

На втором этапе (на материале уже имеющейся информации) происходит создание новых образов. При этом умственные усилия ученика направлены на распознавание и формирование целостной системы, отвечающей исходным условием задачи. В связи с этим мы определили необходимость перейти от наивного использования наглядности как средства повышения эффективности урока к формированию визуальных знаковых понятий, которые по своему объему, степени обобщенности могут не уступать привычным вербальным понятиям.

Третий этап по своим целям и учебным возможностям мы отнесли к поисковой деятельности. Любая формула, рисунок или законченный фрагмент текста подразумевают подсказку. Нужно лишь нацелить ученика на ее обнаружение, дать ему инструменты к ее извлечению и применению.

3. Центральное положение в данной главе занимает проблема визуального перевода – умственная деятельность учащегося, которая реализуется в процессе восприятия и переработки информационных данных. Равноправие вербального, геометрического и формульного способов задания информации с точки зрения визуального восприятия принято нами как относительное, а не безоговорочно абсолютное. Необходимо учитывать возможные отношения между ними и расставить основные акценты, которые порождаются такими связями.

4. Значимость “проблемы перевода” при обучении математике совершенно неоспорима. Здесь в первую очередь должна идти речь о понимании слов, восприятии изображения, оперирования символикой и лишь во вторую – о навыках решения задачи. Мы пришли к необходимости изучить этот вопрос в связи с основным, но, вероятно, не столь очевидным фактом, который практически всегда сопровождает обучающегося – сложность приема начальных данных вербальной информации.

5. Важной задачей мы считаем разработку специальных средств и приемов, позволяющих действенно применять каждый из трех способов задания знаковой информации при изучении теории, отработке навыков и умений решать задачи, организации поисковой деятельности учащихся. Опора мышления на визуальные модели, развитие техники зрительного восприятия могут оказать существенное влияние на деятельность учеников – помочь им осуществить визуальный поиск решения задачи.

Глава II
КОНСТРУИРОВАНИЕ ВИЗУАЛЬНОЙ СРЕДЫ ОБУЧЕНИЯ

Процесс обучения в школе связан с передачей знаний, накопленных человечеством. Это может быть рассказ об историческом событии, вывод или представление какого-либо физического или химического закона, введение определенного лингвистического или математического правила и т.д.

Учитель предъявляет некоторую информацию, существенные моменты которой ученику полагается понять, усвоить и запомнить. Как правило, каждое объяснение сопровождается словесными уточнениями, разнообразными примерами, строгими выкладками или наглядными иллюстрациями. Ученик заносит в тетрадь отдельные сведения, перерисовывает таблицы и диаграммы, записывает формулировки теорем, фиксирует цепочки формул.

Подобный процесс представляет собой упрощенную модель введения учителем и восприятия учеником учебной знаковой информации. Главным инструментом в этом процессе служит классная доска.

В книге «Новые очерки по психологии искусства» Рудольф Арнхейм пишет:

> «Классная доска – это старое и испытанное средство визуального обучения, и различные рисунки, диаграммы и схемы, нарисованные на ней мелом учителями геометрии и химии, преподавателями

общественных наук и языков, говорят о том, что теория должна опираться на зрительное восприятие» [4, с.168].

Результаты обучения в школе в значительной мере зависят от знания и понимания учителем роли зрительного восприятия, от того, насколько умело и изобретательно он использует возможности доступной ему информационной среды.

Под **информационной средой** мы понимаем систему средств общения с человеческим знанием.

Информационная среда служит как для хранения, структурирования и представления информации, составляющей содержание накопленного знания, так и для ее передачи, переработки и обогащения [15].

Продуктивное обучение в нашей работе рассматривается как «личностно-ориентированная педагогическая система, обеспечивающая получение образования на основе создаваемой сети образовательных маршрутов, представляющих собой последовательность учебных и производственных модулей, самостоятельно выбираемых индивидуумом и обеспечивающих рост его общеобразовательной подготовки и культуры, профессиональную ориентацию, осуществление различных этапов профессионального образования, его уверенное вхождение в социум с учетом своих склонностей и особенностей своего развития на основе широкого использования информационных обучающих технологий» [см. там же].

Под ***Визуальной средой Обучения*** мы пониманием совокупность условий обучения, в которых акцент ставится на использование и развитие визуального мышления ученика.

Эти условия предполагают наличие как традиционно наглядных, так и специальных средств и приемов, позволяющих активизировать работу зрения.

> К ним также относятся определенные “инструменты” и “правила игры”, разрабатываемые при формировании такой среды, которые должны быть охарактеризованы настолько четко, чтобы их можно было реализовать в любой предметной области.

Последнее чрезвычайно важно:

> «... самые лучшие намерения учителя биологии будут с трудом восприниматься недостаточно подготовленными учащимися, если те же самые принципы не применяет в работе учитель математики» [4, с.170-171].

§4. Параметры *Визуальной Среды Обучения*

В условиях средней школы, где разные предметы ведутся разными учителями, инструментом ***продуктивного обучения*** может стать некоторая новая педагогическая система, или, как принято говорить в последнее время, новая технология. Мы полагаем, что одним из возможных вариантов может явиться **визуальная технология обучения**, которая основывается на комплексе учебных знаний и ***визуальных способах*** их предъявления, ***визуальных технических средств*** реализации передачи этих знаний, а также психолого-педагогических приемов ***использования и развития визуального мышления*** в процессе обучения.

Несмотря на то, что полное представление визуальной технологии выходит за рамки данного исследования, отметим следующее.

Термин "визуальная технология обучения" вводится нами как один из альтернативных вариантов "педагогической технологии", в основу которой мы положили понятие, предложенное В.М. Монаховым [113, с. 11]:

> «Педагогическая технология – это радикальное обновление инструментальных и методологических средств педагогики и методики при условии сохранения преемственности в развитии педагогической науки и школьной практики».

Подтвердим "документально" правомерность нашего выбора.

Знания передаются посредством речи и текста. Эти формы представления знаний предопределяет сложившийся принцип построения учебных программ, где представление информации выполняется в иерархической и линейной формах, всегда заранее определяющих конечные цели.

Однако результаты научных исследований в области теории познания и неврологии, экспериментов в области искусственного интеллекта, а также наши собственные результаты по использованию *Визуальной Среды Обучения* указывают на то, что знания и, особенно, образ мышления ученика имеют более сложную и разветвленную структуру.

Применение в учебном процессе нетрадиционных методов представления знаний (например мультимедиа), показывают разницу между устоявшимися и вновь зарождающимися формами обучения.

Одно из главных направлений данного исследования напрямую связано с новыми способами передачи информации, т.е. с конструированием новой среды обучения (или обучающей среды).

Из множества вопросов, связанных с формированием обучающей среды нового типа мы выделяем следующие:

- роль зрения, как инструмента, отвечающего за восприятие и обработку поступающей информации;
- полиграфические приемы, обеспечивающие продуктивную работу зрения;
- методическое обеспечение этой среды;
- организация гипертекстовых связей и интерактивных режимов работы в такой среде.

Важность всех перечисленных условий объясняется, на наш взгляд, тем, что

> «... мышление – это большей частью визуальное мышление... Да, есть невизуальный, абсолютно автоматический способ решения задач, в случае, если имеются все необходимые данные. Именно так, не прибегая к помощи зрительных образов, действуют компьютеры. Результаты, близкие к автоматической

обработке, может дать и человеческий мозг, соответствующим образом обученный или находящийся под давлением каких-то сил, лишающих его способности к самостоятельному творчеству, притом что помешать мозгу реализовать свою природную склонность и способность подходить к проблеме через ее структурную организацию – задача весьма непростая... Мы даем детям карманные калькуляторы, но при этом должны ясно понимать, что, сберегая их усилия и время, мы упускаем драгоценную возможность элементарной тренировки детского мозга... для его совершенствования» [4, с.162].

4.1. Основные проблемы

Перейдем непосредственно к первому параметру конструируемой нами *Визуальной Среды Обучения*, попутно раскрывая проблемы, возникающие при первых опытах ее организации.

Одна из таких проблем описана Р. Арнхеймом в книге «Новые очерки по психологии искусства»:

«... ко мне обратился за советом один... студент... Он работал над анализом визуальных аспектов демонстрации химических опытов... и, обнаружив, что в гештальтпсихологии разработаны принципы визуальной организации, попросил разрешения прислать... материалы... у меня сложилось впечатление, что... демонстрация опытов... рассматривается как достигающая своей цели, если химический процесс... физически присутствует на занятиях. Форма и расстановка... бутылок, горелок, трубок вместе с их содержимым определяется тем, что технически требуется и что самое удобное и дешевое... при этом мало внимания обращается на способ, которым визуально воспринимаемые формы... доходят до глаз..., а также на отношения между тем, что наблюдается, и тем, что понимается. Вот маленький пример.

На рис. 18 показано расположение... аппаратуры для демонстрации синтеза аммония (рис. 4.01).

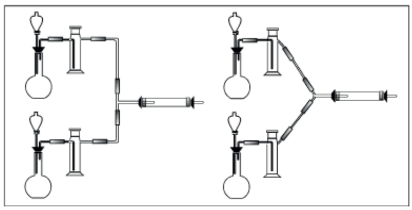


Рис. 4.01. рамка!!!
Иллюстрация к статье Рудольфа Арнхейма
«Еще раз в защиту визуального мышления»
в книге «Новые очерки по психологии искусства»

Двухкомпонентные газы, азот и водород, ... соединяются в одной прямой трубке, от которой отходит короткое соединение к тонкой прямоугольной трубке, по которой газы идут в сосуд, где и происходит образование аммония. Единственная прямая вертикальная трубка, конечно, самый простой и дешевый способ проведения реакции синтеза, но она обманывает визуальное мышление студентов. Она наводит... на ложную мысль о непосредственной связи газов друг с другом, в результате чего они не замечают соединения газов для синтеза. Такая, казалось бы, мелочь, ... как соединение двух трубок в *Y*-образной форме, могла бы направить глаза, а вслед за ними и мышление... в нужную сторону» [4, с.169-171].

Считаем необходимым обратить внимание на следующий чрезвычайно важный момент:

> «Визуальное мышление неделимо: если не уделять ему достаточно внимания в преподавании или изучении какой-либо конкретной дисциплины, оно не сможет себя проявить ни в какой другой сфере... Необходима ни больше, ни меньше, как смена основных акцентов в обучении» [4, с. 170].

Смена акцента в обучении должна привести к новым образовательным технологиям, основанным на новых способах представления знаний, «максимально благоприятных условий для раскрытия и развития способностей ученика», учет его психофизиологических особенностей [86].

> При этом необходимо ориентироваться «не только на усвоение знаний, но и на приемы этого усвоения, образцы и способы мышления и деятельности, развитие познавательных сил и творческих потенциалов учащегося», противостоять... монологичности и обезличенности словесного преподавания, пассивности учения школьников» [см. там же].

Специфика изложения учебного материала должна определять:

- содержание тех или иных понятий,
- умение выделять их среди множества объектов различной природы,
- навыки оперирования ими, понимание как эти операции осуществляются,

и еще, к тому же, решать разнообразные задачи.

Однако обеспечить приобретение этих умений, знаний и навыков весьма проблематично по многим причинам.

На некоторые из них мы ниже обращаем особое внимание.

Довольно часто при изложении теоретического материала иллюстрации помещаются произвольно, где-то в стороне, и сопровождаются указаниями типа: “см. рис. №... ”.

Будет ли учащийся, читая достаточно скучный и трудный текст, листать книгу в поисках этого рисунка?

Нередки случаи, когда рядом с этим рисунком размещены другие, относящиеся либо к задачам, либо к иному фрагменту основного текста.

Это также не способствует лучшему восприятию ученика.

Приведем один из таких текстов [132, с. 199].

«Пусть α и α' – параллельные плоскости и h – прямая, пересекающая эти плоскости. Пусть P – выпуклый плоский многоугольник в плоскости α и A_1, A_2, ... – его вершины. Проведем через каждую точку X многоугольника P прямую, параллельную прямой h, и обозначим через X' точку пересечения ее с плоскостью (рис. 4.02).

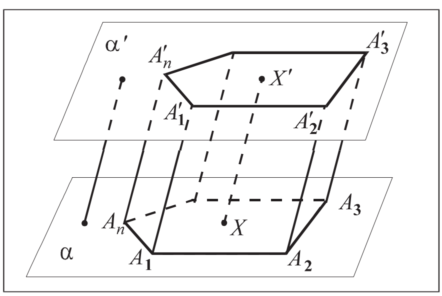


Рис. 4.02. рамка!!!
Иллюстрация к теме «Многогранники»
в школьном учебнике прошлых лет

Отрезки XX' заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется **призмой**. Его граница состоит из многоугольника P, равного ему многоугольника P' в плоскости α' и параллелограммов $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...

Многоугольники P и P' называются **основаниями призмы**, а параллелограммы – **боковыми гранями**. Отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... называются **боковыми ребрами** призмы. **Высотой призмы** называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю призмы**. **Диагональным сечением** призмы называется сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани...».

Мы привели данный фрагмент целиком с целью проанализировать, что требуется от ученика при его чтении.

При этом ситуация нами значительно смягчена, поскольку в учебнике сам рисунок отделен от данного текста задачей и ее решением, а рядом с сопутствующей иллюстрацией помещены еще две, к содержанию именно этого текста не имеющие непосредственного отношения.

Начнем с того, что до указания “рис. 4.02” читателю необходимо самому составить визуальные образы объектов: P, P', α, α', A_1, A_2, ..., X, X', h и обнаружить структуру связей между ними.

Рисунок, предъявленный значительно позже, дает значительно более объемную информацию, чем та, которую может почерпнуть читающий из предшествующего текста. В нем (в рисунке) нужно выделить уже описанное словами.

Обилие обозначений, например, плоских многоугольников $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ... дробит образы, подменяя их громоздким перечнем букв, из-за чего неоднократно придется переключать внимание с текста на рисунок, чтобы догадаться, что речь идет об интуитивно ясном понятии – поверхности тела. К тому же с одной картинкой связан слишком большой круг новых объектов.

В погоне за “математической чистотой” мы забываем весьма примечательные и поучительные факты из истории математики.

Совсем не сразу возникли современные строгие математические дефиниции, воспроизведения которых мы так настойчиво добиваемся от наших учеников.

Биркгофф рассказывает об Эйлере:

«Эйлер наверное представлял себе действительное число наглядно, то как бесконечную десятичную дробь, то как точку на начерченной прямой с нанесенной на ней шкалой. Не давал он и общего определения слова “функция”. Он просто наглядно представлял себе различные задания функций: формулами, графиками, таблицами приближенных численных значений, и последовательностью коэффициентов степенного ряда, и особыми геометрическими или физическими условиями,... эти различные представления могут заменять друг друга в столь многих приложениях» [18, с. 80].

Обратимся к естественной практике человеческого развития.

Ребенок сначала выделяет из окружающей среды некий предмет, многократно рассматривает его, повторяя за родителями его наименование, а потом уже переходит к самостоятельному устному его обозначению.

Алгоритм “сначала вижу – потом говорю” заложен, по-видимому, в человеческой психике со сроком действия более значительным, чем мы его учитываем. У нас же сначала описание – затем изображение, и по “объему” описания значительно превосходят визуальную информацию, тем самым еще увеличивая разрыв в восприятии.

Перевод вербального текста на “язык образов” сильно зависит от самого текста, его организации и качества. Учащийся часто не успевает усвоить вербальную информацию, соотнести ее со зрительным образом, а мы уже требуем от него самостоятельных действий, оперирования такими образами при решении задач.

> “Порции” описательной информации зачастую бывают настолько велики, что, достигнув конца фрагмента текста, учащийся нередко забывает, о чем говорилось выше, теряет нить рассуждений, не может связать, соединить отдельные высказывания. Нет единой конструкции (образа), которая позволила бы удерживать внимание, “цементировала” в сознании все блоки информации.

Недостающим связующим звеном может быть, по нашему мнению, изготовление рисунка, иллюстрирующего текст, самим учеником. В случае работы с компьютером ученик может из “батареи” рисунков выбрать тот, который поможет ему в чтении и понимании.

В качестве примера и контрпримера к текстам, предложенным ранее, приведем один из фрагментов современного учебника [12, с. 60]. Обсуждаемый ниже текст начинается с рисунка:

> «С призмами вы, конечно, уже знакомы. На рисунке 4.03.1 изображен ряд призм. Какими же свойствами можно описать этот вид многогранников? У призмы выделяются две грани, которые представляют собой равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях. Их называют основаниями призмы. Остальные грани являются параллелограммами. Они называются боковыми гранями. Призмы не получится, если вы в параллельных плоскостях произвольно расположите два равных многоугольника. Их надо расположить так, чтобы они получались друг из друга параллельным переносом» (рис. 4.03.2).

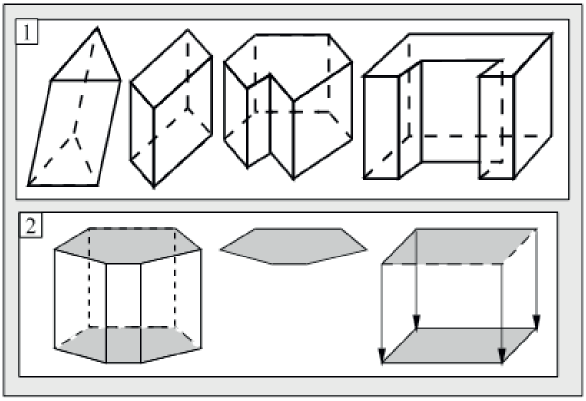


Рис. 4.03.
Иллюстрация к теме «Многогранники»
в современном школьном учебнике

Обратим внимание на то, что здесь термин “призма” вводится до полного строгого математического описания соответствующего понятия. Сначала представляются визуальные образы призм, затем следует перечисление ее основных составляющих (основания, боковые грани). В качестве определения понятия дается не словесное описание, а визуальный способ образования, перечисляются некоторые основные, более мелкие детали, предлагаются иллюстрации перечисляемых компонентов.

При появлении нового понятия учащийся имеет возможность немедленно соотнести его наименование с общим образом, выделить необходимый элемент, поскольку иллюстрации не загромождены. Этот момент мы полагаем чрезвычайно важным.

Он создает необходимую основу для взаимно обратного перевода с “языка слов” на “язык символов” и “язык зрительных образов”.

4.2. Полиграфические приемы

Постоянно действующим инструментом ученика и учителя является текст учебника, в котором предполагаются выполнение определенных требований: четкость и точность, полнота и доступность, непротиворечивость и т.д.

Словесное выражение образной информации момент очень важный, но трудный не только с точки зрения восприятия ее данных учащимися. Он сложен и для составителей соответствующих текстов (учебников, учебных пособий, справок на экране компьютера и т.д.).

Это еще раз усиливает актуальность того, что соотнесение текста со зрительным образом является одной из центральных проблем нашего исследования.

Насущность данной проблемы диктуется современными условиями. Разнообразные телевизионные программы, широкая и красочная реклама, всевозможные компьютерные игры (хотим мы этого или нет) формируют "акцент в мышлении" школьника – работа зрения становится все более и более определяющей.

С появлением компьютера существенно меняется характер информационной обучающей среды. При объяснении того или иного явления (положения, правила, закона) объем текстовой информации уменьшается, тщательные и подробные выкладки заменяются образами.

Новый подход к передаче знаний влечет за собой изменение взгляда на сами принципы изложения учебной информации – подача учебного материала должна быть осуществлена так, чтобы стал возможен активный зрительный анализ его структуры.

Отметим три основных случая:

1. Представление информации.

2. Расшифровка ее аналитического или геометрического фрагмента.

3. Описание преобразований информационных блоков.

Важным средством организации восприятия информационного материала, его элементов и структуры является цветовое оформление (рис. 4.04, см. также рис. II.20 на стр. 524).

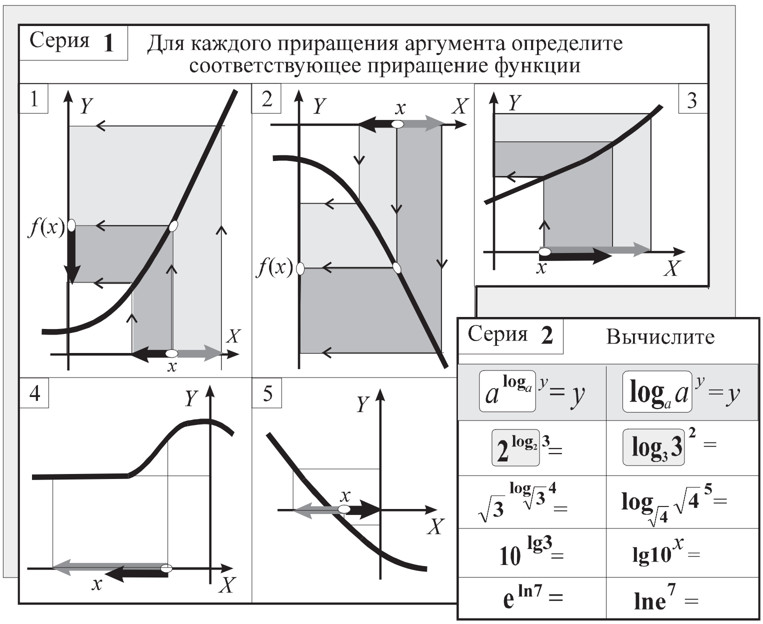


Рис. 4.04.
Оттенки серого
в оформлении условий визуальных задач

«Математикам очень часто помогает... цвет... Раскраска может стать <u>методом решения</u> задач» [17, с. 30-32].

Помощь цвета визуальному восприятию (даже в оттенках серого) для студентов полезна, для школьников – незаменима (рис. 4.05, см. также рис. I.07 на стр. 485).

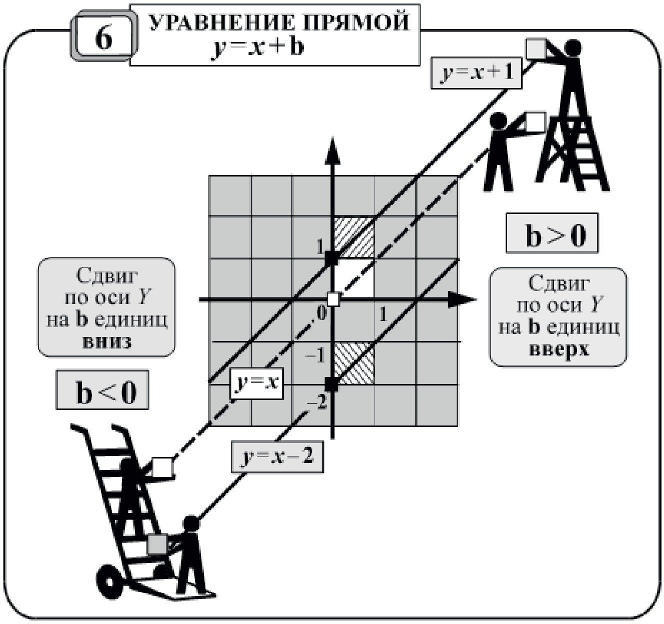


Рис. 4.05.

Организация восприятия содержания
одной из страниц визуальной тетради «Уравнения прямых»
с помощью штриховки и оттенков серого

Цвет как бы руководит “живым созерцанием” информации.

Решая “цветные” примеры, учащиеся незаметно для себя вынуждены отмечать ту или иную особенность сообщения, которая таким образом (внешне непроизвольно) доходит до их сознания.

Однако “раскрашивание” должно быть экономным, строго продуманным и целесообразным.

К примеру, при “раскрашивании” математического текста следует наименование объекта, его геометрический образ и формулу выделять одним цветом, другой объект (также “наименование – рисунок – формула”) – другим цветом и т.д.

Цвет должен не украшать, а выводить наружу подсказку – ориентир к наблюдению.

В противном случае форма подменит сущность.

Следующим мощным средством организации учебной математической информации является обязательный заголовок ***к каждой*** “порции” ее отдельного теоретического (или практического) сообщения (задания). Например:

- “Нули и точки нулей функции” (рис. 4.06);
- “Азимут земного предмета” (рис. 4.07.1, см. также рис. II.11, стр. 515);
- “Ассоциативность сложения векторов ” (рис. 4.07.2).

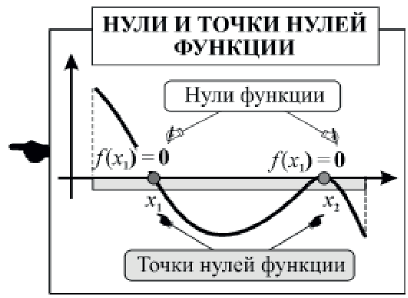


Рис. 4.06.
Пример соотношения заголовка с содержанием информации

Заголовок к отдельной “порции” информационного сообщения играет чрезвычайно важную роль. Он не только “предупреждает” о содержании, он позволяет отыскать формулу или рисунок.

Заголовок – это элемент “меню”, “настраивающий на нужную волну” внимание ученика и ориентирующий его мышление (рис. 4.08, см. также рис. II.11, стр. 515).

Примечательно, как отмечает Колерс, следующее:

> заголовки – наименования «... несомненно влияют на нашу способность видеть предметы, т.е. отдельные стороны некоего перцептивного комплекса... в то же время восприятие должно некоторым образом влиять на нашу способность к наименованиям» [82, с. 79].

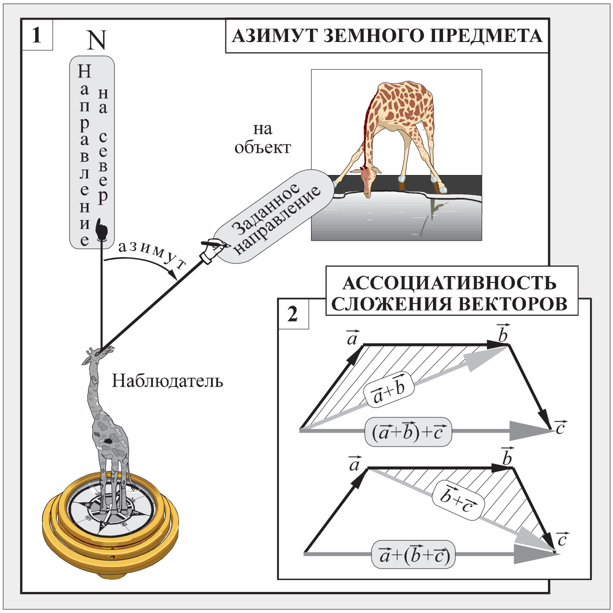


Рис. 4.07.

Фрагменты информационных страниц:
географического (слева) и математического (справа) содержания

Рис. 4.08.

Заголовок к информационной странице,
предваряющий ее содержание

Заголовок предлагает содержание информации и направляет ее перевод с одного языка предъявления на другие, предопределяя важный момент; любое знаковое сообщение должно сопровождаться (предваряться) письменным или устным оформлением (интерпретацией).

Применительно к задаче, поставленной в данном пункте исследования, положение – обосновать и осуществить объединение трех способов предъявления учебной знаковой информации будет трактоваться как основа для перевода (рис. 4.09, см. также рис. III.19 на стр. 565).

Рис. 4.09.

Перевод текста в формулу и рисунок

Мы полагаем, что не только для запоминания, но и для понимания содержания учебной задачи, полезно сформировать у учеников умение разбивать предлагаемую информацию на порции, для того чтобы выделить объект, определить "радиус его действия" и затем уже описать сопутствующие явления.

При перечисленных условиях, которые автор «Педагогики математики» сформулировал как основу для запоминания (а мы принимаем и как руководство к пониманию), должны более успешно протекать процессы осмысления и освоения учащимся учебного знакового материала.

Одним из существенных недостатков сложившейся системы обучения математике (по-видимому, и не только в математике) является формализация предметных знаний, отрыв ее от реальных приложений, невнимание к источникам и движущим силам развития как самой науки, так и мышления каждого конкретного ученика.

Не следует опасаться самостоятельно вводить “понятные” термины, которые могут придать строгому тексту эмоциональную окраску, породить соответствующий визуальный образ или помочь ученику запомнить существо дела (рис. 4.10).

Рис. 4.10.
“Эмоциональная окраска” термина,
предназначенная для усиления восприятия значения символа

На каждом этапе изложения учебного материала полезно подчеркивать связь слова, образа и формулы, учитывать трудности семантики как разговорного, так и профессионального (предметного) языков.

Так, использование слов “горб”, “впадина”, “перегиб”, “клюв”, “пологий” и т.п., может обогатить запас средств описания при исследовании свойств функций.

Однако необходимо следить за правильностью, адекватностью связей между предметным содержанием и обыденной семантикой используемых слов. Потеря чувства меры и вкуса не менее опасна, чем излишняя ригористичность профессиональной речи.

Свободное переключение с одного термина на другой поможет ученику в дальнейшем. Разумеется, это надо делать тогда, когда в учебную задачу не входит вопрос о различении близких понятий, обозначенных разными терминами.

> Например, в математическом анализе при рассмотрении числовых промежутков бывает важно указание на то, включаются в него концы (оба или какой-нибудь один) или нет. Это привело к появлению ряда терминов.
>
> В то же время при обучении началам анализа в средней школе возможно, как правило, не обращать внимания на замкнутость промежутка. Поэтому допустимо свободное применение таких равнозначных терминов, как промежуток, отрезок, интервал, сегмент.

При необходимости подчеркнуть необычность или важность нового понятия можно “отступить от правил”, предлагая нестандартную формулировку и сопутствующий зрительный образ (рис. II.05 на стр. 509; рис. II.12 на стр. 516). Однако и здесь, также как и в цвете, следует сохранять чувство меры.

Учебная информационная среда должна решать проблемы адаптации школьника, учитывать его индивидуальные особенности, выходящие за пределы принципа дифференциации обучения.

> «Действительно, темп овладения некоторыми навыками может быть у некоторых учеников настолько низким, что невозможным делается групповое обучение, а в отдельных патологиче-

ских случаях психика учителя не способна нести такую нагрузку однообразием. Среда может содержать специальные компенсаторные операции и подстраиваться под обучаемого» [15].

Еще раз обратимся к школьной практике.

В учебнике экологии для 9-го класса представление «Закона оптимума» связано не только с чисто описательными моментами, но и с графическим образом его действия (цитируем дословно):

> «Кривая, характеризующая скорость того или иного процесса в зависимости от одного из факторов внешней среды,... почти всегда будет иметь форму перевернутого колокола» [92].

Учебный текст, излагающий основы данного закона, окажется недостаточным, если его не поддержать соответствующей красочной визуальной интерпретацией (рис. 4.11, см. также рис. V.36 на стр. 622).

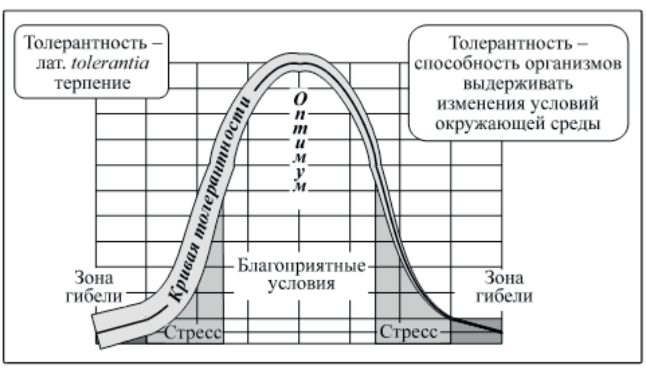


Рис. 4.11.

Иллюстрация скорости изменения природного процесса с сопутствующими разъяснениями специальных терминов

Примечательно, что, разрабатывая подобную иллюстрацию, можно реализовать межпредметную связь, акцентировать внимание учащихся на полезность математических моделей в исследовании законов природы.

Требования к содержанию, структуре и оформлению рисунка должны быть чрезвычайно строгими – рисунок должен передавать существо дела и одновременно как можно больше своих данных “вводить в память”. Важность этих обстоятельств неоднократно подчеркивает Р. Арнхейм:

«... если взглянуть на сами схемы и диаграммы, то большинство из них оставляет впечатление продуктов неумелого и неквалифицированного труда. Из-за того, что они плохо нарисованы, им трудно должным образом выразить соответствующее значение. Чтобы надежно передавать сообщения, диаграммы должны основываться на правилах изобразительной композиции и визуального упорядочения, которые совершенствуются на протяжении каких-нибудь **20 000** лет» [4, с. 168].

Визуальное представление данных должно быть простым, лаконичным, и, главное, очевидным.

Приведем пример из практики учителя одной из школ Мурманской области С.И. Литвиненко. Цитируем выдержку из ее отчета о работе со слабым учеником.

Решается задача (рис. 4.12).

«Докажите, глядя на рисунок что, если

острые углы α_1 *и* α_2:

$\alpha_2 > \alpha_1$,

то $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$ ».

Ученик:

“Я ничего не понимаю!”

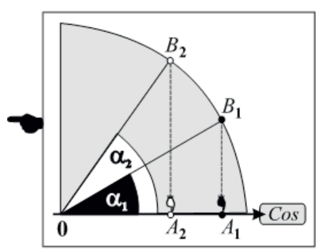


Рис. 4.12.
Графическое обоснование доказательных рассуждений

Учитель: “Расскажи только то, что видишь на рисунке”.

Ученик рассказывает.

Затем: “Ой! Как все просто получилось!”.

А ведь это была доказана теорема 7.5 по учебнику А.В. Погорелова… Слабый ученик с небольшой помощью учителя сделал для себя открытие теоремы.

По мере качественного усложнения информации, конкретный графический образ перестает быть адекватным объекту.

В. Давыдов пишет:

> «... там, где содержанием обучения выступают внешние свойства вещей, принцип наглядности себя оправдывает. Но там, где содержанием обучения становятся связи и отношения предметов, – там наглядность далеко не достаточна» [56, стр. 385].

Краткие итоги

Важно осознать, что наглядность есть всего лишь средство, вспомогательный элемент. **Мышление** (в том числе и визуальное мышление) **есть действие, деятельность разума,** благодаря которому и становится возможным осмыслить связи и отношения между изучаемыми объектами.

В силу этого к основным параметрам *Визуальной Среды Обучения* мы относим:

– лаконичность представления информации,

– точность воспроизведения ее структуры и элементов,

– акцент на главные, существенные детали образов,

– использование трех языков представления учебных знаний,

– учет возможностей обучаемого в восприятии визуальной информации.

§5. Визуализация содержания учебного математического текста

Широкий спектр возможностей, предоставляемых компьютером, порождает проблему создания новых способов представления учебного материала, которые могут отличаться друг от друга по своим дидактическим целям, оформлению на экране, методам комбинирования в единой системе (оболочке). Естественно, что в связи с этим неизмеримо возрастает роль моделей представления учебной информации, предназначенных для зрительного восприятия ее содержания. Такие модели мы здесь называем визуальными. Визуальные материалы могут заполнить “белые пятна”, существующие в современных учебных пособиях и методической литературе.

Перейдем к рассмотрению двух возможных способов соединения отдельных зрительных блоков в единое целое. Их условные наименования – информационная схема и информационная тетрадь (иногда для краткости – схема и тетрадь). Оба эти способа формируют последовательность восприятия образов и могут быть активно использованы при обучении с помощью компьютера.

5.1. Информационная схема

Толчок к началу мыслительной деятельности ученика может порождаться различными причинами: постановка задачи, специальная иллюстрация, необычная фраза, наводящий вопрос, сравнение или аналог.

Мы предлагаем специальный вариант такого толчка – специальную подсказку, анализируя содержание которой, ученик самостоятельно “добывает” для себя необходимые сведения.

Информационная схема – это специальная таблица, предназначенная для восстановления или обобщения необходимых знаний.

Она состоит из блоков, каждый из которых посвящен отдельному фрагменту учебной теории, и использует три языка знаковой информации (рисунок, текст и формулу), что позволяет быстро ориентироваться в ее содержании.

Данная идея не нова. Многие учителя самостоятельно разрабатывают таблицы, используемые для оборудования кабинетов.

Имеется внешнее сходство нашей схемы с опорными сигналами В. Шаталова. Однако было бы неправильно отождествлять их.

Опорные сигналы – это "узелки на память", ориентированные главным образом на широкий круг мнемонических средств обучения, не всегда адекватно и полно отражающих сущность рассматриваемого явления.

Новыми характеристиками, характеризующими предлагаемые нами схемы, являются следующие:

1. **Содержательная насыщенность.**

   Схема может содержать теоретический материал большой части учебной теории, объединять сведения из разных тем. Ее можно многократно использовать в различных ситуациях – при ознакомлении, изучении или повторении материала.

2. **Соединение различных средств представления учебной информации.**

   По сравнению с обычными текстами увеличивается эффективность восприятия визуальной информации:

   - разбиение содержания на 4-6 самостоятельных блоков;
   - использование краткой, понятной и четкой словесной информации (заголовки, надписи, текстовые пояснения);

- цветовые и графические выделения;
- специальное оформление формульных выкладок;
- перевод с наглядно-образного языка на язык символов.

3. Отделение главного от второстепенного.

В центре, как правило, располагаются зрительные образы, адекватно отражающие “главный случай”; необходимые исключения переводятся на периферию зрительного восприятия.

Зрительный образ, соответствующий главному моменту содержания должен быть тем или иным образом выделен (например, расположен в центре).

Второстепенные детали и образцы (примеры) могут отличаться по манере “исполнения” и располагаться так, чтобы не нарушалось активное восприятие основной идеи всей схемы.

4. Динамичность воспроизведения.

Схема должна позволять ученику при ее воспроизведении менять те объекты, которые изображают изучаемые переменные (числа, функции, фигуры и т.п.), сохраняя ее общую структуру.

Для начала разберем пример информационной схемы “Чтение графика функции”, посвященной одному из центральных вопросов курса математики – исследованию поведения функции по ее графику (рис. 05.1).

Здесь представлены:

область определения и множество значений,

точки нулевых значений и экстремумов,

участки знакопостоянства и монотонности.

Сюда включены все данные, необходимые для грамотного и достаточно полного анализа геометрического способа задания функциональной зависимости.

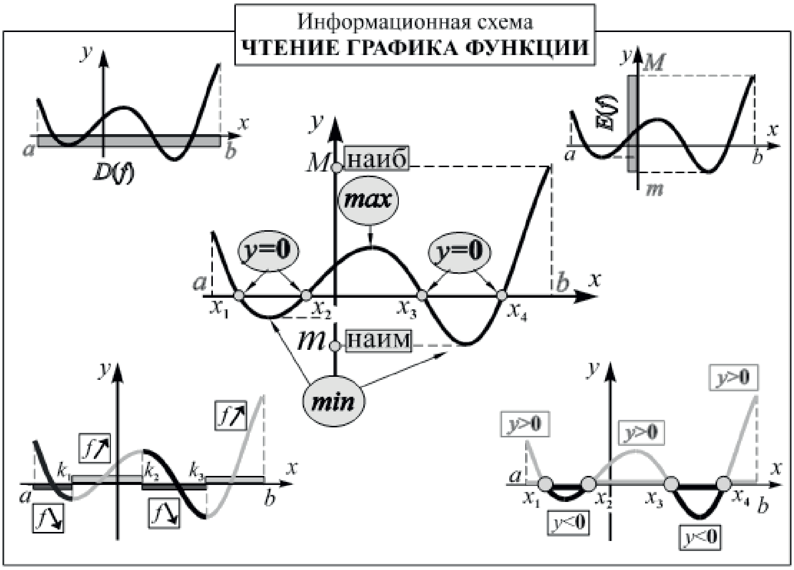


Рис. 5.01.

Общая схема исследования функции по ее графику

Специальное расположение отдельных блоков позволяет учащимся перейти от исходных позиций (области определения и множества значений – верхние блоки) к обнаружению сведений, заложенных в центральном и нижних блоках. Центральный фрагмент посвящен визуальному обозначению положения нулей функции, ее экстремумов и т.д. Пара нижних графиков задает зрительные ориентиры для исследования функции на монотонность и знакопостоянство.

Цвет и оформление помогают упорядочить процесс визуального восприятия: точки из области определения выделяются одним цветом, участки монотонности и знакопостоянства по цвету совпадают с указанием поведения частей графика. Соответствующая раскраска деталей схемы дает перевод с “наглядно-образного языка” на “язык формул”.

Данная схема может использоваться для изучения основных характеристик связей между зависимыми и независимыми переменными. Этот справочник достаточно полно отражает “главный случай”. Кроме того, им в качестве визуального алгоритма можно руководствоваться при описании конкретной функции. Действительно, всякого рода случайности (типа точек разрыва и точек перегиба, участки постоянства значений) неявным образом подразумеваются в ее содержании.

Схема в каждом конкретном случае позволяет отталкиваться от индивидуальных свойств кривой, сохраняя общую структуру как самих особенностей заданных функциональных зависимостей, так и порядка действий в ее представлении.

Например, при решении задачи типа “Исследовать поведение синуса на промежутке от **0** до 2π” эта схема может быть трансформирована в один их многих частных вариантов (рис. 5.02).

Рис. 5.02.

Схема исследования графика синуса

Тот же принцип сохраняется и при исследовании графика функции, “обогащенной” параметрами.

5.2. Информационная тетрадь

Обучение в школе тесно связано с книгой. Вопрос “Почему учебник не лежит под подушкой?” волнует учительство не одно десятилетие. В настоящее время у книги появились могучие “соперники”: телевизор с видеомагнитофоном и персональный компьютер. Бумажные учебные материалы выглядят “бледно” по сравнению с яркой, красочной виртуальной реальностью, представляемой машинами.

Необходимы новые подходы к изложению учебного материала, обеспечивающие не только усвоение его содержания, но и дающие ученику возможность перехода к текстам учебника или пособия.

Информационная тетрадь – это совокупность отдельных фрагментов определенного раздела учебной теории, следующих в строго заданном (логически обоснованном) порядке, который должен быть продиктован соображениями разумности и достаточности.

> Содержание тетради может полностью соответствовать определенному фрагменту основного учебного текста. Серия визуальных блоков (страниц, листов), выстроенных в определенной последовательности и по смыслу тесно связанных между собой, позволяет реализовать принцип “кусочно-непрерывного” обучения, ориентированного на “регулирование” роста знаний и умений учащегося.

Каждая тетрадь – это не просто набор листов, в ней есть общая идея. Она раскрывается постепенно, с использованием всех видов предъявления учебной информации. Сначала, как правило, вводятся чувственно воспринимаемые знаковые компоненты понятия или его свойства, затем осуществляется переход на абстрактный уровень.

Тетрадь разбивает процесс овладения темой на отдельные шаги, причем для каждого из них может быть найден свой способ визуально-схематического отражения как его содержания, так и его связи с предыдущим материалом. Страница информационной тетради может быть обогащена дополнительными сведениями, отсутствующими в стандартном учебном тексте. На ней можно визуально привлечь внимание к особо важным моментам, привести специальные примеры или модели.
Сообщение, излагаемое на странице, должно быть невелико.

Это позволит ученику:

- психологически подготовиться к восприятию нового понятия (рис. 5.03);
- получить начальные представления о понятии на визуальном уровне (рис. 5.04.1);

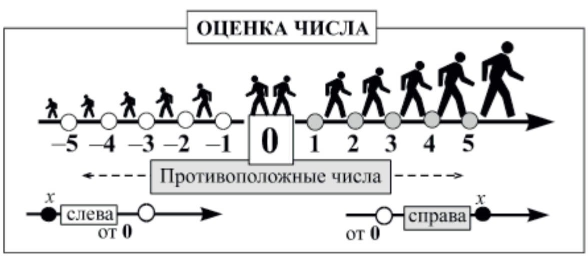


Рис. 5.03.
Визуальная пропедевтика отрицательного числа

- проследить за преобразованиями слова в образ или формулу (рис. 5.04.2);
- запомнить общепринятые обозначения и наименования (рис. 5.05);

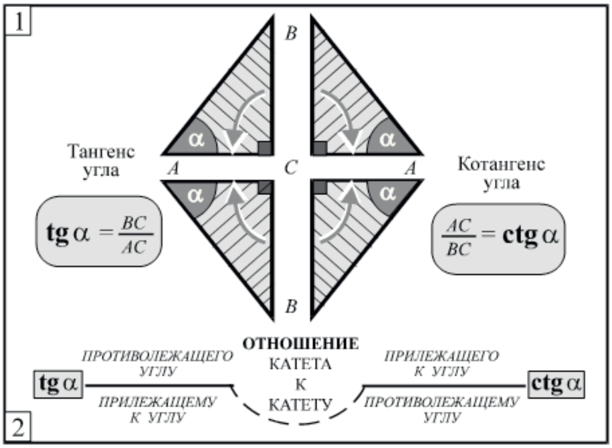


Рис. 5.04.

Пример соотнесения образа с текстом и формулой

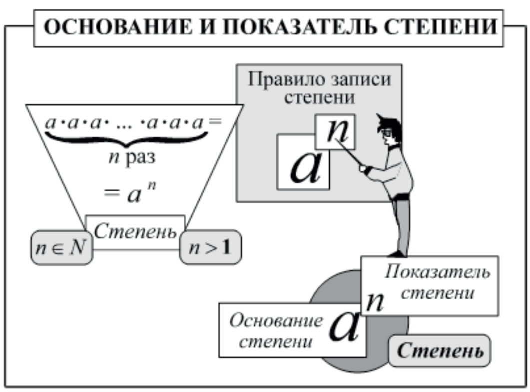


Рис. 5.05.

Введение понятия степени

Терминология, связанная с понятием степени, зачастую приводит к путанице. Иллюстрация, подобная предлагаемому рисунку, дает возможность сопоставить каждому термину (степень, основание степени, показатель степени) положение его символа в общей формуле.

▪ выделить главное в предъявлении новой информации (рис. 5.06);

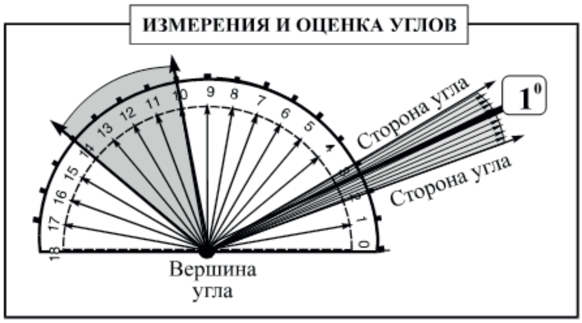


Рис. 5.06.

Начальное представление о транспортире

▪ рассмотреть и обдумать каждый из узловых моментов положения учебной теории (рис. 5.07);

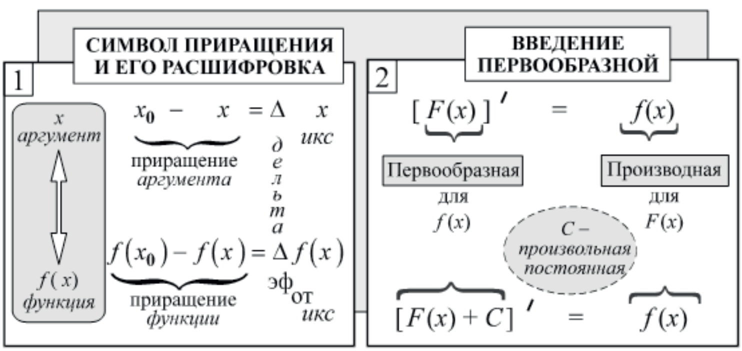


Рис. 5.07.

Вербальная интерпретация математической информации, представленной знаковым образом

Соотношение терминов *функция* и *приращение* функции, *первообразная* и *производная* многим учащимся далеко неочевидно.

Формульная и словесная “интерпретации” связей между понятиями, составляющими эти пары, помогают усвоить правила развернутого и сокращенного способов их наименований и обозначений (рис. 5.07.1), осознать принцип обратимости операций интегрирования и дифференцирования (рис. 5.07.2).

- разъяснить смысл новой операции, представив визуально ее результат (рис. 5.08);

Например:

1) из области определения функции f выбираем любую точку x (аргумент),

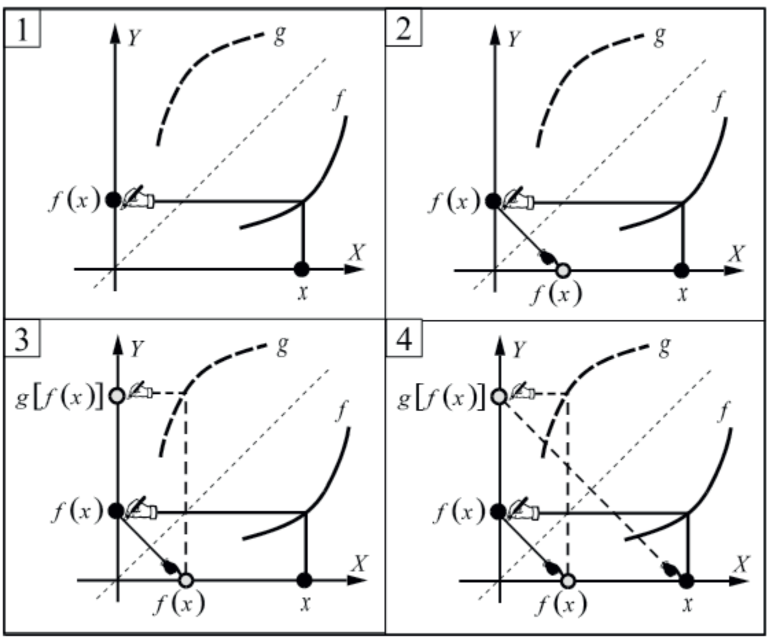


Рис. 5.08.
Графическая интерпретация
связей взаимно обратных функций

2) находим значение функции f в этой точке x (полезно отметить одним цветом, здесь отмечено сплошной линией) (рис. 5.08.1),

3) на оси аргументов откладываем отрезок, определяющий точку $f(x)$ как аргумент функции g (рис. 5.08.2),

4) находим значение функции g в точке $f(x)$, т.е. получаем $g[f(x)]$ (отмечаются другим цветом, или пунктирной линией) (рис. 5.08.3),

5) сравниваем длины отрезков на осях X и Y (рис. 5.08.4) и получаем результат: $x = g[f(x)]$.

С помощью подобной страницы ученик может:

- сопоставив слово и образ, понять происхождение термина до введения строгого определения понятия (рис. 5.09);

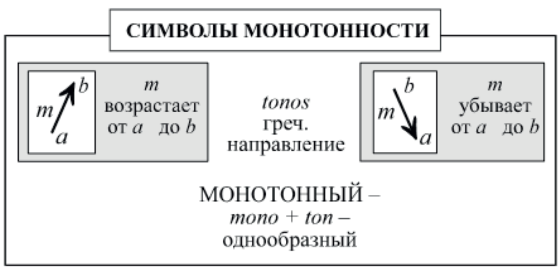


Рис. 5. 09.

Символы монотонности и их расшифровка

- приобрести полезные и интересные сведения (рис. 5.10);
- ввести или обобщить теоретическое положение (рис. 5.11);
- усвоить все необходимые или возможные переходы в практическом применении изученного правила или формулы (рис. 5.12);
- познакомиться с методами исследований или преобразований (рис. 5.10 и рис. 5.12).

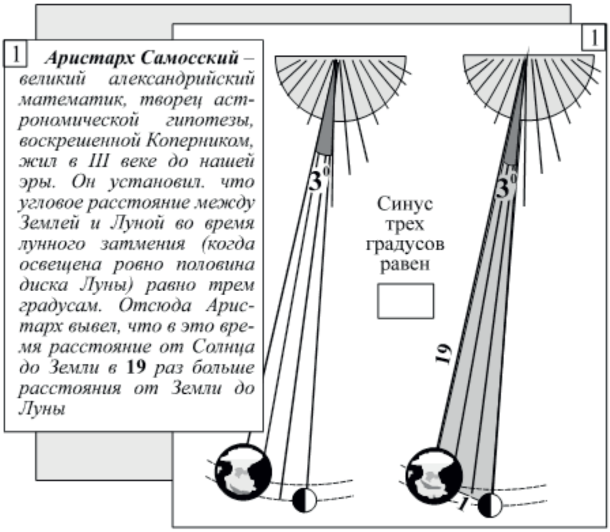


Рис. 5.10.

Рассказ об одном из древних астрономических открытий (1), учебная задача, построенная по материалам этого открытия (2)

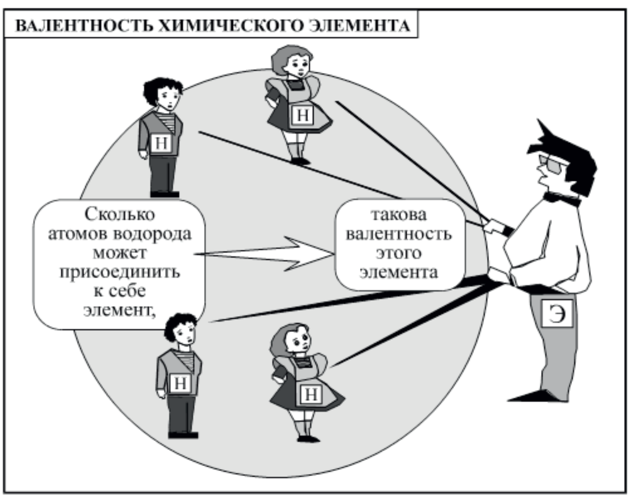


Рис. 5.11.

Введение нового теоретического положения

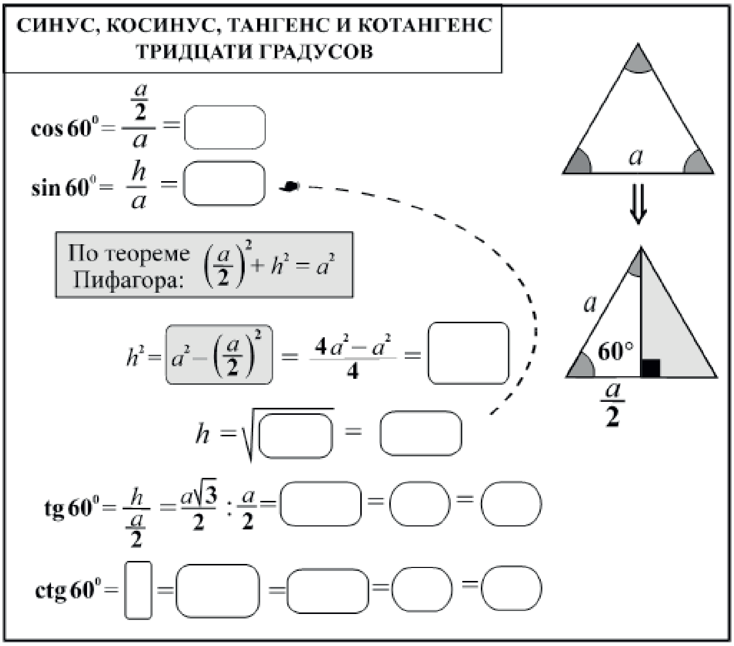


Рис. 5.12.

Пример макета для практических выводов

Информационная страница является наименьшим “шагом” в обучении (изложении теории), однако в любой момент имеется возможность обогатить ее содержание дополнительными сведениями. Все свойства визуального, вербального и формульного способов представления информации широко используются при ее оформлении.

Приведем пример – фрагмент информационной тетради «Расстояния на плоскости в координатах» [153]. Данная тетрадь посвящена выводу формулы расстояния между двумя точками плоскости, заданных своими координатами.

Здесь главным является сопоставление образа и слова.

Стр. 1. **Четверти и полуплоскости декартовых координат** (рис. 5.13).

На этой странице учащимся предоставляется возможность восстановить в памяти известные им представления о четвертях и полуплоскостях прямоугольной системы координат

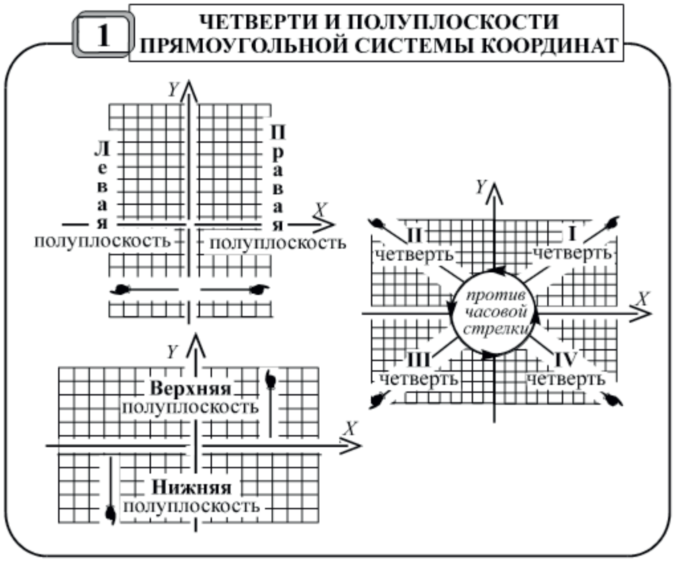


Рис. 5.13.
Восстановление или расширение представлений
о декартовых координатах

Материал разбит на три самостоятельных блока. Отдельные фрагменты каждого из них снабжены соответствующими терминами-наименованиями (I четверть, верхняя полуплоскость и т.п.). Содержание страницы максимально сконцентрировано на важном обстоятельстве – четверти и полуплоскости прямоугольной системы координат рассматриваются (отсчитываются, именуются) в строгом порядке по определенным правилам.

Разбор (зрительный анализ) информации занимает минимум времени, так как она достаточно наглядна и невелика по объему (содержанию).

***Стр. 2.* «Системы отсчета на числовых осях»** (рис. 5.14).

Здесь визуально представлены следующие факты:

1) числовая ось, начало отсчета на числовой оси и направление отсчета;

2) измерение отрезка числовой оси;

3) представление расстояния от заданной точки до начала отсчета;

4) формульная запись этого расстояния.

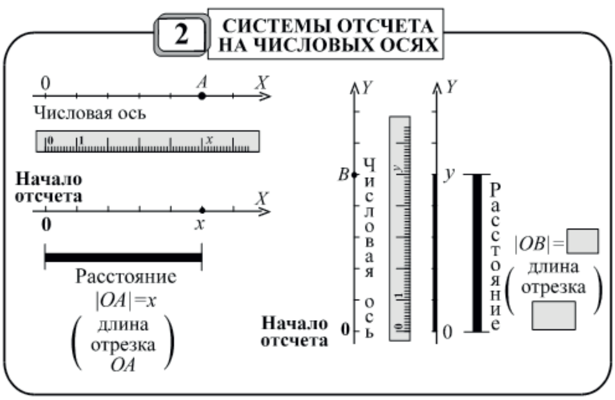


Рис. 5.14.

Введение систем отсчета на числовых осях

***Стр. 3.* «Координаты точки на плоскости»** (рис. 5.15).

Нам представляется чрезвычайно важным, чтобы ученик имел возможность как можно чаще сопоставлять образ, формулу и термин. Именно этому посвящена третья страница. На основе данного материала нетрудно построить локальную задачу, изменив какой-либо блок или оставив незаполненным его отдельный фрагмент.

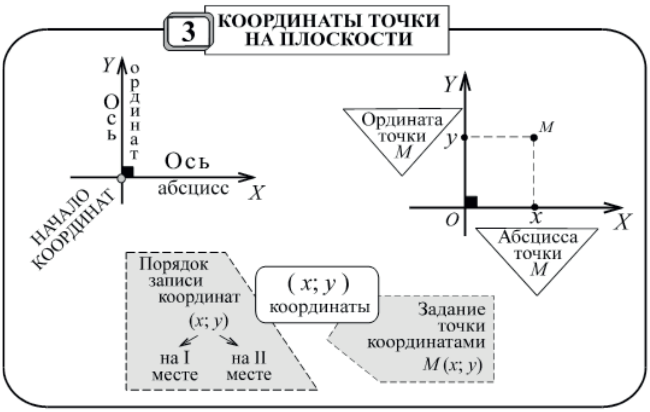


Рис. 5.15.
Правило задания точки ее координатами

Стр. 4. **«Расстояние от точки до начала координат»** (рис. 5.16).

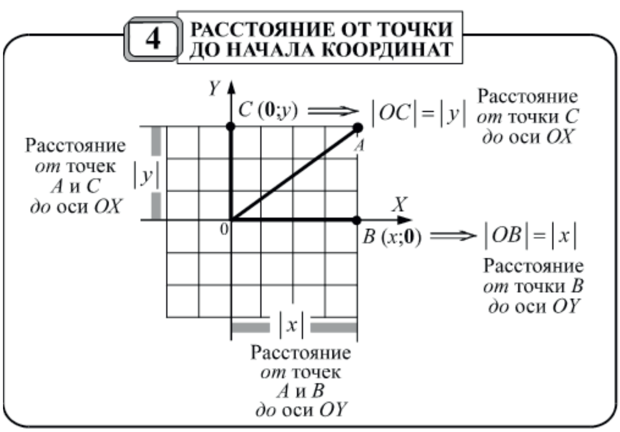


Рис. 5.16. Правило записи
расстояний от точки до координатных осей

Страница вмещает достаточно большой объем информации: система координатных осей на плоскости; геометрическое представление абсциссы и ординаты точки в этой системе; порядок записи координат – формульное представление того же факта.

***Стр. 5.* «Расстояние между точками в координатах»** (рис. 5.17).

Кульминационный момент: составляется формула расстояния между точками в координатах. Здесь же дается визуальная и текстовая подсказка – формула расстояния выводится на основе теоремы Пифагора [153].

Рис. 5.17.

Вывод формулы расстояния от точки до начала координат

Содержание тетради может соответствовать определенному фрагменту параграфа основного текста учебного пособия, варьируя его оформление и детали изложения. Составитель может проявить свою индивидуальность, подчеркнуть собственные склонности, не разрушая “общей канвы” процесса обучения. Отличие состоит в назначении и приемах использования.

Из материалов информационной тетради легко составить визуальные блоки, соответствующие цели и задачам конкретного урока.

Под **визуальным блоком** (**визуальным комплектом**) мы понимаем и определенный комплект визуальных задач, и страницу информационной тетради с примером или информационную схему с задачами, порожденными их содержанием.

Пример – это визуальная задача с "**Анализом**" и "**Решением**", отдельные этапы которого предстоит оформить учащемуся (рис. 5.18, справа, см. также рис. V.20 на стр. 606).

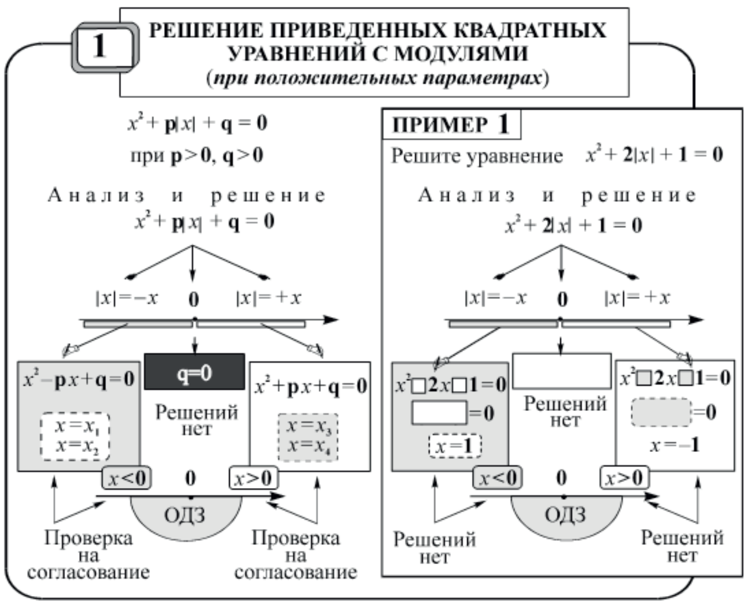


Рис. 5.18.

Страница одной из информационных тетрадей (слева), пример для точного применения ее содержания при решении конкретной задачи (справа)

Еще раз подчеркнем (цитируем Арнхейма):

> «... без визуального мышления обойтись невозможно. При этом, однако, нужно время, прежде чем оно займет достойное место в обучении» [4, с. 169].

При введении информационной тетради в учебный процесс составитель должен не один раз проверить ее структуру, тщательно отредактировать материал, дополнить его банком задач, разнообразных по содержанию, способам представления и уровням сложности.

Применение готовой тетради также связано с длительной работой учителя. Нужно суметь раскрыть содержание зрительных образов, определить соотношение их с вербальными фрагментами, понять принцип визуального изложения формулы.

Краткие итоги

Информационная схема-справочник, вбирающая в себя различные визуальные модели, объединенные в отдельные блоки, поможет ученикам осознать обоснования определенных фрагментов теории, побудить их к созданию аналогий.

Одну и ту же информационную схему в разные периоды обучения можно оформить по-разному, меняя компоновку, объем содержания и расположение ее блоков.

Это дает возможность

ученику задуматься над разнообразием связей между рассматриваемыми объектами,

учителю формировать варианты ее компоновки, ориентированные конкретные учебные группа в зависимости от их подготовленности к усвоению ее содержания.

Текст учебника применяется в различных ситуациях: на уроке и дома, целиком или по частям, с пропусками тех или иных фрагментов. Все зависит от целей и мотивов обучения. Ученик может воспользоваться указаниями учителя или сам организовать свою деятельность, устанавливая свой собственный режим и темп.

Информационная (в перспективе – компьютерная) тетрадь, с одной стороны, действует достаточно "жестко" – полнота и последовательность изложения теории, уровень трудности заданий и их объем задаются автором, методистом или учителем. С другой стороны, в свободном режиме "сценарий" изучения ее содержания можно строить различными способами. Можно вернуться к забытому положению, пропустить то, что кажется на первый взгляд легким. Допустимо вообще нарушать "линейность" изучения текста – выбирать самое необходимое и переходить к новым страницам.

§6. Визуальные дидактические материалы

К каждой странице информационной тетради может быть приложен небольшой банк специальных задач, которые мы здесь именуем визуальными.

Визуальной назовем ***задачу***, исходной посылкой которой является некоторый образ. Диапазон этих задач достаточно велик. Здесь мы представим их основные виды, значения которых отражены в специальной схеме (рис. 6.01).

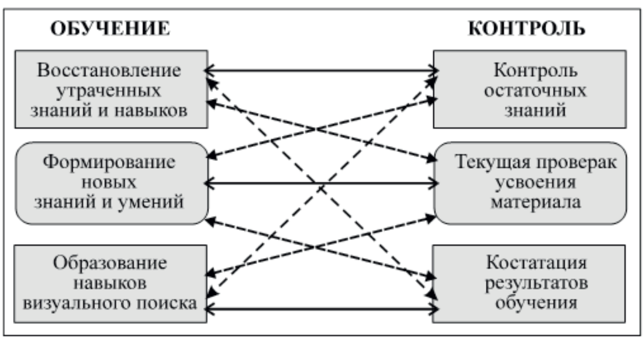


Рис. 6.01.
Схема значений взаимосвязей визуальных задач
при их применении в процессе обучения

Визуальные задачи предназначены для образования и развития в сознании учащегося визуального образа, помогающего разрешить возникающие проблемы. Представляя макеты таких заданий мы ориентировались на то, что учителю полезно четко знать, какую именно сторону мышления своего ученика он может развивать при ее решении.

Таким образом, мы решаем проблему обогащения *Визуальной Среды Обучения* инструментами – задачами, позволяющими передать:

ученику – программную или дополнительную учебную информацию,

учителю – необходимые сведения об учебных возможностях и об особенностях умственной деятельности учащихся.

Ниже мы представляем основные виды визуальных задач, акцентируя внимание на следующих параметрах: дидактическое назначение, методическая направленность, структурные особенности, диапазон применения.

6.1. Обучающие задачи

Предлагая решить стандартную задачу, учитель часто заранее знает, что некоторые его ученики не справятся с ней. Мешают пробелы в знаниях, неуверенность в своих силах, другие неудачи предшествующего обучения. Эти ученики отстают от класса все больше и больше – им необходима помощь. Помощь требуется и учителю, который вынужден тратить значительные усилия и время, чтобы урок оказался эффективным для всего класса.

Для оказания такой помощи нами разработаны особые задачи: “Посмотрите и найдите” и “Серия”.

6.1.1. Визуальная задача “Посмотрите и …”

Посмотрите и найдите – задача, данные которой полностью представлены на рисунке (см. рис. II.15-II.18 на стр. 519-522).

Это самый важный вид визуальных задач, их главный элемент. На его основе формируется структура всех других визуальных заданий (рис. 6.02). Он положен в основу многих комбинированных дидактических средств, о которых речь пойдет ниже.

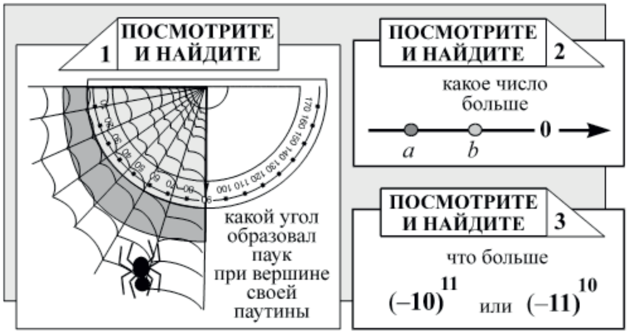


Рис. 6.02.

Задания для формирования навыков
работы с транспортиром (1), сравнения (2) и оценки чисел (3)

Методическая направленность. В младших и средних классах школы оформление этих заданий можно разнообразить с помощью различных иллюстраций или способов представления. Подобные задания могут носить “развлекательный” характер (рис. 6.03.1), ненавязчиво побуждая учеников задумывать над правильностью своих представлений о слове, образе или формуле (рис. 6.03.2).

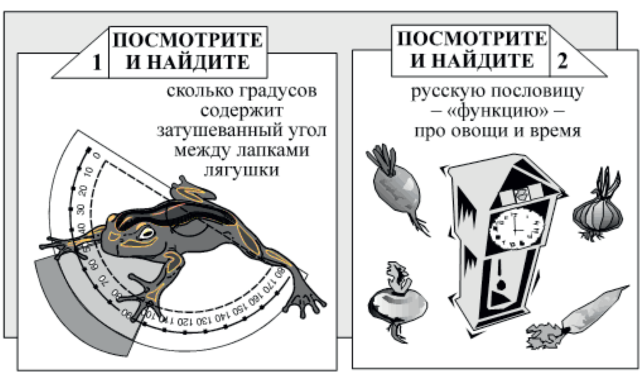


Рис. 6.03.

Задания на сопоставление текста с образом

Структурные особенности. Развернутый текст здесь, как правило, отсутствует, все ориентиры и подсказки сосредоточены на рисунке и в вопросе. Акцент ставится на “ключевые” (направляющие мысль) слова и характерные особенности рисунка или формулы.

Диапазон применения. Эту задачу можно использовать при демонстрации нового материала (рис. 6.04.6-7) для повторения пройденного, в качестве домашнего задания или для самостоятельной работы.

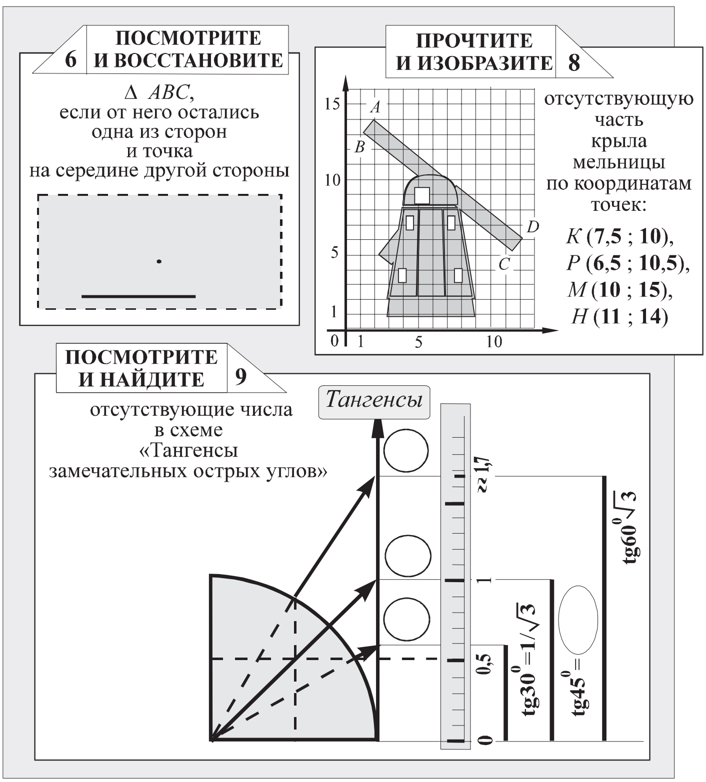


Рис. 6.04.

Примеры заданий “Посмотрите и найдите”
разных дидактических назначений и методической направленности

Специальными вариантами задания “Посмотрите и найдите” является задача “Прочтите и изобразите”. При решении таких задач рисунок (рис. 6.04.8, см. также рис. II.16.17 на стр. 520), текст или формулу следует дополнять (преобразовывать) так, чтобы ответ стал видимым.

6.1.2. Визуальная задача “Серия”

Определенная последовательность отдельных этапов преобразования рисунка или формулы позволяет сконструировать набор заданий, который мы именуем серией.

Серия – это специальный комплект формул, текстов или рисунков, посвященных визуализации конкретного понятия путем последовательного описания, демонстрации его элементов, свойств и связей.

В преподавании математики принцип серии известен давно. Особенно характерен он был для сборников задач 50-х и 60-х годов [70, 98, 163, 178 и др.].

Новым, что мы вносим в его применение, является выделение серии в особый класс обучающих методических средств с акцентом на работу зрения (см. рис. II.20-II.22 на стр. 524-526).

Серия является наиболее продуктивным инструментов в списке визуальных заданий, поэтому наиболее полно раскроем ее возможности.

Дидактическое назначение. Задачи “Серии” помогают не только в формировании навыков и приобретении умений, они формируют и навыки самостоятельной работы ученика. Их можно использовать как инструмент для конструирования визуального образа объекта.

Методическая направленность. Серия может применяться регулярно, она особенно эффективна в тех случаях, когда формирование навыков учащихся по каким-либо причинам затруднено. Визуализация трудных для восприятия и логического анализа понятий может значительно облегчить процесс усвоения учебного материала.

Структурные особенности. В основу данного комплекта положена “многоуровневость”, обеспеченная последовательным усложнением образа понятия или его свойства. Развитие образа может сопровождаться изменением его структуры, специальным выделением деталей, другими “полиграфическими” приемами.

Диапазон применения. Возможности дидактического средства “Серия” практически неисчерпаемы. Удачно составленная серия является обучающей программой, что позволяет использовать ее практически на всех этапах обучения. Ее можно применить

- при начальном вводе понятия,
- при отработке навыка оперирования им,
- для визуализации конкретного теоретического положения,
- для восстановления утраченных знаний и навыков,
- для усвоения сложных переходов при решении трудных задач.

Обсудим серию, посвященную нахождению тангенса угла треугольника (рис. 6.05.А). Параллельно представим возможный ход обоснования решения каждой из пяти задач (рис. 6.05.Б).

Первая задача (рис. 6.05.А-1) решается мгновенно, если учащийся знает определение тангенса острого угла. Поскольку данный треугольник имеет прямой угол, а его катеты равны, то $\mathbf{tg}\angle BAC = \mathbf{1}$ (рис. 6.05.Б-1).

Во втором задании (рис. 6.05.А-2) треугольник ACB прямоугольный разносторонний. Учащийся должен: выделить на чертеже угол BAC, определить длины катетов и, составив требуемое отношение, определить: $\mathbf{tg}\angle BAC$ (рис. 6.05.Б-2).

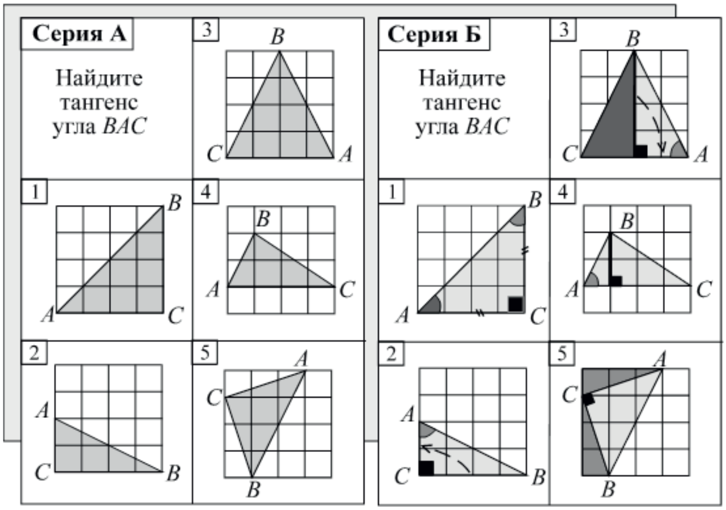


Рис. 6.05.
Серия, посвящённая формированию навыка нахождения
тангенса угла прямоугольного треугольника:
исходные задания (А), подсказки к решению заданий (Б)

В третьем – (рис. 6.05.А-3) нахождение тангенса заданного угла связано с цепочкой различных операций. Нужно: выделить прямоугольный треугольник, определить в нем заданный угол, вычислить длины катетов и найти искомое отношение (рис. 6.05.Б-3).

Четвертая задача (рис. 6.05.А-4) распространяет формируемый алгоритм на случай произвольного разностороннего треугольника (рис. 6.05.Б-4).

Последнее задание (рис. 6.05.А-3) самое сложное. Решение его требует определенной догадки: треугольник ABC равнобедренный, а угол при вершине C – прямой (рис. 6.05.Б-5).

Серии как единый комплекс (специальное дидактическое средство) можно подразделить на два вида.

Серии 1-го вида позволяют проводить обучение в непрерывном режиме. Формирование умений и навыков идет постепенно и максимально последовательно – все задачи строго ориентированы на содержание соответствующего теоретического положения (рис. 6.06).

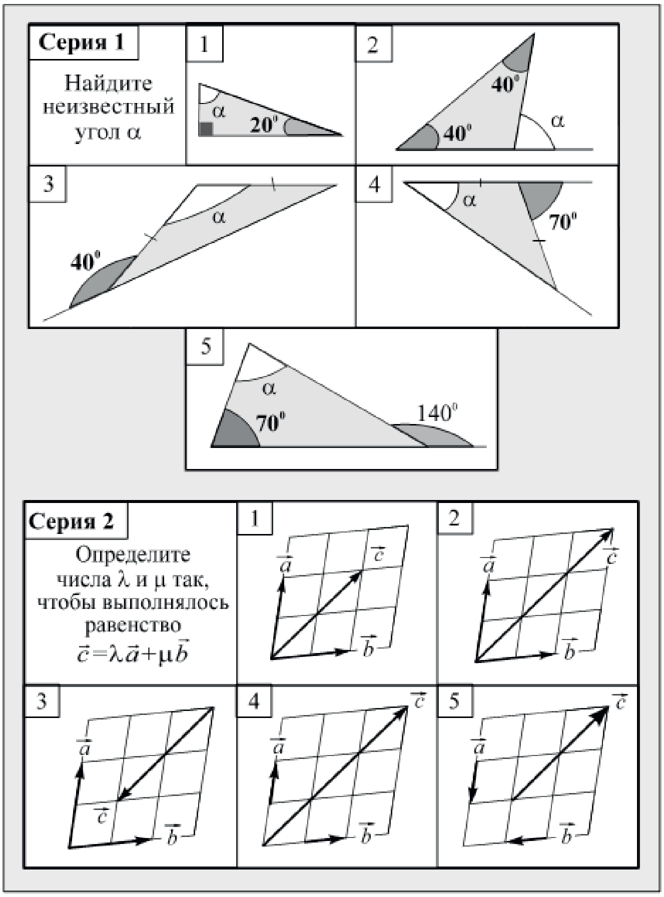


Рис. 6.06.

Задания для нахождения по рисунку величин углов (1), параметров векторного уравнения (2)

Серии 2-го вида включают задачи, для решения которых необходимы применение теории из различных разделов и тем курса, достаточно хорошая техника вычислений (в математике и физике), высокий уровень геометрических представлений (в географии и музыкальной теории) (рис. 6.07).

Обучение ведется в дискретном (скачковом) режиме, поскольку каждое последующее задание может отличается от предыдущего (например, способом оперирования объектами).

Решение таких задач связано с поиском, преобразованием визуальных образов или основных формул, извлечением дополнительной (неявно заданной) информации, позволяющей выйти на правильный ответ.

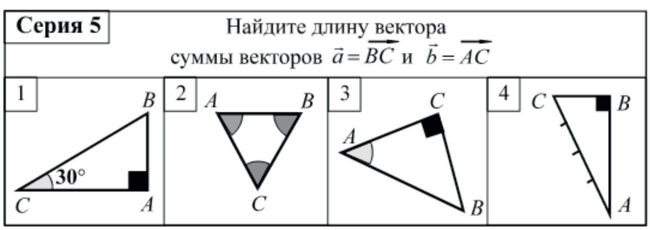


Рис. 6.07.
Серия для восстановления
навыков действий над векторами

Многообразие возможных форм представления содержания серии позволяет использовать данное дидактическое средство практически на всех этапах обучения – от 5-х классов основной школы (рис. 6.08.1) до первых семестров вуза (рис. 6.08.2, см. также рис. II.20 на стр. 524).

Блоки серий, предлагаемых в определенной последовательности, могут служить тренажерами для учащихся старшей школы по многим темам различных учебных дисциплин (рис. 6.09, см. также рис. II.21- II.22 на стр. 525-526).

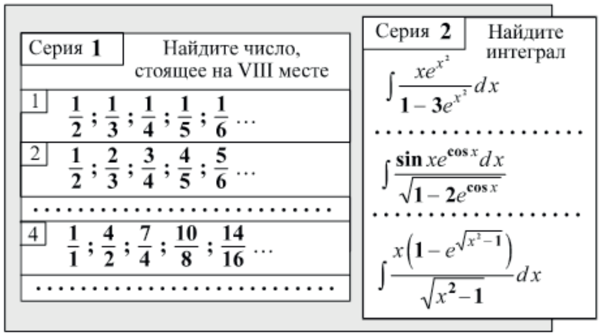


Рис. 6.08.

Серия

для разных уровней математического образования

Рис. 6.09.

Примеры заданий “Серия” для различных предметных областей: музыка (1), физика (2), иностранный язык (2)

6.2. Восстановление утраченных знаний и навыков

В последнее время наблюдается увлечение учителей так называемым “блочным” методом обучения.

Отдельный раздел курса (или достаточно объемная его часть) сосредотачивается в программе какой-либо ступени (класса) школы. Через определенное время, после изучения последующих тем курса, полученные знания, умения и навыки “тускнеют”, ученики забывают многое из того, что они так тщательно изучали ранее.

Требуется время и нужны специальные упражнения, позволяющие в короткие сроки восстановить забытое.

Чтобы ускорить этот процесс, мы ввели две специальные задачи “Тренажер” и “Правильный ответ”.

6.2.1. Визуальная задача “Тренажер”

Тренажер – это упражнения, восстанавливающие или формирующие определенные (конкретные) навыки учащегося.

Все составляющие его задания посвящены точно указанному понятию, его свойству или операции над такими однородными понятиями (рис. 6.10, см. также рис. II.23-II.26 на стр. 527-530).

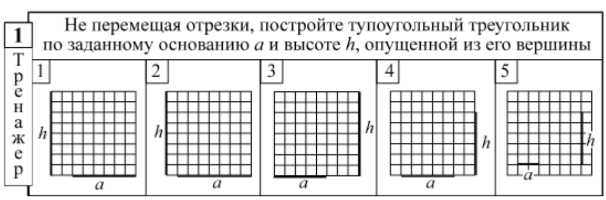


Рис. 6.10.

Примеры заданий на клетчатой бумаге
для формирования навыков построения без циркуля и линейки

Дидактическое назначение. Тренажер математического содержания восстанавливает забытые ныне традиции “устного счета”, таким образом, мы несколько сужаем “поле действия” тренажера, строго ориентируясь на его дидактическую цель (рис. 6.11).

Решение упражнений тренажера как бы “останавливает” ученика, предоставляя ему возможность сосредоточиться на одном образе или действии (см. рис. II.24 на стр. 528).

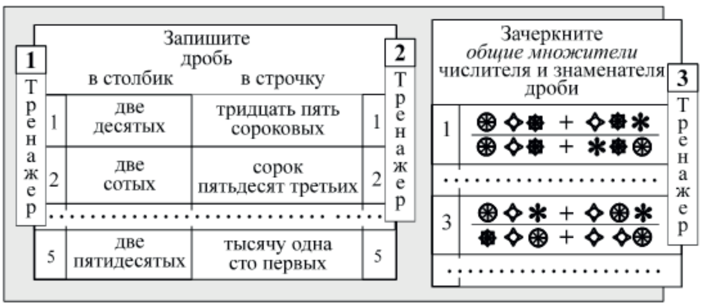


Рис. 6.11.

Фрагменты тренажеров, помогающих формировать навыки:
перевода текстового задания дроби в её формулу (1-2),
нахождения одинаковых элементов в структуре дроби

Приведем пример.

Комплект тренажеров на рис. 6.12 посвящен теореме Пифагора. На конкретном учебном материале учащиеся получают возможность восстановить умения:

возведение чисел в квадрат и извлечение квадратного корня из числа,

действия с обыкновенными и десятичными дробями и т.д. (рис. 6.12.1-3).

Одновременно в сознании учащихся объединяются геометрические и алгебраические интерпретации факта:

теорема Пифагора есть “инструмент” к нахождению величин искомых элементов плоских фигур (рис. 6.12.4-6).

Т р е н а ж е р ы

1 Вычислите квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника, если квадраты длин его катетов равны

1	**9 ; 16**
2	**1/4 ; 1/9**
3	**1/3 ; 1/5**
4	**5/2 ; 1/5**
5	**2/3 ; 5/4**

2 Найдите квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника, если квадраты длин его сторон равны

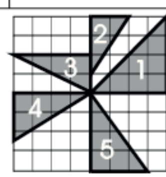
1	**1/4; 1/4**
2	**1/4; 1/9**
3	**3/4; 7/8**
4	**1/4; 1/9**
5	**4/9; 9/14**

3 В прямоугольном треугольнике a и b – катеты, c – гипотенуза. Вычислите длину катета b, если известно, что

1	$a^2 = \mathbf{9}$; $c^2 = \mathbf{25}$
2	$a^2 = \mathbf{1}$; $c^2 = \mathbf{25/16}$
3	$c^2 = \mathbf{1/9}$ $a^2 = \mathbf{1/16}$;
4	$a^2 = \mathbf{1/16}$; $c^2 = \mathbf{1/9}$
5	$a^2 = \mathbf{1/25}$; $c^2 = \mathbf{1/16}$

4 Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника

1	Δ_1
2	Δ_2
3	Δ_3
4	Δ_4
5	Δ^5



5 Найдите периметр прямоугольного треугольника

Δ_1	1
Δ_2	2
Δ_3	3
Δ_4	4
Δ^5	5

6 Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если квадраты длин его катетов равны

1	2	3	4	5
1 ; 1	**9 ; 4**	**4 ; 3**	**1/4 ; 1/25**	**1/3 ; 1/2**

Рис. 6.12.

“Тренажеры”, предлагаемые для усвоения содержания (1-3) теоремы Пифагора и ее применения (4-6)

Методическая направленность. Тренажеры можно составлять на основе единого зрительного образа, рассматривая его с различных сторон (рис. 6.13).

Устное решение задач тренажера является необходимым условием, нарушение которого значительно снизит действие данного средства обучения.

Структурные особенности. Задачи тренажера составляются на основе общего указания и по степени сложности практически не отличаются друг от друга (рис. 6.13, см. также рис. II.23 на стр. 527).

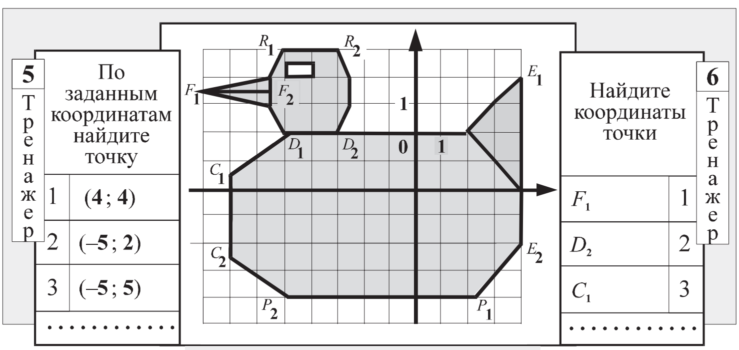


Рис. 6.13.
Вспомогательные упражнения
для освоения темы «Прямоугольная система координат»

Соответственно этому примеры тренажера должны быть такими, чтобы их решение обеспечивалось “элементарной” (для данного этапа обучения) мыслительной операцией, не требовало громоздких обоснований, длительных рассуждений и преобразований.

Диапазон применения. Подобные упражнения можно широко применять тогда, когда утраченные знания и навыки мешают усвоению текущего материала или формированию нового алгоритма (рис. 6.14, см. также рис. II.26.8 на стр. 530).

Тренажер может явиться дополнительным средством при подготовке класса к решению трудной задачи в любой образовательной области.

Рис. 6.14.
“Тренажер”, обеспечивающий переход
от понятия *степени* (математика) к понятию *порядок* (физика)

6.2.2. Визуальная задача “Правильный ответ”

Правильный ответ (Выберите ответ) – это задача с заранее представленными ответами, сформированная по модели известных психометрических тестов, применяемых во всем мире (см. рис. II.27-II.28 на стр. 531-532).

Прекрасным примером являются задания русского варианта международной олимпиады школьников «Кенгуру», назначение и оформление которых свободно варьируются (рис. 6.15.1).

Дидактическое назначение. Главное назначение данной задачи в образовании техники перевода – учащийся должен сопоставить исходный образ, текст или формулу с предлагаемым списком ответов (рис. 6.15.2-3).

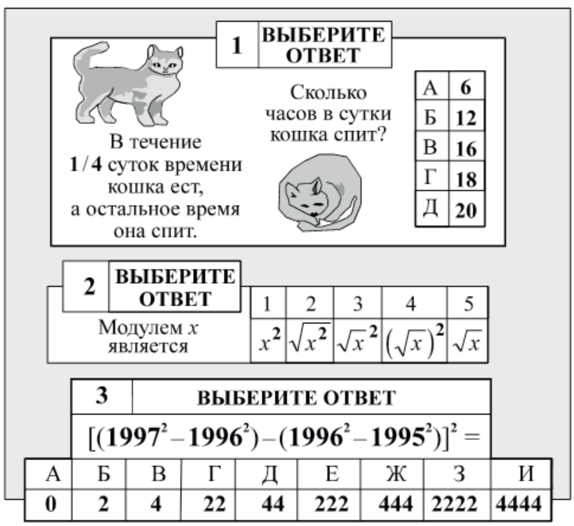


Рис. 6.15.

Задачи: из материалов олимпиады «Кенгуру» (1),
на установление связи “термин–символ ” (2),
на поиск пути устного нахождения решения (3)

Методическая направленность. Учебные задания “Правильный ответ” учитель может сформировать на основе материалов учебного текста, их можно использовать для проверки знания учащимися определения, правила, обозначений, формулы и т.д. (рис. 6.16, см. также рис. II.27 на стр. 531).

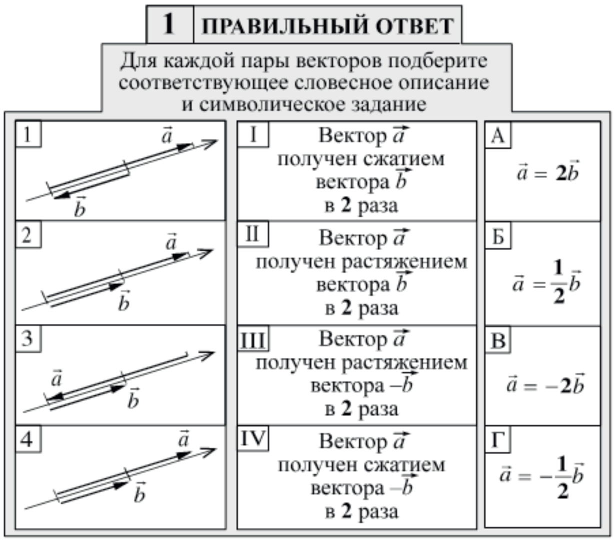


Рис. 6.16.

Примеры заданий “Правильный ответ ”, ориентированных на проверку установления взаимосвязей “рисунок-текст-формула”

Структурные особенности. Эта задача представляет собой частный случай теста (см. ниже) в ситуации, когда к одному из ее заданий прилагается ряд вариантов различных ответов (рис. 6.17).

Характерным является наличие “прямого действия” – представлен только один “образ” (в виде формулы, рисунка или словесного описания).

Диапазон применения. Может широко применяться для проверки общего уровня интеллекта учащихся, для образования внутренних и межпредметных связей. Особенно эффективна для быстрого восстановления теоретических знаний любого школьного предмета (рис. 6.18, см. также рис. II.28 на стр. 532).

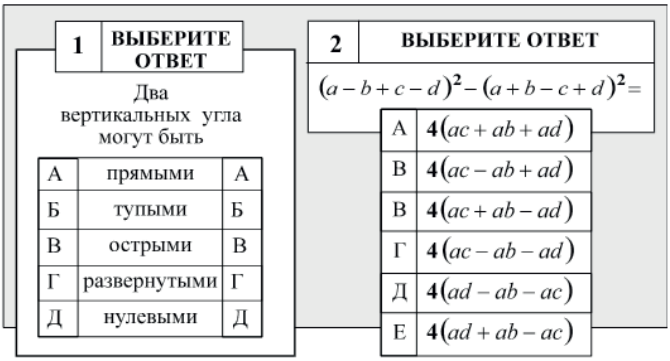


Рис. 6.17.
Визуальные задачи
с вариациями ответов к тексту (1) или формуле (2)

Рис. 6.18.
Примеры визуальных задач “Выберите ответ”
нематематического содержания

Одной из версий данного упражнения может служить задача, в которой среди предложенных утверждений предлагается выбрать наиболее “подходящее”, т.е. то, что приведет к наиболее рациональному способу решения задачи практического содержания. Сопоставления и аналоги парных заданий данного вида дают учащимся богатую пищу для размышлений (рис. 6.19).

Во многих случаях непосредственный вопрос в тексте заменяется на указание типа: “Вычислите”, “Укажите пропущенную букву”, “Решите и найдите ответ”, “Завершите высказывание” и т.д., что позволяет поставить вопросы различного уровня сложности к одному и тому же образу или же один вопрос к разным его вариантам.

3		ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ		4
На линии синуса для углов первой четверти тригонометрической окружности можно отмечать значения синуса угла	А	любые положительные	А	На линии косинуса для углов первой четверти тригонометрической окружности можно отмечать значения косинуса угла
	Б	от **0** до **1**	Б	
	В	любые	В	
	Г	только целое	Г	
	Д	не больше **1**	Д	

Рис. 6.19.

Парные задания для организации размышлений
с помощью сопоставлений

В список ответов можно включить наиболее “популярные” ошибки учеников, ответы с недостаточными данными и т.д.

Среди предложенных ответов один или несколько могут оказаться верными.

Для повышения внимания учеников полезно иногда исключать правильный ответ из общего списка – ученики должны сформулировать его самостоятельно.

6.3. Текущий контроль

На каждом уроке ученики решают разнообразные задачи. Некоторые из них справляются с этой работой успешно, другие – нет. Однако эта информация не всегда своевременно доходит до учителя. Обратная связь затруднена по многим причинам: большое количество учеников в одном классе, разный уровень их подготовки, малое количество времени, отводимое на предмет и т.д. и т.п.

Проверка домашних заданий, самостоятельных и контрольных работ занимает у учителя много личного времени, так как содержание их достаточно объемно. Он не всегда успевает вовремя сообщить результаты классу, проанализировать решения, дать соответствующие рекомендации.

Задержка в оценке работы ученика отрицательно сказывается на его отношении к предмету, "снижает" мотивы обучения, формирует безразличное отношение к собственным успехам.

Ниже мы предлагаем специальные визуальные задачи, предназначенные для текущего контроля и имеющие существенную особенность: время выполнения и проверки их сведено к минимуму.

6.3.1. Визуальная задача "Тест"

Тест – это средство, позволяющее констатировать усвоение контролируемого навыка, знание определенных фактов, усвоение содержания понятия, умение применять его свойства (см. рис. II.29-II.30 на стр. 533-534).

Дидактическое назначение. Главное назначение теста – образование обратной связи в системе "Учитель – ученик". Анализируя ответы своих учеников, преподаватель сможет констатировать их успехи в понимании, усвоении изученного материала.

Структурные особенности. “Тест” (как и “Тренажер”) имеет единое общее указание. “Лишний” или отсутствующий в тексте ответ позволит избежать подгонки решения последнего по порядку решения задания под оставшееся неиспользованное отношение, заставит сделать определенный выбор (рис. 6.20).

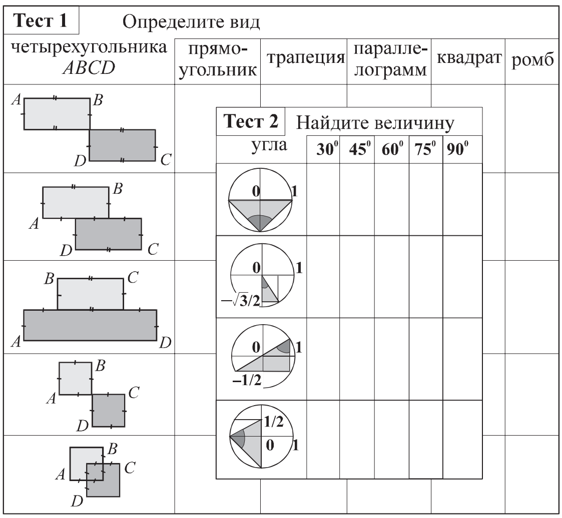


Рис. 6.20.

Примеры тестов на сопоставление данных

рисунок → текст (1) и рисунок → формула (2)

Конкретные задачи визуального теста составляются так, чтобы поиск ответа к ним не требовал больших выкладок, громоздких вычислений и длительных рассуждений.

Кроме этого не только задания теста, но и ответы к ним могут составлять специально организованную последовательность формул, рисунков или текстов.

Методическая направленность. Тест может быть применен на различных этапах обучения: при изучении разделов программы, обеспечивающих государственный стандарт, на занятиях, ориентированных на углубленное и расширенное изучение предмета.

Диапазон применения. Тест (как и тренажер) может быть рассчитан на материал конкретного урока и выполнять функцию текущего контроля (рис. 6.21, см. также рис. II.29 на стр. 533).

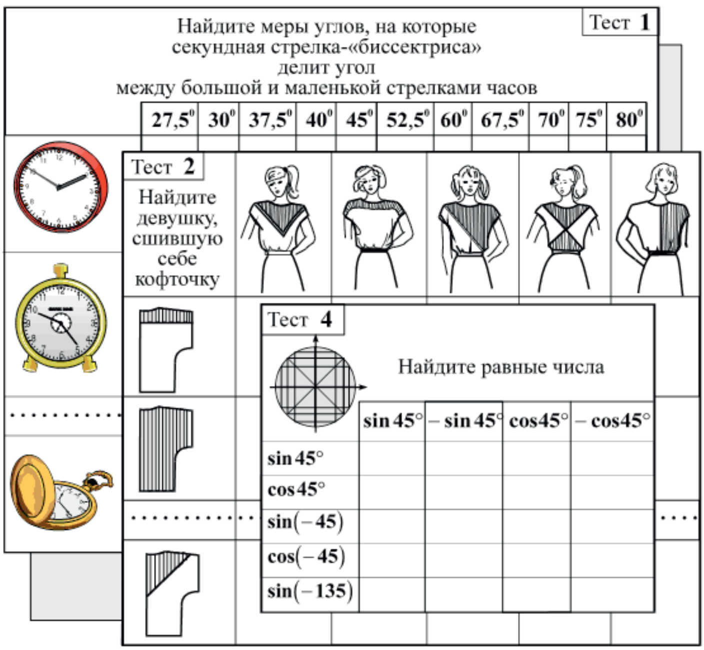


Рис. 6.21.

Фрагменты тестов для уроков математики в основной школе

С помощью теста ученик может выяснить сходство или различие терминов, разобраться в тонкостях определенной операции или семантики слов родного или иностранного языков (см. рис. II.30

на стр. 534), подготовиться к восприятию нового теоретического положения, усвоить новый для него алгоритм действий.

В соответствии с этим применять данный вид проверки знаний, умений и навыков можно в различных ситуациях: в начале очередного урока, непосредственно в процессе объяснения нового материала, в качестве домашнего задания и для разрешения поисковой ситуации (рис. 6.22, см. также рис. II.19 на стр. 523).

СТЕПЕНИ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ

Проанализируйте результаты первой таблицы и *заполните* вторую и третью таблицы.

1

Ответ / Задание	i	**–1**	$-i$	**1**
i^1	+			
i^2		+		
i^3			+	
i^4				+

2

Ответ / Задание	i	**–1**	$-i$	**1**
i^5				
i^6				
i^7				
i^8				

3

Ответ / Задание	i	**–1**	$-i$	**1**
i^9				
i^{19}				
i^{21}				
i^{26}				

Рис. 6.22.

Тесты для нахождения степеней мнимой единицы

6.3.2. Визуальная задача "Посмотрите и определите"

Посмотрите и определите (**Посмотрите и запишите**) – это задачи, построенные на основе единого образа некоторого объекта.

Пять вопросов к нему организуют режим исследования его свойств или правил оперирования ими в заданной ситуации (рис. 6.23, см. также рис. II.31-II.33 на стр. 535-537).

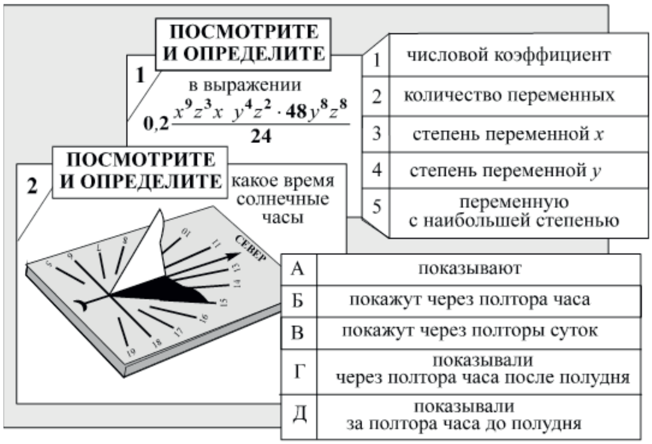


Рис. 6.23.

Комплекты заданий: алгебра (1) и геометрия (2), посвященные исследованию одного математического объекта

Данный блок вопросов характерен специальным набором указаний, формируемых в зависимости от цели исследования.

Дидактическое назначение. Предлагаемые комплекты вопросов “Посмотрите и определите” (“Посмотрите и запишите”) ориентированы на восстановление и проверку знаний, умений и навыков. Все пропорции, детали, обозначения должны быть сохранены, что позволит свободно оперировать ими для получения правильного ответа (рис. 6.24, см. также рис. II.34 на стр. 538).

Методическая направленность. Сильные ученики могут справиться с такими заданиями устно, мысленно преобразовывая рисунок, восстанавливая недостающие данные или проводя устные вычисления и рассуждения. Ученикам, которым подобные мыслительные действия на данном этапе недоступны или трудны, следует перенести рисунок в тетрадь. Это весьма важный момент учебной деятельности, от успешности его выполнения во многом зависит верный ход мысли.

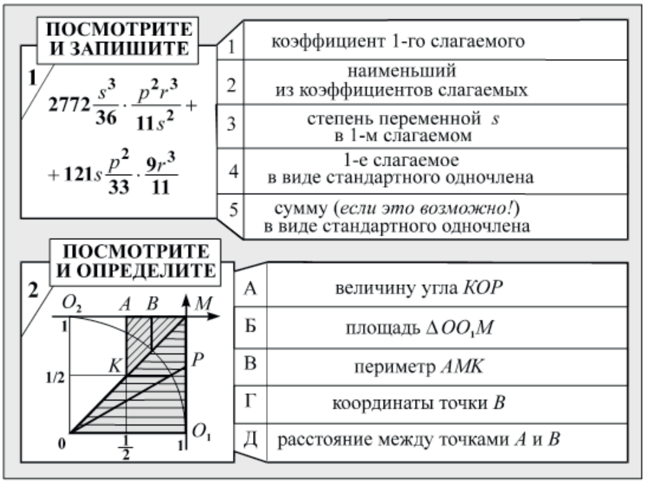


Рис. 6.24.
Комплекты заданий: алгебра (1) и геометрия (2),
посвященные исследованию связей
между парами математических объектов

Структурные особенности. Порядок вопросов может быть организован так, чтобы предыдущий вопрос содержал дополнительную информацию к последующему. Однако отвечать на вопросы задачи ученик может и в произвольном порядке. Не всегда обязательно обосновывать ответы, иногда достаточно записи правильного результата.

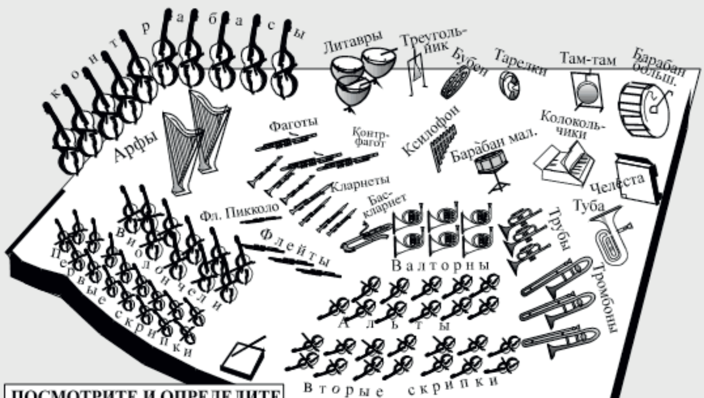
Диапазон применения. Задание “Посмотрите и определите” может оказаться полезным при проверке усвоения теоретического материала и при повторении и закреплении. Время выполнения и проверки их сведено к минимуму притом, что диапазон содержания может быть достаточно широк (рис. 6.25, см. также рис. II.33 на стр. 537).

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

1

Больной посещает врача

А	в данном предложении глагол	
Б	на какой вопрос отвечает этот глагол	
В	в каком лице стоит этот глагол	
Г	в каком числе употреблен этот глагол	
Д	на каком месте в предложении стоит этот глагол	



ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

3

А	самую большую группу инструментов симфонического оркестра
Б	ударные инструменты
В	клавишные инструменты
Г	инструмент оркестра, имеющий самый большой диапазон
Д	духовые деревянные инструменты, отсутствующие на данной схеме

Рис. 6.25.

Сюжеты “Посмотрите и определите” нематематического содержания

При работе на ПК можно сформировать вспомогательные файлы с демонстрацией преобразований,

с блоком подсказок,

с теоретическими выкладками,

что позволит ученику в случае затруднений выйти на правильный ответ.

6.4. Комбинирование визуальных дидактических средств

Естественным развитием данного банка визуальных дидактических материалов является комбинированное дидактическое средство, названное нами матрицей, описание которого мы проведем достаточно полно и подробно.

Термин “Матрица” выбран нами не случайно. Мы отталкивались от значения этого слова, принятого в «Словаре русского языка»:

> «Матрица (лат. *matrix* матка, источник, начало) – совокупность условным образом расположенных в виде прямоугольников объектов, имеющих определенный... смысл» [126], значение которых можно раскрыть (вычислить, объяснить и т.д.).

Матрица – это специальное комбинированное дидактическое средство, которое может реализовать разные функции обучения.

Многоплановость использования матрицы кроется в структуре, позволяющей применять ее в различных режимах в зависимости от целей и способов применения, учитывать потребности разноуровневого обучения предмету (рис. 6.26, вверху).

В предлагаемом варианте матрица представляет собой таблицу из шести строк и шести столбцов (рис. 6.26, внизу).

> В верхнем левом углу таблицы находится заголовок, очерчивающий круг вопросов, которому посвящено ее содержание. Под заголовком в левом крайнем столбце последовательно предъявляются пять объектов одной и той же природы. Способ их задания их может быть различным: краткое словесное описание, перечень соответствующих формул, различные геометрические образы.

Построение столбца ведется по принципу серии: каждая последующая “модель” несколько сложнее для восприятия и анализа, чем предыдущая.

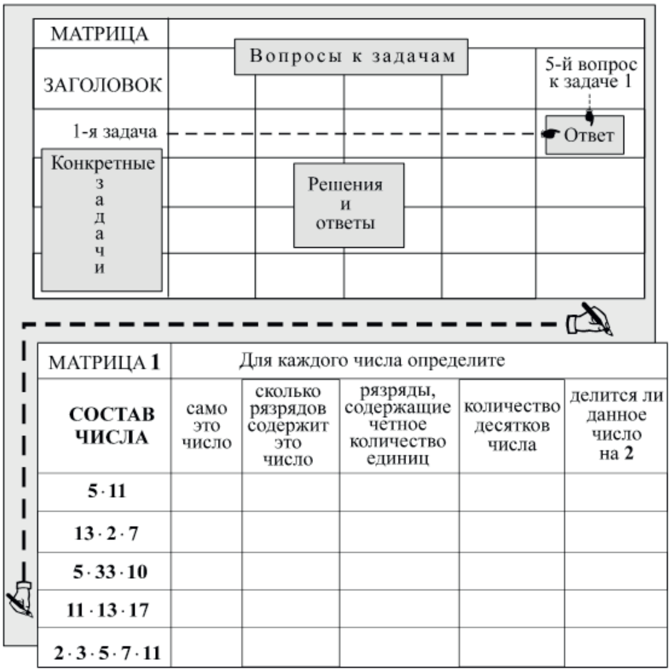


Рис. 6.26.

Структура визуальной задачи “Матрица” (наверху)
матрица для проверки ЗУНов по теме «Состав числа» (внизу)

В верхней строке таблицы записываются конкретные условия, определяющие ту задачу исследования, которую определяет соответствующий столбец матрицы.

По своему строению матрица похожа на тест, но требует отдельного решения каждой задачи, как серия. “Рабочее поле” (5x5) содержит, таким образом, 25 задач. Этот вариант может быть изменен путем варьирования количества строк или столбцов. Решения можно оформлять в виде ответов в клетке, соответствующей задаче.

Рассмотрим их возможности.

Обучающие матрицы применяются в учебном процессе по ходу освоения определенного материала. Отдельные примеры (задания) такой матрицы можно использовать неоднократно, в разных классах и в различных сочетаниях.

Среди таких матриц можно выделить таблицы, посвященные формированию алгоритма действий с одним и тем же объектом. Переход от одного задания к другому (спуск по строкам или переход от столбца к столбцу) должен осуществляться как можно более плавно. Основной акцент ставится на последовательное освоение объекта и его свойств в виде заданной цепочки действий. Такие матрицы в первую очередь предназначены тем, кому трудно справиться с программным материалом (рис. 6.27, см. также рис. II.37 на стр. 541).

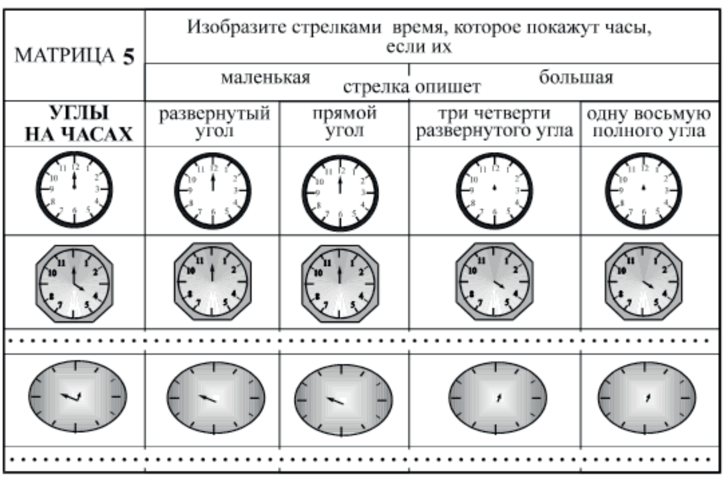


Рис. 6.27.

Пример матрицы для начальной школы

Ценность обучающих матриц достаточно велика. Общий сюжет позволяет сосредоточиться на определенном объекте. Разнообразный список вопросов дает возможность выработать необходимый алгоритм действий при исследовании этого объекта.

Постепенно усложняющийся образ или его деталь позволяет учитывать потребности разноуровневого обучения с одной стороны и реализацию постоянного и последовательного развития умений и навыков с другой.

Предлагаем один из вариантов применения обучающей матрицы.

- Учитель подробно объясняет решение задач верхней строки.
- Вторая строка обсуждается классом при необходимой помощи учителя.
- Решение заданий третьей строки осуществляют сами учащиеся.
- Четвертая строка предлагается для самостоятельного решения на уроке или на дом.
- Последняя строка адресуется наиболее сильным учащимся, которые демонстрируют ход своих рассуждений на следующем занятии.

Отдельная клетка матрицы с соответствующим указанием и конкретным заданием соответствует задаче "Посмотрите и найдите".

Каждый столбец матрицы может рассматриваться как серия, а ее строка – как задача "Посмотрите и определите".

Матрица как дидактическое средство может быть использована практически на всех предметах любой образовательной области.

Весь банк матриц можно организовать и рассортировать таким образом, чтобы учитель мог проследить линию какой-либо темы, развитие понятия и действий над ним в целом в структуре курса (рис. 28, см. также рис. I.19 на стр. 497 и рис. II.41 на стр. 545).

Для того чтобы учитель был в полной мере снабжен материалами разного уровня сложности, к общему списку заданий матрицы (верхняя строка) можно приложить не один, а несколько вариантов столбцов с конкретными примерами.

МАТРИЦА **4**	Для каждого вещества по его химической формуле определите				
ИНФОРМАЦИЯ О ХИМИЧЕСКОМ ВЕЩЕСТВЕ	его название	сколько молекул показывает формула	его качественный состав	его количественный состав	его относительную молекулярную массу
2H_2O					
2CO_2					
3FeS					
2Al_2O_3					
2$CaCl_2$					

МАТРИЦА **5**	Для каждого глагола				
ФОРМА И ВРЕМЯ ГЛАГОЛА И ПРИЧАСТИЯ	определите его вид	укажите его время	образуйте действительное причастие настоящего времени	выделите суффикс действительного причастия настоящего времени	составьте словосочетание с данным причастием
идут					
л□жал					
ст□ит					
ул□тела					
с□дет					

Рис. 6.28.

Матрицы нематематического содержания:
химия (1), русский язык (2)

Важным обстоятельством является также общий объем содержания матрицы, позволяющий расширить представления учеников о применении фрагментов учебной теории.

Из полного банка матриц, посвященных определенному разделу школьной теории, учитель сможет выбрать примеры для итогового зачета.

Предметный комплект матриц предоставляет широкие возможности для проведения контроля различного уровня сложности и назначения (рис. 29, см. также рис. II.41 на стр. 545).

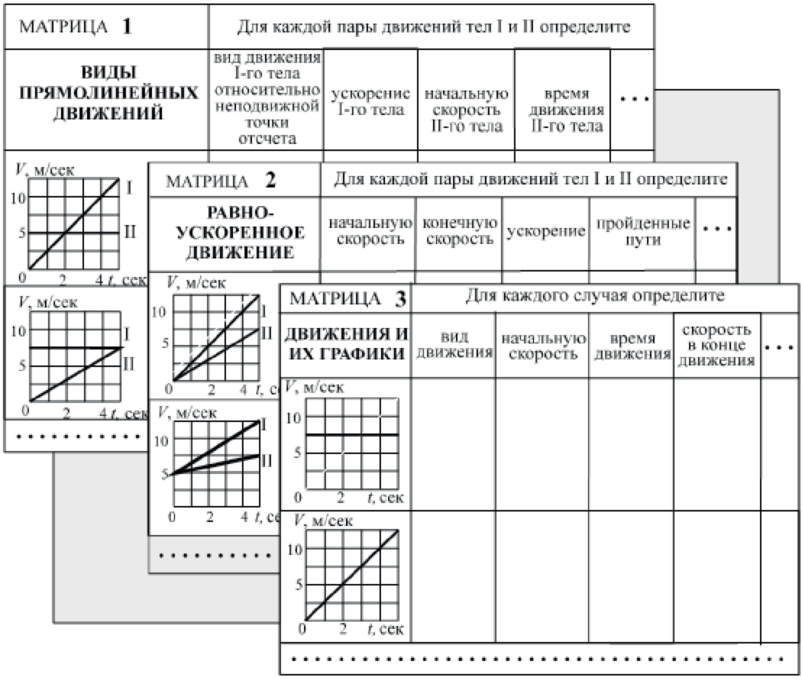


Рис. 6.29.

Комплект матриц по единой теме нематематического содержания (физика)

Краткие итоги

Структурные и содержательные связи визуальных задач очевидны. Их можно отразить в единой схеме (рис. 6.30).

Данная схема наглядно представляет не только основные этапы обучения во всех возможных взаимосвязях, но и возможные применения визуальных задач на каждом из таких этапов. Любая из рассмотренных выше задач может быть применена

при обучении или восстановлении знаний, умений и навыков,

при текущем контроле или конечной проверке.

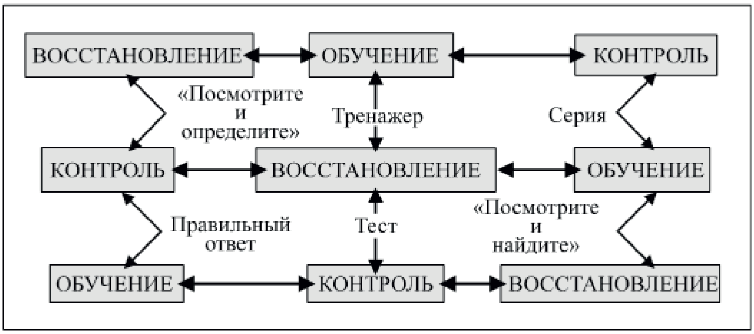


Рис. 6.30.

Схема взаимосвязей основных видов учебных заданий
в системе Визуальная Среда Обучения

Например, задания “Теста” практически не отличаются от заданий “Тренажера”, и при необходимости любой тренажер легко превратить в тест и наоборот.

Дидактическое отличие в их целевом назначении.

Тренажер обучает – ответы отсутствуют, их необходимо найти решающему. Тест проверяет – ответы, среди которых могут быть и неверные, представлены в тексте, и решающий должен сверить с ними полученные результаты, отмечая совпадения и отбрасывая расхождения.

Информационную схему можно превратить в “задачу на конструирование”. Действительно, поскольку на основе одного и того же визуального образа (рисунок, фрагмент текста или формула) можно составить разные задания, любая из рассмотренных в предыдущем параграфе задач может быть применена как при обучении, так и при восстановлении и последующем контроле. Важно, что при предлагаемом нами подходе учитель может определить:

– какую сторону мышления ученика он активизирует при решении именно этого вида задачи,

– какие требования к ученику полезно предъявлять при решении конкретного упражнения,

– какие результаты обучения можно ожидать, если ученик справляется с решением данного примера.

Более того, один и тот же образ (или визуальный стандарт) может быть неоднократно применен и рассмотрен с различных точек зрения (на уроках разных предметов в одном и том же классе).

Совершенно очевидно, что уровень поддержки ученика должен быть чрезвычайно гибким.

Сильным ученикам достаточно напомнить соответствующее правило или просто указать на ошибку, и она будет исправлена. Однако не все могут воспринять это правило “на слух”– многим необходим разбор и анализ решения аналогичного примера.

Слабые ученики, как правило, оказываются в ситуации “потери” необходимых (для решения примера) знаний, умений и навыков и требуют значительной методической и психологической поддержки.

Выводы

1. Рассмотренные в первой главе этапы активного восприятия знаковой учебной информации требуют специальной организации, продуманных способов подачи учебного материала. С одной стороны, “погружая” мышление школьника в новую Визуальную Среду Обучения, мы радикально обновляем инструментальные и методологические средства педагогики и методики. В то же время, конструируемая нами среда позволяет сохранить и обновить достижения методик дисциплин отдельных предметных областей школьного образования.

Большую помощь могут оказать специальные приемы введения и преобразования информационных сообщений – расчленение на отдельные фрагменты, визуально ясное оформление, постоянное взаимодействие трех языков предъявления информации. Этот момент мы считаем чрезвычайно важным, Он создает необходимую основу для взаимно обратного перевода с “языка слов” на “язык символов” и “язык зрительных образов”.

2. Предлагая идею информационной тетради, мы ориентируемся на то, что для начала полезно приводить не строгие описания определенного объекта, а представить его визуальные образы, продемонстрировать визуально его составляющие, дать рассмотреть результаты преобразований, познакомить (опять-таки визуально) с применением различных свойств. В подобном случае при появлении нового понятия учащийся имеет возможность немедленно соотнести его наименование с общим образом, выделить необходимый основополагающий элемент, поскольку все внимание сконцентрировано на простом, не загроможденном излишними деталями, образе.

3. Визуальный образ понятия (или его свойства) “рождается” на одной из страниц информационной тетради, принимая окончательный вид в соответствующей информационной схеме. Информационная схема учит пользоваться готовым справочным материалом, восстанавливает утраченные знания и навыки, позволяет обобщить практический опыт и, главное, сформировать целостное представление о содержании больших разделов курса.

4. Нередки случаи, когда ученику требуется помощь в восприятии и усвоении образа.

Задача “Посмотрите и найдите” является основой практически для всех визуальных задач. Ее главное назначение – формирование умений и навыков распознавания образа понятия и преобразования его для нахождения ответа. Правильно и красиво составленный образ, интересный или “каверзный” вопрос к нему могут “пробудить жажду творчества” у ученика, предоставить простор для развития его интеллекта и фантазии.

“Тренажер” введен нами как вспомогательное упражнение, позволяющее ученику отработать определенную (плохо усвоенную или забытую) операцию над объектами.

Главной особенностью визуального комплекта “Серия” является многоуровневость его заданий, обеспеченная последовательным усложнением образа определенного понятия или его свойства. Решая задачи серии, ученик начинает с действий по образцу, который он может отыскать на соответствующей странице учебника, либо в разделе “помощь” программы. Таким образцом может быть фрагмент теории, демонстрационный пример, информационная страница или достаточно компактно организованная схема.

Параллельно с обучающими визуальными задачами мы сформировали материалы, которые обозначили как “Правильный ответ”, “Тест” и “Посмотрите и определите”. Они предназначены для быстрой обратной связи – текущего контроля.

Структуру задачи “Тест” можно применять при отработке конкретного навыка, формировании мини-алгоритма, демонстрации приложений. Достаточный банк тестов позволит учителю своевременно получать информацию о затруднениях своих учеников. Структуру теста можно применять при отработке навыка, формировании алгоритма, демонстрации приложений.

Содержание задания “Правильный ответ” может быть почерпнуто из теоретического раздела учебного пособия.

Блок “Посмотрите и запишите” представляет собой набор задач типа “Посмотрите и найдите”.

Главной особенностью блока “Посмотрите и определите” является список вопросов к одному и тому же объекту, направленных на анализ, исследование и преобразование образа, который “представляет” данный объект.

5. Особым видом визуальных задач является новое дидактическое средство “Матрица”, применяемое для обучения и итогового контроля.

Отдельная клетка матрицы с соответствующими указаниями и конкретным заданием (вопросом к объекту) подобна упражнению “Посмотрите и найдите”. Решение задач ее столбца аналогично работе с серией. Каждая строка такой матрицы – это вариант задания “Посмотрите и определите”.

Данное средство позволяет учителю представить, а ученику осознать необходимые требования к их умениям, знаниям и навыкам, формируемым в процессе обучения.

Глава III

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВИЗУАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Каждый учитель математики использует на уроках наглядный материал – формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы на столах учеников.

Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы (этой цели достичь легко), вторая – чтобы ученик **ВИДЕЛ** (**понимал**), что заложено в этих образах.

Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьезного воспитания, как культура письма и речи.

В данной главе мы предлагаем модель визуальной методики преподавания одного из предметов общеобразовательной и специальной школы – математики, основные положения которой могут быть использованы в преподавании других школьных дисциплин.

§7. Организация “живого созерцания” на уроках математики

Одной из основных функций математики как учебного предмета является усвоение учащимися математического метода познания, в ходе которого визуальное мышление, особые параметры которого задаются свойствами учебного знакового материала, может функционировать тогда, когда содержание изучаемого математического материала дается в визуально определяемой форме.

Это естественно, поскольку, как пишет Иден,

> «... те образы, которые можно видеть, поддаются изучению значительно легче, чем эфемерные образы, воспринимаемые слуховой или сенсорной системами» [75, с. 247].

При переходе от устных объяснений к записям, печатному тексту математического содержания происходит отвлечение, перестройка сознания на восприятие знаков как конкретных образов.

Именно эта знаковая материализация математических понятий и отношений между ними принимается нами как необходимый атрибут процесса приема и усвоения математических знаний в условиях обучения в средней школе.

> Момент необходимый, поскольку восприятие символов (как конкретных образов) присутствует при введении каждого нового понятия и повторяется на каждом из этапов изучения курса.

Создаваемая нами методика направлена на формирование умения активно воспринимать и перерабатывать визуальную математическую информацию. Мы обозначили эту сторону умственной деятельности обучаемых словами “живое созерцание”.

В основу “живого созерцания” учащихся на уроках математики мы предлагаем положить три выделенных нами важных этапа активного зрительного восприятия:

– анализ визуальной информации;
– распознавание стандарта;
– составление плана работы.

7.1. Анализ визуальной информации

Анализ визуальной информации начинается с осознания общей структуры информационного сообщения и выделения его элементов.

Поясним, что мы понимаем под словами “элемент учебной математической информации” и “структура учебной математической информации”.

Под **элементами** учебной математической информации, задаваемой с помощью формул, будем подразумевать не только сами символы, но и такие их сочетания, которые можно рассматривать как логически осмысленные “части” (взаимосвязанные блоки) этой информации.

Так, если

a и b – элементы некоторого алгебраического выражения,

то $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, a/b и т.д. в зависимости от условий также могут оказаться его элементами.

Естественно, что и аналитическая форма задания функциональных зависимостей

$$(\sqrt{x},\ x^n,\ |x|,\ \mathbf{lg}\,x,\ \mathbf{sin}\,x,\ \mathbf{tg}\,x \text{ и т.д.})$$

выступает как некоторый самостоятельный неделимый элемент.

Образование навыков определения элементов структуры формульной информации следует начинать уже с 5-6 классов школы.

Разложение на множители и сокращение дробных выражений – операции, которые доставляют много “неприятностей” и учителю и ученику.

Уже эти простые примеры “обнажают” факт, отмеченный Л.Д. Кудрявцевым:

«Процессы образования и воспитания людей можно уподобить росту культурных растений, ибо все эти процессы, с одной стороны, могут происходить без активного вмешательства человека извне, а с другой стороны, подобное вмешательство существенно влияет на результат» [95, с. 10].

Действительно, чтобы объединить, осмыслить тождественность обозначений типа

$$\lg^2 x,\ \ \log_{10}^2 x,\ (\lg x)^2,\ (\log_{10} x)^2,\ \ \frac{1}{(\log_{10} x)^{-2}},\ \ \left(\lg^{-2} x\right)^{-1} \text{ и т.д.}$$

необходима определенная математическая культура – знание различных форм записей одного и того же математического объекта, правил преобразования одной из них в другую, умение смотреть и видеть.

Однако практика показывает, что учащиеся в большинстве случаев затрудняются в опознании “одинаковых” или “стандартных” (хорошо известных, основополагающих) элементов информации при решении практических задач.

Даже в более простых случаях наблюдается отсутствие у учащихся восприятия знаковых структур как некоторых зрительно воспринимаемых образований – визуальных образов, особенности которых поддаются активному зрительному анализу.

Различные задания к одному и тому же образу позволяют сосредоточить внимание ученика на определенной операции.

Определяя элементы математической информации, учащийся осуществляет «тот практический реальный анализ, который представляет первую ступень познавательной деятельности и в этом смысле предшествует умственному анализу и синтезу, совершающемуся в словесном плане» [20, с. 132].

К примеру, ученик неполной средней школы, знакомый с правилом сокращения дроби, но не имеющий представления о логарифмах, может сообразить, что $\frac{(\ln x)^2}{\ln x} = \ln x$, оперируя с выражением $\ln x$ как с единым неделимым элементом.

Учебная математическая информация, задаваемая иллюстративным образом, также довольно четко подразделяется на элементы.

При изображениях пространственных тел или плоских фигур в одних случаях к элементам относятся сами эти фигуры, в других – выделенные на чертежах их составляющие (высоты, углы, грани, вершины и т.д.).

Графическая иллюстрация функциональных зависимостей включает в качестве элементов оси координат, области определения и множества значений, конкретные значения переменных, участки кривых, оси симметрии и т.п.

Примеры, аналогичные тем, которые приведены на рисунках II.05. (стр. 509), и II.23 (стр. 527), позволяют сосредоточить внимание на их особенностях, получить визуальные представления и обобщения.

