М. Громов

Знак и геометрический смысл кривизны

R&C Dynamics

М. Громов

Знак и геометрический смысл кривизны

«Lezione Leonardesca»

Лекции, прочитанные в Милане
в июне 1990 года

Перевод с английского
В. А. Зайцева

Редакция журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»

Издательский дом
«Удмуртский университет»

1999

УДК 513

Громов М.
Знак и геометрический смысл кривизны. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 128 с.

Небольшая книга известного французского математика Михаила Громова представляет собой расширенный вариант лекций «Lezione Leonardesca», прочитанных автором в Милане в июне 1990 г. Здесь изучены основы римановой геометрии, теории Морса, элементы дифференциальной топологии. Материал изложен на очень доступном уровне. Книга может быть рекомендована при введении в более специальные разделы геометрии и топологии.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и полезна для научных сотрудников и преподавателей.

ISBN 5-93972-020-X

Содержание

Введение 5
§ 0. Вторая основная форма и выпуклость в евклидовом пространстве 5
§ $\frac{1}{2}$. Обобщенная выпуклость 13
§ 1. Напоминание о длине, расстоянии и римановой метрике 24
§ 2. Эквидистантная деформация и секционная кривизна $K(V)$ 32
§ $2\frac{1}{2}$. Влияние кривизны $K(V)$ на малые шары в V 41
§ 3. Многообразия с положительной секционной кривизной . 44
§ $3\frac{1}{2}$. Функция расстояния и теорема Александрова–Топоногова 53
§ $3\frac{2}{3}$. Сингулярные метрические пространства с $K \geqslant 0$ 56
§ $3\frac{3}{4}$. Теорема о сфере и эквидистантная деформация погруженных гиперповерхностей 58
§ 4. Отрицательная секционная кривизна 64
§ 5. Кривизна Риччи 69
§ 6. Положительная скалярная кривизна 81
§ $6\frac{1}{2}$. Спиноры и оператор Дирака 90
§ 7. Оператор кривизны и связанные с ним инварианты . . . 95
§ $7\frac{1}{2}$. Гармонические отображения и комплексифицированная кривизна $K_{\mathbb{C}}$ 100
§ $7\frac{2}{3}$. Гармонические отображения в многообразия с $K_{\mathbb{C}} \leqslant 0$ . . 111
§ $7\frac{3}{4}$. Классы метрик, заданные выпуклыми конусами 115
Литература 117

Введение

Тензор кривизны риманова многообразия — это маленькое чудовище (поли)линейной алгебры, полный геометрический смысл которого остается невыясненным. Тем не менее, можно определить, используя кривизну, несколько важных классов многообразий, которые затем могут быть исследованы в духе старомодной *синтетической геометрии* без привлечения аппарата бесконечно малых, к которым относятся тензоры кривизны. Подобная взаимосвязь между бесконечно малыми величинами и наглядными характеристиками геометрических объектов встречается повсюду в геометрии и анализе. Простейший пример — эквивалентность двух определений *монотонной* функции

$$\frac{df}{dt} \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(t_1) \leqslant f(t_2) \text{ при } t_1 \leqslant t_2.$$

Далее, бесконечно малые второго порядка приводят к геометрически более интересному явлению *выпуклости*.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \geqslant 0 \Longleftrightarrow f\left(\frac{1}{2}(t_1+t_2)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t_1)+f(t_2)\right).$$

Наш следующий пример лежит на самой границе римановой геометрии, так что ознакомимся с ним более подробно.

§ 0. Вторая основная форма и выпуклость в евклидовом пространстве

Основной инфинитезимальный инвариант гладкой гиперповерхности $W \subset \mathbb{R}^n$ («гипер» означает, что $\operatorname{codim} W \overset{\text{def}}{=} n - \dim W = 1$) — это *вторая основная форма* $\Pi = \Pi^W$, которая является полем *квадратичных форм* Π_w на касательных пространствах $T_w(W) \subset T_w(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Она определяется следующим образом.

Аффинное определение П. Сдвинем w в начало координат в $\mathbb{R}^n$ параллельным переносом W в $\mathbb{R}^n$ и составим результирующее вложение $W \subset \mathbb{R}^n$ и линейное фактор-отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/T_w(W) \overset{\text{def}}{=} N_w$. Отождествим (одномерное линейное) пространство N_w с $\mathbb{R}$ и, таким образом, получим функцию, скажем, $p = p_w \colon W \to \mathbb{R}$, дифференциал Dp которой обращается в ноль в w (по определению $T_w(W)$). Затем определим *второй дифференциал* D^2p, т. е. квадратичную форму на $T_w(W)$, так что для каждой пары векторных полей ∂_1 и ∂_2 на W вторая производная Ли функции p в точке w удовлетворяет равенству

$$\partial_1(\partial_2 p) = (D^2p)(\partial_1(w), \partial_2(w)).$$

(Существование такого D^2p следует из $Dp = 0$ простым вычислением). Эта конструкция применяется для всех $w \in W$ и дает нам наше П при $\Pi_w = D^2p$, рассматриваемом как квадратичная форма на $T(W)$ со значениями в нормальном расслоении $N = T_W(\mathbb{R}^n)/T(W)$ над W, где $T_W(\mathbb{R}^n)$ означает сужение $T(\mathbb{R}^n)|W$.

Здесь представлена известная картина для случая $n = 1$.

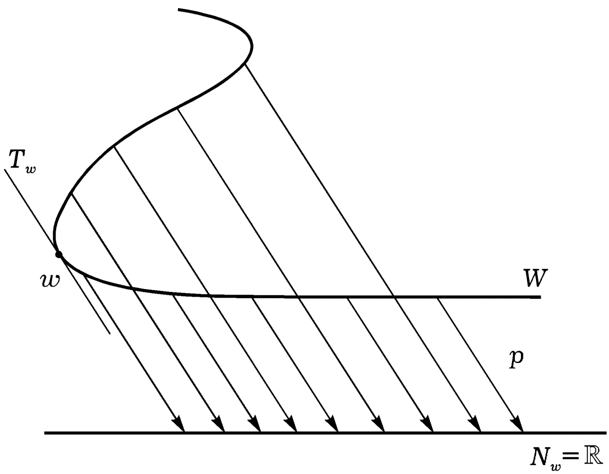

Рис. 1

Геометрически это означает, что Π_w измеряет отклонение гиперповерхности W второго порядка малости от аффинного подпространства $T_w(W) \subset \mathbb{R}^n$. В частности, если W связно, то, как известно, обращение П в ноль на W эквивалентно тому, что W лежит в гиперплоскости.

Существует более интересная связь между П и (аффинной) геометрией на W.

Форма П *положительно полуопределена тогда и только тогда, когда гиперповерхность* W *является выпуклой.*

Чтобы установить это, мы должны выбрать *коориентацию* W, т. е. способ различать две компоненты, на которые W локально разделяет $\mathbb{R}^n$. Для этого обычно берется трансверсальное (например, нормальное) векторное поле v вдоль W. Такое выбранное поле называется *направленным внутрь*, и часть $\mathbb{R}^n$, внутрь которой направлено v, называется *внутренностью* W. Заметим, что такое поле определяет также ориентацию нормальных слоев N_w, и, таким образом, можно говорить о знаке форм Π_w со значениями в N_w. Теперь мы введем следующее

Аффинное определение выпуклости. Гиперповерхность W называется выпуклой в точке w, если она содержится во внутреннем полупространстве $T_w^+ \subset \mathbb{R}^n$, ограниченном гиперплоскостью $T_w(W) \subset \mathbb{R}^n$.

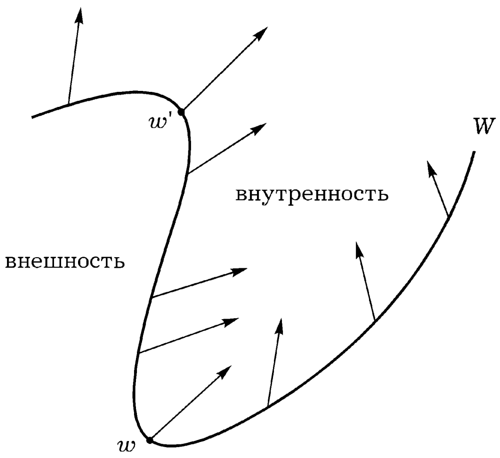

Рис. 2

Например, кривая W на рис. 2 выпукла в точке w, но не выпукла в w'. Однако она станет локально выпуклой в точке w', если мы изменим коориентацию, поменяв знак v.

В терминах проекции $p\colon W \to N_w = \mathbb{R}$ выпуклость утверждает, что $p \geqslant 0$; это хорошо согласуется с положительностью $\Pi_w = D^2 p$. Действительно, положительная определенность Π_w, очевидно, влечет *локальную выпуклость* W (т. е. выпуклость в малой окрестности $U \subset W$ точки w). Сложнее получить из положительной полуопределенности Π локальную выпуклость W *в окрестности* w (а не только в w). Доказательство глобальной выпуклости W также не является тривиальным. Напомним, что глобальная выпуклость (т. е. выпуклость для всех $w \in W$) следует из $\Pi \geqslant 0$, при условии что W — это *замкнутая* связная гиперповерхность, где «замкнутая» означает компактная гиперповерхность без края.

Аффинное определение Π, приведенное выше, является достаточно общим. А именно, оно применимо к любым размерностям и коразмерностям (но чтобы говорить о выпуклости, необходимо, чтобы коразмерность W равнялась единице), оно имеет смысл для произвольных гладких отображений $f\colon W \to \mathbb{R}^n$ (не только для вложений), и оно обобщается для неевклидовых объемлющих пространств с *аффинной связностью*. Однако аффинный характер этого определения делает его плохо приспособленным к потребностям римановой геометрии, где главным объектом исследования является *функция расстояния*, соответствующая римановой структуре. В связи с этим мы вернемся к нашему второму определению Π, которое основано на следующем важном понятии.

Эквидистантная деформация. Пусть W — коориентированная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ снабженную знаком функцию расстояния до W. То есть $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, W)$ для внешних точек x и $\delta(x) = -\operatorname{dist}(x, W)$ для внутренних. Заметим, что вообще различие между внутренними и внешними точками имеет смысл только локально вблизи W, и поэтому $\delta(x)$ определена лишь в некоторой малой окрестности W. Напомним также, что

$$\operatorname{dist}(x, W) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{w \in W} \operatorname{dist}(x, w),$$

для евклидова расстояния

$$\operatorname{dist}(x, w) = \|x - w\| = \langle x - w,\, x - w\rangle^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь уровни δ, т. е.

$$W_\varepsilon = \delta^{-1}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \delta(x) = \varepsilon\},$$

и назовем их *ε-эквидистантными гиперповерхностями* или *ε-эквидистантными деформациями* $W = W_0$.

Легко показать, что для малых ε многообразия W_ε являются гладкими, если многообразие W_0 является гладким, но W_ε могут быть сингулярными при больших ε. Действительно, мы скоро увидим, что *внутренняя* (т. е. при $\varepsilon < 0$) эквидистантная деформация необходимо создает особенности для каждой *выпуклой* начальной гиперповерхности W_0. (См. рис. 3). Например, такая деформация круговой сферы $W_0 = S^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r переносит W_0 в центр сферы при $\varepsilon = -r$. (Здесь $W_\varepsilon = S^{n-1}(r+\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \geqslant -r$.)

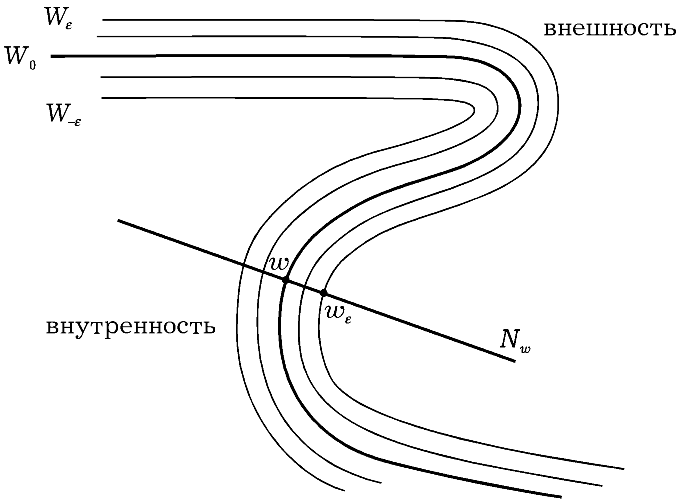

Рис. 3

Далее мы рассмотрим прямые N_w в $\mathbb{R}^n$, нормальные к W в точках $w \in W$. Нетрудно показать, что любая такая прямая пересекает каждое W_ε при малых ε в единственной точке, которую мы обозначим w_ε или $(w, \varepsilon) \in W_\varepsilon$, и полученное отображение $d_\varepsilon \colon W \to W_\varepsilon$, переводящее точку w в w_ε, является гладким. (На самом деле, как следует из элементарной дифференциальной геометрии, d_ε является диффеоморфизмом, кроме того, N_w — это *нормаль* к W_ε в точке w_ε.) Теперь мы собираемся определить вторую квадратичную форму как скорость изменения длины кривых $C \subset W_0$ по мере того, как W_0 приближается к близкой гиперповерхности W_ε. Напомним, что длина C определяется при помощи (интегрирования) длины касательных векторов к C, которая, в свою очередь, задана *первой фундаментальной формой* g на W, являющейся просто сужением евклидова скалярного произведения (которое есть квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$) на касательные пространства $T_w(W) \subset T_w(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $w \in W$. Другими словами, g — это *риманова метрика* на W, *индуцированная* стандартной римановой метрикой в $\mathbb{R}^{n+1}$. Геометрически «индуцированная» означает соотношение

$$g\text{-длина } (C) = \text{ евклидова длина } (C)$$

для всех гладких кривых C из W.

Обозначим через g_ε первую фундаментальную форму на W_ε, поднимем ее на W при помощи дифференциала отображения d_ε и обозначим через g^*_ε полученную форму на $W = W_0$. Затем мы положим

$$\Pi^W = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon} g^*_{\varepsilon=0}. \tag{1}$$

Пример. Пусть W — единичная сфера $S^{n-1}(1) \subset \mathbb{R}^n$ (например, окружность на плоскости). Тогда g^*_ε получается из концентрической сферы $W_\varepsilon = S^{n-1}(1+\varepsilon)$, и очевидно, что $g^*_\varepsilon = (1+\varepsilon)^2 g_0$. Таким образом, $\Pi^W = g_0$ для $W = S^{n-1}(1)$, как всем известно еще с детского сада.

Несложно показать (при помощи элементарных инфинитезимальных вычислений), что приведенное выше «эквидистантное» определение Π эквивалентно аффинному определению, данному ранее. На самом деле эквидистантное определение распространяется на все коразмерности и по-прежнему остается эквивалентным аффинному определению (см., например, приложение 1 в [30]).

Эквидистантная деформация выпуклой гиперповерхности. Если гиперповерхность $W = W_0$ выпукла, то W_ε выпукла для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$, даже когда W_ε становится сингулярной. В этом случае требуется определение выпуклости, применимое к негладким гиперповерхностям. Во-первых, мы укажем инфинитезимальное доказательство выпуклости W_ε, основанное на классической *формуле трубки*, которая показывает нам, как изменяется Π^{W_ε} по переменной ε. Чтобы записать эту формулу, мы перейдем от формы Π к соответствующему оператору A, определенному на $T(W)$ обычным соотношением

$$\Pi(\tau_1, \tau_2) = g(A\tau_1, \tau_2) = \langle A\tau_1, \tau_2\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Заметим, что A — симметрический оператор (на каждом касательном пространстве $T_w(W)$), и его иногда называют *оператором формы.* Тогда формула трубки для операторов A^*_ε на $T(W)$, которые являются Dd_ε-прообразами операторов A_ε на W_ε, соответствующих Π^{W_ε}, имеет вид

$$\frac{dA^*_\varepsilon}{d\varepsilon} = -(A^*_\varepsilon)^2 \tag{2}$$

для обычного квадрата линейного оператора A^*_ε. Эта формула на самом деле говорит, что дифференциал Dd_ε отображения d_ε переводит главные оси формы Π^W (т. е. собственные векторы оператора A) в главные оси формы Π^{W_ε}, и *главные кривизны* $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$, … , $\lambda_{n-1}(\varepsilon)$ гиперповерхности W_ε (т. е. собственные значения оператора A_ε на W_ε, соответствующего Π^{W_ε}) удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i^{-1}(\varepsilon) = \lambda_i^{-1}(0) + \varepsilon. \tag{3}$$

Это совпадает с тем, что мы знаем для сферы $W = S^{n-1}(r)$, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = r^{-1}$ и $W_\varepsilon = S^{n-1}(r+\varepsilon)$. При $\lambda_i(\varepsilon) = (c_i+\varepsilon)^{-1}$ формула (3) также совпадает с (2) для $c_i = \lambda_i^{-1}(0)$, и в таком случае производная равна $-(c_i+\varepsilon)^{-2}$. (Доказательство формулы трубки, приспособленное к настоящим обозначениям, см. в приложении 1 [30]). Теперь ясно, что если $\Pi^{W_0} \geqslant 0$, то Π^{W_ε} остается положительно полуопределенной для всех $\varepsilon \geqslant 0$, а также для отрицательных $\varepsilon \geqslant -\max\limits_{i=1,\ldots,n-1} \lambda_i^{-1}(0)$. Действительно, всякий раз, когда ε становится равным $-\lambda_i^{-1}(0)$ в точке w, отображение $d_\varepsilon\colon W \to \mathbb{R}^n$ (которое сдвигает w в ε-конец отрезка $[0,\varepsilon]$ нормали к W в w) *перестает быть регулярным в точке* w в том смысле, что дифференциал этого отображения (которое гладко для всех ε) становится *неинъективным* на $T_w(W)$, и образ $d_\varepsilon(W)$ (который не совпадает с W_ε для больших ε, где нет регулярности) может получить особенность в точке $d_\varepsilon(w) \in \mathbb{R}^n$.

Теперь посмотрим на W_ε с глобальной точки зрения, когда $W = W_0$ — это замкнутая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Выше было показано, что W_ε является гладкой и выпуклой для всех $\varepsilon \geqslant 0$, и индуцированная метрика на W_ε монотонно возрастает по ε (где две римановы метрики можно сравнить, перенеся их на гиперповерхность W_0 при помощи диффеоморфизма $d_\varepsilon\colon W \to W_\varepsilon$). Из выпуклости (определенной инфинитезимально неравенством $\Pi^W \geqslant 0$) вытекает следующий глобальный результат.

Для каждой внешней точки $x \in \mathbb{R}^n$ (*т. е. находящейся вне компактной области, ограниченной гиперповерхностью* W) *существует единственная точка* $w = p(x) \in W$ *такая, что отрезок* $[x, w] \subset \mathbb{R}^n$ *является нормалью к* W *в точке* w. *Кроме того, полученное отображение* $p\colon \operatorname{Exterior}(W) \to W$ *уменьшает расстояние.*

Мы увидим позднее (в § 2), что это свойство является характеристическим для объемлющих многообразий V *неположительной секционной кривизны.*

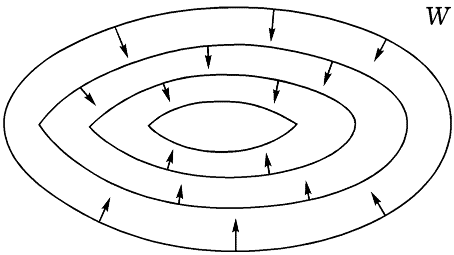

Рис. 4

Теперь рассмотрим внутреннюю деформацию W_ε, где $\varepsilon < 0$. Как уже было упомянуто ранее, такая W_ε неизбежно становится сингулярной в некоторый момент $\varepsilon < 0$. Например, если $W = S^{n-1}(r)$, то (единственный) сингулярный момент есть $\varepsilon = -r$, а затем W_ε становится пустым (хотя нормальное отображение d_ε переводит W_ε в концентрическую сферу $S^{n-1}(r+\varepsilon)$ при $\varepsilon < -r$). Но для некруговых W сингулярная область занимает целый интервал по ε, прежде чем W_ε исчезнут, см. рис. 4. Наличие особенностей делает сложным доказательство выпуклости W_ε посредством бесконечно малых, но геометрически довольно очевидно, что внутренность $\operatorname{Int} W_\varepsilon$ есть выпуклое множество в обычном смысле. А именно, если x_1 и x_2 — две точки из $\operatorname{Int} W_\varepsilon$, то отрезок $[x_1, x_2]$ также лежит в $\operatorname{Int} W_\varepsilon$. Действительно, $\operatorname{Int} W_\varepsilon$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ext} W) \geqslant \varepsilon$, и, таким образом, включение $[x_1, x_2] \subset \operatorname{Int} W_\varepsilon$ эквивалентно $U_\varepsilon([x_1, x_2]) \subset \operatorname{Int} W_\varepsilon$, где U_ε означает ε-окрестность, т. е. множество точек с расстоянием до отрезка $[x_1, x_2]$, не превосходящим ε. Далее, это $U_\varepsilon([x_1, x_2])$, очевидно, совпадает с ***выпуклой оболочкой*** объединения ε-шаров $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, которая должна лежать в $\operatorname{Int} W_\varepsilon$, так как эта внутренность *предполагается* выпуклой в рамках нашего настоящего обсуждения выпуклости.

Если мы все же настаиваем на доказательстве посредством бесконечно малых величин, то мы можем определить сингулярные выпуклые гиперповерхности W как соответствующие пределы таких W', внутренности которых являются конечными пересечениями областей, ограниченных гладкими выпуклыми гиперповерхностями. Тогда мы можем применить формулу трубки к гладким выпуклым кускам гиперповерхностей W' (которые можно выбрать с ограниченными сверху главными кривизнами, чтобы избежать преждевременных особенностей) и доказать выпуклость W_ε с помощью простой аппроксимации, по мере того как W' сходится к W. Преимущество такого подхода состоит в его применимости к неевклидовым объемлющим многообразиям $V \supset W$. На самом деле выпуклость *внутренних* эквидистантных многообразий W_ε (т.е. для $\varepsilon \leqslant 0$) является характеристикой многообразий V *неотрицательной секционной кривизны* (см. § 3).

Сделаем выводы из всего вышесказанного. Вторая основная форма Π — это легко вычислимый тензорный объект, имеющий различные интерпретации на инфинитезимальном уровне. Кроме того, класс *выпуклых* гиперповерхностей, заданный (инфинитезимальным) условием $\Pi \geqslant 0$, имеет глобальную геометрическую интерпретацию и может быть изучен посредством синтетической геометрии. На самом деле геометрический подход естественно приводит к *сингулярным* выпуклым гиперповерхностям, но их глобальная геометрия не таит каких-либо неожиданностей, поскольку они могут быть аппроксимированы гладкими выпуклыми гиперповерхностями.

$\S\,\frac{1}{2}$. Обобщенная выпуклость

Рассуждения предыдущего параграфа приводят нас к следующему вопросу.

Какие еще геометрически значимые классы гиперповерхностей (и подмногообразий большей коразмерности) можно определить при помощи других свойств Π?

Одно из интересных понятий, обобщающих выпуклость, — это *положительная средняя кривизна*

$$\operatorname{MeanCurv} W \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Trace} \Pi^W = \sum \lambda_i \geqslant 0,$$

где λ_i обозначают главные кривизны W. В терминах W_ε это эквивалентно ***монотонности элемента объема*** W_ε относительно индуцированной метрики. Геометрически эта монотонность означает, что $(n-1)$-мерный объем области $U \subset W = W_0$ возрастает по мере приближения к W_ε для $\varepsilon \geqslant 0$. Более точно, для области $U_\varepsilon = d_\varepsilon(U) \subset W_\varepsilon$ выполнено соотношение

$$\frac{d\mathrm{Vol}\,U_\varepsilon}{d\varepsilon} \geqslant 0 \text{ при } \varepsilon = 0.$$

Из положительности средней кривизны границы $W = \partial V$ области $V \subset \mathbb{R}^n$ вытекает следующее свойство снабженной знаком функции расстояния:

$$\delta(v) = -\operatorname{dist}(v, W) = -\inf_{w \in W} \operatorname{dist}(v, w).$$

Функция $\delta(v)$ ***субгармоническая:***

$$\Delta\delta(v) \geqslant 0$$

для всех $v \in V$.

Заметим, что функция δ не является всюду гладкой на V, и в сингулярных точках знак оператора Лапласа Δ должен быть истолкован в соответствующем обобщенном смысле.

Неравенство $\Delta\delta \geqslant 0$ в точках гладкости δ можно легко получить, применяя формулу трубки к уровням функции δ, которые просто являются эквидистантными гиперповерхностями W_ε, а в сингулярных точках дополнительно требуется аппроксимация. (Мы вернемся к положительной средней кривизне при рассмотрении более общих многообразий $V \supset W$ с $\mathrm{Ricci}\,V \geqslant 0$, для которых основным орудием исследования является эквидистантная деформация гиперповерхностей (см. § 5).)

k-выпуклость. Коориентированная гиперповерхность W в $\mathbb{R}^n$ называется ***k-выпуклой*** для некоторого целого $k = 1, 2, \ldots, n-1 = \dim W$, если среди $n-1$ главных кривизн λ_i существует по крайней мере k неотрицательных. Далее, W называется ***строго k-выпуклой***, если существует k положительных λ_i. Например, $(n-1)$-выпуклость совпадает с обычной выпуклостью.

Отметим, что k-выпуклость инвариантна относительно ***проективного преобразования*** $\mathbb{R}^n$. Это преобразование позволяет расширить понятие k-выпуклости на сферу S^n и проективное пространство P^n, которые локально проективно эквивалентны $\mathbb{R}^n$. Далее заметим, что

k-выпуклость устойчива относительно малых внутренних эквидистантных деформаций гиперповерхности W в $\mathbb{R}^n$, как следует из формулы трубки. (Это также справедливо для больших деформаций с соответствующим обобщением понятия k-выпуклости для негладких гиперповерхностей). Кроме того, внутренняя эквидистантная деформация, произведенная в S^n относительно *сферической метрики*, также сохраняет k-выпуклость. Это следует из обобщенной формулы трубки (см. (7) в § 2) и того, что S^n имеет (постоянную) положительную кривизну (сравните с обсуждением в § 2 после (7)). Более того, поскольку кривизна сферы S^n *строго положительна*, любая произвольно малая эквидистантная деформация в S^n делает каждую k-выпуклую гиперповерхность W *строго* k-выпуклой. А так как оба понятия проективно инвариантны, то мы можем заключить, что *каждая k-выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ допускает строго k-выпуклую аппроксимацию.*

Таким образом, риманова геометрия положительной кривизны приводит к чисто евклидову результату.

Более интересные глобальные свойства *замкнутых* k-выпуклых гиперповерхностей можно получить из элементарной теории Морса линейных функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, суженных на W. Если критические точки таких f *невырожденные* (что характерно для линейных функций f), то все критические точки f на W имеют индексы либо не меньше k, либо не больше $n-1-k$. Поэтому W *допускает клеточное разложение*, не имеющее клеток размерности l, где $n-1-k < l < k$.

Пример 1. Если $k = n-1$, то возможны лишь клетки размерностей 0 или $n-1$, и вышесказанное сводится к стандартному свойству локально выпуклых замкнутых гиперповерхностей W в $\mathbb{R}^{n-1}$: *W гомеоморфна дизъюнктному объединению сфер* (мы не предполагаем, что W связна).

Пример 2. Пусть $k = n-2$, тогда ограничение на клетки становится невырожденным, начиная с $n = 5$. Оно гласит, что клетки имеют размерности $0, 1, n-2, n-1$. Для $n \geqslant 5$ отсюда, очевидно, следует, что фундаментальная группа свободна, и $H_i(W)$ обращается в ноль при $i \neq 0, 1, 2, n-2, n-1$.

Вообще теория Морса говорит что-либо содержательное, если только $n \geqslant 2k+1$. Однако существуют нетривиальные ограничения для всех $k \geqslant 1$ на область $V \subset \mathbb{R}^n$, ограниченную гиперповерхностью W.

Если ограниченная область V в $\mathbb{R}^n$ имеет гладкую k-выпуклую гра-

ницу, то V допускает гомотопическую ретракцию на l-мерный подполиэдр в V для $l = n - 1 - k$.

Это утверждение вместе с теорией Морса непосредственно применимо к функции f на множестве V, которое является компактным многообразием с краем.

Легко видеть, что обратное утверждение также верно. Если V может быть построено в $\mathbb{R}^n$ при помощи последовательно приклеенных ручек индексов $\leqslant l$, то оно диффеоморфно области с $(n-1-l)$-выпуклой границей. Например, любая малая ε-окрестность гладкого подмногообразия $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ коразмерности $k+1$, очевидно, имеет k-выпуклую границу.

Далее, мы хотим использовать теорию Морса, чтобы получить какие-либо интересные утверждения о *геометрии* на V. Во-первых, заметим, что пересечение k-выпуклой области V (т.е. ∂V k-выпукла) с аффинным подпространством $X \subset \mathbb{R}^n$ коразмерности d является $(k-d)$-выпуклым в X (т.е. имеет $(k-d)$-выпуклую границу размерности $n-1-d$), поскольку пересечение $V \cap X$ имеет *гладкую* границу в X. Затем мы применим теорию Морса к линейным функциям на пересечениях V с линейными подпространствами и получим индукцией по d (случай $d=1$ рассмотрен выше) следующее утверждение:

Теорема Лефшеца. *Гомоморфизм гомологий*

$$H_l(V \cap X) \to H_l(V)$$

инъективен при $l = n-1-k$ и $\operatorname{codim} X = d \leqslant n-k$.

Пример. Если $k = n-1$ и $d = n-1$, то вышесказанное фактически означает, что пересечение каждой связной компоненты из V с прямой связно. Другими словами, связная область с локально выпуклой границей является выпуклой в обычном смысле.

Легко видеть, что свойство Лефшеца характеризует k-выпуклость.

Если для компактной области $V \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей гомоморфизм $H_l(V \cap X) \to H_l(V)$ инъективен для всех аффинных $(l+1)$-мерных подпространств X в $\mathbb{R}^n$, то (граница) V является k-выпуклой для $k = n - l - 1$.

Теперь можно принять инъективность за *определение* k-выпуклости без каких-либо предположений гладкости на $W = \partial V$. Отсюда следует (очевидная) теорема.

Теорема. *Если V_1 и V_2 k-выпуклы в $\mathbb{R}^n$, то их пересечение $V_1 \cap V_2$ также k-выпукло.*

Отметим, что гомологическое определение $(n-1)$-выпуклости допускает *несвязные* области в $\mathbb{R}^n$ с локально выпуклыми границами. Условие связности обобщается для $k < n-1$ требованием $H_l(V \cap X) = 0$ для $l = n-1-k$ и для всех $(l+1)$-мерных подпространств $X \subset \mathbb{R}^n$. Например, в ближайшем к выпуклому случае $k = n-2$ требуется, чтобы пересечение V с каждой плоскостью $X \subset \mathbb{R}^n$ было односвязным.

Наконец, мы укажем еще одно условие k-выпуклости по аналогии с классическим выпуклым случаем: *для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$, не лежащей в V, существует k-мерное аффинное подпространство, проходящее через точку x и не пересекающее V.*

Это на самом деле глобальное свойство $V \subset \mathbb{R}^n$, которое намного сильнее, чем k-выпуклость, и которое становится необходимым, если мы хотим восстановить V по его проекциям на $(n-k)$-мерные подпространства в $\mathbb{R}^n$.

Погруженные k-выпуклые гиперповерхности. Здесь W из $\mathbb{R}^n$ допускает *самопересечение.* Это означает, что W — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, которое сопровождает *погружение* $W \to \mathbb{R}^n$, т.е. локально диффеоморфное отображение. Если W ориентировано как абстрактное многообразие, то погруженное многообразие $W \subset \mathbb{R}^n$ становится коориентированным, если мы зафиксируем какую-нибудь ориентацию в $\mathbb{R}^n$. В этом случае мы можем определить вторую основную форму и понятие k-выпуклости гиперповерхности W.

На рис. 5 можно видеть локально выпуклую погруженную замкнутую кривую в $\mathbb{R}^2$. Отметим, что *образ* этого погружения вырожден в двойных точках и не является выпуклым ни в каком смысле.

Классическая теорема выпуклости утверждает, что каждая локально выпуклая связная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ является *вложенной* (т.е. не имеет двойных точек) для $n \geqslant 3$ и, таким образом, ограничивает выпуклую область в $\mathbb{R}^n$. Последнее утверждение обобщается на k-выпуклый случай.

Пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая погруженная k-выпуклая гиперповерхность, где $k > \frac{n}{2}$. Тогда W ограничивает погруженное многообразие V в $\mathbb{R}^n$ размерности n (т.е. W ограничивает V как абстрактное многообразие, и погружение $W = \partial V$ в $\mathbb{R}^n$ продолжается до погружения $V \to \mathbb{R}^n$).

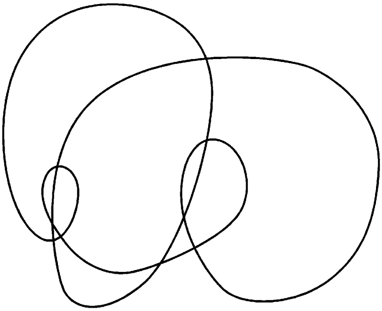

Рис. 5

Построение V осуществляется при помощи уровней линейных функций на W. Уровнями являются пересечения $W \cap X_t$, где $X_t \subset \mathbb{R}^n$ — семейство параллельных гиперплоскостей. Эти пересечения $(k-1)$-выпуклы в некритических точках t, где X_t трансверсально W. Пересечение $W_t = W \cap X_t$ является гладкой погруженной гиперповерхностью в $X_t = \mathbb{R}^{n-1}$. При изменении t в некритическом интервале эта поверхность двигается по регулярной гомотопии (т. е. остается погруженной). Однако самопересекающаяся часть гиперповерхности W_t может изменяться с течением t. Тем не менее неравенство $k < \frac{n}{2}$ исключает лобовое столкновение внутренностей двух кусков W_t, как указано на рис. 6. (Векторное поле начального состояния гиперповерхности W_t отмечено коориентацией). Легко видеть, что если W_{t_0} ограничивает некоторое погруженное многообразие V_{t_0} в $X_{t_0} = \mathbb{R}^{n-1}$, то оно также ограничивает V_{t_1} для $t_1 > t_0$, если на пути регулярной гомотопии $W_{t_0} \to W_{t_1}$ вышеупомянутое лобовое столкновение не встречается. Тогда многообразия V_t, заполняющие все гиперповерхности W_t, дают в сумме требуемое многообразие V, заполняющее гиперповерхность W.

Замечание. Цикл на рис. 5 дает нам контрпример для $k = 1$ и $n = 2$, и легко видеть незаполнимость W в $\mathbb{R}^n$ для всех n и $k \leqslant \frac{n-1}{2}$. Однако случай $k = \frac{n}{2}$ для четных $n \geqslant 4$ менее очевиден.

