Занимательная математика

Производные и интегралы

Манга

マンガでわかる

微分積分

小島寛之　著
十神　真　作画
ビーコム　制作

Ohmsha

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

Хироюки Кодзима

Син Тогами

Перевод
Анненковой Е. А.

ДМК Пресс издательство

ОДЭКА

Москва
Додэка, ДМК Пресс, 2015

УДК 517
ББК 22.161.6
К57

Кодзима, Хироюки.

К57 Занимательная математика. Производные и интегралы / Хироюки Кодзима, Син Тогами ; пер. Анненковой Е. А. — М. : ДМК Пресс, 2015. — 240 с. : ил. — (Образовательная манга). — Доп. тит. л. яп. — ISBN 978-5-97060-154-9.

I. Тогами, Син.

II. Анненкова, Е. А., пер.

Норико — начинающий репортёр. После обучения её направили в одно из отделений газеты «Асагакэ Таймс». Норико жаждет освещать в своих репортажах самые волнующие проблемы мировой политики и экономики, но хватит ли ей для этого опыта и знаний? Её непосредственный начальник, Сэки-сан, решил научить её анализировать происходящие в политике и экономике события используя математику.

Читая эту книгу, вы вместе с Норико будете осваивать основы дифференциального и интегрального исчисления и поймёте, что эти знания пригодятся не только для проведения сложных научных расчётов. Приводя примеры из реальной жизни, такие как вероятность событий, кривые спроса и предложения в экономике, загрязнение окружающей среды и даже плотность распределения спирта в стакане, автор показывает, что производные и интегралы помогают глубже разобраться в самых разных проблемах, возникающих в нашей жизни.

В ходе обучения вы узнаете:

- что такое производная и как с её помощью определять скорость изменения функции;
- как связаны между собой производная и интеграл;
- как интегрировать и дифференцировать сложные функции;
- что такое частные производные, и как с их помощью находить интегралы и производные функций нескольких переменных;
- как с помощью разложения в ряд Тейлора можно заменить трудную для анализа функцию степенным многочленом.

Книга будет полезна учащимся старших классов школ, студентам вузов, а также всем, кто интересуется математикой и хочет, чтобы обучение было лёгким и увлекательным.

УДК 517
ББК 22.161.6

ISBN 978-4-274-06632-0 (яп.)
ISBN 978-5-94120-228-7 (Додэка)
ISBN 978-5-97060-107-5 (ДМК Пресс)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Есть некоторые вещи, подвластные только манге*.

Если вы открыли эту книгу, то вы принадлежите к одному из следующих типов людей:

Первые — те, кто просто любит мангу и думает: «Математические выкладки, описанные с помощью манги? Потрясающе!» Если вы принадлежите их числу, то немедленно отнесёте эту книгу на кассу — и не пожалеете. У этой манги очень привлекательные рисунки. И неудивительно: их нарисовал популярный художник манги Син Тогами, а сценарий написала Бэком Лтд. — компания, производящая настоящую мангу.

Вы можете возразить: «Манга, обучающая математике, не может быть интересной». На первый взгляд, это так. Когда в издательстве «Омша» (Ohmsha) меня попросили написать эту книгу, я почти отказался. Многие из так называемых «обучающих манг» разочаровывают. В них может быть огромное количество рисунков, но они не являются настоящей мангой. Но после того, как я увидел мангу «Омшы» (это была манга по статистике), я передумал. Её действительно было приятно читать. Издатель сказал, что моя книга будет такой же, поэтому я принял его предложение. Я и раньше часто думал, что мог бы лучше преподавать математику, используя мангу, так что это была хорошая возможность проверить мою идею. Я гарантирую, что чем большим фанатом манги вы являетесь, тем больше вам понравится эта книга. Так чего же вы ждёте? Сейчас же уесите её на кассу и покупайте!

Второй тип людей — это те, кто взял эту книгу с мыслями: «Хоть математика и внушает мне ужас и/или у меня на неё аллергия, манга может помочь мне её понять.» Если вы из их числа, то эта книга для вас. Она не просто объясняет дифференциальное и интегральное исчисление с помощью манги, но и сам способ объяснения основательно отличается от используемого в традиционных учебниках. Во-первых, книга даёт представление о том, что именно делает дифференциальное и интегральное исчисление и для чего оно нужно. Пока вы этого не поймёте, вы не сможете его правильно использовать. Вы просто окажетесь в жалком положении зазубривания формул и правил. Эта книга объясняет все формулы, основанные на идее приближения первого порядка, помогая вам визуализировать значение формул и с лёгкостью их понять. Благодаря этому уникальному методу обучения вы можете быстро и легко перейти от дифференцирования к интегрированию. Более того, я позаимствовал оригинальный метод объяснения дифференцирования и интегрирования тригонометрических и показательных функций, который не описывается в обычных учебниках, — обычно это остаётся какой-то тарабарщиной для многих людей даже после многократных объяснений. Эта книга также идёт дальше, объясняя даже разложение в ряд Тейлора и определение частной производной. Наконец, я привлёк трёх постоянных потребителей исчисления: физику, статистику и экономику, чтобы они составили часть этой книги, предоставив множество примеров практического применеиея дифференциального и интегрального исчисления. Благодаря всем этим уловкам вы сможете воспринимать исчисление не как трудную науку, а как полезный инструмент.

Я опять же подчеркну: всё это стало возможным благодаря манге. Почему при чтении манги вы можете получить больше информации, чем при чтении романа? Потому что манга — это визуальные данные, представленные в виде комиксов. Исчисление — это ветвь математики, описывающая динамические явления. Таким образом, изучение дифференциального и интегрального исчисления с помощью манги является отличной идеей. Теперь переверните страницу и насладитесь красивой мангой по дифференцированию и интегрированию.

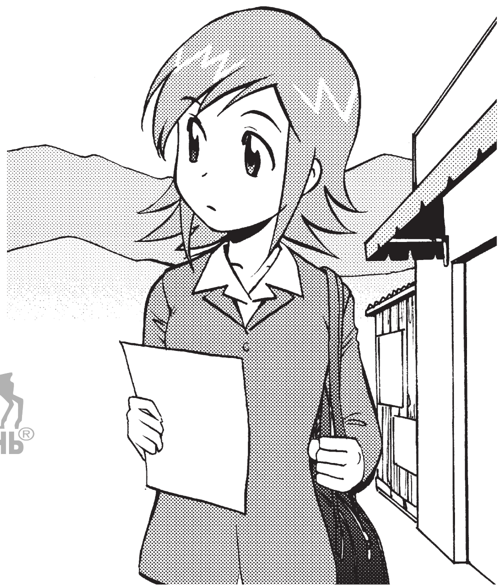
Хироюки Кодзима
Ноябрь 2005

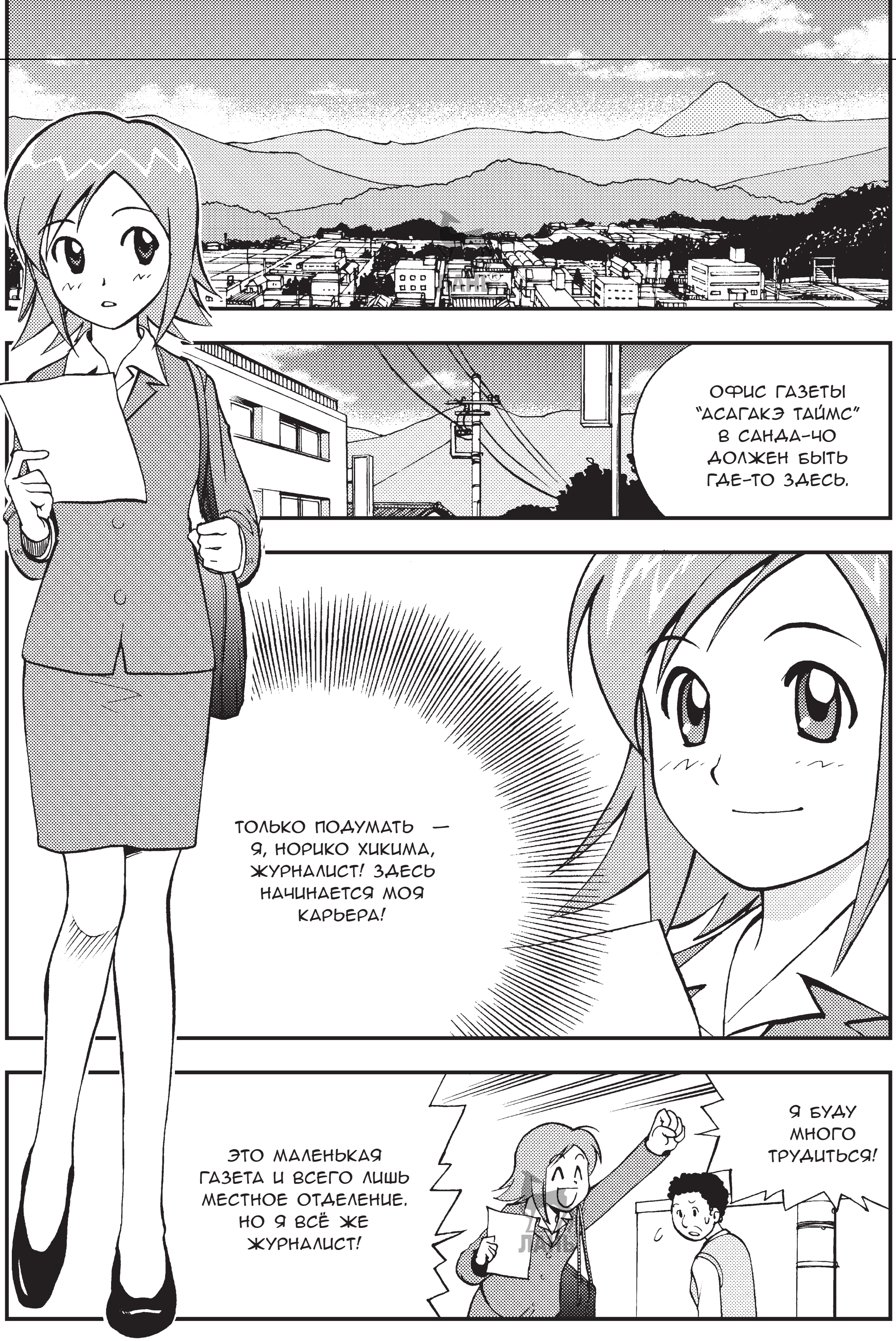
* Манга — японские комиксы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОЛОГ

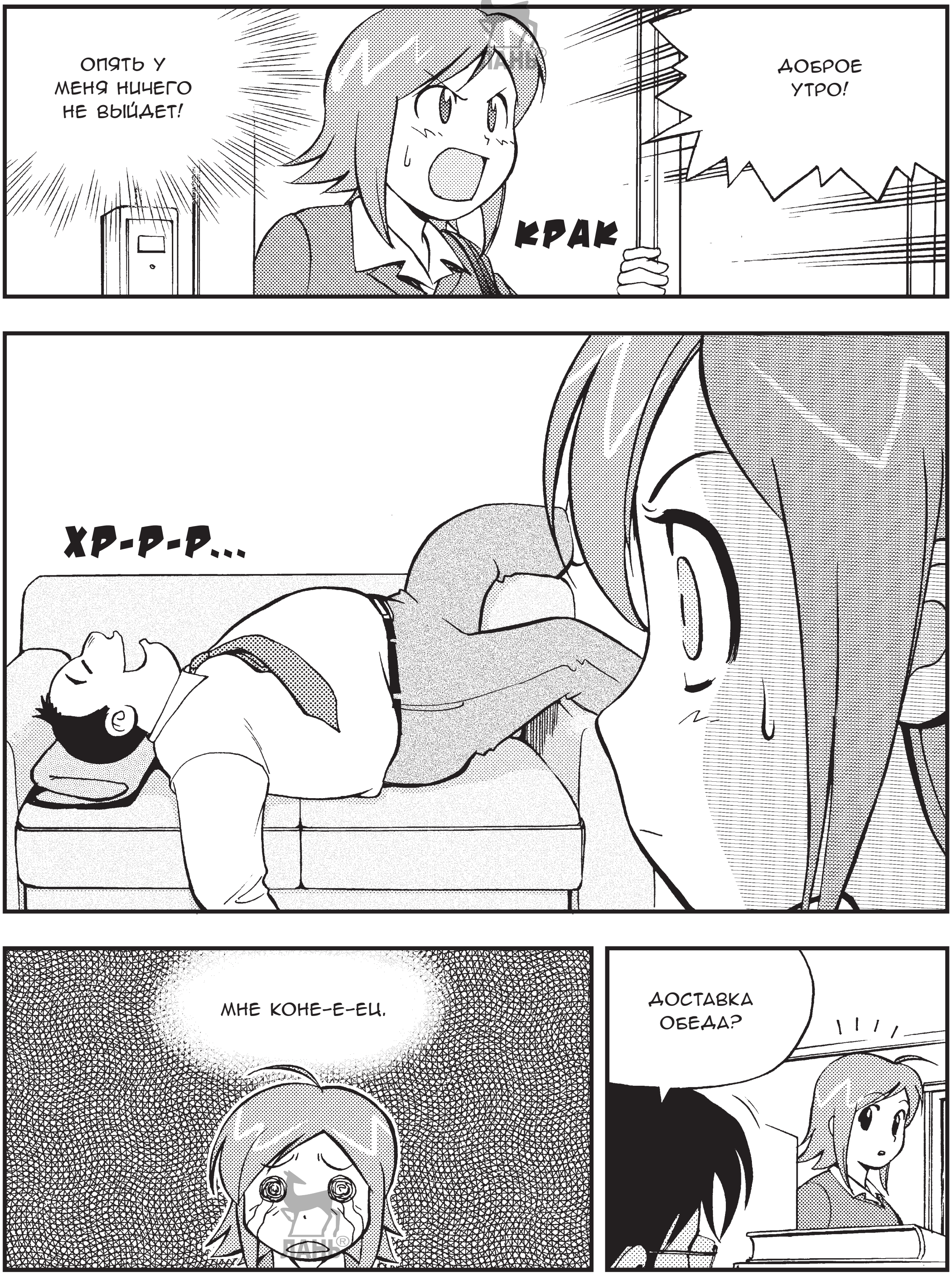
ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ



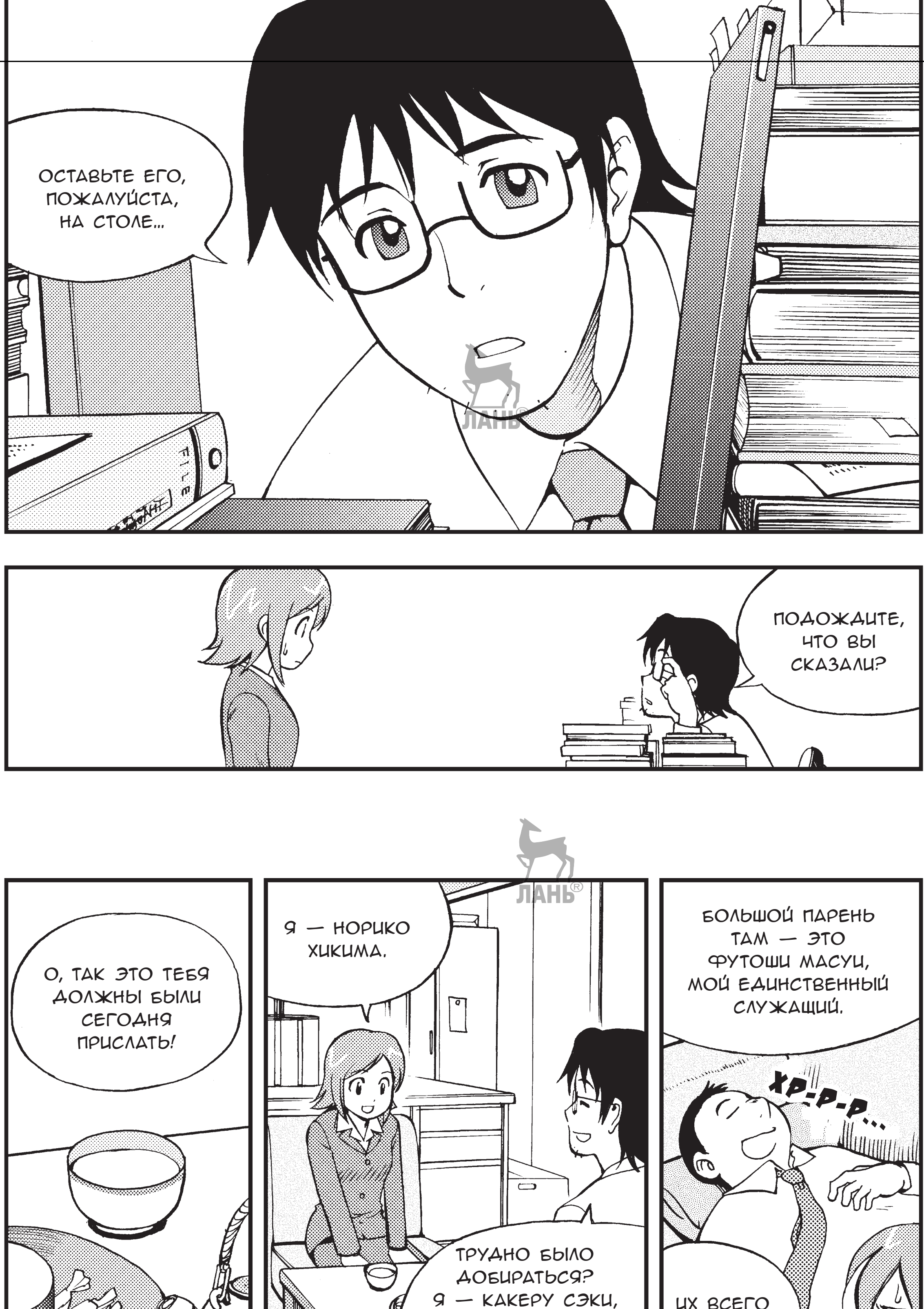

ОФИС ГАЗЕТЫ "АСАГАКЭ ТАЙМС" В САНДА-ЧО ДОЛЖЕН БЫТЬ ГДЕ-ТО ЗДЕСЬ.
ТОЛЬКО ПОДУМАТЬ — Я, НОРИКО ХИКИМА, ЖУРНАЛИСТ! ЗДЕСЬ НАЧИНАЕТСЯ МОЯ КАРЬЕРА!
Я БУДУ МНОГО ТРУДИТЬСЯ!
ЭТО МАЛЕНЬКАЯ ГАЗЕТА И ВСЕГО ЛИШЬ МЕСТНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ. НО Я ВСЁ ЖЕ ЖУРНАЛИСТ!


Асагакэ Таймс
Санда-Чо. Региональный дистрибьютор.
ДИСТРИБЬЮТОР ГАЗЕТЫ?
ОФИС ГАЗЕТЫ... НЕУЖЕЛИ У МЕНЯ НЕПРАВИЛЬНАЯ КАРТА?
ЭТО СЛЕДУЮЩАЯ ДВЕРЬ.
ВЫ ИЩЕТЕ ОФИС ГАЗЕТЫ? ВСЕ ПРИНИМАЮТ НАС ЗА НЕГО, ПОТОМУ ЧТО МЫ КРУПНЕЕ.


Асакагэ Таймс Отделение Санда-Чо
Асакагэ Таймс Отделение Санда-Чо
Фью-ю-ю...
О, нет! Это же сборный домик!
Не... не расстраивайся, Норико.
Это — всего лишь местное отделение, но всё же это действительно Асагакэ Таймс.

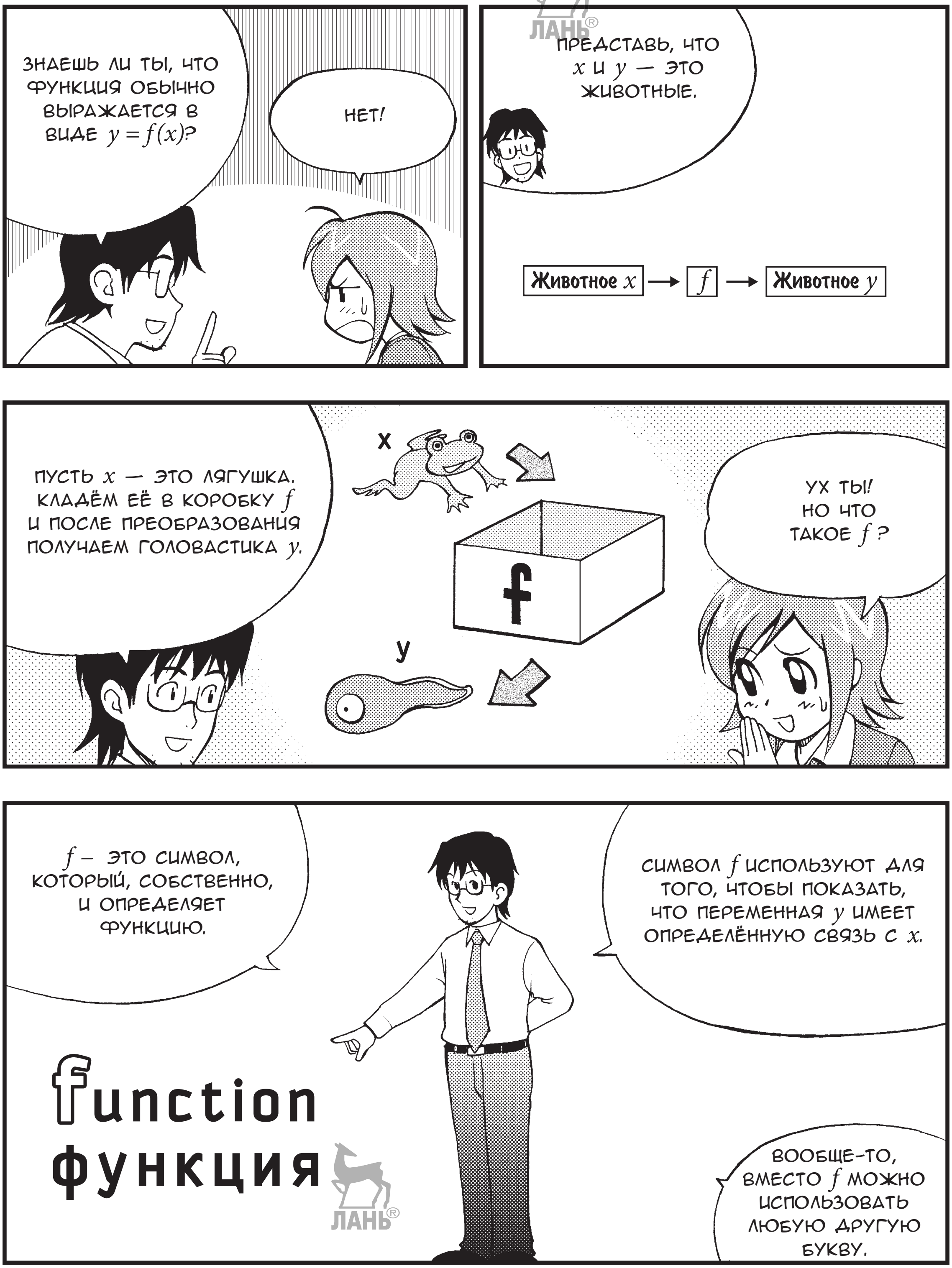


ОПЯТЬ У МЕНЯ НИЧЕГО НЕ ВЫЙДЕТ!
ДОБРОЕ УТРО!
КРАК
ХР-Р-Р...
МНЕ КОНЕ-Е-ЕЦ.
ДОСТАВКА ОБЕДА?

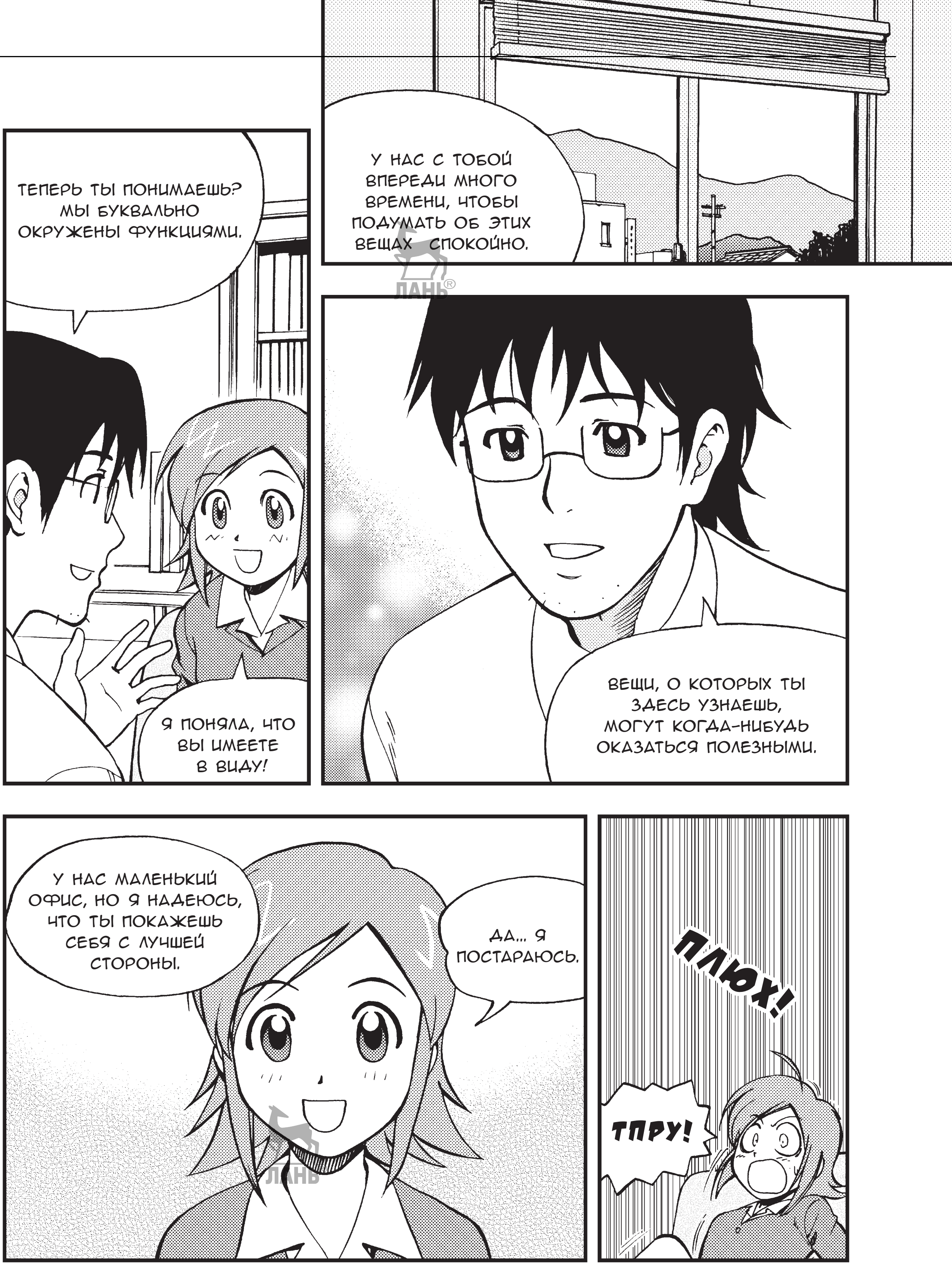

Оставьте его, пожалуйста, на столе...
FILE
Подождите, что вы сказали?
О, так это тебя должны были сегодня прислать!
Я — Норико Хикима.
Трудно было добираться? Я — Какеру Сэки, глава этого отделения.
Большой парень там — это Футоши Масуи, мой единственный служащий.
ХР-Р-Р...
Их всего двое...


Это хорошее место. Окружающая среда располагает к размышлениям.
Размышле-ниям?..
Да! К размышлениям над событиями.
Каждое событие так или иначе связано с другим событием.
Пока ты не поймёшь эти взаимосвязи, ты не сможешь стать настоящим репортёром.
Ну, наконец-то настоящая журналистика!

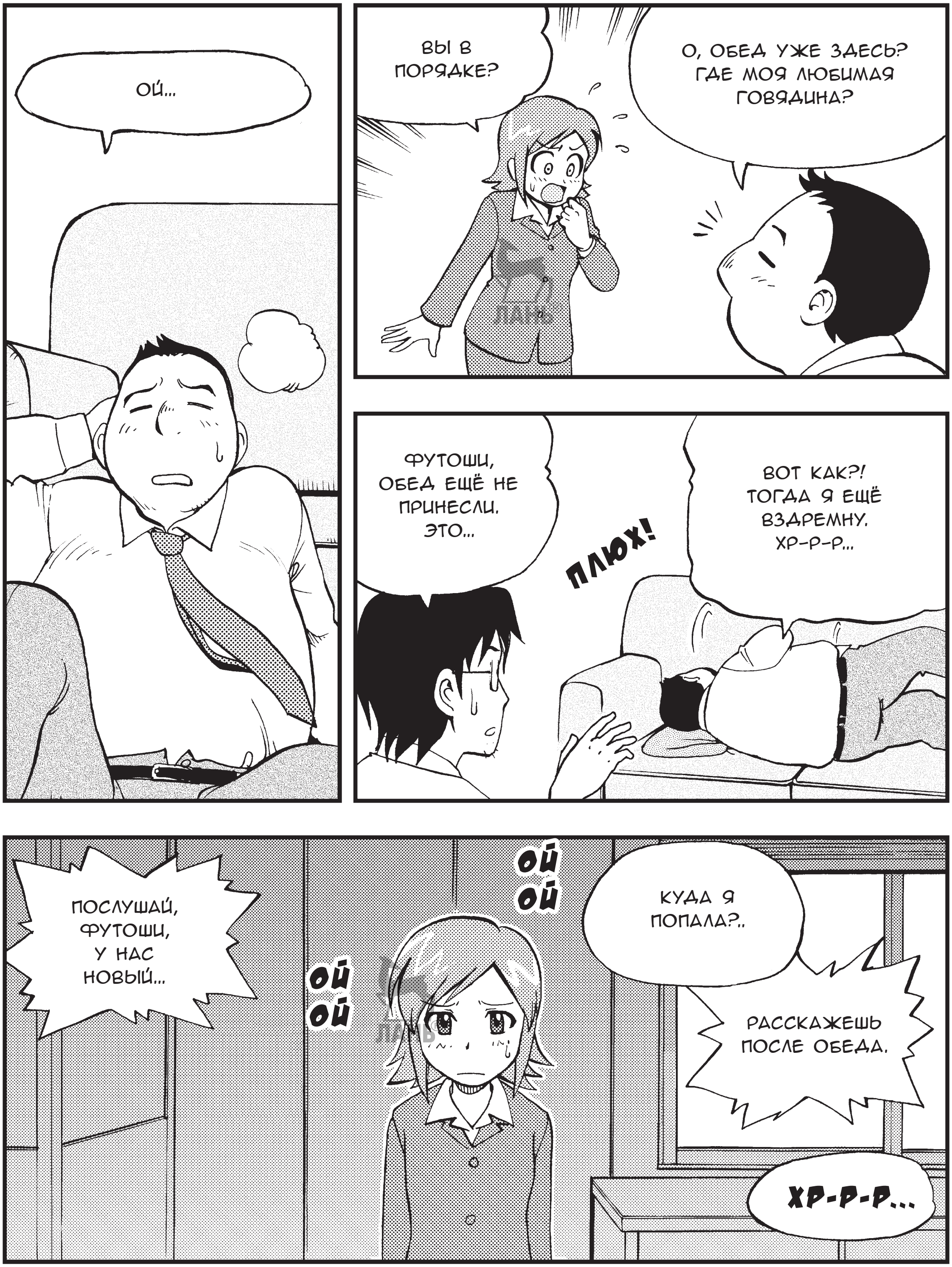

ТАК… Я ВИЖУ. ТВОЯ СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ — ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ.
ДА! ЭТО ТАК. Я ИЗУЧАЮ ЛИТЕРАТУРУ С ТОГО ВРЕМЕНИ, КОГДА ЕЩЁ УЧИЛАСЬ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ.
ЧТО Ж, ТЕБЕ МНОГОЕ ПРЕДСТОИТ ОСВОИТЬ. ДАВАЙ НАЧНЁМ С ФУНКЦИЙ.
Ф-ФУНКЦИЙ? ЭТО ЧТО? МАТЕМАТИКА?
ИЗМЕНЕНИЕ ОДНОГО ПРОЦЕССА ВЛИЯЕТ НА ДРУГОЙ ПРОЦЕСС. ФУНКЦИЯ — ЭТО ИХ СООТНОШЕНИЕ.
МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО САМ МИР — ЭТО ОДНА БОЛЬШАЯ ФУНКЦИЯ.
ФУНКЦИЯ ОПИСЫВАЕТ ВЗАИМОСВЯЗЬ, ПРИЧИННУЮ СВЯЗЬ ИЛИ ИЗМЕНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ.
НАША РАБОТА, КАК ЖУРНАЛИСТОВ, ЗАКЛЮЧАЕТСЯ В ТОМ, ЧТОБЫ НАЙТИ ПРИЧИНУ, ПО КОТОРОЙ ПРОИСХОДЯТ СОБЫТИЯ, ТО ЕСТЬ ПРИЧИННУЮ СВЯЗЬ.
В САМОМ ДЕЛЕ?


Знаешь ли ты, что функция обычно выражается в виде $y = f(x)$?
Нет!
Представь, что x и y — это животные.
Животное x → f → Животное y
Пусть x — это лягушка. Кладём её в коробку f и после преобразования получаем головастика y.
x
f
y
Ух ты! Но что такое f?
f – это символ, который, собственно, и определяет функцию.
Символ f используют для того, чтобы показать, что переменная y имеет определённую связь с x.
function
функция
Вообще-то, вместо f можно использовать любую другую букву.

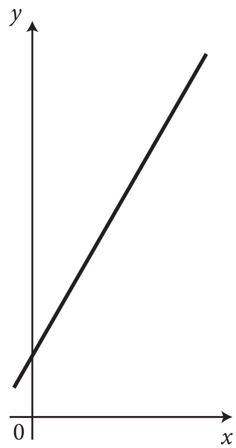
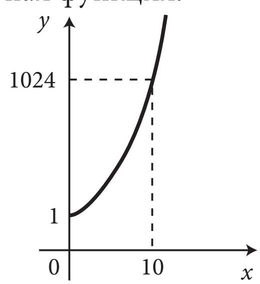
В нашем случае f выражает взаимосвязь между "предком" и "потомком".
f
Ну, это очевидно. Такая взаимосвязь есть почти у всех живых существ. Если x — это птица, то y — это птенец.
Хорошо! Теперь смотри сюда.
ШУРХ
Спад объёма продаж икры
Например, взаимосвязь между доходами и расходами может рассматриваться как функция.
Понятно. Когда продажи компании растут, рабочие получают бонусы?
X-43 Scram Jet достиг скорости 9.6 M — это новый рекорд
Скорость звука и температура также связаны функцией. Когда температура повышается на 1 градус, скорость звука увеличивается на 0,6 м/с.
А в горах каждый раз, когда поднимаешься на 100 м, температура понижается на 0,5 градуса, ведь так?
Э-ге-ге!