Разумеется, подобная дифференциация математической информации на элементы весьма условна. Так, при изучении частных значений функции к элементам относятся все мельчайшие подробности как формульного, так и геометрического способов их предъявления, в том числе и значения функции на концах промежутка в зависимости от того замкнут он или нет (рис. 7.01).

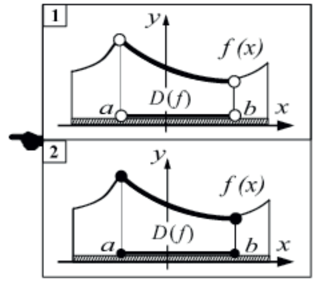


Рис. 7.01.
Исследование $f(x)$
в области ее определения

При переходе же к оценке поведения функции на заданном отрезке (рис. 7.02), мы укрупняем наблюдаемые элементы, нас интересуют уже не частности, а поведение функции в целом – на определен ном интервале.

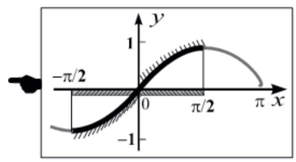


Рис. 7.02.
Исследование $f(x)$
на заданном промежутке

Под **структурой** математического информационного сообщения мы подразумеваем относительно устойчивую систему связей элементов, образующих целое – исходную информацию.

Одной из самых важных сторон осознания структуры информационного фрагмента является определение связей между его элементами.

Например, задание

“Расставить знаки умножения в выражениях:

$$\text{а) } \frac{\mathbf{tg}\,(x+y)\,a^{x+y}}{\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x}; \qquad \text{б) } \frac{\mathbf{lg}\,a\,b}{\mathbf{lg}(a-b)\;\;\mathbf{lg}(a+b)}\text{”;}$$

часто выполняется учащимися следующим образом:

$$\text{а) } \frac{\mathbf{tg}\cdot(x+y)\cdot a^{x+y}}{\mathbf{sin}\,x\cdot\mathbf{cos}\,x}; \qquad \text{б) } \frac{\mathbf{lg}\cdot a\cdot b}{\mathbf{lg}\cdot(a-b)\cdot\mathbf{lg}\cdot(a+b)}.$$

При переписывании условия задачи ученики постоянно допускают ошибки типа: $\sqrt{a}+b$ вместо $\sqrt{a+b}$,

$$a^{3}\sqrt{b} \quad \text{вместо} \quad a\sqrt[3]{b}.$$

и т.д., что приводит к изменению смысла исходного условия. Здесь дело не только в незнании определенных математических законов, но и в "невоспитанности" математического зрения.

Именно этим и можно объяснить огромное количество "описок" при перенесении информации с доски или учебника в тетради учащихся. Они так увидели и так переписали, не подумав о возможности различных связей между отдельными элементами математической конструкции.

Осознание, визуальный анализ, "живое созерцание" структуры информации имеет громадное значение при использовании известной формулы.

Довольно часто, зная, что $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$,

учащиеся, тем не менее, пишут: $\sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)\frac{2}{3}$.

Активное созерцание формулы плохо реализуется в учебной практике.

И это притом, что подавляющее количество примеров и задач любого учебника для каждого класса школы посвящено отработке навыка – по известной формуле составить, преобразовать, вычислить.

Практически нельзя найти раздел дисциплины естественно-математического цикла, где умение расчленять информацию на элементы и определять ее структуру оказалось бы "без работы".

Например, в химических задачах типа:

1. Определите количество гидроксильных групп в соединении:

$$\overset{\mathrm{II}}{\mathrm{Ba}}(\mathrm{OH})_?.$$

2. Определите коэффициент x в уравнении:

$$x \cdot \mathbf{Mg} + \mathbf{O_2} = \mathbf{Mg} \cdot \mathbf{O}.$$

3. Заполните пропуски в уравнении реакции:

$$\mathbf{Ca + H_2 0 = Ca(OH)_2}.$$

Важным этапом анализа визуальной информации является нахождение одинаковых элементов.

Формально такие элементы распознать легко. Особое значение имеет нацеленность на их обнаружение.

К примеру, выполняя задание

“Вычислить выражение $\dfrac{\sqrt{6{,}3 \cdot 1{,}7} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{6{,}3}{1{,}7}} - \sqrt{\dfrac{1{,}7}{6{,}3}} \right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2 - 4 \cdot 6{,}3 \cdot 1{,}7}}$”

многие учащиеся стремятся выполнить все операции с помощью микрокалькулятора, вместо того, чтобы выделить два повторяющихся числа “**6,3**” и “**1,7**” (рис. 7.03.1) и применить хорошо известные формулы, в том числе и сокращенного умножения (рис. 7.03.2).

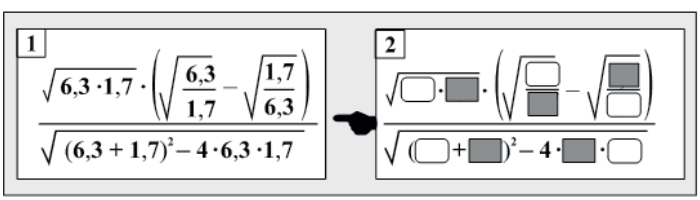


Рис. 7.03.

Модель структуры (2) заданной дроби (1)

Большие трудности в обнаружении одинаковых элементов вызывает различная форма их записи (или изображения).

Приведем пример.

Группе выпускников школы, занимающихся на подготовительных курсах, автором данного исследования было предложено вычислить

$$\lg^2 x\left(\log_{10} x\right)^2-\frac{\log_{10}^2 x}{\left(\lg x\right)^{-2}}.$$

Из 35 слушателей только один не стал тратить время на преобразования, сразу увидев результат.

Целенаправленное воспитание “живого созерцания” структуры, определение одинаковых и различных элементов информации поможет во многих случаях увидеть ответ без оформления промежуточных процедур.

При решении геометрических задач полезно отыскивать равные углы, подобные или конгруэнтные треугольники и т.д., даже если они не выделены, не обозначены на чертеже.

Превращение визуального анализа чертежа в привычку значительно обогатит возможности самостоятельной работы учащихся.

Обнаружение одинакового (подобного) может сопровождаться изменением или дополнением имеющейся информации, осуществлять которые допустимо различными способами: подчеркиванием, обведением в кружок, выделением цветом, специальной символикой и т.д.

Это известный прием, но важно, что перенос данного действия в сферу визуального анализа дает возможность одновременно с выявлением одинаковых элементов подойти к укрупнению.

Основой укрупнения является метод замены, широко используемый, в частности, при преобразовании алгебраических выражений. Способ замены имеет далекие перспективы в смысле формирования математического “зрения”.

По мнению Ричарда Лэнгтона Грегори (автора книги «Разумный глаз»):

> «наша способность видеть картину как определенный предмет – картину – и как “вместилище” совсем иных предметов сама по себе замечательна. Но еще более замечательна наша способность использовать определенные формы в качестве символов, которые помогают работе мысли» [50, с. 158].

Таким образом, мы не только формируем используем способность зрения не просто видеть наборы алгебраических или иных структур, но и учим его (зрение) выделять те, которые совпадают по своей сути, помогая работе мысли для осознания структуры и, как следствие, выбора пути дальнейших преобразований.

Выделение блоков, укрупнение схем, введение новых обозначений, раскраска чертежа или текста и т.п. могут служить внешним выражением результата первого этапа активного зрительного восприятия – анализа визуальной информации.

7.2. Распознавание стандарта

На втором этапе активного зрительного восприятия информации учащийся отождествляет отдельные ее фрагменты с известными ему достаточно простыми объектами и понятиями, которые мы называем стандартами. Для усиления целенаправленности этой работы необходимо разобраться в постановке задания, понять и сформулировать “на что” дана задача, т.е. к какому стандартному типу она может быть отнесена.

Приведем примеры ожидаемых формулировок.

1. Упростить алгебраическое выражение с помощью формул сокращенного умножения.

2. Решить неравенство, используя метод интервалов.

3. Решить тригонометрическое уравнение (с возможным указанием конкретного приема или типа уравнения).

4. Определить экстремумы функции с помощью производной.

5. Вычислить объем тела вращения.

Основная часть работы по распознаванию стандарта происходит по схеме “специализация-обобщение”.

Например, увидев на доске выражение типа

$$A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x},$$

учащийся в каждом слагаемом должен опознать функцию вида $y = \mathbf{k} \cdot a^x$, отметив для себя, какие основания показательной функции включены в условие.

Разумеется, первый и второй этапы работы с визуальной информацией часто не разделяются во времени, а тесно переплетаются.

Так, если указанное выражение

$$A = \mathbf{4}^x + \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}x-\mathbf{1}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}-\mathbf{2}x}$$ входит в уравнение $A = \mathbf{0}$,

то визуальный анализ исходной формулы может содержать следующие моменты:

1. Уравнение включает в себя показательные функции – это показательное уравнение – опознание стандартной постановки задачи.

2. В уравнение входят показательные функции с основаниями $\mathbf{2}, \mathbf{4}$ и $\mathbf{1/2}$ – распознавание стандартного объекта.

3. Все слагаемые в правой части можно представить как показательные функции с одним и тем же основанием “**2**” – опознание одинаковых элементов.

4. Известны два стандартных типа показательных уравнений: $a^x = b$ и $a^{2x} + pa^x + q = 0$. Для их опознания надо сравнить показатели степеней, не обращая внимания на постоянные (еще один стандарт – отождествление a^{x+c} и ka^x) – целенаправленность дальнейшего анализа.

5. Все слагаемые имеют вид $k\,\mathbf{2}^{2x}$, т.е. представляют собой одинаковые степени одного и того же основания (теперь видно, что этим основанием можно взять как число **2**, так и **4**) с точностью до постоянного множителя – отождествление одинаковых элементов.

6. После выкладок мы получим в левой части три подобных слагаемых типа $k\,\mathbf{2}^{2x}$ и, сложив их, придем к стандартному уравнению вида $A\,\mathbf{2}^{2x} = \mathbf{5}$, для решения которого есть стандартная формула (свернут еще один шаг – укрупнение схемы, при котором $\mathbf{2}^x$ воспринимается как z без формальной замены $z = \mathbf{2}^x$).

Теперь все готово к проведению заключительного этапа анализа – составлению мысленного плана работы, которого мы коснемся чуть позже.

Принцип замены играет существенную роль в использовании стандарта. Заменяя повторяющийся элемент какого-либо алгебраического выражения на определенный символ, мы как бы освобождаем от его влияния основную структуру этого выражения и помогаем увидеть (предвидеть) ответ, облегчая дальнейшую работу.

Так, уравнение типа $(\lg x)^{\sin^2 23°} \cdot (\lg x)^{\cos^2 23°} = 3$ может быть решено, если учащийся умеет производить мысленные замещения, которые, к примеру, на рисунке 7.04 оформлены в рамках.

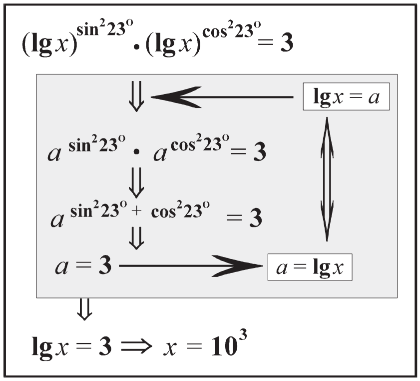


Рис. 7.04.

Решение уравнения с помощью “замены”

Таким образом, в практическом задании стандарт выступает как ориентир, позволяющий определить именно то учебное понятие, изучению свойств которого посвящено задание.

Чтобы успешно осуществлять поиск стандарта, необходимо ориентироваться во всем многообразии различных обозначений одних и тех же математических объектов и их свойств, чему часто препятствуют недостаточно развитые навыки учащихся. В подобных случаях следует специально “остановиться”, выяснить причину ошибок или возникшего затруднения.

В закреплении необходимых умений большую роль может сыграть следующий методический прием.

Предъявляется одновременно серия примеров со специальным оформлением и особым расположением формул на плоскости листа (рис. 7.05.1). Ученик должен, ориентируясь на верхнюю строчку (общую модель), ввести в таблицу недостающие данные.

В процессе работы выясняется, что все выражения имеют вид

$$\mathbf{A}\, f\left(\mathbf{k}\, x + \mathbf{p}\right) + \mathbf{B}.$$

1

$$
\begin{aligned}
&f(\;x\;)=\mathbf{3}\cdot\;x\;+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\;\;x\\
&f(\;\mathbf{2}\;)=\mathbf{3}\cdot\;\mathbf{2}\;+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\;\;\mathbf{2}\\
&f(\;a\;)=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\;\;a\\
&f(x+\mathbf{1})=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\mathbf{cos}(x+\mathbf{1})\\
&f\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right)=\mathbf{3}\cdot\;\frac{\mathbf{1}}{x}\;+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\boxed{}\\
&f\left(x^{\mathbf{2}}\right)=\mathbf{3}\cdot\boxed{}+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\boxed{}\\
&f(\qquad)=\mathbf{3}\cdot\mathbf{sin}\alpha+\mathbf{1}-\mathbf{cos}\boxed{}
\end{aligned}
$$

2

$f(x)$	$\mathbf{A}\cdot\; f\,(\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{p})$
$\mathbf{2\,sin}\,x-\mathbf{1}$	$\mathbf{2}\,\cdot\,\mathbf{sin}\,(\mathbf{1}\cdot x+\mathbf{0})$
$\mathbf{3}e^{x+\mathbf{1}}$	
$\sqrt{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}$	
$\mathbf{ln}\,\frac{x}{\mathbf{2}}$	

Рис. 7.05.

Серии примеров на определение элементов формулы одной (1) и разных (2) функций вида $\mathbf{A}\,f\,(\mathbf{k}x+\mathbf{p})+\mathbf{B}$

Затем предлагается, используя те же принципы расположения и выделения элементов, привести к тому же виду выражения типа:

$$1)\ \mathbf{3sin}\,(\mathbf{4}x+\mathbf{1})+\mathbf{6};\qquad 2)\ \frac{\mathbf{sin}\ (\mathbf{1}-x)}{\mathbf{2}}+\mathbf{1};\quad 3)\,\mathbf{2}+p\,\mathbf{sin}\,(p+x);$$

$$4)\ \mathbf{sin}\left(\frac{x-\pi}{\mathbf{2}}\right)+\sqrt{\mathbf{2}}\,;\qquad 5)\ \frac{k-\mathbf{sin}\,(kx+p)}{\sqrt{p}}.$$

Завершающим этапом может служить серия типа предложенной на рисунке 7.05.2.

Отметим типичные случаи распознавания стандартов по схеме “обобщение-специализация” с параллельной демонстрацией специальных упражнений, взятых из различных разделов курса математики, которые служат иллюстрациями предлагаемых методических приемов.

1. Нахождение одинаковых элементов в структуре формулы.

Пример 1. Найти одинаковые элементы и, осуществив их замену буквой “a”, записать выражение $\dfrac{\mathbf{5lg}^{-\mathbf{2}}x+\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{lg}x}}{\mathbf{3log}_{\mathbf{10}}x-\mathbf{2lg}\dfrac{\mathbf{1}}{x^{-\mathbf{1}}}}$.

2. Определение стандарта в структуре геометрической конструкции.

Пример 2. На рис. 7.06.1 предложена иллюстрация к теореме «Признак скрещивающихся прямых». Выделите эти прямые на рисунке 7.06.2-4. Как и ранее, для начала определим структуру изображения (рис. 7.06.5), благодаря которому придем к ответам (рис. 7.06.6-8).

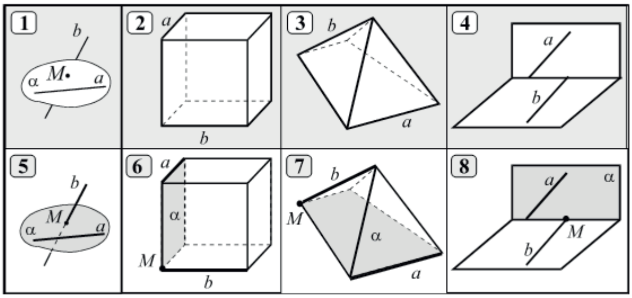


Рис. 7.06.

Иллюстрация к признаку скрещивающихся прямых (1, 5), задания на нахождение таких прямых (2, 3, 4,) ответы к ним (6, 7, 8)

Пример 3. Какие из отмеченных фигур (рис. 7.07) являются плоскими сечениями куба?

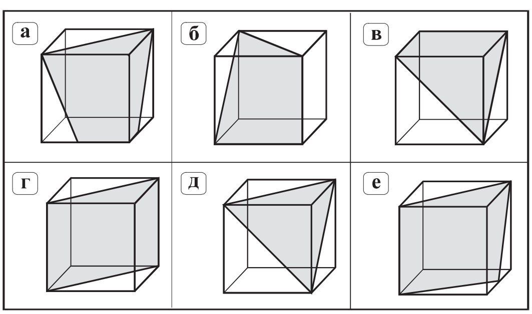


Рис. 7.07.

Задания на нахождение возможных плоских сечений куба

3. Указание принадлежности функции к определенному классу.

Учащиеся часто путают наименования кривой с наименованием порождающей ее функции, поэтому считаем полезным внести в общий список и этот вопрос (рис. 7.08, см. также рис. II.32, внизу на стр. 536).

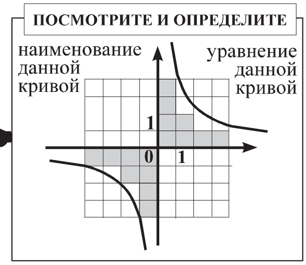


Рис. 7.08.
Задания на распознавание функции по ее графику

4. Нахождение значений функций.

Значения квадратичной функции в точках $x = \mathbf{1}$, $x = \mathbf{0}$ и $x = -\mathbf{1}$ (рис. 7.09.1) можно отнести в разряд "замечательных".

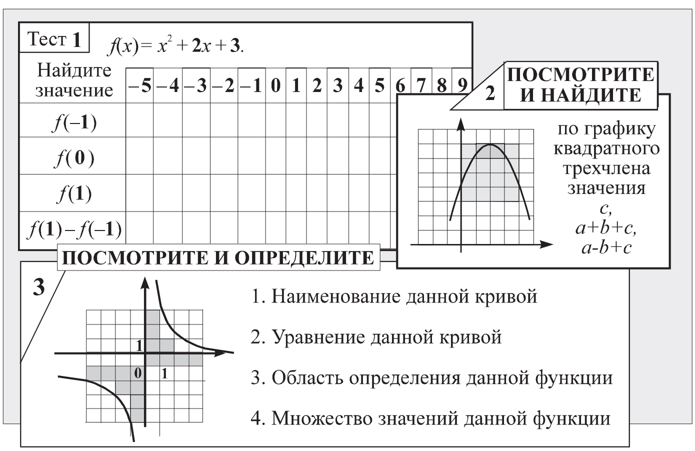


Рис. 7.09.
Задания на нахождение значений функции по ее формуле (1), параметров формулы функции по ее графику (2); анализ геометрического представления функции (3)

Задача “Посмотрите и найдите” (рис. 7.09.2) осуществляет переход к визуальной констатации полученных фактов.

Следующая “ступень” (рис. 7.09.3) – исследование функции по ее графику (модель для создания связей между анализом структуры формулы и ее графической интерпретации) – образует свертывание (рис. 7.09.3, см. также рис. V.23.3-6 на стр. 609).

5. <u>Образование сложной функции и анализ ее структуры.</u>

Построение формулы сложной функции требует той ступени мышления, которую мы ранее охарактеризовали как “визуально-логическую” (см. стр. 28).

Действительно, здесь “переплетаются” и восприятие и абстрактные представления. Такие примеры довольно часто вызывают у учащихся значительные затруднения. Особенно явно это ощущается при нахождении производных.

Пример 4. Пусть $f(x) = \mathbf{3}^x$; $g(x) = \mathbf{2}x - \mathbf{1}$; $p(x) = \mathbf{sin}\, x$.

Составьте функции: *а*) $f[g(x)]$; *б*) $f[p(x)]$;

в) $p[f(x)]$; *г*) $g[f(x)]$;

д) $g[p(x)]$; *е*) $p[g(x)]$.

При построении сложной функции полезен “полиграфический” прием. Сначала цветом обозначим структуру формулы каждой функции. Затем оформим (так же в цвете) все предполагаемые ответы. Поскольку наши возможности в цвете здесь ограничены, то используем иной прием – представление структуры формулы путем “изъятия” аргумента “x” в ее записи (рис. 7.10.1-2).

При решении используем (в отсутствие возможности “раскраски”) специальное расположение (рис. 7.10.3, см. также рис. III.03 на стр. 549).

	1 $f(\ \ )=\mathbf{3}^{(\ \ )}$; $g(\ \ )=\mathbf{2}(\ \ )-\mathbf{1}$; $p(\ \ )=\mathbf{ln}(\ \ )$	2 $f(\circledast)=\mathbf{3}^{(\circledast)}$; $g(\circledast)=\mathbf{2}(\circledast)-\mathbf{1}$; $p(\circledast)=\mathbf{ln}(\circledast)$
3 $f\left[g(x)\right]= \\ =\mathbf{3}^{\left[\mathbf{2}\cdot(x)-\mathbf{1}\right]}$	$f\left[p(x)\right]= \\ =\mathbf{3}^{\left[\mathbf{ln}(x)\right]}$	$p\left[f(x)\right]= \\ =\mathbf{ln}\left[\mathbf{3}^{(x)}\right]$
…………………………………………		

Рис. 7.10.

Изъятие аргумента из структуры формул функций (1-2), построение формул сложных функций (3)

Визуальное оформление специальных мини-алгоритмов помогает увидеть основной принцип и успешно его применить. Упражнения ниже , несмотря на некоторую формализацию их, позволяют глубже уяснить структуру сложной функции.

Пример 5. Для функции $\sin^2\sqrt{\cos\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}}$

а) определите порядок вычисления на калькуляторе значений функции при заданном значении аргумента;

б) запишите производную данной функции".

6. Изменение обозначений в формуле.
7. Нахождение и построение формулы сокращенного умножения (ее элементов) в сложной конструкции.
8. Описание поведения функции на заданном интервале по ее графику.
9. Определение стандарта в структуре формулы.

Пример 6. Вычислить $\log_2 \mathrm{ctg}\,0{,}25\pi$.

Соответствующие стандарты дают решение.

$$\log_\pi \underbrace{\mathrm{ctg}\,0{,}25\pi}=$$
$$=\log_\pi \underbrace{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}}=$$
$$=\underbrace{\log_\pi \quad 1}=$$
$$=\quad 0$$

Рис. 7.10.

Преобразования элементов формулы

7.3. Составление плана работы

Организация описанных выше этапов "живого созерцания" знаковой информации приводит к тому, что становится возможным еще до оформления рассуждений (доказательств теорем, решений примеров и задач) наметить план работы и оценить возможные результаты.

В этап составления плана работы обычно входят:

– определение порядка действий,

– свертывание отдельных операций,

– прогонка вариантов решения задачи.

План работы над преобразованием содержания примера или задачи, предъявленной символьными средствами, может составляться при помощи перевода результатов визуального анализа данных в список конкретных команд. При этом отношение изолированности для каждого из отдельных моментов "живого созерцания" особенно активно преобразуется в отношение связи. Происходит, как говорит Грегори, «динамический поиск наилучшей интерпретации имеющихся данных» [49, с. 15].

При прочно сформированных навыках визуального анализа информации, задания типа

"Упростить $\dfrac{\mathbf{tg}^4\alpha - \mathbf{tg}^6\alpha}{\dfrac{1}{\mathbf{tg}^4\alpha} - \dfrac{1}{\mathbf{tg}^2\alpha}}$"

легко переводятся учащимися в серию предписаний:

1. Заменить элемент "$\mathbf{tg}^2\alpha$".

2. Вынести общие множители.

3. Осуществить действия над дробями.

4. Вынести общие множители и, если можно, то сократить (перспектива сокращения на $\mathbf{1-tg^2}\alpha$ может быть обнаружена визуально).

5. Оформить результат.

Такая вербальная расшифровка визуального анализа исходного указания “Упростить” на деле является ответом на “немой” вопрос, неявным образом присутствующий в каждом практическом задании: какие знания требуются, чтобы можно было получить ответ?

Составляя план работы, учащийся одновременно отмечает именно те правила (формулы, теоремы), которые позволяют найти искомый результат.

Как отмечал Эльконин,

> «в процессе обучения невозможно игнорировать первую ступень познания – живое созерцание, так как только на его основе возможно развернуть в полной мере работу абстрактного мышления» [203, с. 254-264].

Определение порядка преобразований приводит к свертыванию отдельных мыслительных операций.

Не вдаваясь в рассмотрение самого процесса свертывания, описанного С.И. Шапиро [195, с. 93-127], перечислим некоторые методические приемы, благодаря которым можно использовать это свойство мышления.

К таким приемам относится описанный ранее принцип замены.

Следующий прием – действия по образцу.

Продемонстрируем свертывание целого комплекса формально-логических процедур на примере проведения доказательных рассуждений.

Теорема «Сумма векторов, заданных своими координатами» с помощью вспомогательных средств визуального анализа, может быть изложена в виде рисунка 7.12.1.

Предложим ученикам по данному образцу доказать теорему о разности векторов, заданных своими координатами.

Обычно учащиеся добросовестно и правильно выполняют все преобразования, поскольку сам образец оформлен достаточно ясно и четко. Однако к этому вопросу можно подойти и с другой стороны.

Выделим цветом (или отметим кружочком) в первоначально приведенном доказательстве те знаки “плюс”, которые определяют именно операцию сложения векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а не операцию суммирования составляющих компонентов каждого из них (рис. 7.12.2, см. также рис. III.01 в центре на стр. 547).

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2 = (x_1;y_1;z_1) + (x_2;y_2;z_2) =$$
$$=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$
$$=\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{i}\right)+\left(y_1\vec{j}+y_2\vec{j}\right)+\left(z_1\vec{k}+z_2\vec{k}\right)=$$
$$=\left(x_1+x_2\right)\vec{i}+\left(y_1+y_2\right)\vec{j}+\left(z_1+z_2\right)\vec{k}=$$
$$=\left(x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2\ ;\ z_1+z_2\right)$$

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2 = (x_1;y_1;z_1)\ \boxed{\pm}\ (x_2;y_2;z_2) =$$
$$=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\boxed{\pm}\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$
$$=\left(x_1\vec{i}\,\square\,x_2\vec{i}\right)+\left(y_1\vec{j}\,\square\,y_2\vec{j}\right)+\left(z_1\vec{k}\,\square\,z_2\vec{k}\right)=$$
$$=\left(x_1\,\square\,x_2\right)\vec{i}+\left(y_1\,\square\,y_2\right)\vec{j}+\left(z_1\,\square\,z_2\right)\vec{k}$$
$$=\left(x_1\,\square\,x_2\ ;\ y_1\,\square\,y_2\ ;\ z_1\,\square\,z_2\right)$$

Рис. 7.12.

Фрагменты доказательства

теоремы о сумме векторов, заданных своими координатами:

традиционное – специально структурированное (1),

предлагаемое – визуализированное (2)

Этот прием позволяет опустить все промежуточные логические операции, провести доказательство визуально (полностью или частично) без подробного письменного оформления.

Завершающим моментом составления плана работы является прогонка вариантов.

Это наиболее трудная часть визуального анализа. Навыки мыслительной прогонки возможных вариантов вырабатываются путем долгой и кропотливой работы.

Данный момент трудно контролируется, так как он сильно зависит от индивидуальных особенностей ученика. В то же время овладение данным навыком – надежный путь к усилению самостоятельности и творческой активности учащегося.

Целенаправленный визуальный анализ содержания учебной математической информации во многих случаях позволяет определить возможные результаты. Поэтому заслуживают внимания частные примеры, в которых можно организовать прогонку вариантов большинством учащихся.

Приведем некоторые из них. Речь идет об оценке элементов и блоков информационных сообщений, о влиянии структуры знакового материала на прогнозирование вида конечного результата.

Например, решение достаточно сложного задания

“Упростить выражение $\dfrac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}}+\dfrac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}$”

можно свернуть, если заметить особую симметрию блоков

$$\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}} \text{ и } \frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-1/3}}.$$

Это “сопряженные” выражения. Следовательно, скорее всего ответ будет складываться из пары их упрощенных модификаций вида

$$“k + p” \quad \text{и} \quad “k - p”.$$

Поэтому достаточно рассмотреть подробно только одно из слагаемых заданного выражения.

Осуществим начальные преобразования первого слагаемого:

$$\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}\,.$$

По-видимому, следует ожидать результат типа

$$\sqrt[3]{(\quad)^3}\,.$$

Если за этот сомножитель принять

$$\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}\,,$$

то квадрат подкоренного выражения в точности равен выражению под первым из радикалов:

$$\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{a-1}+1\,.$$

Отсюда для второго слагаемого предположительно имеем:

$$\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{\left(\sqrt{a-1}\right)^{-1/3}}=\sqrt{a-1}-1\,.$$

Полезно повторить весь ход рассуждений еще раз, одновременно оформляя решение и проверяя последнее предположение.

Громадную помощь в прикидке результата могут оказать визуальные стандарты.

Продемонстрируем их действие на примере

“Определить знак произведения:

$A = \mathbf{lg\,sin32° \cdot lg\,sin17° \cdot lg\,sin32° \cdot lg\,sin40° \cdot lg\,sin2°}$” (рис. 7.13).

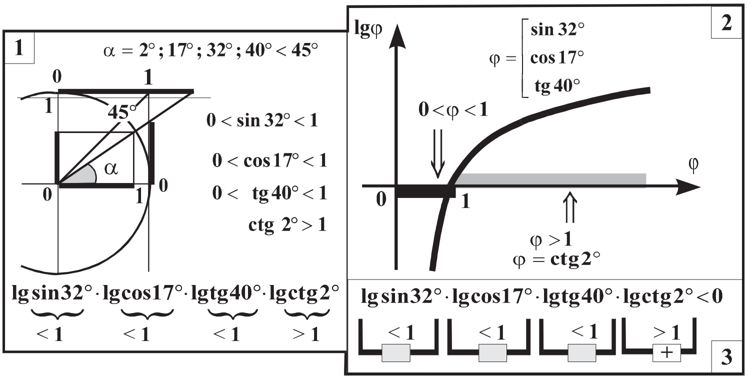


Рис. 7.13.

Применение стандартного зрительного образа (1)
и визуальные рассуждения (2) при определении знака выражения (3)

Таким образом, последовательно организуя все изложенные операции “живого созерцания” учебной знаковой информации, мы не только используем природные свойства зрения ученика, но и формируем некоторые специальные особенности, которые у способных детей образуются часто непроизвольно, спонтанно.

Образно можно сказать, что развиваемая нами методика призвана трансформировать визуальное восприятие в продуктивное мышление, как его понимает Грегори:

> «Нас привлекает взгляд на восприятие как на процесс, который реализуется в мозге и подобен логическим процессам ... таким, которые используются при получении и интерпретации научных данных, при формировании ... гипотез, проверяемых затем путем спланированных наблюдений» [50, с. 172].

7.4. Введение нового понятия

Метод расчленения учебной информации на самостоятельные отдельные блоки позволяет компоновать информационные тетради с четко определенными параметрами:

- использование конкретных умственных действий,
- общность (алгоритмизация) представления содержания,
- разнообразие подходов к рассматриваемым объектам и их свойствам.

К перечню “спецификаций” содержания можно отнести: введение понятия, вывод формулы, применение конкретного положения математической теории и т.д.

Приведем пример соответствующей тетради “Координаты единичного вектора” (рис. 7.14-7.16).

Стр. 1. **“Координаты вектора”** (рис. 7.14.1). Здесь “личный” символ $\vec{i}_\alpha$ означает поворот вектора $\vec{i}$ на угол α.

Стр. 2. **“Координаты единичного вектора”** (рис. 7.14.2). Обе страницы содержат уже знакомый материал. Учащиеся должны суметь записать вектор $\vec{i}_\alpha$ в координатной форме. Если возникнут затруднения, то эти страницы можно рассматривать одновременно (параллельно).

Цвет поможет установить: $\vec{i}_\alpha = (\mathbf{cos}\,\alpha\ ;\ \mathbf{sin}\,\alpha)$.

Стр. 3. **“Составляющие векторов”** (рис. 7.14.3). Обычно учащиеся с трудом воспринимают, что $\mathbf{cos}\alpha \cdot \vec{i}$ и $\mathbf{sin}\alpha \cdot \vec{j}$ также есть векторы. Иллюстрации этого листа помогут им установить этот факт и осознать его.

Стр. 4. **“Разложение единичного вектора на составляющие”** (рис. 7.14.4).

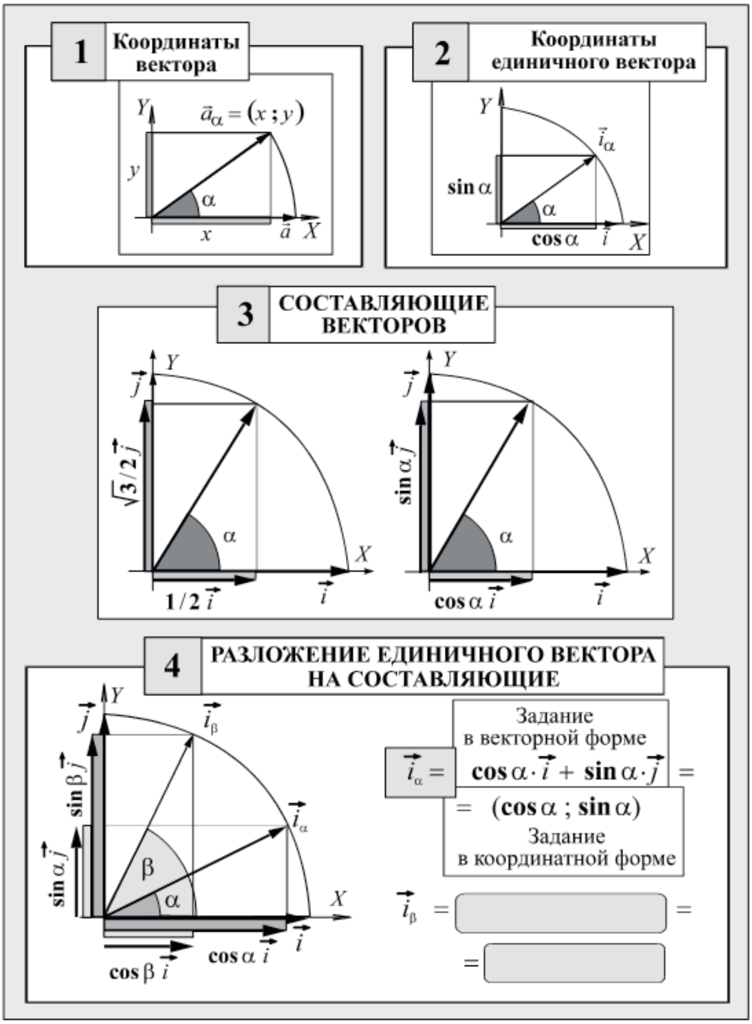


Рис. 7.14.

Страницы 1-4 тетради

“Координаты единичного вектора”

Центральный момент – учащиеся, действуя по образцу, выводят формулы задания единичных векторов в координатной форме.

Поскольку все содержание тетради основано на подобных предыдущих сериях, вывод никакой трудности не представляет.

Стр. 5. **“Скалярное произведение единичных векторов, заданных координатами”** (рис. 7.15.5). Страница 5 дает возможность повторить теорему о скалярном произведении векторов, заданных координатами.

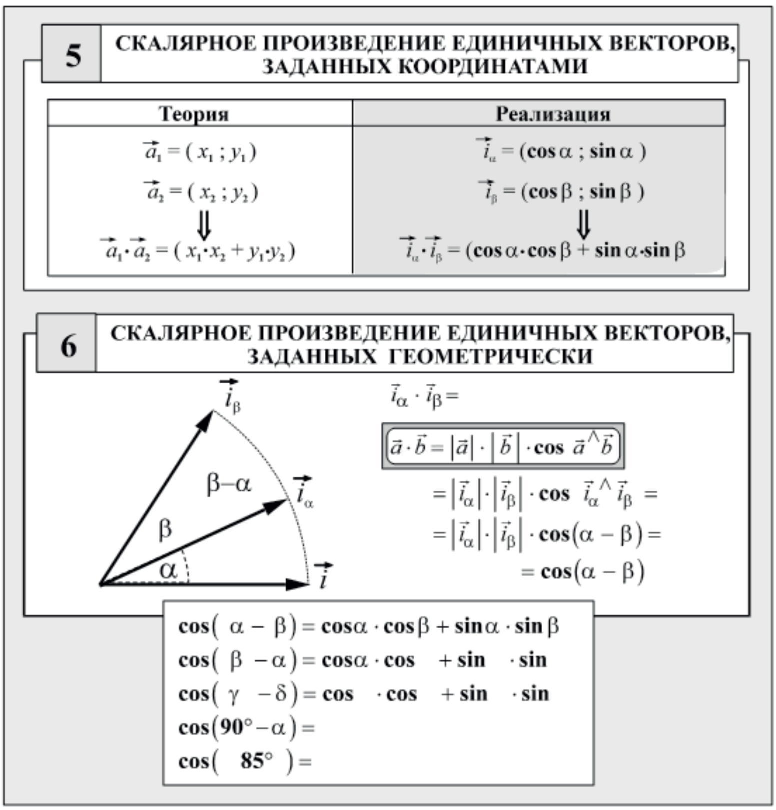


Рис. 7.15.

Последние страницы тетради

«Координаты единичного вектора»

Стр. 6. **“Скалярное произведение единичных векторов, заданных геометрически”** (рис. 7.15.6). Страница 6 – определение скалярного произведения двух векторов.

Прием “обобщение – специализация” активно реализует такие моменты “живого созерцания”, как:

а) использование формулы как модели (по формуле определения скалярного произведения двух векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{b}$ составляется формула скалярного произведения конкретных векторов $\vec{i}_\alpha$ и $\vec{i}_\beta$);

б) действие по модели (по символическому изложению теоретического положения – скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, – конкретизируется соответствующее утверждение для пары рассматриваемых единичных векторов).

Таким образом, не только восстанавливается в памяти уже изученное ранее, но и совершенствуются навыки анализа знакового материала.

К последней странице прилагается специальный список примеров, позволяющих усвоить формулу косинуса разности двух аргументов (рис. 7.15.6, внизу).

Учащиеся должны устно или письменно решить его примеры.

Цветовое оформление формулы позволяет осознать особенности ее структуры, быстрее запомнить порядок компонентов серии.

Данная, завершающая страница тетради формирует “гладкий” переход к теме «Формулы тригонометрического сложения».

К комплекту страниц подобной тетради можно составить множество “быстрых” задачек.

Например,

к *стр*. 1:

а) отрицательны или положительны координаты вектора $\vec{a}_\alpha$?

б) постройте вектор $\vec{i}_\alpha$ при $\mathbf{180° < \alpha < 270°}$

и оцените его координаты,

к *стр*. 3: запишите значения координат векторов

$$\vec{i}_\pi, \qquad \vec{i}_{3\pi/4}, \qquad \vec{i}_{\pi/6},$$

к *стр*. 6: составьте формулы $\mathbf{cos}(\alpha+\beta)$ и $\mathbf{cos\ 2}\alpha$ и т.д.

Разумеется, удачная на взгляд учителя страница может быть применена в учебном процессе в отрыве от всего комплекта, составляющего единое целое – информационную тетрадь.

Но ценность ее будет значительно снижена, так как не будут применены самые сильные инструменты обучения – последовательность и постепенность, наглядность и преемственность.

Имея в руках свой экземпляр такой тетради (или возможность вывести на монитор любую из ее страниц), учащийся может не бояться отстать от сильных товарищей. Вопросы учителя объединяют класс в поисках результата.

В рабочих тетрадях остается лишь записывать ответы, оформлять наиболее трудные этапы решения.

§8. Формирование стандартного математического образа

Каждая учебная задача предполагает приведение ее исходных данных к некоторому достаточно простому, хорошо известному объекту, геометрическая или аналитическая интерпретация которого позволяет быстро и точно ответить на поставленный вопрос.

С точки зрения определенных психологических свойств мышления это естественно. В предисловии к русскому изданию книги «Распознавание образов» И. Пинскер пишет:

> «... любое решение, любое действие, связанное с обработкой внешней информации, основано на узнавании и той конкретной ситуации, которой это действие отвечает, т.е. на распознавании образов» [130, с. 5].

8.1. Изображение основных математических понятий

Активное и целенаправленное использование визуального мышления в процессе обучения основано на формировании устойчивых образов основных математических понятий.

Первой встающей здесь методической задачей является подготовка добротных геометрических изображений этих понятий, адекватно отображающих их основные черты, удобных в работе, пригодных для многократного использования. Большинство этих изображений устоялось в практике преподавания математики.

Перечислим и представим эскизы наиболее важные понятия, которые мы относим к стандартным (рис. 8.01, см. также рис. I.01 на стр. 749).

1. Число – точка числовой оси (рис. 8.01.1).
2. Вектор – направленный отрезок (рис. 8.01.2).
3. Функция – график (рис. 8.01.3).
4. Линейная функция – прямая (рис. 8.01.4).
5. Квадратичная функция – парабола (рис. 8.01.5).
6. Обратная пропорциональная зависимость – гипербола (рис. 8.01.6).
7. Колебательный процесс – синусоида (рис. 8.01.7).
8. Производная – наклон касательной (рис. 8.01.8).
9. Экстремум – горб или впадина (рис. 8.01.9).
10. Интеграл – площадь (рис. 8.01.10).

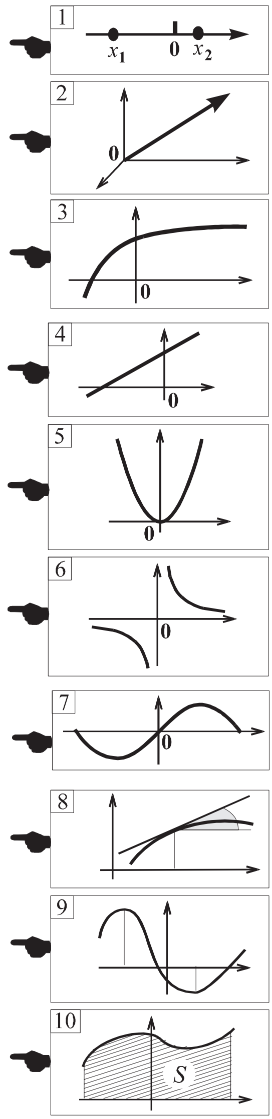


Рис. 8.01.
Эскизы важнейших математических понятий

Естественно, что объем содержания такого визуального образа не полностью совпадает с объемом содержания соответствующего понятия.

Так, отношение “Экстремум – горб или впадина” позволяет по графику:

- определить важнейшие “параметры” поведения функции точки максимума и минимума, изменение функции вблизи этих точек (возрастание, с одной стороны, и убывание, с другой),
- “измерить” значение самого экстремума и т.д.

Однако, чтобы осуществить дефиницию самого понятия, необходимо нечто большее. Нужна дисциплина зрительного восприятия, знание стандартных зрительных образов, понимание, что само слово “экстремум” нуждается в описательном расширении типа “экстремум функции в заданной точке” и т.д. Необходим грамотный, квалифицированный перевод с языка образов на язык слов и формул.

Обратим внимание на то, что новым в предлагаемой нами методике является акцент на образ, его “первичность”, установка на немедленную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию. Насколько важна такая “первичность” писал еще Павлов:

> «При страшной сложности работы больших полушарий, по-видимому, имеется такой принцип: все то, что было образовано, не переделывается, но остается в том же виде, а новое лишь наслаивается» [см. в книге 204].

Проблему “первого впечатления” мы предлагаем разрешить с помощью специальных учебных моделей, которые ранее назвали визуальными стандартами.

Под **визуальным стандартом** (**стандартным образом**) мы понимаем такую визуальную или формульную интерпретацию математического понятия (его свойства или отношения между такими понятиями), которое наиболее полно и точно отображает его словесную дефиницию. Таким образом, стандартный образ понятия должен отвечать следующим условиям:

- содержание должно удовлетворять принципу необходимости и достаточности;
- объем должен совпадать с объемом исходного понятия;
- представление должно осуществляться так, чтобы стал возможен адекватный перевод на другие языки предъявления математической информации.

Поясним данные условия на конкретных примерах.

Основой каждого графика должны служить кривые, строго отражающие функциональные зависимости между числовыми переменными. К сожалению, стенды, сделанные учителями или изготовленные типографским способом довольно часто искажают (рис. 8.02) положение: для любого аргумента x из области определения функции f существует и единственно значение $f(x)$ из множества значений функции f.

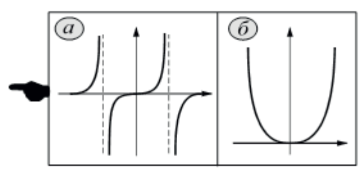


Рис. 8.02.
Неверные изображения тангенсоиды (а), параболы (б)

Это приводит к тому, что учащиеся не осознают главной визуальной особенности геометрического задания функционального соответствия: кривая в плоской системе координат является графиком функции тогда, когда любая прямая, проведенная параллельно оси значений f (перпендикулярно оси аргументов f), пересекает эту кривую не более чем в одной точке.

Учащимся не под силу определить:

- какие из кривых на рисунке 8.03 являются графиком функции?
- где (в какой точке или на каком отрезке) происходит нарушение функциональности для кривых, изображенных на рисунках 8.03.3 и 8.03.8?

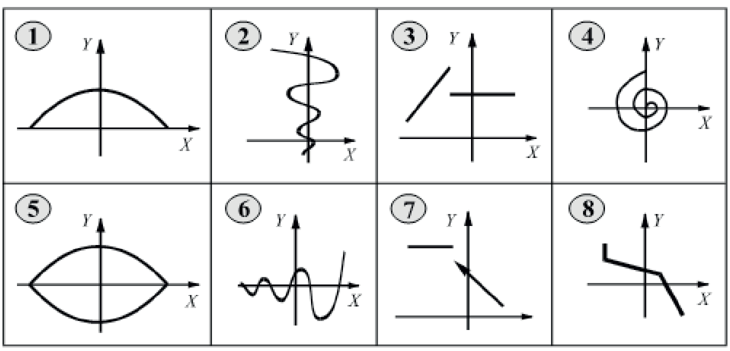


Рис. 8.03.

Задания для установления в изображениях соблюдения функциональности кривых

При недостаточно прочно сформированном зрительном восприятии учащиеся плохо ориентируются в изображениях,

не опознают “портрет” функции,

не видят тенденции ее развития.

В таком случае полезны упражнения типа:

- определите, графики каких элементарных функций перемещены так, чтобы получились следующие кривые на рисунке 8.04?

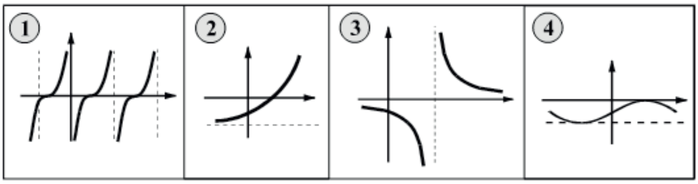


Рис. 8.04.
Задания на определение графиков элементарных функций,
в результате которых получились заданные кривые

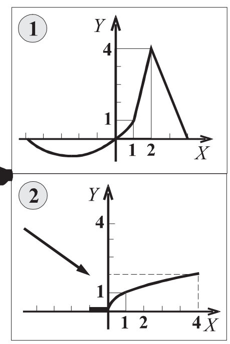


Рис. 8.05.
Задания на составление
по графическому заданию
функций ее формулы

– кривые (1) и (2) составлены из “кусков” графиков элементарных функций (рис. 8.05). Запишите данные иллюстраций в виде формулы:

$$y = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ g(x), & b < x < c \\ p(x), & c < x < d \end{cases}, \text{ где}$$

$f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ – есть формулы элементарных функций,

a, b, c, d – точки, разделяющие область определения функции y на соответствующие интервалы.

(см. также рис. I.10 на стр. 488).

Комплекс “график-уравнение” должен четко отмечать в своем визуальном блоке все необходимые “точки опоры” – элементы, позволяющие придти к необходимым обобщениям, предопределить свертывание мыслительных операций.

В частности, для геометрического задания тригонометрических функций к таким элементам можно отнести:

- точки, обозначенные на оси абсцисс ($-\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{2}$);
- пунктирные (или тонкие) линии, отмечающие область значений этой функции (рис. 8.06.2).

При соблюдении упомянутых условий у учащихся довольно просто формируются формульные стандарты типа:

– нули синуса: $\mathbf{0}, \pm\pi, \pm\pi/\mathbf{2}, \dots$;

– область допустимых значений синуса: $x \in [\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{1}]$ и т.д.

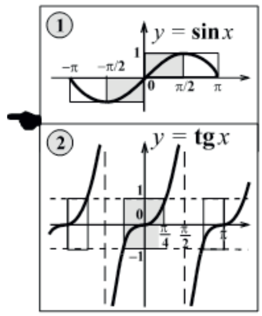


Рис. 8.06.
Опорные элементы
для построение графиков
тригонометрических функций

В свою очередь эти данные приведут к свертыванию мыслительных операций при решении примеров, подобных:

“Решить уравнение

$\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$” .

Модель рассуждений дана на рисунке 8.07.

Решение	Стандарты для свертывания
$\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$	$a^2 - 2a - 3 = 0$
$\Downarrow$	Теорема Виета: $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = -3 \\ a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$
$(\sin x - 3)\cdot(\sin x + 1) = 0$	
$\Downarrow$	Область определения синуса: $E(\sin)$: $\lvert\sin x\rvert \le 1$
$\sin x = -1$	
$\Downarrow$	Минимумы синуса: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in Z)$
$x = \frac{\pi}{2}(4k-1)(k \in Z)$	

Рис. 8.07.
Опорные знания (справа) для решения
соответствующего тригонометрического уравнения (слева)

Формируя визуальный стандарт определенного понятия, можно рассматривать содержание одной и той же задачи “в разных плоскостях”. Мы полагаем, что зрительное восприятие одних и тех же объектов в различных вариантах позволит более продуктивно формировать умения, знания и навыки как отдельного ученика, так и класса в целом.

Визуальные дидактические материалы легко варьируются, поэтому каждому ученику может быть предложен конкретный вариант одной и той же задачи, которую он в удобном для себя темпе рассмотрит и обдумает, задаст по ней интересующие его вопросы и сможет в дальнейшем участвовать в общем обсуждении.

На рисунке 8.08 представлена информационная страница «Внутренние и внешние углы треугольника», обсуждая содержание которой, учащиеся практически решают основную задачу: восстановление и закрепление образов различных углов треугольника.

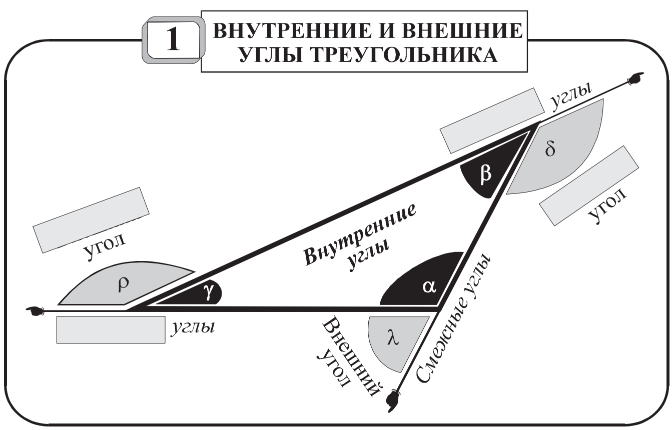


Рис. 8.08.
Информационная страница
с пропусками для заполнения учащимися

Эта задача (на данной странице) адресована более слабым ученикам и тем, кто по каким-либо причинам забыл или не знает теорему о сумме внутренних углов треугольника.

Рисунок первого задания комплекта задач к этой странице (рис. 8.09.1) дает все необходимые ориентиры для извлечения из памяти фактов: сумма внутренних углов треугольника равна **180°**, сумма смежных углов также равна **180°**.

Поэтому задание №2 (рис. 8.09.2) предназначено для формирования техники проведения доказательных рассуждений и вполне по силам тем, кто хорошо знает предшествующий материал.

Рис. 8.09.
Задания разной степени сложности
к одному и тому же положению учебной математической теории

Сильным учащимся можно сразу предложить найти ответ по рисунку 8.09.3, где поиск закона о связи между величиной внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних его углов, не смежных с этим внешним “запрограммирован” списком ответов к основному вопросу.

8.2. Параметры визуального стандарта

Для того чтобы “базовый” рисунок-стандарт помогал решать конкретную учебную задачу, необходимо продумать его содержание и при оформлении расставить все важнейшие акценты.

По словам Вазари

> «… рисунок... имея свое начало в рассудке, извлекает общее понятие из многих вещей, ... отсюда следует, что он познает соразмерность целого с частями и частей между собой и с целым... из этого познания рождается определенное понятие и суждение, ... и можно заключить, что рисунок этот не что иное, как видимое выражение и разъяснение понятия, которое создалось в идее. И отсюда, возможно, и возникла греческая пословица:
>
> “По когтю льва”» [27, с. 214].

Проведем аналог.

Предлагаемое ниже методическое средство обозначено нами как “Направляющие прямоугольники”. Оно обеспечивает точность исполнения и ясность восприятия графиков элементарных функций (рис. 8.10, см. также рис. I.01 на стр. 479).

Для того чтобы более полно представить предлагаемое нами методическое средство, проанализируем содержание комплекта “Направляющие прямоугольники прямой и параболы”, внедренного в учебный процесс в одной из экспериментальных школ Мурманской области.

Отдельные его фрагменты даны на рисунках 8.11 и 8.12 (см. также рис. I.05-I.06 на стр. 483).

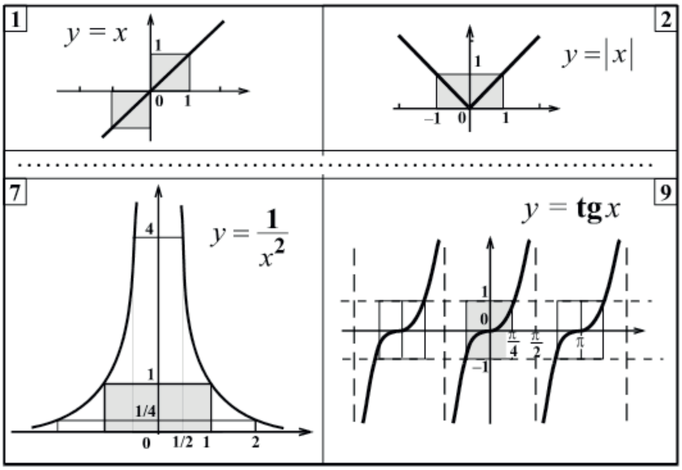


Рис. 8.10.

Направляющие прямоугольники
графиков элементарных функций

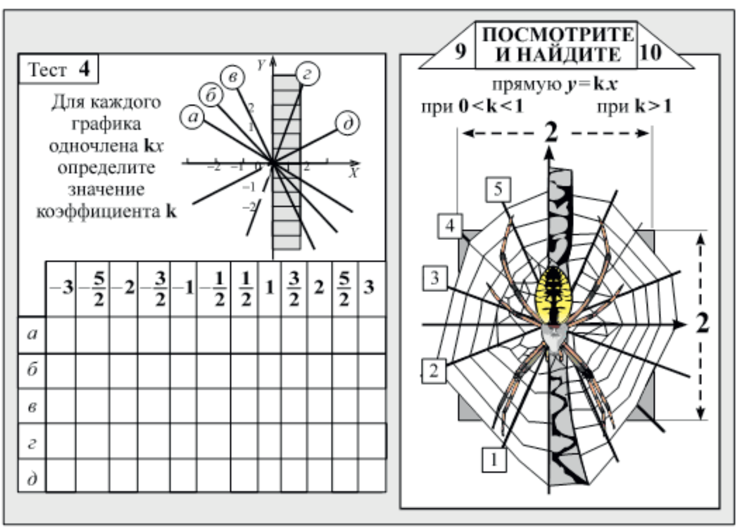


Рис. 8.11.

Задания на нахождение по графику линейной функции
значения углового коэффициента прямой

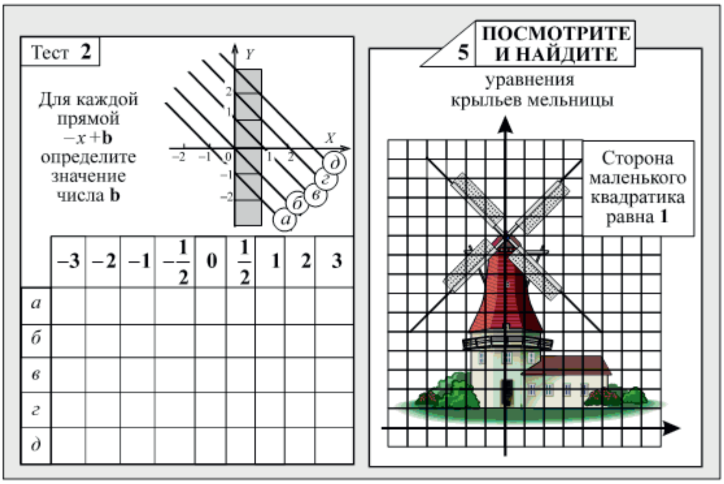


Рис. 8.12.

Задания на нахождение уравнения линейной функции по ее графическому представлению

“Меню” данной тетради состоит из следующих позиций:

1. Прямые $x = \mathbf{k}$ и $y = \mathbf{p}$.
2. Направляющий прямоугольник прямой $y = x$.
3. Направляющий прямоугольник прямой $y = -x$ (рис. 8.09).
4. Направляющий прямоугольник прямой $y = \mathbf{k}x$ при $\mathbf{k} > \mathbf{0}$.
5. Направляющий прямоугольник прямой $y = \mathbf{k}x$ при $\mathbf{k} < \mathbf{0}$.
6. Направляющий прямоугольник прямой $y = x + \mathbf{k}$.
7. Направляющие прямоугольники параболы $y = x^{\mathbf{2}}$ (рис. 8.09.2).
8. Направляющие прямоугольники параболы $y = -\, x^{\mathbf{2}}$.
9. Построение параболы $\pm\ y = x^{\mathbf{2}} + \mathbf{k}$.
10. Направляющие прямоугольники кубической параболы (см. рис. V.15-V.17 на стр. 601-603).

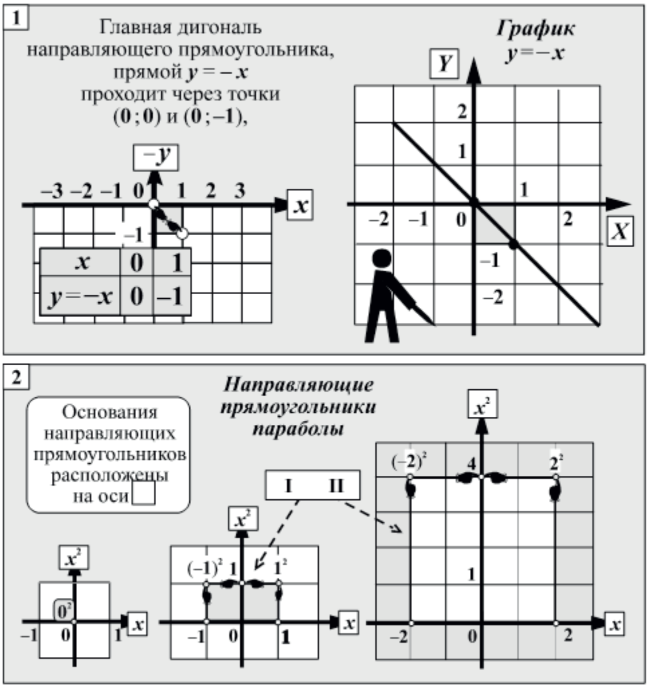


Рис. 8.13.

Поэтапное построение

направляющих прямоугольников прямой (1) и параболы (2)

Содержание тетради вбирает в себя все позиции соответствующей темы базисной программы по математике 7-го класса, однако подход к изучению темы значительно отличается от традиционного.

При разработке методики формирования стандартного зрительного образа прямой и параболы мы определили для себя следующие обязательные требования:

а) к изображениям –

точность построений, визуальный “акцент” на необходимых деталях, наличие “опорных точек”, т.е. таких элементов стандарта, которые помогают быстро и безошибочно построить или восстановить искомый образ,

б) к визуальным материалам –

формирование образов осуществлять последовательно, постоянно восстанавливая (обновляя) предшествующие знания и навыки, постепенно расширяя диапазон и степень трудности заданий,

в) к результатам обучения –

в итоге ученики должны уметь не только “строить заданные кривые по точкам”, но и свободно составлять соответствующее уравнение по готовому чертежу.

Рассмотрим для примера комплект материалов “Направляющий прямоугольник прямой $y = -x$” (рис. 8.14 и рис. 8.15, см. также рис. I.03-I.04 на стр. 481-482).

Для выполнения первого установленного нами требования мы применили переход от построения собственно направляющего прямоугольника прямой (параболы) к полному изображению этого объекта.

Повторение пройденного (визуальные стандарты прямых $y = \mathbf{k}$ и $y = x$) осуществляется при заполнении теста со звездочкой (рис. 8.14, внизу).

Постепенность и последовательность в формировании визуального стандарта прямой $y = -x$ обеспечена тренажерами №2-3 (рис. 8.15) и серией №4 (рис. 8.16). Тренажер №2 позволяет определить “направление” прямой, которую (по заданию тренажера 3) ученики должны построить самостоятельно. Серия №4 (рис. 8.16) формирует обратные действия.

Каждая последующая задача представляет условия более сложные, чем предшествующая.

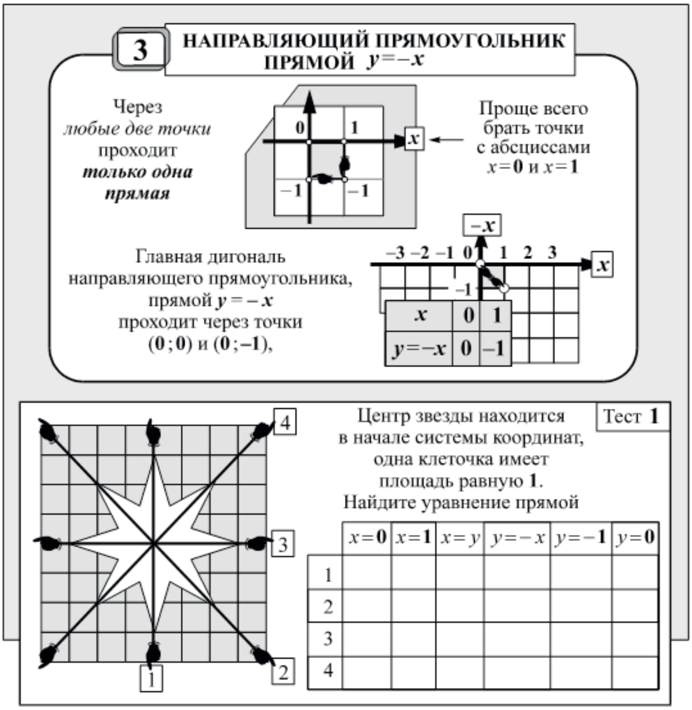


Рис. 8.14.

Визуальные рекомендации к построению прямой $y=-x$ (вверху), тест, на хождение формулы функции по ее графику (внизу)

Рис. 8. 15.

Тренажеры на построение

направляющих прямоугольников прямой

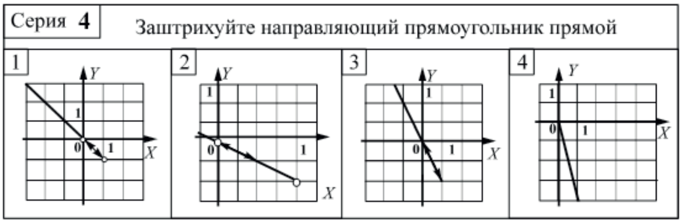


Рис. 8.16.

Задания на построение направляющих прямоугольников прямой в разных системах отсчета на каждой из осей координат

В первом задании (рис. 8.16.1) система отсчета традиционна: единице измерения соответствует одна клеточка всей “сетки”.

Во втором упражнении (рис. 8.16.2) система отсчета изменена (по горизонтали на единицу приходятся три клеточки, по вертикали – две) и т.д.

Далее эти ориентиры постепенно “изымаются” – ученик должен самостоятельно восстанавливать их (рис. 8.16.3-4).

Последние задания (“Правильные ответы” 5-8) позволяют еще раз обдумать полученные сведения, сделать полезные обобщения (см. рис. I.04 на стр. 482).

Численная обработка результатов работы по данной тетради приведена в последнем параграфе данного исследования. Здесь отметим, что в итоге все цели, поставленные нами при конструировании этих материалов, были выполнены.

В частности (по свидетельству учителя) практически все ученики, участвующие в эксперименте, по аналитическому заданию линейной функции $y = x + \mathbf{k}$ (квадратичной $y = x^{\mathbf{2}} + \mathbf{k}$) опознавали прямую (параболу), могли указать ее расположение по отношению к оси *У* и определить куда происходит сдвиг стандарта прямой (параболы).

Подробное и тщательное выполнение геометрического задания показательной функции по основанию **2** может привести к полезным ассоциациям. “Точки опоры” в виде цифр (на оси абсцисс: $\mathbf{-1}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$; на оси ординат: $\mathbf{1/2}$, $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$) позволяют определить (предугадать) соответствия для экспоненты с основанием **3** и **4**. (Конечно, на рисунке 8.17 лучше было бы этот визуальный ориентир выделить цветом).

Подобные исследования позволяют сформировать образ экспоненты с основанием $a > \mathbf{1}$ (в рамке).

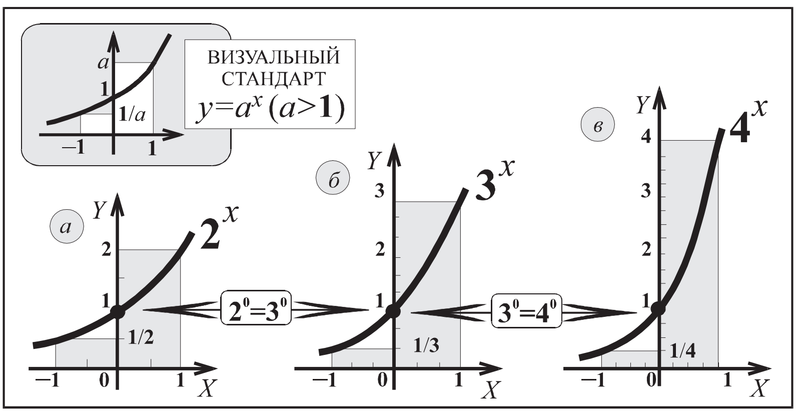


Рис. 8.17.
Визуальные ориентиры
для построения экспонент с разными основаниями

При построении графиков более сложных функций (особенно на начальных этапах) важно

- строго соблюдать цветовую гамму в их аналитическом и геометрическом заданиях,
- четко фиксировать направление отсчета на числовых осях (слева направо по горизонтали, снизу вверх по вертикали),

- выбирать единицы измерения (в школьной тетради – две клетки на единицу, три – на число $\pi/2$ для тригонометрической функции и т.д.),
- выделять основные и вводить вспомогательные элементы.

Приведем пример возможного хода решения задачи, весьма показательной с точки зрения использования графических стандартов.

<u>Задача</u>. Построить график функции $y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le -1 \\ \sqrt{x+1}, & -1 < x \le 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$.

Для начала построим геометрические стандарты кривых:

$y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

Т.е. в визуальной форме мы отвечаем на вопрос “Что задано?” (рис. 8.18.1).

Осуществим перемещение графиков в соответствии с формулами условия, т.е. определим “Где задано?” (рис. 8.18.2).

Выделим те участки кривых, которые удовлетворяют начальным ограничениям. Тем самым мы ответим на вопрос: “Когда, т.е. как развивается наша функция во времени?” (рис. 8.18.3).

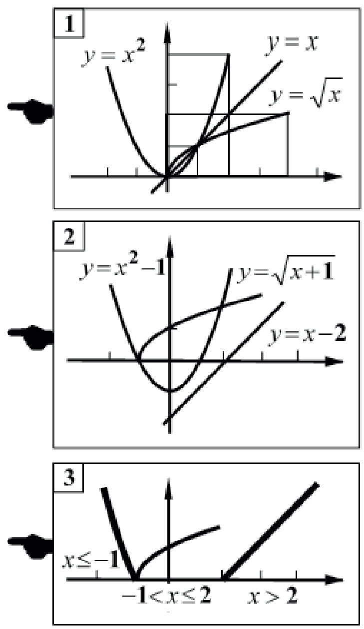


Рис. 8.18. Построение графика функции по заданной формуле

И, наконец, вносим корректировку, необходимую для сохранения закона функциональности, т.е. определяем поведение функции “на стыках”.

(Полностью оформление хода решения этой задачи дано на рисунке 8.19).

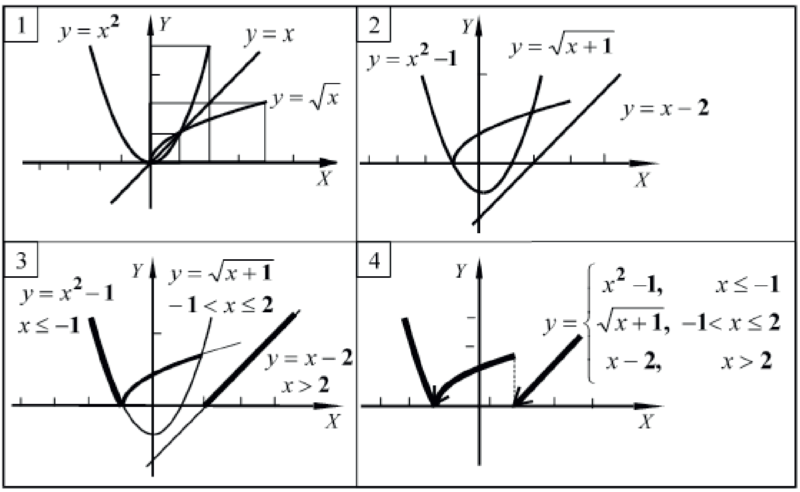


Рис. 8.19.

Построение графика кусочно-непрерывной функции:
графики исходных функций (1), сдвиги их по оси абсцисс (2),
учет области определение каждой из функций (3), результат (4)

Словами С.А. Шапоринского подведем важный итог.

«Образ – это сплав зримого и знаемого. Последнее не только входит в содержание образа, но и определяет то, что извлекается из зримого. Наглядный образ – результат переработки того, что было запечатлено, было зримо» [196, с. 53].

8.3. Развитие визуального образа

В качестве примера проследим развитие одного из интереснейших визуальных математических стандартов – тригонометрической окружности. Важность данного образа неоспорима, поскольку весь курс "вычислительной" тригонометрии и теории тригонометрических функций базируется на ее свойствах.

Начинать непосредственное знакомство с тригонометрической окружностью естественно с ее первой четверти. Здесь необходима постепенность, внимание к восприятию и усвоению учениками ее "секретов" – углы, которые можно построить без транспортира (рис. 8.20), величины синусов и косинусов этих углов и т.д.

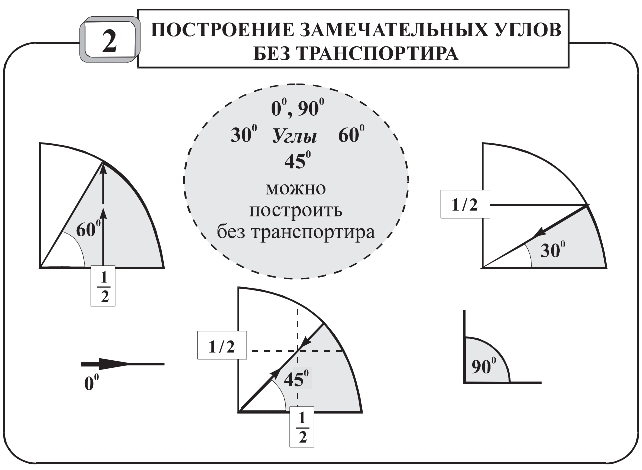


Рис. 8.20.

Информационная страница визуальной тетради

«Замечательные углы и числа»

Тригонометрическая окружность – это весьма сложный объект. Соединение строго организованного ряда числовых величин с адекватным рядом простейших геометрических понятий (углов и дуг) достаточно трудны для восприятия и усвоения.

Именно поэтому здесь не следует торопиться – на первых этапах своего внедрения такой образ должен нести минимум информации (к примеру, соотношения числовых значений на самой окружности и ее диаметрах, как на рисунке 8.21).

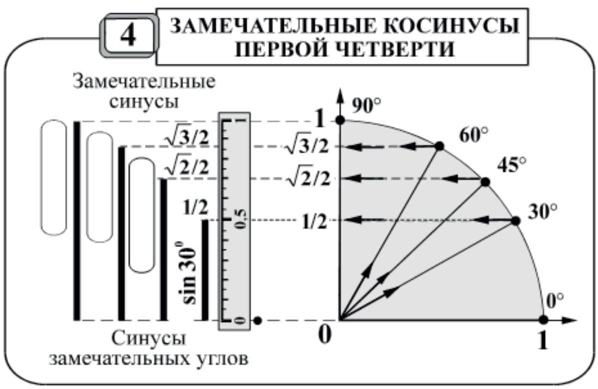


Рис. 8.21.
Информационные страницы визуальной тетради
«Синус и косинус, тангенс и котангенс»

Запас необходимых визуальных представлений учащихся еще сравнительно невелик, поэтому здесь самым подробным образом *показан* ряд “замечательных” чисел (рис. 8.22, внизу, справа).

Такой подход оказывается наиболее эффективным. Автор в своей практике (обобщение темы в выпускных классах школы, восстановление утраченных знаний на подготовительных курсах вуза), не раз убеждался в том, насколько полезна подобная наглядность. Типична реакция учащихся в этих случаях (цитируем): “Почему же нам это раньше не показали? Мы так мучились!”, “Наконец-то я видела синусы!” и т.д.

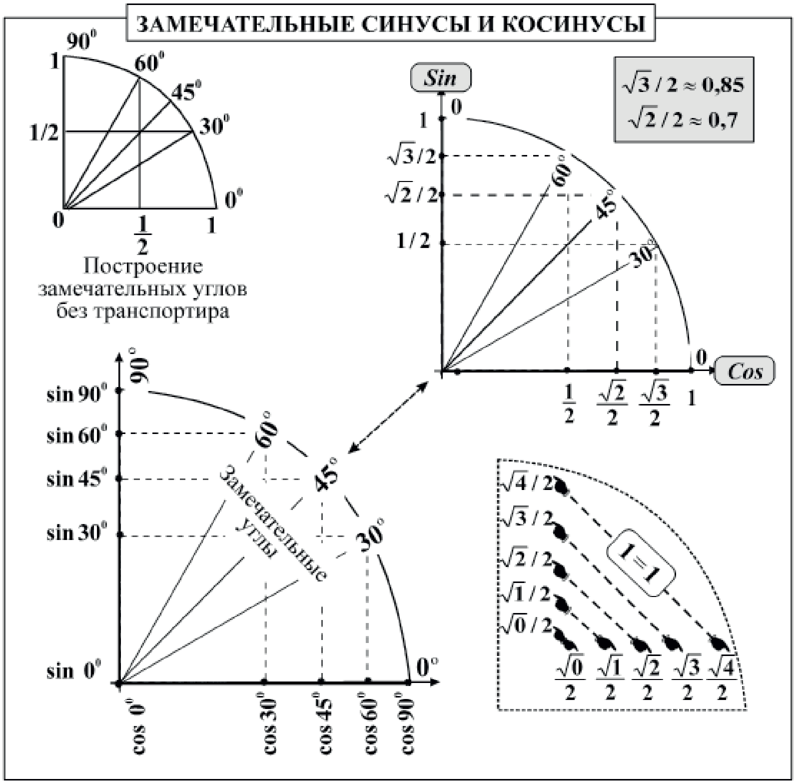


Рис. 8.22.

Информационная схема, предназначенная для пропедевтического периода изучения тригонометрии

Дальнейшая модификация образа может быть связана с определением конкретных линий – числовых осей, на которых отмечаются новые важные числовые значения, затем с общей демонстрацией этих значений (рис. 8.23).

Схема «Синусы и косинусы замечательных острых и тупых углов» (рис. 8.23, см. также рис. I.17 на стр. 495) и аналогичная ей схема «Синусы и косинусы противоположных углов» (см. рис. 2.03 на стр. 43), а также схема «Замечательные котангенсы» (рис. 8.24) расширяют представления о свойствах тригонометрической окружности.

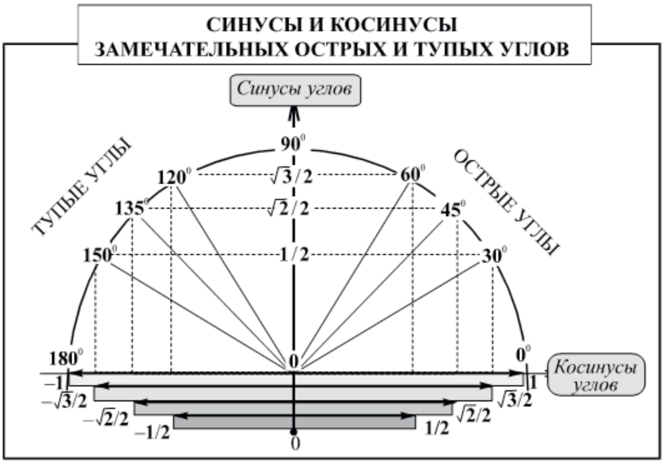


Рис. 8.23.

Сопоставление значений синусов и косинусов замечательных острых и тупых углов

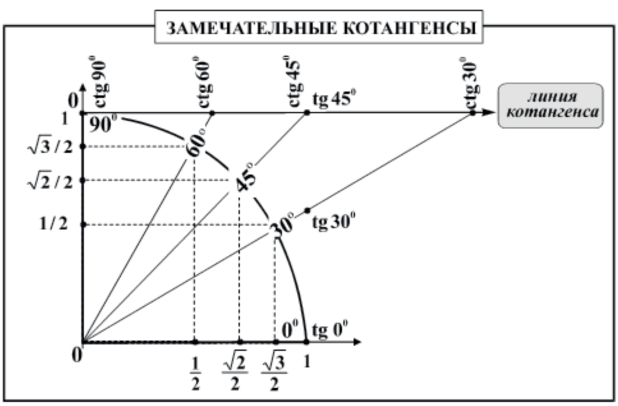


Рис. 8.24.

Введение котангенсов замечательных острых углов

Содержание предшествующей им схемы (см. выше рис. 8.22) полностью включено в них так, что учащийся может при необходимости свободно восстановить исходные данные, порождающие очередной вариант временного справочника.

Стандарт “Тригонометрическая окружность” представляет собой прекрасную модель для формирования связей между отдельными разделами математики. Действительно, “осваивая” тригонометрическую окружность, учащийся работает с целыми, дробными, рациональными и иррациональными числами, использует и одновременно обогащает свои геометрические представления о простейших плоских фигурах, учится проводить доказательные рассуждения и оформлять различного вида преобразования.

Трансформации (развитию) может подвергаться не только вся схема, но и ее отдельный фрагмент.

Это поможет в сложных переходах, в тех случаях, когда на изучение темы школьной программой отпущено недостаточное количество часов (рис. 8.25, см. также рис. I.21 на стр. 499).

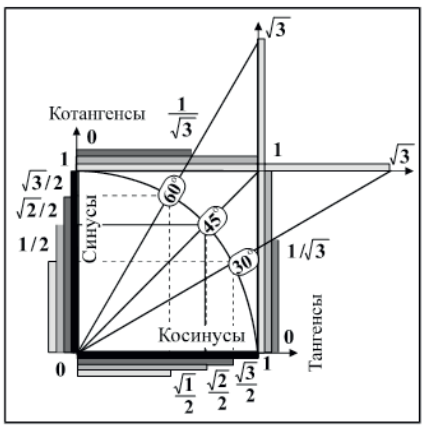


Рис. 8.25.
Преобразованный фрагмент информационной схемы

Подобная вспомогательная схема позволит учащимся легче и быстрее ориентироваться в дальнейших преобразованиях основной информационной схемы и решать разнообразные задачи (рис. 8.26, см. также рис. I.18 на стр. 496).

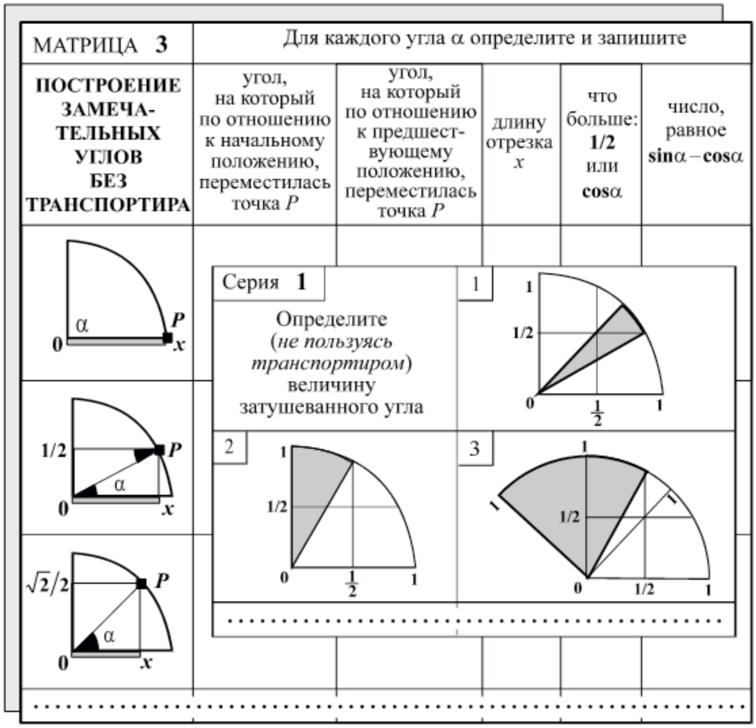


Рис. 8.26.

Визуальные задачи из тетради
«Синус и косинус, тангенс и котангенс»

Информационная схема “Тригонометрическая окружность” (рис. 8.27) является итоговой, поскольку практически все сведения на данную тему представлены в ней явным или скрытым образом.

Она формируется так, чтобы учащийся всегда мог самостоятельно восстановить ее (заполнить пропуски в каждом из ее фрагментов).

Эта схема соединяет в себе ряд стандартных образов, позволяющих описать:

- единичную окружность;

- оси синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
- замечательные углы $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{\mathbf{6}}$, $\frac{\pi}{\mathbf{4}}$, $\frac{\pi}{\mathbf{3}}$, $\frac{\pi}{\mathbf{2}}$;
- свойства и поведение тригонометрических функций;
- значения каждой из функций при конкретных (из перечисленных) значениях аргумента и т.д.

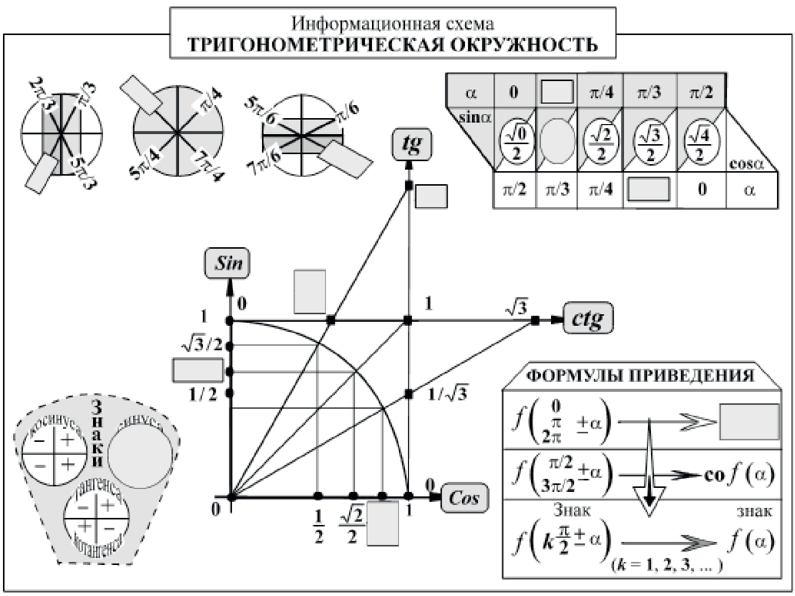


Рис. 8.27.

Превращение информационной схемы
в комплект визуальных задач

Использование данного справочника может быть многократным и разнообразным.

Приведем примеры.

№1. Значения тригонометрических функций угла в **30°**.

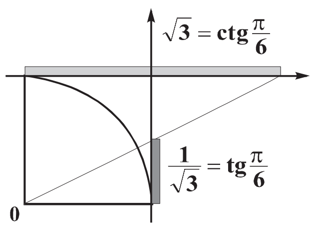
№2. Период тангенса (см. рис. I.20 на стр. 498).

№4. Решение простейшего тригонометрического уравнения.

№5. Преобразование тригонометрического выражения типа

“Упростить выражение $\sqrt{\mathbf{tg}^2\alpha+\mathbf{ctg}^2\alpha-2}$, если $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$”

(рис. 8.28, см. также рис. I.20 на стр. 498).



$$A=\sqrt{\mathbf{tg}^2\alpha+\mathbf{ctg}^2\alpha-2}=$$

$$=\sqrt{(\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha)^2}=$$

$$=|\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha|=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha\ (\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha\geq 0)\\ \mathbf{ctg}\alpha-\mathbf{tg}\alpha\ (\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha<0)\end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$A=\mathbf{tg}\alpha-\mathbf{ctg}\alpha\quad\forall\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$$

Рис. 8.28.

Пример решения визуальной задачи,
построенной на использовании свойств тригонометрической окружности

Планомерное формирование визуального образа тригонометрической окружности может дать весьма ощутимые результаты.

Так, например, в 1995/96 учебном году в 10 экономическом классе Мурманского морского лицея за двухчасовое занятие был практически повторен весь теоретический материал и решено большое количество примеров из специальных дидактических комплектов (см. рис. V.25-V.28 на стр. 611-614).

Урок поразил присутствующих (более 30 учителей) высокой продуктивностью. Это стало возможным, в силу того что ученики этого класса в течение трех лет обучались средствами визуальной методики преподавания практически по всем разделам школьного курса математики. Вот что пишет о визуальных средствах обучения преподаватель этого класса Н.Г. Неделько.

Эффективность формирования... новых понятий в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним, т.е. каким оказался <u>*первый*</u> *зрительный образ, ставший затем "носителем" данного понятия (сила первого впечатления).*

Поэтому вначале изучения "Соотношения в прямоугольном треугольнике" лицеистам было показано много чертежей (картинок), в которых варьировались несущественные признаки… Чертежи и рисунки – эффективное средство формирования... умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований и сопоставлений... Чертеж позволяет наглядно представить важную математическую идею, подвести их к осознанию даже неочевидного факта.

Такой стиль обучения привел к тому, что мои ученики научились "видеть тригонометрию".

§9. Организация учебной математической информации

Визуальные образы-стандарты не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только последовательное формирование их, но при необходимости расчленение, сборку отдельных их деталей в иное единое целое – новое образование. Этому служит умение выделить в визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определенные операции над ними.

Здесь налицо целесообразность активного использования различного рода визуальных дидактических материалов, которые мы разобрали достаточно полно и подробно.

9.1. Визуализация свойств математических понятий и операций над ними

Решение проблемы, связанной с восприятием визуальной информации, активным анализом ее элементов и структуры можно разрешить при помощи специальной организации учебного материала.

Опишем одну из характерных ситуаций.

После разбора положения о вынесении числа при задании вектора его координатами, предложен пример:

"Пусть $(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;p)=\vec{a}$; $(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1})=\vec{b}$; $\vec{a}=\mathbf{3}\vec{b}$. Найти числа m и p".

Если перед этим подобная задача не была решена, то возникает ряд недоразумений.

Оказывается, несмотря на всю простоту данных, учащиеся не воспринимают тот факт, что имеются одинаковые символы в соответствующих информационных сообщениях.

Лишь немногие видят: $\left(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;\,p\right)=\mathbf{3}\cdot\left(\mathbf{1}\,;m\,;\mathbf{1}\right)$.

Только что изложенное теоретическое положение остается для большинства вне поля их зрения. Им трудно сделать первый шаг:

$$\left(\mathbf{3}\,;\mathbf{3}\,;\,p\right)=\left(\mathbf{3}\cdot\mathbf{1}\,;\mathbf{3}\cdot m\,;\mathbf{3}\cdot\mathbf{1}\right).$$

Выделим этот момент особо, поскольку для учащихся со слабо развитым математическим мышлением характерна “остановка” уже при начальном вводе в ситуацию. Более того “тормоз” того же типа препятствует их деятельности при каждом переходе от одного этапа преобразований к другому.

Так, даже зная свойства координатной формы задания векторов, многие ученики не могут ими воспользоваться.

Поэтому, на наш взгляд, задачей первостепенной важности является умение перестраивать и переоформлять символьную информацию.

Подобный результат работы с нашим примером представлен здесь в черно-белом варианте (рис. 9.01).

$$\boxed{\begin{array}{c}(\mathbf{3};\mathbf{3};\vec{p})=\vec{a}\qquad \vec{b}=(\mathbf{1};m;\mathbf{1})\\ \vec{a}=\mathbf{3}\vec{b}\end{array}}$$

Рис. 9.01. Специальное переоформление формулы

В своих экспериментальных исследованиях мы не раз убеждались в том, что постоянное внимание к рисунку и интерпретации его данных снимает многие негативные явления предшествующего обучения. Целенаправленное оформление информационных данных можно считать неотъемлемым звеном в организации “живого созерцания” на школьных уроках.

Образы, сопутствующие специальному распределению элементов информации (блоков, фрагментов) на плоскости листа или на дисплее, позволяют осознать определенную установку:

– найди одинаковые элементы и приравняй их,

– найди “родственные” по содержанию элементы и определи связь между ними и т.д.

Продемонстрируем приемы визуализации учебного математического текста, продолжая обсуждение раздела «Векторы на плоскости и в пространстве» [145-146].

Поскольку на соответствующие темы программой (ее инвариантной частью) отводится минимум допустимого времени, то особенно важно быстро сформировать умение (мысленно или письменно) восстанавливать основные стандарты:

- противоположно направленные векторы (рис. 9.02.1);
- сонаправленные векторы (рис. 9.02.2);
- сумма двух векторов (рис. 9.02.3);
- разность двух векторов (рис. 9.02.4).

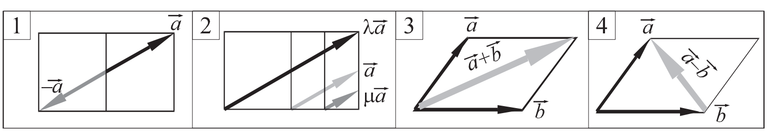


Рис. 9.02.
Противоположно (1) и сонаправленные (2) векторы,
сумма (3) и разность (4) векторов

Учащиеся хорошо знают, что диагональ векторного параллелограмма, соединяющая концы составляющих его векторов, есть вектор их разности. Однако направление этого вектора они обычно определяют с трудом.

Здесь может помочь визуальная подсказка – стрелка вектора разности двух заданных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должна соприкасаться со стрелкой вектора-уменьшаемого (рис. 9.03).

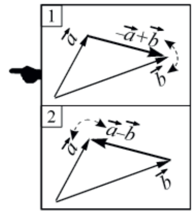


Рис. 9.03.
Изображения векторов: $-\vec{a}+\vec{b}$ (1) и $\vec{a}-\vec{b}$ (2)

Все сведения о правилах изображений векторов и основных операций над ними можно сосредоточить в двух информационных схемах (см. рис. I.13-I.14 на стр. 491-492), фрагменты которых идут ниже.

Первый из них (рис. 9.04) представляет комплект визуальных образов, в каждом из которых акцент ставится на связь между словом и термином.

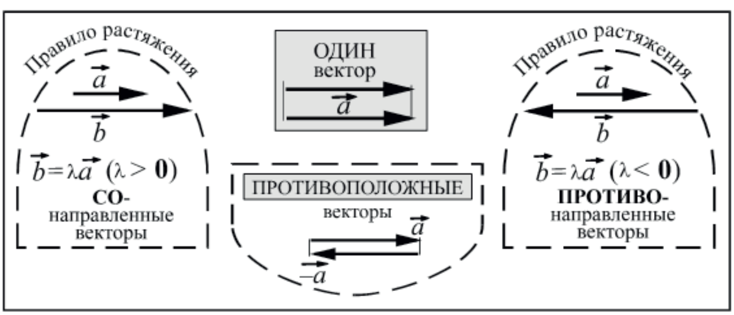


Рис. 9.04.
Фрагмент информационной схемы «Изображение векторов»

Второй (рис. 9.05) концентрирует внимание учащегося на соотношениях между буквенными обозначениями и визуальными представлениями векторов (с указаниями их начала и конца) [145].

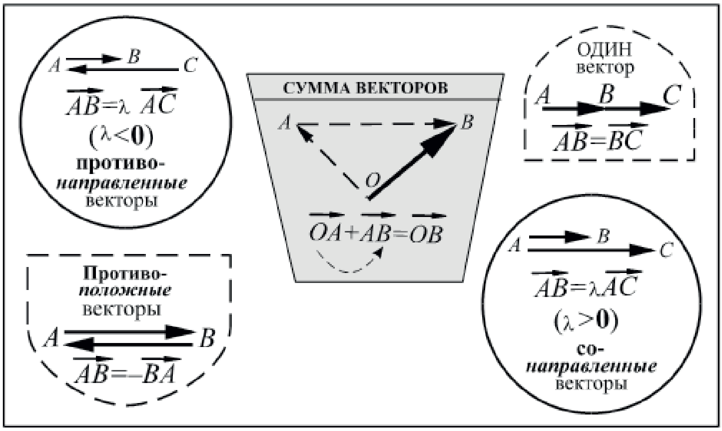


Рис. 9.05.

Фрагмент информационной схемы «Обозначения векторов»

К сожалению, как правило, в учебных пособиях все задания, связанные с векторами, похожи друг на друга, хотя уже на первых порах изучения этой (как и всякой иной) темы необходимо сосредоточить внимание на формировании свободного переключения с одного языка предъявления информации на другие, что полезно постоянно поддерживать разнообразными задачами (рис. 9.06 и рис. 9.07).

Принцип формирования визуальных дидактических материалов позволяет разнообразить их формы представления и расширить вопросы содержания. Тем более, что в теме “Векторы” не только каждое теоретическое положение, но и его применение хорошо “визуализируются”.

Иллюстрируемые выше визуальные стандарты помогут учащимся в решении задач многих визуальных задач, подобных тем, что идут ниже.

Рис. 9.06.

Задача составление информационной схемы

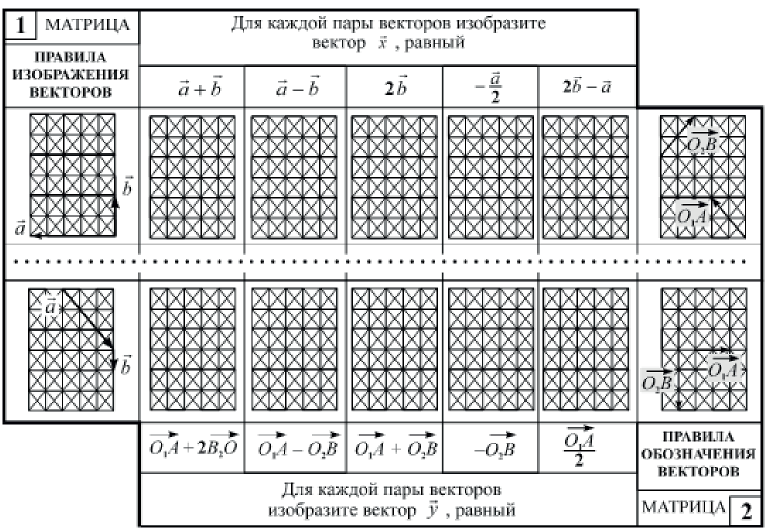


Рис. 9.07.

Фрагмент матрицы для проверки ЗУНов по усвоению:
правил изображения векторов (1) и правил обозначения векторов (2)

Задача. “Точка *O* является центром тяжести треугольника *ABC*.

Доказать, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{0}}$ ”.

<u>Анализ</u>. Образ центра тяжести треугольника дан на рисунке 9.08.1.

<u>Решение.</u> Примем (рис. 9.08.2-3):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \ \overrightarrow{CA} = \vec{b},$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{m},\ \overrightarrow{OB} = \vec{n},\ \ \overrightarrow{OC} = \vec{p}.$$

Используя стандарты, имеем:

$\vec{m} = \vec{c} - \vec{n},\ \vec{n} = \vec{a} - \vec{p},\ \vec{p} = \vec{b} - \vec{m}$ (рис. 9.08.4-6).

Произведя несложные вычисления, мы от известного образа (рис. 9.08.1) перейдем к визуальному обобщению – “векторному свойству” центра тяжести треугольника (рис. 9.09.2).

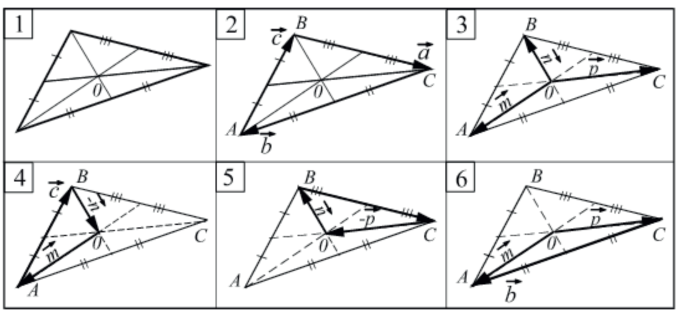


Рис. 9.08.

Визуализация решения задачи о центре тяжести треугольника

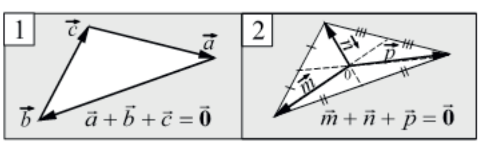


Рис. 9.09.

Векторное “Правило треугольника” (1)

и векторное свойство центра тяжести треугольника (2)

9.2. Геометрическая иллюстрация связей между различными понятиями

Под визуализацией (геометрической интерпретацией) связей между двумя различными математическими понятиями мы понимаем сопоставление элементов одного визуального стандарта с элементами другого.

Комплекты таких стандартов предназначены для зрительного анализа возможных связей между изображаемыми объектами. Каждая "пара" должна позволять констатировать, а в дальнейшем и восстанавливать искомые характеристики поведения каждого изучаемого математического понятия.

Рассмотрим три примера.

9.2.1. Функция и ее производная

Обсудим верхний фрагмент (рис. 9.10) информационной схемы "Графики элементарных функций и их производных" (см. рис. I.09 на стр. 487).

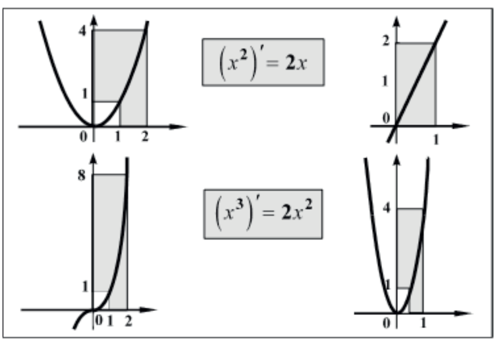


Рис. 9.10.
Фрагмент информационной схемы
«Графики элементарных функций и их производных»

"Отождествляя" понятие производной с углом наклона касательной, можно, имея семейство таких касательных, заданных в нескольких точках достаточно малого интервала, восстановить график этой функции и наоборот.

Схема позволяет визуально установить отношение "функция-производная", например, для квадратичной функции вида "$x^2 + k$" (рис. 9.11).

Очевидно: каждому столбцу парабол соответствует только один визуальный образ линейной зависимости.

Отсюда

<u>**вывод**</u>**:** $\left(x^2 + k\right) = 2x$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали не изменяет визуального результата ее дифференцирования;

<u>**и предвидение**</u>: $\left[(x+k)^2\right]' = 2(x+k)$ – сдвиг графика исходной функции x^2 по горизонтали порождает производную, отличающуюся от случая $\left(x^2\right)' = 2x$ на параметр $2k$.

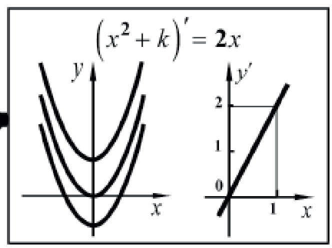


Рис. 9.11.
Образ связи
$x^2 + k \to (\cdots)' \to 2x$

Аналогично и для остальных пар графиков, изображенных на упомянутой схеме (см. рис. I.09 на стр. 487).

При исследовании выявляются важные признаки поведения функции и ее производной "в малом" (для тех участков, на которых кусочки графиков по своей конфигурации совпадают с известными).

Одновременно выясняется, что:

а) в точках, где функция $f(x)$ имеет экстремум, ее производная численно равна нулю ($f'(x)=\mathbf{0}$) (рис. 9.12.1);

б) в точках перегиба функции $f(x)$ производная $f'(x)$ имеет экстремум (рис. 9.12.2);

в) при изменении x от меньших значений к большим из интервала выпуклости заданной функции $f(x)$ производная $f'(x)$ убывает, а на интервалах вогнутости – возрастает (рис. 9.12.3);

г) наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ (рис. 9.12.4) соответствуют горизонтальным асимптотам графика производной $f'(x)$.

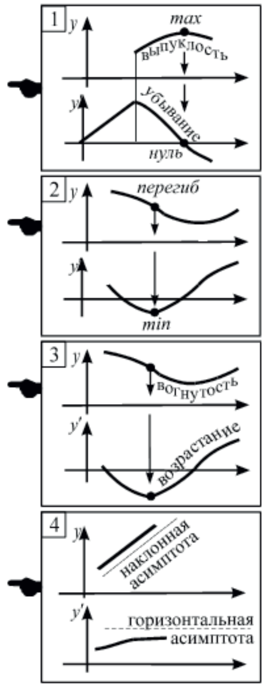


Рис. 9.12.
Объекты наблюдений
при исследовании функции
с помощью производной

Проведя исследования, учащийся может применить требование задачи № 2.14 [из книги 13] в качестве алгоритма: построение графика скорости по графику пути.

Все представленные на рисунке 9.13 связи функции и ее производной позволят учащимся, не обращаясь к формульным выкладкам, решать задачи учебника:

разбить графики функций на пары “функция и ее производная” (рис. 9.14) [11, с. 110, № 2.34]).

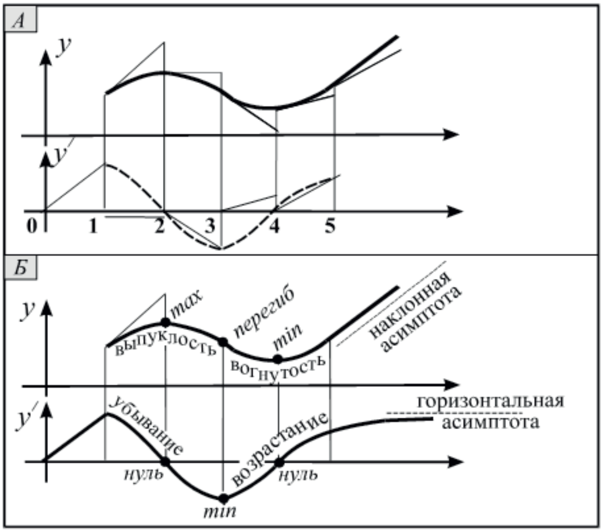


Рис. 9.13.
Сопоставление
графика функции с графиком производной (1)
описание построения
по графику функции график ее производной (2)

Покажем, по каким ориентирам можно найти правильные ответы (рис. 9.14).

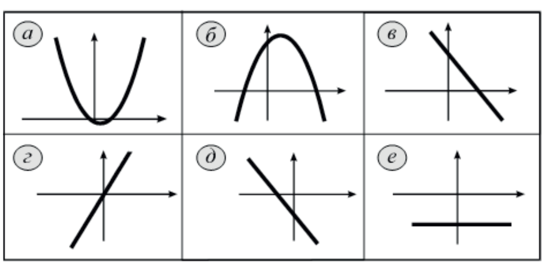


Рис. 9.14.
Задача на разбиение парабол и прямых
на пары “функция и ее производная”

Первая пара графиков на рисунке 9.14 (*а* и *б*) обладает самым характерным отличием: наклонная асимптота графика функции переходит в горизонтальную асимптоту графика производной.

Вторая пара легко определяется по стандартным образам (рис. 9.14.*в* и рис. 9.14.*г*) и т.д.

Подобным образом мы помогаем учащимся перейти от знакомства с отдельными, локальными фактами учебной теории к категориальным обобщениям.

Способность "выполнять перекодированное по категориям, вместо того, чтобы хранить миллиарды случаев, когда встречалось то или иное явление, – очевидное преимущество человеческой памяти" [82, с. 79].

9.2.2. Обратимость элементарных функций

Значительную трудность для учащихся представляют взаимосвязи показательных и логарифмических неравенств.

Несмотря на то, что переход от экспоненты к логарифму (например, при основании $a > \mathbf{1}$) достаточно легко организовывается цепочкой формул: $a^x > y \;\Leftrightarrow\; \mathbf{log}_a a^x > \mathbf{log}_a y \;\Leftrightarrow\; x = \mathbf{log}_a y$, полезно перед этим показать, как выглядят "в натуре" их взаимосвязи в равенствах в аналитическом виде (рис. 9.15) и представить переход от экспоненты к логарифму (и наоборот) в графиках (рис. 9.16).

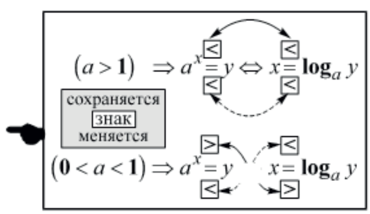


Рис. 9.15.
Правило знаков для "переходов"
$a^x = y \Leftrightarrow x = \mathbf{log}_a y$

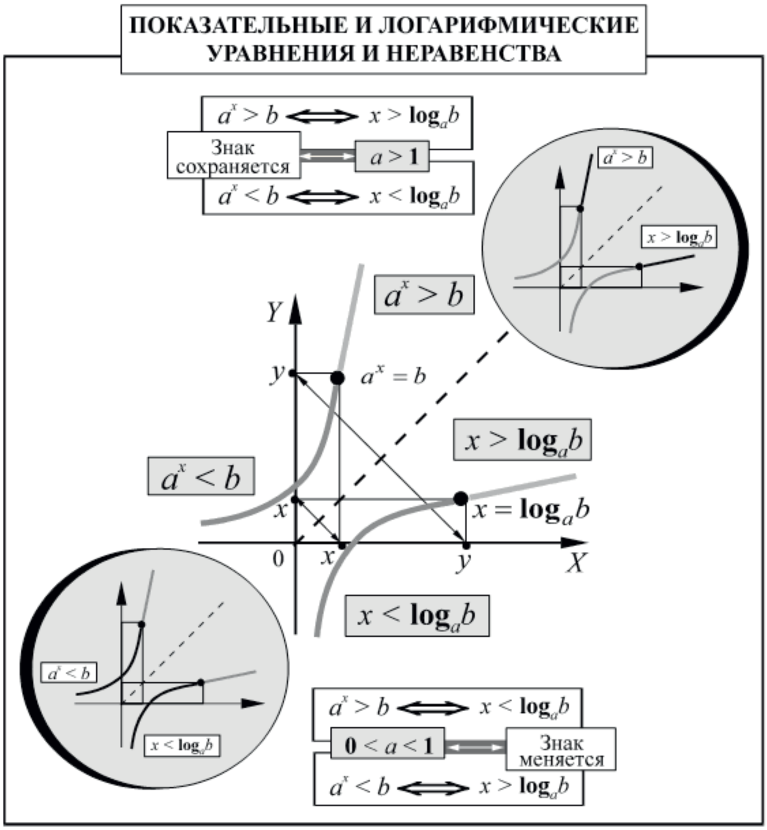


Рис. 9.16.

Графики и формулы
обратимости экспоненты и логарифма

В данной работе акцент на объединение визуальных образов функций ставится не единожды. То же следует делать и в процессе обучения. По словам Колерса

> «в процессе формирования обобщенных образов более важную роль играет предъявление множества разных, но имеющих нечто общее образцов, чем многократное повторение идентичных» [82, с. 75].

К сожалению, не многие учителя осознают это – в ходе урока тетради учеников заполняются “батареями” однообразных примеров, – в результате продуктивность урока значительно снижается.

По нашему глубокому убеждению, формирование навыков и умений зависит не столько от количества выполненных упражнений, сколько от их качества и разнообразия.

Приведём пример обновления уже изученного с целью углубления и расширения учебных ЗУНов. Рассмотрим две информационные схемы, связанные между собой принципом структурной общности (рис. 9.17).

Левые блоки схем “Обратимость линейной функции” и “Построение экспоненты и логарифма” (рис. 9.17.1-2) показывают:

для быстрого построения графика функции $y=kx+p$ $\left(y=a^x\right)$ можно так выбирать значения абсцисс и ординат “контрольных” точек, чтобы естественным образом использовались значения параметров k и p при $x=\mathbf{0},\ x=\mathbf{1}$ (основания a при $x=\mathbf{0},\ x=\mathbf{1}$ и $x=-\mathbf{1}$).

Эти блоки дают визуальную инструкцию для построения формул обратных функций и их “контрольных” точек:

а) в исходном задании поменять местами переменные,

б) выразить y через x,

в) осуществить перестановку координат “контрольных” точек.

Принцип отображения графика функции относительно биссектрисы I-го координатного угла визуально реализует связи между обратными функциями (графические блоки).

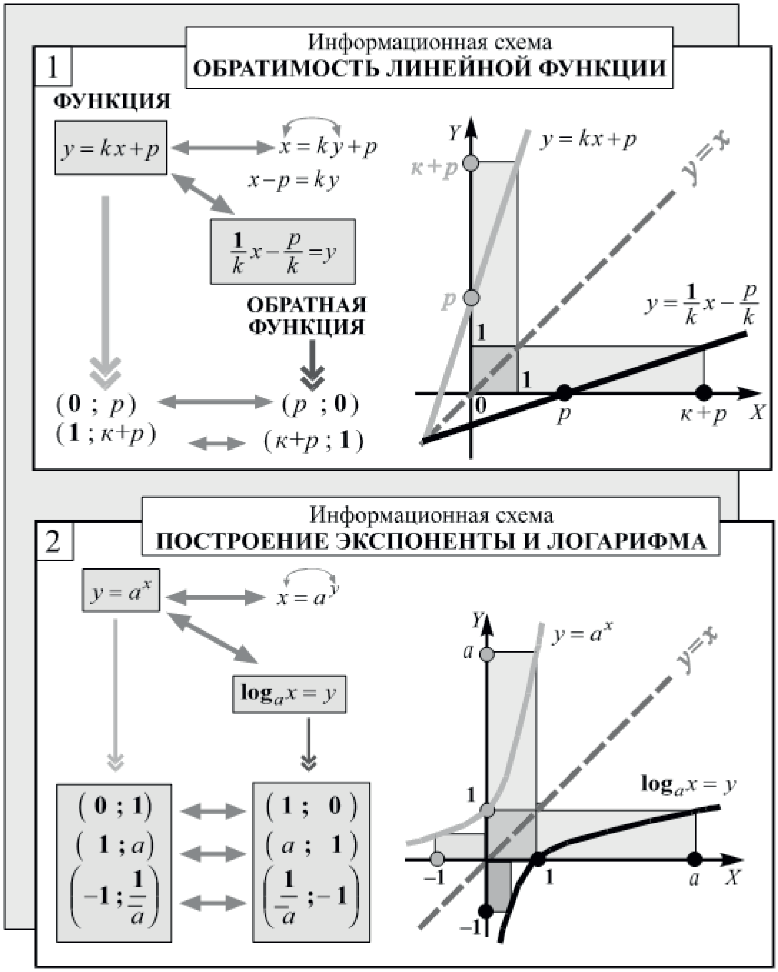


Рис. 9.17.
Пример информационных схем,
связанных структурной общностью

Изучение свойств линейной функции в общеобразовательной школе начинается задолго до ее окончания. Постепенно накапливаются знания, последовательно осуществляется знакомство с понятием обратимости и уже “на выходе” учащиеся получают информацию об экспоненте и логарифме.

“Сквозная линия”, представленная различными параллельными блоками, позволяет визуально обобщить понятие обратимости, разобраться в его сути и масштабах применения.

Алгоритмическая направленность схемы «Обратимость линейной функции» (рис. 9.18.1) позволяет *умо*-зрительно определить порядок действий необходимого поиска.

Вторая схема – «Построение экспоненты и логарифма» – как бы “дублирует” процесс, дает возможность еще раз применить изученный ранее алгоритм в новой ситуации (рис. 9.18.2).

Сопоставление этих справочников помогает образованию связей, побуждающих ученика искать подобные аналогии в иных ситуациях.

Мы так много внимания уделяем различным по характеру и виду визуальным образам одного и того же математического “явления” потому, что такой подход

> «выдвигает на передний план творческую, символическую, рациональную активность сознания, осуществляющего определенные действия, а не просто пассивное детектирование» [82, с. 75].

В результате изучения (исследования) различных визуальных “парных портретов” экспоненты и логарифма можно придти к формуле-схеме, которая представляет собой оптимальное свертывание (см. выше, рис. 9.15).

9.2.3. Интеграл – площадь криволинейной трапеции

При решении задач, связанных с нахождением площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения, основой является визуальный образ интеграла от неотрицательной функции.

Однако для успешного получения результатов этого оказывается недостаточно. Данный образ нуждается в расширении, например, информационной схемой, аналогичной приведенной на рисунке 9.18.

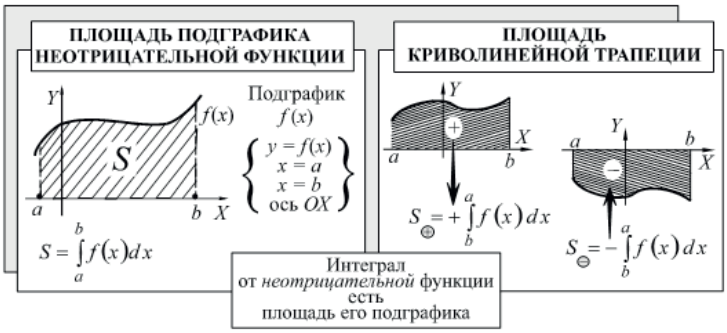


Рис. 9.18.

Пример информационных схем, связанных структурной общностью

Блоки схемы «Площади криволинейных фигур» (рис. 9.19) показывают, что в случаях (1) и (2) площади криволинейных трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a;b]$ равны сумме площадей подграфиков этих функций, а в случае (3) – их разности.

Обратим внимание на вербальные инструкции этой схемы.

В столбике справа имеется указание: a и b надо найти.

Эта рекомендация нуждается в пояснении.

Графики функции f и g имеют “общие места” – точки их пересечения. Перевод этого факта в формулу дает: $f(x) = g(x)$.

Данное равенство и определяет искомые точки a и b, поскольку именно для них: $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$.

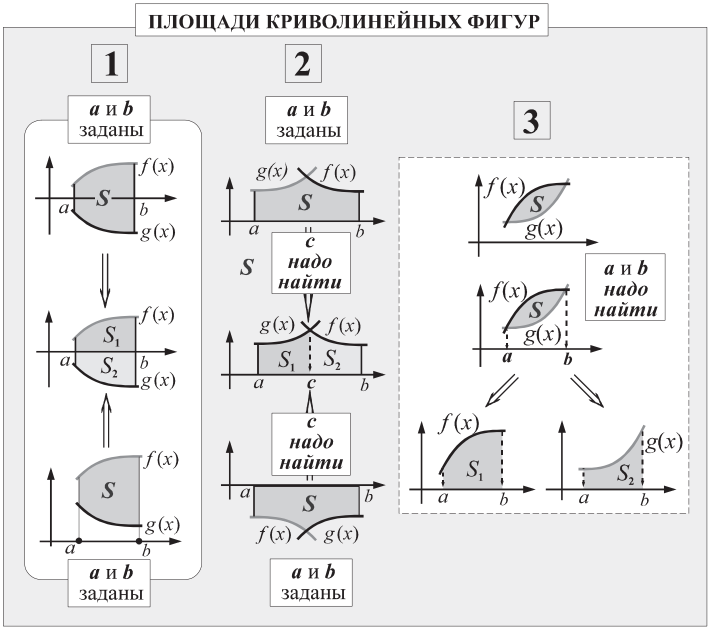


Рис. 9.19.

Формирование связей «текст ↔ рисунок ↔ формула»
на основе схемы «Площади криволинейных фигур»

Схема «Площади криволинейных трапеций» рассматривает все основные ситуации.

Например, в случаях слева (рис. 9.19.1) и в центре (рис. 9.19.2) представлены визуальные алгоритмы нахождения площадей трапеций, ограниченных графиками f и g на промежутке $[a;b]$, а в случае справа (рис. 9.19.3) – их разности.

Однако схема будет успешно работать, если учащиеся предварительно усвоят визуальный образ самого подграфика функции, который можно ввести на одной или двух страницах информационной тетради (рис. 9.18).

9.3. Анализ структуры математической таблицы

Стены классов школы обычно заполнены различными таблицами. Предполагается, что учащийся будет применять их в своей самостоятельной работе. Тем не менее, картина такова: в поисках ответа ученики предпочитают заглядывать в учебники или тетради или же применить заранее изготовленную шпаргалку.

Особую трудность в быстром и оперативном использовании представляют таблицы, предлагающие набор формул или графиков. Эти таблицы составляются как справочный материала и содержат большой запас сведений теоретического характера. Распознавание объектов, закономерностей связей между ними затруднено из-за обилия информации, сосредоточенной в столбцах и строках, не всегда удобной для восприятия структурой и т.п.

Главным отличием описываемых информационных схем от привычных стандартных плакатов и таблиц является их “подвижность”. Это позволяет постепенно увеличивать объем информации и разнообразить средства представления, вносить необходимые акценты, сосредоточивать внимание на том существенном, что в соответствующий период составляет “зерно” обучения.

Учитель, изготавливая конкретную схему, ориентирует ее на возможности своих учеников, продумывая одновременно способы объяснения ее содержания. Ученики, занимаясь “производством законной шпаргалки”, анализируют и обобщают соответствующий материал, обращаясь к ней всякий раз, когда в этом возникнет необходимость.

> Может быть действие таблиц, висящих на стенах класса, не столь велико из-за того, что мы предлагаем ученикам просто использовать их данные. Гораздо важнее научить их отделять главное от второстепенного, обогащая мышление новыми свой-

ствами – способностью к анализу структуры и элементов справочного материала.

Американские исследователи Колерс и Иден выделяют следующий аспект проблемы распознавания образов:

«... даже при распознавании предметов требуется формулировка некоей характеризующей их абстрактной структуры, а это уже и есть формулировка соотношений между отдельными частями. Может быть, причина того, что в автоматическом распознавании образов достигнуто пока столь мало, заключается в том, что "распознавание" базировалось на идентификации шаблонов (предметов), а не принципов, определяющих их структуру, и контекстов, в которых они предъявляются» [83].

Продемонстрируем на конкретном примере один из возможных способов повышения коэффициента полезного действия таблиц.

Поставим задачу, используя свойство симметричности хорошо известной таблицы "Выражение любой тригонометрической функции через остальные", восстановить недостающую в ней информацию (рис. 9.20).

Выразить через	**sin**α	**cos**α	**tg**α	**ctg**α
sinα	**sin**α	$\pm\sqrt{\quad}$	$\dfrac{\quad}{\pm\sqrt{\quad}}$	
cosα			$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\quad}}$	
tgα	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{\quad}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		
ctgα			$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	

Рис. 9.20.

Задание на выражение

каждой тригонометрической функции через остальные

Для начала естественно заполнить данные одной из диагоналей таблицы.

Наиболее легким для реализации результатов “живого созерцания” является квадрант нижнего угла.

Выявив один из его элементов, без труда приходим ко второму (рис. 9.21.1).

Следующий по степени трудности – верхний левый квадрант – также заполняется без особых усилий (рис. 9.21.2).

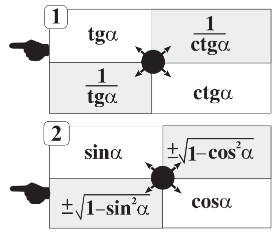


Рис. 9.21.
Выражение
$f(\alpha)$ *через* $\mathbf{co}f(\alpha)$

Ориентиры дают обнаруженные ранее свойства данной таблицы:

а) все клетки по горизонтали в качестве определяющего элемента имеют формулу (аналитическое задание) одной из тригонометрических функций;

б) клетки, находящиеся на противоположных концах диагоналей квадрантов, совпадают по структуре выражений, находящихся в них (рис. 9.22.1).

Наиболее сложный нижний левый квадрант заполняется тогда, когда характерные свойства данной таблицы восприняты визуально и неоднократно применены на практике (рис. 9.22.2).

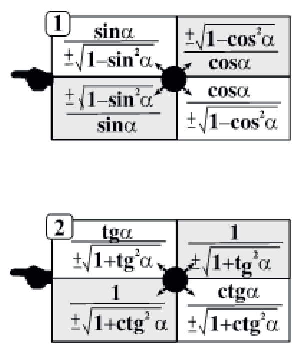


Рис. 9.22.
Совпадение
структур формул в таблице
по диагоналям ее квадрантов

Представленный процесс в рамках действий "специализация – обобщение" выглядит следующим образом:

– от специализации содержания и структуры одного из квадрантов к обнаружению общих закономерностей всей таблицы;

– от свойств таблицы (в целом) к выявлению содержания каждого из квадрантов (в отдельности).

Приведём фрагмент еще одной таблицы «Производная – первообразная» (рис. 9.23), алгоритм которой заложен в ее верхней и нижней полосах (рис. 9.14):

- движение от заданной функции по горизонтали влево дает результат ее дифференцирования,
- движение вправо – результат интегрирования.

Полностью эта объединенная таблица– методическое средство, обеспечивающее закрепление навыков взаимообратных мыслительных действий, – дана в приложении (см. рис. III.28 на стр. 574).

$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	
	$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$
nx^{n-1}	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
	$\boxed{f(x)}$	$F(x)$
$\boxed{f(x)}$	$F(x)$	

Рис. 9.23.
Фрагмент таблицы
«Производная – первообразная»

В завершение же отметим следующее:

«Секрет того, что мы видим предметы, там, где они есть, и такими, какие они есть, заключается в двух вещах: способности глаза сообщать мозгу о том, как вещи выглядят, и способности мозга обогащать зрительный образ сведениями, приобретенными в опыте» [81].

9.4. Формирование стандарта на этапе введения понятия

Перейдем к описанию процесса введения нового понятия с помощью информационной тетради, опираясь на тезис о полезности предварительного ввода визуального образа до формирования точной, строгой математической дефиниции. Каждый из отдельных этапов накопления необходимого визуального опыта подразумевает некий “промежуточный” стандарт с тем, чтобы в итоге сформировался единый визуально-логический образ. Основной целью данного процесса является “сумма” действий, при которых учащийся

> «должен не только логическими средствами, но и в результате прямых наблюдений... увидеть содержание... основ математических понятий» [198, с. 264].

Покажем, как применять приемы визуализации математических объектов, их свойств и связей между ними при введении нового понятия на конкретном примере информационной тетради «Монотонность поведения функции на заданном отрезке».

Этап I. ***Визуализация термина и символа***

Каждое сообщение здесь начинается с заголовка, адекватно отражающего его содержание.

Визуальное введение термина (рис. 9.24).

Рис. 9.24.

Первое представление термина

Можно предложить учащимся самостоятельно заполнить пустую клетку (рис. 9.24), привести простые примеры с числовыми данными, осуществить их интерпретацию на числовых осях.

Геометрическая интерпретация символа (рис. 9.25).

Полезны упражнения типа:

"По рисунку 9.25 определите поведение функции $f(x)$, если убывает от x_2 до x_1".

Основная трудность кроется в том, что необходимо по характеру и границам изменения независимой переменной x сделать вывод о поведении зависимой переменной $f(x)$.

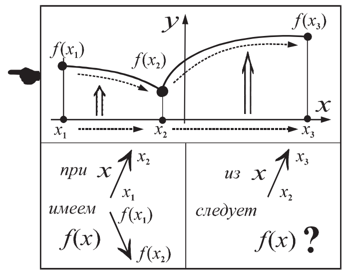


Рис. 9.25.
Примеры употребления символов монотонности

При первом знакомстве такая работа для глаз и мысли сложна – наблюдения осуществляются в медленном темпе. Однако двух-трех "экспериментов" (рис. 9.26) достаточно, чтобы механизм опознания сложился и позволил анализировать переходы в более короткие сроки.

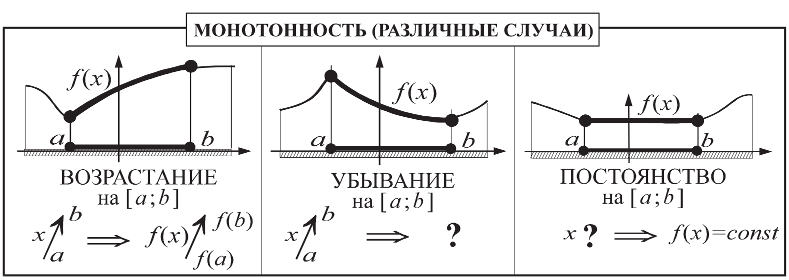


Рис. 9.26.
Задания на распознавание особенностей ситуации

Этап 2. *Переход к определению понятия*

Построение определения понятия (рис. 9.27).

Наиболее продуктивным, на наш взгляд, будет не директивное введение такого определения, а творческий процесс, в котором ученики являются его “создателями”.

К данной странице неявным образом прилагаются следующие задания: “Составьте определение функции

а) убывающей на заданном промежутке $[a;b]$,

б) возрастающей на интервале $[a;b]$” (рис. 9.27).

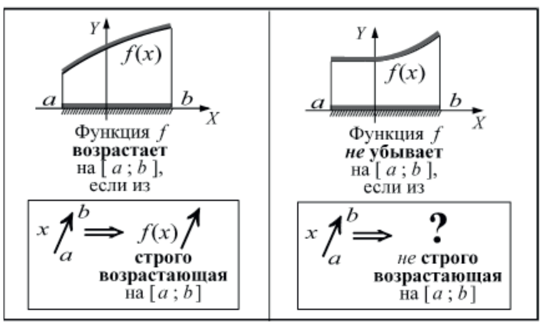


Рис. 9.27.

Задания для составления изображений и описаний

Получив предварительный визуальный опыт (термин – изображение – формула), учащийся должен разобраться в строгом определении понятия. Здесь налицо еще один, чисто психологический, аспект. При введении нового объекта (до установления дефиниции) учащийся может не бояться недостаточно точно и “складно” описывать его существенные особенности.

Условие самостоятельности, задаваемое именно этой страницей, кажется нам чрезвычайно важным. Учащиеся зачастую не подозревают, что можно не заучивать все определения подряд. Достаточно разобраться в содержании и конструкции одного или двух из них, а затем по полученному образцу (не буквально, а как по модели) осуществлять формулировки всех остальных. Таким образом, достигается цель активного восприятия и усвоения (а не пассивного зазубривания) фрагмента учебной математической теории.

Структурные тонкости.

Монотонность тесно связана с особенностями задания функции на конкретном промежутке.

Полезно сделать “небольшую остановку” и разобраться в возможных границах исследования функции “внутри” и “на всем” интервале (рис. 9.28), что, несомненно, полезно для формирования и воспитания двух важнейших сторон мышления – визуальной и логической.

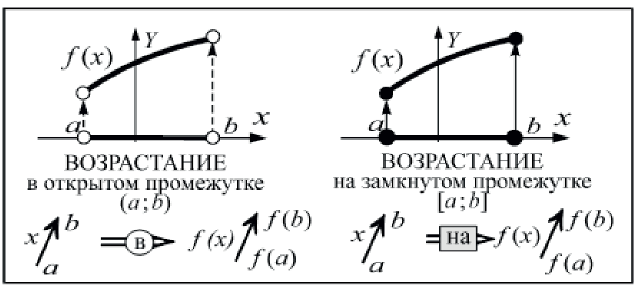


Рис. 9.28.
Уточнение поведения монотонной функции
на концах заданного отрезка

Отметим, что для выполнения подобных упражнений уровень только визуального или только формально-логического мышления явно недостаточен. Необходима визуально-логическая основа мышления (его сторона) (см. стр. 28).

Содержательные примеры.

После введения определения чрезвычайно полезны примеры содержательного характера (рис. 9.29).