Псевдовыпуклость. Если ограничиться группой симметрий, сохраняющей k-выпуклость, это приведет к огромному количеству обобщений, среди которых наиболее важное — это *псевдовыпуклость* гиперповерхности $W \subset \mathbb{C}^n$. Комплексная структура в $\mathbb{C}^n$ выделяет некоторые аффинные подпространства в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, а именно те, которые являются не только $\mathbb{R}$-аффинными, но и $\mathbb{C}$-аффинными в $\mathbb{C}^n$. В частности, выделенные плоскости в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ называются *$\mathbb{C}$-прямыми* в $\mathbb{C}^n$. В этой терминологии гиперповерхность W называется *псевдовыпуклой*, если для каждой точки $w \in W$ и каждой $\mathbb{C}$-прямой X в $\mathbb{C}^n$, касательной к W в точке w, сужение второй основной формы Π_w^W на $X = \mathbb{R}^2$ имеет собственные значения λ_1 и λ_2, удовлетворяющие

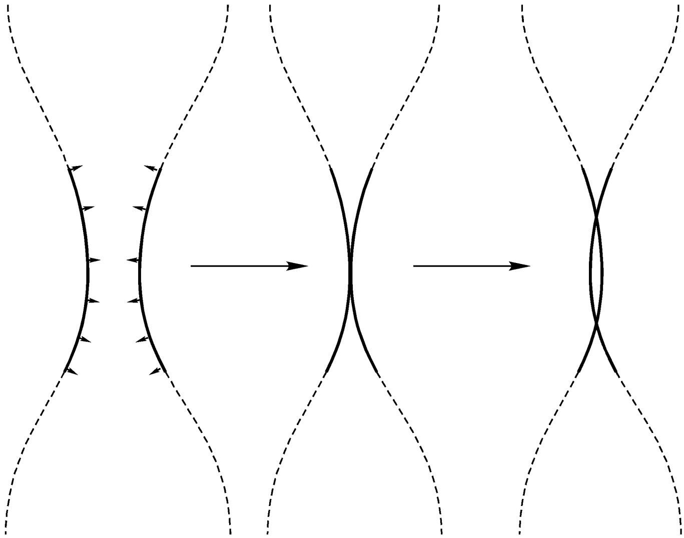

Рис. 6

неравенству $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$. Другими словами, W является ***выпуклой относительно средней кривизны вдоль всех $\mathbb{C}$-направлений.*** Аналогично можно определить k-псевдовыпуклость как выполнение в каждой точке w вышеупомянутого неравенства для $\mathbb{C}$-прямых внутри некоторого k-мерного $\mathbb{C}$-аффинного подпространства, касательного к W в точке w.

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать и доказать теорему Лефшеца и теорему о заполнении в этом случае.

Примечательным свойством псевдовыпуклости и k-псевдовыпуклости является инвариантность относительно (как локальных, так и глобальных) биголоморфных преобразований в $\mathbb{C}^n$. (Доказательство этого утверждения несложно). Поэтому можно расширить эти понятия для произвольных комплексных многообразий V, где псевдовыпуклость играет важную роль в анализе и геометрии на V. Например, существует замечательная теорема Грауэрта, которая утверждает, что каждое компактное связное комплексное многообразие V с непустой строго псевдовыпуклой границей допускает непостоянную голоморфную функцию. Более того, существует собственное голоморфное отображение f из внутренности V в некоторое $\mathbb{C}^N$ такое, что f инъективно на дополнении к некоторому компактному выпуклому подмногообразию $V_0 \subset V$ положительной коразмерности.

Наконец, мы предлагаем читателю самому определить понятие k-выпуклости в пространстве кватернионов $\mathbb{H}^n$ и потом расширить его дальше до выпуклости относительно средней кривизны для заданного множества (выделенных) подпространств в $\mathbb{R}^n$. Затем читатель может сформулировать и доказать теорему Лефшеца и теорему о заполнении.

Гиперповерхности типа (k_+, k_-). Пусть W имеет в каждой точке w ровно k_+ строго положительных и k_- строго отрицательных главных кривизн. Предположим также, что Π^W *нигде не сингулярна* на W и, таким образом, $k_+ + k_- = n - 1$. Отметим, что невырожденность Π^W эквивалентна (очевидным образом) *регулярности гауссова отображения*. Напомним, что гауссово отображение v переводит *коориентированную* гиперповерхность W в единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$: каждой точке $w \in W$ оно ставит в соответствие направленный наружу единичный нормальный вектор $v(w)$ в точке w, перенесенный в начало координат в $\mathbb{R}^n$. В некоориентированном случае гауссово отображение действует в проективное пространство P^{n-1}, переводя w в прямую в $\mathbb{R}^n$, проходящую через начало координат параллельно $v(w)$. Такое отображение является гладким, если гиперповерхность W гладкая, и вышеупомянутая регулярность v означает, что дифференциал $Dv\colon T(W) \to T(S)$ инъективен на касательных пространствах $T_w(W)$ для всех $w \in W$ или, что эквивалентно, *v локально диффеоморфно.*

Например, для поверхностей W в $\mathbb{R}^3$ существуют две возможности. Первая — когда Π *определенная*, положительно или отрицательно (можно из положительной перейти в отрицательную, изменяя коориентацию), и тогда W локально выпукла или вогнута. Вторая возможность — когда Π неопределенная, тогда W — *седловая* поверхность.

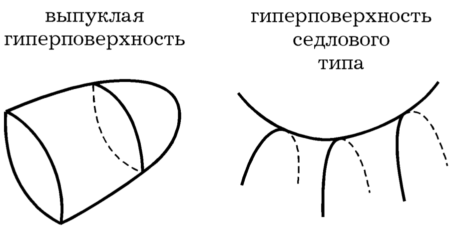

Рис. 7

Напомним, что $w \in W$ называется *седловой точкой*, если W не является ни выпуклой, ни вогнутой в точке w, т. е. касательное пространство $T_w(W) \subset \mathbb{R}^n$ пересекает внутренность и внешность (дополнения) W произвольно близко к w. Эквивалентно: w содержится в (евклидовой) выпуклой оболочке границы каждой достаточно малой окрестности $U \subset W$ точки w. Если все точки $w \in W$ седловые, то W называется гиперповерхностью *седлового типа.*

Чтобы получить глобальные выводы о типе Π^W, нужно сделать некоторые предположения о поведении W на бесконечности. Здесь необходимо заметить, что *каждая замкнутая* гиперповерхность всегда имеет хотя бы одну точку выпуклости (вогнутости). Например, W (очевидно) выпукла во всякой точке максимума функции расстояния $\mathrm{dist}(x_0, w)$ на W для каждого фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, седловой тип делает W незамкнутой, и можно ожидать интересную геометрию, если W *не имеет видимой границы* в $\mathbb{R}^n$ того или иного вида. Здесь представлены три условия, которые обычно накладываются на W, чтобы исключить такую границу.

(1) Гиперповерхность W *собственно* вложена (или погружена, если допускается самопересечение) в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что отображение вложения $W \subset \mathbb{R}^n$ является собственным: пересечения компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с W компактны в W. Другими словами, если последовательность точек $w_i \in W$ уходит в бесконечность в W, то она также уходит в бесконечность в $\mathbb{R}^n$ (и поэтому не существует подпоследовательности, имеющей пределом граничную точку из W в $\mathbb{R}^n$).

(2) Гиперповерхность W *квазисобственная* в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что пересечение W со всяким компактным подмножеством из $\mathbb{R}^n$ есть объединение *дизъюнктных компактных подмножеств* в W. То есть каждая связная кривая в W, уходящая в бесконечность в W, должна быть неограниченна в объемлющем $\mathbb{R}^n$. Очевидно, из собственности следует квазисобственность.

(3) Гиперповерхность W *полная.* Это сводится к полноте индуцированной римановой метрики. Эквивалентно: каждая связная кривая в W, уходящая в бесконечность, должна иметь бесконечную длину в $\mathbb{R}^n$ (и, следовательно, в индуцированной метрике на W). Это слабее, чем квазисобственность.

Эти три условия исключают граничные (или предельные) точки из W в $\mathbb{R}^n$, если W само не имеет границы как топологическое многообразие.

Здесь приводятся некоторые примеры, проясняющие смысл данных определений.

(a) Пусть $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ — *замкнутое* подмногообразие и $W \to W_0 \subset \mathbb{R}^n$ — бесконечное накрытие. Можно взять, к примеру, $W_0 = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ и $W = \mathbb{R}$, которое накрывает окружность S^1. Тогда W будет полным, но не будет ни собственным, ни квазисобственным в $\mathbb{R}^2$. (Конечно, бесконечное накрытие $W \to W_0$ никогда не даст нам *вложения* $W \to \mathbb{R}^n$, но иногда можно получить вложение из такого отображения при помощи произвольно малых возмущений, которые не влияют на свойства (1), (2) или (3). Это возможно, например, для $\mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$.)

(b) График функции $\sin\frac{1}{x}$ на $]0, \infty[$ полный, но не квазисобственный в $\mathbb{R}^2$; график $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ на $]0, \infty[$ квазисобственный, хотя не собственный; а график $x^2\sin\frac{1}{x}$ на полуоси $]0, \infty[$ не является даже полным.

Теперь пусть $W \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие без границы, которое удовлетворяет одному из условий (1), (2), (3) и имеет форму Π^W заданного (постоянного!) типа (k_+, k_-). Тогда можно ожидать, что глобальная геометрия (и топология) на W довольно специфична. Мы не можем уже ответить на следующие кажущиеся простыми вопросы.

Существует ли ограничение на некоторые числа Бетти многообразия W? Какова структура гауссова отображения $v\colon W \to S^{n-1}$? Может ли это отображение иметь $|\mathrm{Jac}\, v| = |\mathrm{Discr}\,\Pi| \geqslant c > 0$? (Это невозможно для $n = 3$ по теореме Ефимова, см. [28].) Предположим, что v — это диффеоморфизм многообразия W на открытое подмножество $U \subset S^{n-1}$. Будет ли U иметь ограниченную топологию? Можно ли классифицировать подмножества U таким образом? (Можно для $n = 2$ согласно Вернеру, см. дискуссию на с. 188 и с. 283 в [18].)

Компактификация W. Условие постоянного типа на Π^W является не только аффинно инвариантным, но также инвариантным относительно *проективных преобразований* в $\mathbb{R}^n$. Поэтому можно говорить о гиперповерхностях постоянного типа (k_+, k_-) в проективном пространстве P^n, а также на сфере S^n. Здесь такая гиперповерхность может быть *замкнутой*. Затем спрашивается, какая геометрия и какая топология в такой замкнутой гиперповерхности $W \subset S^n$ предположительно могут быть. Простейший пример приводят орбиты коразмерности один групп изометрий, действующих на S^n, где не только тип формы Π^W, но и *главные кривизны гиперповерхности W в S^n по-*

стоянны. Гиперповерхности с постоянными главными кривизнами (напомним, что это собственные значения формы П) называются *изопараметрическими.* Удивительно, что не все они однородны для больших n (см. [15]). Теперь можно не ожидать, что (топологическая) классификация замкнутых гиперповерхностей $W \subset S^n$ заданного постоянного типа (k_+, k_-) будет слишком простой, но все еще верится, что такие W имеют «ограниченную» топологию и геометрию, например, числа Бетти гиперповерхности W должны быть ограничены только в терминах размерности n.

Наконец, заметим, что каждая замкнутая гиперповерхность $W \subset P^n$ задает нам (собственно вложенную) гиперповерхность W' в $\mathbb{R}^n = P^n - P^{n-1}$, т.е. $W' = W - P^{n-1}$. Теперь мы спрашиваем, будет ли «компактное происхождение» гиперповерхности W' постоянного типа накладывать дополнительные топологические ограничения на W'.

В заключение параграфа попытаемся сформулировать общую проблему связи между Π^W и глобальной геометрией на W. Во-первых, заметим, что Π^W полностью характеризуется (с точностью до перемещений W без деформаций) в каждой точке $w \in W$ главными кривизнами $\lambda_1(w), \ldots, \lambda_{n-1}(w)$, которые мы упорядочим по возрастанию, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}$. Теперь мы имеем однозначно определенное (и, следовательно, непрерывное) отображение $\lambda\colon W \to \mathbb{R}^{n-1}$ при $\lambda(w) = (\lambda_1(w), \ldots, \lambda_{n-1}(w))$, которое закладывает инфинитезимальную информацию в Π^W во всех точках $w \in W$. Теперь каждое подмножество $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-1}$ определяет класс гиперповерхностей W в $\mathbb{R}^n$, если, например, потребовать, чтобы образ $\lambda(W)$ содержался в Λ. (Это включает в себя k-выпуклость, MeanCurv $\geqslant 0$ и постоянный тип как частные случаи). Другой важный инвариант, кроме геометрического образа $\lambda(W)$, — это мера $\lambda_*(dw)$, индуцированная *римановой мерой* dw на W. Тогда каждый класс $\mathfrak{M}$ мер на $\mathbb{R}^{n-1}$ определяет класс гиперповерхностей W на $\mathbb{R}^n$ с $\lambda_*(dw)$, принадлежащими $\mathfrak{M}$. С этими Λ и $\mathfrak{M}$ проблема перехода от локальных свойств к глобальным звучит следующим образом. Какую (геометрическую и топологическую) «форму» принимает W в классе, определенном при помощи заданных Λ и $\mathfrak{M}$? Мы хотим ответить в терминах Λ или $\mathfrak{M}$, и мы можем ожидать этого лишь для исключительно хороших Λ и $\mathfrak{M}$.

К сожалению, никогда не знаешь, какая задача хорошая, а какая нет, пока не решишь ее.

§ 1. Напоминание о длине, расстоянии и римановой метрике

Риманова структура на гладком многообразии V задается положительно определенной квадратичной формой g на касательном расслоении $T(V)$. Каждому касательному вектору $\tau \in T(V)$ форма g сопоставляет его *норму* (или *длину*) по формуле

$$\|\tau\|_g = (g(\tau, \tau))^{\frac{1}{2}}.$$

Для произвольной C^1-гладкой кривой , т.е. отображения $c\colon [0,1] \to V$, мы можем определить тогда g-*длину*, интегрируя норму вектора скорости $c'(t) = (Dc)\dfrac{\partial}{\partial t} \in T_v(V),\ v = c(t)$

$$\operatorname{length}(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_g\, dt.$$

Говоря геометрически, норма $\|\tau\|_g$, поднятая на отрезок $[0,1]$ при помощи дифференциала отображения c, определяет *плотность меры* на $[0,1]$, полная масса которой совпадает с длиной кривой c. Таким образом, длина инвариантна относительно преобразования параметра.

Квадратичная природа нормы $\|\cdot\|_g$ не является чем-то принципиальным. Можно было бы стартовать с произвольного непрерывного семейства (неевклидовых) *норм* $\|\cdot\|$ на касательных пространствах $T_v(V)$, $v \in V$, а затем определять длину кривой, интегрируя $\|c'\|$. Здесь мы лишь упомянем, что норма на $T(V)$ называется *финслеровой метрикой* на V, а многообразия с такими метриками — *финслеровыми многообразиями.*

Сконцентрируем теперь наше внимание на функции $c \mapsto \operatorname{length}(c)$, определенной на пространстве отображений отрезка $[0,1]$ в многообразие V с римановой или финслеровой нормой на $T(V)$. Такая функция удовлетворяет нескольким очевидным свойствам (таким как инвариантность относительно перепараметризации и аддитивность по отношению к разбиению кривых на более мелкие куски) и сама по себе является интересным геометрическим объектом, называемым *структурой длины* на многообразии V. Имея такую структуру, мы определяем соответствующую метрику на V обычным способом, рассматривая всевозможные кривые между двумя заданными точками v_1 и v_2 из V и полагая расстояние $\operatorname{dist}(v_1, v_2)$ равным инфимуму длин этих кривых. Ясно, что это действительно метрика в римановом и в финслеровом случаях (но это может быть не так для менее регулярных структур длины, например, если мы допускаем ***обобщенные нормы*** на $T(V)$, обращающиеся в бесконечность вне некоторого подрасслоения $S \subset T(V)$).

Метрики, возникающие из структур длины, называются ***внутренними метриками***. Они имеют следующее свойство, которое их почти характеризует.

ε-равенство треугольника. Для любых двух точек v_1 и v_2, любого $\varepsilon > 0$ и любого положительного $\delta \leqslant \operatorname{dist}(v_1, v_2)$ существует точка $v \in V$ такая, что

$$\operatorname{dist}(v, v_1) \leqslant \delta + \varepsilon$$

и

$$\operatorname{dist}(v, v_2) \leqslant \operatorname{dist}(v_1, v_2) - \delta.$$

Другими словами, неравенство треугольника

$$\operatorname{dist}(v_1, v_2) \leqslant \operatorname{dist}(v, v_1) + \operatorname{dist}(v, v_2)$$

становится почти равенством при подходящем выборе v. На самом деле можно добиться настоящего равенства, если существует ***кратчайшая*** кривая c между точками v_1 и v_2, для которой $\operatorname{length}(c) = d = \operatorname{dist}(v_1, v_2)$. Такая кривая c в V с индуцированной метрикой, очевидно, изометрична отрезку $[0, d] \subset \mathbb{R}$. Она обычно называется ***минимизирующим геодезическим отрезком*** между v_1 и v_2 и обозначается в соответствии с этим (даже если она не единственна) через $[v_1, v_2] \subset V$. Тогда для любого $\delta \in [0, d]$ соответствующая точка $v \in [v_1, v_2] \leftrightarrow [0, d]$, для которой $\operatorname{dist}(v, v_1) = \delta$, удовлетворяет равенству треугольника:

$$\operatorname{dist}(v, v_1) + \operatorname{dist}(v, v_2) = \operatorname{dist}(v_1, v_2).$$

Отметим, что если V — компактное (возможно с краем) ***риманово*** (или финслерово) многообразие, то минимизирующий отрезок, как известно, существует для любых точек v_1 и v_2 из V. То же самое верно и в некомпактном случае, если V ***полно*** как метрическое пространство.

Локальность внутренней метрики. Каждая внутренняя метрика на многообразии V однозначно определяется своими ограничениями на элементы произвольного покрытия V открытыми подмножествами U_i. Другими словами, если две такие метрики совпадают на каждом U_i, то они равны и на всем V. На самом деле для произвольной метрики d на V можно определить метрику d^+ как верхнюю грань по всем метрикам d', для которых существует открытое покрытие V подмножествами U_i (зависящими от d') такое, что $d' \leqslant d$ на каждом U_i. Тогда ε-равенство треугольника показывает, что $d^+ = d$ для внутренних метрик d, но в общем случае $d^+ \geqslant d$. Например, если мы стартуем с евклидовой метрики d на подмногообразии $V \subset \mathbb{R}^m$, то d^+ отвечает *индуцированной римановой структуре* на V, определенной при помощи *евклидовых* длин кривых (которые должны браться из V). Таким образом,

$$\operatorname{dist}_V(v_1, v_2) = d^+(v_1, v_2) > d(v_1, v_2) = \operatorname{dist}_{\mathbb{R}^m}(v_1, v_2),$$

если только V (или по крайней мере его замыкание в $\mathbb{R}^m$) не содержит прямолинейного отрезка между v_1 и v_2 в $\mathbb{R}^m$.

Локальность внутренних метрик и, в частности, римановой метрики является главной (непсихологической) причиной того, что мы придерживаемся *принципа от локального к глобальному* в римановой геометрии.

Неэффективность определения метрики через длину. Даже если риманова метрика на V записана достаточно явно, может оказаться сложным вычисление расстояния между двумя заданными точками. Например, если V диффеоморфно области в $\mathbb{R}^n$, $n = \dim V$, то любая риманова структура задается $\dfrac{n(n+1)}{2}$ функциями на V, которые являются компонентами g в стандартном базисе

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

для векторных полей $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ в $\mathbb{R}^n$. Но даже для очень простых функций g_{ij} (например, полиномов) сложно увидеть, что происходит на пути минимизации g-длины кривых.

Другой пример, в котором особенно проявляется логический характер проблемы, когда V — универсальное накрытие компактного многообразия V_0. Структура длины легко поднимается от V_0 к V: каждой кривой в V ставим в соответствие длину ее образа в V_0. Однако это не говорит нам многого о соответствующей *метрике* в V. Например, глядя на V_0, нельзя сказать, будет или не будет конечен *диаметр* V, (т. е. $\sup\limits_{v_1, v_2 \in V} \operatorname{dist}(v_1, v_2)$), поскольку этот вопрос эквивалентен задаче: конечна или нет фундаментальная группа $\pi_1(V_0)$. Последняя задача известна как *неразрешимая*, поэтому диаметр V не может быть эффективно выражен в терминах V_0.

Наш последний пример, когда V — группа Ли, а g — *левоинвариантная* риманова структура. Здесь g однозначно определяется тем, что происходит на единственном касательном пространстве, скажем, $T_e(V)$ для нейтрального элемента группы $e \in V$. Таким образом, g можно задать квадратичной формой на линейном пространстве $T_e(V)$. Тем не менее, о метрической структуре таких (V, g) (особенно для не нильпотентных разрешимых групп Ли) известно мало.

Вышеупомянутые трудности делают ценным любой вид информации о метрике, которую можно получить при помощи эффективно вычислимых *инфинитезимальных инвариантов* многообразия V. Очень много из этого скрыто в *римановом тензоре кривизны* g, который выражается прямыми (но громоздкими) алгебраическими формулами, включающими g и первые, и вторые производные компонент g_{ij} в заданных локальных координатах. (Эти формулы появятся в явном виде позднее в этом параграфе). Например, существует определенная комбинация этих производных, которая называется *секционной кривизной* $K(V)$ (см. §2). Из ее *строгой положительности* $K(V) \geqslant \varepsilon > 0$ и полноты V как метрического пространства следует компактность V. Это дает (эффективное!) частное решение задачи о диаметре для накрытий $V \to V_0$. Обратно, если секционная кривизна многообразия V_0 (и, значит, многообразия V) всюду *отрицательна*, то V некомпактно и его диаметр бесконечен (см. §§ 2 и 4). К сожалению, большинство многообразий имеют секционную кривизну переменного знака, и вышеприведенный критерий к ним не подходит. Постоянный знак секционной кривизны встречается в определенных примерах, включающих в себя некоторые *однородные* римановы многообразия (однако, разрешимые группы не попадают в категорию постоянного знака).

Восстановление g по метрике. Существует следующий простой способ восстановления g по соответствующей функции расстояния. Для заданной точки v мы определим функцию $\rho(v')$ на V равенством $\rho(v') = (\mathrm{dist}(v, v'))^2$. Заметим, что ρ гладкая в $v' = v$, и дифференциал $D\rho$ обращается в ноль в v. Тогда второй дифференциал $D^2\rho$ — это вполне определенная квадратичная форма на $T_v(V)$, которая совпадает с g на T_v.

Таким образом, мы установили эквивалентность трех основных способов задания римановой структуры: инфинитезимального, посредством квадратичной формы g на $T(V)$; через функцию длины на кривых и посредством метрики (или функции расстояния). Часто мы не будем различать эти три структуры и будем применять выражение «риманова метрика» ко всем им. Здесь необходимо заметить, что, хотя эти структуры формально эквивалентны, они представляют объекты из разных областей. Например, g — это тензор, в частности, квадратичная форма, которая не всегда положительна. В таком случае о метрической структуре, соответствующей g, говорить не приходится (за исключением остаточной терминологии, такой как «метрика Лоренца»). С другой стороны, если мы имеем (не риманово) метрическое пространство с довольно неприятными особенностями, то инфинитезимальный подход становится крайне сложным. Для наших целей полезно обладать различными понятиями, слитыми воедино в римановом потоке.

Риманов объем. На каждом римановом многообразии V размерности n существует каноническая мера, которая (однозначно) определяется следующими двумя аксиомами.

Монотонность. Если существует уменьшающее расстояние сюръективное отображение между двумя n-мерными многообразиями, скажем, $f\colon V_1 \to V_2$, то

$$\mathrm{Vol}\, V_2 \leqslant \mathrm{Vol}\, V_1,$$

где «Vol» означает полный объем (или массу) меры на многообразии.

Нормализация. Единичный куб в $\mathbb{R}^n$ имеет объем, равный 1.

Заметим, что данное выше определение имеет смысл на уровне структуры длины и римановой нормы на $T(V)$, так же как и для функции расстояния. Действительно, следующие три условия на f очевидно эквивалентны:

(1) f уменьшает расстояния;

(2) f уменьшает длины кривых;

(3) дифференциал f уменьшает длины касательных векторов (здесь дополнительно требуется дифференцируемость f).

Существование и единственность римановой меры для непрерывных структур g на V немедленно следует из очевидной *инфинитезимальной аппроксимации* g в каждой точке $v_0 \in V$ евклидовой метрикой g_0. А именно, если мы возьмем какую-нибудь локальную систему координат $u_1, \ldots, u_n$ в V в окрестности v_0, то g определяет евклидову метрику g_0 в координатной окрестности U равенством

$$g_0(\partial_i(u), \partial_j(u)) = g(\partial_i(v_0), \partial_j(v_0)),$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ и u пробегают U, а $v_0 \in U$ фиксировано. Очевидно, что (U, g_0) изометрично $\mathbb{R}^n$ и g_0 *аппроксимирует* g *в* v_0 *с нулевым порядком.* Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_\varepsilon \subset U$ точки v такая, что

$$(1-\varepsilon)g_0 \leqslant g \leqslant (1+\varepsilon)g_0 \text{ на } U_\varepsilon.$$

Отсюда следует по монотонности, что риманов g-объем U_ε ε-близок (в обычном смысле) к g_0-объему (который евклидов и предполагается известным), и единственность Vol_g получается из $\varepsilon \to 0$. Существование здесь также очевидно, но более удобно использовать инфинитезимальное определение. А именно, дискриминант g определяет норму на максимальной внешней степени $T(V)$, которая дает нам плотность распределения на V. Проще говоря, имеется понятие $|\mathrm{Jacobian}|$ для каждого C^1-отображения $f\colon V_1 \to V_2$, которое вычисляется для каждого $v \in V$ с (евклидовыми!) метриками $g_1(v)$ на $T_v(V_1)$ и $g_2(w)$ на $T_w(V_2)$, $w = f(v)$ как $|\,\mathrm{Det}\,|$ дифференциала $Df\colon T_v(V_1) \to T_w(V_2)$. То есть

$$|\,\mathrm{Jac}\, f| = |\,\mathrm{Det}\, f| = (\mathrm{Det}\, DD^*)^{\frac{1}{2}},$$

где $D = Df$, а D^* — сопряженный к D относительно $g_1(v)$ и $g_2(w)$. Теперь можно определить риманов объем для каждой малой окрестности $U \subset V$, выбирая диффеоморфизм $f\colon U' \to U$ для некоторого $U' \subset \mathbb{R}^n$ и полагая

$$\mathrm{Vol}_g U = \int\limits_{U'} |\,\mathrm{Jac}\, f|\, du'$$

для евклидова элемента объема du'.

Заметим, что риманова структура сужается на подмногообразие $W \subset V$ размерности $k < n = \dim V$, и в этом случае мы имеем риманов объем Vol_k на W. В частности, для $k = 1$ мы снова приходим к длине кривых, т. е. $\mathrm{Vol}_1\, W$ для $\dim W = 1$.

Инфинитезимальная аппроксимация g первого порядка метрикой g_0. Поскольку g евклидова в v_0 с нулевым порядком, можно полагать, что *неплоскостность* g (т. е. отклонение от локальной евклидовости) может быть измерена при помощи первых производных от $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ в некоторой локальной системе координат. Неожиданно это оказывается не так, потому что всегда существуют особенно хорошие локальные координаты $u_1, \ldots, u_n$ в окрестности v, которые называются *геодезическими координатами*, такие, что

$$\partial_k g_{ij}(v_0) = 0 \text{ для всех } i, j, k = 1, \ldots, n$$

(здесь необходима C^1-гладкость g в v_0). Действительно, несложные рассуждения объясняют, как это могло случиться. Когда мы изменяем системы координат, состоящие из n функций $u_i\colon V \to \mathbb{R}$, мы заметим, что изменение $\partial_k g_{ij}(v_0)$ определяется *вторыми* производными от u_i в v_0. Всего этих производных $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ (для n функций u_i), т. е. столько же, сколько *первых* производных от $\dfrac{n(n+1)}{2}$ функций g_{ij} в v_0. Таким образом, несложно доказать, что можно подобрать вторые производные от u_i так, что $\partial_k g_{ij}$ обратятся в ноль. На самом деле можно показать, что эти вторые производные однозначно определяются из условий $\partial_k g_{ij}(v_0) = 0$. А именно, если u_i и u_i' — геодезические координаты, такие, что $\partial_{u_i} | u_j' = \delta_j^i$, то вторые производные от u_j' по u_i обращаются в ноль в v_0.

Евклидова метрика g_0 на U строится так же, как и раньше. Но теперь в *геодезических* координатах u_i она аппроксимирует g в точке v_0 с *первым порядком*

$$-\varepsilon^2 g_0 \leqslant g - g_0 \leqslant \varepsilon^2 g_0,$$

здесь ε — гладкая функция на V, обращающаяся в ноль в v_0. Метрику g_0 обычно называется *соприкасающейся метрикой в v_0*.

Можно попытаться продолжить дальше и исключить вторые производные g в v_0 при помощи воздействий на третьи производные от u_i. Но теперь мы будем иметь $\dfrac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ третьих производных u_i и $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ вторых производных от g_{ij}. Разность между ними равна $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$. Такое количество параметров характеризует неплоскостность g второго порядка в точке v_0. На самом деле, как показывает непосредственный подсчет, линейная комбинация

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial_j\partial_l g_{ik} + \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_j\partial_k g_{il})$$

постоянна независимо от изменений u_i, сохраняющих первые и вторые производные геодезических координат u_i в точке v. Очевидно, что

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = R_{klij} = -R_{jikl}$$

и

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

Последнее равенство называется (первым) *тождеством Бианки.* Теперь легко видеть, что число линейно независимых R_{ijkl} равно в точности $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$, и R_{ijkl} преобразуются как тензоры при изменении локальных координат (но теперь уже без ограничений на первые и вторые производные этих координат). Таким образом, мы получим тензор на V, называемый *тензором кривизны* $R = \{R_{ijkl}\}$, который характеризует неплоскостность g в следующем смысле.

Многообразие (V, g) имеет нулевую кривизну тогда и только тогда, когда для каждой точки $v \in V$ найдется окрестность $U \ni v$, изометричная некоторому открытому подмножеству $U' \subset \mathbb{R}^n$, где $n = \dim V$.

Кривизна R в точке v — это четырехвалентный тензор на касательном пространстве $T_v(V)$, на котором посредством $g \mid T_v(V)$ задана евклидова структура. Можно построить большое количество численных характеристик тензора кривизны $R \mid T(V)$, которые инвариантны относительно g-ортогональных преобразований касательного расслоения $(T(V), g)$. Они, таким образом, задают *скалярные инварианты структуры* g, которые являются действительнозначными функциями на V, полученными в каждой точке $v \in V$ инвариантным способом из вторых производных от g в v в геодезических координатах. Например, можно взять g-норму $\|R\|_g$, т. е. $\Big(\sum\limits_{i,j,k,l} R^2_{ijkl}\Big)^{1/2}$, которая задает общую скалярную характеристику неплоскостности V. Теперь мы можем сказать, что V является *ε-плоским,* если $\|R\|_g \leqslant \varepsilon$ на V, и затем попытаться изучить глобальную геометрию ε-плоских многообразий для заданного $\varepsilon > 0$ (см., например, [7]). Но мы столкнемся с более тонкими скалярными инвариантами, которые не являются автоматически положительными и знак которых несет нетривиальную геометрическую информацию о V. Для сравнения мы можем снова рассмотреть вторую основную форму Π^V для $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, норма $\|\Pi^V\|$ которой характеризует неплоскостность V в $\mathbb{R}^{n+1}$. Однако *знак собственных значений* λ_i формы Π^V (которые являются скалярными инвариантами относительно преобразований V в $\mathbb{R}^{n+1}$ без деформаций) говорит нам намного больше, чем величина отклонения Π. (Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \|\Pi\|^2$.)

В римановом случае существует много подобных скалярных инвариантов (которые соответствуют функциям на пространстве тензоров кривизны на $T(V)$, инвариантным относительно послойных ортогональных преобразований), но только некоторые из них находят осмысленную геометрическую интерпретацию. Наиболее изучены среди них: *секционная кривизна* $K(V)$, которая в действительности является функцией на грассмановом расслоении касательных 2-плоскостей в V; *кривизна Риччи*, которая является квадратичной формой на V, и *скалярная кривизна*, которая есть функция на V. Эти кривизны определяются и изучаются в следующих §§ 2–6.

§ 2. Эквидистантная деформация и секционная кривизна $K(V)$

Для каждой гиперповерхности W в римановом многообразии $V = (V, g)$ (напомним, что «гипер» означает, что $\dim W = n-1$, где $n = \dim V$) мы определим эквидистантные гиперповерхности W_ε как уровни снабженной знаком римановой функции расстояния $\mathrm{dist}_g(v, W)$ точно так же, как мы делали это для гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ в § 0. Мы можем также определить отображение $d\colon W = W_0 \to V$, которое переводит W_0 в W_ε для малых ε, используя *геодезические ε-отрезки*, нормальные к W, вместо прямых отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. § 0). Чтобы иметь хорошую теорию геодезических в V, будем предполагать, что g является C^2-гладкой (в некоторой системе координат). Известно еще со времен Римана, что для любого единичного касательного вектора $\tau \in T_v(V)$ существует единственная *геодезическая, выпущенная из v в направлении τ*. Здесь слово «геодезическая» означает *локально изометрическое* отображение из $\mathbb{R}$ или из связного подмножества $\mathbb{R}$ в многообразие V, где «локально изометрическое» относится к функции расстояния в V.

А именно, каждый достаточно малый составляющий отрезок геодезической должен быть *минимизирующим отрезком* в V, т.е. его длина должна равняться расстоянию между его концами в V. (Например, геодезическими на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ являются большие окружности или, правильнее сказать, прямые и отрезки, проходящие по этим окружностям с единичной скоростью. Они будут минимизирующими, поскольку их длина не превосходит π.)

Если V — полное (например, компактное) многообразие без границы, то известно (вероятно, еще Риману), что имеется *геодезический луч* $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to V$ такой, что $\gamma(0) = v$ и $\gamma'(0) = \tau$ для всех v и единичного $\tau \in T_v(V)$. Если V имеет границу, то луч может попасть на границу в некоторый конечный момент. Так же, если V не является полным, то луч может достичь «бесконечности» V за конечное время (что действительно происходит с прямыми лучами, выпущенными из точки, находящейся в ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$). Тем не менее, для каждой *внутренней* точки $v \in V$ и некоторого $\varepsilon > 0$, зависящего от v, всегда существует ε-отрезок $\gamma\colon [0; \varepsilon] \to V$ такой, что $\gamma(0) = v$, $\gamma'(0) = \tau$ (для заданного единичного $\tau \in T_v(V)$), который является минимизирующим геодезическим отрезком между $v = \gamma(0)$ и $v' = \gamma(\varepsilon) \in V$. Таким образом, локальная геометрия геодезических в V имеет много общего с $\mathbb{R}^n$ (где геодезическими являются прямые, лучи и отрезки).