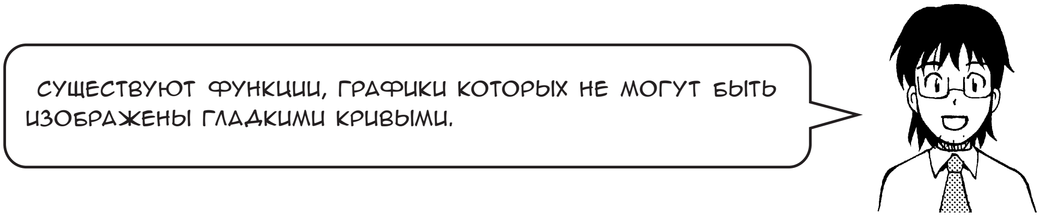


У нас с тобой впереди много времени, чтобы подумать об этих вещах спокойно.
Теперь ты понимаешь? Мы буквально окружены функциями.
Я поняла, что вы имеете в виду!
Вещи, о которых ты здесь узнаешь, могут когда-нибудь оказаться полезными.
У нас маленький офис, но я надеюсь, что ты покажешь себя с лучшей стороны.
Да... я постараюсь.
ПЛЮХ!
ТПРУ!


ОЙ...
ВЫ В ПОРЯДКЕ?
О, ОБЕД УЖЕ ЗДЕСЬ? ГДЕ МОЯ ЛЮБИМАЯ ГОВЯДИНА?
ФУТОШИ, ОБЕД ЕЩЁ НЕ ПРИНЕСЛИ. ЭТО...
ВОТ КАК?! ТОГДА Я ЕЩЁ ВЗДРЕМНУ. ХР-Р-Р...
ПЛЮХ!
ПОСЛУШАЙ, ФУТОШИ, У НАС НОВЫЙ...
ОЙ ОЙ
ОЙ ОЙ
КУДА Я ПОПАЛА?..
РАССКАЖЕШЬ ПОСЛЕ ОБЕДА.
ХР-Р-Р...

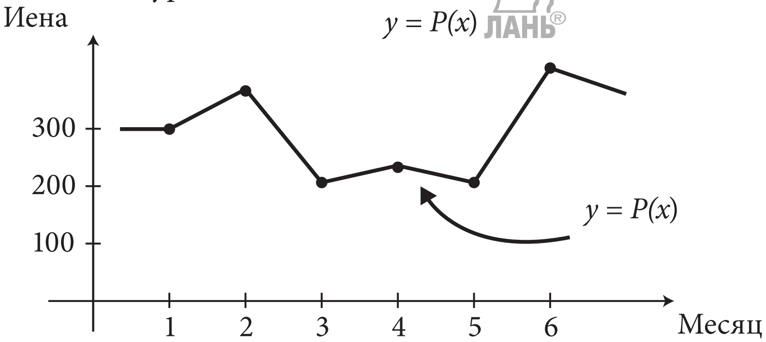
■ Таблица 1. Характеристики функций

Тема	Расчёт	График
Причинная связь	Частота стрекотания сверчка определяется температурой. Можно приблизительно выразить связь между стрекотаниями сверчка в минуту (y) и температурой в градусах Цельсия (x) формулой $y = g(x) = 7x - 30$ $x = 30°C$ $\uparrow$ $\quad 7 \times 30 - 30$ $\downarrow$ Итого, 180 стрекотаний в минуту.	На графике такие функции изображаются прямой линией. Поэтому они и называются линейной функцией. 
Изменения	Скорость звука y в метрах в секунду (м/с) в воздухе при x(°C) выражается в виде $y = f(x) = 0{,}6x + 331.$ При 15°C $y = f(15) = 0{,}6 \times 15 + 331 = 340$ м/с. При −5°C $y = f(-5) = 0{,}6 \times (-5) + 331 = 328$ м/с.	
Переход к другой системе	Перевод x градусов по Фаренгейту (°F) в y градусы Цельсия (°C): $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32).$ То есть теперь мы знаем, что 50°F соответствуют $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10°C.$	
	Компьютеры выполняют операции с числами, используя бинарную систему счисления (1 и 0). Бинарное число, состоящее из x битов (или бинарных разрядов), может принимать у различных значений: $y = b(x) = 2^x.$ (Функцию вида $y = a^x$ называют показательной. Показательная функция рассмотрена на стр. 131.)	Так на графике выглядит показательная функция. 



Курс акций P компании А в месяце x в 2009 г.

$y = P(x)$



Зависимость $P(x)$ нельзя выразить известной функцией, но она всё же является функцией.

Если найдёте способ предсказать курс акций в июле, $P(7)$, вы сможете неплохо заработать.

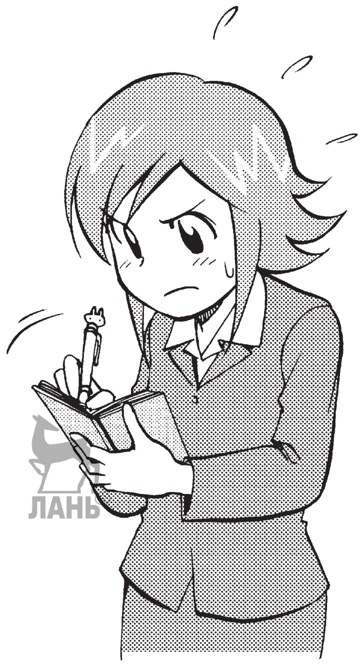
$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$ ← Композиция функций f и g

Упражнения

1. Найти уравнение, выражающее зависимость числа стрекотаний сверчка в минуту (z) от температуры в градусах Фаренгейта (x).

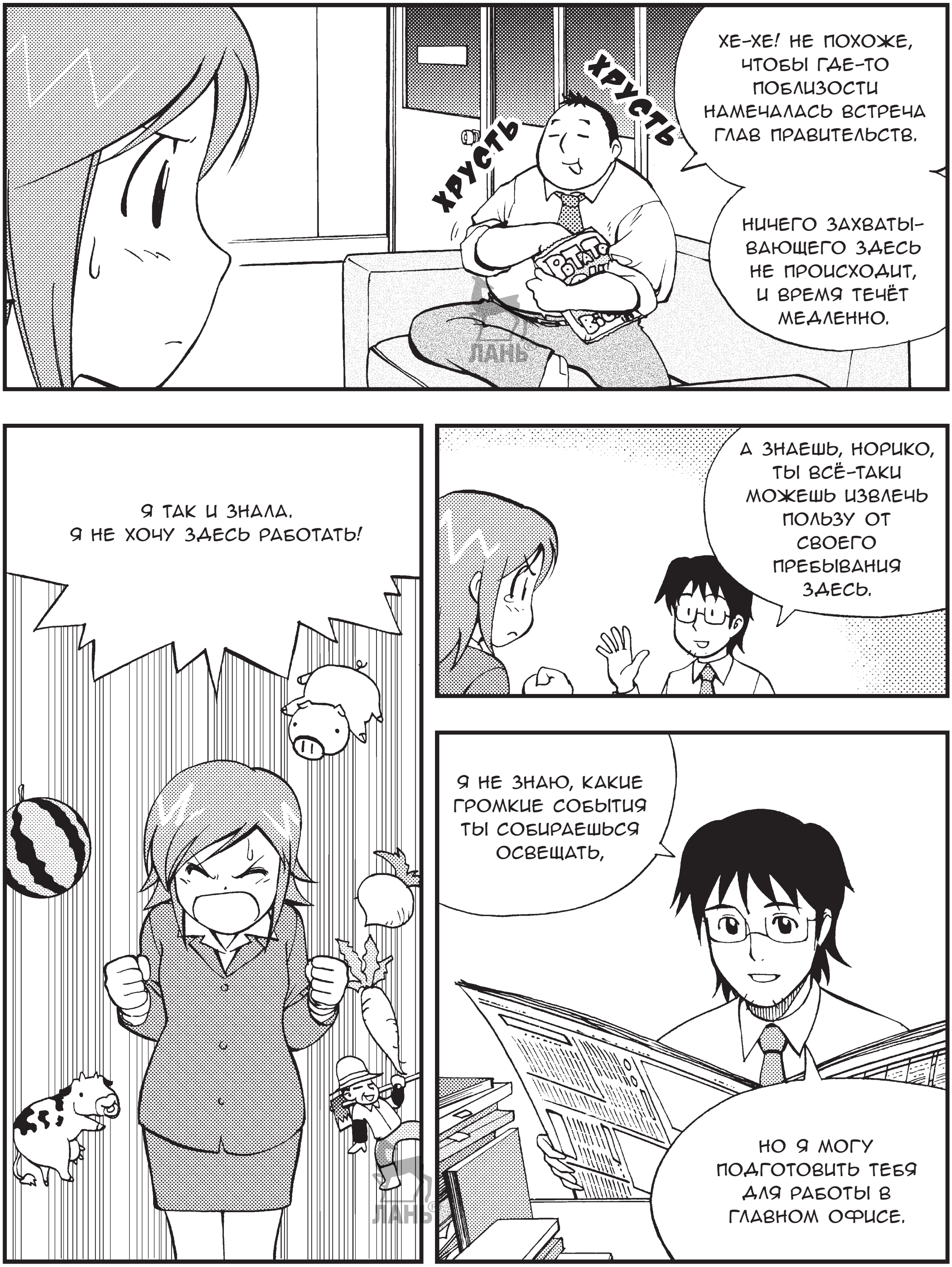
1

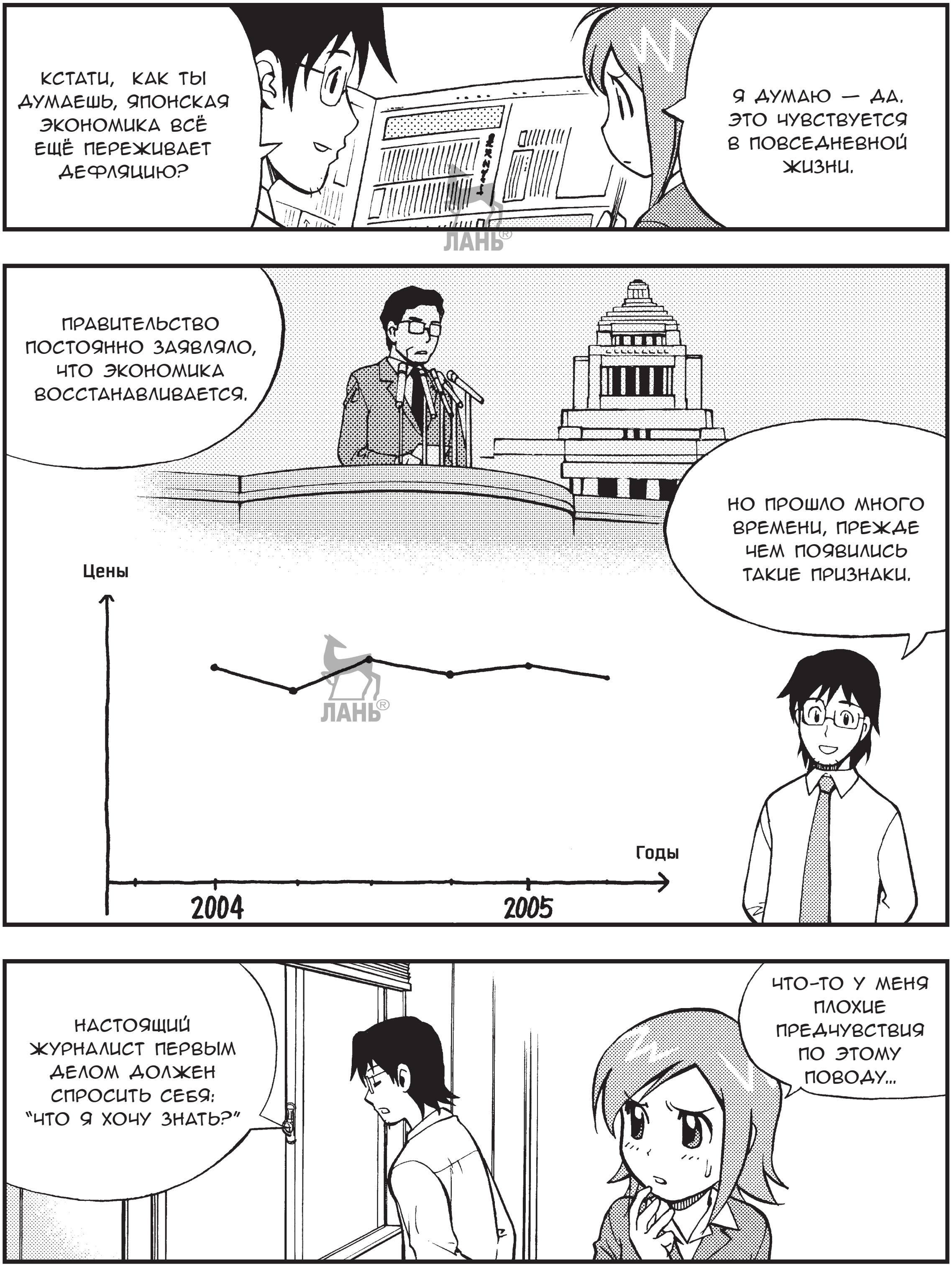
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ ФУНКЦИИ!

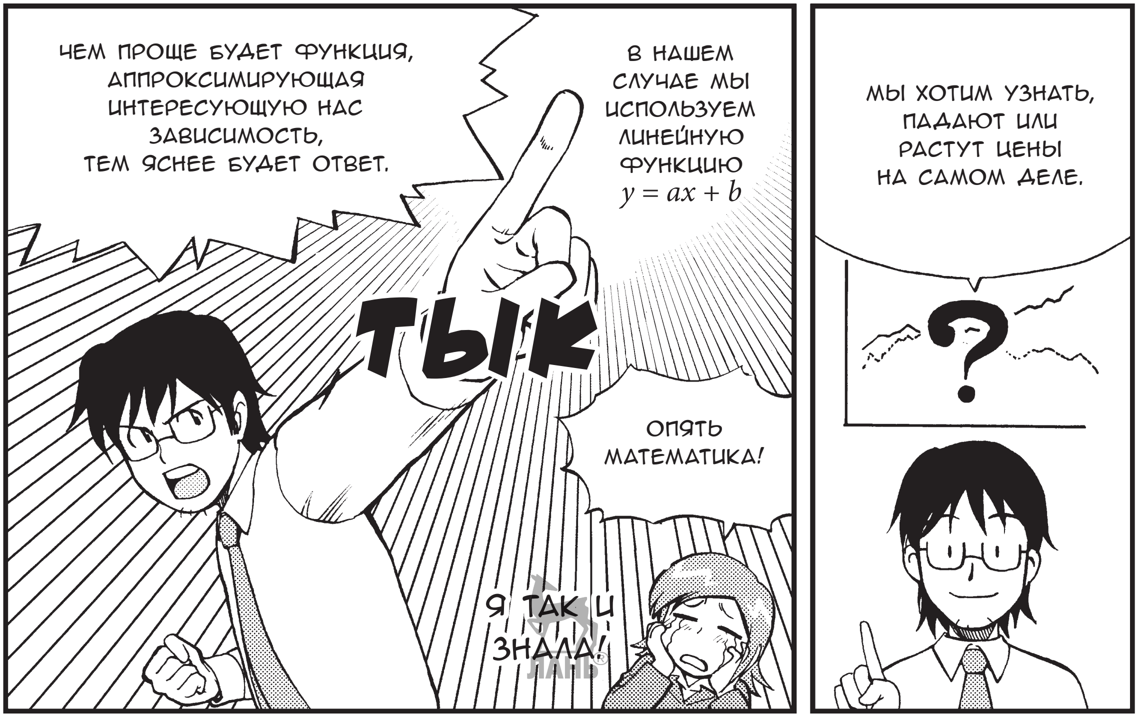


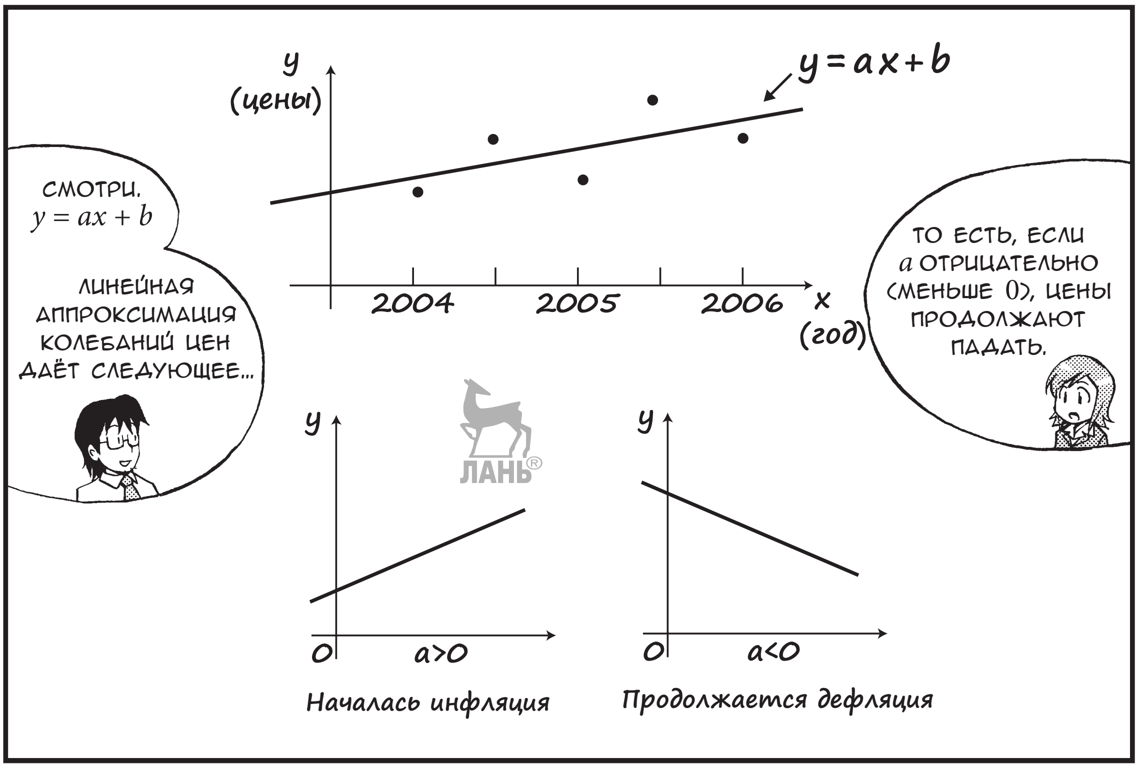
1.1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Кому: редактору
Тема: новости дня
Медведь опять ворвался в жилой дом — пострадавших нет.
На территории префектуры увеличился спрос на арбузы.
И вы все время готовите такие заметки?
А что плохого в местных новостях? Людям это нравится...
Политика, международные отношения, экономика...
Я хочу освещать яркие, сенсационные события!
Ах, но здесь это неосущест-вимо.
Ох-хо-хо

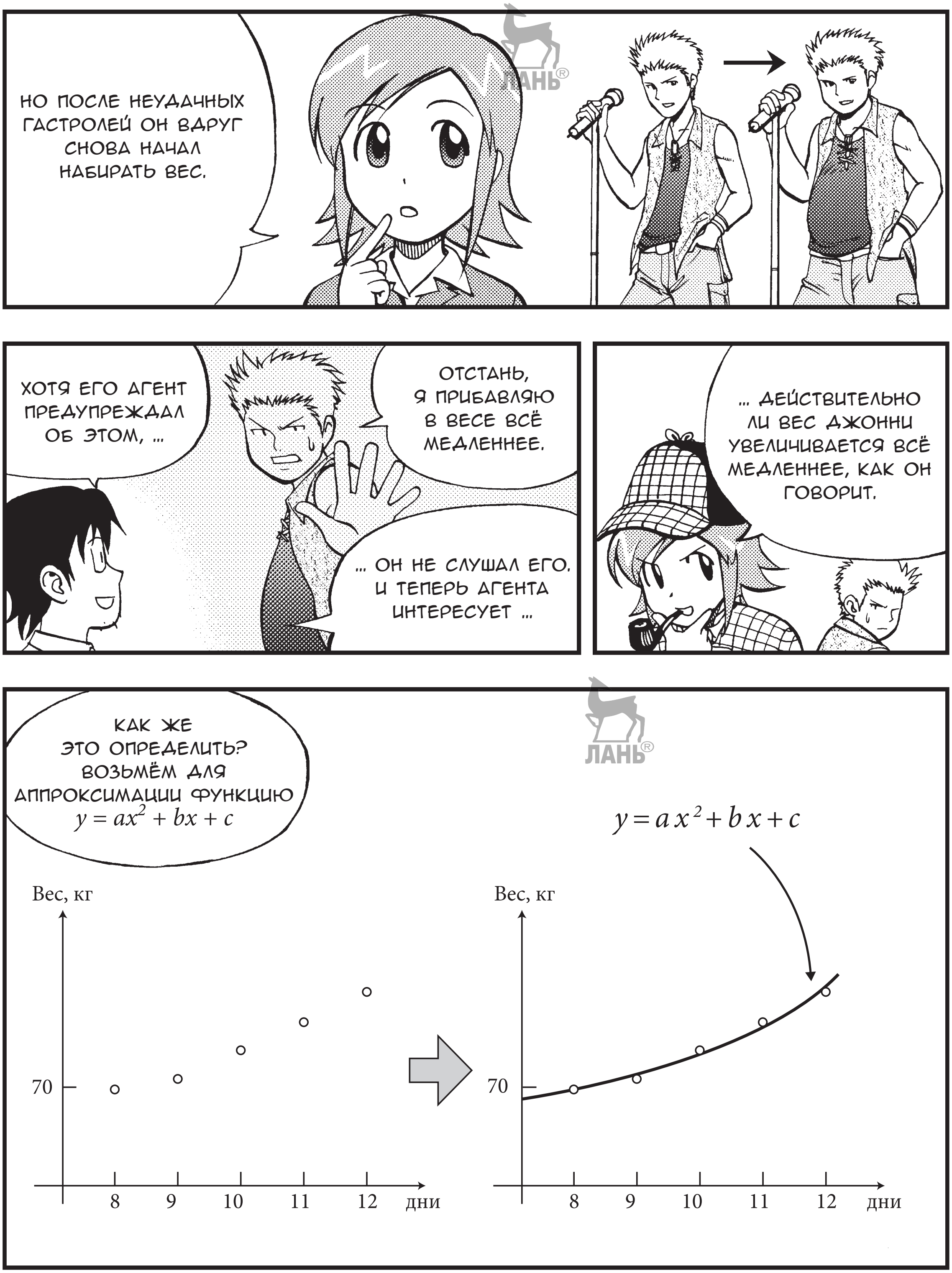

ХРУСТЬ
ХРУСТЬ
ХЕ-ХЕ! НЕ ПОХОЖЕ, ЧТОБЫ ГДЕ-ТО ПОБЛИЗОСТИ НАМЕЧАЛАСЬ ВСТРЕЧА ГЛАВ ПРАВИТЕЛЬСТВ.
НИЧЕГО ЗАХВАТЫВАЮЩЕГО ЗДЕСЬ НЕ ПРОИСХОДИТ, И ВРЕМЯ ТЕЧЁТ МЕДЛЕННО.
Я ТАК И ЗНАЛА. Я НЕ ХОЧУ ЗДЕСЬ РАБОТАТЬ!
А ЗНАЕШЬ, НОРИКО, ТЫ ВСЁ-ТАКИ МОЖЕШЬ ИЗВЛЕЧЬ ПОЛЬЗУ ОТ СВОЕГО ПРЕБЫВАНИЯ ЗДЕСЬ.
Я НЕ ЗНАЮ, КАКИЕ ГРОМКИЕ СОБЫТИЯ ТЫ СОБИРАЕШЬСЯ ОСВЕЩАТЬ,
НО Я МОГУ ПОДГОТОВИТЬ ТЕБЯ ДЛЯ РАБОТЫ В ГЛАВНОМ ОФИСЕ.

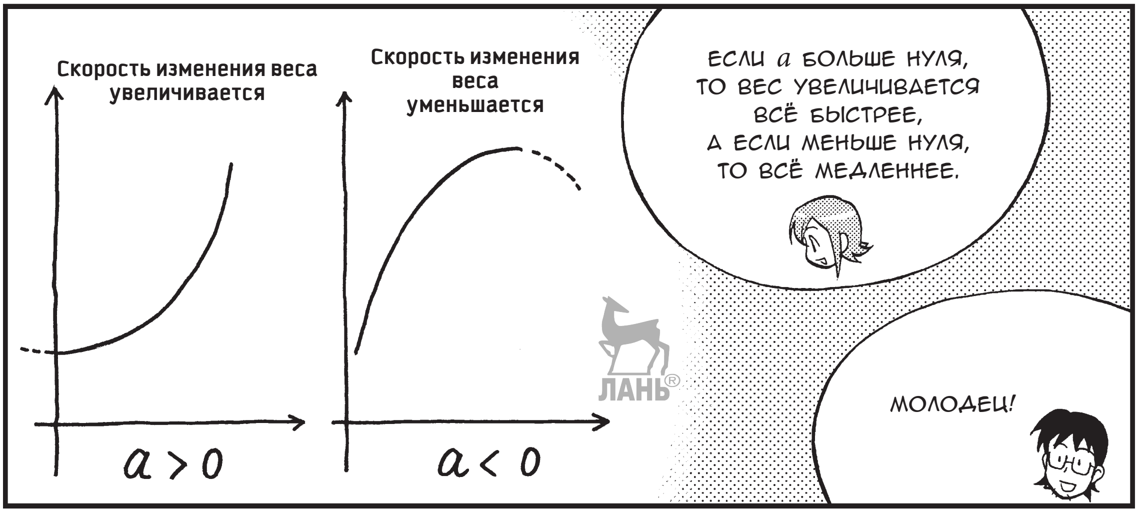

КСТАТИ, КАК ТЫ ДУМАЕШЬ, ЯПОНСКАЯ ЭКОНОМИКА ВСЁ ЕЩЁ ПЕРЕЖИВАЕТ ДЕФЛЯЦИЮ?
Я ДУМАЮ — ДА. ЭТО ЧУВСТВУЕТСЯ В ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ.
ПРАВИТЕЛЬСТВО ПОСТОЯННО ЗАЯВЛЯЛО, ЧТО ЭКОНОМИКА ВОССТАНАВЛИВАЕТСЯ.
НО ПРОШЛО МНОГО ВРЕМЕНИ, ПРЕЖДЕ ЧЕМ ПОЯВИЛИСЬ ТАКИЕ ПРИЗНАКИ.
Цены
Годы
2004
2005
НАСТОЯЩИЙ ЖУРНАЛИСТ ПЕРВЫМ ДЕЛОМ ДОЛЖЕН СПРОСИТЬ СЕБЯ: "ЧТО Я ХОЧУ ЗНАТЬ?"
ЧТО-ТО У МЕНЯ ПЛОХИЕ ПРЕДЧУВСТВИЯ ПО ЭТОМУ ПОВОДУ...

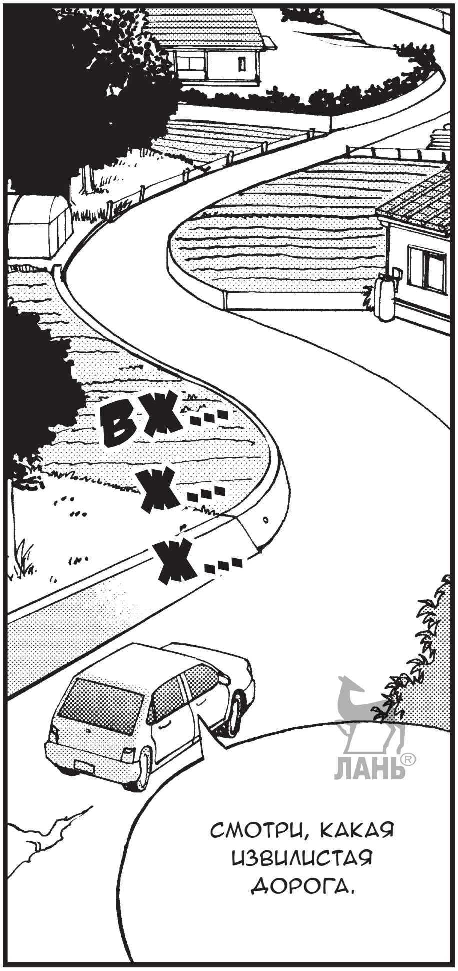

Чем проще будет функция,
аппроксимирующая
интересующую нас
зависимость,
тем яснее будет ответ.
В нашем
случае мы
используем
линейную
функцию
$y = ax + b$
ТЫК
Опять
математика!
Я так и
знала!
Мы хотим узнать,
падают или
растут цены
на самом деле.
?


Смотри.
$y = ax + b$
Линейная
аппроксимация
колебаний цен
даёт следующее...
y
(цены)
y = ax + b
2004
2005
2006
x
(год)
То есть, если
a отрицательно
(меньше 0), цены
продолжают
падать.
y
0
a>0
Началась инфляция
y
0
a<0
Продолжается дефляция


ВЕРНО,
ТЫ БЫСТРО
СХВАТЫВАЕШЬ.
УР...Р...Р
ЛАДНО, ПРОДОЛЖИМ
БЕСЕДУ
В ИТАЛЬЯНСКОМ
РЕСТОРАНЕ.
ОХ, Я ПАДАЮ!
ФУТОШИ, МЫ
ЕДЕМ ОБЕДАТЬ
В ИТАЛЬЯНСКИЙ
РЕСТОРАН.
НЕ ЕШЬ МНОГО
СЛАДКОГО!
КСТАТИ, О СЛАДКОМ.
ТЫ СЛЫШАЛА О ДЖОННИ
МАЖЕСТИКЕ, РОКЗВЕЗДЕ,
КНИГА КОТОРОГО
О ДИЕТЕ СТАЛА
БЕССЕЛЛЕРОМ?
ДА.

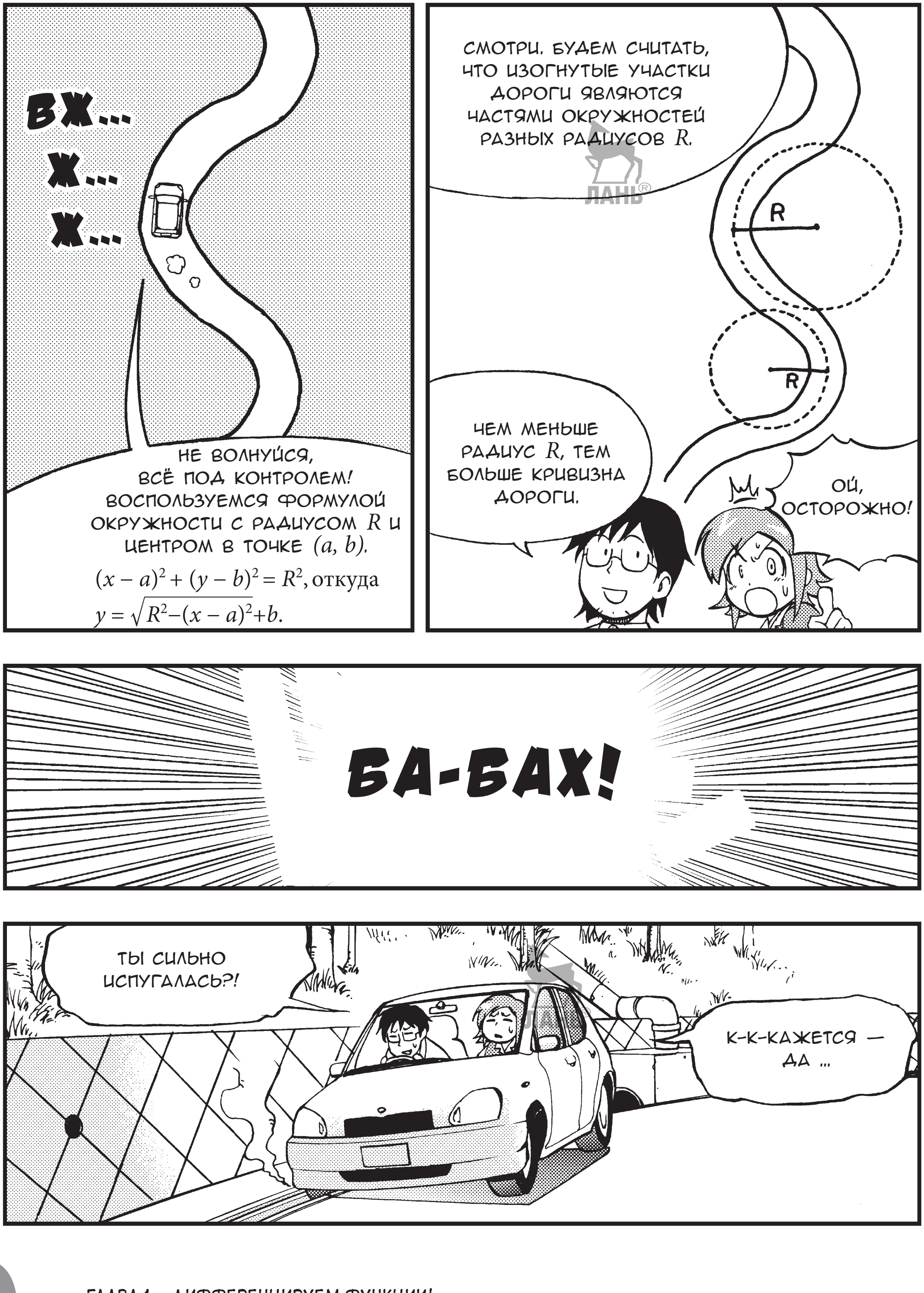

Но после неудачных гастролей он вдруг снова начал набирать вес.
Хотя его агент предупреждал об этом, ...
Отстань, я прибавляю в весе всё медленнее.
... он не слушал его. И теперь агента интересует ...
... действительно ли вес Джонни увеличивается всё медленнее, как он говорит.
Как же это определить? Возьмём для аппроксимации функцию $y = ax^2 + bx + c$
$y = ax^2 + bx + c$
Вес, кг
70
8
9
10
11
12
дни
Вес, кг
70
8
9
10
11
12
дни

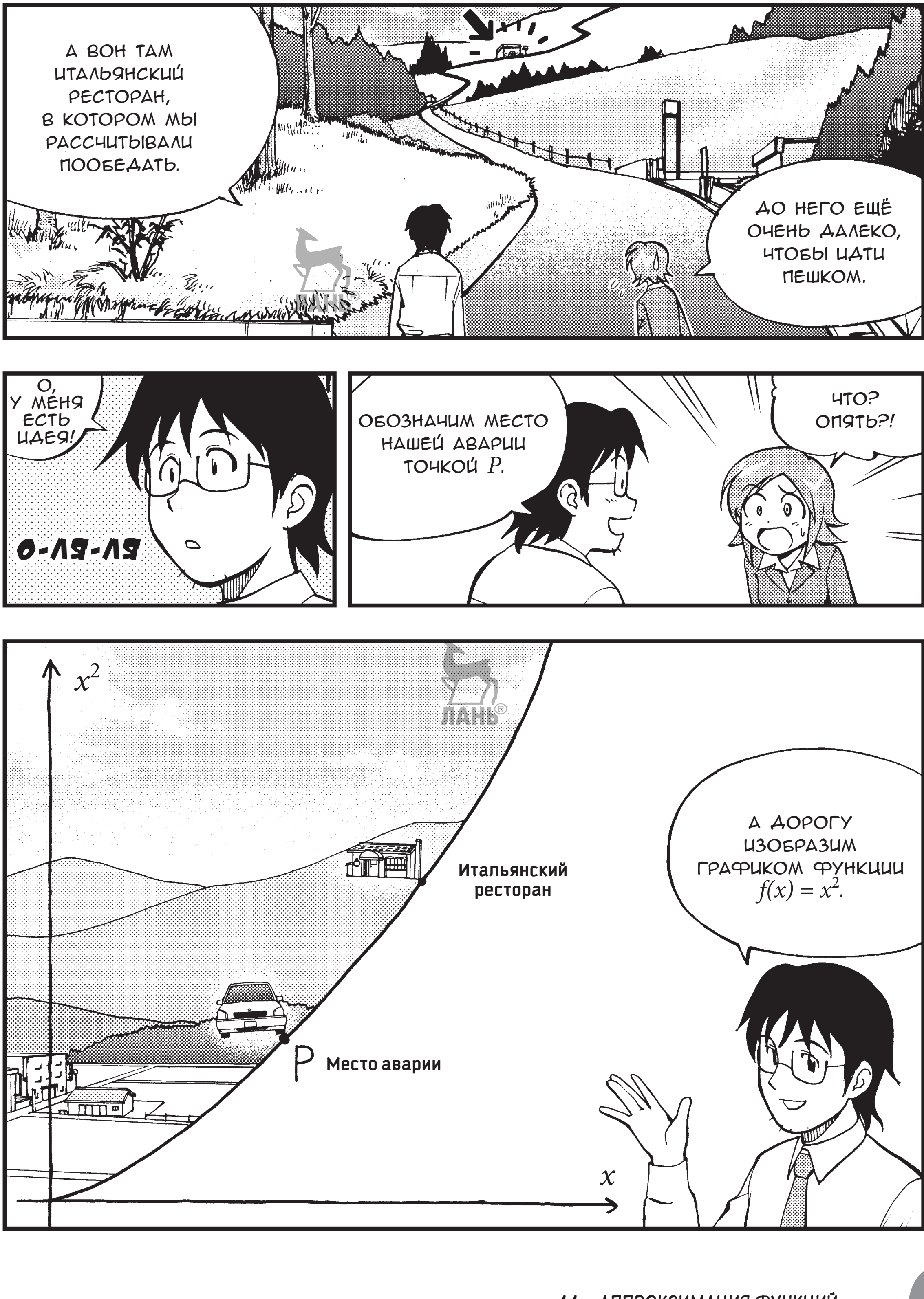

Скорость изменения веса увеличивается
Скорость изменения веса уменьшается
$a > 0$
$a < 0$
ЕСЛИ a БОЛЬШЕ НУЛЯ, ТО ВЕС УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ВСЁ БЫСТРЕЕ, А ЕСЛИ МЕНЬШЕ НУЛЯ, ТО ВСЁ МЕДЛЕННЕЕ.
МОЛОДЕЦ!