На данном этапе компоненты мышления – логическое и визуальное – объединяются. Тем самым вся предварительная подготовка (введение нового понятия, затем – его определение) переходит в стадию образования стандарта.

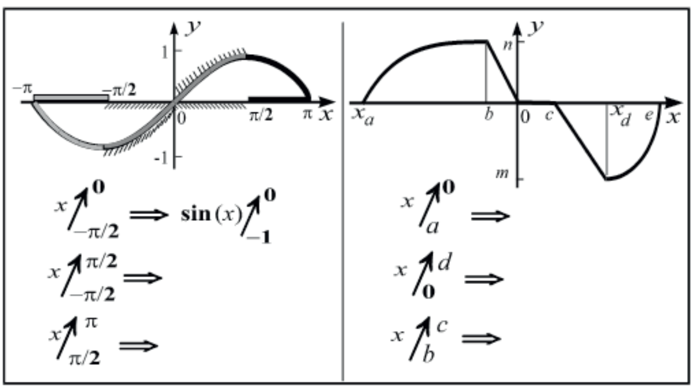


Рис. 9.29.

Примеры исследования функции на монотонность

Этап 3. *Применение понятия*

Следующий важный этап – применение понятия в различных ситуациях. Материалы тетради, подобной изложенной выше, полезно подкреплять соответствующим продолжением. В данном случае речь идет о рассмотрении функциональных зависимостей между числовыми значениями измерений элементов плоских фигур и пространственных тел с позиций исследования их поведения на монотонность.

Обсудим задачу на эту тему: “Приняв за независимую переменную величину радиуса R сектора, определить характер изменения длины его дуги и величины площади при изменении R от r_1 до r_2” (рис. 9.30).

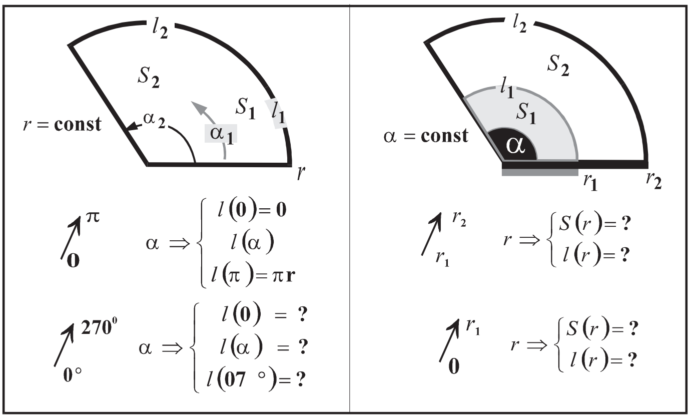


Рис. 9.30.
Исследование на монотонность
изменение элементов плоской фигуры

Этап 4. *Свертывание*

В конечном итоге мы приходим к информационной схеме – справочнику, где кратко изложены все рассмотренные ранее материалы (см. рис. I.26 на стр. 504).

Отметим, что схема “хорошо работает” только тогда, когда ученик усвоил присущие ей символику и терминологию, принял способы рассуждений и стиль оформления. Кроме того, невозможно (и не нужно в схеме) восстанавливать все содержание тетради полностью – некоторые сведения в ней присутствуют в неявном виде. Следовательно, материал схемы нельзя будет использовать как формальную шпаргалку – ее применение практически невозможно без понимания и определенных знаний и умений (рис. 9.31).

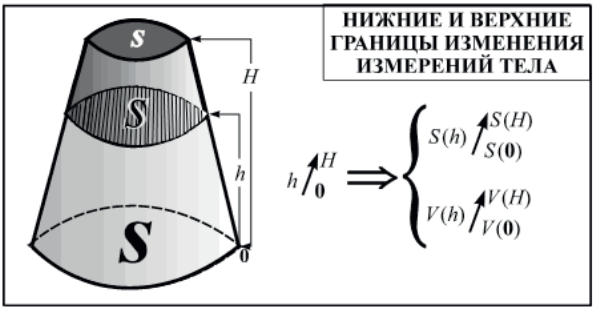


Рис. 9.31.
Задача на применение полученных ЗУНов
в новой ситуации

В результате всех проведенных исследований абстрактное понятие монотонности приобретет визуально воспринимаемые черты, которые могут быть конкретизированы переводами в формулу и текст, поскольку все этапы строятся на сериях визуально-логических задач. (В таких случаях возможны интересные субъективные ассоциации и неординарные суждения об одном и том же объекте).

Выводы

Учащийся, получив в свое распоряжение некоторую информацию, воспринимает средства ее выражения – символы и рисунки – как определенные (знакомые или нет) образы. Начальным моментом мыслительной деятельности ученика является определение их элементов и анализ структуры.

1. Решая математическую задачу, учащийся вынужден преобразовывать исходные данные, предварительно распознав тот визуальный стандарт, к которому можно свести задачу. Поэтому мы считаем весьма важным ввести в процесс обучения математике формирование навыков построения основных визуальных математических моделей, среди которых выделяем следующие типы:

– изображение основных математических понятий;

– визуализация свойств математических понятий и операций над ними;

– иллюстрация связей между понятиями.

2. При визуализации математических понятий, их свойств и операций над ними следует предусмотреть возможную постепенность развития исходного визуального образа, чтобы учащийся мог проследить процесс “сборки” отдельных его составляющих в единое целое. Геометрическая иллюстрация связей между различными понятиями должна осуществляться так, чтобы учащийся мог зрительно проанализировать, а в дальнейшем и восстановить зависимость между парами исследуемых объектов.

3. На основе всех предлагаемых моделей нами продемонстрировано формирование одного из визуальных стандартов на этапе введения нового понятия. Материалы соответствующей информационной тетради последовательно представляют важнейшие этапы такого процесса: *умо*-зрительное введение термина, геометрическую интерпретацию символа, общие и частные случаи действия понятия в конкретных ситуациях, примеры содержательной демонстрации изучаемого понятия.

Здесь налицо еще один чисто психологический аспект.

При введении нового объекта (до установления дефиниции) учащийся может не бояться недостаточно “складно и точно” описывать его существенные особенности. Основная задача в этот период – узнать, соотнести термин и образ. И только приобретя достаточный навык в опознании, привыкнув к наименованию и формуле, учащийся будет обязан дать точное определение.

Глава IV
ВИЗУАЛЬНЫЙ ПОИСК РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В последнее время появилось много различных изданий на тему «Посредством глаза, но не глазом, смотреть на мир умеет разум» (Уильям Блейк). Среди них есть как специальные, так и изложенные на общедоступном уровне (Грегори [49-50], Демидов [59], Клебе [209] и другие [48, 128, 131, 140-141, 155, 187, 201-202, 205-206]).

Различные справочники, сборники, материалы олимпиад все больше и больше обогащаются задачами, в основе которых лежит некоторый образ. Эти задачи представляют собой прекрасный материал для формирования навыков поисковой деятельности ученика.

Рисунок, текст или формула – это информация для разума, который «посредством глаза смотреть на мир умеет».

На каждом школьном уроке учитель предъявляет некоторую информацию, существенные моменты которой ученику полагается понять, усвоить и запомнить.

Ученик заносит в тетрадь отдельные сведения, перерисовывает таблицы и диаграммы, записывает формулировки теорем, фиксирует цепочки формул.

Результатом этих усилий учитель предполагает значительный рост любознательности ученика, его стремления решать не только легкие, но и трудные задачи.

Однако, к сожалению, у большинства учащихся так и не пробуждается интерес к поискам ответов на сложные вопросы: они не успели (не смогли) понять, как это делать.

Визуальное представление математических понятий, зрительное восприятие их свойств, связей и отношений между ними позволяют достаточно быстро и наглядно развернуть перед учащимися отдельные фрагменты теории, акцентировать внимание на узловых моментах решения учебной задачи, сформировать и распространить важный алгоритм практических действий, вовлечь полученные знания и приобретенные умения в обсуждение очередных проблем.

Приступим к рассмотрению одной из важнейших проблем обучения в средней школе – поисковой деятельности учащихся. В данном разделе исследования мы обращаемся к особому виду поиска – визуальному поиску, важнейшим инструментом которого является “воспитанное и организованное” зрение.

Визуальный поиск (или для краткости просто поиск) – это процесс порождения новых образов, новых визуальных форм, несущих конкретную визуально-логическую нагрузку и делающих видимым значение искомого объекта или его свойства.

Отправными моментами и точками опоры такого процесса являются запас готовых, известных учащемуся визуальных образов, структура и элементы информации, визуально обозримые связи между ними.

Средствами формирования навыков визуального поиска служат задачи специального назначения, содержания и оформления. Такие задачи мы назвали ранее визуальными и более подробно рассмотрели их во 2-й главе.

Цель данной главы состоит в том, чтобы представить:

– что должен искать учащийся в предъявленной ему знаковой математической информации;

– где и как может учащийся отыскивать ориентиры и подсказки в ее содержании;

– каким образом учащийся может обнаружить в визуальной информации скрытые, недостающие данные;

– какие средства и приемы служат образованию навыков поиска.

Соответственно этому данный раздел разделен на части:

1. Ориентиры и подсказки.
2. Выявление неявной информации.
3. Ситуации группового и индивидуального поиска.

Описание всех экспериментов мы сопровождаем общими рекомендациями к организации визуального поиска решения задачи.

§10. Начальные этапы визуального поиска

Ученик начинает решать задачу. С заданием стандартного характера, оформленного знакомым образом, он обычно “справляется” вполне удовлетворительно. Если же условие отличается чем-либо от привычных, то следует остановка. Для того чтобы догадаться, как решать задачу, нужно уметь “хорошо видеть”.

Например, определять общее и различное, группировать объекты по определенным признакам, определять “стержневой” стандарт и т.д.

В том случае, когда составить мысленный план решения задачи не удается, “живое созерцание” как бы ограничивается этапами: анализ визуальной информации и распознавание стандарта. Далее следует поиск выхода из создавшегося тупика.

Таким образом, решение достаточно сложной для ученика математической задачи мы можем рассматривать как бы в двух “плоскостях” – наблюдения и визуальный поиск.

10.1. Наблюдения, ориентиры и подсказки

Наблюдения – это результат взаимодействия двух первых этапов работы “живого созерцания” в процессе восприятия и переоформления данных информации. Оно позволяет обнаружить ориентир.

Под **ориентиром учебной знаковой информации** мы понимаем то визуально наблюдаемое свойство – особенность объектов или структуры блоков информации, которое дают возможность осознать, понять и принять подсказку.

Как следует из определения, ориентирами могут быть одинаковые элементы, ярко выраженные формульные или геометрические стандарты, словесные комментарии, наименования, сама “архитектура” связей между фрагментами информационного сообщения.

Навык наблюдений сам по себе не приходит, самостоятельно не образуется. Он формируется в результате целенаправленной работы учителя и ученика. Для формирования навыков наблюдений полезны специальные упражнения. Их можно составлять из комплектов задач и примеров, основанных на материалах различных тем к каждому разделу курса. В последнем случае желательно, чтобы они представляли собой единую модель, позволяли постепенно переходить от одного блока информации к другому.

Приведем фрагменты таких комплектов.

Воспроизведения информации по памяти

Пример 1. Посмотрите и запишите по памяти формулы:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$;

б) $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^{x}\cdot\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{y-s}}{\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{y}\cdot\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^{x-y}}$.

Пример 2. Посмотрите и изобразите по памяти графики (рис.10.01):

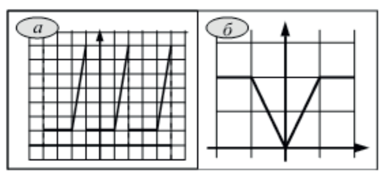


Рис. 10.01.
Рисунки для воспроизведения по памяти

Анализ и преобразование информации

Пример 3. Осуществите подходящую замену пар элементов и запишите результат сведения систем к простейшим:

а) $\begin{cases} 2^{x}+2^{y}=5 \\ 2^{x+y}=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=-\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}-\dfrac{1}{2x-y+3}=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} x\cdot y\cdot(x+y)=6 \\ x\cdot y+(x+y)=5 \end{cases}$.

Навык наблюдений можно формировать различными приемами: анализом готовых форм, выполнением упражнений серии, решением задач, посвященных исследованию определенного образа.

Исследование элементов и структуры информации

Пример 4. Глядя на график функции (рис. 10.02.1) ответьте на следующие вопросы:

1. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=\mathbf{0}$?
2. Каковы (приближенно) корни уравнения $f(x)=-\mathbf{1}$?
3. При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень?
4. При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет один корень?
5. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^{\mathbf{2}}$?

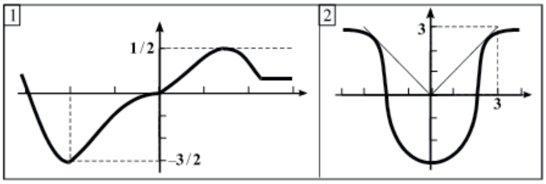


Рис. 10.02.
Иллюстрации к заданиям
на исследование элементов и структуры графической информации

Пример 5. По графику функции $y=f(x)$ (рис. 10.02.2):

1. Решите уравнения: $f(x)=\mathbf{0}$; $f(x)=\mathbf{1}$; $f(x)=-\mathbf{2}$.
2. При каждом значении $y=\dfrac{\mathbf{2}x-\mathbf{1}}{x-\mathbf{2}}$ определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ при $a=-\mathbf{2}$; $a=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$; $a=\mathbf{0}$; $a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $a=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$.

3. Решите неравенства: $f(x) > \mathbf{0}$; $f(x) < \mathbf{1}$; $f(x) \geq \mathbf{-2}$.
4. Подберите такое значение a, чтобы неравенство $f(x) \geq a$ не имело решений; было бы верно при любом значении x.
5. Определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = x$.
6. При каждом значении k определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = kx$.

Покажем на примере урока 8-го класса, как можно организовывать наблюдения учащихся в ходе построения теоретического положения. Цель урока «Основное тригонометрическое тождество» – вывод одного из важнейших положений тригонометрии.

Урок состоит из 3-х этапов.

На первом из них ученики вспоминают и обобщают известные им определения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и находят значения выражений с ними для треугольников различного вида (рис. 10.03). Кроме этого устанавливается связь между синусом и косинусом одного и того же угла.

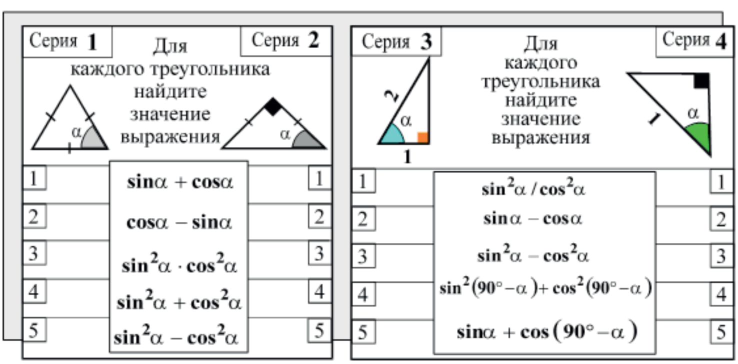


Рис. 10.03.
Пропедевтические упражнения
к выводу основного тригонометрического тождества

Таким образом, происходит переход к главному моменту урока – выводу основного тригонометрического тождества.

Обычно учитель доказывает у доски, ученики повторяют готовое доказательство на местах в своих тетрадях. Здесь же учебный процесс формируется нетрадиционно.

Работа с тренажером №5 позволяет учащимся самостоятельно доказать (рис. 10.04):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

и убедиться, что это равенство справедливо для любого угла α.

Отсюда естественным образом возникает вопрос: “Справедливо ли это равенство для углов произвольного треугольника?”.

Далее идет тест №6, который позволяет быстро проверить усвоение полученных знаний (рис. 10.05).

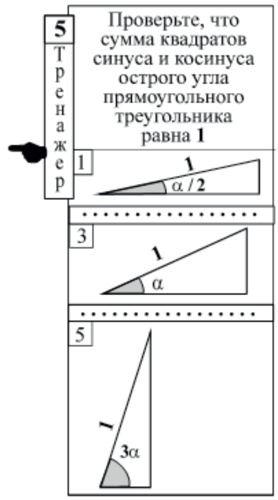


Рис. 10.04.
Проверка справедливости тождества

Тест **6** По заданному уравнению определитеострый угол α	**30°**	**45°**	**60°**	Любой острый угол	**Уравнение *корней не имеет***
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2$					
$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1/4$					
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$					
$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 3/16$					
$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1/16$					

Рис. 10.05.
Тест для проверки результатов
подготовки к усвоению нового фрагмента теории

Третий этап урока позволяет подчеркнуть значение тригонометрического тождества. Серия №7 “показывает” возможность применения тождества для упрощения выражений. Материал серии №8 нацелен на будущее, он позволит продолжить начатую работу на следующих уроках при изучении дальнейшего материала (рис. 10.06).

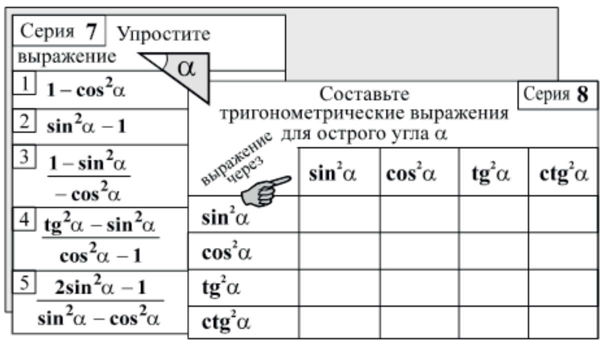


Рис. 10.06.

Серии на применение
основного тригонометрического тождества

Отыскать ориентир в условии задачи “с изюминкой” иногда довольно непросто. Нужна соответствующая техника и привычка к таким поискам.

В условиях, записанных в виде формул, ориентирами могут быть закономерности, связывающие числовые данные, формулы сокращенного умножения, символы элементарных функций и т.д.

В геометрических задачах ими чаще всего оказываются наиболее известные геометрические фигуры.

Приведем еще два примера.

Пример 6. “Вычислить: $\dfrac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$”.

Зрительно анализируя компоненты числовой конструкции, выявляем “общее” – повторяющийся элемент – число **2** в качестве основания степени. Выделив отмеченный ориентир в структуре всех блоков данного выражения (рис. 10.07.1), получаем еще один ориентир – число **3** в качестве основания степени (рис. 10.07.2).

Анализ	Решение
1 Сначала выделим число **2** в качестве основания степени:	$\frac{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot \left(2^2\right)^9 \cdot 9^4}{\left(2\cdot 3\right)^9 \cdot 2^{10} + \left(2^2\cdot 3\right)^{10}} =$
2 Затем выделим число **3** в качестве основания степени:	$= \frac{2^{19}\cdot \left(3^3\right)^3 + 3\cdot 5\cdot 2^{18}\cdot \left(3^2\right)^4}{\left(2\cdot 3\right)^9\cdot 2^{10} + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$
3 Применим формулу преобразования степени в степень:	$= \frac{2^{19}\cdot 3^9 + 5\cdot 2^{18}\cdot 3^9}{2^{19}\cdot 3^9 + 2^{20}\cdot 3^{10}} =$
4 Приходим к искомому ответу:	$= \frac{2^{18}\cdot 3^9\left(2+5\right)}{2^{19}\cdot 3^9\left(1+2\cdot 3\right)} = \frac{1}{2}$

Рис. 10.07.

План решения (слева) и собственно решение задачи (справа)

Соответствующие преобразования (рис. 10.07.3) позволяют без труда прийти к искомому ответу (рис. 10.07.4).

Для сопоставления обратимся к задаче геометрического характера.

Пример 7. “На рис. 10.08.1 изображен параллелограмм. Определить величины отмеченных на нем углов”.

На рисунке 10.08.2 показаны главные ориентиры:

- противоположные углы параллелограмма,
- углы при основаниях равнобедренных треугольников,
- накрест лежащие углы при двух параллельных прямых, пересеченных третьей.

Далее визуально реализуется план процесса свертывания, приводящий к получению ответа (рис. 10.08.3).

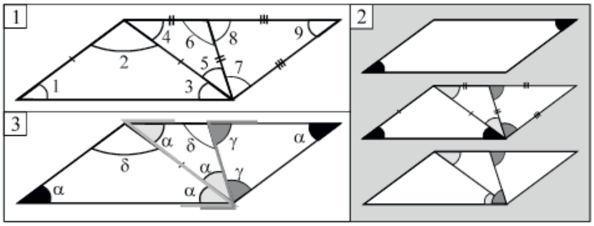


Рис. 10.08.

Ориентиры (3) в задании геометрического содержания (1),
общий план получения численных результатов (2)

Пример 8. Вам предлагается вывод формулы, выражающей косинус через тангенс. Выведите формулу, выражающую синус через котангенс (рис. 10.09).

Вывод формулы	Ориентиры и подсказки
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\Downarrow$	$:\cos^2 x$ $(\cos x\neq 0)$
$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\Downarrow$	$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\mathrm{tg}^2 x$
$\mathrm{tg}^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\Downarrow$	$a=\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}=b$ $(a,b\neq 0)$
$\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x+1}=\cos^2 x$ $\Downarrow$	$\pm\sqrt{..}$
$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+1}}=\cos x$	

Рис. 10.09.

Пример нахождения выражения $\cos x$ через $\sin x$
в качестве образца для вывода выражения $\sin x$ через $\mathrm{ctg} x$

Пополнение “банка” визуальных стандартов может стать темой школьного урока. Представляем описание урока по теме «Функции $y=x^{2n}$ и $y=x^{2n+1}$ при $n\in N$» и материалов, которые мы использовали в ходе учебных наблюдений, приводящих к обнаружению ориентиров и подсказок, помогающих решить учебную задачу.

Целью урока является знакомство учеников со степенной функцией (при натуральных показателях). Результатом этого урока должно было быть образование нового навыка: распознавание графиков функций $y=x^{2n}$ и $y=x^{2n+1}$ при $n \in N$.

Переход к новой теме начинается с повторения особенностей графиков функций $y=x$, $y=x^2$ и $y=x^3$. При помощи наблюдений, сопутствующих процессу обсуждения графика функции $y=x^4$, ученики могут прийти к выводу, что кривая, являющаяся графиком этой функции, похожа на график функции $y=x^2$ (рис. 10.10), а график функции $y=x^5$ похож на график $y=x^3$.

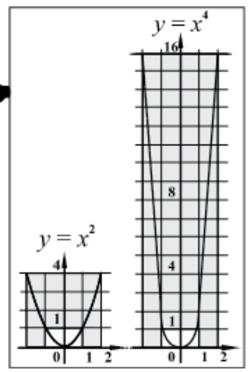


Рис. 10.10. Параболы четных степеней

Правильность выводов можно проверить по информационной схеме “Параболы четных и нечетных степеней” (рис. V.17 на стр. 603). Все эти действия приводят к обобщению:

график функции $y=x^{2n}$ при $n \in N$ строится по типу графика функции $y=x^2$, а график $y=x^{2n+1}$ – аналогично графику $y=x^3$ (при $n \in N$).

Такие обобщения, полученные в результате наблюдений, позволяют за один урок решить достаточно большое количество различных задач, ориентированных на формирование намеченного в цели урока навыка (см. рис. V.18 на стр. 604).

Данная тема не входит в перечень обязательных. Ее можно "вписать" в план занятий за счет резерва времени, образующегося благодаря постоянному и целенаправленному использованию подобных дидактических материалов, что совершенно не исключает применение обычных учебных пособий и приемов обучения.

Итак, в качестве ориентира мы принимаем тот первичный результат анализа данных, который позволяет выявить общее, присущее отдельным блокам или элементам информационного сообщения. В эту группу следует отнести стандарты формульного и геометрического характера, структуру логически основополагающих связей, текстовые "тонкости" исходного задания.

Приведем образцы упражнений, направленных на формирование навыка обнаружения ориентира и подсказки.

Пример 9. Определите по графику число корней уравнения:

а) $\mathbf{2}^x = \mathbf{3} - \mathbf{2}x - x^{\mathbf{2}}$; б) $\mathbf{log}_{\mathbf{2}} x = x^{\mathbf{2}} + x - \mathbf{2}$; в) $\mathbf{sin}\, x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} x - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Подсказкой здесь является предложение провести исследование по графику, ориентиром для "выхода" на правильный ответ может служить количество точек их пересечений.

Пример 10. Обсуждая успехи ученика, учитель математики так отозвался о нем: «он мало знает, но у него положительная производная». Все поняли, что хотел сказать учитель, – скорость приращения знаний у ученика положительна, а это есть залог того, что знания его возрастут. Подумайте, как можно охарактеризовать три разные кривые роста знаний, изображенных на рисунке 10.11.

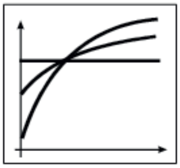


Рис. 10.11. Возможные кривые роста знаний учащихся

Пример 11. На рисунке 10.12 изображены графики 6 функций. Определите по графику, какая из них имеет обратную, а какая – нет.

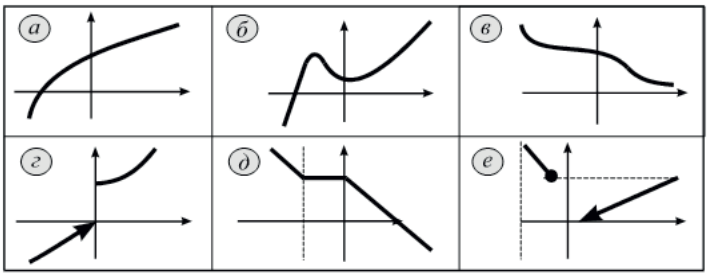


Рис. 10.12.
Задание на распознавание графика обратимой функции

Пример 12. Нарисуйте фигуры, площади которых задаются следующими интегралами:

а) $\int_0^2 x^2\,dx$; б) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$; в) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Здесь в роли ориентиров–подсказок выступают подынтегральные функции и пределы интегрирования. Изобразив графики функций и заштриховав их подграфики на заданных промежутках, мы приходим к нужному ответу.

10.2. Формирование догадки

Ориентир позволяет перейти к формированию догадки.

Под догадкой мы понимаем

«сообразительность, способность улавливать существо дела» [126].

Догадка есть необходимая, но, к сожалению, почти неразвитая у подавляющего большинства учащихся сторона мышления.

Догадываться ученик может в ходе поиска одинакового, преобразования отдельных блоков информации к знакомым стандартам.

Чтобы помочь ученику догадаться, преподаватель должен постоянно “наводить” его на размышления:

“Что особенного есть в данном выражении, рисунке, тексте?

Из-за чего я не могу решить эту задачу?”

[21-22, 109, 133-135, 189-190 и др.].

Таким образом, мы приходим к выводу:

ориентиры и подсказки образуют одинаковые элементы и знакомые стандарты,

а догадку следует искать в том особенном, что существенно отличает предъявленную информацию от всех прочих.

Причем, когда данных слишком много, догадку можно наметить уменьшением объема информации, т.е. преобразованием ее исходной структуры к визуально воспринимаемому объекту.

Приведем пример из практики автора.

При решении задачи

“Вычислить $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot ... \cdot \sqrt[512]{a}$”

большинство учеников оказались в затруднении.

Выяснилось, что их сбивало с толку количество радикалов.

Как только это обстоятельство было выведено наружу (высказано словами), сразу же кто-то догадался – подсказка в последовательном удвоении показателей радикалов.

А дальше опять последовала остановка.

Тогда был использован прием сужения диапазона поиска.

Начали с расшифровки самого простого: $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

Перешли к первому произведению (рис. 10.13.1).

Постепенно наращивая массив данных (рис. 10.13.2), составили серию примеров, которая позволила угадать ответ (рис. 10.13.3).

Паузы на уроке в ожидании догадки учащихся неизбежны.

Но в целом реакция может быть столь значительной, что вполне окупит "потерю времени".

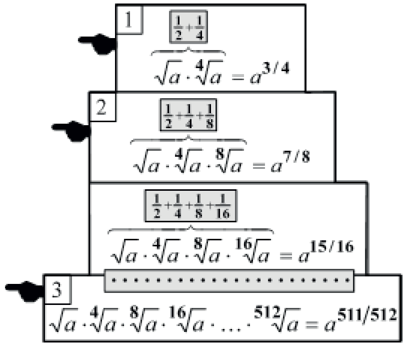


Рис. 10.13.
Сужение диапазона поиска (1), последующее исследование (2), получение ответа (3)

Подобные групповые поиски, несмотря на сложность их осуществления и большое напряжение, увлекают учеников.

Их активность и интерес заметно повышаются от урока к уроку.

Более того, при отдельных сходных (даже не всегда явно определяемых на первый взгляд) моментах, в классе найдется ученик, который, вспомнив аналог, задает направление поиска.

Рассмотрим еще один пример:

"Вычислить значение выражения

$$\mathbf{lgtg1^\circ + lgtg2^\circ + lgtg3^\circ + \ldots + lgtg89^\circ}".$$

Предварительно вспомним "секрет" известной еще с XIX века задачи:

"Вычислить устно сумму чисел от единицы до ста",

столь быстро решенной маленьким Фридрихом Гауссом (рис. 10.14.1).

Теперь применим эту модель для реализации предшествующего задания, учитывая для начала явно заданное преобразование (рис. 10.14.2).

1 $\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$

2 $\quad \lg \mathrm{tg}1^\circ + \lg \mathrm{tg}2^\circ + \lg \mathrm{tg}3^\circ + \ldots + \lg \mathrm{tg}45^\circ + \ldots + \lg \mathrm{tg}87^\circ + \lg \mathrm{tg}88^\circ + \lg \mathrm{tg}89^\circ =$

2 $\quad = \lg\left(\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}45^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}87^\circ \cdot \mathrm{tg}88^\circ \cdot \mathrm{tg}89^\circ\right) =$

2 $\quad = \lg\left(\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}44^\circ \cdot \mathrm{tg}45^\circ \cdot \mathrm{tg}46^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg}3^\circ \cdot \mathrm{ctg}2^\circ \cdot \mathrm{ctg}1^\circ\right) =$

$\boxed{= \lg 1 = 0}$

Рис. 10.14.

Решение задачи-модели (1),
обнаружение ориентира – правило сложения логарифмов (2),
применение подсказки – формулы приведения (3),
собственно решение задачи и ответ (4)

Затем приступим к нахождению ориентира – обнаружению “одинакового” и соответствующих стандартов (рис. 10.14.3).

Чтобы “получить” одинаковые элементы, нужно перевести $\mathbf{tg}(\mathbf{90^\circ} - \alpha)$ в $\mathbf{ctg}\,\alpha$ (рис. 10.14.4).

На этом процесс практически завершен.

В знаковой информации подсказкой может являться специальная раскраска или штриховка рисунка, выделение жирным шрифтом или специальное расположение элементов формулы. В тексте ею может оказаться слово, выступающее в роли эпитета или синонима.

Яркий необычный пример, специальное, визуально ясное оформление его решения всплывут в памяти, помогут учащемуся найти аналог для определения пути решения достаточно сложной задачи.

10.3. Поиск скрытой информации

Вербальные и формульные фрагменты, описывающие какое-либо условие учебной задачи, не всегда облегчают понимание ее содержания. Затруднения обычно связаны с “недосказанностью”, с недостаточной полнотой (для учащегося!) ее данных. Такие задачи предусматривают извлечение дополнительных сведений, основанных на знании соответствующих фрагментов теории. Тупик можно преодолеть, если в процесс решения задачи вводить зрительные образы и формульные стандарты, которые предусмотрены ее условием, но не выведены наружу.

Для внесения ясности начнем с примера.

<u>Задача 1.</u> “В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, периметр равен p. Найти площадь треугольника”.

Допустим, что учащийся осуществил перевод.

Он рассуждает:

1) Треугольник прямоугольный, отсюда, по теореме Пифагора имеем: $x^2+y^2=a^2$.

2) Периметр p равен $x+y+a$.

3) Площадь треугольника вычисляется по формуле $S_\Delta=\frac{1}{2}x\cdot y$.

Итак, ученик записал задачу в виде: $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=a^2 \\ x+y+a=p \\ S=\frac{1}{2}x\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad S=?$

Ясно, что неизвестными на самом деле являются x и y.

Как их найти?

Не помогает ни “живое созерцание”, ни визуальный поиск. Задача что-то “прячет”, скрывает от ученика.

Чтобы справиться с ней, он должен знать не только как искать, но и где искать. В подобных случаях нужно “призвать на помощь” неявно заданную информацию.

Объединим элементы, содержащие неизвестные x и y, и посмотрим, где они могут встретиться одновременно (т.е. отыщем подходящий формульный стандарт). Выражения x^2+y^2, $x+y$, $x \cdot y$ входят в формулу квадрата суммы. Это и есть та скрытая информация, которая позволит получить ответ на вопрос.

Перейдем к непосредственному обсуждению данной проблемы. Начнем с вопроса: какие явные и какие скрытые сведения может извлечь учащийся из недостаточно полной для него информации.

То, что ученик видит, понимает и может перевести в картинку или формулу – это явная для него информация. Следовательно, под **явно заданной информацией** будем понимать такие данные исходного информационного сообщения, которые непосредственно воспринимаются (извлекаются) зрением –

«*Durch die Augen in den Sinn*» (через глаз в смысл).

Сюда же относятся те результаты переоформления, которые либо заложены в соответствующих ***известных ученику*** основных визуальных или формульных образах, либо содержатся в четко установленных ***хорошо знакомых ему*** отношениях между ними.

Распознавание явно заданной информации может быть осуществлено мысленным либо письменным представлением и оформлением данных.

К **неявно заданной информации** отнесем такие данные, которые непосредственно зрением не воспринимаются. Они требуют расчленения информации на блоки, обсуждения следствий из определений объектов, их свойств или связей между ними. Последние чаще всего входят в список обязательных знаний и с помощью различных схем могут восстанавливаться достаточно быстро.

Так в примере “$\mathbf{lg10^{cos^2 \mathit{x}} + log_3 3^{cos^2 \mathit{x}} = ?}$” к неявным можно причислить отношения: $\mathbf{log}_a a = \mathbf{1}$, $\mathbf{log}_b a^p = p\,\mathbf{log}_b a$.

Разумеется, для подготовленных учащихся подобные условия сразу выступают как явные.

Визуальный поиск напрямую связан с хорошо известными математическими объектами и операциями над ними. Дело учителя заранее или в ходе урока регистрировать “круг” скрытого для большинства своих учеников, направлять на поиск известных, но не выведенных в нужный момент сознанием, необходимых отношений, организовывать извлечение стандартов из памяти подходящими вопросами.

Деление информационных сообщений на явно и неявно заданные весьма условно.

Если учащийся хорошо усвоил перевод, например, текстовой информации в формулу, то все данные для него “открыты” – выступают как явные.

Если нет, – требуется поиск необходимых сведений, недоступных непосредственному восприятию.

Задача 2. На расстоянии **3** *см* от центра шара проведено сечение площадью **16** $см^2$. Найти объем шара.

Построим схематический чертеж и проведем анализ имеющейся вербальной информации. Искомое – объем шара, который вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (формульный стандарт). Следовательно, задача сводится к отысканию радиуса шара R.

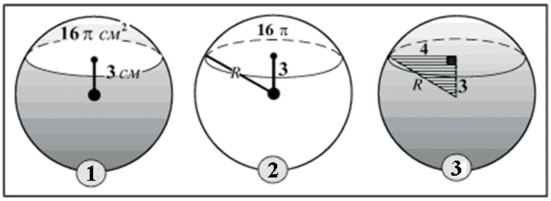


Рис. 10.15.

Задача на нахождение объема шара по известным площади его сечения и расстоянию этого сечения от центра шара

Это явная информация. Отметим ее на рисунке (рис. 10.15.1).

Следующая информация – "проведено сечение" – означает, что не затушеванная фигура есть окружность с площадью $S = \pi r^2$, имеющая свой радиус r, который мы также внесем в визуальную модель (рис. 10.15.2).

Теперь решение очевидно: обнаруживается замечательный стандартный образ – прямоугольный треугольник со сторонами **3** и **4**, гипотенуза которого (т.е. радиус шара) равна **5**. Отсюда $V = \frac{4\pi}{3} 5^3 \ см^3$ (рис. 10.15.3).

Чрезвычайно полезны текстовые ***альтернативные*** задачи, которых, к сожалению, совершенно недостаточно "в арсенале" учителя математики. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Трос, крепящий мачту длиной **8** метров составляет с горизонтом угол в $60°$. На каком расстоянии от основания мачты укреплен на земле трос? (рис. 10.16).

Данная "Задача о тросе и мачте" – это математический парафраз знаменитого указа одной из русских императриц: "Казнить нельзя помиловать". Пропущенная запятая создает альтернативу, "разрешить" которую можно, только если вдуматься в смысл вопроса задачи.

Рис. 10.16.

Альтернативная «Задача о тросе и мачте»

В нашей задаче альтернативу также может создать сам вопрос, если в нем пропустить запятую (*Трос, крепящий мачту, длиной…*), что и даст разные ответы.

__**Пример 2**__**.** На одном из уроков в 6-м классе при формировании понятия модуля числа, автором данного исследования был предложен вопрос: “Как правильно сказать: опустился на глубину **300** метров или опустился глубину на **–300** метров?” (рис. 10.17).

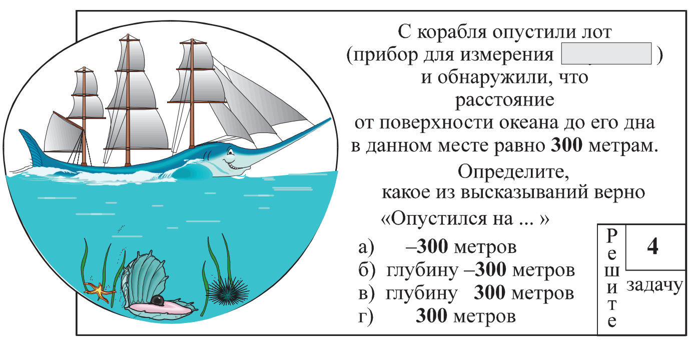


Рис. 10.17.

Квазиальтернативная текстовая задача
на выбор ответа из предложенных

Ученики долго сообща обсуждали эту ситуацию вопрос и пришли к правильному выводу по следующим ориентирам:

– слово “глубина” уже показывает направление (вниз от начала отсчета),

– слово “опустился” также указывает на направление в сторону минуса.

Следовательно, выражение “опустился на **300** метров” полностью отражает суть дела.

Ясно, что подобные примеры чрезвычайно редки, но тем более высока их ценность (см. также рис. II.35 на стр. 539).

Перевод информации с одного языка на другой как бы заново формирует очередную задачу, вытекающую из исходной. Факты, о которых “умалчивает” первоначальный текст или формула, выведены наружу и дальнейшие действия определяются использованием явной и поиском неявно заданной информации уже на новом, более обозримом материале. Мы как бы начинаем решать новую задачу.

Благодаря последовательному анализу и соответствующим преобразованиям часто удается сузить диапазон поиска, свести процесс к обнаружению “элементарного основания” искомого вопроса.

Извлечение скрытой информации имеет особое значение для решения геометрических задач. Вербальная информация, обычно описывающая их условия, не всегда способствует обнаружению ориентиров, а иногда даже тормозит восприятие подсказки.

При решении таких задач часто приходится осуществлять дополнительные построения, чтобы необходимые сведения оказались визуально обозримы.

Важность формирования навыков извлечения дополнительных данных информационных сообщений диктуется не только потребностями получения математического образования. Умение расшифровывать, раскрывать, дополнять вербальные, формульные или геометрические структуры может стать инструментом при изучении других общеобразовательных дисциплин:

> « ... активность в широком смысле в обучении математике не отличается существенно от активности учащихся в процессе обучения другим предметам. Это вообще активная мыслительная деятельность. Активность в узком смысле – это специфическая активность, мыслительная деятельность определенной структуры, свойственная для математики и называемая поэтому “математической” деятельностью. Если ученик проявляет активность в узком смысле, то он проявляет активность и в широком смысле» [177, с. 71].

10.4. Визуальный план решения задачи

Приступим к описанию очередной “параллели” между “живым созерцанием” и визуальным поиском. Мысленному составлению плана работы мы соотнесем визуальный (письменный или устный) план решения задачи. Подобный план рождается также в ходе наблюдений, экспериментов, определяющих отдельные этапы визуального поиска.

Главной ценностью данного процесса является отделение существенного от несущественного.

> Визуальный план решения задачи в данной работе демонстрировался много раз. В предлагаемых нами в этой работе иллюстрациях он выступает как “Анализ”, благодаря которому определяются основные стандарты, и намечается ход решения (см. рис. V.19-V.20 на с. 605-606).

Выявление существенного в условии задачи в большинстве случаев строится на определении зависимости между переменными и параметрами. Имеются две возможности: либо числовые значения параметров вообще не влияют на структуру связей, либо определенное числовое значение некоторого параметра является решающим фактором.

В первом случае существенной является сама структура зависимости между отдельными блоками информационного сообщения. Подобная структура визуально и логически воспринимаема (обозрима). Обозримость подобной структуры помогает найти ответ на искомые вопросы.

Во втором – структура ограничена действием параметра, причем последний, обычно, влечет за собой неявно заданные дополнения. Если зрительно воспринимаемые подсказки отсутствуют, то информация, “спрятанная” в них, является для большинства учеников скрытой, неявной.

От того, насколько прочно сформирован навык перевода таких задач в рисунок или формулу и зависит успешность их решения.

В приложении (рис. II.35-II.36, стр. 539-540) представлены текстовые задачи, к условиям которых приложены рисунки-подсказки, “обнажающие” структуры заложенных в текстах информаций.

Рассмотрим другие примеры.

Задача 3. Дана прямая $by - ax - c = \mathbf{0}$. Определить угловой коэффициент другой прямой, если известно, что:

а) прямые параллельны;

б) прямые перпендикулярны;

в) прямые не параллельны и не перпендикулярны.

Что существенно, например, для решения вопроса (**а**)?

Представив параллельные прямые, приходим к выводу: угловые коэффициенты таких прямых должны совпадать. Для численных значений их следует учесть лишь одно требование: $b \neq \mathbf{0}$.

Во втором случае (**б**) структура связей между прямыми гораздо сложнее, в уме ее представить трудно, поэтому придется прибегнуть к наблюдениям.

Представим решение задачи в ситуации поиска так, как если бы учащийся забыл многое из того, что он должен знать по данному материалу.

Учащиеся осуществляют перевод (рис. 10.18.1-3).

Они начинают думать.

– Что требуется найти?

(Угловые коэффициенты неизвестных прямых).

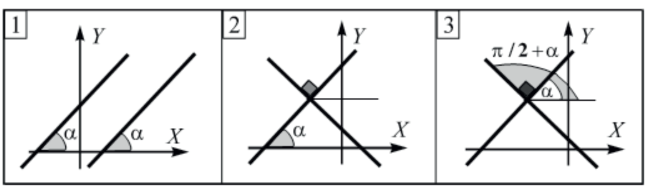


Рис. 10.18.

Иллюстрации к задаче на составление формул углового коэффициента прямой, расположенной относительно заданной: параллельно (1), перпендикулярно (2), в произвольном положении (3)

– Где их можно найти?

(В формуле прямой с угловым коэффициентом).

– Когда мы сумеем вычислить нужные k?

(Когда определим, как отражается характер связей между прямыми на значениях этого параметра).

Следовательно, необходимо разобраться в характере этих связей между прямыми (в каждом отдельном случае).

Таким образом, мы выявляем существенное – главным являются не конкретные значения параметров, а связи между теми объектами, которые порождают их.

Далее следует второй “виток” цикла.

– Что характеризует связи между парами прямых?

(Углы их наклона).

Отсюда сразу ответ на первый вопрос задачи: $k_1 = k_2$ (рис. 10.18.1).

Ученики продолжают поиск.

На рисунке 10.18.2 структура связи между прямыми принципиально иная. Необходимо найти дополнительные сведения – скрытые от глаз условия.

Следовательно, рисунок 10.18.3 придется преобразовать, дополнить так, чтобы эти условия оказались выведенными наружу.

– Когда мы сможем разгадать “секрет” задачи?

(Когда найдем ориентир).

– Где искать его?

(Как обычно, в одинаковом или стандартах).

Поиск одинакового приводит к рисунку 10.18.3, позволяющему представить результаты наблюдений в виде формулы:

$$k_2 = \mathbf{tg}\left(p/2 + a\right) = -\,\mathbf{ctg}\,a = -\frac{1}{\mathbf{tg}\,a} = -\frac{1}{k_1}.$$

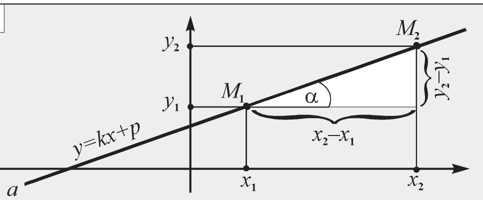
Таким образом, ученик убеждается, что он может самостоятельно разобраться в трудной или непривычной для него задаче, если будет ставить (сам себе) вопросы и искать на них ответы.

Приведем еще одну иллюстрацию этого процесса на другом конкретном примере.

Задача 4. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если эта прямая проходит через точки $(\mathbf{1}\,;\mathbf{2})$ и $(\mathbf{3}\,;\mathbf{6})$.

Представим рассуждения, опираясь на “живое созерцание” учащихся, иллюстрируя их рисунком 10.19). Все основополагающие моменты условия обозначены на чертеже (рис. 10.19.1).

1



	Объект поиска	Существенные данные ситуации	Конкретные данные задачи
2	$a: y = \boxed{k}x + \boxed{p}$	$M_1, M_2 \in a$	$M_1(\mathbf{1}\,;\mathbf{2})$ $M_2(\mathbf{3}\,;\mathbf{6})$
3	$\boxed{k} = \mathbf{?}$	$k = \mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$k = \dfrac{\mathbf{6-2}}{\mathbf{3-1}} = \mathbf{2}$
4	$\boxed{p} = \mathbf{?}$	$y = kx + \boxed{p}$ $M_1 \in a \Longrightarrow y_1 = kx_1 + \boxed{p}$ $\boxed{p} = y_1 - kx_1$	$\boxed{p} = \mathbf{2 - 2\cdot 1 = 0}$
5	$a: y = \boxed{k}x + \boxed{p}$	$\Longrightarrow$	$a:\ y = \mathbf{2}x$

Рис. 10.19.

Выявление существенного в условии задачи о прямой для нахождения зависимости между ее переменными и параметрами

Восстановив формульный стандарт – уравнение прямой с угловым коэффициентом (рис. 10.19.1-2), приходим к выводу, что значения абсцисс и ординат точек, через которые проходит прямая, не существенны (рис. 10.19.2). Ими могли оказаться любые другие точки данной прямой.

Теперь “рассортируем” совокупность данных так, как показано на рисунке 10.19: кружками (рис. 10.19.3-5) обведены символы объектов, получение значений которых и есть цель решения.

Остановимся еще на одном случае и покажем ***визуально***, как можно организовать наблюдения, отыскивая ориентиры и подсказки в материале формульной информации.

<u>Задача 5</u>. Разложить на множители: $x - \mathbf{3}\sqrt{xy} + \mathbf{2}y \ \left(x, y > \mathbf{0}\right)$.

Данная задача относится к разряду сложных – путь ее решения совсем не очевиден.

Здесь подсказка кроется в самом условии задачи – разложение выражения на множители подразумевает наличие одинаковых элементов, объединив которые, можно получить искомый результат (рис. 10.20, см. также рис. III.04 на стр. 550).

Рис. 10.20.
Подсказки и формульные стандарт
в задании повышенной сложности

Такие поиски позволяют ученику понять, что он может самостоятельно разобраться в трудной или непривычной для него задаче, если будет ставить (сам себе) вопросы и искать на них ответы.

Выше уже неоднократно акцентировалось: во многих случаях помогает прием отыскания одинаковых элементов. При этом становится возможным выявить в качестве подсказок некоторые формульные или геометрические стандарты.

Практика показывает, что демонстрация не только собственно решения задачи, но и возможного “подхода к ней” весьма интересует учащихся. Каждому интересно и полезно понять, каким образом мыслит преподаватель, откуда он берет “подсказки”, как строит модель для аналогичных мыслительных действий.

Краткие итоги

Итоги наших изысканий мы отразили в специальной схеме, представляющей наш взгляд на работу визуального мышления в процессе решения учебной задачи (рис. 10.21).

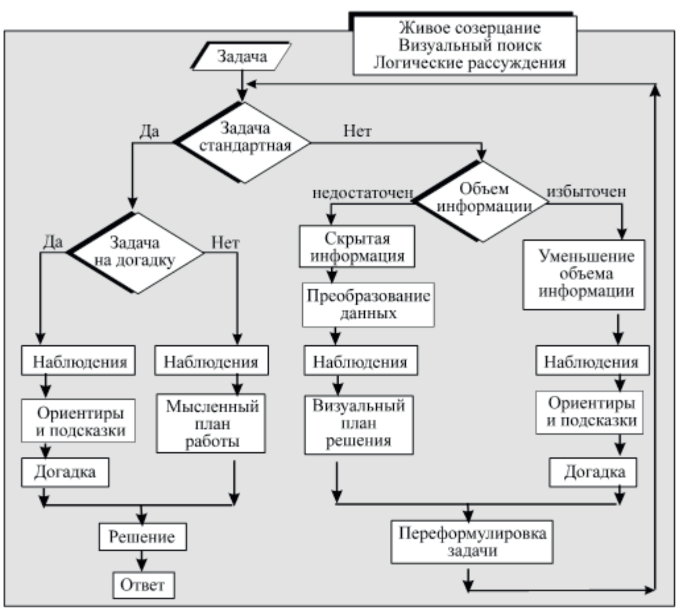


Рис. 10.21.

Схема визуального поиска решения учебной математической задачи

§11. Формирование навыков визуального поиска

Не секрет, что многим ученикам с трудом даются изображения многогранников и тел вращения (не говоря уже о возможных их комбинациях и сечениях). Существенные моменты сопоставления того "что мы видим" с тем "как мы видим" почти не затрагиваются в методиках преподавания школьных дисциплин. Вполне возможно, что именно поэтому наши ученики в большинстве своем не только не умеют "рассуждать на заданную тему", но зачастую не могут правильно воспроизвести визуальную информацию, даже такую, с которой практически они встречаются на каждом шагу.

Процесс перехода от созерцания объекта к воспроизведению изображения на бумаге, в сущности, есть перевод, который состоит из определенных этапов: сравнения, сопоставления, расчленения, сборки и т.д.

11.1. Накопление визуального опыта

Для демонстрации разрабатываемых нами методов приведем в качестве примера информационную тетрадь "Изображения многогранников". При ее составлении мы положили в основу один из принципов «Педагогики математики»:

> «строгие математические формулировки (определений, теорем) должны быть итогом (подчеркнуто нами) изучения соответствующих свойств, отношений на интуитивном уровне» [177].

Основным здесь является поиск алгоритма, формирование каждого шага которого контролируется визуальным мышлением. При этом все операции будут постепенно свертываться, переходить в непрерывное действие.

Легче всего конструируется изображение многогранника без выделения видимых и невидимых линий. Такой рисунок (следуя Перельману) мы назвали каркасом (рис. 11.01.1).

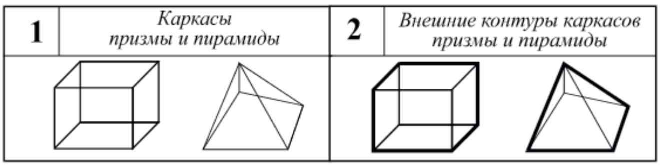


Рис. 11.01.

Переход от изображения каркасов многогранников (1)
к выделению на каждом из них внешнего контура (2)

По словарю Ожегова [126] «Каркас – это остов, костяк какого-нибудь сооружения, изделия». У нас это всего лишь визуальная модель, набросок. Учащийся может задать (нарисовать) любое основание (многоугольник) и, перенеся его на определенное расстояние в некотором направлении, получить “дубликат”. Затем останется лишь соединить соответствующие вершины.

Следующий шаг представлен там же на рисунке 11.02.3.

Чтобы правильно изобразить объект, мы сначала должны выделить (ограничить) его изображение на плоскости листа так же, как наше зрение выделяет его среди всех остальных предметов в пространстве.

Учащийся может не ограничиваться в выборе многоугольника, который будет представлять на изображении видимое (или невидимое) основание (рис. 11.01.3). В случае пирамиды им может оказаться точка – вершина каркаса пирамиды.

Очередной шаг – выделение одной из крайних (с точки зрения созерцания) боковых граней (рис. 11.02.4).

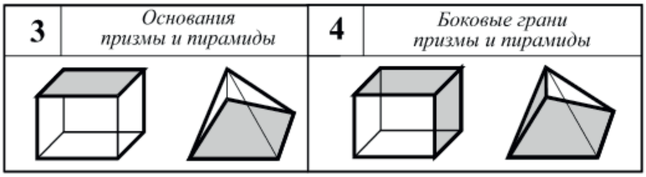


Рис. 11.02.
Выделение на каркасах многогранников
их оснований (3) и боковых граней (4)

Накопление визуального опыта продолжается – осуществляется последовательное и непрерывное “проявление” видимых деталей, приводящее к необходимому свертыванию (рис. 11.03).

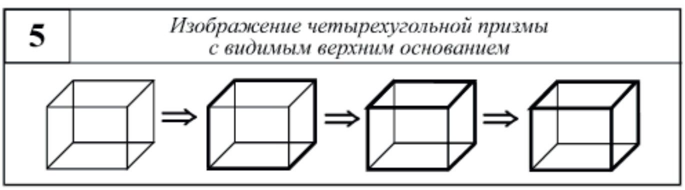


Рис. 11.03.
Поэтапное построение изображения призмы

Теперь учащийся может объединить все шаги на одном рисунке и быстро получить изображение того же самого тела (рис. 11.04).

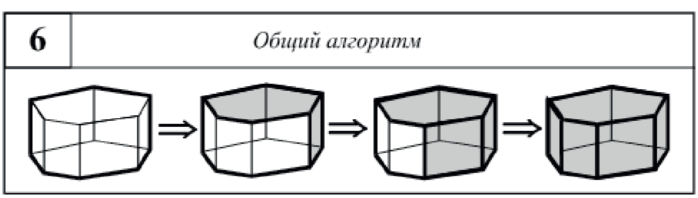


Рис. 11.04.
Общий прием построения изображений призм

Ученику нужно понимать и помнить, что при выделении очередной боковой грани призмы обязательно должен образовываться новый параллелограмм (для пирамиды – треугольник). При этом полезно следить, чтобы вновь выделяемое боковое ребро не пересекало (не дробило) плоскость видимого основания.

Визуальный алгоритм построения изображения пирамиды может формироваться параллельно (рис. 11.05).

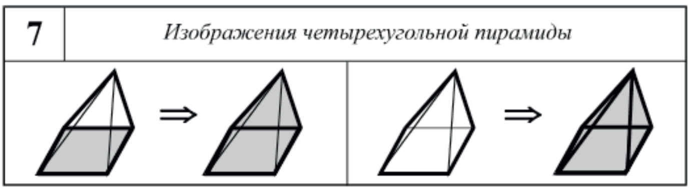


Рис. 11.05.
Изображения пирамиды
с видимыми (слева) и невидимым (справа) основанием

Данное условие трудно оформляется (объясняется) вербально, но достаточно просто усваивается визуально.

При нарушении его получаются изображения типа приведенных на рисунке 11.06.

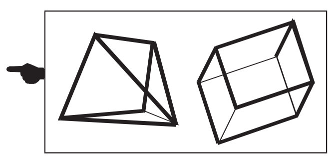


Рис. 11.06.
Неверные
изображения многогранников

Это необходимое условие может быть усвоено только благодаря приобретению соответствующего визуального опыта, правильной реализации возможной последовательности выделения боковых граней.

В итоге словесно оформляется алгоритм построения изображений многогранников (рис. 11.07.1).

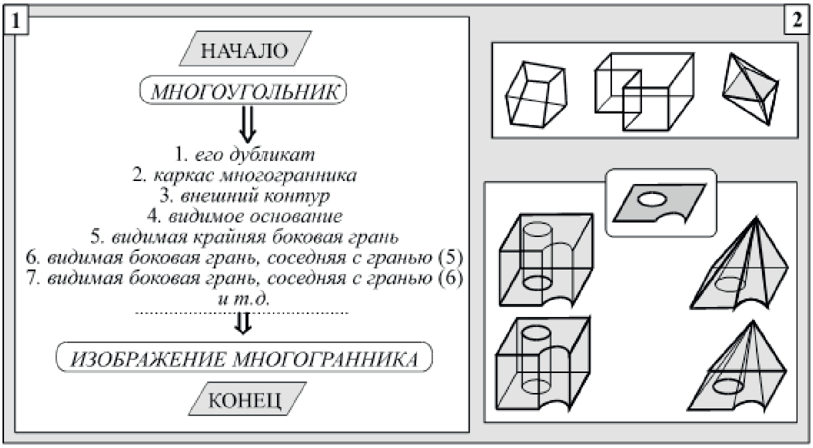


Рис. 11.07.

Алгоритм построения изображений многогранников (1),
примеры изображений
различных многогранников сложной структуры (2-3)

В завершение можно предложить примеры изображений тел, которые обладают более сложной структурой (рис. 11.07.2).

Практика автора и многочисленные данные других учителей позволяют утверждать, что продемонстрированный алгоритм изображения пространственных тел хорошо усваивается учащимися.

На уроках математики в Мурманском музыкальном училище в качестве одного из завершающих заданий было предложено обсудить (рис.11.08): какие из законов геометрии нарушены на картине Эсхера «Бельведер».

После бурных дискуссий учащиеся самостоятельно пришли к положениям:

– если две прямые скрещиваются, то они не могут лежать в одной плоскости;

– если параллельные плоскости пересекаются третьей, то линии их пересечения параллельны и т.д.

Некоторые учащиеся смогли представить невозможную архитектуру замка (рис. 11.08 в рамке).

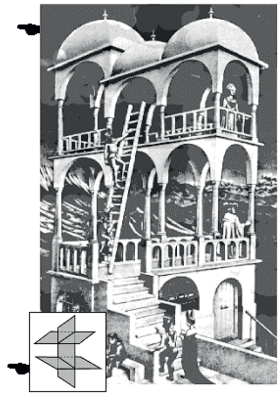


Рис. 11.08.
«Бельведер»
и его структура

Дальнейшее изучение теории шло в более быстром темпе, чем это происходило обычно.

«*Bis dat, qui ceto dat*» («Вдвойне дает тот, кто дает скоро»), гласит латинская пословица. Действительно, мы дали учащемуся возможность сразу увидеть объект с его свойствами и связями, отсюда и более быстрый темп восприятия всех теоретических положений, фиксирующих как само понятие, так и его существенные особенности.

Идею «Бельведера» мы использовали в дальнейшем для одной из визуальных задач, которая не менее интенсивно обсуждалась учащимися (рис. 11.09).

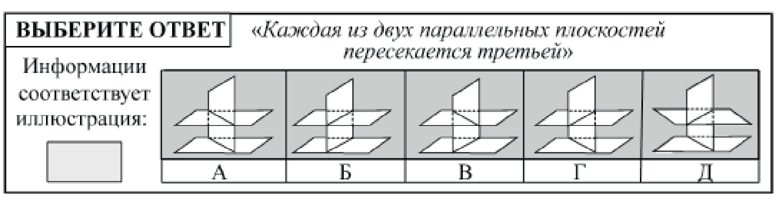


Рис. 11.09.
Задача, составленная по мотивам
картины Эсхера «Бельведер»

11.2. Поисковые визуальные задачи

Отрабатывая навыки учащихся в решении тех или иных математических или физических задач, выполнении упражнений по русскому языку или биологии и т.д. мы часто не достигаем успеха. Одни успевают в отведенное время усвоить этот навык, другие – нет. Следовательно, нужны такие средства обучения, которые позволили бы каждому учащемуся сформировать необходимое умение. Организация навыков визуального поиска требует специальных средств обучения. К таким мы здесь относим визуальные задачи.

На данном этапе из визуальных дидактических материалов мы выделяем особую группу – поисковые визуальные задачи, более полную характеристику которых попытаемся представить ниже.

> Напомним, что визуальной мы считаем задачу, исходной посылкой которой является некоторый образ.
>
> В ходе решения такой задачи образ развивается, приобретает новые формы, направляющие мысленную деятельность ученика так, что из данных визуальной информации он может извлечь ориентиры и подсказки, построить догадку, приводящую к нахождению правильного ответа.

Трансформация визуального образа является одной из самых сложных мыслительных операций. Для того чтобы умения и навыки таких преобразований формировались более или менее естественным образом, необходимо постоянно “поддерживать” такой процесс. Этому могут способствовать конструирование информационной схемы, специальные поисковые серии, а также принцип визуализации доказательных рассуждений.

В качестве примера приведем серию иллюстраций, посвященных двугранному углу (рис. 11.10).

Сначала дается образ двугранного угла (рис. 11.10.1). Затем показывается, что такой угол может быть получен пересечением двух непараллельных плоскостей (рис. 11.10.2).

Следующий шаг – новое понятие, порождаемое исходной информацией, – линейный угол двугранного угла (рис. 11.10.3). Далее иллюстрируется свойство нового понятия (рис. 11.10.4).

В завершении демонстрируется общая модель построения двугранного угла (рис. 11.10.5).

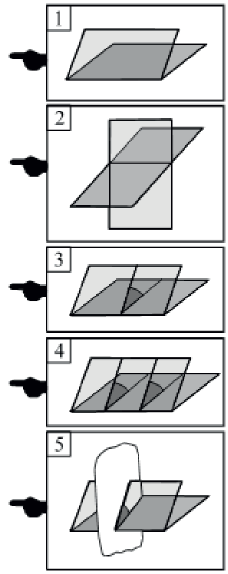


Рис. 11.10. Построение двугранного угла

Работая с этой серией, учащийся может в удобном для себя темпе рассмотреть и обдумать предлагаемую визуально-логическую цепочку.

В итоге можно оформить информационную схему "Двугранные углы", заменяя соответствующими заголовками пространное объяснение мысленных этапов работы "живого созерцания" (рис. 11.11).

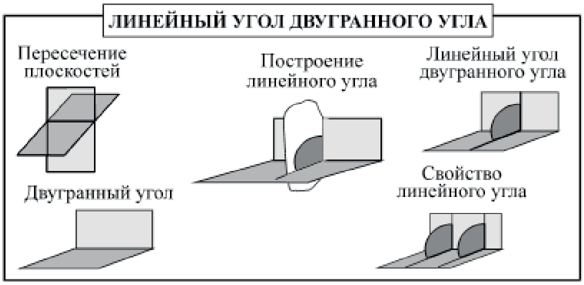


Рис. 11.11. Информационная схема, построенная на результатах предшествующих наблюдений

При последовательном и планомерном использовании, формировании и развитии визуального мышления мы сможем перейти к подлинно продуктивному обучению.

Приведем еще один пример (рис. 11.12), позволяющий накапливать опыт в ходе индивидуальных “экспериментов”, вернувшись к задаче рисунка 06.22, см. также рис. II.19 на стр. 523).

В 18 веке
один из крупнейших математиков
Л. Эйлер
предложил необычное число,
квадрат которого равен «–1»:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Посмотрите на результаты
первой таблицы
и заполните остальные

1

Ответ / Задание	i	-1	$-i$	1
i^1	+			
i^2				
i^3				
i^4				

2

Ответ / Задание	i	-1	$-i$	1
i^5				
i^6				
i^7				
i^8				

4

Ответ / Задание	i	-1	$-i$	1
i^{16}				
i^{19}				
i^{21}				
i^{26}				

1

Ответ / Задание	i	-1	$-i$	1
i^{11}				
i^{12}				
i^{13}				
i^{14}				

5

Ответ / Задание	i	-1	$-i$	1
i^{4k}				
i^{4k+2}				
i^{4k+1}				
i^{4k+3}				

k — целое число

Рис. 11.12.
Построение проблемной ситуации
основанное на едином визуально определяемом алгоритме

Первая таблица позволяет сопоставить собственные вычисления с готовыми результатами.

Вторая – предлагает продолжение подобных вычислений строго по порядку возрастания степеней.

Третье задание несколько “сбивает” этот порядок и заставляет сделать первые наблюдения и сопоставления с результатами предыдущих таблиц.

Таблица №4 требует определенных выводов, в противном случае вычисления займут слишком много времени.

Завершающая фаза данных экспериментов со степенями мнимой единицы реализуется при решении примеров пятой таблицы, в которой налицо обобщения и соответствующий алгоритм.

Заполняя таблицы подобной серии, учащийся может вполне самостоятельно вывести соответствующий закон, а учитель определить “неудачи обучения”.

Помимо этого представляется возможным установить:

– формально или нет относится учащийся к выполнению заданий,

– насколько высока утомляемость учащегося при осуществлении однотипных, но постепенно усложняющихся, операций,

– любит ли учащийся “докапываться” до результатов, делают свои маленькие открытия.

Материалом для образования серии, накапливающей визуальный опыт, может служить и одна единственная формула.

Например, получение результата в задании

“Решить уравнение $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=0{,}5$”

связано с серией преобразований, основанных на едином визуально организованном действии (рис. 11.13, см. также рис. III.04 на стр. 550).

$$\log_4\left(2\cdot\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\cdot\log_2 x\right)\right)\right) = 1/2$$

$$2\cdot\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\cdot\log_2 x\right)\right) = 4^{1/2}$$

$$\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\cdot\log_2 x\right)\right) = 1$$

$$1+\log_2\left(1+3\cdot\log_2 x\right) = 3^1$$

. . . .

Рис. 11.13.

Решение логарифмического уравнения,
поэтапно приводящее к понижению уровня сложности

В результате учащийся, узнав (увидев), как и на что нужно смотреть, что и как можно делать, в силах устно решить несложный пример типа

“Найти решение уравнения $\log_4\log_2\log_2 x = 0$”.

Это объясняется тем, что обычно процесс абстрагирования связан не только с моментом опознания некоторого формульного стандарта, являющегося ключом к решению задачи. Столь же активно работает сопоставление, которое устанавливает, что

«одно из свойств предъявляемого стимула (простое или сложное) совпадает, <u>тождественно</u> тому свойству, которое зафиксировано в памяти как общее и специфическое для данного класса» [107, с. 208].

Наблюдения позволяют установить необходимые параллели.

Например, серии, подобные упомянутой выше, помогают процессу свертывания.

Получив необходимый визуальный опыт, учащийся может приступать к самостоятельному решению заданий, типа упрощенных аналогов знаменитой задачи Дирака, вариант, которой предлагается нами в виде задания:

“Доказать $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 3$”.

Решение приведено на рисунке 11.14.

Визуальные задачи можно рассматривать и как инструмент для измерения прироста поисковых навыков учащихся.

Например, серию можно превратить в своеобразный тест, который поможет учителю определить:

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} =$$
$$= -\log_2 \boxed{\log_2 2}^{\frac{1}{8}} =$$
$$= -\log_2 \frac{1}{8} =$$
$$= -\log_2 2^{-3} =$$
$$= \boxed{-(-3)} = 3$$

Рис. 11.14.
Решение аналога задачи Дирака

– усвоил ли учащийся те или иные положения учебной математической теории;

– запомнил ли учащийся соответствующие формульные или графические образы этих положений;

– умеет ли учащийся применять их в конкретных случаях;

– может ли учащийся вывести необходимые обобщения из содержания такой серии при условии ее правильного выполнения;

– доступно ли учащемуся на основе выведенной закономерности исправить допущенные им ранее ошибки.

В ситуациях группового поиска фрагменты серии предъявляются не одновременно, а последовательно. Только что полученный опыт реализуется в решении аналогичных, но постепенно усложняющихся, заданий.

Восприятием учащихся здесь руководит не только сама серия, но и преподаватель, помогая своими вопросами и комментариями. Совместные исследования заменяют монолог учителя, вовлекая учащихся в активный мыслительный процесс.

Накоплению визуального опыта учащихся в современной школе практически не уделяют внимания. В то же время именно этот момент их мыслительной деятельности может сыграть важную роль не только в изучении нового материала, но и в восстановлении утраченных знаний.

Чтобы пояснить нашу мысль, приведем конкретный пример.

В школе эстетического воспитания №34 г. Мурманска в одном из 7-х классов сложилась тяжелая ситуация с изучением предметов математического цикла.

По многим причинам в 5-ом и 6-ом классах время, отведенное на математику, было сокращено, в знаниях, умениях и навыках учеников образовались большие пробелы.

Поэтому в “очередном” шестом классе по предложению автора данного исследования на одном из уроков были использованы специальный набор визуальных задач, посвященный понятию модуля числа (рис. 10.15 и рис. 10.16, см. также рис. I.11-I.12 на стр. 489-490).

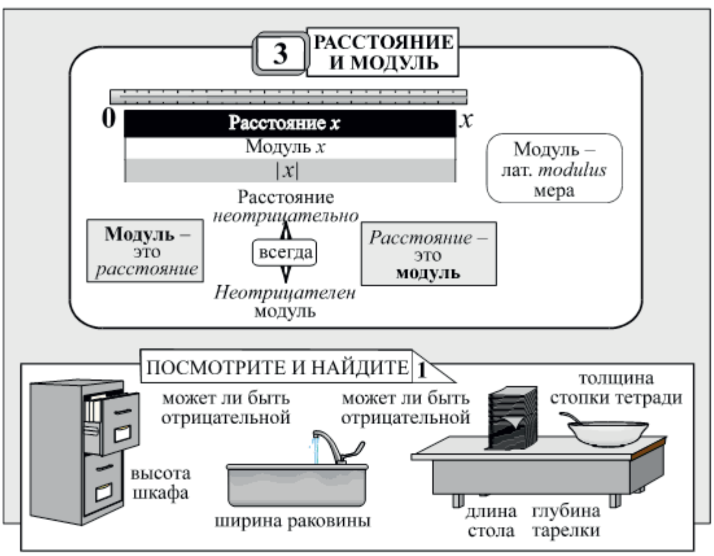


Рис. 11.15.

Фрагмент первой страницы
сценария урока «Расстояние и модули»

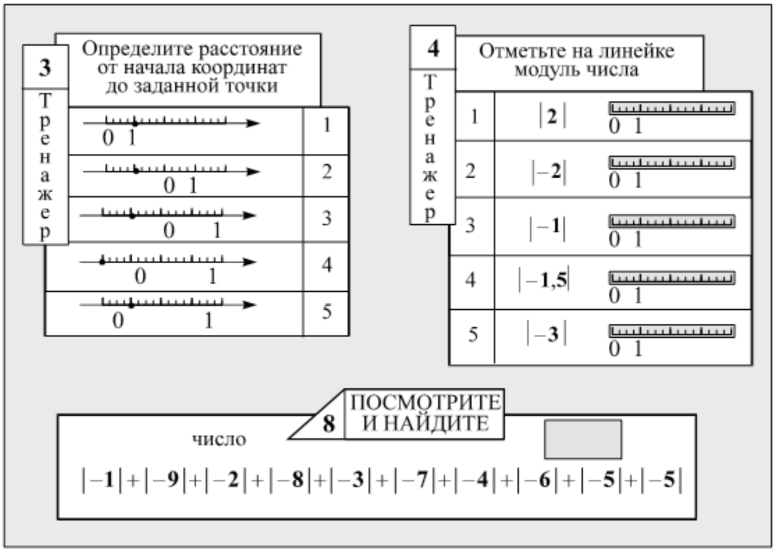


Рис. 11.16.

Фрагмент первой страницы
сценария урока «Расстояние и модули»

В результате, по свидетельству учителя, проблема была ликвидирована полностью. Ученики быстро восстанавливали “образ модуля” и достаточно успешно решали программные задания и задачи повышенной сложности типа представленной на рисунке 11.17.

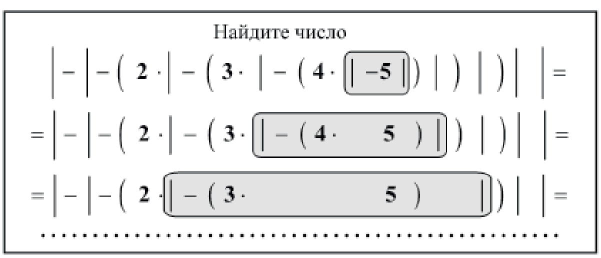


Рис. 11.17.

Задача на нахождение модуля числа повышенной сложности

Визуальные задачи представляют собой богатейший материал для образования групповых поисковых ситуаций. При усвоении навыков визуального поиска, учебным группам под силу не только использование готовых информационных схем, но и их составление, что позволяет активизировать самостоятельность учащихся, “разбудить” их зрение и мозг, увлечь процессом познания.

В ходе наблюдений за процессом подобных преобразований, представленных (с помощью стрелок-указателей, цвета и т.д.) в визуально обозримой форме, учащийся не только обучается, но и повышает свой интеллектуальный уровень.

11.3. Визуализация доказательных рассуждений

Визуальные задачи, т.е. задачи, исходной посылкой которых является рисунок [11, 13, 66-67, 73, 144-151, 153-154], содержат в себе громадный запас возможностей. Среди них мы особо выделяем возможность вводить фрагменты теории в ситуации визуального поиска, побуждая обучаемых активно “открывать” новое, вырабатывать навыки математического творчества [17, 30, 51, 63, 72, 87, 164-165, 197].

Для приобретения навыка “открывать новое” полезно решать задачи типа “Докажите, глядя на рисунок, что...”.

“***Докажите, глядя на рисунок, что*** ... ” – это задача на визуальное доказательство утверждения или вывод формулы. Рисунок (формула или текст) в данных задачах дает все необходимые подсказки для успешной поисковой деятельности ученика.

Такой рисунок лучше перенести в тетрадь и преобразовать его так, чтобы стал очевиден ход рассуждений (рис. 11.18). Каждое подобное преобразование полезно пояснять формулами или текстом.

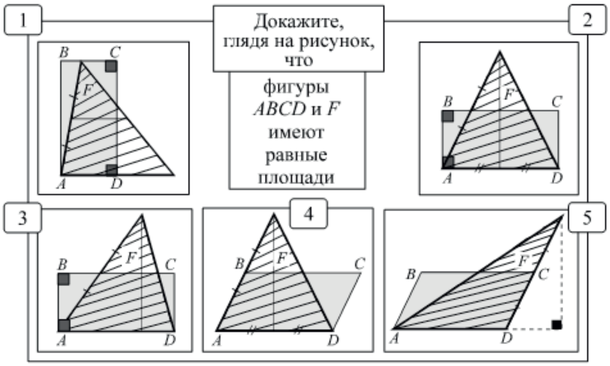


Рис. 11.18.

Задания серии на доказательство равновеликости фигур

Формирование навыков проведения доказательных рассуждений можно осуществлять с помощью заданий, выстроенных в порядке возрастания сложности (рис. 11.19).

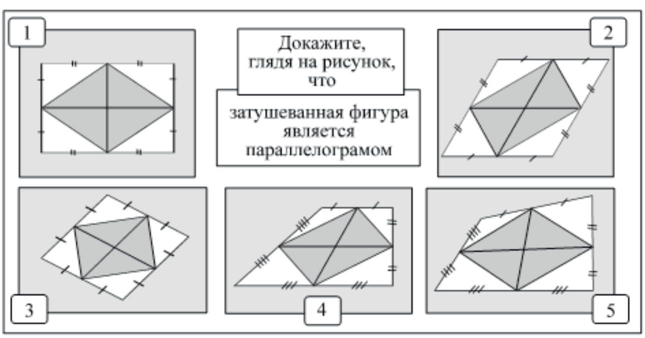


Рис. 11.19.

Задания серии на определение вида плоских фигур

С помощью *серий* задач “Докажите, глядя на рисунок, что ...” можно накапливать опыт, приводящий к формированию “техники” проведения доказательных рассуждений. Тем самым мы побудим учащихся участвовать в “открытии нового”, получать навыки математического творчества.

Анализ условия задачи, изложенной текстом, представляет для учеников значительную трудность. Не все могут свободно ориентироваться в ее содержании, выделять существенное для “выхода” на правильный ответ. В силу этих обстоятельств мы выделили специальные упражнения, ориентированные на перевод текста в формулу или картинку.

Наиболее простым вариантом подобных заданий является текст с сопутствующей иллюстрацией. Последовательно преобразуя (мысленно или с помощью специальных средств) детали образа, выделяя в нем существенное (основной объект исследования), ученик получает визуальные подсказки к решению задачи (рис. 11.20, см. также рис. III.05 на стр. 551 внизу).

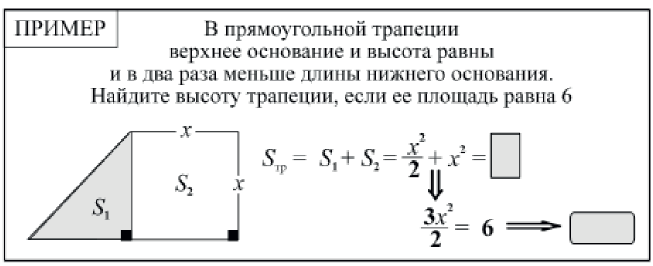


Рис. 11.20.
Перевод и подсказки
к решению геометрической задачи

Главную трудность, заключающуюся в соотнесении текста со зрительным образом, можно преодолеть с помощью преобразований рисунка (рис. 11.21).

ПРИМЕР

Найдите формулу площади
тупоугольного треугольника,
если известны
одна из его меньших сторон и высота,
опущенная на продолжение этой стороны

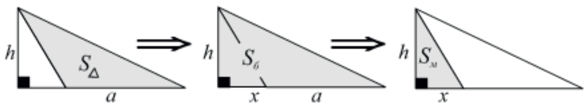


Рис. 11.21.
Преобразование рисунка
для нахождения решения геометрической задачи

Чрезвычайно полезны различные задания на исследования свойств чисел, которым так много уделялось внимание на уроках математики в 50-60-е годы. Мы полагаем, что для развития не только визуального, но и логического мышления учащихся следовало бы “восстановить” эту традицию.

На рисунке 11.22 дан детальный анализ решения подобных задач. К исходным текстам:

> “Определите свойство разности (суммы) между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **7** (на **19**)”

приложены таблицы трехзначных чисел от **101** до **170**, на которой отмечены все числа, делящиеся на **7** (на **19**) (рис. 11.22.1). Кроме этого, под этими таблицами имеются двойные подсказки:

- справа визуально определен алгоритм исследования (рис. 11.22.2),
- слева – дается предполагаемый результат, заключающийся в условии “Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **7** (на **19**), делится на ...” (рис. 11.22.3).

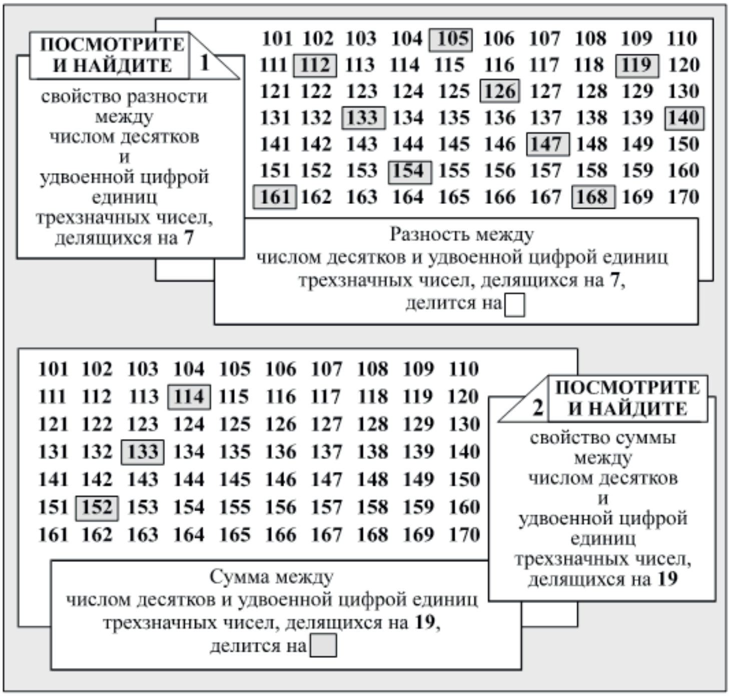


Рис. 11.22.

Фрагмент карточки для вывода

признаков делимости на семь (наверху) и на девятнадцать (внизу)

Важно, чтобы решая подобные задания, учащиеся восприняли алгоритм:

- осуществите перевод текста в формулу или картинку;
- проведите анализ картинки;
- составьте соответствующую визуальную задачу;
- решите эту задачу;
- переведите решение задачи в текст или формулы.

Формировать умение проводить доказательные рассуждения, используя рисунок, полезно начинать в средней школе как можно раньше.

Особую роль такие умения играют в геометрии, освоение курса которой практически полностью связано с ними.

Принято считать, что обучение менее подвинутых учащихся должно строиться “в рамках” базисных требований курса и, как правило, геометрические задачи повышенного уровня сложности предлагаются только способным ученикам.

Мы же полагаем, что было бы полезно иногда предлагать “трудные задачи” и тем, от кого не ожидают больших успехов в обучении.

Однако здесь необходимы специальные приемы.

Переход от наблюдений к построению доказательных рассуждений полезно проводить поэтапно.

К примеру, при изучении признаков равенства треугольников (рис. 11.23)

сначала можно предложить учащимся найти равные треугольники (рис. 11.23.1), не требуя специальных обоснований;

затем перейти к формированию навыков проведения таких обоснований (рис. 11.23.2);

и, в конечном итоге, прийти к возможности правильно и грамотно провести соответствующие доказательные рассуждения (рис. 11.23.3).

В завершение предлагаем ещё один комплект примеров.

На рисунке 11.24 приведено шесть разных образов, к каждому из которых прилагается конкретное указание.

№1. Докажите, глядя на рисунок 11.24.1, что объем наклонного цилиндра равен площади перпендикулярного сечения S на длину его ребра l.

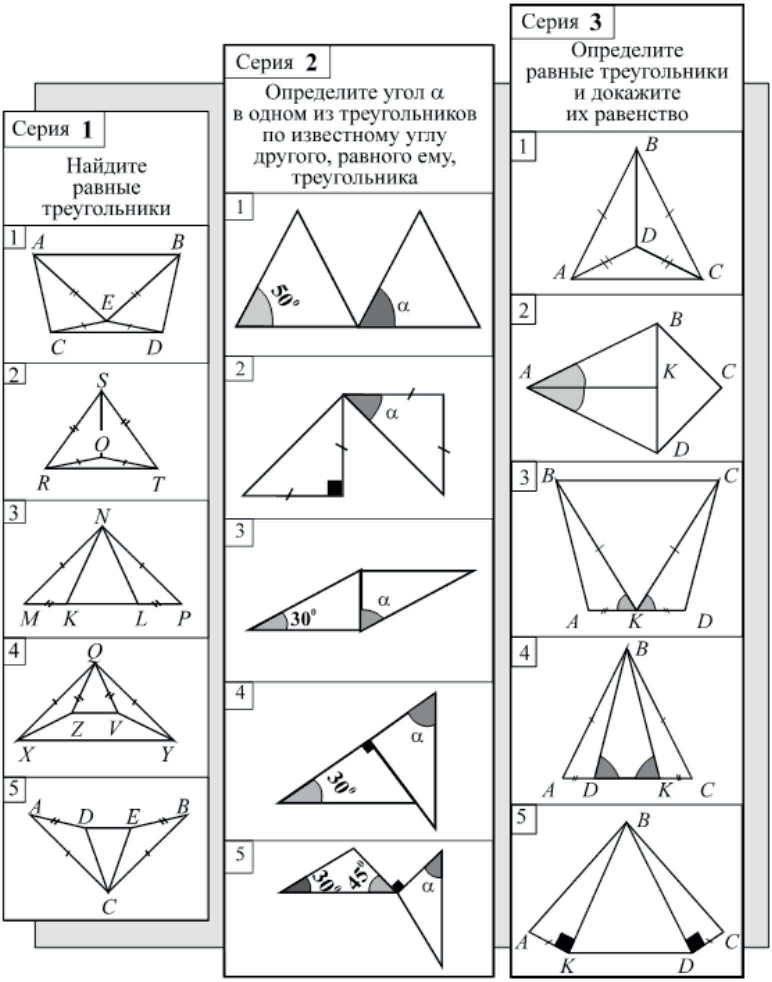


Рис. 11.23.

Серии заданий к теме «Признаки равенства треугольника»

№2. Докажите, глядя на рисунок 11.24.2, что касательная к параболе $y = ax^2$ в точке M с абсциссой x делит отрезок $[\mathbf{0}\ ;\ x]$ пополам.

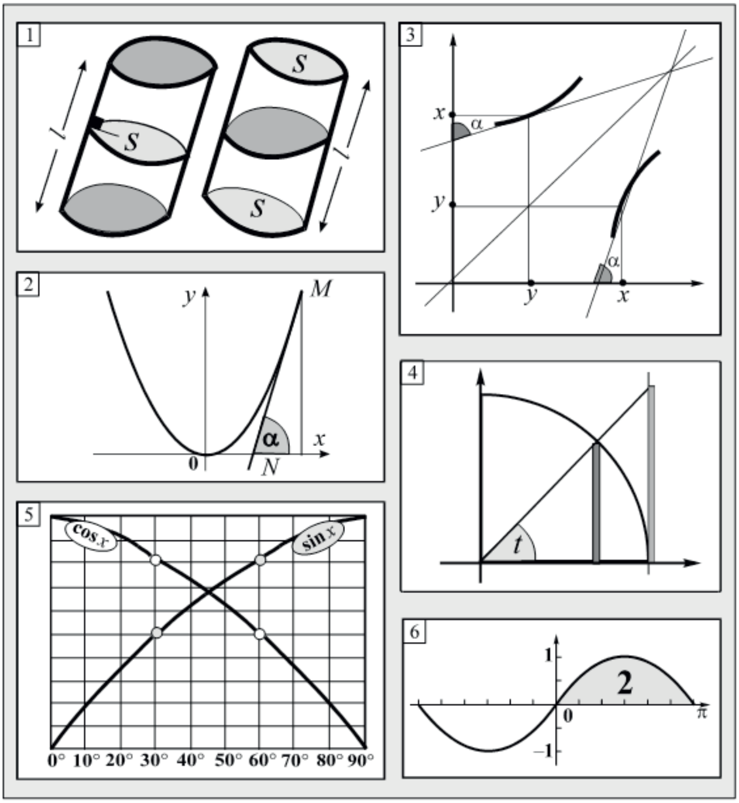


Рис. 11.24.
Визуальные задачи на доказательство
из разных тем курса математики

№3. Докажите, глядя на рисунок 11.24.3 формулу дифференцирования обратной функции.

№4. На одном и том же чертеже 11.24.4 построены графики функций $y = \mathbf{sin}\ x$ и $y = \mathbf{cos}x$.

Сопоставляя эти графики, докажите что

а) $\mathbf{sin}\,(\mathbf{45}^\circ - x) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{45}^\circ + x)$;

б) $\mathbf{sin}\, x = \mathbf{cos}\,(\mathbf{90°} - x)$;

г) $\mathbf{cos}\,(\mathbf{45°} - x) = \mathbf{sin}\,(\mathbf{45°} + x)$;

д) $\mathbf{sin}\,(\mathbf{30°} + x) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{60°} - x)$.

№5. Докажите, глядя на рисунок 11.24.5, что

для $\mathbf{0} < t < \pi / \mathbf{2}$: $\mathbf{sin}\, t < t < \mathbf{tg}\, t$.

№6. Площадь подграфика полупериода синуса равна **2**

(рис. 11.24.6).

Устно вычислите следующие интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathbf{sin}\, x\, dx$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{sin}\, x\, dx$;

г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathbf{sin}\, x\, dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathbf{cos}\, x\, dx$.

Все это мы представили так подробно, потому что глубоко убеждены в следующем:

«точка зрения, утверждающая, что “открывать” новое в математике для ученика труднее, чем заучивать готовое, ошибочна. Верно лишь то, что для педагога труднее учить открывать, чем учить заучивать.

Школьнику же, при соответствующей постановке обучения, легче действовать как математику, открывать самому истину, чем заучивать готовую систему предложений и доказательств без понимания ее происхождения, значения и взаимных связей» (77, с. 11-12).

Краткие итоги

Разбор рисунков и особенностей формулы, анализ смысловых тонкостей текстов позволяют придерживаться единого темпа. Если слабый ученик что-либо не увидит, не заметит или не поймет, то ему поможет более сильный товарищ или же преподаватель обратит внимание на возникающие затруднения.

Разрабатывая различные приемы визуализации доказательных рассуждений, демонстрируя с их помощью возможный ход мысли в поиске ответа на вопрос, мы “раздвигаем рамки” интеллектуальных возможностей ученика, готовим его активно искать ответы на вопросы, которые могут возникнуть в его дальнейшей профессиональной деятельности.

§12. Методика организации визуального поиска

Желание искать и способность находить решение учебной задачи у многих учащихся отсутствует вовсе не потому, что это свойственно только самым способным из них. Процесс обучения в школе по многим причинам “гасит желание” попробовать свои силы в решении трудных примеров и задач. Они не только не под силу многим учащимся, но, что хуже, неинтересны им.

По нашему глубокому убеждению, в первую очередь мы должны восстановить дар, данный человеку от природы – здоровую любознательность и веру в свои познавательные силы. Притом, что восстановление утраченного идет значительно труднее, чем первоначальное формирование, первоначальная потеря времени окупится приобретением ценных качеств: желанием разбираться в трудных ситуациях и умением выходить из тупика.

12.1. Ситуации группового поиска

Ситуации визуального поиска можно организовать не только при анализе локального факта теории или решения конкретной учебной задачи. Доступные учащимся поисковые эпизоды, основанные на логических и визуальных умозаключениях, могут привести их к конструированию информационной схемы.

В качестве иллюстрации мы избрали тему “Преобразования графиков функций”.

Излагаемая ниже схема действий достаточно проста:

1. В формуле типа $A\,f\left(x\right)$ [$f\left(k\,x\right),\ f\left(x+p\right),\ f\left(x\right)+B$] анализируется положение параметра в ее структуре.

2. В ситуациях поиска моделируются возможные случаи изменения графика функции $f(x)$ и строится определенная гипотеза о характере таких изменений.

3. Осуществляется проверка высказанного утверждения и устанавливается вывод.

В качестве примера возьмем построение графика функции $f(x+p)$, иллюстрируя указанный выше процесс на соответствующих примерах и задачах. Для других случаев ограничимся лишь необходимыми замечаниями и полезными указаниями, позволяющими (с учетом результатов разрабатываемого образца) строить и разрешать аналогичные проблемные ситуации.

а) Постановка задачи и анализ ее условия

Задача. По исходному графику $f(x)$ построить график $f(x+p)$.

Под "задачей" мы понимаем «то, что требует исполнения, разрешения» [126]. Таким образом, мы не просто решаем традиционную учебную задачу, а осуществляем поиск общего алгоритма решения всего класса задач определенного типа.

Поскольку в формуле $f(x+p)$ число p соединяется знаком "плюс" с переменной x, то изменяться должна именно эта переменная. При этом следует учесть две возможности для p: $p>\mathbf{0}$ или $p<\mathbf{0}$ (при $p=\mathbf{0}$: $f(x+\mathbf{0})=f(x)$).

б) Построение гипотезы

Ясно, что при переходе от графика функции $f(x)$ к графику $f(x+p)$ обязательны изменения. На первый взгляд возможен параллельный перенос стандарта по оси X вправо на заданное число p. Отметим, что данное предположение в настоящий момент не проверяется, а лишь высказывается как некоторая интуитивная догадка, поскольку под “гипотезой” мы здесь понимаем « ... предположение, выдвигаемое для объяснения каких-нибудь явлений» [126].

в) Моделирование ситуации

Продемонстрируем “ход событий” на примере одной из самых известных учащимся функций $y{=}x^2$. Для этого стандарта может быть поставлена индивидуальная задача:

“По графику функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x{+}2)^2$” (рис. 12.01.1).

Примем как гипотезу, что график функции $y = (x + 2)^2$ может быть построен переносом параболы вдоль оси абсцисс на две единицы *вправо* (рис. 12.01.2).

Осуществим проверку. Составив таблицу значений функций $y = x^2$ и $y = (x + 2)^2$ в нескольких точках, построим чертеж (рис. 12.01.3).

Гипотеза неверна – сдвиг графика исходной функции произошел в обратном направлении (рис. 12.01.4).

Остается принять – параметр p в задании $f\,(x + p)$ означает

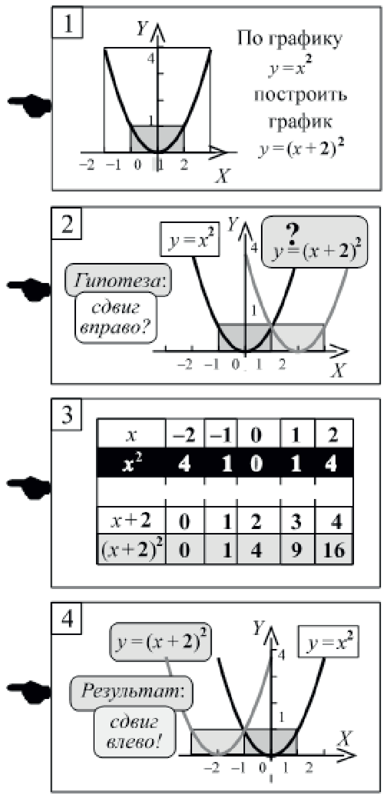


Рис. 12.01.
Проверка гипотезы
о перемещении параболы
вдоль оси абсцисс

параллельный перенос $f(x)$ вдоль оси аргумента на p единиц *влево* (см. также рис. III.22 на стр.568

Для закрепления этого результата полезно перейти к первой "локальной" схеме преобразования графика квадратичной функции, в аналитическом задании которой выделен полный квадрат (рис. 12.02, вверху) и сразу же применить ее (рис. 12.02, внизу, см. также рис. III.24 на стр. 570).

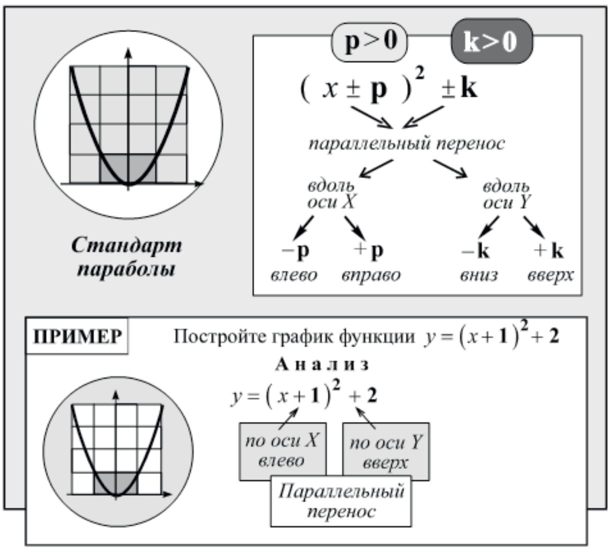


Рис. 12.02.

Схема значений параметров функции $y=(x\pm p)^2\pm k$ (вверху), и применение ее на конкретном примере (внизу)

Эксперименты в группах учащихся с достаточно высокой подготовкой можно оформлять иначе, чем приведенный выше, например, как показано на рисунке 12.03 (см. также рис. III.22 на стр. 568).

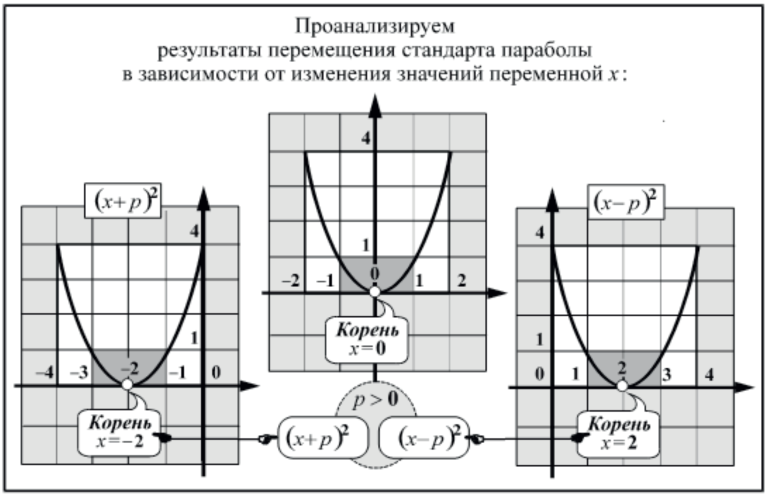


Рис. 12.03.

Другой способ оформления проверки гипотезы
о перемещении параболы вдоль оси абсцисс

Полезно предложить учащимся построить графики функций типа $\mathbf{2}^{x+1}$, $\mathbf{cos}\left(x-\pi/\mathbf{2}\right)$, предоставив им самим убедиться в правильности общего вывода.

Учащиеся должны как можно больше “открывать”, а не принимать на веру то, что им сообщает учитель или написано в учебнике. Учебные эксперименты (маленькие научные опыты) более необходимы, чем конкретные готовые знания:

«Математика является меньше знанием, чем умением» [173, с. 24].

Такие умения приобретаются в ходе опыта, наблюдений и анализа их результатов.

Важно «развивать свойства ума и характера, связанные с навыками к ... строгой целеустремленной дисциплине, к выражению на различных языках (языке общения, фигур, формул и графиков), со схематической мыслью, сжатой и четкой» [173, с. 24].

г) Обобщение и свертывание

После составления предписаний для каждого из случаев

$$A\,f\,(x), \qquad f\,(k\,x), \qquad f\,(x+p), \qquad f\,(x)+B$$

естественно перейти к оформлению общего алгоритма в виде схемы «Влияние каждого параметра формулы функции на преобразование ее графика» (рис. 12.04, см. также рис. III.22 на стр. 659).

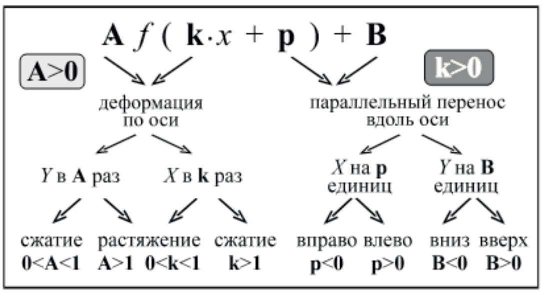


Рис. 12.04.
Представление результатов исследований
в виде информационной схемы

Данная схема сочетает необходимую словесную интерпретацию каждого из параметров с указаниями-ориентирами: влево, вправо, вверх, растяжение и т.д.

Следующим этапом развития обсуждаемого алгоритма может стать свертывание операций переноса вдоль осей *OX* и *OY*.

Все рассмотренные выше действия теперь объединены: центр $(\mathbf{0}\,;\mathbf{0})$ переносится в точку $\left(-\dfrac{p}{k}\,;B\right)$ (рис. 12.05, см. также рис. III.25 на стр. 571).

Рис. 12.05.

Фрагмент схемы перемещения графика функции
вдоль осей координат

Действительно ли центр координат $(0\,;0)$ при параллельных переносах графика функции переносится в точку $\left(-\dfrac{p}{k};B\right)$ можно проверить на конкретном примере, выполнив уже знакомые операции:

1) перемещение графика функции по одной из координатных осей,

2) сдвиг полученного (нового) графика по другой оси.

Указание на необходимость в отдельных случаях произвести «алгебраические преобразования» формулы конкретно заданной функции легко проинтерпретировать на примере той же квадратичной функции (рис. 12.06.2), для которой оно (указание) превращается в «выделение полного квадрата» (рис. 12.06.1).

В конечном итоге (после аналогичных испытаний остальных параметров формулы функции) все сводится к несложному перечню визуально обозримых операций:

1. Приведи формулу функции к виду $A\,f\,(k\,x+p)+B$.
2. Перенеси начало координат в точку $\left(-\dfrac{p}{k}\,;B\right)$ и продолжай все остальные построения в новой системе координат.

Рис. 12.06.

Фрагмент схемы (вверху) и конкретное его применение (внизу)
для алгебраических преобразований формулы параболы

3. Восстанови график стандарта с его “направляющими” прямоугольниками.
4. По заданию функции $y = A\,f\,(k\,x)$ произведи деформацию направляющих прямоугольников и построй график искомой функции.

В таком случае информационная схема “Влияние параметров на преобразование графика функции при $A > \mathbf{0}$ и $k > \mathbf{0}$” приобретает более “объемную” структуру (рис. 12.07.1, вверху), практически полностью описывающую все необходимые действия для получения необходимого результата (рис. 12.07, внизу, см. также рис. III.25 на стр. 571).

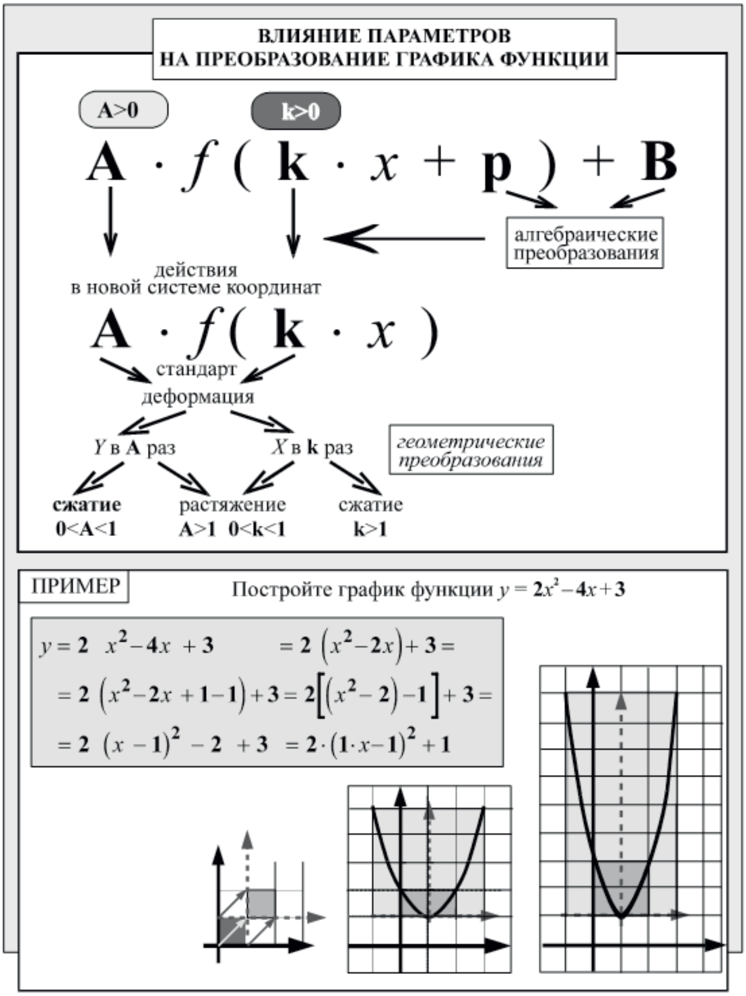


Рис. 12.07.
Итоговая информационная схема (вверху) и пример (внизу)
к теме «Линейные преобразования графиков элементарных функций»

Новый справочник самым явным образом отражает свертывание общего алгоритма.

Итак, поставив проблему – нахождение алгоритма для каждого из линейных преобразования графиков функций –

сначала мы уменьшили диапазон поиска, рассмотрев случай преобразования графика $f(x)$ в графики $f(k+p)+B$.

затем, получив нужный результат и проведя аналогичные "испытания", пришли к информационной схеме «Влияние параметров на преобразование графика функции», описывающей геометрический смысл всех параметров функции $A\,f(k\,x+p)+B$.

Разумеется, предлагаемый подход к продемонстрированной выше проблеме строгим не назовешь. Но он достаточно образен и вполне приемлем для усвоения учащимися с различными уровнями подготовки и восприятия.

Такой способ анализа учебной знаковой информации позволяет ученикам проявлять необходимую самостоятельность.

Тем более что образованию каждой из команд формируемого алгоритма предшествуют догадки и гипотезы, сопутствует проверка на истинность. Все это обеспечивает необходимую мыслительную активность обучения, вырабатывает уверенность в собственных возможностях.

Самым ценным, на наш взгляд, является то, что в результате подобных исследований, учащиеся приобретают способность «ориентироваться в новых для нас данных опыта» [60, с.13].

Подчеркнем, однако, что подобную свободу восприятия можно сформировать только при *постоянном, длительном, тщательном* воспитании "живого созерцания", сопровождая визуальный поиск переводами.

«Хорошие идеи имеют своим источником прошлый опыт и ранее приобретенные знания» [133, с.19].

В противном случае описываемые приемы окажут вред, а не пользу – из-за непонимания, слишком быстрого темпа, необычности подхода учащегося может постигнуть очередная неудача обучения.

д) Распространение метода

Довольно часто очередная "порция" учебного материала воспринимается учащимися как нечто абсолютно новое, не связанное с предыдущим материалом.

Знакомыми (и то не всегда) для учащихся являются некоторые общие термины (понятия), незнакомыми же (практически постоянно) – способ оперирования понятиями в непривычной им постанове задачи, необычном для них оформлении и т.д.

В результате процесс "выведения наружу" общих закономерностей растягивается, а иногда так и остается незавершенным к окончанию школы.

Мы полагаем, что специальное внимание к таким закономерностям может значительно повысить продуктивность школьного урока.

Поэтому на очередном этапе нашего эксперимента, мы решили обсудить все возможные частные модификации алгоритма построения графика функции вида $A\,f\,(k\,x+p)+B$.

Для примера опишем ввод в учебный процесс еще одной проблемной ситуации, связанной с созданием еще одной локальной информационной схемы.

Обратимся к алгоритму построения графика дробно-линейной функции $y=\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$.

Для того чтобы использовать общую инструкцию построения графика функции с параметрами, необходимо привести формулу $y = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ к виду $A\,f\,(k\,x + p) + B$.

Тем самым мы заменим громоздкие и длительные геометрические построения быстрыми преобразованиями формулы (рис. 12.08).

Для начала произведем деление числителя на знаменатель (рис. 12.08.1) и осуществим необходимые преобразования, так чтобы получить формулу исследуемой функции в виде $A\,f\,(k\,x + p) + B$ (рис. 12.08.2-3).

Теперь можно использовать любую из рассмотренных выше схем.

Однако для гиперболы операции растяжения (сжатия) по обеим осям представляют весьма трудный процесс.

Приведя ее формулу к стандартному виду, максимально сокращаем число геометрических преобразований.

1

$$\begin{array}{r|l} ax + b & cx + d \\ \hline -\left(ax + \dfrac{ad}{c}\right) & \dfrac{a}{c} \\ \hline b - \dfrac{ad}{c} & \end{array} \Longrightarrow y = \frac{a}{c} + \frac{b - \dfrac{ad}{c}}{cx + d}$$

2

$$y = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cx + d} + \frac{a}{c}$$

$$y = \mathbf{A} \cdot f(\mathbf{k} \cdot x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$$

3

$$y = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{c\left(x + \dfrac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} =$$

$$= \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(x + \dfrac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} =$$

$$y = \mathbf{A} \cdot f(x + \mathbf{p}) + \mathbf{B}$$

Рис. 12.08. Преобразования
формулы дробно-линейной функции (1-2)
к формуле стандартного вида (3)

Итак, при данном виде формулы дробно-линейной функции необходимыми являются лишь три операции:

в старой системе: перенос центра координат;

в новой системе: построение графика-стандарта;

деформация по оси Y.

Проиллюстрируем решение на примере построения графика функции $y = \dfrac{\mathbf{2}x - \mathbf{1}}{x - \mathbf{2}}$ (рис. 12.09, см. также рис. III.26 на стр. 572).

Решение: 1. Преобразование формулы (рис. 12.09.1).

2. Анализ формулы (рис. 12.09.2).

3. Построение графика (рис. 12.09.3).

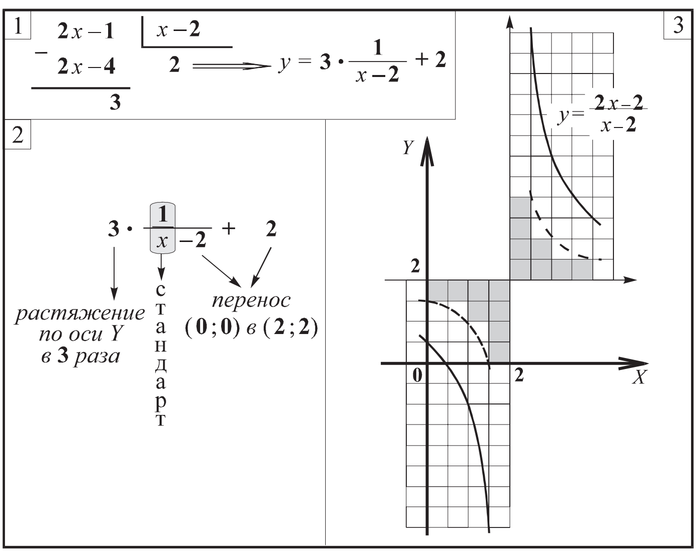


Рис. 12.09.

Преобразование (1) и анализ формулы (2),

построение графика дробно-линейной функции (3)

Подведем итоги.

Поставив обширную проблему – нахождение алгоритма преобразования графиков функций, мы сначала уменьшили диапазон поиска, рассмотрев случай преобразования графика $f\left(x\right)$ в график $f\left(x+p\right)$.

Получив нужный результат и проведя аналогичные "испытания", мы пришли к информационной схеме, описывающей геометрический смысл всех параметров функции $A\,f\left(k\,x+\,p\right)+B$.

Для свертывания этой схемы в более компактный вариант мы сначала рассмотрели ее упрощенную модификацию, которую обеспечили переносом центра координат из точки $(\mathbf{0\,;\,0})$ в точку $\left(-\dfrac{p}{k}\,\mathbf{;}\,B\right)$.

Задавшись целью еще более упростить построение графика дробно-линейной функции $y=\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$, мы ввели операцию "выделение целой части" и получили схему, по которой весь цикл преобразований этой функции можно реализовать в три этапа:

а) перенос центра координат;

б) построение стандарта типа $y=\pm\dfrac{\mathbf{1}}{x}$ в новой системе координат;

в) растяжение полученного графика вдоль оси ординат в новой системе.

Все это мы осуществили в ситуации поиска, основными этапами которого были:

сужение диапазона исследования,

распространение полученных закономерностей на всю область поиска,

и, наконец, конструирование новых, более удобных вариантов для реализации осваиваемого действия.

При усвоении навыков визуального поиска учебным группам под силу не только использование готовых информационных схем по окончании определенной темы, но и конструирование их по ходу ее изучения.

Таким образом, мы еще раз подчеркнули:

текст, рисунок и формула тесно связаны между собой.

Рациональное использование принципа разумного равноправия трех языков учебной информации позволяет упростить трудные преобразования, свернуть громоздкие операции, увидеть общее и различное в применении единого алгоритма в различных ситуациях.

Визуальные задачи представляют собой богатейший материал для образования групповых или индивидуальных поисковых ситуаций, что позволяет активизировать самостоятельность учащихся, "разбудить" их зрение, увлечь процессом познания.

12.2. Интеллектуальные игры

Описание процесса роста уровня поисковой деятельности учащихся в рамках настоящего диссертационного исследования представляется нам весьма сложной и трудно осуществимой задачей.

Это связано с длительностью самого процесса, разнообразием реакций отдельных учеников, неадекватностью проявления результатов в учебных группах с различными уровнями математической подготовки и общего интеллектуального развития.

Этими же трудностями было обусловлено и проведение экспериментов, которые растягивались во времени и слабо поддавались точной экспертной оценке.

Чтобы подтвердить соответствующее положение нашей работы, мы предлагаем описание фрагмента нашей экспериментальной работы, объединенного одним общим сюжетом и представляющего возможность фиксировать определенные приращения умений и навыков учащихся в визуальном поиске решения учебной математической задачи.

Описываемый ниже эксперимент проводился в Мурманском музыкальном училище (1984/85 и 1985/86 учебные годы) в форме учебной игры, основанной на объединении двух тем предметов «Математика» и «Информатика».

> Цель этой игры заключалась в создании силами учащихся специальной (воображаемой) программы “ЛОГИК”, простые и составные команды которой отражали бы важнейшие свойства трехмерного геометрического пространства.
>
> Таким образом, была создана ситуация “Ученик обучает компьютер, в то время как учится сам”. Нам приходилось не только “сочинять” необходимые команды, но и точно формулировать принципы их исполнения.

Ведущие линии эксперимента можно представить следующим образом:

– введение аксиом и определений стереометрии на визуальном уровне с сопутствующим переводом их содержания на формульный и вербальный языки предъявления учебной знаковой информации,

– подход к определениям и теоремам как к своеобразным визуальным задачам,

– объединение результатов наблюдений и логических обоснований в соответствующих блок-схемах.

Первая линия обеспечивает “живое созерцание” рассматриваемых ситуаций,

вторая – активную самостоятельность учащихся,

третья – формирование алгоритмических навыков визуального поиска, приводящих к росту “уровня” поисковой деятельности.

Для развития основной идеи был реализован подход, предложенный автором «Концепции современной математики»:

> «Мы вольны давать любые ОПРЕДЕЛЕНИЯ, важно только потом их строго придерживаться ... Задавшись определенным набором требований к поведению геометрических объектов, ... можно сказать: вот некоторая математическая теория. Она оперирует объектами, которые я назвал “точками” и “прямыми”. Я думаю, что примерно так в реальном мире ведут себя очень маленькие точки и очень тоненькие прямые ... чтобы узнать, так это или нет, можно делать эксперименты» [179, с. 79-80].

Игра проводилась в три этапа, на каждый из которых отводилось от 2 до 4 учебных часов. Первый из них был связан с построением блок-схем, полностью представляющих все возможные случаи в расположении пар основных понятий геометрии.

Прежде чем составить такую блок-схему, мы осуществляли серии “экспериментов”, устанавливая количество возможных связей и уточняя их “качественную” сторону.

Нам пришлось столкнуться с некоторыми трудностями.

> Учащиеся слишком часто путают знаки теоретико-множественной символики “$\in$” и “$\subset$”.
>
> Поскольку в данной теме все специальные значки употреблялись в качестве стенографических, то мы “отказались” от символа включения ($\subset$), ориентируясь на возможность воспри-

ятия прямой и плоскости как “множества точек, мыслимых как единое целое”.

Учащимся была представлена большая свобода действий – от предложения специальных символов до выбора порядка исследования.

Так, символы отношений между основными понятиями геометрии были установлены по предложениям учащихся (в частности символ пересечения (рис. 12.10.2).

Все они представляют собой визуальные модели – проекции такого отношения. Каждое новое отношение обсуждалось достаточно подробно (рис. 12.11).

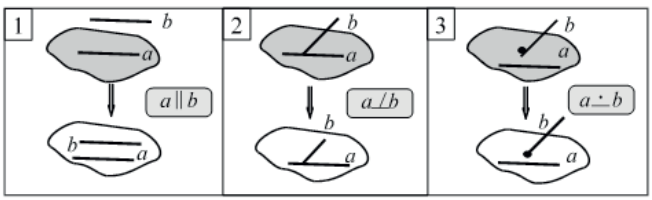


Рис. 12.10.
Изображения и обозначения
взаимного расположения прямых в пространстве:
параллельность (1), пересечение (2) и скрещивание (3)

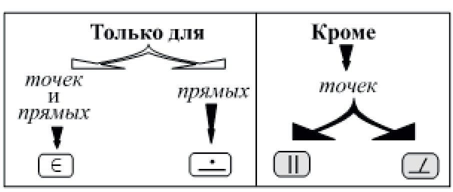


Рис. 12.11.
Ограничения, накладываемые на употребление
символов отношений
между основными понятиями геометрии

Первыми командами алгоритмического языка, применяемыми в наших рассуждениях, были команды присваивания и выбора (рис. 12.12).

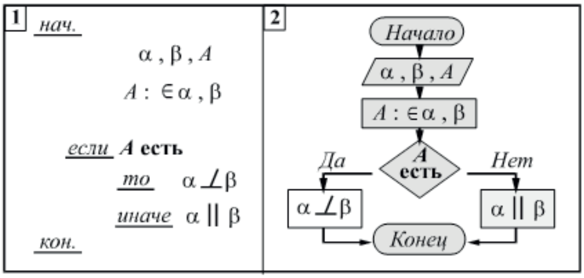


Рис. 12.12. Анализ информации
о точке пересечения двух плоскостей (1),
блок-схема определений взаимных расположений двух плоскостей (2)

Построение каждой блок-схемы обычно предварялось составлением маленькой соответствующей информационной схемой (рис. 12.13).

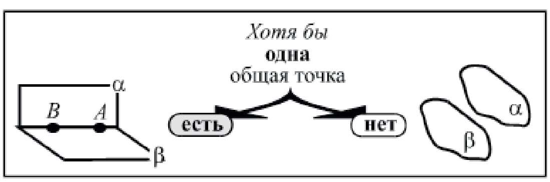


Рис. 12.13.
Определения взаимных расположений двух плоскостей

Любая последующая команда также тщательно разбиралась и анализировалась логически и визуально. Например, мы рассмотрели различие и общность в присвоении значений для "точки, принадлежащей двум прямым” и “плоскости, в которой лежат обе эти прямые” (рис. 12.14).

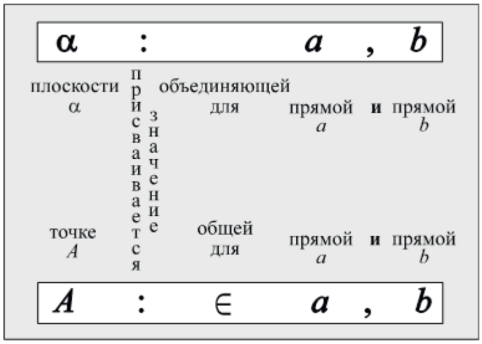


Рис. 12.14. Введение понятий “объединяющее” для плоскости (вверху) и “общее” для точки (внизу)

Проведенная самостоятельная работа показала, что, несмотря на полное отсутствие домашних заданий и каких-либо учебных пособий, учащиеся поняли,

- как искать и наблюдать,
- как самим составлять определения темы «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве»,
- как отражать свои выводы в логических схемах.

Следующий этап игры был посвящен конструированию первой части нашей основной “программы” – алгоритма анализа геометрической информации (АГИ) (рис. 12.15), хотя в то время (вторая половина 70-х годов) компьютеров у нас не было, и мы даже не представляли как они выглядят.

Материалом служили развернутые наименования теорем этой темы. Основные приемы анализа вербальной информации на первых порах отражались в специальной таблице, подобной представленной на рисунке 12.16.

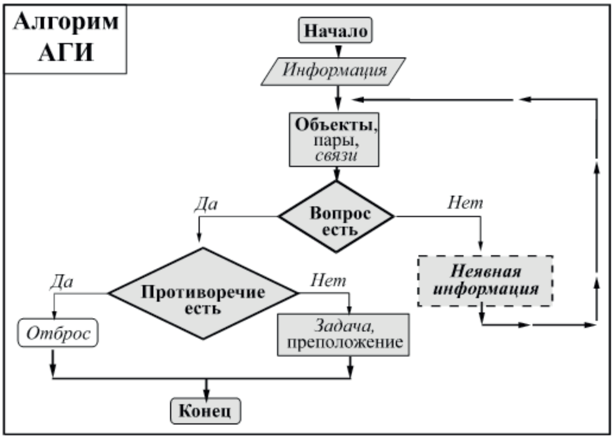


Рис. 12.15.
Блок-схема алгоритма
«**А**нализ **Г**еометрической **И**нформации»

Информация. *В одной из двух пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости*

	Объекты	Пары	Связи	Вопрос	Предположения
Явно	a α β	a — α a — β α — β	$a \in \alpha$ $a \parallel \beta$ $\alpha \angle \beta\ (c)$		$c \angle a$ *или* $c \parallel a$ *или* $c \cdot a$
Неявно	c	c — a c — α c — β	$c \in \alpha$ $c \in \beta$	c ? a	

Рис. 12.16.
Анализ задачи о связях между основными понятиями геометрии

После двух-трех примеров учащиеся оформляли свои рассуждения в свернутом виде (рис. 12.17).

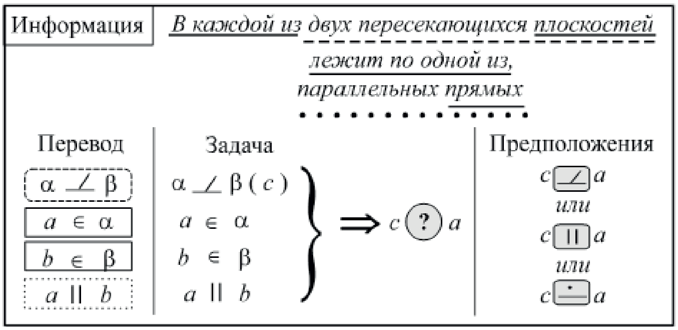


Рис. 12.17.

Построение задачи на связи между основными понятиями геометрии

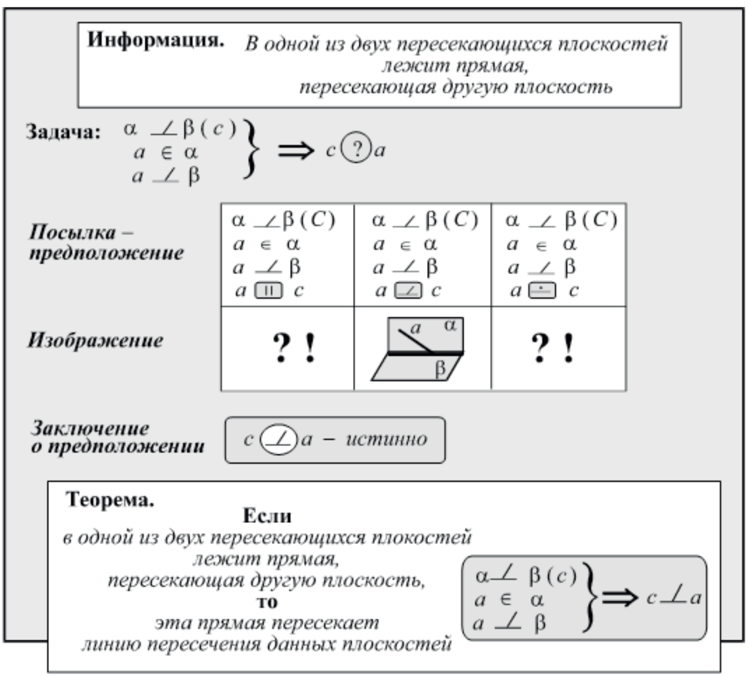


Рис. 12.18.

Составление задачи по предложенной информации (вверху),

исследование имеющихся данных (в центре),

построение теоремы (внизу)

В конечном итоге мы пришли к осознанию структуры нового алгоритма **РЗС** (**Р**ешение **З**адач о **С**вязях) и выразили ее соответствующей блок-схемой (рис. 12.19).

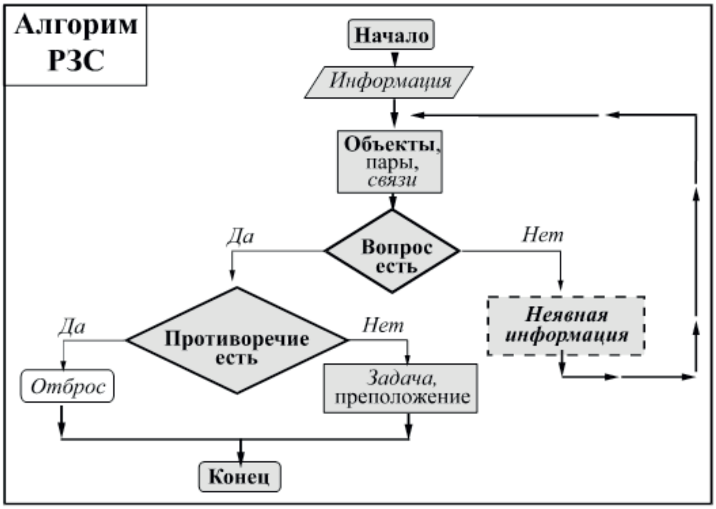


Рис. 12.19.
Блок-схема алгоритма
«**Р**ешение **З**адач о **С**вязях»

Таким образом, учащиеся усвоили, как можно:

– определить явные данные,

– выявить “скрытые” среди слов неявно заданные условия,

– поставить задачу,

– разобраться в математическом тексте,

– высказать допустимые предположения относительно результата ее решения.

Проверочная работа позволила констатировать очередной рост уровня визуальной поисковой деятельности участников эксперимента.

Третий этап должен был привести к умению не только составлять задачу, но и решать ее. Это решение предполагало получение формулировки теоремы, которую учащиеся не получали в готовом виде, а конструировали в ходе самостоятельного визуального поиска и соответствующих умственных действий.

Данный процесс мы отразили второй подпрограммой – алгоритмом **РЗС**. Блок-схема этого алгоритма и реализация его на конкретном примере представлены на рисунках 12.15-12.18.

В результате учащиеся научились:

1. При предъявлении достаточно корректной вербальной информации осуществлять постановку задачи.
2. Соотносить данные задачи со своими интуитивными представлениями (практическим визуальным опытом).
3. Строить теорему на основе решения задач, предлагаемых условием исходного информационного сообщения.

Традиционно теоремы школьного курса предлагаются к изучению “извне” в виде готовых импликационных высказываний.

Специальные игры, основанные на активном использовании визуального мышления и интуитивной логики, показали, что имеется возможность строить изложение учебной теории так, чтобы анализ предлагаемой информации приводил к утверждениям, истинность которых устанавливается в ходе визуального поиска с сопутствующими логическими обоснованиями.

На основе всего вышесказанного мы констатировали повышение уровня поисковой деятельности учащихся, поскольку весь процесс – от составления формулировки посылки до получения истинного заключения – осуществлялся ими самостоятельно, без помощи учителя или использования учебника.

12.3. Перенос полученных знаний и умений в новую ситуацию

Предлагаем описание нескольких опытов организации визуального поиска в сфере профессиональной деятельности учащихся. Эксперименты в этом направлении велись автором в Мурманском музыкальном училище с 1975 по 1986 год. Не затрагивая эмоциональных и чисто исполнительских вопросов музыкальной теории и практики, мы старались там, где это возможно и насколько возможно, повысить логическую культуру мышления учащихся на доступных им параллелях между музыкальным и математическим материалами.

Для того чтобы сложилось более целостное представление о данном направлении эксперимента, мы выбрали единый, постоянно действующий момент учебной практики всех отделений музыкального училища – технический зачет по фортепиано. В него входят: чтение нот с листа, игра гамм, исполнение виртуозного произведения и транспонирование. Эти испытания являются обязательными, проводятся каждый семестр в течение первых трех лет и представляют особую трудность для первокурсников, не имеющих полной специальной подготовки.

Для начала, мы обратились к гаммам. Достаточно большой перечень их, состоящий из 48 наименований, затрудняет восприятие и запоминание аппликатурных правил. Поэтому было предложено найти некий принцип разделения всего множества данных объектов на группы, подчиняющиеся общим законам усвоения и исполнения.

В основе понятия “гамма” лежит принцип периодичности – семь ступеней располагаются в определенном порядке в зависимости от рода тональности (мажор или минор) и повторяются, начиная с восьмой. Последовательности этих семи ступеней противопоставляется определенный аппликатурный “стандарт”, также действующий периодично, но не синхронно с первым. Прием сужения диапазона поиска привел нас к мысли начинать все исследования с наиболее простых, хорошо всем известных гамм – до, ре, ми, соль и ля мажор.

Покажем более подробно, как был найден ориентир.

Каждый ученик знает, что самой удобной для игры является гамма ми мажор – аппликатурная “серия” для этой гаммы организуется самой структурой фортепианной октавы. 4-й палец играет в октаве лишь один раз, поэтому его местоположение и было взято в качестве ориентира (рис.12.20).

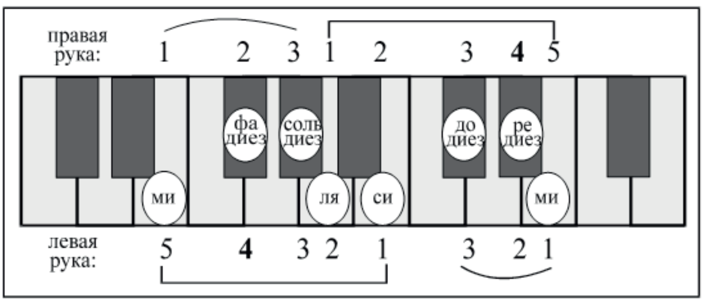


Рис. 12.20.
Фортепианная структура и аппликатура гаммы ми мажор

Мы исследовали остальные тональности и обнаружили: в любой из перечисленных гамм 4-й палец каждый раз попадает на VII ступень в правой руке и на II ступень в левой. Причем эта закономерность сохраняется и в минорных одноименных гаммах.