Для поля v внешних единичных нормалей к W определим отображение d_ε, которое ставит в соответствие каждому $w \in W$ ε-конец геодезического отрезка, выпущенного из w в направлении $v(w)$. (Если $\varepsilon < 0$, мы используем отрезок $\gamma\colon [-\varepsilon, 0] \to V$ такой, что $\gamma(0) = w$ и $\gamma'(0) = v$.) Если V — полное, мы, таким образом, получим отображение (которое называется *нормальным экспоненциальным отображением*) $d\colon W \times \mathbb{R} \to V$, где $d(w, \varepsilon) = d_\varepsilon(w)$ в наших обозначениях. Оно характеризуется геодезическим свойством d на прямых $w \times \mathbb{R}$ и начальными условиями

$$d(w, 0) = w \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon} d(w, 0) = v(w)$$

для всех $w \in W$. (В случае не полного многообразия мы имеем такое отображение в некоторой окрестности $U \subset W \times \mathbb{R}$ множества $W \times 0 \subset \subset W \times \mathbb{R}$, если W содержится во внутренности V.)

Вторая основная форма на гиперповерхности W в V. Используя d_ε, можно определить вторую основную форму Π^W, которая измеряет, насколько W искривлена внутри V (так же как и в евклидовом случае, см. § 0), равенством

$$\Pi^W = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon} g^*_{\varepsilon=0}, \tag{4}$$

где g^*_ε — метрика на W, полученная из g при помощи отображения $d_\varepsilon\colon W \to V$.

Можно определить Π^W другим способом, используя геодезические координаты $u_1, \ldots, u_n$ в каждой точке $w \in W \subset V$, где мы хотим вычислить Π^W. А именно, эти координаты отождествляют координатную окрестность U с областью $U' \subset \mathbb{R}^n$ (с евклидовыми координатами $u_1, \ldots, u_n$) так, что $w \leftrightarrow 0$ и $W \cap U$ становится гиперповерхностью $W' \subset U' \subset \mathbb{R}^n$, проходящей через ноль. Затем *определим* форму Π^W на $W \subset V$ в точке w как форму на $W' \subset \mathbb{R}^n$ в нуле

$$\Pi^W \big| T_w(W) = \Pi^{W'} \big| T_0(W').$$

Здесь касательные пространства $T_w(W)$ и $T_0(W')$ отождествляются при помощи дифференциала диффеоморфизма $U \leftrightarrow U'$ (переводящего $W \cap U$ в W' и $T_w(W)$ на $T_0(W')$). Несложные рассуждения показывают, что это определение не зависит от выбора координат u_i, и эта форма совпадает с формой, определенной равенством (4).

Из второго определения следует, что для каждой касательной гиперплоскости $S \subset T_v(V)$ существует гладкая гиперповерхность $W \subset V$, проходящая через v касательно к S (т. е. $T_v(W) = S$) и являющаяся *геодезической в* v, что означает, по определению, $\Pi^W \big| T_v(W) = 0$. Например, можно взять гиперповерхность W, соответствующую евклидовой *гиперплоскости* $W' \subset \mathbb{R}^n$ в геодезических координатах, так что W' касательна к S в $T_0(\mathbb{R}^n) = T_v(V)$.

Теперь, поскольку $\dfrac{d}{d\varepsilon} g^*_{\varepsilon=0} = 0$ в точке v для такой гиперповерхности W и соответствующей эквидистантной деформации W_ε, мы хотим взглянуть на вторую производную. Это лучше сделать (по причине, которая станет ясной позднее) с операторами A^*_ε на $T(W)$, определенными как прообразы операторов *формы* A_ε на W_ε относительно дифференциалов отображений $d_\varepsilon\colon W \to W_\varepsilon$ (сравните с § 0; здесь, как и в евклидовом случае, d_ε есть диффеоморфизм W на W_ε для малых ε, и A_ε определено равенством $\Pi^{W_\varepsilon}(\tau_1, \tau_2) = g(A_\varepsilon \tau_1, \tau_2) = \langle A_\varepsilon \tau_1, \tau_2 \rangle_V$). А именно, мы положим

$$B_S = \frac{d}{d\varepsilon} A^*_{\varepsilon=0} \big| S. \tag{5}$$

Простейшие вычисления показывают, что B_S — это симметрический оператор на $S = T_v(W)$, который зависит только от S и от g, но не зависит от выбора гиперповерхности W (такой, что $T_v(W) = S$). Заметим также, что B_S не зависит от выбора коориентации гиперплоскости S (и, таким образом, от коориентации гиперповерхности W), поскольку *вторая* производная инвариантна относительно изменения знака переменных.

Операторы B_S на касательных гиперплоскостях $S \subset T(V)$ несут такую же инфинитезимальную информацию, как тензор кривизны, и существуют простые алгебраические формулы, выражающие одно через другое. С другой стороны, по B_S можно определить *секционную кривизну* $K(\sigma)$ для всех касательных 2-плоскостей $\sigma \subset T_v(V)$ следующим образом. Рассмотрим произвольную гиперплоскость $S \subset T_v(V)$, пересекающую σ по прямой $l = S \cap \sigma \subset T_v$ и являющуюся нормальной к σ (т. е. нормальной к прямой $l^{\perp} \subset \sigma$ ортогональной l). Затем мы возьмем единичный вектор $\tau \in l$ и положим

$$K(\sigma) = -g(B_S(\tau), \tau). \tag{6}$$

Снова при помощи несложных алгебраических вычислений можно убедиться, что результат не зависит от выбора S и τ. Отрицательный знак здесь выбран для того, чтобы круговая сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ имела *положительную* кривизну. В самом деле, пусть V совпадает с единичной сферой $S^n = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с индуцированной римановой метрикой g, и пусть $W \subset V = S^n$ — экваториальная гиперсфера. Тогда W является геодезической во всех точках $w \in W$, и поэтому она удобна для вычисления B_S, где $S = T(W)$. Очевидно, что ε-эквидистантные концентрические сферы $W_\varepsilon \subset V$ *меньше*, чем W. Более точно, метрики на этих сферах W_ε, перенесенные на $W = W_0$, задаются следующей известной формулой:

$$g_\varepsilon^* = (\cos^2\varepsilon) g_0.$$

Поэтому вторая производная от g_ε^* отрицательно определена, и секционная кривизна K положительна в соответствии с принятыми соглашениями. Заметим также, что уменьшение g_ε^* при увеличении $|\varepsilon|$ согласуется с поведением второй формы Π^{W_ε}: меньший из двух шаров в S^n, ограниченных гиперповерхностью W_ε, является выпуклым, а больший шар является вогнутым. Таким образом, внутренняя эквидистантная деформация гиперповерхности W (для заданной коориентации) делает W выпуклой, внешние же деформации W_ε вогнуты.

Вычислим теперь K для $W = S^n(1)$. Во-первых,

$$\frac{d}{d\varepsilon} g^*_\varepsilon = -2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \, g_0,$$

и поэтому

$$A^*_\varepsilon = -\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{Id},$$

(формально, A^*_ε равен $\frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon}g^*_\varepsilon$, деленному на g^*_ε). Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon} A^*_\varepsilon = (-1 - \operatorname{tg}^2\varepsilon) \operatorname{Id},$$

где Id — тождественный оператор на $S = T(W)$. Таким образом, $B_S = -\operatorname{Id}$ и $K(\sigma) = 1$ для всех касательных плоскостей σ в $W = S^n(1)$.

Заметим, что при скалярном изменении метрики кривизна K изменяется квадратически. Например, сфера $S^n(R)$ радиуса R имеет кривизну $K = R^{-2}$. (В данном случае это видно непосредственно из того, что $g^*_\varepsilon = \cos^2(\varepsilon R^{-1}) g_0$.) Вообще, обозначим через RV многообразие с новым расстоянием, определенным равенством

$$\operatorname{dist}_{\mathrm{new}} = R \operatorname{dist}_{\mathrm{old}},$$

которое соответствует $g_{\mathrm{new}} = R^2 g_{\mathrm{old}}$. Тогда для K формула будет иметь вид

$$K(RV) = R^{-2} K(V).$$

Секционная кривизна для поверхностей. Если $\dim V = 2$, то тензор кривизны сводится к функции на V (поскольку число компонент $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ равно 1 при $n = 2$, см. § 1), которая адекватно определяется секционной кривизной $K(v) = K(\sigma = T_v(V))$ для точек $v \in V$. Знаменитая формула Гаусса выражает K для поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Theorema Egregium[1]. *Секционная кривизна $K(v)$ поверхности $V \subset \mathbb{R}^3$ равна якобиану гауссова отображения $V \to S^2$ в точке v или, что эквивалентно, произведению главных кривизн (т. е. собственных значений Π^V или оператора формы A) в точке v.*

Конечно, доказательство тривиально по меркам современного исчисления бесконечно малых. Однако основное следствие теоремы выглядит так же замечательно, как и 200 лет назад: якобиан гауссова

[1] Egregium (лат.) — выдающаяся, великая (прим. перев.)

отображения не изменяется, если мы *изогнем* V в $\mathbb{R}^3$, т. е. если мы применим деформацию, сохраняющую длину кривых в V. Например, если мы возьмем плоский лист бумаги и начнем его сгибать, то он не будет оставаться плоским в $\mathbb{R}^3$, однако присущая ему внутренняя геометрия не изменится, и поэтому якобиан гауссова отображения останется равным нулю.

Еще одно следствие теоремы Гаусса гласит:

Выпуклые и вогнутые поверхности имеют кривизну $K \geqslant 0$, а седловые поверхности имеют $K \leqslant 0$.

Заметим, что первое утверждение обобщается на выпуклые гиперповерхности $V^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ для всех n: для них $K \geqslant 0$ по формуле Гаусса, обобщенной для бóльших размерностей. С другой стороны, *седловые поверхности* $V^2 \subset \mathbb{R}^n$ имеют $K \leqslant 0$ для всех n, где «седловые» означает следующее.

Свойство выпуклой оболочки. Каждая точка $v \in V$ содержится в евклидовой выпуклой оболочке границы любой достаточно малой окрестности $U \subset V$ точки v. (Сравните с седловой поверхностью в § $\frac{1}{2}$.)

Доказательство того, что $K \leqslant 0$, следует из формулы Гаусса для большей коразмерности. (Эта формула применима ко всем $V^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, но она не имеет хорошей геометрической интерпретации для $K(V^n) \leqslant 0$, если $n \geqslant 3$.)

Поверхности $\boldsymbol{\Sigma \subset V}$. Секционная кривизна K поверхности V может быть вычислена в каждой касательной плоскости $\sigma \subset T_v(V)$ по подходящей поверхности Σ в V. А именно, можно взять Σ так, чтобы $T_v(\Sigma) = \sigma$ и чтобы Σ была *геодезической* в точке v. Геодезическое условие эквивалентно существованию геодезических координат $u_1, \ldots, u_n$ в точке v, относительно которых Σ становится евклидовой плоскостью в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовыми координатами $u_1, \ldots, u_n$, сравните с § 1). Тогда $K(\sigma)$ в V совпадает с $K(v)$ в Σ для метрики в Σ, индуцированной из V (это следует из еще одного обобщения формулы Гаусса).

Секционная кривизна гиперповерхностей. Рассмотрим гиперповерхность $W \subset V$ и попытаемся сформулировать гауссову теорему Egregium, которая связывает $K_W(\sigma)$ с $K_V(\sigma)$ для плоскостей $\sigma \in T_w(W)$. Для этого нам необходима вторая основная форма Π^W, суженная на σ, где σ имеет евклидову метрику, унаследованную от g на $T_w(V)$. Теперь каждая квадратичная форма на $\mathbb{R}^2 = (\sigma, g|\sigma)$ характеризуется своими собственными значениями (которые являются собственными значениями соответствующего симметрического оператора A на $\mathbb{R}^2$). Обозначим через $\mathrm{Dis}(\sigma)$ произведение этих собственных значений для формы Π^W на σ. Тогда формула Гаусса примет вид

$$K_W(\sigma) = K_V(\sigma) + \mathrm{Dis}(\sigma).$$

Здесь, как и раньше, доказательство алгоритмичное, однако следствия достаточно хорошие. Например, если гиперповерхность W *выпуклая* (см. следующий параграф при обсуждении выпуклости V) и, таким образом, Π^W является определенной формой, то можно заключить, что

$$K_W \geqslant K_V.$$

В частности, если V имеет положительную секционную кривизну, то это же верно и для W.

Формула трубки. Формула трубки для гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ (см. (2) в § 0) обобщается для гиперповерхностей W в произвольном римановом многообразии V при помощи равенства

$$\frac{d}{d\varepsilon} A_\varepsilon^* = -(A_\varepsilon^*)^2 + B. \tag{7}$$

Здесь B — это оператор на касательных пространствах S к касательному расслоению $T(W_\varepsilon)$, определенный ранее в этом параграфе равенством (5). Заметим, что (7) при $\varepsilon = 0$ сводится к (5) для геодезических подмногообразий W (т. е. когда $\Pi^W = 0$). Так же как и раньше, мы не будем приводить вычислительный формализм римановой геометрии. Укажем лишь здесь на следующую важную особенность в (7). Член B характеризует кривизну многообразия V и не зависит от W. Действительно, мы имеем B на каждой касательной гиперплоскости $S \subset T(V)$, и B в (7) получено сужением на гиперплоскости $T_w(W_\varepsilon) \subset T_w(V)$. С другой стороны, операторы A_ε служат мерой относительной кривизны гиперповерхности $W = W_0$ в V, а также при $\varepsilon \neq 0$ эквидистантных гиперповерхностей W_ε.

Используя (7), мы можем дать первую геометрическую характеристику многообразий с $K \geqslant 0$ и $K \leqslant 0$ в терминах эквидистантных гиперповерхностей W_ε.

Критерий локальной выпуклости. *Если $K(V) \geqslant 0$, то внутренняя эквидистантная деформация W_ε каждой выпуклой гиперповерхности $W \subset V$ остается выпуклой, а если $K(V) \leqslant 0$, то внешняя* *деформация выпукла. Обратно, если внутренняя эквидистантная деформация сохраняет выпуклость для всех выпуклых гиперповерхностей в* V*, то* $K(V) \geqslant 0$*, а если это происходит для внешних деформаций, то* $K(V) \leqslant 0$.

В этом утверждении мы говорим о коориентированных гиперповерхностях, и выпуклость *определяется* как $\Pi^W \geqslant 0$. Эквидистантная деформация, о которой идет речь, рассматривается только для малых ε, так что нормальное геодезическое отображение $d_\varepsilon \colon W \to V$ является диффеоморфизмом W на W_ε (это необходимо для использования формулы трубки в нашем случае). Тогда утверждения

$$K(V) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \text{внутренняя деформация сохраняет выпуклость}$$

и

$$K(V) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \text{внешняя деформация сохраняет выпуклость}$$

превращаются в утверждения

$$K \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B \leqslant 0$$

и

$$K \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B \geqslant 0.$$

Чтобы доказать обратную импликацию, от сохранения выпуклости к знаку $K(V)$, надо взять достаточно много выпуклых гиперповерхностей W в V, эквидистантные деформации W_ε которых не выпуклы всякий раз, когда знак кривизны не тот. Такие гиперповерхности W должны иметь настолько малую вторую основную форму (и, следовательно, малую $||A||$), чтобы быть чувствительными к члену B в (7). Этого можно легко добиться, используя гиперповерхности W, соответствующие кускам евклидовых сфер большого радиуса в геодезических координатах. (Мы предлагаем читателю действительно предъявить такие W и завершить доказательство.)

Приведенный выше критерий выпуклости имеет смысл для довольно общих метрических пространств (например, для многообразий Финслера), где можно определить выпуклость, но где наше инфинитезимальное определение кривизны не работает. С другой стороны, инфинитезимально определенные условия $K \geqslant 0$ и $K \leqslant 0$ крайне важны собственно в римановых рамках, вследствие возможности нескольких различных геометрических интерпретаций, которые отнюдь не следуют одна из другой для неримановых многообразий. Например, неизвестно, как обобщить импликацию

$$K(V) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad K(W) \geqslant 0$$

для *выпуклых* гиперповерхностей W в *неримановых* пространствах V. Даже для негладких выпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ единственное простое доказательство того, что $K(W) \geqslant 0$, использует аппроксимацию гладкими гиперповерхностями после применения гауссовой теоремы Egregium.

В заключение параграфа мы выясним связь секционной кривизны с тензором кривизны, определенным в § 1.

Секционная кривизна и оператор кривизны. Секционная кривизна в каждой точке $v \in V$ является функцией на грассмановом многообразии $\mathrm{Gr}_2 \mathbb{R}^n = \mathrm{Gr}_2 T_v(V)$ плоскостей в $\mathbb{R}^n = (T_v(V), g_v)$. Чтобы понять сущность этой функции, мы используем стандартное (Плюккера) вложение $\mathrm{Gr}_2 \mathbb{R}^n$ в единичную сферу внешней степени $\Lambda^2\mathbb{R}^n$, которое каждой плоскости $\sigma \in \mathrm{Gr}_2 \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие бивектор $\beta = x_1 \wedge x_2$ для ортогонального базиса (x_1, x_2) в $\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Этот бивектор β не зависит от выбора x_1, x_2 (здесь σ ориентированная и базис соответствует этой ориентации), и норма $||\beta||$ (естественно определенная по евклидовой норме в $\mathbb{R}^n$) равна единице. Теперь из простой алгебры следует, что функция секционной кривизны $\sigma \to K(\sigma)$ на $\mathrm{Gr}_2 \mathbb{R}^n \subset \subset \Lambda^2\mathbb{R}^n$ является квадратичной: существует (необходимо единственная) квадратичная форма Q на $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ такая, что $K(\sigma) = Q(\sigma, \sigma)$ для всех $\sigma \in \mathrm{Gr}_2 \mathbb{R}^n$. Следуя установленной традиции, часто используют вместо Q соответствующий симметрический оператор R, определенный равенством $\langle R\alpha, \beta\rangle = Q(\alpha, \beta)$ для скалярного произведения на $\Lambda^2 T(V)$, индуцированного g на $T(V)$. Он называется *оператором кривизны* $R\colon \Lambda^2 T_v(V) \to \Lambda^2 T_v(V)$.

Заметим, что $d = \dim \Lambda^2\mathbb{R}^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, и поэтому квадратичные формы Q на $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ образуют пространство размерности

$$\frac{d(d+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}.$$

Это больше, чем число независимых индексов в тензоре кривизны (которое равно $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$, см. § 1), и в действительности форма Q удовлетворяет некоторому отношению симметрии, называемому *тождеством Бианки*, которое сводит размерность к $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. В этом случае форму Q (и оператор кривизны R) можно отождествить с тензором кривизны многообразия (V, g).

§ $2\frac{1}{2}$. Влияние кривизны $K(V)$ на малые шары в V

Мы хотим привести здесь еще один геометрический критерий для знака кривизны $K(V)$ в терминах размеров малых шаров в V. А именно, мы покажем, что малые концентрические шары растут *медленнее* в V, чем шары в $\mathbb{R}^n$, если $K(V) \geqslant 0$. Наоборот, если $K(V) \leqslant 0$, то шары в V растут *быстрее* с ростом радиуса, чем это происходит в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Неравенство

$$B \leqslant \lambda B'$$

для двух метрических пространств B и B' означает, что существует биективное (иногда достаточно сюръективного) отображение $f\colon B' \to B$ такое, что

$$\operatorname{dist}_B(f(a), f(b)) \leqslant \lambda \operatorname{dist}_{B'}(a, b)$$

для всех a и b из B'.

Критерий монотонности. *Если $K(V) \geqslant 0$, то для каждой точки $v \in V$ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любых двух концентрических шаров $B(v, \delta)$ и $B(v, \lambda\delta)$ таких, что $\delta \leqslant \lambda\delta \leqslant \delta_0$, выполнено*

$$B(v, \lambda\delta) \leqslant \lambda B(v, \delta), \tag{8}$$

где неравенство понимается в смысле данного выше определения.

Неравенство (8) *является характеристическим для $K \geqslant 0$.* Если оно выполнено для всех малых шаров с центром в v, то секционная кривизна в точке v неотрицательна. Аналогично, *неположительная кривизна $K \leqslant 0$ характеризуется обратным неравенством для шаров*

$$B(v, \lambda\delta) \geqslant \lambda B(v, \delta),$$

где $0 < \delta \leqslant \lambda\delta \leqslant \delta_0(v)$.

Идея доказательства. Известно, что каждую точку $a \in V$, лежащую достаточно близко к v, можно соединить с v *единственным* геодезическим отрезком $[v, a] \in V$. Теперь для каждого $a \in B(v, \delta)$ определим $b = f(a) \in B(v, \lambda\delta)$ как b-конец геодезического отрезка $[v, b]$, содержащего $[v, a]$, и такого, что

$$\operatorname{length}[v, b] = \lambda \cdot \operatorname{length}[v, a].$$

Полученное отображение $f\colon B(v,\delta) \to B(v, \lambda\delta)$ сохраняет геодезические, выпущенные из v, то же самое относится к сферам с центром в v: сфера $S(v, \alpha)$ радиуса α для каждого $\alpha \leqslant \delta$ переходит в $S(v, \beta)$, где $\beta = \lambda\alpha$. Функция f растягивает отрезки в λ раз в радиальном направлении, и мы должны показать, что она расширяет сферы $S(v, \alpha)$ не больше этого. Сферы $S(v, \varepsilon)$ образуют эквидистантное семейство, применим к ним формулу трубки (7). Отсюда будет следовать, что при $K \geqslant 0$ сферы $S(v, \varepsilon)$ растут *медленнее* по ε, чем соответствующие сферы в $\mathbb{R}^n$ (где $K = 0$ и отрицательный член B в формуле трубки отсутствует), несмотря на то, что изначально для «бесконечно малых» ε сферы $S(v, \varepsilon)$ (асимптотически) евклидовы. Другими словами, собственные значения оператора формы на сфере $S(v, \varepsilon)$ меньше в V, чем в $\mathbb{R}^n$, и, таким образом, сферы растут медленнее в V. Отсюда следует требуемое λ-неравенство для шаров $B(v, \delta)$ и $B(v, \lambda\delta)$ при $K \geqslant 0$. Случай $K \leqslant 0$ рассматривается аналогично.

Если $\dim V = 2$, то обратное утверждение, определяющее знак кривизны $K(V)$ в терминах шаров, следует из только что доказанного, так как вблизи каждой точки v, где $K(v) \neq 0$, кривизна является либо положительной, либо отрицательной (потому что существует единственная 2-плоскость σ в точке v). Обобщение для случая $n \geqslant 2$ можно получить, посмотрев на рост малых шаров $B(v, \beta)$, пересеченных с геодезической поверхностью Σ в точке v, касающейся плоскости $\sigma \in T_v(V)$, для которой мы изучаем знак кривизны $K(\sigma)$. Детали доказательства здесь несложно заполнить, мы предлагаем это сделать читателю.

Заметим, что неравенство (8) для шаров в V можно использовать как определение $K \geqslant 0$ для произвольного метрического пространства V. Однако соответствующая теория плохо развита. Например, неизвестно, когда это определение совпадает с определением, использующим выпуклые гиперповерхности.

Другое замечание состоит в том, что можно сравнивать не только концентрические шары в V, но и малые δ-шары $B(v,\,\delta)\subset V$ с евклидовыми шарами $B'(\delta)\subset\mathbb{R}^n$. А именно,

$$K(V)\geqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad B(v,\,\delta)\leqslant B'(\delta)$$

и

$$K(V)\leqslant 0 \quad\Longleftrightarrow\quad B(v,\,\delta)\geqslant B'(\delta).$$

Эти неравенства также можно использовать в качестве определения $K\geqslant\leqslant 0$. Однако для неримановых V оно отличается от вышеприведенного определения, использующего неравенство (8) для концентрических шаров.

Пример. Пусть V — конечномерное *банахово пространство*, т. е. n-мерное линейное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и соответствующим расстоянием $\operatorname{dist}(v_1,\,v_2)=\|v_1-v_2\|$. Это V, так же как и $\mathbb{R}^n$, допускает преобразование подобия в каждой точке $v\in V$:

$$v'\to v+\lambda(v'-v)$$

для переменного v' и каждого $\lambda\in R_+$. Отсюда следует *метрическое равенство*

$$B(v,\,\lambda\delta)=\lambda B(v,\,\delta)$$

для всех шаров и, таким образом, *обращение в ноль* кривизны $K(V)$. С другой стороны, если для шара $B=B(v,\,\delta)$ в таком V и для евклидова δ-шара B' выполнено неравенство $B\geqslant B'$ (либо $B\leqslant B'$), то необходимо $B=B'$ и V изометрично $\mathbb{R}^n$. (Это простое упражнение для читателя.)

В связи с этим возникает вопрос: какова причина того, что различные геометрические определения знака кривизны совпадают для римановых многообразий? Во-первых, по определению, римановы многообразия локально являются евклидовыми, и поэтому их основная геометрия схожа с геометрией в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, поскольку мы предполагаем риманову структуру g гладкой, мы ужасно ограничиваем инфинитезимальную геометрию в каждой точке $v\in V$. Например, вся инфинитезимальная информация второго порядка (которая отражена в кривизне) определяется *конечным множеством* параметров в каждой точке многообразия V (т. е. значениями первых и вторых производных от g_{ij}), и поэтому существует много алгебраических соотношений между этими параметрами. Будучи объединенными, эти инфинитезимальные соотношения приобретают геометрический смысл, такой, например, как эквивалентность различных геометрических определений (знака) кривизны. С другой стороны, инфинитезимальная геометрия, скажем, многообразия Финслера в заданной точке, включает *бесконечное* множество параметров, поскольку они необходимы, чтобы задать общую (банахову) норму на каждом касательном пространстве. Тем не менее, существуют некоторые нeримановы пространства с конечномерной инфинитезимальной геометрией. Среди них наиболее известными являются *субримановы* или *Карно–Каратеодори* пространства, однако их геометрия не изучена так глубоко, как в римановом случае (ср. с [32]).

§ 3. Многообразия с положительной секционной кривизной

Как мы уже знаем, условие на кривизну $K(V) \geqslant 0$ характеризуется сохранением выпуклости малых внутренних эквидистантных деформаций $W_\varepsilon \subset V$ выпуклых гиперповерхностей W в V. Теперь мы хотим установить выпуклость W_ε для всех отрицательных ε («отрицательное» соответствует «внутренней» деформации в соответствии с нашими соглашениями, см. § 0), и первое, что нам необходимо — это определение выпуклости, применимое для негладких гиперповерхностей. Мы начнем со следующего основного понятия.

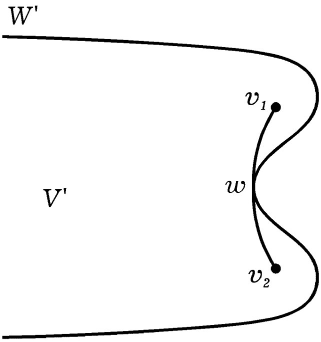

Рис. 8

Выпуклая граница. Пусть V' — риманово многообразие с границей W'. Будем говорить, что W' (геодезически) выпукла, если во внутренности $\operatorname{Int} V' = V' - W'$ любые две точки можно соединить минимизирующим отрезком при условии, что такой отрезок существует для любых двух точек в рассматриваемом объемлющем пространстве $V' \supset \operatorname{Int} V'$. (Последнее условие выполнено для всех *полных*, в частности, *компактных* многообразий V'.) Другими словами, невыпуклость W' обнаруживается минимизирующими отрезками между v_1 и v_2 в $\operatorname{Int} V'$, которые пересекают W' в некоторой точке w между v_1 и v_2. См. рис. 8.

Отметим, что такой минимизирующий отрезок $[v_1, v_2]$ в V' обычно «изгибается» в точке w, где он пересекает W'. Например, если V' — это часть большего многообразия $V \supset V', \dim V = \dim V'$, то $[v_1, v_2]$ может быть (и обычно является) не геодезическим в точке w в V. В связи с этим можно видеть, что гиперповерхность W' выпукла в том и только в том случае, если вторая основная форма $\Pi^{W'}$ положительно полуопределена, при условии, что W' является C^2-гладкой (это необходимо для того, чтобы $\Pi^{W'}$ была определена). Отсюда следует, что выпуклость является *локальным* свойством W, и эта локальность сохраняется (по причине вышесказанного) и для негладких W'. (Заметим, что при помощи наших рассуждений, которые используют минимизацию длины внутри V', можно легко доказать классический результат о выпуклости *связных локально выпуклых* подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Мы предлагаем читателю найти чисто элементарное доказательство классического критерия получения глобальной (из локальной) выпуклости для конечного полиэдра V' в $\mathbb{R}^3$.)

Далее, гиперповерхность W в V называется *выпуклой*, если вблизи каждой точки $w \in W$ ее можно поместить внутри (части) границы выпуклой области $V' \subset V$, где последняя выпуклость сводится к граничной выпуклости V', определенной выше. Снова, если гиперповерхность W гладка, то это эквивалентно тому, что $\Pi^W \geqslant 0$, однако теперь глобальная выпуклость W не следует, вообще говоря, из нашего локального определения, как видно на рис. 9.

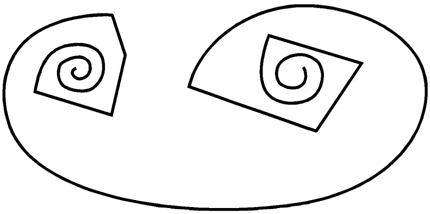

Рис. 9

Применим понятие геодезической выпуклости к подмножествам $V_0 \subset V$ следующим образом. V_0 называется *геодезически выпуклым*, если для любых двух точек v_1 и v_2 существует путь между v_1 и v_2, имеющий минимальную длину среди всех путей между v_1 и v_2 в V_0 и являющийся также геодезическим в объемлющем многообразии V. Заметим, что выпуклые гиперповерхности W не являются выпуклыми в этом смысле, но то, что они ограничивают, может быть выпуклым. С другой стороны, каждое связное *вполне геодезическое* подмногообразие $V_0 \subset V$ геодезически выпукло. (Напомним, что V_0 называется *вполне геодезическим*, если каждая геодезическая в V, которая касается V_0 в точке, необходимо содержится в V_0.) Действительно, можно считать каждое k-мерное выпуклое многообразие V_0, где $k \leqslant n = \dim V$, выпуклой областью внутри вполне геодезического подмногообразия размерности k в V.

Внутренняя деформация границы. Пусть V — компактное многообразие с границей $\partial V = W$. Положим

$$V_\varepsilon^- = \{v \in V \mid \operatorname{dist}(v, W) \geqslant \varepsilon\}.$$

Если V_ε^- — это многообразие с границей, то

$$\partial V_\varepsilon^- = W_{-\varepsilon} = \{v \in V \mid \operatorname{dist}(v, W) = \varepsilon\},$$

(где ε берется со знаком минус в соответствии с нашим соглашением о кооориентации, см. §0). Если W_ε гладка, то $W_{-\varepsilon}$ тоже гладка для малых ε, однако с ростом ε гиперповерхность $W_{-\varepsilon}$ может проявлять особенности. Существует две причины появления особенностей. Во-первых, две различные части гиперповерхности W при движении внутри V могут встретиться, см. рис. 10 и 11. Другими словами, точка $v \in V_\varepsilon^-$ становится сингулярной, если существуют две различные точки w' и w'' в W, для которых

$$\varepsilon = \operatorname{dist}(v, w') = \operatorname{dist}(v, w'') = \operatorname{dist}(v, W).$$

Заметим, что v есть *двойная точка* нормального геодезического отображения d_ε и $d_\varepsilon(w') = d_\varepsilon(w'') = v$.

Во-вторых, особенность появляется, когда в V встречаются две «бесконечно близкие» точки из W. Это значит, что v является ***фокальной*** точкой для некоторой точки $w \in W$ такой, что $\operatorname{dist}(v, w) = \varepsilon$. Здесь «фокальная» означает, что нормальное геодезическое отображение $d_\varepsilon \colon W \to V$ не является регулярным в точке w, т. е. дифференциал отображения d_ε не инъективен в точке w. (Напомним, что d_ε сдвигает каждую точку w в ε-конец геодезического ε-отрезка, нормального к W в точке w.) Отметим, что первый момент ε_0, когда появляется фокальная точка, характеризуется «взрывом» второй основной формы границы W, отображенной в V при помощи d_ε:

$$\|\Pi\| \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \varepsilon_0.$$

Это легко видеть, например, для внутренней деформации сферы радиуса ε_0 в $\mathbb{R}^n$.

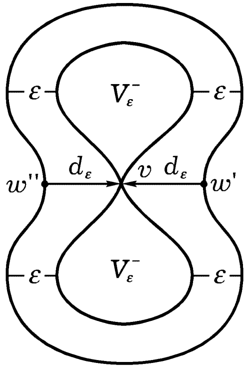

Рис. 10

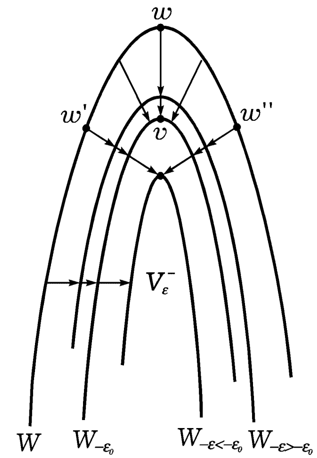

Рис. 11

Теперь читатель может оценить элегантность следующей основной теоремы Громола и Мейера (см. [10]).

Выпуклое сжатие для $\mathbf{K} \geqslant 0$. *Пусть V — компактное связное многообразие с выпуклой границей и неотрицательной секционной кривизной. Тогда подмножества $V_\varepsilon^- \subset V$ выпуклы для всех $\varepsilon \geqslant 0$.* (Мы предполагаем, что V связно для того, чтобы было выполнено наше текущее определение выпуклости.)

Идея доказательства. Предположим, что гиперповерхность $W = \partial V$ является гладкой. Тогда многообразие V_ε^- остается гладким и, следовательно, выпуклым, поскольку нормальное геодезическое отображение $d_\varepsilon \colon W \to V$ является гладким вложением. Кроме того, если $d_\varepsilon(W)$ проявляет самопересечение, не имеющее фокальных точек, то V_ε^- локально представляется как пересечение гладких выпуклых подмножеств и, таким образом, снова является выпуклым. Теперь легко поверить в выпуклость в фокальных точках, так же как и в то, что они просто являются «инфинитезимальными» двойными точками (которые обращают в ноль дифференциал отображения в касательном векторе $\tau \in T(W)$, несущем с собой «бесконечно близкие точки», соответствующие «двум концам» вектора τ).