ВЖ...
Ж...
Ж...
СМОТРИ, КАКАЯ ИЗВИЛИСТАЯ ДОРОГА.

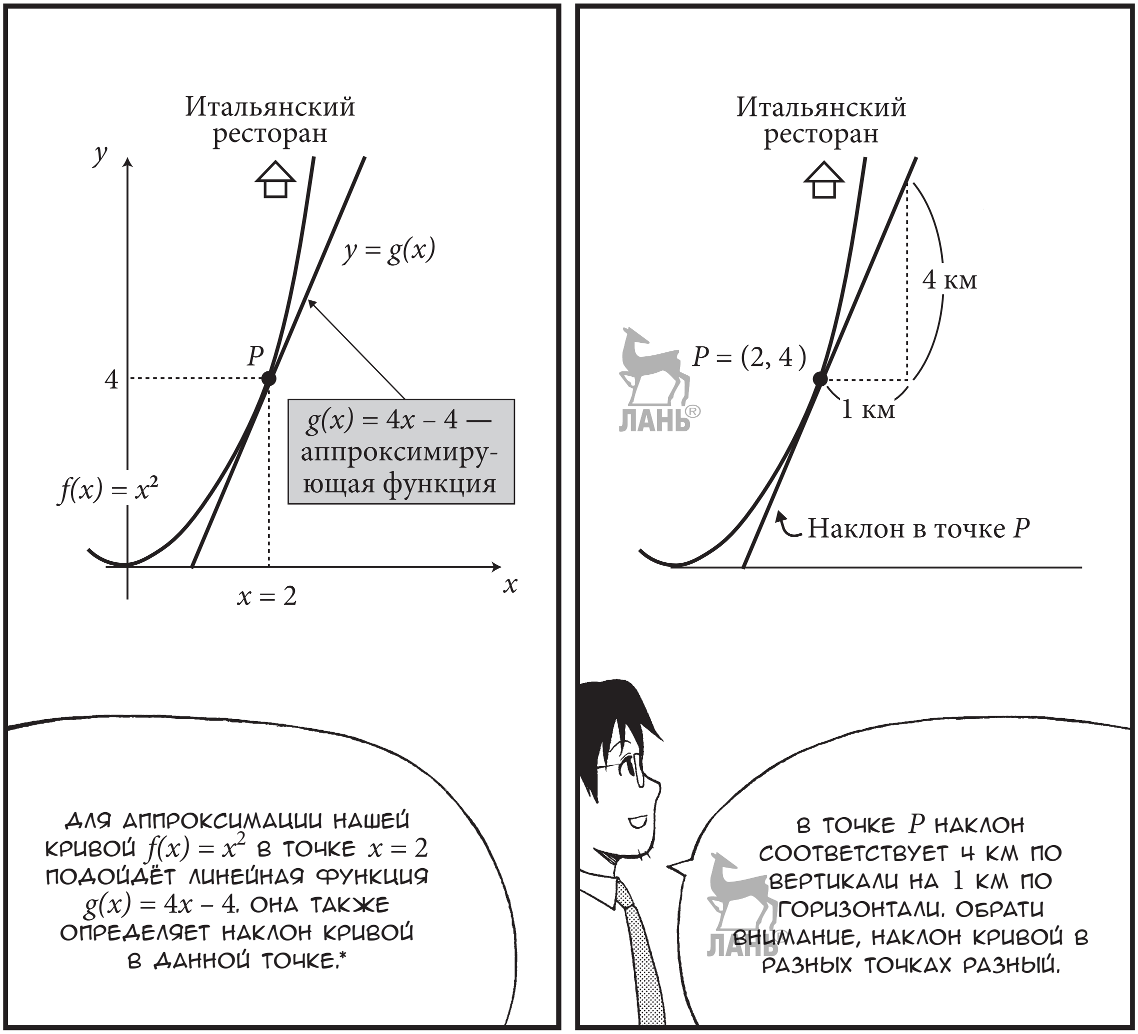

ДУМАЮ, ТЕБЕ ИНТЕРЕСНО УЗНАТЬ, НАСКОЛЬКО СИЛЬНО ОНА ИЗОГНУТА.
НЕТ, Я ДАЖЕ ДУМАТЬ ОБ ЭТОМ НЕ ХОЧУ.


МЫ МОЖЕМ АППРОКСИМИРОВАТЬ КАЖДЫЙ ИЗГИБ ЧАСТЬЮ ОКРУЖНОСТИ.
ЛУЧШЕ СМОТРИТЕ НА ДОРОГУ!

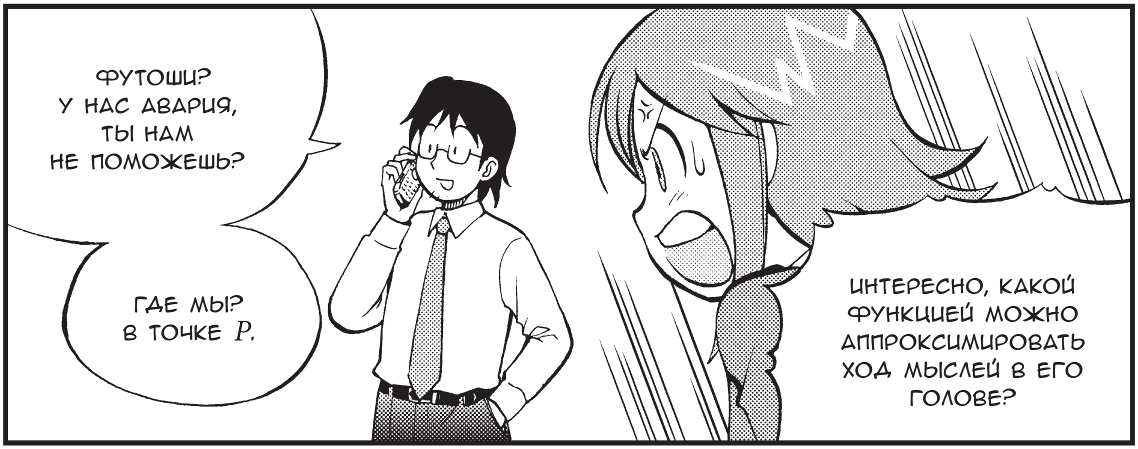

ВЖ... Ж... Ж...
НЕ ВОЛНУЙСЯ, ВСЁ ПОД КОНТРОЛЕМ! ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ФОРМУЛОЙ ОКРУЖНОСТИ С РАДИУСОМ R И ЦЕНТРОМ В ТОЧКЕ (a, b).
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, откуда
$y=\sqrt{R^2-(x-a)^2}+b$.
СМОТРИ. БУДЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО ИЗОГНУТЫЕ УЧАСТКИ ДОРОГИ ЯВЛЯЮТСЯ ЧАСТЯМИ ОКРУЖНОСТЕЙ РАЗНЫХ РАДИУСОВ R.
R
R
ЧЕМ МЕНЬШЕ РАДИУС R, ТЕМ БОЛЬШЕ КРИВИЗНА ДОРОГИ.
ОЙ, ОСТОРОЖНО!
БА-БАХ!
ТЫ СИЛЬНО ИСПУГАЛАСЬ?!
К-К-КАЖЕТСЯ — ДА ...



А вон там итальянский ресторан, в котором мы рассчитывали пообедать.
До него ещё очень далеко, чтобы идти пешком.
О, у меня есть идея!
О-ЛЯ-ЛЯ
Обозначим место нашей аварии точкой P.
Что? Опять?!
x^2
Итальянский ресторан
P Место аварии
x
А дорогу изобразим графиком функции $f(x) = x^2$.



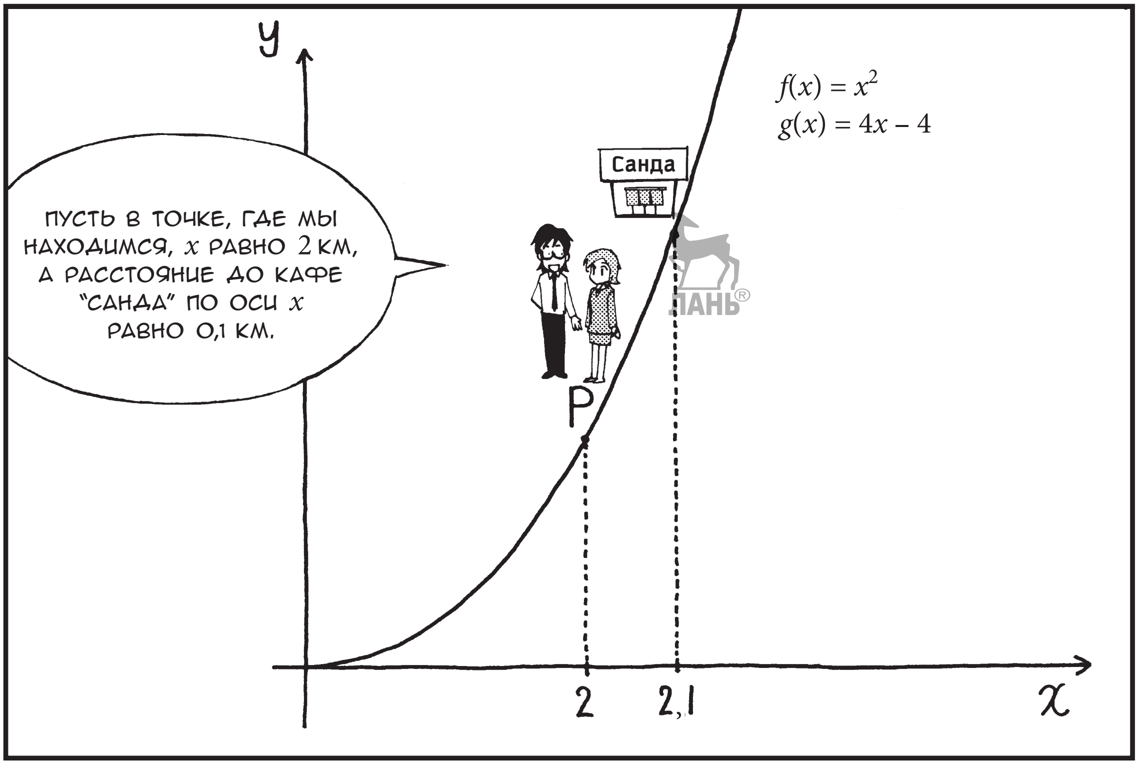
* Правило выбора функции описано на стр. 39.

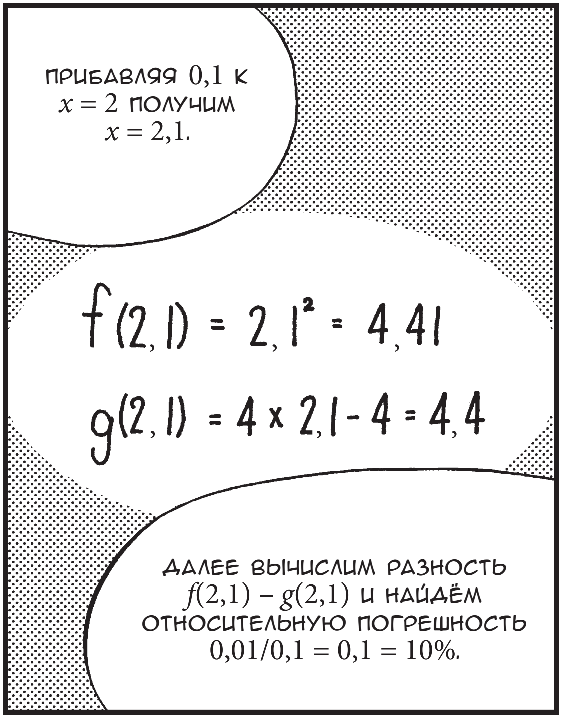


1.2. Относительная погрешность

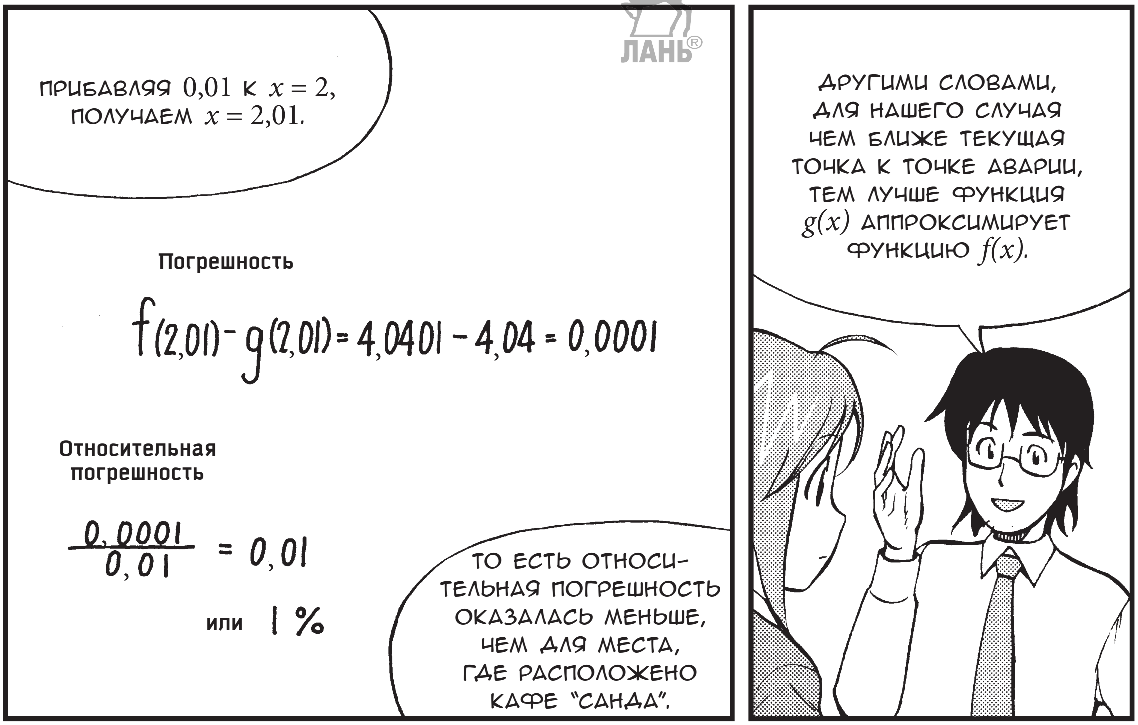
$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{Разность между } \overset{\text{Исходная функция}}{f(x)} \text{ и } \overset{\text{Аппроксимирующая функция}}{g(x)}}{\text{Приращение } x}.$$

... Довольно просто!?


y
$f(x) = x^2$
$g(x) = 4x - 4$
Санда
Пусть в точке, где мы находимся, x равно 2 км, а расстояние до кафе "Санда" по оси x равно 0,1 км.
P
2
2,1
x


Прибавляя 0,1 к $x = 2$ получим $x = 2,1$.
$f(2,1) = 2,1^2 = 4,41$
$g(2,1) = 4 \times 2,1 - 4 = 4,4$
Далее вычислим разность $f(2,1) - g(2,1)$ и найдём относительную погрешность $0,01/0,1 = 0,1 = 10\%$.

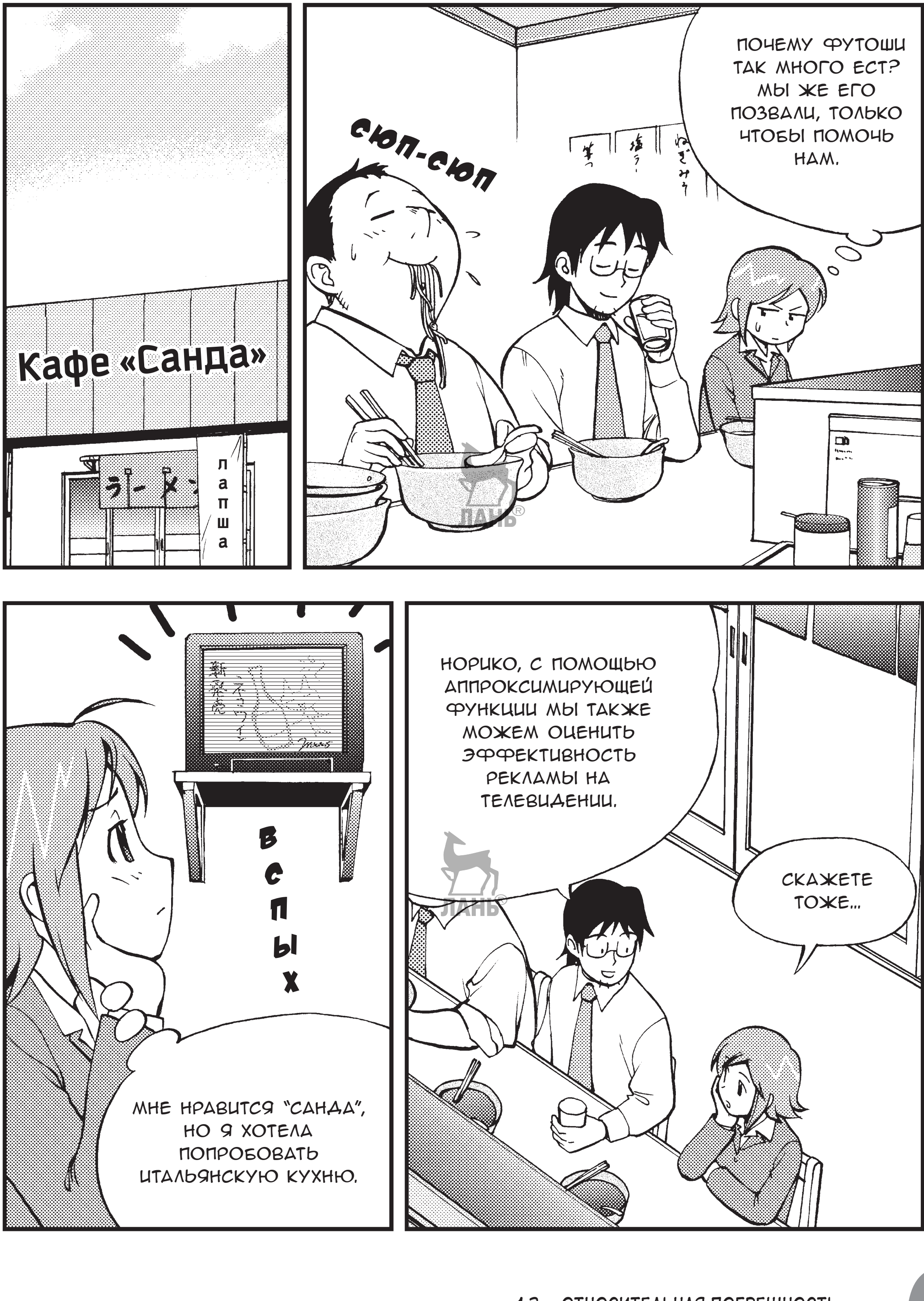

Теперь допустим, что я сместился относительно точки P на 0,01 км.
y
Санда
P
2
2,01
2,1
x



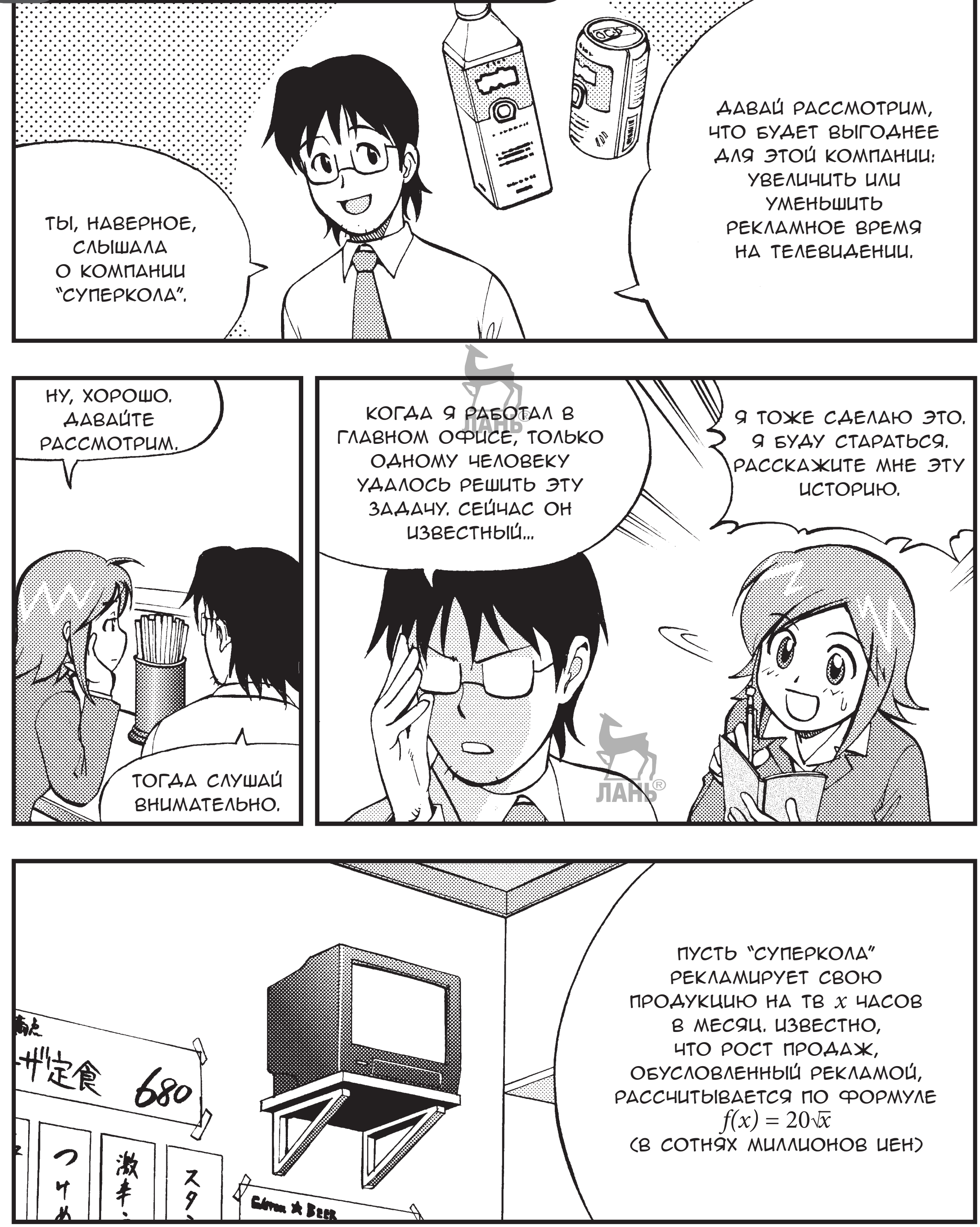
Когда приращение → 0, то и относительная погрешность тоже → 0.

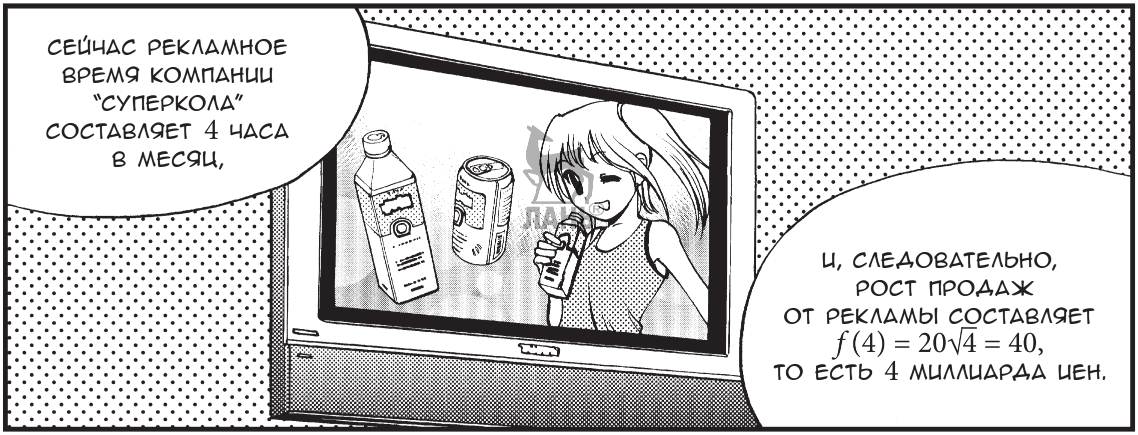
Приращение в точке $x = 2$	$f(x)$	$g(x)$	Погрешность	Относительная погрешность
1	9	8	1	100%
0,1	4,41	4,4	0,01	10%
0,01	4,0401	4,04	0,0001	1%
0,001	4,004001	4,004	0,000001	0,1%
↓ 0				↓ 0


НО ВЕДЬ ЭТОГО МОЖНО БЫЛО ОЖИДАТЬ, НЕ ТАК ЛИ?
БРАВО! ТЫ НАЧИНАЕШЬ ПОНИМАТЬ, ЧТО ТАКОЕ ПРОИЗВОДНАЯ.
ЗНАЧИТ, МЕНЬШУЮ ОТНОСИТЕЛЬНУЮ ОШИБКУ ИМЕЕТ...
Кафе «Санда»
лапша
P
... КАФЕ “САНДА”.
ГОВОРИТЕ ПРЯМО — МЫ БУДЕМ СЕГОДНЯ ОБЕДАТЬ?
ДА, БУДЕМ, ПРИЧЁМ В КАФЕ “САНДА”, ТАК КАК ОНО БЛИЖЕ ВСЕГО К ТОЧКЕ P.
● ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ДЛЯ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ БЛИЗКА К НУЛЮ ЛИШЬ В НЕБОЛЬШОЙ ОКРЕСТНОСТИ РАССМАТРИВАЕМОЙ ТОЧКИ.
● ПОКА СМЕЩЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭТОЙ ТОЧКИ НЕВЕЛИКО, ПРИБЛИЖЁННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ПОЗВОЛЯЕТ ПОЛУЧИТЬ ЗНАЧЕНИЯ, ДОВОЛЬНО БЛИЗКИЕ К ЗНАЧЕНИЯМ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ.
Более подробно см. на стр. 39.


Кафе «Санда»
Лапша
Сюп-сюп
Почему Футоши так много ест? Мы же его позвали, только чтобы помочь нам.
Вспых
Мне нравится “Санда”, но я хотела попробовать итальянскую кухню.
Норико, с помощью аппроксимирующей функции мы также можем оценить эффективность рекламы на телевидении.
Скажете тоже...

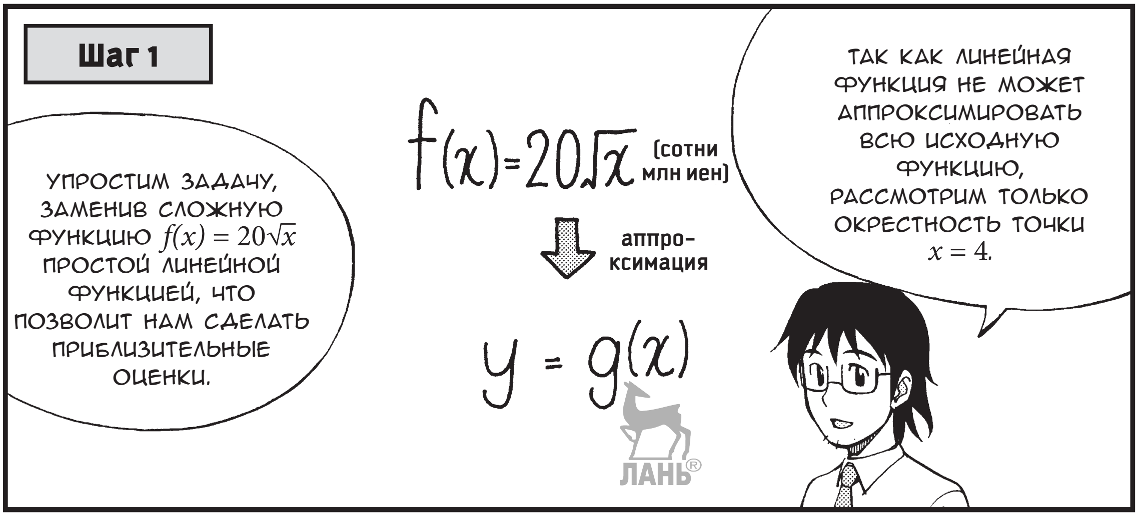
1.3. Применение производных

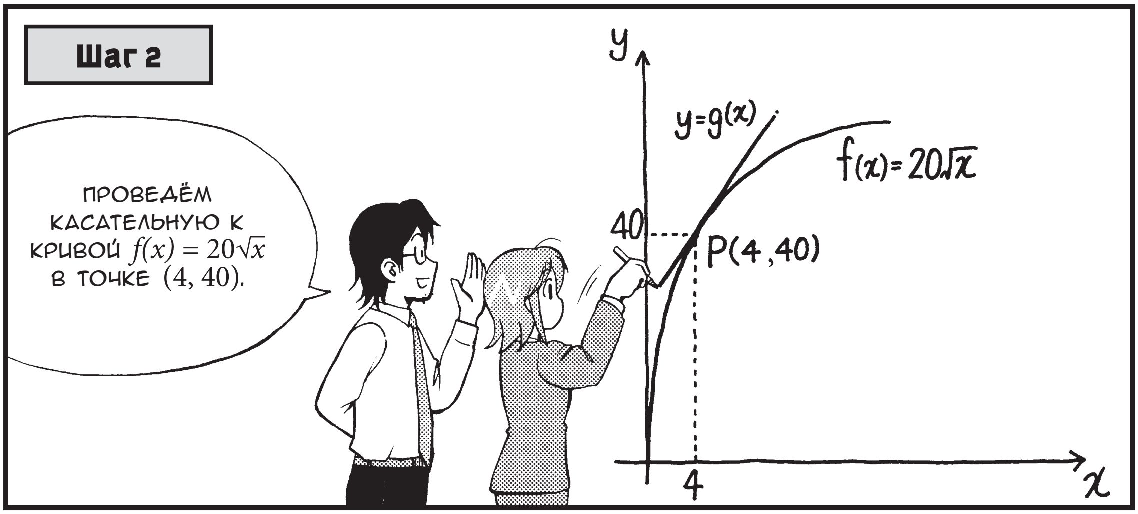



Сейчас рекламное время компании "Суперкола" составляет 4 часа в месяц,
и, следовательно, рост продаж от рекламы составляет $f(4) = 20\sqrt{4} = 40$, то есть 4 миллиарда иен.


Стоимость 1 рекламной минуты на ТВ равна 10 миллионам иен.
1 минута рекламы — 10 млн. иен
Де... десять миллионов иен?!


$f(x) = 20\sqrt{x}$ (сотен млн. иен)
1 минута рекламы — 10 млн. иен
Допустим, новое руководство компании решило пересмотреть рекламное время. Как ты думаешь, они его увеличат или уменьшат?
?
?
Хм...