Таким образом, от игры на клавиатуре мы перешли к переводу (переносу) полученных данных на нотный стан (рис. 12.21).

В результате было выведено правило игры десяти гамм (рис. 12.22).

Рис. 12.21.
Нотная структура и аппликатура гаммы ми мажор

Правая рука	1	2	3	1	2	3	4	5(1)
Ступени гаммы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII(I)
Левая рука	5(1)	4	3	2	1	3	2	1

ГАММЫ	
МАЖОР	МИНОР
ДО	ДО
РЕ	РЕ
МИ	МИ
СОЛЬ	СОЛЬ
ЛЯ	ЛЯ

Рис. 12.22.
Схема аппликатурного правила игры на фортепиано
первой группы гамм (по ее ступеням)

Оформили полезное умозаключение:

> аппликатурный принцип игры гамм на фортепиано обязательно содержит ориентир, причем это не только конкретный палец, но и его место в общей структуре (здесь – номер ступени гаммы) (рис. 12.23).

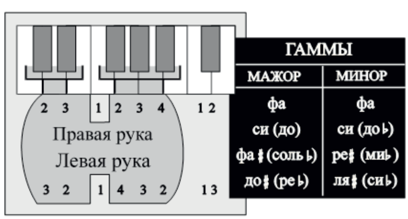


Рис. 12.23.
Схема аппликатурного правила игры на фортепиано
второй группы гамм (по совпадению 1-х пальцев)

Многочисленные эксперименты на клавиатуре и нотной бумаге привели нас к информационным блокам и для остальных групп гамм (рис. 12.23 и рис. 12.24). Итоги отразили в единой информационной схеме (рис. 12.25, см. так же рис. III.29 на стр. 575).

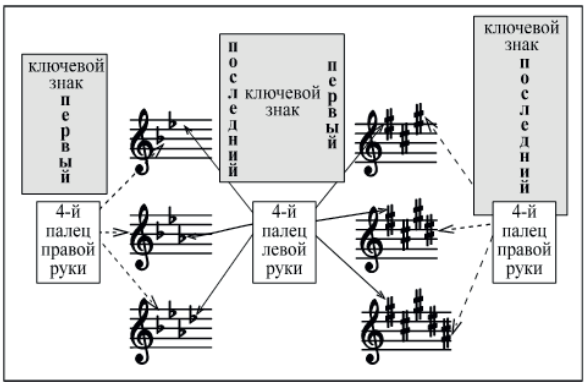


Рис. 12.24.
Схема аппликатурного правила игры на фортепиано третьей группы гамм (по ее ключевым знакам)

4-й палец

АППЛИКАТУРНЫЕ ПРВИЛА ИГРЫ ГАММ НА ФОРТЕПИАНО			
ОРИЕНТИР	Правая рука	Левая рука	ГАММЫ
на ступени	VII	II	*C, D, E, G, A* *c, d, e, g, h*
на клавиатуре	где идут подряд три черные клавиши		*F, H, Fis, Cis* *f, h, dis, ais*
на ключевом знаке по порядку следования	первом последнем	последнем первом	*B, Es, As* *fis, gis, cis*

Рис. 12.25.
Общая схема аппликатурных правил игры гамм на фортепиано

После этого осталось приобрести навык использования элементов и блоков схемы и заучивать не каждую гамму в отдельности (как это обычно реализуется в учебной фортепианной практике), а сразу по 10, 8 и 6 гамм.

Таким образом, мы показали, как разрозненные практические сведения можно свести к строго организованной совокупности правил, опираясь на визуальное мышление в ходе визуального поиска.

На примере гамм учащиеся поняли, что методы анализа информации, использование приемов визуального поиска, создание вспомогательных информационных схем возможны и в их профессиональной деятельности. Мы распространили эту идею для отыскания аналогий и построения разнообразных ассоциаций между музыкальными и математическими понятиями.

Приведем еще один пример, относящийся к ликвидации трудностей технического зачета.

Transporo (лат.) – переношу, перемещаю. Термин "транспонирование" по смыслу и назначению совпадает с математическим понятием вектора, по исполнению и реализации – с его геометрическим представителем (направленным отрезком) (рис. 12.26.1).

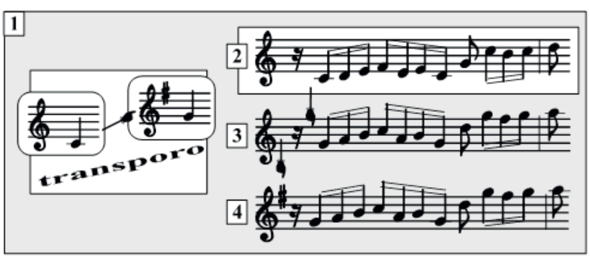


Рис. 12.26. Транспонирование: определение-иллюстрация (1), заданная мелодия (2), перенос ее на заданный интервал (3), учет ключевых знаков новой тональности (4)

Следовательно, чтобы транспонировать из одной тональности в другую, нужно мысленно перенести нотный рисунок (рис. 12.26.2) в нужном направлении на заданное расстояние (вверх или вниз на заданный интервал) (рис. 12.26.3) и учесть знаки альтерации новой тональности (рис. 12.26.4).

Учащиеся отразили на нотных станах этот первый момент (рис. 12.26.2-3) и самостоятельно сделали заключение: необходимо уточнить "область определения" – тональность, внести некоторую корректировку, выставив ключевые знаки (рис. 12.26.4), и транспонирование завершено. Учащиеся способны придумывать неожиданные и необычные аналоги математических понятий.

> Предлагаем сокращенный перечень аналогов понятия "вектор", сочиненных ими: секвенция в музыке, канон, правильно написанные нотные диктанты, гаммы на несколько октав, репродукции картины художника, книги одного и то же автора и одного года издания, передвижение транспорта по прямой, работа лебедки, коллекционные модели автомобиля одной марки и серии, тиражирование, переиздание книги, повторение телепередачи в разное время и в разных местностях и т.д.

Мы предложили учащимся решить следующую задачу: в чем может заключаться транспонирование музыкальных отрывков на пол тона вверх или вниз? Сначала кто-то сказал, что "это сыграть трудно". Однако потом нашли подсказку: "диез" – это знак повышения на полтона, а "бемоль" – понижения. Следовательно, нужно лишь мысленно выставить знаки альтерации у всех нот музыкального эпизода и играть с учетом этой поправки так, как показывает исходный текст.

Покажем, как формирование техники перевода вербальной информации может стать инструментом к анализу информационного сообщения гуманитарного характера.

На одном из уроков математики было предложено: “Не пользуясь справочной литературой, составьте историческую справку о хазарах”. Процесс обсуждения начался с вопроса учащихся – что такое историческая справка? Ответ: под исторической справкой здесь будем понимать сведения типа:

а) когда жили,

б) где жили,

в) какова численность,

г) каков уровень развития,

д) чем занимались.

Поиск необходимой информации не составил труда. Все помнили, что слово “хазары” встречается в «Песне о вещем Олеге» А.С. Пушкина. В результате нужные данные были представлены первым четверостишием. Ответы давались с обязательными обоснованиями (отмечены в скобках):

а) тысячу лет назад (время княжения Олега),

б) южное Приднепровье (Киевская Русь),

в) многочисленные (набеги буйные, значит, воевали не умением, а числом),

г) полудикие племена (неразумные хазары),

д) скотоводство и земледелие (села и нивы, набеги – значит, были кони).

Таким образом, выяснилось, что учащиеся приобрели и даже закрепили навык анализа и обнаружения неявно заданных сведений в специальных информационных блоках. Процесс перевода вербальной информации в формулу или картинку, анализ структуры и элементов формальных или визуальных конструкций дает богатые перспективы для побуждения учащихся к активной мыслительной деятельности не только в процессе решения задачи, но уже при предъявлении ее условия. Это подтвердилось и на втором примере, который был предложен группе, состоящей из учащихся, поступивших на I курс без предварительной профессиональной музыкальной подготовки.

В цикле «Картинки с выставки» М.П. Мусоргского есть пьеса «Старый замок». В одном из изданий этого цикла к заголовку к ней прилагается сноска: «Перед старым обветшалым замком трубадур поет свою песню».

Учащиеся должны были поставить вопросы к данному примечанию так, чтобы ответы на них могли дать представление о характере музыки этого произведения (предвидение формы и структуры). Были сформулированы следующие вопросы:

1. В каких странах имеется много старых замков?
2. Кто такие трубадуры?
3. Какие инструменты применялись для сопровождения пения?
4. О чем пели трубадуры?

Получив ответы на некоторые из вопросов от наиболее эрудированных учащихся (вопросы 2 и 3), остальные смогли достаточно толково и правильно описать характер данного программного произведения, прокомментировать свои догадки при его прослушивании.

В заключение покажем, как анализ структуры блоков и элементов знаковой информации, “живое созерцание” ее конструктивных особенностей, отыскание “общего” и “различного” помогает в решении профессиональных задач.

Одна из них излагалась учащимися Мурманского музыкального училища так: “Давайте, применим математику, чтобы хорошо читать с листа, быстро и правильно разбирать и запоминать нотный текст”.

Основная идея заключалась в следующем.

Нотный текст представляет собой определенную знаковую информацию.

Следовательно, анализируя его структуру, находя общие и различные “формулы” (пассажи, аккорды и т.д.), можно обнаружить некоторые закономерности, позволяющие выявить основные трудности и составить достаточно четкую программу действий для их ликвидации при изучении нотного текста.

Для начала было предложено выполнить упражнение “Воспроизведите по памяти выражение $\dfrac{\left(a+\dfrac{\mathbf{1}}{b}\right)m+\left(b+\dfrac{\mathbf{1}}{a}\right)n}{\left(b+\dfrac{\mathbf{1}}{a}\right)m-\left(a+\dfrac{\mathbf{1}}{b}\right)n}$”.

Это оказалось по силам лишь тем, кто заметил в выражении два основных момента:

а) общие элементы $\left(a+\dfrac{\mathbf{1}}{b}\right)$ и $\left(b+\dfrac{\mathbf{1}}{a}\right)$,

б) основную структуру: $\dfrac{*m+*n}{*m-*n}$.

Тем самым учащиеся были “настроены” на то, что прежде чем начинать работать с какой-нибудь формулой, необходимо разобраться в ее конструкции, обнаружить одинаковое и различное, определить главные связи между элементами – блоками, т.е. структуру.

Следующая задача” (подобная рисунку 10.01 (стр. 267): “Рассмотрите и воспроизведите по памяти графики.

Обсуждение результатов дало ориентиры для запоминания: графические стандарты, симметрия и периодичность.

Вспомнили, что подобные приемы часто встречаются не только в этюдах, но и в произведениях полифонического стиля.

Провели аналог:

прежде чем разбирать этюды, играя их на инструменте, нужно предварительно проанализировать нотный текст.

Главной отличительной особенностью технических этюдов является ориентирование их текста на усвоение одного из видов фортепианной (инструментальной) техники.

Следовательно, в каждом из них есть своя основная “формула”, повторяя которую в предлагаемых нотами вариантах, добиваются нужного результата.

Выбрали несложный этюд Лемуана (ор. 37 №20) и углубились в созерцание нотного текста (рис. 12.27).

Определили, на сколько частей по своим техническим задачам можно разделить данный этюд. На это указали пассажи, в первой части предназначенные для исполнения правой рукой, во второй – левой.

Обсуждение и поиск начали с “формулы”, определяющей основную техническую задачу:

– Изучению каких навыков игры на рояле посвящен этот этюд? – *Гаммаобразным пассажам.*

– Какова основная особенность этих пассажей? – *Четыре ноты идут поступенно вниз, затем опять, но начиная уже от нового звука* (рис. 12.27.1).

Рис. 12.27.
Результаты визуального поиска
аппликатурного принципа исполнения (в рамке)
Этюда Лемуана ор. 37 №20

– Именно так развивается нотная “линия” во всех тактах первой части? –*Только в первых двух тактах, дальше движение вверх*.

– В первых четырех тактах найдите общее и различное. – *В первых двух тактах движение вниз, начиная с сильной доли, а дальше – наоборот.*

– Как именно “наоборот”? – *Движение вверх и начало от слабой доли* (рис. 12.27.2).

– Можете ли вы сразу записать по памяти или сыграть на инструменте партию правой руки первых четырех тактов? – Молчание.

– Может быть достаточно запомнить первые ноты, с которых начинается каждый пассаж в первых двух тактах? – Сразу согласились и запели: *фа-ре-си-соль-ми-до-ля-фа* (рис.12.27.3).

– Как эту последовательность нот запомнить? – *Начинать от ноты фа третьей октавы и вниз по терциям* (рис.12.27.4).

– Во время быстрой игры вам некогда будет “вычислять” эти терции. Найдите другой принцип, который согласовывался бы с уже предложенным.

Учащиеся принялись “играть” на столах. Обнаружили, что каждый последующий пассаж начинается “на ступень вверх” от конца предыдущего. Изобразили они это так, как показано на рисунке 12.27.5.

– Проанализируйте движение в следующей паре тактов и обратите внимание на ключевые и случайные знаки.

– Обратите внимание на окончания третьего и четвертого тактов, разберите мысленно партию левой руки и, закрыв ноты, запишите первые четыре такта по памяти.

Большинство быстро и точно справилось с этой работой. Причем, пока шло письменное оформление, многие успели продемонстрировать игру на инструменте “на память”.

Характерно, что каждый сначала “примерялся”, беззвучно проигрывая над клавиатурой пассажи и по несколько раз повторяя манипуляции левой руки (накопление визуального и тактильного опыта).

Дальнейший текст анализировался аналогичным образом, но гораздо быстрее.

Без напоминания обратили внимание на сходство и различие обеих частей, на закономерности в партиях правой и левой рук.

Общие выводы были оформлены в следующие тезисы: начиная работать над нотным текстом, в том числе и при “чтении с листа”, следует:

1. Разделить его на части и выбрать одну из них для непосредственного анализа.
2. Этот фрагмент исследовать с позиций “общего”, т.е. выявить основную конструктивную “формулу”.
3. Определить последовательность таких “формул”.
4. Найти ее модификации в дальнейших проведениях.
5. Выявить наличие или отсутствие данного принципа в остальных блоках произведения.

Краткие итоги

Процесс перевода вербальной информации в формулу или картинку, анализ структуры и элементов формульных, вербальных и визуальных конструкций дает богатые перспективы для побуждения учащихся к активной мыслительной деятельности не только в процессе решения задачи, но уже при предъявлении ее условия.

Поиск гуманитарных аналогий математических понятий самым положительным образом влияет на отношение учащихся к предмету «Математика» и к обучению вообще.

Выполнение таких упражнений способствует повышению их общекультурного уровня, умению выражать мысли вслух, вдумываться в скрытый смысл сказанного или написанного, приводить необходимые образные сравнения, выстраивать доказательные рассуждения, обогащая их разнообразными ассоциациями.

Выводы

1. Поиск решения математической задачи начинается с наблюдения, в результате которого становятся возможны первые этапы восприятия и переоформления данных. Такое переоформление может осуществляться с помощью перевода, благодаря которому удается обнаружить ориентир.

В качестве ориентира мы принимаем тот привычный результат анализа данных, который позволяет выявить общее, присущее отдельным блокам или элементам информационного сообщения.

К этой группе следует отнести стандарты формульного или геометрического характера, структуру информационных (логически основополагающих) связей.

Догадка кроется в своеобразии предъявленного информационного сообщения, в том, что отличает его от стандартных, привычных задач.

Для того чтобы догадка пришла как можно скорее, информацию или ее блоки следует представить визуально так, чтобы наружу были выведены все существенные моменты (элементы) текста, рисунка и формулы, составляющих ее содержание.

На любом этапе решения задачи имеющуюся информацию можно рассматривать как исходную – явно заданную. Дополнительные условия приводят данные “в состояние готовности” к преобразованиям.

Осуществив их, мы получим набор некоторых новых объектов, которые позволяют перейти к очередному этапу. И весь процесс либо начинается заново, если ответ не получен, либо заканчивается, если результат достигнут.

2. Математические задачи различаются по степени сложности решения, возможности проникновения учащегося в существенные моменты их содержания. Простая математическая задача обычно решается в ходе "живого созерцания". Анализируя структуру, сопоставляя отдельные блоки, выделяя общее и различное, учащийся может мысленно составить план работы.

3. Задача "с изюминкой" требует от ученика умения отыскать ориентир, увидеть подсказку, которая непременно присутствует в ней, но не всегда выведена наружу. Задачи более сложной структуры – с недостаточно полным описанием или слишком большим объемом условий – требуют извлечения дополнительной информации, скрытой от решающего. Для выхода их тупика ученик должен "раскрыть секрет" либо обнаружением неявно заданной информации, либо преобразованием уже предложенной, либо сужением диапазона поиска с последующим распространением полученных результатов на весь массив данных. В ходе этих операций происходит формирование догадки – важнейшего параметра активной творческой мыслительной деятельности.

4. Формирование навыков визуального поиска – процесс длительный и сложный. Его полезно начинать формировать как можно раньше на простом, хорошо знакомом материале.

Богатые возможности в формировании догадки заложены в задачах "Посмотрите и найдите" и "Докажите, глядя на рисунок, что ... ". Для хороших результатов необходимо постоянно "поддерживать огонь", закреплять достигнутое, "подбрасывать" новые задания, направленные на обнаружение ориентира и восприятие подсказки, подводящих к нужным догадкам.

Догадка – это “драгоценный камень” в “мыслительных сооружениях” ученика. Весьма немногие могут самостоятельно ее извлечь из условия задачи. Планомерный, постоянный и настойчивый процесс формирования навыков наблюдений, умения искать подсказку и ориентир, может привести к полезным результатам обучения – продуктивной мыслительной деятельности учащегося на школьных уроках. Поиск соотношений между текстом и формулой, формулой и рисунком, текстом и рисунком незаметно и продуктивно организует визуальное мышление, и, как следствие, мышление вообще.

Глава V
ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальная работа проводилась нами параллельно с теоретическими исследованиями более 20 лет. Условно ее можно разделить на периоды:

- поиск визуальных средств обучения математике;
- изучение влияния визуальных средств и способов обучения на развитие ученика;
- распространение идеи использования визуального мышления в обучении на преподавание различных дисциплин общеобразовательной школы.

Проводимый нами эксперимент имел три основных направления. Первое из них, связанное с созданием специальных дидактических материалов, было рассмотрено во второй главе диссертации. В данной главе мы представляем следующие два направления:

- формирование нового типа урока (визуального урока), в ходе которого активно используется и развивается визуальное мышление ученика;
- разработка программного обеспечения таких уроков.

Под ***визуальным уроком*** мы понимаем урок, в ходе которого основной акцент ставится на формирование и преобразование зрительных образов, составляющих основу учебной задачи.

Личная практика автора и многочисленные эксперименты учителей, работающих под его руководством, показали, что подойти к положительным результатам обучения можно быстрее, обогащая традиционные методы обучения планомерным и постоянным применением элементов такого урока.

Под ***программным обеспечением визуального урока*** мы понимаем не только компьютерные оболочки, наполненные учебным содержанием, но и специальные бумажные комплекты, условно называемые **визуальными блоками**.

В такой блок могут входить: информационная тетрадь (с вариантами ее страниц), информационная схема (также имеющая варианты, отличающиеся по уровню сложности и расположению блоков на плоскости листа), примеры (демонстрация решения стандартных и трудных задач), визуальные задачи (разного назначения и структуры), матрицы (с адекватными или разноуровневыми вариантами).

§13. Результаты поискового эксперимента

На первых этапах эксперимента конкретные экспериментальные данные накапливались в ходе анализа преподавания математики в таких учебных заведениях, где преобладающее большинство составляли учащиеся со слабой мотивацией к обучению, с безразличным или негативным отношением к предмету.

(В дальнейшем мы распространили эксперимент на классы с углубленным и расширенным обучением математике, а также на классы компенсирующего обучения).

13.1. Хронология эксперимента

С 1975 по 1986 годы эксперимент был сосредоточен в музыкальном училище и профессионально-технических училищах нескольких специализаций. Экспериментальная работа в этот период проводилась учителями ПТУ и автором настоящего исследования. Ленинградские ПТУ выбирались по указанным выше признакам. Каждая группа в среднем состояла из 25 человек. Перечислим специализации экспериментальных групп:

а) Музыкальное училище, преп. Н.А. Резник
(5 лет по 2 группы);

б) ПТУ №19, кулинарное, преп. М.С. Громыко и В.Н. Рыжик
(2 года по 4 группы);

в) ПТУ №31, слесари-авторемонтники, преп. Т.С. Случек
(2 года по 2 группы);

г) ПТУ №90, роспись по фарфору, преп. Т.И. Маляева
(1 год 1 группа).

Чтобы поиск и проверка получаемых данных происходила наиболее эффективно, мы разделили первый период эксперимента на два подэтапа.

Сначала в музыкальном училище г. Мурманска автором проводился опережающий поиск (1975-1980 годы), в ходе которого осуществлялись постановка и проверка локальных положений гипотезы, вырабатывались элементы целенаправленного развития "живого созерцания" на уроках математики.

Новый материал, как правило, изучался в более сильной группе, а затем уточнялось воздействие средств его введения в более слабой. Регулярно проводились тестовые работы специального содержания.

После этого испытываемый прием подвергался переработке, усовершенствованию с учетом поступивших от учащихся замечаний и предложений, качества выполненных ими проверочных работ.

Создаваемые практические учебные материалы преобразовывались в специальные вспомогательные пособия и передавались в ПТУ (Ленинград). Главную роль в этих материалах играли информационные тетради для учащихся и поурочные разработки для преподавателей.

Таким образом, если в опережающем поисковом эксперименте участвовало 200 человек, то теперь он охватывал более 500 человек.

Информационные тетради темы "Параллельность прямых и плоскостей в пространстве" и раздела "Элементы векторной алгебры" предлагались на уроке каждому учащемуся. Поурочные разработки мы строили на сериях информационных блоков и традиционных практических упражнениях (темы “Простейшие уравнения и неравенства с модулями” и “Исследование функции по ее графику”).

Проведенная работа позволила накопить много фактического материала, основанного на личных наблюдениях и выводах преподавателей-экспериментаторов, результатах самостоятельных и контрольных работ учащихся.

Итогом первого периода явилась формулировка гипотезы.

Второй период экспериментальной работы был связан с проверкой гипотезы о влиянии визуального мышления учащихся на их алгоритмическую культуру, умение переносить полученные знания в новую ситуацию, рост уровня поисковой деятельности.

Этот этап базировался на исследованиях, проводимых автором в музыкальном училище (1980-1986), на подготовительных вечерних курсах и в подготовительной группе дневного отделения Мурманского высшего инженерного морского училища им. Ленинского комсомола и преподавателями математики ПТУ г. Ленинграда. Всего было охвачено более 700 человек.

Основными методическими средствами в этот период служили информационные тетради и схемы, поисковые серии. На данном этапе мы стремились выстроить единую методику их использования и развития.

В сентябре 1987 года в плане НИР был начат эксперимент “Формирование и методическое обеспечение курса математики в системе “Школа-Лицей-ВУЗ”. На базе Мурманского морского лицея мы провели ряд исследований, также подтвердивших практически все положения гипотезы. Первый (поисковый этап) осуществлялся автором в 10-11 классах лицея (судоводительский и технологический классы, два года по 30 человек). Все материалы, подготовленные в ходе его проведения, обрабатывались и передавались преподавателю этого же лицея Н.Г. Неделько, осуществлявшей их апробацию в трех классах (два года по 128 человек).

В этот же период эксперимент был распространен на восьмые классы того же лицея. К работе присоединились еще четыре преподавателя математики (Т.В. Яруткина, В.Н. Свинцов, А.Г. Мараков, Л.Б. Дехтяр). Эти преподаватели работали в режиме эксперимента 3 года (15 классов по 30-31 человек).

Особое внимание было уделено созданию визуальных дидактических материалов для единого курса математики и формированию программы этого курса.

В это же время началась работа с преподавателями школ города.

Разработанные в лицее материалы апробировали учителя математики школы №28 г. Мурманска Н.В. Иванчук и Т.И. Шишова. Эксперимент проводился 3 года и охватывал ежегодно 4 класса по 25 человек в каждом.

К экспериментальной работе присоединились учителя математики Зверосовхозской средней общеобразовательной школы Кольского района Мурманской области (С.И. Литвиненко и С.В. Лысенкова) и школы №34 г. Мурманска (Е.А. Струнникова и М.В. Скрябина).

Всего в эксперименте участвовало 14 классов школы №34 г. Мурманска в среднем по 20 человек (5-9 классы) и 12 классов в Зверосовхозской школе в среднем по 20 человек (6-10 классы). Кроме этого в состав участвующих в эксперименту вошли классы всех учителей математики школы №4 поселка Росляково Североморского района Мурманской области (всего 8 классов по 25 человек в среднем).

Одновременно продолжалась работа в Мурманском морском лицее преподавателями математики Н.А. Резник, В.И. Катаровской, Н.Г. Неделько, Н.В. Иванчук, Т.М. Карасевой, Е.Б. Сверчкова, И.Т. Емелина, Т.Б. Яруткиной, Н.Г. Подобед.

В 1995-97 годах в эксперименте приняли участие преподаватели математики лицея №1 (Н.К. Жукова, Н.И. Яркова), учителя математики разных школ города и области (Т.В. Шубина, Г.Н. Калинина, С.И. Литвиненко, С.В. Лысенкова, Е.А. Струнникова и М.В. Скрябина, Н.Г. Скрипниченко, Т.В. Коротких, О.Б. Царева, Л.К. Ляпугина, И.Н. Дяденистова, А.В. Джумагалиева и другие).

Всего в период с 1989 по 1997 год в эксперименте участвовало около 30 учителей математики.

Кроме этого, начиная с 1995 года, к эксперименту присоединились учителя математики специальной школы-интерната для глухих и слабослышащих детей В.И. Удалова, Н.С. Бушманова, С.Я. Верещагина, Н.Н. Кузнецова.

Таким образом, по самым скромным подсчетам за 8 лет в эксперименте приняло участие около 8 тысяч учащихся.

Экспериментальная работа осуществлялась в классах с различными уровнями подготовки (от электромеханического класса Мурманского морского лицея до класса компенсирующего обучения школы №34 г. Мурманска, преподаватель М.В. Скрябина).

Результаты этой работы мы оформили в виде учебных и учебно-методических пособий [144-149, 152-153].

Общие тенденции влияния использования и развития визуального мышления в процессе обучения проявились достаточно четко. Отчеты по итогам наших практических поисков мы реализовали в виде открытых уроков на областных и районных семинарах учителей Мурманской области.

Первый областной семинар учителей математики был проведен в “Дни науки” Мурманского морского лицея (март 1994 года).

В апреле 1995 года мы провели второй семинар на базе трех средних учебных заведений.

В 1996 году открытые уроки проводились в школах города Мурманска (лицей №1, школа №34) и в школах Кольского района Мурманской области (поселки Зверосовхоз и Мурмаши).

Была начата планомерная работа с преподавателями разных дисциплин школ г. Мурманска и Кольского района Мурманской области. Среди них:

Г.Н. Степанова (русский язык и литература),

Т.А. Ахтарина, О.В. Осипова, Т.И. Мартынова (биология),

И.А. Вецко (физика),

В.О. Иванов, Г.А. Федотова (география),

С.И. Андреева (сольфеджио и музыкальная грамота),

Л.П. Шамонова, Е.Н. Тенюкова (химия),

Т.Г. Иванова (начальные классы),

Н.Н. Кузнецова (информатика),

Ф.И. Сидорова (немецкий язык) и другие.

Всего в период 1993 по 1997 год в эксперименте приняло участие около 20 учителей различных школьных дисциплин.

Некоторые из них также провели открытые уроки, которые вызвали большой резонанс.

Присутствующие констатировали, что визуальные дидактические материалы обладают высокой эффективностью. С их помощью можно значительно повысить продуктивность школьного урока.

Благодаря им учитель имеет возможность “увидеть и услышать” своих учеников, а ученик может (цитируем!) “много думать, но мало писать”.

В 1996 году на материале этих открытых уроков была составлена и издана в Санкт-Петербургском издательстве «Свет» книга для учителей «Визуальные уроки», представляющая результаты эксперимента широкой общественности [150].

Примеры можно найти в приложении (стр. 587-616).

13.2. Поисковый эксперимент

Для экспериментальной проверки первой части гипотезы данного исследования (стр. 9) мы выбрали два ведущих параметра развивающей функции обучения математике: развитие алгоритмического мышления и рост уровня поисковой деятельности учащихся. Кроме этого, мы добавили третий параметр – умение переносить полученные знания в новую ситуацию.

Два последних параметра не поддаются (по крайней мере, в настоящее время) количественному анализу. Это обусловливается трудностями, о которых пишет В.П. Зинченко:

> “Первая ... связана с чрезвычайной скудостью наших знаний о содержании, о фактуре и о лингвистике зрительных образов, эталонов и оперативных единиц восприятия ...
>
> Вторая трудность состоит в том, что крайне слабо разработаны объективные индикаторы осуществления высших психических функций, на основе которых оказалась бы возможной сравнительная оценка различных функциональных, в том числе и сенсорных, систем в процессе решения” [67, с. 32].

Поэтому для упомянутых параметров развивающей функции обучения математике мы создали специальные учебные ситуации, результаты реализации которых позволяют судить о правильности направлений наших исследований (стр. 317-354).

13.2.1. Формирование алгоритмической культуры

Наблюдения за формированием и ростом алгоритмической культуры обучаемых в результате внедрения визуальных приемов и средств преподавания математики планомерно и целенаправленно осуществлялись в экспериментальной группе дневного подготовительного отделения МВИМУ[1] в 1988 году.

Всего на отделении в пяти группах обучалось около 130 человек. Экспериментальная группа в основном состояла из лиц, окончивших ПТУ и прошедших срочную службу в Армии и на флоте.

Общие установки обучения на этом отделении можно представить следующим образом: восстановление утраченных знаний, умений и навыков по курсу математики средней школы и подготовка к вступительному экзамену.

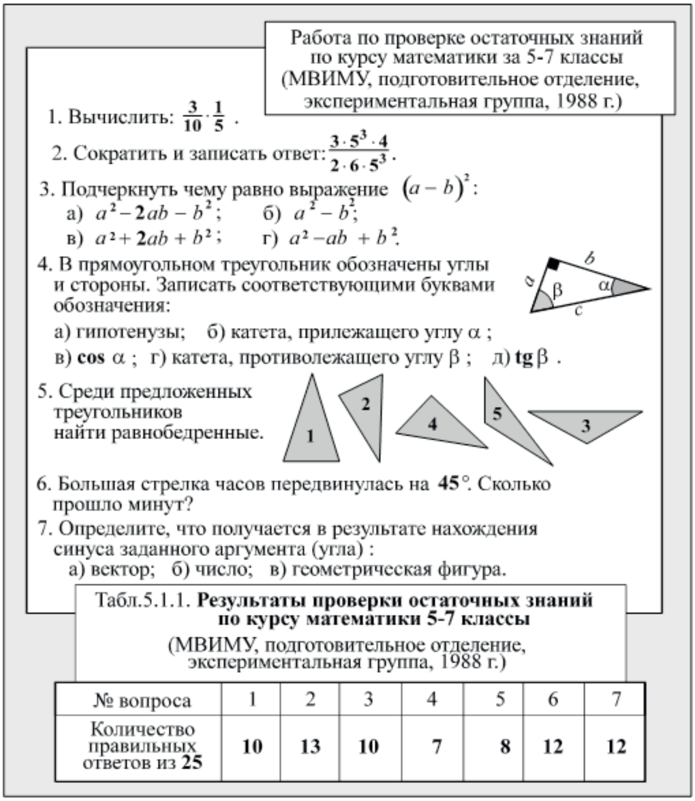
Для выявления фактического уровня подготовки слушателей экспериментальной группы на первых занятиях были проведены проверочные работы, одну из которых мы представляем на рисунке 13.01.

Количество правильных ответов, данных на каждый вопрос, отражено в таблице 5.1.1. – уровень исходной подготовки слушателей по курсу математики 6-8 классов был довольно низок.

В основу обучения слушателей экспериментальной группы была положена организация “живого созерцания” математической инфор-

[1] МВИМУ – Мурманское высшее инженерно-морское училище

мации с упором на развитие навыков анализа структуры формульных и геометрических конструкций, визуального поиска решений задач и визуальных методов усвоения учебной математической теории.



Работа по проверке остаточных знаний по курсу математики за 5-7 классы (МВИМУ, подготовительное отделение, экспериментальная группа, 1988 г.)

1. Вычислить: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$.

2. Сократить и записать ответ: $\frac{\mathbf{3 \cdot 5^3 \cdot 4}}{\mathbf{2 \cdot 6 \cdot 5^3}}$.

3. Подчеркнуть чему равно выражение $(a-b)^2$:
   а) $a^2 - \mathbf{2}ab - b^2$; б) $a^2 - b^2$;
   в) $a^2 + \mathbf{2}ab + b^2$; г) $a^2 - ab + b^2$.

4. В прямоугольном треугольник обозначены углы и стороны. Записать соответствующими буквами обозначения:
   а) гипотенузы; б) катета, прилежащего углу α ;
   в) **cos** α ; г) катета, противолежащего углу β ; д) **tg** β .

5. Среди предложенных треугольников найти равнобедренные.

6. Большая стрелка часов передвинулась на **45**°. Сколько прошло минут?

7. Определите, что получается в результате нахождения синуса заданного аргумента (угла) :
   а) вектор; б) число; в) геометрическая фигура.

Табл.5.1.1. **Результаты проверки остаточных знаний по курсу математики 5-7 классы**
(МВИМУ, подготовительное отделение, экспериментальная группа, 1988 г.)

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7
Количество правильных ответов из **25**	**10**	**13**	**10**	**7**	**8**	**12**	**12**

Рис. 13.01.

Контрольный срез остаточных знаний учащихся экспериментальной группы подготовительного отделения Мурманское высшее инженерно-морское училище

В связи с этим, образование навыков преобразования алгебраических выражений, нахождения решений тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений и неравенств было как бы отодвинуто на второй план.

Работа по организации "живого созерцания" учебной математической информации была начата с первых же занятий.

Усвоение и осознание приемов визуального анализа формульной информации шло чрезвычайно медленно, что значительно ухудшило показатели выполнения первой контрольной работы. Из 25 человек этой группы с ней не справилось 19.

Слушатели остальных групп, в которых выработка навыков преобразования алгебраических выражений была начата с самого начала, написали 1-ю контрольную работу значительно лучше – в среднем по 8-10 неудовлетворительных оценок на группу.

Ситуация начала меняться, как только стало возможным в ходе обучения опираться на стандартные образы. К моменту предпоследней проверки (5-я работа), почти вся группа набрала необходимый темп обучения.

Усвоение стандартных зрительных образов формульного и геометрического характера, образование навыков их применения и преобразования согласно условиям конкретной учебной задачи шло синхронно с изучением соответствующей теоретической части курса.

К этому времени слушатели более или менее овладели следующими навыками визуального анализа и поиска:

- уменьшение области исследования с последующим распространением результатов на весь массив данных,
- определение ориентира и подсказки путем нахождения "одинакового" и соответствующих стандартов,
- формирования догадки через анализ своеобразия отдельных блоков информационного сообщения,

- составления плана работы с предсказанием возможного вида конечного результата.

К примеру, рассматривая задание “Разложить на множители выражение: $x\sqrt{y+3}+y\sqrt{x+3}$”, слушатели в ходе созерцания определили:

для того чтобы придти к искомому результату, необходимо “убрать то, что мешает” (рис. 13.02, в рамке, см. также рис. III.02 на стр. 548 внизу).

$$x\sqrt{y+3}+y\sqrt{x+3}=$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{y+3}=a\Rightarrow y=a^2-3\\ \sqrt{x+3}=b\Rightarrow x=b^2-3\end{array}}$$
$$=ab^2-3a+a^2b-3b=$$

Рис. 13.02.
Оформление результатов анализа формулы

Произвели замену радикалов на символы и, согласно этой замене, осуществили расшифровку – преобразование остальных элементов формулы.

Постепенно пришли к более сложным примерам из этого сборника. Приведем один из них: “Вычислить $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$”.

Рассуждали следующим образом:

а) чтобы можно было вычислить, под каждым из радикалов необходим полный квадрат (рис. 13.03).

$$\sqrt{\underbrace{13+30\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{\underbrace{9+4\sqrt{2}}_{(a+b)^2}}}_{(m+n)^2}}}_{(x+y)^2}}$$

Рис. 13.03.
“Полные” квадраты в сложном радикале

Это умозаключение было получено путем сужения области исследования – рассмотрение всего выражения заменилось анализом “внутреннего” подкоренного вы выражения.

б) для выражения “$\sqrt{9+4\sqrt{2}}$” наиболее вероятно, что $2\,ab=4\sqrt{2}$.

Число $\mathbf{4\sqrt{2}}$ представляет два возможных разложения на множители типа $\mathbf{2}ab$: $\mathbf{2\cdot2\cdot\sqrt{2}=2\cdot1\cdot2\sqrt{2}}$. Нужно проверить каждое из них и подходящее использовать в “погашении” этого радикала.

Дальше действовать аналогичным образом.

Отработка навыков решения тригонометрических уравнений из-за недостатка учебного времени была сведена к минимуму. Однако, благодаря тому, что общие формулы их решения были получены в результате активного визуального поиска, количество соответствующих проверочных работ, выполненных на “4” и “5”, результаты оказались приблизительно равными результатам контрольных групп. Неудовлетворительных оценок экспериментальная группа получила меньше, чем остальные.

Учебные ЗУНы по теме “Показательные и логарифмические уравнения и неравенства” формировались параллельно с лекциями – вполне достаточно было напомнить результаты теории, чтобы сразу приступать к усвоению геометрических и формульных стандартов. Уровень визуального восприятия и анализа формул к этому времени был сформирован, так что многие предпочитали обходиться без промежуточных выкладок, сразу, когда это возможно, выходя на правильный ответ. Так, например, одним из слушателей было предложено устно решать примеры типа:

$$\mathbf{\log_4\log_3\log_2}x=\mathbf{0},$$

используя прием “погашения” элементов формулы: основание мысленно переводилось по правую сторону равенства с одновременным исключением из поля зрения соответствующего “внешнего” символа “$\mathbf{log}$”.

$$\begin{aligned}
\log_4\log_3\log_2 x &= 0\\
\log_3\log_2 x &= 4^0 = 1\\
\log_2 x &= 3^1 = 3\\
x &= 2^3 = 8
\end{aligned}$$

Рис. 13.03.
Поэтапное “погашение” элементов формулы

При предъявлении последующих заданий слушатели перестали сразу браться за авторучки, придерживаясь правила “дольше думать – меньше писать”. В результате удалось не только усвоить содержание данной темы, но и заняться повторением пройденного.

На ряде специально составленных проверочных работ, мы убедились, что действительно “живое созерцание” слушателей формульной и геометрической информации стало значительно организованней и продуктивней. Многие из них могли составлять план необходимых преобразований, грамотно комментировать свои соображения и компактно оформлять свои выкладки.

Вот как прокомментировал ход мысли слушатель экспериментальной группы (ПО74, МВИМУ, 1988 год) А. Стародубцев, решая у доски пример:

“Упростить $\dfrac{9b^{4/3}-a^{3/2}\cdot b^{-2}}{\sqrt{a^{3/2}\cdot b^{-2}+6a^{3/4}\cdot b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\dfrac{b^{2}}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$”.

1. Вынесем общий множитель b^{-2} в числителе и знаменателе первой дроби. Тогда в числителе имеем произведение: $b^{-2}\cdot b^{2}=1$.
2. Остается: $\dfrac{9b^{10/3}-a^{3/2}}{\sqrt{b^{-2}(\quad)}}\cdot\dfrac{1}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$. Возможно следующее:

а) под радикалом второй степени образуется полный квадрат, следовательно, получим модуль,

б) выражения “$9b^{10/3}-a^{3/2}$” (в числителе первой дроби) и “$a^{3/4}-3b^{5/3}$” (в знаменателе второй дроби) сократятся по формуле сокращенного умножения.

3. По-видимому, полученный модуль должен сократиться с оставшимся выражением в числителе.

После зачисления абитуриентов на 1-й курс мы проанализировали работы, выполненные слушателями всего подготовительного отделения (рис. 13.05).

Табл. 5.1.2. **Результаты написания выпускного (вступительного) экзамена по математике**
(МВИМУ, подготовительное отделение, 1988 г.)

	1	2	4	5	6
Группа	Преобразование алгебраического выражения	Тригонометрическое уравнение	Показательное уравнение	Неравенство	Геометрическая задача
Выбор рационального пути решения					
Экспериментальная	**80**	**88**	**76**	**92**	**68**
Контрольная	**64**	**61**	**44**	**87**	**52**
Получение правильного ответа					
Экспериментальная	**76**	**84**	**6**	**68**	**60**
Контрольная	**48**	**59**	**38**	**62**	**50**

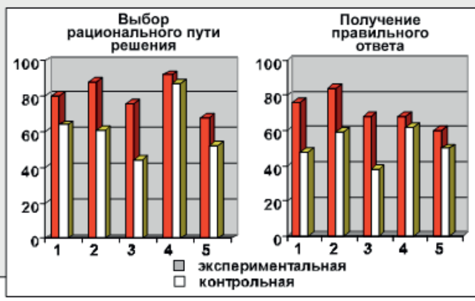


Рис. 13.05.
Результаты (в процентах)
написания выпускного (вступительного) экзамена по математике
учащимися контрольной и экспериментальной групп
подготовительного отделения МВИМУ в 1988 году

Экзаменационная работа состояла из следующих позиций:

1) преобразование алгебраического выражения,

2) решение стандартных тригонометрических уравнений,

3) решение стандартных показательных или логарифмических уравнений,
4) решение неравенств,
5) и стандартной стереометрической задачи.

Основными параметрами сравнения были: рациональность решения и получение правильного конечного результата.

Данные в процентном отношении также отражены в таблице 5.1.2.

13.2.2. Классификаторы

В ходе эксперимента мы постоянно проводили работы, позволяющие констатировать развитие визуального мышления учащихся.

Мы пришли к выводу, что традиционное изучение, например, тригонометрических тем курса, не принесет желаемых результатов. (Подавляющее большинство учащихся этого класса имели за 9 класс среднюю оценку “3”) поэтому работы в данном классе носили в большинстве своем поисковый (исследовательский) характер.

Приведем пример одной из них, составленной автором для 10-го класса в 1989 году (рис. 13.06-13.07).

Каждый пункт этой работы оценивался в баллах так, чтобы можно было

- проследить количеств о мыслительных операций, осуществляемых при ее решении;
- выявить возможности каждого учащегося в их реализации, констатировать пробелы;
- фиксировать (численно) приращения в умении анализировать вербальную, формульную и геометрическую информации.

Исследовательская работа «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ»

ИНСТРУКЦИЯ. Задания можно не переписывать. Порядок выполнения заданий и количество выполненных пунктов к ним могут быть произвольными. Перед решением определенного пункта очередной задачи следует отмечать его номер.

ПОЯСНЕНИЯ. ***Тригонометрическая окружность*** – это окружность с центром в точке О и радиусом, равным единице. ***Косекансом угла*** α называется функция $\mathbf{cosec}\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}\alpha}$

Все задания рассматриваются для угла от $\mathbf{0}$ до $\mathbf{2}\pi$

ЗАДАНИЕ 1. Определите, при каких значениях x верно равенство

(1) $\mathbf{sin}\, x = |\mathbf{sin}\, x|$

(2) $-\mathbf{cos}\, x = |-\mathbf{cos}\, x|$

(3) $-\mathbf{tg}\, x = |\mathbf{tg}\, x|$

ЗАДАНИЕ 2. Найдите решения неравенства

(4) $|\mathbf{sin} x| < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(5) $|\mathbf{cos}\, x| < \dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

(6) $\mathbf{1} < |\mathbf{tg}\, x| < \sqrt{\mathbf{3}}$

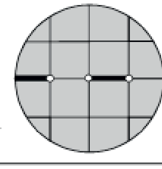
ЗАДАНИЕ 3. Запишите, как изменяется

(7) $\mathbf{cos}\alpha$, если α убывает от π до $\pi/4$

(8) $\mathbf{sin}\alpha$, если α убывает от $\mathbf{3}\pi/\mathbf{2}$ до $\mathbf{4}\pi/\mathbf{3}$

(9) $\mathbf{tg}\alpha$, если α убывает от $\mathbf{2}\pi/\mathbf{3}$ до $\mathbf{5}\pi/\mathbf{6}$

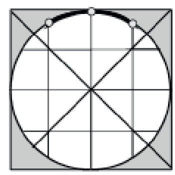
ЗАДАНИЕ 4. На тригонометрической окружности отмечено множество точек, образующих заданное тригонометрическое неравенство.



(10) Запишите формулу этого неравенства

(11) Найдите решения данного неравенства

ЗАДАНИЕ 5. На тригонометрической окружности отмечено множество решений некоторых тригонометрических неравенств. Определите и запишите:



(12) формулу этих решений

(13) неравенство с котангенсом, для которого данное множество является множеством решений

(14) неравенство с синусом, для которого данное множество является множеством решений

(15) неравенство с тангенсом, для которого данное множество является множеством решений

ЗАДАНИЕ 6. Известно, что

$$\mathbf{sin} x + \mathbf{cos} x = k$$

Найдите, чему равно

(16) $\mathbf{sin} x \cdot \mathbf{cos} x$

(17) $\mathbf{sin 2}x$

(18) $(\mathbf{sin}\, x - \mathbf{cos}\, x)^{\mathbf{2}}$

(19) $\mathbf{sin}^{\mathbf{4}} x + \mathbf{cos}^{\mathbf{4}} x$

Рис. 13.06.

Первая страница комплекта заданий (тригонометрия) для проверки развития визуального мышления учащихся

К примеру, пункты “Задания 1” оценивались в баллах следующим образом: позиция (1) – 2 балла,

позиция (2) – 4 балла,

позиция (3) – 5 баллов.

ЗАДАНИЕ 7. Дана функция

$\mathbf{cosec}\,\alpha$

(20) Найдите значение

$\mathbf{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+60^\circ\right)$

(21) Определите, как изменяется косеканс при возрастании угла от $\mathbf{0}$ до $\pi/\mathbf{2}$

(22) Найдите область определения косеканса

(23) Определите знак косеканса при $\alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

ЗАДАНИЕ 8. Известно, что $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

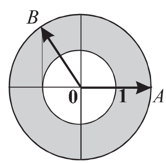
Найдите значение

(24) $\mathbf{tg}\,(-2\alpha)$

(25) $\sin\alpha$

(26) $\mathbf{ctg}\,4\alpha$

ЗАДАНИЕ 9. На рисунке изображен вектор $\overrightarrow{OB}$, образованный вращением вектора $\overrightarrow{OA}$ вокруг точки О. Определите и запишите



(27) какой угол должен описать вектор $\overrightarrow{OB}$, чтобы занять положение вектора $\overrightarrow{OA}$

(28) координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$

ЗАДАНИЕ 10. Для выражения

$\sin^3 x\cdot \mathbf{tg}\,(-x)\cdot|\cos x|\cdot \mathbf{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

(29) определите его знак при $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

(30) найдите его значение при $x=\frac{5\pi}{6}$

(31) найдите его значение при $x=\frac{11\pi}{6}$

ЗАДАНИЕ 11. Известно, что

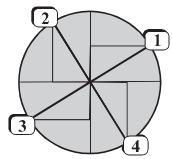
$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

Определите, чему равны выражения

(32) $\cos 2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

(33) $1-\cos 2\alpha$

ЗАДАНИЕ 12. На рисунке построены четыре равных треугольника, меньший катет которых равен $\mathbf{1/2}$, цифрами в рамках отмечены заданные углы. Запишите:



(34) в заданном порядке значения котангенсов этих углов

(35) в порядке возрастания значения

$\cos\boxed{1};\ \mathbf{tg}\,\boxed{2};\ \sin\boxed{3};\ \mathbf{ctg}\,\boxed{4}$

(36) в порядке возрастания значения тангенсов этих углов

(37) в порядке убывания значения функций

$\cos\left(\pi-\boxed{1}\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\boxed{2}\right);\ \mathbf{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\boxed{3}\right)$

ЗАДАНИЕ 13. Известно, что

$\mathbf{ctg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{ctg}\,\alpha\,\mathbf{ctg}\,\beta - 1}{\mathbf{ctg}\,\alpha + \mathbf{ctg}\,\beta}$

Запишите формулы:

(38) $\mathbf{ctg}\,(\alpha-\beta)$

(39) $\mathbf{ctg}\,2\alpha$

(40) $\mathbf{ctg}\,(60^\circ+\beta)$, если $\mathbf{ctg}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Рис. 13.07.

Вторая страница комплекта заданий (тригонометрия) для проверки развития визуального мышления учащихся

Проанализировав решения примеров, учитель фиксировал результаты, отраженные в таблице 5.1.3.

Представим соображения, которыми мы руководствовались при градуировке оценки этих позиций.

Первая задача самая легкая и требует только сопоставления модуля числа со значениями синуса в пределах первой окружности.

Второе задание сложнее, для его выполнения необходимо присовокупить к уже использованным правилам знание свойства модуля числа $|x| = |-x|$ для любых x и согласовать наличие “$-\mathbf{cos}x$” в равенстве $-\mathbf{cos}\,x = |-\mathbf{cos}\,x|$, что противоречит неотрицательности модуля числа.

Третий пример связан с теми же трудностями, поэтому увеличение количества баллов незначительно, однако особенности монотонного поведения тангенса могут остаться вне поля зрения решающего.

Благодаря такому классификатору мы смогли выявить пробелы в знаниях учащихся, уровень навыка работы с текстовой, формульной и геометрической информациями, эвристические возможности и склонности учащихся.

Все это было учтено в дальнейшем процессе обучения.

Мы намеренно “путали” порядок заданий, нарушая принцип “от простого к сложному”. Учащиеся должны были самостоятельно регулировать свои возможности и время решения отдельного задания.

Формирование поисковой деятельности, “запрограммированное” подобными работами, привело к положительным результатам: все учащиеся класса, несмотря на слабую исходную подготовку, поступили в высшие учебные заведения.

В начале октября 1994 года учителем-экспериментатором Н.В. Иванчук был проведен контроль остаточных знаний по геометрии (рис. 13.08, вверху) в 9-а классе школы №28 г. Мурманска (24 человека). По свидетельству учителя материалы данной работы были предложены учащимся без предварительной подготовки и без предупреждения.

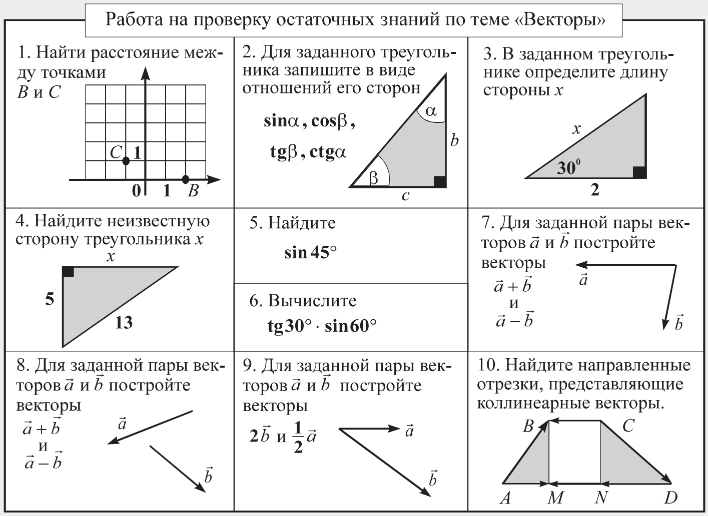


Табл.5.1.3. **Контроль остаточных знаний учащихся 9-а класса** (школа №28 от 06.10.94 г.)

Навыки анализа и преобразования визуальной информации				Вычислительные навыки (измерения геометрических объектов)	
Определение геометрических стандартов		Знание формульных стандартов (формул)		Нахождение (по формуле)	
по рисунку **синуса и косинуса** ***/тангенса и котангенса***	**21/*18***	значений функций важных углов	**18**	расстояния между двумя точками в координатах	**14**
суммы/*разности* векторов, имеющих общее начало	**17/*14***	теоремы Пифагора	**23**	длин сторон прямоугольного треугольника	**10**
суммы/*разности* векторов, имеющих разные начала	**16/*12***	**координат точек** ***/расстояния между двумя точками в координатах***	**22/*20***	значения тригонометрического выражения	**15**

Рис. 13.08.

Содержание (вверху) и результаты (в процентах внизу) написания работы по теме «Векторы» учащимися **экспериментального / *контрольного*** 9-х классов школы №28 г. Мурманска (1994 г.)

В работу было включено 10 заданий по темам «Теорема Пифагора», «Соотношения в прямоугольном треугольнике» «Векторы», которые изучались по специальным визуальным пособиям [144-145].

В двух левых колонках даны результаты остаточных знаний по материалам, изучаемым в 8 классе.

Правая колонка связана результатами вычислений, навыки которых формировались практически с первого класса школы.

Выводы очевидны:

сохранение алгоритмов обработки визуально представленной учебной информации в долгосрочной памяти учащихся оказалось достаточно прочным.

13.3. Единство методов и разнообразие подходов

Готовясь к уроку, учитель ориентируется на базисную программу и рекомендуемое тем или иным авторитетом поурочное планирование. Как правило, это планирование "замкнуто" на прохождение определенного (строго ограниченного) круга понятий и их свойств.

Изучив весь необходимый перечень, учащиеся приступают к следующим разделам, и, переходя от одного к другому, "теряют" полученные представления.

Восстановление утраченных представлений не всегда проходит безболезненно. Противоречие между тем что "Это уже проходили" – со стороны ученика и "Почему же вы этого не знаете?" – со стороны учителя негативно влияет на отношение к предмету, создавая у некоторой части учащихся трудно преодолимый "тормоз" в обучении.

В подобных случаях, на наш взгляд, полезно постоянно уделять внимание восстановлению утраченных знаний и навыков, так, чтобы интерес к предмету поддерживался постоянно.

13.3.1. Исследованные вариации

Мы полагали, что при обучении детей и подростков следует акцентировать внимание не на запоминании, а на конструировании определенного образа с тем, чтобы этот образ (и сопутствующие ему знания) быстро и легко восстанавливались, создавая непрерывную “канву” для освоения программного материала.

Главным инструментом был постоянный учебный поиск.

Рассматривая теоретический материал как *задачи,* учащиеся были освобождены от директивы “выучить и запомнить”. То, что в дальнейшем оказывалось “теорией”, в настоящий момент выступало всего лишь как очередное практическое поисковое задание. Приведем примеры.

Программа по математике восьмого класса общеобразовательной школы достаточно обширна, поэтому пробелы в знаниях, умениях и навыках учащихся ведут к тому, что их успешное обучение в старших классах становится затруднительным.

При переходе в другую школу, лицей или гимназию такие ученики страдают особенно сильно. Они путаются в понятиях: противоположные и обратные числа, делимое и делитель, испытывают затруднения при нахождении и вынесении за скобки общего множителя, с ошибками применяют формулы сокращенного умножения, имеют нечеткое представление о степенях.

Предшествующие неудачи обучения могут привести к тому, что им придется прервать обучение в выбранном заведении. Именно поэтому мы обратили серьезное внимание на проблему восстановления утраченных знаний и навыков.

Например, тема “Действия над алгебраическими дробями” занимает значительное количество времени в школьном курсе 7 и 8 классов. Тем не менее, большая часть учеников постоянно путается и ошибается, огорчая учителя и получая за свою работу плохие оценки. Не помогает и то, что большинство задач школьных учебников ориентировано на периодическое восстановление и закрепление этих навыков.

Проведем аналог.

Бытует мнение, что “только многократно закрепленные навыки письма и чтения могут создать необходимую основу для грамотного письма”. На наш взгляд данное положение не совсем верно. Вспомним кадр из знаменитого «Ералаша» – сто раз писал “Ушел” в тетради, а в заключение на доске – “Пошол домой”.

Пример 1. Две модели урока на восстановление утраченных знаний и навыков составлены для двух классов, резко отличающихся по уровню математической подготовки (учителя Н.В. Иванчук и И.Т. Емелина).

Первый из них разработан для “слабого” класса, второй – для класса с учениками, имеющими достаточно прочные знаний по курсу математики 8-летней школы. Естественно, что дидактическая направленность и методическое обеспечение этих уроков значительно отличались друг от друга.

При повторении и закреплении пройденного многие учителя, наряду со стандартными примерами, вводят задания повышенной сложности, ожидая определенного прироста умений и навыков. Однако в большинстве случаев этот прогноз не оправдывается. Повторение зачастую оказывается скучным, и ученики неохотно решают надоевшие им примеры и задачи. Из этих соображений второй комплект был составлен после того, как выяснилось, что даже у сильных учеников сокращение дробных выражений и применение формул сокращенного умножения постоянно вызывают затруднения.

В приложении на странице 597-598 представлены материалы, предназначенные для учеников, имеющих недостаточную “технику” алгебраических преобразований (рис. V.11-V.12,).

Выделим два наиболее существенных момента этого урока.

Первый из них. В каждом отдельном случае полезно обратить внимание на следующие вопросы: сколько примеров нужно решить?

сколько действий нужно осуществить?

можно ли устно решить этот пример?

Второй момент – тест №9 (рис. 13.09) – также оказался весьма поучительным.

Тест **9** при a=**2**, b=**3**	Умножьте дробь на дробь и найдите результат								
	1	**2**	**3**	**1/2**	**1/3**	**2/3**	**3/2**	**6**	**1/6**
$\frac{a}{a^2}\cdot\frac{b^2}{b^2}$									
$\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b}{a^2}$									
…………………………………									

Рис. 13.09.

Тест с альтернативой в подходе к работе с ним

Обычно ученики сначала подставляют цифры, а только потом приступают к преобразованиям.

Сравнив возможные пути решения, легко придти к выводу: полезнее сначала упростить алгебраическую дробь, а затем уже находить ее значение при определенных условиях.

Упомянем особенность урока во втором (более сильном классе). После непродолжительного самостоятельного изучения информационной страницы “Необычное произведение” (рис. 13.10) ученикам предлагается приступить к примерам-тренажерам (рис. 13.11).

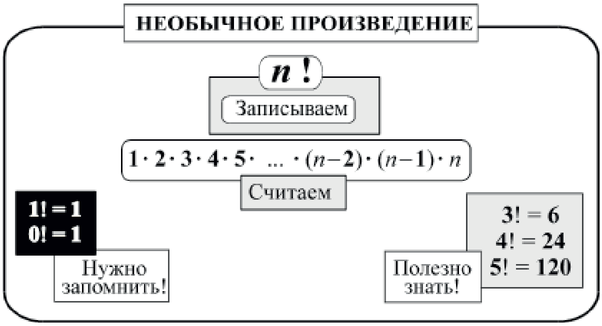


Рис. 13.10.

Введение понятия факториал

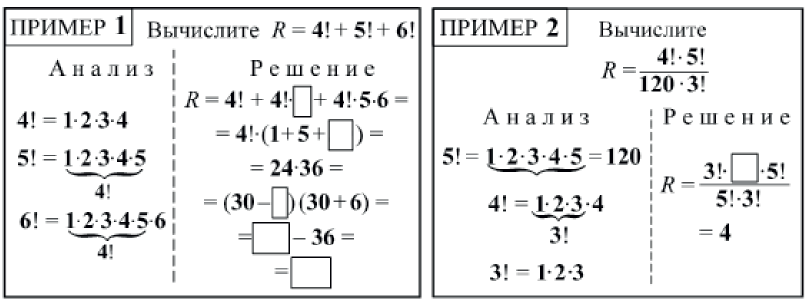


Рис. 13.11.

Примеры-тренажёры с факториалами

Первый пример (рис. 13.11.1) привлекает внимание к возможным сочетаниям выражений, внешне содержащих одни и те же числовые величины.

Второй пример (рис. 13.11.2) помогает увидеть возможность выражения n-факториал через $(n-1)$-факториал.

Следующие упражнения закрепляют технику расшифровки нового символа и т.д., что позволяет перейти непосредственно к арифметическим действиям над алгебраическими дробями (см. рис. V.13-V.14 на стр. 599-600).

Пример 2. Обсудим визуальные материалы, разработанные специально для двух экспериментальных классов. “Вариации на одну тему” были продемонстрированы в марте 1995 года на двух уроках в 6-а “обычном” и 6-б “музыкальном” классах школы №34 г. Мурманска (учитель Е.А. Струнникова).

Разрабатывая визуальные уроки “Деление чисел с разными знаками”, мы ориентировались как на уровни математической подготовки класса, так и на их общий интеллект.

В приложении на рисунках V.07-V.08 мы представляем материалы для музыкального класса (стр. 593-594), на рис. V.09-V.010 – для 6-а (стр. 595-596).

Эти уроки отличаются не только по уровню сложности применяемых визуальных дидактических материалов, но и по “профильному” подходу к этим материалам.

Дело в том, что если в 6-а классе учатся дети, имеющие достаточно хорошую математическую базу и ориентированные (в большинстве) на продолжение обучения в старшей школе, то в 6-б классе картина совершенно иная.

Это “музыкальный” класс – наряду с общеобразовательными дисциплинами его ученики с первого класса занимаются предметами, входящими в программу музыкальной школы. Время, отводимое на математические дисциплины, сильно сокращено, домашние задания приходится также задавать в сокращенном объеме. В результате основные математические навыки формируются недостаточно прочно.

Разработка визуальных уроков “Деление чисел с разными знаками”, осуществлялась с ориентацией на уровни математической подготовки классов и на их общий интеллект. Оба урока, имея общую структуру, состояли из следующих этапов: повторение правил умножения чисел с разными знаками; введение нового материала; формирование умений и навыков; обобщение.

В обоих классах в начале урока были предложены информационные схемы (рис. 13.12 и рис. 13.13).

Однако дидактическая направленность в них была различной.

На рисунке 13.12 страница “Умножение и деление чисел с разными знаками” (для 6-а класса) представляет собой визуальную задачу, анализируя которую, ученики обсуждают переходы и заполняют пропуски. После проделанной работы эта схема превращается в их личный справочник, которым они имеют право пользоваться постоянно.

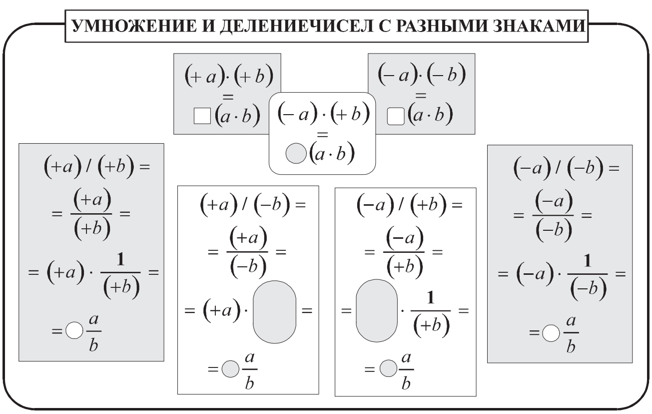


Рис. 13.12.

Введение в тему «Умножение и деление чисел с разными знаками» в 6 классе, изучающем математику в стандартных условиях

Информационная схема “Деление и умножение чисел с разными знаками” (рис.13.13) внешне более проста. Тем не менее, ученики должны сопоставить информацию, содержащуюся в ее блоках, осуществить переход от зрительного восприятия ее данных к абстрактному обобщению полученных результатов.

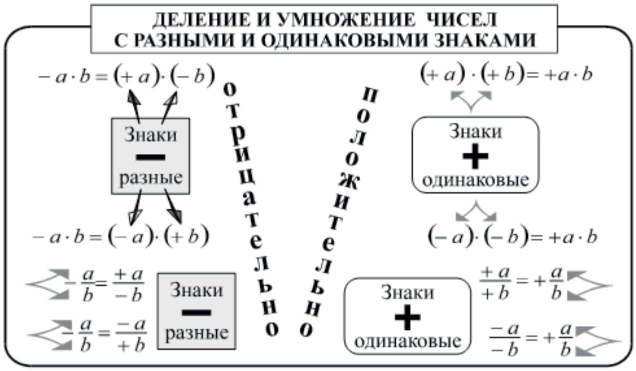


Рис. 13.13.

Введение в тему «Умножение и деление чисел с разными знаками» в 6 классе, изучающем математику при сокращенном количестве часов

“Параллельные” примеры (рис. 13.14), прилагаемые к этим схемам, также обладают различной направленностью и разным уровнем сложности.

После проведения учебных исследований, приведших к определенному выводу, ученикам предлагается решить достаточно трудные задачи (рис. 13.15).

В более сильном классе создается проблемная ситуация, которая разрешается на рис. 13.15.А (см. также рис. V.10 на стр. 596).

У “музыкантов” 6-б класса акцент ставится на геометрическую интерпретацию производимых действий (рис. 13.15.Б, см. также рис. V.08.4-5 на стр. 594).

Таким образом, основное инвариантное требование программы полностью соблюдается. Однако задачи, прилагаемые к этой схеме совершенно иные. Они имеют другое содержание и другой уровень, обладают иной “эмоциональной” направленностью.

Серия **А**	Определите знак выражения	
1	$1\cdot(-2)+3\cdot(-4)+\ldots+49\cdot(-50)$	
	....	
3	$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot\frac{1}{50}\cdot\left(-\frac{1}{61}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{100}$	
	....	
5	$\frac{2\cdot(-3)\cdot4\cdot\ldots(-97)\cdot98\cdot(-99)}{1\cdot(-2)\cdot3\cdot\ldots\cdot97\cdot(-98)\cdot99}$	

Серия **Б**	Упростите выражение
1	$(-1)^2+1^2=$
	....
3	$(-3)^2+(-3^2)+(-3)=$
	....
5	$(-1)-(-1)^2-(-1^2)-(-1^3)-(-1)^3=$

Рис. 13.14.

Задания для 6 классов:

изучающих математику в стандартных условиях (**А**),

изучающих математику при сокращенном количестве часов (**Б**)

Рис. 13.15.

Задания повышенной сложности для 6 классов:

изучающих математику в стандартных условиях (**А**),

изучающих математику при сокращенном количестве часов (**Б**)

По свидетельству учителя:

“… реакция детей на подобную форму работы положительна:

“и писать мало и все перед глазами”.

Практически с заданиями справляются все ... каждый может решить одну задачу быстрее, другую медленнее. Можно попросить помощи у учителя при решении трудной задачи”.

Пример 3. Вопросы разноуровнего обучения в одном и том же классе волнуют современных учителей, поскольку такое обучение еще недостаточно обеспечено соответствующими дидактическими материалами.

Здесь предлагается модель “двухуровневого” итогового занятия, реализованного в 1995 году в 9 классе Мурманского морского лицея (преподаватель Н.Г. Неделько).

На практических занятиях данный класс делится на неравные по возможностям и математической подготовке группы. Поэтому хотя материалы для урока были составлены так, чтобы каждая из них получила свой комплект задач (рис. V.23-V.24 на стр. 609-610), в обеих вариантах мы ввели “параллельные” задания (рис.13.16 и рис. 13.17).

Так, например, “Задача о дельфинах” (рис. 13.16) отличается видом, оформлением и уровнем сложности вопроса к ней.

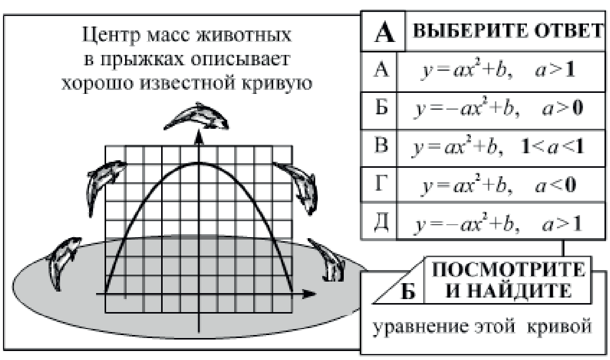


Рис. 13.16.

Варианты “Задачи о дельфине” для учащихся 8-х классов
с высоким (**А**) и достаточным (**Б**) уровнями подготовки

В первом (более легком варианте **Б**) список ответов “наталкивает” учащегося на правильный ход мысли, во втором (вариант **А**) – все преобразования учащийся должен осуществить совершенно самостоятельно, ориентируясь только на образ квадратичной функции, представляющей траекторию прыжка животного.

Задачи “Посмотрите и найдите” (рис. 13.17) также не совпадают. В одном случае (Б) – нужно проанализировать хорошо известный образ параболы, во втором (**А**) – следует провести серьезный и глубокий анализ формулы, позволяющий определить новые свойства квадратичной функции и т.д.

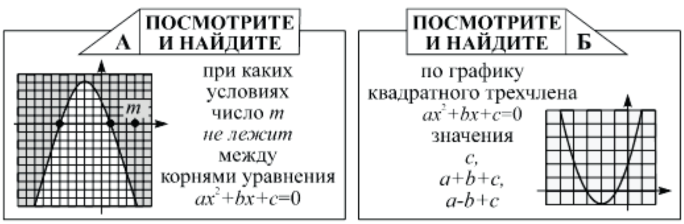


Рис. 13.17.
Задания «Посмотрите и найдите» для учащихся 8-х классов
с высоким (**А**) и достаточным (**Б**) уровнями подготовки

Пример 4. Модели уроков преподавателей того же лицея Е.Б. Сверчковой (урок **А**) и Т.М. Карасевой (урок **Б**) демонстрируют разнообразие учительских взглядов и склонностей при прохождении одной и той же темы.

В основу урока **А** “Решение квадратного уравнения с модулем” положены анализ и преобразование формулы, определение ОДЗ для переменной в выражении с модулем (рис. 13.18) и построение алгоритма решения квадратного уравнения с модулем (см. также рис. V.19-V.20 на стр. 605-606).

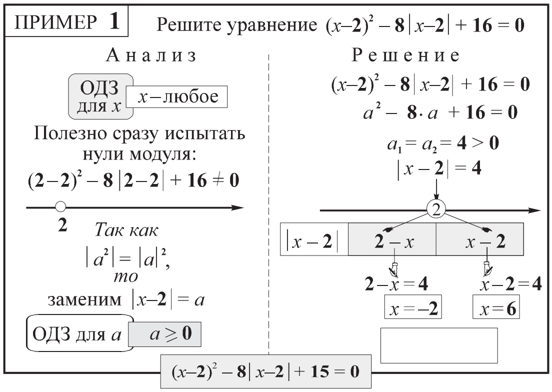


Рис. 13.18.

Анализ и преобразование формулы
при решении уравнения с модулем

Урок **Б** «Влияние параметров функции на преобразование ее графика» (преподаватель Т.М. Карасёва) начинается с повторения.

Ориентируясь на одноименную информационную схему, нужно выполнить тесты (рис. 13.19), которые позволяют эффективно проверить, насколько хорошо ученики ориентируются в значениях параметров функции (см. рис. III.23, стр. 569). Структура данных тестов предполагает две задачи: проанализировать формулу (рис. 13.19.1) и график (рис. 13.19.2) квадратичной функции.

Задания “Посмотрите и определите” (рис. 13.20), предназначены для закрепления, позволяют четко разграничить понятие функции и ее графика, формировать умение находить аналитическое задание квадратичной функции по ее визуальному образу, составлять уравнение оси симметрии и исследовать функцию на монотонность.

На следующем этапе решаются задания серии (см. также рис. V.21.9-10 на стр. 607).В завершение урока при выполнении заданий матриц (рис. 13.21) отрабатываются практические навыки.

Тест 1	Определите операцию,которуюнужно произвести над графиком функции $f(x)=x^2$							
при построении графика функции	сжатие по		растяжение по		параллельный перенос			
	оси X	оси Y	оси X	оси Y	вправо	влево	вниз	вверх
$y=2(x+2)^2-2$								
$y=(2x-2)^2+2$								
....	.....	.....	......	.....	.....	....	....	....

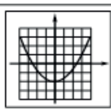
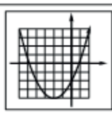
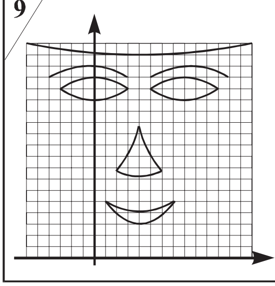
Тест 2	Определите операцию, которуюпроизвели над графиком функции $f(x)=x^2$							
при построении графика функции	сжатие по		растяжение по		параллельный перенос			
	оси X	оси Y	оси X	оси Y	вправо	влево	вниз	вверх
								
								
....	.....	.....	......	.....	.....	....	....	.....

Рис. 13.19.

Формулы (1) и рисунки (2) с общим вопросом и набором ответов в качестве объектов анализа содержания тестов

ПОСМОТРИТЕИ ОПРЕДЕЛИТЕ

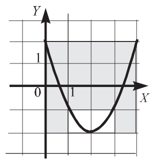
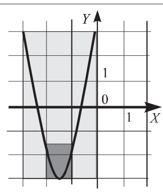
9



А	количество всех парабол, составляющих портрет	
Б	количество парабол, симметричных относительно оси *ОУ*	
В	количество пар симметричных парабол	
Г	уравнение общей оси симметрии портрета	
Д	"формулу" нижней губы, приняв одно деление за **1**	

Рис. 13.20.

Комплект визуальных задач, построенных на едином зрительном образе сложной структуры

МАТРИЦА **5**	По графику функции определите и запишите				
Преобразования графика функции $y = x^2$	ординату вершины кривой	абсциссу точки пересечения графика с осью OX	ординату точки пересечения графика с осью OY	формулу функции	решение неравенства $y < \mathbf{-1}$
					
• • • • • • • • • •	• • • • • • •	• • • • • • •	• • • • • • •	• • • • • • •	• • • • • • • •
					

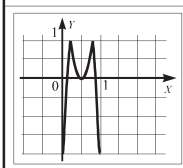
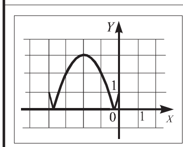
МАТРИЦА **6**	По графику функции определите и запишите				
Исследование квадратичной функции с модулем по ее графику	значения x, при которых $y = \mathbf{0}$	значения x, при которых $y > \mathbf{0}$	значения x, при которых $y < \mathbf{0}$	интервал возрастания функции	точку экстремума и его значение
					
• • • • • • • • • • •	• • • • • •	• • • • • •	• • • • • •	• • • • • • • •	• • • • • • • •
					

Рис. 13.21. Фрагмент матриц (первые и последние строки) на анализ графика квадратичной функции: стандартные задания (5), задания повышенной сложности (6)

Полный вариант сценариев этих занятий дан в приложении, на страницах 607-608 (рис. V.21-V.22).

13.3.2. Лабораторные работы

Не секрет, что многие современные дети, пристрастившиеся к телевидению и компьютерам, не читают и не хотят читать. Великолепные книги классиков прошлых времен им неинтересны, – не хватает общей культуры и интеллекта. Еще более остро обстоит дело с чтением учебной и специальной литературы.

Пассивность школьников можно “погасить” вовлечением их в активный мыслительный процесс, материалом для которого могут служить различного вида проблемные ситуации, деловые игры и лабораторные работы, основанные на образцах специальной и популярной литературы.

Одним из возможных путей преодоления негативного отношения наших учеников к чтению может явиться вспомогательное средство – визуализация отдельных фрагментов учебного текста.

Пример 5. В качестве примера предлагаем выдержки из книги “Выгода и начала анализа”. Иллюстрации к тексту заменены специальным комплектом иллюстраций, на основе которого строился “бумажный” сценарий соответствующего визуального урока, реализованного преподавателем математики Мурманского морского лицея Т.В. Ярутки-ной в 1994 году [24].

“... Мы специально не останавливаемся на понятии “выгода”, которое, как правило, понимается всеми одинаково ... здесь будем считать выгоду начальным понятием, не требующим определения. Нестабильность курса рубля часто затрудняет приведение примеров, которые сохраняли бы свое правдоподобие более чем на один месяц.

Поэтому в затруднительных случаях мы будем использовать условную денежную единицу – один воарт (***ва)***.

1.1. Группа старшеклассников решила заняться бизнесом по розничной продаже популярных сигарет “Угроза здоровью”. Оптовая закупка сигарет производится блоками по цене $P_o = \mathbf{30}$ *ва* за одну пачку. Экспериментально установлена зависимость между розничной ценой пачки сигарет и количеством пачек, продаваемых в день (рис. 13.22). По какой цене следует продавать сигареты?

Себестоимость (всего в сутки)	Закупочная цена одной пачки	Количество проданных пачек в день	Розничная цена одной пачки	Суточная выручка	Суточная прибыль
ва/сут	*ва/шт*	*шт/сут*	*ва/сут*	*ва/шт*	*ва/сут*
$p_0\, n_k$	p_0	n_k	p_k	$p_k\, n_k$	$П_k$
3000	30	100	40	4000	1000
2100	30	70	60	4200	2100
1200	30	40	80	3200	2000
300	30	10	100	1000	700

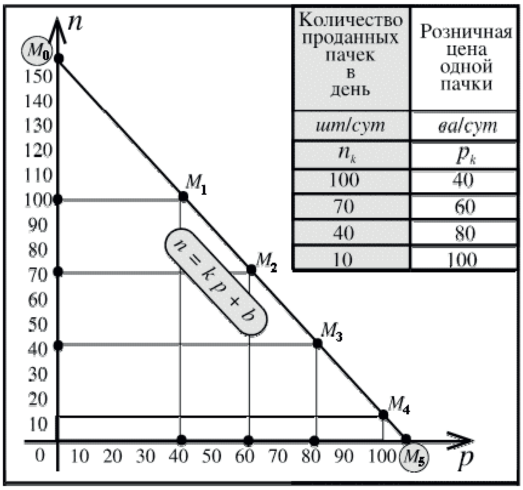
Размеры оборотных средств - себестоимость проданного товара для каждой розничной цены в сутки

Оптимальная розничная цена, доставляющая максимальную суточную прибыль

Максимальная суточная прибыль

Рис. 13.22.
Экспериментальные данные
для построения графика зависимости суточной прибыли
от розничной цены сигарет “Угроза здоровью”

Прежде чем ответить на этот вопрос, сделаем кое-какие подсчеты. Суточную выручку найдем как произведение $p_k n_k$, себестоимость проданного товара – как произведение $p_o n_o = \mathbf{30}\, n_k$, и, наконец, чистую прибыль в сутки найдем как разность между доходом и себестоимостью: $П_k = p_k n_k - p_o n_k$. Из последнего столбца видно, что оптимальная розничная цена, доставляющая максимальную суточную прибыль продавцу, находится где-то в окрестности **60** *ва.* Чтобы ее уточнить, построим график зависимости суточной прибыли от розничной цены: $\Pi = \Pi(\rho)$ (рис. 13.23). Как видим, наибольшую суточную прибыль дает продажа в розницу примерно по **68-70** *ва* за пачку “Угрозы”. Это решение получено графочисленным методом.



Количество проданных пачек в день	Розничная цена одной пачки
шт/сут	*ва/сут*
n_k	p_k
100	40
70	60
40	80
10	100

Рис. 13.23.
График зависимости суточной прибыли
от розничной цены сигарет “Угроза здоровью”

1.2. Попробуем найти аналитическое решение. Вначале построим график зависимости количества продаваемых пачек сигарет в сутки от их розничной цены $n = n(p)$. Точки, нанесенные на график по двум первым строкам таблицы, допускают предположение о том, что зависимость $n = n(p)$ есть уравнение прямой линии. Будем искать его в виде $n = k\,p + b$ (1.1).

Подставив, например, координаты точек M_1 и M_4 в формулу (1.1) получаем конкретный вид уравнения (1.1):

$$n = -3/2p + 160 \quad (1.2).$$

Отметим, что точки M_0 и M_5 на графике (рис.13.23) имеют определенный экономический смысл (какой?).

Подставив в систему координаты точек M_2 и M_3, убеждаемся, что эти точки также принадлежат прямой (1.2), обращая уравнение (1.2) в тождество.

Чистая дневная прибыль *П* составляет разность между дневной выручкой и дневной себестоимостью (рис. 13.25).

Как видим, суточная прибыль *П* меняется по параболическому закону. Ее график – парабола “рожками” вниз (рис. 13.26).

$$\boxed{n = k\cdot p + b}$$

$$M_1(40;\ 100) \Longrightarrow 100 = k\cdot 40 + b$$
$$M_2(60;\ 70) \Longrightarrow 70 = k\cdot 60 + b \quad \ominus$$
$$30 = k\cdot(-20)$$
$$k = \frac{3}{2}$$
$$100 = (-\frac{3}{2})p + b$$
$$b = 160$$

Дневная выручка $p\cdot n = p\,(-\frac{3}{2}p + 160)$ *ва*

Дневная себестоимость $p_0\cdot n = 30\,(-\frac{3}{2}p + 160)$ *ва*

Рис. 13.24.
Подсчеты для построения графика зависимости от продажи сигарет “Угроза здоровью”

Чистая дневная прибыль $П = p\cdot n - p_0\cdot n =$
$$= p(-\frac{3}{2}p + 160) - 30(-\frac{3}{2}p + 160) =$$
$$= -\ p^2 + 160\,p + \frac{60}{2}p - 4800$$

Суточная прибыль $П = \underbrace{-\ p^2 + 205\,p - 4800}_{\text{Параболический закон}}$ (*ва*)

Рис. 13.25.
Вывод значения дневной прибыли при продаже сигарет “Угроза здоровью”

Найдем максимум функции *П* по известным правилам:

$$П' = -3p + 205 = 0;\ p = p_{opt} = \frac{205}{3} = 68\frac{1}{3} \ (ва/шт).$$

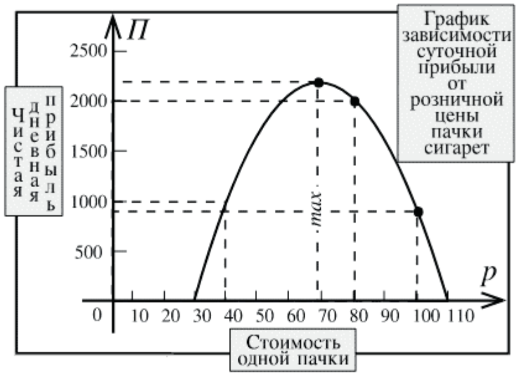


Рис. 13.26. График изменения суточной прибыли от продажи сигарет “Угроза здоровью”

Максимальная прибыль (*ва*) составляет:

$$\Pi_{\max} = -\frac{2}{3}\left(\frac{205}{3}\right)^2 + 205\cdot\frac{205}{3} - 4800 = 2204\frac{1}{6} \quad (1.3).$$

Если округлить оптимальную розничную цену до **68** *ва*,

то прибыль в сутки составит $-\frac{2}{3}68^2 + 205\cdot 68 - 4800 = 2204$ *ва*.

Потеря невелика. Мы получили формально точный ответ, однако он является точным постольку, поскольку точной является исходная информация, с получением которой, как правило, дело обстоит значительно сложнее.

1.3. Сейчас самое время ответить на следующий вопрос: что произойдет с оптимальной ценой, если удастся снизить себестоимость (закупочную цену) товара? Она повысится, понизится или останется прежней, т.е. $68\frac{1}{3}$ (*ва/шт*), за пачку?

Впрочем, не будем гадать. Пусть, например, новая оптовая цена пачки сигарет **10** *ва/шт*.

Закономерность (1.2) при продаже сигарет в родном городе бизнесменов сохранилась (там еще курить пока не бросают) ... Поэтому чистая прибыль в сутки теперь составит

$$\Pi = p\left(-\frac{3}{2}p + 160\right) - 10\left(-\frac{3}{2}p + 160\right) = -\frac{3}{2}p^2 + 175p - 160 \ \textit{ва/сут.}$$

Решив уравнение $\Pi' = 0$, получим новую оптимальную цену $\frac{175}{3} = 58\frac{1}{3}$ *ва/шт* (проверьте). Этой новой оптимальной цене соответствует новая максимальная суточная прибыль:

$$\Pi_{\max} = -\frac{3}{2}\left(\frac{175}{3}\right)^2 + 175 \cdot \frac{175}{3} - 1600 = 3504\frac{1}{6} \ (\textit{ва/сут})$$

Как видим, выиграли обе стороны: и покупатель (он платит $58\frac{1}{3}$ *ва* вместо $\frac{205}{3} = 68\frac{1}{3}$ *ва*) и продавец, чья суточная прибыль выросла от $2204\frac{1}{3}$ *ва/сут* до $3504\frac{1}{6}$.

График $\Pi = \Pi(\rho)$ в случае снижения себестоимости теперь выглядит так, как на рисунке 13.27.

Итак, этот пример убеждает в том, что снижение себестоимости объективно является социально значимым действием, выгодным и покупателю и продавцу, по крайней мере, если имеет место линейная зависимость числа проданных единиц товара от его розничной цены".

На основе данного текста были составлены материалы для лабораторной работы на уроке математики в 10 электромеханическом классе Мурманского морского лицея, который состоялся в марте 1994 года (см. приложение, стр. 615-616, рис. V.29-V.30).

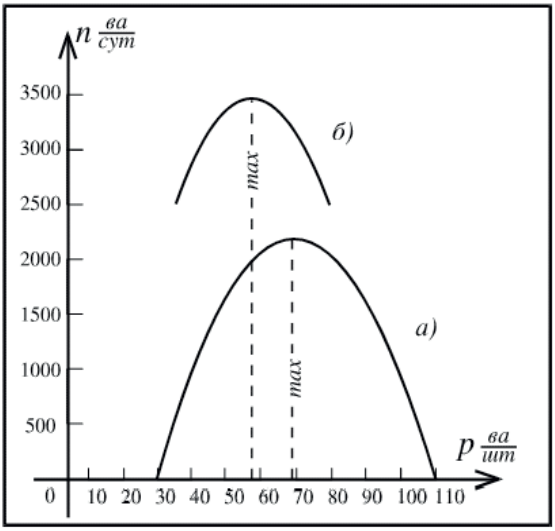


Рис. 13.27.

График снижения себестоимости
пачки сигарет "Угроза здоровью"

За короткий срок (два школьных урока) лицеисты убедились, что максимальная прибыль не зависит от цены товара, устанавливаемой по желанию продавца.

Выполнив данную лабораторную работу, они поняли также, что исследование функции с помощью производной, результативнее, чем привычные графочисленные методы.

Таким образом, видно, что диапазон материалов, на основе которых можно организовать учебные исследования с сопутствующими полезными результатами, достаточно широк.

Приведем еще один конкретный пример.

Пример 6. Многие учащиеся 10-11 классов затрудняются в нахождении производной и первообразной степенной функции.

Причин этому множество: низкая техника преобразования алгебраических дробей, отсутствие навыков вынесения целого за знак радикала, неумение применять готовую формулу и т.д.

В школьных и вузовских учебниках таблица производных и таблица первообразных даются отдельно традиционно.

На основе объединения их (“Производная–функция–первообразная”, рис. 13.28, слева) можно организовать учебные исследования, приводящие к расширению этого справочника (рис. 13.28, см. также рис. III.27-III.28 на стр. 573-574).

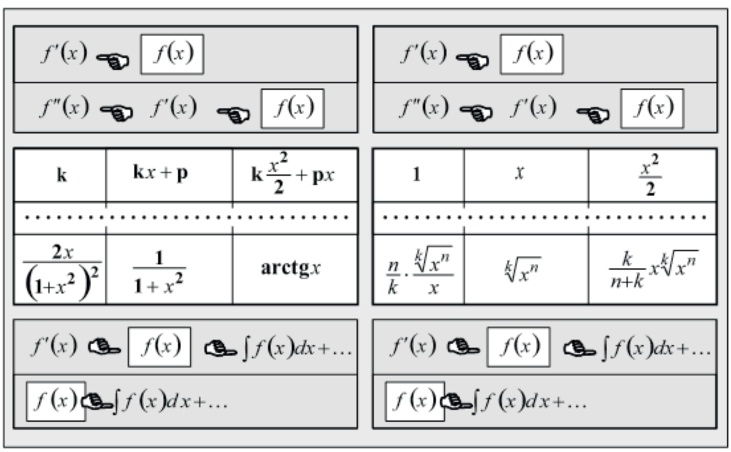


Рис. 13.28.
Фрагмент таблицы
“Производная–функция–первообразная” (слева),
частный вариант фрагмента этой таблицы (справа)

13.3.3. Работа учителей

Новые “инструменты” преподавания, обеспечивающие проведение визуального урока, требуют нового подхода – смены акцента в преподавании различных дисциплин.

Смена акцента в обучении необходима еще и потому, что в последнее время наблюдается усиление несогласования математической подготовки учащихся с содержанием различных дисциплин – отсутствие учета знаний и навыков учащихся приводит к непродуктивному обучению.

Черчение введено в учебные планы 7-х и 8-х классов школы, тогда как программа этого предмета построена фактически на материале геометрии 9-11 классов.

Естественно, что обучение построению проекций пространственных объектов проходит вхолостую и т.д.

Примеры по химии и географии уже предлагались на страницах 20 и 60 соответственно.

Даем еще один пример.

Пример 7. На уроках химии 8-го класса ученики начинают составлять уравнения химических реакций.

Методика нахождение коэффициентов в уравнениях реагирующих и получающихся веществ основана на определении наименьшего общего кратного. В то же время преподаватели химии практически не используют эти понятия в своих объяснениях, в результате учащиеся затрудняются в составлении уравнений.

Поэтому нами были разработаны специальные материалы, которые автором данного исследования изготавливались строго по заказу учителя, участвующего в эксперименте.

Например, как на рисунке 13.29 (вверху) для определения состава химических элементов и на рисунке 13.30 (внизу) для определения “коэффициента участия” их в химических реакциях (см. стр. 617-620, рис. V.31-V.34).

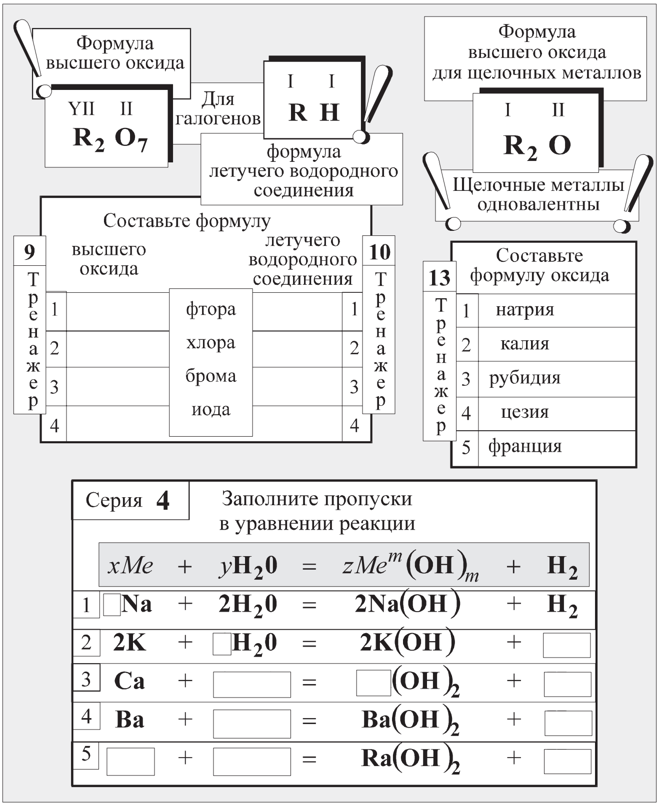


Рис. 13.29.

Упражнения на составление с помощью подсказки формул химических элементов

После проведения занятий, итоги их применения обсуждались и корректировались совместно группой учителей, ведущих данный предмет в других школах.

В результате выявилось еще одно направление нашего исследования – коллективное творчество учителей различных школ. Несмотря на то, что данное направление выходит за рамки настоящего исследования, ниже (и в приложении) мы предлагаем образцы педагогического творчества с краткими комментариями учителя, заказавшего и реализовавшего соответствующий блок.

Пример 8. Для начала приведем выдержки из отчета молодого учителя сельской школы Т.Г. Ивановой (уроки в 4 классе по темам «Величины» (рис. 13.30) и «Глагол прошедшего времени» (см. приложение, стр. 587-590, рис. V.34-V.04).

Рис. 13.30.

Фрагменты визуальных дидактических материалов для 4 класса: математика (1-2), русский язык (3-4)

“Принцип наглядности в обучении является ведущим в начальной школе. При обобщении, повторении темы визуальные задания помогли объединить обширный по объему теоретический материал в одну информационную схему, углубить знания. Из всего материала перед учениками возникла единая картина с основными понятиями.

Материал запомнился очень хорошо. Особенно удачным оказалось то, что и обобщение, и закрепление прошло быстро, продуктивно и никто “не потерялся”, все работали на одном дыхании. Последующая проверка знаний показала, что материал по теме “Величины” (рис. 13.30.1-2) *усвоен прочно. С контрольной работой справились все в классе, в котором без 2-3 двоек никогда не обходилось. Учащиеся были очень довольны и, когда на следующих уроках необходимо было вспомнить величины, они делали это быстро и уверенно, будто картинка вставала перед глазами.*

На уроке русского языка визуальные задания (рис. 13.30.3-4) *использовались при изучении нового материала по темам “Глаголы настоящего и прошедшего времени”. И теперь перед глазами учеников были знакомые упражнения (тренажеры, серии и т.п.), которые подготовили детей к самостоятельным выводам о признаках, способе образования и правописании глаголов прошедшего времени. Большой объем информации не расплывался, не терялся в процессе урока, а постоянно находился перед глазами. Это облегчает процесс учения, и дети особенно это ценят”.*

На следующий год в 5-м классе подобная работа в данном классе продолжалась на уроках математики и русского языка. Учитель Г.Н. Степанова провела тему «Род имени существительного» полностью по визуальным комплектам, фрагменты которых даны в приложении (рис. II.12 на стр. 516, рис. II.17 на стр.521, рис. V.03 на стр. 589.

“Работа идет очень быстро. Ученики учатся анализировать и классифицировать орфографические, морфологические правила. Происходит и фронтальная проработка изучаемого материала. Упражнения с рисунками помогают развивать логическое мышление, память, хорошо усвоить изучаемое. Визуальные уроки по русскому языку позволяют решать проблему формирования грамотной устной и письменной речи. С самостоятельной работой справились на “4” и “5” почти все ученики.

Вот отзывы пятиклассников:

- *Я сегодня хорошо запомнила все, что мы изучали, потому что интересные были тренажеры и рисунки”* (М. Лукьянова).
- *Я посмотрел на задание с рисунками повара и легко запомнил и род, и число имени существительного. Рисунок один, а существительных много. Повар – м. р., 2 скл., ед. ч.; шляпа – ж. р., 1 скл., ед. ч. и т.д.* (Д. Малец).

Аналогичные примеры к урокам немецкого языка также можно найти в приложении на страницах 522, 526, 529-530, 537-538, к урокам химии и биологии – на страницах 617-622.

Пример 9. “Неудачи обучения”, связанные с непониманием или незнанием основных принципов состава и строения химического вещества, могут явиться причиной негативного отношения к предмету. Это становится наиболее очевидно, когда учитель сталкивается с ситуацией, столь типичной для сельской школы: в одном и том же классе обучаются дети с большой разницей в интеллекте и умственных способностях.

Учителями разных школ (Л.П. Шамоновой и Е.Н. Тенюковой) были составлены дидактические материалы к нескольким темам курса химии 8-го класса. При их разработке мы уделили особое внимание следующим моментам:

- формирование навыков составления химических формул (рис. 13.29);
- акцент на существенных отличиях конкретного вещества от других;
- возможность применения в быту (рис. 13.31.1-2);

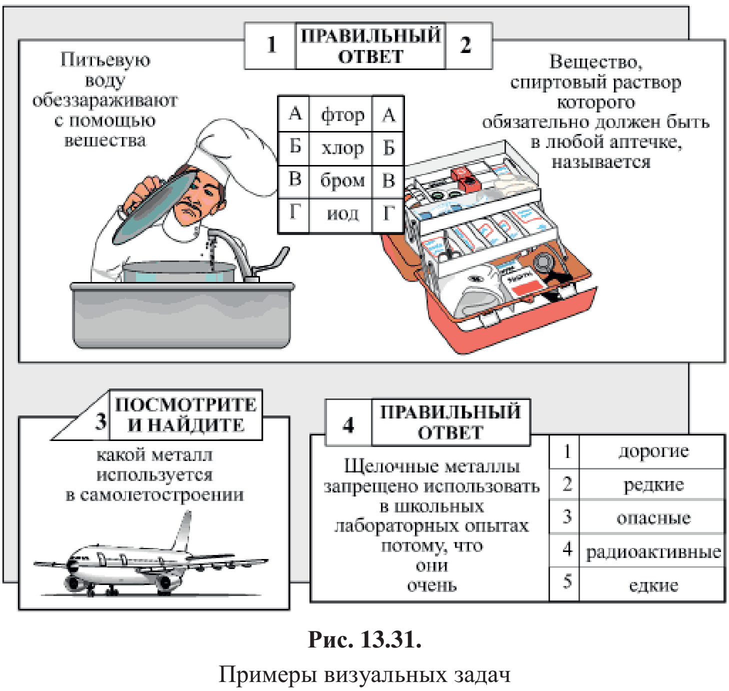


Рис. 13.31.
Примеры визуальных задач
для уроков химии в 8-м классе

- техническое (производственное) использование (рис. 13.31.3);

- ограничение применения для безопасности жизнедеятельности живых организмов (рис. 13.31.4).

Данные материалы позволили учителям за время, отведенное программой, осветить широкий круг вопросов, получить данные о практических знаниях учеников, подчеркнуть особенно важные моменты, углубить и расширить содержание темы (см. приложение, стр. 617-620, рис. V.31-V.34).

Отметим, что классификация визуальных заданий, примененных нами на уроках различных дисциплин, в точности совпадает с их классификацией, введенной нами во второй главе исследования.

Принципы их построения, дидактическая направленность, методическое назначение, особенности структуры были сохранены безо всяких затруднений.

В результате, в тех классах, где подобные материалы шли параллельно на нескольких предметах, наблюдалась быстрая адаптация учеников к новым условиям урока.

13.3.4. Распространение идеи

Пример 10. Продемонстрируем общность идей использования визуальной среды при обучении дисциплинам различных предметных областей.

На рисунке 13.32 представлена серия, являющаяся практическим приложением (упражнением) к информационной странице “Построение натурального минора” (см. приложение, стр. V.37, рис. 623).

Эта серия, как и математическая серия для формирования навыка нахождения тангенса угла прямоугольного треугольника (см. рис. 6.05, стр. 144), состоит из пяти заданий с общим условием.

Первое задание самое легкое, остальные постепенно усложняются.

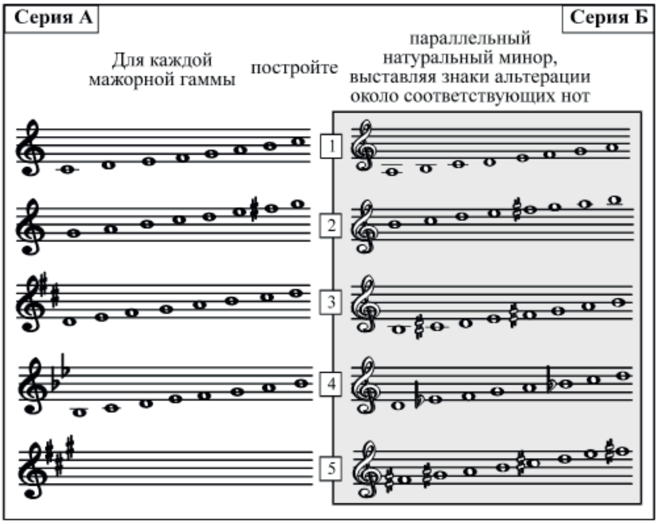


Рис. 13.32.
Серия задач на построение гамм
для уроков сольфеджио музыкальной школы

В первом задании ученик должен всего лишь “сохранить” знак альтерации (фа #), перенести его в правый нотный стан.

Второй пример также не очень сложен – правильное построение “параллели” для до мажора обеспечено первой (выставленной справа) ступенью минора.

Условие третьей задачи является комбинацией предыдущих – нужно выписать все ступени гаммы и выставить соответствующие знаки альтерации у 2-й и 6-й ступеней минора.

Четвертое задание сложнее. Ключевые бемоли и I-я ступень заданного лада (слева) дают возможность определения тональности (си бемоль мажор), ориентируясь на которую, учащийся должен выполнить общее задание серии.

Последнее задание самое трудное, дается всего лишь один ориентир – три ключевых диеза. Учащийся должен определить наименование тональности, выписать ее ступени, построить параллельный минор с сопутствующими ключевыми знаками альтерации.

Проведем очередное сопоставление.

Построение различных интервалов от одной и той же ноты, одного и того же интервала от разных ступеней гаммы, определение количественной и качественной величины заданного интервала довольно часто затруднительно для учеников средних классов музыкальных школ.

В приложении на рисунке V.38 (стр. 624, вверху) помещены блоки серий 1-го и 2-го вида, посвященных этому важному разделу музыкальной теории (сравнить с рис. 6.05 на стр. 144 и с рис. 6.07 на стр. 146).

Здесь представляем две из них (рис. 13.32) и приведем еще примеры.

Рис. 13.33.

Серия задач на определение состава интервалов
для уроков сольфеджио музыкальной школы

Пример 11. Дети, занимающиеся музыкой, сталкиваются с понятием дроби на первых же школьных уроках и в подготовительных группах (на нем основаны различные длительности, структуры мажорного и минорного ладов).

Разработав соответствующую информационную схему и “узаконив” постоянное ее применение, можно помочь воспринять и усвоить понятия на интуитивном уровне (см. стр. 508, рис. II.04).

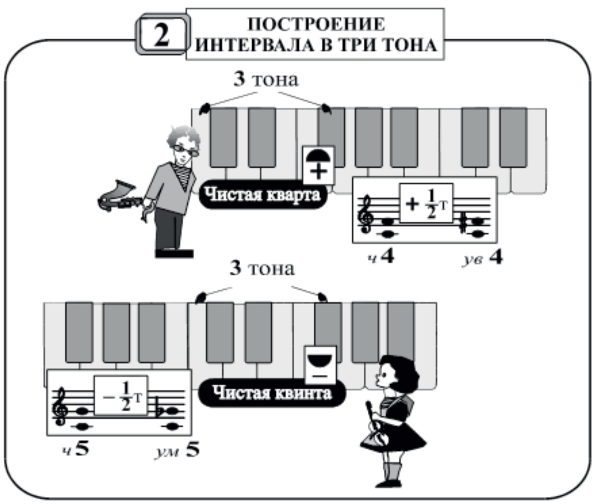


Рис. 13.34.

Страница, посвященная построению тритона

Не меньше затруднений возникает у учащихся музыкальных школ при знакомстве с так называемыми характерными интервалами. Визуализация отличий в качественном составе (количестве полутонов) большой и увеличенной секунд поможет учащимся музыкальных школ при изучении данного раздела музыкальной теории (рис. 13.34, см. также рис. V.39 на стр. 625).

Приобретение умений и отработка навыков в составлении, определении и нахождении интервалов и аккордов приобретается при выполнении визуальных заданий с сопутствующим их озвучиванием, что предусмотрено в содержании визуальных блоков (см. также приложение, с. 626-628, рис. V.40-V.42).

В качестве последней модели (и для очередного сопоставления) рассмотрим схему "Обращения тонического трезвучия", посвященную одному из центральных вопросов курса музыкальной теории – общему алгоритму построения обращений трезвучий в различных тональностях (рис. 13.35).

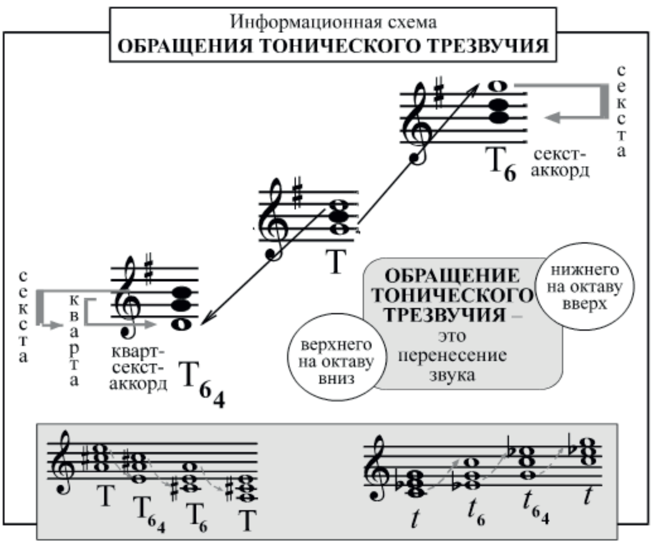


Рис. 13.35.
Информационная схема,
посвященная обобщению темы «Обращения тонического трезвучия»
для уроков сольфеджио музыкальной школы

Анализ данной схемы проведем по аналогии с разбором схемы «Чтение графика функции» (рис. 5.01 на стр. 121).

Данная схема состоит из трех больших блоков, два из которых расположены параллельно (по диагонали).

Левый блок, включающий нотные станы, ключевые знаки, нотную и буквенную запись аккордов, имеет различные дополнительные средства для усиления зрительного восприятия его содержания: текстовые надписи и стрелки-указатели.

Правый диагональный блок оформлен иным образом, что зрительно позволяет отделить его, подчеркнуть его собственное значение. Он как бы свертывает подробное представление формируемого алгоритма, – переводит его содержание в соответствующий текст.

Третий блок этой схемы (внизу) представляет собой набор конкретных примеров, позволяющих еще раз быстро и кратко обобщить предлагаемый материал.

§14. Программное обеспечение визуальных уроков

Визуальная Среда Обучения по природе своей предназначена для новой формы школьного занятия – визуального урока, который отличается от обычного в первую очередь тем, что в ходе его реализации на первый план выдвигается работа зрения. Избыточность средств, составляющих визуальный блок и обеспечивающих проведение визуального урока, позволяет варьировать процесс обучения путем выбора моделей, отвечающих локальным задачам учебного процесса, возможностям и целям обучения в целом.

Такое "правило игры" уже само по себе может быть продуктивным, позволяющим конструировать различные варианты уроков к одной и той же теме, обеспечивая разный уровень обучения как внутри одного класса, так и в классах с различными направлениями и мотивами в обучении.

Добавим к этому, что можно предусмотреть свободные "возвраты и переходы" от одного "файла" к другому с тем, чтобы были организованы многообразные связи не только внутри всего блока, но и в отдельных его составляющих.

В основу одного из вариантов *Визуальной Среды Обучения* мы положили идею "информационной тетради", которая позволяет развернуть перед учениками отдельные фрагменты теории, наглядно представить важнейшие методы исследований, продемонстрировать соответствующие приложения.

Другая версия этой среды может содержать в себе комплект, включающий:

– страницу информационной тетради,

– фрагмент информационной схемы,

– фрагмент матрицы,
– наборы визуальных задач,
– файлы с “подсказками” и “ориентирами” к наиболее сложным задачам.

В третьем примере вариации *Визуальной Среды Обучения* задачи могут быть распределены по отличительным признакам характера умственной деятельности ученика (например, отдельные подкаталоги с сериями или тренажерами, где каждая визуальная задача может поддерживаться “собственными” *визуальными* подсказками, направляющими зрение ученика в поиске верного ответа и т.д.).

14.1. “Бумажный вариант” *Визуальной Среды Обучения*

В первые годы нашей экспериментальной работы мы использовали школьные тетради, на развернутых листах которых заранее оформлялись визуальные фрагменты. Каждый ученик получал свою тетрадь и работал с ней в классе и дома. Позднее такая работа проводилась по специальным книжкам [153-154], в которых к любой такой странице прилагался блок различных визуальных задач.

“Бумажный вариант” *Визуальная Среда Обучения* позволил нам по-разному структурировать в учебном процессе одни и те же содержательные идеи, осветить различные по содержанию вопросы.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Мы разработали материалы, позволяющие активно использовать «Метод интервалов» – от простейших алгебраических неравенств до решения неравенств повышенного уровня сложности содержания (рис. 14.01 и рис. 14.02, а также рис. III.17-III.20 на стр. 563-566).

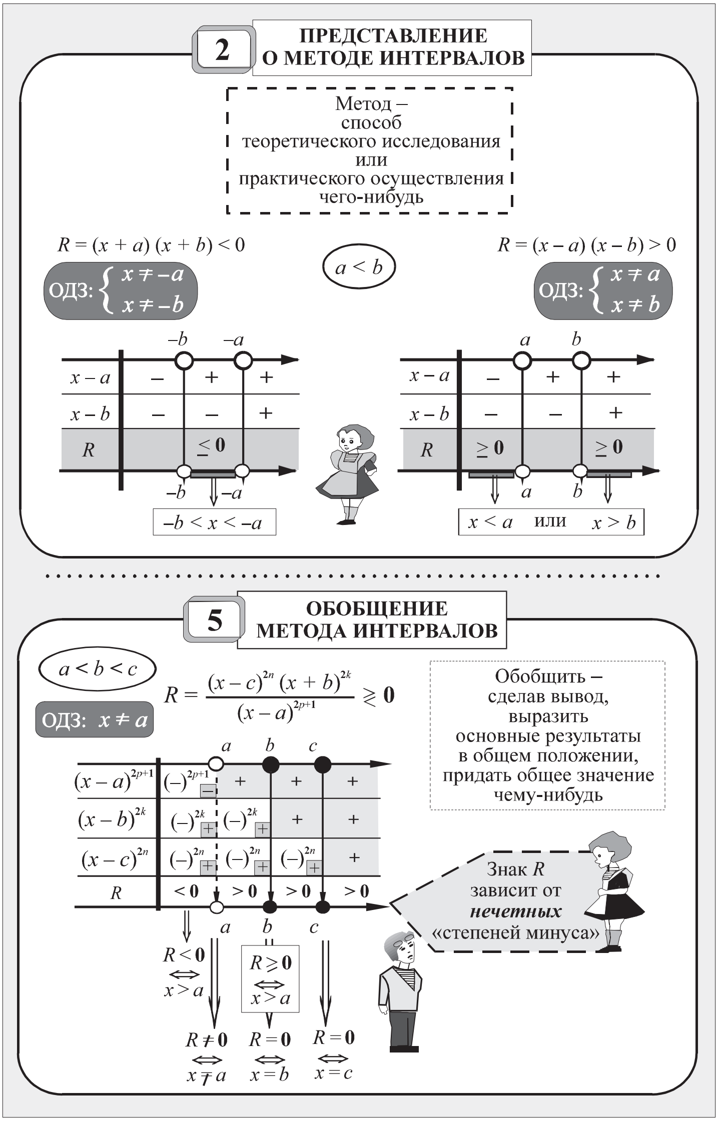


Рис. 14.01.

Информационные страницы к теме «Метод интервалов»:

начальная (1), завершающая (2)

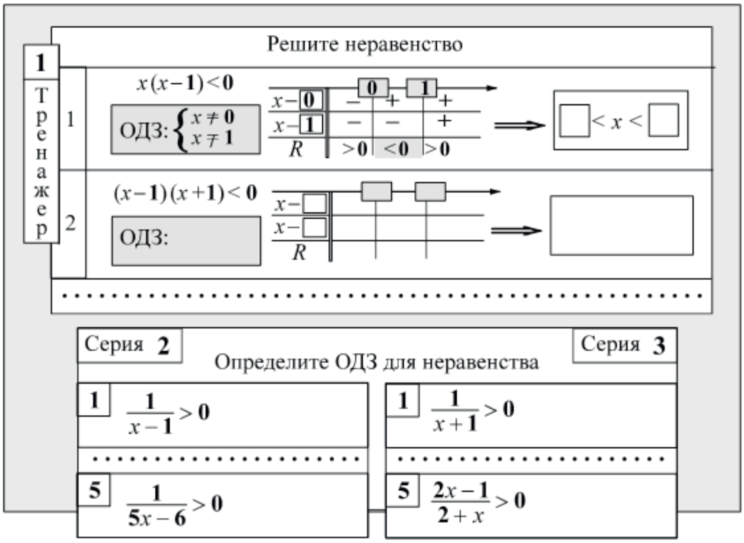


Рис. 14.02.
Фрагменты упражнений
к начальному этапу изучения темы «Метод интервалов»

Пример 2. Идущие ниже примеры мы приводим по следующей причине. Готовясь к уроку, учитель ориентируется на базисную программу и рекомендуемое тем или иным авторитетом поурочное планирование. Как правило, это планирование “замкнуто” на прохождение определенного (строго ограниченного) круга понятий и их свойств.

К примеру, в 8 классе в курсе геометрии тема “Четырехугольники” дает точный и строгий перечень геометрических объектов, подлежащих изучению в этот период. Перечислим некоторые из них.

▪ Общие свойства выпуклых четырехугольников. Четырехугольник, его стороны. Вершины четырехугольника, соседние и противоположные вершины четырехугольника. Углы четырехугольника, противолежащие углы и стороны. Периметр четырехугольника. Внутренняя область четырехугольника. Диагонали выпуклого четырехугольника.

- Симметрия плоских фигур относительно прямой и точки.
- Параллелограммы. Параллелограмм как выпуклый четырехугольник. Элементы параллелограмма, его свойства, признаки, построение.
- Прямоугольник, ромб, квадрат. Прямоугольник и его свойства. Свойство диагоналей прямоугольника. Ромб и его свойства. Свойства диагоналей ромба. Квадрат, свойства квадрата.
- Трапеция и ее элементы. Виды трапеций: равнобедренная трапеция, прямоугольная трапеция. Средняя линия трапеции.
- Теорема Фалеса. Задача о делении отрезка на равные части. Средняя линия треугольника и ее свойство. Средняя линия трапеции и ее свойство.

Мы установили, что поиск отдельных свойств математических объектов, можно организовать задолго до планового прохождения программного материала.

Так, на уроках геометрии допустимо уже в 7-м классе основной школы рассмотреть целый ряд вопросов:

- площадь прямоугольного треугольника (рис. 14.03),
- площадь остроугольного треугольника,
- площадь остроугольного треугольника,
- площадь тупоугольного треугольника.

К примеру, страница (задача) о площади тупоугольного треугольника предлагается после нахождения площади прямоугольного и остроугольного треугольников (рис. 14.04).

Разбивая тупоугольный треугольник на два остроугольных, учащиеся быстро находят искомый ответ.

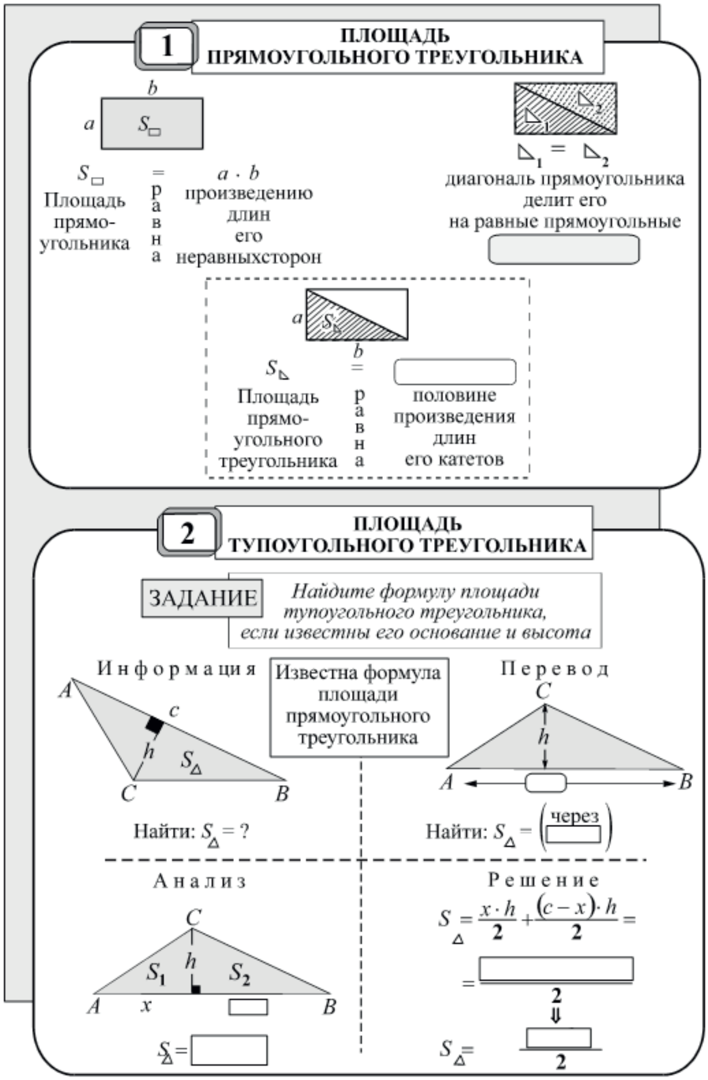


Рис. 14.03.

Вывод площади треугольника в ситуации пропедевтики:
как констатация факта в 6 классе к усвоению материала в 7 классе (1),
в виде решения задачи в 7 классе к усвоению материала в 8 классе (2)

Пример, прилагаемый к этой странице, позволяет применить новый прием в нестандартной (на данном этапе) ситуации (рис. 14.04). Важно так же, что, применяя данные визуальные материалы, учитель может проследить за реакцией ученика на конкретном этапе изучения материала; поставить вопросы, проверяющие усвоение каждого шага.

Рис. 14.04.

Перевод условия задачи в рисунок и формулу
для последующего ее решения

Далее, при изучении теоремы Пифагора в 8-м классе, можно предложить ученикам (в поисковом “режиме”, без требования: выучить, запомнить, обязательно решить!) рассмотреть вопросы:

- неравенство остроугольного треугольника,
- неравенство тупоугольного треугольника и т.д.

Рассматривая эти вопросы не как теоретический материал, а как *задачи* (рис. 14.05), учащиеся уже на данном этапе поймут необходимость знания элементов параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и трапеции.

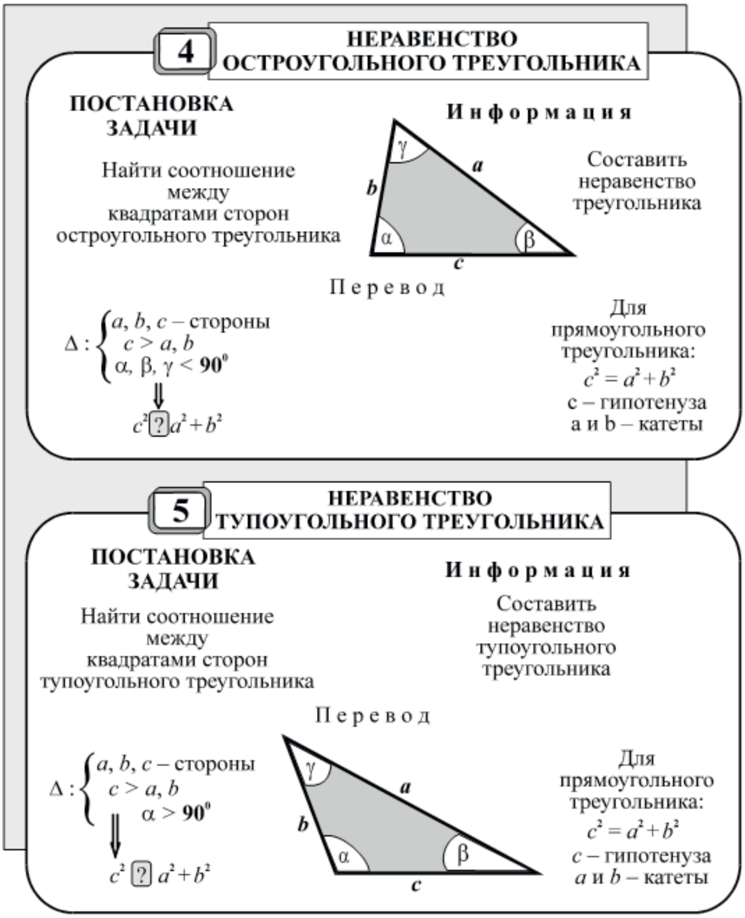


Рис. 14.05.

Внепрограммный материал

в качестве “информации к размышлению”

Более того, здесь же они получат возможность осознать практические возможности применения приобретенных на уроках алгебры навыков преобразований алгебраических выражений, “прочувствовать” глубокую связь между текстом, формулой и рисунком. Причем учащиеся освобождены от директивы “выучить и запомнить” – то, что в дальнейшем окажется “теорией”, в настоящее время выступает всего лишь как очередное практическое поисковое задание (см. также рис. III.07-III.08 на стр. 553-334).

В дальнейшем (в 9 классе) при освоении темы “Площади четырехугольников” появится возможность восстановить и обновить эти знания. Список новых вопросов программы 9 класса как бы сужается, изучение идет быстрее, и остается больше времени на рассмотрение трудных вопросов (например, выражения площадей плоских фигур через радиусы вписанной и описанной окружностей).

Таким образом, очередной вариант *Визуальной Среды Обучения* может состоять из комплектов визуальных блоков, объединенных общей методической идеей.

Автор данного исследования разработал несколько образцов подобных комплектов, дидактическое направление трех из которых можно представить следующим образом:

- визуальное изложение отдельной темы определенного класса;
- визуальная реализация определенной линии курса в целом;
- визуальная поддержка нескольких тем или разделов базисной программы.

Первое из упомянутых направлений предназначено для конкретных уроков и может быть приспособлено к определенному учебному пособию. Второе ориентировано на сохранение единого режима работы в течение длительного времени и должно быть свободно адаптируемым к любым авторским программам. Третье позволяет объединить или обобщить положения математической теории и практики, входящие в различные разделы программы.

14.2. Контроль и диагностика

Новые возможности и особую гибкость приобретает система “Серия-тренажер-тест” при использовании ее в качестве методической начинки соответствующей программной оболочки. Нелинейные связи, реализующиеся в такой программе, позволят учителю сформировать материалы так, чтобы все возможные функции каждого средства были задействованы с максимальной отдачей.

В одних случаях тест может выступать как тренажер, и наоборот. В других – серия возьмет на себя функцию контроля знаний, умений и навыков учащихся с учетом уровня их подготовленности и возможностей. В третьих – тренажер или тест исполнят роль подсказки для решения наиболее трудных заданий серии. Учитель, таким образом, получает возможность предъявления одного и того же практического материала в заданиях, различных по назначению и оформлению.

Визуальные задачи объединяются вокруг той дидактической цели, которой они служат. В соответствии с этой целью появляется возможность создания в *Визуальной Среды Обучения* “оболочки”, связанной не с характером самих задач, а только с особенностями их использования.

Дадим краткое описание принципов заполнения подобной “оболочки”, применяя которые можно обеспечить продуктивный характер визуального мышления.

Рассмотрим ситуацию работы ученика с матрицей под руководством учителя. Прежде всего, отметим, что для такой работы кроме основной матрицы необходима запасная, содержание и уровень трудности каждого из примеров которой в точности соответствует примеру основной, рабочей матрицы. Для ясности рабочую матрицу обозначим как матрицу **I**, а запасную – как матрицу **II** (рис. 14.06).

Итак, ученик последовательно решает задачи столбца (или строки) обучающей матрицы **I** (рис. 14.06.1).

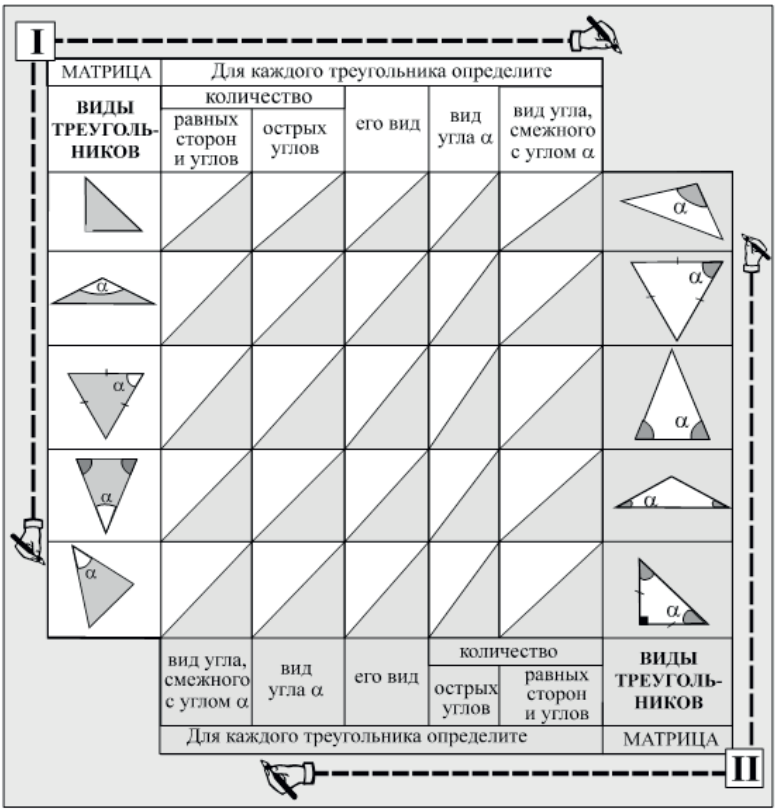


Рис. 14.06.
Варианты матриц:
основная (справа), для повторной проверки (слева)

Если в решении примера ***i***-й строки или ***k***-го столбца обнаруживается ошибка, то необходимо исключить ее случайность из-за невнимательного решения (рис. 14.07.1).

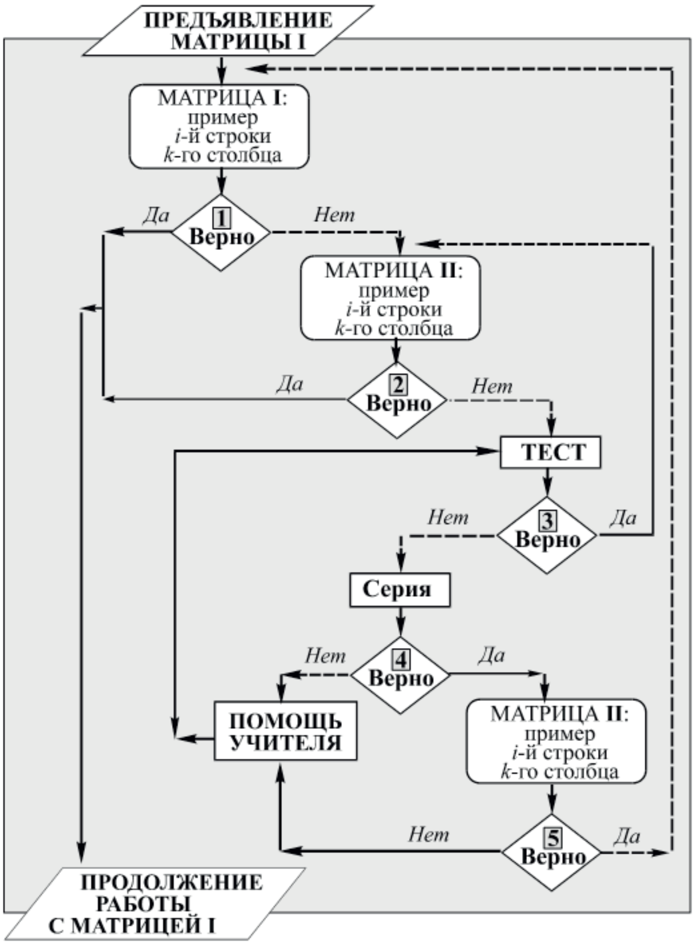


Рис. 14.07.

Блок-схема работы с матрицей в прототипе “оболочки” системы *Визуальная Среда Обучения*

Для этого следует предложить ученику аналогичный пример матрицы **II** (параллельной), также находящийся на пересечении ***i***-й строки и ***k***-го столбца.

Если этот пример выполнен правильно, то ошибка случайна, и можно продолжить работу (рис. 14.07.2).

Если повторное испытание (решение примера ***i***-й строки и ***k***-го столбца **II** матрицы) также окажется неправильным, то можно предложить ученику решить тест, предназначенный для самостоятельного устранения ошибки учеником (рис. 14.07.3).

В случае повторения ошибки в тесте (пробелы ученика настолько велики, что он не может сам определить ошибку) учителю следует обратить на нее серьезное внимание, проанализировать рассуждения (записи) ученика и предложить ему поработать с соответствующей серией (рис. 14.07.4).

Содержание этой серии должно быть таким, чтобы решающий мог разобраться в причинах ошибки и восстановить утерянный навык. Дополнительная проверка результатов такой работы осуществляется с помощью того же (или похожего) теста.

При правильном выполнении теста следует возврат к исходной задаче (***i***-й строки и ***k***-го столбца **I** варианта матрицы) и, в случае успешного решения, работа продолжается согласно заданному режиму (рис. 14.07.5).

Примечание. Во избежание “зацикливания” (например, в случае устойчивой вычислительной ошибки) предусматривается только одна возможность возврата к матрице **II** – в случае повторения ошибки следует автоматический переход к блоку “Помощь учителя”.

На рисунке 14.08 представлены некоторые возможные варианты применения матриц. В таблице 14.1 описаны возможные варианты их использования, обработка результатов их выполнения.