Чтобы сделать вышеприведенные рассуждения строгими, можно

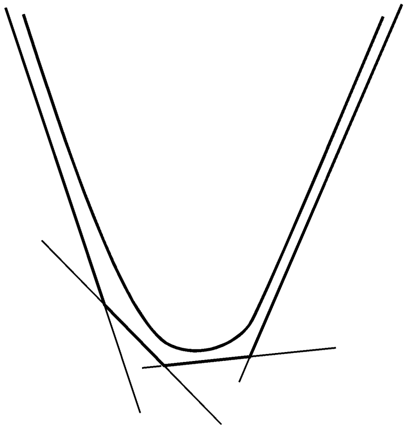

Рис. 12

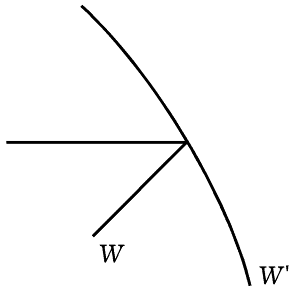

Рис. 13

применить кусочно-гладкую аппроксимацию (сравн. с §0) выпуклых гиперповерхностей (и подмножеств), как на рис. 12. Потребуем, чтобы каждый кусок был выпуклым и имел вторую основную форму П такую, что $\|\Pi\| \leqslant c$ для некоторой фиксированной константы, например, $c = 1$. Тогда малые внутренние ε-деформации этих кусочно-гладких гиперповерхностей снова будут выпуклыми и кусочно-гладкими, а деформированные куски, к сожалению, могут иметь $\|\Pi\|$, немного превосходящую c. Это увеличивает $\|\Pi\| \to \infty$, что соответствует появлению фокальной точки. Однако это можно предотвратить, поскольку деформированную гиперповерхность можно снова сколь угодно близко аппроксимировать другими кусочно-гладкими выпуклыми гиперповерхностями, имеющими $\|\Pi\| \leqslant c$ для всех кусков. Таким образом, последовательно применяя малые эквидистантные деформации и аппроксимации

$$W \xrightarrow{\text{def}} W_\varepsilon \xrightarrow{\text{appr}} (W'_\varepsilon \xrightarrow{\text{def}} W'_\varepsilon)_\varepsilon \to \dots ,$$

мы сможем остаться в классе кусочно-гладких выпуклых гиперповерхностей для больших внутренних деформаций.

Чтобы завершить доказательство, мы должны как-нибудь получить малые выпуклые куски, вне которых мы построим аппроксимирующие гиперповерхности. Это можно сделать в каждой точке v, используя геодезические координаты в v, которые связывают малые вблизи v

куски строго выпуклых гиперповерхностей W в V («строго» означает, что $\Pi^W > 0$) с гиперповерхностями в $\mathbb{R}^n$ (где евклидовы координаты соответствуют геодезическим координатам в V, см. §1). Таким образом, аппроксимация *строго* выпуклых W сводится (локально, а затем и глобально) к соответствующей евклидовой задаче, где аппроксимация довольно проста, однако нестрогий случай является более тонким.

Отметим, что понятие строгой выпуклости W можно расширить для негладких точек $w \in W$, потребовав существование *гладкой строгой выпуклой* гиперповерхности $W' \ni w$ (т. е. $\Pi^{W'}(w) > 0$), «внутренняя область» которой содержит W, как на рис. 13.

Здесь может показаться, что не стоит особо волноваться из-за нестрогой выпуклости, поскольку малые возмущения могут сделать любую выпуклую гиперповерхность W строго выпуклой. Действительно, это работает, если V имеет *строго положительную* кривизну ($K(\sigma) > 0$ для всех $\sigma \subset T(V)$), когда малая внутренняя эквидистантная деформация приводит к строгой выпуклости. Аналогично, если $K < 0$, можно получить строгую выпуклость с внешней деформацией. В $V = \mathbb{R}^n$ выпуклые гиперповерхности также можно аппроксимировать строго выпуклыми (см. § $\frac{1}{2}$). Однако если мы посмотрим на произведение многообразий, такое как $V = V_0 \times \mathbb{R}^k$, где V_0 — замкнутое многообразие с $\dim V_0 > 0$, и возьмем $W = V_0 \times S^{k-1}$ для круговой (и строго выпуклой!) сферы S^{k-1} в $\mathbb{R}^k$, мы увидим, что это W является выпуклым, но не является строго выпуклым и не может быть аппроксимировано какими-либо строго выпуклыми гиперповерхностями.

Геометрия эквидистантных гиперповерхностей в вышеприведенном примере произведения очень проста. А именно,

$$W_{-\varepsilon} = V_0 \times S^{k-1}(\rho - \varepsilon),$$

где ρ — это радиус начальной сферы $S^{k-1} = S^{k-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^k$. Кроме того, область $V_\varepsilon^- \subset V$, ограниченная гиперповерхностью $W_{-\varepsilon}$, равна $V_0 \times B^{k-1}(\rho-\varepsilon)$ для шаров $B^{k-1}(\rho-\varepsilon)$, ограниченных сферами в $\mathbb{R}^k$. Таким образом, V_ε^- и $W_{-\varepsilon}$ исчезают в момент $\varepsilon = \rho$, и в последний момент V_ε^- и $W_{-\varepsilon}$ равны $V_0 \times 0$ в $V = V_0 \times \mathbb{R}^k$.

Похожая картина наблюдается для всех многообразий V с $K(V) \geqslant 0$. В то время, когда мы деформируем границу $W = \partial V$ внутрь, существует первый момент ρ

$$\rho = \operatorname{inrad} V \overset{\text{def}}{=} \sup_{v \in V} \operatorname{dist}(v, W)$$

такой, что $\dim V_\varepsilon^- = n = \dim V$ для $\varepsilon < \rho$ и $\dim V_\rho^- < n$. Если $K(V) > 0$ или если $W = \partial V$ строго выпукла, то V_0 может быть только *одноточечным*, поскольку никакое вполне геодезическое подмногообразие V_0 положительной размерности в V не может быть строго выпуклым в неграничной точке $v_0 \in V$ в соответствии с нашим определением строгой выпуклости, данным выше для сингулярных точек. С другой стороны, в нестрогом случае внутренняя эквидистантная деформация может ограничивать подмножество $V_{\varepsilon_1}^- \subset V$ положительной размерности, которое является, как мы знаем, выпуклым. Это $V_{\varepsilon_1}^-$ само является компактным многообразием с границей или без. Если $V_{\varepsilon_1}^-$ имеет границу (назовем ее $W^1 = \partial V_{\varepsilon_1}^-$), то можно сжимать $V_{\varepsilon_1}^-$ дальше при помощи внутренней деформации $W_{-\varepsilon}^1$ гиперповерхности W^1 в $V_{\varepsilon_1}^-$. Если процесс остановится на замкнутом (т.е. без границы) многообразии, то мы закончили; если нет, то мы двигаемся к многообразиям еще меньшей размерности

$$(V_{\varepsilon_1}^-)_{\varepsilon_2}^-, ((V_{\varepsilon_1}^-)_{\varepsilon_2}^-)_{\varepsilon_3}^-, \dots ,$$

пока не достигнем замкнутого вполне геодезического подмногообразия $V_0 \subset V$ без границы, называемого *соулом*[1] многообразия V. Теперь несложно показать, что *V гомеоморфно расслоению шаров над V_0*. Например, *V гомеоморфно n-шару в строгом случае*, т.е. когда $K > 0$ либо $W = \partial V$ строго выпукла. (Строгий случай принадлежит Громолу и Мейеру, общий — Чигеру и Громолу (см. [10])). Отсюда следует, что многообразия V с $K \geqslant 0$ склонны иметь достаточно простую топологию, и всякий раз, когда эта топология подходит к критическому уровню сложности, совместимому с $K \geqslant 0$, геометрия на V становится очень специальной. Например, если рассмотренное выше многообразие V с $K(V) \geqslant 0$ и выпуклой границей имеет нетривиальную гомологию размерности k, то V содержит замкнутое вполне геодезическое подмногообразие (вышеупомянутый соул) размерности $\geqslant k$. Здесь стоит отметить, что существование вполне геодезических подмногообразий размерности k при $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $n = \dim V$ является скорее исключением, чем правилом: для *общих* римановых метрик g на V таких подмногообразий не существует.

Из всего вышесказанного следует также, что гомотопическая классификация многообразий V с $K(V) \geqslant 0$, допускающих выпуклую границу, сводится к замкнутым многообразиям с такими свойствами. (От-

[1] В оригинале «soul» — душа, дух (прим. перев.)

метим, что соул $V_0 \subset V$ имеет $K(V_0) \geqslant 0$ и является вполне геодезическим в V.) Этот результат можно расширить на *некомпактные полные* многообразия V без границы: каждое такое V слоится над своим соулом, который является замкнутым вполне геодезическим подмногообразием $V_0 \subset V$, и слои гомеоморфны некоторому $\mathbb{R}^k$. (Это показывается построением исчерпания многообразия V компактными выпуклыми областями с выпуклыми границами, см. [10].)

Теперь спрашивается, каким может быть гомотопический тип *замкнутого* многообразия V с $K(V) \geqslant 0$.

С определенной стороны, известно, что компактное однородное пространство $V = G/H$ (для компактной группы Ли G) допускает метрику такую, что $K \geqslant 0$. На самом деле для каждой биинвариантной метрики g на G выполнено $K(g) \geqslant 0$ согласно следующей формуле (см. [10]), которая выражает значение K на линейной оболочке $\sigma = x \wedge y$ двух ортонормированных векторов x и y на касательном пространстве T_e к G равенством

$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\big\|[x, y]\big\|^2.$$

Здесь $[\cdot, \cdot]$ — скобка в алгебре Ли $L(G) = T_e$. Теперь g спускается к метрике $\overline{g}$ на V, определенной следующим условием: дифференциал проекции $G \to V$ *изометрически* переводит *горизонтальное* подрасслоение расслоения $(T(G), g)$ в $(T(V), \overline{g})$ (где горизонтальное подрасслоение состоит из векторов, g-нормальных к слоям проекции, которые являются также орбитами H в G). Известно, что кривизна $\overline{g}$ равна $K(\overline{x} \wedge \overline{y}) + \frac{3}{4}\big\|[x, y]_{\mathrm{vert}}\big\|^2$, где x и y — ортонормированные горизонтальные векторы в T_e, а $\overline{x}$, $\overline{y}$ — их образы в $T(V)$ (см. [10]), и, таким образом, $K(\overline{g}) \geqslant 0$.

Среди однородных многообразий с $K \geqslant 0$ самыми замечательными являются *компактные симметрические пространства* V, в которых для каждой точки $v \in V$ существует изометрическая инволюция $I\colon V \to V$, оставляющая неподвижной точку v и имеющая дифференциал $DI = -\mathrm{Id} \mid T_v(V)$. Действительно, считается, что симметрические примеры являются главной причиной изучения $K \geqslant 0$.

Существуют некоторые неоднородные многообразия с $K \geqslant 0$, но они не оказывают влияния дальше нашей интуиции. Например, верится, что топологически «самое большое» n-мерное многообразие с $K \geqslant 0$ есть n-мерный тор T^n (который допускает метрику с $K = 0$, поскольку $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$). В этом отношении известно, что *фундаментальная* *группа* $\pi_1(V)$ для $K(V) \geqslant 0$ *не может быть больше, чем* $\mathbb{Z}^n$, поскольку *она несоизмерима с* $\mathbb{Z}^n$ (это уже верно для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$, см. §5), и известно также, что *числа Бетти* $b_i(V)$ *ограничены универсальными константами* $b_{i,\,n}$. Однако невозможно ограничить $b_i(V)$ числами $b_i(T^n) = \binom{n}{i}$. (Об этом см. [9].)

Вышеупомянутое ограничение на $\pi_1(V)$ становится радикально лучше, если мы предположим $K(V)$ *строго* положительным, (т. е. $K(\sigma) > 0$ для всех $\sigma \in T(V)$). А именно, $\pi_1(V)$ *конечна* в этом случае.

Теорема Бонне. *Если* $K(V) \geqslant \varkappa^2$, *то диаметр* V *ограничен*

$$\operatorname{Diam} V \leqslant \pi/\varkappa,$$

где

$$\operatorname{Diam} V \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{v_1,\, v_2 \in V} \operatorname{dist}(v_1,\, v_2).$$

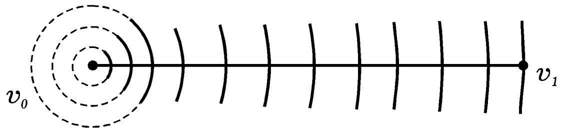

Рис. 14

Идея доказательства. Возьмем минимизирующий отрезок между двумя точками в V, скажем, $[v_0,\, v_1]$ между v_0 и v_1, и посмотрим на сферы $S(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в v_0 вблизи точек $v \in [v_0,\, v_1]$ (см. рис. 14). Из минимизирующего свойства $[v_0,\, v_1]$ следует, что каждая сфера $S(\varepsilon)$ является гладкой в точке $v \in [v_0,\, v_1]$ такой, что $\operatorname{dist}(v_0,\, v) = \varepsilon$, где $\varepsilon < \operatorname{dist}(v_0,\, v_1)$. (Это простой общий факт, который справедлив без всяких условий на кривизну). С другой стороны, простой анализ формулы трубки (7) в §2 показывает, что A^*_ε должно «взорваться» для некоторого конечного отрицательного ε. А именно, если мы начнем с некоторого A^*_0, то A^*_ε станет бесконечным для некоторого ε из промежутка $[-\pi/\varkappa,\, 0]$. Таким образом, длина отрезка $[v_0,\, v_1]$ не может превосходить $\pi/\varkappa$, и теорема доказана.

Критический случай для теоремы Бонне, который проясняет картину — это когда V является круговой сферой $S^n(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, которая имеет постоянную кривизну $\varkappa^2 = \rho^{-2}$. Здесь шар $B(v_0,\, \varepsilon)$ радиуса ε

с центром в $v_0 \in S^n$ является выпуклым в S^n до момента $\varepsilon = \pi\rho/2$, а для бо́льших ε граничная сфера $S^{n-1}_{(\varepsilon)} = W_{-\varepsilon}$ такого шара становится вогнутой. При $\varepsilon \to \pi\rho$ кривизна сферы $W_{-\varepsilon}$ (измеряемая оператором $A^*_{-\varepsilon}$) взрывается к бесконечности, в то время как дополнение $S^n - B(v_0, \varepsilon)$ становится «бесконечно выпуклым» при $\varepsilon \to \pi\rho$ и угасает при $\varepsilon > \pi\rho$. Далее, формула трубки показывает, что все это происходит еще быстрее при $K(V) \geqslant \varkappa^2$. А именно, сферы $S(\varepsilon)$ более вогнуты в V, чем в $S^n(\rho)$, а дополнение $V - B(v_0, \varepsilon)$ более выпукло. В частности, это дополнение должно стать пустым при $\varepsilon > \pi\rho$, как утверждает теорема Бонне.

Теперь конечность $\pi_1(V)$ следует из теоремы Бонне, примененной к универсальному накрытию $\widetilde{V} \to V$, которое имеет конечный диаметр и поэтому является компактным.

Стоит также рассмотреть случай, когда K *нестрого* положительна и π_1 бесконечна. Например, если π_1 изоморфна $\mathbb{Z}^n$, то V (изометрически!) является *плоским тором*, т. е. $V = \mathbb{R}^n/L$ для некоторой решетки в $\mathbb{R}^n$, изоморфной $\mathbb{Z}^n$ (см. [10]).

Не существует сравнимого результата такого рода для $b_i(V)$ при $i \geqslant 2$.

Замечание. Заключение теоремы Бонне остается справедливым при следующем (более слабом) предположении на $\mathrm{Ricci}(V)$:

$$\mathrm{Ricci} \geqslant (n-1)\varkappa^2,$$

и указанная выше характеризация плоского тора соотношением $\pi_1 = \mathbb{Z}^n$ также остается верной для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ (см. §5). С другой стороны, π_1-следствие теоремы Бонне уточняется теоремой Сайнджа (см. §$7\frac{1}{2}$), которая утверждает, что если $n = \dim V$ *четно* и $K > 0$, то фундаментальная группа либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}^2$, где последнее имеет место, если V неориентируемо.

§ $3\frac{1}{2}$. Функция расстояния и теорема Александрова–Топоногова

Взглянув на метрическое пространство V с конечной комбинаторной точки зрения, хочется узнать свойства $(N \times N)$-матриц попарных расстояний между точками в каждом подмножестве в V, содержащем N элементов. Другими словами, можно попытаться охарактеризовать V множеством таких метрических пространств с N элементами, которые изометрически вложены в V. Однако это можно увидеть другим способом, если рассмотреть отображение декартовой степени $V^N = V \times V \times \dots \times V$ в $\mathbb{R}^{N'}$, где $N' = \dfrac{N(N-1)}{2}$, скажем, $M_N\colon V^N \to \mathbb{R}^{N'}$, которое связывает каждый набор N точек в V с множеством взаимных расстояний между этими точками. Тогда нашим инвариантом пространства V будет являться образ $M_N(V^N) \subset \mathbb{R}^{N'}$. (Если существует естественная мера на V, то, как и в римановом случае, можно рассмотреть индуцированный M_N-образ этой меры в $\mathbb{R}^{N'}$.) Очевидно, универсальное ограничение на $M_3(V^3) \subset \mathbb{R}^3$ выражается ***неравенством треугольника.*** Затем известно также, как охарактеризовать евклидово и гильбертово пространства в терминах M_N (выразить скалярные произведения a_{ij} между векторами $x_0 - x_i$ в $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N-1$ в терминах квадратов расстояний и заметить, что матрица a_{ij} положительно полуопределена).

Теперь мы хотим установить теорему Александрова–Топоногова, которая характеризует многообразия V с $K(V) \geqslant 0$ образом $M_4(V^4) \subset \mathbb{R}^6$. Чтобы сократить формулы, будем писать ниже $|v_1 - v_2|$ вместо $\operatorname{dist}(v_1, v_2)$. Рассмотрим три точки v_0, v_1 и v_2 в V, а также точку v_3 *между* v_1 и v_2. Это означает, что

$$|v_1 - v_3| + |v_2 - v_3| = |v_1 - v_2|.$$

Теперь мы заметим, что существуют четыре точки в $\mathbb{R}^2$ — v_0', v_1', v_2' и v_3' между v_1' и v_2' такие, что

$$|v_i' - v_j'|_{\mathbb{R}^2} = |v_i - v_j|_V \quad \text{при} \quad i, j = 0, 1, 2,$$

а также

$$|v_1 - v_3|_V = |v_1' - v_3'|_{\mathbb{R}^2}.$$

Тогда автоматически

$$|v_2' - v_3'|_{\mathbb{R}^2} = |v_2 - v_3|_V$$

и евклидово расстояние $|v_0' - v_3'|_{\mathbb{R}^2}$ можно выразить известной формулой в терминах четырех чисел $|v_0 - v_1|, |v_0 - v_2|, |v_1 - v_2|$ и $|v_1 - v_3|$. На рис. 15 представлена картинка, которая позволяет сохранить все в памяти.

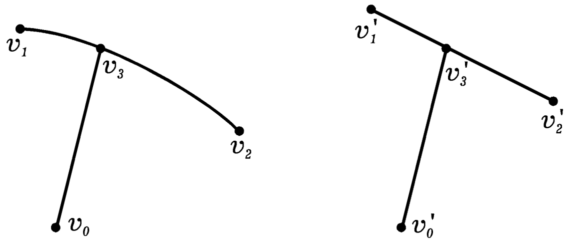

Рис. 15

Теорема. *Если V — полное и $K(V) \geqslant 0$, то*

$$|v_0 - v_3|_V \geqslant |v_0' - v_3'|_{\mathbb{R}^2}.$$

Мы назовем это *AT-неравенством*, поскольку оно было обнаружено Александровым для $n = 2$ и обобщено Топоноговым для $n \geqslant 3$.

Идея доказательства. Можно считать AT-неравенство одним из видов соотношения вогнутости для функции $d_0(v) = \mathrm{dist}_V(v_0, v)$ на V, суженной на отрезок $[v_1, v_2]$, поскольку она задает нижнюю границу на $d_0(v_3)$ в терминах $d_0(v_1)$ и $d_0(v_2)$. Более точно, теорема утверждает, что d_0 более вогнута на каждом отрезке в V, чем евклидова функция расстояния на соответствующем отрезке в $\mathbb{R}^2$. Хотя функция $\mathrm{dist}_V(v_0, \cdot)$ не является гладкой, вогнутый тип неравенств на геодезических отрезках следует из соответствующей *локальной* вогнутости, которая в гладком случае может быть выражена через гессиан функции $d_0 = \mathrm{dist}_V(v_0, \cdot)$. Теперь мы вспомним формулу трубки (7) из § 2 и применим ее к концентрическим сферам $S(v_0, \varepsilon) \subset V$ для всех $\varepsilon > 0$. Из этой формулы (с небольшими изменениями в негладких точках сферы) мы можем видеть, что эти сферы менее выпуклы (или более вогнуты), чем ε-сферы в $\mathbb{R}^n$. (Например, сферы в единичной сфере $V = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ становятся вогнутыми при $\varepsilon > \pi/2$). Эта «вогнутость» сфер вместе с очевидным соотношением $\|\operatorname{grad} d_0(v)\| = 1$ приводит к определенной вогнутости функции $d_0(v)$, и, внимательно рассмотрев, как это происходит, мы в точности получим желаемую локальную версию AT-неравенства на геодезическом отрезке в V. Что и требовалось доказать.

Замечание. Легко видеть, что AT-неравенство, будучи примененным к точкам v_1, v_2 и v_3, которые бесконечно близки к v_0, дает $K \geqslant 0$ в точке v_0. Таким образом, *AT эквивалентно $K \geqslant 0$.*

Было бы интересно узнать какие-нибудь еще универсальные метрические неравенства, связанные с кривизной, но на данный момент ничего, кроме AT, неизвестно. Тем не менее, известно *обращение* AT для полных многообразий V с $K(V) \leqslant 0$, а именно, $|v_0 - v_3|_V \leqslant \leqslant |v_0' - v_3'|_{\mathbb{R}^2}$, но здесь необходимо дополнительно предполагать, что V *односвязно*. Многообразия V с $\operatorname{Ricci} V \geqslant 0$ также удовлетворяют некоторым метрическим неравенствам (см. § 5), но они зависят от $\dim V$.

§ $3\frac{2}{3}$. Сингулярные метрические пространства с $K \geqslant 0$

Можно попытаться, следуя Александрову, развить теорию метрических пространств с $K \geqslant 0$, используя AT как *аксиому*. Теперь такое обобщенное пространство V положительной кривизны может быть сингулярным, а в действительности даже топологически сингулярным. Например, если мы будем действовать на гладкое многообразие V с $K(V) \geqslant 0$ конечной группой изометрий Γ, то из AT-неравенства для V (при помощи элементарных «синтетических» рассуждений) это будет вытекать для V/Γ, которое является сингулярным пространством, если действие Γ не свободно. *Геометрию* возможных сингулярностей V можно также увидеть в выпуклых подмножествах $V \subset \mathbb{R}^n$, которые считаются (слабо) сингулярными в граничных точках (даже если граница ∂V является гладкой), а также в сингулярных точках негладких выпуклых гиперповерхностей $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с индуцированной структурой длины. (Можно заменить $\mathbb{R}^{n+1}$ произвольным гладким многообразием размерности $n+1$ с $K \geqslant 0$.) Поучительным примером является граница выпуклой оболочки кривой в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Еще один вид сингулярных пространств с $K \geqslant 0$ — это единичный *евклидов конус* над многообразием S с $K(S) \geqslant 1$. Этот конус сингулярен в вершине, если только S не является круговой сферой постоянной кривизны 1 (в этом случае конус — это просто единичный евклидов шар, ограниченный сферой). Отметим, что можно допустить сингулярные точки в многообразии S с $K \geqslant 1$ и вместо конуса можно взять *надстройку*, которая является объединением двух конусов над S, соединенных вдоль S.

Наконец, заметим, что декартово произведение пространств с $K \geqslant 0$ имеет $K \geqslant 0$, и эта кривизна также остается положительной, если мы перейдем к фактор-пространству V/G для компактной группы G изометрий пространства V. (Мы уже упомянули об этом для случая конечных групп.)

Эти примеры делают сингулярные пространства заслуживающими изучения, и можно обобщить некоторые известные результаты с гладких многообразий на общий случай. Однако теория выпуклых гиперповерхностей W в таких пространствах еще не развита. Например, неизвестно, *будет ли индуцированная* (*внутренняя*) *метрика на* W *иметь* $K \geqslant 0$. Еще один вопрос: *являются ли внутренние эквидистантные деформации* W_ε *выпуклыми*[1].

Хочется также выяснить структуру сингулярностей пространства V. Известные примеры указывают на то, что V должно быть *топологически коническим* в каждой точке с *предположительно конической геометрией.* Недавно Г. Перельман доказал топологическое коническое свойство пространства V, из которого, в частности, следует локальная сжимаемость V (см. [4]), однако коническая геометрия остается гипотетической[2]. (Отметим, что эти вопросы тесно связаны с геометрией, находящейся за границей на числа $b_i(V)$, упомянутые ранее.)

Заключительная группа вопросов касается структуры множества сингулярных точек пространств с $K \geqslant 0$. Известно, что сингулярные точки должны образовывать довольно разреженное множество. А именно, каждое n-мерное пространство V содержит открытое плотное подмножество, которое локально по Липшицу гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Более того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое плотное подмножество $V_\varepsilon \subset V$, которое локально ε-евклидово в следующем смысле. Для каждой точки $v \in V_\varepsilon$ существует плоская метрика dist_E в некоторой окрестности $U \subset V_\varepsilon$ точки v, которая ε-би-Липшицева к метрике из V, т. е.

$$1 - \varepsilon \leqslant \mathrm{dist}_V \,/\, \mathrm{dist}_E \leqslant 1 + \varepsilon$$

в U (см. [4]).

Мы все еще не знаем, чего можно ожидать от выпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{n+1}$, которые известны как *почти всюду* C^2*-гладкие.* Предыдущее утверждение касается C^1-структуры (в случае выпуклых гиперповерхностей). Кажется, стоит только понять C^1-структуру сингулярностей, и тогда C^2-детализацию можно будет получить простым

[1] Согласно Перельману являются.

[2] Теперь это уже доказано Перельманом.

анализом[1]. С другой стороны, нужны новые геометрические идеи для того, чтобы доказать, что n-мерная хаусдорфова мера сингулярного множества равна нулю[2]. Каждая сингулярная точка несет бесконечную положительную кривизну, в то время как интегральная кривизна (собственно определенная) должна быть универсально ограничена. Интуитивно в это верится, однако доказать это никто не может даже в гладком случае для $n \geqslant 3$. (При $n = 2$ такое ограничение получается из *теоремы Гаусса–Бонне*, которая утверждает, что полная кривизна поверхности V равна $2\pi\chi(V)$. Эта теорема обобщается на многообразия большей размерности, но она дает нетривиальную информацию о полном значении кривизны только для $n = 2$ и $n = 4$, в то время как для $n = 4$ можно использовать универсальное ограничение на $|\chi(V)|$, которое вытекает из ограничения на числа Бетти при $K(V) \geqslant 0$. Сравните с обсуждением теоремы о сфере в следующем параграфе).

§ $3\frac{3}{4}$. Теорема о сфере и эквидистантная деформация погруженных гиперповерхностей

Современный период в глобальной римановой геометрии начинается, согласно М. Берже (см. [1], [2]), с работы Рауха в начале пятидесятых, который среди прочего доказал, что если секционные кривизны замкнутого односвязного риманова многообразия V достаточно близки к кривизнам круговой сферы, то V *гомеоморфно* сфере. (Односвязность необходима для того, чтобы исключить такие многообразия, как действительное проективное пространство $P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$ и линзовое пространство $S^{2m-1}/\mathbb{Z}_k$, которые имеют постоянную положительную кривизну, но не гомеоморфны сферам.)

Близость кривизны $K = K(V)\colon \operatorname{Gr}_2 V \to \mathbb{R}$ к (постоянной) кривизне сферы обычно выражается неравенством

$$ca < K < a,$$

где $a > 0$ и $0 < c < 1$. Здесь предполагается, что константа a — это кривизна круговой сферы радиуса $a^{-\frac{1}{2}}$, а c, называемая *стесняющей*

[1]Этот анализ начали Отсу и Шиойя, и он довольно тонкий.

[2]Доказательство было проведено Отсу и Шиойя, оно также содержится в последней версии [4].

константой, характеризует допустимую величину непостоянства кривизны $K(V)$. Отметим, что нормировкой можно свести общий случай к случаю $a = 1$, и тогда неравенство

$$c < K < 1$$

будет означать, что секционные кривизны многообразия V расположены строго между секционными кривизнами единичной сферы и сферы радиуса $c^{-\frac{1}{2}}$.

Раух предполагал, что наилучшая стесняющая константа в этой теореме должна равняться $1/4$. Это значение обусловлено тем, что *комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$, следующее по округленности за S^n, имеет секционные кривизны, разбросанные в замкнутом интервале $[1/4, 1]$, для естественной $U(n+1)$-инвариантной метрики Фубини–Штуди на $\mathbb{C}P^n$. Отметим, что проективное пространство кватернионов и проективная плоскость Кэли также имеют естественную однородную (даже симметрическую) метрику с $1/4 \leqslant K \leqslant 1$.

Решение проблемы Рауха (которое получили в середине шестидесятых Берже и Клингенберг) известно сейчас как

Теорема о сфере. *Если для замкнутого односвязного многообразия V выполнено*

$$\frac{1}{4} < K(V) < 1,$$

то V гомеоморфно S^n.

Замечания.

(a) Все еще неизвестно, будет ли такое V *диффеоморфно* S^n (но это известно для более узкого стеснения).

(b) Если V не является односвязным, теорема применяется к универсальному накрытию V.

(c) Если стеснение нестрогое

$$\frac{1}{4} \leqslant K(V) \leqslant 1,$$

то теорему о сфере дополняет *теорема жесткости* Берже, которая утверждает, что если замкнутое односвязное многообразие V с $\frac{1}{4} \leqslant K(V) \leqslant 1$ не гомеоморфно S^n, то оно необходимо *изометрично* проективному пространству над комплексными числами, кватернионами или над числами Кэли со стандартной однородной метрикой.

Набросок доказательства теоремы о сфере. Если $n = \dim V = 2$, то результат следует из *теоремы Гаусса–Бонне*

$$\int_V K(v)\,dv = 2\pi\chi(V),$$

где $\chi(V)$ — эйлерова характеристика. Таким образом, из одной только положительности кривизны K (без стеснения) следует $\chi(V) > 0$, и, следовательно, мы можем отождествить V с S^2, поскольку мы предполагаем V односвязным.

Замечание. Теорема Гаусса–Бонне обобщается на все размерности равенством

$$\int_V \Omega\,dv = \chi(V),$$

где $\Omega = \Omega(v)$ выражается в каждой точке как определенный полином с компонентами тензора кривизны. Известно, что при $\dim V = 4$ оба условия на знак $K > 0$ и $K < 0$ влекут $\Omega(v) > 0$. Отсюда следует, что если *кривизна многообразия V не меняет знак, то $\chi(V) > 0$.*

Это не очень интересно для $K > 0$, когда универсальное накрытие $\widetilde{V}$ многообразия V компактно и когда $\pi_1(\widetilde{V}) = 0 \Rightarrow b_1 = b_3 = 0$. Таким образом, оставшиеся числа Бетти, вносящие вклад в $\chi(\widetilde{V}) = \chi(V)$, четны: b_0, b_2 и b_4. С другой стороны, топологическое заключение $\chi(V) > 0$ для замкнутых 4-мерных многообразий строго *отрицательной* кривизны не может быть получено на сегодняшний день каким-либо другим методом.

Если $\dim V \geqslant 6$, то знак Ω уже не зависит от знака K. Хотя Черн предположил, что если $n = 4k$, то из $K > 0$ и из $K < 0$ следует $\chi > 0$, а если $n = 4k + 2$, то знак χ совпадает со знаком K, если кривизна K всюду строго положительна или строго отрицательна на V.

Теперь вернемся к теореме о сфере при $n \geqslant 3$. Напомним, что стесняющее условие $\frac{1}{4} < K < 1$ означает, что секционные кривизны нашего многообразия V строго меньше, чем секционные кривизны (равные единице) единичной сферы S^n, и больше, чем кривизны сферы $2S^n$ радиуса 2. Возьмем точку $v \in V$ и рассмотрим концентрические шары $B(v, r) \subset V$. Для малого радиуса $r > 0$ каждый такой шар имеет гладкую выпуклую границу. По мере того как шары растут, с ними могут случиться три плохие вещи.

(1) Граничная сфера может потерять выпуклость и даже стать всюду *вогнутой*. Например, это происходит с $B(v, r) \subset S^n$ при $r > \frac{\pi}{2}$, и это

случается в $2S^n$ для $r > \pi$. Из условия $K(V) > \dfrac{1}{4}$ вытекает, по формуле трубки, что шары $B(v, r)$ *необходимо становятся вогнутыми при* $r \geqslant \pi$.

Мы увидим ниже, что эта вогнутость граничной сферы не такая плохая вещь. Наоборот, она оказывается очень полезной, если мы смотрим на эту сферу снаружи, где она выглядит выпуклой.

(2) На граничной сфере могут появиться *двойные точки.* Чтобы увидеть, как это происходит, обратимся к примеру (плоского) цилиндра $V = S^1 \times \mathbb{R}$. Универсальное накрытие цилиндра есть евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, и шар $B(v, r)$ в V является образом евклидова 2-шара (диска) B в $\mathbb{R}^2$. По мере того как r становится больше, чем половина длины S^1, отображение B в $S^1 \times \mathbb{R}$ становится неоднозначным, и мы можем видеть, как B оборачивается вокруг цилиндра, когда r растет.

Похожая картина наблюдается в произвольном V с так называемым *экспоненциальным отображением* $e\colon T_v(V) \to V$, которое переводит каждый вектор $\tau \in T_v(V)$ во второй конец геодезического отрезка в V, выпущенного в направлении τ и имеющего длину, равную $\|\tau\|$. Шар $B(v, r)$ в V совпадает с экспоненциальным образом евклидова r-шара $B \subset T_v(V)$, и двойные точки граничной сферы шара $B(v, r)$ являются образами двойных точек в $S = \partial B$, где отображение $e|S$ неоднозначно. Например, если $V = S^n$, то экспоненциальное отображение однозначно на шарах $B \subset T_v(V)$ радиусов $< \pi$, но сфера $S \subset T_v(V)$ радиуса π переводится отображением e в одну точку в $V = S^n$, которая лежит напротив v в S^n.

Двойные точки, несомненно, серьезно усложняют картину. Но мы об этом позаботимся в вышеуказанном вогнутом случае.

(3) Геометрический образ шара $B \subset T_v(V)$, оборачивающегося вокруг V при экспоненциальном отображении $e\colon T_v(V) \to V$, является адекватным, поскольку отображение e есть *погружение*, т. е. оно является локально однозначным (а значит, локально гомеоморфным) на B. Достаточное условие этого — *регулярность* $e|B$, что значит $\operatorname{rank}(De) = n$, где De означает дифференциал e, а $n = \dim V$. Если $K(V) < 1$, то из формулы трубки вытекает, что *отображение* e *регулярно на шаре* $B \subset T_v(V)$ *радиуса* π. Здесь можно проигнорировать возможные самопересечения граничных сфер $S(v, r) = \partial B(v, r)$, если смотреть на экспоненциальное отображение e на узком секторе $A \subset B$, содержащем заданный прямой отрезок в $B \subset T_v(V)$, соединяющий начало (т. е. центр B) с точкой $s \in S = \partial B$. Тогда пересечения концентрических

сфер в $T_v(V)$ с A приведут к семейству *гладких* взаимно эквидистантных гиперповерхностей в V, см. рис. 16.