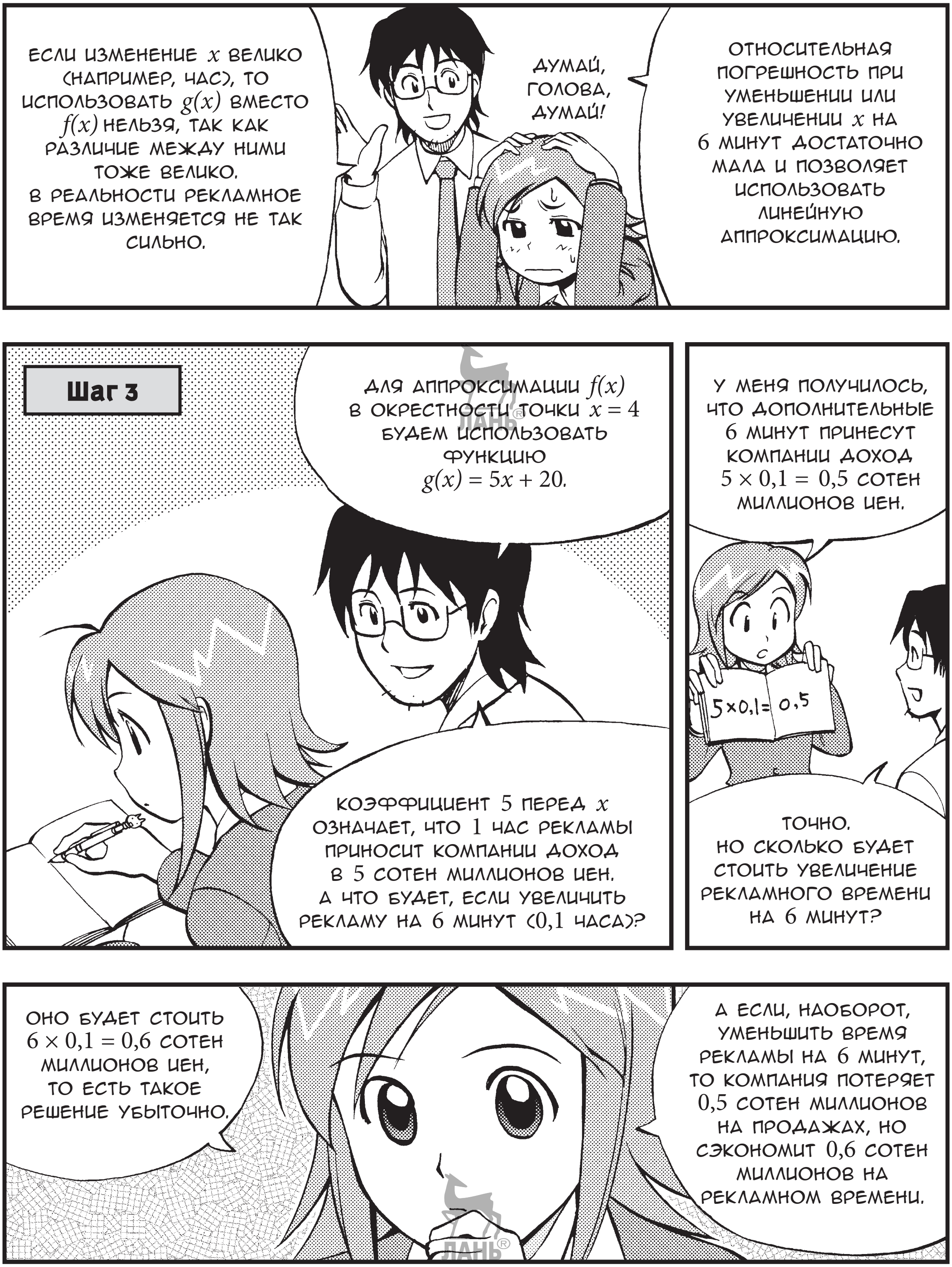


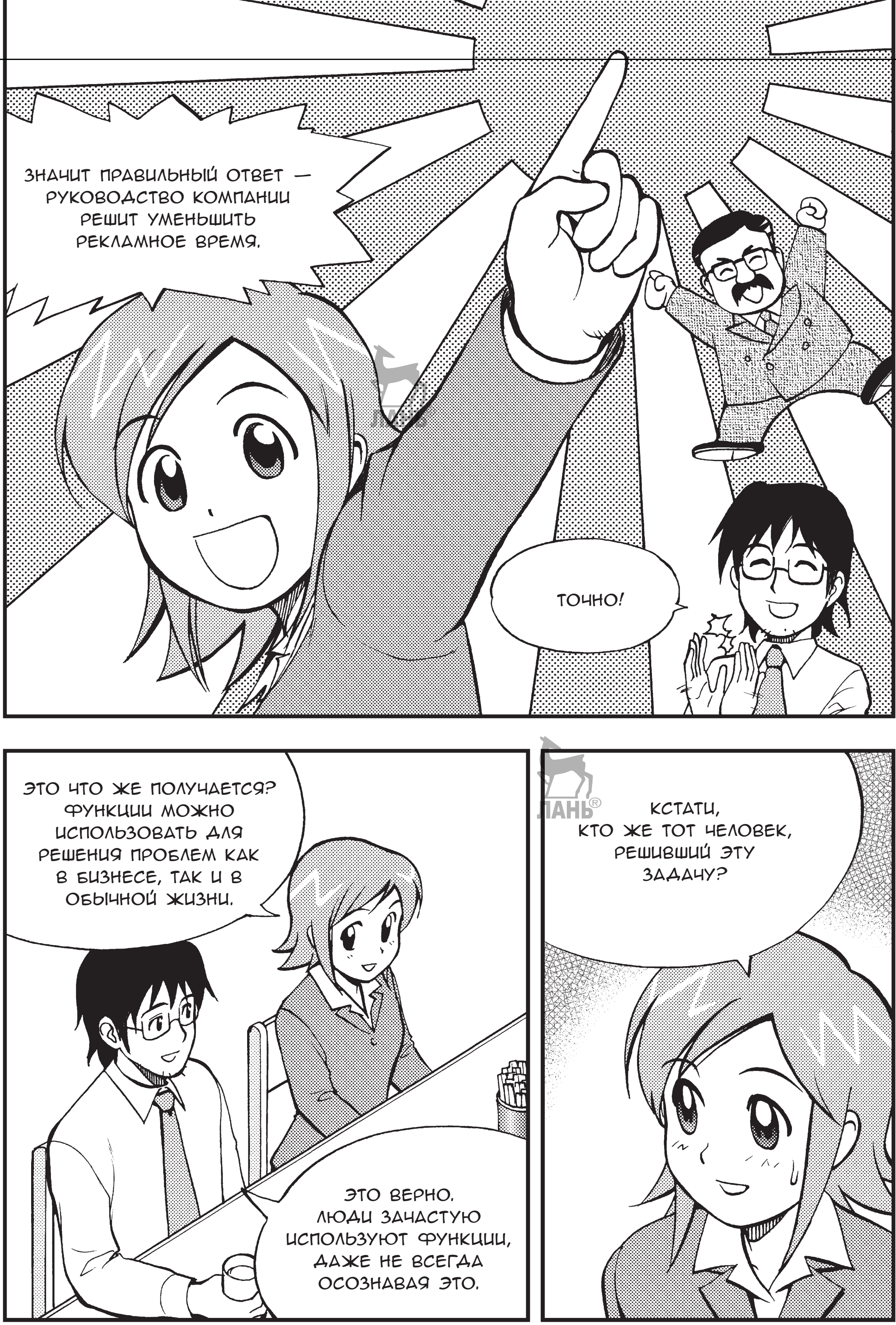
Выведем формулу касательной к кривой. Для этого сначала вычислим наклон (точнее, тангенс угла наклона) фунции $f(x) = 20\sqrt{x}$ в точке 4:

$$f(4)=\frac{f(4+\varepsilon)-f(4)}{\varepsilon}=\frac{20\sqrt{4+\varepsilon}-20\times 2}{\varepsilon}=20\,\frac{(\sqrt{4+\varepsilon}-2)\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}{\varepsilon\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}=$$

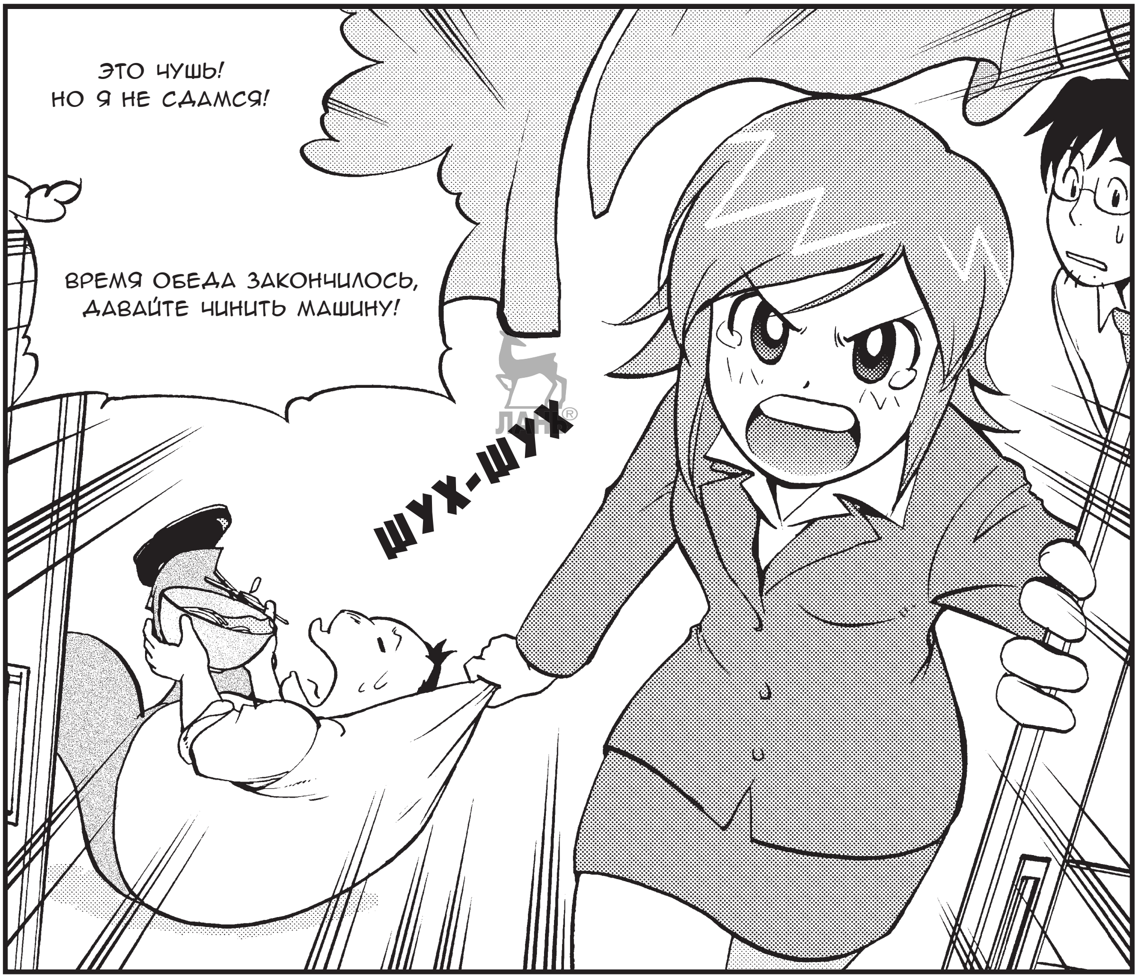
$$=20\,\frac{4+\varepsilon-4}{\varepsilon\,(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}=\frac{20}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}. \qquad (1)$$

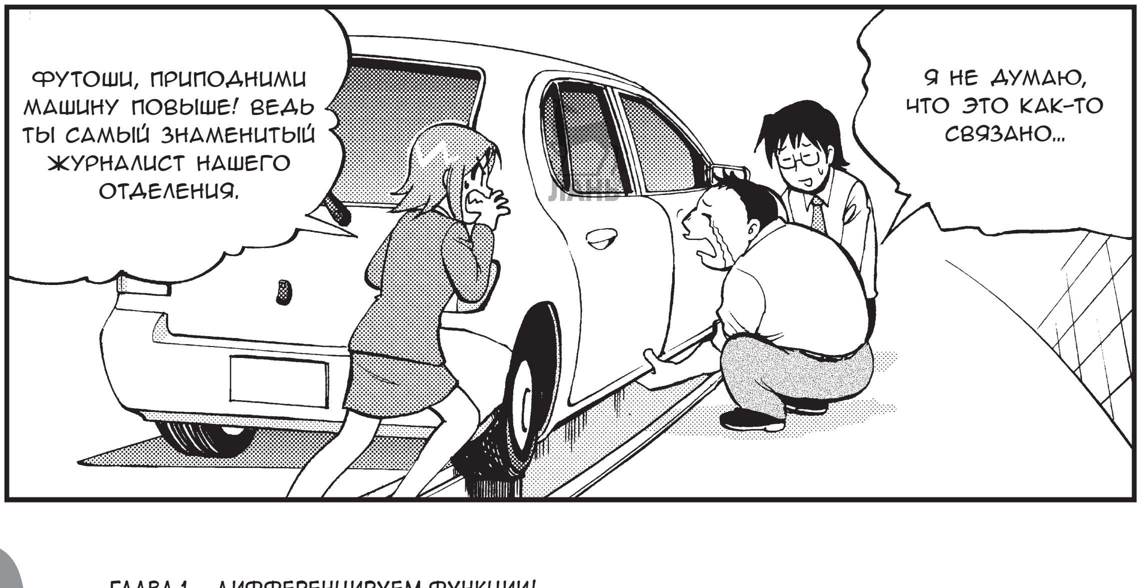
Когда $\varepsilon \to 0$, знаменатель выражения (1) $\sqrt{4+\varepsilon}+2 \to 4$, а само выражение (1) $\to 20/4 = 5$. Отсюда получаем аппроксимирующую функцию $g(x) = 5(x - 4) + 40 = 5x + 20$. (*Более подробное объяснение приведено в разделе 1.4 на стр. 39.*)


Если изменение x велико (например, час), то использовать $g(x)$ вместо $f(x)$ нельзя, так как различие между ними тоже велико. В реальности рекламное время изменяется не так сильно.
Думай, голова, думай!
Относительная погрешность при уменьшении или увеличении x на 6 минут достаточно мала и позволяет использовать линейную аппроксимацию.
Шаг 3
Для аппроксимации $f(x)$ в окрестности точки $x = 4$ будем использовать функцию $g(x) = 5x + 20$.
Коэффициент 5 перед x означает, что 1 час рекламы приносит компании доход в 5 сотен миллионов иен. А что будет, если увеличить рекламу на 6 минут (0,1 часа)?
У меня получилось, что дополнительные 6 минут принесут компании доход $5 \times 0{,}1 = 0{,}5$ сотен миллионов иен.
5×0,1= 0,5
Точно. Но сколько будет стоить увеличение рекламного времени на 6 минут?
Оно будет стоить $6 \times 0{,}1 = 0{,}6$ сотен миллионов иен, то есть такое решение убыточно.
А если, наоборот, уменьшить время рекламы на 6 минут, то компания потеряет 0,5 сотен миллионов на продажах, но сэкономит 0,6 сотен миллионов на рекламном времени.


ЗНАЧИТ ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ — РУКОВОДСТВО КОМПАНИИ РЕШИТ УМЕНЬШИТЬ РЕКЛАМНОЕ ВРЕМЯ.
ТОЧНО!
ЭТО ЧТО ЖЕ ПОЛУЧАЕТСЯ? ФУНКЦИИ МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ КАК В БИЗНЕСЕ, ТАК И В ОБЫЧНОЙ ЖИЗНИ.
ЭТО ВЕРНО. ЛЮДИ ЗАЧАСТУЮ ИСПОЛЬЗУЮТ ФУНКЦИИ, ДАЖЕ НЕ ВСЕГДА ОСОЗНАВАЯ ЭТО.
КСТАТИ, КТО ЖЕ ТОТ ЧЕЛОВЕК, РЕШИВШИЙ ЭТУ ЗАДАЧУ?


Но вы говорили, он стал знаменитым?..
Он — самый знаменитый журналист в нашем отделении.
О, это наш приятель Футоши.
Сюп-сюп
О...ох!
Как?.. Вы шутите!
?!
Хвать
Зырк!
Как я и полагала... Уметь решать математические задачи и быть знаменитым журналистом — это разные вещи.
Э...эх!


ЭТО ЧУШЬ!
НО Я НЕ СДАМСЯ!
ВРЕМЯ ОБЕДА ЗАКОНЧИЛОСЬ,
ДАВАЙТЕ ЧИНИТЬ МАШИНУ!
ШУХ-ШУХ


ФУТОШИ, ПРИПОДНИМИ МАШИНУ ПОВЫШЕ! ВЕДЬ ТЫ САМЫЙ ЗНАМЕНИТЫЙ ЖУРНАЛИСТ НАШЕГО ОТДЕЛЕНИЯ.
Я НЕ ДУМАЮ, ЧТО ЭТО КАК-ТО СВЯЗАНО...

1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ в виде линейной функции

$$g(x) = k(x - a) + f(a) \qquad (1)$$

($g(x)$ совпадает с $f(a)$ при $x = a$).

Для этого надо найти коэффициент k.

Посчитаем относительную погрешность при приращении x от $x = a$ до $x = a + \varepsilon$.

$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{Разность между } f \text{ и } g \text{ после приращения } \varepsilon \text{ к } x}{\text{Приращение } \varepsilon \text{ в точке } x = a} =$$

$$= \frac{f(a+\varepsilon) - g(a+\varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{f(a+\varepsilon) - (k\varepsilon + f(a))}{\varepsilon} =$$

$g(a + \varepsilon) = k(a + \varepsilon - a) + f(a) = k\varepsilon + f(a)$

$$= \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} - k \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

При приближении ε к 0 относительная погрешность тоже приближается к 0.

Тогда

$$k = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}.$$

При $\varepsilon \to 0$ $\dfrac{f(a+\varepsilon) - f(a))}{\varepsilon}$ приближается к k.

(Символ lim означает значение рассматриваемого выражения при $\varepsilon \to 0$.)

При таком k линейная функция (1) называется аппроксимацией функции $f(x)$, а k называется *дифференциальным коэффициентом* $f(x)$ при $x = a$.

Наклон касательной к $y = f(x)$ в любой точке $(a, f(a))$ вычисляется как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}.$$

Введём обозначение f', приписав к f штрих, и запишем

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}}$$

$f'(a)$ определяет наклон касательной к кривой $y = f(x)$ при $x = a$.

Если заменить точку a на переменную x, то f' станет функцией $f'(x)$.

Эту функцию называют *производной от функции f*, или *производной функции f*.

Операцию получения производной от функции f, называют *дифференцированием функции*.

Выводы

- Формула расчёта предела в дифференциальном исчислении совпадает с формулой относительной погрешности.
- Предел используется для нахождения производной.
- Производная функции в точке — это наклон касательной в этой точке.
- Производная не что иное, как функция изменения.

Производная $f(x)$ при $x = a$ вычисляется по формуле

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ — это линейная аппроксимирующая функция для $f(x)$ в точке a.
Функция $f'(x)$, выражающая наклон касательной к $f(x)$ в точке $(x, f(x))$, называется производной $f(x)$.

Помимо $f'(x)$ производная от $y = f(x)$ может также обозначаться:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x).$$

Вычисление производной постоянной, линейной и квадратичной функции

1. Найдём производную постоянной функции $f(x) = \alpha$.
   Дифференциальный коэффициент $f(x)$ при $x = a$:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha - \alpha}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 0 = 0.$$

   Таким образом, производная постоянной функции равна 0, то есть $f'(x) = 0$, что вполне логично, так как изменение постоянной функции равно 0.

2. Вычислим производную линейной функции $f(x) = \alpha x + \beta$.
   Производная функции $f(x)$ при $x = a$

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha(a + \varepsilon) + \beta - (\alpha a + \beta)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha = \alpha.$$

   Таким образом, производная линейной функции равна константе ($f'(x) = \alpha$). Этот результат также очевиден — линейные функции по определению имеют постоянную скорость изменения в любой точке.

3. Найдём производную функции $f(x) = x^2$, с которой мы уже встречались ранее.
Дифференциальный коэффициент $f(x)$ при $x = a$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(a+\varepsilon)^2 - a^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(2a + \varepsilon) = 2a.$$

Таким образом, производная функции $f(x) = x^2$ при $x = a$ равна $2a$, то есть $f'(a) = 2a$.
Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ — это $f'(x) = 2x$.

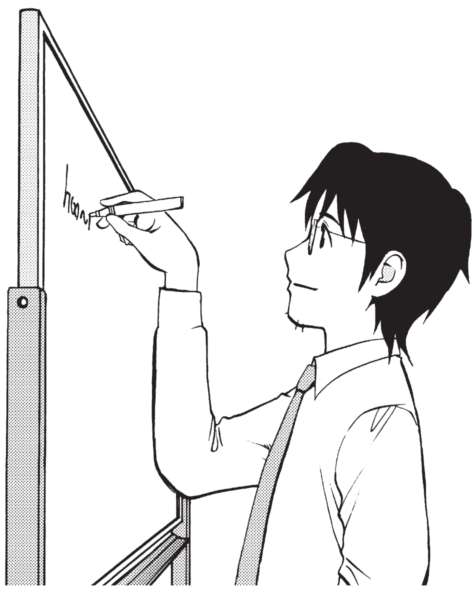
1.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

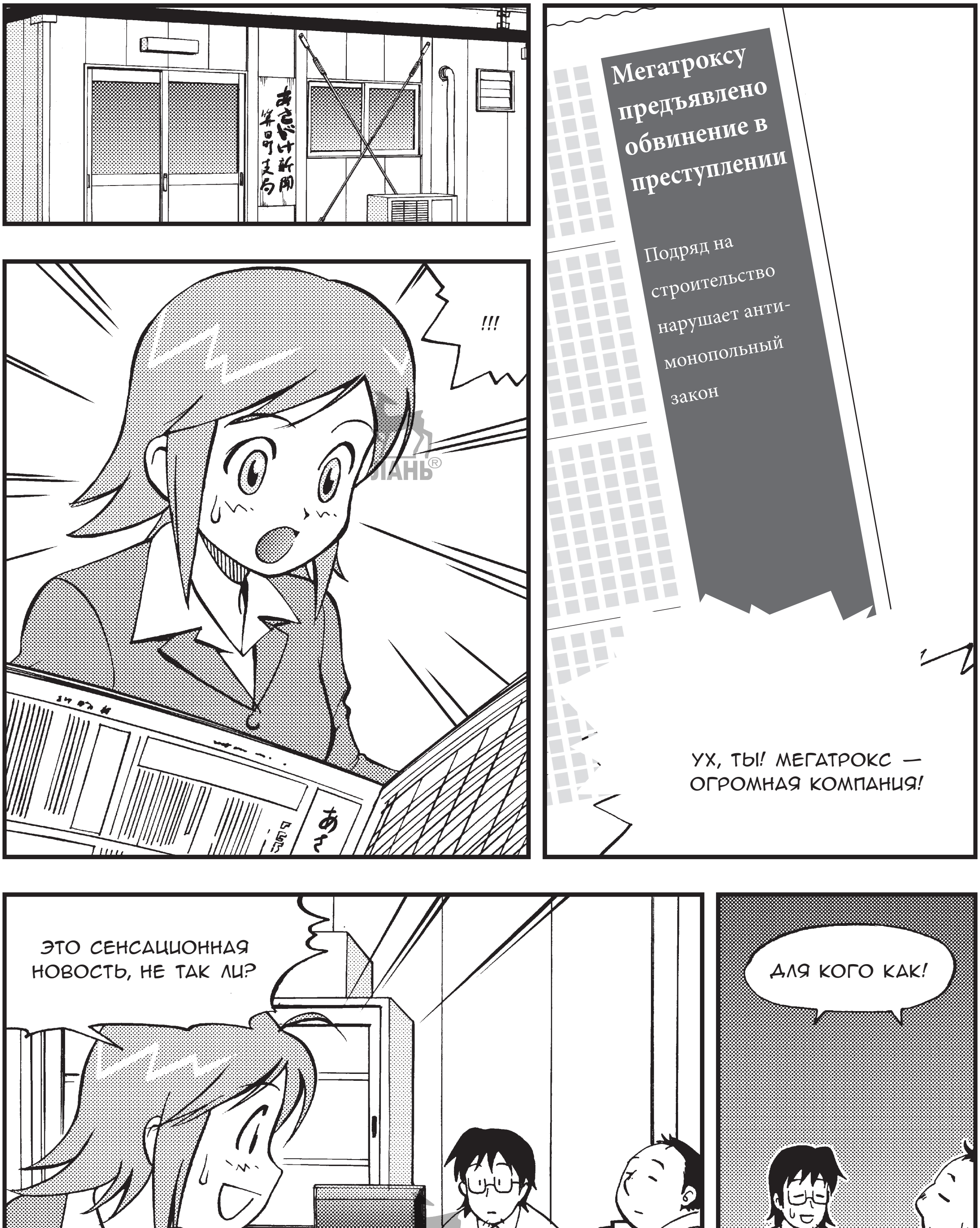
1. Имеется функция $f(x)$ и линейная функция $g(x) = 8x + 10$. Известно, что относительная погрешность этих функций стремится к нулю при x, стремящемся к 5.
1) Найдите $f(5)$.
2) Найдите $f'(5)$.

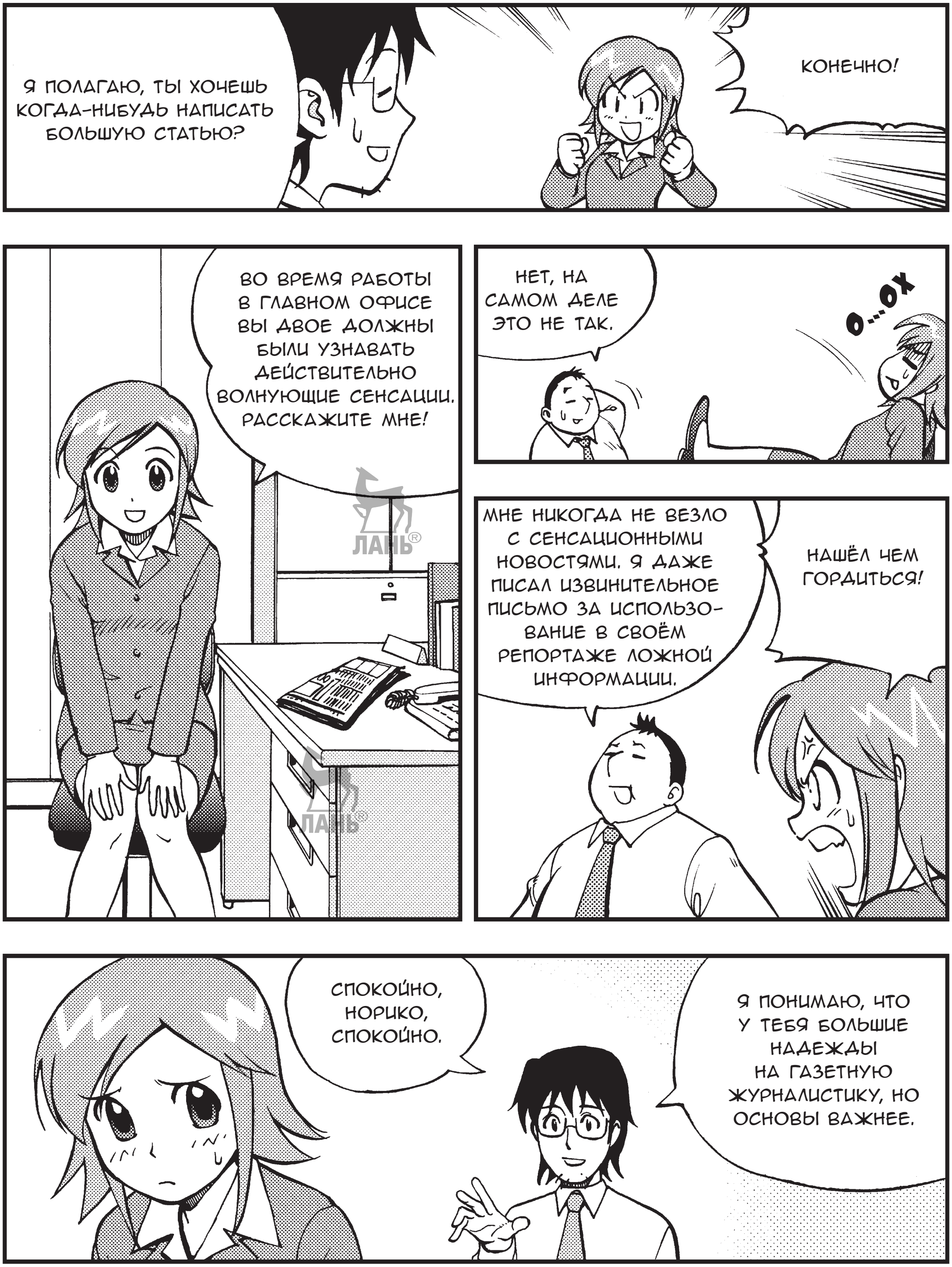
2. Имеется функция $f(x) = x^3$. Найдите её производную $f'(x)$.

2

ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ!



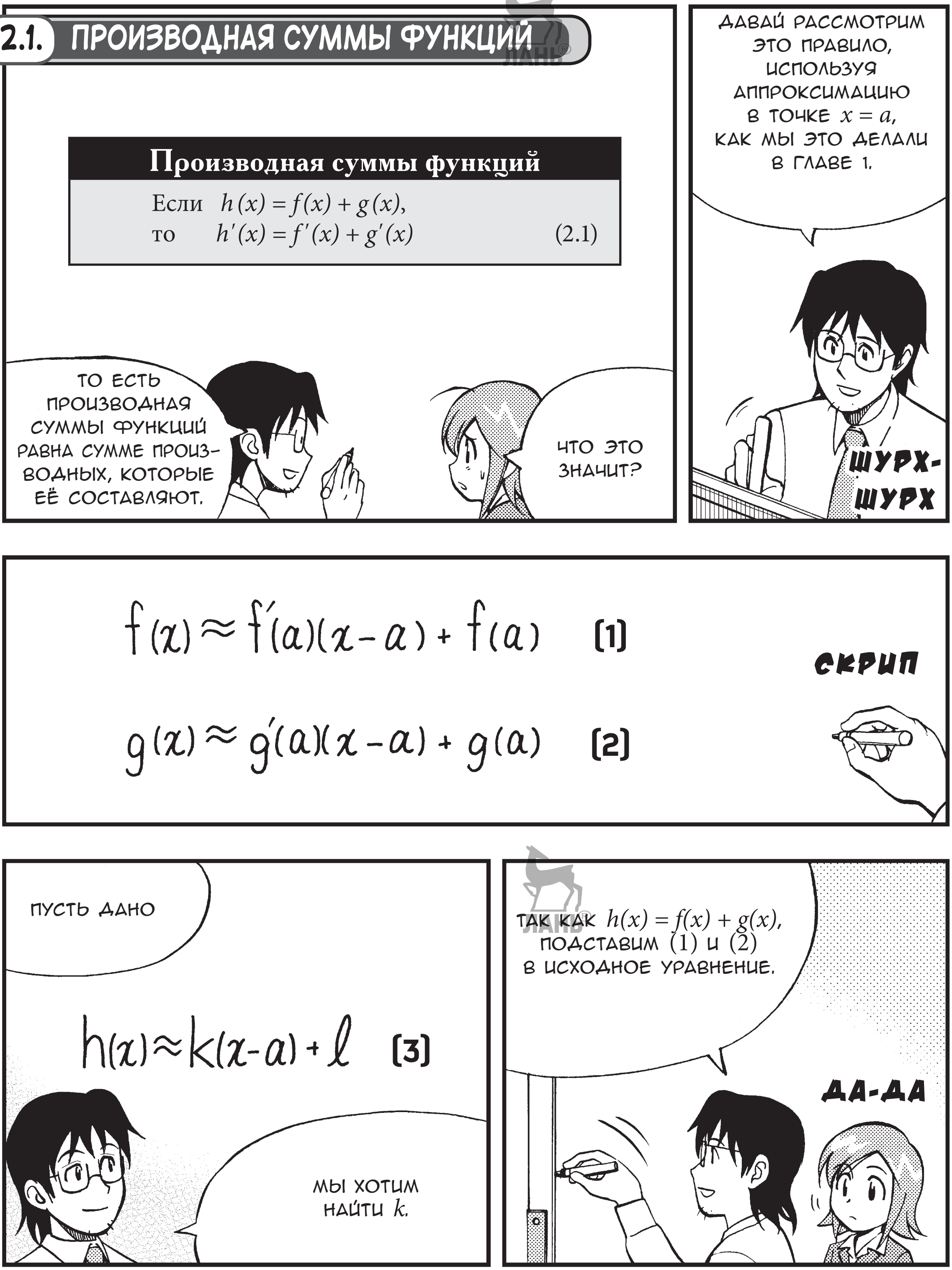

Мегатроксу предъявлено обвинение в преступлении
Подряд на строительство нарушает анти-монопольный закон
!!!
Ух, ты! Мегатрокс — огромная компания!
Это сенсационная новость, не так ли?
Для кого как!

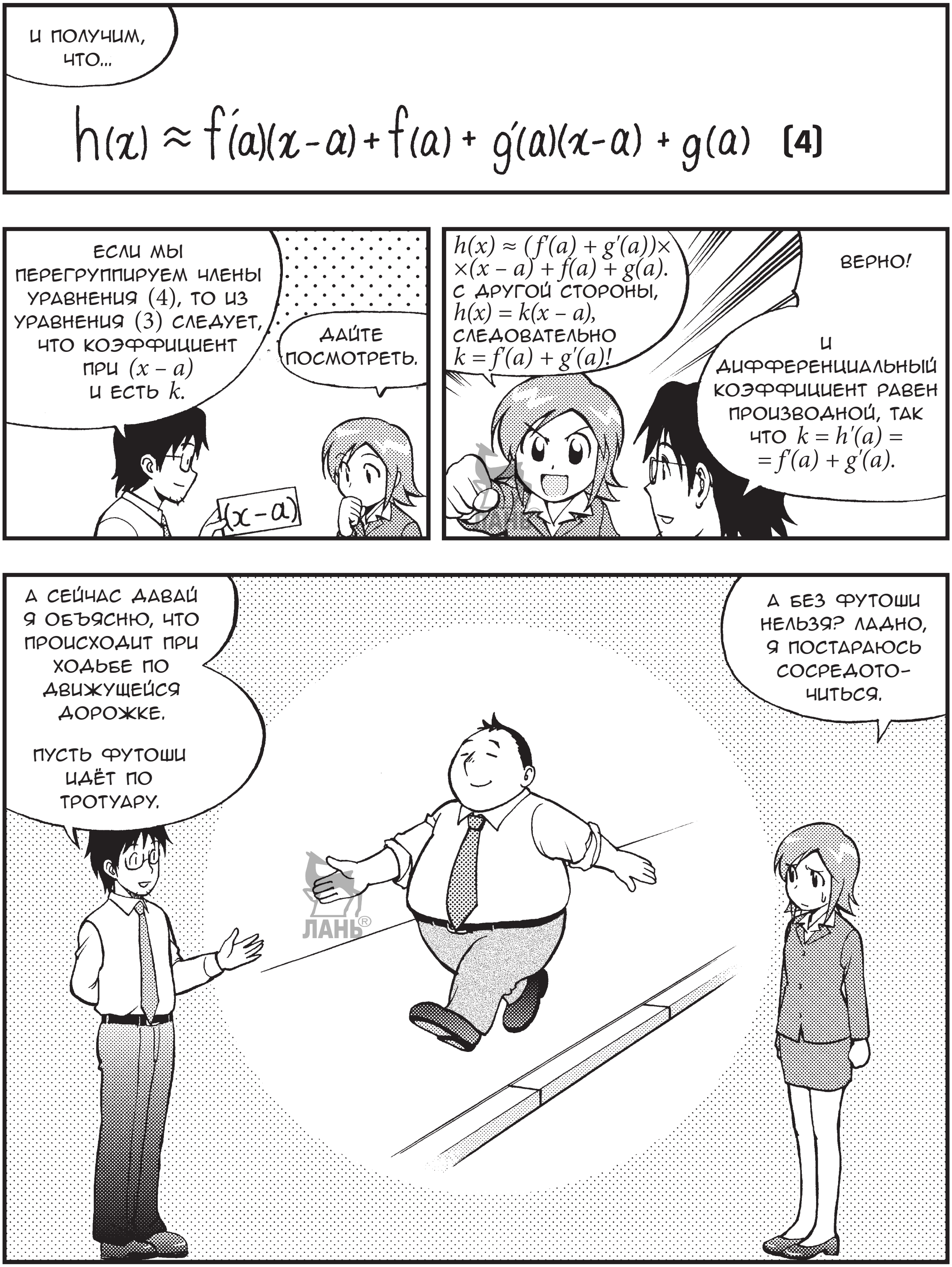

Я ПОЛАГАЮ, ТЫ ХОЧЕШЬ КОГДА-НИБУДЬ НАПИСАТЬ БОЛЬШУЮ СТАТЬЮ?
КОНЕЧНО!
ВО ВРЕМЯ РАБОТЫ В ГЛАВНОМ ОФИСЕ ВЫ ДВОЕ ДОЛЖНЫ БЫЛИ УЗНАВАТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ВОЛНУЮЩИЕ СЕНСАЦИИ. РАССКАЖИТЕ МНЕ!
НЕТ, НА САМОМ ДЕЛЕ ЭТО НЕ ТАК.
О...ОХ
МНЕ НИКОГДА НЕ ВЕЗЛО С СЕНСАЦИОННЫМИ НОВОСТЯМИ. Я ДАЖЕ ПИСАЛ ИЗВИНИТЕЛЬНОЕ ПИСЬМО ЗА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В СВОЁМ РЕПОРТАЖЕ ЛОЖНОЙ ИНФОРМАЦИИ.
НАШЁЛ ЧЕМ ГОРДИТЬСЯ!
СПОКОЙНО, НОРИКО, СПОКОЙНО.
Я ПОНИМАЮ, ЧТО У ТЕБЯ БОЛЬШИЕ НАДЕЖДЫ НА ГАЗЕТНУЮ ЖУРНАЛИСТИКУ, НО ОСНОВЫ ВАЖНЕЕ.