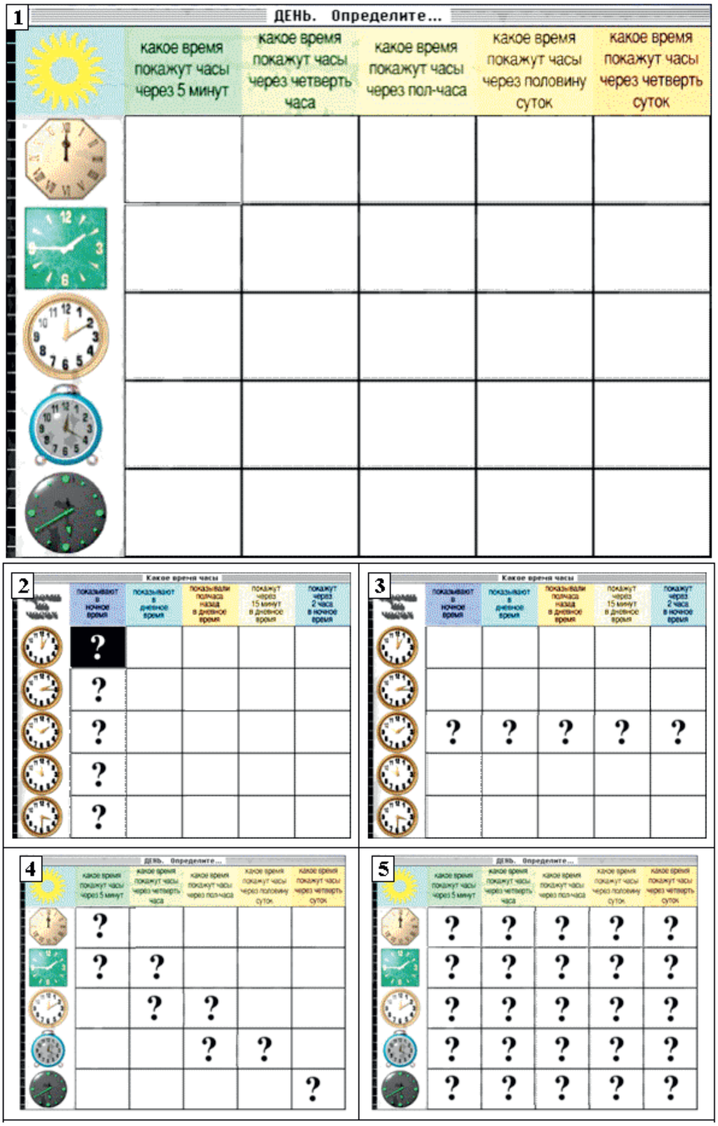
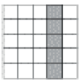
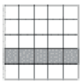
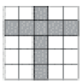
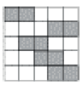
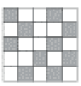
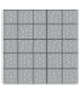


Рис. 14.08.

Рабочая матрица (**1**) и варианты ее применения:
по строке (2), по столбцу (3),
произвольный выбор (4), полностью (5)

Таблица 14.1

Варианты использования матриц						
			Вид работы			
Пример выборки	Методика составления выборки	Предполагаемое назначение выборки	Классная	Самостоятельная	Домашняя	Экспресс контроль
	Строго по столбцам	Освоение операции на различном материале	■		■	
	Строго по строкам	Реализация различных операций над объектом		■		■
	Строго по строке и по столбцу	Формирование алгоритма или навыка исследования	■		■	
	Выбор 2 соседних элементов в строке	Закрепление формируемых навыков		■		■
	Выбор по 2 элемента в строке	Проверка результата текущего обучения				■
	Вся матрица	Восстановление утраченных знаний и навыков	■		■	

Предложенная ниже сопутствующая диагностика результатов применения матрицы второго типа, позволяют полностью реализовать ее контролирующую функцию.

Обработка полученных данных контролирующей матрицы, диагностика результатов ее выполнения и последующая работа учителя с учеником могут выполняться следующим образом:

1) при наличии только одной ошибки выясняется причина ее возникновения (случайность, невнимательность, быстрая утом-

ляемость, отсутствие конкретного навыка, непонимание и т.п.), учителем (или машиной) оказывается конкретная помощь (решение задач по образцу типа “Посмотрите и найдите”);

2) при наличии более одной ошибки в одном и том же столбце рекомендуется выполнение дополнительных упражнений – серий или тренажеров;

3) при наличии более одной ошибки в одной и той же строке следует повторить соответствующий фрагмент теории (из раздела “Помощь” программы или соответствующего текста учебного пособия) и предложить задания аналогичного содержания типа “Посмотрите и запишите”);

4) если допущено не менее двух ошибок, то в зависимости от их положения даются рекомендации по типам (2) или (3);

5) если допущено не менее трех ошибок, и среди них есть аналогичные (в строке или столбце), даются рекомендации типа (2) или (3) и проводится индивидуальная работа с учеником по типу (1);

6) если допущено не более трех разнородных ошибок, ставится соответствующая положительная оценка или фиксируется зачет.

Если матрица выстроена с учетом повышения уровня сложности по вертикали и по горизонтали (левый столбец и верхняя строка), то правильное решение каждой задачи можно оценить в баллах (табл. 14.2).

На пересечении определенных строк и столбцов матрицы указаны баллы, которые ученик получает за правильное решение конкретной задачи. Поэтому при выполнении всех заданий каждой строки или каждого столбца ученик получает дополнительные баллы.

Итоговый результат в **100** баллов свидетельствует о том, что материал темы (либо раздела курса) контролируемый данной матрицей, усвоен полностью, проверяемые навыки и умения сформированы достаточно прочно.

Таблица 14.2

Оценка в баллах решений заданий матрицы					
	Строки матрицы				
Столбцы матрицы	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
I	1	1	1	2	3
II	1	1	2	3	4
III	1	2	3	4	5
IV	2	3	4	5	5
V	3	4	5	5	5

При переходе к традиционной пятибалльной системе оценок следует ввести классификатор – специальную систему пересчета баллов матрицы в привычную оценку знаний. Для этого учитель устанавливает нижнюю и верхнюю границу каждой такой оценки.

В частности, если для получения положительной отметки ученик должен выполнить хотя бы 10 самых легких заданий (1-я и 2-я строки или 1-й и 2-й столбцы матрицы) за определенную единицу учебного времени, то количество баллов менее **25** оценивается как плохой результат.

Сами интервалы оценок должны устанавливаться в зависимости от уровня предметной подготовки учащихся, общей направленности их обучения (классы с техническим, гуманитарным и т.п. направлениями) и могут изменяться в ту или иную сторону с учетом различных объективных и субъективных причин (табл. 14.3).

Таблица 14.3

Дифференциация результатов работы с матрицей	
Дополнительные баллы за правильное решение задач матрицы	
1-го столбца – **0,5** балла	1-й строки – **1,5** балла
2-го столбца – **1** балл	2-й строки – **2,5** балла
3-го столбца – **1,5** балла	3-й строки – **3,5** балла
4-го столбца – **2** балла	4-й строки – **4,5** балла
5-го столбца – **2,5** балла	5-й строки – **5,5** балла

Весь банк матриц можно организовать и рассортировать таким образом, чтобы учитель мог проследить линию какой-либо темы в структуре курса в целом (рис. 14.09, см. также рис. II.39 на стр. 543). Из полного банка матриц, посвященных определенному разделу школьной теории, учитель сможет выбрать примеры для итогового зачета.

МАТРИЦА **1**	Определите и запишите				
ДЛИНЫ И РАССТОЯНИЯ	длину вектора $\overrightarrow{OB}$	расстояние от начала координат до точки A	расстояние между точками A и B	координаты точки C, симметричной точке A относительно точки B	длину отрезка AC
$A(\mathbf{2;1})$ $B(\mathbf{2;2})$					
....	......	....	....	....	......
$A=(\mathbf{1;-2;1})$ $\overrightarrow{BA}=\vec{k}-\mathbf{2}\vec{i}-\vec{j}$					

Рис. 14.09. Фрагмент контролирующей матрицы для проверки ЗУНов по разделам математики, связанным с векторами

14 3. Гипертекстовые связи *Визуальной Среды Обучения*

Программы с визуальными задачами (схемы с заполнением пропусков, серии с поэтапным или скачковым усложнением содержания, обучающие или контролирующие матрицы и т.д.) полезно "оснастить" различного рода подсказками – фрагментами информационных схем и таблиц (или их блоков), визуальными указаниями к отдельной или группе задач (рис. 14.10, см. также рис. IV.09 на стр. 585), банком ответов.

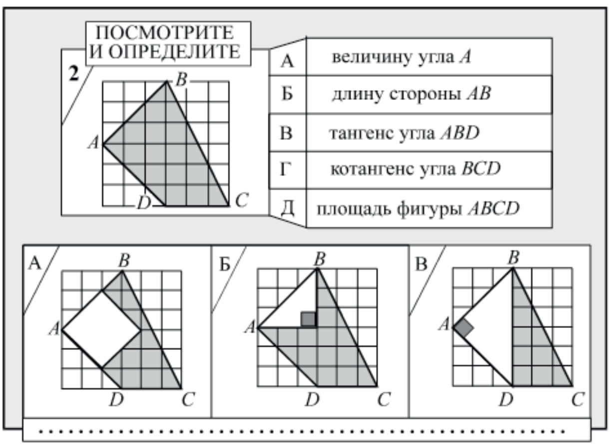


Рис. 14.10.
Визуальная задача «Посмотрите и определите» (вверху),
фрагмент комплекта подсказок
к соответствующему заданию (внизу)

При использовании ЭВМ могут варьироваться не только режимы работы, но и формы ответов (рис. 14.11, см. также рис. IV.09 на стр. 585).

Все это расширит возможности данного мощного обучающего и контролирующего дидактического средства.

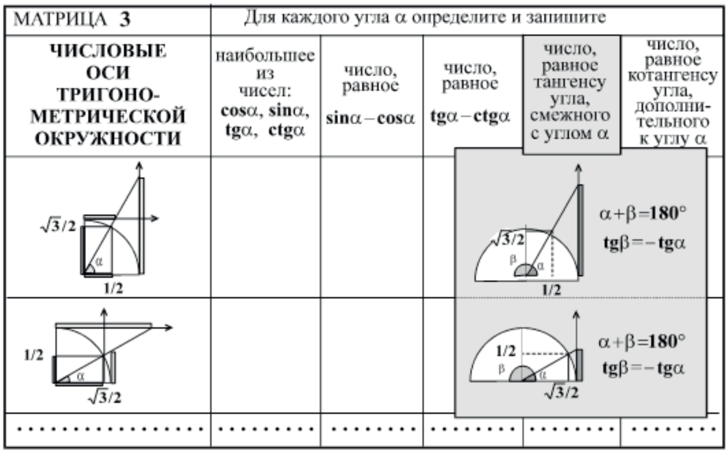


Рис. 14.11.

Фрагмент матрицы

с визуальными указаниями к решению задач (в рамке)

Другой моделью может быть вариант, составленный нами для пользования информационной схемой и информационной тетрадью.

На рисунке 14.12 с помощью кнопок показана возможная организация переходов “внутрь” информационной схемы. Щелчок “мышкой” на соответствующем фрагменте схемы осуществляет переход к следующему уровню, который позволяет рассмотреть и обдумать содержание именно этого фрагмента или получить подсказку.

При режиме “Контроль” отдельные фрагменты схемы не заполнены, ответы к ним в основном файле директория отсутствуют и вызываются на экран, только если учащийся вызовет “HELP”.

Самым трудоемким при наполнении обучающей визуальной среды является графическое оформление структуры работы с визуальными задачами. Данный процесс значительно упрощается, если имеются заранее подготовленные макеты таких “структур”, подобные тем, которые были применены автором исследования (рис. 14.13).

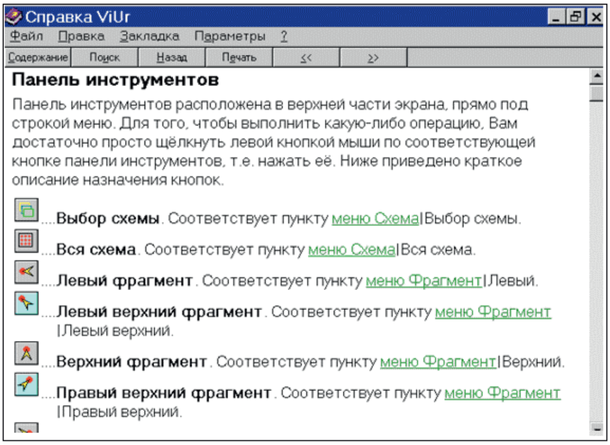


Рис. 14.12.

Вариант взаимосвязей между фрагментами информационной схемы
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

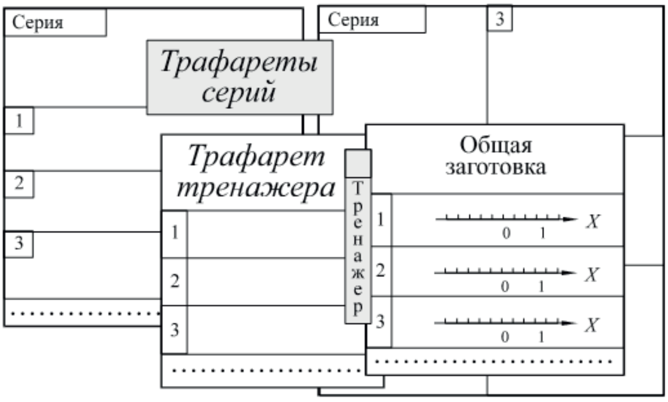


Рис. 14.13.

Фрагменты трафареты серий и тренажеров
для наполнения их конкретным содержанием к определенному уроку
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

Добавим некоторые соображения о представлениях текстов на экране ПК. Кроме того, что простое перенесение учебных текстов в оболочки обучающих программ было бы непростительной роскошью, имеется еще ряд причин, по которым это становится невозможно. Одна из них – это сама визуальная информация, возникающая на экране монитора и накладывающая особые требования к ее представлениям.

С одной стороны, вербальная информация на мониторе воспринимается трудно по многим причинам, поэтому простое копирование ее может оттолкнуть ученика и учителя от использования компьютера в процессе обучения.

С другой, инструментальные возможности текстовых редакторов, программ иллюстративной и деловой графики позволяют оформить визуально как грамматические, так и смысловые “оттенки” словесной конструкции. Этого можно достичь с помощью цвета, стиля шрифта, оформления или разбиения текста на отдельные “строки”, с последующим “выравниванием их по центру” и т.д.

В компьютерном классе с помощью специальной программы можно подобрать индивидуальные задания каждому ученику, затратив на это минимум времени.

В завершение представим описание реализации двух программных оболочек, разработанных по нашим проектам (техническое задание Н.А. Резник, разработчики: А.Г. Барышкин и А.Л. Брайцев).

Объектом разработки является пакет программ, представляющий собой компьютерную оболочку одного из средств *Визуальной Среды Обучения*, именуемой условно “ViUR”.

Целью работы является разработка **интерактивной** системы для обучения и проверки знаний учащихся начальных, средних и старших классов по различным предметам.

Промежуточным этапом работы является разработка демонстрационных версий программ “Информационная схема” (режим “Обучение”) и “Матрица” (режим “Контроль”).

Пакет программ должен быть ориентирован на пользователей произвольного уровня подготовки (школьников), обеспечивать дружественный, интуитивно понятный интерфейс, учитывать возможности графического диалогового интерфейса применяемых операционных систем MS-Windows (“Информационная схема”) и MacOS System7 (“Матрица”).

Определение характеристик аппаратного и программного обеспечения

Учитывая, с одной стороны, реальную оснащенность учреждений образования техникой и, с другой стороны, необходимость создания пакета, обладающего хорошим пользовательским интерфейсом, возможностью качественного отображения графической информации, разработчики остановились на следующих минимальных требованиях к аппаратному и программному обеспечению:

- ЭВМ типа IBM PC с процессором типа i80386, 2 Мбайт оперативной памяти, накопителем типа “винчестер” объемом 100 Мбайт, цветным VGA-дисплеем и манипулятором типа “мышь”.
- Операционная система Microsoft Windows 3.1X (русская версия).

Возможности реализации компьютерной оболочки с применением существующего программного обеспечения

Указанная компьютерная оболочка с теми или другими упрощениями может быть реализована путем применения пакетов программ для деловой графики и презентаций, в частности, **Microsoft Powerpoint** и **Corel Draw**.

Несмотря на широкий круг их возможностей, мы решили разработать свой программный продукт. Это обусловлено необходимостью:

- предельно простого и понятного для школьников пользовательского интерфейса с привязкой к особенностям *Визуальной Среды Обучения*;
- простоты организации обновления пакета и привязки его к нуждам конкретных учреждений образования.

Выбор формата представления графической информации

- При выборе формата графических файлов для хранения образов информационных схем учитывались следующие аспекты:
- исходный формат представления (файлы Corel Draw 5 – .crd);
- качество отображения на экране;
- форматы, поддерживаемые средой программирования;
- объем памяти, требуемый для файла.

Несмотря на то, что наилучшее качество отображения обеспечивают растровые форматы (.bmp, .pcx, .tif и другие), для их хранения требуется большой объем дискового пространства.

Векторное представление образов информационных схем обеспечивает существенную экономию дискового пространства, поэтому за основу при рассмотрении были взяты форматы .crd и .wmf. Использование исходного формата является для разработчика информационных схем наиболее удобным, однако, серьезным недостатком в этом случае становится то, что стандартных реализаций при работе с такими форматами в большинстве сред программирования нет.

Выходом из такой ситуации может быть перенос графических объектов с помощью технологии OLE (Object Linking & Embedding), но при этом резко увеличивается размер модуля пакета, что повышает требования к объему оперативной памяти компьютера. Исходя из этого, для представления графических файлов, был выбран формат Windows Metafile (.wmf).

Выбор стратегии использования пакета

В силу того, что Визуальная Среда Обучения предполагает очень высокую степень гибкости и расширяемости, а также возможность ее привязки к нуждам конкретных учреждений образования, разработчики сочли наиболее приемлемым следующий вариант использования пакета:

- первоначальная установка сокращенной версии с небольшим демонстрационным набором информационных схем;
- последующее дополнение пакета с привязкой к нуждам конкретных учреждений образования.

Технические требования к аппаратному и программному обеспечению

Минимальные:

- ЭВМ типа IBM PC с процессором i80386SX/25 или его аналогом.
- Оперативная память 2 Мбайт.
- Накопитель типа “винчестер” со свободным пространством 100 Мбайт.
- Дисковод для 3,5-дюймовых дискет.
- Манипулятор “мышь”.
- Цветной VGA-дисплей, поддерживающий разрешение 640x480 пикселей.

- Видеопамять объемом 512 Кбайт.
- Операционная система Microsoft Windows 3.1 (русская версия).
- Драйвер “мыши”, совместимый с Microsoft Mouse.

Оптимальные:

- ЭВМ типа IBM PC с процессором i80486DX/66 или его аналогом.
- Оперативная память 4 Мбайт.
- Накопитель типа “винчестер” со свободным пространством, зависящим от общего количества поставляемых информационных схем.
- Дисковод для 3,5-дюймовых дискет.
- Манипулятор “мышь” или “трэкбол”.
- SVGA-дисплей, поддерживающий разрешение 800x600 пикселей.
- Видеопамять объемом 1 Мбайт.
- Операционная система Microsoft Windows 3.1 или Microsoft Windows 3.11 for Workgroups (русская версия).
- Драйвер “мыши”, совместимый с Microsoft Mouse.

Установка пакета на компьютере пользователя

Для установки пакета следует

запустить Windows,

вставить первую установочную дискету в дисковод,

в меню **Файл** Диспетчера программ выбрать **Выполнить...**

и в поле ввода набрать **A:\V_SETUP.EXE** или **B:\V_SETUP.EXE** в зависимости от того, в какой дисковод (A или B) вставлена дискета. После этого необходимо руководствоваться указаниями программы установки.

Более подробные сведения о процессе инсталляции пакета приведены в файлах README!.TXT и README!.WRI, которые находятся на той же дискете. При организации дополнений пакета следует произвести аналогичные действия с первой установочной дискетой upgrade-версий.

Пользовательский интерфейс пакета

Интерфейс пользователя разработан в соответствии со стандартным графическим пользовательским интерфейсом среды Windows (GUI).

Каждая информационная схема является иерархически структурированной: в ней может быть выделено несколько фрагментов (рис. 14.14), каждый из которых, в свою очередь, имеет до 3 визуальных подсказок (рис. 14.15, см. также рис. IV.01 на стр. 577).

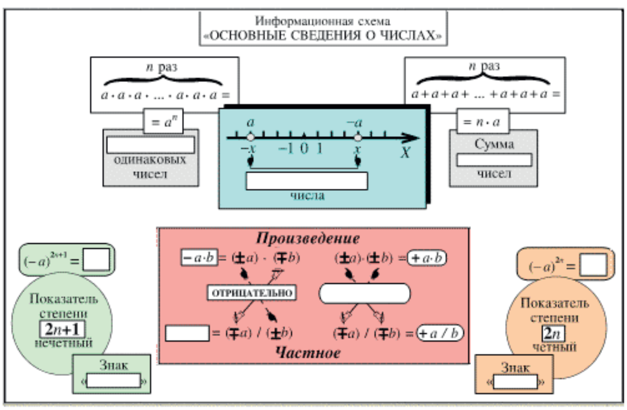


Рис. 14.14.
Пример информационной схемы
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

Пакет работает в полноэкранном режиме, в котором присутствуют следующие стандартные элементы (рис. 14.16):

- строка заголовка;
- строка меню, которая обеспечивает все функции работы с пакетом.

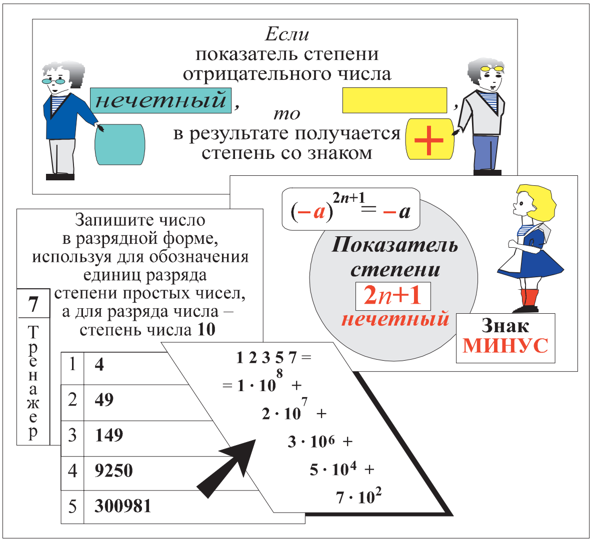


Рис. 14.15.

Примеры дополнительных разъяснений
к фрагментам информационной схемы
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

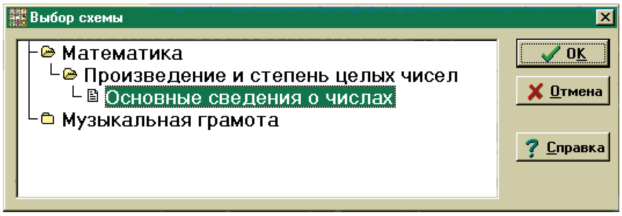


Рис. 14.16.

Фрагмент трехуровневого меню
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

Основные операции при работе с пакетом

Для запуска пакета на исполнение следует:

- запустить Windows;

- раскрыть группу программ **ViUr**;
- дважды щелкнуть левой кнопкой “мыши” по пиктограмме **ViUr**.

Для вызова конкретной информационной схемы следует выбрать пункт меню “**Схема**” или нажать соответствующую кнопку на панели инструментов (все кнопки снабжены “ярлычками”). В ответ на это на экране отображается древовидная структура, представляющая трехуровневую модель пакета.

Путем последовательного выбора курса, раздела и темы можно вызвать конкретную информационную схему. После выбора схемы становятся доступными пункт меню “**Фрагмент**” и соответствующие кнопки.

Нужный фрагмент может быть вызван одним из трех способов:

- выбором в меню “**Фрагмент**” названия соответствующего блока;
- нажатием соответствующей кнопки на панели инструментов;
- щелчком левой кнопкой “мыши” в рабочей области на нужном блоке (рис. 14.17, см. так рис. IV.02 на стр. 578).

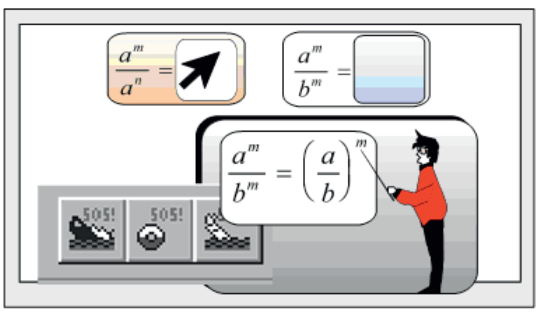


Рис. 14.17.
Фрагмент информационной схемы,
предлагаемый для заполнения в ней пропусков (вверху)
вызов подсказки в случае затруднений (внизу)
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

В случае если нужный блок представляет собой композицию нескольких более мелких блоков, необходимо провести эту операцию при удерживаемой клавише Ctrl.

Получить подсказку для схемы, фрагмента или предыдущей помощи можно также тремя способами:

- выбором в меню "Подсказка" соответствующей подсказки (рис. 14.17, см. так рис. IV.03 на стр. 579);
- нажатием соответствующей кнопки на панели инструментов (см. рис. IV.02 на стр. 578);
- щелчком правой кнопкой "мыши" в любом месте рабочей области.

В каждом из этих случаев переход на предыдущий уровень осуществляется щелчком левой кнопкой "мыши" в любом месте рабочей области, а также путем выбора соответствующих пунктов меню или нажатием кнопки в панели инструментов.

Более подробные сведения по работе с пакетом приведены во встроенной справке (меню **Справка** или соответствующая кнопка на панели инструментов) (см. рис. IV.06 на стр. 582).

Перспективы развития пакета

Разработчики определили несколько направлений, в которых будет осуществляться расширение функциональных возможностей пакета "ViUr":

- подготовка новых библиотек графических образов информационных схем;
- разработка версии пакета под Windows'95 и MacOS System7;
- разработка версий пакета с различным пользовательским интерфейсом с ориентацией на пользователей различных возрастных категорий;
- дополнение пакета анимационными возможностями;

- дополнение пакета интерактивными возможностями для обеспечения тестирования учащихся и закрепления изученного материала;
- использование в пакете средств multimedia;
- разработка сетевой версии пакета.

В результате работы должен быть получен законченный программный продукт с широкими возможностями наращивания, обновления и развития *Визуальной Среды Обучения* – компьютерная оболочка визуальной технологии обучения, позволяющая внедрять новые методики обучения математике в учебный процесс.

§15. Сравнительный анализ результатов обучения

При проведении учебных экспериментов мы старались не только формировать у учащихся определенные знания, умения и навыки, но и разъяснить и показать, что происходит в их мышлении на очередном этапе обучения. Как оказалось, эти вопросы чрезвычайно интересны и для учителя и для ученика и оказывают положительное влияние на отношение к процессу обучения.

Констатирующий эксперимент, проведенный в разных классах десяти школ Мурманской области, показал, что визуальные дидактические материалы позволяют с одной стороны обеспечить прохождение программного материала, рекомендуемого государственным стандартом, независимо от способностей, подготовки и возможностей всех учащихся. С другой стороны эти материалы предусматривают максимальную дифференциацию, поскольку включают в себя постепенное развитие сложности уровня заданий: от упражнений необходимого минимума до заданий повышенной сложности.

Несмотря на то, что в последние годы эксперимент приобрел широкий масштаб (от 4-го класса сельской школы до 2-го курса технического университета), мы особенно тщательно следили за его результатами в период 6-8 классов средней школы.

Мы считаем, что именно в этот период имеется возможность наиболее продуктивно восстанавливать, развивать и использовать визуальное мышление школьника. В более поздние сроки этот процесс становится менее результативным, растягивается во времени и требует значительных усилий со стороны учителя.

Ниже представляем данные результатов экспериментов, по следующим (интересовавшим нас в первую очередь) параметрам:

1. Приращение учебных возможностей (по визуальной методике обучения) отдельного класса:

а) в течение длительного промежутка времени;

б) за период изучения одного раздела учебной теории.

2. Сравнение результатов обучения по традиционной и экспериментальной методикам обучения:

а) в одном и том же экспериментальном классе;

б) в разных классах (экспериментальный и контрольный классы).

Для анализа первого из перечисленных параметров приведем результаты обучения в экспериментальных классах сельской школы (Зверосовхозская средняя школа, учитель С.И. Литвиненко, 1994-1997 годы).

> Проблемы разноуровневого преподавания школьных предметов особенно остро ощущаются в классах поселковых и сельских школ. Работа учителя здесь особенно тяжела: нужно придерживаться общего планирования, развивать сильных и уделять внимание слабым (и даже очень слабым ученикам).
>
> Учебников, рассчитанных на такие ситуации, в данное время слишком мало, и широкому кругу учителей они неизвестны. В подобных случаях действенную помощь могут оказать визуальные дидактические материалы, учитывающие широкий круг возможностей детей, занимающихся в одном и том же классе.

Традиционное изложение тем «Треугольник» и «Смежные и вертикальные углы» и предполагает, как правило, их строгую последовательность. Поочередно вводятся новые понятия, которые ученик должен (обязан!) тут же усвоить и запомнить. Обычно это трудно осуществимо, потому что, на наш взгляд, ученику не хватает времени увидеть и соотнести в новых объектах термин, изображение и обозначения.

Постоянное (точнее, часто повторяющееся) зрительное восприятие одних и тех же (в данном случае геометрических) объектов с разных сторон позволяет более продуктивно формировать умения, знания и навыки учеников при знакомстве с новыми понятиями геометрии.

Именно поэтому наши комплекты по геометрии для шестых-седьмых классов (рис. 15.01, см. также рис. V.05-V.06 на стр. 591-592) были направлены на накопление визуального опыта.

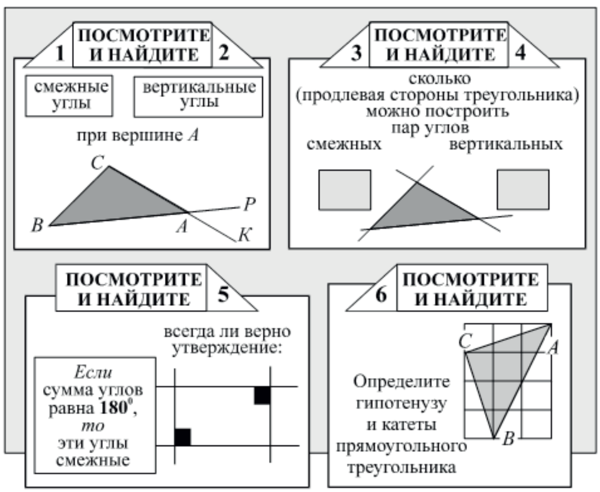


Рис. 15.01.

Фрагменты комплектов визуальных задач
для групп учащихся с разной успеваемостью:
низкой и средней (слева), средней и высокой (справа)

В этих материалах мы попытались провести сразу несколько линий: классификацию треугольников, связи между углами, образованными пересекающимися прямыми, начальные представления о тригонометрической окружности (верхняя полуплоскость), элементы прямоугольного треугольника. При их составлении серьезное внимание было обращено на требования к рисункам, которые необходимо было сделать как можно более наглядными.

Перейдем к анализу наших дидактических материалов, рассчитанных на два-три школьных урока геометрии в тех же классах (7 класс, 1996 г.). Предлагаемые материалы состоят из двух комплектов, по содержанию дублирующих друг друга, но различающихся уровнем сложности.

Отдельные фрагменты представлены в приложении (рис. V.05 на стр. 591).

Конечный итог сосредоточен в общей информационной схеме и двух матрицах различных уровней сложности (рис. 15.02, см. также рис. V.06 на стр. 592).

Применение планомерно разработанной серии визуальных уроков проводилось впервые.

> Мы предполагали, и это подтвердилось полностью, что использование их позволяет учитывать необходимость разноуровневого преподавания предмета в одном и том же классе сельской школы, которая в этом отношении имеет свои весьма серьезные специфические особенности.
>
> Более того, проведенная проверочная работа показала, что ученики оказались подготовлены к восприятию теоретического материала.
>
> Визуальный опыт, полученный на занятиях, помог грамотно оформлять доказательные рассуждения, поскольку теперь теоремы превратились в знакомые им задачи.

Данные материалы обладают подвижностью: задачу одного комплекта можно предложить ученику, занимающемуся по другому комплекту.

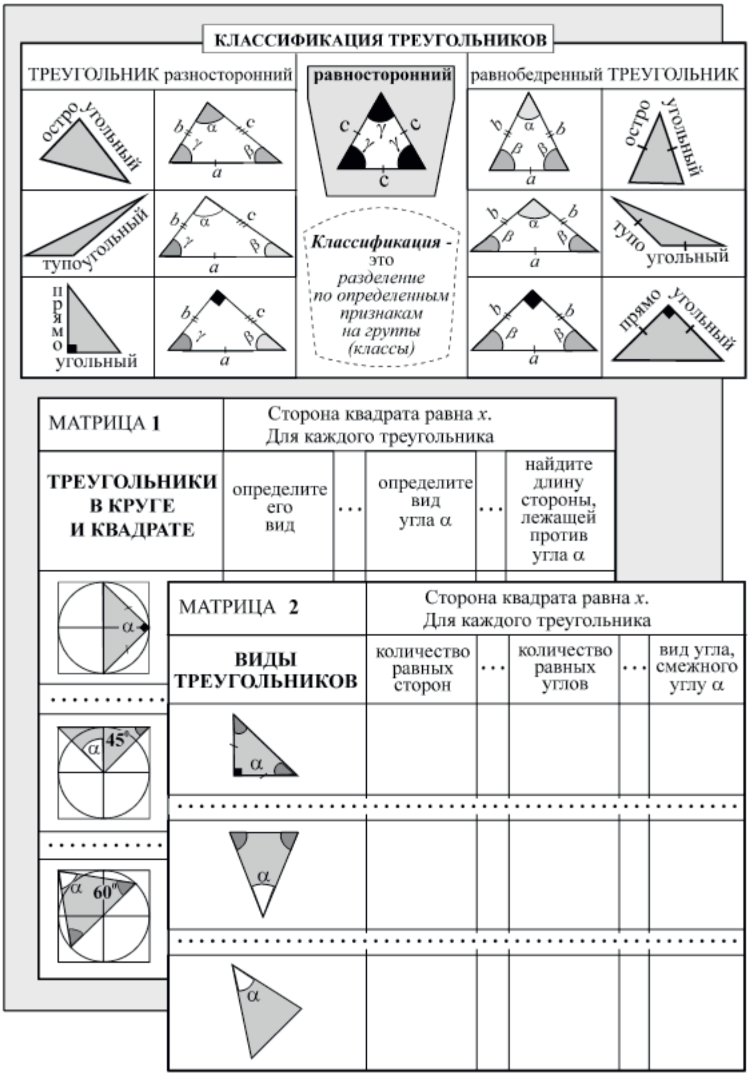


Рис. 15.02.

Информационная схема (наверху)

матрицы, прилагаемые к ней:

для сильных учащихся (1), для слабых (2)

Каждая информационная страница готовит ученика к восприятию отдельного положения математической теории, причем слабым ученикам подсказок дается больше, чем сильным. Эти условия значительно расширяют вариативность подобных дидактических средств обучения.

Вот что пишет преподаватель о результатах работы в данный период:

«На начало эксперимента по математике... только около 10% учеников двух шестых классов имели оценку «4», отличных результатов не было. Любая контрольная работа оценивалась на 50-60% оценкой «2»... С неохотой дети приходили на дополнительные занятия. Результаты эксперимента проявились довольно скоро. У ребят постепенно появлялась заинтересованность в изучении предмета, который был труден, ... стали стараться смотреть и думать, иногда принимались составлять информационные схемы, некоторые стремились самостоятельно изучать новый материал... Все запоминается как бы само собой. Даже слабые учащиеся стали стремиться решать не только легкие задачи. Повысилась активность... на уроках, ... стали просить дополнительных занятий. В этом году удалось... уменьшить пробелы в развитии школьников. Уже более 30% учеников... стали учиться на «4», появились пятерки. Острая проблема двойки» исчезла... даже на других уроках ученики стали более уверены в своих знаниях, охотнее выполнять домашние работы».

«Каждая задача... преследовала несколько целей: повторение предыдущего... получение нового знания или умения… При работе с ними развиваются внимание, понимание содержания задачи, умение разбивать ее на части... используются числа (целые, дро-

би, иррациональные числа)... Серии... составлены так, что каждая следующая непохожа на предыдущую, хотя может показаться, что они одинаковы, и наоборот... требуют сообразительности, смекалки, увидеть в необычных условиях обычное, ... построены так, что прививают... навыки самостоятельной работы с литературой... При такой подаче материала учащиеся легко все усваивают, а сильные и средние ученики свободно разбирают материал самостоятельно.

На уроках... атмосфера творческого поиска и открытий. Материал можно использовать при работе по различным программам и учебникам, в различной последовательности, на уроках, дополнительных занятиях и кружка... Они позволяют сократить время на изучение теоретического материала, более полно отработать практические навыки.

Так на изучение тем «Теорема Пифагора. Соотношения в прямоугольном треугольнике. Декартовы координаты на плоскости» ***по программе отводится 35 часов, но фактически... эту тему изучили за 27 часов. При этом были решены практически все задачи из учебника... и еще ряд задач из дополнительных источников.*** *Проверочная работа показала, что материал учащимися усвоен».*

Планомерная и тщательная работа учителя в использовании и развитии визуального мышления на уроках дала значительный прирост учебных возможностей учащихся в 7-х классах.

Приведем результаты контрольного среза, проведенного по материалам Управления Образования при Администрации Мурманской области в 7-а классе Зверосовхозской средней школы (рис. 15.03).

Соответственно классификатору, предложенному также Управлением Образования, были получены данные, отраженные на рисунке 15.03 (табл. 15.1 и табл. 15.2).

Если учесть «стартовую» ситуацию в экспериментальных классах, то эти данные достаточно отчетливо характеризуют рост математического уровня учеников.

В подтверждение рассмотрим также графики, представляющие (в процентном отношении) результаты написания четырех контрольных работ (рис. 15.04) в графическом виде (рис. 15.04, внизу) в этой же школе, полностью подтверждающие мнение учителя. На левом из них отражена количественная успеваемость, на правом – качественная. «Взлет» качества успеваемости к окончанию прохождения раздела далеко не случаен.

Как показали многолетние наблюдения, начало изучения новой темы сопровождается снижением успехов учащихся. Особенно ярко это проявляется в том случае, если в использовании визуальных материалов наблюдался значительный перерыв.

В силу того, что в данных материалах практически на каждом этапе происходит повторение и закрепление пройденного (что так трудно осуществить в обычных учебниках и учебных пособиях), по истечении некоторого времени темп усвоения (и прочность запоминания) материала сначала восстанавливается, а затем значительно ускоряется (увеличивается). Именно этим мы объясняем различие в результатах текущих и итоговой контрольных работ.

В ходе работы мы накапливали сведения о результатах действия визуальных материалов, учитывали промахи и совершенствовали удачные модели, которые передавали учителям других школ.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ 7-й класс

1. Разложить на множители:
   $3ab - 3a$
   $20x^4y^3 + 15x^3y^2$
   $0{,}01x^2 - 1$
   $c^2 + 4bc + 4b^2$

2. Преобразовать в многочлен:
   $(y-7)^2$
   $(-6x+a)^2$
   $(4a+5b)(4a-5b)$
   $(8e-1)(1+8e)$

3. Вычислить: $20\ ,7 \cdot 12{,}5 - 12{,}5 \cdot 2{,}7$

4. Проверить, верно ли равенство: $m-n-p(m-n)=(m-n)(-p+1)$

5. В данном выражении изменить один из коэффициентов так, чтобы получившийся трехчлен можно было бы представить в виде квадрата двучлена: $36x^2 + 8xy + y^2$

Табл.15.1. Классификация результатов выполнения работы в баллах

Каждое правильно выполненное задание оценивается в баллах	
Задание №1 – 1 балл Задание №2 – 1 балл Задание №3 – 2 балла Задание №4 – 2 балла Задание №5 – от 3 до 5 баллов	Неверно выполненное задание – 0 баллов Не приступил к выполнению задания «–» Максимальное количество баллов – 19
Оценка – ставится при условии	
«**5**» – 13-19 баллов «**4**» – 10-12 баллов «**3**» – 6-9 баллов «**2**» – менее 6 баллов	За недочеты снижается 0.5 балла

Табл.15.2. Результаты проверочной работы
(Зверосовхозская школа Кольского округа Мурманской области)
7-а класс (писали 27 человек)

Получили баллы (в абсолютных цифрах)						
17-19	14-16,5	13-14	10-12,5	8-9,5	6-7,5	менее 6
–	**9**	**5**	**5**	**3**	**3**	**4**

Получили оценки (в процентах)			
«5»	«4»	«3»	«2»
51,8	**18,5**	**14,8**	**14,8**

Рис. 15.03.

Результаты контрольного среза по алгебре
в 7-а классе Зверосовхозской средней школы (1996 год):
содержание работы (в центре), классификатор (наверху), итоги среза (внизу)

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ № 1 (8-й класс)

1. Найдите диагональ прямоугольника, если одна его сторона равна **8** *см*, а периметр **46** *см*.
2. Боковая сторона равнобочной трапеции равна **10** *см*, большее основание равно – **17** *см*, высота – **8** *см*.
   а) найдите проекцию боковой стороны на большее основание;
   б) вычислите среднюю линию трапеции.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ № 2 (8-й класс)

1. Катет прямоугольного треугольника **40** *см*, противолежащий ему угол равен $\mathbf{35^{0}24^{\prime}}$. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника
2. В ромбе $ABCD$ диагональ BD равна **a**, острый угол A равен 2α. Найдите:
   а) AB и AC;
   б) Расстояние от вершины B до середины стороны AD

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ № 3 (8-й класс)

Точки $A(\mathbf{5};\mathbf{4})$, $B(\mathbf{4};\mathbf{-3})$, $C(\mathbf{1};\mathbf{1})$ являются вершинами треугольника ABC.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Составьте уравнение окружности с центром в точке A и проходящей через точку B.
в) Найдите длину медианы, проведенной к основанию треугольника.
(*) г) Считая вершинами параллелограмма $ABCD$ данные точки A, B, C, найдите координаты вершины D.

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ № 4 (8-й класс)

1. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна **9** *см*, диагональ – **15** *см*.
2. Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(\mathbf{-1};\mathbf{-1})$ и $B(\mathbf{5};\mathbf{-5})$.

(*) 3. Найдите радиус окружности, вписанной с равнобедренный треугольник с основанием $\mathbf{6a}$ и высотой $\mathbf{4a}$.

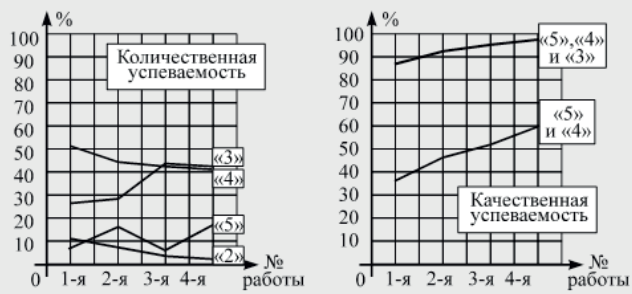


Рис. 15.04.

Результаты контрольных срезов по геометрии в 8-а классе Зверосовхозской средней школы (1997 год): содержание работы (в центре), итоги срезов (внизу)

Дальнейшие эксперименты показали прямую зависимость результатов обучения от качества материалов, их ориентации на классы в целом и отдельные группы учащихся в частности.

Очередные данные были получены на основании эксперимента, проводимого в «параллели» седьмых классах школы №3 поселка Мурмаши Кольского округа Мурманской области.

Распределение результатов первой проверочной работы «Степень с натуральным показателем», проведенной до начала эксперимента, представлено в таблице 15.3 рисунка 15.05.

Контрольная работа «**Степень с натуральным показателем**» (7-й класс)

1. Найдите значение выражения $-12c^3$ при $c=-\frac{1}{2}$.
2. Выполните действие: а) $x^7\cdot x^{12}$; б) $x^{12}:x^3$; в) $\left(x^6\right)^3$; г) $\left(3x^6\right)^4$.
3. Упростите выражение: а) $5x^4y\cdot\left(-3x^3y^3\right)$; б) $\left(-2xy^4\right)^4$.
4. Вычислите: $\frac{5^0\cdot 52}{25^4}$
5. Упростите выражение: а) $\left(-2\frac{1}{2}a^3b\right)^4\cdot 3\frac{1}{5}a^8b^5$; б) $x^{2n}\cdot\left(x^{n-1}\right)^2$.

Табл.15.3. «Степень с натуральным показателем»

Оценки	7-а	7-б	7-в	7-г	Итого
«5»	4	0	0	0	4
«4»	4	3	3	1	11
«3»	16	15	14	13	51
«2»	3	10	10	14	36
Итого	27	28	27	27	108

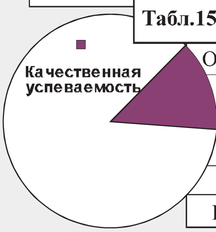


Рис. 15.05.

Результаты 1-го среза по алгебре в 7-х классах школы №3 поселка Мурмаши (1997 год): содержание работы (наверху), итоги среза (внизу)

Тема «Формулы сокращенного умножения», была также изучена, в основном, по традиционным учебным материалам, визуальные задания применялись на отдельных этапах ее изучения. Контрольная работа и результаты ее выполнения восьмиклассниками отражены в таблице 15.4 (рис. 15.06).

Контрольная работа «**Формулы сокращенного умножения**» (7-й класс)

1. Преобразуйте в многочлен:

а) $(2x-1)^3$; б) $(2a+c)^2$; в) $(4b+5c)(4b-5c)$.

2. Упростите выражение $(x+y)(x-y)-(x^2+3y^2)$.

3. Упростите выражение:

а) $16y^2-0,25$; б) $a^2+10ab+25b^2$.

4. Решите уравнение: $(5-x^2)-x(2,5+x)=0$.

5. Выполните действие: $(y+b)^2(y-b)^2$.

Табл.15.4. «Формулы сокращенного умножения»

Оценки	7-а	7-б	7-в	7-г	Итого
«5»	**3**	**0**	**0**	**0**	**3**
«4»	**9**	**5**	**9**	**9**	**32**
«3»	**10**	**11**	**11**	**11**	**43**
«2»	**3**	**6**	**7**	**8**	**24**
Итого	**27**	**22**	**27**	**26**	**102**

Рис. 15.06. Результаты 2-го среза по алгебре в 7-х классах школы №3 поселка Мурмаши (1997 год): содержание работы (наверху), итоги среза (внизу)

Тема «Прямая на плоскости. Графики $y=x^2$ и $y=x^3$» была изучена полностью по экспериментальным материалам (рис. 15.7, табл. 15.5).

Контрольная работа «**Прямая на плоскости**» (7-й класс)

1. Функция задана формулой $y = \mathbf{2}x - \mathbf{15}$. Определите:
   а) значение y, если $x = -\mathbf{3{,}5}$;
   б) значение x, при котором $y = -\mathbf{5}$;
   в) проходит ли график функции через точку $K(\mathbf{10}; -\mathbf{5})$.
2. а) Постройте график функции $y = -\mathbf{3}x - \mathbf{3}$.
   б) Укажите с помощью графика, при каком значении x значение y равно $-\mathbf{6}$.
3. В одной и той же системе координат постройте графики функций:
   а) $y = \mathbf{2}x$; б) $y = -\mathbf{24}x + \mathbf{19}$.
5. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:
   $y = -\mathbf{10}x - \mathbf{9}$ и $y = -\mathbf{24}x + \mathbf{19}$.
4. Задайте формулой линейную функцию, график которой параллелен прямой $y = -\mathbf{8}x + \mathbf{11}$ и проходит через начало координат.
5. Дополнительное задание. Постройте график функции $y = x^2$.
   Определите по графику, при каких значениях x значение y равно **9**.

Табл.15.5. «Прямая на плоскости»

Оценки	7-а	7-б	7-в	7-г	Итого
«5»	14	10	9	5	38
«4»	6	6	10	9	31
«3»	4	6	7	10	27
«2»	1	2	1	3	7
Итого	25	24	27	27	103

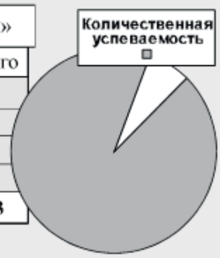


Рис. 15.07. Результаты 3-го среза по алгебре в 7-х классах школы №3 поселка Мурмаши (1997 год): содержание работы (наверху), итоги среза (внизу)

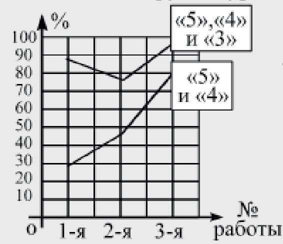
Теперь (на материале этих же работ) проследим прирост учебных возможностей самого сильного и самого слабого из классов в отдельности (рис. 15.8, табл. 15.6 и табл.15.7).

В самом сильном классе (7-а) в результате использования визуальных материалов в теме «Графики. Прямая на плоскости» резко возросла качественная успеваемость, при относительной стабилизации количественной.

Тема	Результаты в %	Успеваемость
Степень с натуральным показателем		1 количественная
Формулы сокращенного умножения		
Прямая на плоскости		2 качественная

Табл.15.6. **Результаты проверочных работ 7-а класса школы №3 поселка Мурмаши Кольского округа Мурманской области**

№ работы	Процент кач-ва	Процент кол-ва
1	**29,6**	**88,8**
2	**40,7**	**77,7**
3	**80**	**96**



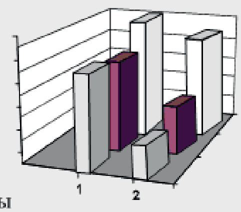
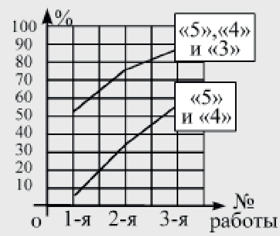


Табл.15.7. **Результаты проверочных работ 7-в класса школы №3 поселка Мурмаши Кольского округа Мурманской области**

№ работы	Процент кач-ва	Процент кол-ва
1	**3,7**	**51,8**
2	**34,6**	**76,9**
3	**51,9**	**88,8**



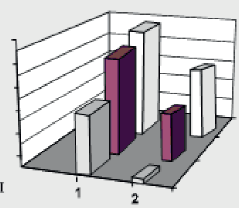


Рис. 15.08. Прирост учебных возможностей в период проведения экспериментов в 7-х экспериментальных классах школы №3 поселка Мурмаши (1997 год): самого сильного (вверху) и самого слабого (в центре)

Результаты обучения наиболее слабого из классов (7-в), в котором имеется несколько человек, испытывающих весьма серьезные затруднения в обучении по многим предметам, также показывают резкий рост качественной успеваемости, с одновременным ростом количественной успеваемости.

Аналогичный анализ результатов по всем классам в совокупности дан в табл. 5.3.8. (рис. 15.08).

Табл.15.8. Результаты проверочных работ 7-х классов школы №3 поселка Мурмаши Кольского округа Мурманской области

№ работы	Процент	
	кач-ва	кол-ва
1	**13,8**	**66**
2	**34,3**	**78**
3	**67**	**96**

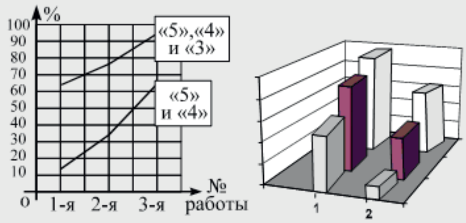


Рис. 15.09. Прирост учебных возможностей в период проведения экспериментов во всех в 7-х классах школы №3 поселка Мурмаши (1997 год)

Полученные данные подтверждаются сравнением результатов обучения по традиционным и экспериментальной методикам в 6-х классах школы №34 г. Мурманска.

В конце 1996/97 учебного года администрацией школы была предложена контрольная работа по математике для учащихся шестых классов. Всего писало работу 5 классов (78 человек), из них два экспериментальных (6-а и 6-д) класса (рис. 15.10, табл. 15.9). Отметим, что в рассматриваемый период обучения учебные возможности большинства учащихся, как в контрольных, так и в экспериментальных классах приблизительно равны (количественная успеваемость). Однако качественные результаты текущего обучения в экспериментальных классах, где были в достаточной мере применены приемы и средства визуальной методики преподавания, значительно выше (рис. III.11-III.15 на стр. 557-561).

Контрольная работа по математике	6-☐ класс школа № 34 I вариант

1. Найдите значение выражения $30 - 23{,}1 \cdot \left(5\frac{7}{20} - 4\frac{6}{35}\right)$
2. Решите уравнение $3{,}6 + 2x = 5x + 1{,}2$
3. Веревку длиной $32{,}8\,м$ разрезали на **2** части так, что длина одной части стала в 3 раза больше другой. Найдите длину каждой части веревки.
4. Цена помидор $14\,000\,руб$ за $1\,кг$. Сколько будут стоить помидоры, если цену на них снизить на 20%?
5. Найдите число n, если 60% от n равны $3/7$ от 42

Табл.15.9. Результаты контрольной работы по математике (6-е классы школы №34 г. Мурманска)

Класс (писало)	Оценка «2»	«3»	«4»	«5»
6-а (22) [эксп.]	3	4	6	9
6-б (18) [контр.]	3	12	3	0
6-в (16) [контр.]	3	9	2	2
6-г (17) [контр.]	5	6	6	0
6-д (22) [эксп.]	3	6	11	2

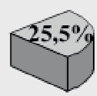
Экспериментальные классы

Качественная успеваемость

Количественная успеваемость

Контрольные классы

Качественная успеваемость



Количественная успеваемость

Рис. 15.10. Результаты среза по алгебре в 6-х классах школы №34 г. Мурманска (1997 год): содержание работы (наверху), итоги среза (внизу)

В более поздние периоды обучения эта дистанция (как показывают данные срезов в 8-х классах) увеличивается.

В качестве примера приведем результаты выполнения работы по алгебре «Квадратные уравнения» учениками экспериментальных (8-а и 8-б) и контрольных (8-в и 8-г) классов той же школы (рис. 15.11).

Контрольная работа по алгебре

8-☐ класс
школа № 34

I вариант

1. Решите уравнение:
   1) $x^2 + 5x = 0$
   2) $5x^2 + 3 = 0$
   3) $\sqrt{3}x^2 - 5x + 2\sqrt{3} = 0$
   4) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = 2$
   5) $x^2 - 7x = 847^2 - 7 \cdot 847$
2. Периметр прямоугольника равен $34\,см$, а его диагональ $13\,см$. Найдите стороны прямоугольника.
3. Найдите значение выражения $a^2 + b^4 + c^2 + 2ab^2 + 2ac + 2b^2c + 4$ при $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$
4. Найдите графически положительный корень уравнения $x^2 = x + 1$
5. Решите квадратное уравнение с помощью выделения полного квадрата $x^2 + 10x + 9 = 0$

Табл.15.10. Результаты контрольной работы по алгебре 8-е классы школы №34 г. Мурманска

Класс (писало)	Количество правильно решенных задач на класс					
	1	2	3	4	5	6
8-а (19) [эксп.]	**0**	**2**	**2**	**8**	**5**	**1**
8-б (18) [музык.]	**1**	**2**	**7**	**5**	**3**	**0**
8-в (16) [контр.]	**4**	**9**	**1**	**1**	**0**	**0**
8-г (11) [контр.]	**6**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**

Табл.15.11. Результаты контрольной работы по алгебре (в баллах по классификатору) 8-е классы школы №34 г. Мурманска

Класс (писало)	Количество баллов с учетом полного решения задачи							
	0-4	5-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
8-а (19) [эксп.]	**3**	**2**	**1**	**4**	**4**	**2**	**2**	**1**
8-б (18) [музык.]	**1**	**2**	**2**	**6**	**5**	**2**	**0**	**0**
8-в (16) [контр.]	**3**	**10**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**
8-г (11) [контр.]	**1**	**8**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Рис. 15.11. Результаты среза по алгебре в 8-х классах школы №34 г. Мурманска (1997 год): содержание работы (вверху), итоги среза (в центре и внизу)

Для того чтобы наиболее полно проанализировать и сравнить результаты обучения в этих и контрольных классах той же школы, классификатор к проверочной работе (рис. 15.11) был составлен так, чтобы неудачи предыдущего обучения не слишком сильно влияли на результаты обработки текущих данных.

Задание №1.

1. Разложение на множители и определение корней (**1** балл).
2. Перенесение за знак равенства, свойство арифметического корня (**2** балла).
3. Вычисление дискриминанта по формуле, свойство арифметического корня, исключение иррациональности в знаменателе, вычисления (**4** балла).
4. Оформление ОДЗ, подведение под общий знаменатель, приведение подобных слагаемых, приравнивание нулю числителя дроби, решение квадратного уравнения, вычисления (**6** баллов).
5. Преобразования левой и правой частей, определение количества и качества корней, решение квадратного уравнения, вычисления, рациональность решения (**8** баллов).

Задание №2.

1. Геометрическая интерпретация условия (**1** балл).
2. Формулы полупериметра прямоугольника и площади прямоугольника (**1** балл).
3. Решение уравнения (**2** балл).
4. Вычисления (**1** балл).

Задание №3.

1. Рациональное решение (**5** баллов).
2. Вычисления при рациональном решении (**1** балл).
3. Вычисления при нерациональном решении (**3** балла).

Задание №4.

1. Определение вида кривых (**1** балл).

2. Построение прямой (**2** балла).

3. Построение параболы (**1** балл).

4. Выбор корня по условию задачи (**1** балл).

Задание №5.

1. Выделение полного квадрата (**2** балла).

2. Разложение на множители и определение корней (**1** балл).

Количественные данные написания работы отражены в таблице 15.10 и таблице 15.11 (рис. 15.11).

Показательно что визуальная методика преподавания математики несмотря на ежегодное уменьшение количества часов, отводимых на математические дисциплины в 8-б (музыкальном) классе, дала частичную компенсацию времени, сохранив при этом возможность продолжения обучения математике для учеников этого класса.

Значительный отрыв в результатах 8-а мы объясняем тем, что на его уроках постоянно поддерживался «режим визуального поиска» (см. рис. III.05-III.16 на стр. 551-562).

Это еще раз подтверждает один из главных тезисов нашей работы – механизмы работы визуального мышления можно рассматривать как универсальные.

Выводы

Основные итоги мы представляем в схеме (рис. 15.12), отражающей основные положения и результаты нашего исследования.

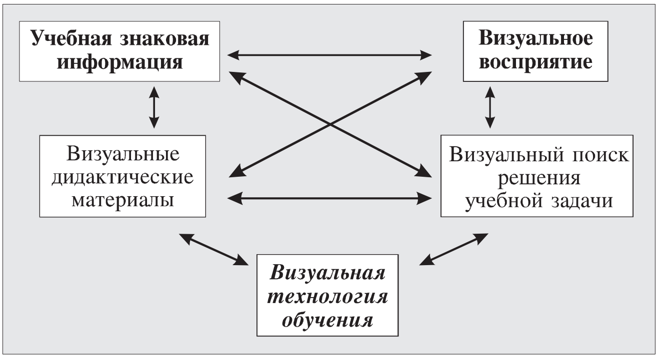


Рис. 15.12. Взаимосвязи важнейших результатов данного исследования

1. Многочисленные эксперименты показали, что можно придти к положительным результатам обучения быстрее, обогащая традиционные методы обучения планомерным и постоянным применением отдельных элементов визуального урока. Характерной особенностью этих уроков является то, что конструирование их ведется на основе визуальных комплектов, позволяющих достаточно полно дифференцировать их по типу целей и методов обучения. К изготовлению материалов, обеспечивающих такой урок, предъявляются особые требования. Прежде всего, необходимо продумать, как визуально ясно и доступно оформить (представить) существенные моменты содержания иллюстрируемого фрагмента, учитывать трудности, которые испытывает большинство учеников, читающих различные учебные тексты. Данные материалы следует формировать так, чтобы ученик мог самостоятельно реализовать заложенные в них идеи (в аналогичных случаях). Особенно трудно воспринимаются тексты, «оснащенные» математическими выкладками, поэтому формульные «процедуры» должны быть оформлены так, чтобы можно было их не только понять, но и быстро отыскать в них необходимые ориентиры и подсказки.

2. Наибольший интерес представляет собой подход к формируемой визуальной среде обучения как к пакету обучающих программ. Гипертекстовые связи, реализующиеся в каждой такой программе, позволят учителю сформировать обучающий и контролирующий режимы так, чтобы все возможные функции каждого из перечисленных дидактических средств были задействованы наиболее полно и с максимальной отдачей. В одних случаях тест может выступать как тренажер, и наоборот. В других серия возьмет на себя функции контроля знаний, умений и навыков учащихся с учетом уровня их подготовленности и возможностей. В третьих – тренажер или тест выполнят роль подсказки для решения наиболее трудных заданий серии и т.д. и т.п. Учитель, таким образом, получает возможность предъявления одного и того же практического материала в заданиях, различных по назначению и оформлению.

3. Для экспериментальной проверки гипотезы были выбраны три функции обучения математике. Здесь представлены данные по параметрам: формирование алгоритмической культуры в различных ситуациях, перенос полученных умений и навыков в новую ситуацию, повышение уровня поисковой деятельности учащихся. Результаты экспериментов убедительно показали правильность нашей гипотезы в этой ее части.

4. Проведенный в разных классах и на уроках разных учебных дисциплин школ Мурманской области эксперимент показал, что визуальные дидактические материалы позволяют с одной стороны обеспечить прохождение программного материала, рекомендуемого государственным стандартом, практически всеми учениками, независимо от их способностей, подготовки и возможностей. С другой стороны эти материалы предусматривают максимальную дифференциацию, поскольку включают в себя последовательное увеличение сложности уровня заданий: от упражнений необходимого минимума до заданий повышенной сложности.

5. Поставив задачу использования визуального мышления учащихся на уроках математического цикла, мы четко осознавали, что этот процесс растянут во времени, нуждается в постоянном обновлении и закреплении. Мы убедились, что отдельные этапы этого процесса следует реализовать не только при изучении нового материала. Богатые возможности представляют собой моменты пропедевтики нового понятия, а также периоды повторения и закрепления.

Многолетние наблюдения за результатами работы по визуальным дидактическим материалам в экспериментальных классах позволяют сделать два основных вывода: в «режиме визуального обучения»

- восстановление утраченных знаний и навыков осуществляется в достаточно быстром темпе и может происходить с одновременным расширением и углублением ЗУНов по соответствующей теме;
- умения и навыки, сформированные в «режиме визуального обучения», достаточно прочно закрепляются в долгосрочной памяти учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обучение различным предметам в школе связано со специфической материализацией изучаемых объектов, операций над ними и их взаимосвязей. Подобная знаковая материализация содержания учебного материала позволяет организовывать, направлять зрительное восприятие ученика. Этот процесс мы обозначили как “живое созерцание” и определили его основные этапы: анализ визуальной информации, распознавание стандарта и составление плана работы.

Математика, как и каждая школьная дисциплина, имеет не только определенное содержание, но предполагает и соответствующим образом структурированное, а вследствие этого – и специально организованное движение мысли, постигающей это содержание. Это постижение идет по двум каналам: образному и знаковому. Данным каналам соответствуют язык образов и язык знаков. Роль интерпретатора для них обоих исполняет третий – текст, напечатанный или произнесенный вслух.

Умение активно воспринимать и перерабатывать визуальную математическую информацию развивается в результате длительной и кропотливой работы учителя и ученика. Существенную роль могут играть специальные приемы введения и преобразования информации – расчленение на ее отдельные фрагменты, визуально грамотное оформление ее данных, постоянное взаимодействие трех языков предъявления информации.

Рисунок позволяет представить формулу (визуально определить ее элементы и обозреть структуру), ввести новые понятия (наглядно продемонстрировать их свойства, показать их связи и операции над ними), изложить положения теории (*умо-зрительно* объединить несколько ее фактов в единый зрительный образ и продемонстрировать ход рассуждений), выявить подсказку к решению задачи. Формульный способ также содержит в себе некоторый запас наглядности. Мы предлагаем расширить, обогатить словарь символов за счет знаков, в которых налицо слияние “имени и образа” (слова-термины и мини-рисунки). Вербальный способ трудно поддается непосредственному зрительному восприятию, поэтому здесь необходимы некоторые специфические приемы. К первому из них мы относим условие перевода фрагментов текста в формулу и рисунок, ко второму – обогащение словарного запаса, введение понятных терминов, позволяющих воссоздать соответствующий зрительный образ, увидеть и запомнить отличительные, существенные особенности изучаемого понятия.

Решая учебную задачу, учащийся тем или иным образом преобразовывает исходные данные. Для правильных действий ему необходимо распознать тот визуальный знаковый стандарт, к которому можно свести задачу. В связи с этим мы выделили три основные стандартные модели, направляющие мысль ученика в нужную “направлении” (изображения основных понятий, визуализация свойств этих понятий и операций над ними и иллюстрации связей между понятиями).

Визуализация математических понятий дело сложное и тонкое. В большинстве случаев иллюстрациям в учебниках и учебных пособиях не хватает наглядности, простоты и динамичности. Процесс перевода слова в образ может сопровождать все основные этапы изучения вербального фрагмента. При этом значительно возрастают требования к выполнению рисунка-иллюстрации. Изображение основных математических понятий должно удовлетворять следующим требованиям: точность построений, визуальный “акцент” на необходимых деталях, наличие “опорных точек”, т.е. таких элементов стандарта, которые помогают быстро и безошибочно построить или восстановить искомый образ. Визуальные образы не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение таких образов в учебный процесс предполагает не только их последовательное восстановление, но при необходимости расчленение, сборку отдельных деталей в единое целое – новое образование. Этому служит умение выделить на визуальных стандартах важнейшие свойства понятий, отразить определенные операции над ними. Здесь налицо целесообразность активного использования различного рода визуальных дидактических материалов.

Формирование визуального стандарта может осуществляться последовательно, переходя от наивных представлений к точной его “конструкции” в свернутом виде. Мы предположили (и это подтвердилось экспериментально), что при достаточно долгой, кропотливой и упорной работе у учеников, начиная с некоторого момента, возникает способность вовлекать в процесс мышления зрительные стандарты, которые служат “проводниками” в проведении рассуждений. Эти образы снимают жесткую логику и чрезмерную абстрактность многих учебных идей и понятий, одновременно позволяя углублять и расширять представления о них.

Учебные задачи различаются по степени сложности их решения, возможности проникновения учащегося в существенные моменты содержания. Простая учебная задача обычно решается в ходе “живого созерцания”. Анализируя структуру, сопоставляя отдельные блоки, выявляя общее и различное, учащийся может мысленно составить план работы. Задача “с изюминкой” требует от ученика умения отыскать “ориентир”, увидеть подсказку, которая непременно присутствует в ней, но не всегда выведена наружу. Догадка кроется в своеобразии предъявленного информационного сообщения, в том, что отличает его от стандартных, привычных задач. Для того чтобы догадка пришла как можно скорее, информацию или ее блоки следует представить визуально так, чтобы наружу были выведены все необходимые элементы и структура текста, рисунка и формулы, составляющих ее содержание.

Поиск решения математической задачи начинается с наблюдения, в результате которого становятся возможными первые этапы восприятия и переоформления данных. Такое переоформление может осуществляться с помощью перевода, благодаря которому удается обнаружить ориентир. В качестве ориентира мы принимаем тот привычный результат анализа данных, который позволяет выявить существенно общее, присущее отдельным блокам или элементам информационного сообщения. К этой группе следует отнести стандарты формульного или геометрического характера, структуру информационных (логически основополагающих) связей. На любом этапе решения задачи имеющуюся информацию можно рассматривать как исходную – явно заданную. Дополнительные условия приводят данные «в состояние готовности» к преобразованиям. Осуществив их, мы получим набор некоторых новых объектов, которые позволяют перейти к очередному этапу. И весь процесс либо начинается заново, если ответ не получен, либо заканчивается, если результат достигнут.

Поставив задачу формирования навыков поисковой деятельности учащихся, мы четко осознавали, что этот процесс растянут во времени, нуждается в постоянном обновлении и закреплении. Мы установили, что реализацию отдельных этапов этого процесса можно использовать не только при изучении нового материала. Богатые возможности представляют собой моменты пропедевтики нового понятия, а также периоды повторения и закрепления. Визуальные средства введения, закрепления и контроля учебных знаний весьма продуктивны в процессе самообучения (самообразования).

Составление плана работы с визуальной математической информацией является важным моментом в поисковой деятельности. Визуальный анализ данных, последующие преобразования образа и формулы позволяют упростить и значительно сократить решение математической задачи. Правильно и грамотно составленный мысленный план позволяет рационализировать, опустить "лишнее", увидеть ответ до его полного оформления. Выделение определенных элементов, отыскание одинакового и различного является одним из главных средств такого анализа. Восприятие сложных знаковых структур у разных школьников протекает по-разному и является процессом весьма сложным и противоречивым. Мы выявили, что имеется возможность несколько упорядочить его, активизировать визуальное мышление ученика, которое (в совокупности с логикой) и может дать желаемый результат.

Представление материалов информационных тетрадей на мониторе значительно упрощает дело. Информацию отдельной страницы или информационной схемы можно вводить постепенно, последовательно обогащая образ понятия все новыми сведениями. Это позволит показать, а не просто "рассказать"– теоретически обосновать – даже достаточно трудные переходы от понятия, поддающегося визуализации, к абстрактным формульным выкладкам. Визуальные задачи предназначены для формирования визуального образа, помогающего разрешить возникающие проблемы. Представляя прототипы компьютерных задач, мы ориентировались на то, что учителю полезно четко знать, какую именно сторону мышления своего ученика он может усилить при ее решении. Оформление решений визуальных задач может производиться различными способами. Это зависит от подготовки ученика и от текущей (конкретной) цели обучения. Легкие задачи полезно решать и обосновывать ход рассуждений устно – активизируется мыслительная деятельность ученика и развивается его речь. Более сложные задачи могут оснащаться различного вида подсказками – их можно варьировать, демонстрируя различные модели преобразований рисунка или формулы. Решение трудных заданий следует проводить в тетради, активно "экспериментируя" – работая со зрительными образами.

Структура визуальных блоков должна представлять собой непротиворечивую взаимосвязь ее основных компонентов: страниц информационной тетради, тестов, матриц и т.д., позволяющих накапливать, восстанавливать и обобщать необходимые знания. Существенной особенностью визуальных материалов является их потенциальная возможность инициировать спонтанное формирование новых знаний в процессе свободной деятельности учащегося. Другой возможностью является их целенаправленное использование преподавателем, умеющим использовать язык образов для передачи знаний и развития интеллекта своих учеников. Наибольший интерес представляет собой возможность гипертекстовых связей между содержанием теоретического раздела темы и списком практических "приложений" к ней.

Действительно, при затруднении в решении задачи или восприятии информационной схемы, можно перейти к банку визуальных подсказок, получить справку в виде текста, рисунка или формулы.

Информационный (в перспективе – компьютерный) модуль, с одной стороны, действует достаточно «жестко» – полнота и последовательность изложения теории, уровень трудности практических упражнений и их объем задаются учителем (программой). С другой стороны, в свободном режиме "сценарий" изучения ее содержания можно строить различными способами. Можно вернуться к забытому или недостаточно освоенному положению, пропустить то, что на первый взгляд, кажется легким. Допустимо вообще нарушать "линейность" изучения текста – выбирать только необходимое (формулировки положений, справочный материал, разобранные примеры и т.д.) и переходить к новым страницам. Зрительные модели геометрического и формульного характера могут работать как обоснования отдельных фрагментов теории, как материал для создания аналогий, как справочный материал.

Работа с визуальными задачами (особенно в режиме «Обучение») может поддерживаться страницами информационной тетради или фрагментами специально составленной информационной схемы, содержание которых может быть очень гибким, "настроенным" на возраст и общий уровень интеллекта отдельных учебных групп. Динамичность, положенная в их основу, позволяет использовать такой справочный материал в течение продолжительного времени, углубляя и расширяя ЗУНы учащихся.

Визуальные блоки, составленные из разного вида моделей, могут взять на себя важные функции обучения: использование и развитие визуального мышления на школьном уроке, выполнение «заказов» разноуровневого обучения, формирование навыков поисковой деятельности ученика, внедрение новой формы школьного урока. Такие уроки могут составляться разными учителями одного и того же предмета с последующим распространением наиболее удачных их сценариев. При соответствующей корректировке содержания их можно будет трансформировать с учетом профессиональной ориентации отдельных учебных групп.

Отметим одно важное обстоятельство. Чрезмерное увлечение визуализацией учебного материала может скорее навредить, чем сопутствовать успеху дела. Работа визуального мышления интересна, но достаточно трудна и непривычна – нетренированное зрение быстро утомляется. Визуальное обучение не может (да и не должно!) полностью подменять собою хорошо испытанные приемы и традиционные средства обучения. Визуальные дидактические материалы, при всей их наглядности и красочности, не могут заменить грамотно и содержательно написанные школьные учебники. Отдельные визуальные задачи полезно применять как можно чаще, однако полный визуальный урок должен быть скорее исключением, чем правилом.

Визуальная среда обучения со своими специальными "инструментами" и правилами "игры" – удобное и полезное средство обучения. Она может и должна применяться тогда, когда ученику есть возможность "увидеть и понять", а учителям передать "из глаз в смысл" то, чему они хотят их научить. Отличие данной среды от всех прочих в том, что опираясь на природный механизм получения человеком информации – зрение, становится возможным использовать и развивать визуальное мышление школьника, а значит и мышление вообще.

В ходе исследования была осуществлена экспериментальная проверка первой части гипотезы, для чего были прослежены два ведущих параметра развивающей функции обучения математике: развитие алгоритмического мышления и рост уровня поисковой деятельности учащихся. В результате мы установили, что новый подход к реализации принципа наглядности в обучении математике позволяет перейти от наивного взгляда на наглядность (как одного из вспомогательных средств обучения математике) к полноценному использованию визуального мышления школьника в процессе обучения.

Экспериментальная проверка второй части гипотезы, говорящей о возможности конструирования информационных сред, была реализована разработкой технологии создания визуальных сред в методике обучения другим школьным дисциплинам. Новое методическое обеспечение деятельности ученика позволяет по-новому решить проблему реализации принципа наглядности в обучении математики. При этом использование наглядных образов в обучении математике превращается из вспомогательного, иллюстрирующего приема в ведущее, продуктивное методическое средство, способное обеспечить при определенных условиях широкий спектр параметров математического развития учащихся.

Среди решенных **задач исследования** мы указываем:

Теоретическое обоснование роли визуального мышления в процессе обучения математике, заключающееся в уточнении характера деятельности ученика, включаемой в понятие “визуальное мышление”, исследовании особенностей представления и оформления содержания учебного знакового материала, анализе возможных способов его выражения, описания характера взаимосвязей между этими способами, определения основных принципов их использования.

Проведенный анализ психологической базы нашего исследования явился основой для постановки и решения тех методических задач, которые помогают успешной и продуктивной работе зрения (а значит и мышления) ученика.

Сформированы общие подходы к анализу взаимодействия ученика с информационной средой в процессе обучения, основанные на множественности форм представления и взаимосвязей учебных знаний. Разработаны методики: организации деятельности визуального мышления школьников при решении математических задач; формирования математических стандартных зрительных образов; образования на уроках математики навыков визуальной поисковой деятельности.

Создана визуальная информационная среда, предназначенная для хранения, структурирования и представления информации, передачи, переработки и обогащения учебных информационных данных, для полноценной работы визуального мышления на уроках математики и в других предметных областях школьного образования.

Сформирован специальный класс визуальных задач, позволяющих использовать и развивать визуальное мышление в ходе изучения учебной теории.

Предложены модели дидактического обеспечения использования и развития визуального мышления в процессе обучения математике, основанные на новых способах и приемах визуализации учебных математических текстов.

Разработаны модели нового вида уроков, на которых при изучении теории и решении практических задач основной упор ставится на визуальное восприятие учеником учебного знакового материала.

Выявлены возможности и перспективы применения визуальной технологии обучения математике в нематематических предметных областях основной и старших классов школы, основанные на новых подходах к организации продуктивной учебной деятельности в процессе обучения.

Таким образом, мы пришли к возможности разрешения ряда противоречий, сложившихся на данном этапе в преподавании математики в общеобразовательной школе.

1. Ликвидации противоречия между содержанием школьного образования и реальными потребностями общества в его результатах могут помочь различные информационные обучающие среды, направленные на более полное и активное использование природных возможностей учеников, позволяющие дать в сжатом и в визуально обозримом виде основные или необходимые сведения.

2. Противоречие между необходимостью увеличения объема школьного образования и возможностями учеников, получающими его можно устранить не только путем разумного увеличения сроков обучения в школе. Существенную помощь могут оказать общие подходы к способам введения, преобразования и переработки учебной информации на различных уроках школьного цикла.

3. Противоречие между возможностями обучаемых, владеющих общими приемами общения с информационной средой, и предлагаемыми им методами обучения в школе, можно «аннулировать» с помощью виртуальной реальности, создаваемой на экране монитора персональной ЭВМ. Общаясь с компьютерной учебной средой, можно непосредственно получать знания, самостоятельно отбирать нужное содержание, устанавливать индивидуальный режим и темп его изучения. При этом логическая составляющая обучения математике получит мощную поддержку со стороны визуального восприятия.

4. Противоречие между общими целями образования и существующими средствами достижения этих целей можно устранить, обогащая традиционные приемы обучения методами развивающего обучения. Визуальные способы организации учебного материала позволяют учителю проследить за реакцией ученика на конкретном этапе изучения материала; поставить вопросы, проверяющие усвоение каждого шага.

5. Развитие информационных технологий вызвало изменения в сфере сохранения и передачи учительских достижений. Противоречие между существующими формами сохранения и передачи методического и педагогического опыта и теми возможностями, которые дают педагогические технологии, можно устранить, разрабатывая и внедряя в учебный процесс новые информационные среды, обладающие избыточным наполнением и гибкой вариативностью.

6. Противоречие между математическим содержанием учебных текстов гуманитарных и естественнонаучных дисциплин и возможностями понимания школьниками их содержания в рамках конкретного школьного предмета наиболее трудно устранимо. Соответствующая информационная среда может позволить, хотя бы частично, ликвидировать несогласованность программ учебных дисциплин.

7. Противоречие между репродуктивными и развивающими способами обучения можно «погасить», используя средства и приемы визуального поиска решения задачи. Учебные тексты и традиционные упражнения легко превратить в визуальные задачи, решая которые ученики не только изучают теорию, но и участвуют в ее формировании.

Предложенные в исследовании визуальные формы и средства обучения не только (и не столько) элементы теории, но и практические инструменты дидактики, рекомендуемые к внедрению в конкретный учебный процесс.

Следует отметить громадную роль и настоятельную потребность в накоплении соответствующих банков визуальных дидактических материалов в рамках творческой деятельности конкретного учителя, нескольких учителей одного методического объединения, группы учителей разных школ и т.д., вплоть до центральных учебно-методических кабинетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Формирование и использование визуального стандарта

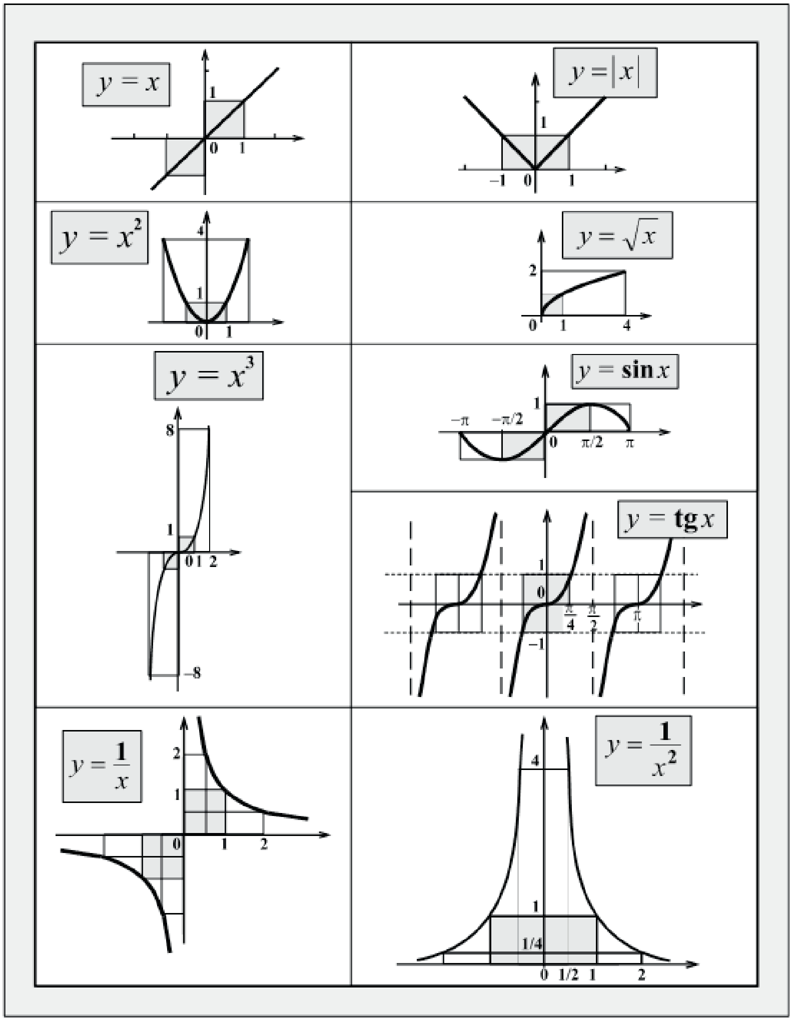


Рис. I.01.

«Направляющие прямоугольники»
в структуре графиков элементарных функций

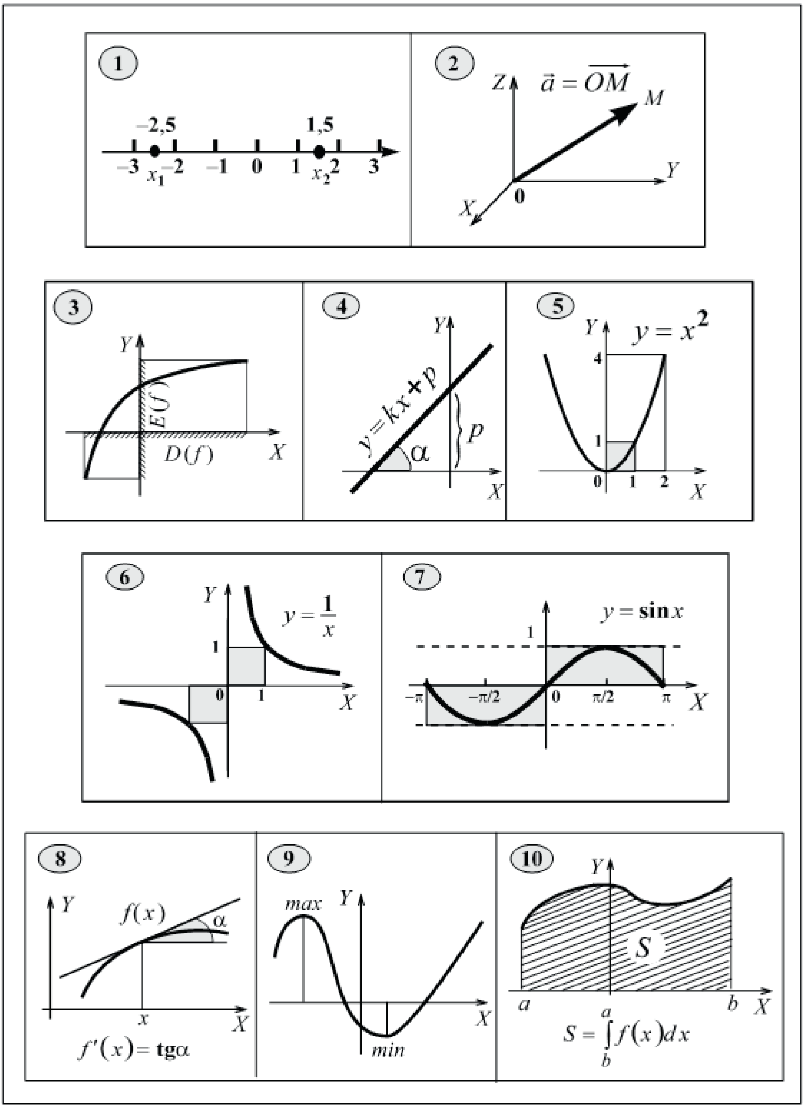


Рис. I.02.

Визуальные стандарты
важнейших математических понятий

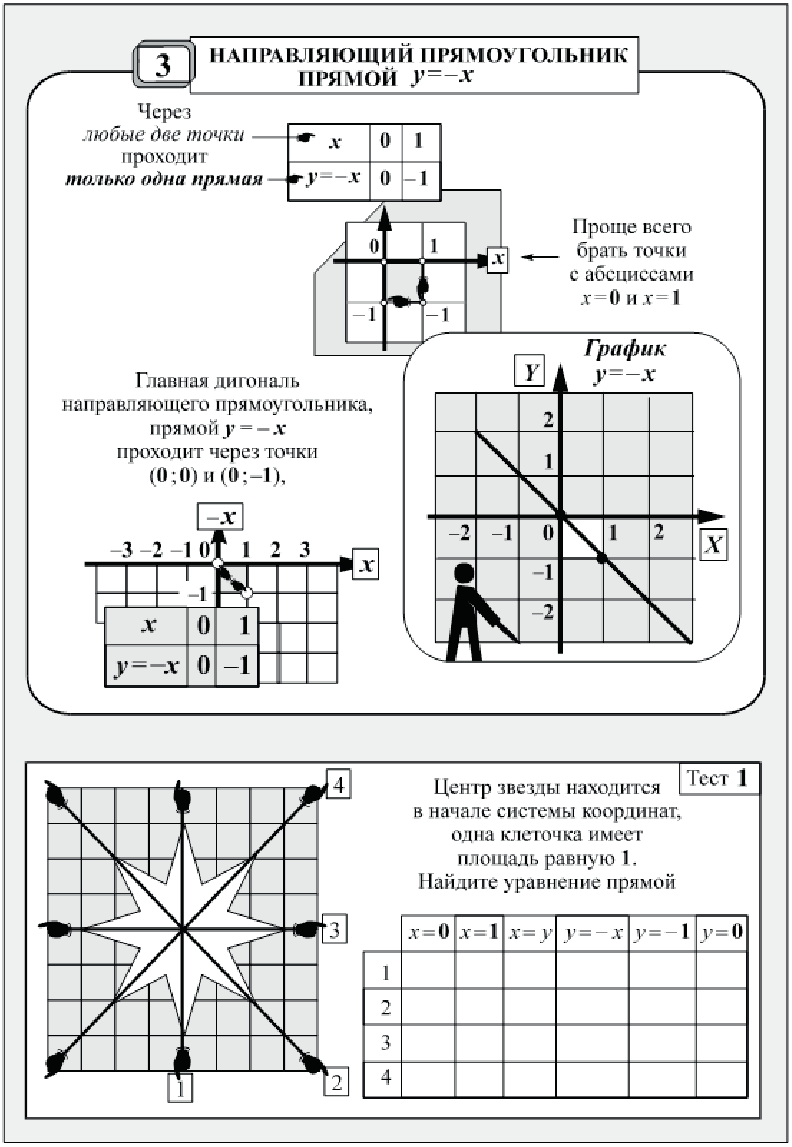


Рис. I.03.

Страница №2 визуальной тетради

«Направляющие прямоугольники прямой»

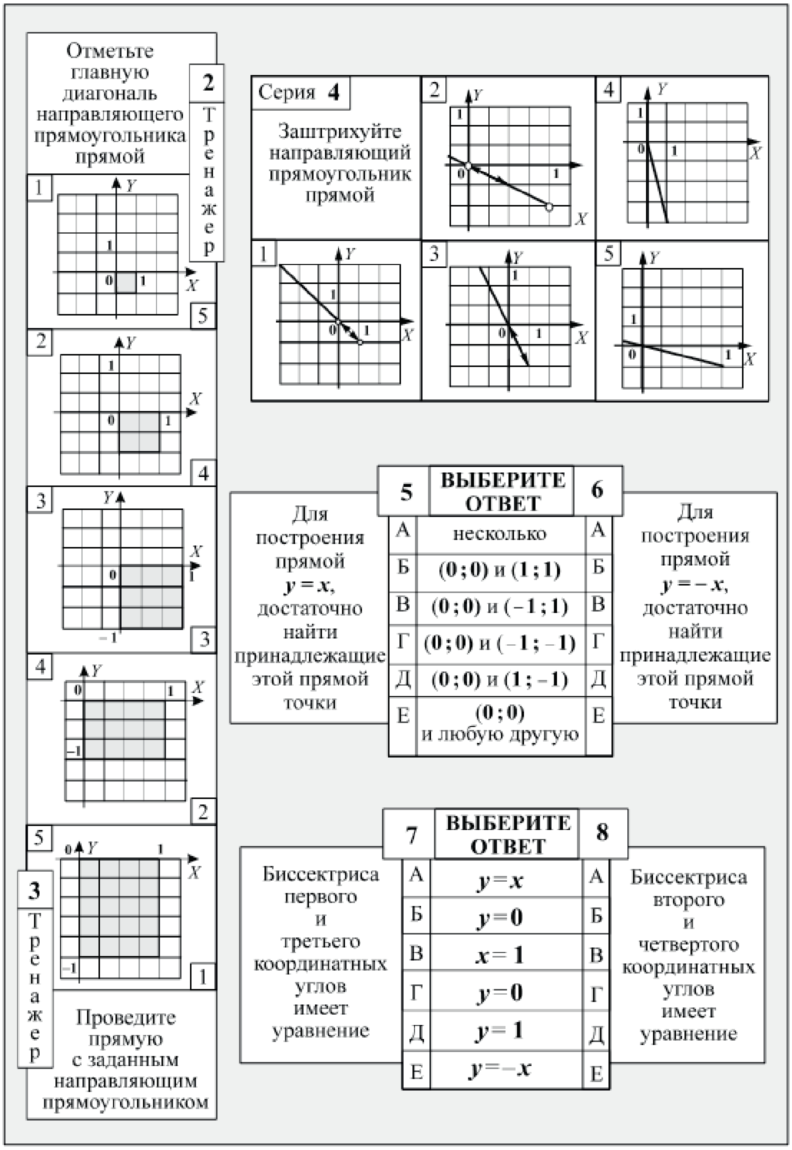


Рис. I.04.

Практические задания

на построение направляющих прямоугольников прямой

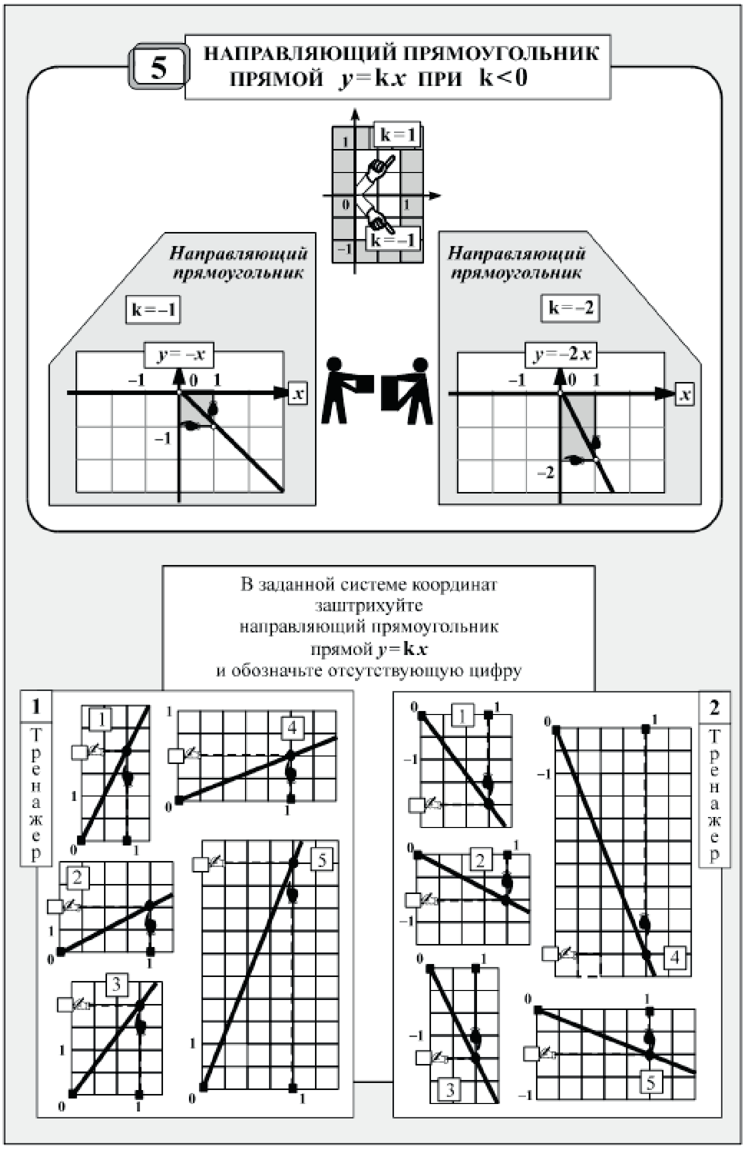


Рис. I.05.

Пояснения и практические упражнения к построению направляющих прямоугольников прямой с учетом значения ее параметра

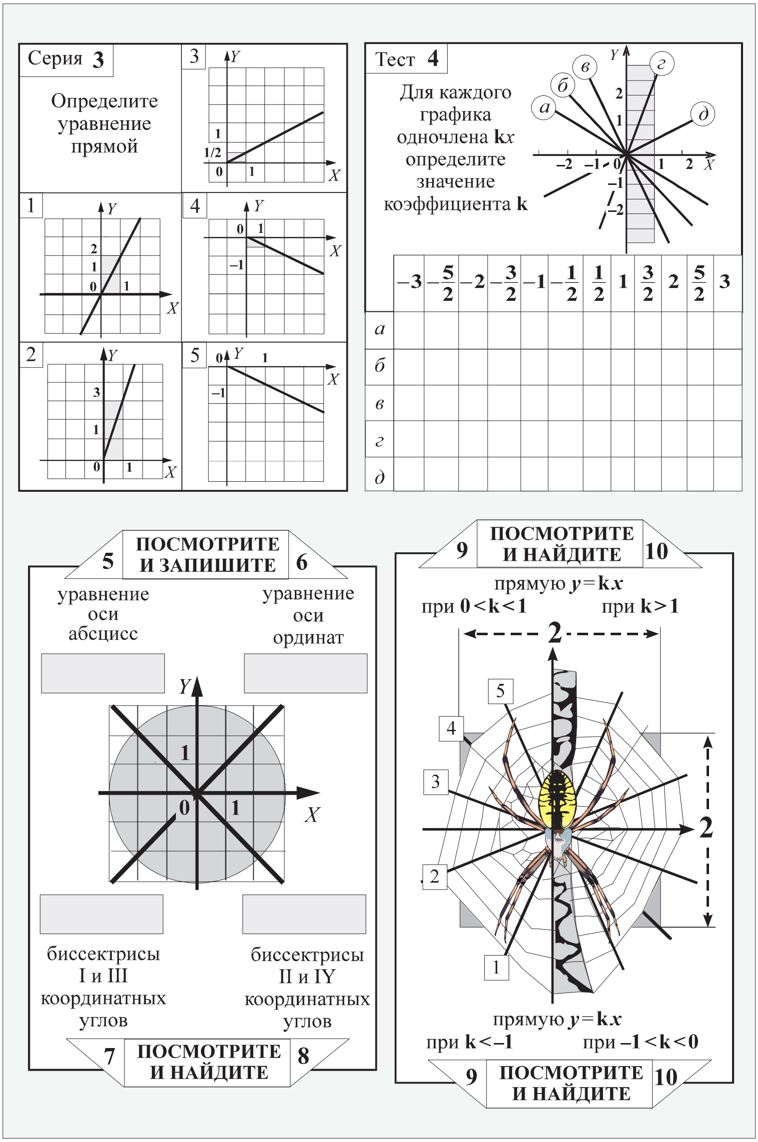


Рис. I.06.

Задания на нахождение по графику линейной функции углового коэффициента прямой

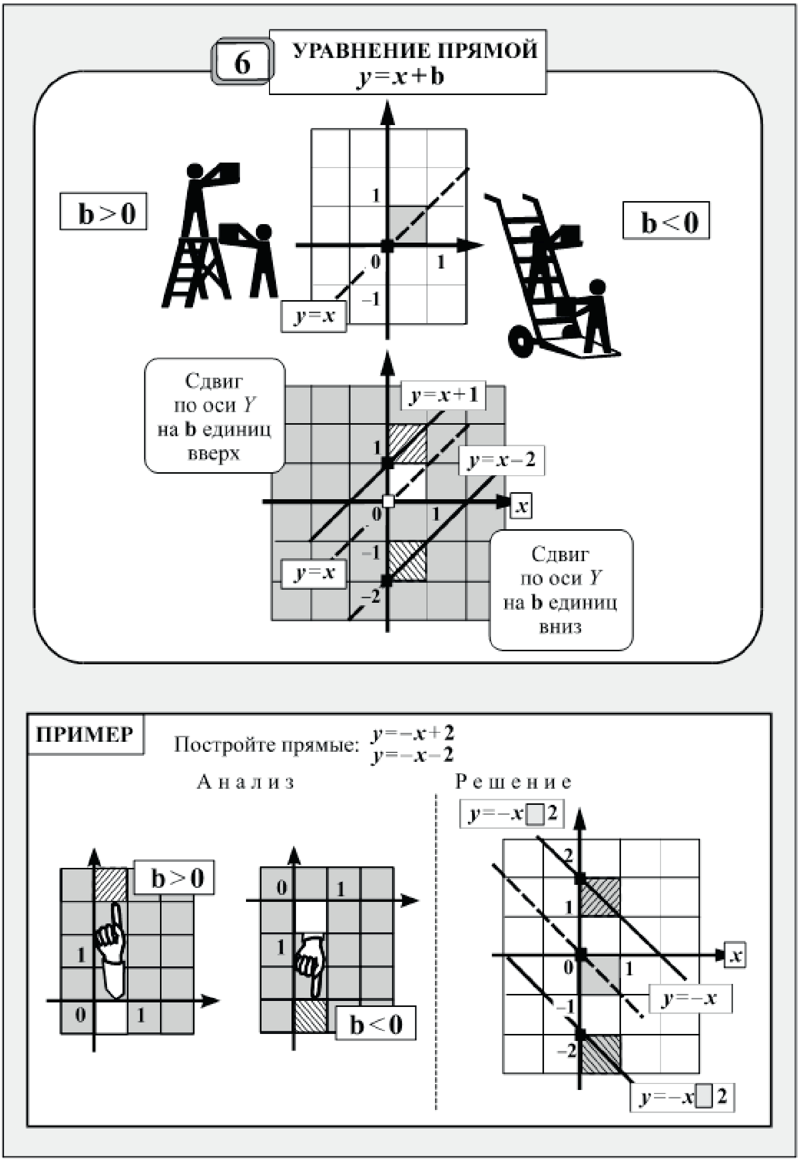


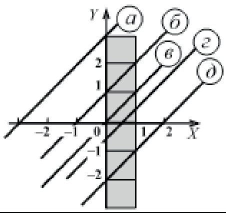
Рис. I.07.

Страница №5 визуальной тетради

«Направляющие прямоугольники прямой»

Тест 1

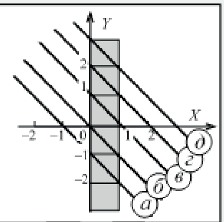
Для каждой прямой $x+\mathbf{b}$ определите значение числа **b**



	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
а									
б									
в									
г									
д									

Тест 2

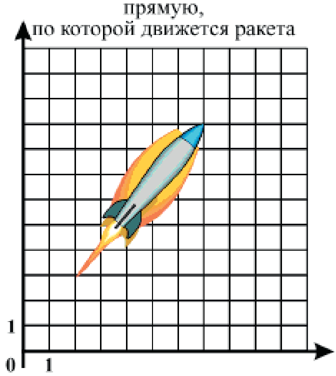
Для каждой прямой $-x+\mathbf{b}$ определите значение числа **b**



	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
а									
б									
в									
г									
д									

ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ 3

(изобразите) прямую, по которой движется ракета

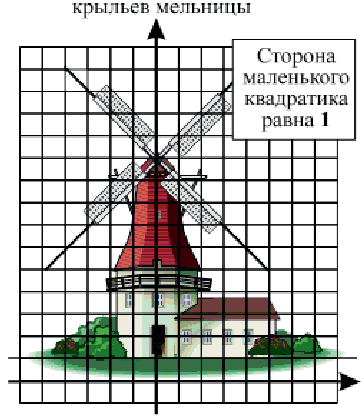


уравнение прямой, по которой движется ракета

4 ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ

5 ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ

уравнения крыльев мельницы



уравнение основания мельницы

ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ 6

Рис. I.08.

Задания на нахождение

по графику линейной функции ее формулы

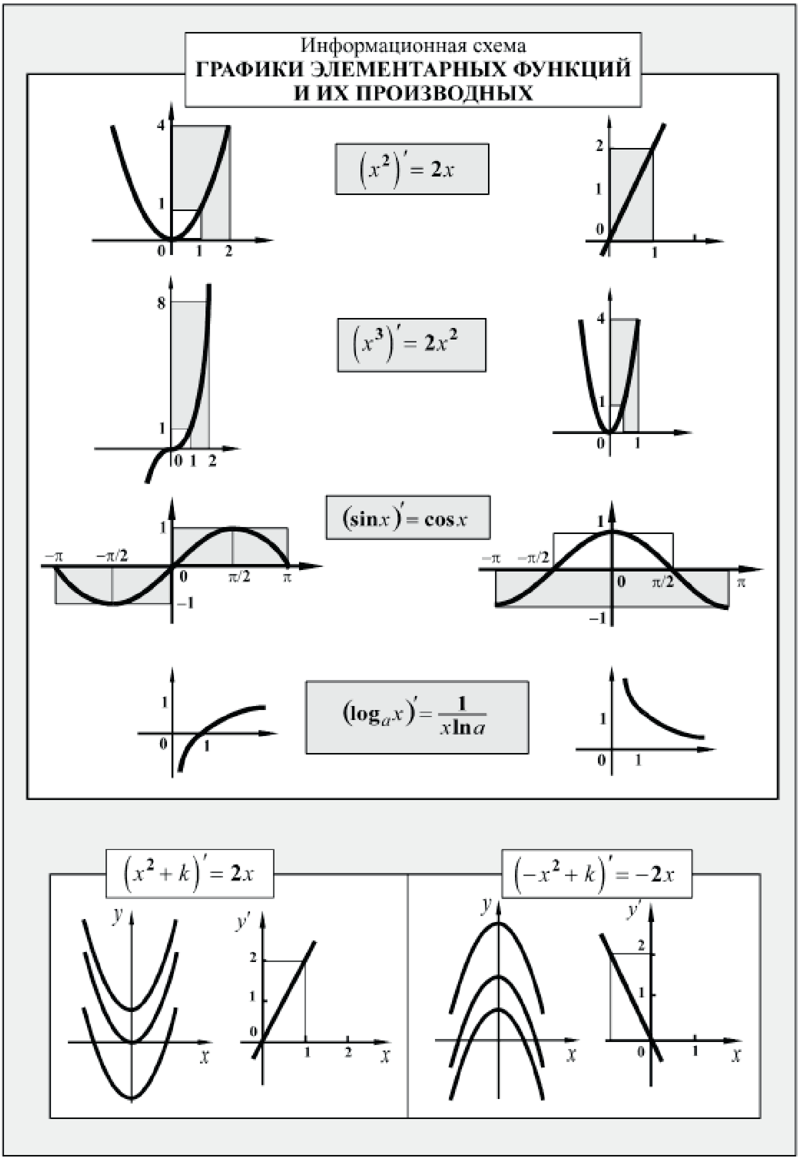


Рис. I.09.

Схема и пример

на визуализацию связи между функцией и ее производной

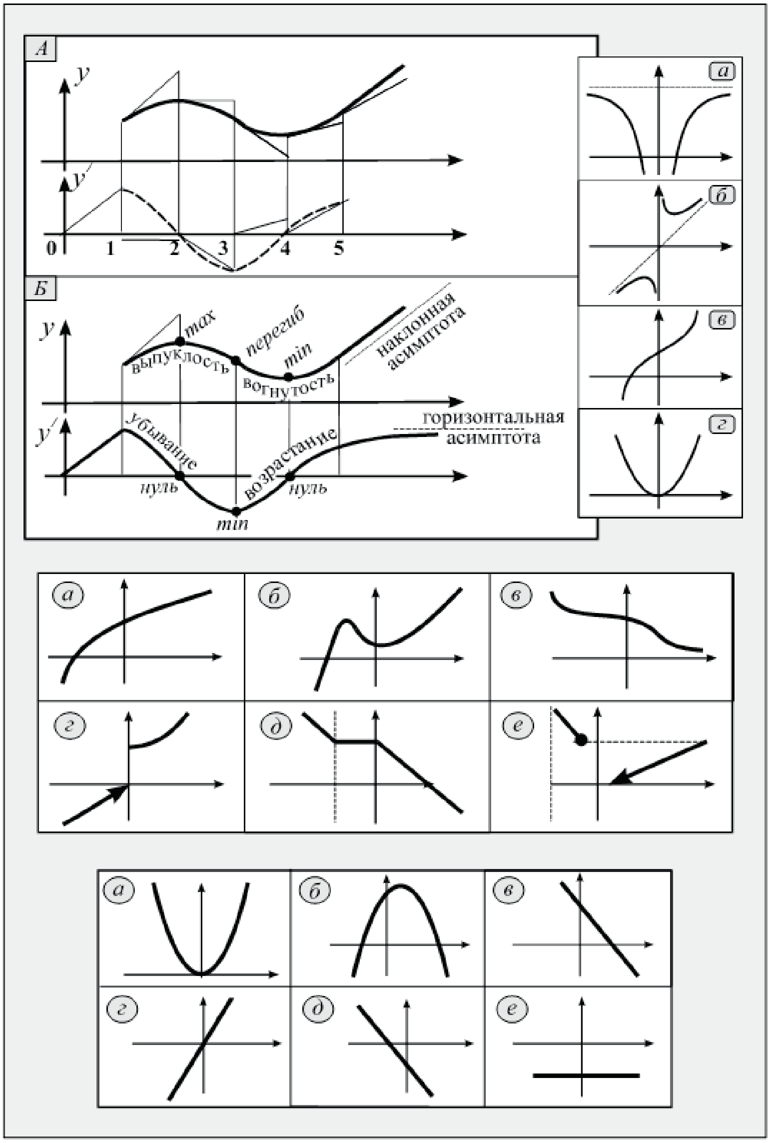


Рис. I.10.

Схема и задания применения
связей между графиками функции и ее производной

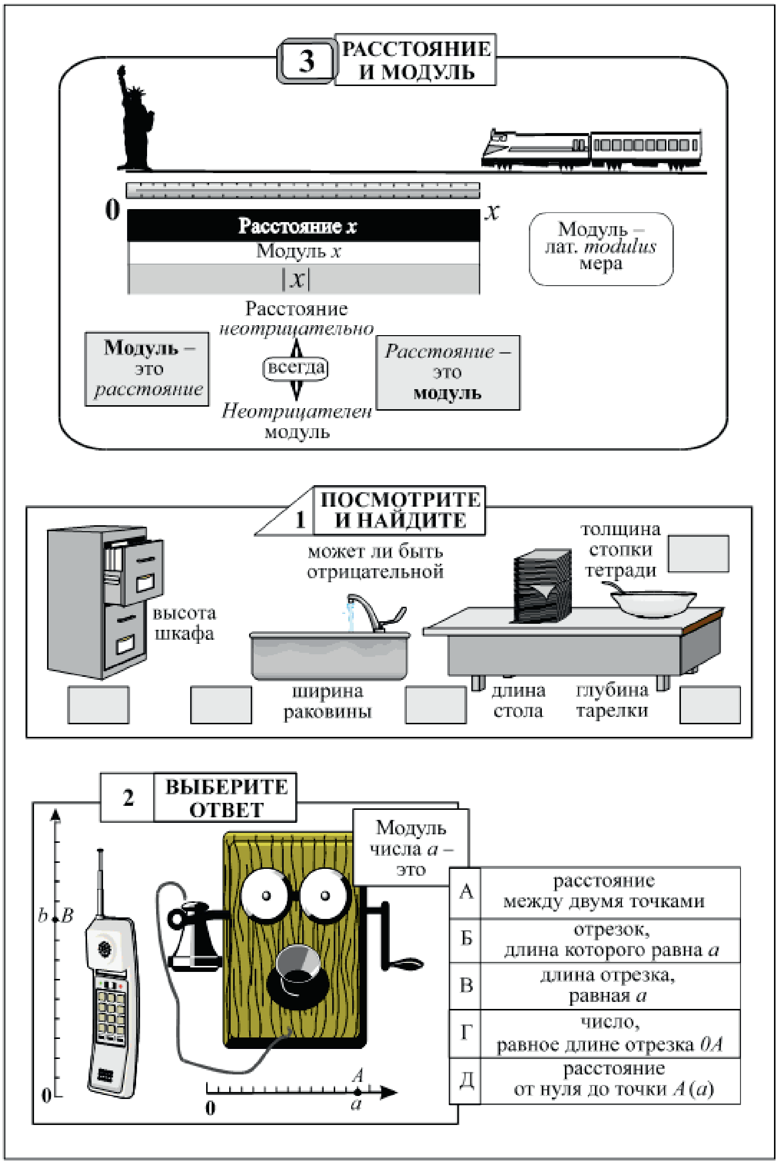


Рис. I.11.

Начальные представления и простейшие теоретические сведения о понятии «Модуль числа»

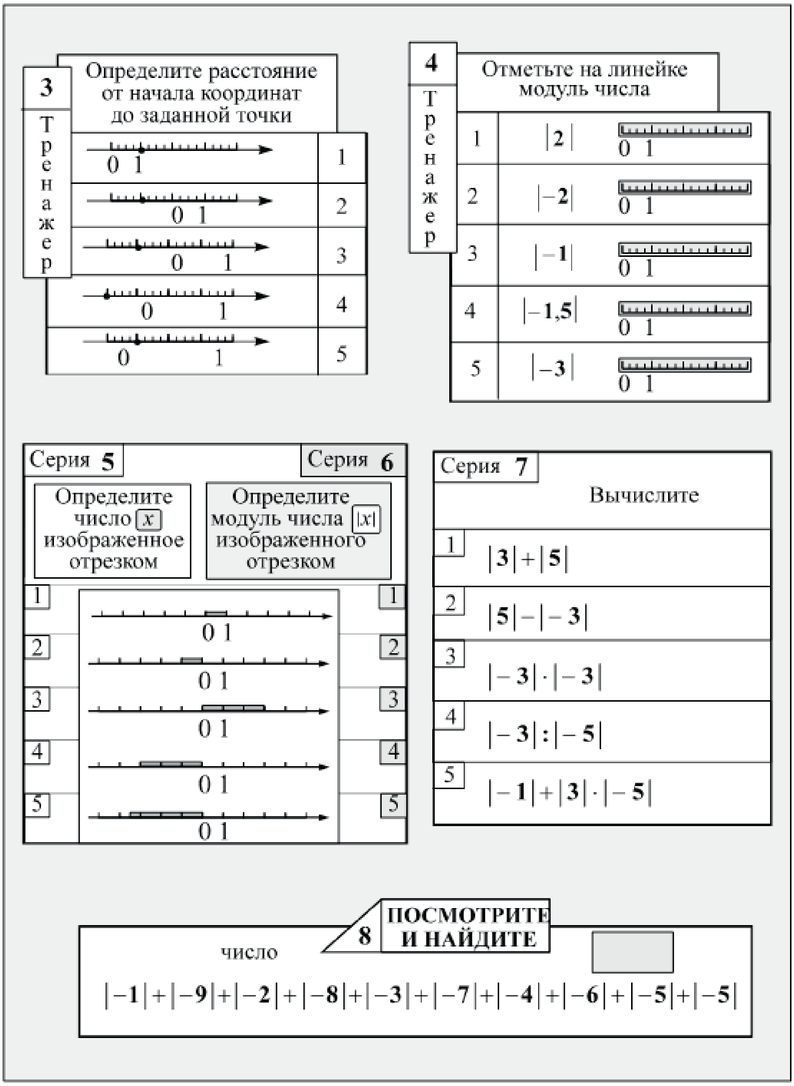


Рис. I.12.

Закрепление начальных представлений и навыков по применения понятия «Модуль числа»

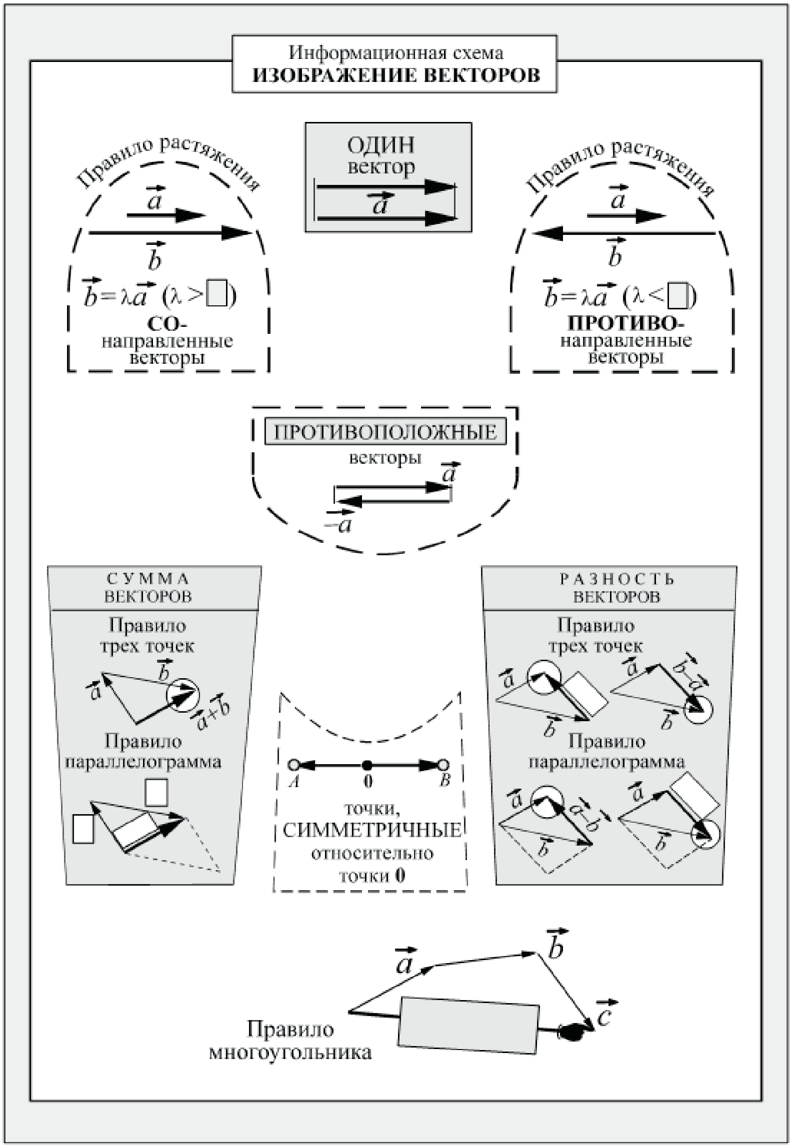


Рис. I.13.

Информационная схема к теме «Векторы на плоскости»
с акцентом на связи между деталями образа

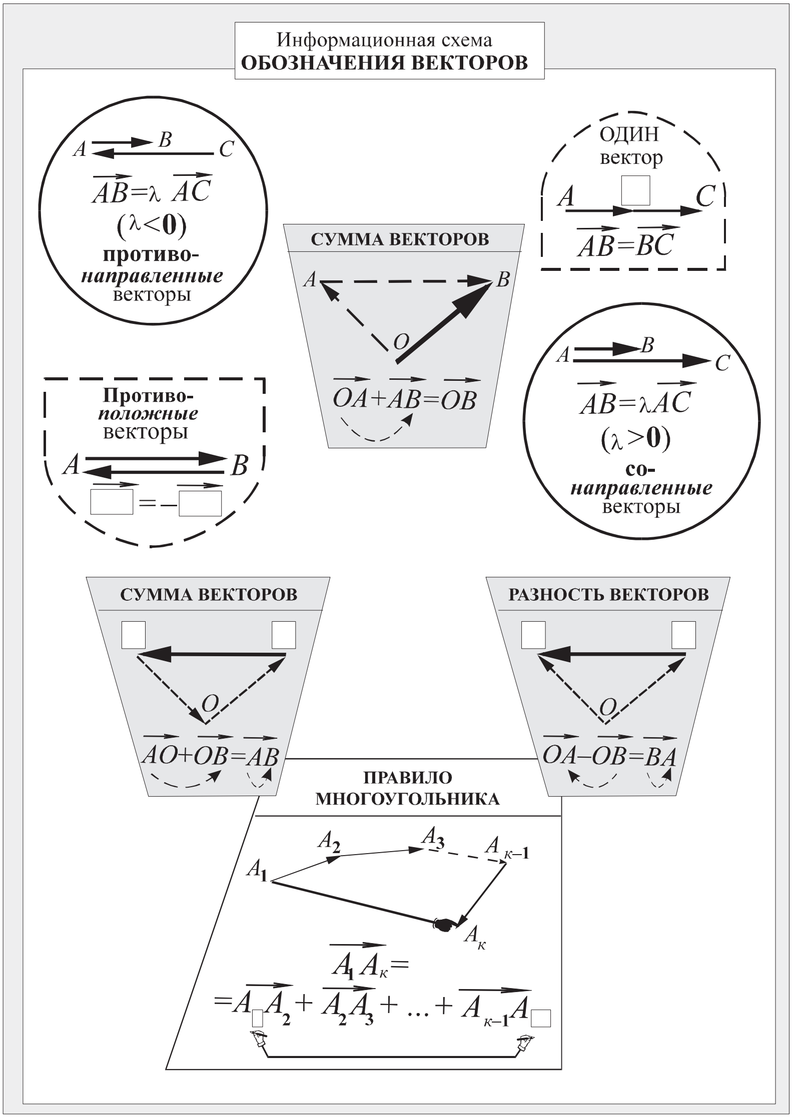


Рис. I.14.

Информационная схема к теме «Векторы на плоскости»
с акцентом на связь между образом и обозначением его элементов

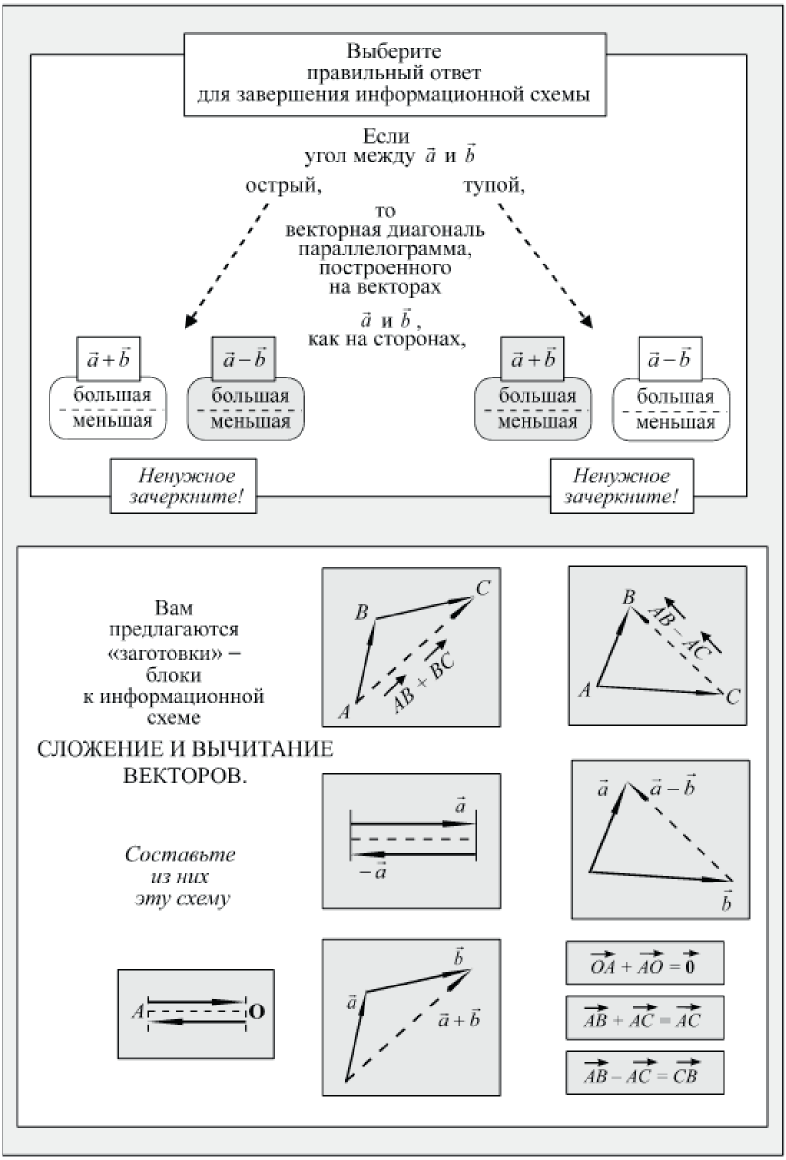


Рис. I.15.

Вспомогательные упражнения на составление информационной схемы для приобретения навыка применения начальных сведений о векторах

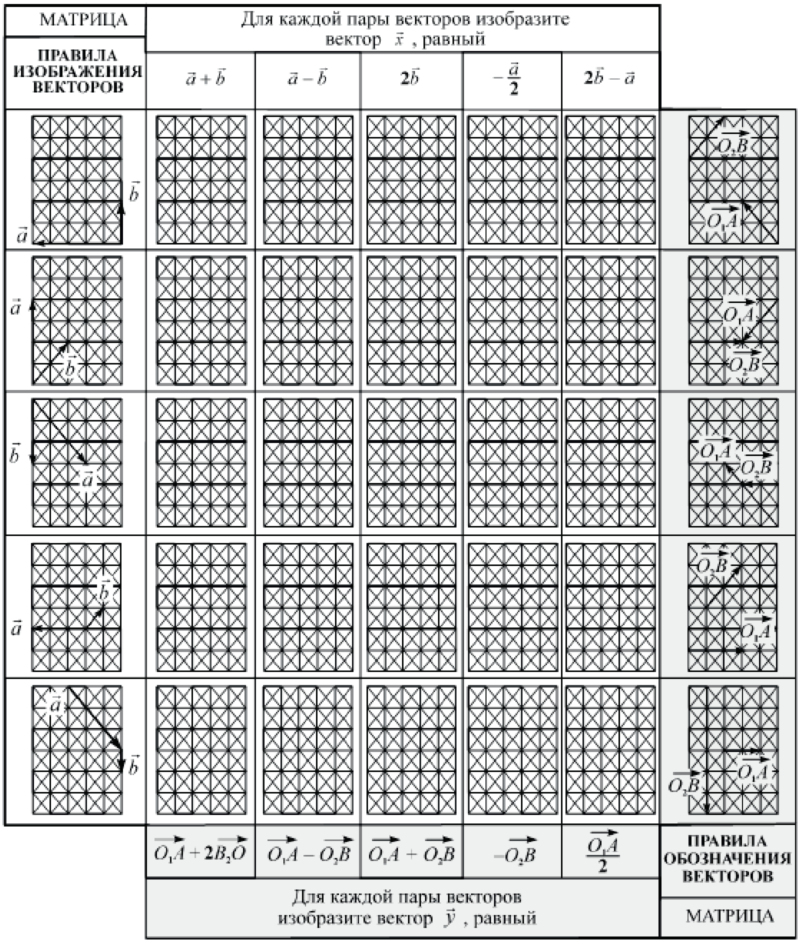


Рис. I.16.

Обучающие матрицы для приобретения навыков изображения и обозначения векторов и связей между ними

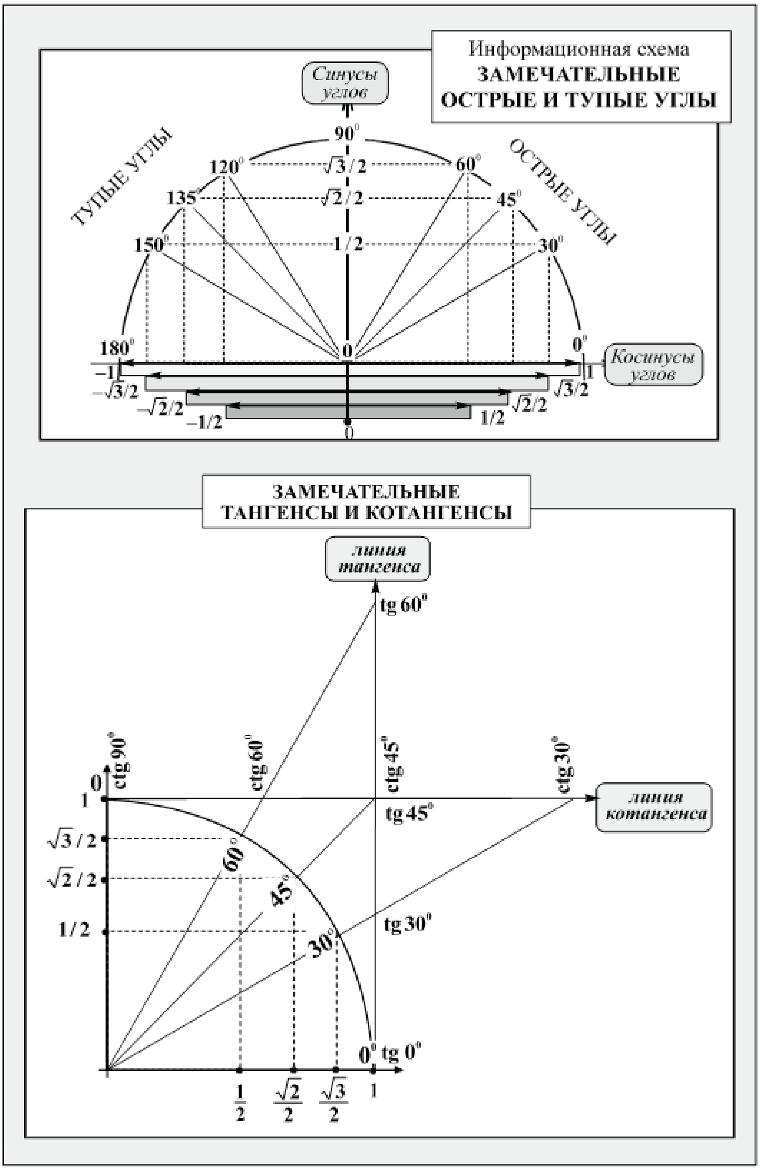


Рис. I.17.

Вспомогательные схемы к изучению свойств
первой четверти тригонометрической окружности

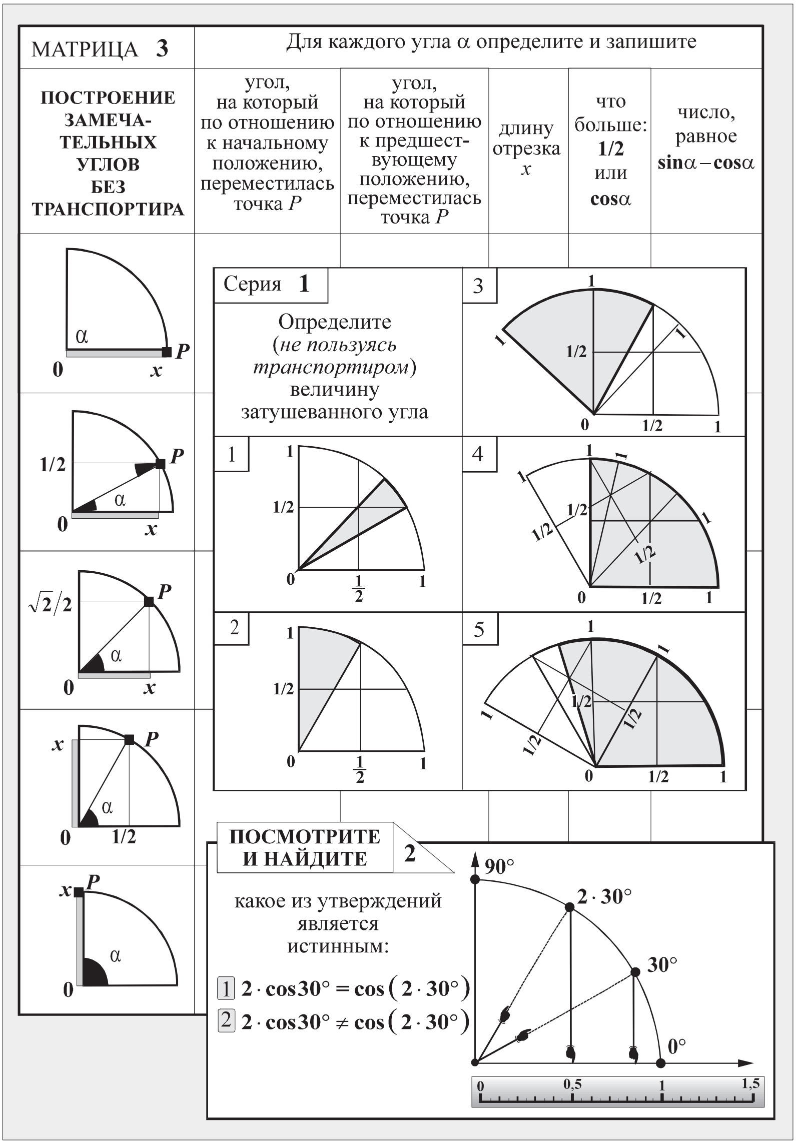


Рис. I.18.