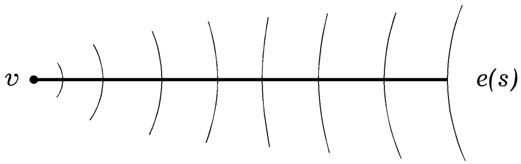

Рис. 16

Таким образом, если $\frac{1}{4} < K(V) < 1$, то мы имеем *погружение* $B \subset T_v(V)$ в V такое, что граница погруженного шара является *вогнутой* в V. Теперь мы хотим построить еще одно погружение некоторого шара B' в V, которое бы ограничивало $e(S) = e(\partial B) \subset V$ с выпуклой стороны. Таким образом, мы бы получили погружение сферы $S^n = B \cup B'$ в V, где два шара B и B' склеены по общей границе S. Отметим, что такое погружение является накрывающим отображением (поскольку S^n — это замкнутое многообразие и $n = \dim V$), и поэтому теорема о сфере сопровождает погруженное B' в V, заполняющее $e(S) \subset V$ с выпуклой стороны. Существование такого B' при $n \geqslant 3$ обеспечивает

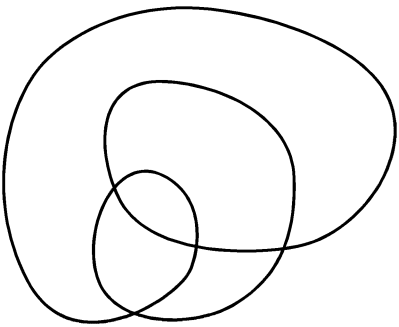

Рис. 17

Лемма о заполнении. (Сравн. с §$\frac{1}{2}$.) *Пусть V — полное риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ с $K(V) > 0$ и пусть $e\colon S \to V$ — (топологическое) погружение замкнутого связного $(n-1)$-мерного многообразия S в V. Если погруженная гиперповерхность локально выпукла в V, то она диффеоморфна S^{n-1}. Кроме того, существуют шар B', который ограничен сферой $S^{n-1} = S$, и погружение $B' \to V$, продолжающее $e\colon S \to V$, такое, что вложенный шар B' заполняет $e(S)$ с выпуклой стороны.*

Замечание. Отметим, что образ $e(S) \subset V$ не должен быть выпуклым в каком-либо смысле. Локальная выпуклость означает, что каждая точка $s \in S$

имеет окрестность $W \subset S$, в которой отображение e однозначно и образ которой *является* (локально) выпуклым в V. Типичным примером являются локально выпуклые погруженные кривые на плоскости, как на рис. 17 (сравн. с рис. 5 в $\S\frac{1}{2}$ и с рис. 9 в §3). Отметим также, что замкнутая погруженная кривая S в $\mathbb{R}^2$ не ограничивает какой-либо погруженный диск, если только S не является *вложенной кривой* (т. е. не имеет двойных точек). Это не противоречит лемме о заполнении, в которой мы предполагаем $n \geqslant 3$.

Идея доказательства. Задана погруженная локально выпуклая гиперповерхность в V. Попытаемся применить внутреннюю локально эквидистантную деформацию одновременно ко всем малым вложенным окрестностям $e(W) \subset V$, см. рис. 18.

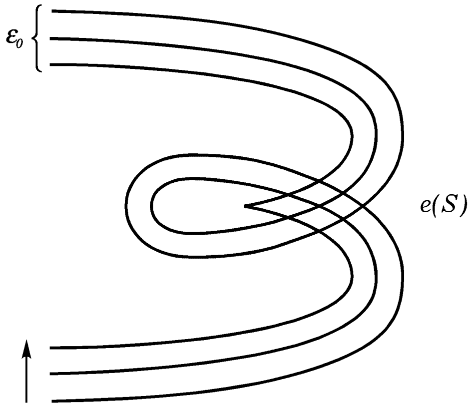

Рис. 18

Эквидистантная деформация, изображенная на рис. 18, обнаруживает (остроконечную) сингулярность в определенный момент ε_0 и не может быть продолжена дальше ε_0. Однако элементарные рассуждения, как и в $\S\frac{1}{2}$, показывают, что такие сингулярности не встречаются при деформациях локально выпуклых (кусков) гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ для $n \geqslant 3$. Это заключение распространяется на все римановы многообразия V с системой локальных геодезических координат в точках $x \in e(S)$, в которых можно опасаться сингулярностей. Таким образом, можно продолжать эквидистантную деформацию, пока сохраняется локальная выпуклость. (В действительности, здесь необходима *строгая* выпуклость, поскольку она устойчива относительно малых возмущений и сопровождает движение по евклидовой картинке в геодезических координатах.) Теперь, поскольку $K(V) > 0$, выпуклость только улучшает течение внутренней деформации, и поэтому S в конечном счете стянется в точку $v' \in V$. Совокупность деформированных гиперповерхностей образует в V область, заполняющую $e(S)$, которая является многообразием B' с $\partial B' = S$, вложенной в V, и наши локально эквидистантные гиперповерхности

$$S_\varepsilon = \{b \in B' \mid \mathrm{dist}(b, \partial B') = \varepsilon\}$$

для римановой метрики в B' индуцированы погружением $B' \to V$. В этом случае из теоремы Громола–Мейера (см. § 3) следует, что B' гомеоморфно шару B^n (этот гомеоморфизм легко строится при помощи семейства выпуклых S_ε, стягивающихся в точку в B'), на этом доказательство леммы о заполнении завершается. (См. детали рассуждений в [14]).

Замечание. Возвращаясь к теореме, отметим, что из односвязности V следует, что (накрывающее) отображение $S^n = B \cup B' \to V$ инъективно. Поэтому в конце концов экспоненциальное отображение $e\colon B \to V$ инъективно!

§ 4. Отрицательная секционная кривизна

Здесь $V = (V, g)$ — полное риманово многообразие с $K(V) \leqslant 0$. Из формулы трубки (см. (7)) легко вывести, что условие $K \leqslant 0$ эквивалентно сохранению выпуклости при внешних эквидистантных деформациях $W_{\varepsilon \geqslant 0}$ выпуклых гиперповерхностей W в V для малых ε, см. рис. 19.

Это аналогично случаю $K \geqslant 0$. Но то, что происходит здесь для больших $\varepsilon \geqslant 0$, отличается от этого случая, а именно, формула трубки показывает, что нормальное геодезическое отображение $d_\varepsilon\colon W \to V$ регулярно (т. е. является погружением) для всех $\varepsilon > 0$ и $d_\varepsilon(W) \hookrightarrow W$ — это локально выпуклая погруженная гиперповерхность. Единственная проблема появляется из-за возможных самопересечений этой гиперповерхности. Рассмотрим простейший случай, когда W_ε — концентрические ε-сферы с центром в точке $v_0 \in V$. Другими словами, мы смотрим на *экспоненциальное отображение* $e\colon T_{v_0}(V) \to V$, которое локально изометрически переводит каждый прямой луч τ в касательном пространстве $T_{v_0}(V)$ в геодезический луч в V, выпущенный из точки v_0

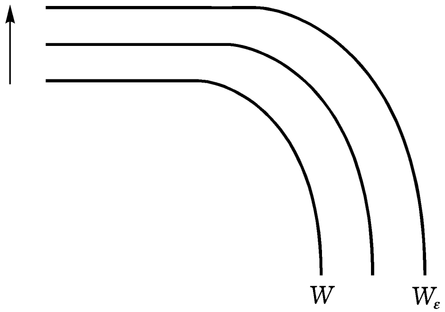

Рис. 19

и касающийся τ в v_0. Это e (очевидно) отображает каждый евклидов r-шар $B(0, r) \subset T_{v_0}(V)$ на r-шар $B(v_0, r) \subset V$ (это справедливо для всех полных многообразий V без каких-либо предположений на кривизну), и для $K \leqslant 0$ формула трубки (примененная к сферам) показывает, что e — это *погружение*. Кроме того, по формуле трубки отображение e *инфинитезимально увеличивает расстояние*, т. е. метрика $\widetilde{g}$ на $T_{v_0}(V)$, индуцированная отображением e из метрики g на V, (нестрого) больше, чем евклидова метрика g_0 на $T_{v_0}(V)$. Поскольку g_0 полная, то (бо́льшая) метрика $\widetilde{g}$ также полная. Отсюда легко показать, что e является *накрывающим отображением*, а поскольку $T_v(V) = \mathbb{R}^n$ односвязно, то отображение e — это *универсальное накрытие*. Отсюда непосредственно выводится классическая

Теорема Картана–Адамара. *Универсальное накрытие полного n-мерного многообразия V с $K \leqslant 0$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. В частности, если V является компактным многообразием без края, то фундаментальная группа $\pi_1(V)$ бесконечна.*

Доказательство этой теоремы показывает, что если V *односвязно*, то экспоненциальное отображение $T_v(V) \to V$ есть биективный диффеоморфизм для каждого $v \in V$. Отсюда следует, что любые две точки v и v' в V можно соединить *единственным* геодезическим отрезком в V, который (в силу единственности) должен быть *минимизирующим* в V, и что функция расстояния $\operatorname{dist}(v_1, v_2)$ гладкая при $v_1 \neq v_2$. Тогда, применяя формулу трубки к ε-окрестности диагонали $\Delta \subset V \times V$, можно легко доказать, что dist — это *выпуклая функция* на $V \times V$. Это значит, что функция dist выпуклая на каждой плоскости в $V \times V$, которая является декартовым произведением двух геодезических в V. В частности, каждый шар $B(v,\, \rho) \subset V$ является выпуклым.

Эти рассуждения указывают на определенную двойственность между многообразиями с $K \geqslant 0$ и *односвязными* многообразиями с $K \leqslant 0$. Эта двойственность еще лучше проявляется для монотонности шаров

$$B(v,\, \lambda\rho) \geqslant \lambda B(v,\, \rho)$$

для всех $v \in V$, $\rho \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 1$ (сравн. с § $2\frac{1}{2}$) и для неравенства Александрова–Топоногова

$$|v_0 - v_3|_V \leqslant |v_0' - v_3'|_{\mathbb{R}^2}$$

(см. рис. 15 в § $3\frac{1}{2}$), которое определяет выпуклость функции $\operatorname{dist}(v_0,\, \cdot)$ на V. Заметим, что для обоих неравенств необходимо $\pi_1 = 0$, так же как и $K \leqslant 0$.

Однако двойственность, кажется, не простирается слишком далеко. Действительно, существенные особенности многообразий V с $K(V) \leqslant 0$ и $\pi_1(V) = 0$ видны (если знать, где и как смотреть) *асимптотически*, по мере приближения к *бесконечности* в V; соответствующего же понятия для $K \geqslant 0$ не существует.

Теперь, если мы обратимся к замкнутым многообразиям V с $K \leqslant 0$, то они предстают как фактор-пространства универсальных накрытий $\widetilde{V}$ по группе Галуа $\Gamma = \pi_1(V)$, которая изометрически действует на $\widetilde{V}$. Даже если мы зафиксируем $\widetilde{V}$, многообразие различных групп $\Gamma \subset \operatorname{Iso} \widetilde{V}$ и соответствующих им фактор-пространств $V = \widetilde{V}/\Gamma$ может быть поразительным. Богатейший источник примеров — это 3-мерное пространство $\widetilde{V} = H^3$ *постоянной отрицательной кривизны*, которое также можно определить как $PSL_2\mathbb{C}/SO(3)$ с инвариантной римановой метрикой. Дискретные подгруппы $\Gamma \subset PSL_2\mathbb{C}$ конформно действуют на римановой сфере S^2, и изучение их под названием *групп Клейна* проводилось в течение многих лет в рамках комплексного анализа. Новое развитие, подчеркивающее $K = -1$, было начато около 12 лет назад Терстоном, который создал (или обнаружил) прекрасный геометрический мир размерности 3. Нет ничего сравнимого с этим для $K \geqslant 0$.

Отметим, что отрицательная кривизна сопровождает каждую *некомпактную полупростую группу* G. А именно, если мы профакторизуем G по *максимальной компактной* подгруппе $H \subset G$, то в силу компактности H пространство $\widetilde{V} = G/H$ допускает G-инвариантную метрику. Такая метрика будет *полной* (это элементарно), и по известной теореме Картана $K(g) \leqslant 0$. Эта кривизна *строго* отрицательна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$, и $K(g)$ *постоянна* в том и только в том случае, если G локально изоморфна $O(n, 1)$. Компактные многообразия V, накрытые $\widetilde{V}$, соответствуют дискретным подгруппам $\Gamma \subset G$, которые обычно создаются арифметическими построениями.

Вышеупомянутые примеры отнюдь не исчерпывают все компактные многообразия с $K \leqslant 0$. Действительно, нет ни малейшего шанса для существования какой-либо осмысленной классификации таких многообразий (но может существовать классификация компактных многообразий с $K \leqslant 0$ по модулю многообразий с $K < 0$). С другой стороны, для $K \geqslant 0$ приблизительное описание всех компактных многообразий выглядит вполне правдоподобным. (Например, каждое выпуклое подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$, грубо говоря, равно некоторому *телу* $[0, l_1] \times [0, l_2] \times \ldots \times [0, l_n]$, а каждый плоский тор — риманову декартову произведению окружностей S_i определенной длины l_i.) Ситуация здесь смутно похожа на классификацию алгебраических многообразий (например, поверхностей). Многообразия общего типа являются сортом *гиперболических* многообразий (которые соответствуют $K \leqslant 0$) и не классифицируются. Наоборот, специальные многообразия (такие, как многообразия Фано) иногда можно классифицировать в каждой фиксированной размерности. Они соответствуют многообразиям с $K \geqslant 0$.

Для того, чтобы получить лучшее представление о возможной классификации общих многообразий с $K \geqslant 0$, можно взглянуть на два примера, в которых эта проблема была, в принципе, решена. Первый пример *постоянной кривизны* 1, когда $V = S^n/\Gamma$ для некоторой конечной группы изометрий Γ, которая свободно действует на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Второй класс примеров определяется *плоскими* римановыми многообразиями ($K = 0$), которые совпадают с $\mathbb{R}^n/\Gamma$ для так называемых *кристаллографических* групп Γ (изометрически действующих) на $\mathbb{R}^n$. В обоих случаях имеется хорошая общая картина таких групп Γ, так же как и возможность классификации для каждого фиксированного n. (Однако такая классификация для больших n быстро становится беспорядочной и не очень привлекательной.)

Гиперболические группы. Главная топологическая проблема, касающаяся пространств с $K \leqslant 0$ — это характеризация групп Γ, которые могут служить в качестве фундаментальных групп таких пространств. Если мы только предположим, что многообразие V с $K \leqslant 0$ *полно*, то становится неясным, существуют ли какие-нибудь неочевидные ограничения на $\Gamma = \pi_1(V)$. («Очевидное» условие — это существование свободного дискретного действия на евклидовом пространстве, в то время как $\widetilde{V}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$). С другой стороны, если V компактно, то существует много специфических свойств группы $\Gamma = \pi_1(V)$. Например, Γ *содержит свободную группу с двумя образующими, если только V не является плоским многообразием.* (В последнем случае Γ содержит подгруппу $\Gamma' = \mathbb{Z}^n$ конечного индекса.) Понятие теоремы о свободности обращает нас к Феликсу Клейну, который доказал ее для групп, действующих на гиперболическом пространстве H^3 с $K = -1$. Обобщение для подгрупп $\Gamma \subset SL_n$, действующих на многообразии $SL_n/SO(n)$ с $K \leqslant 0$ — это известный результат Титца. Обобщение для переменной *строго отрицательной* кривизны принадлежит Эберлейну. В общем случае теорему о свободности недавно доказал Болман на основе глубокого анализа природы «нестрогости» $K \leqslant 0$.

Чтобы получить какое-то представление о различии между строгой и нестрогой отрицательной кривизной, напомним сперва известный результат Прейсмана о том, что каждая *абелева подгруппа $A \subset \Gamma = \pi_1(V)$ является свободной циклической, в предположении, что V — замкнутое многообразие с $K < 0$*. Кроме того, если мы *предполагаем только $K \leqslant 0$* и требуем *существование свободной абелевой подгруппы A в $\pi_1(V)$ ранга $k \geqslant 2$*, то *V содержит изометрически и геодезически погруженный плоский тор $T^k \hookrightarrow V$ и, таким образом, $K(\sigma) = 0$ для всех плоскостей касательных к T^k.*

Этот пример показывает, как «критическая» топология может влиять на геометрию для $K \leqslant 0$. Это феномен (который довольно похож на то, что происходит для $K \geqslant 0$) еще ярче проявляется в следующем результате, принадлежащем Громолу–Вольфу и Лоусону–Яо.

Теорема о расщеплении. *Если фундаментальная группа Γ замкнутого многообразия V с $K \leqslant 0$ расщепляется в прямое произведение $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 имеют тривиальные центры, то V изометрически расщепляется, т. е. $(V, g) = (V_1 \times V_2, g_1 \oplus g_2)$, где $\pi_1(V_i) = \Gamma_i$, $i = 1, 2$.*

Отметим, что условие $\operatorname{Center}\Gamma_i = 0$ существенно, это видно в примере нерасщепимого плоского тора. (Для этих торов также существует корректное обобщение в случае, когда $\operatorname{Center}\Gamma_i \neq 0$).

Заметим, что если $\dim V_i > 0$, $i = 1, 2$, то $K(V = V_1 \times V_2)$ обращается в ноль на многих 2-плоскостях $\sigma \in T(V)$. А именно, K равно нулю на декартовом произведении геодезических $\gamma_1 \times \gamma_2 \subset V$ для $\gamma_i \subset V_i$, поскольку эти произведения изометричны $\mathbb{R}^2$, геометрически погруженному в V. (Это всегда верно для римановых произведений независимо от кривизны.)

Некоторые результаты, схожие с теоремой о расщеплении, были установлены совсем недавно для многообразий V с $K(V) \leqslant 0$, где существует «достаточно много» плоскостей σ, на которых $K(\sigma) = 0$ (см. [5]). Этим воскрешается надежда на возможность сведения общего случая $K \leqslant 0$ к случаю, когда $K < 0$. С другой стороны, можно аксиоматизировать существенные особенности фундаментальных групп $\pi_1(V)$ для $K(V) < 0$ и изучить их независимо от дифференциальной геометрии. Это приведет к новому классу групп, называемых ***гиперболическими группами***, которые включают $\pi_1(V)$ и так называемые ***группы с малым сокращением.*** Изучение гиперболических групп на данный момент является, по-видимому, главным направлением в (строго) отрицательной кривизне. (Подробнее об этом см. [17].)

§ 5. Кривизна Риччи

Напомним основную формулу трубки (см. (7) в §2), которая связывает вторую производную (индуцированной) метрики g_ε на эквидистантной гиперповерхности $W_\varepsilon \subset V$ с секционной кривизной $K(V)$, выраженной через симметрический оператор B на $T(W)$. Эта формула имеет вид

$$\frac{d}{d\varepsilon} A_\varepsilon^* = -(A_\varepsilon^*)^2 + B,$$

где A_ε^* — это оператор формы, который просто по-другому выражает вторую основную форму Π на W_ε, т. е.

$$\Pi^{W_\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\frac{d}{d\varepsilon} g_\varepsilon.$$

Рассмотрим следы операторов A_ε^* и B в формуле трубки. Во-первых, след оператора A_ε^* — это то же самое, что след формы Π^{W_ε} относительно g_ε. Этот след называется ***средней кривизной*** $M(W_\varepsilon)$ гиперповерхности W_ε, и он равен сумме главных кривизн гиперповерхности W_ε (как следует из определения этих кривизн, см. §0). Далее, из формулы для Π^{W_ε} очевидно следует, что $M(W_\varepsilon) = \mathrm{Trace}_{g_\varepsilon} \Pi^{W_\varepsilon}$ измеряет ε-изменение риманова объема g_ε, т. е.

$$\frac{d\,\mathrm{Vol}^*_\varepsilon}{d\varepsilon} = M(W_\varepsilon)\,\mathrm{Vol}^*_\varepsilon, \tag{9}$$

где Vol_ε означает плотность риманова объема на W_ε (напомним, что *плотность* на W_ε — это не функция, а $(n-1)$-форма по модулю знака $\pm$). Здесь $\mathrm{Vol}^*_\varepsilon$ означает прообраз Vol_ε в $W = W_0$ относительно нормального геодезического отображения $d_\varepsilon : W \to W_\varepsilon$. Теперь (9) имеет смысл, поскольку левая часть — это плотность на W, а правая часть — это произведение плотности на функцию.

Можно эквивалентно выразить (9), используя исходную метрику g_0 на $W = W_0$, следующим образом. Пусть $J(w, \varepsilon)$ обозначает якобиан отображения d_ε в точке $w \in W$. Тогда (9) примет вид

$$\frac{d(J(w, \varepsilon))}{d\varepsilon} = J(w, \varepsilon)\,\mathrm{Trace}\,A^*_\varepsilon,$$

поскольку

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}/J = \frac{d\,\mathrm{Vol}_\varepsilon}{d\varepsilon}/\,\mathrm{Vol}_\varepsilon\,.$$

Можно еще выразить (9) как

$$\frac{d}{d\varepsilon}\log J(w, \varepsilon) = \mathrm{Trace}\,A^*_\varepsilon$$

или, проинтегрировав по гиперповерхности W_ε, можно получить

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,\mathrm{Vol}(W_\varepsilon) = \int\limits_{W_\varepsilon} J(w, \varepsilon)\,\mathrm{Trace}\,A^*_\varepsilon\,dw.$$

В этом отношении стоит заметить, что $(n-1)$-мерный объем эквидистантной гиперповерхности W_ε в вышеупомянутой формуле равен производной по ε от n-мерного объема «полосы» между W_0 и W_ε, т. е. образа отображения

$$W_0 \times [0, \varepsilon] \to V \quad \text{при} \quad (w, \varepsilon) \to d_\varepsilon(w).$$

Вообще можно взять *ε-окрестности* $V^+_\varepsilon \subset V$ фиксированного подмножества $V_0 \subset V$. Тогда $(n-1)$-мерный объем границы $W_\varepsilon = \partial V^+_\varepsilon$ удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{Vol}\,W_\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon}\,\mathrm{Vol}\,V^+_\varepsilon,$$

(где $V_\varepsilon^+ \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \operatorname{dist}(v, V_0) \leqslant \varepsilon\}$). Отметим, что эта формула остается верной, даже если гиперповерхности W_ε не гладки. (Это сначала доказывается в $\mathbb{R}^n$, а затем переносится в V с евклидовыми метриками, инфинитезимально аппроксимирующими g в точках $v \in V$, сравн. с § 1.)

Теперь обратимся к $\operatorname{Trace} B$. Напомним, что оператор $B = B_S$ был задан на всякой коориентированной гиперплоскости $S \subset T_v(V)$ в каждом касательном пространстве $T_v(V)$. Всякая такая гиперплоскость S задается при помощи единичного нормального вектора $\nu = S^\perp$ (единственного в силу коориентации), и затем $\operatorname{Trace} B$ становится функцией на единичном касательном расслоении на V. Далее, простые (инфинитезимальные) алгебраические соображения показывают, что эта функция *квадратична* на каждом слое. То есть существует (необходимо единственная) квадратичная форма на V, называемая *тензором Риччи*, такая, что

$$\operatorname{Trace} B_S = -\operatorname{Ricci}(\nu, \nu)$$

для $\nu = S^\perp$.

Формула трубки для следа.

$$\frac{d}{d\varepsilon} M(W_\varepsilon) = -\operatorname{Trace} A_\varepsilon^2 - \operatorname{Ricci}(v_\varepsilon, v_\varepsilon), \tag{10}$$

где v_ε есть внутреннее (или внешнее, не играет роли) нормальное поле единичных векторов на W_ε. Объединив это с рассуждениями о $\operatorname{Vol}_\varepsilon$ и о якобиане отображения d_ε, мы получим

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \log J(w, \varepsilon) = -\operatorname{Trace} A_\varepsilon^2(w) - \operatorname{Ricci}(v_\varepsilon(w), v_\varepsilon(w)). \tag{11}$$

Отметим, что $\operatorname{Trace} A_\varepsilon^2$ равен квадрату нормы $\|\Pi^{W_\varepsilon}\|_{g_\varepsilon}^2$, который характеризует полную кривизну гиперповерхности W_ε в V и равняется сумме квадратов главных кривизн.

Теперь мы можем вспомнить определение секционной кривизны K (см. § 2) и заметить следующую формулу, выражающую Ricci через K. Пусть $\nu = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — ортонормированный репер в $T_v(V)$, и пусть $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ означают плоскости, натянутые на пары векторов $(\nu_1, \nu_2), (\nu_1, \nu_3), \ldots, (\nu_1, \nu_n)$. Тогда легко вычислить, что

$$\operatorname{Ricci}(\nu, \nu) = \sum_{i=2}^{n} K(\sigma_i).$$

Таким образом, единичная круговая n-сфера S^n имеет $\mathrm{Ricci} = (n-1)g$ для сферической метрики g. (Это не случайность, что $\mathrm{Ricci}(S^n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а важное свойство S^n, имеющее много следствий, см. [30]).

Многообразия с $\mathrm{Ricci}\, V \geqslant 0$. Если $\mathrm{Ricci}\, V \geqslant 0$ (т. е. кривизна Риччи положительно полуопределена), то из формулы трубки для следа вытекает, что вторая производная (вариация) от $\log \mathrm{Vol}_\varepsilon$ отрицательна или, что эквивалентно,

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \log J(v, \varepsilon) \leqslant 0.$$

Обратно, легко видеть, что это неравенство эквивалентно $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$.

Можно получить более точное неравенство из формулы трубки для следа (11), заметив, что

$$-\operatorname{Trace} A^2 \leqslant -(n-1)^{-1} (\operatorname{Trace} A)^2,$$

где $n - 1 = \dim W = \dim V - 1$. Тогда (11) и предшествующая формула для $\dfrac{d}{d\varepsilon} J$ дают

$$\frac{d^2 \log J}{d\varepsilon^2} \leqslant -(n-1)^{-1} \left(\frac{d \log J}{d\varepsilon} \right)^2 - \mathrm{Ricci}, \tag{12}$$

которое превращается в неравенство

$$\frac{d^2 \log J}{d\varepsilon^2} \leqslant -(n-1)^{-1} \left(\frac{d \log J}{d\varepsilon} \right)^2 \tag{13}$$

для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$. В терминах средней кривизны M гиперповерхности W_ε им эквивалентны неравенства

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Vol}_\varepsilon}{d\varepsilon^2} = \frac{dM}{d\varepsilon} \leqslant -(n-1)^{-1} M^2 - \mathrm{Ricci} \tag{14}$$

и

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Vol}_\varepsilon}{d\varepsilon^2} = \frac{dM}{d\varepsilon} \leqslant -(n-1)^{-1} M^2 \quad \text{для} \quad \mathrm{Ricci} \geqslant 0, \tag{15}$$

где $\dfrac{d \log \mathrm{Vol}_\varepsilon}{d\varepsilon}$ отождествляется с M согласно (9).

Чтобы подчеркнуть сходство этих неравенств с неравенствами для $K \geqslant 0$ в § 2, 3, мы введем следующую терминологию.

Коориентированная гиперповерхность $W \subset V$ называется *выпуклой в среднем*, если $M(W) \geqslant 0$. Далее, область $V_0 \subset V$ с гладкой границей *выпукла в среднем*, если граница *выпукла в среднем*. Ясно, что выпуклость влечет выпуклость в среднем, поскольку последнее требует положительность *всех* главных кривизн, а не только их средней. Отметим также, что в нашей терминологии круговые сферы в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемые как границы шаров $B \subset \mathbb{R}^n$, выпуклы, но те же сферы, которые ограничивают дополнения $\mathbb{R}^n - B$, считаются *вогнутыми*.

Заметим, что круговая ε-сфера $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ имеет среднюю кривизну $(n-1)\varepsilon^{-1}$, поэтому (15) становится равенством. Таким образом, (15) показывает, что если $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$, то *внутренняя деформация* (т. е. для $\varepsilon \leqslant 0$) *делает гиперповерхность $W = W_0$ выпуклой в среднем в каждой точке $w \in W$ быстрее, чем это происходит с круговой сферой в $\mathbb{R}^n$*, имеющей такую же среднюю кривизну, как и W. В частности, *если гиперповерхность W выпукла в среднем, то ее деформации W_ε такие же для $\varepsilon \leqslant 0$.*

Негладкая выпуклость в среднем. Всюду выше мы подразумевали, что гиперповерхность W_ε гладка, и $d_\varepsilon \colon W \to V$ диффеоморфно переводит W на W_ε. Эти предположения, как мы знаем, выполнены для гладких гиперповерхностей W и малых $|\varepsilon|$, однако обычно они нарушаются для больших $|\varepsilon|$. Тем не менее свойство выпуклости в среднем для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ остается выполненным для всех ε с соответствующим обобщением понятий средней кривизны и выпуклости в среднем для негладких гиперповерхностей (отметим, что именно в этот момент геометрия поистине начинает действовать. Предыдущие формулы для малых ε остались бы бесполезным инфинитезимальным примером, если бы они не были выполнены глобально для всех W). Идея такого обобщения исходит из замечания о том, что пересечение двух выпуклых в среднем областей V_1 и V_2 в V должно быть выпуклым в среднем, хотя граница $V_1 \cap V_2$ может быть (и обычно бывает) негладкой. Таким образом, можно расширить класс выпуклых в среднем областей с гладкими границами, если взять конечные и (с некоторой предосторожностью) бесконечные пересечения. Далее можно определить выпуклые в среднем негладкие гиперповерхности как гиперповерхности, которые локально являются границами таких областей. По-другому можно определить выпуклость в среднем гиперповерхности W в заданной точке $w \in W$ по «объемлющей» ***гладкой*** выпуклой в среднем гиперповерхности W', касающейся W в точке w снаружи, как на рис. 13, использованном ранее в § 3 для определения выпуклости.

С этого момента будем считать, что мы знаем смысл соотношения $M(W) \geqslant 0$ для негладких W и соотношения $M(W) \geqslant \delta$ для всех действительных δ. Мы также введем понятие ***строгой выпуклости в среднем***, которую обозначим $M(W) > 0$, как мы делали это ранее в § 3.

Теперь применим сформулированный выше принцип быстрого роста выпуклости в среднем к конкретным геодезическим ситуациям.

Приближенная выпуклая в среднем граница. Пусть V — полное многообразие с компактной выпуклой в среднем границей $W = \partial V$ (V само может быть не компактным, а выглядеть как $W \times [0, \infty)$). Тогда мы определим, как и раньше,

$$V_\varepsilon^- = \{v \in V \mid \operatorname{dist}(v, W) \geqslant \varepsilon\},$$

и заметим, что из наших рассуждений для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ следует, что многообразие $V_\varepsilon^- \subset V$ является выпуклым в среднем для всех $\varepsilon > 0$. Тогда мы можем оценить $(n-1)$-мерный объем $W_{-\varepsilon} = \partial V_\varepsilon^-$, поскольку производная от $\operatorname{Vol} W_{-\varepsilon}$ равна интегралу по $W_{-\varepsilon}$ от $-M(W_{-\varepsilon})$ с положительным весом. Таким образом, мы видим, что $\operatorname{Vol} W_{-\varepsilon}$ монотонно убывает по ε. Наконец мы напомним, что интегрирование $\operatorname{Vol} W_{-\varepsilon}$ по ε дает n-мерный объем «полосы» $V - V_\varepsilon^-$, который мы можем теперь ограничить числом $\varepsilon \operatorname{Vol} W$.

Предположим, кроме того, что либо $W = \partial V$ строго выпукла в среднем (т. е. $M(W) > 0$), либо $\mathrm{Ricci} > 0$. В этом случае неравенство (15), проинтегрированное по W_ε, показывает, что $\operatorname{Vol} W_\varepsilon$ обращается в ноль в некоторый конечный момент ε. Отсюда легко получить, что многообразие V ***компактно***. В частности, оно не может быть гомеоморфным $W \times [0, \infty)$. В этом отношении известно больше. Например, из ***теоремы о расщеплении*** Чигера и Громола (которые обобщили более раннюю теорему Топоногова о расщеплении для $K \geqslant 0$) следует, что если ***полное многообразие*** V ***с*** $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ ***не имеет границы и имеет больше чем один конец*** (т. е. $V - V_0$ несвязно для всех достаточно малых компактных подмножеств V_0 в V), ***то*** V ***расщепляется в изометрическое произведение*** $V = W \times \mathbb{R}$ ***для некоторого замкнутого многообразия*** W.

Средняя кривизна и оператор Лапласа. Напомним, что оператор Лапласа Δf на гладких функциях $f\colon V \to \mathbb{R}$ есть

$$\Delta f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} f,$$

где векторное поле $\operatorname{grad} f$ двойственно дифференциалу df относительно римановой метрики g, т. е.

$$\langle \operatorname{grad} f, \tau \rangle = df(\tau)$$

для всех $\tau \in T(V)$, а дивергенция определяется как *производная Ли* (плотности) риманова объема вдоль градиента.

Пусть теперь $f(v) = -\operatorname{dist}(v, W_\varepsilon)$. Эта функция, очевидно, имеет $\|\operatorname{grad}\| = 1$, а дивергенция градиента равна вариации (т. е. производной по ε) плотностей объема Vol_ε, поскольку объем области между W_{ε_1} и W_{ε_2} в V равен интегралу от $\mathrm{Vol}\, W_\varepsilon$ по отрезку $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, и то же самое остается верным для всех подобластей $U_\varepsilon \subset W_\varepsilon$. Таким образом, мы получим равенство между Δf в точке v и средней кривизной гиперповерхности W_ε, проходящей через v. Это равенство

$$\Delta f(v) = M(W_\varepsilon, v)$$

имеет смысл, пока только когда гиперповерхность W_ε и функция f гладкие, но с нашими предыдущими рассуждениями его можно продолжить на все точки $v \in V$. В частности, если $\mathrm{Ricci}\, V \geqslant 0$ и граница $W = \partial V$ выпукла в среднем, то

$$-\Delta \operatorname{dist}(v, W) \geqslant 0,$$

то есть минус расстояние до W есть *субгармоническая* функция на V, которую можно назвать *выпуклой в среднем* в нашей терминологии. Отметим, что эта функция *выпукла* для $K \geqslant 0$ (сравн. с §§ 0 и $\frac{1}{2}$, где все это сделано для $V \subset \mathbb{R}^n$).

Монотонность объема для шаров. Рассмотрим концентрические шары $B(\varepsilon)$ в V с центром в фиксированной точке $v_0 \in V$ и заметим, что по нашим неравенствам трубки для $\mathrm{Ricci}\, V \geqslant 0$ эти шары «менее выпуклы в среднем», чем соответствующие шары в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$M(\partial B(\varepsilon)) \leqslant (n-1)\varepsilon^{-1} = M(S_\varepsilon^{n-1})$$

для евклидовых ε-сфер S_ε^{n-1}. (Если мы посмотрим с точки зрения дополнения $V_\varepsilon^- = V - B(\varepsilon)$, то граничная сфера $\partial B(\varepsilon) = \partial V_\varepsilon^-$ выглядит *более* выпуклой в среднем, чем в $\mathbb{R}^n$ в соответствии с нашим выпукло-вогнутым соглашением). Отметим также, что в терминах функции $d_0(v) = \operatorname{dist}(v, v_0)$ эти соотношения на среднюю кривизну примут вид $\Delta d_0 \leqslant ((n-1)\varepsilon^{-1})$. Отсюда следует, что объемы $\partial B(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ растут медленнее, чем в $\mathbb{R}^n$. А именно,

$$\operatorname{Vol} \partial B(\varepsilon) \leqslant \operatorname{Vol} S_\varepsilon^{n-1},$$

и n-мерный объем $\operatorname{Vol} B(\varepsilon)$ также не превосходит объема евклидова ε-шара в $\mathbb{R}^n$.