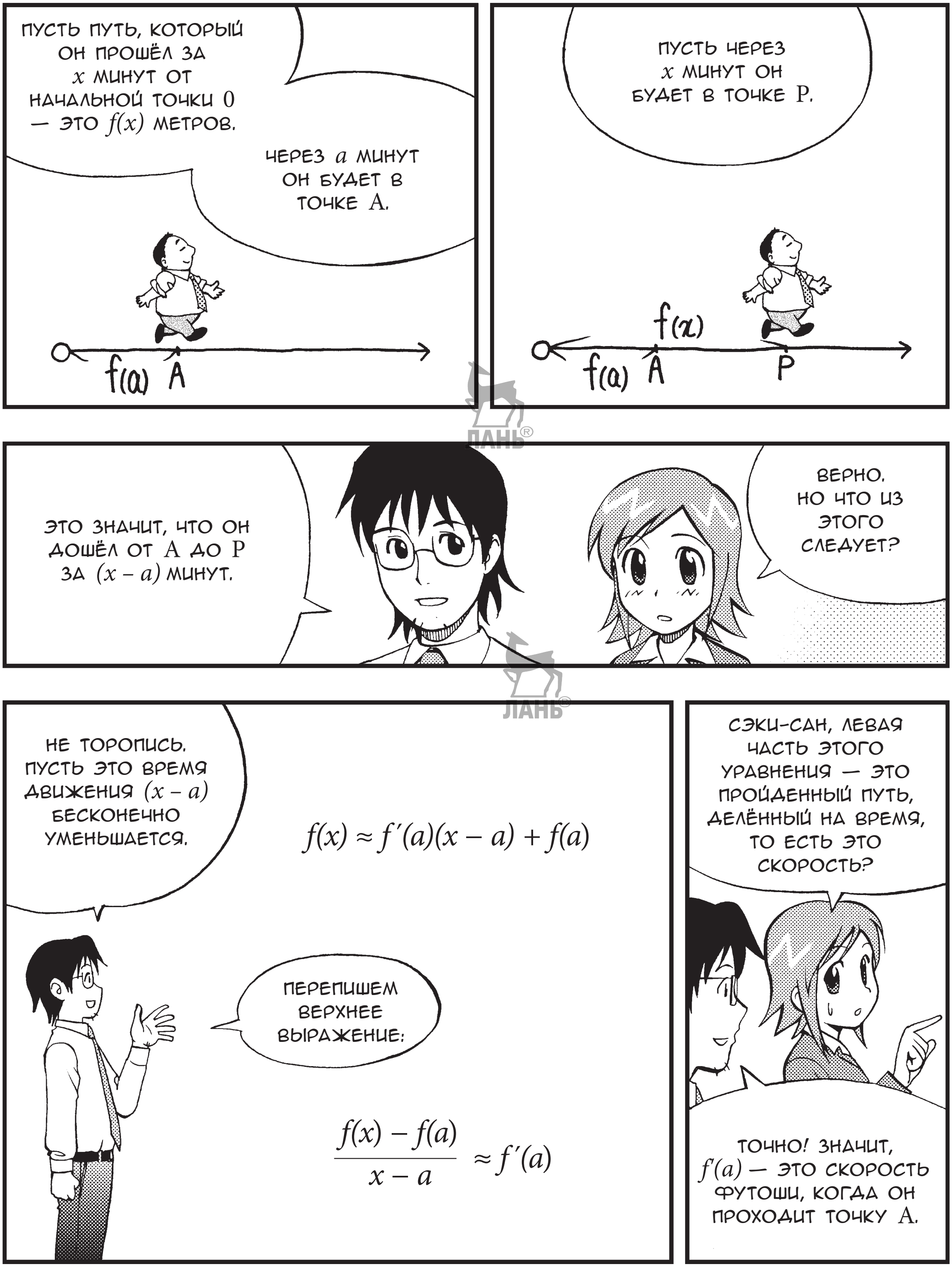

Пиши просто и ясно — не используй длинных слов и жаргона.
Не забывай о читателях на главной улице.
Это я понимаю.
Помни, невозможно знать всё. Если ты сталкиваешься с чем-то, незнакомым, всегда спрашивай кого-то или старайся узнать сама.
Футоши ещё молод, но его способность к исследованиям исключительно высока.
Хи-хи
У... у... у
А я и не претендую на роль всезнайки!
А...А...А
Кстати, у меня вопрос:
Для чего нужен антимонопольный закон?
О...ох
Шлёп

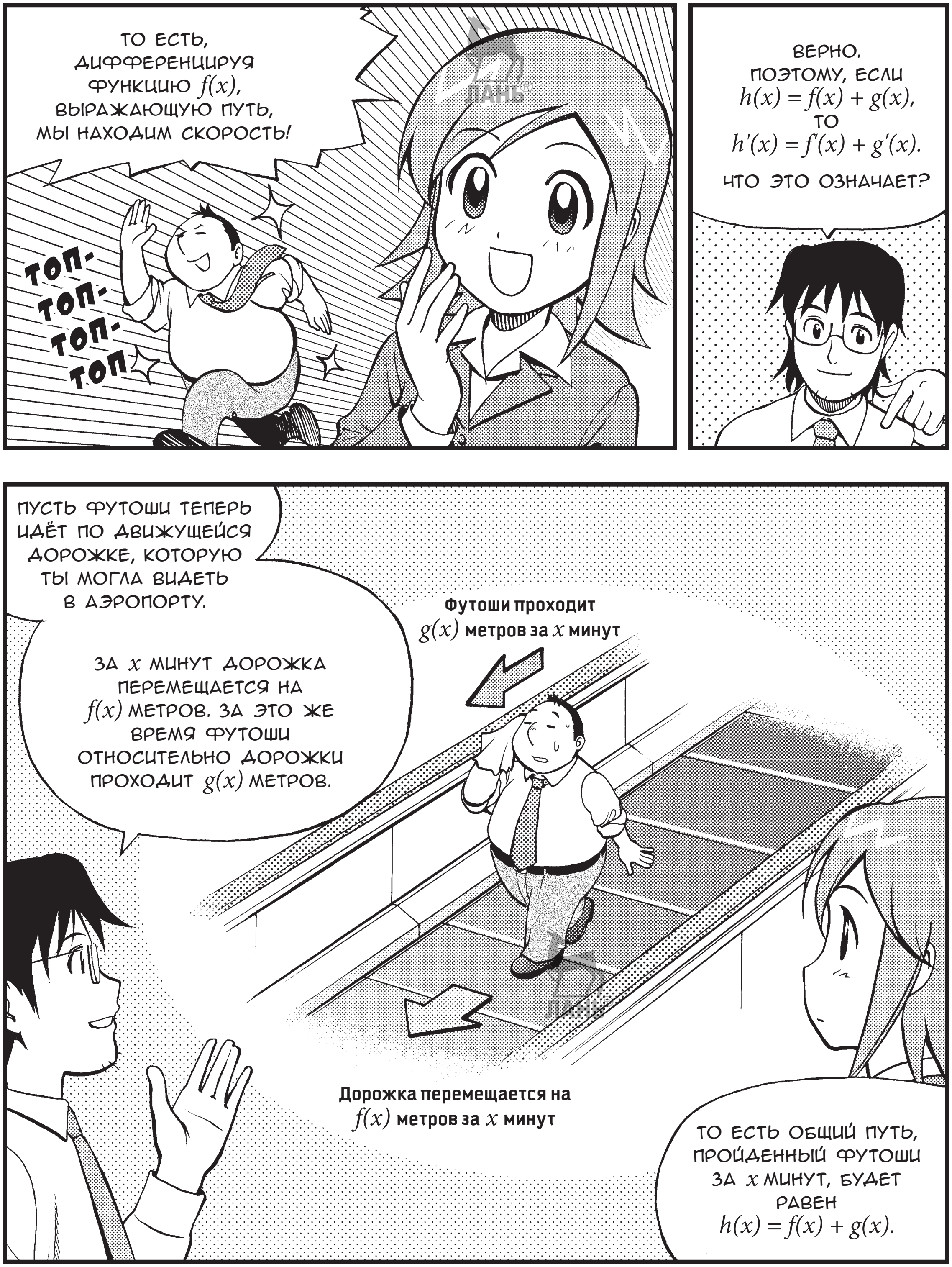

НУ, ТЫ ЗНАЕШЬ, ЧТО ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТОРГОВАЯ КОМИССИЯ КОНТРОЛИРУЕТ КОМПАНИИ, ЧТОБЫ ОНИ НЕ ДЕЛАЛИ НИЧЕГО, ЧТО ПРЕПЯТСТВУЕТ СВОБОДНОЙ КОНКУРЕНЦИИ, ТАК ВЕДЬ?
КОНЕЧНО!
ЭТО ВРЯД ЛИ.
КОМПАНИИ И МАГАЗИНЫ ВСЕГДА СТАРАЮТСЯ СНАБЖАТЬ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ХОРОШИМ ТОВАРОМ ПО НИЗКИМ ЦЕНАМ
РЕЗУЛЬТАТОМ ИХ КОНКУРЕНЦИИ ЯВЛЯЮТСЯ БОЛЕЕ ВЫСОКОЕ КАЧЕСТВО И БОЛЕЕ НИЗКИЕ ЦЕНЫ.
НО ЕСЛИ НЕКОТОРЫЕ КОМПАНИИ ВСТУПАЮТ В СГОВОР ДРУГ С ДРУГОМ, ИЛИ ЧТО-ТО ЕЩЁ ЗАТРУДНЯЕТ КОНКУРЕНЦИЮ, ПОТРЕБИТЕЛИ ТЕРПЯТ БОЛЬШИЕ УБЫТКИ. ЦЕЛЬ ФЕДЕРАЛЬНОЙ ТОРГОВОЙ КОМИССИИ — НЕ ДОПУСКАТЬ ПОДОБНЫЕ ДЕЙСТВИЯ.
Я ПОНИМАЮ.
А СЕЙЧАС Я РАССКАЖУ ТЕБЕ О ДВИЖУЩЕЙСЯ ДОРОЖКЕ, ЧТОБЫ ОБЪЯСНИТЬ, ПОЧЕМУ МЫ ДОЛЖНЫ РАССМАТРИВАТЬ АНТИМОНОПОЛЬНЫЙ ЗАКОН В ТЕРМИНАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.
ЧТО, ОПЯТЬ ВЫ ЗА СВОЁ?
МЫ ОБСУДИМ ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ. ТЕБЕ ПОЛЕЗНО ЗАПОМНИТЬ ЕГО.

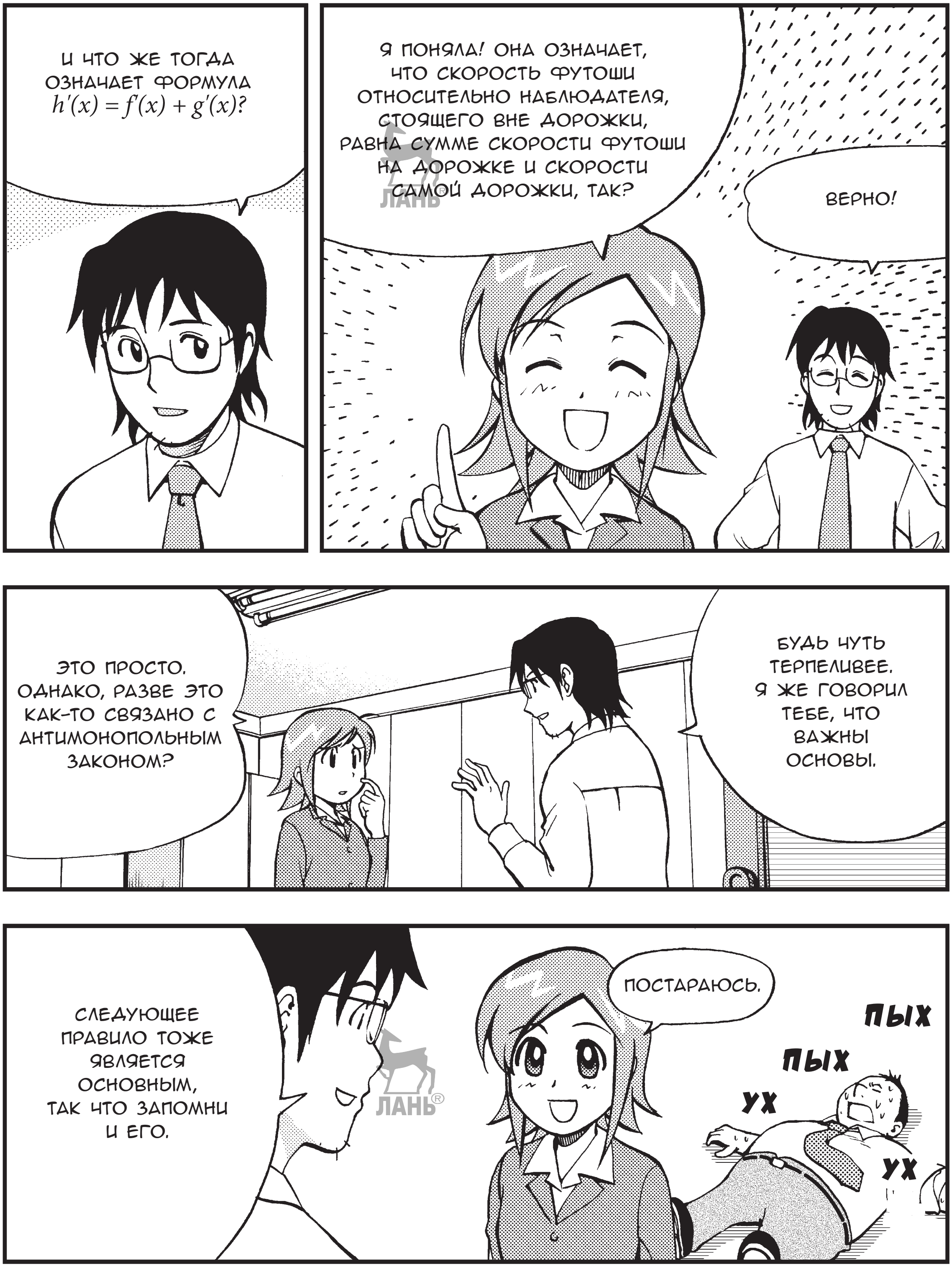
2.1. Производная суммы функций




И получим, что...
$h(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) + g'(a)(x-a) + g(a)$ **[4]**
Если мы перегруппируем члены уравнения (4), то из уравнения (3) следует, что коэффициент при $(x - a)$ и есть k.
Дайте посмотреть.
$(x-a)$
$h(x) \approx (f'(a) + g'(a))\times$ $\times(x - a) + f(a) + g(a)$. С другой стороны, $h(x) = k(x - a)$, следовательно $k = f'(a) + g'(a)$!
Верно!
И дифференциальный коэффициент равен производной, так что $k = h'(a) =$ $= f'(a) + g'(a)$.
А сейчас давай я объясню, что происходит при ходьбе по движущейся дорожке.
Пусть Футоши идёт по тротуару.
А без Футоши нельзя? Ладно, я постараюсь сосредоточиться.


Пусть путь, который он прошёл за x минут от начальной точки 0 — это $f(x)$ метров.
Через a минут он будет в точке A.
f(a) A
Пусть через x минут он будет в точке P.
f(x)
f(a) A P
Это значит, что он дошёл от A до P за $(x - a)$ минут.
Верно. Но что из этого следует?
Не торопись. Пусть это время движения $(x - a)$ бесконечно уменьшается.
$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$
Перепишем верхнее выражение:
$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$
Сэки-сан, левая часть этого уравнения — это пройденный путь, делённый на время, то есть это скорость?
Точно! Значит, $f'(a)$ — это скорость Футоши, когда он проходит точку A.


ТО ЕСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЯ ФУНКЦИЮ $f(x)$, ВЫРАЖАЮЩУЮ ПУТЬ, МЫ НАХОДИМ СКОРОСТЬ!
ТОП-ТОП-ТОП-ТОП
ВЕРНО. ПОЭТОМУ, ЕСЛИ $h(x) = f(x) + g(x)$, ТО $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
ЧТО ЭТО ОЗНАЧАЕТ?
ПУСТЬ ФУТОШИ ТЕПЕРЬ ИДЁТ ПО ДВИЖУЩЕЙСЯ ДОРОЖКЕ, КОТОРУЮ ТЫ МОГЛА ВИДЕТЬ В АЭРОПОРТУ.
ЗА x МИНУТ ДОРОЖКА ПЕРЕМЕЩАЕТСЯ НА $f(x)$ МЕТРОВ. ЗА ЭТО ЖЕ ВРЕМЯ ФУТОШИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОРОЖКИ ПРОХОДИТ $g(x)$ МЕТРОВ.
Футоши проходит $g(x)$ метров за x минут
Дорожка перемещается на $f(x)$ метров за x минут
ТО ЕСТЬ ОБЩИЙ ПУТЬ, ПРОЙДЕННЫЙ ФУТОШИ ЗА x МИНУТ, БУДЕТ РАВЕН $h(x) = f(x) + g(x)$.


И ЧТО ЖЕ ТОГДА ОЗНАЧАЕТ ФОРМУЛА $h'(x) = f'(x) + g'(x)$?
Я ПОНЯЛА! ОНА ОЗНАЧАЕТ, ЧТО СКОРОСТЬ ФУТОШИ ОТНОСИТЕЛЬНО НАБЛЮДАТЕЛЯ, СТОЯЩЕГО ВНЕ ДОРОЖКИ, РАВНА СУММЕ СКОРОСТИ ФУТОШИ НА ДОРОЖКЕ И СКОРОСТИ САМОЙ ДОРОЖКИ, ТАК?
ВЕРНО!
ЭТО ПРОСТО. ОДНАКО, РАЗВЕ ЭТО КАК-ТО СВЯЗАНО С АНТИМОНОПОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ?
БУДЬ ЧУТЬ ТЕРПЕЛИВЕЕ. Я ЖЕ ГОВОРИЛ ТЕБЕ, ЧТО ВАЖНЫ ОСНОВЫ.
СЛЕДУЮЩЕЕ ПРАВИЛО ТОЖЕ ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВНЫМ, ТАК ЧТО ЗАПОМНИ И ЕГО.
ПОСТАРАЮСЬ.
ПЫХ
ПЫХ
УХ
УХ

2.2. ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Производная произведения функций

Если $h(x) = f(x)\, g(x)$,
то $h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ (2.2)

Производная произведения функций равна сумме произведений, каждое из которых содержит функцию и производную другой функции.

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$g(x) \approx g'(a)(x - a) + g(a)$$

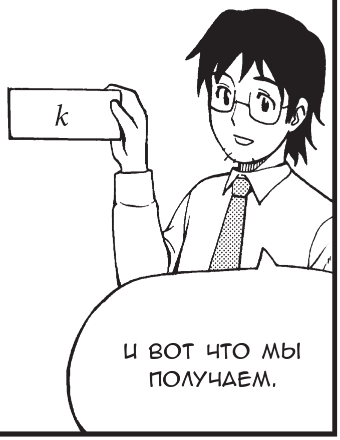
$$h(x) = f(x)g(x) \approx k(x - a) + l$$

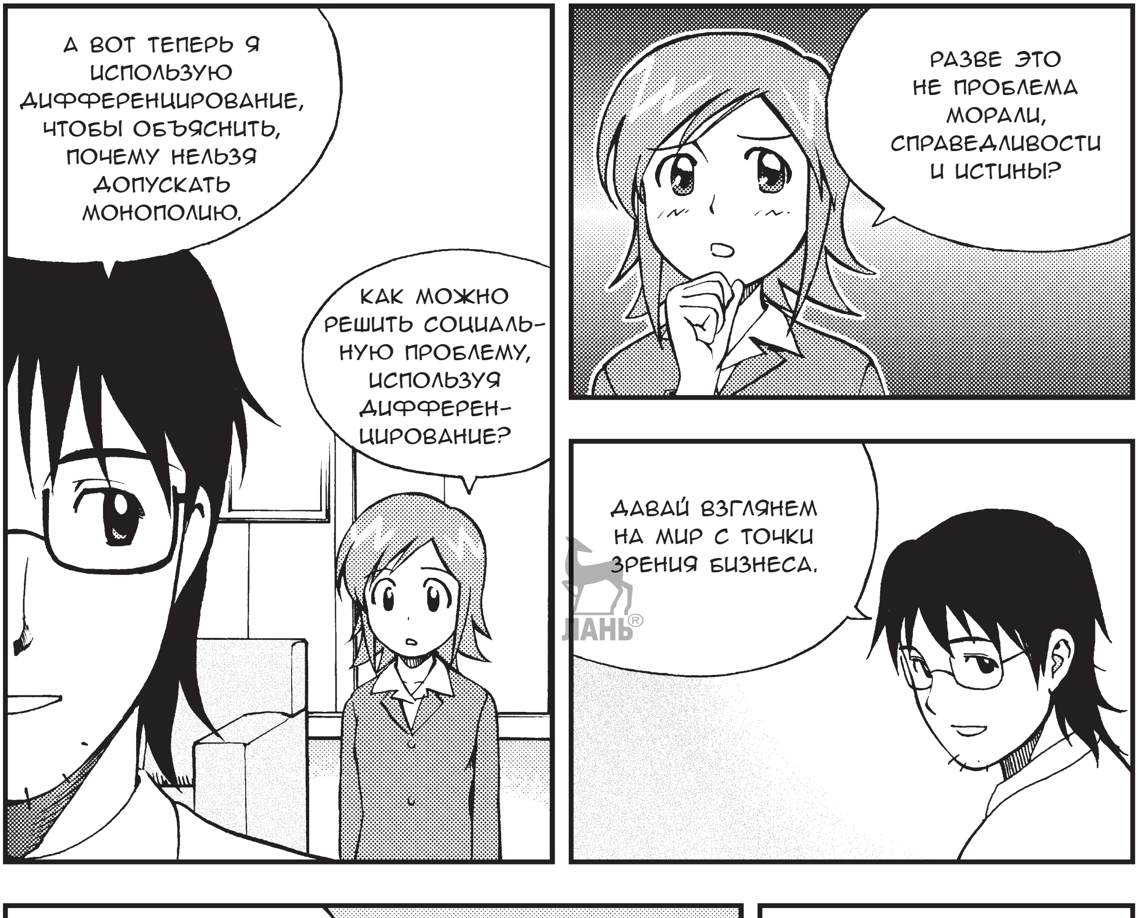
$$h(x) \approx \{f'(a)(x - a) + f(a)\}\{g'(a)(x - a) + g(a)\}$$

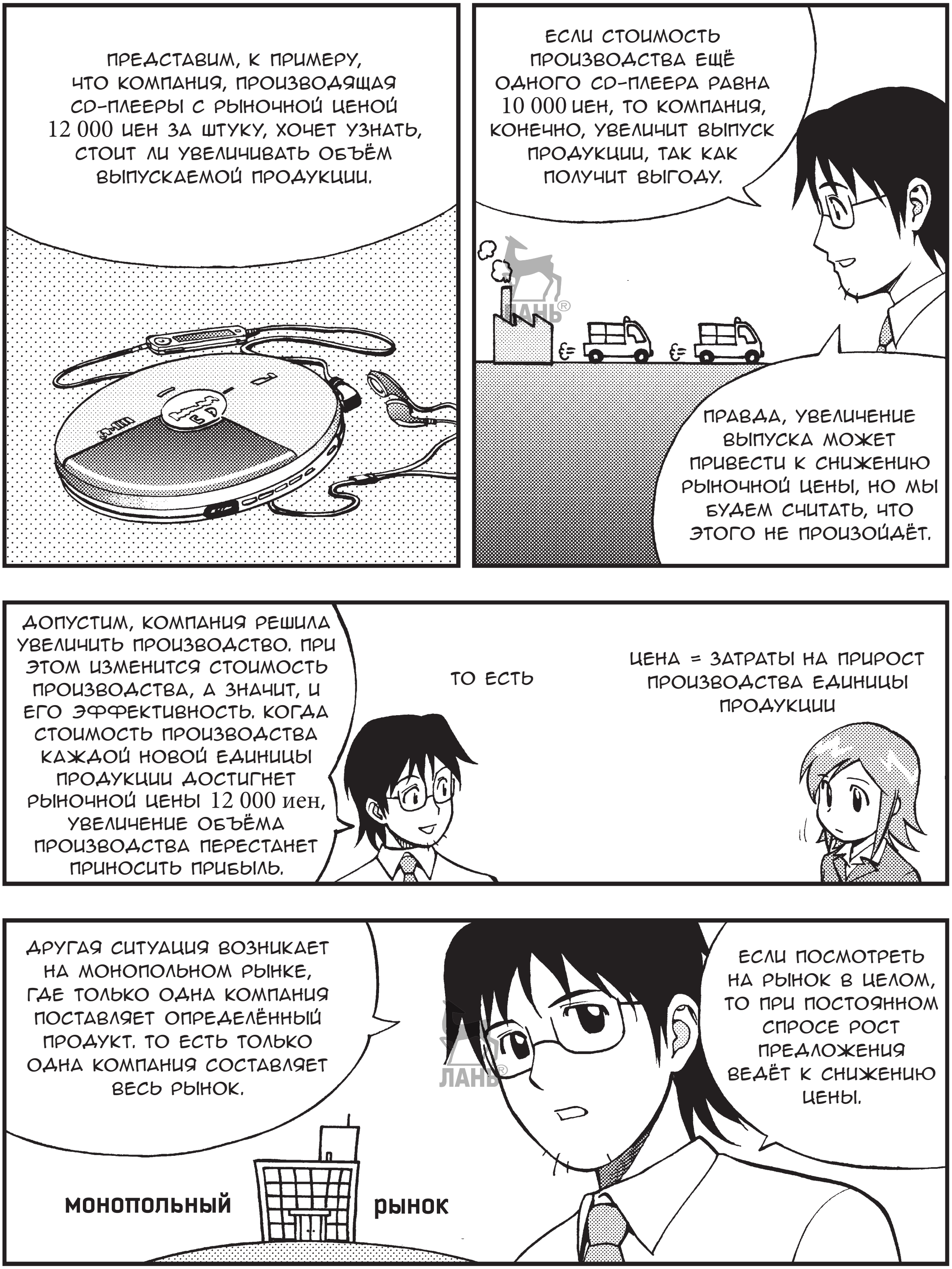
$(x - a)$ — ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ. ЗНАЧИТ, $(x - a)^2$ ОЧЕНЬ ОЧЕНЬ МАЛО. ТАК КАК НАШЕ РАВЕНСТВО ПРИБЛИЖЁННОЕ, ТО ЭТИМ ЧЛЕНОМ МОЖНО ПРЕНЕБРЕЧЬ.

$$\{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\}(x - a) \approx k(x - a)$$

$$k = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$




А вот теперь я использую дифференцирование, чтобы объяснить, почему нельзя допускать монополию.
Как можно решить социальную проблему, используя дифференцирование?
Разве это не проблема морали, справедливости и истины?
Давай взглянем на мир с точки зрения бизнеса.
Рынок, в котором разные компании производят товары одинакового назначения, называется "рынком свободной конкуренции".
Рынок свободной конкуренции
Можешь привести пример?
Может... видеопрокатные магазины?
Верно! В условиях свободной конкуренции цена на товар определяется рынком, и компании производят и поставляют товары до тех пор, пока это приносит им выгоду.


Представим, к примеру, что компания, производящая CD-плееры с рыночной ценой 12 000 иен за штуку, хочет узнать, стоит ли увеличивать объём выпускаемой продукции.
Если стоимость производства ещё одного CD-плеера равна 10 000 иен, то компания, конечно, увеличит выпуск продукции, так как получит выгоду.
Правда, увеличение выпуска может привести к снижению рыночной цены, но мы будем считать, что этого не произойдёт.
Допустим, компания решила увеличить производство. При этом изменится стоимость производства, а значит, и его эффективность. Когда стоимость производства каждой новой единицы продукции достигнет рыночной цены 12 000 иен, увеличение объёма производства перестанет приносить прибыль.
То есть
Цена = затраты на прирост производства единицы продукции
Другая ситуация возникает на монопольном рынке, где только одна компания поставляет определённый продукт. То есть только одна компания составляет весь рынок.
Если посмотреть на рынок в целом, то при постоянном спросе рост предложения ведёт к снижению цены.
Монопольный рынок


Допустим, мы знаем функцию $p(x)$, описывающую зависимость цены, по которой компания может продавать товар, от общего количества товара x.
Кстати, производная $p'(x)$, которая выражает изменение цены, отрицательна, так как цена единицы понижается, если x повышается.
Верно. Доход компании от реализации товара вычисляется по формуле...
Скрип
Доход = $h(x)$ = цена × количество = $p(x) \times x$
С другой стороны, мы знаем, что любую функцию в окрестности точки a можно записать в виде:
$h(x) \approx h'(a)\,(x - a) + h(a)$, тогда
$\underbrace{h(x) - h(a)}_{\text{Изменение дохода}} \approx h'(x)\,\underbrace{(x - a)}_{\text{Изменение объёма производства}}$ (2.3)
Из формулы видно, что $h'(a)$ равна изменению дохода при увеличении объёма производства на единицу продукции.
Я поняла! Чтобы решить, увеличивать ли объём производства, компании нужно вычислить $h'(a)$ и сопоставить результат со стоимостью производства единицы товара.
Ты права. Так как $h(x) = p(x) \times x$, то надо найти производную произведения функций. Помнишь формулу?
Дайте подумать...


МЫ ПОЛУЧИМ
$h'(a) = p'(a)a + p(a) \times 1$
БАМ
ВЕРНО. УВЕЛИЧИВАТЬ ВЫПУСК МОЖНО ДО ТЕХ ПОР, ПОКА $h'(a)$ НЕ СТАНЕТ МЕНЬШЕ, ЧЕМ УВЕЛИЧЕНИЕ СТОИМОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ДОБАВОЧНОЙ ЕДИНИЦЫ.
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, РОСТ ВЫПУСКА НАДО ПРЕКРАЩАТЬ, КОГДА $p'(a) \times a + p(a)$ СРАВНЯЕТСЯ СО СТОИМОСТЬЮ ПРОИЗВОДСТВА ЕДИНИЦЫ ТОВАРА. ТАК КАК ПЕРВЫЙ ЧЛЕН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ, ТО РЫНОЧНАЯ ЦЕНА $p(a)$ БУДЕТ БОЛЬШЕ СЕБЕСТОИМОСТИ.
НО МОНОПОЛЬНАЯ КОМПАНИЯ ПРЕКРАЩАЕТ ПРОИЗВОДСТВО, КОГДА ЦЕНА ЗНАЧИТЕЛЬНО БОЛЬШЕ СТОИМОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ДОБАВОЧНОЙ ПРОДУКЦИИ.
ЭТО ЧРЕЗМЕРНОЕ ФИКСИРОВАНИЕ ЦЕН, НЕ ТАК ЛИ?
ОН И ВПРЯМЬ УМЁН.
ТЫ ПРАВ, НО ТЫ ДОЛЖЕН ПОСМОТРЕТЬ ВНИМАТЕЛЬНЕЕ. КОМПАНИИ ДЕЛАЮТ ЭТО НЕ ЗЛОНАМЕРЕННО, А ИСХОДЯ ИЗ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ.
ВЗГЛЯНИ НА ВЫРАЖЕНИЕ ЕЩЁ РАЗ.

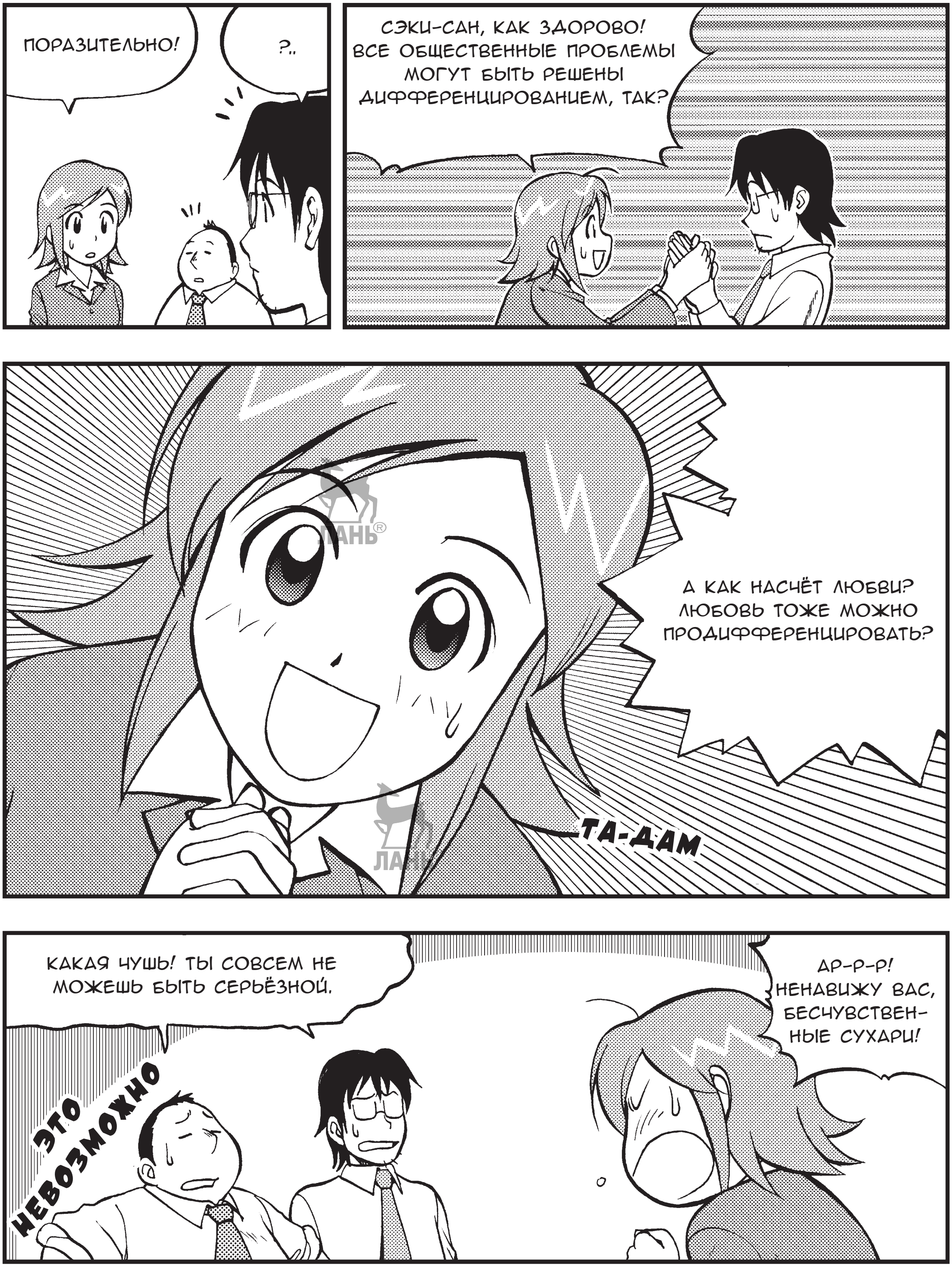
Для того чтобы объём продаж увеличился на единицу, объём производства должен вырасти чуть больше:

$$h'(a) = p'(a)a + p(a),$$

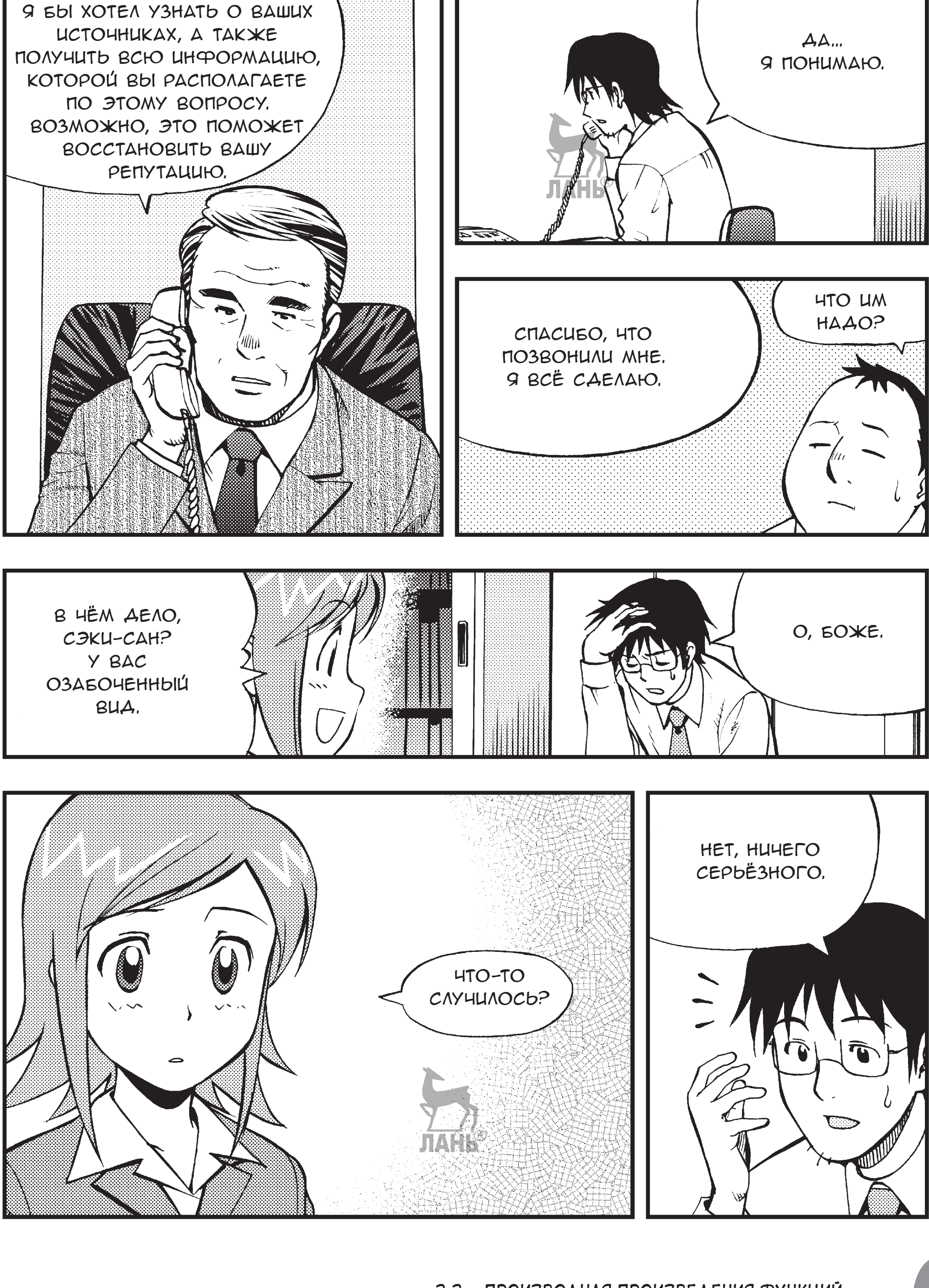
где

$p(a)$ — увеличение дохода от продажи a-й единицы;

$p'(a)a$ = Скорость снижения цены × Количество продукции = = Общий убыток из-за снижения цены.