Упражнения для усвоения и применения свойств первой четверти тригонометрической окружности

МАТРИЦА	Для каждого уравнения найдите				
РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ	О Д З	решение при $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$	решение при $\lvert\alpha\rvert \le \frac{\pi}{4}$	общее решение	решение при $\lvert f(\alpha)\rvert = -f(\alpha)$
$-\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$					
$\lvert \operatorname{tg}\alpha \rvert = \frac{1}{\sqrt{3}}$					
$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha} = 1$					
$\operatorname{tg}^3\alpha = 3\sqrt{3}$					
$\sqrt{\sin\alpha} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$					

Тест

найдите значение a	Для уравнения $f(x)=a$ по его заданному решению															
	$-\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$
$\sin x = a$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$																
$\cos x = a$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$																
$\operatorname{ctg} x = a$, $x=\pi-\operatorname{arctg}2+\pi k$																
$\operatorname{tg} x = a$, $x=-\operatorname{arctg}2+\pi k$																
$\sin x = a$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$																

Рис. I.19.

Матрица и тест тригонометрического содержания
с заданиями повышенной сложности для итогового контроля

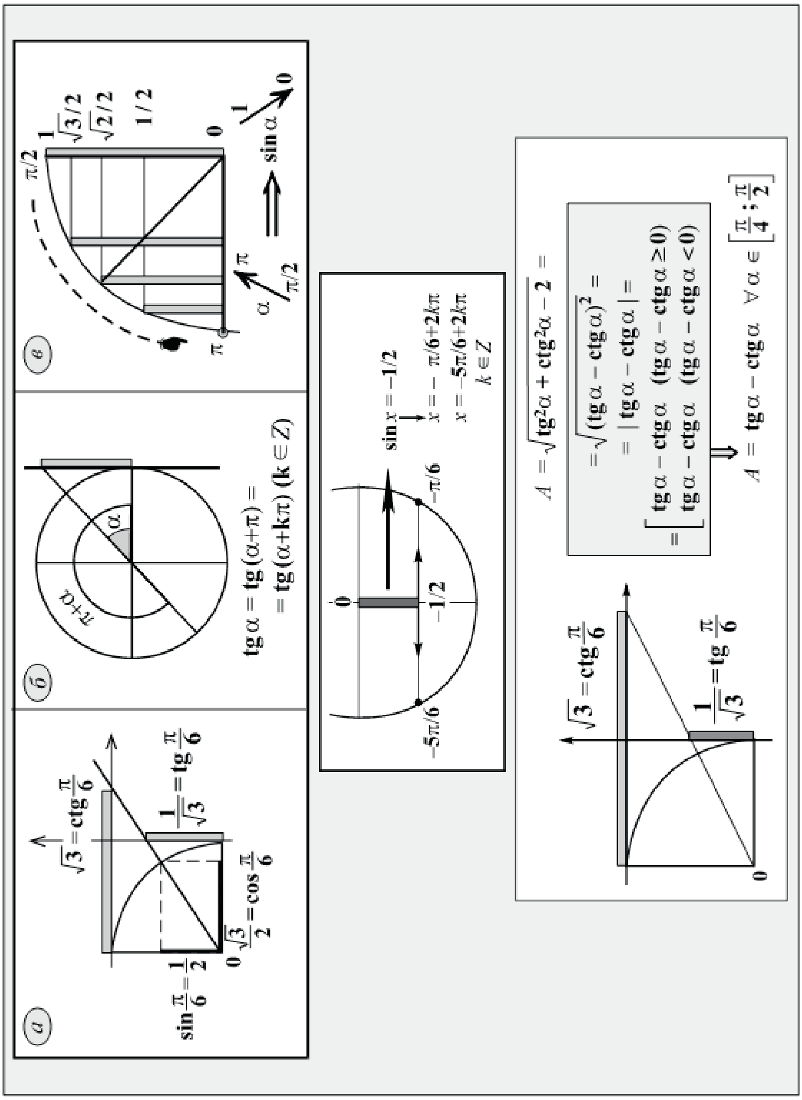


Рис. I.20.

Задания на проверку усвоения свойств
первой четверти тригонометрической окружности

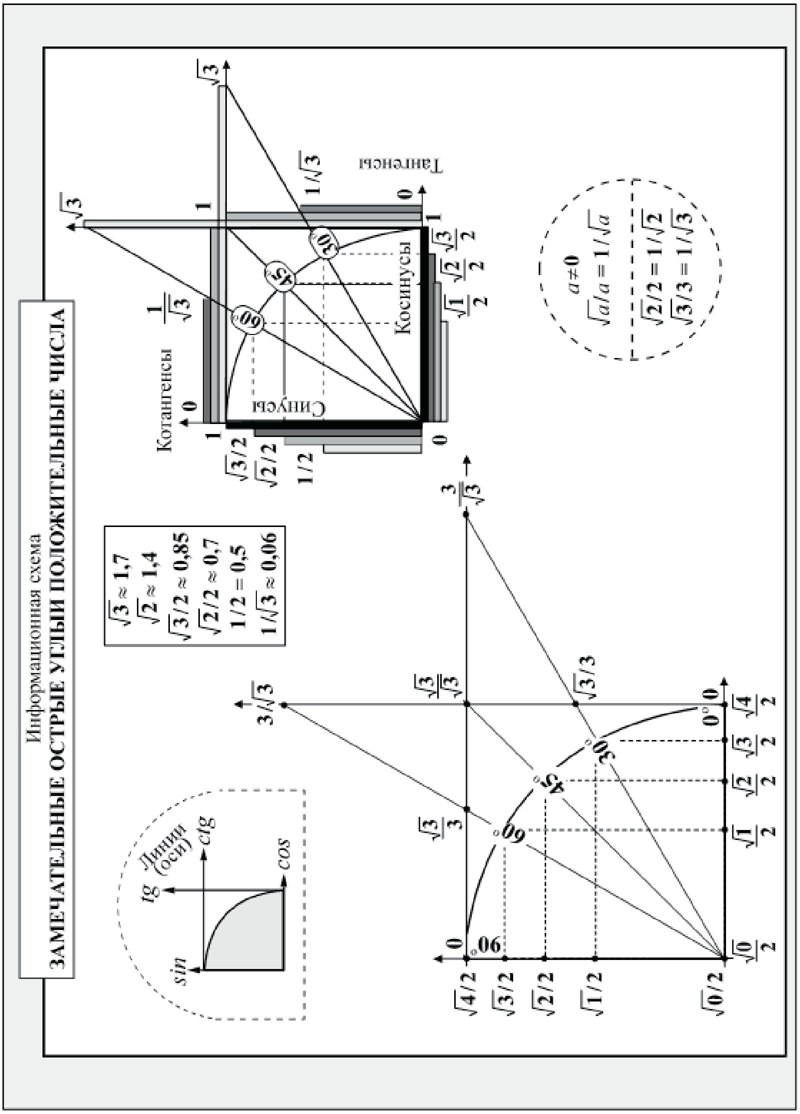


Рис. I.21.

Преобразования образа на основе создания новых форм элементов первой четверти тригонометрической окружности

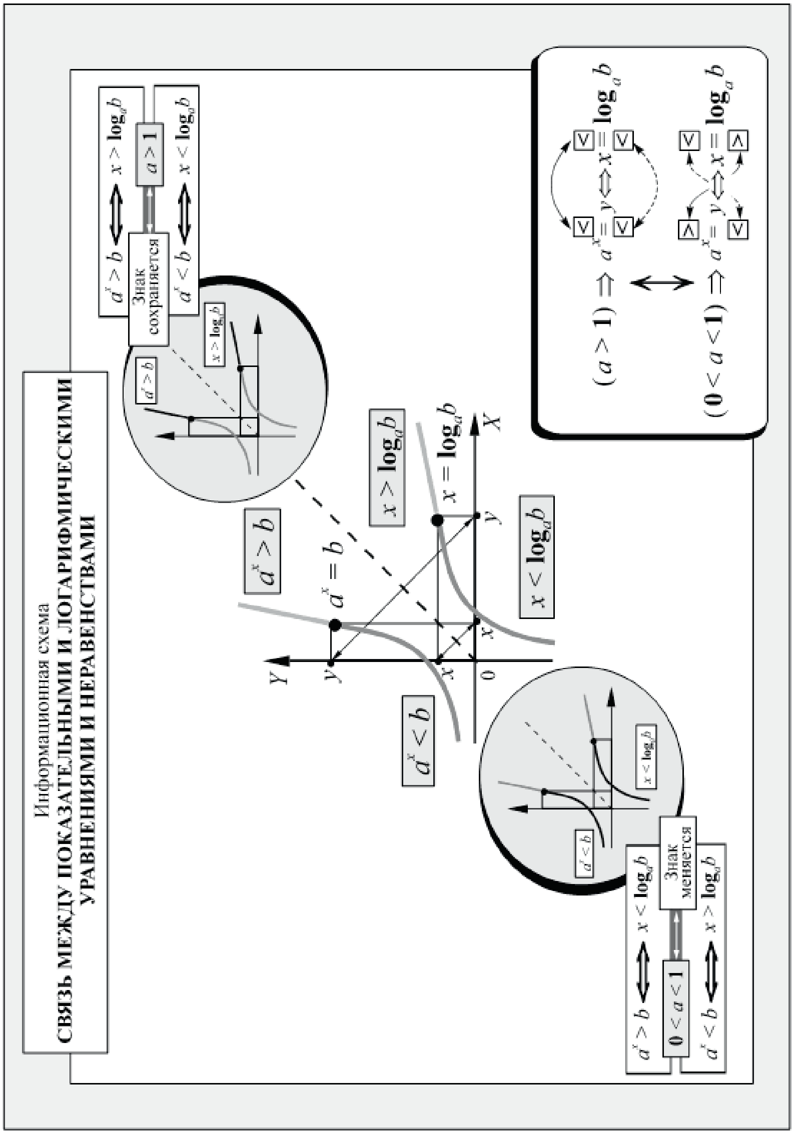


Рис. I.22.

Визуализация связей между взаимно обратными функциями на примере уравнений и неравенств с экспонентой и логарифмом

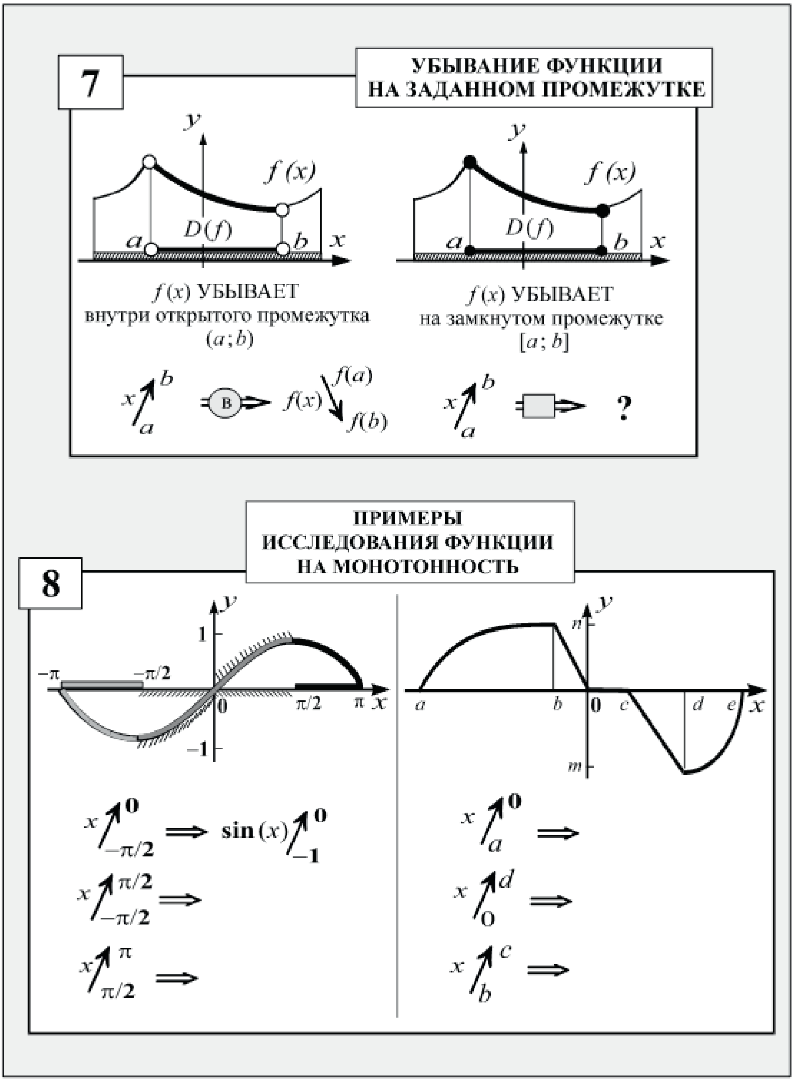


Рис. I.23.

Задания теоретического и практического содержания
к исследованию функции на монотонность на заданном промежутке

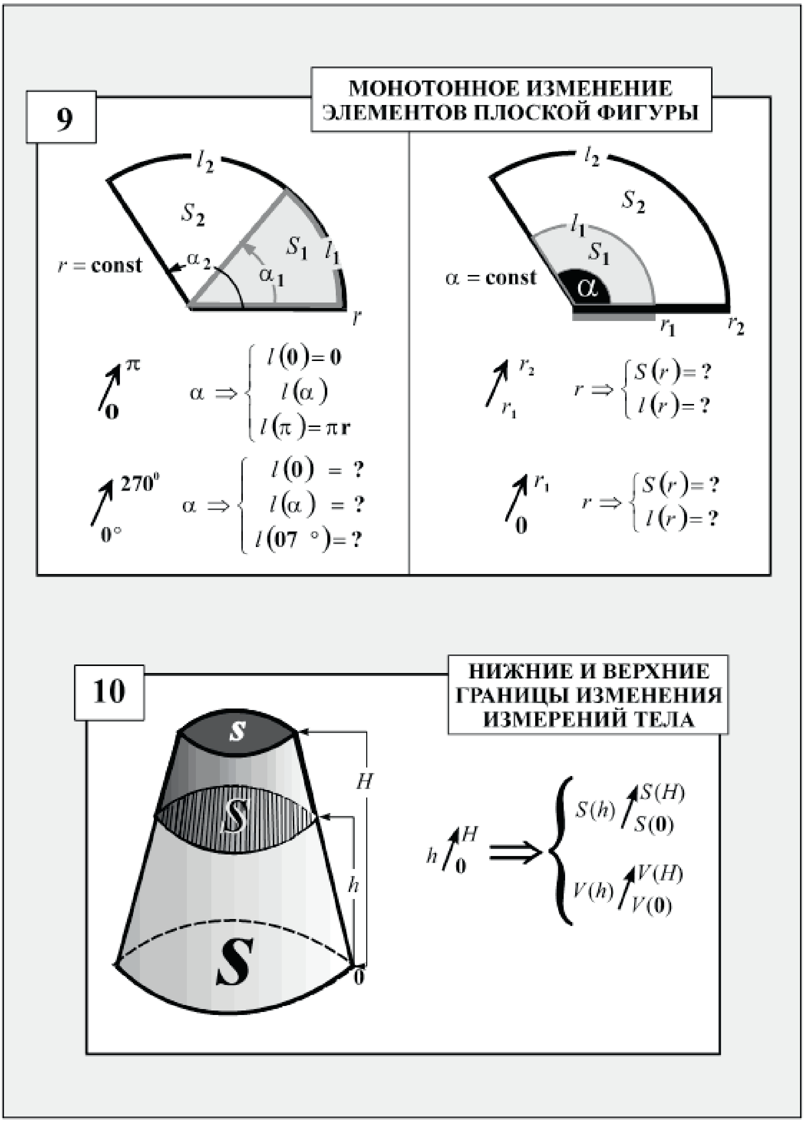


Рис. I.24.

Исследовательские задания прикладного характера
к исследованию функции на монотонность «в целом»

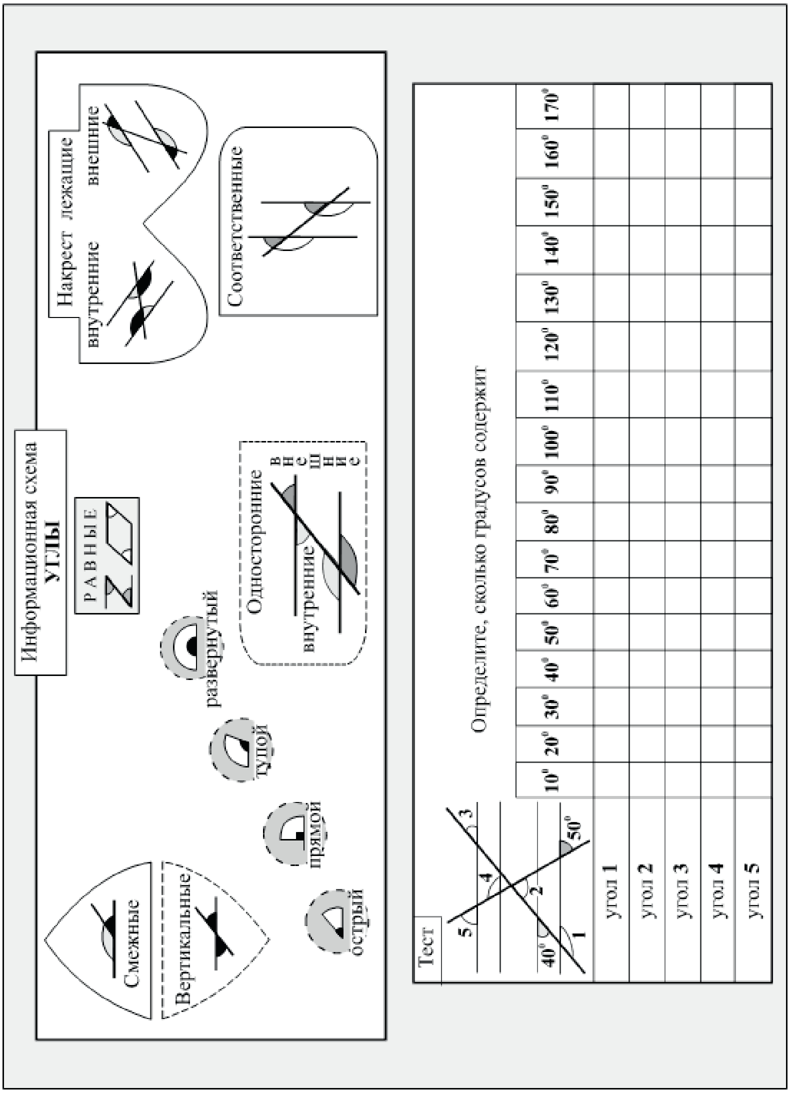


Рис. I.25.

Информационная схема обобщающего характера
и тест на проверку усвоения ее содержания (геометрия)

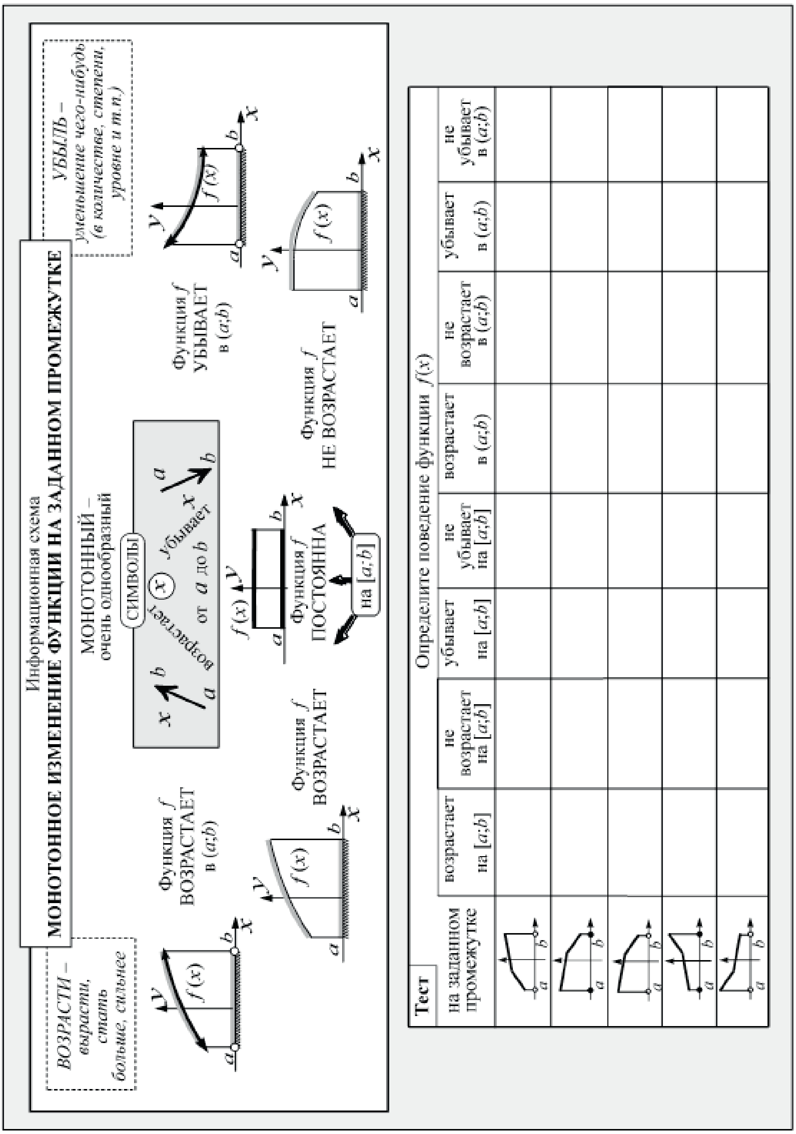


Рис. I.26.

Информационная схема обобщающего характера
и тест на проверку усвоения ее содержания (алгебра и начала анализа)

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Визуальные дидактические материалы

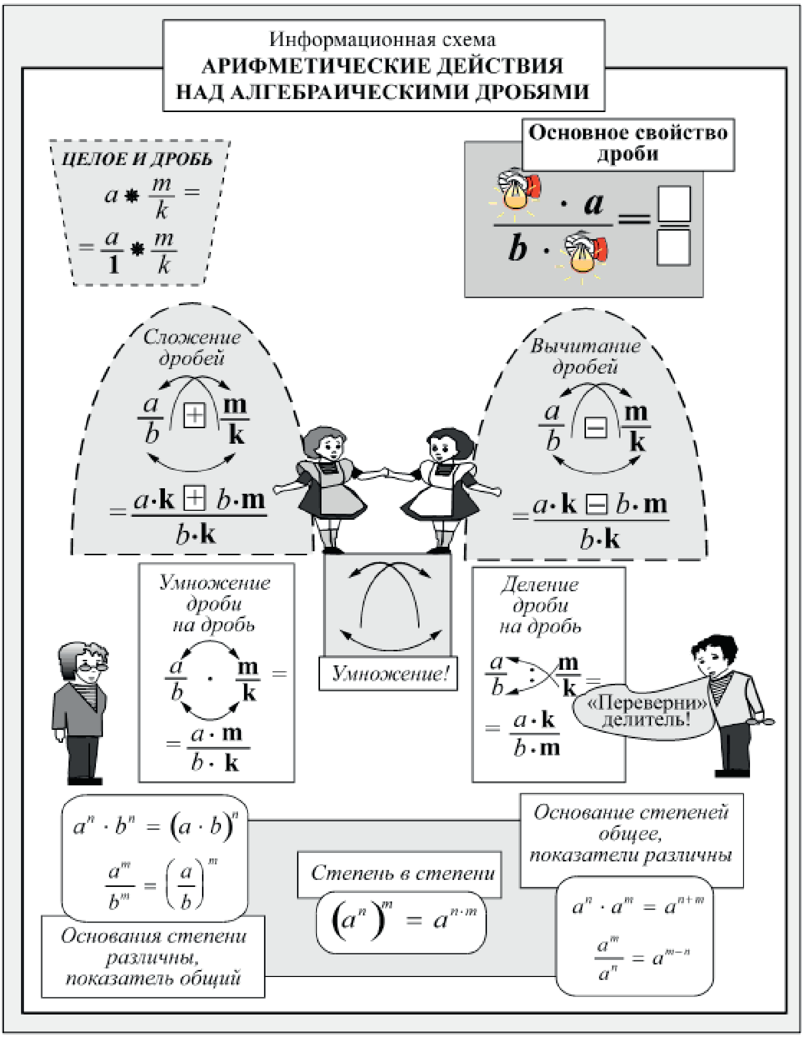


Рис. II.01.

Информационная схема-справочник по алгебре для учащихся основной школы (первый вариант)

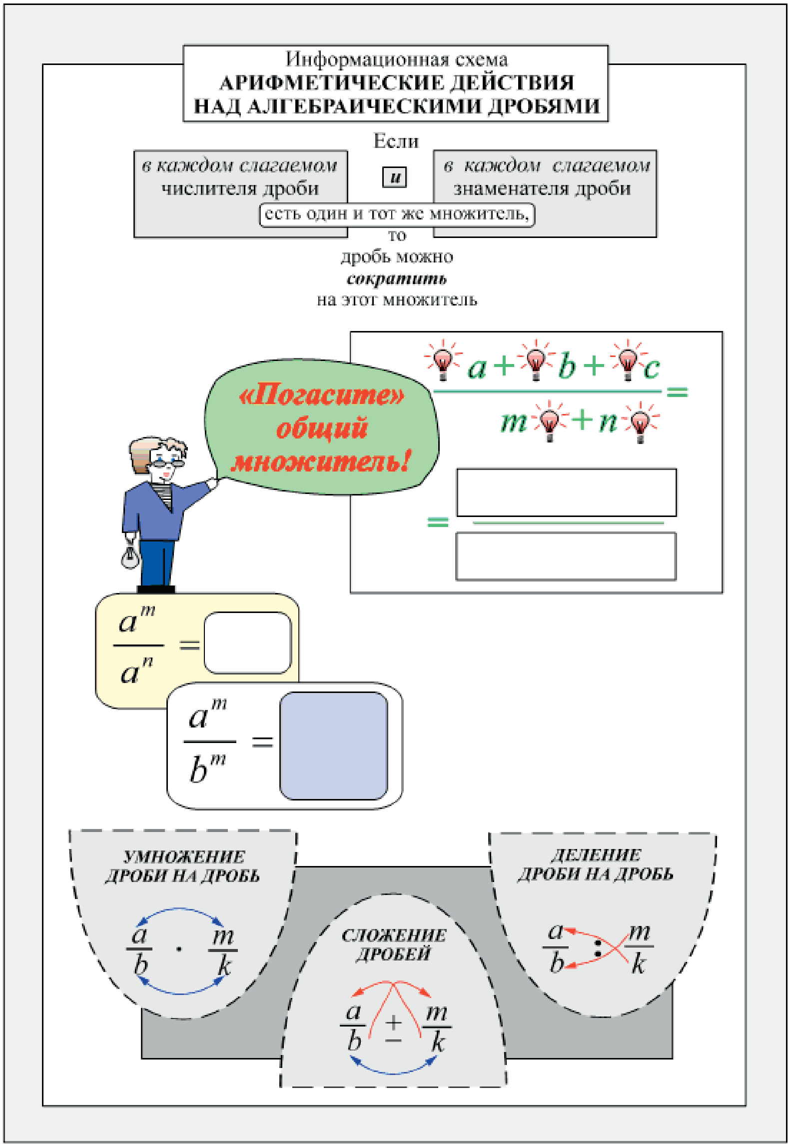


Рис. II.02.

Информационная схема-справочник по алгебре
для учащихся основной школы (второй вариант)

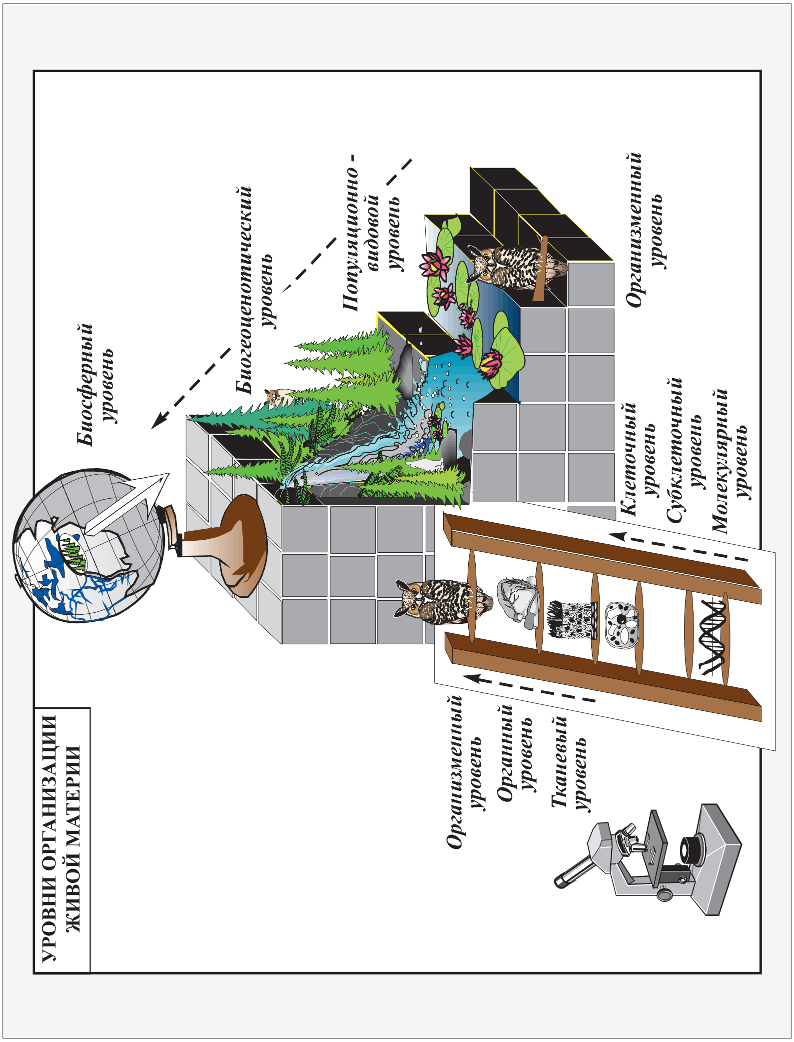


Рис. П.03.

Информационная схема как наглядное представление об уровнях организации живой материи (экология)

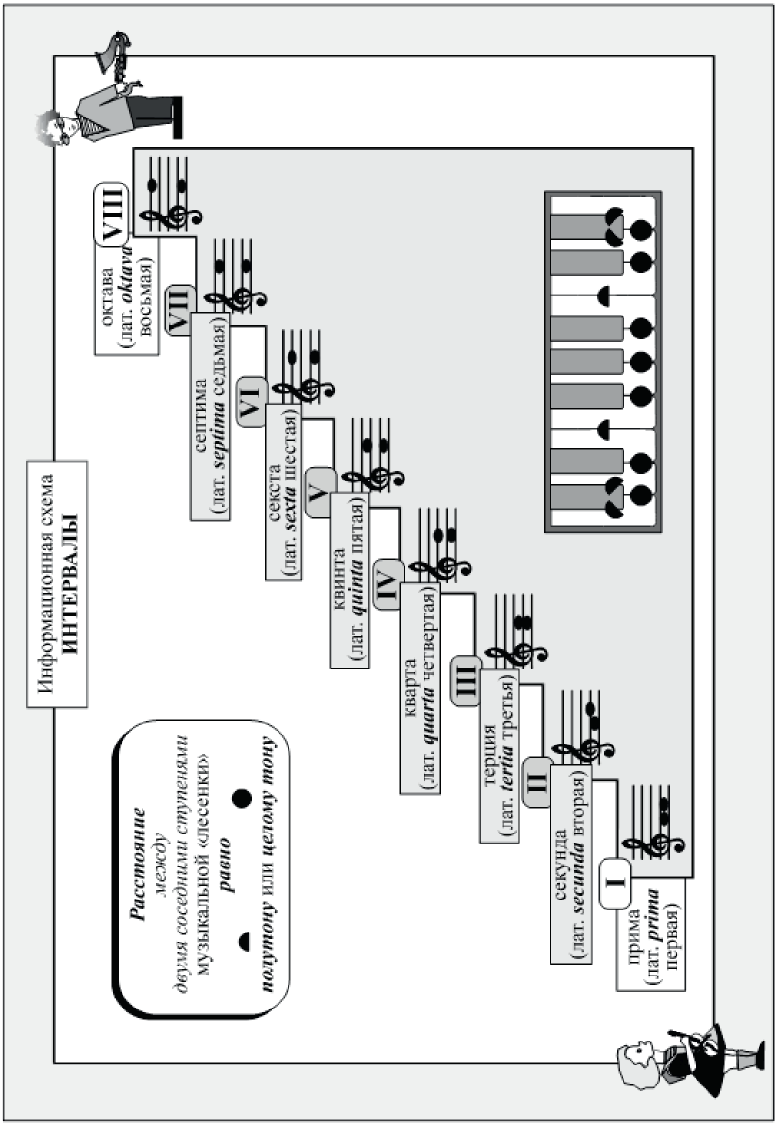


Рис. П.04.

Информационная схема как наглядное представление
о музыкальных интервалах (сольфеджио)

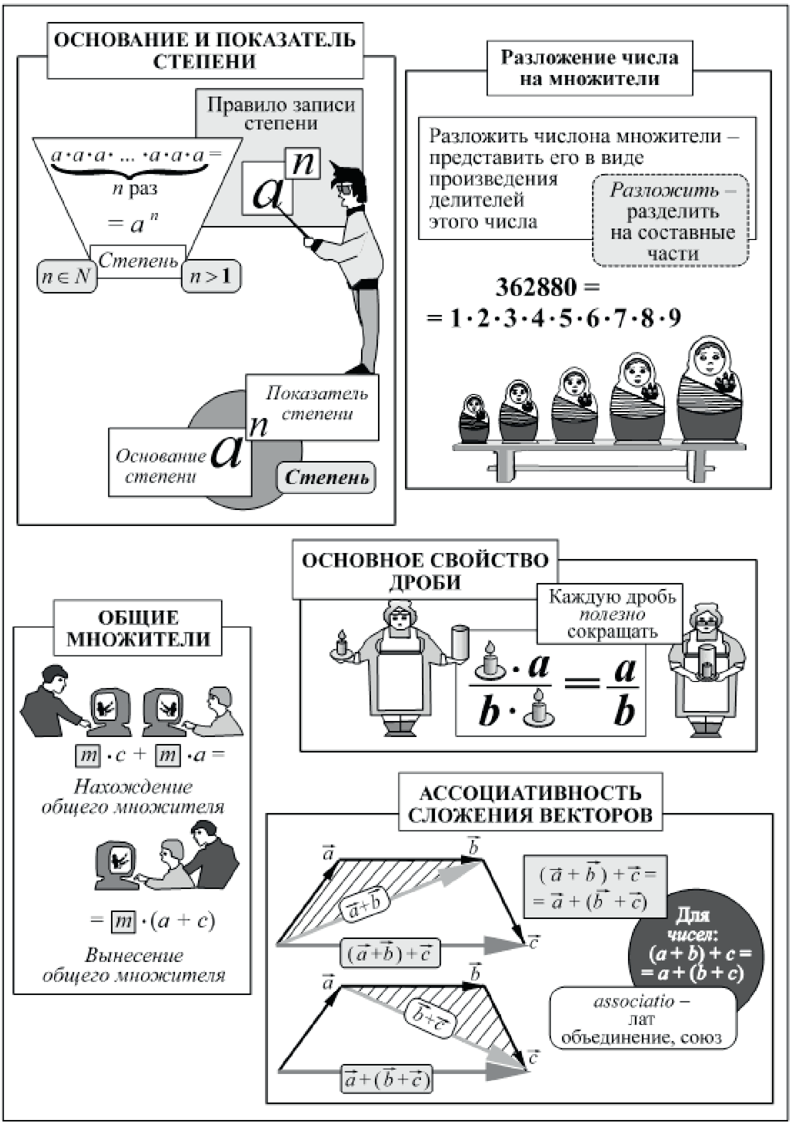


Рис. II.05.

Заголовки и сопутствующий зрительный образ
к важным положениям учебной теории (алгебра)

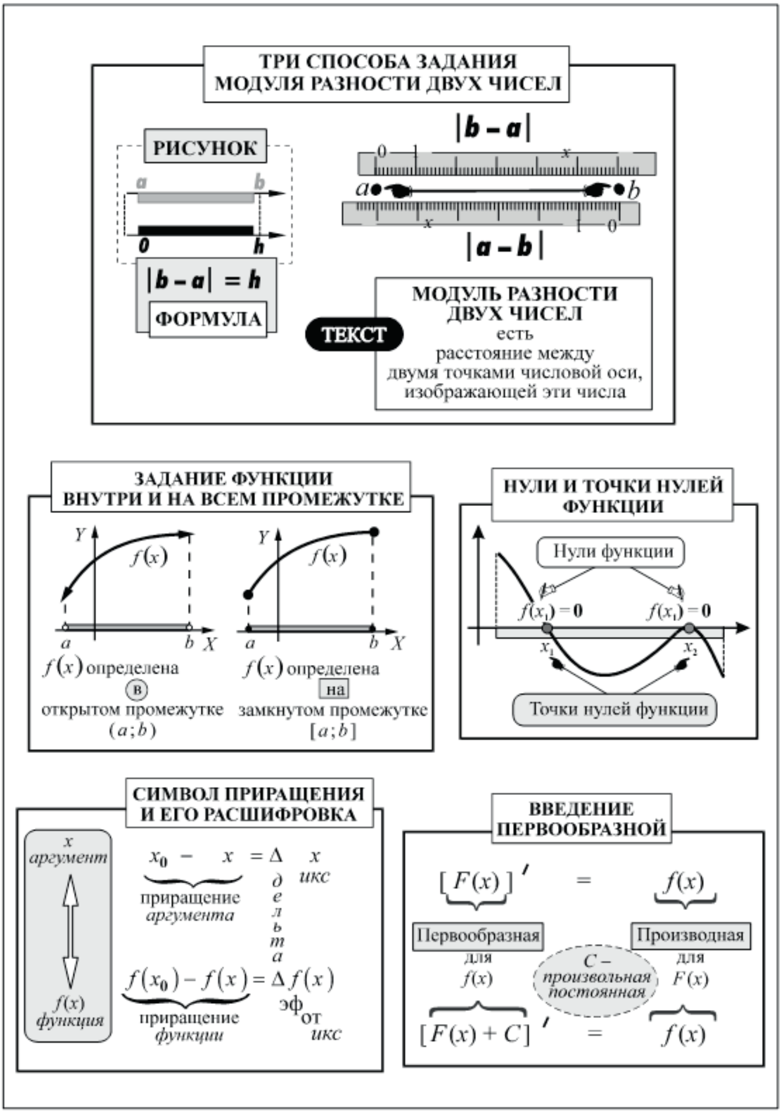


Рис. II.06.

Расшифровка терминов и символов
на основе связей «текст-рисунок-формула» (математика)

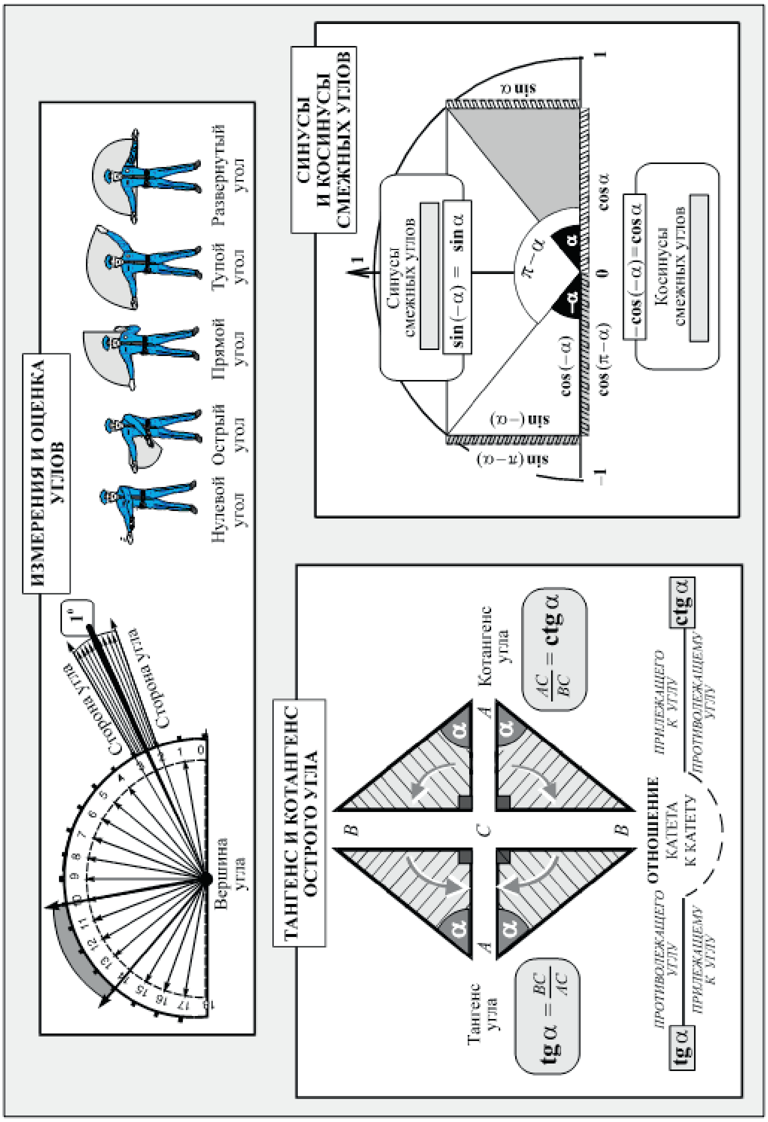


Рис. II.07.

Пропедевтика отдельных понятий тригонометрии
на основе связей «текст-рисунок-формула»

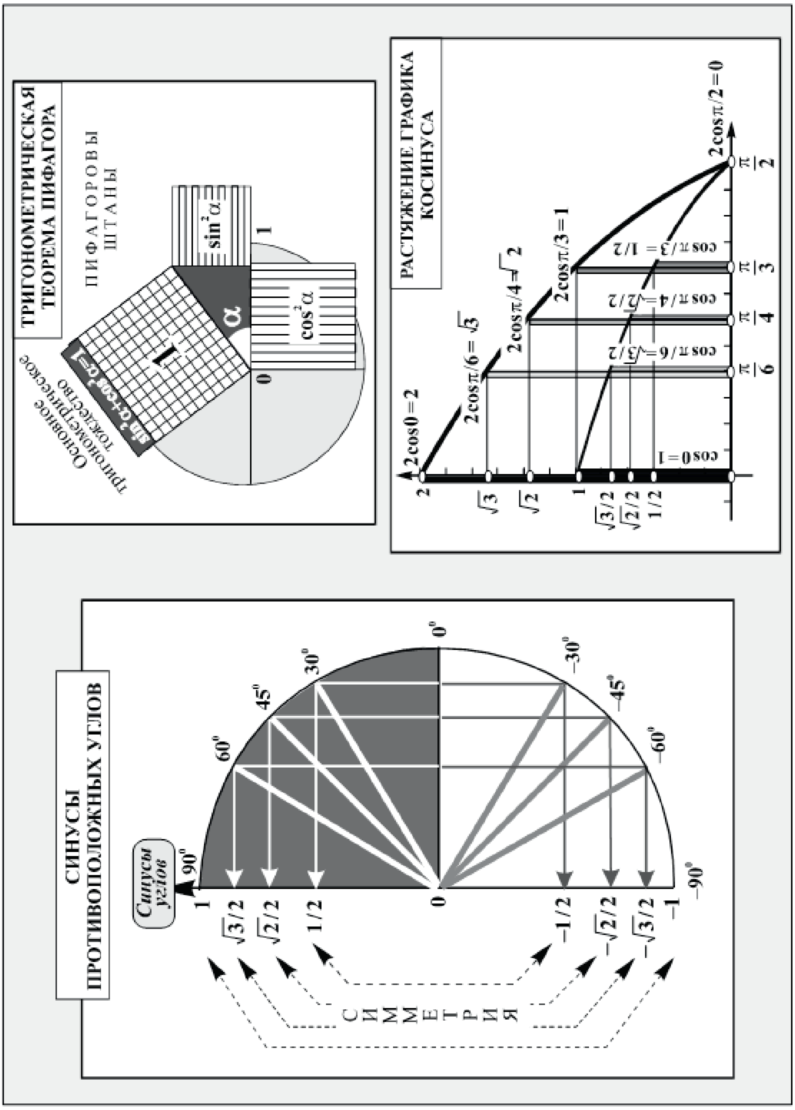


Рис. П.08.

Объединение трех способов предъявления учебной знаковой информации с помощью различных средств представления ее деталей

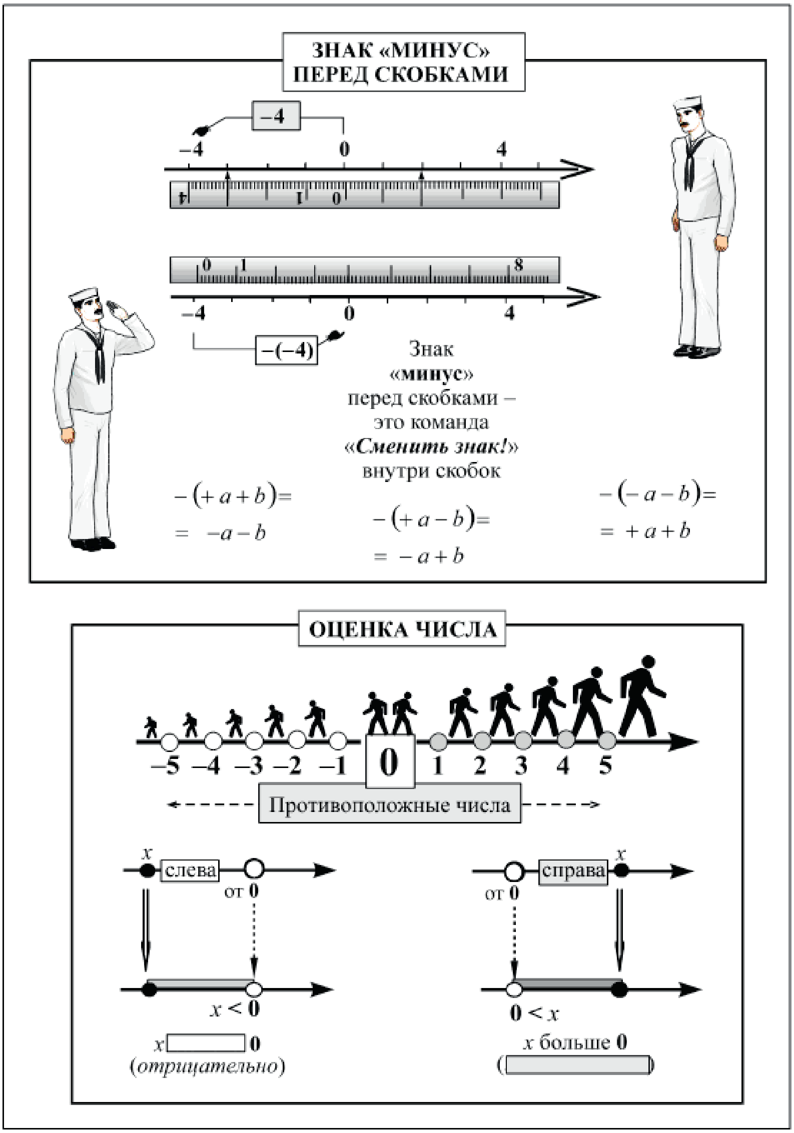


Рис. П.09.

Преобразования слова в образ или формулу
на этапе введения понятия (математика)

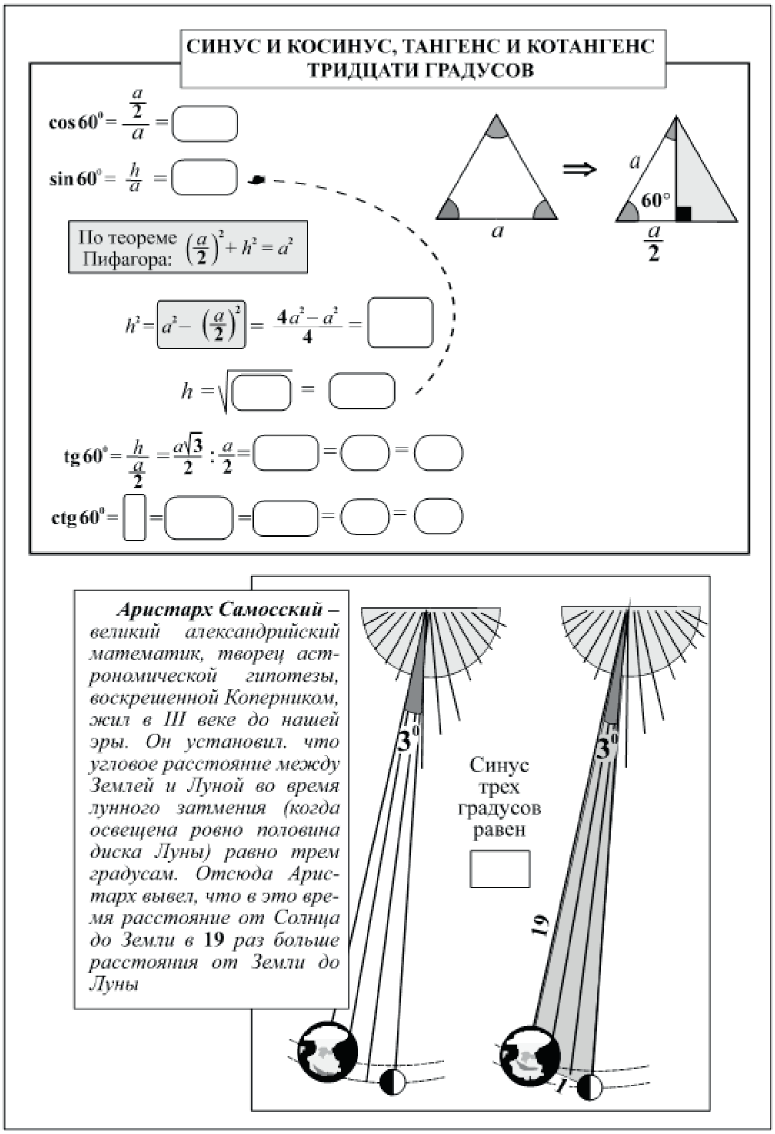


Рис. П.10.

Демонстрация разных методов исследования для обобщения теоретических положений (тригонометрия)

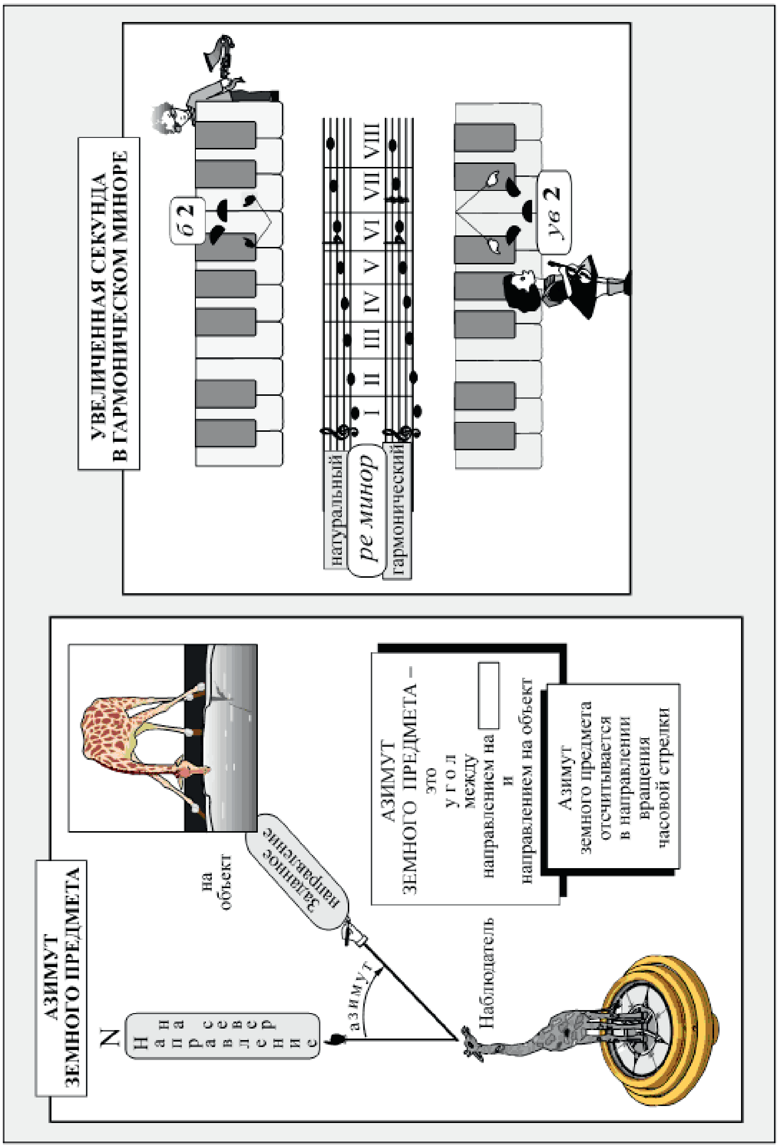


Рис. II.11.

Информационные схемы для различных дисциплин: география (слева) и сольфеджио (справа)

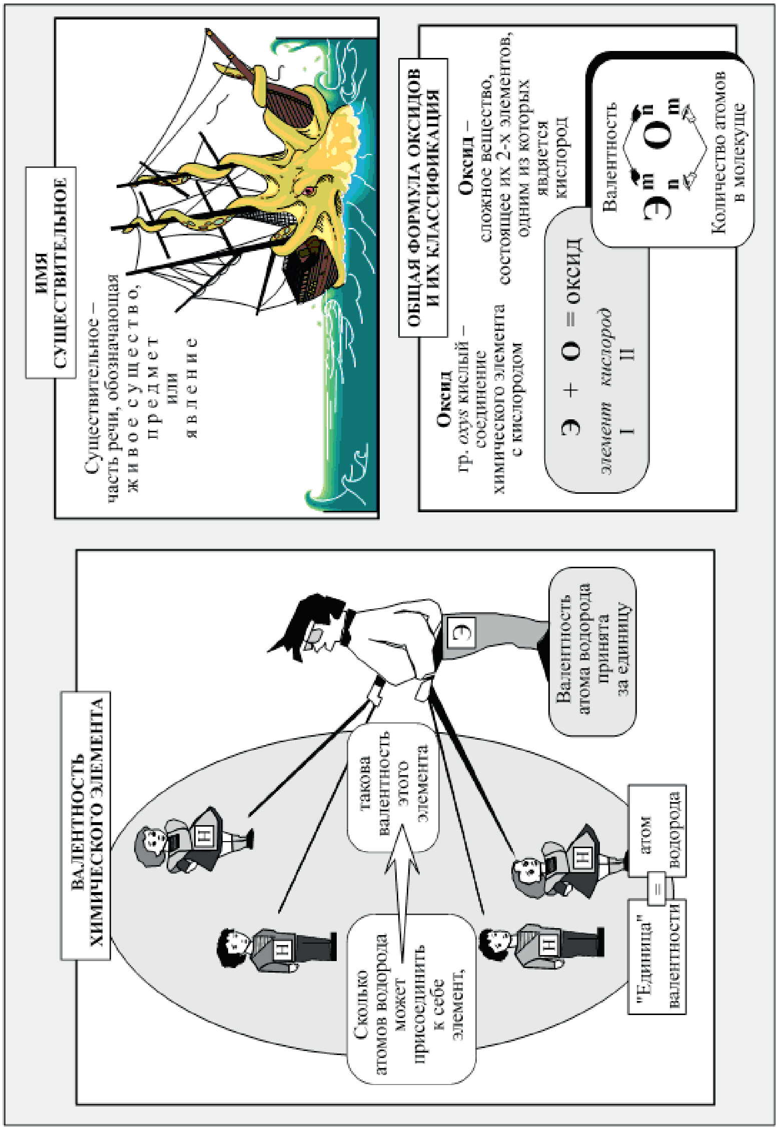
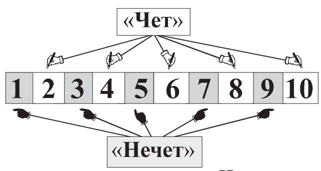


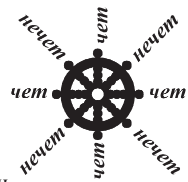
Рис. II.12.

Информационные схемы для различных дисциплин:
химия (слева и справа, внизу) и русский язык (справа, вверху)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	30
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	30
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50





Четными ***Не***четными
называют числа,
делящиеся ***не*** делящиеся
без остатка без остатка
на **2** на **2**

Общая формула

2*n* четного числа нечетного числа **2*n* + 1**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	30
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Число	Сумма цифр числа		Число	Сумма цифр числа
3	**3**	Сумма цифр числа, делящегося на **3**, делится на ☐	**30**	**3 + 0 = 3**
6	**6**		**33**	
9	**9**		**36**	
12	**1 + 2 =**		**39**	
15	**1 + 5 =**		**42**	
18	**1 + 8 =**		**45**	
21	**2 + 1 =**		**48**	
24	**2 + 4 =**		**51**	
27	**2 + 7 =**		**54**	

Рис. II.13.

Пропедевтика признаков делимости натуральных чисел
на основе связей «Рисунок-текст-формула»

101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**
111	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
121	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**
131	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**
141	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**	**150**
151	**152**	**153**	**154**	**155**	**156**	**157**	**158**	**159**	**160**
161	**162**	**163**	**164**	**165**	**166**	**167**	**168**	**169**	**170**

ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ **1**

свойство разности между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **7**

Число	Кол-во десятков	Удвоенная цифра единиц	Разность
105	**10**	**10**	**0**
112	**11**	**4**	**7**
119	**11**	**18**	**– 7**
126	**12**	**12**	**0**
133	**13**	**6**	
140	**14**	**0**	
147	**14**		
154			
168			

Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **7**, делится на ☐

101	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**
111	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**	**119**	**120**
121	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**
131	**132**	**133**	**134**	**135**	**136**	**137**	**138**	**139**	**140**
141	**142**	**143**	**144**	**145**	**146**	**147**	**148**	**149**	**150**
151	**152**	**153**	**154**	**155**	**156**	**157**	**158**	**159**	**160**
161	**162**	**163**	**164**	**165**	**166**	**167**	**168**	**169**	**170**

2 **ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ**

свойство суммы между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **19**

Число	Кол-во десятков	Удвоенная цифра	Сумма единиц
114	**11**	**8**	**19**
133	**13**	**6**	
152	**15**		
171			

Сумма между числом десятков и удвоенной цифрой единиц трехзначных чисел, делящихся на **19**, делится на ☐

Рис. II.14. Под 171

Преобразование текста задачи в формулу

с последующим переводом результата решения в текст

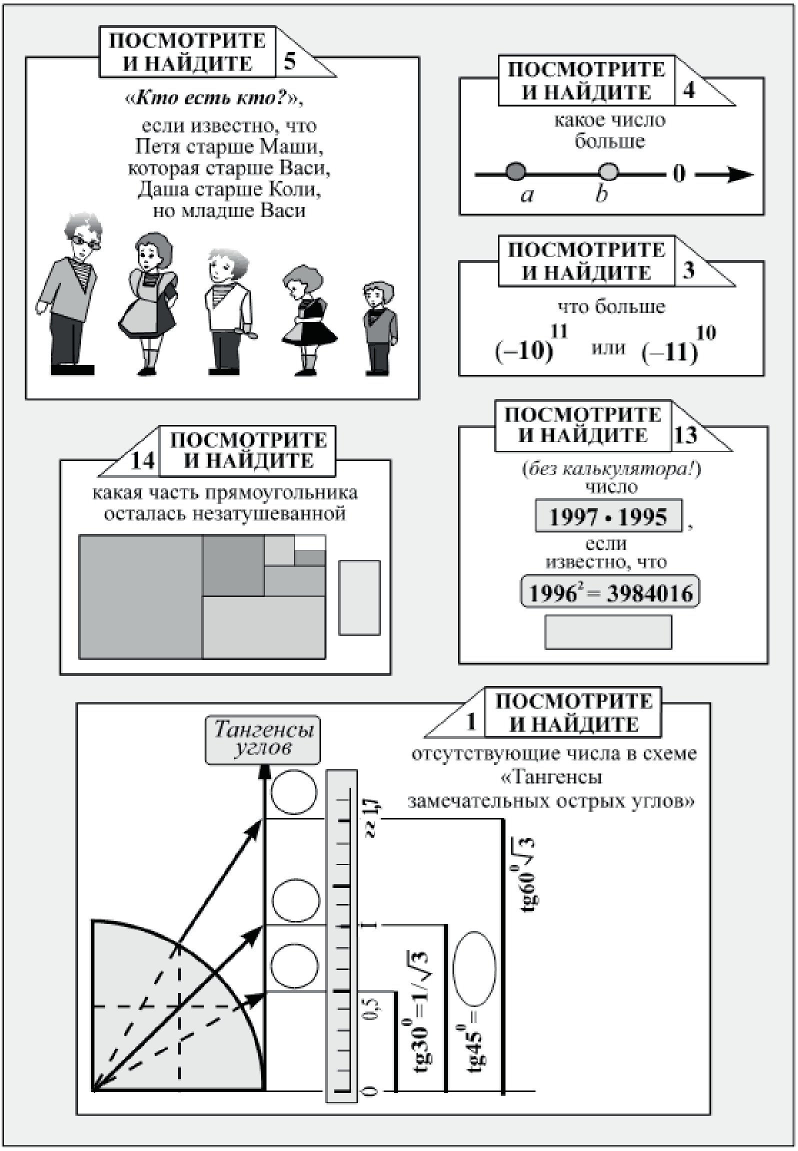


Рис. II.15.

Визуальные задачи математического содержания
на сопоставление текста, образа и формулы

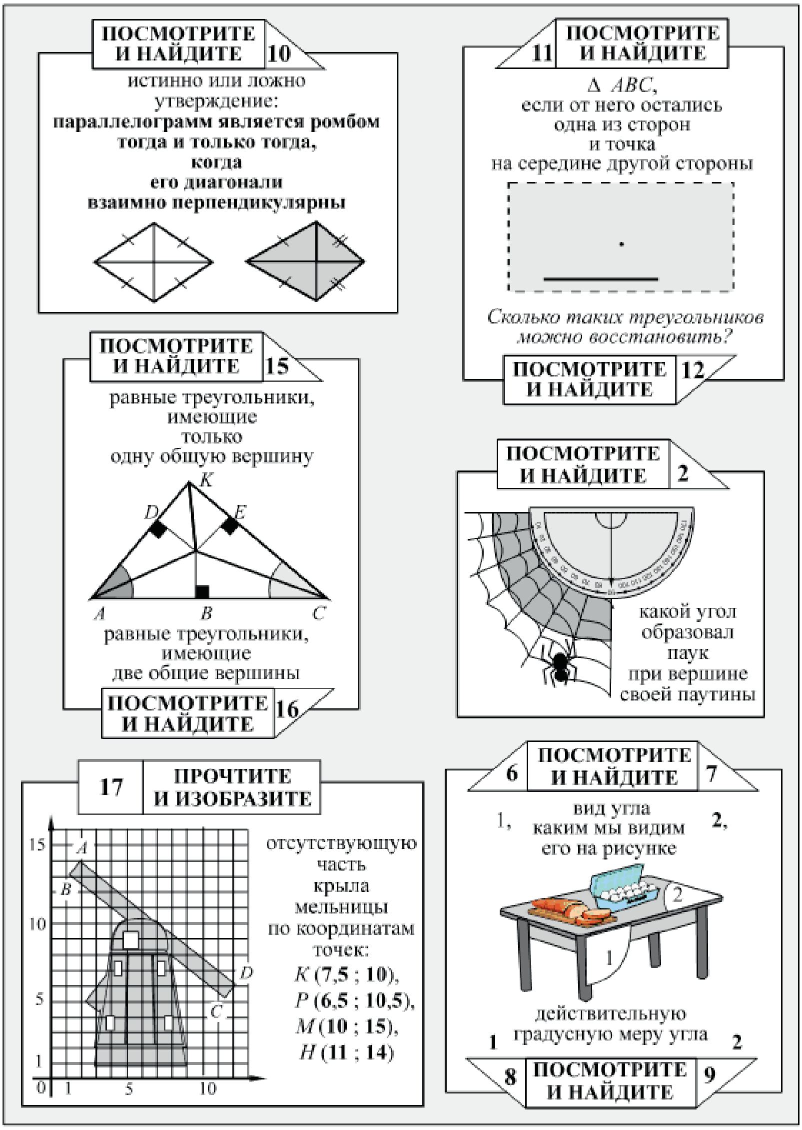


Рис. II.16.

Визуальные задачи на сопоставление текста и образа: геометрия для основной школы

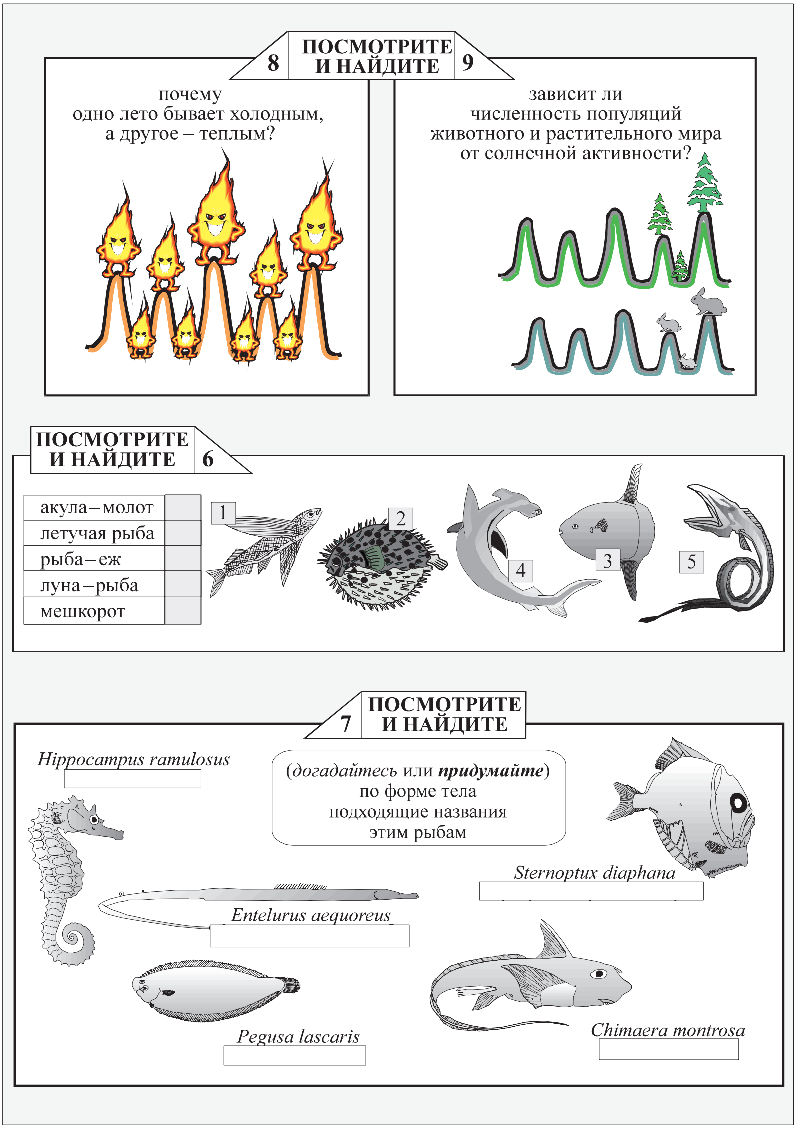


Рис. II.17.

Визуальные задачи на сопоставление текста и образа: география (вверху), биология (в центре и внизу)

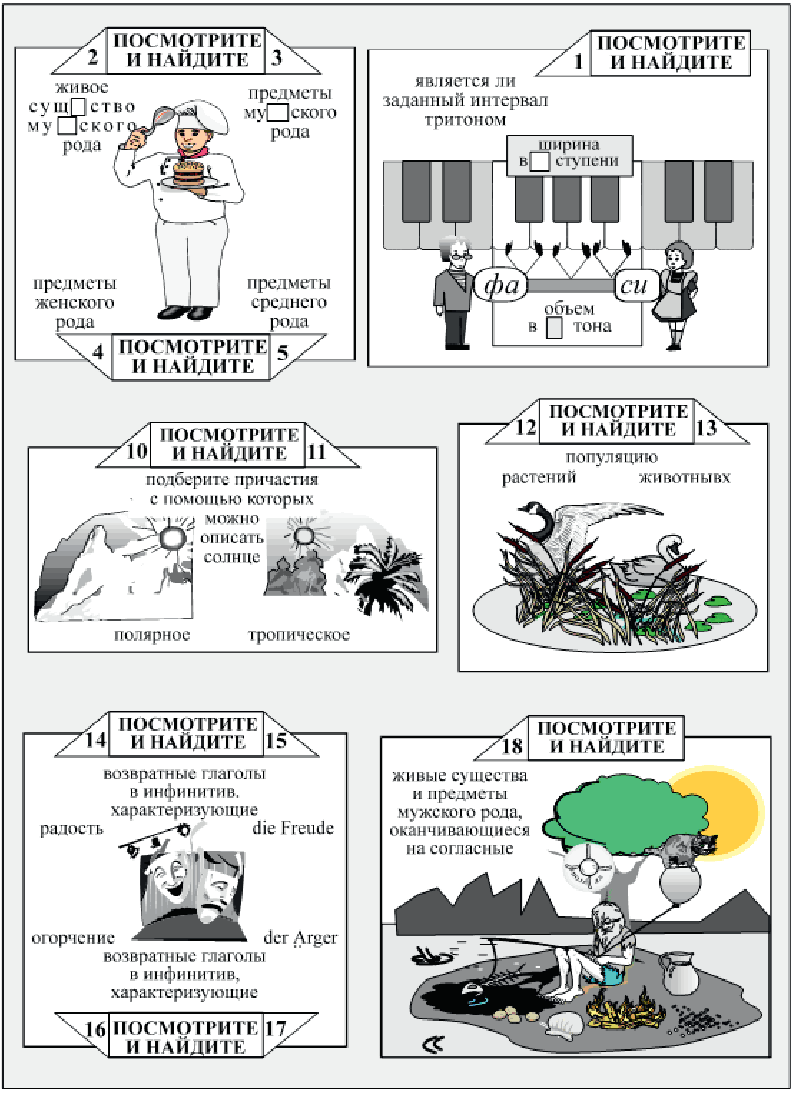


Рис. II.18.

Визуальные задачи гуманитарного содержания на сопоставление текста и образа

СТЕПЕНИ МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ

Проанализируйте
результаты первой таблицы,
заполните
вторую и третью таблицы.
Обдумайте
скрытую в них закономерность
и отразите
ее при заполнении последней таблицы.

В 18 веке
один из крупнейших математиков
Л. Эйлер
предложил необычное число,
квадрат которого равен «–**1**»:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

(***i*** – первая буква французского слова
imanqinaire (мнимый).
С тех пор число «***i***»
часто называют
«мнимой единицей»

1

Задание \ Ответ	i	-1	$-i$	1
i^1	+			
i^2		+		
i^3			+	
i^4				+

2

Задание \ Ответ	i	-1	$-i$	1
i^5				
i^6				
i^7				
i^8				

4

Задание \ Ответ	i	-1	$-i$	1
i^{16}				
i^{19}				
i^{21}				
i^{26}				

3

Задание \ Ответ	i	-1	$-i$	1
i^{11}				
i^{12}				
i^{13}				
i^{14}				

5

Задание \ Ответ	i	-1	$-i$	1
i^{4k}				
i^{4k+2}				
i^{4k+1}				
i^{4k+3}				

k – целое число

Рис. II.19.

Комплект тестов
для построения и разрешения проблемной ситуации

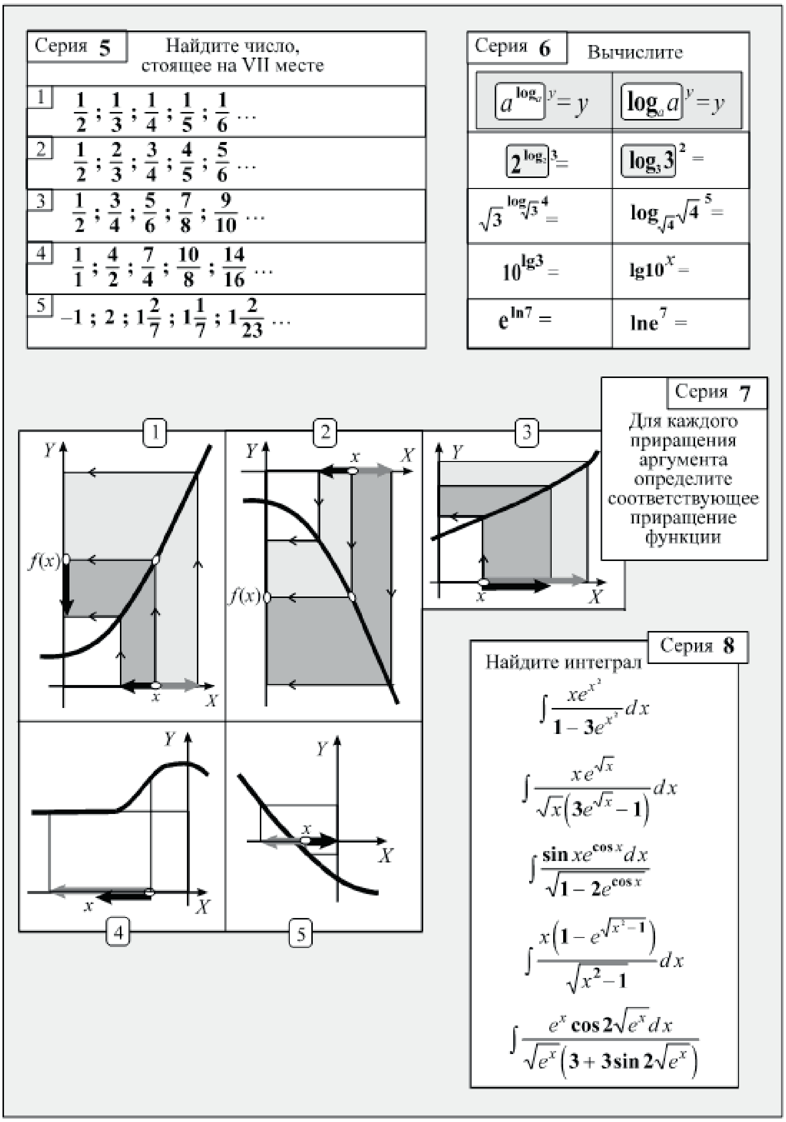


Рис. II.20.

Серии для различных разделов

алгебры (вверху) и математического анализа (внизу)

Серия 1

Определите количество гидроксогрупп в соединении

1	$\overset{I}{Li}(OH)_{\square}$
2	$\overset{I}{Cs}(OH)_{\square}$
3	$\overset{II}{Ba}(OH)_{\square}$
4	$\overset{II}{Ra}(OH)_{\square}$
5	$\overset{III}{Al}(OH)_{\square}$

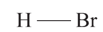
Серия 2

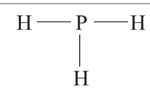
Определите коэффициент x в уравнении

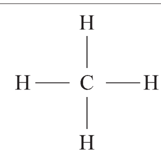
1	$x\,Mg + O_2 = \mathbf{2}\,MgO$
2	$x\,Na + O_2 = \mathbf{2}\,Na_2O$
3	$x\,H_2 + O_2 = \mathbf{2}\,H_2O$
4	$\mathbf{2}\,Fe + x\,Cl_2 = \mathbf{2}\,FeCl_3$
5	$\mathbf{4}\,P + x\,O_2 = \mathbf{2}\,P_2O_5$

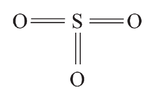
Серия 3

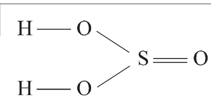
Запишите молекулярную формулу вещества по его структурной формуле

1 

2 

3 

4 

5 

Серия 4

Заполните пропуски в уравнении реакции

	xMe	+	$y\mathbf{H_20}$	=	$zMe^m\mathbf{(OH)}_m$	+	$\mathbf{H_2}$
1	$\square$**Na**	+	$\mathbf{2H_20}$	=	**2Na(OH)**	+	$\mathbf{H_2}$
2	**2K**	+	$\square\mathbf{H_20}$	=	**2K(OH)**	+	$\square$
3	**Ca**	+	$\square$	=	$\square\mathbf{(OH)_2}$	+	$\square$
4	**Ba**	+	$\square$	=	$\mathbf{Ba(OH)_2}$	+	$\square$
5	$\square$	+	$\square$	=	$\mathbf{Ra(OH)_2}$	+	$\square$

Серия 5 Составьте формулу соли **Серия 6**

	Na	K	Ca	Ba	Al	
нитрата						фторида
хлорида						бромида
сульфида						сульфита
сульфата						карбоната
фосфата						силиката

Рис. II.21.

Серии для различных разделов курсов неорганической и органической химии

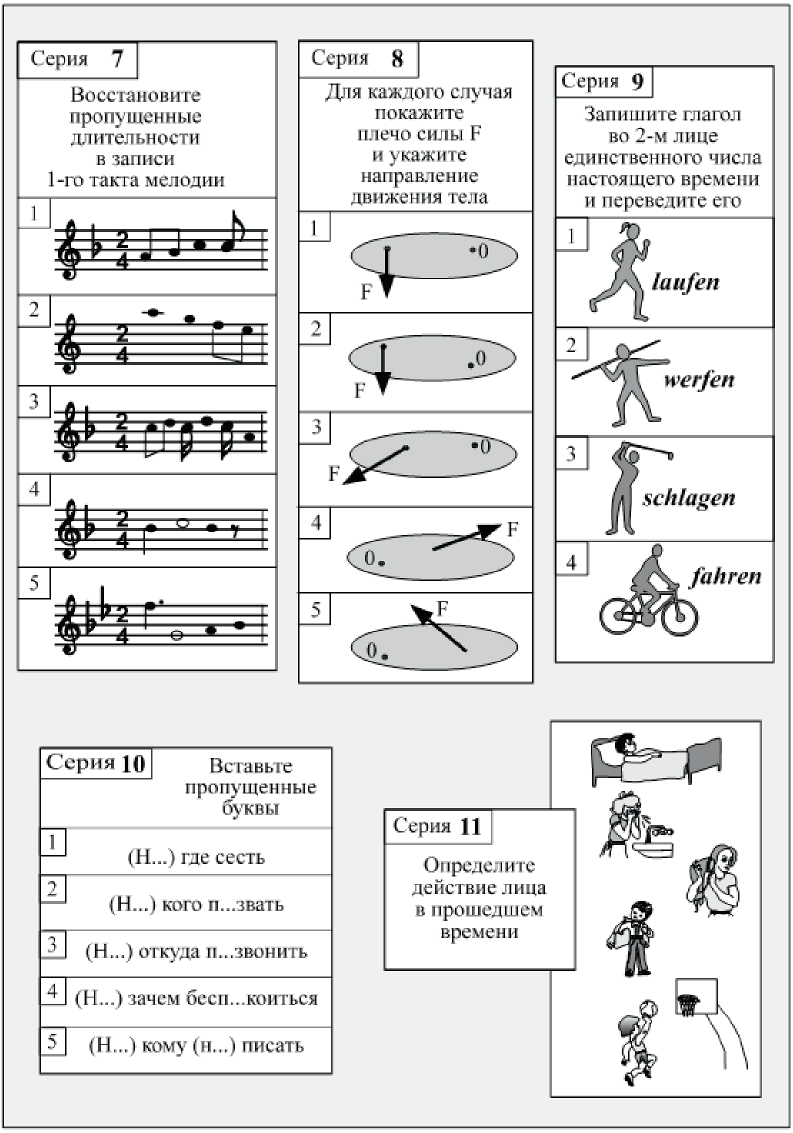


Рис. II.22.

Серии для различных учебных дисциплин:
музыка (7), физика (8), иностранный (9) и русский (10-11) языки

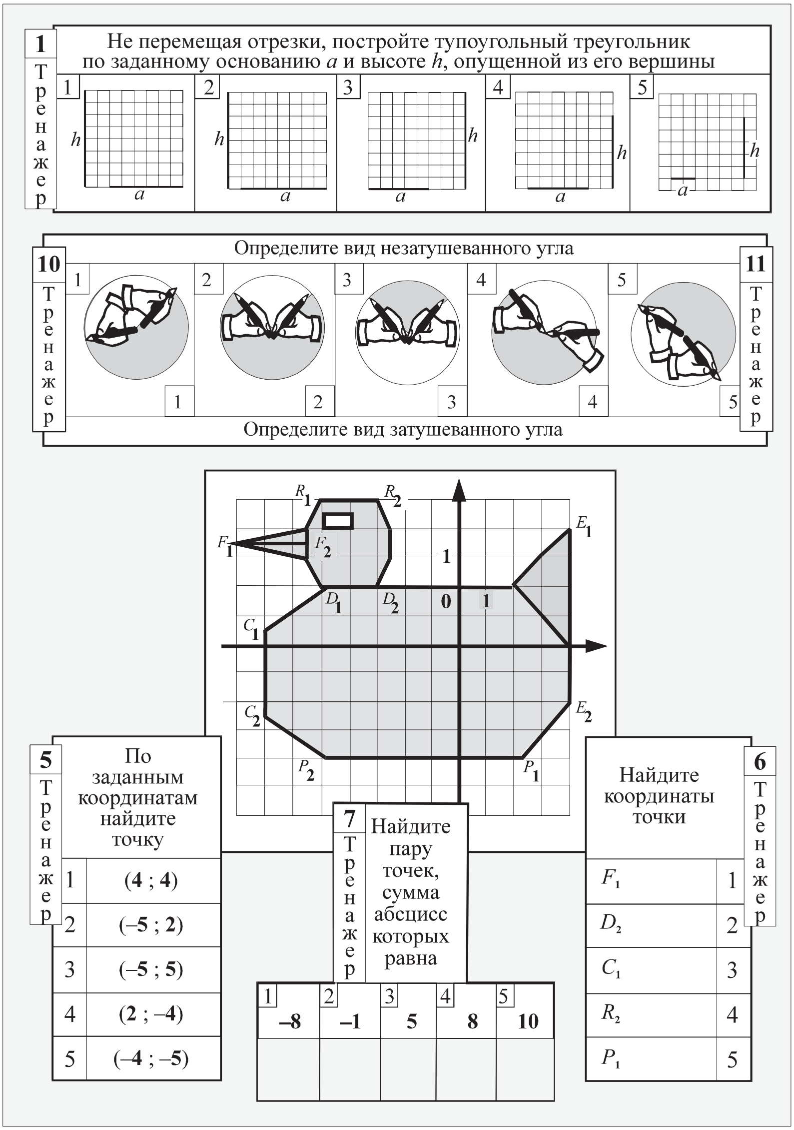


Рис. II.23.

Тренажеры для различных тем курса геометрии
в основной школе

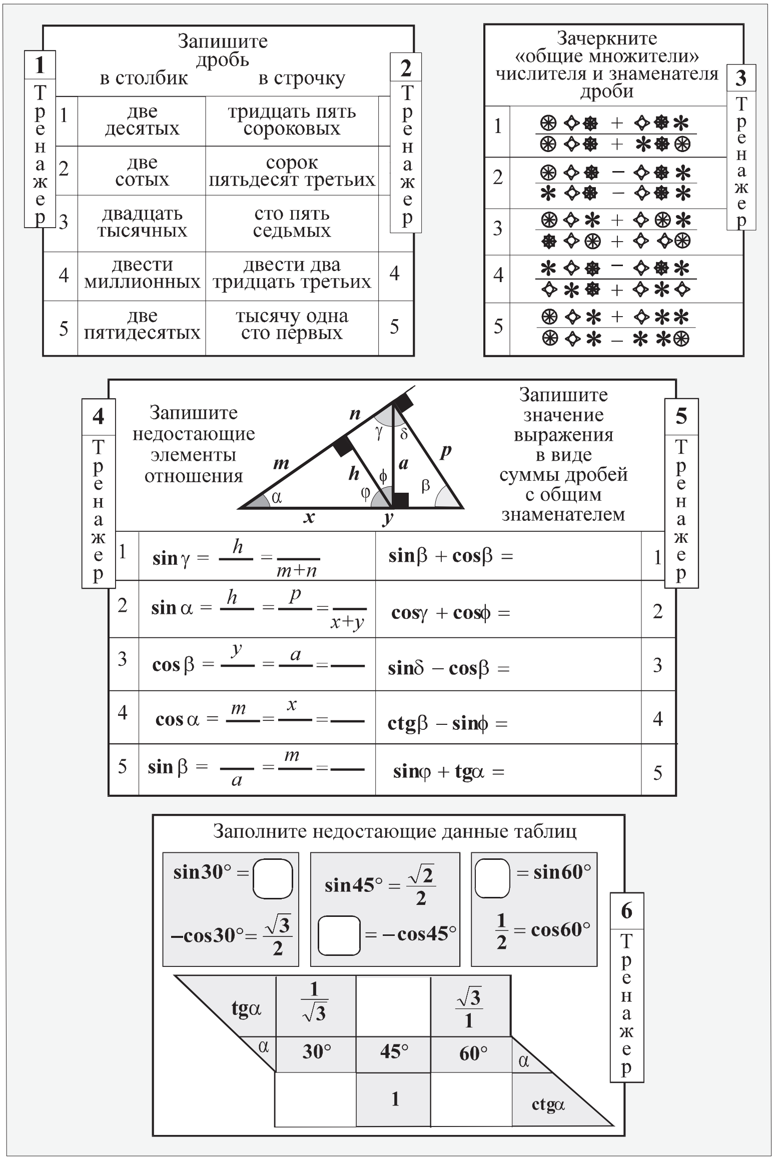


Рис. II.24.

Тренажеры для закрепления различных навыков арифметика (1-3), геометрия (4-5) тригонометрия (6)

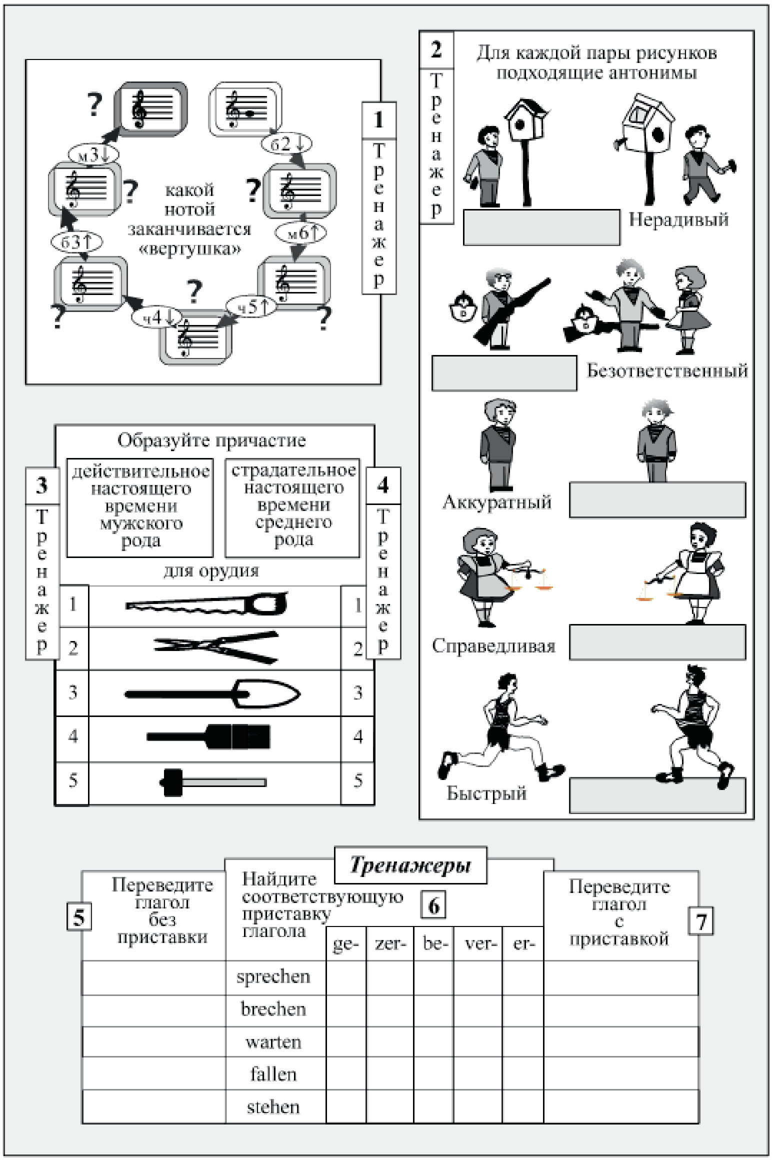
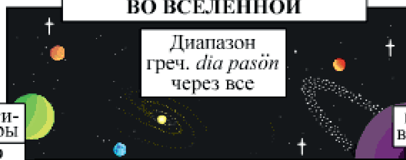


Рис. II.25.

Тренажеры для закрепления различных навыков музыка (1), русский (2-4) и иностранный (5-7) языки

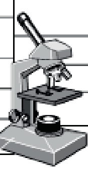
8 Тренажер

ДИАПАЗОН РАССТОЯНИЙ ВО ВСЕЛЕННОЙ



Диапазон
греч. *dia pasōn*
через все

сантиметры		порядок величины
10^{29}	Границы Вселенной	29
10^{26}	Ближайшая Галактика	26
10^{23}	Радиус нашей Галактики	
10^{20}	Ближайшая звезда Проксима-Центавра (1 световой год)	
10^{17}	Радиус орбиты Плутона	
10^{14}	Расстояние Земля - Солнце	
10^{11}	Расстояние Земля - Луна	
10^{8}		
10^{2}	Рост человека	
10^{-1}	Размер крупинки соли (1 см)	
10^{-4}	Размер вируса	
10^{-7}	Размер атома водорода	
10^{-10}	Радиус атомного ядра	–10
10^{-13}		–13



9 Тренажер

Вставьте в предложение глагол

abschreiben	1	Ich	den Text
einpacken	2	Ich	meinen Koffer
umgraben	3	Ich	das Beet
aufräumen	4	Ich	die Klasse
vorbereiten	5	Ich	aüf die Prufungen

10 Тренажер

Определите количество гидроксогрупп в соединении

1	$\overset{I}{Li}(OH)$	☐
2	$\overset{I}{Cs}(OH)$	☐
3	$\overset{II}{Ba}(OH)_2$	☐
4	$\overset{II}{Ra}(OH)_2$	☐
5	$\overset{II}{Al}(OH)_3$	☐

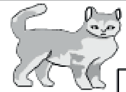
Рис. II.26.

Тренажеры для закрепления различных навыков
физика (8), иностранный язык (9), химия (10)

1 ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Модулем x является

1	2	3	4	5
x^2	$\sqrt{x^2}$	$\sqrt{x}^{\,2}$	$\left(\sqrt{x}\right)^2$	$\sqrt{x}$



В течение $1/4$ суток времени кошка ест, а остальное время она спит.

2 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ

Сколько часов в сутки кошка спит?

6	А
12	Б
16	В
18	Г
20	Д

1 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ

Два смежных угла могут быть

А	прямыми	А
Б	тупыми	Б
В	острыми	В
Г	развернутыми	Г
Д	нулевыми	Д

Два дополнительных угла могут быть

4 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ

2 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ

$(a-b+c-d)^2-(a+b-c+d)^2=$

А	$4(ac+ab+ad)$
В	$4(ac-ab+ad)$
В	$4(ac+ab-ad)$
Г	$4(ac-ab-ad)$
Д	$4(ad-ab-ac)$
Е	$4(ad+ab-ac)$

6 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ

$[(1997^2-1996^2)-(1996^2-1995^2)]^2 =$

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И
0	**2**	**4**	**22**	**44**	**222**	**444**	**2222**	**4444**

7 ВЫБЕРИТЕ ОТВЕТ 8

На линии синуса для углов первой четверти тригонометрической окружности можно отмечать значения синуса угла

А	любые положительные	А
Б	от **0** до **1**	Б
В	любые	В
Г	только целое	Г
Д	не больше **1**	Д

На линии косинуса для углов первой четверти тригонометрической окружности можно отмечать значения косинуса угла

Рис. II.27.

Задания на выбор ответа математического содержания

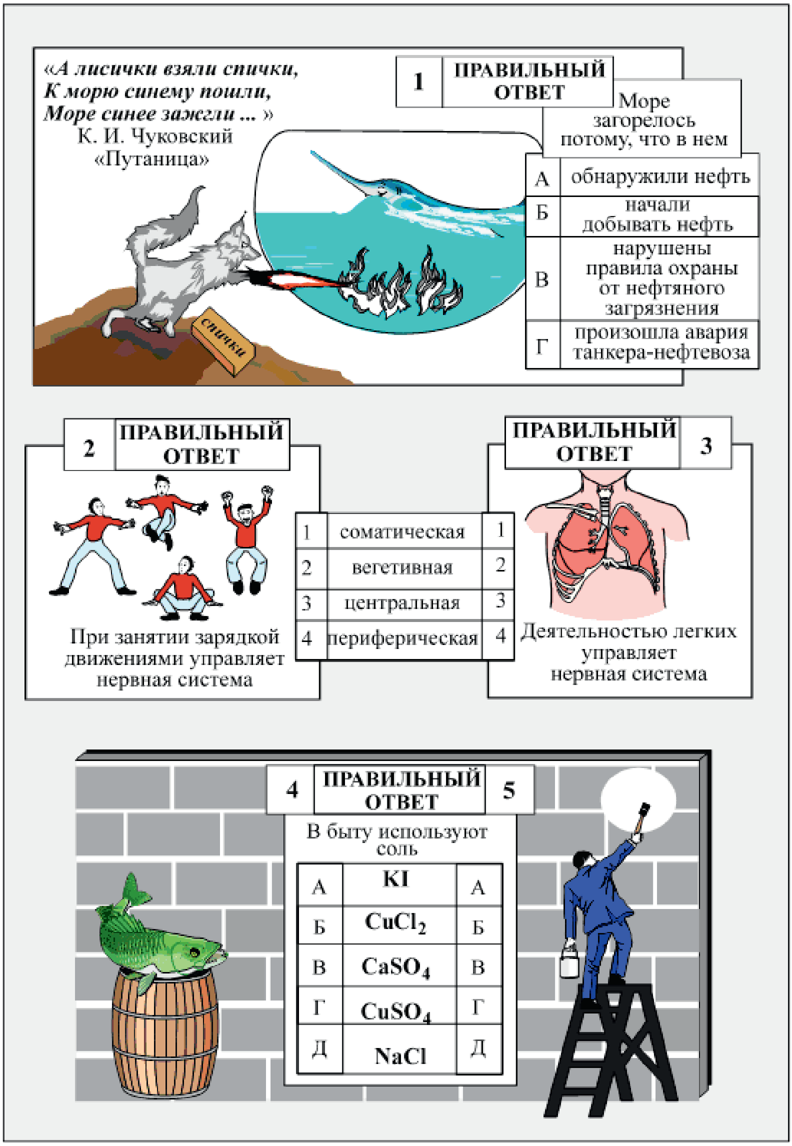


Рис. II.28. периферическая прилипла

Задания на выбор ответа естественно-научного содержания: экология (1), анатомия (2-3), химия (4-5)

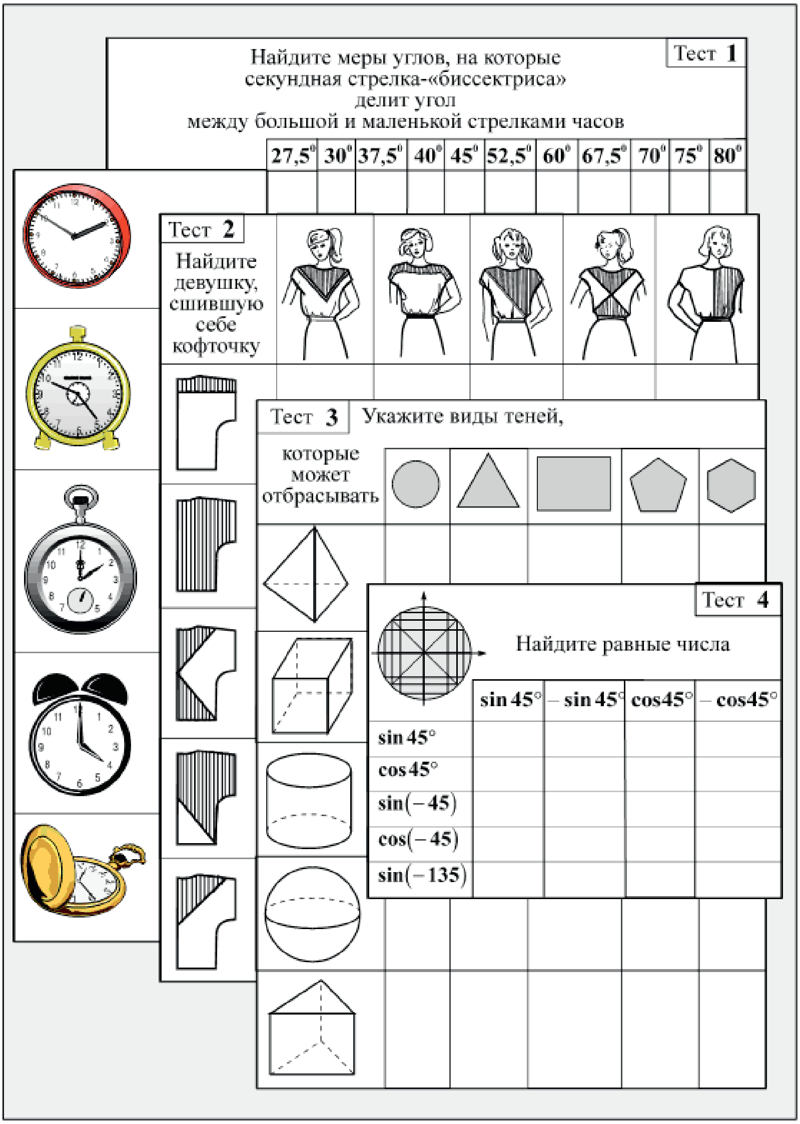


Рис. II.29.

Тесты математического содержания на сопоставление:
рисунок-формула (1), рисунок-рисунок (2-3), формула-формула (4)

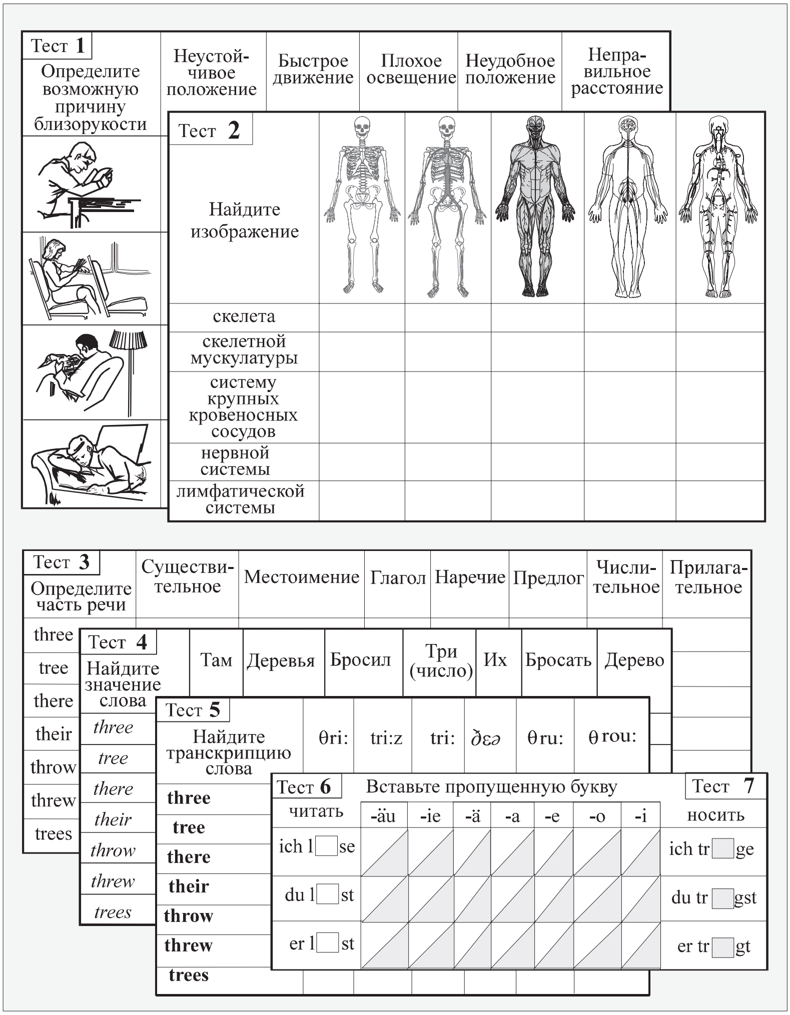


Рис. II.30.

Тесты для проверки остаточных знаний
по анатомии (1-2), по иностранному языку (4-6)

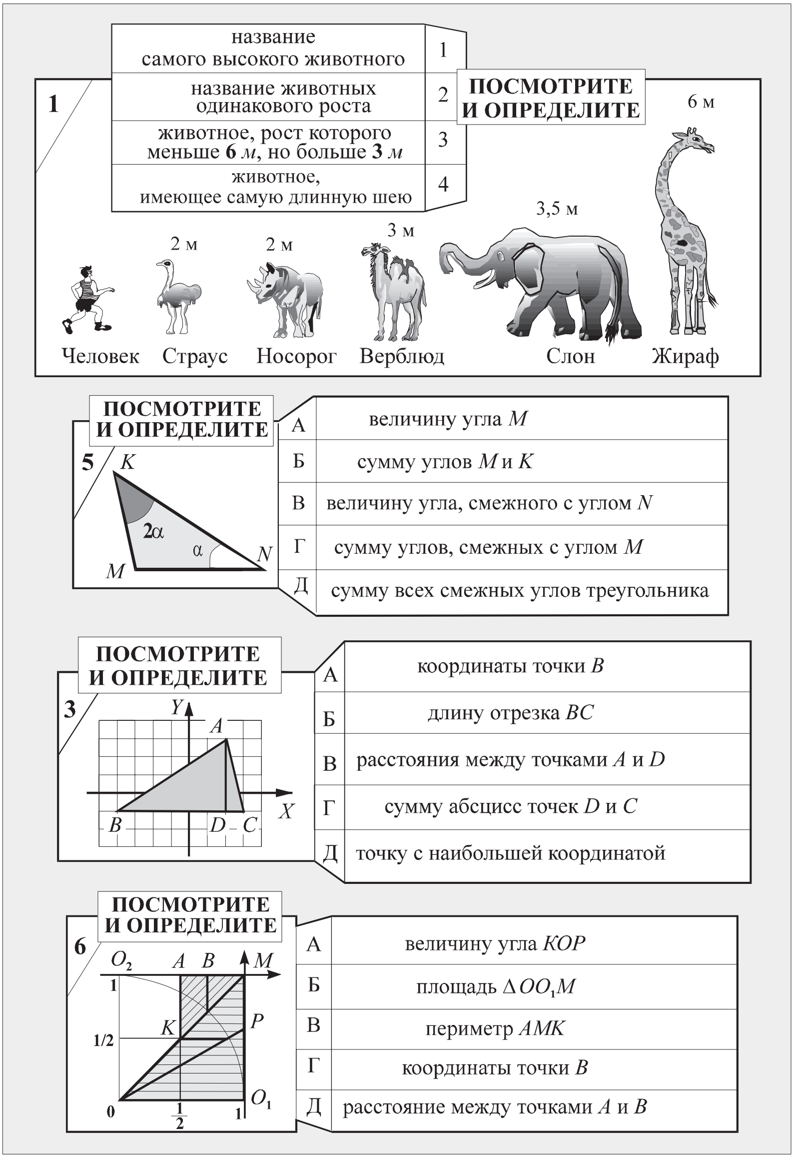


Рис. II.31.

Задания для итоговой проверки геометрических знаний
в разных классах начальной и основной школы

ПОСМОТРИТЕ И ЗАПИШИТЕ

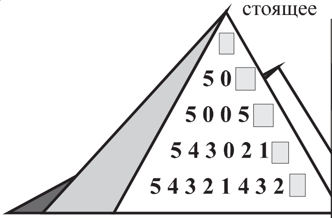
4

$$\mathbf{2772}\,\frac{s^3}{\mathbf{36}}\cdot\frac{p^2r^3}{\mathbf{11}s^2}+$$
$$+\,\mathbf{121}s\,\frac{p^2}{\mathbf{33}}\cdot\frac{\mathbf{9}r^3}{\mathbf{11}}$$

1	коэффициент 1-го слагаемого
2	наименьший из коэффициентов слагаемых
3	степень переменной s в 1-м слагаемом
4	1-е слагаемое в виде стандартного одночлена
5	сумму (*если это возможно!*) в виде стандартного одночлена

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

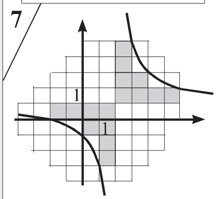
2 пропущенные цифры в числовой «пирамиде», если известно, что число, стоящее



1	в 1-й строке делится на **5**
2	во 2-й строке нечетное и делится на **5**
3	в 3-й строке четное и делится на **5**
4	в 4-й строке имеет сумму цифр, равную **15** и делится на **5**
5	в 5-й строке делится на **25**

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

7



А	наименование данной кривой	А
Б	уравнение данной кривой	Б
В	область определения данной функции	В
Г	множество значений данной функции	Г
Д	точку нуля данной функции	Д

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

8

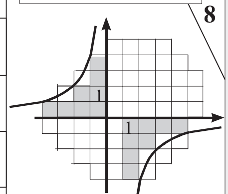
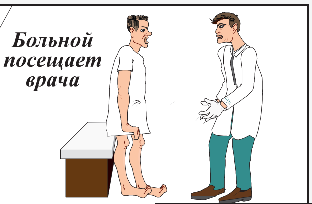


Рис. II.32.

Задания для итоговой проверки алгебраических знаний в разных классах основной и старшей школы

1



2

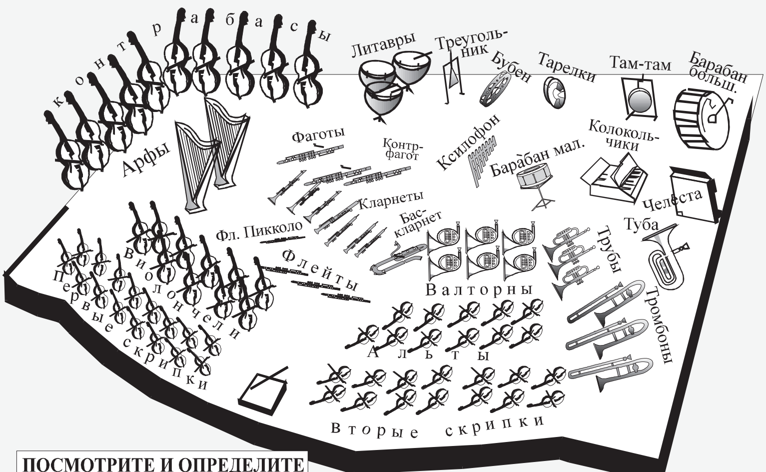
ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

А	в данном предложении глагол	А
Б	на какой вопрос отвечает этот глагол	Б
В	в каком лице стоит этот глагол	В
Г	в каком числе употреблен этот глагол	Г
Д	на каком месте в предложении стоит этот глалог	Д

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

Можно ли в русском языке менять место глагола в предложении?

В немецком языке глагол в предложении обычно стоит на втором месте



ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ

3		
	А	самую большую группу инструментов симфонического оркестра
	Б	ударные инструменты
	В	клавишные инструменты
	Г	инструмент оркестра, имеющий самый большой диапазон
	Д	духовые деревянные инструменты, отсутствующие на данной схеме

Рис. II.33.

Задания для итоговой проверки учебных знаний: русский (1) и иностранный (2) языки, музыка (3)

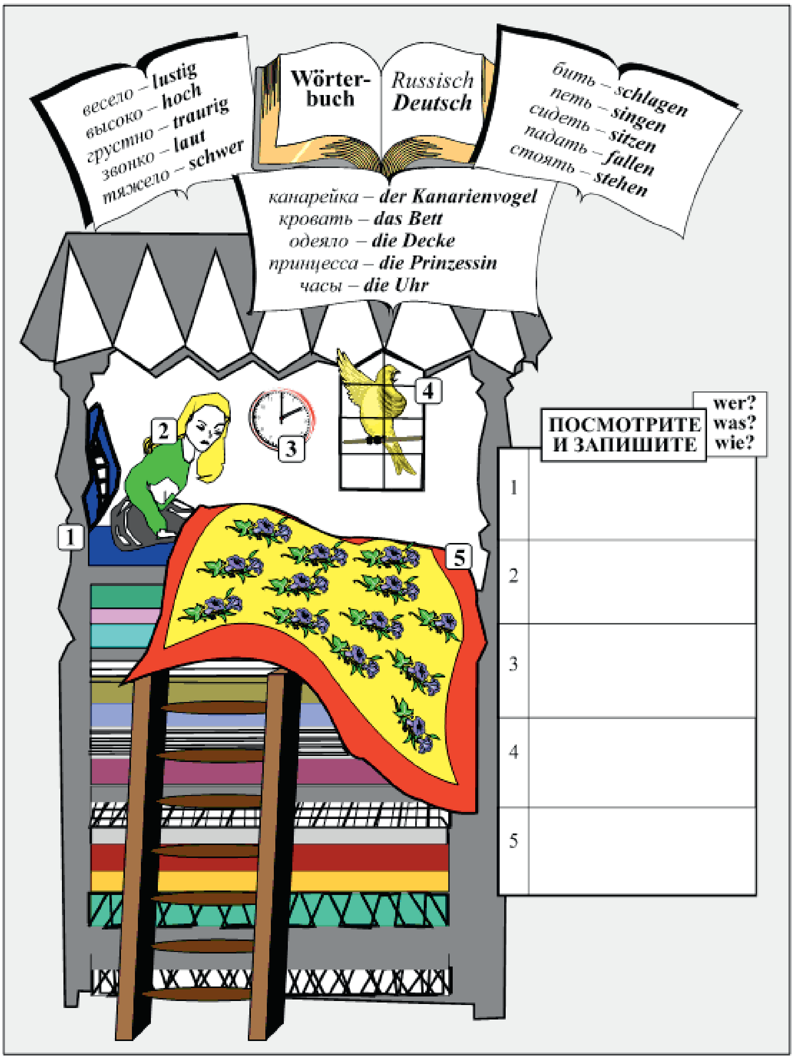


Рис. II.34.

Задание для проверки умения пользоваться справочным словарным материалом

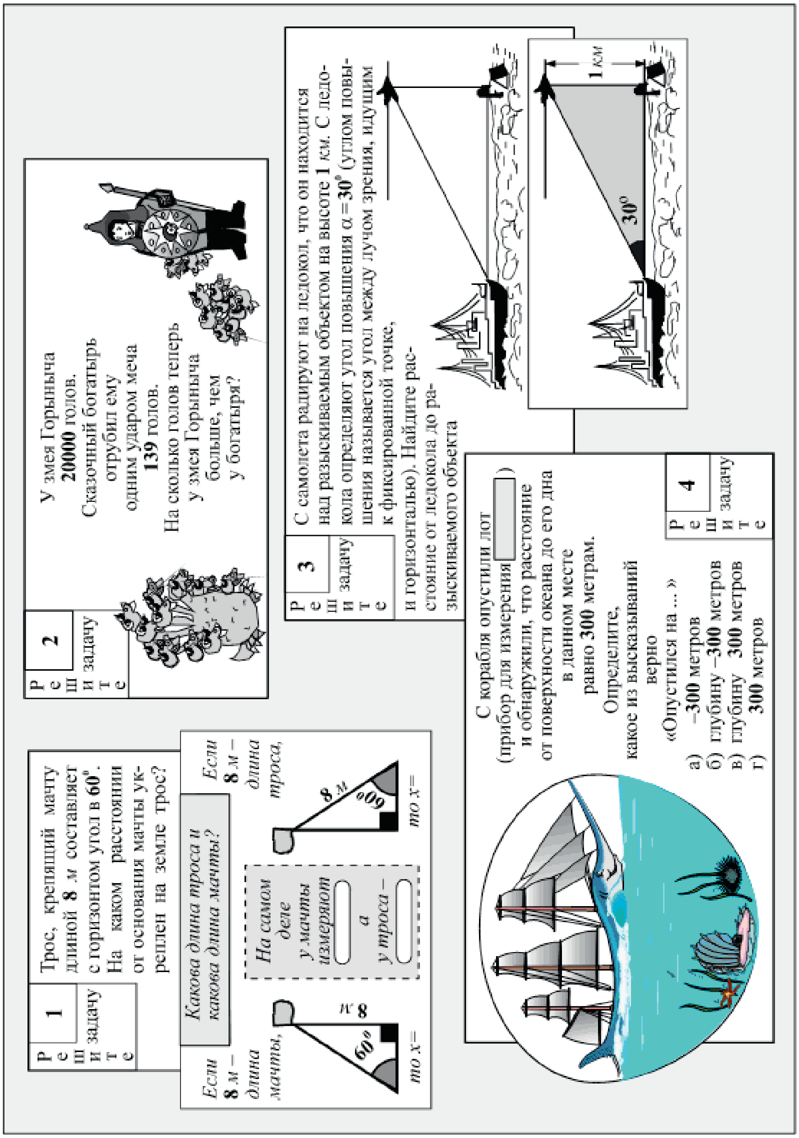


Рис. II.35.

Текстовые задачи математического содержания с предполагаемой альтернативой в ответе

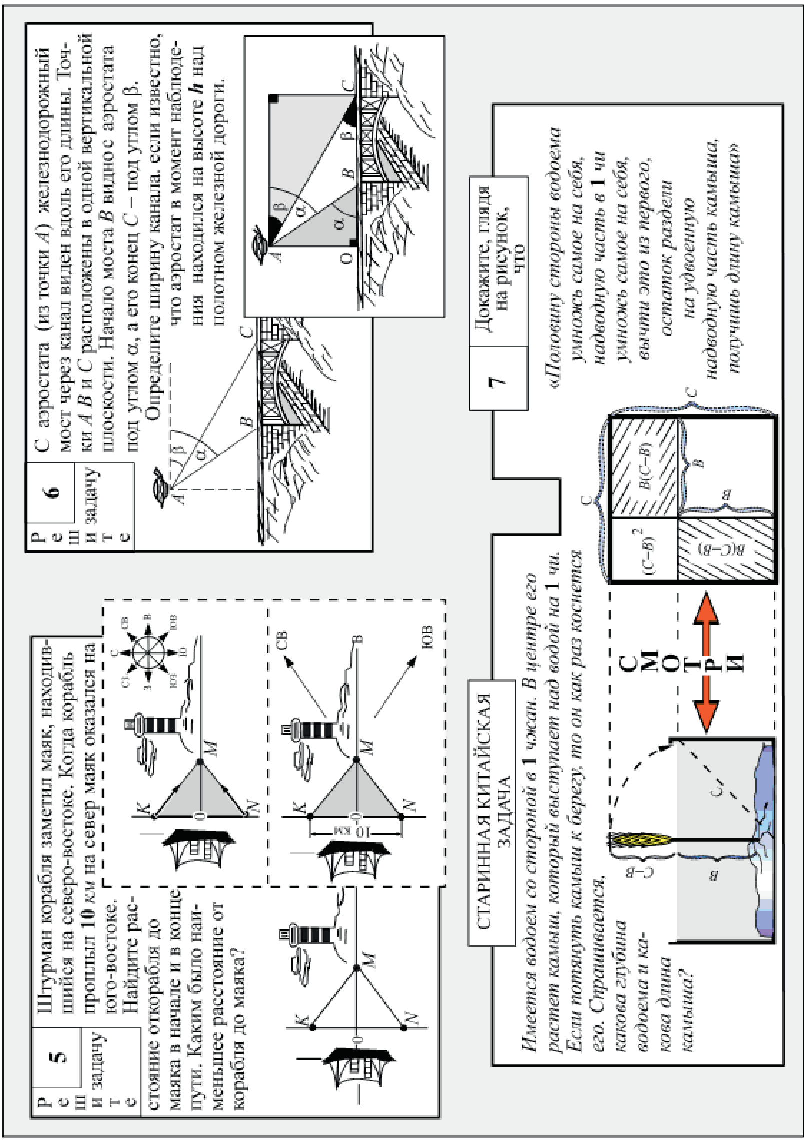


Рис. II.36.

Задачи математического содержания
на сопоставление данных текста и рисунка

МАТРИЦА 1	Для каждой пары выражений найдите				
ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ	квадрат их разности	сумму		сумму неполных квадратов их суммы и разности	разность между кубами их суммы и разности
		квадратов	кубов		
	и (*если это возможно*) вынесите общий множитель			и (*если это возможно*) разложите на множители	
x и $-y$					
x и $\mathbf{1}/y$					
x/y и $-y/x$					
$\mathbf{3}/xy$ и $-x/\mathbf{3}y$					
$-xy/\mathbf{3}z$ и $y/\mathbf{3}z$					

МАТРИЦА 2	Для каждого выражения				
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ И КУБЫ	запишите общие множители	вынесите общие множители	преобразуйте в произведение двучленов	в исходном выражении раскройте скобки и запишите результат в стандартном виде	оформите тождественное равенство многочлена в стандартном виде (слева) произведению множителей (справа)
$(x-\mathbf{1})^2-(\mathbf{1}-x)$					
$(\mathbf{2}-x)^3-(x-\mathbf{2})$					
$(x-\mathbf{3})^3-(\mathbf{3}-x)^2$					
$(x-\mathbf{4})^4-(\mathbf{4}-x)^2$					
$(x-\mathbf{5})^4-(\mathbf{5}-x)^3$					

МАТРИЦА 3	Последовательно выполните действия:				
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ	раскройте внешние скобки	раскройте все скобки	приведите подобные члены	вынесите общий множитель	запишите многочлен в стандартном виде
$-(x^2-\mathbf{9})$					
$-[x^3+x^2-(x+\mathbf{8})]$					
$-\{x^3-[x^3-x^2-(x+\mathbf{7})+\mathbf{7}]\}$					
$-\{x^4+x^2-[x-x^2-(x+\mathbf{6})]\}$					
$-(x^3\{\mathbf{5}-[(x-\mathbf{5})+x^2]+(x-\mathbf{5})\})$					

Рис. П.37.

Комплект обучающих матриц по теме «Многочлены» для 8 класса основной школы

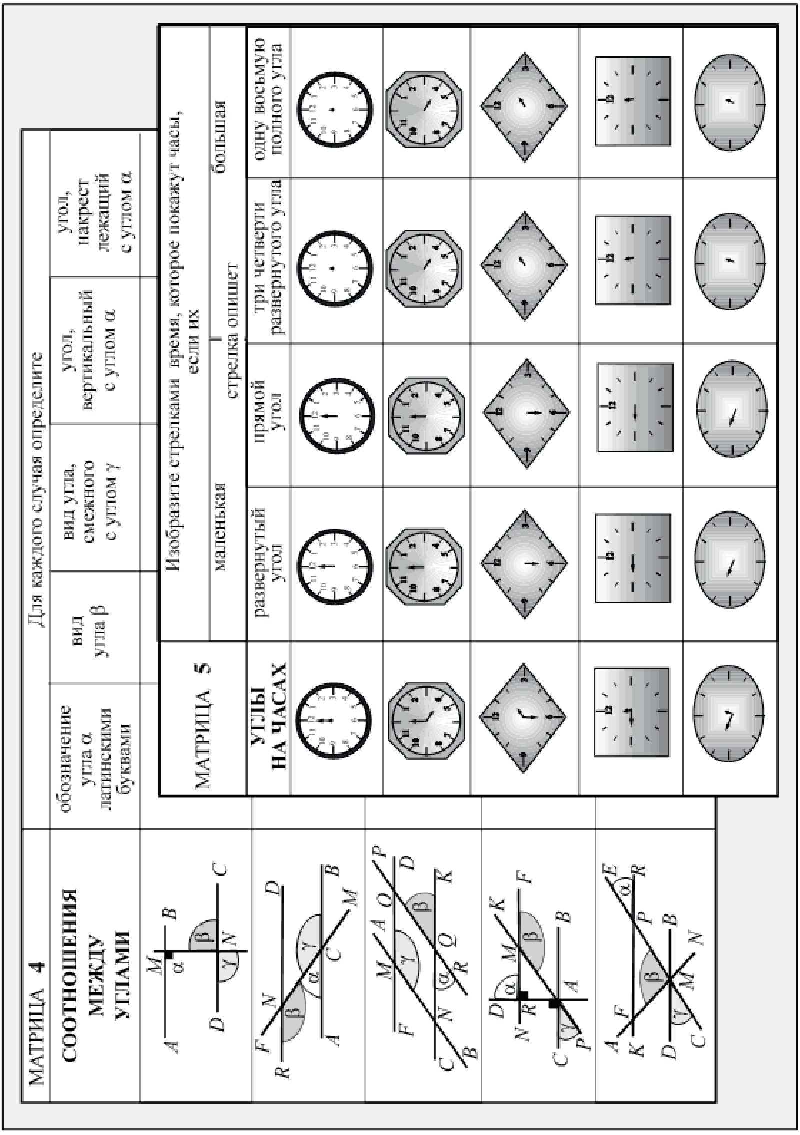
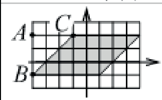
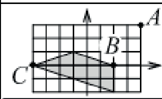
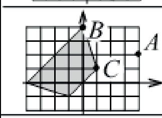
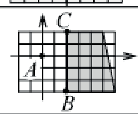


Рис. II.38.

Обучающие матрицы
для основной (5) и начальной (6) школы

МАТРИЦА 1	Определите и запишите				
ДЛИНЫ И РАССТОЯНИЯ	длину вектора $\overrightarrow{OB}$	расстояние от начала координат до точки A	расстояние между точками A и B	координаты точки C, симметричной точке A относительно точки B	длину отрезка AC
$A\,(\mathbf{2;1})$ $B\,(\mathbf{2;2})$					
$\overrightarrow{OA}=\mathbf{2}\bar{i}-\bar{j}$ $\overrightarrow{OB}=\mathbf{2}\bar{i}$					
$\overrightarrow{OA}=(\mathbf{1;-2;1})$ $\overrightarrow{OB}=\mathbf{2}\bar{i}-\bar{k}$					
$\overrightarrow{AB}=(\mathbf{-1;2;1})$ $B=(\mathbf{1;-2;1})$					
$A=(\mathbf{1;-2;1})$ $\overrightarrow{BA}=\bar{k}-\mathbf{2}\bar{i}-\bar{j}$					

МАТРИЦА 2 **КООРДИНАТЫ, РАССТОЯНИЯ, ПЛОЩАДИ**	Найдите координаты точки A	Найдите расстояние между точками A и B	Определите вид треугольника ABC	Определите вид затушеванной фигуры	Найдите площадь затушеванной фигуры
					
					
					
					

МАТРИЦА 3	Для каждого выражения R				
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ В МОДУЛЬ	освободитесь от корня	найдите ОДЗ	решите уравнение $R=\mathbf{0}$	решите неравенство $R<\mathbf{1}$	решите неравенство $R>\mathbf{3}$
$\sqrt{x^2+2x+1}$					
$\sqrt{x^2-4+\frac{4}{x^2}}$					
$\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}$					
$\frac{1}{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}$					
$\frac{1}{\sqrt{2x^2+5+4\sqrt{2x+1}}}$					

Рис. II.39.

Контролирующие матрица к разным разделам курса математики основной (2) и старшей школы (1, 3)

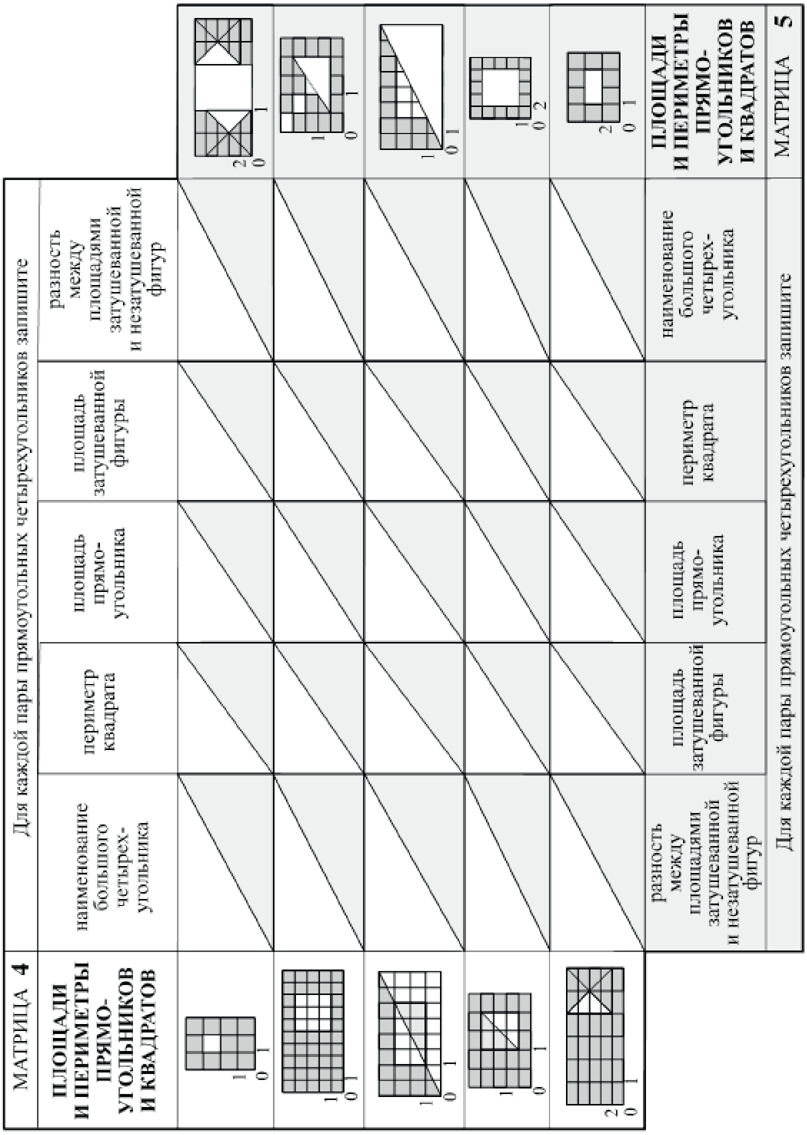


Рис. П.40.