На самом деле неравенство трубки (15) утверждает больше. А именно, если мы проинтегрируем его по ε, то мы получим следующее ограничение на рост $(n-1)$-мерного объема граничных сфер $\partial B(\varepsilon)$ в V:

$$\operatorname{Vol} \partial B(\lambda\varepsilon) \leqslant \lambda^{n-1} \operatorname{Vol} \partial B(\varepsilon),$$

где λ — произвольное число $\geqslant 1$. Тогда второе интегрирование по ε приводит к следующему очень полезному результату.

Неравенство Бишопа. *Если полное n-мерное риманово многообразие V без края имеет* $\operatorname{Ricci} V \geqslant 0$*, то для любых двух концентрических шаров в V радиусов $\varepsilon \geqslant 0$ и $\lambda\varepsilon \geqslant \varepsilon$ выполнено*

$$\operatorname{Vol} B(\lambda\varepsilon) \leqslant \lambda^n \operatorname{Vol} B(\varepsilon). \tag{16}$$

Это можно понимать как соотношение на индуцированный образ римановой меры при отображении

$$\operatorname{dist}(v_0, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}.$$

Например, это неравенство ограничивает сверху число дизъюнктных ε-шаров внутри большего шара радиуса ρ, что приводит к нетривиальным ограничениям на расстояния между конечными конфигурациями точек в V (см. дискуссию в § $3\frac{1}{2}$ вокруг неравенства Александрова–Топоногова).

Неравенство Бишопа становится точнее при $\operatorname{Ricci} > 0$, так как для $\operatorname{Ricci} \geqslant (n-1)\rho^{-2}$ скорость роста сфер и шаров в V доминируется скоростью роста сфер и шаров в круговой сфере $S^n(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Отсюда следует, что объем $\operatorname{Vol} B(\varepsilon)$ совсем не увеличивается при $\varepsilon \geqslant \pi\rho$, и поэтому *диаметр V ограничен числом $\pi\rho$*, это обобщает теорему Бонне (см. §3). В частности, *универсальное накрытие каждого замкнутого многообразия V со строго положительной кривизной Риччи компактно, и $\pi_1(V)$ конечна*, в точности как и в случае $K > 0$, изученном нами ранее в § 3. Более того, даже в нестрогом случае структура фундаментальной группы $\pi_1(V)$ для $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ аналогична случаю $K \geqslant 0$. А именно, π_1 *содержит свободную абелеву подгруппу ранга, не превосходящего* $\dim V$, *имеющую конечный индекс в* π_1. Это следует из теоремы Чигера–Громола о расщеплении, примененной к универсальному накрытию V. (Эта теорема, сформулированная в общем виде, утверждает, что каждое полное риманово многообразие X без края и с $\mathrm{Ricci}\, X \geqslant 0$ допускает изометрическое расщепление $X = Y \times \mathbb{R}$, причем X содержит *прямую* l, т. е. геодезическую, которая минимизирует расстояние между любыми двумя точками в l).

С другой стороны, условие $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$, по-видимому, не накладывает ограничений на топологию односвязной части многообразия. (Исключение появится в § 6 в рамках обсуждения положительной скалярной кривизны.) Например, недавняя конструкция, которую предложили Ша и Янг (и уточнил Андерсон), позволяет построить многообразия V заданной размерности $n \geqslant 4$ с $\mathrm{Ricci} > 0$ и *со сколь угодно большими числами Бетти.* (Эти многообразия не могут иметь метрику с $K \geqslant 0$, см. обсуждение в § 3). Чтобы получить какую-либо перспективу, мы можем сравнить многообразия с $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ с субгармоническими функциями, в то время как $K \geqslant 0$ соответствует выпуклости. Эта аналогия приводит к мысли о *Риччи плоских* многообразиях (т. е. с $\mathrm{Ricci} = 0$), отвечающих гармоническим функциям (которых больше, чем линейных функций, соответствующих $K = 0$), и можно ожидать, что большое количество односвязных многообразий допускает Риччи плоскую метрику. Но даже один пример такого сорта не так легко получить. Хотя Яо доказал существование таких метрик для всех *четных* $n = \dim V$, поскольку он получил риманову (даже кэлерову) метрику с $\mathrm{Ricci} = 0$ на каждой гладкой комплексной проективной гиперповерхности V степени $m+1$ в $\mathbb{C}P^m$. (Отметим, что все такие V попарно диффеоморфны для фиксированного m, и они односвязны при $m \geqslant 3$). Яо также показал, что гиперповерхности степени $\leqslant m$ имеют метрики с $\mathrm{Ricci} > 0$, а гиперповерхности степени $\geqslant m+2$ имеют метрики с $\mathrm{Ricci} < 0$. Более того, в последнем случае Яо доказал существование метрик *Эйнштейна* g на V, удовлетворяющих уравнению $\mathrm{Ricci}_g = -g$.

Среди более элементарных примеров многообразий с $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ мы снова упомянем однородные пространства G/H для компактных групп G, однородные метрики которых часто имеют $\mathrm{Ricci} > 0$, в то время как K обычно только нестрого положительна. Простейшие из них — это декартовы произведения (например, сфер $S^k \times S^l$, где $k, l \geqslant 2$) и компактные *полупростые* группы Ли G с биинвариантными метриками (лишь $SU(2)$ и $SO(3)$ имеют $K > 0$). Отметим, что неравенства, связанные с формулой трубки, дают нетривиальную информацию о геометрии группы G, выраженную *изопериметрическим неравенством Поля Леви*, которое обобщает классическое изопериметрическое неравенство в S^n. Это неравенство особенно интересно, когда $\mathrm{Ricci}\, G \to \infty$ вместе с $\dim G \to \infty$, поскольку из него вытекает следующее замечательное утверждение о концентрации значений функций $f_i \colon G_i \to \mathbb{R}$ с $\|\operatorname{grad} f_i\|_{g_i} \leqslant \mathrm{const}$.

Индуцированные образы мер Хаара на G_i слабо сходятся к δ-мере Дирака на $\mathbb{R}$ при $\dim G_i \to \infty$, если биинвариантные метрики нормированы так, что $\mathrm{Diam}(G_i, g_i) = 1$, а f_i нормированы соотношением $\int\limits_{G_i} f_i = 0$ (см. [30]).

Сингулярные пространства с $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$. Теории таких пространств еще не существует. По-видимому, сложно (если вообще возможно) выразить адекватно неравенство $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ при помощи какого-нибудь универсального неравенства типа Александрова–Топоногова для $K \geqslant 0$. Хотя из условия $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ следуют некоторые соотношения на расстояние, например, связанные с шарами внутри бóльшего шара (см. выше), они недостаточно хорошо характеризуют $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$. Мы установим точное неравенство такого вида, которое выглядит очень похожим на AT, однако и оно все еще не дает характеризацию $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$. Рассмотрим, как и в случае $K \geqslant 0$, четыре точки $v_i \in V$, $i = 0, 1, 2, 3$, где v_3 лежит на минимизирующем отрезке $[v_1, v_2]$ (см. рис. 15 в § $3\frac{1}{2}$). Мы хотим найти *нижнюю границу* расстояния $|v_0 - v_3|$ между v_0 и v_3. Обозначим через E *избыток* в неравенстве треугольника для (v_0, v_1, v_2), т. е.

$$E = |v_0 - v_1| + |v_0 - v_2| - |v_1 - v_2|,$$

и пусть

$$s = \min(|v_0 - v_1|, |v_0 - v_2|).$$

Тогда *если* $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$*, то выполнено следующее*

Неравенство Абреша–Громола:

$$|v_0 - v_3| \geqslant (s(E/4)^{n-1})^{\frac{1}{n}}.$$

(Доказательство см. в [9].)

Напомним, что неравенства для расстояний в общем случае характеризуют образ функции расстояний на V^N, обозначенный $M_N(V^N) \subset \mathbb{R}^{N'}$, $N' = \dfrac{N(N-1)}{2}$ (см. дискуссию, предшествующую неравенству Александрова–Топоногова в § $3\frac{1}{2}$). Теперь кривизна Риччи обнаруживает себя через неравенства трубки для объемного поведения функции расстояния. Таким образом, можно ожидать желаемой абстрактной характеризации $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ в терминах индуцированного образа римановой меры в $\mathbb{R}^{N'}$. (Например, неравенство Бишопа (16) — это соотношение такого рода.) Заметим, что для общих метрических пространств не существует отмеченной меры, поэтому (гипотетическая) теория $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ должна *включать* меру как *заданный* элемент структуры вместе с метрикой.

Важной особенностью теории пространств с $K \geqslant 0$, определенных AT-неравенством, является хорошее поведение относительно *хаусдорфовых пределов* последовательностей пространств, где хаусдорфова сходимость $V_i \to V$, грубо говоря, соответствует сходимости для каждого $N = 2, 3, \ldots$ подмножеств $M_N(V_i^N) \subset \mathbb{R}^{N'}$ к $M_N(V^N)$ в хаусдорфовой метрике (подробнее об этом см. [23]). Здесь в случае кривизны Риччи возможен *слабый хаусдорфов предел*, соответствующий слабому пределу M_N-образов мер в $\mathbb{R}^{N'}$.

Существует другой выбор абстрактной теории $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$, где вместо метрики можно заострить внимание на *тепловом потоке* (*диффузии*) на V, но в этом случае неясно, будут ли эти два подхода эквивалентны, и если нет, то какой из них лучше для приложений.

Укажем здесь на характерную проблему, дающую повод для обсуждения. Напомним, что *гладкие* многообразия с $\mathrm{Ricci} \geqslant \rho > 0$ удовлетворяют неравенству Поля Леви, из которого, в свою очередь, следуют определенные ограничения на спектр оператора Лапласа Δ и на тепловое распределение на V. (См. [30], [16].) Теперь мы спрашиваем, остаются ли выполненными подобные ограничения на сингулярных пространствах с $K \geqslant 0$, где дополнительно навязано условие Ricci $\geqslant \rho$ соответствующим способом. Например, можно усилить AT-неравенство в § $3\frac{1}{2}$, чтобы сделать его эквивалентным неравенству $K \geqslant \rho/(n-1)$, откуда должно следовать вышеприведенное ограничение на Ricci. (Смысл спектра Δ и т. д. на абстрактных метрических пространствах см. в [19].)

Ricci $\leqslant 0$. Формула трубки для следа не дает много информации, если Ricci $\leqslant 0$ (в отличие от случая $K \leqslant 0$), и на самом деле ничего не известно о геометрическом смысле этого условия. По-видимому, единственный известный результат — это старая теорема Бохнера о том, что замкнутое многообразие V с Ricci < 0 должно иметь *конечную группу изометрий*. Никакие топологические ограничения на V также не вытекают из отрицательной кривизны Ricci. На данный момент выглядит правдоподобным, что каждое многообразие размерности $n \geqslant 3$ допускает полную метрику с Ricci < 0. (Для $n = 3$ — это *теорема* Гао и Яо[1].)

Пример. Если V погружено в $\mathbb{R}^m$ для некоторого m как *минимальное* подмногообразие, то индуцированная метрика имеет Ricci $\leqslant 0$, и можно ожидать, что каждое *открытое* многообразие V допускает полное минимальное погружение в некоторое евклидово пространство.

Замечания о псевдовыпуклости и положительная бисекционная кривизна. Понятие *псевдовыпуклости* областей и гиперповерхностей в $\mathbb{C}^m$ (см. § $\frac{1}{2}$) находится между выпуклостью и выпуклостью в среднем. Возникает вопрос, какими должны быть многообразия, снабженные комплексной структурой и римановой метрикой, чтобы внутренние эквидистантные деформации сохраняли псевдовыпуклость. Отметим, что априори такие многообразия вообще могут не существовать, но на самом деле они существуют. Это *кэлеровы* многообразия с определенным неравенством на тензор кривизны, которое называется *положительностью бисекционной кривизны.* (Например, каждое кэлерово многообразие с $K \geqslant 0$ имеет бисекционную кривизну $\geqslant 0$). Теорема Сиу–Яо утверждает, что *каждое замкнутое многообразие со строго положительной бисекционной кривизной диффеоморфно* (*даже биголоморфно*) $\mathbb{C}P^m$. Однако не существует прямого доказательства этого результата через псевдовыпуклые деформации. (Сиу и Яо ис-

[1] Усиленную версию этой гипотезы, а именно, h-принцип для Ricci < 0 доказал Локамп для всех $n \geqslant 3$.

пользовали *гармонические отображения* $S^2 \to V$, сравн. с § $7\frac{1}{2}$. Существует другой подход, принадлежащий С. Мори, который обратился к алгебраической геометрии над конечными полями.) С другой стороны, соображения псевдовыпуклости весьма полезны при изучении комплексных подмногообразий в V положительной бисекционной кривизны. Например, для каждой комплексной гиперповерхности $H \subset \mathbb{C}P^m$ области

$$V_\varepsilon^- = \{v \in \mathbb{C}P^m \mid \operatorname{dist}(v, H) \geqslant \varepsilon\}$$

псевдовыпуклы, и, следовательно, по теории Морса $\mathbb{C}P^m - H$ имеет *гомотопический тип m-мерного полиэдра.* Это особый случай известной теоремы Лефшеца.

Наконец, мы заметим для специалистов, что подобные условия положительности можно ввести для других многообразий с *ограниченной голономией*, но их полезность ограничивается списком известных примеров.

§ 6. Положительная скалярная кривизна

Формальное определение скалярной кривизны Sc простое:

$$\operatorname{Sc}(V) = \operatorname{Trace}_g \operatorname{Ricci} V.$$

Теперь, если мы вспомним определение Ricci в терминах секционной кривизны, мы можем сосчитать Sc в заданной точке $v \in V$, используя ортонормированный репер $\nu_1, \ldots, \nu_n$ в $T_v(V)$ и суммируя секционные кривизны плоскостей σ_{ij}, натянутых на ν_i и ν_j при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $n = \dim V$, $\operatorname{Sc}_v(V) = \sum\limits_{i,j} K(\sigma_{ij})$. Таким образом, единичная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет $\operatorname{Sc} = n(n-1)$ (что дает 2 для 2-сферы, секционная кривизна которой есть $K = 1$). Можно взглянуть на это геометрически, используя интеграл от $\operatorname{Ricci}(s, s)$ по единичной сфере $S^{n-1} \subset T_v(V)$ вместо следа (или суммы $\sum\limits_{i,j} K(\sigma_{ij})$). Таким образом, согласно формуле трубки $\operatorname{Sc}_v(V)$ измеряет *отличие* полной средней кривизны ε-сферы $S(V, \varepsilon)$ в V с центром в точке v при $\varepsilon \to 0$ от полной средней кривизны евклидовой ε-сферы. Чтобы увидеть это, заметим, что сферы $\varepsilon^{-1}S(V, \varepsilon)$ образуют *гладкое* семейство по $\varepsilon \geqslant 0$ в $\varepsilon = 0$, где $\varepsilon^{-1}S$ означает $(S, \varepsilon^{-2}g_\varepsilon)$ для индуцированной римановой метрики g_ε на ε-сфере $S(V,\varepsilon) \subset V$ и где $\varepsilon^{-1}S(V,\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0$ сводится к единичной евклидовой сфере $S^{n-1} \subset T_v(V)$. Это имеет смысл, поскольку мы отождествляем S^{n-1} с $S(V,\varepsilon)$, связывая касательные векторы $\tau \in S^{n-1}$ с ε-концами геодезических ε-отрезков, выпущенных из v и касательных к τ. (Гладкость семейства $\varepsilon^{-2}g_\varepsilon$ в нуле следует из гладкости g в точке $v \in V$.) Теперь мы формально разложим g_ε в степенной ряд по ε

$$g_\varepsilon = \varepsilon^2 g_0 + \varepsilon^3 g_1 + \varepsilon^4 g_2 + \dots,$$

где g_i, $i = 0, 1, \dots$ есть некоторые квадратичные дифференциальные формы на S^{n-1}, а g_0 — сферическая метрика. Тогда операторы формы A_ε сферы $S(V,\varepsilon)$ (определенные равенством $\langle A_\varepsilon\tau, \tau'\rangle_{g_\varepsilon} = \Pi_\varepsilon(\tau,\tau')$, см. §§ 0, 1, 2) также раскладываются как

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\operatorname{Id} + A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots,$$

где A_ε и A_i, $i = 0, 1, \dots$ — это операторы на касательном расслоении $T(S^{n-1})$, а S^{n-1} отождествляется с $S(V,\varepsilon)$. Теперь мы вспомним основную формулу трубки

$$\frac{dA_\varepsilon}{d\varepsilon} = -A_\varepsilon^2 + B$$

(см. (7)) и подставим в ряд для A_ε. Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^{-2}\operatorname{Id} + A_1 + 2\varepsilon A_2 + \dots = \\ &\qquad = -(\varepsilon^{-2}\operatorname{Id} + \varepsilon^{-1}2A_0 + A_\varepsilon + 2A_1 + \varepsilon(A_0A_1 + \dots) + \dots) + B, \end{aligned}$$

откуда следует

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\operatorname{Id} + \frac{\varepsilon}{3}B + \dots, \tag{17}$$

где пропущенный член есть $o(\varepsilon^2)$. Затем мы возьмем следы операторов в (17) (они действуют из $T_s(S^{n-1})$ в $T_s(S^{n-1})$, $s \in S^{n-1}$) и придем к следующему соотношению (для *функций*) на S^{n-1}:

$$M_\varepsilon = (n-1)\varepsilon^{-1} - \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{Ricci} + \dots,$$

где M_ε — это средняя кривизна сферы $S(V,\varepsilon)$, а Ricci обозначает $\operatorname{Ricci}(s,s)$, $s \in S^{n-1} \subset T_v(V)$. Теперь мы хотим вычислить интеграл от M_ε по $S(V,\varepsilon)$, и мы должны проконтролировать *плотность объема* на $S(V, \varepsilon)$. Запишем это как $J_\varepsilon ds$ для сферической меры ds на S^{n-1} и функции (плотности) J_ε на S^{n-1}, которая связана с M_ε уравнением

$$\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} = J_\varepsilon M_\varepsilon$$

(см. § 5). Будем искать решение в виде

$$J_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} + b_n\varepsilon^n + b_{n+1}\varepsilon^{n+1} + \ldots$$

(это обосновано гладкостью g, как и ранее). Мы увидим, что

$$\begin{aligned}(n-1)\varepsilon^{n-2} + nb_n\varepsilon^{n-1} + (n+1)b_{n+1}\varepsilon^n + \ldots &= \\ = (\varepsilon^{n-1} + b_n\varepsilon^n + b_{n+1}\varepsilon^{n+1} + \ldots)((n-1)\varepsilon^{-1} - \tfrac{\varepsilon}{3}\mathrm{Ricci} + \ldots).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $b_n = 0$ и

$$(n+1)b_{n+1} = -\frac{1}{3}\mathrm{Ricci} + (n-1)b_{n+1}.$$

Поэтому

$$J_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} - \frac{\varepsilon^{n+1}}{6}\mathrm{Ricci} + \ldots, \tag{18}$$

и в таком случае $(n-1)$-мерный объем сферы $S(V, \varepsilon) \subset V$ есть

$$\mathrm{Vol}\, S(V, \varepsilon) = \varepsilon^{n-1}(1 - \varepsilon^2\alpha_n\,\mathrm{Sc}_v + \ldots)\,\mathrm{Vol}\, S^{n-1},$$

где

$$\alpha_n = (6n)^{-1}$$

(поскольку среднее значение $\mathrm{Ricci}(s, s)$ по сфере S^{n-1} равно $\mathrm{Trace\,Ricci}/\mathrm{n}$). Мы можем также записать интегральную среднюю кривизну сферы $S(V, \varepsilon)$ равенством

$$\overline{M}_\varepsilon = \int\limits_{S^{n-1}} M_\varepsilon J_\varepsilon\, ds,$$

которое дает нам

$$\overline{M}_\varepsilon = \varepsilon^{-(n-2)}(n - 1 - \varepsilon^2\beta_n\,\mathrm{Sc} + \ldots)\,\mathrm{Vol}\, S^{n-1},$$

где $\beta_n = n^{-1}\Big(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{6}\Big)$. Поэтому, как мы утверждали, скалярная кривизна измеряет отличие интегральной средней кривизны $\overline{M}_\varepsilon$ сфер $S(V,\varepsilon)$ от интегральной средней кривизны для евклидовых сфер $S(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ (где $\overline{M} = \varepsilon^{n-2}(n-1)$). На самом деле вышеприведенная формула дает аналогичную интерпретацию Sc для Vol $S(V,\varepsilon)$ (т. е. отличие объемов сфер $S(V,\varepsilon)$). Затем, интегрируя по ε, можно получить еще одно такое соотношение, на этот раз для шаров $B(V,\varepsilon) \subset V$ с центром в v,

$$\operatorname{Vol} B(V,\varepsilon) = \varepsilon^n(1-\varepsilon^2\alpha_n \operatorname{Sc}_v + \ldots)\operatorname{Vol} B^n,$$

где B^n означает единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Например, если $\operatorname{Sc}_v(V) > 0$, то для каждого достаточно малого шара $B(V,\varepsilon)$ выполнено

$$\operatorname{Vol} B(V,\varepsilon) < \varepsilon^n \operatorname{Vol} B^n = \operatorname{Vol} B(\mathbb{R}^n,\varepsilon).$$

Обратно, если

$$\operatorname{Vol} B(V,\varepsilon) \leqslant \varepsilon^n \operatorname{Vol} B^n$$

для всех достаточно малых ε, то $\operatorname{Sc}_v(V) \geqslant 0$. (Отметим, что наша дискуссия здесь и раньше имеет смысл только для $n \geqslant 2$. Если $n = 1$, то все римановы многообразия локально изометричны $\mathbb{R}$, и ни о какой кривизне речи быть не может).

На этом этапе может показаться, что мы достигли определенного понимания скалярной кривизны V. Однако приведенные выше инфинитезимальные соотношения на Sc не дают руководства к действию, как это происходило для секционной кривизны и кривизны Риччи. На самом деле мы по-прежнему не знаем, насколько геометрия и топология многообразий связана с $\operatorname{Sc} \geqslant 0$ (или $\operatorname{Sc} \leqslant 0$). Чтобы взглянуть на эту проблему с другой точки зрения, рассмотрим некоторые примеры многообразий с $\operatorname{Sc} \geqslant 0$. Во-первых, мы отметим, что скалярная кривизна аддитивна для декартова произведения многообразий. Таким образом, если многообразие V имеет $\inf \operatorname{Sc} > -\infty$ (например, V компактно), то произведение V с малой круговой сферой $S^2(\delta) \subset \mathbb{R}^3$ (для которой $\operatorname{Sc}(S^2(\delta)) = 2\delta^{-2}$) имеет положительную скалярную кривизну. С другой стороны, это полученное многообразие $V \times S^2(\delta)$ является таким же геометрически и топологически сложным, как и исходное многообразие V, и может оказаться безнадежным найти какую-либо глобальную модель для $\operatorname{Sc} > 0$.

Первый глобальный результат для $\operatorname{Sc} > 0$ получил Лихнерович в 1963.

Теорема Лихнеровича. *Если замкнутое $4k$-мерное спиновое многообразие V допускает метрику с* $\mathrm{Sc} > 0$, *то определенное характеристическое число многообразия V, а именно, $\widehat{A}$-род, обращается в ноль.*

Смысл понятий «спин» и «$\widehat{A}$-род» будет обсуждаться позднее вместе с идеей доказательства (которая существенным образом использует теорему об индексе Атьи–Зингера, примененную к оператору Дирака). Здесь мы укажем только на частный пример V, когда применяется теорема.

Пример. Пусть V — гладкая комплексная гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^{m+1}$. Если m четно, то (действительная) размерность V делится на 4. Кроме того, если d четно, то V есть спиновое многообразие. Наконец, если $d \geqslant m+2$, то $\widehat{A}(V) \neq 0$, и поэтому такое V не может иметь риманову метрику с $\mathrm{Sc}\, V > 0$. Простейший пример такого многообразия — это поверхность четвертого порядка (т. е. $d = 4$) в $\mathbb{C}P^3$, которая является 4-мерным односвязным многообразием V^4 и которое по теореме Лихнеровича не допускает метрики с $\mathrm{Sc} > 0$. (По теореме Яо, упомянутой в §5, это V^4 допускает метрику с $\mathrm{Ricci} = 0$ и, следовательно, с $\mathrm{Sc} = 0$. С другой стороны, даже если мы захотим показать, что «не существует метрики с $\mathrm{Ricci} > 0$», или, еще меньше, «не существует метрики с $K > 0$», мы по-прежнему не сможем сделать этого геометрически, не обращаясь к глубокому анализу, лежащему в основе доказательства теоремы Лихнеровича.)

Метод Лихнеровича был широко развит Н. Хитчиным, который показал, среди прочего, что *существует экзотическая 9-мерная сфера V (т. е. многообразие гомеоморфное, но не диффеоморфное S^9), которая не допускает метрики* с $\mathrm{Sc} > 0$. (Действительно, половина из экзотических сфер размерности 1 и 2 $(\mathrm{mod}\ 8)$ не несут таких метрик по теореме Хитчина). Здесь снова не существует альтернативного геометрического подхода, даже если $\mathrm{Sc} > 0$ заменить на $K > 0$.

Скалярная кривизна и минимальные гиперповерхности. Первое геометрическое проникновение внутрь $\mathrm{Sc} \geqslant 0$ совершили Шен и Яо в 1979 со следующей безобидно выглядящей модификацией формулы трубки для следа (см. (10) в §5) для поверхностей W в 3-мерном многообразии V. В каждой точке $v \in W$ рассмотрим касательную плоскость $\sigma_v = T_v(W)$ и единичный нормальный вектор ν_v к W. (Мы полагаем, что поверхность W коориентированна и вектор ν направлен внутрь.) Во-первых, отметим, что из наших формул, выражающих Ricci и Sc в терминах K, следует, что

$$\mathrm{Sc}_v = 2K(\sigma_v) + 2\,\mathrm{Ricci}(\nu_v,\, \nu_v).$$

(Вообще для гиперповерхностей W в V^n при $n \geqslant 3$ член $2K(\sigma_v)$ должен быть заменен суммой $K(\sigma_{ij})$ для некоторого ортонормированного базиса $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ в $T_v(W)$.) Теперь мы введем главные кривизны λ_1 и λ_2 поверхности W в точке v и напомним, что секционная кривизна W с индуцированной метрикой выражается согласно формуле Гаусса (теорема Egregium в § 2) как

$$K(W,\, \sigma_v) = K(V,\, \sigma_v) + \lambda_1\lambda_2,$$

что эквивалентно

$$K(W,\, \sigma_v) = K(V,\, \sigma_v) + \frac{1}{2}(M^2 - \mathrm{Trace}\, A^2).$$

Здесь A — оператор формы поверхности W (его собственные значения есть в точности λ_1 и λ_2), а $M = \mathrm{Trace}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$ — средняя кривизна W.

Формула трубки (см. (10) в § 5) выражает производную от M относительно нормальной эквидистантной деформации W_ε поверхности $W = W_0$ в точке $\varepsilon = 0$ следующим образом:

$$\frac{dM}{d\varepsilon} = -\mathrm{Trace}\, A^2 - \mathrm{Ricci}\,(\nu,\, \nu).$$

Теперь мы вспомним, что средняя кривизна M равна (логарифмической) производной от плотности объема на W_ε в точке $\varepsilon = 0$ (см. § 5). Интегрируя по W, мы получим, что производная от $\mathrm{Area}\, W_\varepsilon$ в точке $\varepsilon = 0$ равна полной средней кривизне поверхности W

$$\overline{M} = \int\limits_W M\, dw.$$

(Мы говорим «Area» вместо «Vol», поскольку $\dim W = 2$).

Далее, мы отметим, что

$$\frac{d\overline{M}}{d\varepsilon} = \int\limits_W \frac{dM}{d\varepsilon}\, dw + \int\limits_W M^2 dw,$$

где второе слагаемое выражается через среднюю кривизну, благодаря тому, что $dw = \mathrm{Vol}_{\,\varepsilon=0}$. Затем мы подставим вместо Ricci в указанную выше формулу трубки для $\dfrac{dM}{d\varepsilon}$ выражение

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sc}(V) + K(V \,|\, T(W)),$$

а затем используем формулу Гаусса

$$K(V|T(W)) = K(W) + \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}\, A^2 - M^2).$$

Таким образом, мы получим следующую формулу второй вариации для площади $W = W_\varepsilon$ в $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d^2 \,\mathrm{Area}\, W}{d\varepsilon^2} = \frac{d\overline{M}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}\int\limits_W (-\,\mathrm{Sc}(V) + 2K(W) - \mathrm{Trace}\; A^2 + M^2)\, dw =$$

$$= \int\limits_W \Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sc}(V) + K(W) + \lambda_1\lambda_2\Big)\, dw. \tag{19}$$

Теперь напомним *теорему Гаусса–Бонне*:

$$\int\limits_W K(W)\, dw = 2\pi\chi(W),$$

где χ означает эйлерову характеристику, а W — компактное многообразие без края. Тогда если $\mathrm{Sc}(V) \geqslant 0$, то мы имеем следующее неравенство:

$$\frac{d^2 \mathrm{Area}\, W}{d\varepsilon^2} \leqslant 2\pi\chi(W) + \int\limits_W \lambda_1\lambda_2\, dw.$$

В частности, если $\chi(W) < 0$ и W является *седловой поверхностью*, т. е. если $\lambda_1\lambda_2 \leqslant 0$, то

$$\frac{d^2 \mathrm{Area}\, W}{d\varepsilon^2} < 0. \tag{20}$$

Отметим, что, как и в предыдущих случаях, это заключение применяется только к малым эквидистантным деформациям, которые не не разрушают гладкость W. Теперь вместо того, чтобы обобщать эти выкладки для негладких поверхностей W_ε, как мы это делали ранее для $K \geqslant 0$ и $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$, мы последуем за идеей Шена и Яо и применим (20) к *гладким минимальным поверхностям* W в V. (Негладкое обобщение вышесказанного сомнительно в силу седлового условия.) Существование таких поверхностей обеспечивает следующая теорема, известная с давних пор в геометрической теории меры (см., например, [25]).

Каждый 2*-мерный класс гомологий* в замкнутом римановом 3-мерном многообразии V *можно представить при помощи гладкой абсолютно минимизирующей вложенной ориентированной поверхности* $W \subset V$.

Напомним, что «абсолютно минимизирующая» означает, что каждая поверхность $W' \subset V$, гомологичная W, имеет

$$\mathrm{Area}\, W' \geqslant \mathrm{Area}\, W.$$

Замечание. Подобный результат остается выполненным для минимальных гиперповерхностей W в V^n при $n \geqslant 3$, но здесь эти W могут иметь особенности. Известно, что особенность отсутствует при $n \leqslant 7$, и вообще она имеет коразмерность $\geqslant 7$ в W.

Теперь, поскольку минимизирующая поверхность W обеспечивает минимум функции $W \to \mathrm{Area}\, W$ на пространстве поверхностей в V, первая вариация от Area равна нулю, а вторая неотрицательна. В частности,

$$\frac{d^2 \mathrm{Area}\, W}{d\varepsilon^2} \geqslant 0.$$

Более того, каждая связная компонента в W, скажем W_c, также имеет

$$\frac{d^2 \mathrm{Area}\, W_c}{d\varepsilon^2} \geqslant 0.$$

Кроме того, минимальные поверхности имеют $M = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, и поэтому они являются седловыми. Следовательно, это неравенство несовместимо с $\mathrm{Sc}(V) \geqslant 0$ и с вытекающим неравенством (20), пока не выполнено $\chi(V) \geqslant 0$. Таким образом, мы заключаем следующее.

Теорема Шена–Яо. *Пусть V — замкнутое* 3*-мерное риманово многообразие с* $\mathrm{Sc}(V) \geqslant 0$. *Тогда каждый класс гомологий в* $H_2(V)$ *может быть реализован вложенной ориентированной поверхностью* W, *каждая связная компонента которой имеет* $\chi \geqslant 0$.

Пример. Пусть $V = V_0 \times S^1$, где V_0 — ориентируемая поверхность рода $\geqslant 2$ (т.е. $\chi(V_0) < 0$). Тогда элементарная топология говорит нам, что $V_0 = V_0 \times s_0 \subset V$ *не* гомологично поверхности, все компоненты которой имеют род $\leqslant 1$. Поэтому такое многообразие V не допускает метрики с $\mathrm{Sc} \geqslant 0$. (Очевидно, изменяя вышеприведенные рассуждения, можно исключить $\mathrm{Sc} > 0$, начиная с рода поверхности V_0, равного единице.)

Шен и Яо обобщили свой метод на многообразия V^n с $n \leqslant 7$, и они доказали, что если $\mathrm{Sc}(V^n) \geqslant 0$, *то каждый класс в* $H^{n-1}(V^n)$ *может быть реализован гиперповерхностью* W, *которая допускает некоторую метрику с* $\mathrm{Sc} \geqslant 0$. На самом деле они берут минимизирующую объем гиперповерхность для $W \subset V^n$, а затем конформно изменяют индуцированную метрику в W, для того чтобы сделать $\mathrm{Sc} \geqslant 0$. Это не работает при $n > 7$, ввиду (возможного) существования особенностей на минимальной гиперповерхности W, однако позднее Шен и Яо указали выход из этой проблемы. (См. краткое изложение этих результатов в [31]).

Теорема Шена–Яо показывает (простой индукцией по n), что существуют нетривиальные топологические ограничения на V^n с $\mathrm{Sc}(V^n) \geqslant 0$. Например, декартово произведение поверхностей рода $\geqslant 2$ не допускает такой метрики. Кроме того, их метод можно уточнить для того, чтобы обеспечить также нетривиальные *геометрические* ограничения на V. Например, пусть V^n — полное некомпактное ориентированное риманово многообразие без края с равномерно положительной скалярной кривизной, т.е. $\mathrm{Sc}(V^n) \geqslant c > 0$. *Тогда* V^n *не допускает собственного уменьшающего расстояния отображения в* $\mathbb{R}^n$ *ненулевой степени.* Другими словами, V^n не больше, чем $\mathbb{R}^n$.

Пример. Пусть $V^n = S^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ с метрикой произведения. Очевидно, многообразие V^n (которое имеет $\mathrm{Sc} \geqslant c > 0$) не допускает указанного выше отображения в $\mathbb{R}^n$. Но если мы видоизменим метрику $g_s + g_E$ на $V^n = S^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ введением так называемого *искривляющего* множителя (который является положительной функцией $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}_+$) и рассмотрим $g = \varphi g_s + g_E$, то для (V, g) легко получить сжимающее собственное отображение в $\mathbb{R}^n$ степени один при условии, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\varphi(x) \to \infty \text{ при } x \to \infty.$$

Отсюда следует, что такая искривляющая функция φ необходимо влечет

$$\inf \operatorname{Sc} g \leqslant 0,$$

хотя несложно добиться неравенства $\operatorname{Sc} g > 0$ не равномерно на V.