ПОРАЗИТЕЛЬНО!
?..
СЭКИ-САН, КАК ЗДОРОВО! ВСЕ ОБЩЕСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОГУТ БЫТЬ РЕШЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ, ТАК?
А КАК НАСЧЁТ ЛЮБВИ? ЛЮБОВЬ ТОЖЕ МОЖНО ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ?
ТА-ДАМ
КАКАЯ ЧУШЬ! ТЫ СОВСЕМ НЕ МОЖЕШЬ БЫТЬ СЕРЬЁЗНОЙ.
ЭТО НЕВОЗМОЖНО
АР-Р-Р! НЕНАВИЖУ ВАС, БЕСЧУВСТВЕН-НЫЕ СУХАРИ!


ТРУ... ТРУ...
ЦОК
АСАГАКЭ ТАЙМС, ОТДЕЛЕНИЕ САНДА-ЧО НА СВЯЗИ.
О, ЗДРАВСТВУЙТЕ, Ш...ШЕФ!
Асагакэ Таймс
У МЕНЯ ЕСТЬ НЕСКОЛЬКО ВОПРОСОВ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ, КОТОРУЮ ВЫ НАПИСАЛИ.
ДА, Я СЛУШАЮ...


Я БЫ ХОТЕЛ УЗНАТЬ О ВАШИХ ИСТОЧНИКАХ, А ТАКЖЕ ПОЛУЧИТЬ ВСЮ ИНФОРМАЦИЮ, КОТОРОЙ ВЫ РАСПОЛАГАЕТЕ ПО ЭТОМУ ВОПРОСУ. ВОЗМОЖНО, ЭТО ПОМОЖЕТ ВОССТАНОВИТЬ ВАШУ РЕПУТАЦИЮ.
ДА... Я ПОНИМАЮ.
СПАСИБО, ЧТО ПОЗВОНИЛИ МНЕ. Я ВСЁ СДЕЛАЮ.
ЧТО ИМ НАДО?
В ЧЁМ ДЕЛО, СЭКИ-САН? У ВАС ОЗАБОЧЕННЫЙ ВИД.
О, БОЖЕ.
ЧТО-ТО СЛУЧИЛОСЬ?
НЕТ, НИЧЕГО СЕРЬЁЗНОГО.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Сначала покажем, что если $h(x) = x^n$, то $h'(x) = nx^{n-1}$.
Для этого используем несколько раз правило дифференцирования произведения.
Для $h(x) = x^2$: так как $h(x) = x \times x$, то $h'(x) = x \times 1 + 1 \times x = 2x$.
В этом случае формула верна.
Для $h(x) = x^3$: так как $h(x) = x^2 \times x$, то $h'(x) = (x^2)' \times x + x^2 \times (x)' = (2x)x + x^2 \times 1 = 3x^2$.
Формула верна и в этом случае.
Для $h(x) = x^4$: так как $h(x) = x^3 \times x$, то $h'(x) = (x^3)' \times x + x^3 \times (x)' = 3x^2 \times x + x^3 \times 1 = 4x^3$.
Опять формула справедлива. И так до бесконечности.

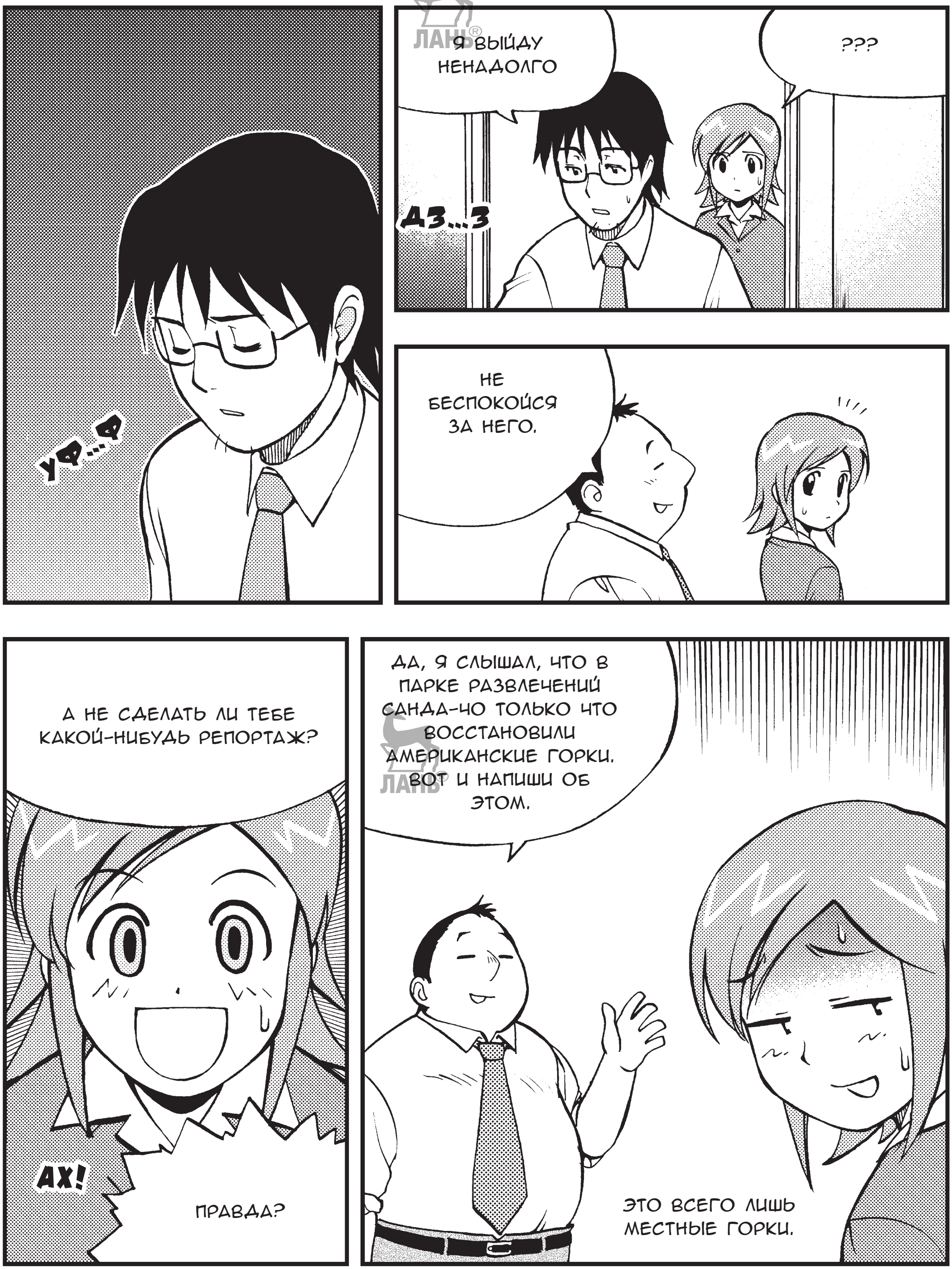
Любой многочлен можно продиффиринцировать, пользуясь тремя формулами!

Формулы для дифференцирования многочленов		
Сумма функций	$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$.	(2.4)
Умножение на константу	$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$.	(2.5)
Степенная функция	$\{x^n\}' = \mathrm{n}x^{n-1}$.	(2.6)

Проверим это в действии! Продифференцируем $h(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$:

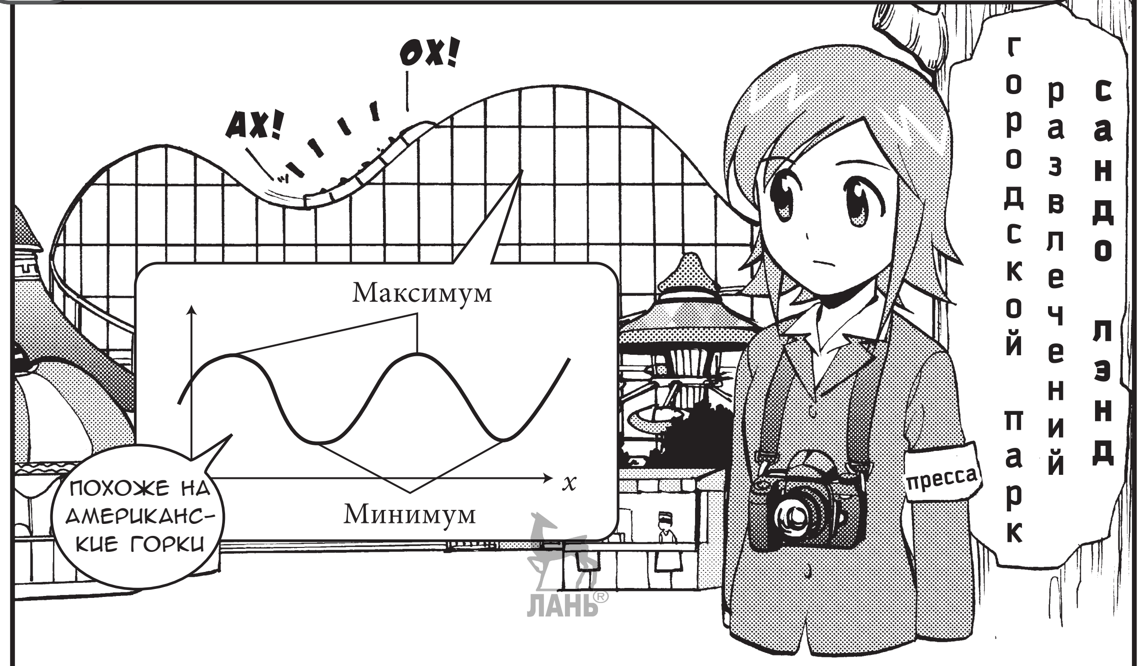
$$h'(x) = \{x^3 + 2x^2 + 5x + 3\}' = \underbrace{(x^3)' + (2x^2)' + (5x)' + (3)'}_{2.4} =$$

$$= \underbrace{(x^3)' + 2(x^2)' + 5(x)'}_{2.5} = \underbrace{3x^2 + 2(2x) + 5\times 1}_{2.6} = 3x^2 + 4x + 5.$$



Уф...ф
Я выйду ненадолго
???
Дз...з
Не беспокойся за него.
А не сделать ли тебе какой-нибудь репортаж?
Ах!
Правда?
Да, я слышал, что в парке развлечений Санда-чо только что восстановили американские горки. Вот и напиши об этом.
Это всего лишь местные горки.

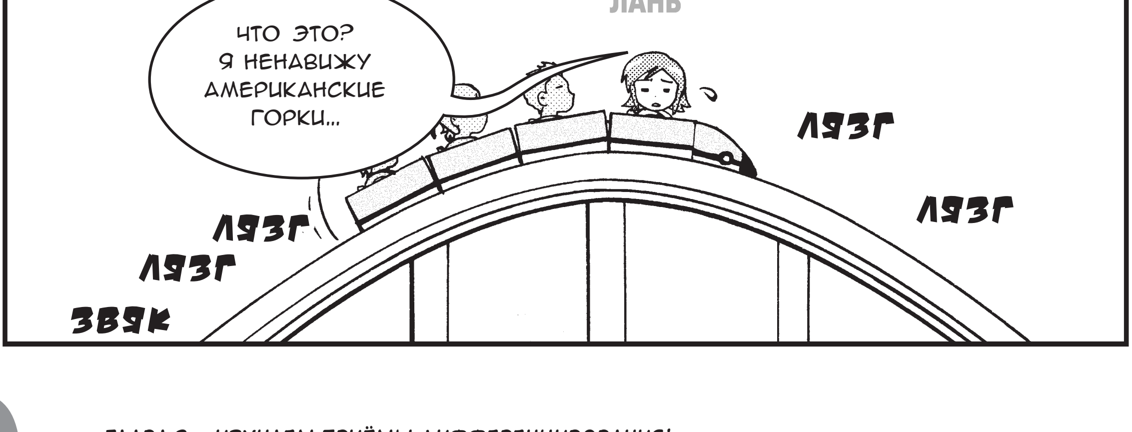
2.4. НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ



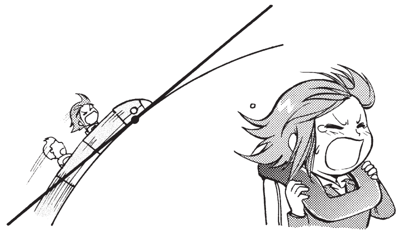
Максимумы и минимумы функции находятся там, где функция от убывания переходит к возрастанию или наоборот. Они важны для изучения свойств функции. Так как максимум или минимум часто является абсолютным максимумом или минимумом, то, соответственно, он является полезной точкой для нахождения оптимального решения.

Условия экстремумов
Фунция $y = f(x)$ имеет максимум или минимум в точке $x = a$, если $f'(a) = 0$.

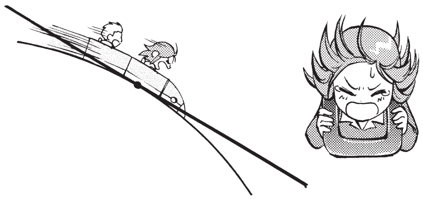
Это значит, что мы можем найти максимумы или минимумы, найдя значение a, удовлетворяющее условию $f'(a) = 0$. Эти значения ещё называют *экстремумами*.



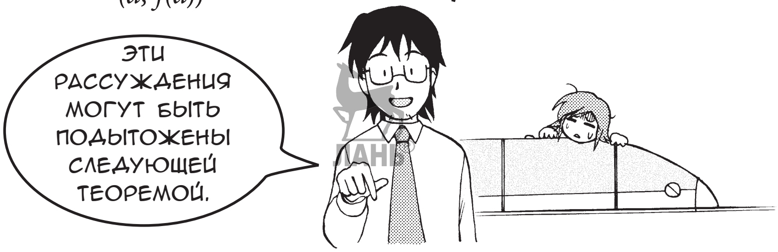
Пусть $f'(a) > 0$. Вблизи точки $x = a$ функцию $f(x)$ можно заменить приближённой линейной функцией $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$, которая будет возрастать в точке $x = a$ вследствие $f'(a) > 0$. Сама функция $f(x)$ будет иметь вид, близкий к изображённому на рисунке. Другими словами, на этом участке дороги горка идёт вверх.



Аналогично $y = f(x)$ убывает при $f'(a) < 0$, то есть горка идёт вниз, и это ни верхняя, ни нижняя точка.



Если $y = f(x)$ возрастает и убывает при $f'(a) > 0$ и $f'(a) < 0$, то наверху или внизу обязательно должна быть точка, где $f'(a) = 0$. И действительно, в точке $f'(a) = 0$ приближённая линейная функция будет равна константе $y = f'(a)(x - a) + f(a) =$ $= 0 \times (x - a) + f(a)$. Это формула горизонтальной касательной к кривой $f(x)$, что и должно наблюдаться в максимумах и минимумах.



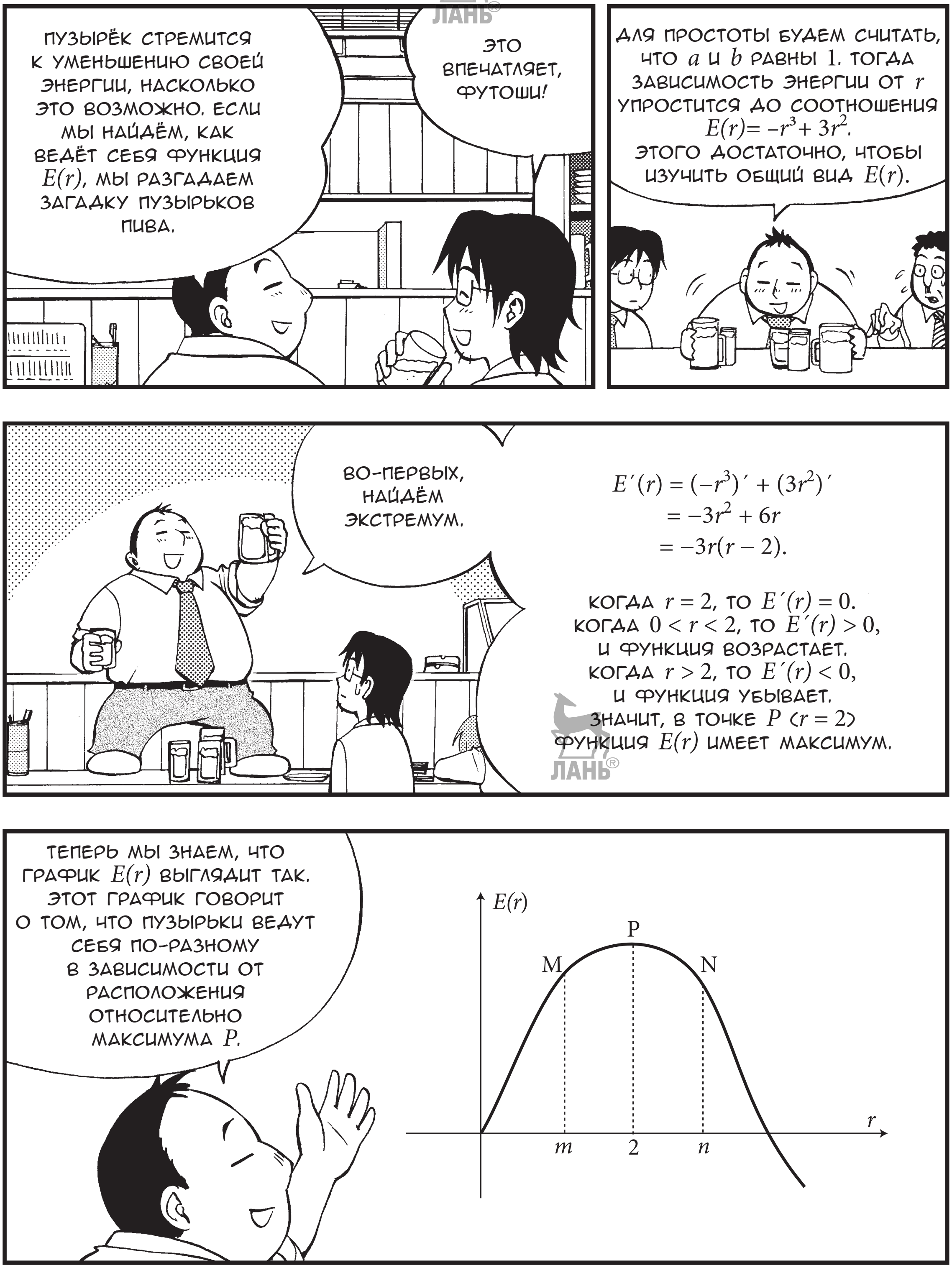
Условия возрастания и убывания

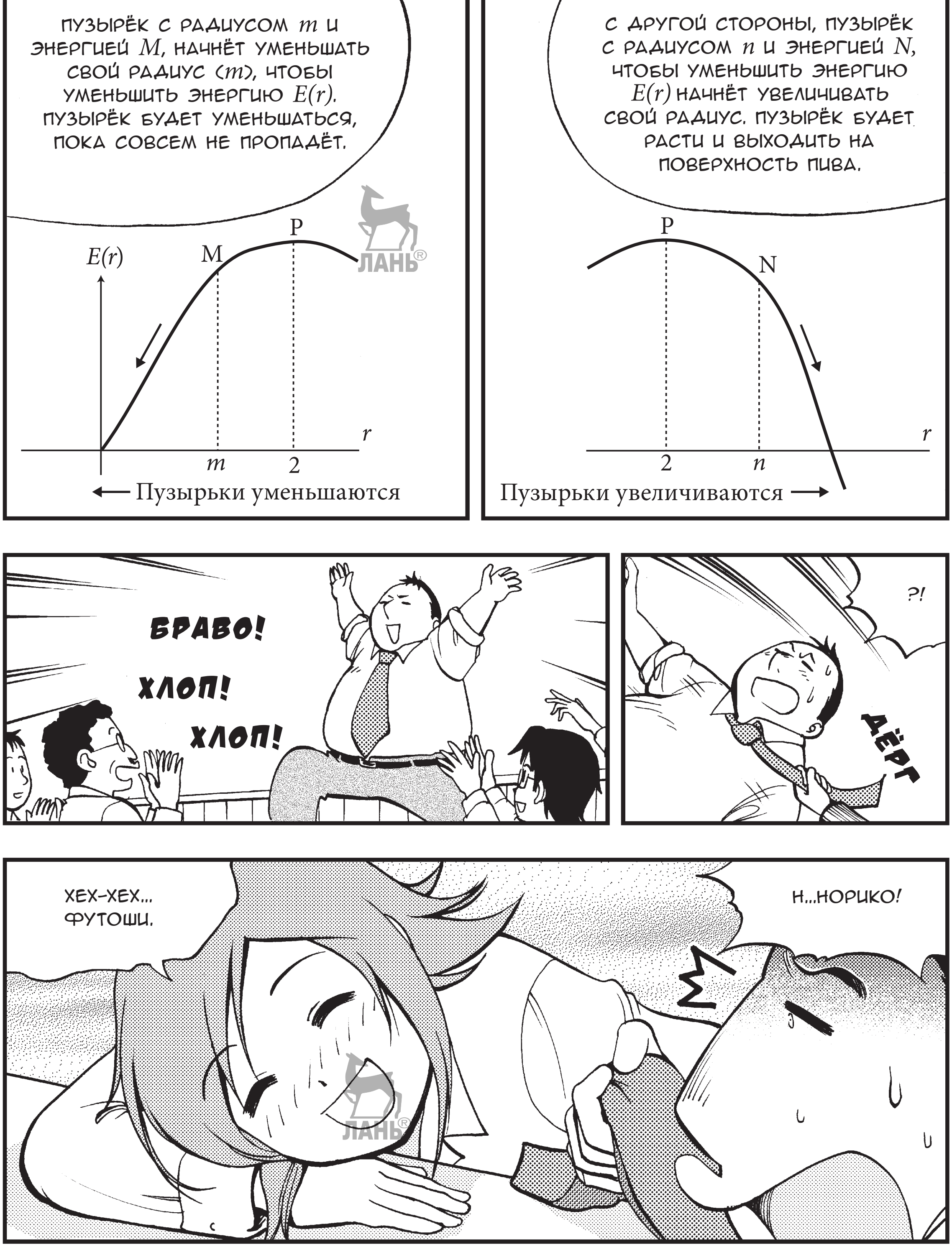
Если $f'(a) > 0$, то в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ возрастает.
Если $f'(a) < 0$, то в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ убывает.


питейная
«ДОМ САНДА»
питейная
питейная
дом санда
открыто
ЛА, ЛА, ЛА! Я ЛЮБЛЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ! С ЕГО ПОМОЩЬЮ Я МОГУ ОБЪЯСНИТЬ ВСЁ НА СВЕТЕ! ХИ-ХИ-ХИ...
О, ТАК ТЫ ВСЁ ПОНЯЛА?!
ВЫ ОПЯТЬ ЗА СВОЁ? ТОЛЬКО И ЗНАЕТЕ: ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ...
ТЫ ЖЕ ТОЛЬКО ЧТО СКАЗАЛА, ЧТО ЛЮБИШЬ...
МОЙ МОЗГ В ОТКЛЮЧКЕ.
ШЛЁП
СЭКИ-САН, ЕЩЁ ЧТО-НИБУДЬ ВЫПЬЕТЕ?
НЕТ, СПАСИБО. Я НЕ ХОЧУ СЛИШКОМ МНОГО ПИТЬ СЕГОДНЯ.
ЭТО ИЗ-ЗА ТОГО ЗВОНКА, ДА? ЧТО СКАЗАЛ ШЕФ?


НЕ БУДЕМ О ГРУСТНОМ!
ВОСХИТИТЕЛЬНО! РАЗЛИВНОЕ ПИВО — ЛУЧШЕЕ ПИВО!
О...ОХ
ВНИМАНИЕ, ВОПРОС! СУЩЕСТВУЮТ ДВА ВИДА ПУЗЫРЬКОВ ПИВА. СРАВНИТЕЛЬНО МАЛЕНЬКИЕ, КОТОРЫЕ СТАНОВЯТСЯ ЕЩЁ МЕНЬШЕ И В КОНЦЕ КОНЦОВ ИСЧЕЗАЮТ...
И СРАВНИТЕЛЬНО БОЛЬШИЕ, КОТОРЫЕ БЫСТРО УВЕЛИЧИВАЮТСЯ, ПОДНИМАЮТСЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ И ЛОПАЮТСЯ. А ТЕПЕРЬ ОБЪЯСНИТЕ, ПОЧЕМУ ЭТО ПРОИСХОДИТ!


ХА!
ЭТО СОВСЕМ НЕ ТРУДНО!
ТАК КАК ГАЗИРОВАННЫЕ НАПИТКИ, ТАКИЕ КАК ПИВО, ПЕРЕНАСЫЩЕНЫ УГЛЕКИСЛЫМ ГАЗОМ, ОН БОЛЕЕ СТАБИЛЕН БУДУЧИ В ГАЗООБРАЗНОМ СОСТОЯНИИ, ЧЕМ КОГДА ОН РАСТВОРЁН В ЖИДКОСТИ.
CO_2
CO_2
CO_2
ПОЭТОМУ ЭНЕРГИЯ ПУЗЫРЬКА УМЕНЬШАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ЕГО ОБЪЁМУ ($4/3\pi r^3$), ГДЕ r — РАДИУС ПУЗЫРЬКА.
Пузырек газа
Жидкость
Действие силы поверхностного натяжения
С ДРУГОЙ СТОРОНЫ, НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ПУЗЫРЬКОМ И ЖИДКОСТЬЮ ДЕЙСТВУЕТ ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ, СТРЕМЯСЬ УМЕНЬШИТЬ ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.
ПОЭТОМУ ЭНЕРГИЯ ПУЗЫРЬКА ИЗ-ЗА ЭТОЙ СИЛЫ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ, $4\pi r^2$.
УЧИТЫВАЯ ЭТИ ДВА ЭФФЕКТА, ВЫРАЗИМ ЭНЕРГИЮ $E(r)$ ПУЗЫРЬКА КАК ФУНКЦИЮ РАДИУСА r.
$E(r) = -a\overbrace{\underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}_{\text{Энергия, зависящая от объёма}}}^{\text{Объём пузырька}} + b\overbrace{\underbrace{(4\pi r^2)}_{\text{Энергия, зависящая от площади}}}^{\text{Площадь поверхности пузырька}}$
КАК ПОКАЗАНО ЗДЕСЬ.


Пузырёк стремится к уменьшению своей энергии, насколько это возможно. Если мы найдём, как ведёт себя функция $E(r)$, мы разгадаем загадку пузырьков пива.
Это впечатляет, Футоши!
Для простоты будем считать, что a и b равны 1. Тогда зависимость энергии от r упростится до соотношения $E(r) = -r^3 + 3r^2$. Этого достаточно, чтобы изучить общий вид $E(r)$.
Во-первых, найдём экстремум.
$E'(r) = (-r^3)' + (3r^2)' = -3r^2 + 6r = -3r(r - 2).$
Когда $r = 2$, то $E'(r) = 0$. Когда $0 < r < 2$, то $E'(r) > 0$, и функция возрастает. Когда $r > 2$, то $E'(r) < 0$, и функция убывает. Значит, в точке P $(r = 2)$ функция $E(r)$ имеет максимум.
Теперь мы знаем, что график $E(r)$ выглядит так. Этот график говорит о том, что пузырьки ведут себя по-разному в зависимости от расположения относительно максимума P.
$E(r)$
P
M
N
r
m
2
n


ПУЗЫРЁК С РАДИУСОМ m И ЭНЕРГИЕЙ M, НАЧНЁТ УМЕНЬШАТЬ СВОЙ РАДИУС (m), ЧТОБЫ УМЕНЬШИТЬ ЭНЕРГИЮ $E(r)$. ПУЗЫРЁК БУДЕТ УМЕНЬШАТЬСЯ, ПОКА СОВСЕМ НЕ ПРОПАДЁТ.
$E(r)$
M
P
r
m
2
← Пузырьки уменьшаются
С ДРУГОЙ СТОРОНЫ, ПУЗЫРЁК С РАДИУСОМ n И ЭНЕРГИЕЙ N, ЧТОБЫ УМЕНЬШИТЬ ЭНЕРГИЮ $E(r)$ НАЧНЁТ УВЕЛИЧИВАТЬ СВОЙ РАДИУС. ПУЗЫРЁК БУДЕТ РАСТИ И ВЫХОДИТЬ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПИВА.
P
N
r
2
n
Пузырьки увеличиваются →
БРАВО!
ХЛОП!
ХЛОП!
?!
ДЁРГ
ХЕХ-ХЕХ... ФУТОШИ.
Н...НОРИКО!


НЕ СМЕЙ ГОВОРИТЬ ПРИ МНЕ ПРО ГРАФИКИ, ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНЫЕ!
ОУ! ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОФИСА ТЫ ВЕДЁШЬ СЕБЯ СОВСЕМ ПО-ДРУГОМУ!
ЗАМОЛЧИ! САКЭ! ПРИНЕСИТЕ МНЕ САКЭ!
ШУХ
ШУХ
ИХ-Х...
КАЖЕТСЯ, ОНА ДОСТИГЛА СВОЕГО МАКСИМУМА.
ПОМОГИТЕ!

2.5. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Как говорилось выше, производная — это коэффициент при x в приближённой линейной функции, заменяющей функцию $f(x)$ в окрестности $x = a$.

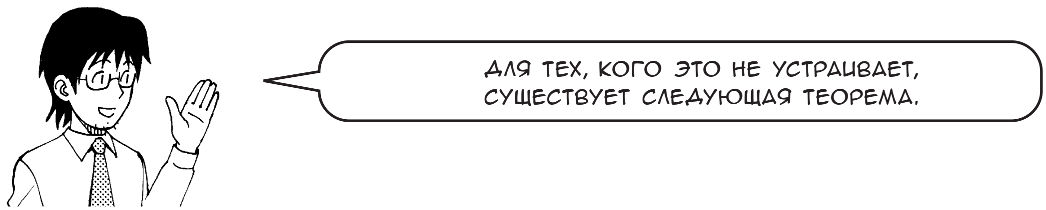
То есть

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \text{ (при } x\text{, стремящемся к } a\text{).}$$

Но линейная функция — это только «приближение» $f(x)$, и для b, даже близких к a, строго говоря

$$f(b) \neq f'(a)(b - a) + f(a). \qquad (1)$$

То есть это не точное равенство.



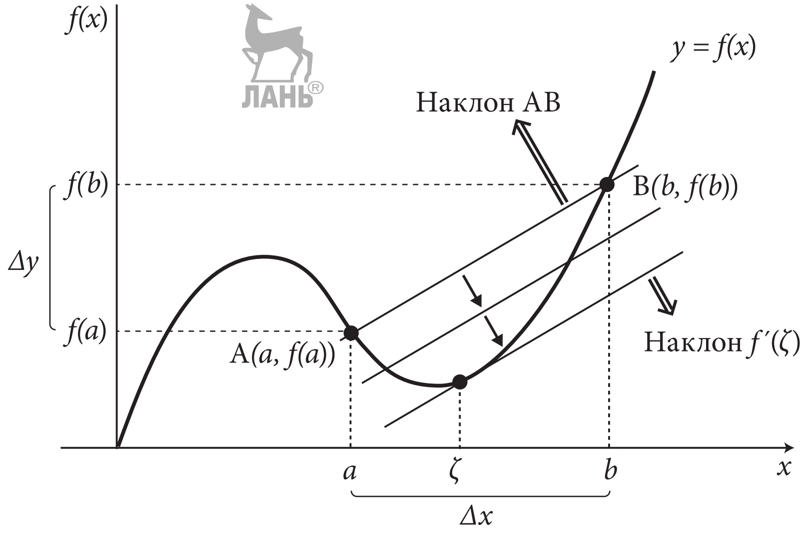
Теорема о среднем

Для любых a и b, таких, что $a < b$, найдётся ζ, удовлетворяющее условию $a < \zeta < b$, для которого будет выполняться равенство:

$$f(b) = f'(\zeta)(b - a) + f(a).$$

Другими словами, можно записать уравнение (1) со знаком равенства, используя не $f'(a)$, а $f'(\zeta)$ — значение производной в точке ζ, расположенной между a и b.

Нарисуем линию через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, чтобы получить отрезок AB.