Основная (4) и запасная (5) матрицы для проверки геометрических знаний в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

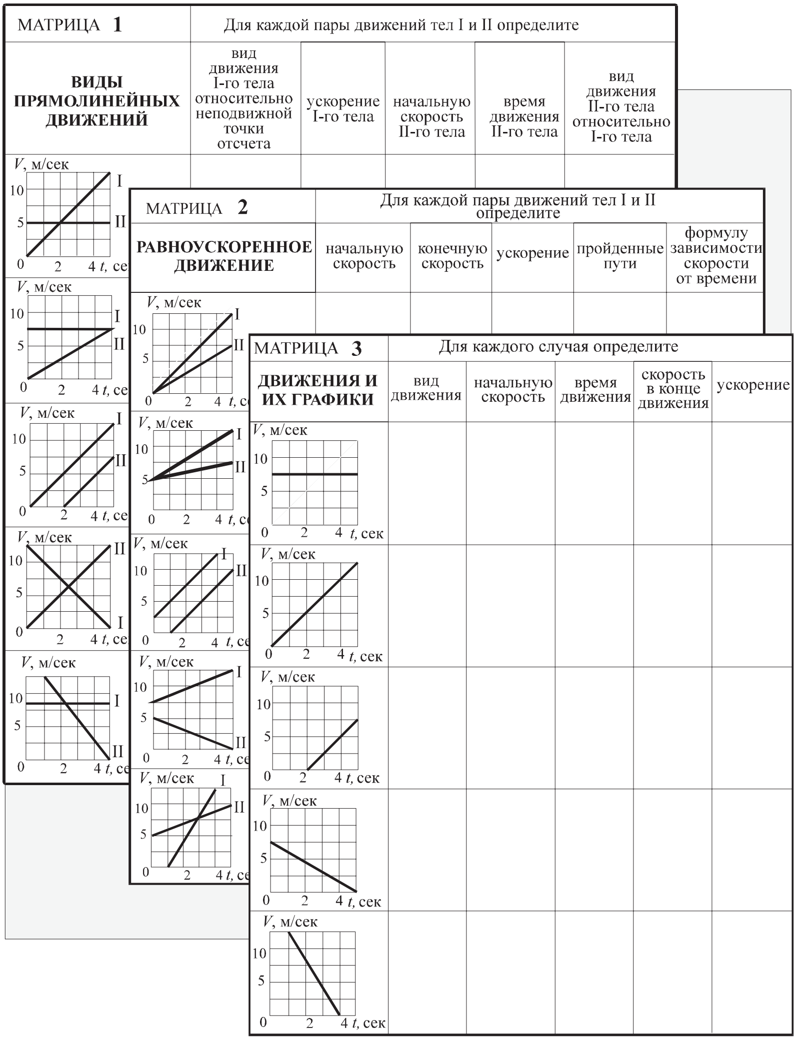
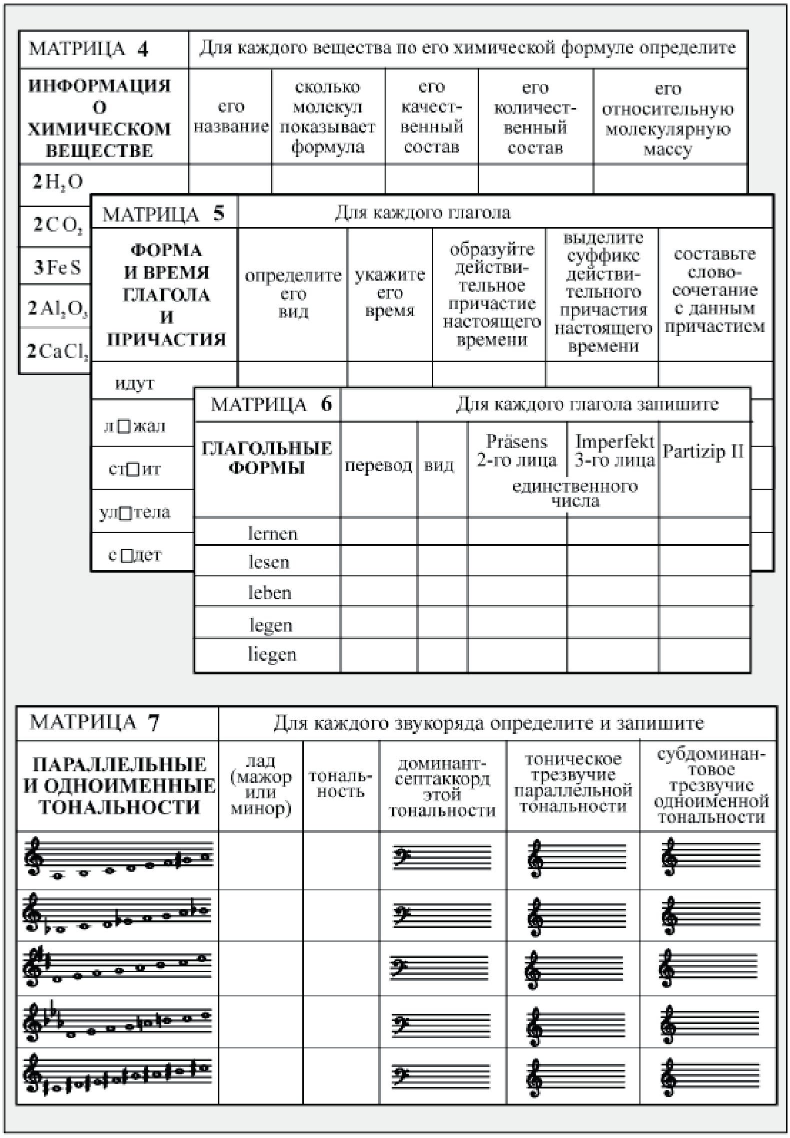


Рис. II.41.

Комплект обучающих матриц для уроков физики в основной школе по теме «Механическое движение»



МАТРИЦА 4	Для каждого вещества по его химической формуле определите				
ИНФОРМАЦИЯ О ХИМИЧЕСКОМ ВЕЩЕСТВЕ	его название	сколько молекул показывает формула	его качественный состав	его количественный состав	его относительную молекулярную массу
2 H_2O					
2 CO_2					
3 FeS					
2 Al_2O_3					
2 $CaCl_2$					

МАТРИЦА 5	Для каждого глагола				
ФОРМА И ВРЕМЯ ГЛАГОЛА И ПРИЧАСТИЯ	определите его вид	укажите его время	образуйте действительное причастие настоящего времени	выделите суффикс действительного причастия настоящего времени	составьте словосочетание с данным причастием
идут					
л□жал					
ст□ит					
ул□тела					
с□дет					

МАТРИЦА 6	Для каждого глагола запишите				
ГЛАГОЛЬНЫЕ ФОРМЫ	перевод	вид	Präsens 2-го лица единственного числа	Imperfekt 3-го лица единственного числа	Partizip II
lernen					
lesen					
leben					
legen					
liegen					

МАТРИЦА 7	Для каждого звукоряда определите и запишите				
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И ОДНОИМЕННЫЕ ТОНАЛЬНОСТИ	лад (мажор или минор)	тональность	доминантсептаккорд этой тональности	тоническое трезвучие параллельной тональности	субдоминантовое трезвучие одноименной тональности

Рис. II.42.

Матрицы для разных предметных областей:
химия (4), русский (5) и иностранный (5) языки, сольфеджио (7)

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Организация группового и индивидуального поиска

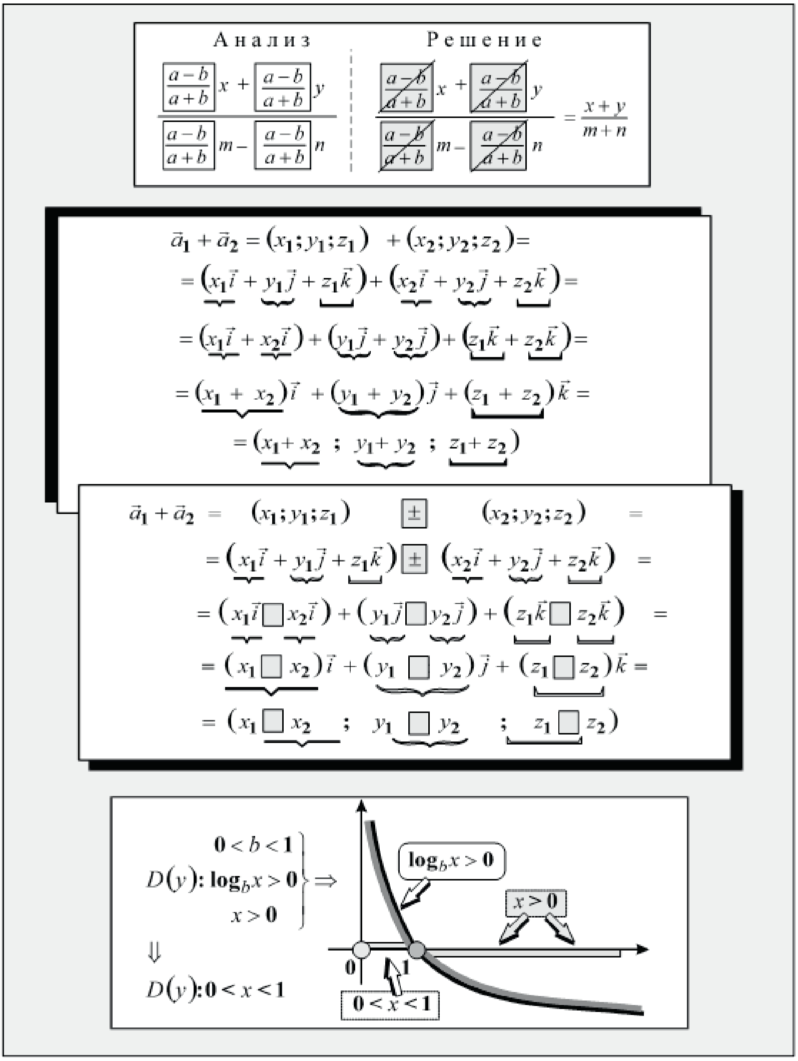


Рис. III.01.

Примеры преобразования

исходных данных учебной математической информации

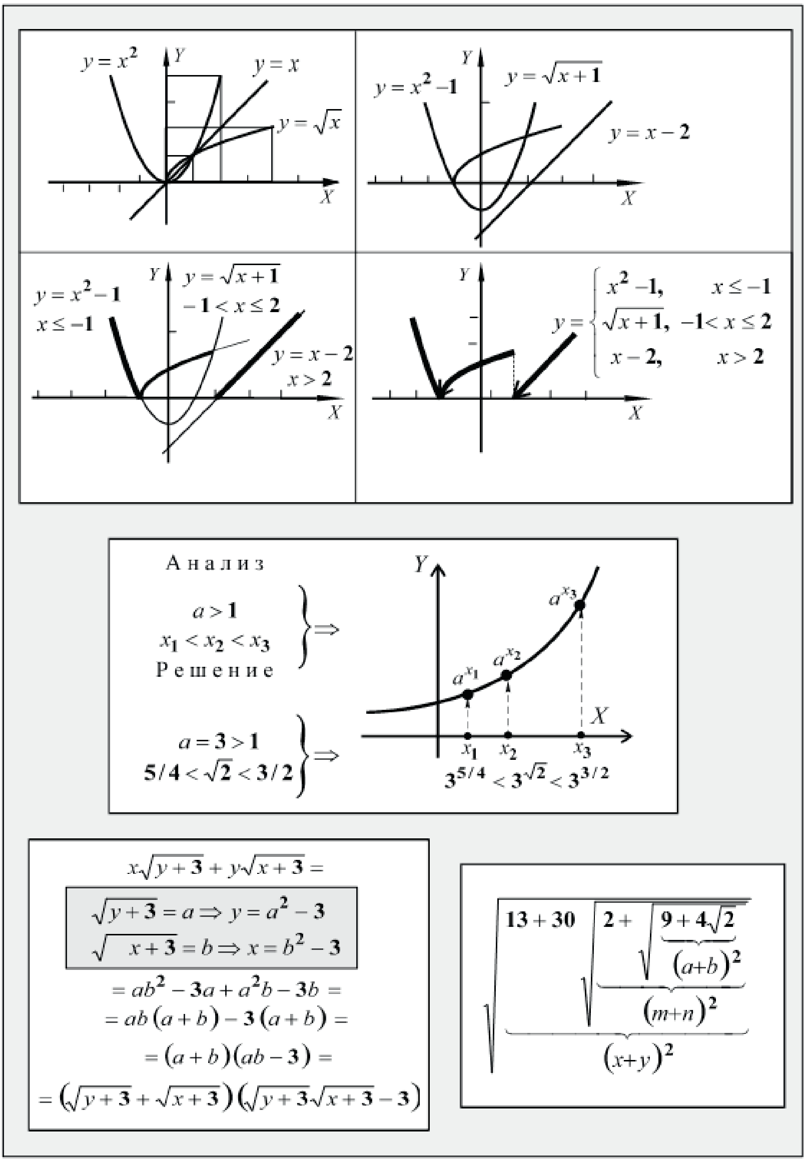


Рис. III.02.

Примеры приемов преобразования элементов рисунка и формулы
для визуализации общей схемы действий

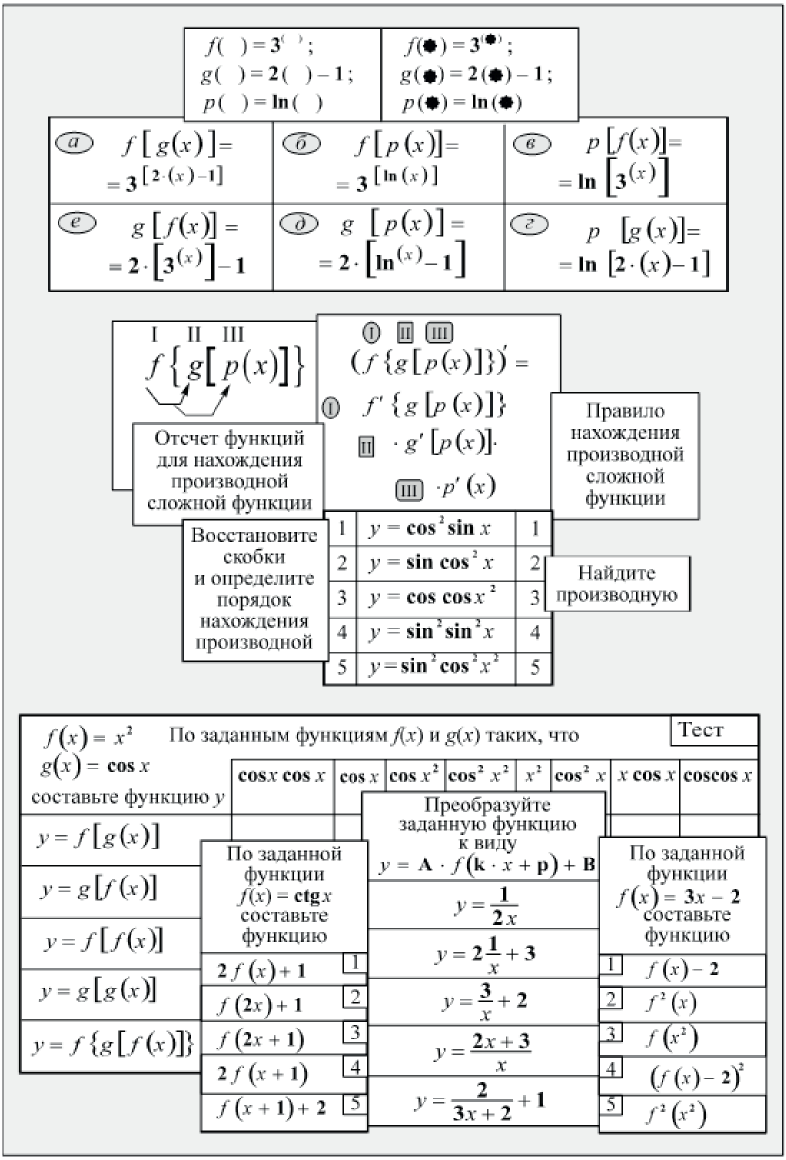


Рис. III.03.

Приемы анализа и преобразования формульной информации в практических упражнениях

Найдите число

$$\left|\, - \left|\, - \left(2 \cdot \left|\, - \left(3 \cdot \left|\, - \left(4 \cdot \boxed{\left| -5 \right|} \right) \right| \right) \right| \right) \right| =$$

$$= \left| \left| \left(\left| \left(\boxed{\left| - \left(4 \cdot \quad 5 \right) \right|} \right) \right| \right) \right| \right| =$$

$$= \left| \left| \left(\boxed{\left| - \left(3 \cdot \qquad 5 \right) \right|} \right) \right| \right| =$$

$$= \left| \boxed{\left| - \left(2 \cdot \qquad\qquad \right) \right|} \right| =$$

$$= \boxed{\left| - \quad \left(\qquad\qquad 5 \right) \right|} =$$

$$\log_4\left(2 \cdot \log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right)\right)\right) = 1/2$$

$$2 \cdot \log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right)\right) = 4^{1/2}$$

$$\log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right)\right) = 1$$

$$1 + \log_2\left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right) = 3^1$$

$$\log_2\left(1 + 3 \cdot \log_2 x\right) = 2$$

$$1 + 3 \cdot \log_2 x = 2^2$$

$$3 \cdot \log_2 x = 3$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 2^1$$

Пример – серия

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} =$$

$$= -\log_2 \boxed{\log_2 2^{\frac{1}{8}}} =$$

$$= -\log_2 \frac{1}{8} =$$

$$= -\log_2 2^{-3} =$$

$$= \boxed{-(-3)} = 3$$

$$\log_\pi \underbrace{\operatorname{ctg} 0{,}25\pi} =$$

$$= \log_\pi \underbrace{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \underbrace{\log_\pi 1} =$$

$$= 0$$

$$x - 3\sqrt{xy} + 2y = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + 2\left(\sqrt{y}\right)^2 =$$

$x > 0$

$y > 0$

одинаковые элементы (***подсказка***)

квадраты элементов (***подсказка***)

$$= \underbrace{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 =$$

формула сокращенного умножения (**формульный стандарт**)

$$= \underbrace{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}^2 - \sqrt{y} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)$$

одинаковые элементы

Рис. III.04.

Применение формульных стандартов

при преобразовании сложных алгебраических выражений

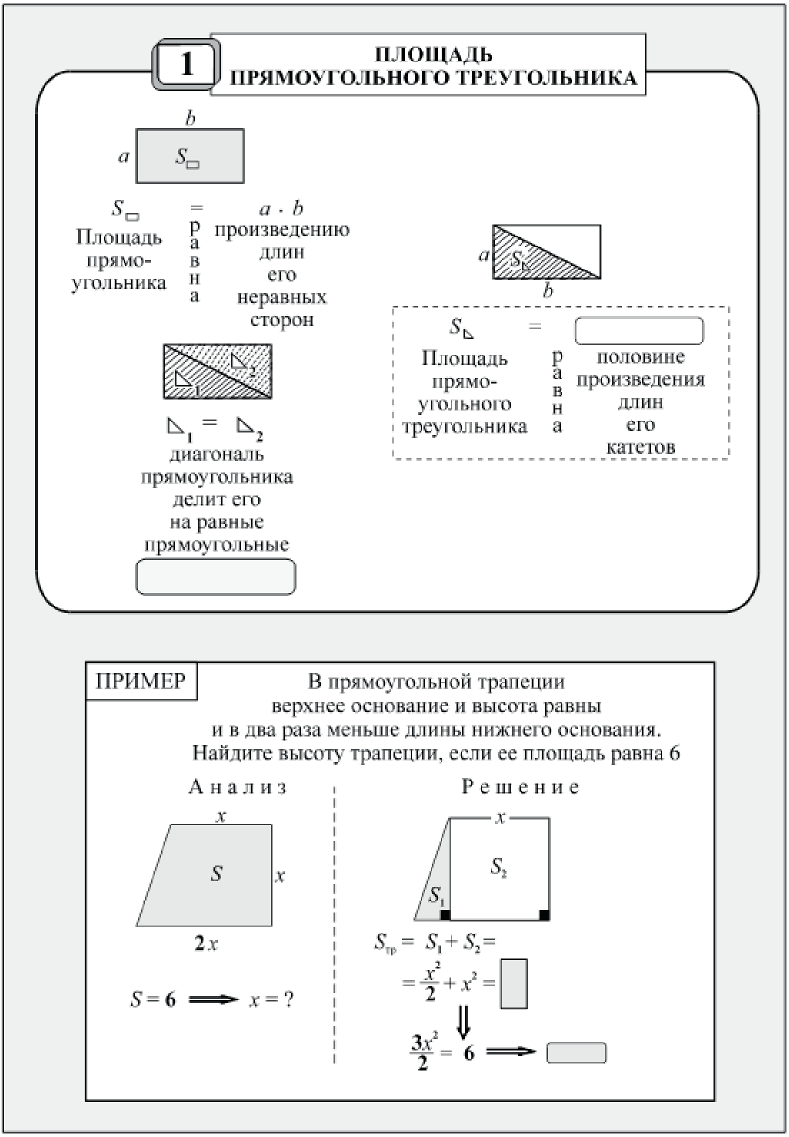


Рис. III.05.

Применение взаимосвязей «текст ↔ рисунок ↔ формула»
в ходе визуального поиска формулировки теоремы и решения задачи

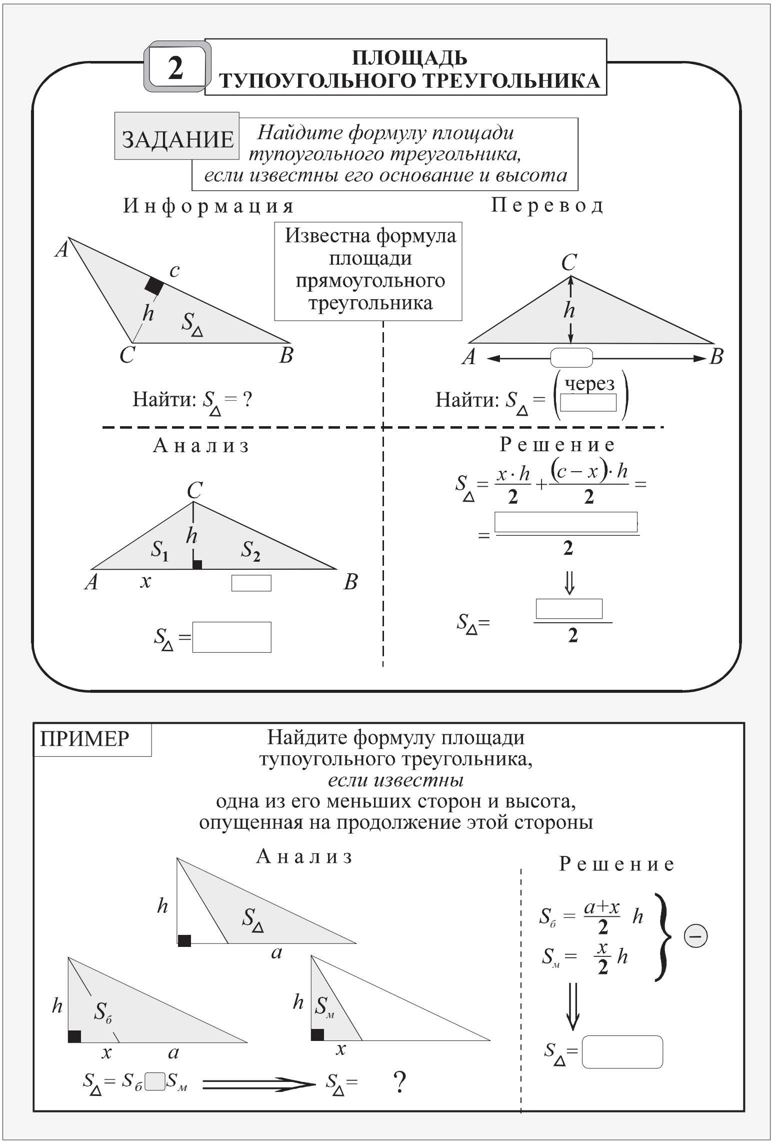


Рис. III.06.

Применение взаимосвязей «текст ↔ рисунок ↔ формула»
в ходе визуального поиска формулировки теоремы и решения задачи

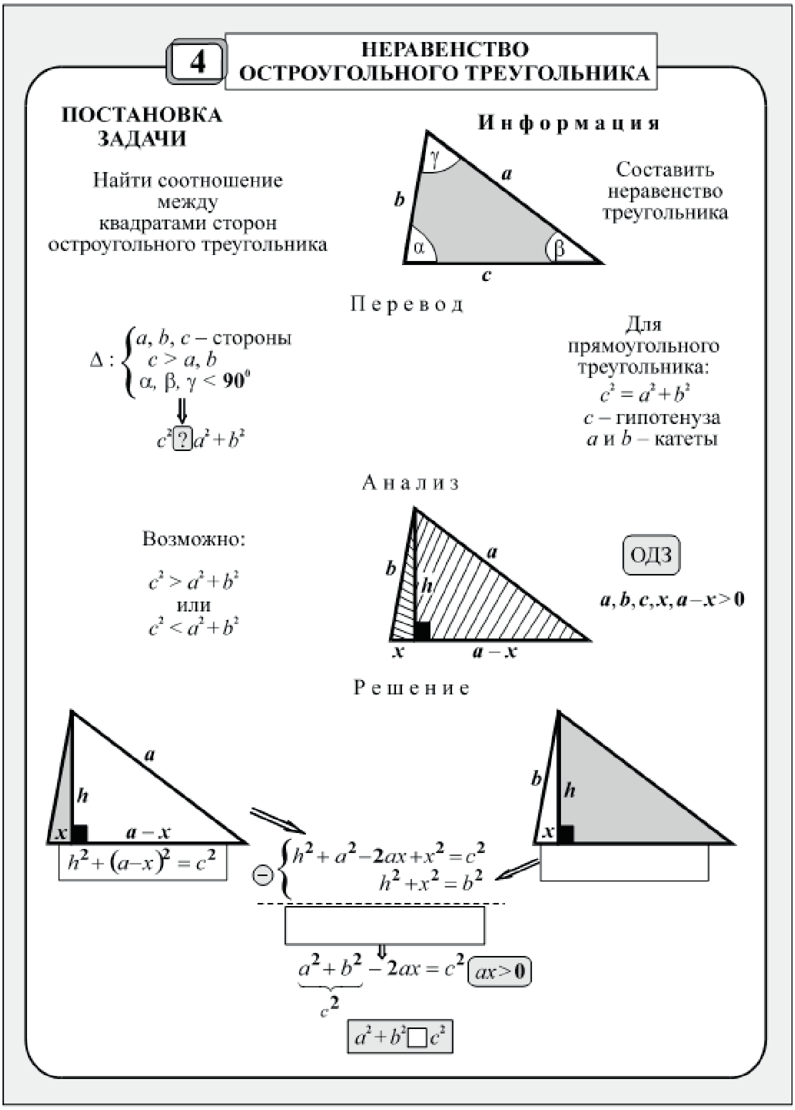


Рис. III.07.

Применение взаимосвязей «текст ↔ рисунок ↔ формула» в ходе визуального поиска формулировки теоретического утверждения

5 **НЕРАВЕНСТВО ТУПОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти соотношение между квадратами сторон тупоугольного треугольника

Информация

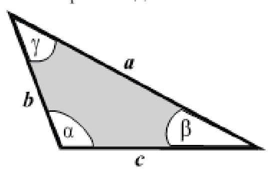
Составить неравенство тупоугольного треугольника

Перевод

$$\Delta : \begin{cases} a,\ b,\ c - \text{стороны} \\ c > a,\ b \\ \alpha > \mathbf{90^0} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 \ \boxed{?}\ a^2 + b^2$$



Для прямоугольного треугольника:

$c^2 = a^2 + b^2$

c – гипотенуза

a и b – катеты

Анализ

Для прямоугольного Δ: c – гипотенуза, a и b – катеты

Для остроугольного Δ: c – наибольшая сторона

Для тупоугольного Δ: c – наибольшая сторона

Предположения

Для любого Δ возможно:

$c^2 = a^2 + b^2$

или

$c^2 < a^2 + b^2$

или

$c^2 > a^2 + b^2$

Решение

$$\left.\begin{array}{c} c^2 = a^2 + b^2 \\ \text{(для прямоугольного } \Delta) \\ \\ c^2 < a^2 + b^2 \\ \text{(для остроугольного } \Delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} c^2 > a^2 + b^2 \\ \text{(для тупоугольного } \Delta) \end{array}$$

Рис. III.08.

Применение взаимосвязей «текст ↔ рисунок ↔ формула» в ходе визуального поиска формулировки теоретического утверждения

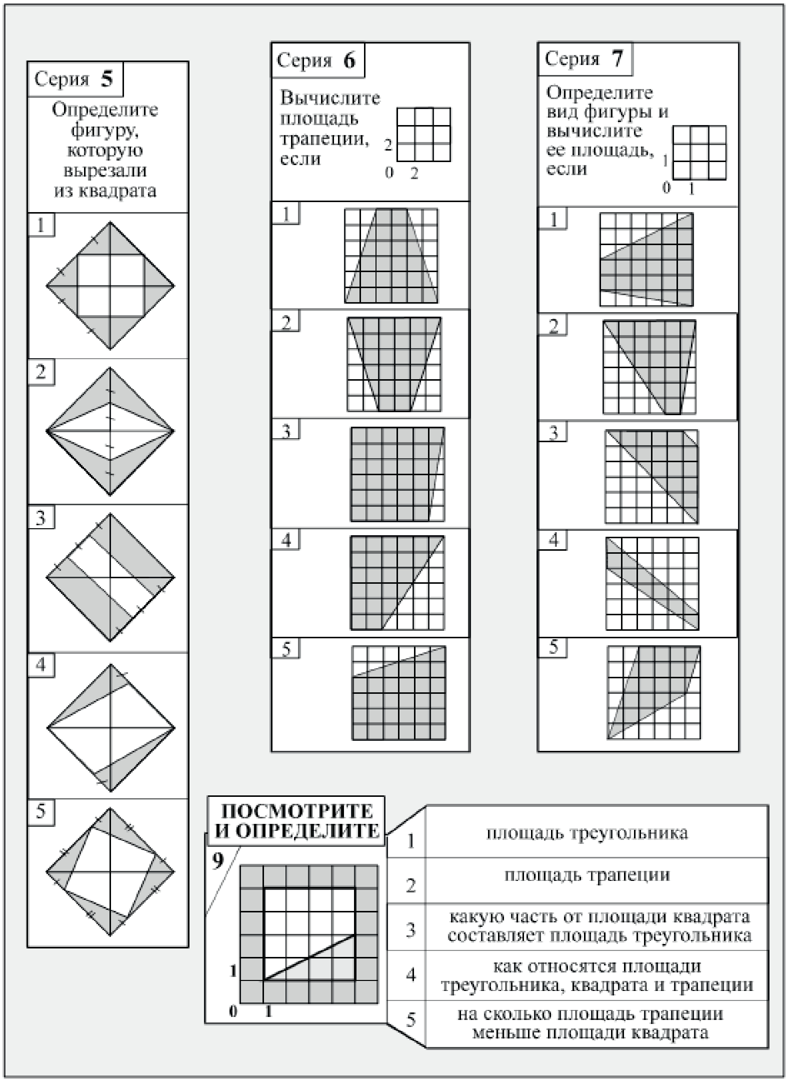


Рис. III.09.

Практические задания геометрического содержания для формирования навыков визуального поиска

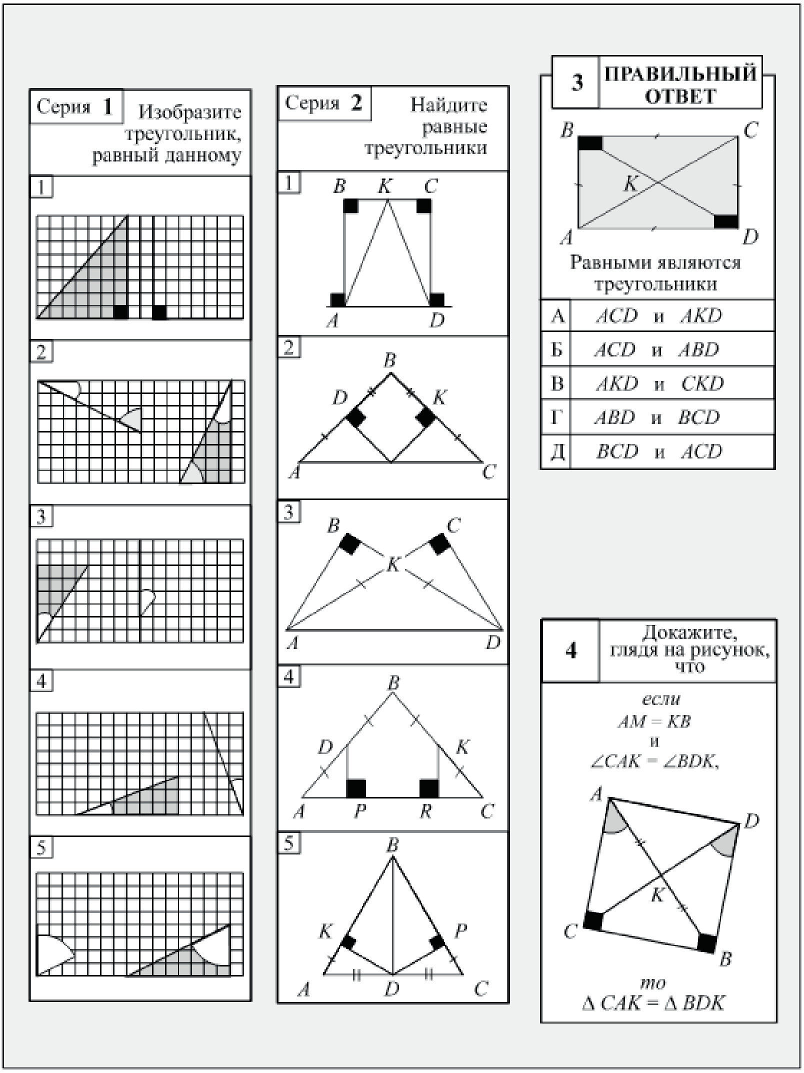


Рис. III.10.

Практические задания геометрического содержания для формирования навыков определения элементов стандартного образа

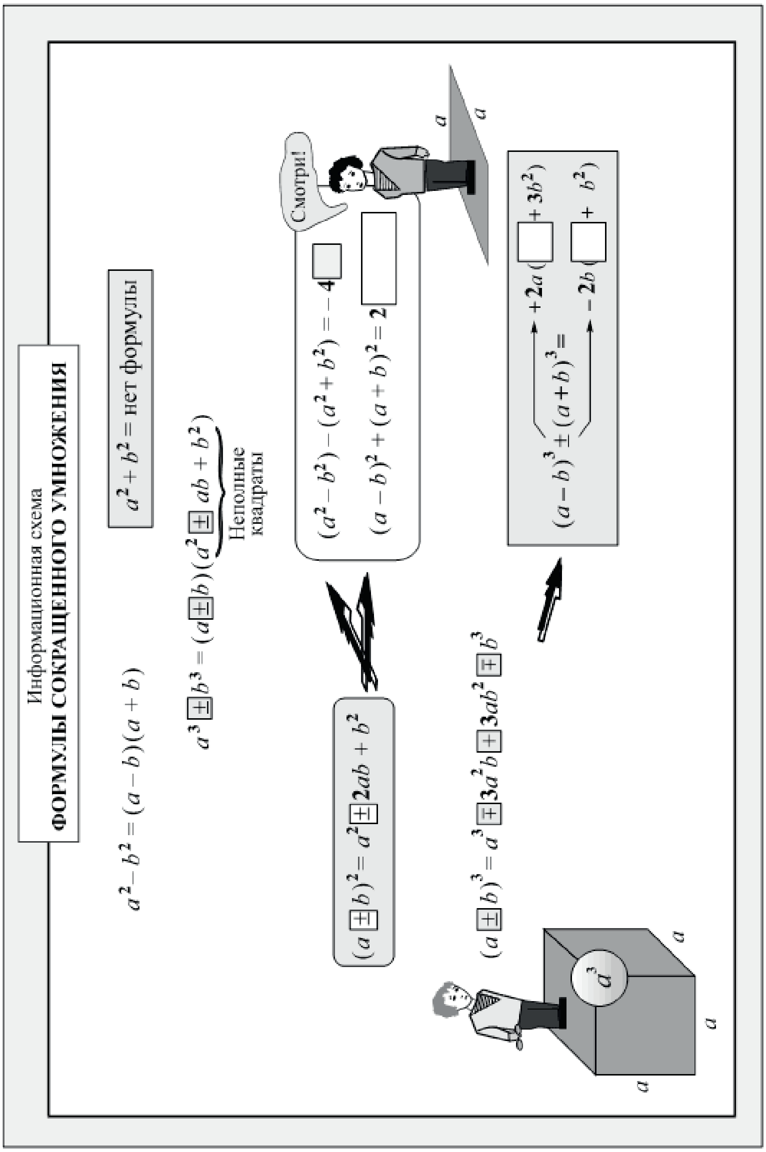


Рис. III.11.

Обобщение программных знаний
о формулах сокращенного умножения

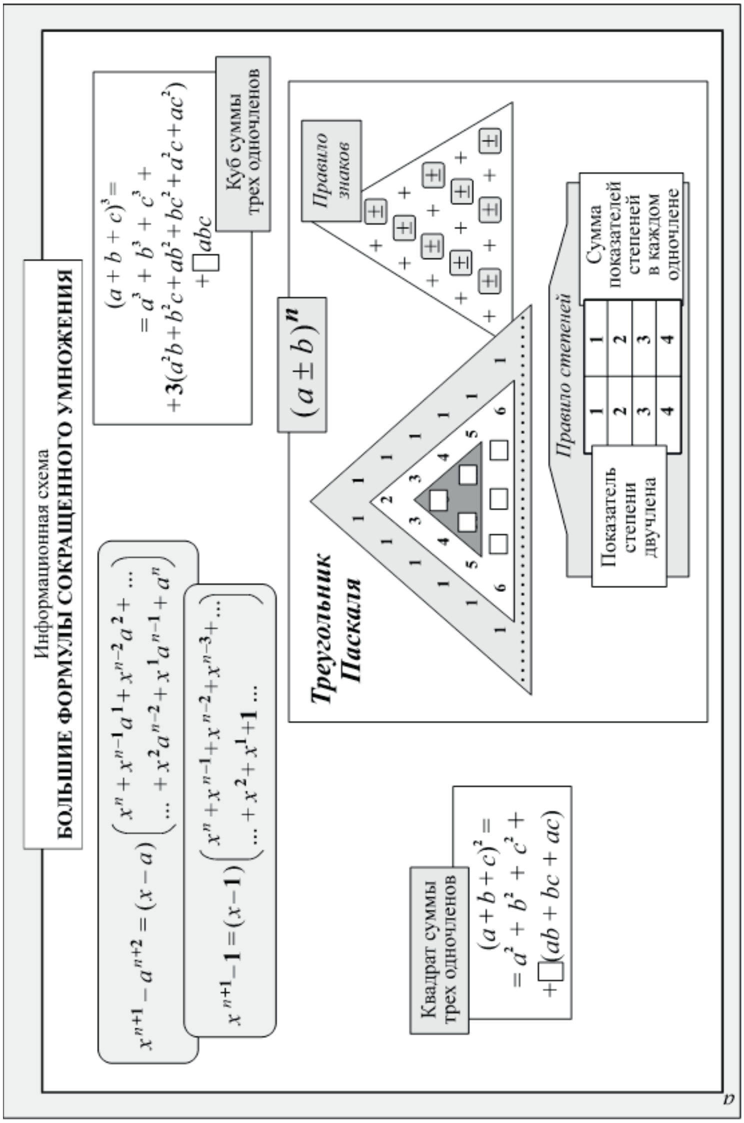
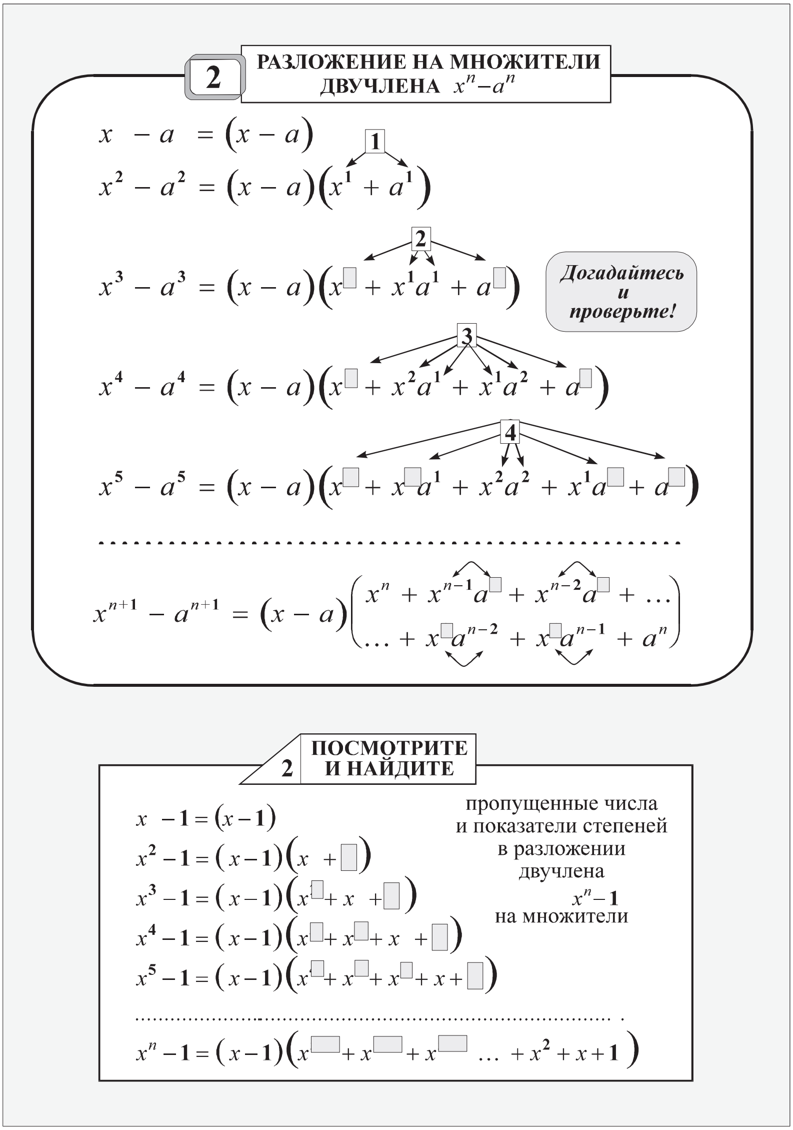


Рис. III.12.

Расширение и углубление программных знаний
о формулах сокращенного умножения



2 РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ДВУЧЛЕНА $x^n - a^n$

$$x - a = (x - a)$$

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x^1 + a^1)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^{\square} + x^1a^1 + a^{\square})$$

Догадайтесь и проверьте!

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^{\square} + x^2a^1 + x^1a^2 + a^{\square})$$

$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^{\square} + x^{\square}a^1 + x^2a^2 + x^1a^{\square} + a^{\square})$$

. . . .

$$x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a)\begin{pmatrix} x^n + x^{n-1}a^{\square} + x^{n-2}a^{\square} + \ldots \\ \ldots + x^{\square}a^{n-2} + x^{\square}a^{n-1} + a^n \end{pmatrix}$$

2 ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ

пропущенные числа и показатели степеней в разложении двучлена $x^n - \mathbf{1}$ на множители

$$x - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})$$

$$x^2 - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})(x + \square)$$

$$x^3 - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})(x^{\square} + x + \square)$$

$$x^4 - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})(x^{\square} + x^{\square} + x + \square)$$

$$x^5 - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})(x^{\square} + x^{\square} + x^{\square} + x + \square)$$

....

$$x^n - \mathbf{1} = (x - \mathbf{1})(x^{\square} + x^{\square} + x^{\square} \ldots + x^2 + x + \mathbf{1})$$

Рис. III.13.

Страница учебного пособия «Визуальная алгебра. Многочлены», предназначенного для развития поисковой деятельности учащихся

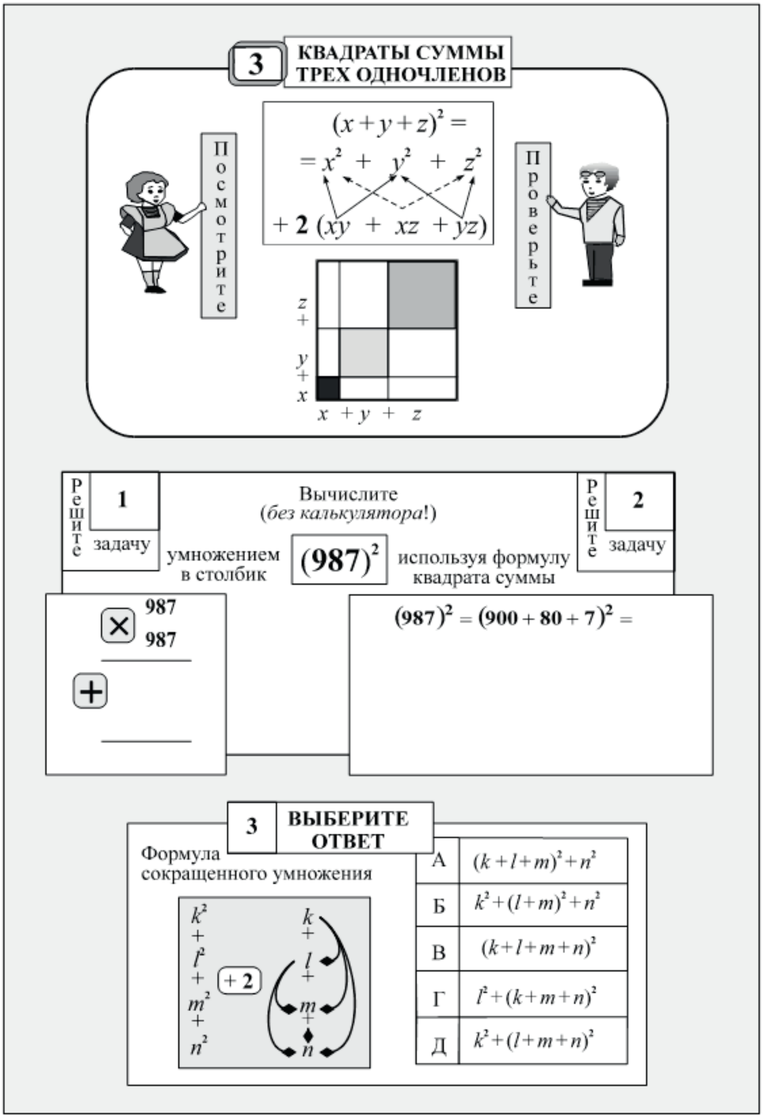


Рис. III.14.

Задания из пособия «Визуальная алгебра. Многочлены», предназначенного для развития поисковой деятельности учащихся

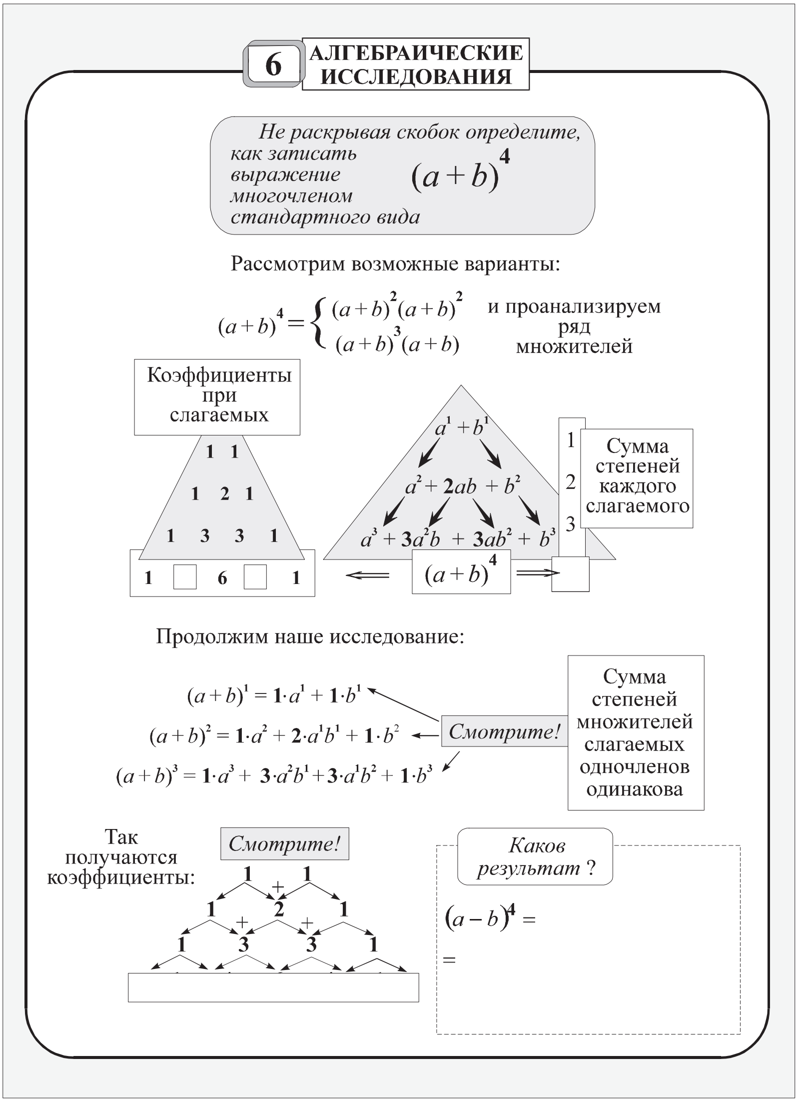


Рис. III.15.

Учебное теоретическое исследование
на странице учебного пособия «Визуальная алгебра. Многочлены»

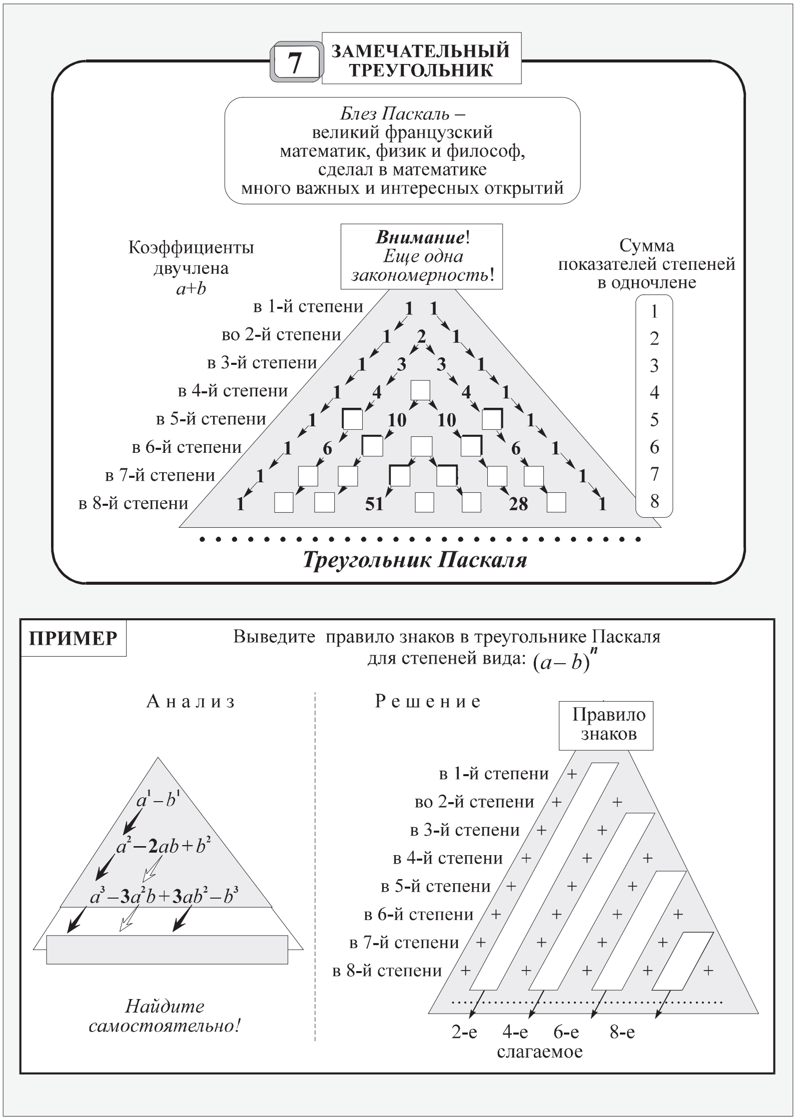


Рис. III.16.

Моделирование математического открытия
на странице учебного пособия «Визуальная алгебра. Многочлены»

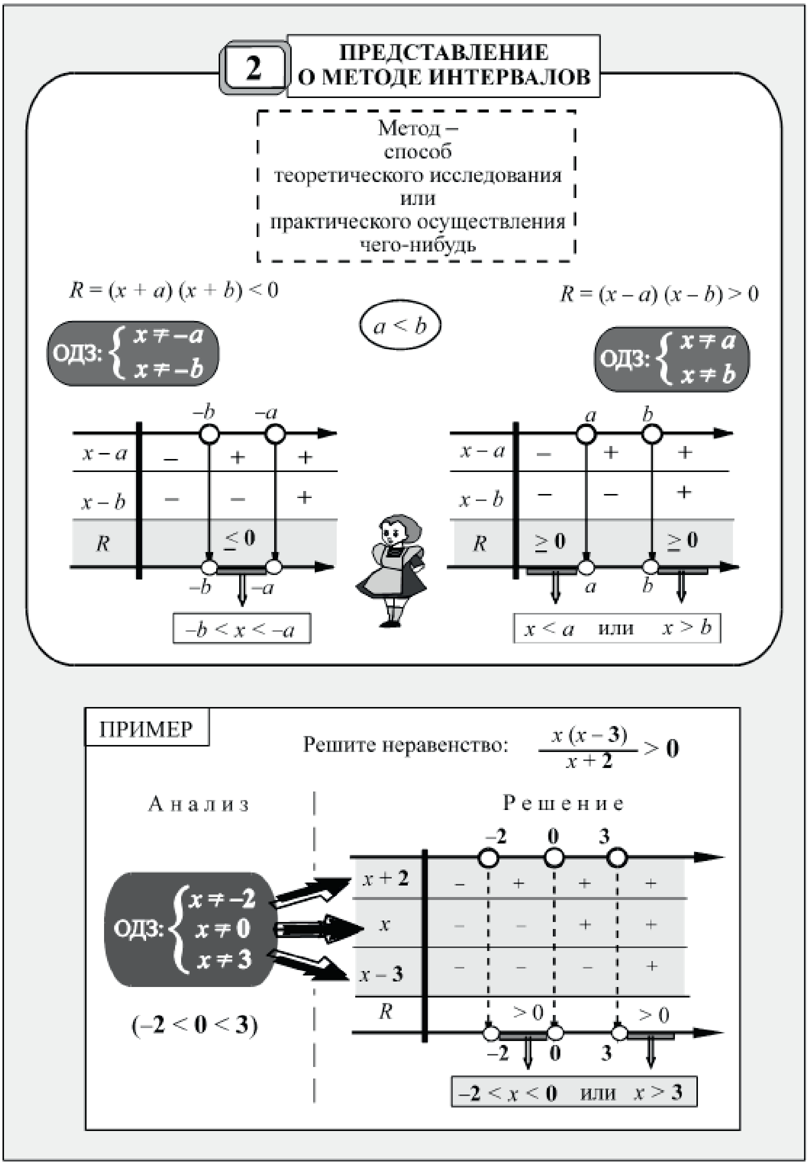


Рис. III.17.

Начальные сведения о новом методе исследований на странице визуальной тетради «Метод интервалов»

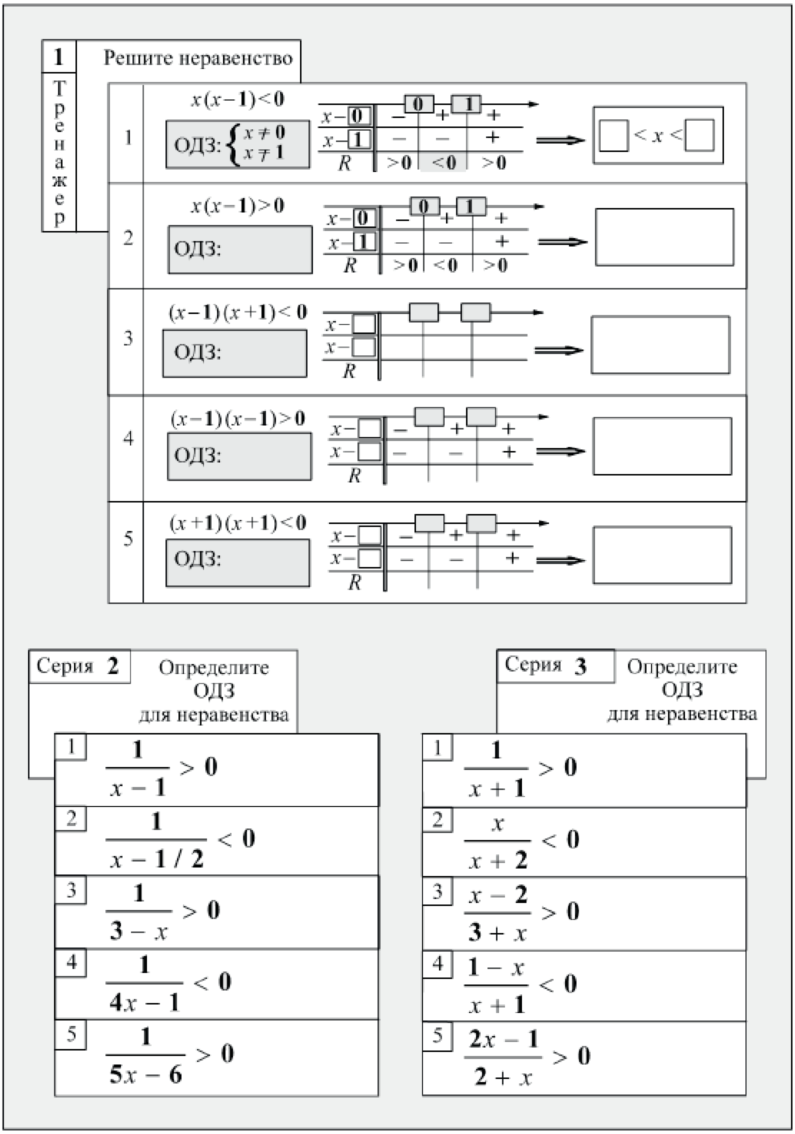


Рис. III.18.

Вводные упражнения к применению нового метода исследований на странице визуальной тетради «Метод интервалов

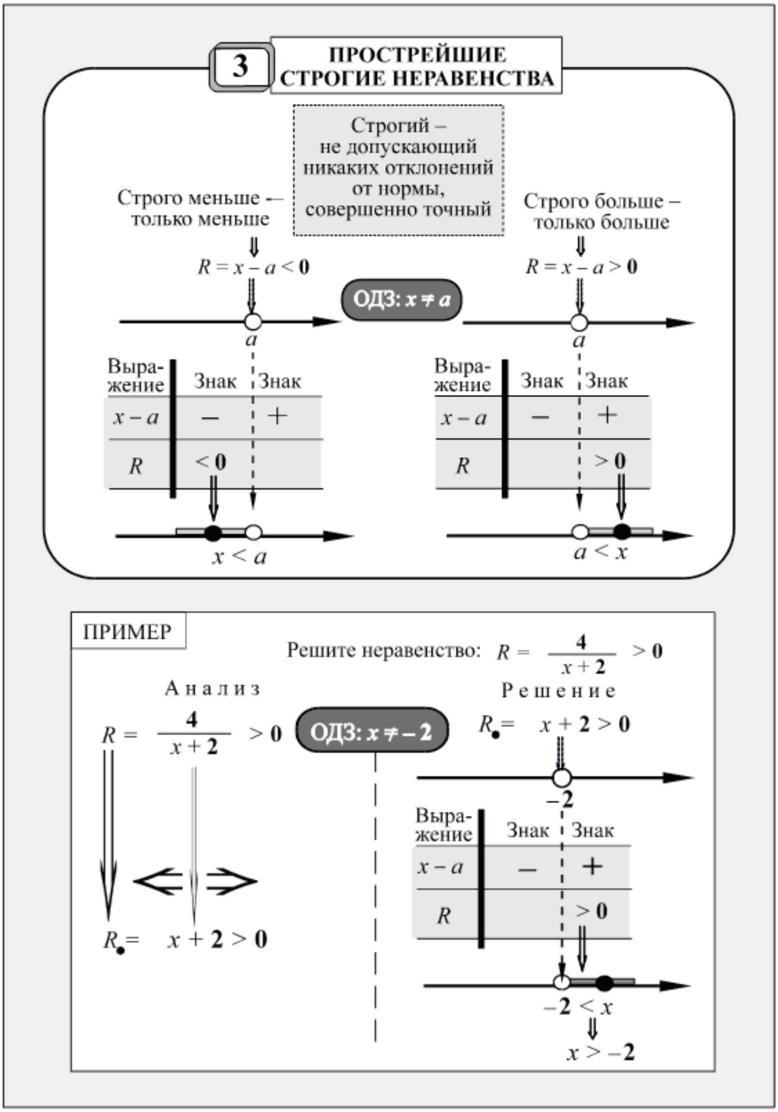


Рис. III.19.

Уточнение границ применения нового метода исследований
на странице визуальной тетради «Метод интервалов»

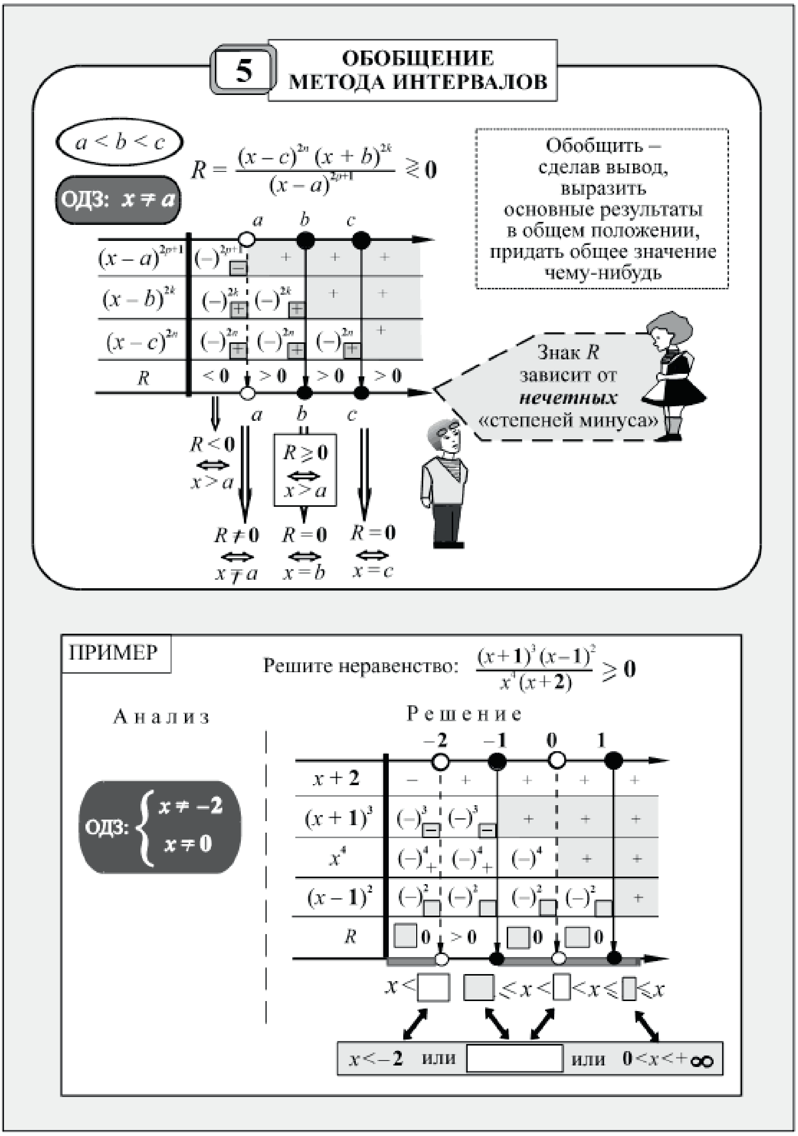


Рис. III.20.

Обобщение представлений о новом методе исследований на странице визуальной тетради «Метод интервалов»

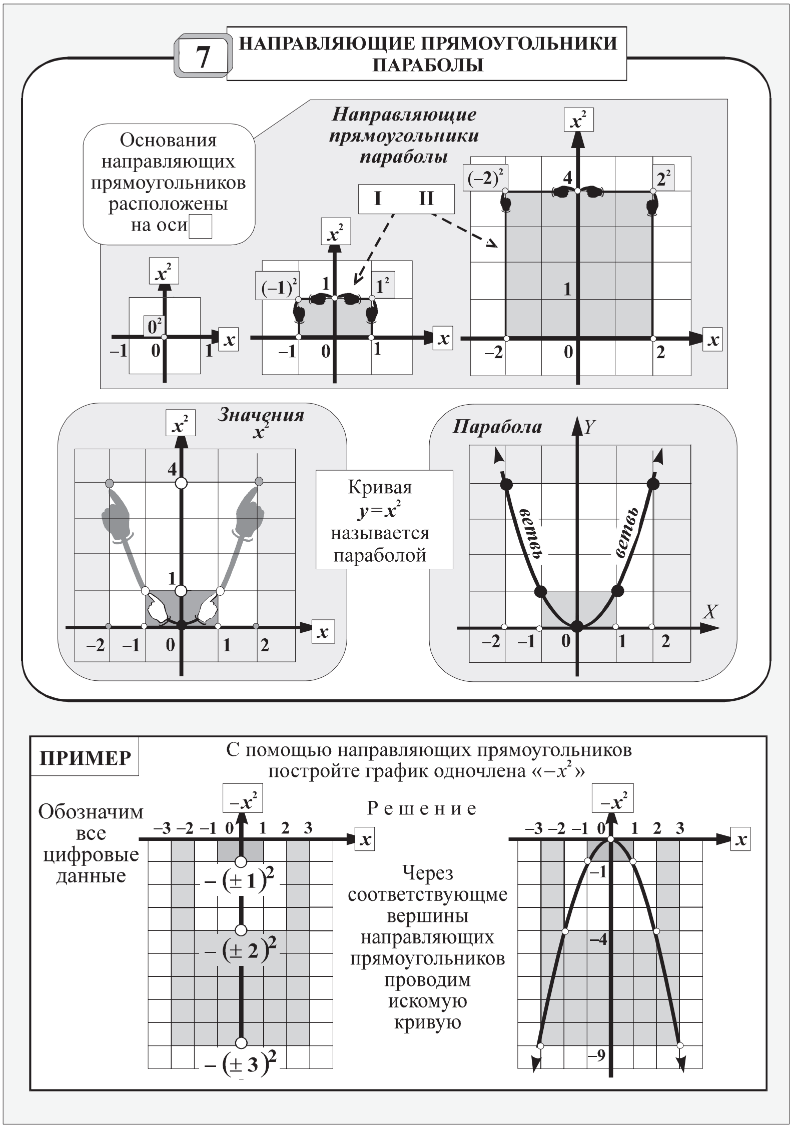


Рис. III.21.

Построение графика функции с помощью направляющих прямоугольников в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

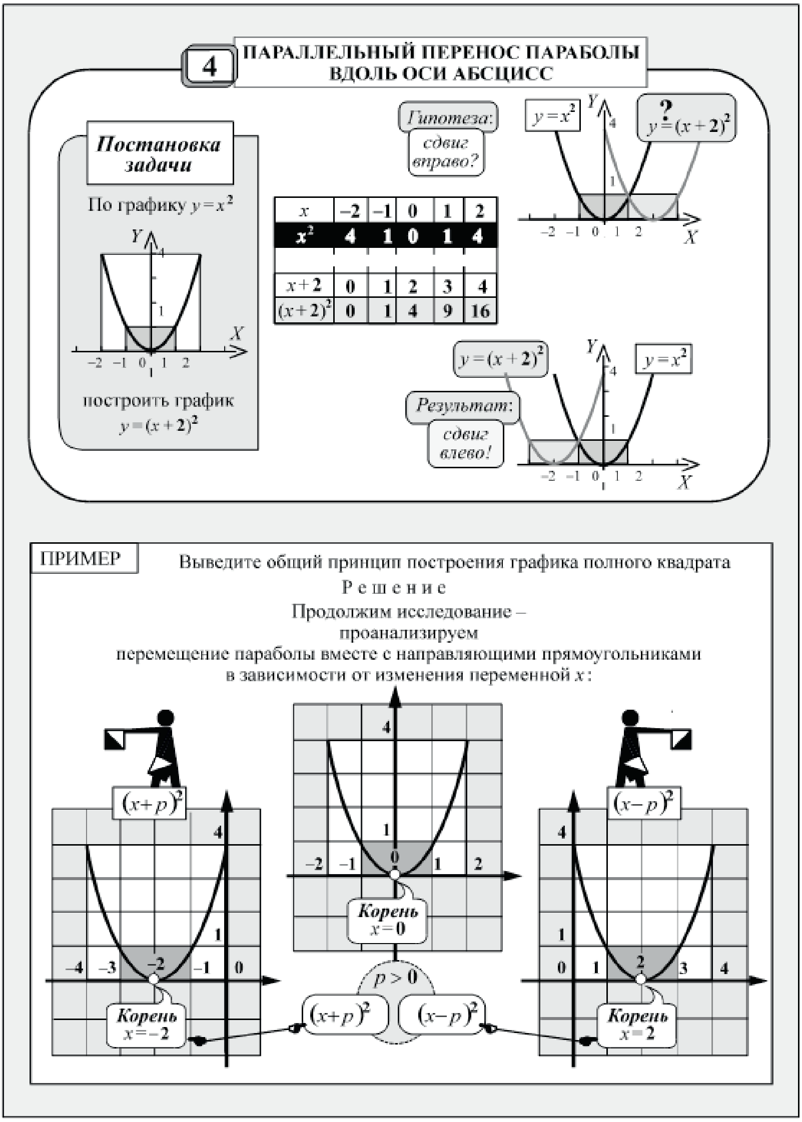


Рис. III.22.

Проверка гипотезы о перемещении графика функции вдоль оси абсцисс в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

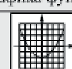
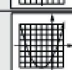
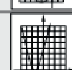
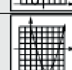
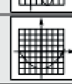
Тест **1** нужно произвести над графиком функции $f(x)=x^2$ при построении графика функции	Определите операцию, которую — сжатие по: оси X	оси Y	растяжение по: оси X	оси Y	параллельный перенос: вправо	влево	вниз	Определите операцию, которую — вверх	Тест **2** произвели над графиком функции $f(x)=x^2$ при построении графика функции
$y=\mathbf{2}(x+\mathbf{2})^2-\mathbf{2}$									
$y=(\mathbf{2}x-\mathbf{2})^2+\mathbf{2}$									
$y=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2}x+\mathbf{1})^2$									
$y=\mathbf{2}(\mathbf{2}x)^2+\mathbf{2}$									
$y=-\mathbf{2}(x+\mathbf{1})^2$									

Рис. III.23.

Алгоритм линейных преобразований графика функции
в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

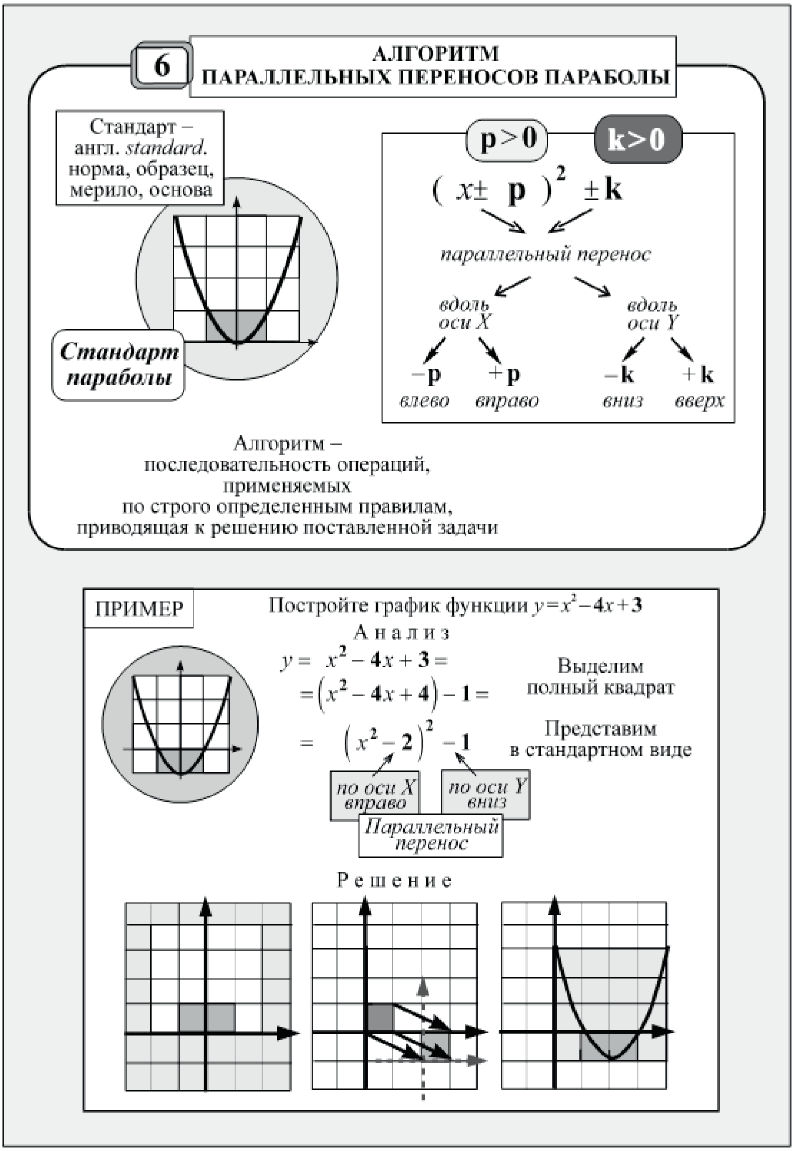


Рис. III.24.

Частный случай линейных преобразований графика функции (параболы) в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

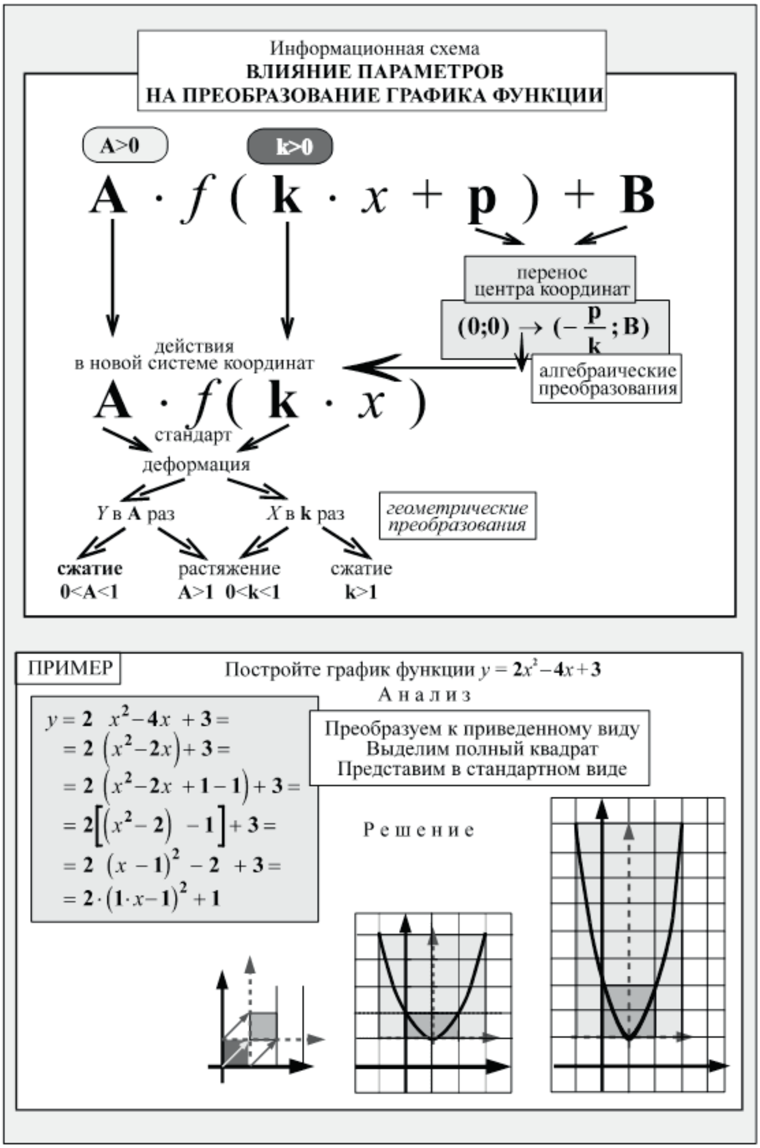


Рис. III.25.

Индивидуальный алгоритм линейных преобразований параболы в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

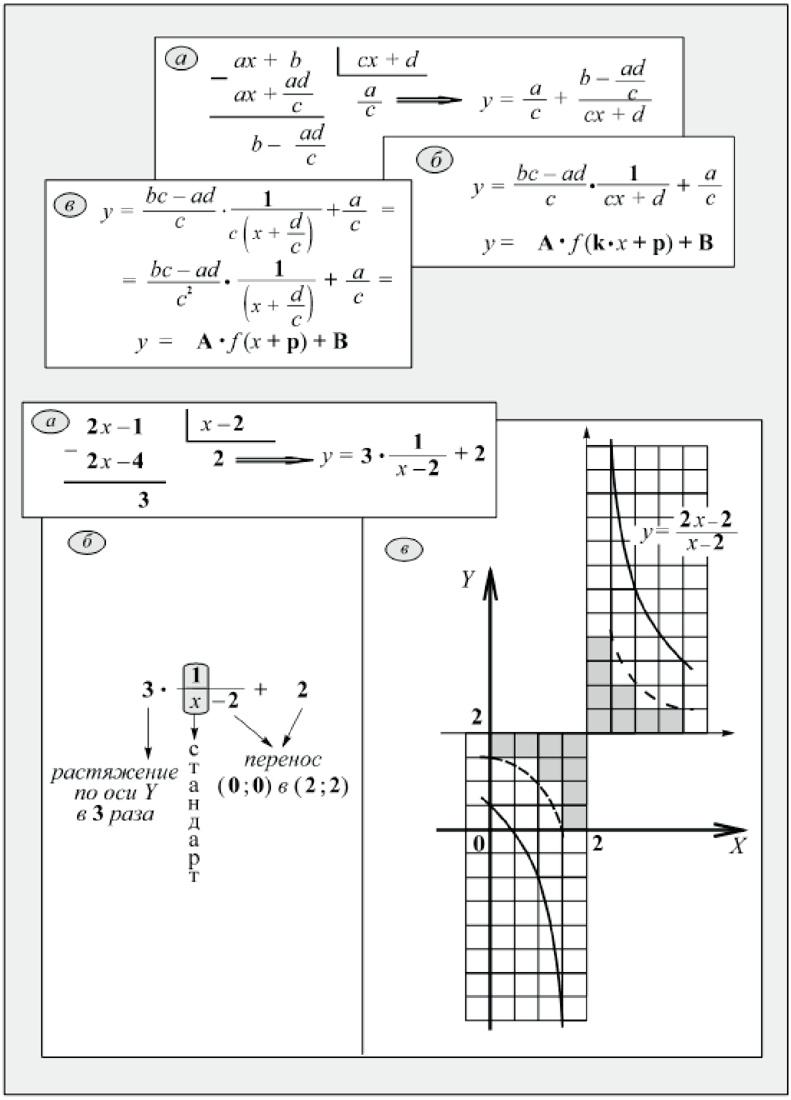


Рис. III.26.

Индивидуальный алгоритм линейных преобразований гиперболы в визуальной тетради «Модули, гиперболы и параболы»

Так как

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1} \quad\Big|\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$$

то

$$(x^{-n})' = -n\cdot x^{-n-1} \quad\Big|\quad \int x^{-n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad\Big|\quad \int\frac{1}{x^n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}+C$$

Так как

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1} \quad\Big|\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$$

то

$$\left(x^{\frac{n}{k}}\right)' = \frac{n}{k}\cdot\frac{\sqrt[k]{x^n}}{x} \quad\Big|\quad \int x^{\frac{n}{k}}dx = \frac{x^{\frac{n}{k}+1}}{\frac{n}{k}+1}+C$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\sqrt[k]{x^n}\right)' = \frac{n}{k}\cdot\frac{\sqrt[k]{x^n}}{x} \quad\Big|\quad \int\sqrt[k]{x^n}\,dx = \frac{k}{n+k}x\sqrt[k]{x^n}+C$$

Так как

$$\left(\sqrt[k]{x^n}\right)' = \frac{n}{k}\cdot\frac{\sqrt[k]{x^n}}{x} \quad\Big|\quad \int\sqrt[k]{x^n}\,dx = \frac{k}{n+k}x\sqrt[k]{x^n}+C$$

то

$$\left(\sqrt[k]{x}\right)' = \frac{1}{k}\cdot\frac{\sqrt[k]{x}}{x} \quad\Big|\quad \int\sqrt[k]{x}\,dx = \frac{k}{1+k}x\sqrt[k]{x}+C$$

Найдите производную функции

$y=\sqrt{x}$

$y=\sqrt[3]{x}$

$y=\sqrt[4]{x}$

$y=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

$y=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

$y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

$y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$y=x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

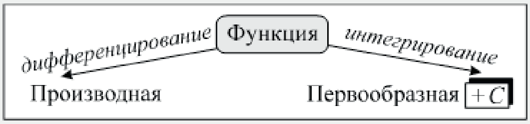
$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

Найдите первообразную функции

Рис. III.27.

Учебные исследования в ходе составления объединенной таблицы «Производная ↔ Функция ↔ Первообразная»



$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	
$f''(x)$	$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}x+\mathbf{p}$	$\mathbf{k}\dfrac{x^2}{2}+\mathbf{p}x$
nx^{n-1}	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$
$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	$\int f(x)dx+\dots$
$\boxed{f(x)}$ $\int f(x)dx+\dots$		

$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	
$f''(x)$	$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$
1	x	$\dfrac{x^2}{2}$
nx^{n-1}	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{\sqrt[k]{x}}{x}$	$\sqrt[k]{x}$	$\dfrac{k}{1+k}x\sqrt[k]{x}$
$\dfrac{n}{k}\cdot\dfrac{\sqrt[k]{x^n}}{x}$	$\sqrt[k]{x^n}$	$\dfrac{k}{n+k}x\sqrt[k]{x^n}$
$f'(x)$	$\boxed{f(x)}$	$\int f(x)dx+\dots$
$\boxed{f(x)}$ $\int f(x)dx+\dots$		

Рис. III.28.

Объединенная таблица «Производная $\leftrightarrow$ Функция $\leftrightarrow$ Первообразная» в практикуме «Начальные представления о технике интегрирования»

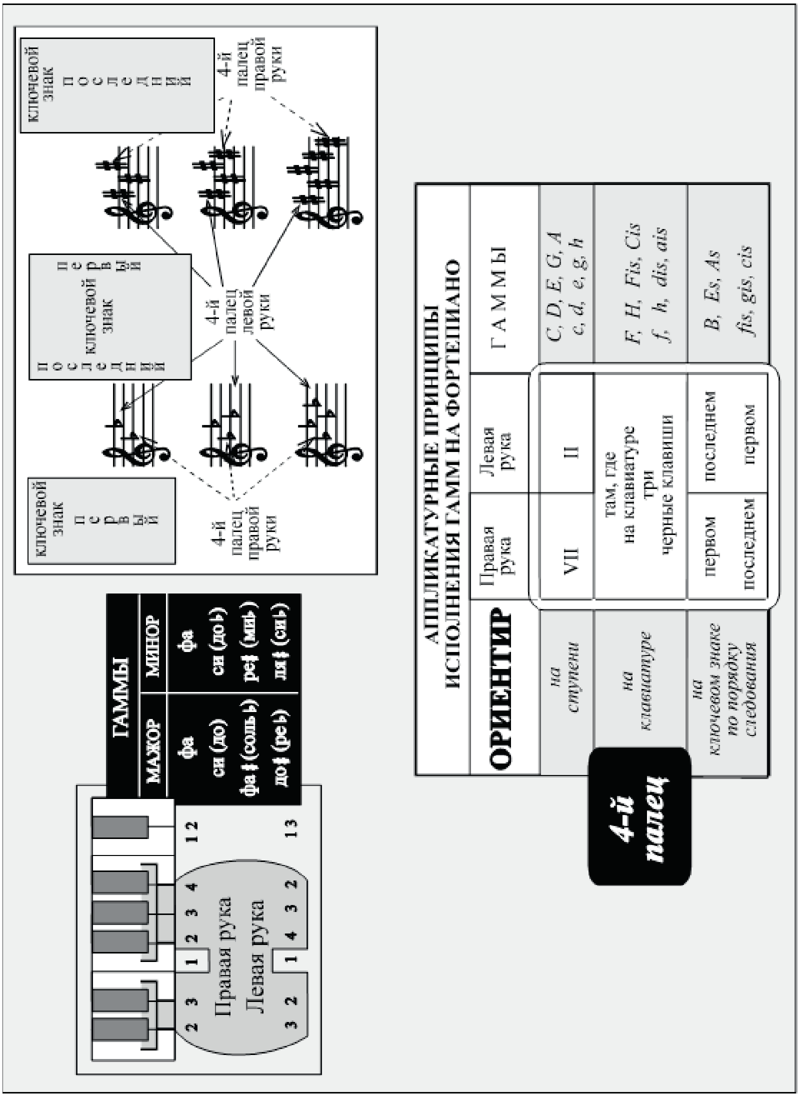


Рис. III.29.

Информационные блоки

аппликатурных принципов исполнения гамм на фортепиано

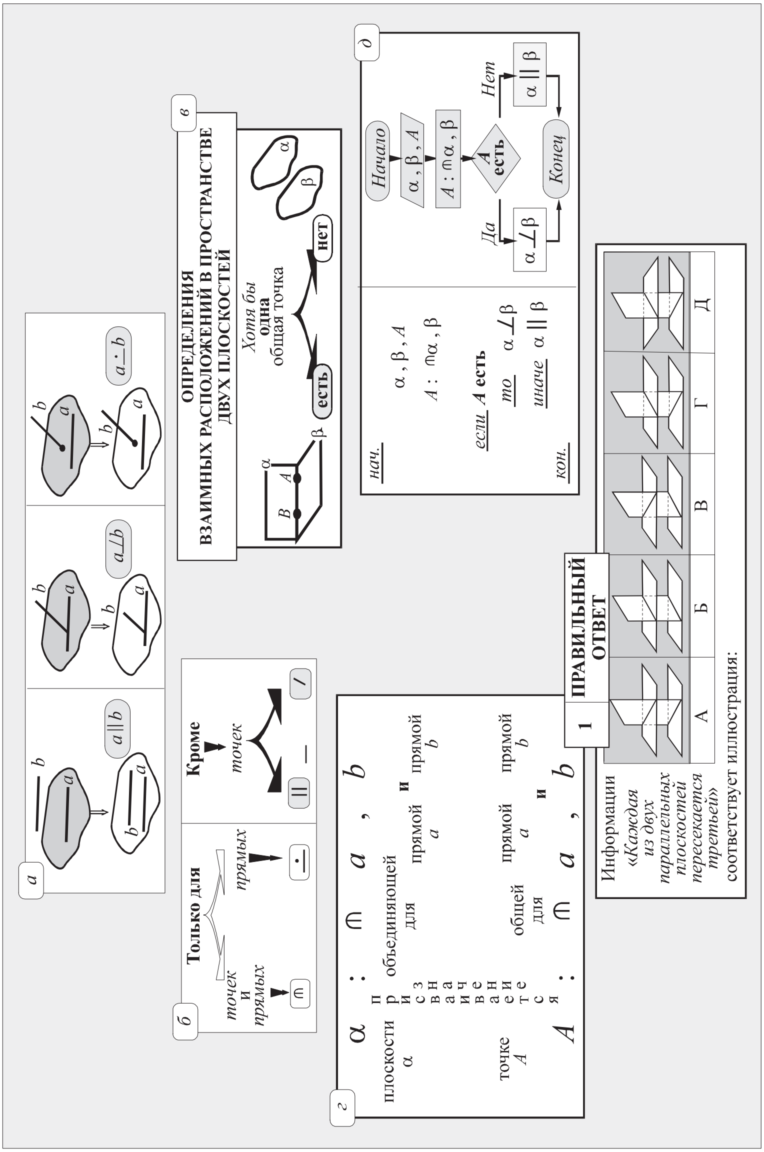


Рис. III.30.

Представление отношений между основными понятиями геометрии в командах и блок-схемах алгоритмического языка

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Гипертекстовые связи визуальной среды обучения

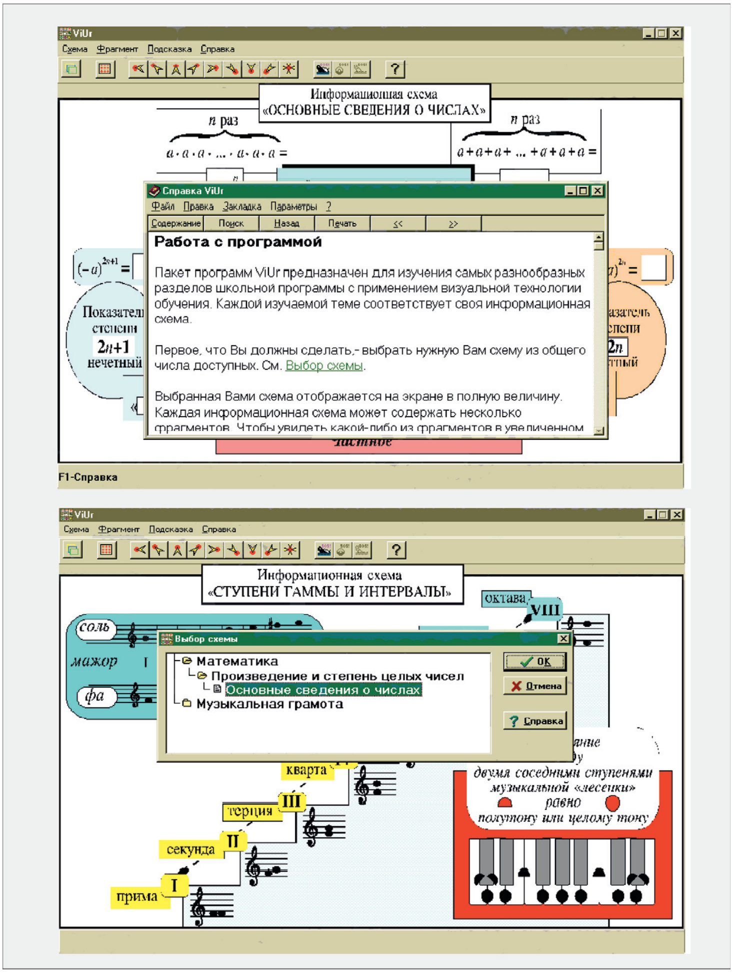


Рис. IV.01.

Элементы пользовательского интерфейса в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

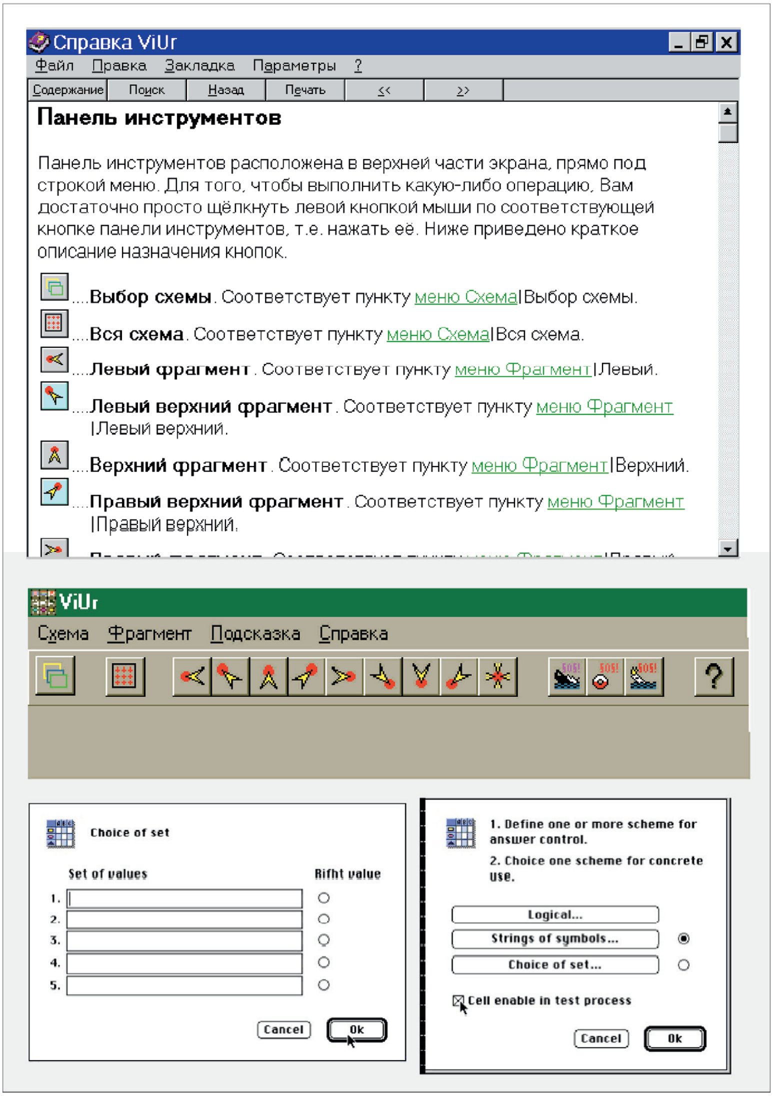


Рис. IV.02.

Раздел Справка и диалоговые окна для формирования заданий в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

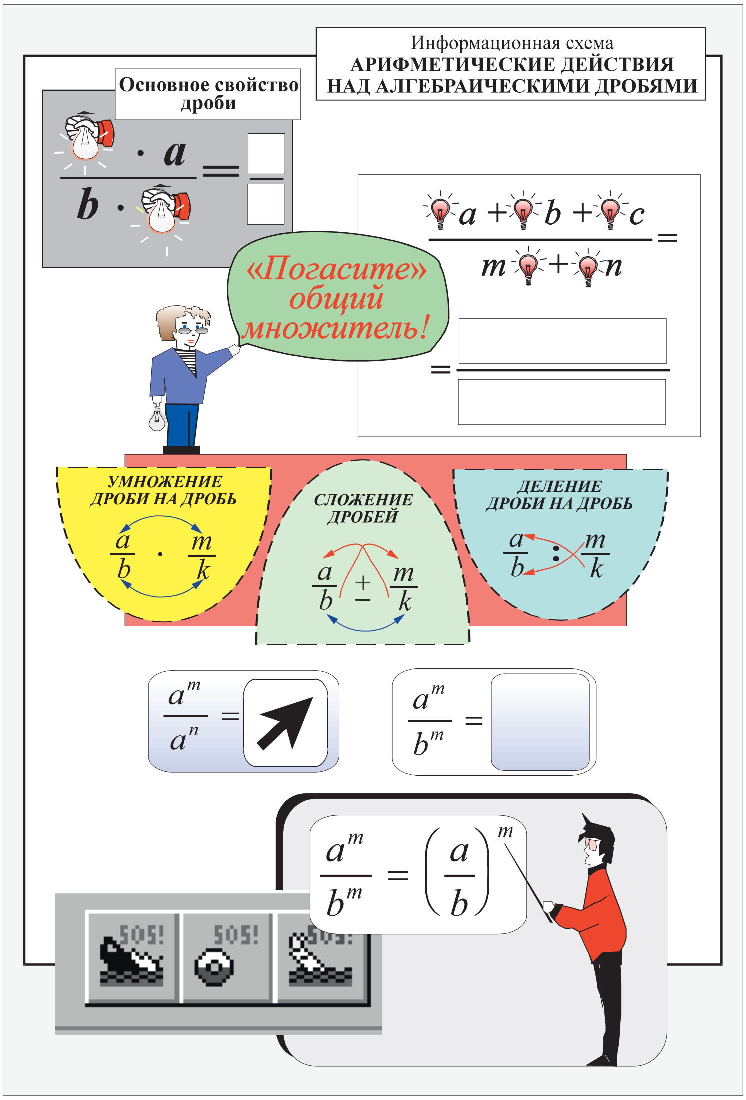
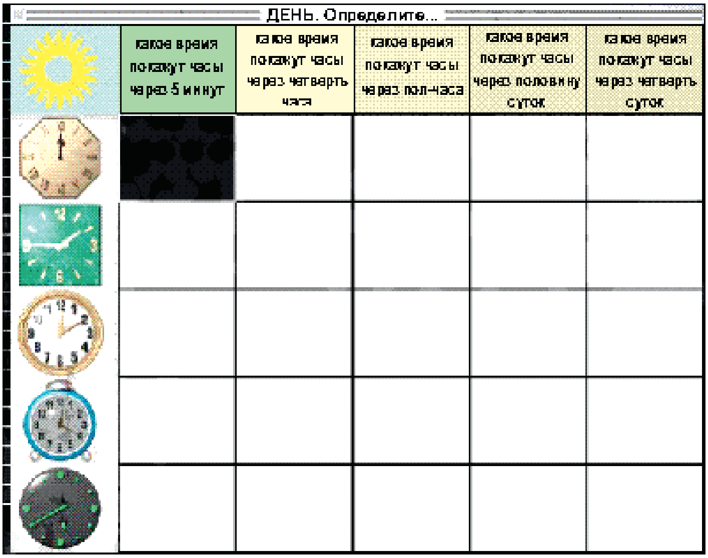


Рис. IV.03.

.Вызов Подсказки

в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)



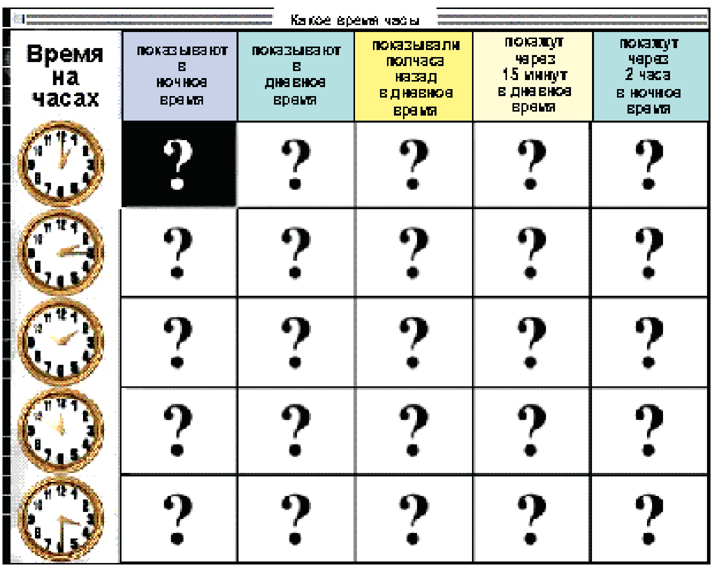


Рис. IV.04.

Варианты матриц с часами
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

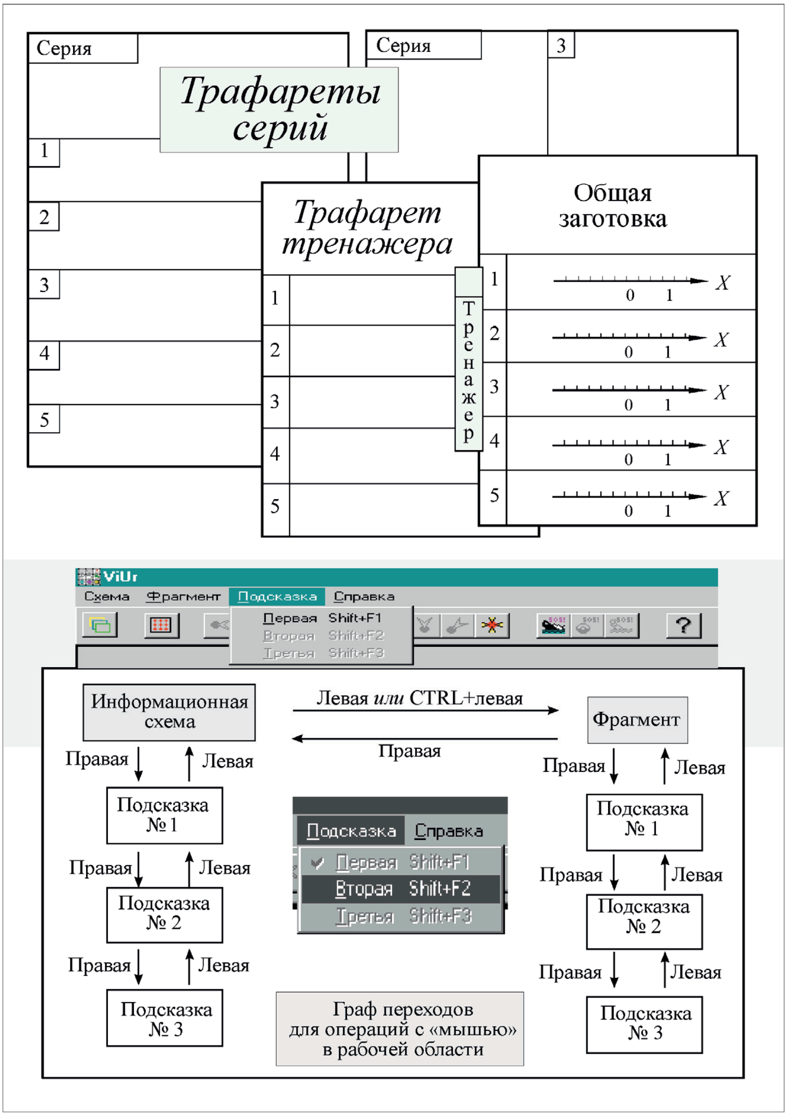
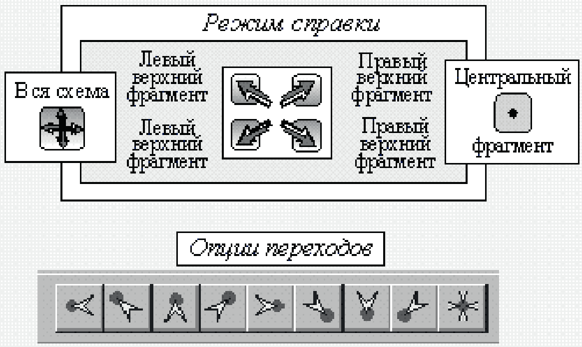


Рис. IV.05.

Трафареты серий и тренажеров и организация Подсказки
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)



Переход к / Переход от	Схема	Подсказка № 1 к схеме	Подсказка № 2 к схеме	Подсказка № 3 к схеме	Фрагмент	Подсказка № 1 к фрагменту	Подсказка № 2 к фрагменту	Подсказка № 3 к фрагменту
Схема		щелчок правой кнопкой			щелчок левой кнопкой			
Подсказка № 1 к схеме	щелчок левой кнопкой		щелчок правой кнопкой					
Подсказка № 2 к схеме		щелчок левой кнопкой		щелчок правой кнопкой				
Подсказка № 3 к схеме			щелчок левой кнопкой					
Фрагмент	щелчок левой кнопкой					щелчок правой кнопкой		
Подсказка № 1 к фрагменту					щелчок левой кнопкой		щелчок правой кнопкой	
Подсказка № 2 к фрагменту						щелчок левой кнопкой		щелчок правой кнопкой
Подсказка № 3 к фрагменту							щелчок левой кнопкой	

Рис. IV.06.

Режим Справка и меню Подсказка

в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

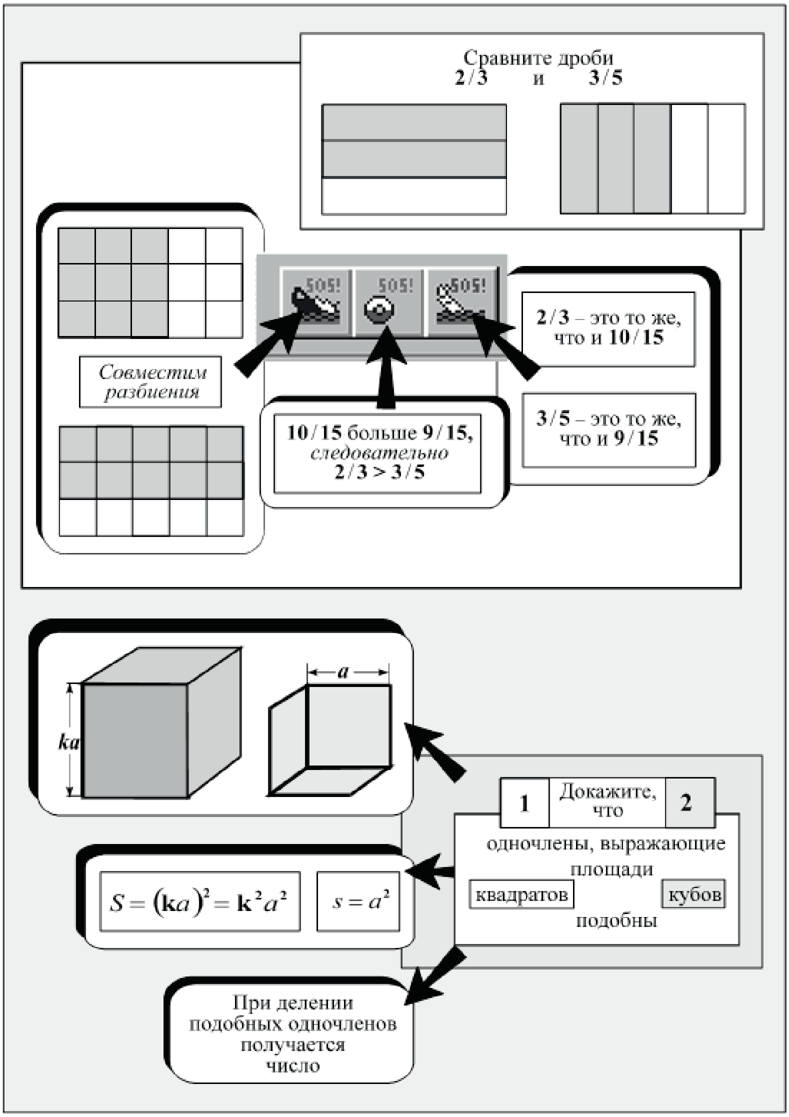


Рис. IV.07.

Варианты оформления Подсказки
в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

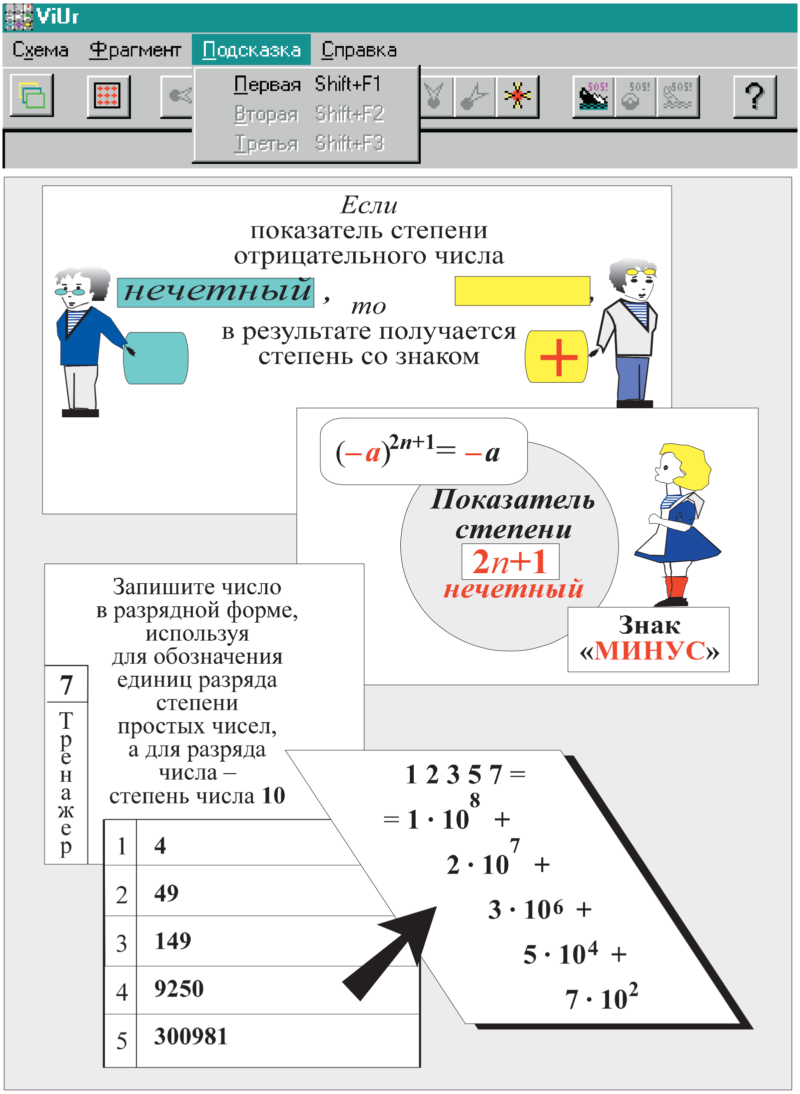


Рис. IV.08.

Варианты оформления Подсказок

в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

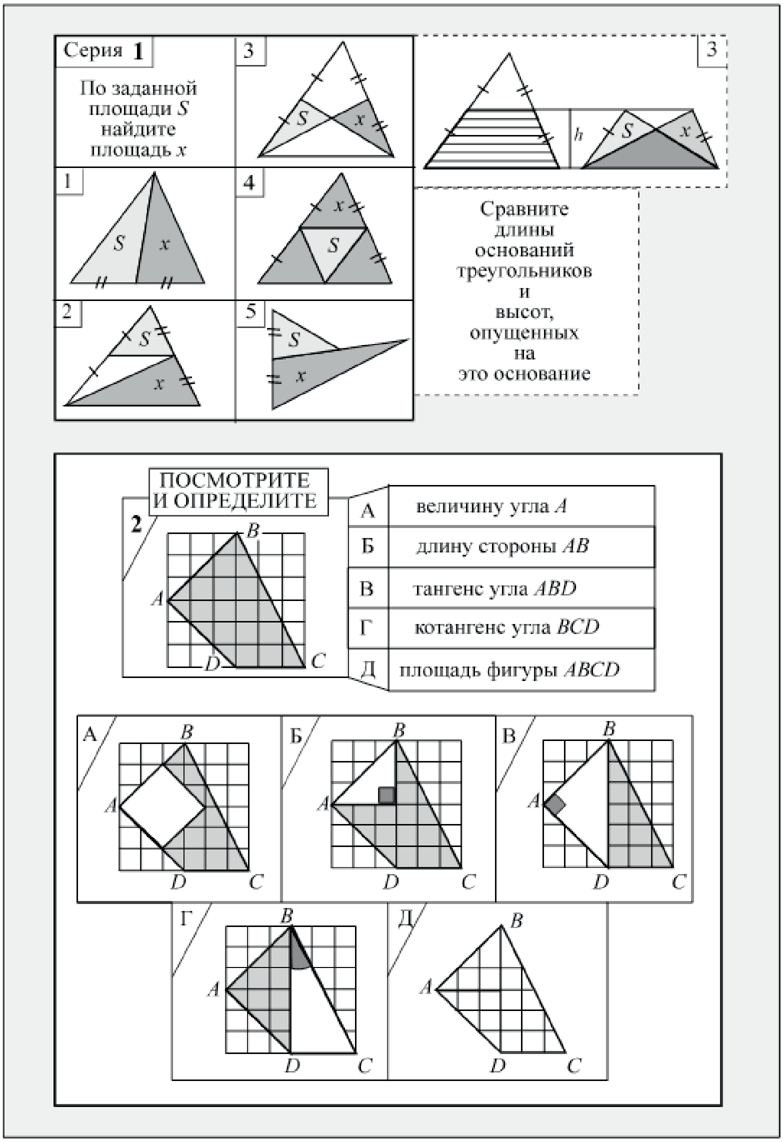


Рис. IV.09.

Варианты оформления содержания Подсказок в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

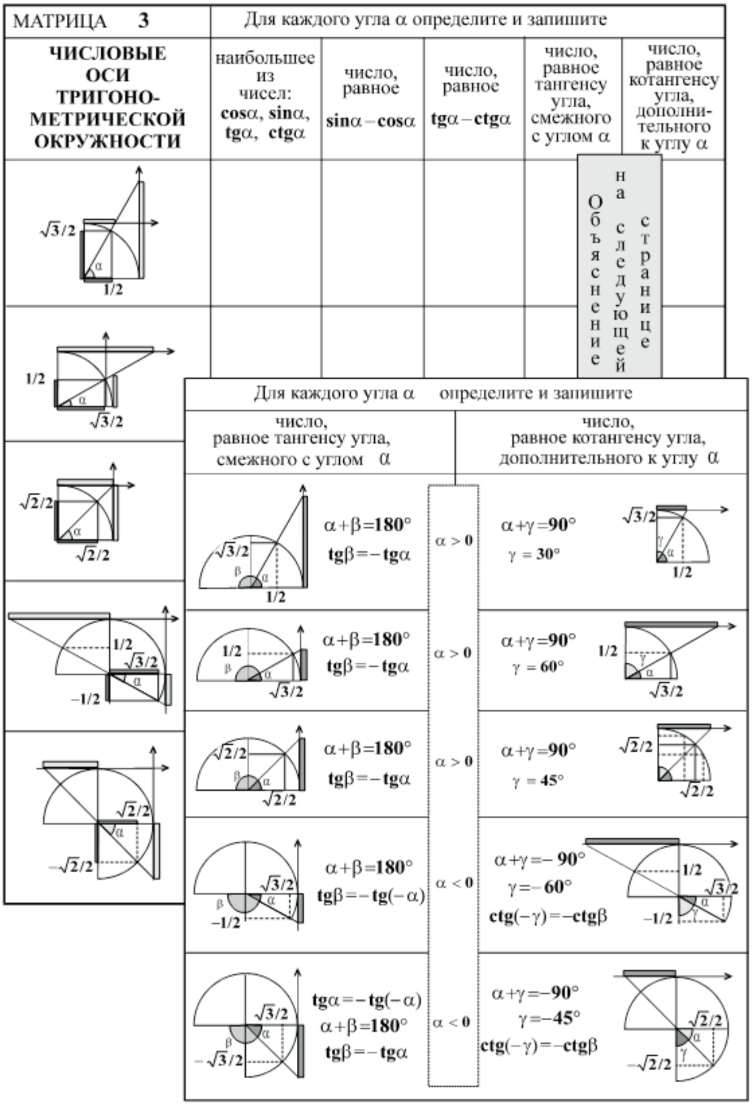


Рис. IV.10.

Матрица с комплектом подсказок к решению ее заданий в проекте пакета ViUr (Визуальный урок)

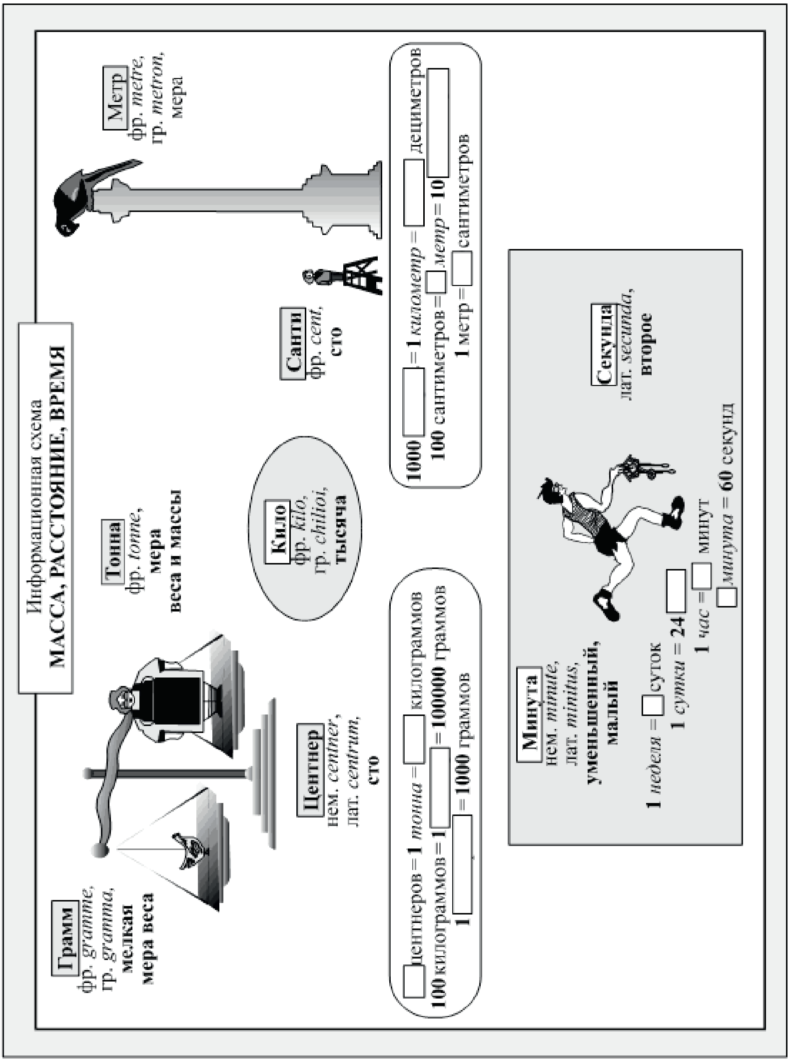


Рис. V.01.

Фрагмент №1 сценария визуального урока для 4 класса по теме «Величины»

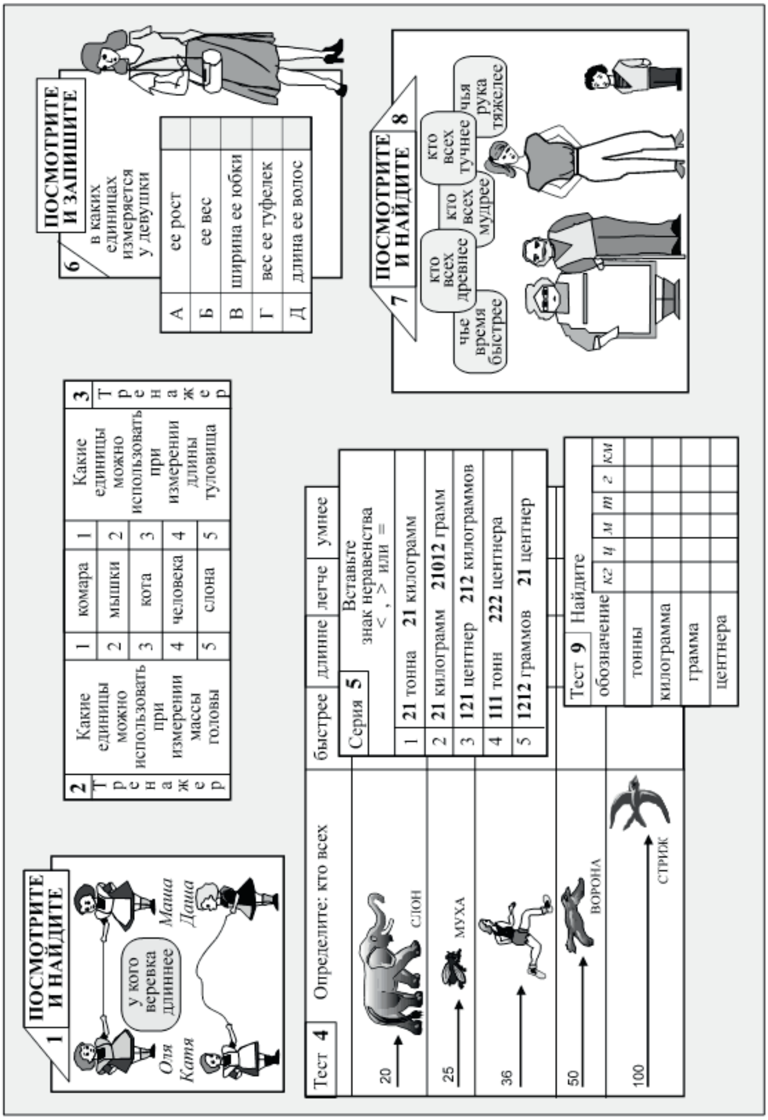


Рис. V.02.

Фрагмент №2 сценария визуального урока для 4 класса
по теме «Величины»

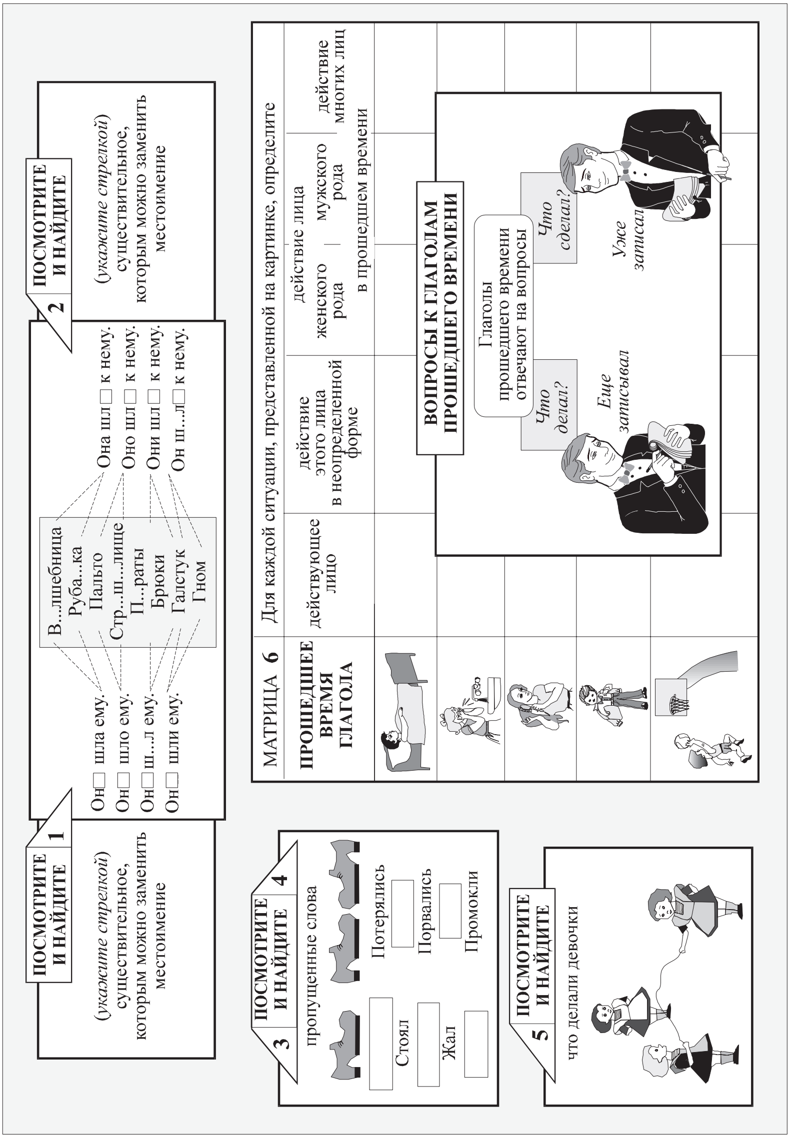


Рис. V.03.

Фрагмент №1 сценария визуального урока для 4 класса по теме «Глагол прошедшего времени»

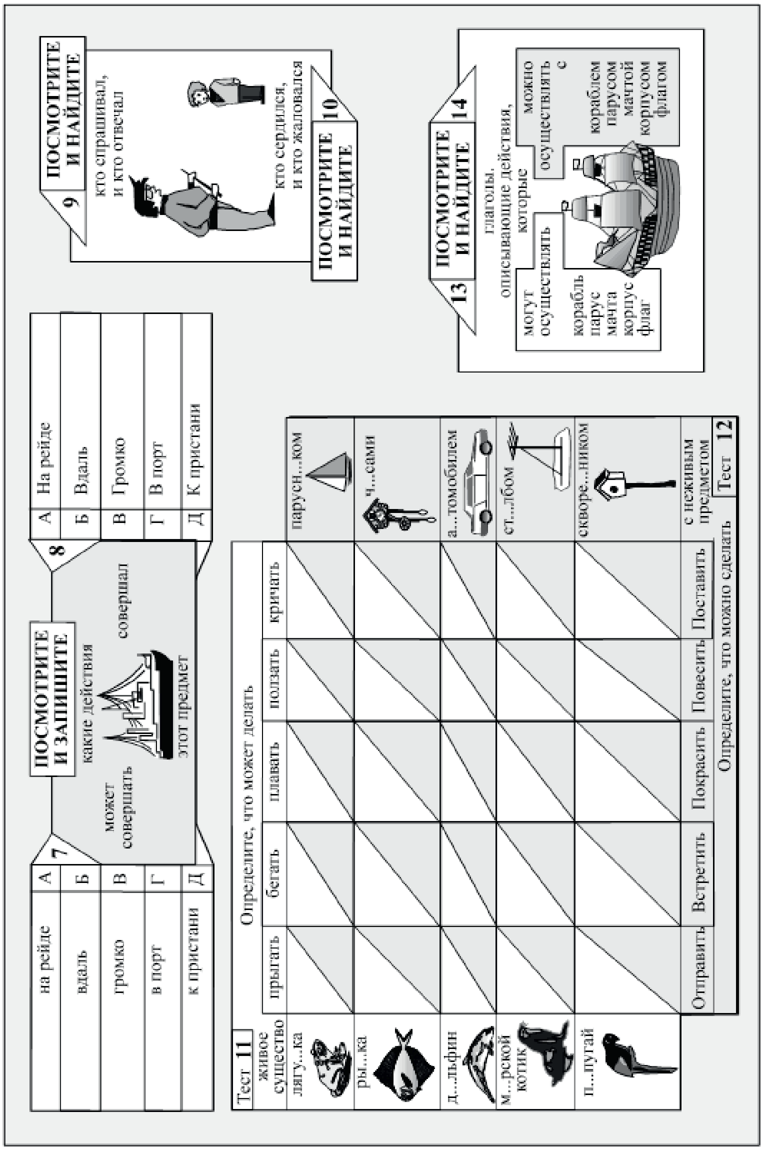


Рис. V.04.

Фрагмент №2 сценария визуального урока для 4 класса по теме «Глагол прошедшего времени»

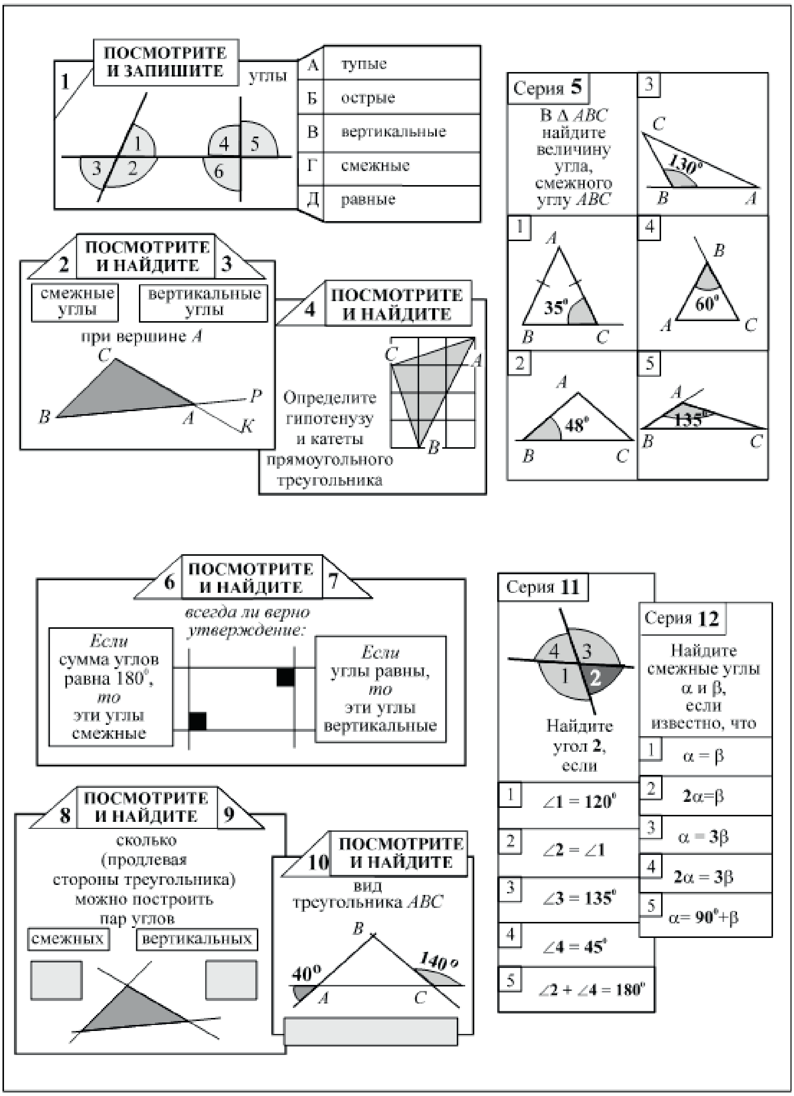


Рис. V.05.