§ $6\frac{1}{2}$. Спиноры и оператор Дирака

Теперь мы вернемся к подходу Лихнеровича. Во-первых, напомним, что фундаментальная группа специальной ортогональной группы есть

$$\pi_1(SO(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{для } n = 2 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{для } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом, $SO(n)$ для всех $n \geqslant 2$ допускает единственное двулистное накрытие, обозначенное как

$$\operatorname{Spin}(n) \to SO(n),$$

где $\operatorname{Spin}(n)$ несет естественную структуру группы Ли такую, что накрывающее отображение является гомоморфизмом. (Это довольно очевидно для $SO(2) = S^1$, но не совсем очевидно для $n \geqslant 3$).

Далее, для риманова многообразия V рассмотрим расслоение ортонормированных реперов $SO(V)$, т.е. главное расслоение со слоем $SO(n)$, $n = \dim V$, соответствующее $T(V)$. Мы спрашиваем себя, существует ли двулистное накрытие

$$\operatorname{Spin}(V) \to SO(V),$$

которое сводится над каждой точкой $v \in V$ к вышеупомянутому накрытию $\operatorname{Spin}(n) \to SO(n)$. Это, очевидно, возможно, если касательное расслоение (а значит, и $SO(V)$) *тривиально*, $T(V) = V \times \mathbb{R}^n$, поскольку можно взять $V \times \operatorname{Spin}(n)$ для $\operatorname{Spin}(V)$. В общем случае существует топологическое препятствие для существования $\operatorname{Spin}(V)$, которое можно легко отождествить со вторым *классом Штифеля–Уитни* $w_2(V)$. Это класс когомологий в $H^2(V, \mathbb{Z}_2)$, который измеряет нетривиальность $T(V)$ и который известен как гомотопический инвариант многообразия V. В любом случае, $w_2 = 0$, если $H^2(V, \mathbb{Z}_2) = 0$, и тогда $\operatorname{Spin}(V) \to SO(V)$ существует.

Пространство $\mathrm{Spin}(V)$ всякий раз, когда оно существует, имеет естественную структуру главного $\mathrm{Spin}(n)$ расслоения над V, и можно взглянуть на ассоциированные векторные расслоения. Они сопровождают линейные представления группы $\mathrm{Spin}(n)$. Для четных $n = 2r$ существует два различных точных (спиновых) представления группы $\mathrm{Spin}(n)$ (наименьшей возможной) размерности 2^{r-1}. Соответствующие векторные расслоения, обозначенные через $S_+ \to V$ и $S_- \to V$, называются *положительным* и *отрицательным спиновыми расслоениями*, сечения которых называются (положительным и отрицательным) спинорами на V. Атья и Зингер обнаружили замечательный эллиптический дифференциальный оператор между спинорами, т. е.

$$D_+ \colon C^\infty(S_+) \to C^\infty(S_-),$$

который они назвали *оператором Дирака.* Этот оператор строится по связности ∇_+ в S_+, индуцированной связностью Леви–Чивита в V, где связность в S_+ понимается как оператор, отображающий спиноры в спинорнозначные 1-формы на V, т. е.

$$\nabla_+ \colon C^\infty(S_+) \to \Omega^1(S_+).$$

Тогда D_+ получается композицией ∇_+ с гомоморфизмом канонического векторного расслоения $\Omega^1(S_+) \to S_-$, который происходит от некоторых алгебраических действий со спиновыми представлениями. (Мы отчасти неправильно употребляем обозначения, используя $\Omega^1(S_+)$ как для расслоения спинор-форм, так и для сечений этого расслоения.) Отметим, что D_+ определен локально и нет необходимости в «спиновом условии» $w_2 = 0$, но если $w_2 \neq 0$, то спиноры определены глобально только с точностью до знака $\pm$. Заинтересованный читатель может обратиться к книге [26], где фактически строятся спиноры и оператор Дирака. Здесь мы только *предполагаем* существование определенных расслоений S_+ и S_- и оператора D_+ со свойствами, установленными ниже.

Кроме оператора D_+ рассмотрим его двойник

$$D_- \colon C^\infty(S_-) \to C^\infty(S_+),$$

который строится таким же образом, как и D_+, и который можно определить как *сопряженный* к оператору D_+ для естественной евклидовой структуры на спин-расслоениях. Теперь можно рассмотреть *индекс* D_+, т. е.

$$\operatorname{Ind} D_+ = \dim\ker D_+ - \dim\ker D_-.$$

Здесь размерности ядер D_+ и D_- конечны, если V — замкнутое многообразие, поскольку операторы D_+ и D_- эллиптические. Замечательным (и легко доказуемым) свойством индекса является инвариантность относительно деформаций D_+ в классе *эллиптических* операторов между спинорами. В частности, этот индекс не зависит от римановой метрики, используемой для определения D_+, и поэтому он представляет *топологический инвариант* многообразия V. Известная теорема Атьи и Зингера отождествляет $\operatorname{Ind} D_+$ с определенным характеристическим числом многообразия V, которое называется *$\widehat{A}$-родом*, но для наших целей мы можем *определить* $\widehat{A}$-род как $\operatorname{Ind} D_+$. Единственное серьезное свойство D_+, которое необходимо нам в данный момент — это *необращение в ноль* $\widehat{A}(V)$ для определенных многообразий V. (В противном случае следствия будут бессодержательными.)

Здесь нам необходим еще один оператор, связанный с ∇_+, который называется *лапласианом Бохнера*:

$$\Delta_+ = \nabla_+^* \nabla_+ \colon C^\infty(S_+) \to C^\infty(S_+),$$

где

$$\nabla_+^* \colon \Omega^1(S_+) \to C^\infty(S_+)$$

есть оператор, сопряженный к ∇_+. Этот лапласиан имеет смысл для произвольных векторных расслоений с евклидовой связностью над V. Важным свойством оператора Δ_+ является *положительность*, т. е.

$$\int_V \langle \Delta_+ s, s\rangle \geqslant 0$$

для всех спиноров $s\colon V \to S_+$. (Лапласиан Бохнера для обычного 1-мерного расслоения сводится к классическому оператору Лапласа–Бельтрами $\Delta = d^* d$ на функциях. Его положительность получается интегрированием по частям, поскольку $\int f\Delta f = \int \langle df, df\rangle$. Аналогичными рассуждениями можно доказать положительность Δ_+ на спинорах.)

Формула Лихнеровича. *Оператор* $D_-D_+ + D_+D_-$ *на* $S_+ \oplus S_-$ *связан с* $\Delta_+ + \Delta_-$ *равенством*

$$D_-D_+ + D_+D_- = \Delta_+ + \Delta_- + \frac{1}{4}\,\mathrm{Sc}\,\mathrm{Id}\,.$$

Напомним, что $\mathrm{Sc} = \mathrm{Sc}(V)$ означает скалярную кривизну, которая есть функция на V, а Id — это тождественный оператор на $C^\infty(S_+ \oplus S_-)$.

Доказательство формулы Лихнеровича получается путем непосредственных (инфинитезимальных) алгебраических выкладок, которые довольно просты по определению (не данному нами) операторов D_+ и D_-. Однако геометрический смысл формулы остается невыясненным.

Следствие. *Если замкнутое риманово спиновое* (*т. е.* $w_2 = 0$) *многообразие* V *имеет* $\mathrm{Sc}(V) > 0$, *то каждый гармонический спинор на* V *обращается в ноль и поэтому*

$$\widehat{A}(V) = \mathrm{Ind}\,D_+ = 0.$$

Здесь «гармонический спинор» означает спинор $s = (s_+, s_-) \in \in C^\infty(S_+ \oplus S_-)$ такой, что

$$Ds \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_+s_+ + D_-s_- = 0.$$

Доказательство следствия очевидно.

Из

$$\int\limits_V \langle Ds,\, s\rangle = \int\limits_V \Big(\langle \Delta s,\, s\rangle + \mathrm{Sc}\langle s,\, s\rangle\Big)$$

и положительности Δ следует, что

$$\int\limits_V \langle Ds,\, s\rangle \geqslant \int\limits_V \mathrm{Sc}\langle s,\, s\rangle,$$

и поэтому для $Ds = 0$ мы получаем

$$\int\limits_V \mathrm{Sc}\langle s,\, s\rangle \leqslant 0,$$

что возможно лишь для $s = 0$, поскольку $\mathrm{Sc} > 0$.

Снова отметим, что это следствие является содержательным, поскольку существуют спиновые многообразия с $\widehat{A} \neq 0$, например, комплексные гиперповерхности в $\mathbb{C}P^{m+1}$, упомянутые ранее в § 6. Свойство необращения в ноль $\operatorname{Ind} D_+$ для некоторого V и формула Лихнеровича — это все, что требуется от спиноров и оператора Дирака для того, чтобы показать, что некоторые многообразия V не допускают метрики с $\operatorname{Sc} > 0$.

Хотя формула Лихнеровича не дает нам полного понимания геометрии многообразия V, мы можем использовать эту формулу для того, чтобы обнаружить какие-либо геометрические свойства многообразия V с $\operatorname{Sc} V \geqslant c > 0$. А именно, мы хотим показать, что такое V не может быть «слишком большим». Например, оно не может быть намного больше, чем единичная сфера S^n. В самом деле, представим, что V намного больше, чем S^n в том смысле, что существует гладкое отображение $f\colon V \to S^n$ степени $d \neq 0$ такое, что дифференциал f является всюду малым, т. е.

$$\|Df\|_v \leqslant \varepsilon, \quad v \in V.$$

Поднимем в V некоторое фиксированное векторное расслоение E_0 с евклидовой связностью над S^n. Поднятое расслоение, скажем, E над V, является «ε-плоским», то есть локально ε-близким к тривиальному расслоению. В частности, *скрученный оператор Дирака*, обозначенный $D_+ \otimes E\colon C^\infty(S_+ \otimes E) \to C^\infty(S_- \otimes E)$, является локально ε-близким к прямой сумме k копий D_+, где $k = \operatorname{rank} E$. (Если $E = \mathbb{R}^k \times V \to V$ с тривиальной связностью, то

$$S_+ \otimes E = \underbrace{S_+ + S_+ + \ldots + S_+}_{k},$$

и скрученный оператор Дирака есть $D_+ + D_+ + \ldots + D_+$. Определение скручивания с нетривиальной связностью таково, что ε-плоскостность расслоения E делает скрученный оператор Дирака ε-близким к $D_+ + D_+ + \ldots + D_+$.) Отсюда следует, что для ε малых по сравнению с $c = \inf\limits_V \operatorname{Sc} V > 0$ скрученный оператор Дирака $D_+ \otimes E$ имеет

$$\operatorname{Ind} D_+ \otimes E = 0,$$

это следует из ε-возмущенного варианта формулы Лихнеровича.

Теперь в определенных случаях можно найти расслоение E_0 такое, что $\operatorname{Ind} D \otimes E_0 \neq 0$. На самом деле всегда можно получить такое (комплексное векторное расслоение) E_0 над *четномерной* сферой, как следует из теоремы об индексе Атьи–Зингера, примененной к $D_+ \otimes E$. Поэтому никакое спиновое многообразие V с $\mathrm{Sc}(V) \geqslant c > 0$ не может быть в ε^{-1} раз больше, чем S^n, где $\varepsilon \ll c$. (Здесь нечетномерный случай сводится к четномерному умножением V на длинную окружность S^1).

Здесь читатель может быть неудовлетворен, что справедливо, поскольку дискуссия была неполной и довольно формальной. Детальное изложение можно найти в книге [26], но заполнение деталей не обнаруживает дополнительных свойств геометрии.

Заключительные замечания. Существование двух различных подходов к $\mathrm{Sc} > 0$ в настоящий момент не имеет рационального объяснения. Вообще говоря, метод Шена–Яо обращается к (нелинейному) анализу пространств подмногообразий в V, в то время как подход через оператор Дирака использует линейный анализ спиноров над V. Можно надеяться на существование унифицированной общей теории, которая бы обращалась одновременно к нелинейным объектам внутри V и к линейным над V в известном смысле аналогичной тому, что происходит в алгебраической геометрии. Вероятно, такая унификация возможна лишь в бесконечномерном случае.

Скалярная кривизна $\leqslant 0$. Это условие не имеет топологического эффекта на V по теореме Каждана и Уорнера, которая утверждает, что *существует метрика* $\mathrm{Sc} < 0$ *на каждом многообразии размерности* $n \geqslant 3$. Вероятно, глобальная геометрия на V также нечувствительна к $\mathrm{Sc} < 0$ (хотя условие $\mathrm{Sc} \geqslant c$ при $c < 0$ имеет нетривиальные следствия)[1].

§ 7. Оператор кривизны и связанные с ним инварианты

Мы упомянули в конце § 2, что функция секционной кривизны на пространстве 2-плоскостей в V, т. е.

$$K\colon \mathrm{Gr}_2\, V \to \mathbb{R}$$

однозначно продолжается до квадратичной формы (функции) Q на расслоении $\Lambda^2 T(V)$, и симметрический оператор $R\colon \Lambda^2 T(V) \to \Lambda^2 T(V)$, соответствующий Q, называется *оператором кривизны*. Условие $K \geqslant 0$

[1]Изгибаемость и h-принцип (в смысле [18]) для $\mathrm{Sc} < 0$ доказал Локамп.

можно выразить в терминах Q неравенством

$$Q(\tau \wedge \nu, \tau \wedge \nu) \geqslant 0$$

для всех касательных векторов τ, ν в $T_v(V)$, $v \in V$, а $K > 0$ соответствует $Q(\tau \wedge \nu, \tau \wedge \nu) > 0$ для всех *линейно независимых* пар (τ, ν).

С точки зрения Q более естественным условием является $Q \geqslant 0$, которое означает $Q(\alpha, \alpha) \geqslant 0$ для *всех* $\alpha \in \Lambda^2 T(V)$ (которые могут быть суммами $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i \wedge \nu_i$ при $k > 1$). Это соотношение называется *положительностью оператора кривизны* R. Далее, *строгая положительность* R сводится к положительной определенности Q. Аналогично можно ввести (строгую и нестрогую) *отрицательность* Q и R.

Положительность Q и R — это значительно более ограничивающее условие, чем $K \geqslant 0$. Хотя основные примеры многообразий с $K \geqslant 0$ имеют также $Q \geqslant 0$. А именно, выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n-1}$ и компактные симметрические пространства имеют $Q \geqslant 0$. Декартовы произведения пространств с $Q \geqslant 0$ также имеют $Q \geqslant 0$.

Чтобы увидеть разницу между $K \geqslant 0$ и $Q \geqslant 0$, рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с $U(n+1)$-инвариантной римановой метрикой g для естественного действия унитарной группы на $\mathbb{C}P^n$. Легко видеть, что такая метрика g (которая существует потому, что $U(n+1)$ компактно) единственна с точностью до скалярного множителя, и $(\mathbb{C}P^n, g)$ есть *симметрическое пространство ранга один*; это эквивалентно $K > 0$ для компактных симметрических пространств. На самом деле мы уже знаем (см. §$3\frac{3}{4}$), что секционная кривизна заключена между $\frac{1}{4}a$ и a для некоторой константы $a > 0$, зависящей от (нормировки) метрики g. (Пытливый читатель будет рад узнать, что $a = \pi^{-1}(\mathrm{Diam}(\mathbb{C}P^n, g))^{-2}$).

С другой стороны, оператор кривизны R является только нестрого положительным, т.е. форма Q только *положительно полуопределена*. Таким образом, малое возмущение g может легко нарушить условие $R \geqslant 0$, не нарушая $K \geqslant 0$.

Вышеприведенный пример $\mathbb{C}P^n$ особенно интересен в следующем контексте.

Гипотеза. *Если замкнутое n-мерное риманово многообразие имеет $R > 0$, то его универсальное накрытие диффеоморфно сфере S^n.*

Положительное решение является классическим для $n = 2$, когда R то же, что и K, и из $\int\limits_V K > 0$ следует $\chi(V) > 0$ по теореме Гаусса–Бонне.

Случаи $n = 3, 4$ принадлежат Р. Гамильтону; его доказательство использует глубокий анализ *теплового потока на пространстве метрик*. А именно, Гамильтон рассматривает следующее дифференциальное уравнение для однопараметрического семейства метрик g_t на V:

$$\frac{dg_t}{dt} = \alpha_n g_t - 2\,\mathrm{Ricci}(g_t),$$

где $\alpha_n = 2n^{-1} \int\limits_V \mathrm{Sc}(g_t)/\,\mathrm{Vol}(V, g_t)$, и он доказывает разрешимость этого уравнения для заданной начальной метрики $g = g_0$. Затем он показывает, что полученный тепловой поток сохраняет подпространство метрик g с $R(g) > 0$. (Он называется «тепловым потоком», поскольку соответствие $g \mapsto \mathrm{Ricci}(g)$ есть дифференциальный оператор на квадратичных дифференциальных формах на V, который во многих отношениях сходен с оператором Лапласа на функциях. Отметим, что Ricci — это не линейный оператор, но он имеет замечательное (хотя и очевидное) свойство коммутирования с действием группы диффеоморфизмов многообразия V на пространстве метрик).

Итак, для $n = 3$ и 4 Гамильтон доказал, что решение g_t этого уравнения с $R(g_0) > 0$ сходится при $t \to \infty$ к метрике g^∞ *постоянной положительной кривизны*, которая делает универсальное накрытие $(\widetilde{V}, \widetilde{g}^\infty)$ изометричным S^n. Отметим, что доказательство Гамильтона дает решение *усиленной гипотезы*, которая говорит о существовании $(\mathrm{Diff}\ V)$-инвариантного стягивания пространства метрик с $R \geqslant 0$ к подпространству с $K = 1$.

Отметим также, что при $n = 3$ Гамильтону требуется только $\mathrm{Ricci}\ V > 0$ для того, чтобы этот метод работал.

Основным моментом в подходе Гамильтона является исследование эволюции тензора кривизны относительно теплового потока. Здесь условие $R > 0$ становится решающим, поскольку оно инвариантно относительно потока. (Отметим, что член $\alpha_n g_t$ в уравнении Гамильтона введен для целей нормализации, в то время как рассуждения о кривизне касаются уравнения $\dfrac{dg_t}{dt} = -2\,\mathrm{Ricci}(g_t)$.)

Существуют более строгие условия на кривизну, которые также инвариантны относительно теплового потока, и для некоторых случаев можно доказать стягиваемость к постоянной кривизне. Например, в качестве следствия можно привести следующий результат для метрик g с поточечно ограниченной секционной кривизной.

(Ruh–Huisken–Margarin–Nishikava). *Пусть секционная кривизна $K\colon \mathrm{Gr}_2(V) \to \mathbb{R}$ замкнутого риманова n-мерного многообразия V стеснена (т. е. ограничена) в каждой точке $v \in V$:*

$$c_n a(v) \leqslant K(\sigma) \leqslant a(v),$$

где a — положительная функция на V, $c_n = 1 - 3(2n)^{-3/2}$, а σ означает произвольную 2-плоскость в $T_v(V)$. Тогда V диффеоморфно S^n.

Отметим, что эта теорема достаточно нетривиальна для любого $c_n < 1$. Например, такое условие выполнено при $n = 2$ (где существует только одна плоскость σ в каждой точке v) для каждой метрики с $K > 0$, и поэтому соответствующий тепловой поток не достигает малых возмущений исходной метрики. (Описание метода теплового потока см. в [6].)

Формулы Бохнера. Большое количество естественных (но обычно сложных) представлений кривизны сопровождает естественные дифференциальные операторы на V. Например, мы могли бы *определить* скалярную кривизну многообразия V по оператору Дирака $D = D_+ \oplus D_-$ равенством

$$\mathrm{Sc}\,\mathrm{Id} = 4(D^2 - \nabla^*\nabla),$$

где Id — тождественный оператор на спиновом расслоении $S = S_+ \oplus S_-$ (сравн. с формулой Лихнеровича в § $6\frac{1}{2}$).

Теперь мы хотим провести аналогичное сравнение между *лапласианом Ходжа-де Рама* Δ на k-формах на V и *грубым* лапласианом (Бохнера) $\nabla^*\nabla$, где ∇ обозначает связность Леви–Чивита на V, продолженную на расслоение $\Lambda^k T^*(V)$ k-форм на V.

Легко видеть, что два оператора совпадают, если V является плоским (т. е. локально евклидовым). Напомним, что каждую метрику g можно инфинитезимально с первым порядком аппроксимировать в каждой точке (соприкасающейся, см. § 1) плоской метрикой. Тогда следующий результат не становится для нас неожиданностью.

Дифференциальный оператор $\Delta - \nabla^*\nabla$ имеет нулевой порядок и задается при помощи симметрического эндоморфизма R_k расслоения $\Lambda^k T^*(V)$, где R_k алгебраически (даже линейно) выражается через *тензор кривизны на* V. (Здесь «симметрический» означает, что R_k является симметрическим оператором на каждом слое расслоения.)

Можно выразить это другим способом, записав

$$\Delta = \nabla^* \nabla + R_k,$$

это называется формулой Бохнера (или Бохнера–Вейценбока) для Δ. Выражение R_k в терминах оператора кривизны R достаточно сложно при $k \geqslant 2$ (см., например, [3]), но для $k = 1$ оно довольно прозрачно. А именно,

$$R_1 = \mathrm{Ricci}^*,$$

т. е. он является симметрическим оператором на кокасательном расслоении $T^*(V)$, связанном с квадратичной формой Ricci на $T(V)$ естественным образом через исходную метрику g. Здесь стоит отметить, что эта формула Бохнера

$$\Delta\omega = \nabla^* \nabla \omega + \mathrm{Ricci}^*(\omega),$$

примененная к *точной* форме $\omega = df$, где функция f имеет *единичный* градиент, т. е.

$$\|\omega\| = \|df\| = \|\operatorname{grad} f\| = 1,$$

является, по существу, тем же самым, чем является формула трубки для следа из § 5, примененная к уровням $W_\varepsilon = \{f(x) = \varepsilon\}$.

Из формулы Бохнера с Ricci^* непосредственно следует, что если $\mathrm{Ricci} > 0$, то *каждая гармоническая* 1-*форма* на V *обращается в ноль* (сравн. с доказательством теоремы Лихнеровича в § $6\frac{1}{2}$), и поэтому

$$H^1(V, \mathbb{R}) = 0.$$

(Мы привели другое доказательство этого в § 5, используя более сильную теорему Чигера–Громола о расщеплении, но вышеприведенное аналитическое доказательство Бохнера старше на четверть века.)

Операторы R_k при $k \geqslant 2$ значительно более сложны, чем Ricci^*. Однако имеется следующий результат Бохнера–Яно–Берже–Мейера (см. [26]).

Если $R > 0$, *то* $R_k > 0$ (*т. е. положительно определен*) *для всех* $k \neq 0$, $n = \dim V$. *Таким образом, каждое замкнутое риманово многообразие с положительным оператором кривизны имеет* $H^k(V, \mathbb{R}) = 0$ *при* $1 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Этот результат показывает, что из $R > 0$ следует, что V является ***рационально гомологической сферой***; это значительно слабее, чем ***диффеоморфность*** сфере, которая следует из предположения, установленного ранее. Недавняя теорема Микалефа и Мура утверждает, что универсальное накрытие многообразия V является, на самом деле, ***гомотопической сферой***, и, следовательно, оно ***гомеоморфно*** сфере согласно гипотезе Пуанкаре (решенной для $n \geqslant 5$ С. Смейлом и для $n = 4$ М. Фридманом. Оставшийся случай $n = 3$ для $\mathrm{Ricci} > 0$ следует из теоремы Гамильтона, упомянутой ранее). Метод Микалефа–Мура похож на метод, который использовали Сиу и Яо при изучении кэлеровых многообразий с положительной бисекционной кривизной (см. конец § 5). Оба метода существенно используют ***гармонические отображения*** сферы S^2 в V, и кривизна появляется в ***формуле второй вариации*** для энергии гармонического отображения, значение которого мы собираемся объяснить в следующем параграфе.

§ $7\frac{1}{2}$. Гармонические отображения и комплексифицированная кривизна $K_{\mathbb{C}}$

Энергия гладкого отображения между римановыми многообразиями, скажем,

$$f\colon W \to V,$$

определяется как

$$E(f) = \frac{1}{2}\int\limits_W \|Df(w)\|^2\,dw,$$

где квадрат нормы дифференциала

$$D = Df(w)\colon T_w(W) \to T_v(V), \quad v = f(w)$$

в каждой точке $w \in W$ равен

$$\|Df\|^2 = \mathrm{Trace}\, D^*D,$$

где $D^*\colon T_v(V) \to T_w(W)$ — сопряженный оператор.

Отображение f называется ***гармоническим***, если оно стационарное (или критическое) для энергии, которая подразумевается гладкой функцией на пространстве отображений $W \to V$. Условие стационарности для E в f, т. е. $dE(f) = 0$, означает, что для каждой гладкой однопараметрической деформации f_t функции $f = f_0$ производная $\dfrac{dE(f_t)}{dt}$ обращается в ноль при $t = 0$. Отметим, что эта производная от E в $t = 0$ зависит только от «направления» деформации f_t в $t = 0$, т. е. от векторных полей $\delta = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ *в* V *вдоль* $f(W)$. Более точно, δ — это сечение индуцированного расслоения $T^* = f^*(T(V)) \to W$.

Гармонические отображения еще можно определить как решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, уравнений Эйлера–Лагранжа, соответствующих E. Эту систему можно записать как $\Delta f = 0$, где оператор Δ обобщает классический оператор Лапласа. На самом деле, если взять геодезические координаты $x_1, \ldots, x_m$ в точке $w \in W$ и $y_1, \ldots, y_n$ в $v = f(w)$ и выразить f через n функций $y_i = y_i(f(x_1, \ldots, x_m))$, то $\Delta f(w)$ станет равным обыкновенному оператору Лапласа от вектор-функции $y_1, \ldots, y_n$ в нуле, то есть

$$\left(\sum_j \frac{\partial^2 y_1(0)}{\partial x_j^2}, \ldots, \sum_j \frac{\partial^2 y_n(0)}{\partial x_j^2}\right).$$

Примеры. a) Если V — это окружность S^1, то каждое отображение $f\colon W \to S^1$ локально представляется функцией $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$, определенной с точностью до аддитивной константы и

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_W \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 dw.$$

Тогда уравнение $\Delta f = 0$ совпадает с $\Delta\varphi = 0$ для обыкновенного оператора Лапласа–Бельтрами на W.

b) Теперь пусть $W = S^1$, а V произвольно. Тогда

$$\Delta f = \nabla_\tau \tau,$$

где

$$\tau \overset{\text{def}}{=} \frac{df}{ds} \overset{\text{def}}{=} D(f)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

для стандартного (циклического) параметра s на S^1. Здесь $\dfrac{\partial}{\partial s}$ означает соответствующее (координатное) векторное поле на S^1, а ∇ —

это ковариантная производная в V. Гармоническими являются такие отображения $f\colon S^1 \to V$, для которых $\nabla_\tau \tau = 0$, т.е. это в точности *геодезические отображения*: образ f — это геодезическая в V, а параметр пропорционален длине.

Кривизна объемлющего многообразия V появляется здесь, стоит только нам взглянуть на *вторую вариацию*

$$\delta^2 E(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 E(f_t)}{dt^2} \text{ при } t = 0.$$

Вообще вторая производная по t вдоль $f_0(W) \subset V$ при $t = 0$ (т.е. $\dfrac{d^2E(f_t)}{dt^2}$ при $t = 0$) зависит не только от поля $\delta = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ в точке $t = 0$, но и от производной $\Delta_\delta \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Тем не менее, если $f = f_0$ гармоническая, то эта производная зависит только от δ, что объясняет запись $\delta^2 E$ в этом случае. Действительно, если функция E имеет нулевой (первый) дифференциал в некоторой точке f, то существует вполне определенный *второй дифференциал* (или *гессиан*) H от E в f, который является квадратичной формой на векторных полях δ в f, так что

$$\delta(\delta E(f)) = H(\delta, \delta).$$

Формула второй вариации для гармонических отображений. *Если f — гладкое гармоническое отображение, то*

$$\delta^2 E(f) = \int\limits_W (\|\nabla \delta\|^2 + \widetilde{K}(\delta^2))dw, \tag{21}$$

где ∇ — это ковариантная производная от δ в V вдоль W, а $\widetilde{K}(\delta^2)$ — это алгебраическое квадратичное по δ выражение, включающее кривизну многообразия V. (Отметим, что в наших ранних формулах вторых вариаций для площадей и объемов поле δ было *единичным и нормальным к гиперповерхности W*, а $\nabla\delta$ было равно нулю). Сделаем все вышесказанное точным. Во-первых, мы напомним, что δ является, на самом деле, сечением индуцированного расслоения $T^* \to W$. Обозначим через ∇ связность в T^*, полученную из связности Леви–Чивита в $T(V)$. Тогда $\|\nabla\delta\|^2$ имеет смысл, поскольку ∇ — это дифференциальный оператор со значениями в расслоении $\Omega^1 T^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(T(W), T^*)$, которое имеет естественную евклидову структуру, происходящую от структур в T^* и $T(W)$.

Обратимся теперь к члену, содержащему кривизну. Во-первых, мы продолжим секционную кривизну K по билинейности на все пары (τ, ν) векторов в V. В терминах формы Q на $\Lambda^2 T(V)$ это выглядит как

$$K(\tau \wedge \nu) = Q(\tau \wedge \nu, \tau \wedge \nu).$$

Теперь кривизна $\widetilde{K}(\delta^2)$ в каждой точке $w \in W$ в ортонормированном базисе $\tau_1, \ldots, \tau_m$ в $T_w(W)$, $m = \dim W$ выражается равенством

$$\widetilde{K}(\delta^2) = -\sum_{i=1}^{m} K((D\tau_i) \wedge \delta) \text{ для } D = Df,$$

причем результат не зависит от выбора базиса. (См. широкое обсуждение этого вопроса в [12] и [13]). Теперь мы видим, что $K(V) \leqslant 0$ влечет $\delta^2 E(f) \geqslant 0$, и поэтому можно ожидать, что любое гармоническое отображение обеспечивает локальный минимум энергии. На самом деле каждое гармоническое отображение ***компактного*** многообразия W в ***полное*** многообразие V с $K \leqslant 0$ дает ***абсолютный минимум*** для функции энергии (см. [12]).

Если $K(V) \geqslant 0$, то можно ожидать, что вторая вариация $\delta^2 E$ будет отрицательной для полей δ таких, что их (ковариантные) производные вдоль W малы. Например, если δ является ∇-***параллельным*** вдоль W, т. е. $\nabla\delta = 0$, то $\delta^2(E) \leqslant 0$.

Пример. Пусть $W = S^1$, тогда $f(S^1)$ является геодезической в V, и каждый вектор $x \in T_v(V)$, $v = f(w)$ допускает продолжение до ∇-параллельного поля вдоль этой геодезической. Когда мы проходим по окружности, вектор x переходит, вообще говоря, не в себя, а в другой вектор $x' \in T_v(V)$. Полученное отображение, скажем, $L\colon T_v(V) \to T_v(V)$ для $L(x) = x'$, называется ***голономным преобразованием*** (или ***параллельным переносом***) вдоль петли $f(S^1)$, и оно является (по основному свойству связности Леви–Чивита) ортогональным линейным отображением. Поскольку кривая $f(S^1)$ является геодезической (и имеет $\nabla_\tau \tau = 0$, как мы увидели выше), касательный вектор $\tau_v = \dfrac{df}{ds} = (Df)\dfrac{\partial}{\partial s} \in T_v(V)$ инвариантен относительно L. Затем мы рассмотрим ортогональное дополнение $N_v \subset T_v(V)$ к τ_v и заметим, что оператор $L|N_v\colon N_v \to N_v$

оставляет неподвижным единичный вектор ν_v, т.е. $L(\nu_v) = \nu_v$ в следующих двух случаях:

1) $n = \dim V = \dim N_v + 1$ *четно и* L *сохраняет ориентацию*, т.е. $\operatorname{Det} L = +1$;

2) n *нечетно и* L *изменяет ориентацию*, т.е. $\operatorname{Det} L = -1$.

Отметим, что L сохраняет ориентацию для всех петель в V, если многообразие V ориентируемо. Но если V неориентируемо, то существует гомотопический класс петель в V такой, что L сохраняет ориентацию для всех петель в этом классе.

Если $L(\nu_v) = \nu_v$, то вектор ν_v продолжается до глобального (периодического) параллельного поля ν в V вдоль W, для которого вторая вариация E есть

$$\nu^2 E(f) = -\int_{S^1} K(\tau \wedge \nu) ds.$$

Если $K(V) > 0$, то вариация строго отрицательна, и поэтому f *не* является локальным минимумом энергии. С другой стороны, несложно показать, что если V — замкнутое многообразие, то каждый гомотопический класс отображений $S^1 \to V$ содержит гладкое гармоническое (т.е. геодезическое) отображение f, дающее абсолютный минимум энергии в этом классе отображений. Таким образом, мы получаем следующий классический результат.

Теорема Сайнджа (Synge, см. [27]). *Пусть V — замкнутое риманово многообразие с $K(V) > 0$. Если $n = \dim V$ нечетно, то V ориентируемо, а если n четно, то каноническое ориентированное двулистное накрытие многообразия V односвязно (например, если V ориентируемо, то накрытие односвязно).*

Отметим, что доказательство этой теоремы использует положительность K вдоль некоторой (не заданной) замкнутой геодезической в V, и вне от этой геодезической никакая геометрическая информация не требуется (и не обнаруживается). Это явно контрастирует с нашим изучением $K \geqslant 0$ посредством формулы трубки (хотя формула второй вариации для ν следует из формулы трубки, примененной к росткам гиперповерхностей нормальных к геодезической).

Вторая вариация энергии для $\dim W = 2$. Если $\dim W \geqslant 2$, то в общем не существует ∇-параллельного поля δ вдоль W, поскольку система $\nabla\delta = 0$ на W переопределена. Действительно, оператор ∇ применяется к сечениям δ индуцированного расслоения

$T^* = f^*(T(V)) \to W$ (где $f\colon W \to V$ — наше гармоническое отображение), которые локально задаются $n = \operatorname{rank} T^*$ функциями на W, в то время как касательное расслоение для $\Omega^1 T^* = \operatorname{Hom}(T(W), T^*)$ имеет $\operatorname{rank} k = n \dim W$, который больше n, если $\dim W > 1$. Теперь пусть W — ориентированная поверхность и пусть $S \to W$ — *комплексное* векторное расслоение с *комплексной* линейной связностью ∇. Риманова метрика в W вместе с ориентацией определяет *комплексную структуру* на расслоении $T(W)$. А именно, умножение на $i = \sqrt{-1}$ задается поворотом касательных векторов на $90°$ против часовой стрелки. Каждый слой $\Omega^1 S_w$ расслоения $\Omega^1 S$, который состоит из $\mathbb{R}$-линейных отображений $T_w(W) \to S_w$, расщепляется в сумму двух подпространств Ω' и Ω'' в $\Omega^1 S_w$. Здесь Ω' состоит из $\mathbb{C}$-*линейных* отображений $l'\colon T_w(W) \to S_w$, т. е. *коммутирующих* с умножением на $\sqrt{-1}$, что означает $l'(\sqrt{-1}\,x) = \sqrt{-1}\,l'(x)$, а отображения $l'' \in \Omega''$ *антикоммутируют* с $\sqrt{-1}$, т. е. $l''(\sqrt{-1}\,x) = -\sqrt{-1}\,l''(x)$. Таким образом, мы получаем расщепление ∇ в сумму двух операторов $\nabla = \nabla' + \nabla''$, где $\nabla'\colon C^\infty(S) \to C^\infty(\Omega')$ и $\nabla''\colon C^\infty(S) \to C^\infty(\Omega'')$. Отметим, что расслоения Ω' и Ω'' имеют тот же ранг над $\mathbb{R}$, что и S, и поэтому системы $\nabla'\varphi = 0$ и $\nabla''\varphi = 0$ являются определенными. Теперь велика вероятность того, что они разрешимы. На самом деле существует один важный случай, когда известно, что решения существуют. А именно, пусть S — *комплексификация* действительного векторного расслоения T с евклидовой связностью над W.