Известно, что тангенс угла наклона отрезка AB равен $\Delta y/\Delta x$:

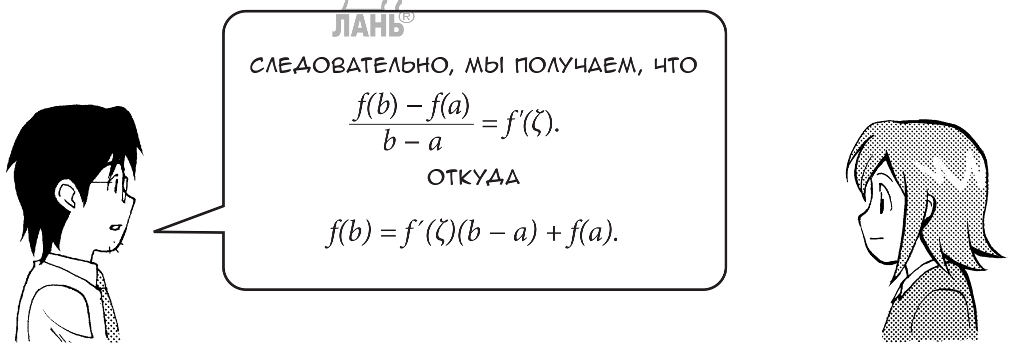
$$\text{Тангенс угла наклона отрезка AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Будем перемещать линию AB из начального положения, как показано на рисунке.

В итоге линия достигнет точки, за которой она уже не будет пересекаться с графиком функции. Обозначим эту точку $(\zeta, f(\zeta))$.

В этой точке линия является касательной, и значит её наклон — $f'(\zeta)$.

Так как линия перемещалась параллельно её начальному положению, то её наклон не отличается от наклона, вычисленного по формуле (2).



2.6. ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО ОТ ДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Найдём формулу для производной функции $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Сначала найдём производную функции $p(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, которая является обратной к $f(x)$.

После этого мы сможем применить правило для производной произведения двух функций к $h(x) = g(x)p(x)$.

Очевидно, что $f(x)p(x) = 1$.

Тогда

$$1 = f(x)p(x) \approx \{f'(a)(x-a) + f(a)\}\{p'(a)(x-a) + p(a)\}.$$

Так как левая и правая части равны, то равны и их производные:

$$0 = p(a)f'(a) + f(a)p'(a).$$

Таким образом, имеем: $p'(a) = -\dfrac{p(a)\,f'(a)}{f(a)}$.

Так как $p(a) = \dfrac{1}{f(a)}$, подставляя это в числитель вместо $p(a)$, получаем $p'(a) = \dfrac{-f'(a)}{f(a)^2}$.

Запишем функцию $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ в виде $h(x) = g(x) \times \dfrac{1}{f(x)} = g(x)p(x)$

и применим правило умножения и формулу, полученную выше.

$$h'(x) = g'(x)p(x) + g(x)p'(x) = g'(x) \times \frac{1}{f(x)} - g(x)\frac{f'(x)}{f(x)^2} = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}.$$

В итоге получаем следующую формулу:

Производная частного от деления функций

$$h'(x) = \frac{g'(x)\ f(x) - g(x)\ f'(x)}{f(x)^2}. \tag{2.7}$$

2.7. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Получим формулу производной от $h(x) = g(f(x))$.

В окрестности $x = a$

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a),$$

а в окрестности $y = b$

$$g(y) - g(b) \approx g'(b)(y - b).$$

Подставляем $b = f(a)$ и $y = f(x)$ в последнее выражение и получаем в окрестности $x = a$

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))(f(x) - f(a)).$$

Заменим $f(x) - f(a)$ выражением справа из первого уравнения

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))f'(a)(x - a).$$

Так как $g(f(x)) = h(x)$, то коэффициент при $(x - a)$ в этом выражении даёт

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Таким образом, имеем следующую формулу:

Производная сложной функции

$$h'(x) = g'(f(x))\ f'(x). \tag{2.8}$$

2.8. ПРОИЗВОДНАЯ ОРБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Используем полученную выше формулу, чтобы найти производную функции $x = g(y)$, обратной функции $y = f(x)$.

Так как $x = g(f(x))$ для любого x, дифференцирование обеих частей этого выражения даёт

$$1 = g'(f(x))\, f'(x).$$

Преобразуя это выражение, получаем следующую формулу:

Производная обратной функции

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2.9}$$

2.9. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Функция	Формула	Комментарий
Умножение на константу	$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$	Константа может быть вынесена за знак производной.
x^n (степень)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	Показатель степени функции становится коэффициентом при производной, показатель степени производной понижается на 1.
Сумма	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	Производная суммы — сумма производных.
Произведение	$(f(x)g(x))' =$ $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Производная произведения — сумма произведений функции на производную другой функции.
Частное	$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)^2}\right)' = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$	Знаменатель возводится в квадрат. Числитель — разность произведений функции на производную другой функции.
Сложные функции	$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$	Производная сложной функции — произведение производных внешней и внутренней функций.
Обратные функции	$g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$	Производная обратной функции обратна производной искомой функции.

2.10. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

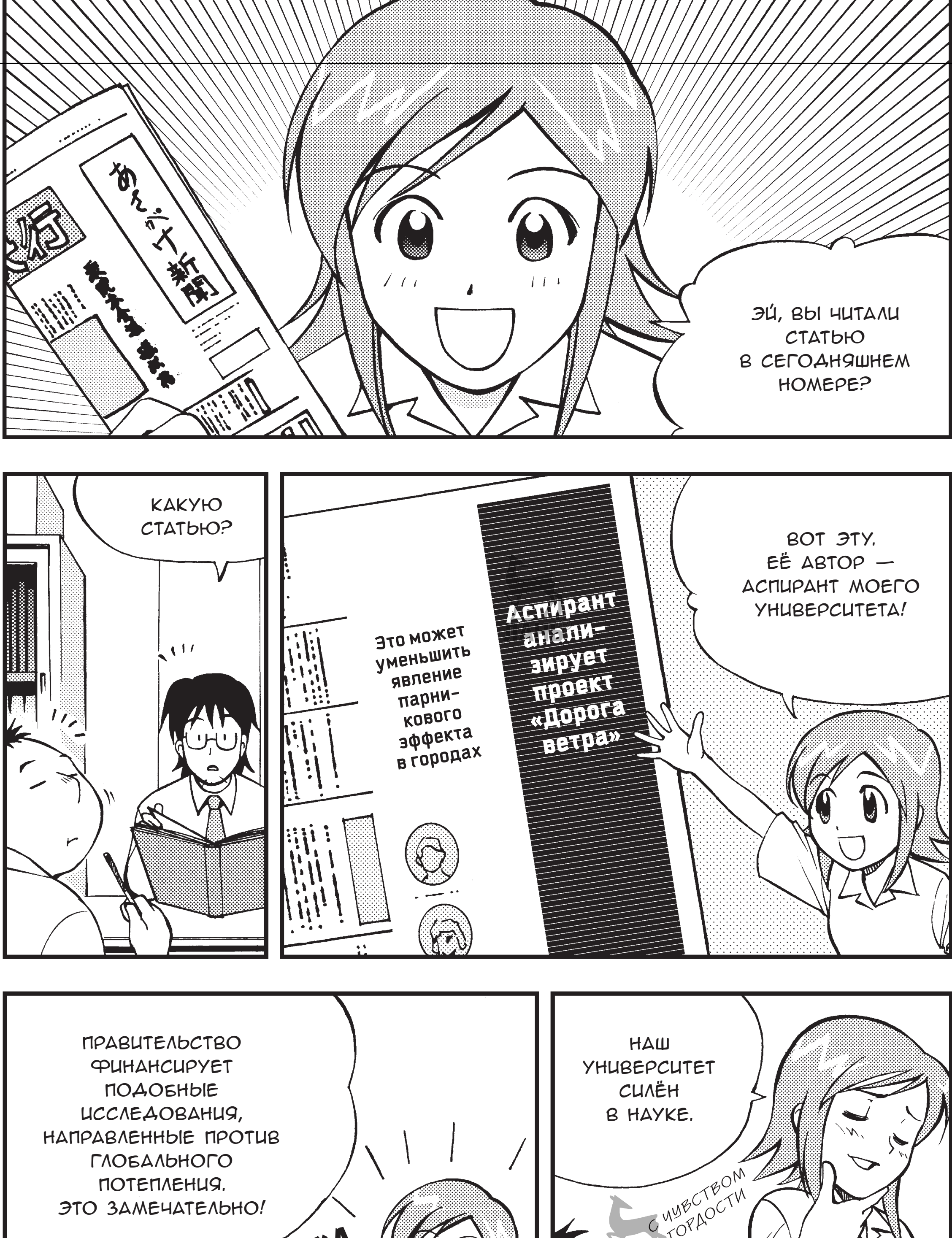
1. Для натурального n найти производную $f'(x)$ для

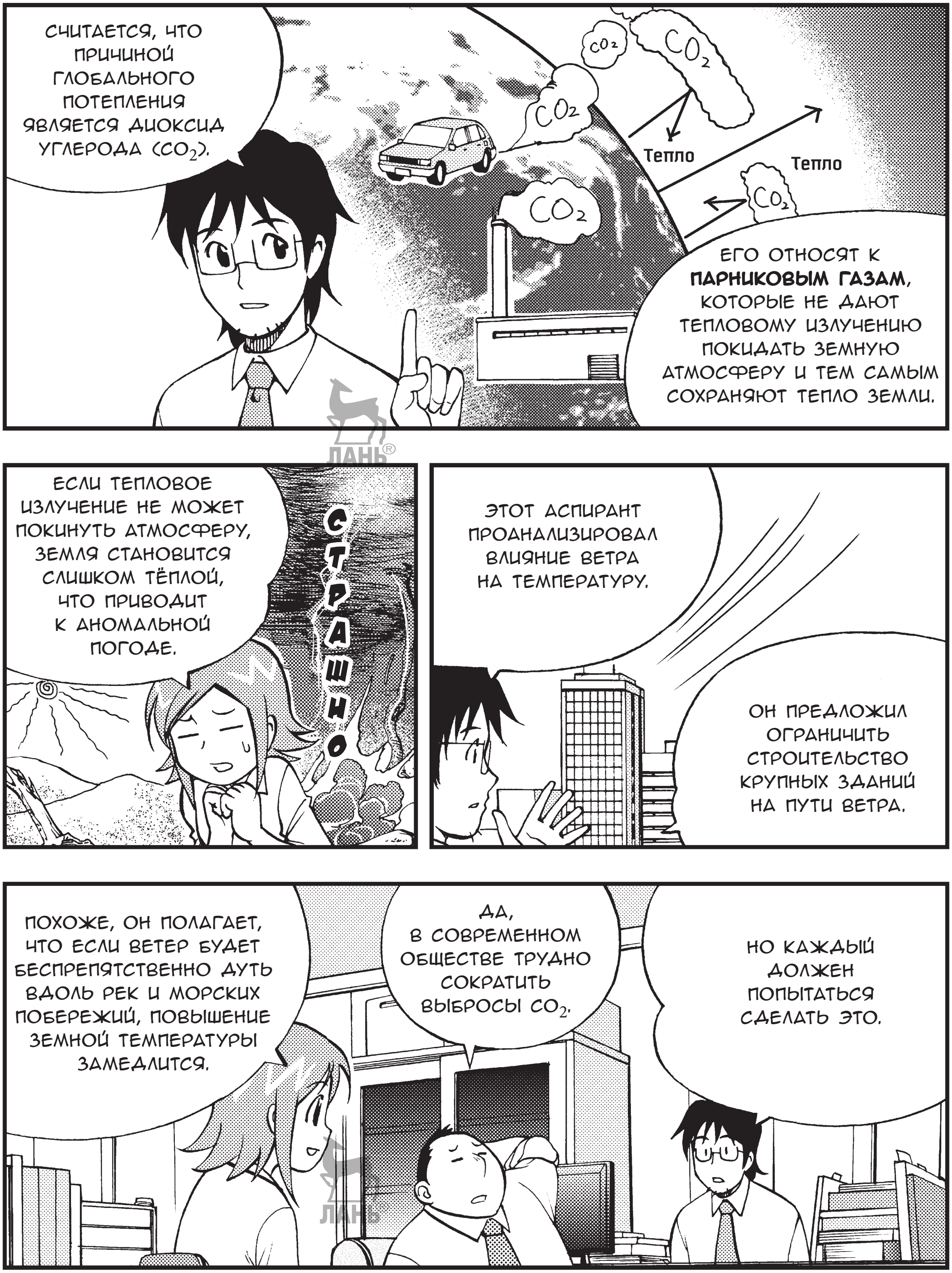
$$f'(x) = \frac{1}{x^n}.$$

2. Вычислить экстремумы $f(x) = x^3 - 12x$.
3. Найти производную $f'(x)$ для $f(x) = (1 - x)^3$.
4. Вычислить максимальное значение $g(x) = x^2(1 - x)^3$ в интервале $0 \le x \le 1$.

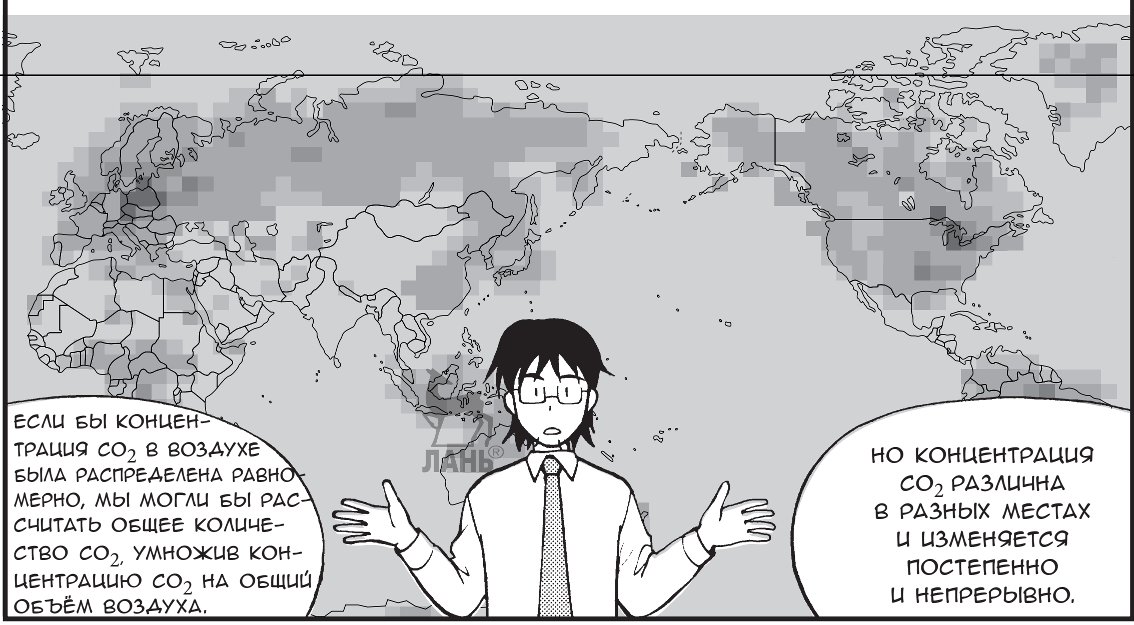
3

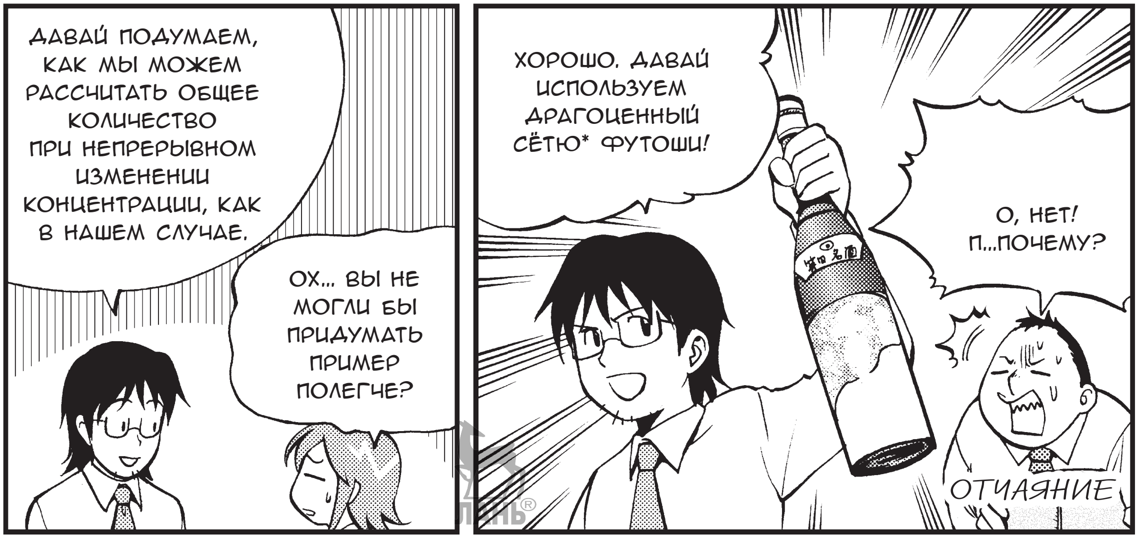
ИНТЕГРИРУЕМ ФУНКЦИИ!


ЭЙ, ВЫ ЧИТАЛИ СТАТЬЮ В СЕГОДНЯШНЕМ НОМЕРЕ?
КАКУЮ СТАТЬЮ?
ВОТ ЭТУ. ЕЁ АВТОР — АСПИРАНТ МОЕГО УНИВЕРСИТЕТА!
Аспирант анализирует проект «Дорога ветра»
Это может уменьшить явление парникового эффекта в городах
ПРАВИТЕЛЬСТВО ФИНАНСИРУЕТ ПОДОБНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, НАПРАВЛЕННЫЕ ПРОТИВ ГЛОБАЛЬНОГО ПОТЕПЛЕНИЯ. ЭТО ЗАМЕЧАТЕЛЬНО!
ХА ХА ХА
НАШ УНИВЕРСИТЕТ СИЛЁН В НАУКЕ.
С ЧУВСТВОМ ГОРДОСТИ
Мастер литературы


Считается, что причиной глобального потепления является диоксид углерода (CO_2).
CO_2
Тепло
Тепло
Его относят к **парниковым газам**, которые не дают тепловому излучению покидать земную атмосферу и тем самым сохраняют тепло Земли.
Если тепловое излучение не может покинуть атмосферу, Земля становится слишком тёплой, что приводит к аномальной погоде.
Страшно
Этот аспирант проанализировал влияние ветра на температуру.
Он предложил ограничить строительство крупных зданий на пути ветра.
Похоже, он полагает, что если ветер будет беспрепятственно дуть вдоль рек и морских побережий, повышение земной температуры замедлится.
Да, в современном обществе трудно сократить выбросы CO_2.
Но каждый должен попытаться сделать это.

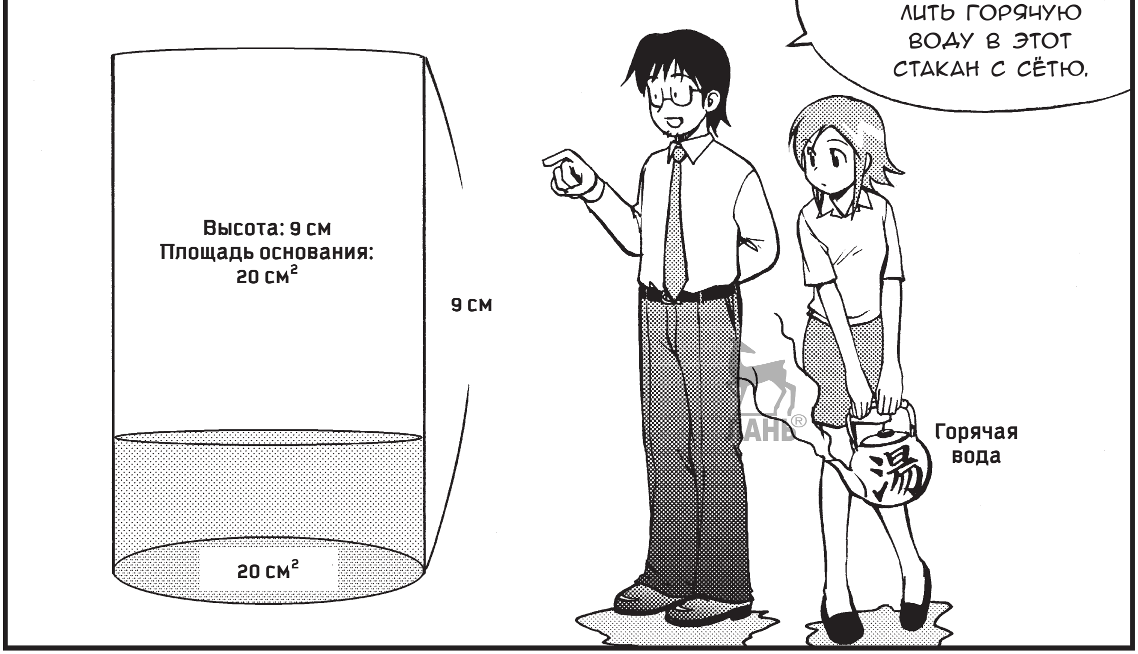

С ЧЕГО ВЫ ВЗЯЛИ, ЧТО КОЛИЧЕСТВО CO_2 В ВОЗДУХЕ ВООБЩЕ ВОЗРОСЛО?
О, НЕТ, ОПЯТЬ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ?
УХМЫЛКА
НЕТ, НА ЭТОТ РАЗ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. НО ЭТО ТОЖЕ ОПЕРАЦИЯ НАД ФУНКЦИЯМИ.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЗВОЛИТ НАМ НАЙТИ ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО CO_2 В ВОЗДУХЕ.
Интегрирование функций
ЕСЛИ МЫ УЗНАЕМ ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО CO_2 В ВОЗДУХЕ, ТО СМОЖЕМ РАССЧИТАТЬ СЛЕДУЮЩИЕ ВЕЩИ.
1. Влияние CO_2 на глобальное потепление.
2. Количество CO_2 в воздухе, обусловленное человеческим фактором, например выхлопные газы машин и отходы промышленности.
ХА
НО ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО КОЛИЧЕСТВА CO_2 — ТРУДНАЯ ЗАДАЧА.

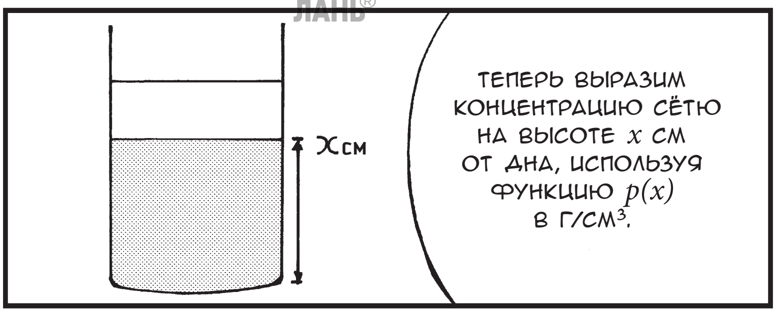


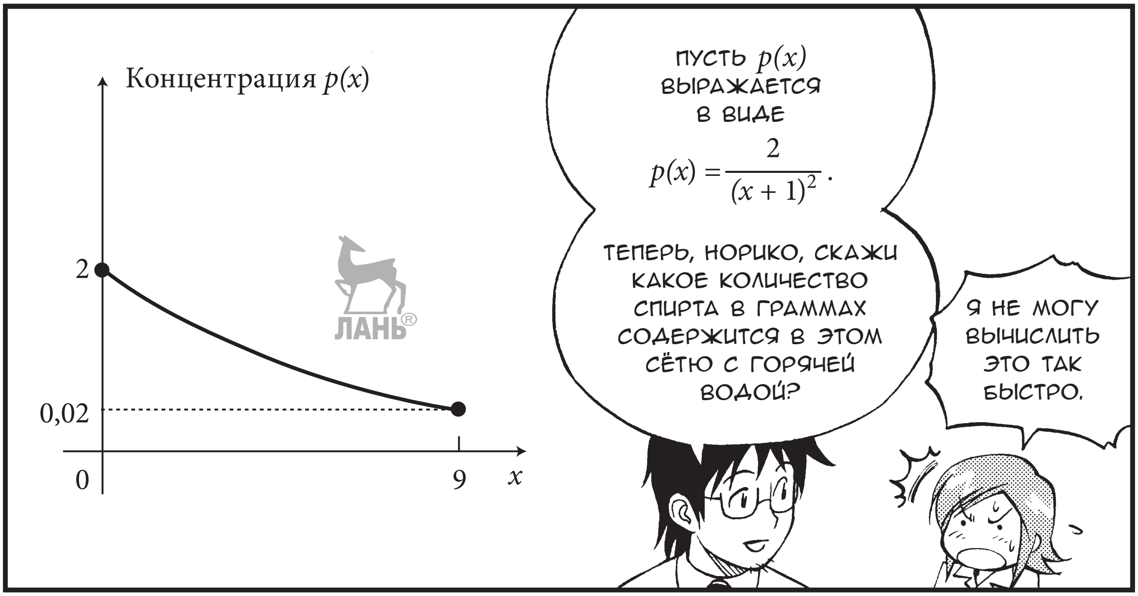


* Крепкий алкогольный напиток.

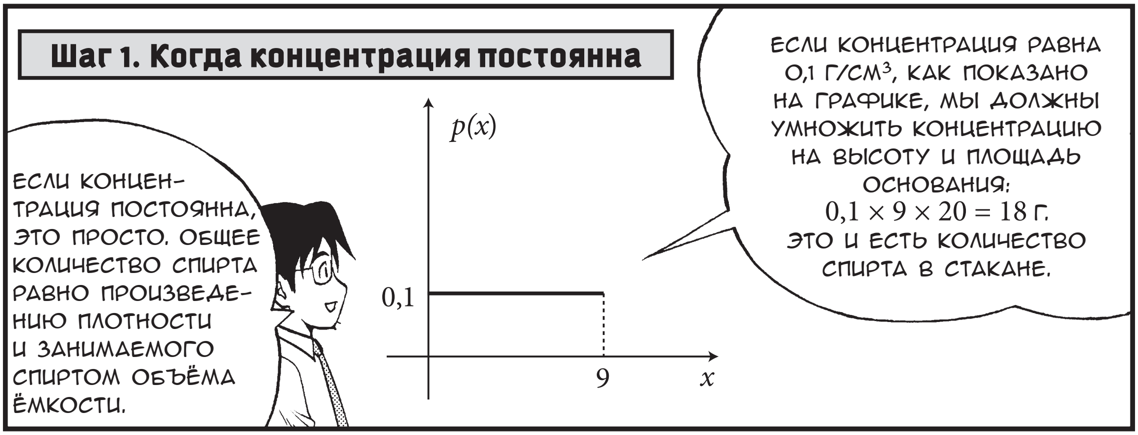
3.1. НАЙДЁМ КОНЦЕНТРАЦИЮ СПИРТА



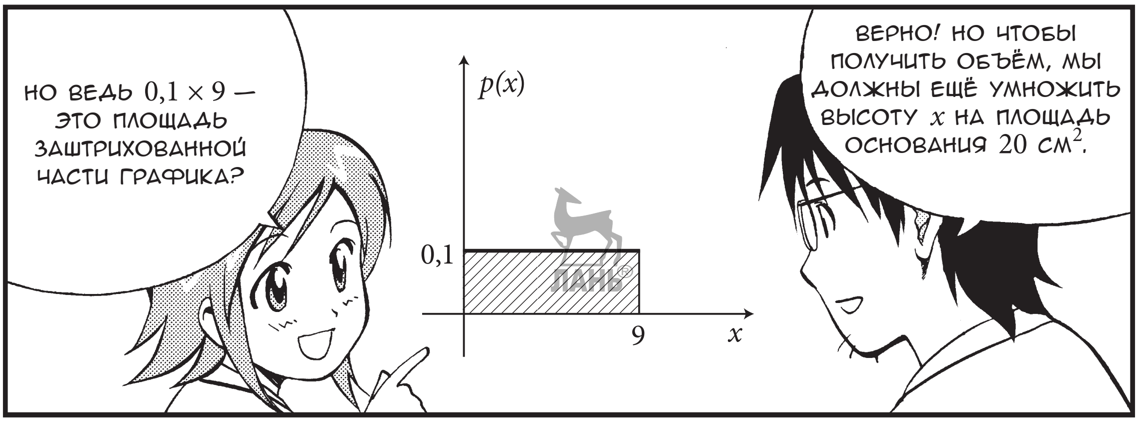




Концентрация $p(x)$
2
0,02
0
9
x
Пусть $p(x)$ выражается в виде
$p(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.
Теперь, Норико, скажи какое количество спирта в граммах содержится в этом сётю с горячей водой?
Я не могу вычислить это так быстро.

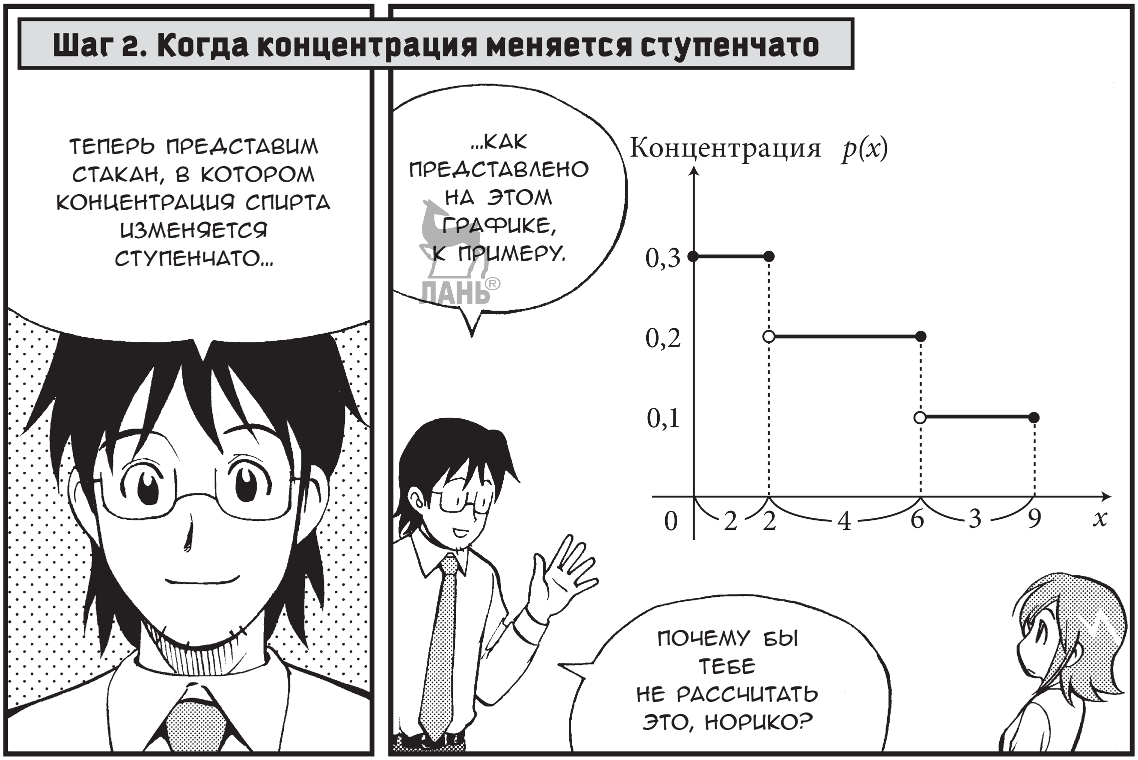


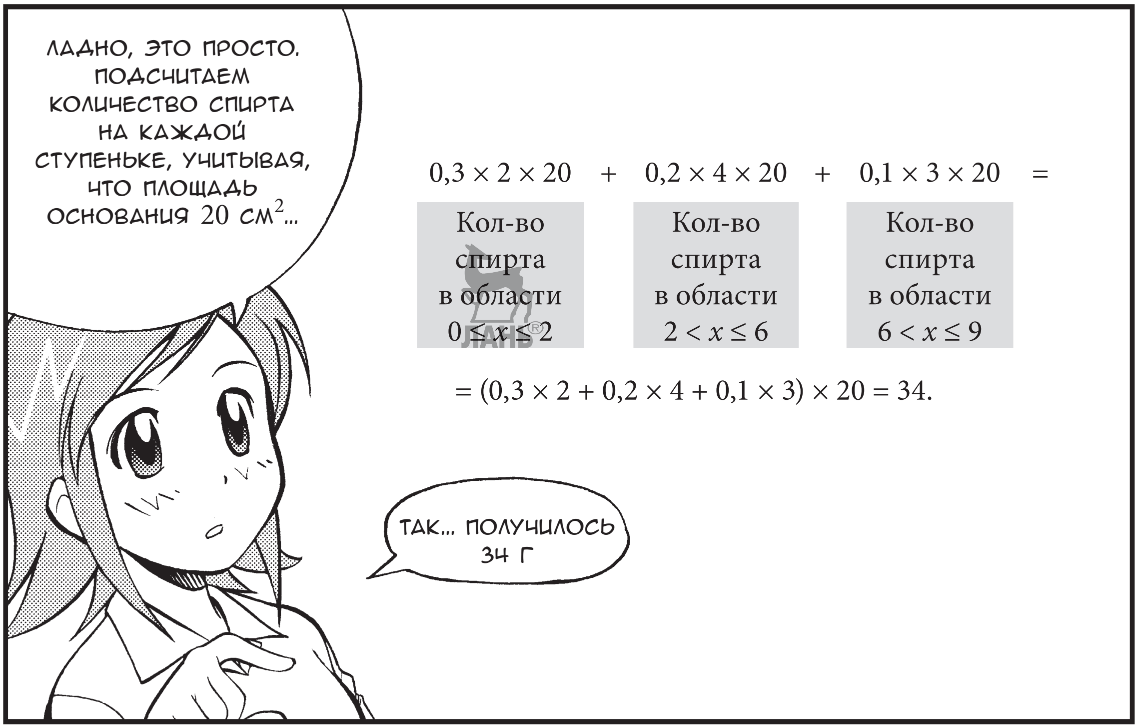
Шаг 1. Когда концентрация постоянна
Если концентрация равна 0,1 г/см^3, как показано на графике, мы должны умножить концентрацию на высоту и площадь основания: $0{,}1 \times 9 \times 20 = 18$ г. Это и есть количество спирта в стакане.
$p(x)$
0,1
9
x
Если концентрация постоянна, это просто. Общее количество спирта равно произведению плотности и занимаемого спиртом объёма ёмкости.