Фрагменты комплекта №1 дидактических материалов для 7 класса к урокам «Треугольник» и «Смежные и вертикальные углы»

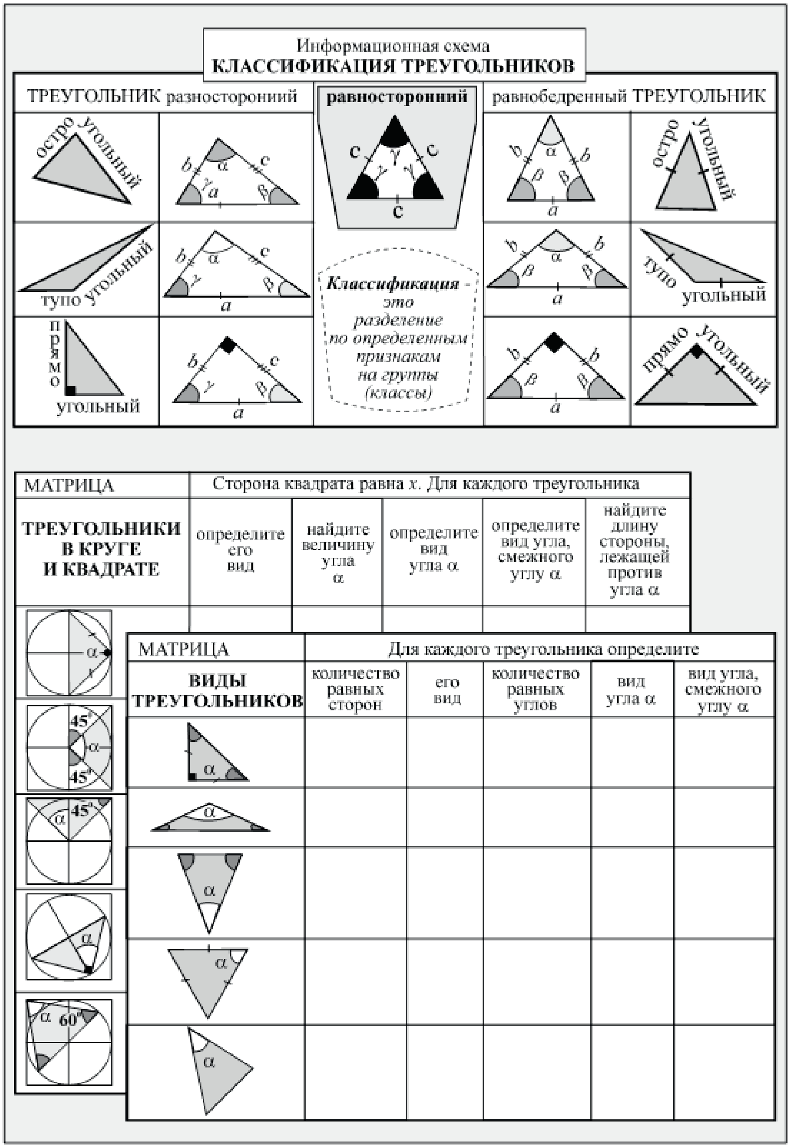


Рис. V.06.

Фрагменты комплекта №2 дидактических материалов для 7 класса к урокам «Треугольник» и «Смежные и вертикальные углы»

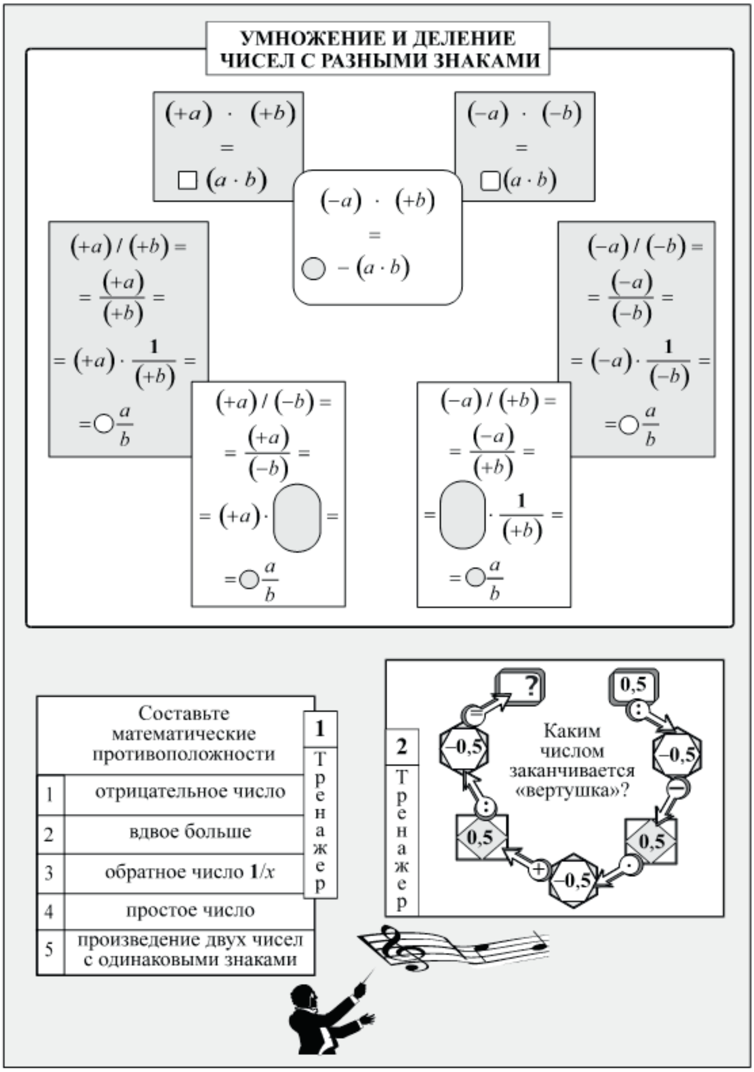


Рис. V.07.

Фрагмент №1 сценария визуального урока для 6 класса
по теме «Деление чисел с разными знаками»

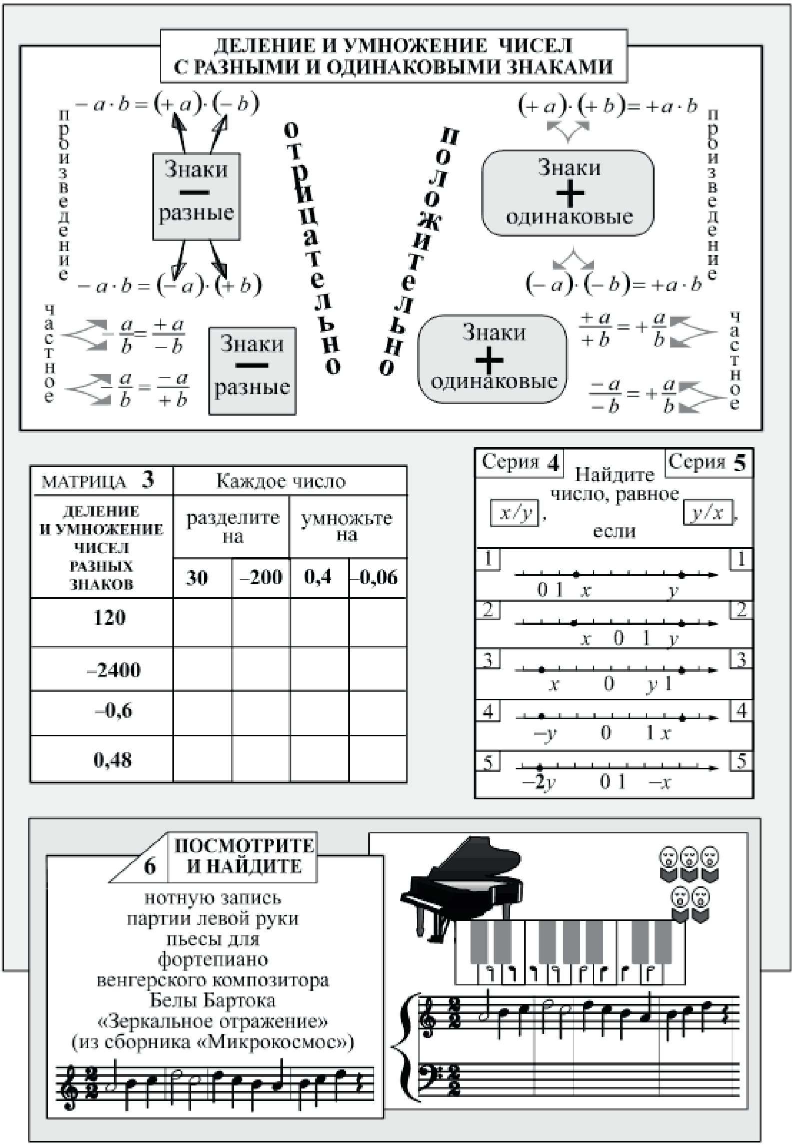
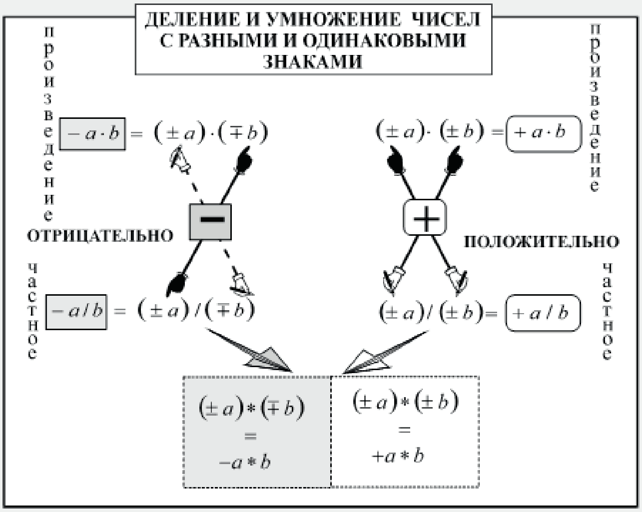
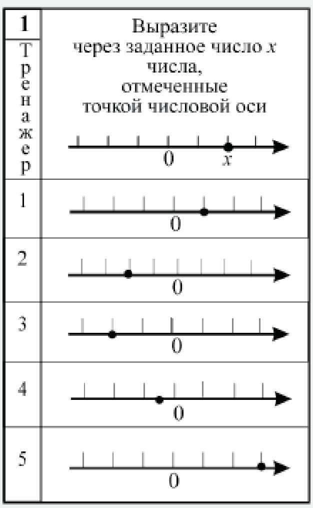


Рис. V.08.

Фрагмент №2 сценария визуального урока для 6 класса по теме «Деление чисел с разными знаками»



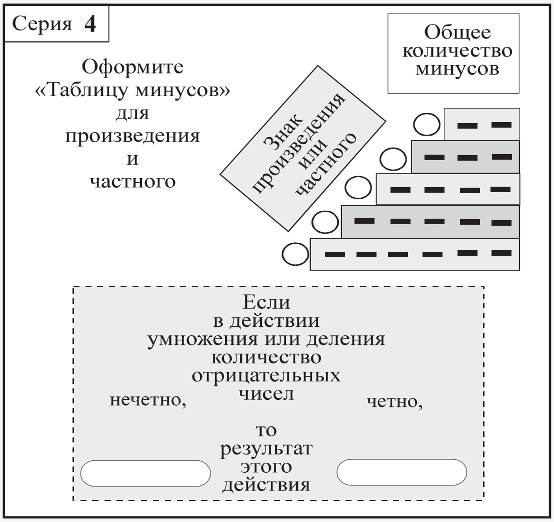


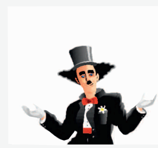
Серия 2	Упростите выражение
1	$(-1)^2+1^2$
2	$(-2^2)+(-2)^2$
3	$(-3)^2+(-3^2)+(-3)$
4	$(-2^3)+(-2^2)+(-2)$
5	$(-1)-(-1)^2-(-1^2)-(-1^3)-(-1)^3$

Серия 3	Упростите выражение
1	$(-2)^2:2^2$
2	$(-3^2):(-3)^2$
3	$(-4)^2:(-4^2)\cdot(-4)$
4	$(-2^3)(-2^2):(-2)$
5	$(-2):(-4)^2\cdot(-8^2):(-6^3)(-3)^3$

Рис. V.09.

Фрагмент №2 сценария визуального урока для 6 «музыкального» класса по теме «Деление и умножение чисел с разными и одинаковыми знаками»





Серия 5	Определите знак выражения
1	$1\cdot(-2)+3\cdot(-4)+\ldots+49\cdot(-50)$
2	$(-1-2-\ldots-50)\cdot(51+52+\ldots+100)$
3	$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot\frac{1}{50}\cdot\left(-\frac{1}{61}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{100}$
4	$\frac{1\quad 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot97\cdot98\cdot99\cdot00}{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot\ldots\cdot(-97)\cdot(-98)\cdot(-99)}$
5	$\frac{2\cdot(-3)\cdot4\cdot\ldots\cdot(-97)\cdot98\cdot(-99)}{1\cdot(-2)\cdot3\cdot\ldots\cdot97\cdot(-98)\cdot99\cdot100}$

Серия 6	Вычислите наиболее рациональным способом
1	$1+2+3+\ldots+48+49+50$
2	$1-2+3-\ldots-48+49-50$
3	$2\cdot(-3)+(-3)\cdot4+8\cdot(-9)$
4	$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$
5	$\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+2-\frac{15}{8}}{\frac{2}{3}-1+\frac{8}{9}-\frac{5}{6}}$

Рис. V.10.

Фрагмент №1 сценария визуального урока для 6 «музыкального» класса по теме «Деление и умножение чисел с разными и одинаковыми знаками»

Тест **1**							
Вычислите	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\dfrac{\mathbf{12\cdot 3+12\cdot 5}}{\mathbf{12\cdot 9-12}}$							
$\dfrac{\mathbf{13\cdot 3+13\cdot 6}}{\mathbf{13\cdot 9-13\cdot 6}}$							
$\dfrac{\mathbf{14\cdot 3+5\cdot 14}}{\mathbf{9\cdot 14-14\cdot 5}}$							
$\dfrac{\mathbf{35\cdot 12+8\cdot 35}}{\mathbf{5\cdot 35-35}}$							
$\dfrac{\mathbf{3\cdot 77+77\cdot 3}}{\mathbf{77\cdot 8-6\cdot 77}}$							

2 **ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ**

устно
(*без калькулятора!*)
результат

$$\frac{\left(\dfrac{5432-2345}{2345-5432}\right)^{3}+\left(\dfrac{5432-2345}{2345-5432}\right)^{5}}{\left(\dfrac{5432-2345}{2345-5432}\right)^{2}+\left(\dfrac{5432-2345}{2345-5432}\right)^{6}}$$

Серия **3**	I	II	III	IV	V
Каждую дробь	сократите на				упростите
	2	x	x^2	xy	
$\dfrac{2x}{7x}$					
$\dfrac{5x^2}{7x^3y^2}$					
$\dfrac{2xy^2}{3x^2y^3}$					
$\dfrac{10xy^3}{5y^2}$					
$\dfrac{6x^3\,5y^2}{18x\,9y}$					

Серия **4** Сократите дробь	1 $\dfrac{y^3-y}{y-y^3}$
1 $\dfrac{x^2x+x}{x+xx^2}$	2 $\dfrac{b^3b-bb^2}{bb^2-bb^3}$
2 $\dfrac{a^2-a^3}{a^2-a^2}$	3 $\dfrac{zz^3z-zz^2z}{zz^2z-z^3z^2}$

Тест **5**

Введем новую операцию: $\begin{matrix} a & & m \\ & \times & \\ b & & n \end{matrix} = an-bm$

Чему равно	$-(an+bm)$	$(an+bm)$	**0**	a^2	b^2	a^2-b^2	b^2-a^2	m^2-n^2	n^2-m^2
$\begin{matrix} -a & & m \\ & \times & \\ b & & n \end{matrix}$									
$\begin{matrix} a & & m \\ & \times & \\ -b & & n \end{matrix}$									
$\begin{matrix} an & & am \\ & \times & \\ an & & am \end{matrix}$									
$\begin{matrix} an & & an \\ & \times & \\ am & & am \end{matrix}$									
$\begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ b & & a \end{matrix}$									

Рис. V.11.

Фрагмент №1 первого варианта сценария визуального урока для 8 класса на актуализацию ЗУНов по теме «Умножение и деление чисел»

6 **ДЕЙСТВИЯ НАД ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{a} = \frac{a^2 \pm b^2}{\boxed{}}$$

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{\boxed{}}{ab}$$

Сумма и *разность*

Произведение и *частное*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \boxed{} \qquad \frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \boxed{}$$

Тест 7

Найдите результат	$\frac{a^2-1}{a}$	$\frac{1-a^2}{a}$	$\frac{1+a^2}{a}$	$\frac{a-1}{a}$	$\frac{1-a}{a}$	$\frac{1+a}{a}$
$\frac{1}{a}-1$						
$1-\frac{1}{a}$						
$\frac{1}{a}+1$						
$a+\frac{1}{a}$						
$\frac{1}{a}+a$						
$a-\frac{1}{a}$						

Тест 8

Разделите	$\frac{x}{y}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x^2}{y^2}$	$\frac{y^2}{x}$	$\frac{y}{x^2}$	$\frac{x^3}{y^3}$	$\frac{y^3}{x^3}$	$\frac{x}{y^2}$	xy	x	y
$\frac{y}{x}:\frac{y^2}{x^2}$											
$\frac{y}{x}:\frac{x}{y}$											
$\frac{y^2}{x}:\frac{y^2}{x^2}$											
$\frac{y^2}{x^2}:\frac{y}{x}$											
$\frac{y}{x^2}:\frac{y^2}{x}$											

Тест 9 Умножьте дробь на дробь и найдите результат

при a=**2**, b=**3**	**1**	**2**	**3**	**1/2**	**1/3**	**2/3**	**3/2**	**6**	**1/6**
$\frac{a}{a^2}\cdot\frac{b^2}{b^2}$									
$\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b}{a^2}$									
$\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b}{a}$									
$\frac{a}{b^2}\cdot\frac{b}{a^2}$									
$\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{a}$									

10 **ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ** **11**

Полные квадраты

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \pm \boxed{} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{b}{a}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} \pm 3\boxed{} + 3\boxed{} \pm \frac{b^3}{a^3}$$

Полные кубы

12 **Докажите, что** **13**

разность между полным квадратом суммы взаимно обратных выражений и суммой квадратов этих же выражений равна **2**

разность между кубом взаимно обратных алгебраических выражений и суммой их кубов равна утроенной сумме этих выражений

Рис. V.12.

Фрагмент №2 первого варианта сценария визуального урока для 8 класса на актуализацию ЗУНов по теме «Умножение и деление чисел»

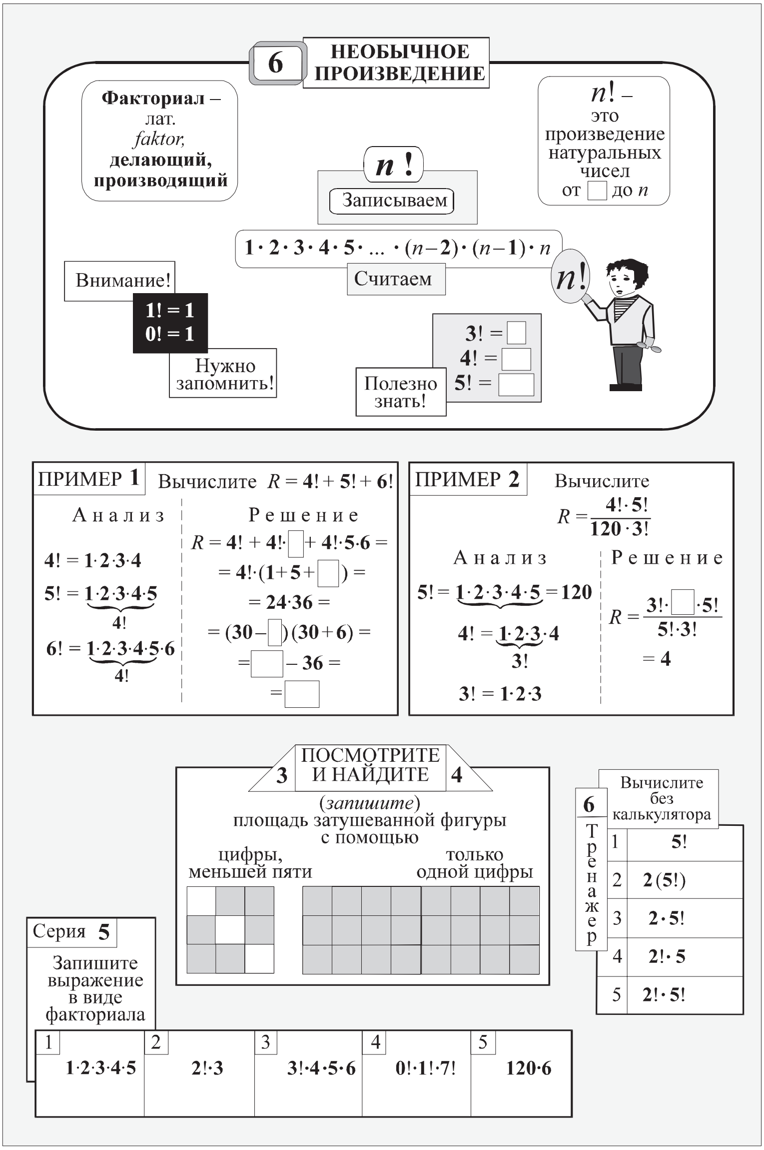


Рис. V.13.

Фрагмент №1 второго варианта сценария визуального урока для 8 класса на актуализацию ЗУНов по теме «Умножение и деление чисел»

Серия 7

Вынесите общий множитель

1	$1!-0!$
2	$3!-2!$
3	$13!-12!$
4	$15!-13!$
5	$120!-117!$

Тренажеры

8 Запишите три первых / три последних множителя **9**

8			9
1		$k!$	1
2		$(k-1)!$	2
3		$(k-2)!$	3
4		$(k+1)!$	4
5		$(k+2)!$	5

Тренажеры

10 Перечислите три первых / три последних множителя **11**

10			11
1	$(n)!$	$3k!$	1
2	$(2n)!$	$(3k)!$	2
3	$(3k)!$	$(3k-1)!$	3
4	$(4k)!$	$3(k+1)!$	4
5	$(5k)!$	$3!(k-1)!$	5

Серия 12

Вычислите

	3. $\dfrac{8!-7!}{7!-6!}$
1. $\dfrac{8!-2!}{6!}$	4. $\dfrac{8!-6!}{6!-4!}$
2. $\dfrac{7!}{8!-2!}$	5. $\dfrac{3!-2!}{6!}$

Серия 13

Сократите дробь

	3. $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$
1. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$	4. $\dfrac{(n-2)!}{n!}$
2. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$	5. $\dfrac{2n(2n-1)!}{2n!}$

14 ПОСМОТРИТЕ И НАЙДИТЕ

устно (*без калькулятора!*) результат

$$\frac{\dfrac{20!-19!}{18!\cdot 19!}-\dfrac{19!\cdot 18!-18!\cdot 17!}{17\cdot 18\cdot 16!}}{\dfrac{17!\cdot 18!-17!}{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13!}-\dfrac{16\cdot 17\cdot 15!-15!\cdot 16}{16!}}$$

Рис. V.14.

Фрагмент №2 второго варианта сценария визуального урока для 8 класса на актуализацию ЗУНов по теме «Умножение и деление чисел»

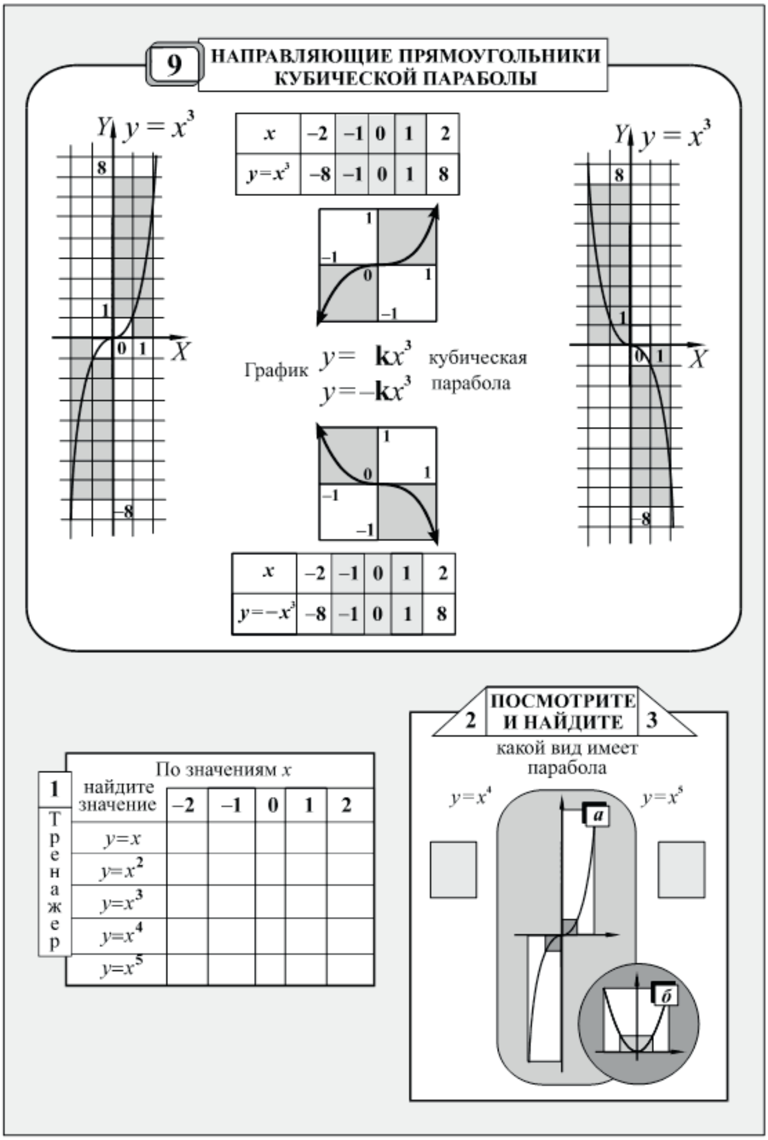


Рис. V.15.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов для 8 класса к уроку «Функции $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$ при $n \in N$»

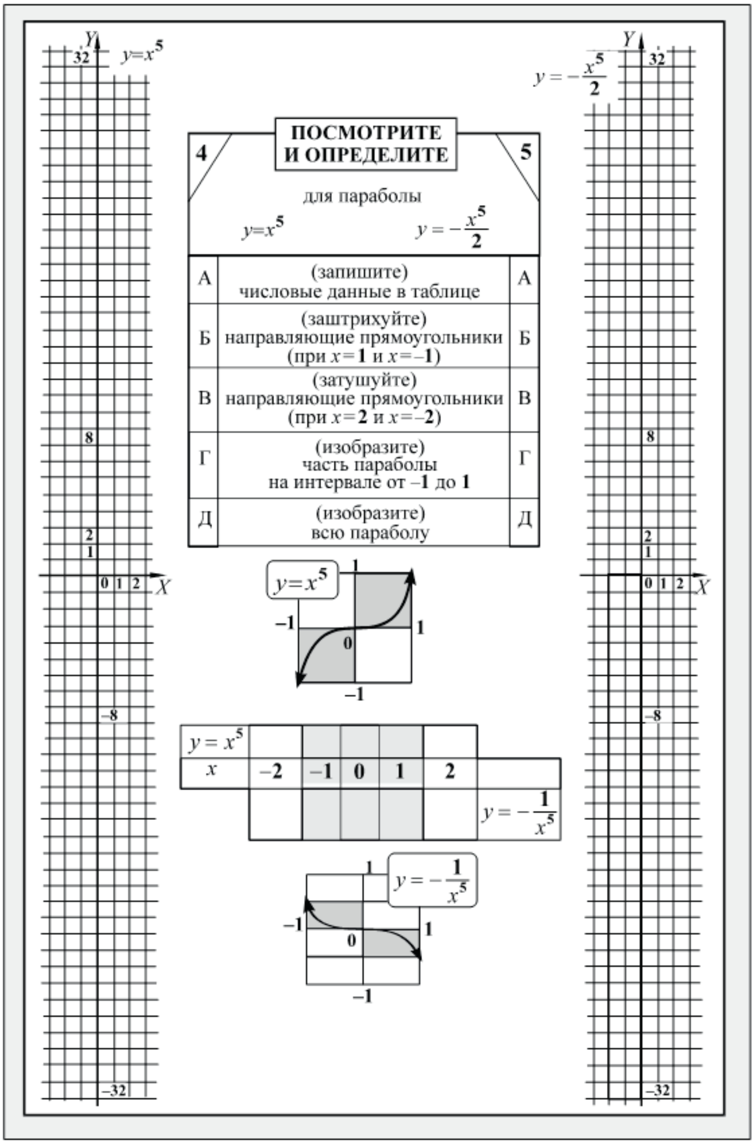


Рис. V.16.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов для 8 класса

«Функции $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$ при $n \in N$»

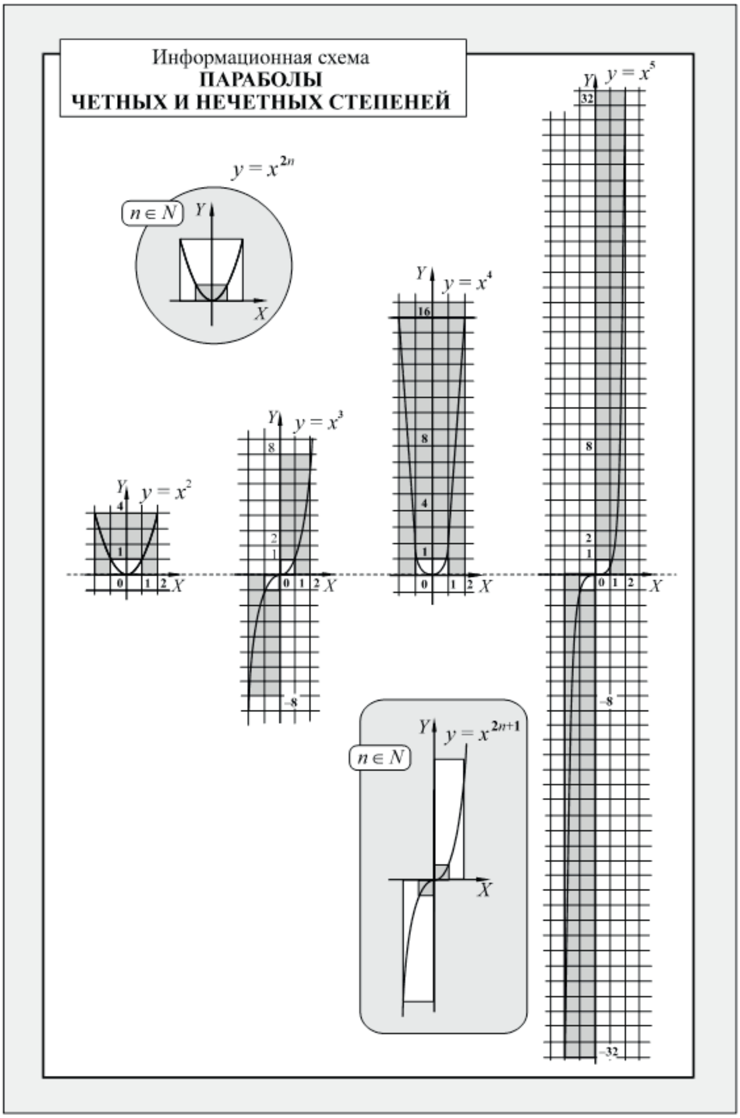
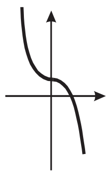


Рис. V.17.

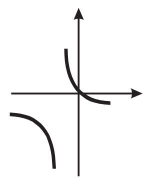
Фрагмент №3 комплекта дидактических материалов для 8 класса

«Функции $y = x^{2n}$ и $y = x^{2n+1}$ при $n \in N$»

1	**ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ**	2



К какому виду
относится кривая?



А	парабола четной степени	А
Б	парабола нечетной степени	Б
В	эллипс	В
Г	гипербола	Г

Тренажеры

3 Определите (не вычисляя), значение какой функции является большим $y=x^4$ или $y=x^5$ в точке

А	$x=\mathbf{0}$
Б	$x=\mathbf{1}$
В	$x=\mathbf{-2}$
Г	$x=\mathbf{0{,}5}$
Д	$x=\mathbf{-100}$

4 Найдите приближенное решение уравнения

А	$x^{\mathbf{2}}=\mathbf{3}$
Б	$x^{\mathbf{3}}=\mathbf{3}$
В	$x^{\mathbf{3}}=\mathbf{-8}$
Г	$x^{\mathbf{4}}=\mathbf{10}$
Д	$x^{\mathbf{5}}=\mathbf{-10}$

5 Определите сколько решений имеет уравнение

А	$x^{\mathbf{7}}=\mathbf{1}$
Б	$x^{\mathbf{10}}=\mathbf{-3}$
В	$x^{\mathbf{16}}=\mathbf{5}$
Г	$x^{\mathbf{21}}=\mathbf{-21}$
Д	$x^{\mathbf{34}}=\mathbf{0}$

6	ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ	**7**

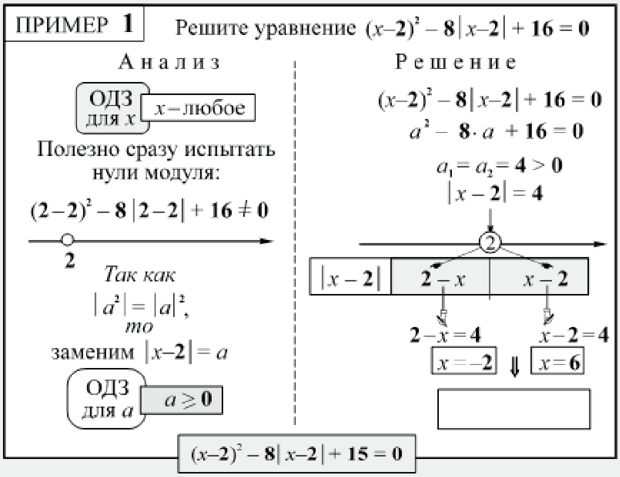
Какая из функций растет быстрее на интервале

$(\mathbf{0};\mathbf{1})$		$(\mathbf{1};\mathbf{2})$
А	$x^{\mathbf{2}}$	А
Б	$x^{\mathbf{3}}$	Б
В	$x^{\mathbf{4}}$	В
Г	$x^{\mathbf{5}}$	Г

Рис. V.18.

Фрагмент №4 комплекта дидактических материалов для 8 класса

«Функции $y = x^{\mathbf{2}n}$ и $y = x^{\mathbf{2}n\mathbf{+1}}$ при $n \in N$»



Тест 2. Определите ОДЗ для переменной y в выражении	Ограничений для y нет	$y \neq 1$	$y \neq 0$	$y \neq -1$	$y \neq 1$, $y \neq -1$	Тест 3. Определите ОДЗ для переменной y в выражении
$\|-y\| - 1$						$1/\|-y\|$
$\|1+y\|$						$1+\|y\|$
$\dfrac{1}{\|y\|}$						$\dfrac{\|y\|}{y}$
$\dfrac{1}{\|y-1\|}$						$\dfrac{y}{\|y\|+1}$
$\dfrac{1+\|-y\|}{1-\|y\|}$						$\dfrac{1+\|-y\|}{\|1-y\|}$

ПОСМОТРИТЕ И ОПРЕДЕЛИТЕ 4

$$|x^2 + 5| = 6x$$

А	характер уравнения
Б	ОДЗ для x
В	нули модуля
Г	уравнение без модуля
Д	решения уравнения

Рис. V.19.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов для 8 класса к уроку «Решение квадратного уравнения с модулем»

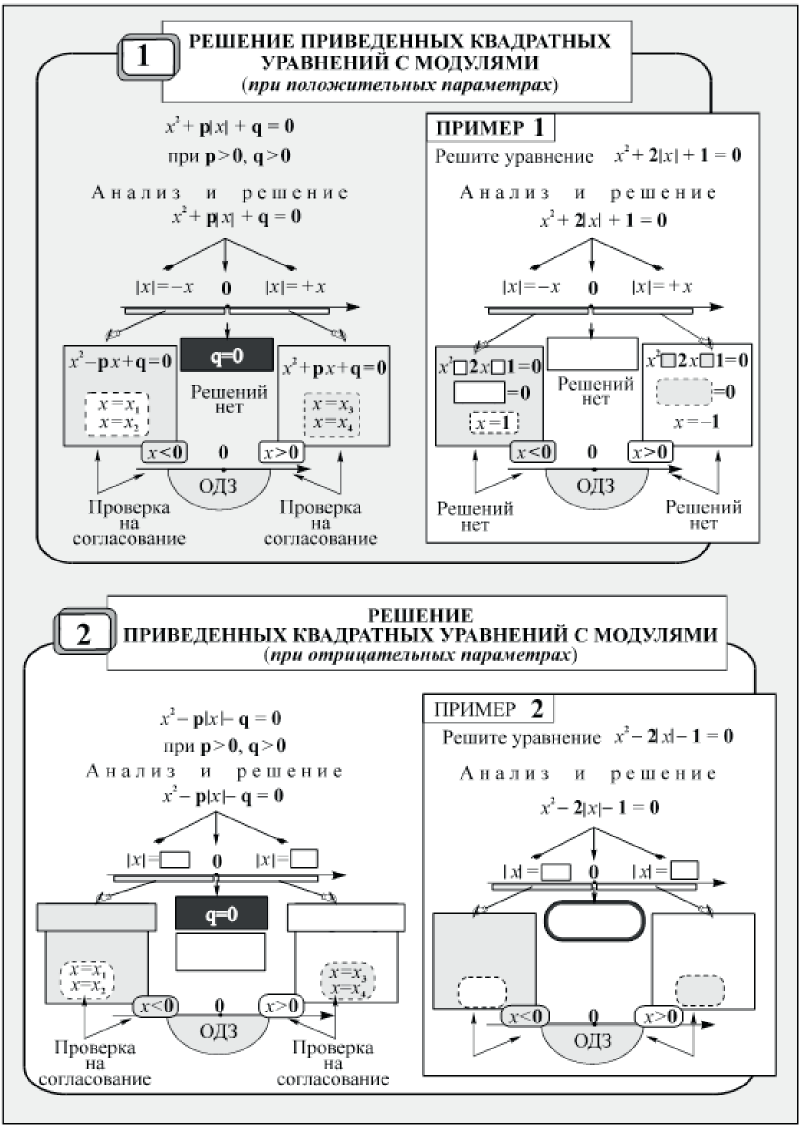


Рис. V.20.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов для 8 класса
к уроку «Решение квадратного уравнения с модулем»

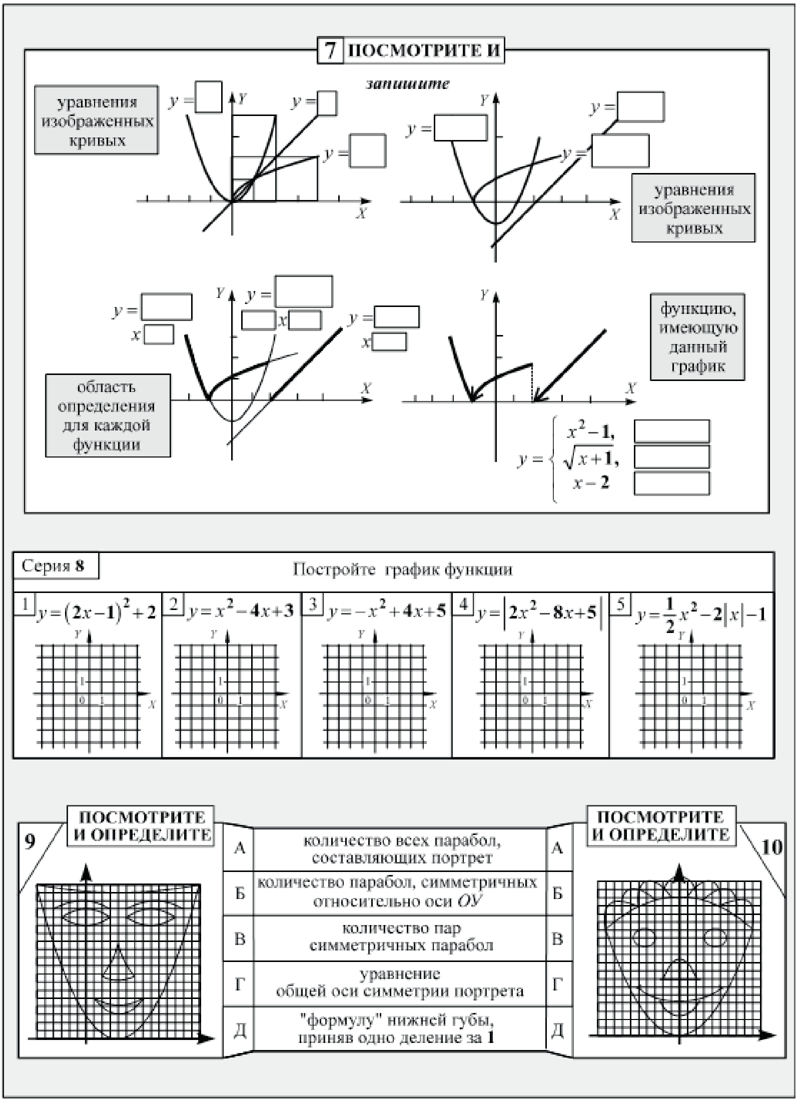


Рис. V.21.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов для 8 класса к уроку «Влияние параметров функции на преобразование ее графика»

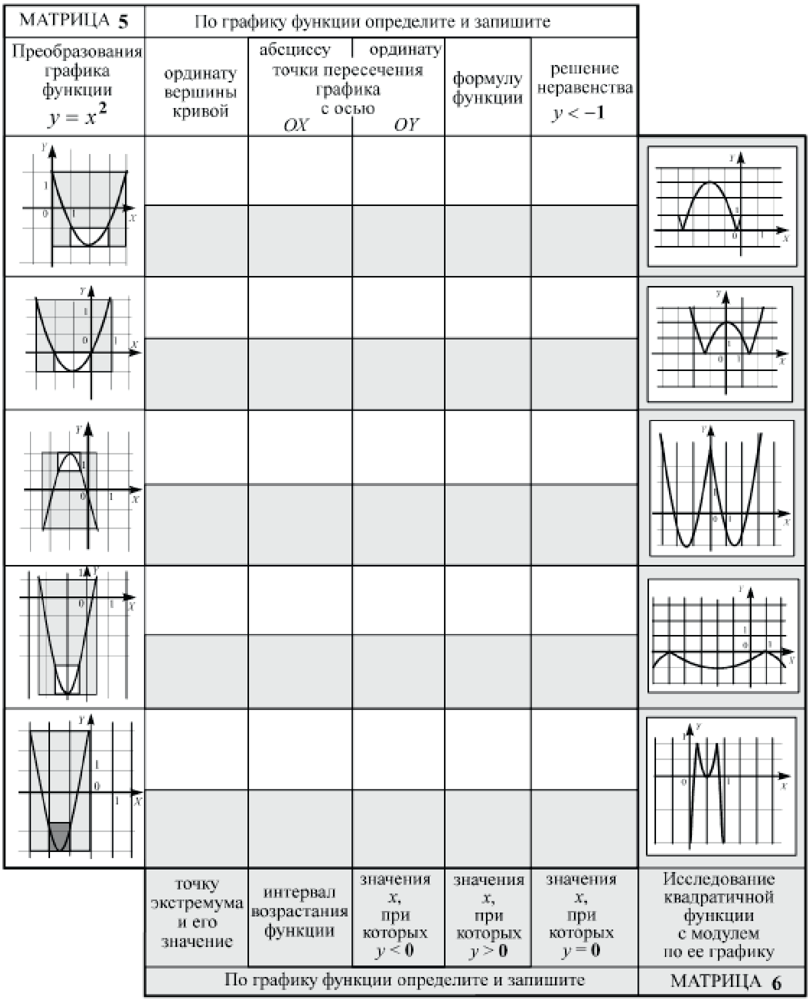
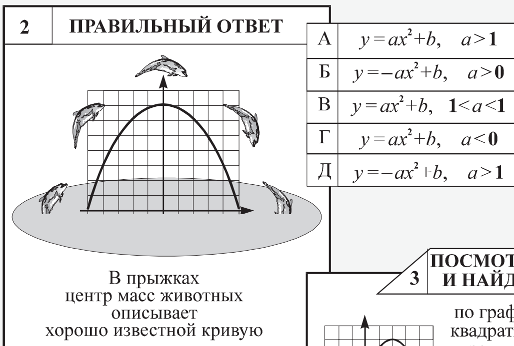
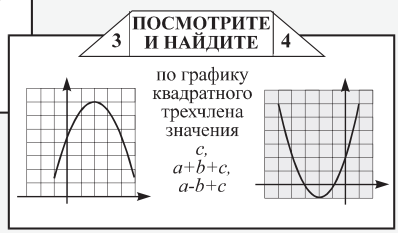


Рис. V.22.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов для 8 класса
к уроку «Влияние параметров функции на преобразование ее графика»

Тест **1** $f(x)=ax^2+bx+c.$ Найдите значение	$b–a–c$	$a–b+c$	$\mathbf{2}a$	c	$\mathbf{2}b$	$a+b+c$	$a–b–c$	$\mathbf{2}a+\mathbf{2}c$
$f(–\mathbf{1})$								
$f(\mathbf{0})$								
$f(\mathbf{1})$								
$f(\mathbf{1})-f(–\mathbf{1})$								
$f(\mathbf{1})+f(–\mathbf{1})$								





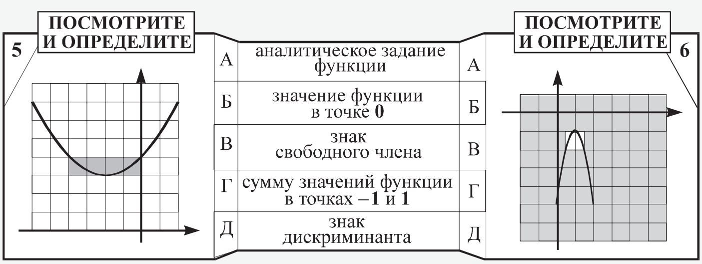


Рис. V.23.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов для 9 класса к уроку «Свойства квадратичной функции»

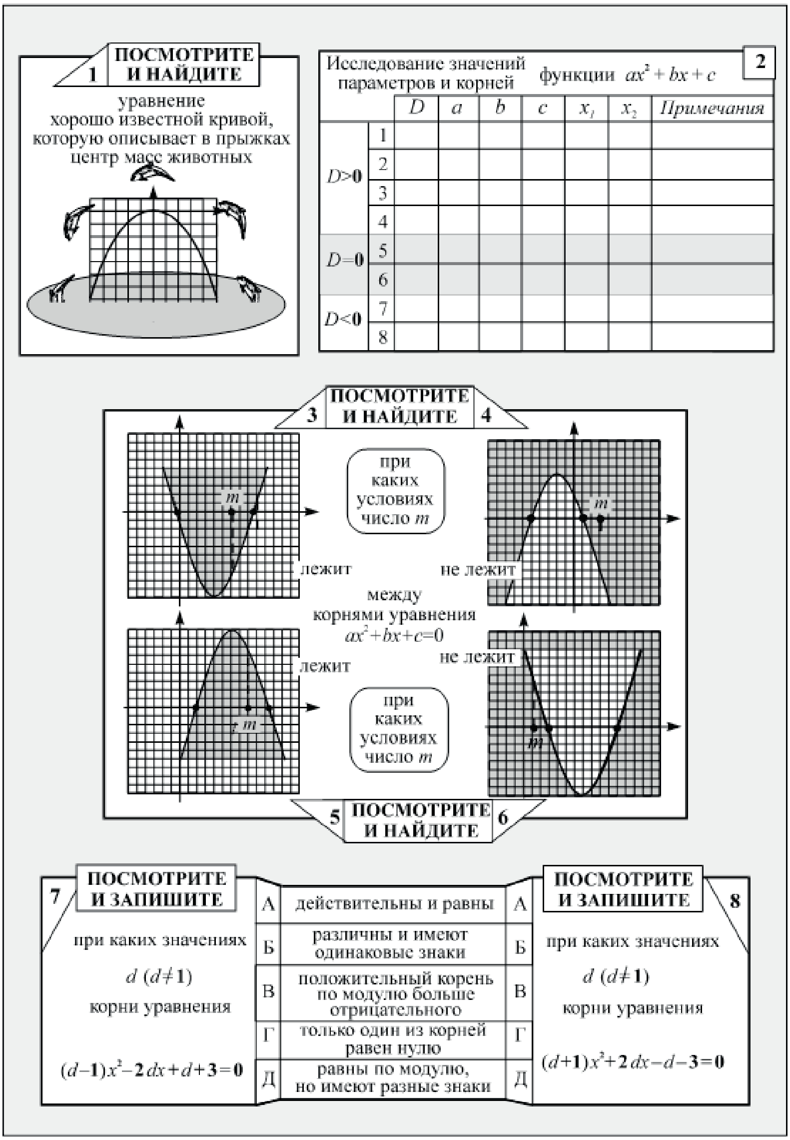


Рис. V.24.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов для 9 класса к уроку «Свойства квадратичной функции»

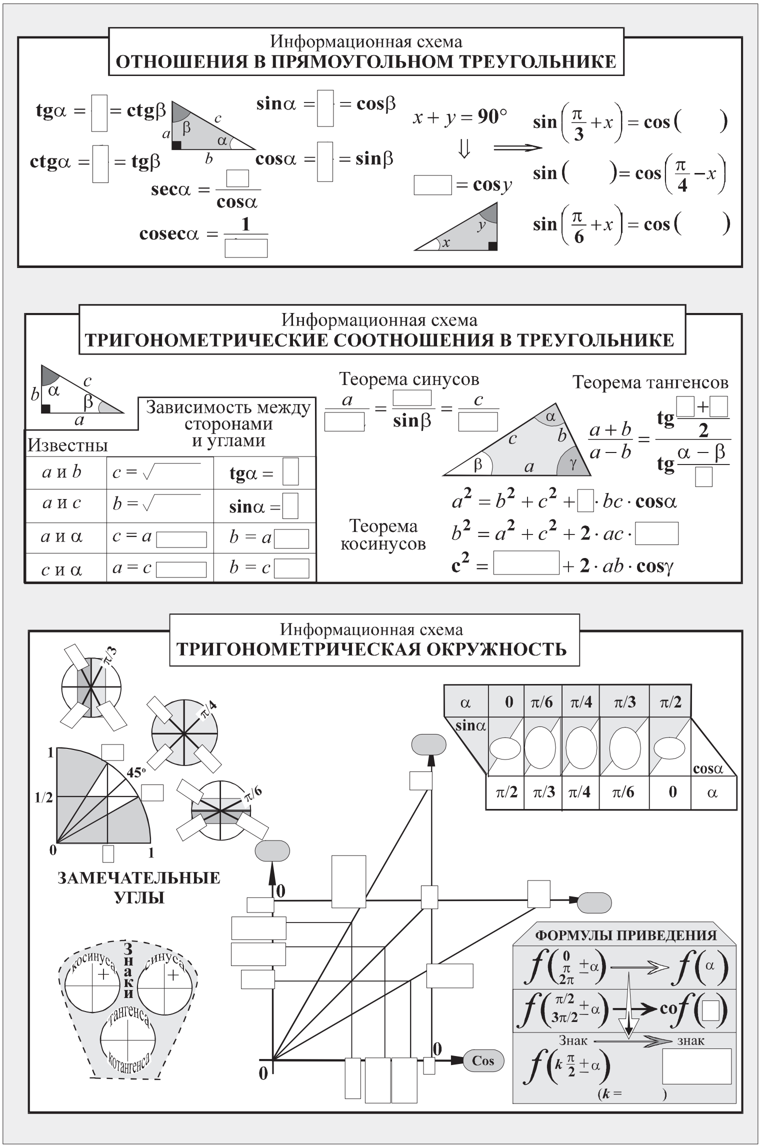


Рис. V.25.

Фрагмент комплекта дидактических материалов для 10 класса к уроку «Тригонометрия прямоугольного треугольника»

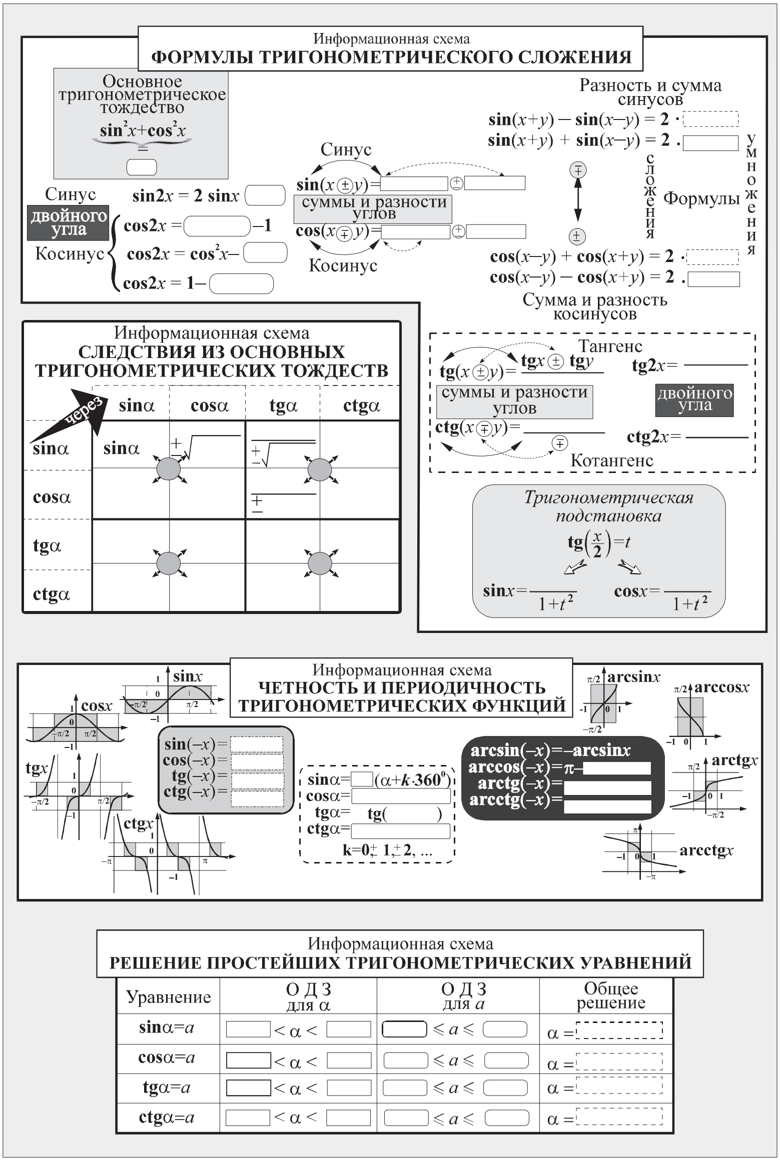
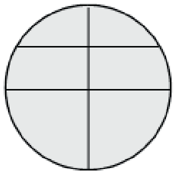
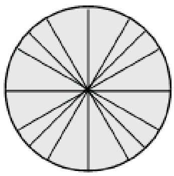
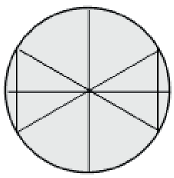
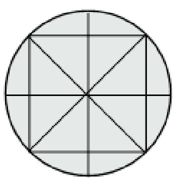
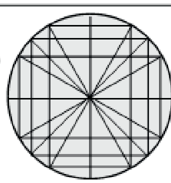


Рис. V.26.

Фрагмент комплекта дидактических материалов для 10 класса
к уроку «Тригонометрические тождества, уравнения и неравенства»

Серия 1

Изобразите на окружности решение неравенства

1	$\sin\alpha > \frac{1}{2}$	
2	$\cos\alpha < 0$	
3	$\cos\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$	
4	$\lvert\cos\alpha\rvert > \frac{\sqrt{2}}{2}$	
5	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin\alpha < 0$	

2 ЗАЧЕТ

1	Вычислите значение $\sin 75°$
2	Упростите выражение $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta$
3	Найдите $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x$, если известно, что $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x = 5$
4	Определите значение $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ($\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$), $\cos\beta = 0{,}6$ ($\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$)
5	Решите уравнение $\sin(\alpha + x) - \sin\alpha\cos x = \cos x$

Серия 3 Решите уравнение

1	$\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}\,x + 8 = 0$
2	$2\sin x - 3\cos x = 0$
3	$2\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 0$
4	$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin^2 x$
5	$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$

Рис. V.27.

Фрагмент №1 комплекта контролирующих заданий для 10 класса по теме «Тригонометрические тождества, уравнения и неравенства»

4	ЗАЧЕТ
1	Вычислите $\mathbf{tg\,1°\cdot tg\,2°\cdot tg\,3°\cdot \ldots \cdot tg\,87°\cdot tg\,88°°\cdot tg\,89°}$
2	Упростите выражение $\mathbf{tg}^2 x + \mathbf{ctg}^2 x - \mathbf{2}$, если $\alpha \in [\frac{\pi}{\mathbf{4}}; \frac{\pi}{\mathbf{2}}]$
3	Докажите тождество $\mathbf{tg}\,\frac{\pi}{\mathbf{12}} + \mathbf{ctg}\frac{\pi}{\mathbf{4}} = \mathbf{4}$
4	Решите уравнение $\mathbf{7}\cos(\frac{\pi}{\mathbf{5}} - \alpha) + \mathbf{5}\cos(\alpha - \frac{\mathbf{6}\pi}{\mathbf{5}}) = \mathbf{1}$
5	Решите неравенство $\mathbf{2cos}^2(x + \frac{\pi}{\mathbf{6}}) - \mathbf{3cos}(\frac{\pi}{\mathbf{3}} - x) + \mathbf{1} > \mathbf{0}$

СЮЖЕТ 5

Дана функция $y = \mathbf{1} + \mathbf{cos}\frac{x}{\mathbf{2}}$

1. Постройте график
2. Решите графически неравенство $y > \mathbf{1}$
3. Решите уравнение $y = \mathbf{cos2}x$
4. Решите неравенство $y > \mathbf{cos2}x + \mathbf{cos}\frac{\mathbf{3}x}{\mathbf{2}}$
5. Решите уравнение $y' = \mathbf{0}$

СЮЖЕТ 6

Дана функция $f(x) = \mathbf{cos}\,x - \mathbf{sin}\,x$

1. Решите уравнение $f(x) = \mathbf{0}$
2. Решите неравенство $f(x) + f(-x) \le \mathbf{1}$
3. Решите неравенство $f^{\mathbf{2}}(x) < \mathbf{1}$
4. Решите уравнение $\left(f^{\mathbf{2}}(x)\right)' - f(-x) = \mathbf{0}$
5. Найдите t, при которых $f(-t) = f(\mathbf{0})$ и $f(t) = f(0)$

Рис. V.28.

Фрагмент №2 комплекта контролирующих заданий для 10 класса по теме «Тригонометрические тождества, уравнения и неравенства»

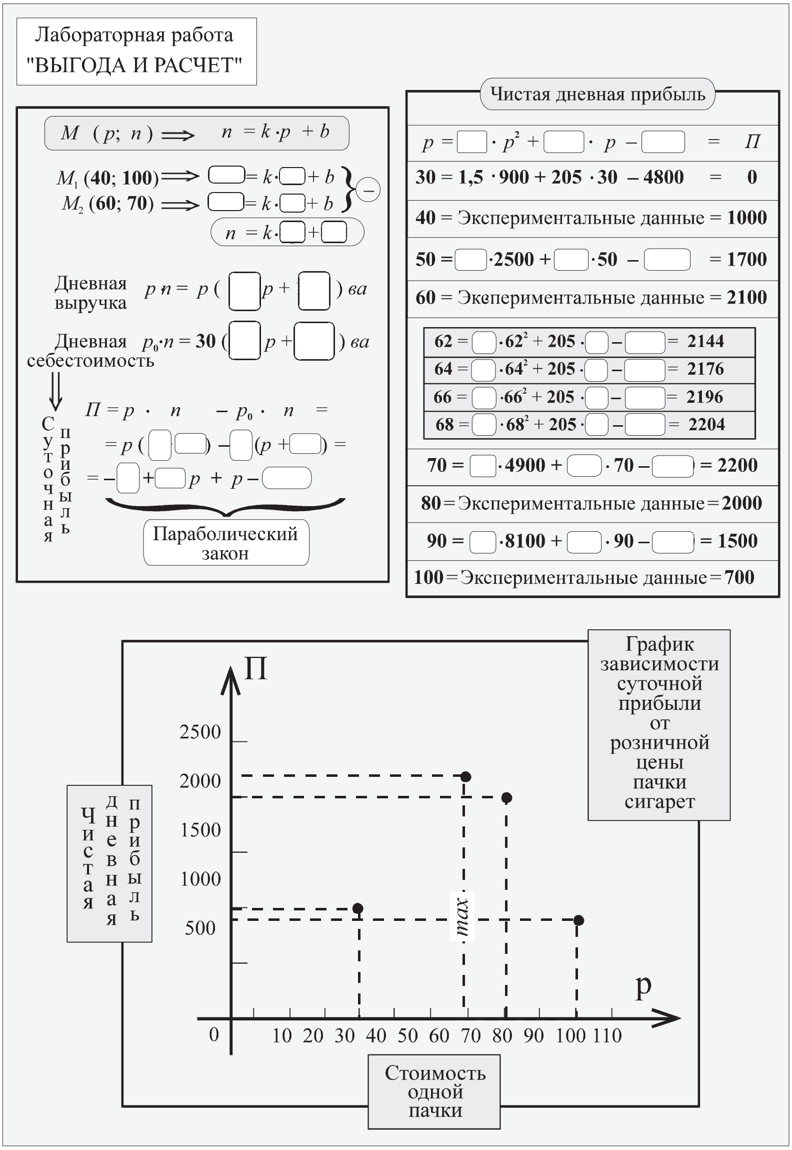


Рис. V.29.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов для 10 класса, построенных на материале книги «Выгода и начала анализа»

Лабораторная работа "ВЫГОДА И РАСЧЕТ"

ЧИСТАЯ ПРИБЫЛЬ

$(p_k - p_o)\, n_k$

ОБОРОТНЫЙ КАПИТАЛ

СУТОЧНАЯ ВЫРУЧКА

ЧИСТАЯ ПРИБЫЛЬ

Себестоимость (всего в сутки)	Закупочная цена одной пачки	Количество проданных пачек в день	Розничная цена одной пачки	Суточная выручка	Суточная прибыль
ва/сут	ва/шт	шт/сут	ва/сут	ва/шт	ва/сут
$p_o\, n_k$	p_o	n_k	p_k	$p_k\, n_k$	Π_k
	30	100	40		
	30	70	60		
	30	40	80		
	30	10	100		
		на оси ординат	на оси абсцисс		

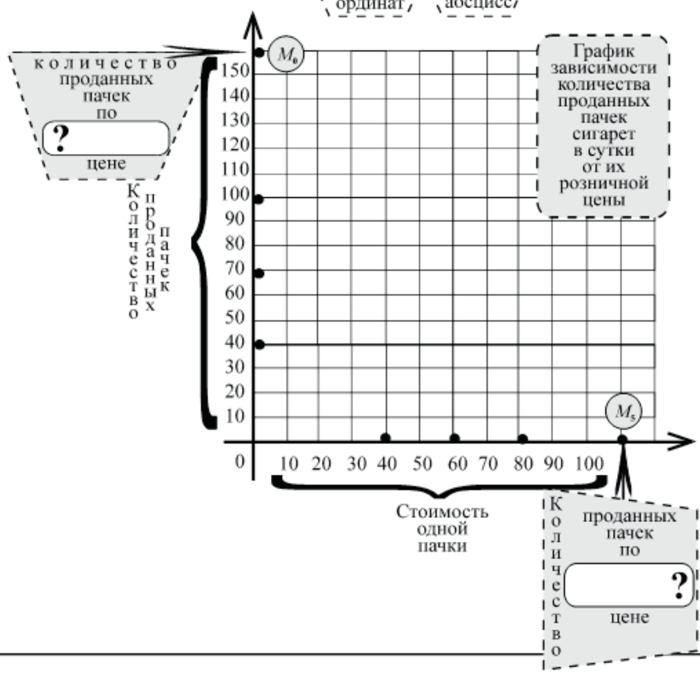


Рис. V.30.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов для 10 класса, построенных на материале книги «Выгода и начала анализа

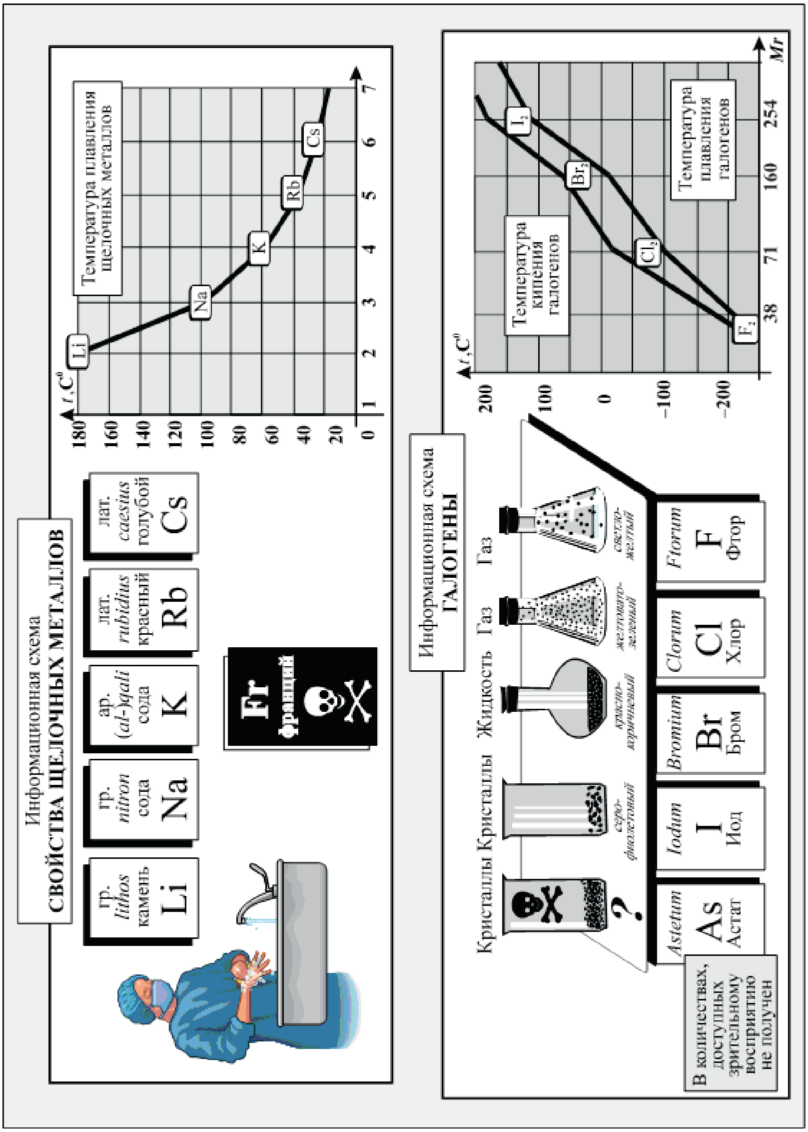


Рис. V.31.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов к отдельным темам курса химии

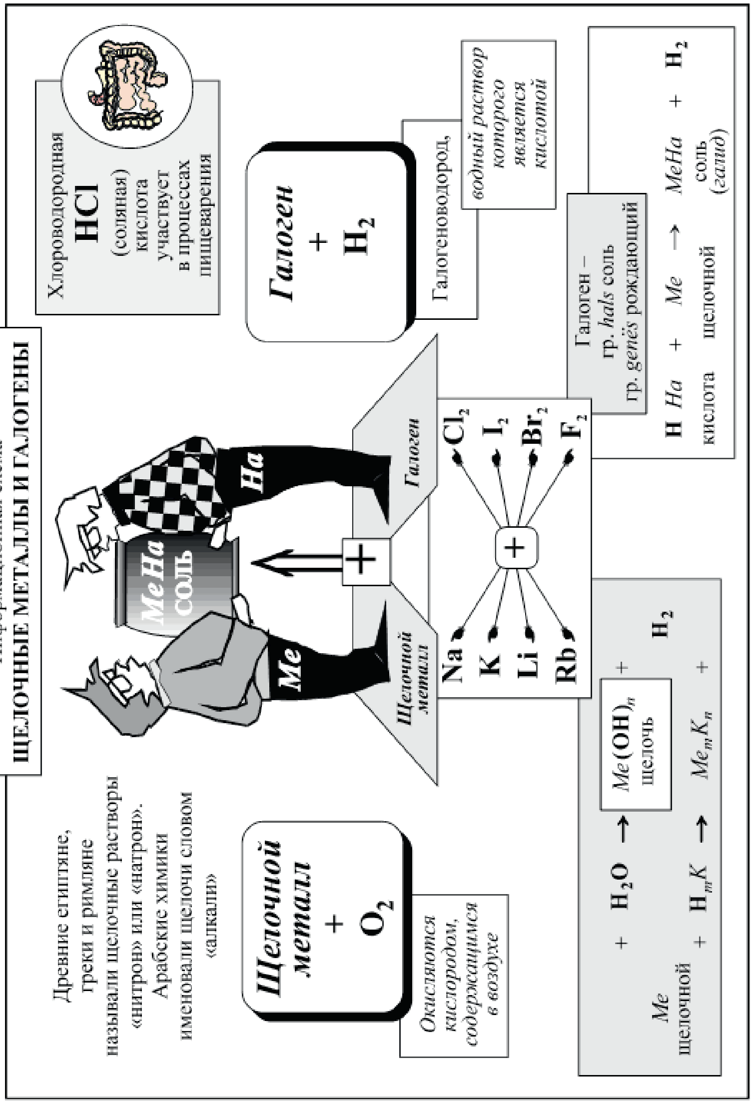


Рис. V.32.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов к отдельным темам курса химии

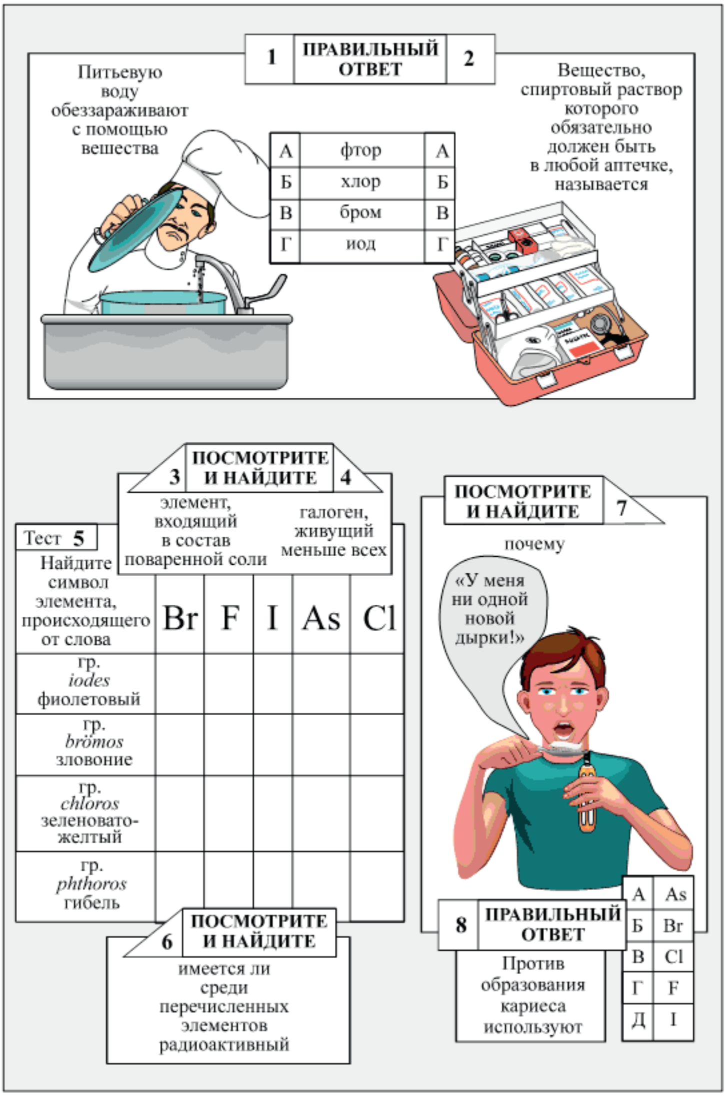


Рис. V.33.

Фрагмент №3 комплекта дидактических материалов к отдельным темам курса химии

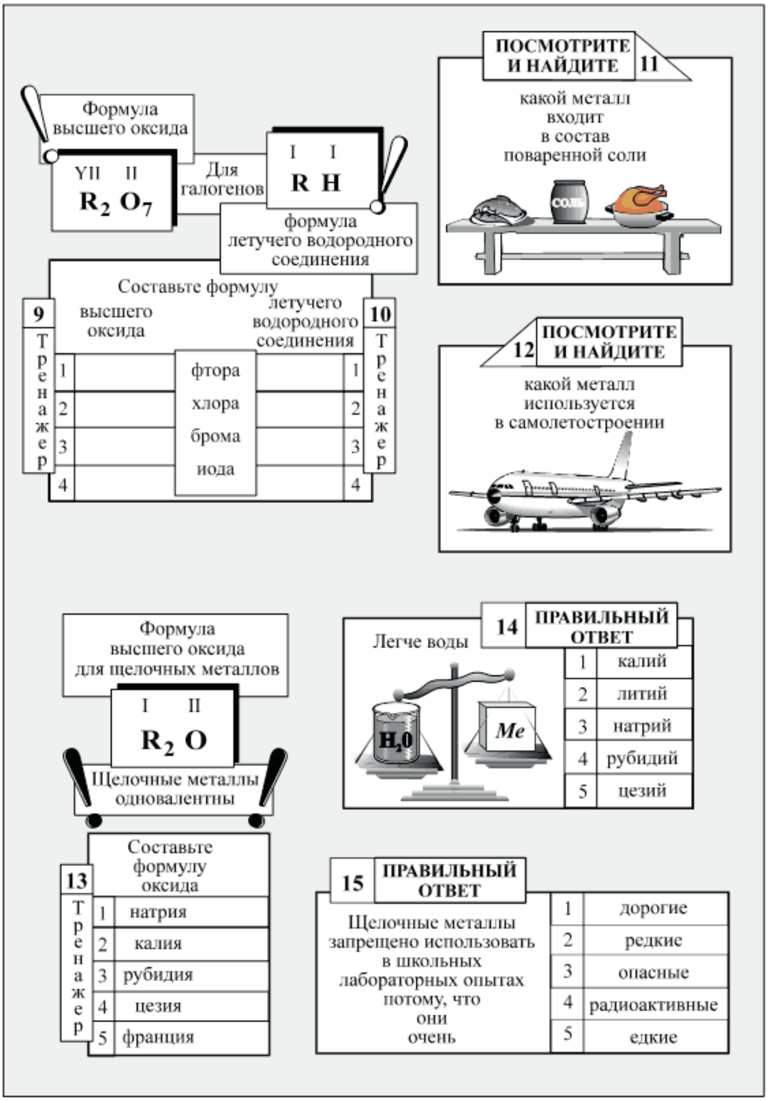


Рис. V.34.

Фрагмент №4 комплекта дидактических материалов к отдельным темам курса химии

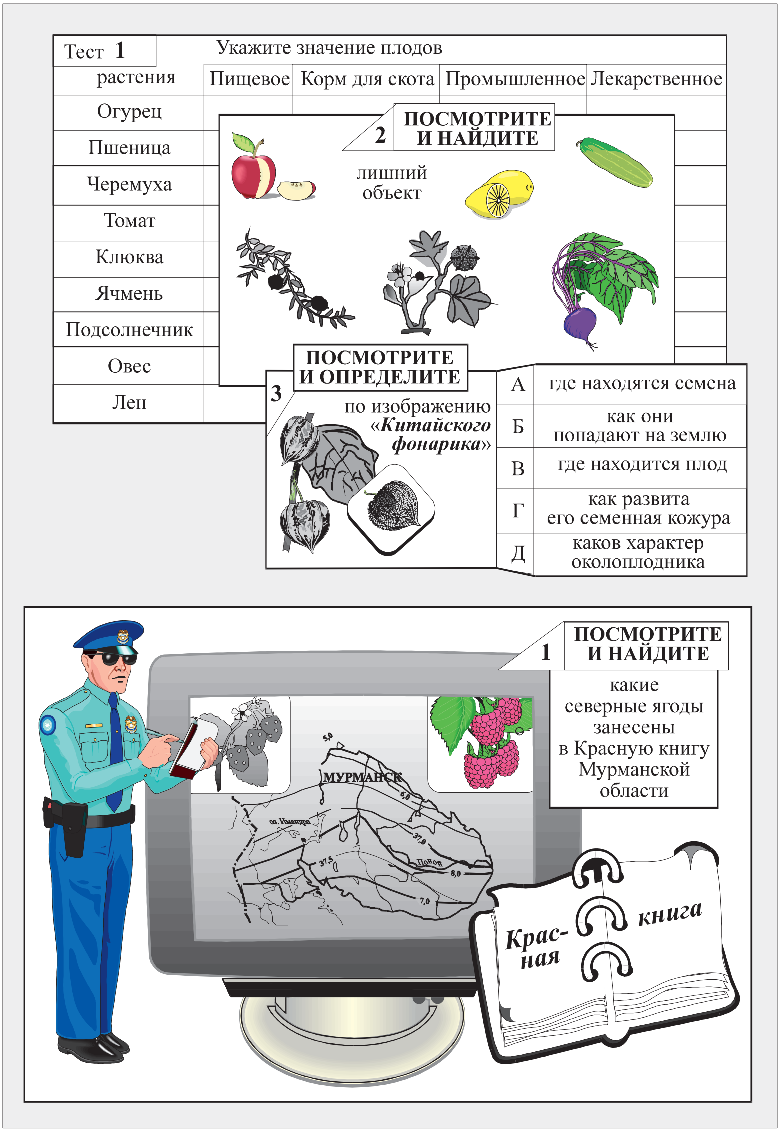


Рис. V.35.

Фрагменты визуальной тетради «Плоды и семена»

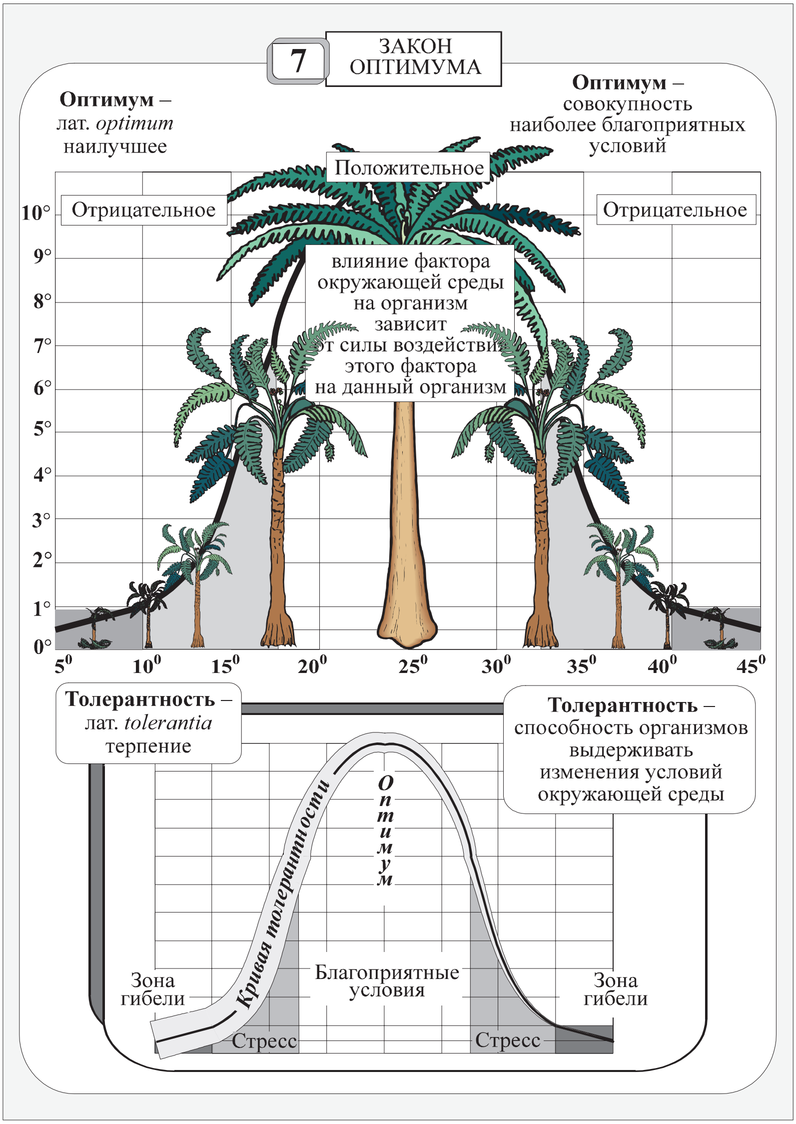


Рис. V.36.

Фрагмент визуальной тетради «Земная среда обитания»

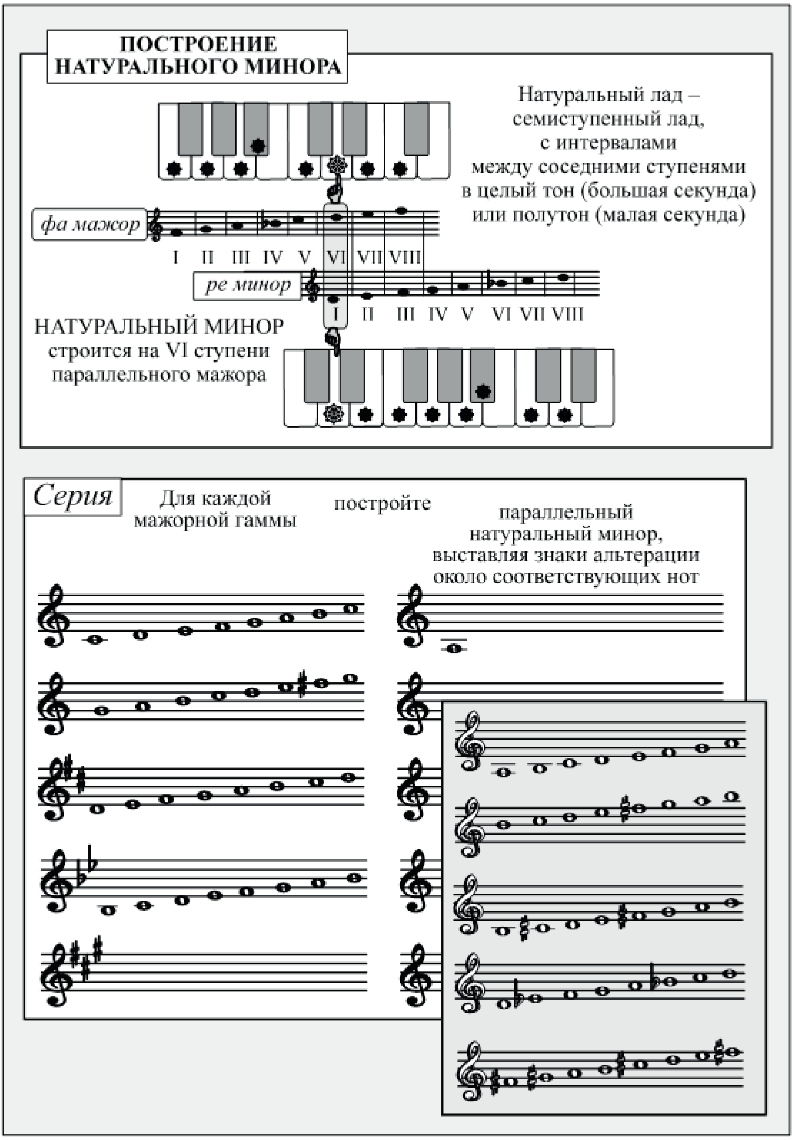


Рис. V.37.

Фрагмент комплекта дидактических материалов по сольфеджио к уроку «Построение натурального минора»

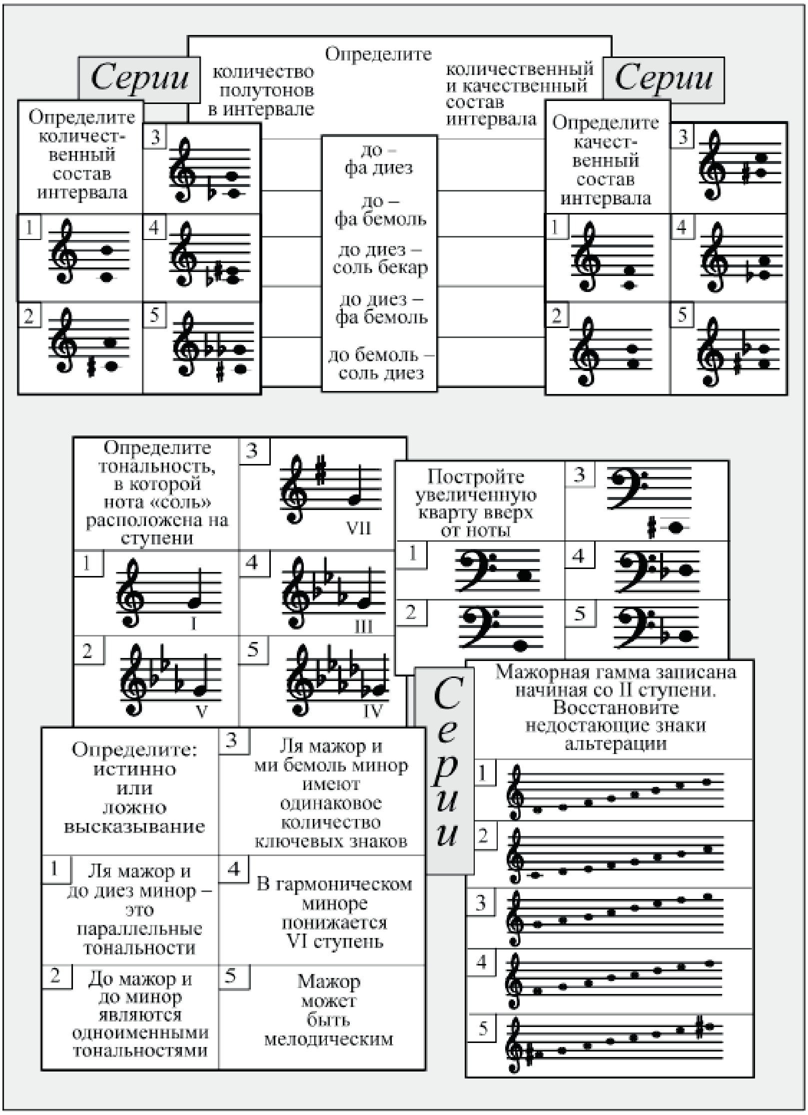


Рис. V.38.

Визуальные задачи

для уроков сольфеджио и музыкальной грамоты

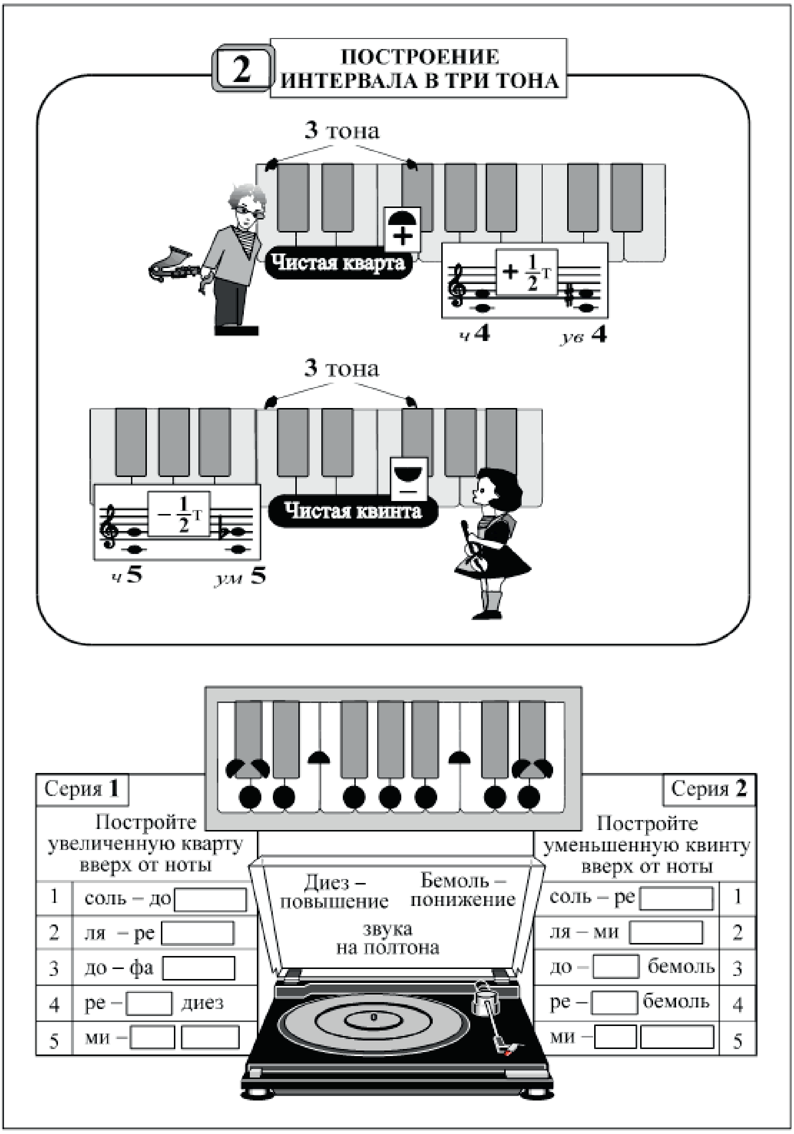


Рис. V.39.

Фрагмент №1 комплекта дидактических материалов по сольфеджио к урокам по теме «Характерные интервалы»

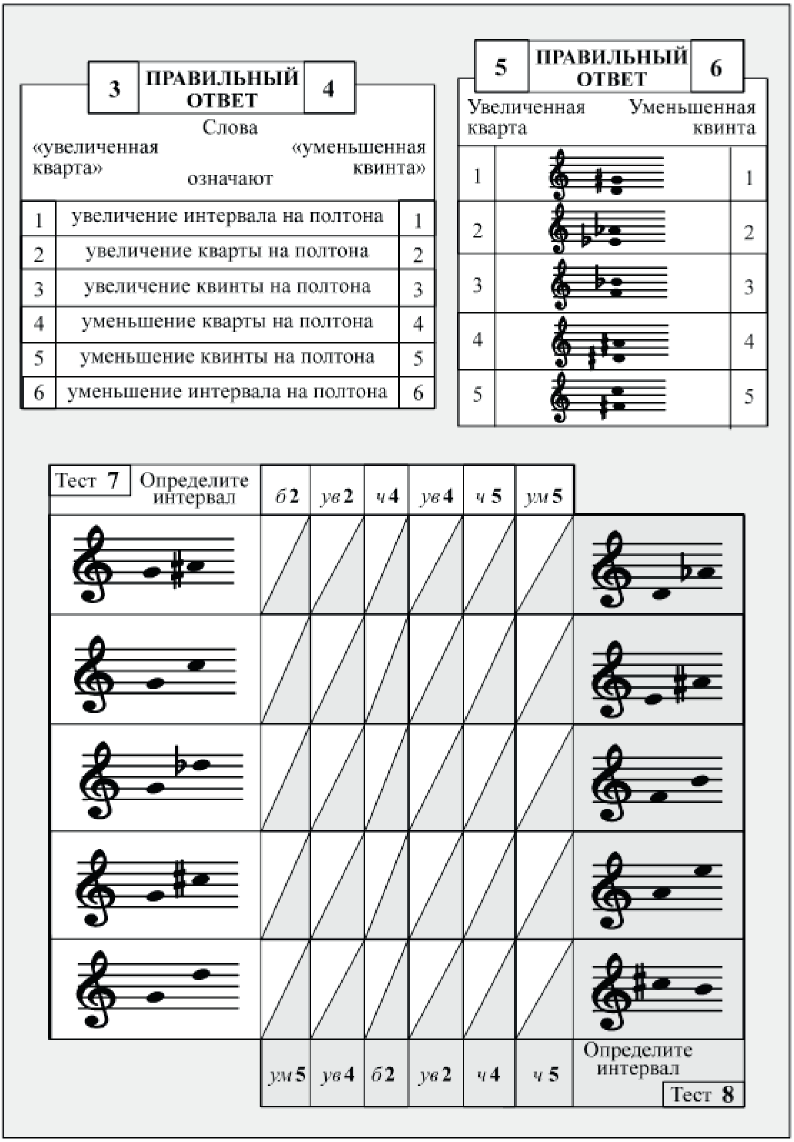


Рис. V.40.

Фрагмент №2 комплекта дидактических материалов по сольфеджио к урокам по теме «Характерные интервалы»

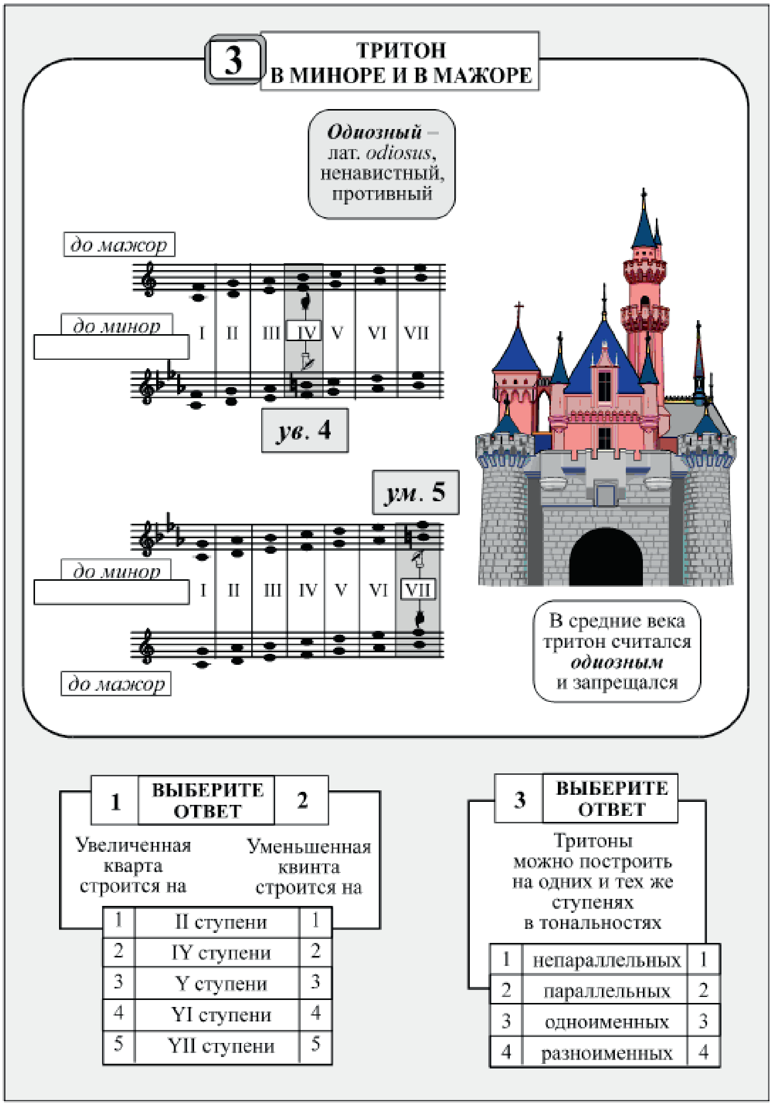


Рис. V.41.

Фрагмент №3 комплекта дидактических материалов по сольфеджио к урокам по теме «Характерные интервалы»

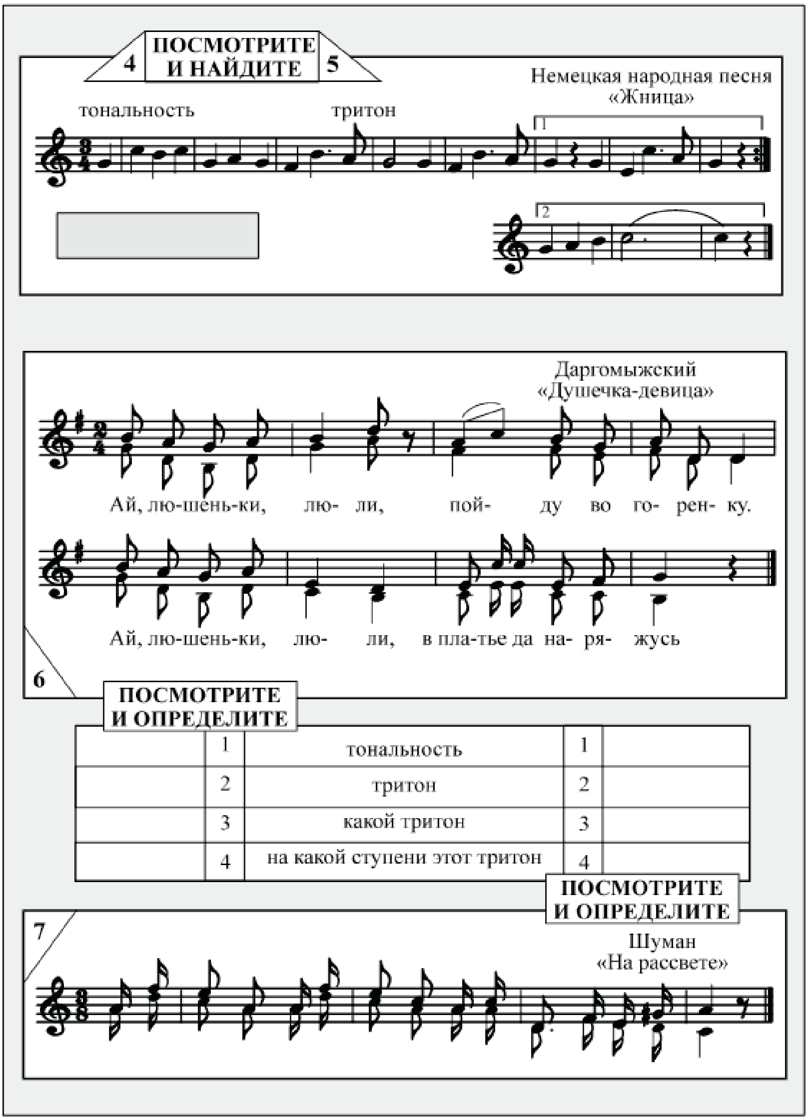


Рис. V.42.

Фрагмент №4 комплекта дидактических материалов по сольфеджио к урокам по теме «Характерные интервалы»

Список использованной литературы

1. Александров А.Д. и др. Начала стереометрии. 10 кл. Пробный учеб. Материалы для ознакомления / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик – М.: Просвещение, 1981. – 224 с. – (Биб-ка учителя математики).
2. Антонов Д.А. Развитие творческой активности учащихся при работе над математическим текстом // Математика в школе. – 1980. – №2. – С. 31-33.
3. Арнхейм Р. Новые очерки по психологии искусства / Пер. с англ. Г.Е. Крейдлина: под ред. В.П. Шестакова. – М.: Прометей, 1994. – 352 с.
4. Арнхейм Р.В защиту визуального мышления // Арнхейм Р. Новые очерки по психологии искусства: Пер. с англ. – М.: Прометей, 1994. – С. 153-173.
5. Арнхейм Р. Визуальное мышление // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 97-107.
6. Арнхейм Р. Двойственная природа разума: интуиция и интеллект // Арнхейм Р. Новые очерки по психологии искусства. Пер. с англ. М.: Прометей, 1994. – С. 22-41.
7. Арнхейм Р. Искусство и визуальное восприятие / Сокр. пер. с англ. В.Н. Самохина. Общ. ред. В.П. Шестакова. – М.: Прогресс,1974. – С. 393
8. Афанасьев В.В. Методические основы формирования творческой активности студентов в процессе решения математических задач. Диссертация. на соиск. уч. ст. докт. пед. наук. – СПб.: 1997. – 360 с.
9. Бартенев Ф. Наблюдения в математике // Квант. – 1978. – №4. – С. 40-41.
10. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре. – М.: Просвещение, 1976. – 95 с.
11. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с. ил.
12. Башмаков М.И. Определение основных понятий анализа в школьном курсе математике // Математика в школе. – 1988. – №3. – С. 41-44.
13. Башмаков М.И. Математика: Эксперим. учеб. материалы. – М.: Просвещение, 1983. – 224 с.

14. Башмаков М.И. Экспериментальные учебные материалы по математике. – М.: Высш. шк., 1982. – 192 с.
15. Башмаков М.И., Поздняков С.Н., Резник Н.А. Информационная среда обучения. – СПб.: СВЕТ, 1997. – 400 с.
16. Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов / Пер. с англ. Г.Е. Крейдлина. Общ. ред. В.А. Смирнова, В.К. Финна. – М.: Прогресс, 1961. – 288 с.
17. Белый С. Разноцветная математика // Квант. – 1980. – №6. – С. 30-32.
18. Биркгофф Г. Математика и психология / Пер. с англ. Г.Н. Пивоварова. – М.: Сов. радио, 1977. – 96 с.
19. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высш. шк., 1979. – 448 с.
20. Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1950. – 347 с.
21. Болтянский В.Г. Как развивать "графическое мышление" // Математика в школе. – 1978. – №3. – С. 16-23.
22. Болтянский В.Г., Груденов Я.И. Как учить поиску решения задач // Математика в школе. – 1988. – №1. – С. 8-14.
23. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Преобразования. Векторы: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964.
24. Бродский И.Л. Выгода и начала анализа. Семь задач по курсу «Выгода и расчет». Учеб. пособие. – Мурманск: Мурманский обл. ин-т повышения квалификации и переподготовки работников образования, 1994. – 42 с.
25. Брушлинский АВ. О мышлении и его развитии (психологический и кибернетический подходы к проблеме) // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 211-214.
26. Бурда М.И. Формирование умений осуществлять поиски геометрических доказательств // Преподавание алгебры и геометрии в школе (из опыта работы): Пособие для учителей / Сост. О.А. Боковцев. – М.: Просвещение, 1982. – С. 99-105.

27. Вазари Д. Жизнеописание наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих. Введение к трем искусствам рисунка. О живописи // Мастера искусства об искусстве. Т.2. – М.: Искусство, 1960. – С. 214-218.
28. Варга Б., Димень Ю., Лопарец Э. Язык, музыка, математика / Пер. с венг. Ю.А. Данилова. – М.: Мир, 1981. – 248 с.
29. Вертгеймер М. Открытие Галилея // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 351-355.
30. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г., Смышляев М.К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9-10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1981. – 383 с. (Б-ка учителя мат.).
31. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе: Сб. Статей / Сост. Е.Г. Глаголева, О.С. Ивашев-Мусатов. – М.: Просвещение, 1980. – 256 с.
32. Выготский Л.С. Мышление и речь // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 153-175.
33. Выготский Л.С. «Умственное развитие детей в процессе обучения». М.; Л.; 1935. С. 83.
34. Выготский Л.С. Орудие и знак в развитии ребенка // Собр. соч. т. 6-8. – М.: Педагогика, 1984.
34А. Выготский Л.С. История развития высших психических функций // Психологическая наука и образование. – 1996. – №2. – С. 5-8.
35. Гальперин П.Я. Формирование умственных действий // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 78-86.
36. Ганелин Д.Г. Использование элементов математической логики на уроках математики в 9 классе // Математика в школе. – 1973. – №1. – С. 55-56.
37. Гельфанд И.М. и др. Функции и их графики (основные приемы) / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль. – 5-е изд., стер. – М.: Наука, 1973. – 96 с. – (Б-ка физ.-мат. шк.).

38. Герасимова Т.П. Физическая география: Нач. курс: Учеб. для 6 кл. сред. шк. / Т.П. Герасимова, Г.Ю. Грюнберг, Н.П. Неклюкова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.: ил., карт.
39. Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1960. – 224 с.
40. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия / Пер. с нем. С.А. Каменецкого. – 3-е изд. – М.:Наука, 1081. – 44 с.
41. Гиппенрейтер Ю.Б. Предисловие // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ. – С. 3-10.
42. Гнеденко Б.В. О математических способностях и их развитии // Математика в школе. – 1982. – №1. – С. 31-34.
43. Гнеденко Б.В. О математическом творчестве // Математика в школе. – 1979. – №6. – С. 16-22.
44. Гольдфарб Я.Л. и др. Сборник задач и упражнений по химии: Уч. пособие для уч-ся 8-10 классов / Я.Л. Гольдфарб, Ю.В. Ходаков, Ю.Б. Додонов. 3-е изд. – М.: Просвещение, 1984. – 192 с.: ил.
45. Горнштейн П.И. и др. Решение конкурсных задач по математике из сборника под редакцией М.И. Сканави. Группа В. / П.И. Горнштейн, Н.Н. Поляк, В.К. Тулчинский. – Киев, 1992. – 246 с. – (РИА “Текст”, МП “Око”).
46. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом: Пособие для уч-ся 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1979.
47. Градштейн И.С. Прямая и обратная теоремы: Элементы алгебры логики. – М.: Наука, 1965. – 126 с.
48. Грановская Р.М. Элементы практической психологии. – 2-е изд., испр. и доп. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 565 с.
49. Грегори Р.Л. Глаз и мозг. Психология зрительного восприятия: Пер. с англ. / Предисл. и общ. ред. А.Р. Лурия и В.П. Зинченко. – М.: Прогресс. 1970. – 271 с.
50. Грегори Р.Л. Разумный глаз / Пер. с англ. А.И. Когана. – М.: Мир, 1972. – 209 с.
51. Губа С.Г. Стандартные задачи с нестандартными решениями // Математика в школе. – 1987. – №2. – С. 18-20.

52. Гурский И.П. Функции и построение графиков: Пособие для учителей. – 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1964. – 216 с.
53. Гурьянов Е.В. Психофизиологические основы навыков человека // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работа советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 247-248.
54. Гусев В.А. и др. Векторы в школьном курсе геометрии: Пособие для учителей / В.А. Гусев, Ю.Б. Колягин, Г.Л. Луканин. – М.: Просвещение, 1976.
55. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе. Диссертация на соиск. уч. степ. докт. пед. наук. – М.: 1990 – 364 с.
56. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. – М.: Педагогика, 1972.
57. Давыдов В.В. Принципы обучения в школе будущего // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 296-301.
58. Данилова Е.Ф. Как помочь ученику находить путь к решению геометрических задач. – 4-е изд., испр. и дополн. – М.: Учпедгиз., 1961. – 143 с.
59. Демидов В. Как мы видим то, что видим. – М.: Знание, 1979. – С. 2-8 – (Сер. “Наука и прогресс”).
60. Джеймс У. Мышление // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 11-20.
61. Доман Д., Доман Г. Как обучить ребенка математике / Пер. с англ. – СПб.: Дельта, 1996. – 320 с.
62. Журжина Ш.В., Костромина Н.В. Дидактический материал по русскому языку: 4 кл.: Пособие для учащихся четырёхлет. нач. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 176 с.: ил.
63. Зайцев Г.Ю. Непослушные задачи с устного экзамена по математике // Квант. – 1984. – №5. – С. 36-37.
64. Запорожец А.В. Особенности и развитие процесса восприятия // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 265-276.

65. Земляков А. Как выглядит парабола // Квант. – 1978. – №3. – С. 38-39.
66. Земляков А. Проверьте себя // Квант. – 1980. – №9. – С. 47-49.
67. Зив В.Г. и др. Задачи по геометрии для 7-11 классов / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. – М.: Просвещение, 1991. – (Биб-ка учителя математики).
68. Зинченко В.П. Продуктивное восприятие // Вопросы психологии. – 1971. – №6. – С. 27-42.
69. Зинченко В.П. Современные проблемы образования и воспитания // Вопр. философии. – 1973. – №11. – С. 42-46.
70. Знаменский П.А., Мошков С.С., Пиотровский М.Ю., Рымкевич П.А., Швайченко И.М. Сборник вопросов и задач по физике для VIII–X классов средней школы / Под ред. П.А. Знаменского. Изд. 12-е. – М.: Госучпедизд, 1960. – С. 192.
71. Зорин В.В., Фискович Т.Т. Пособие по математике для подготовительных отделений вузов. – М.: Высш. шк., 1980. – 287 с.: ил.
72. Зубелевич Г.И. Решение одной и той же задачи в разных классах // Математика в школе. – 1980. – №5. – С. 60-62.
73. Ивлев М. Векторы в геометрических задачах // Квант. – 1985. – №10. – С. 21-24.
74. Иден М. Генерирование и распознавание рукописного текста // Распознавание образов. Исследование живых и автоматических распознающих систем / Пер. с англ. канд. техн. наук Л.И. Титомира; Пред. к русск. изд. д-ра техн. наук И.Л. Пинскера. – М.: Мир, 1970. – С. 174-197.
75. Иден М. Другие задачи распознавания образов и некоторые обобщения // Распознавание образов. Исследование живых и автоматических распознающих систем / Пер. с англ. канд. тех. наук Л.И. Житомира; Пред. к русск. изд. д-ра техн. наук И.Л. Пинскера. – М.: Мир, 1970. – С. 246-281
76. Канин Е.С. Алгебраические упражнения и развитие логического мышления учащихся // Математика в школе. – 1972. – №4. – С. 43-46.
77. Каплан Б.С. и др. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики / Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр. Под ред. док. пед. наук, проф. А.А. Столяра. – Минск: Народная асвета, 1981, – 192 с.
78. Карасев П.А. Элементы наглядной геометрии в школе: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1955. – 207 с.

79. Карпунин В.А. Формальное и интуитивное в математическом познании. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 151 с.
80. Клопский В.М. и др. Геометрия: Учеб. пособие для 6-8 кл. сред. шк. / В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский. Под ред. З.А.Скопец. – М.: Просвещение, 1979.
81. Коган А.И. От переводчика // Грегори Р.Л. Разумный глаз / Пер. с англ. А.И. Когана. – М.: Мир, 1972. – С. 6.
82. Колерс П. Некоторые психологические аспекты распознавания образов // Распознавание образов. Исследование живых и автоматических распознающих систем / Пер. с англ. канд. техн. наук Л.И. Титомира. Пред. к русск. изд. д-ра техн. наук И.Л. Пинскера. – М.: Мир, 1970. – С. 16-87.
83. Колерс П., Иден М. Предисловие редакторов англ. изд. к сб. «Распознавание образов» // Распознавание образов. Исследование живых и автоматических распознающих систем / Пер. с англ. канд. техн. наук Л.И. Титомира. Пред. к русск. изд. д-ра техн. наук И.Л. Пинскера. – М.: Мир, 1970. – С. 7-15
84. Колмогоров и др. Геометрия 6-8: Учеб. пособие для 6-8 кл. сред. школы / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов; Под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1979.
85. Колягин М.Ю. Функции задач в обучении математике и развития мышления школьников // Сов. педагогика. – 1974. – №6. – С. 56-61.
86. Концепция общего образования: Проект // Учительская газета. – 1988. – 23 августа.
87. Кордемский Б. Семнадцать задач на смекалку // Квант. – 1981. – №7. – С. 44-45.
88. Коссов Б.Б. Проблемы психологии восприятия. – М.: Высш. шк., 1971.– 320 с.
89. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.: ил.
90. Крамор В.С., Михайлов П.А. Тригонометрические функции (Система упражнений для самостоятельного изучения): Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.: ил.
91. Креч Д. и др. Факторы, определяющие решение задач / Д. Креч, Р. Крачфилд, Н. Ливсон // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 289-397.

92. Криксунов Е.А. и др. Экология: 9 класс: Учеб. для обшеобразоват. учеб. заведений / Е.А. Криксунов, В.В. Пасечник, А.П. Сидорин. – М.: Дрофа, 1995. – 240 с.
93. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / Дис. на соиск. уч. ст. докт. пед. наук. – М.: 1990 – 364 с.
94. Крутецкий В.А. Основы педагогической психологии. – М.: Просвещение, 1972. – 200 с. – (Б-ка директора школы).
95. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной и ее изучении. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
96. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970. – 231 с.
97. Кучеров В.Е. Воспитательная роль средств наглядности в процессе обучения математике // Математика в школе. – 1980. – №1. – С. 18-21.
98. Ларичев П.А. Сборник задач по алгебре. Ч. 2: Учеб. пособие для 8-10 кл. сред. шк. – М.: Учпедгиз, 1961. – 224 с.
99. Левитин К.Е. Все, наверное, проще... – М.: Знание, 176 с. – (Сер. “Наука и прогресс”).
100. Леонтьев А.Н. Мышление // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 60-70.
101. Леонтьев А.Н. и др. Опыт экспериментального мышления / А.Н. Леонтьев, Я.А. Пономарев, Ю.Б. Гиппенрейтер // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 269-290.
102. Лернер И.Я. Состав содержания образования и пути его воплощение в учебнике // Проблемы школьного учебника. – Вып. 6: Вопросы теории учебника. – М.: Просвещение, 1978. – С. 46-64.
103. Линдсней П., Норман Л. Анализ процесса решения задач // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 319-327.
104. Лукашик В.И. Сборник вопросов и задач по физике: Учеб. пособие для уч-ся 6-7 кл. сред. шк. – 5-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1988. – 191 с.

105. Лурия А.Р. Ум мнемониста // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 11.
106. Маликов Т.С. Логический и интуитивный компоненты в определении математических понятий // Математика в школе. – 1987. – №1. – С. 44-48.
107. Математика: Задание для 10-х кл. / ЗФТШ МФТИ. – М.: 1985. – 20 с.
108. Математика: Учеб. для 4 кл. четырехлет. нач. шк. / М.И. Моро, М.А. Бантова, Г.В. Белютюкова и др. Под ред. Ю.М. Колягина. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 224 с.
109. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе: Книга для учителей. – М.: Просвещение, 1977. – 240 с.
110. Минасян Л.А. О формировании некоторых пространственных представлений учащихся при изучении стереометрии // Преподавание алгебры и геометрии в школе (из опыта работы): Пособие для учителей / Сост. О.А. Боковцев. – М.: Просвещение, 1982. – 223 с.
111. Минский М. Структура для представления знания. / В кн. Психология машинного зрения. – М.: Мир, 1978 г. – С. 249-339.
112. Михайлов Г. Наглядность в преподавании стереометрии // Математика в школе. – 1941. – №1. – С. 37-40.
113. Монахов В.М. Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. – Волгоград: Перемена, 1995. –152 с.
114. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. – М.: Высшая школа, 1979. – 399 с.
115. Муравин К.С., Муравин Г.К. Алгебра: Проб. учебник для 7-9 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1994. – 512 с.: ил.
116. Нестеренко Ю.В. и др. Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов. – М.: Наука, 1983. – 228 с.
117. Нивергельт Ю. и др. Машинный подход к решению математических задач / Ю. Нивергельт, Дж. Феррар, Э. Рейнгольт // Совр. математика: Вводные курсы / Пер. с англ. А.Л. Александрова и Н.Б. Лебедевой; Под. ред. В.Ш. Кауфмана. – М.: Мир, 1977. – 35 с.
118. Никитин А.И., Шарова И.Х. «Биология. Животные». Учебник для 7-8 класса общеобразоват. учреждении. – 3-е изд. – М.: «Просвещение». – 1995.

119. Никитин Н.Н., Маслова Г.Г. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов восьмилетней школы. – 12-е изд., доп. – М.: Просвещение, 1968. – 160 с.
120. Никольская И.Л. О некоторых логических трудностях курса и возможностях их преодоления // Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средн. шк.: Сб. статей / Сост. Е.Г. Глаголева, О.С. Ивашев-Мусатов. – М.: Просвещение, 1980. – 256 с.
121. Никольский С.М. Элементы математического анализа. – М.: Наука, 1981. – 160 с.
122. Ноэль Бернар. MAGRITTE / Перевод М.А. Трудолюбова. – М.-СПб.: СЛОВО-ART, 1995. – 96 с. – (Сер. КАРТИННАЯ ГАЛЕРЕЯ).
123. Нурк Э.Р., Тельгмаа А.Э. Математика: Учеб. для 6 кл. сред. шк. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 224 с.: ил.
124. Нуртдинов Л.Н. Знаковые модели научных понятий как средство активизации познавательной деятельности учащихся / Автореф. дис... кан. пед. наук. – Казань, 1980. – 19 с.
125. Ньеэлл А., Шоу Дж. С., Саймон Г.А. Моделирование мышления человека с помощью электронно-вычислительной машины // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 305-313.
126. Ожегов С.И. Словарь русского языка / Под общ. ред. акад. С.П. Обнорского. – 3-е изд. – М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1953. – 848 с.
127. Пейперт С. Переворот в сознании: Дети, Компьютеры и плодотворные идеи / Пер. с англ. – М. Педагогика, 1989.
128. Перевалов Г. Что значит “знать”? // Квант. – 1980. – №6. – С. 33-35.
129. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979. – 332 с.
130. Пинскер И. Предисловие к русскому изданию книги // Распознавание образов. Исследование живых и автоматических распознающих систем / Пер. с англ. канд. техн. наук Л.И. Титомира; Пред. к русск. изд. д-ра техн. наук И.Л. Пинскера. – М.: Мир, 1970. – С. 246-281.
131. Платонов К.К. Занимательная психология / Серия “Эврика” – М.: Молодая Гвардия, 1986. – 224 с.
132. Погорелов А.В. Геометрия: Пробный учебник для 6-10 кл. сред. шк. Материалы для ознакомления. – М.: Просвещение, 1981. – 272 с. – (Б-ка учителя мат.).

133. Пойя Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с англ. В.Г. Звонаревой, Д.Н. Белла; Под. ред. Ю.М. Гайдука. – 2-е изд. – М.: ГИЗ МП РСФСР, 1961. – 208 с.
134. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: ИИЛ, 1957. – 463 с.
135. Пойя Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Пер. с англ. В.С. Бермана. Под. ред. И.М. Яглома. – 2-е изд., стер. – М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. – 448 с.
136. Положевец П. Почти дословный пересказ Доклада Мирового Банка // Учительская газета, 7 февраля 1995, №5.
137. Пономарев Я.А. Центральное звено психологического механизма творчества и развития мышления // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 215-219.
138. Психология познавательной деятельности: Сб. научн. тр. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.А. Герцена / Редкол.: д-р психол. наук, проф. П.А. Сорокун (отв. ред.) и др. – Л.: ЛГПИ, 1985. – 84 с.
139. Психофизиологические закономерности восприятия и памяти: Сб. ст. АН СССР. Ин-т психологии / Отв. ред. А.Н. Лебедев. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
140. Пузанов В.А. Сколько надо наглядности на уроках // Сред. спец. образование. – 1977. – №5. – С. 18-19.
141. Пушкин В.Н. Эвристика – наука о творческом мышлении. – М.: Изд-во Политздат, 1967. – 272 с. – (Сер. “Над чем работают, о чем спорят философы”).
142. Рамзаева Т.Г. Русский язык: Учеб. для 4 кл. четырёхлет. нач. шк. – 5-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1993. – 256 с.: ил.
143. Развитие логического мышления учащихся в процессе преподавания математики в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1958. – 131 с.
144. Рейн Р.К. Тесты различного назначения и формата // Америка. – 1977. – сентябрь. – С. 2-6.
145. Резник Н.А. Векторы на плоскости и в пространстве. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для учащихся морского лицея, средних школ, курсантов (студентов) младших курсов: в 2 ч. – Мурманск, 1993. – Ч. I. – 166 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).

146. Резник Н.А. Векторы на плоскости и в пространстве. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для учащихся морского лицея, средних школ, курсантов (студентов) младших курсов: в 2 ч. – Мурманск, 1993. – Ч. II – 159 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).
147. Резник Н.А. Визуальная алгебра. Многочлены. Наглядные материалы для учителя и ученика. – СПб.: “Свет”, 1997. – 112 с.
148. Резник Н.А. Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея. Экспериментальные материалы для учителей и родителей. В 2 частях. Ч. I. – Мурманск, 1994. – 146 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).
149. Резник Н.А. Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея. Экспериментальные материалы для учителей и родителей. В 2 частях. Ч. II. – Мурманск, 1994. – 180 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).
150. Резник Н.А. Визуальные тетради. Углы. Визуальные материалы для учителя и ученика – Мурманск, 1994. – 45 с. – (Ин-т продуктивного обучения РАО, Мурманский гос. техн. ун-т)
151. Резник Н.А. Визуальные уроки. Книга для учителя. – СПб.: “Свет”, 1996. – 80 с.
152. Резник Н.А. Использование и развитие визуального мышления на уроке математики / Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. пед. наук. – Л., 1990. – С. 13.
153. Резник Н.А. Тригонометрия. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для учащихся 8-9 кл. морского лицея и ср. школ. – В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч. I – 116 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).
154. Резник Н.А. Тригонометрия. Экспериментальные материалы для учителя и ученика: Учеб. пособие для учащихся 8-9 кл. морского лицея и ср. школ. – В 2 ч. – Мурманск, 1994. – Ч. II – 122 с. – (Ком. Рос. Федерации по рыболовству. МГАРФ).
155. Репьев В. Наглядность при обучении математике // Математика в школе. – 1941. – №1. – С. 27-36.
156. Рогановский Н.М., Столяр А.А. Векторное построение геометрии. – Минск: Нар. асвета, 1974.
157. Рудзитис Г.Е., Фельдман Ф.Г. Химия: Неорган. химия: Учеб. для 8 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 159 с.: ил.

158. Рудзитис Г.Е., Фельдман Н.Г. Химия: Органическая химия: Учеб. для 10 кл. сред. Шк. – М.: Просвещение, 1991. – 60 с.
159. Русский язык 7. Учебник для 7 класса общеобразоват. учеб. заведений. / Баранов М.Т., Григорян Л.Т., Ладыженская Т.А. и др. – 16-е изд., доработ. – М.: Просвещение, 1993. – 192 с.
160. Русский язык: Практика: Сборник задач и упражнений: Учеб. пособие для 6-7 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Г.К. Лидман-Орлова, С.Н. Пименова; Науч. ред. В.В. Бабайцева. – М.: Просвещение, 1993. – 256 с.
161. Рубинштейн С.Я. Обучение и развитие // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работа советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 186-194.
162. Рубинштейн С.Я. О природе мышления и его составе // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под. ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Пе-
тухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 71-77.
163. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Ч.1. Планиметрия для 6-9 кл. сред. шк. – 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1961. – 78 с.
164. Рыжик В. Как быть // Квант. – 1979. – №2. – С. 22.
165. Рыжик В. Задача как задача // Квант. – 1981. – №4.– С. 38-39.
166. Рянжин С.В. Экологический букварь. Для детей и взрослых. СПб.: Печатный Двор, 1994. – 110 с.
167. Савин А.П. Рисунок помогает рассуждать // Квант. – 1966. – №4. – С. 28-30.
168. Самарин Ю.А. Очерки психологии ума. Особенности умственной деятельности школьников. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 504 с.
169. Самойлов В.С., Устинов А.А. Некоторые эмпирические формулы на уроках математики // Математика в школе. – 1973. – №1. – С. 52-54.
170. Сборник задач по геометрии для 6-8 кл. / В.А. Гусев, Г.Г. Маслова, З.А. Скопец, Р.С. Черкасов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1979. – 224 с. – (Б-ка учителя мат.).
171. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ / Под. ред. М.И. Сканави. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1978. – 519 с.
172. Сенеко Ю.В. Формирование научного стиля мышления учащихся. – М.: Знание, 1984. – 80 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Педагогика и психол.”; №4).

173. Серве В. Преподавание математики в средних школах // Математическое просвещение. Математика, ее преподавание, приложения и история / Под ред. Я.С. Дубнова, А.А. Ляпунова, А.И. Маркушевича. – М., 1957. – Вып. 1 – С. 22-31.
174. Слепкань З.И. Психолого-педагогические обучения математике. – Киев: Рад. шк., 1983. – 192 с.
175. Словарь иностранных слов / Под. ред. И.В. Лехина, Ф.Н. Петрова. – 5-е изд., стер. – М.: Гос. Изд-во иностр. и нац. словарей, 1955. – 856 с.
176. Смышляев В.К. Решение некоторых нестандартных задач // Математика в школе. – 1980. – №5. – С. 59-60.
177. Столяр А.А. Педагогика математики: Курс лекций. – 2-е изд. перераб. и доп. – Минск: Вышейш. шк., 1974. – 383 с.
178. Стратилатов П.В. Сборник задач по тригонометрии для 9 и 10 классов средней школы. – М.: Учпедгиз, 1961. – 112 с.
179. Стюарт Я. Концепции современной математики: Пер. с англ. – Минск: Вышейш. шк., 1980. – 384 с.
180. Талызина Н.Ф. Место и функции учебника в учебном процессе // Проблемы школьного учебника: Вопр. теории учеб. – М.: Просвещение, 1978. – Вып. 6. – С. 18-33.
181. Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся. – М.: Знание, 1983. – 96 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Пед. и психол.”; №3).
182. Теплов Б.М. Способности и одаренность // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 31-35.
183. Тихомиров А.К. Информационные и психологические теории мышления // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В.В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 11.
184. Тихомиров А.К. О видах познавательной деятельности и процессе познания // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов периода 1946-1980 гг. / Под ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 263-269.
185. Фейнберг И.М. Видеть – предвидеть – действовать: Психологические этюды. – М.: Знание, 1986. – 158 с.

186. Фейнман Р. Характер физических законов: Пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Библ-чка “Квант”. Вып. 62).
187. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. – М.: Знание, 1984. – 80 с. – (Новое в жизни, науке, Технике. Сер. “Педагогика и психология”; №4).
188. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
189. Фройденталь Э. Математика как педагогическая задача. Ч.1: Пособие для учителей / Под. ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1982. – 208 с.
190. Фройденталь Э. Математика как педагогическая задача. Ч. 2: Пособие для учителей / Под. ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1982. – 192 с.
191. Фуше А. Педагогика математики. – М.: Просвещение, 1969. – 128 с.
192. Хойл Ф. Черное облако: Роман. Пер. с англ. Д.А. Франк-Каменецкого // Альманах научной фантастики. Вып. 4. / Ред. пер. Н. Явно. – М., 1966.
193. Цукарь А.Я. Использование аналогий в преподавании математики // Математика в школе. – 1981. – №4. – С. 22-24.
194. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. – 3-е изд., испр. – Минск: Вышейш. шк., 1978. – 272 с: ил.
195. Шапиро С.И. От алгоритмов – к суждениям: Эксперименты по обучению элементам математического мышления. – М.: Сов. радио, 1973. – 288 с.
196. Шапоринский С.А. Обучение и научное познание. М.: Педагогика, 1981. – 208 с.
197. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в ВУЗы: Учеб. пособие. – М.: Дрофа, 1995. – 416 с.: ил.
198. Шехтер М.С. Зрительное опознание. Закономерности и механизмы. – М.: Педагогика, 1981. – 264 с.
199. Шехтер М.С. Психологические проблемы узнавания. – М.: Просвещение, 1967. – 220 с.
200. Штернберг Л.Ф. Откуда взять уравнение // Квант. – 1985. №4. – С 22-27.
201. Щербань Ю.Ю. Развитие познавательной активности учащихся в процессе обучения // Ср. спец. образование. – 1977. – №10. – С. 47-49.
202. Щербань Ю.Ю. Проблемное обучение и управление познавательной деятельностью учащихся // Ср. спец. образование. – 1978. – №1. – С. 45-49.
203. Эльконин Д.Б. Развитие устной и письменной речи учащихся // Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии. Работы советских психологов

периода 1946-1980 гг. / Под. ред. И.И. Ильясова, В.А. Ляудис. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 215-219.

204. Эрдниев П.М. Преподавание математики в школе: Из опыта обучения методом укрупненных упражнений. – М.: Просвещение, 1978. – 303 с.

205. Якиманская И.С. Мыслительная деятельность учащихся при решении задач // Ср. спец. образование. – 1975, №10. – С. 45-49.

206. Якиманская И.С. Организация восприятия учебного материала // Сред. спец. образование. – 1976. – №3. – С. 50-53.

207. Яновская С.А. Предисловие редактора перевода // Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. И.А. Вайнштейна. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1975. – С. 9-13.

208. Hardi G.H. Mathematician's Apologi. Gambridje: Univesity Press, 1967 – С. 85 // Арнхейм Р. Новые очерки по психологии искусства: Пер. с англ. – М.: Прометей, 1994. – С. 35.

209. Inge und Joachim Klebe. Durch die Augen in den Sinn: VEB Deuscher Verlag der Wissenschaften. – Berlin, 1988 – 116 с.