Утверждение (см. [29]). *Если W гомеоморфно сфере S^2, то уравнение $\nabla''\varphi = 0$ имеет (по крайней мере) n линейно независимых над $\mathbb{C}$ решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n\colon W \to S = T \oplus \sqrt{-1}T$, где $n = \operatorname{rank} T$, которые, кроме того, порождают в каждом слое S_w (комплексное) подпространство размерности $\geqslant \frac{n}{2}$.*

Идея доказательства. Существует естественная комплексная аналитическая структура на тотальном пространстве S, для которого голоморфными являются в точности те сечения φ, которые удовлетворяют системе $\nabla''\varphi = 0$. Кроме того, векторное расслоение $S \to W$ *самодвойственно* как комплексное аналитическое расслоение, потому что евклидова структура на T (которая является квадратичной формой на T) расширяется по $\mathbb{C}$-линейности до *невырожденной квадратичной формы* на S, которая параллельна и, следовательно, *голоморфна* на S. Тогда существование требуемых n голоморфных сечений следует из теоремы Римана–Роха, объединенной с теоремой Биркгофа–Гротендика о расщеплении голоморфных векторных расслоений над S^2 на линейные расслоения.

Затем можно показать, что оператор Лапласа, соответствующий оператору ∇'', то есть

$$\Delta'' = (\nabla'')^* \nabla'',$$

связан с оператором $\Delta = \nabla^* \nabla$ следующей формулой Бохнера–Вейценбока:

$$\Delta = 4\Delta'' - \sqrt{-1} K''.$$

Здесь K'' — это косоэрмитов эндоморфизм пространства S, связанный с кривизной оператора ∇, и единичное бивекторное поле (коплотность) на S соответствует метрике в W. (Напомним, что кривизна оператора ∇ — это 2-форма на W со значениями в $\operatorname{End} S$, и K'' равняется значению этой формы на $\tau_1 \wedge \tau_2$ для ортонормированных касательных векторов в каждой точке в W.) В частности, можно связать интегралы

$$\int\limits_W \|\nabla\varphi\|^2 \, dw = -\int\limits_W \langle \Delta\varphi, \varphi \rangle \, dw$$

и

$$\int\limits_W \|\nabla''\varphi\|^2 \, dw = -\int\limits_W \langle \Delta''\varphi, \varphi \rangle \, dw$$

равенством

$$\int\limits_W \|\nabla\varphi\|^2 \, dw = 4 \int\limits_W \|\nabla''\varphi\|^2 \, dw + \sqrt{-1} \int\limits_W \langle K''\varphi, \varphi \rangle \, dw.$$

(Эти интегральные формулы для $-\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle$ и $-\langle \Delta''\varphi, \varphi \rangle$ можно получить интегрированием по частям. На самом деле можно было бы *определить* $\Delta = \nabla^* \nabla$ и $\Delta'' = (\nabla'')^* \nabla''$, так же как и сопряженные операторы ∇^* и $(\nabla'')^*$, постулируя эти интегральные формулы для всех гладких сечений φ. Отметим также, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает эрмитово скалярное произведение в $S = T \oplus \sqrt{-1}\, T$, соответствующее евклидовой структуре в T.)

Мы хотим переписать формулу второй вариации (21) для $H(\delta, \delta) = \delta^2 E(f)$ (для гармонических отображений f) с $\|\nabla''\varphi\|^2$ вместо $\|\nabla\varphi\|^2$.

Сначала мы обобщим формулу на комплексифицированное расслоение $S^* = T^* \oplus \sqrt{-1}T^*$, где она выражает эрмитово продолжение гессиана от E в f. На каждом комплексном поле φ, которое является формальной комбинацией двух действительных полей $\varphi = \delta_1 + \sqrt{-1}\,\delta_2$, этот гессиан есть

$$H(\varphi, \overline{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} H(\delta_1, \delta_1) + H(\delta_2, \delta_2) = \delta_1^2 E(f) + \delta_2^2 E(f).$$

Тогда по формуле второй вариации

$$H(\varphi, \overline{\varphi}) = \int\limits_W (\|\nabla\varphi\|^2 + \widetilde{K}(\varphi^2))\, dw,$$

где

$$\|\nabla\varphi\|^2 = \|\nabla\delta_1\|^2 + \|\nabla\delta_2\|^2$$

и $\widetilde{K}(\varphi^2) = \widetilde{K}(\delta_1^2) + \widetilde{K}(\delta_2^2)$. $\widetilde{K}$ выражается в терминах секционной кривизны K многообразия V и ортонормированных векторов τ_1, τ_2 в каждой точке $w \in W$ равенством $\widetilde{K}(\varphi^2) = -\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} K(D\tau_i \wedge \delta_j)$ для дифференциала $D = Df(w)$, как мы увидели ранее. (Здесь как всегда мы отождествляем δ_1 и δ_2 в T^* с их образами в $T(V)$ при тавтологическом отображении $T^* = f^*(T(V)) \to T(V)$.) Теперь мы заменим $\int \|\nabla\varphi\|^2$ в $H(\varphi, \overline{\varphi})$ выражением

$$4\int\limits_W \|\nabla''\varphi\|^2 + \sqrt{-1}\int\limits_W \langle K''\varphi, \varphi\rangle$$

согласно предыдущей формуле и получим следующее соотношение:

$$H(\varphi, \overline{\varphi}) = 4\int\limits_W \|\nabla''\varphi\|^2\, dw + \int\limits_W \widetilde{K}''(\varphi^2)\, dw,$$

где

$$\widetilde{K}''(\varphi^2) = \widetilde{K}(\varphi^2) + \sqrt{-1}\langle K''\varphi, \varphi\rangle.$$

(Отметим, что $\widetilde{K}''(\varphi^2)$ вещественно, поскольку $\langle K''\varphi, \varphi\rangle$ чисто мнимо.) Мы собираемся применить эту формулу к полям φ, удовлетворяющим $\nabla''\varphi = 0$, откуда будет следовать

$$H(\varphi, \overline{\varphi}) = \int\limits_W \widetilde{K}''(\varphi^2)\, dw,$$

и мы хотим узнать, когда $\widetilde{K}''(\varphi^2)$ будет отрицательным (сравн. с теоремой Сайнджа). Ответ дает следующие понятие ***комплексифицированной секционной кривизны*** $K_{\mathbb{C}}$ многообразия V.

Продолжим форму Q по комплексной полилинейности на комплексифицированное касательное расслоение $\mathbb{C}T(V) = T(V) \oplus \sqrt{-1}\,T(V)$ и положим

$$K_{\mathbb{C}}(\alpha \wedge \beta) = Q(\alpha \wedge \beta, \overline{\alpha \wedge \beta}),$$

где α и β принадлежат $\mathbb{C}T(V)$, а $z \to \overline{z}$ — сопряжение в комплексифицированном расслоении. Если записать $\alpha = t_1 + \sqrt{-1}\,t_2$ и $\beta = t_3 + \sqrt{-1}\,t_4$, где $t_i \in T(V)$, то можно выразить $K_{\mathbb{C}}$ в вещественных терминах

$$K_{\mathbb{C}}(\alpha \wedge \beta) = Q(t_1 \wedge t_3 - t_2 \wedge t_4, t_1 \wedge t_3 - t_2 \wedge t_4) + \\ + Q(t_1 \wedge t_4 - t_2 \wedge t_3, t_1 \wedge t_4 - t_2 \wedge t_3).$$

Отсюда видно, что условие $K_{\mathbb{C}} \geqslant 0$ располагается между $K \geqslant 0$ и $Q \geqslant 0$ (т. е. положительностью оператора кривизны). Отметим также, что неравенство $K_{\mathbb{C}} > 0$ по определению означает, что $K_{\mathbb{C}}(\alpha \wedge \beta) > 0$ для всех пар $\mathbb{C}$-*независимых* векторов α и β в $\mathbb{C}T(V)$.

Полезным достаточным условием для положительности $K_{\mathbb{C}}$ является $1/4$-*стеснение* K. То есть $K_{\mathbb{C}} > 0$ в каждой точке v, где секционные кривизны $K(\sigma)$ удовлетворяют неравенству

$$1/4\, a < K(\sigma) < a$$

для некоторого $a = a(v) > 0$ и всех 2-плоскостей $\sigma \in T_v(V)$. Аналогично, *отрицательное* $1/4$-*стеснение* $K(\sigma)$ (между $-a$ и $-1/4\,a$) обеспечивает $K_{\mathbb{C}} < 0$. (Этот результат принадлежит Хернандесу. Ранее Микалеф и Мур нашли достаточное условие, которое немного слабее вышеупомянутого. Отметим также, что критерий стеснения является точным: комплексное проективное пространство имеет $1/4 \leqslant K \leqslant 1$, и $K_{\mathbb{C}}$ *нестрого* положительна.)

Теперь мы вернемся к нашему отображению $f\colon W \to V$, возьмем два ортонормированных вектора τ_1 и τ_2 в некоторой точке $w \in W$ и положим

$$D'\tau = \frac{1}{2}(D\tau_1 - \sqrt{-1}D\tau_2) \in \mathbb{C}T(W)$$

для $D = Df\colon T(W) \to T(V)$.

Лемма. *Для $\widetilde{K}''$ в каждой точке $f(w) \in V$ выполнено равенство*

$$\widetilde{K}''(\varphi^2) = -4K_{\mathbb{C}}(D'\tau \wedge \varphi).$$

Это доказывается в [29] непосредственным вычислением, основанном на определениях обсуждаемых кривизн.

Следствие. *Если $K_{\mathbb{C}} \geqslant 0$, то (комплексифицированная) вторая вариация энергии неположительна на решениях φ уравнения $\nabla''\varphi = 0$. Кроме того, если $K_{\mathbb{C}} > 0$ и φ не касается $D'\tau \in \mathbb{C}T(V)$ в какой-либо точке $f(w_0) \in V$, то $H(\varphi, \overline{\varphi}) > 0$. Отсюда следует, что f не является локальным минимумом функции энергии $f \mapsto E(f)$.*

Доказательство. Единственный момент, который необходимо объяснить, — это связь (знака) *комплексного* гессиана с вещественной вариацией энергии. Но для $\varphi = \delta_1 + \sqrt{-1}\delta_2$ комплексный гессиан равен сумме двух действительных

$$H(\varphi, \overline{\varphi}) = H(\delta_1, \delta_1) + H(\delta_2, \delta_2) = \delta_1^2 E(f) + \delta_2^2 E(f).$$

Поэтому из отрицательности $H(\varphi, \overline{\varphi})$ следует отрицательность какой-либо из двух вещественных вариаций $\delta_1^2 E(f)$ или $\delta_2^2 E(f)$. Что и требовалось доказать.

Теперь предположим, что W гомеоморфно S^2 и отображение f: $S^2 \to V$ не постоянно. Тогда по нашему раннему утверждению мы имеем $n = \dim V$ линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения $\nabla''\varphi = 0$, которые порождают подпространство размерности $\geqslant \frac{n}{2}$ в некоторой точке $f(w_0) \in V$, где $D'\tau \neq 0$. Таким образом, для $n = 4$ мы получаем по крайней мере *одно поле φ, для которого $H(\varphi, \overline{\varphi}) < 0$ и*, вообще, *для $n \geqslant 4$ мы имеем по меньшей мере $\frac{n}{2} - 1$ полей, таких, что гессиан H отрицательно определен на их линейной оболочке.*

Напомним, что все это требует $K_{\mathbb{C}} > 0$. В самом деле, Микалеф и Мур доказали это при условии положительности $K_{\mathbb{C}}$ (только) на тех комплексных 2-плоскостях в $\mathbb{C}T(V)$, на которых комплексифицированная риманова метрика (являющаяся $\mathbb{C}$-квадратичной формой на $\mathbb{C}T(V)$) обращается в ноль.

Приведенное выше следствие показывает, в частности, что не существует гладких непостоянных гармонических отображений f: $S^2 \to V$, минимизирующих энергию в своем гомотопическом классе для $n \geqslant 4$. С другой стороны, фундаментальная теорема Сакса и Уленбека утверждает, что существуют такие отображения f, всякий раз, когда вторая гомотопическая группа $\pi_2(V)$ не обращается в ноль (в противном случае V есть произвольное замкнутое риманово многообразие). Таким образом, из $K_{\mathbb{C}}(V) > 0$ следует $\pi_2(V) = 0$ для $\dim V \geqslant 4$ и при $n = 4$ этого достаточно для того, чтобы универсальное накрытие многообразия V (которое компактно в силу $K(V) > 0$) было гомотопической сферой.

Замечание. Тонкость теоремы Сакса–Уленбека заключается в том, что пространство отображений $f\colon S^2 \to V$ с $E(f) \leqslant \mathrm{const}$ *не компактно.* Более того, простые вычисления (использующие тот факт, что $\dim S^2 = 2$) показывают, что энергия инвариантна относительно (не компактной!) группы *конформных преобразований* S^2, и поэтому даже пространство *гармонических* отображений с ограниченной энергией не является компактным. Таким образом, трудно ожидать сходимость какого-либо процесса минимизации для получения гармонического отображения с минимальной энергией в заданном гомотопическом классе отображений. Действительно, имеется расходимость, когда отображения $S^2 \to V$ «пузырится» на несколько частей, см. рис. 20.

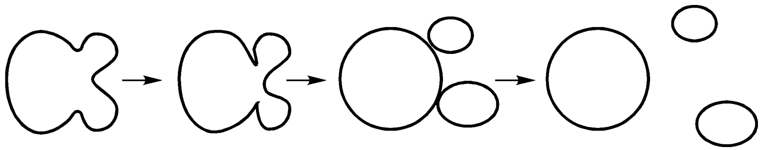

Рис. 20

Такое пузырение преобразует одно отображение $f\colon S^2 \to V$ в конечный набор отображений $f_i\colon S^2 \to V$, $i = 1, \ldots, k$, таких, что $\sum_{i=1}^{k} E(f_i) \leqslant E(f)$, и гомотопические классы отображений f_i в сумме дают гомотопический класс f. Это объясняет, почему не существует минимизирующего энергию отображения в каждом гомотопическом классе. Тем не менее это полностью совпадает с теоремой Сакса–Уленбека о существовании минимизирующего энергию отображения в некотором нетривиальном гомотопическом классе, несмотря на то что этот класс не известен заранее.

Микалеф и Мур обобщили теорему Сакса–Уленбека. Они развили теорию Морса для функции энергии E на пространстве отображений $S^2 \to V$ и показали для $n \geqslant 4$, что *либо замкнутое n-мерное односвязное риманово многообразие V является гомотопической сферой, либо существует не постоянное гармоническое отображение $f\colon S^2 \to V$, которое допускает самое большее $k \leqslant \frac{n}{2} - 2$ полей φ_i, таких что гес-*

сиан $H(\varphi, \overline{\varphi})$ отрицателен на их линейной оболочке. Поэтому из условия $K_{\mathbb{C}}(V) > 0$ следует (в свете нашей дискуссии о существовании φ_i с отрицательным гессианом H), что V — это гомотопическая сфера.

Мы упоминали ранее, что из условия строгого $^1/_4$-стеснения на секционную кривизну K следует строгая положительность $K_{\mathbb{C}}$. Таким образом, из вышеупомянутой теоремы Микалефа–Мура вытекает теорема о сфере (см. §$3\frac{3}{4}$).

Отметим, что Микалеф и Мур требуют только *локального* стеснения, т. е. $\frac{1}{4}a(v) \leqslant K_v(V) \leqslant a(v)$ для некоторой положительной функции $a(v)$, в то время как в теореме о сфере требуется, чтобы a была положительной *константой*. Однако Мур и Микалеф не получают (для локально стесненных многообразий V) в явном виде геометрический гомеоморфизм между V и S^n, как это сделано в доказательстве теоремы о сфере (см. § $3\frac{3}{4}$), а используют топологическое решение гипотезы Пуанкаре для $n \geqslant 4$. На самом деле не существует никакой геометрической картины локально стесненных многообразий (даже с константой c_n вместо $\frac{1}{4}$, которая близка к 1), оспаривающей замечательный успех метода Микалефа–Мура с топологической стороны. Здесь ситуация также аналогична теореме Сайнджа, обсуждаемой ранее в этом параграфе.

§ $7\frac{2}{3}$. Гармонические отображения в многообразия с $K_{\mathbb{C}} \leqslant 0$

Сначала мы предположим только, что $K \leqslant 0$, и напомним следующую основную теорему существования для гармонических отображений (см. [12]).

(Eells-Sampson). *Пусть V и W — замкнутые римановы многообразия, $K(V) \leqslant 0$. Тогда каждое непрерывное отображение $W \to V$ гомотопно гладкому гармоническому отображению (которое минимизирует энергию в своем гомотопическом классе).*

Отметим, что для $K(V) \leqslant 0$ феномен пузырения, изображенный на рис. 20, невозможен, и гармонические отображения можно получить (как доказали Илс и Сэмпсон) непосредственным процессом минимизации. Условие $K(V) \leqslant 0$ проникает через формулу типа Бохнера для отображений $f\colon V \to W$, которая обобщает формулу $\Delta = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ricci}^*$ на 1-формах (см. § 7) и которая устанавливается ниже в специальном случае, когда f гармоническая.

Формула Илса–Сэмпсона (см. [12]). *Для каждого гармонического отображения $f\colon W \to V$ выполнено*

$$\Delta\|Df\|^2 = \|\,\mathrm{Hess}_f\,\|^2 + \mathrm{Curv},$$

где Hess *— это совокупность вторых ковариантных производных от f, а* Curv *— это терм кривизны, описанный ниже.*

Сначала опишем Hess, интерпретируя дифференциал Df отображения f как сечение расслоения $\Omega^1 = \mathrm{Hom}(T(W), T^*)$, где $T^* = f^*(T(V))$, и полагая $\mathrm{Hess}_f = \nabla Df$, где связность ∇ в Ω^1 происходит от связностей в $T(V)$ и в T^*. Далее заметим, что форма Ricci на W определяет вместе с метрикой в T^* квадратичную форму на Ω^1, также называемую Ricci^W. Кроме того, дифференциал $D\colon T(W) \to T(V)$ переводит квадратичную форму Q на $\Lambda^2 T(W)$ в квадратичную форму на $\Lambda^2 T(V)$. Его след относительно метрики в $T(W)$ обозначим через $K^V((Df)^4)$. Отметим, что если $K(V) \leqslant 0$, то $K^V((Df)^4) \leqslant 0$. Кроме того, если $K < 0$ и $\mathrm{rank}\, Df \geqslant 2$, то $K^V((Df)^4) < 0$. В этих обозначениях мы можем в явном виде записать терм кривизны в формуле Илса–Сэмпсона

$$\mathrm{Curv} = \mathrm{Ricci}^W(Df, Df) - K^V((Df)^4).$$

В частности, если $K(V) \leqslant 0$ и $\mathrm{Ricci}(W) = 0$ (например, W является плоским), то $\mathrm{Curv} = -K^V((Df)^4) \geqslant 0$.

Интегрируя формулу Илса–Сэмпсона, мы получим следующее соотношение для *замкнутых* многообразий W:

$$\int\limits_W \Delta\|Df\|^2\, dw = 0 = \int\limits_W (\|\,\mathrm{Hess}_f\,\|^2 + \mathrm{Curv})\, dw.$$

Отсюда при $\mathrm{Curv} \geqslant 0$ следует, что $\mathrm{Hess}_f = 0$, и поэтому отображение f является *геодезическим* в обычном смысле. В частности, если $K(V) < 0$ и $\mathrm{Ricci}(W) = 0$, то $\mathrm{rank}\, Df \leqslant 1$ и образ f является либо точкой (мы предполагаем V связным), либо замкнутой геодезической в V. (Отметим, что все это остается выполненным, если мы возьмем $\mathrm{Ricci}(W) \geqslant 0$ вместо $\mathrm{Ricci}(W) = 0$.)

Рассмотрение *кэлеровых* многообразий W намного интереснее плоских. Соответствующая формула типа Бохнера, принадлежащая Сиу и улучшенная Сэмпсоном, обобщает *формулу Ходжа* для оператора Лапласа на функциях, заданных на кэлеровых многообразиях, т. е.

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} d^* d = 2\Delta'' \stackrel{\text{def}}{=} 2\overline{\partial}^* \overline{\partial}.$$

Формула Сиу–Сэмпсона — это (инфинитезимальное) тождество, которое включает $K_{\mathbb{C}}(V)$ и *комплексный гессиан* $H_f^{\mathbb{C}}$, определенный следующим образом. Во-первых, мы введем оператор d^{∇}, действующий из T^*-значных 1-форм на V (т. е. сечений $W \to \Omega^1 = \mathrm{Hom}(T(W), T^*)$) в T^*-значные 2-формы на W, который получается обычным «скручиванием» внешнего d на 1-формах на W с связностью в T^*. Затем мы положим

$$\mathrm{Hess}_f^{\mathbb{C}} = d^{\nabla} J D f,$$

где $J\colon \Omega^1 \to \Omega^1$ — оператор, индуцированный умножением на $\sqrt{-1}$ в $T(V)$. Отметим, что определение $\mathrm{Hess}^{\mathbb{C}}$ использует комплексную структуру в W и связность Леви–Чивита в V, но не использует метрику (или связность) в W. Заметим также, что $H_f^{\mathbb{C}} = 0$ тогда и только тогда, когда сужение f на каждую *голоморфную кривую* в W является гармоническим отображением. Такие отображения называются *плюригармоническими* (они похожи на геодезические отображения плоских многообразий W в V. Отметим также, что эти рассуждения для $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ показывают *конформную инвариантность* уравнения $\Delta f = 0$ для отображений $f\colon W \to V$).

Затем мы комплексифицируем дифференциал f и, таким образом, получим $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм $D^{\mathbb{C}}\colon T(W) \to \mathbb{C}T(V)$. Прообразом формы Q на $\mathbb{C}\Lambda^2 T(V) = \Lambda^2 \mathbb{C}T(V)$ относительно отображения $D^{\mathbb{C}}$ является форма на $\Lambda^2 T(W)$ (здесь Λ^2 — внешняя степень над $\mathbb{C}$). Нам необходима эрмитова форма, соответствующая квадратичной форме Q, скажем, $Q{\cdot}(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \overline{\beta})$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\Lambda^2 T(V)$. (Напомним, что форма Q была изначально определена на $\Lambda^2 T(V)$, а затем продолжена на $\mathbb{C}\Lambda^2 T(V)$ по комплексной полилинейности; сравните с обсуждением теоремы Микалефа–Мура в § $7\frac{1}{2}$.) Затем мы рассмотрим прообраз формы $Q{\cdot}$ в $\Lambda^2 T(W)$ и обозначим через $K_{\mathbb{C}}^V((Df)^4)$ след этого прообраза относительно эрмитовой формы в $\Lambda^2 T(W)$, индуцированной кэлеровой метрикой в W. Отметим, что из $K_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 0$ следует $K_{\mathbb{C}}^V((Df)^4) \leqslant 0$. Кроме того, если $K_{\mathbb{C}}(V) < 0$ и $\mathrm{rank}\, Df \geqslant 3$, то $K_{\mathbb{C}}^V((Df)^4) < 0$.

Интегральная формула Сиу–Сэмпсона. *Пусть W — замкнутое кэлерово многообразие, а V — риманово многообразие. Тогда для* *каждого гладкого гармонического отображения $f\colon W \to V$ выполнено*

$$\int\limits_W \|\operatorname{Hess}_f^{\mathbb{C}}\|^2\,dw - \int\limits_W K_{\mathbb{C}}^V((Df)^4)\,dw = 0. \tag{22}$$

Следствие. *Если $K_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 0$, то каждое гармоническое отображение $f\colon W \to V$ имеет $\operatorname{Hess}_f^{\mathbb{C}} = 0$ и, следовательно, является плюригармоническим. Кроме того, если $K_{\mathbb{C}}(V) < 0$, то $\operatorname{rank} Df \leqslant 2$ в каждой точке $w \in W$.*

Наконец, мы объединим это следствие с теоремой существования Илса–Сэмпсона для гармонических отображений и придем к следующему утверждению.

Теорема (Siu, Sampson, Jost–Yau, Carlson–Toledo). *Пусть V — замкнутое многообразие с $K_{\mathbb{C}}(V) < 0$. Тогда каждое непрерывное отображение произвольного кэлерова многообразия W в V может быть гомотопно отображению W в 2-мерный остов некоторой триангуляции многообразия V.*

Этим накладывается очень сильное (хотя и странное) ограничение на топологию в V, поскольку существует много кэлеровых многообразий W, к которым можно применить эту теорему. Важными примерами многообразий W являются *компактные фактор-пространства ограниченных симметричных областей* (*таких, как шар $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$*) *по дискретным* (*голоморфным*) *группам автоморфизмов.*

Среди многообразий V, к которым применяется теорема, наиболее важными являются пространства с постоянной отрицательной кривизной. Существуют также примеры многообразий V со строго $^1\!/_4$-стесненной кривизной, которые не являются гомотопически эквивалентными многообразиям постоянной кривизны.

Нестрогий случай $K_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 0$ особенно важен, поскольку все локально симметрические пространства некомпактного типа удовлетворяют этому условию, и заключение о плюригармоничности в вышеупомянутом следствии играет решающую роль в теории представлений фундаментальной группы $\pi_1(W)$ на группах изометрий (например, SL_n) симметрических пространств (см. [11], [22]).

Наконец, мы отметим, что теория гармонических отображений расширяется на случай, когда цель является сингулярной с $K \leqslant 0$ в смысле Александрова–Топоногова (сравните с § $3\frac{2}{3}$). Тогда можно попытаться понять (более сильное) условие $K_{\mathbb{C}} \leqslant 0$ для сингулярных пространств (таких, как строения Брюа–Титца, на которых действуют p-адические группы Ли) и гармонических отображений, которое может быть полезным для этих целей[1].

§ $7\frac{3}{4}$. Классы метрик, заданные выпуклыми конусами

Каждое подмножество C в пространстве квадратичных форм Q на $\Lambda^2\mathbb{R}^n$, инвариантное относительно ортогональных преобразований в $\mathbb{R}^n$, определяет класс $\mathscr{I}$ метрик на каждом n-мерном многообразии V требованием, чтобы квадратичная форма Q на $T_v(V) = \mathbb{R}^n$, построенная по кривизне этой метрики, содержалась в C для каждого $v \in V$. (Отметим, что идентификация $T_v(V) = \mathbb{R}^n$ однозначна с точностью до ортогональных преобразований в $\mathbb{R}^n$, если потребовать $O(n)$-инвариантность C). Все классы метрик, заданные неравенствами $K \geqslant 0$, $K \leqslant 0$, $\mathrm{Ricci} \geqslant 0$ и др., с которыми мы имели дело, можно получить по такому множеству C, которое однозначно определяется упомянутым классом метрик. Более того, подмножество C во всех наших случаях было ***выпуклым конусом*** в линейном пространстве квадратичных форм на $\Lambda^2\mathbb{R}^n$. Не совсем ясно, почему геометрически значимые классы $\mathscr{I}$ должны порождаться ***выпуклыми*** конусами, но аналитически это соответствует квазилинейности дифференциального условия, определяющего $\mathscr{I}$ (сравн. стр. 24 в [18]).

Наибольший конус, с которым мы имели дело, был задан условием $\mathrm{Sc} \geqslant 0$. Действительно, это условие определяет подпространство в пространстве форм Q. Наименьший из наших конусов $\{Q > 0\}$ соответствовал строгой положительности оператора кривизны. Замыкание этого конуса (заданное условием $Q \geqslant 0$) можно определить как ***минимальный*** замкнутый выпуклый $O(n)$-инвариантный конус, который имеет кривизну Q метрики произведения на $S^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Это приводит к другим определениям интересных классов метрик, заданных естественными конусами C. (Сравните с условиями положительности кривизны в [20], имеющими целью ограничить размер V.) Можно искать, к примеру, такие конусы C, которые взаимодействуют с естественными дифференциальными операторами на V. (Сравните с инвариантностью $\{Q > 0\}$ относительно теплового потока Гамильтона

[1] См. Громов и Шен в Publications Mathematiques IHES (1993).

на пространстве метрик и с различными формулами Бохнера, которые мы видели в § 7.) Более геометрически можно взглянуть на $\mathscr{I}$ как на подмножество в пространстве $\mathscr{G}_+$ римановых метрик g на заданном многообразии V, которые рассматриваются как сечения симметрического квадрата $S^2T^*(V)$. Тогда вышеупомянутые глобальные аналитические свойства исходного множества C часто можно интерпретировать в терминах инфинитезимальной геометрии на $\mathscr{I}$. В связи с этим полезно отметить, что $\mathscr{I} \subset \mathscr{G}_+$ — это *конус* для каждого C и что $\mathscr{I}$ инвариантно относительно естественного действия Diff V на $\mathscr{G}_+$. Но $\mathscr{I}$ не является *выпуклым* конусом, если только C не *пусто* или не равно пространству *всех* форм Q. На самом деле $\mathscr{G}_+$ (которое само является выпуклым Diff-инвариантным конусом в линейном пространстве сечений $V \to S^2T^*(V)$) не содержит нетривиальных Diff-инвариантных выпуклых подконусов, если исходное многообразие V является компактным связным многообразием без края (см. с. 231 в [18]).

Резюме. Это расширенный вариант моих лекций «Lezione Leonardesca», прочитанных в Милане в июне 1990 г. Я попытался, используя сравнительно небольшое число понятий, ознакомить непосвященных с внутренним действием римановой геометрии, поднимаясь из самых глубин к ее вершинам.

Литература

[1] Berger M., Rauch H. E., *Géomètre differentiel,* in Differential Geometry and Complex Analysis, Springer-Verlag, 1985, pp. 1–14.

[2] Berger M., *La géométrie métrique des variétés Riemanniennes,* in Astérisque, hors serie, Soc. Math. de France, 1985, pp. 9–66.

[3] Besse A., *Einstein manifolds,* Springer-Verlag, 1987.

[4] Burago Yu., Gromov M. and Perelman G., *A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded from below I.* Preprint.

[5] Ballmann W., Gromov M. and Schroeder V., *Manifolds of non-positive curvature,* Progress in Math. Vol. 61, Birkhäuser, Boston, 1985.

[6] Bourguignon J.-P., *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci (d'après R. S. Hamilton)*, in Astérisque 145–146, Soc. Math. de France, 1987, pp. 45–63.

[7] Buser P., Karcher H., *Gromov's almost flat manifolds,* Astérisque 81, Soc. Math. de France, 1981.

[8] Burago Yu., Zalgaller V., *Geometric inequalities,* Springer-Verlag, 1988.

[9] Cheeger J., *Critical points of distance functions and applications to geometry,* C.I.M.E., June 1990 session at Montecatini, to appear in Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.

[10] Cheeger J., Eben D., *Comparison theorems in Riemannian geometry,* North Holland, 1975.

[11] Corlette K., *Flat G-bundles with canonical metrics,* J. Diff. Geom. 28 (1988), pp. 361–382.

[12] Eells J. and Lemaire L., *A report on harmonic maps,* Bull. Lond. Math. Soc. 10 (1978), pp. 1–68.

[13] Eells J. and Lemaire L., *Another report on harmonic maps,* Bull. Lond. Math. Soc. 20 (1988), pp. 385–524.

[14] Eschenburg J., *Local convexity and non-negative curvature — Gromov's proof of the sphere theorem,* Inv. Math. 84 (1986), n. 3, pp. 507–522.

[15] Ferus D., Karcher H., Münzner H., *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen,* Math. Z. 177 (1981) pp. 479–502.

[16] Gallot S., *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature,* in Astérisque 157–158, Soc. Math. de France, 1988, pp. 191–217.

[17] Ghys E., de la Harpe, eds., *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov,* Birkhäuser, 1990.

[18] Gromov M., *Partial differential relations,* Springer-Verlag, 1986.

[19] Gromov M., *Dimension, non-linear spectra and width, Geometric aspects of Functional Analysis,* J. Lindenstrauss and V. Milman eds., in Lecture Notes in Math. 1317, Springer-Verlag, 1988, pp. 132–185.

[20] Gromov M., *Large Riemannian manifolds,* in Curvature and Topology, Shiohama et al eds., Lect. Notes in Math. 1201 (1986), pp. 108–122, Springer-Verlag.

[21] Gromov M., *Synthetic geometry of Riemannian manifolds,* Proc. ICM-1978 in Helsinki, Vol. 1, pp. 415–419.

[22] Gromov M., Pansu P., *Rigidity of discrete groups, an introduction,* C.I.M.E. session in June 1990 at Montecatini, to appear in Lecture notes in Math., Springer-Verlag.

[23] Gromov M., Lafontaine J. and Pansu P., *Structures métriques pour les variétés Riemanniennes,* Texte Math. n. 1, CEDIC-Nathan, Paris, 1981.

[24] Kazdan J., *Gaussian and scalar curvature, an update in Seminar on Differential Geometry,* Yau ed., Ann. of Math. Studies 102, Princeton, 1982, pp. 185–193.

[25] Lawson B., *Lectures on minimal submanifolds,* Publish or Perish Inc., 1980.

[26] Lawson B., Michelsohn M.-L., *Spin Geometry,* Princeton University Press, 1989.

[27] Milnor J., *Morse theory,* Ann. Math. St. 51, Princeton, 1963.

[28] Milnor T., *Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature,* Adv. Math. 8 (1972), pp. 474–543.

[29] Micallef M., Moore J., *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes,* Ann. of Math. 127: 1 (1988) pp. 199–227.

[30] Milman V., Schechtman G., *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces,* Lecture Notes in Math. 1200, Springer-Verlag, 1986.

[31] Schoen K., *Minimal surfaces and positive scalar curvature,* Proc. ICM-1983, Warszawa, (1984) North-Holland, pp. 575–579.

[32] Strichartz R., *Sub-Riemannian geometry,* Journ. of Diff. Geom. 24: 2 (1984), pp. 221–263.

Михаил Громов

Знак и геометрический смысл кривизны

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная подготовка И. В. Рыловой
Компьютерная графика В. Г. Бахтиев
Корректор М. А. Ложкина

Подписано к печати 19.09.00. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44. Уч. изд. л. 7,63.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Тираж 800 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.
http://www.rcd.com.ru. E-mail: borisov@uni.udm.ru.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.