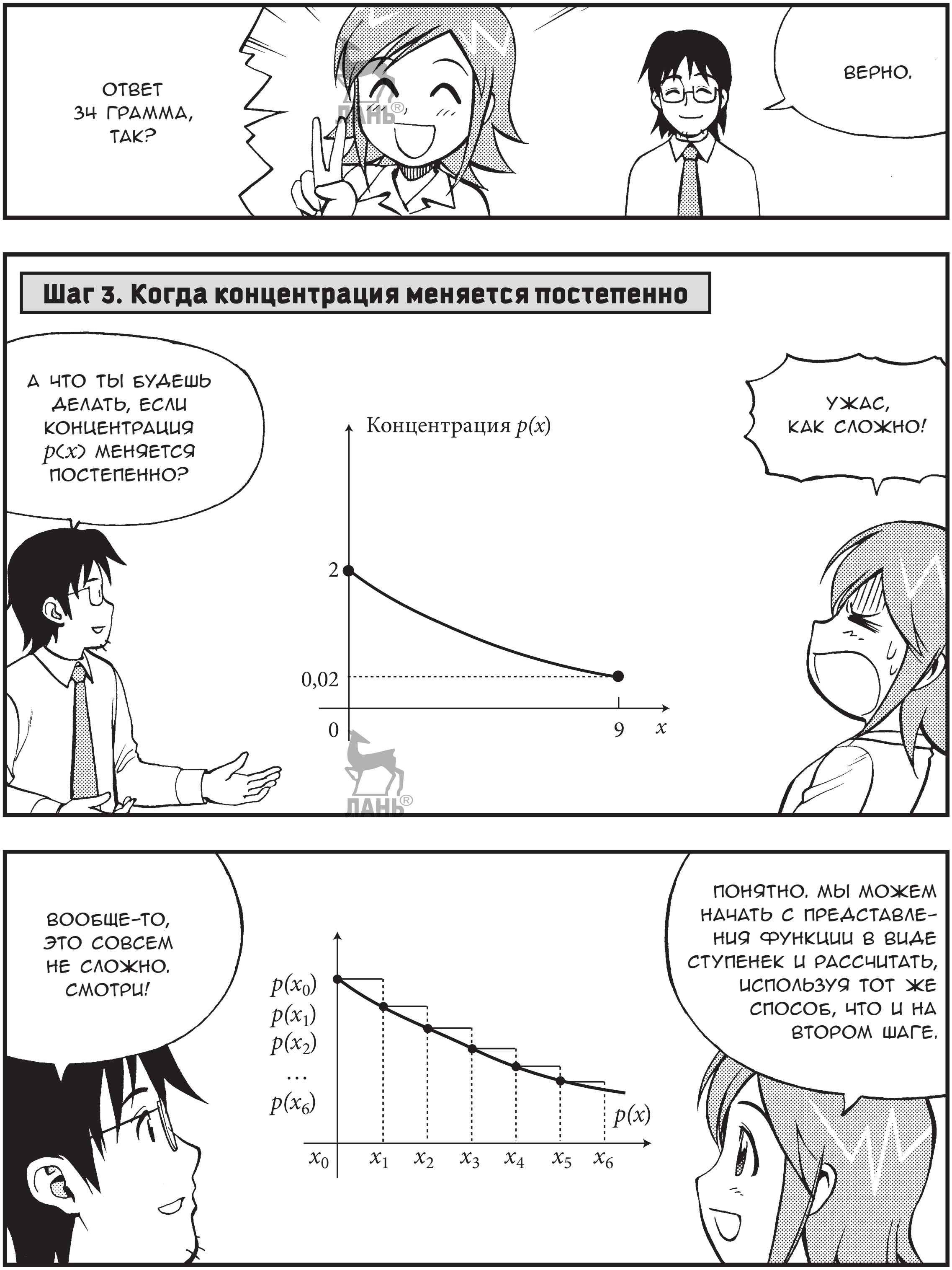


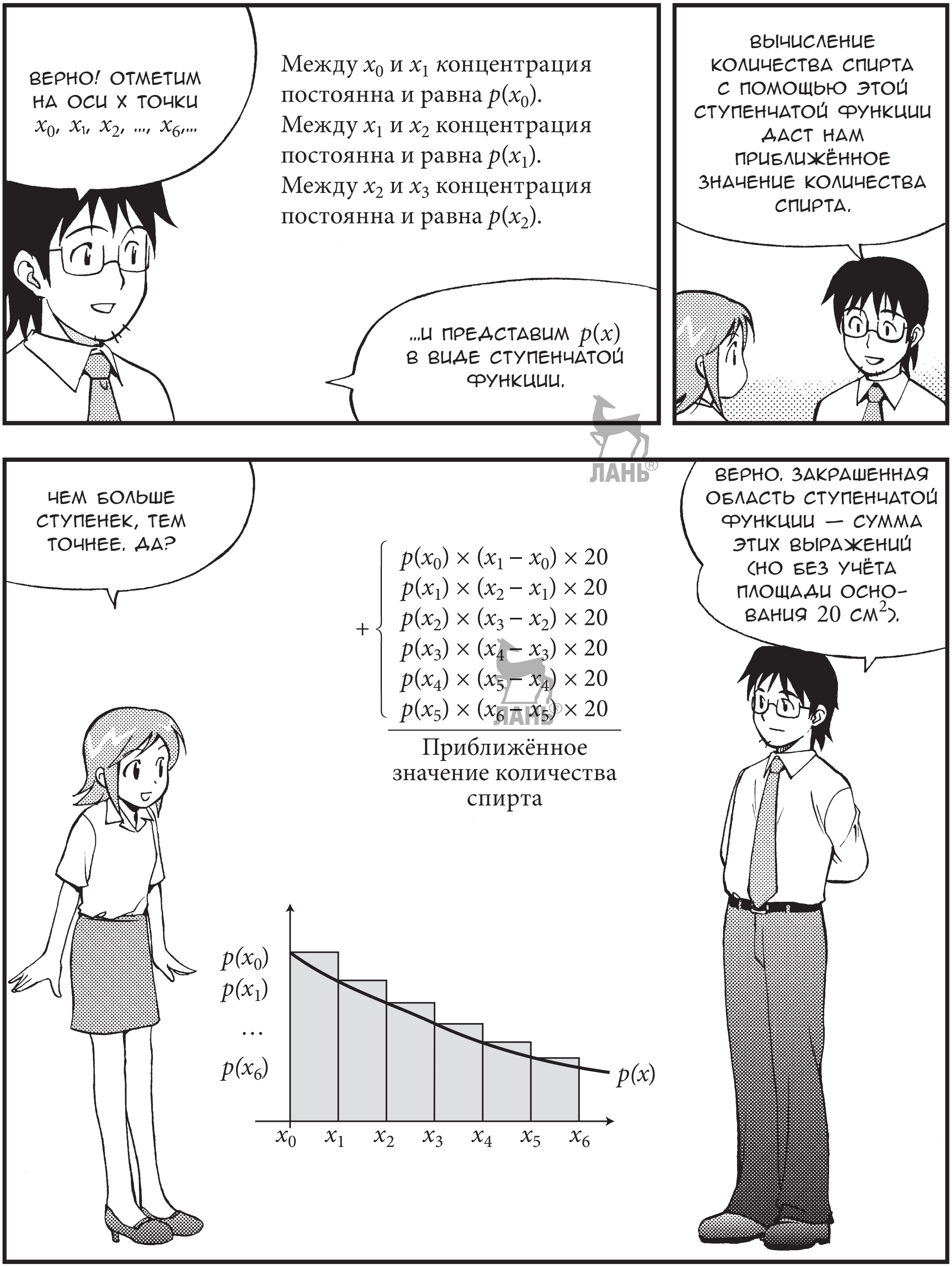
Верно! Но чтобы получить объём, мы должны ещё умножить высоту x на площадь основания 20 см^2.
$p(x)$
0,1
9
x
Но ведь $0{,}1 \times 9$ — это площадь заштрихованной части графика?

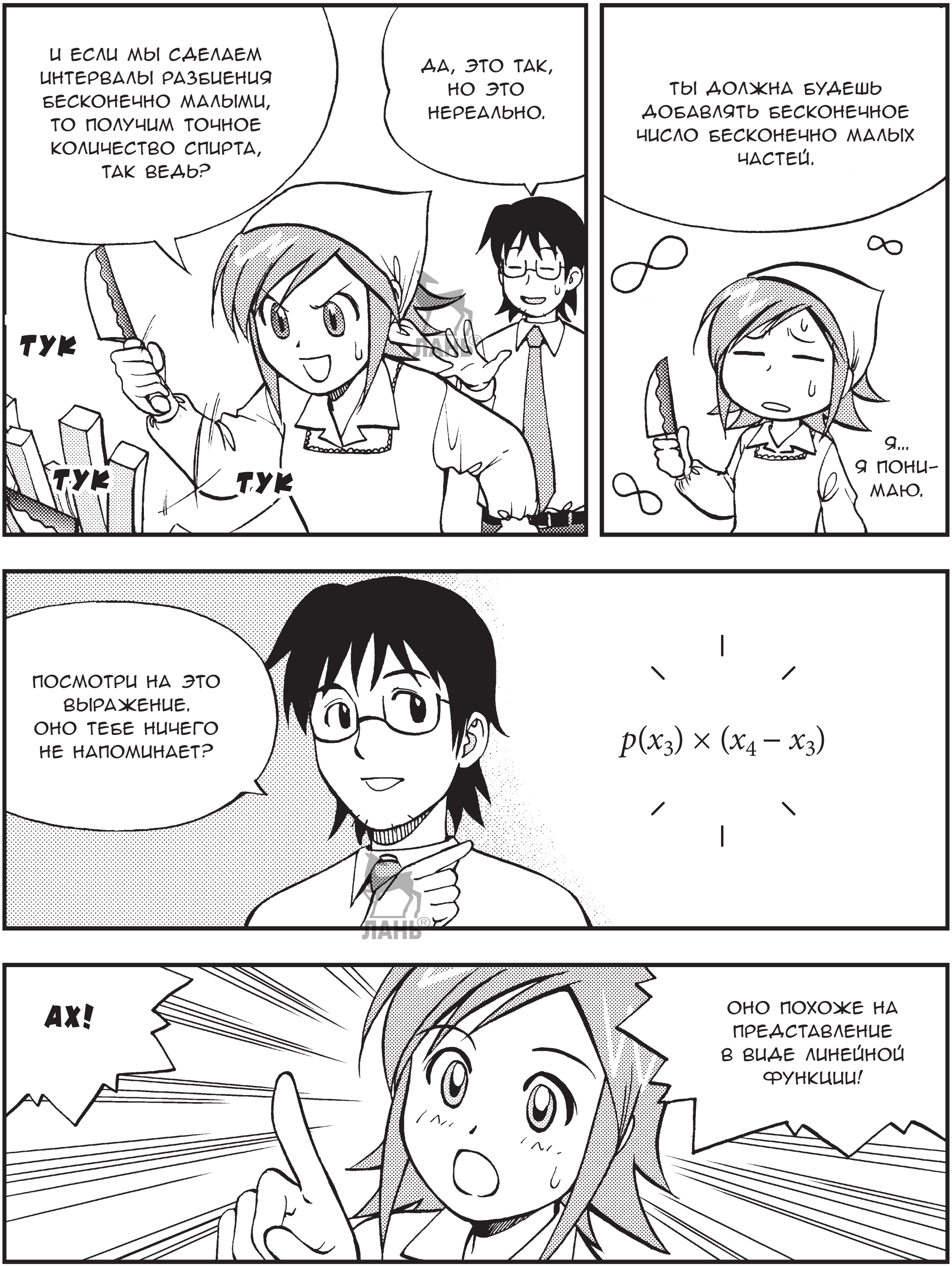
Шаг 2. Когда концентрация меняется ступенчато






ОТВЕТ 34 ГРАММА, ТАК?
ВЕРНО.
Шаг 3. Когда концентрация меняется постепенно
А ЧТО ТЫ БУДЕШЬ ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ КОНЦЕНТРАЦИЯ $p(x)$ МЕНЯЕТСЯ ПОСТЕПЕННО?
Концентрация $p(x)$
2
0,02
0
9
x
УЖАС, КАК СЛОЖНО!
ВООБЩЕ-ТО, ЭТО СОВСЕМ НЕ СЛОЖНО. СМОТРИ!
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_2)$
…
$p(x_6)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
ПОНЯТНО. МЫ МОЖЕМ НАЧАТЬ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СТУПЕНЕК И РАССЧИТАТЬ, ИСПОЛЬЗУЯ ТОТ ЖЕ СПОСОБ, ЧТО И НА ВТОРОМ ШАГЕ.


ВЕРНО! ОТМЕТИМ НА ОСИ X ТОЧКИ $x_0, x_1, x_2, ..., x_6,...$
Между x_0 и x_1 концентрация постоянна и равна $p(x_0)$.
Между x_1 и x_2 концентрация постоянна и равна $p(x_1)$.
Между x_2 и x_3 концентрация постоянна и равна $p(x_2)$.
...И ПРЕДСТАВИМ $p(x)$ В ВИДЕ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА СПИРТА С ПОМОЩЬЮ ЭТОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ ДАСТ НАМ ПРИБЛИЖЁННОЕ ЗНАЧЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА СПИРТА.
ЧЕМ БОЛЬШЕ СТУПЕНЕК, ТЕМ ТОЧНЕЕ. ДА?
$p(x_0) \times (x_1 - x_0) \times 20$
$p(x_1) \times (x_2 - x_1) \times 20$
$p(x_2) \times (x_3 - x_2) \times 20$
$p(x_3) \times (x_4 - x_3) \times 20$
$p(x_4) \times (x_5 - x_4) \times 20$
$p(x_5) \times (x_6 - x_5) \times 20$
Приближённое значение количества спирта
ВЕРНО. ЗАКРАШЕННАЯ ОБЛАСТЬ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ — СУММА ЭТИХ ВЫРАЖЕНИЙ (НО БЕЗ УЧЁТА ПЛОЩАДИ ОСНОВАНИЯ 20 СМ^2).
$p(x_0)$
$p(x_1)$
…
$p(x_6)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6


И ЕСЛИ МЫ СДЕЛАЕМ ИНТЕРВАЛЫ РАЗБИЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ, ТО ПОЛУЧИМ ТОЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО СПИРТА, ТАК ВЕДЬ?
ДА, ЭТО ТАК, НО ЭТО НЕРЕАЛЬНО.
ТУК
ТУК
ТУК
ТЫ ДОЛЖНА БУДЕШЬ ДОБАВЛЯТЬ БЕСКОНЕЧНОЕ ЧИСЛО БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ЧАСТЕЙ.
∞
∞
∞
Я... Я ПОНИМАЮ.
ПОСМОТРИ НА ЭТО ВЫРАЖЕНИЕ. ОНО ТЕБЕ НИЧЕГО НЕ НАПОМИНАЕТ?
$p(x_3) \times (x_4 - x_3)$
АХ!
ОНО ПОХОЖЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ!

Шаг 4. Представление в виде линейной функции

Пусть $f'(x)$ — производная функции $f(x)$. Тогда вблизи $x = a$

$$f(x) \approx f'(a)\,(x - a) + f(a).$$

Перенося $f(a)$ влево, получаем

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)\,(x - a), \qquad (1)$$

то есть

Разность $f(x)$ ≈ Производная $f(x)$ × Разность x.

Предположим, что разность между соседними последовательными значениями x_0, x_1, x_2, x_3, … , x_6 достаточно мала, так что x_1 стремится к x_0, x_2 стремится к x_1, и так далее.

Введём также новую функцию $q(x)$, производная которой равна $p(x)$:

$$q'(x) = p(x).$$

Подставляя в (1) $q(x)$ вместо $f(x)$, получаем:

Разность $q(x)$ ≈ Производная $q(x)$ × Разность x

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)\,(x_1 - x_0)$$
$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)\,(x_2 - x_1)$$

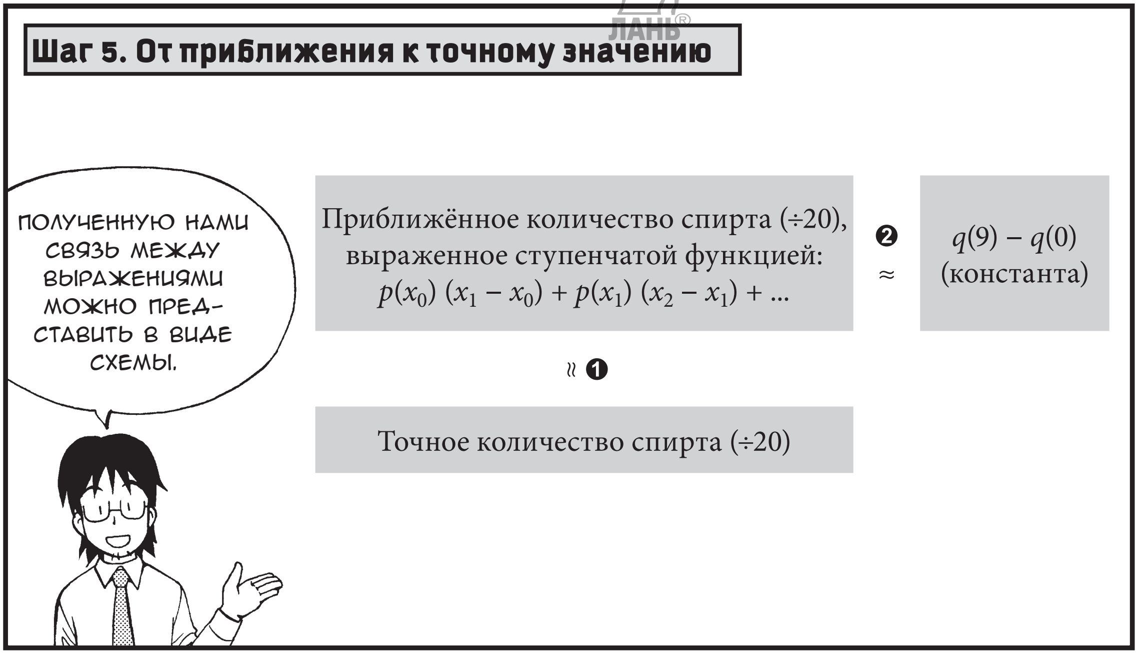
Сумма правых сторон этих выражений равна сумме левых сторон, при этом во время суммирования некоторые члены взаимоуничтожаются:

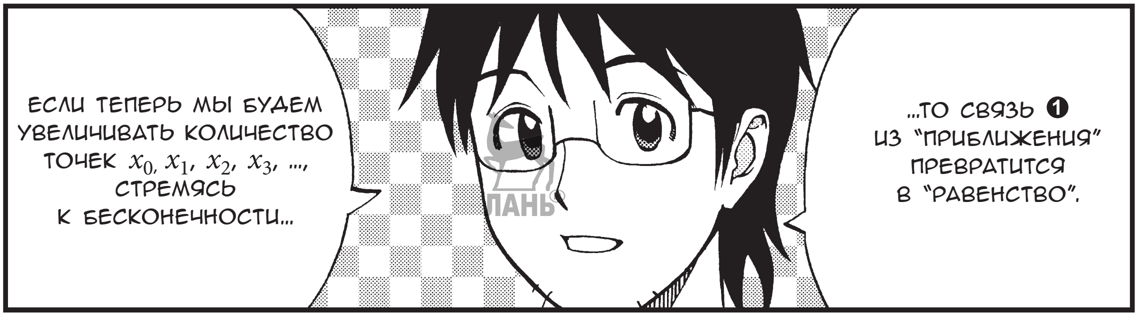
$$\begin{aligned}
&\cancel{q(x_1)} - q(x_0) \approx p(x_0)\,(x_1 - x_0)\\
+\ &\cancel{q(x_2)} - \cancel{q(x_1)} \approx p(x_1)\,(x_2 - x_1)\\
+\ &\cancel{q(x_3)} - \cancel{q(x_2)} \approx p(x_2)\,(x_3 - x_2)\\
+\ &\cancel{q(x_4)} - \cancel{q(x_3)} \approx p(x_3)\,(x_4 - x_3)\\
+\ &\cancel{q(x_5)} - \cancel{q(x_4)} \approx p(x_4)\,(x_5 - x_4)\\
+\ &q(x_6) - \cancel{q(x_5)} \approx p(x_5)\,(x_6 - x_5)\\
\hline
&q(x_6) - q(x_0) \approx \text{Сумма правых сторон}
\end{aligned}$$

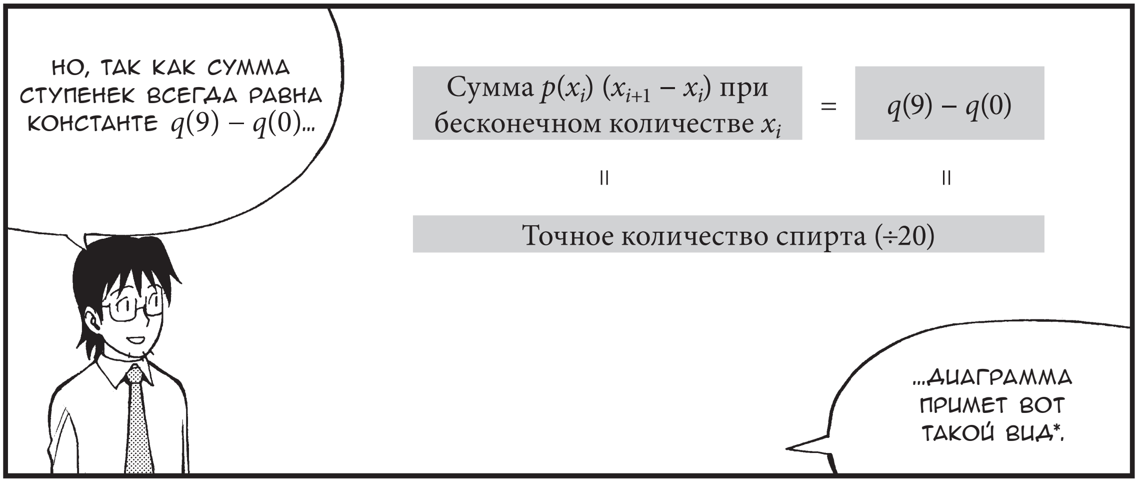
Производя подстановку $x_6 = 9$ и $x_0 = 0$, мы получим:

Приближённое количество спирта =
= Сумма правых сторон × 20 =
= $\{q(x_6) - q(x_0)\} \times 20$ =
= $\{q(9) - q(0)\} \times 20$.

Шаг 5. От приближения к точному значению







* На стр. 94 приведён строгий вывод этого положения.

Шаг 6. p(x) — это производная от q(x)

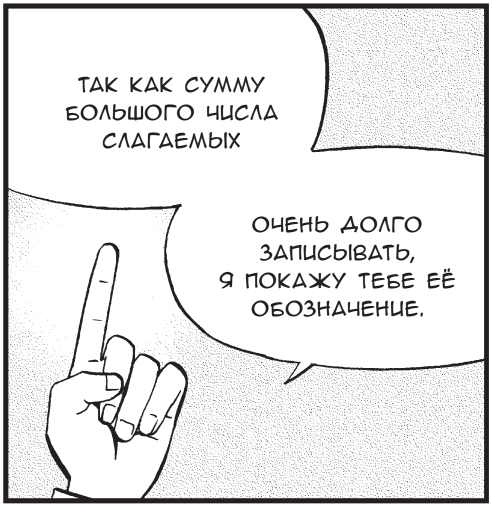
Пусть $q(x) = -\dfrac{2}{x+1}$,

тогда $q'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} = p(x)$.

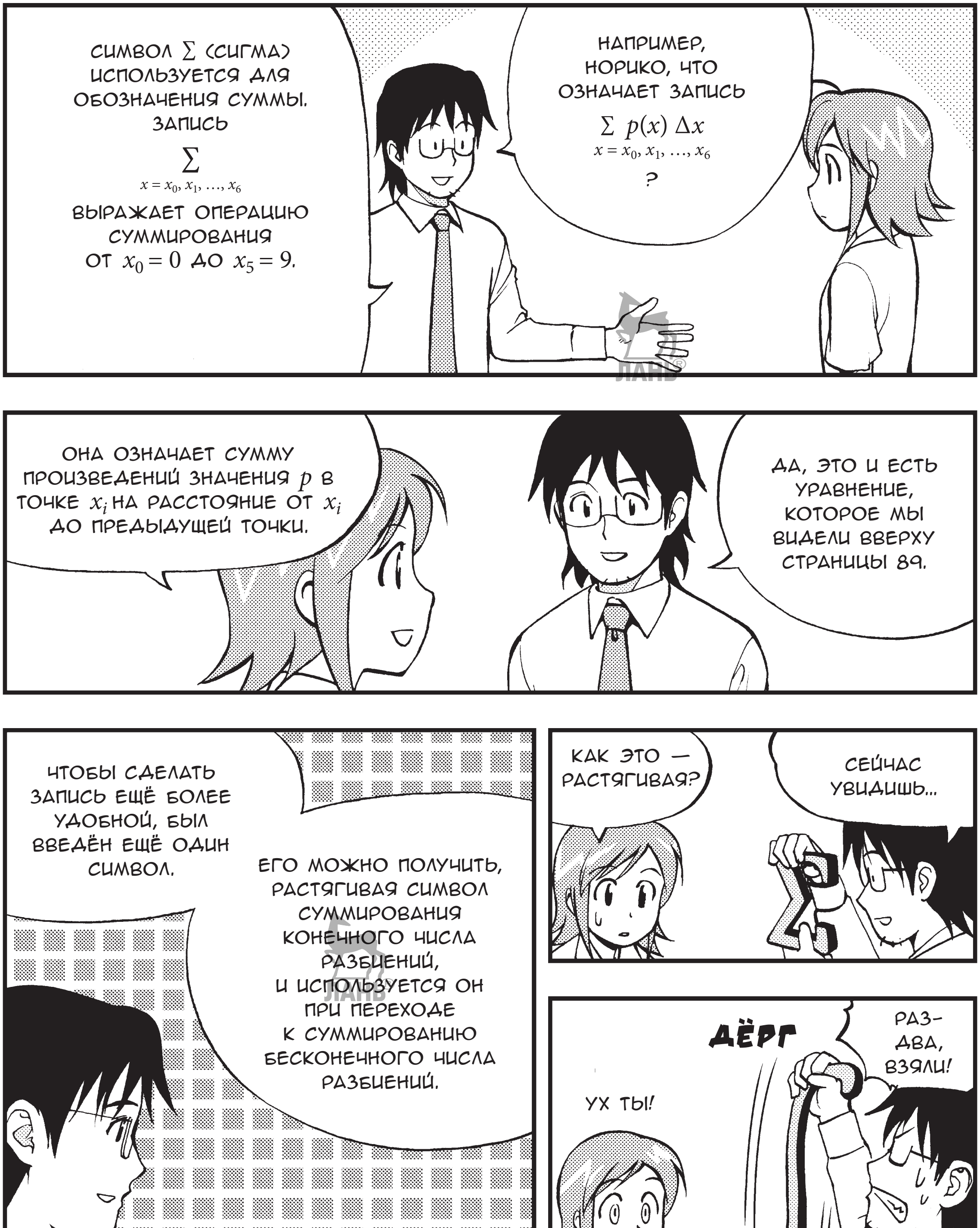
В математике,
если $p(x)$ — производная $q(x)$,
то $q(x)$ называют *первообразной* $p(x)$.

Количество спирта $= \{q(9) - q(0)\} \times 20 =$

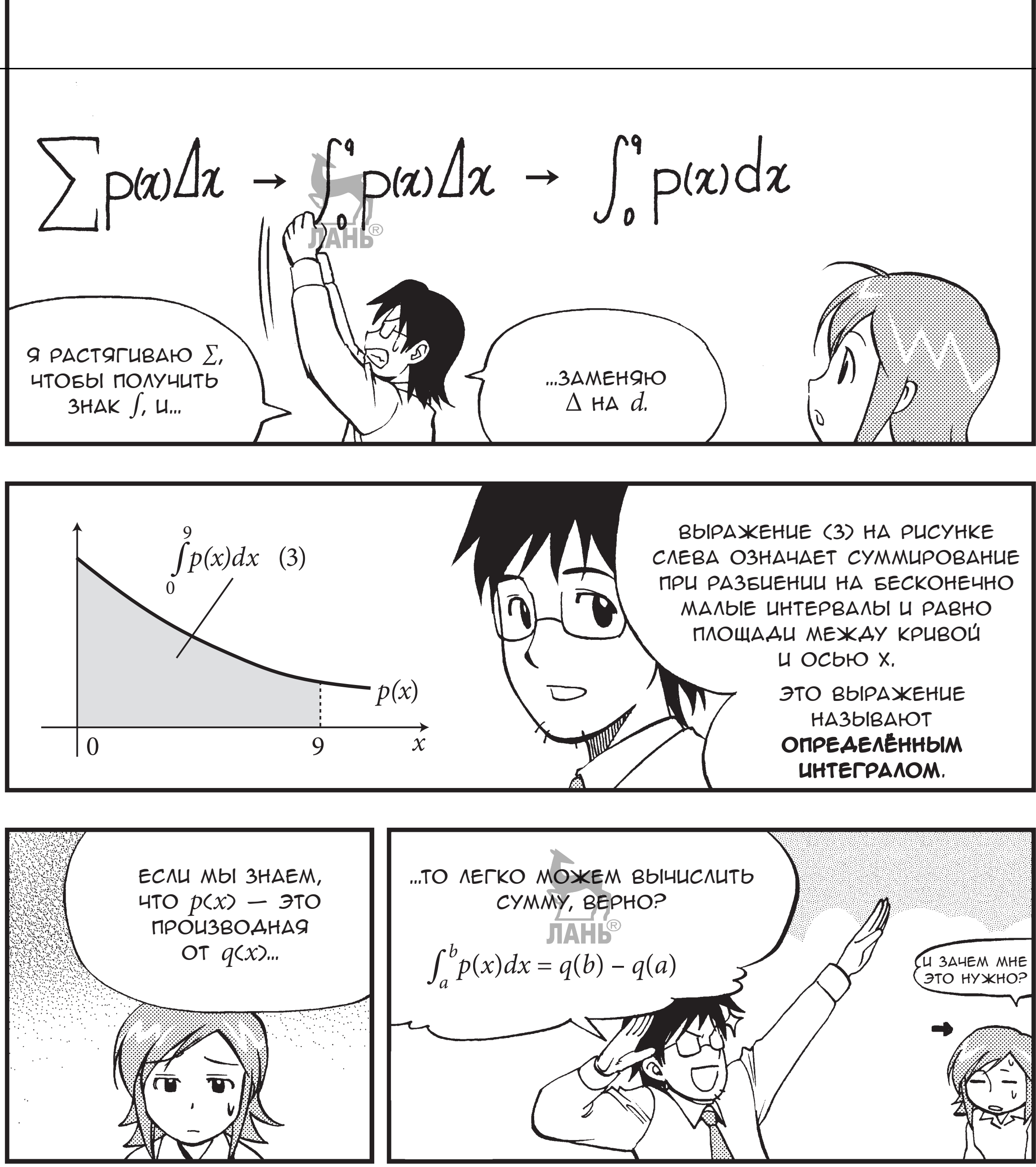
$$= \left\{-\frac{2}{9+1} - \left(-\frac{2}{0+1}\right)\right\} \times 20 = 36 \text{ г.}$$



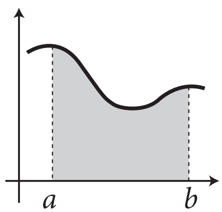
3.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ



Символ $\sum$ (сигма) используется для обозначения суммы. Запись $\sum\limits_{x = x_0, x_1, \ldots, x_6}$ выражает операцию суммирования от $x_0 = 0$ до $x_5 = 9$.
Например, Норико, что означает запись $\sum\limits_{x = x_0, x_1, \ldots, x_6} p(x)\,\Delta x$?
Она означает сумму произведений значения p в точке x_i на расстояние от x_i до предыдущей точки.
Да, это и есть уравнение, которое мы видели вверху страницы 89.
Чтобы сделать запись ещё более удобной, был введён ещё один символ.
Его можно получить, растягивая символ суммирования конечного числа разбиений, и используется он при переходе к суммированию бесконечного числа разбиений.
Как это — растягивая?
Сейчас увидишь...
Раз-два, взяли!
ДЁРГ
Ух ты!

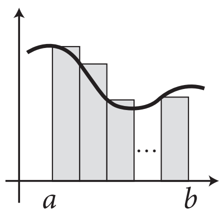


Выводы



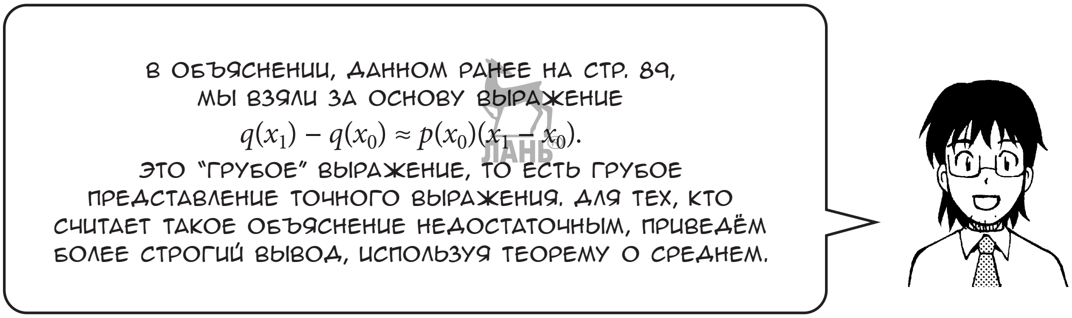
$$\leftarrow \quad \int_a^b p(x)dx \approx \sum_{x = x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n} p(x)\Delta x \quad \rightarrow$$

Остаётся найти такое $q(x)$, чтобы $q'(x) = p(x)$,
и вычислить $\int_a^b p(x)dx = q(b) - q(a)$.



Основная теорема интегрирования!

Строгое объяснение шага 5



Сначала находим $q(x)$, удовлетворяющее

$$q'(x) = p(x).$$

Затем на оси x отмечаем точки

$$x_0\ (= a),\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\ (= b).$$

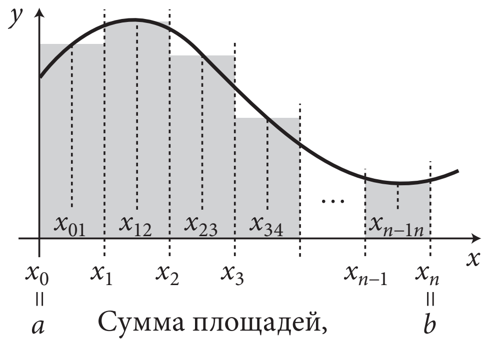
Исходя из теоремы о среднем, находим точку x_{01}, расположенную между x_0 и x_1 и удовлетворяющую условию

$$q(x_1) - q(x_0) = q'(x_{01})(x_1 - x_0).$$

Аналогично находим точку x_{12} между x_1 и x_2, удовлетворяющую условию

$$q(x_2) - q(x_1) = q'(x_{12})(x_2 - x_1).$$

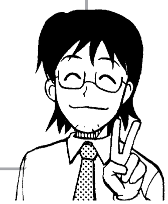
Повторяя эту операцию, получаем:



Сумма площадей, изображённых на графике

$$+\left\{\begin{array}{ccccc}
q(x_1) - q(x_0) & = & q'(x_{01})(x_1 - x_0) & = & p(x_{01})(x_1 - x_0) \\
q(x_2) - q(x_1) & = & q'(x_{12})(x_2 - x_1) & = & p(x_{12})(x_2 - x_1) \\
q(x_3) - q(x_2) & = & q'(x_{23})(x_3 - x_2) & = & p(x_{23})(x_3 - x_2) \\
\ldots & & \ldots & & \ldots \\
q(x_n) - q(x_{n-1}) & = & q'(x_{n-1\,n})(x_n - x_{n-1}) & = & p(x_{n-1\,n})(x_n - x_{n-1})
\end{array}\right.$$

$q(x_n) - q(x_0)$	←	Всегда равны	→	Приближенное значение площади
‖		Переход к бесконечно малым отрезкам		↓
$q(b) - q(a)$	←	Равны	→	Точное значение площади



3.3. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основные формулы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \tag{3.1}$$

Интервалы определённых интегралов одной функции можно объединить.

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{3.2}$$

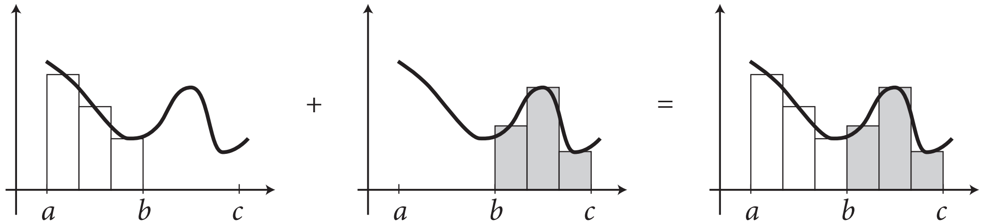
Определённый интеграл суммы можно заменить на сумму определённых интегралов.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

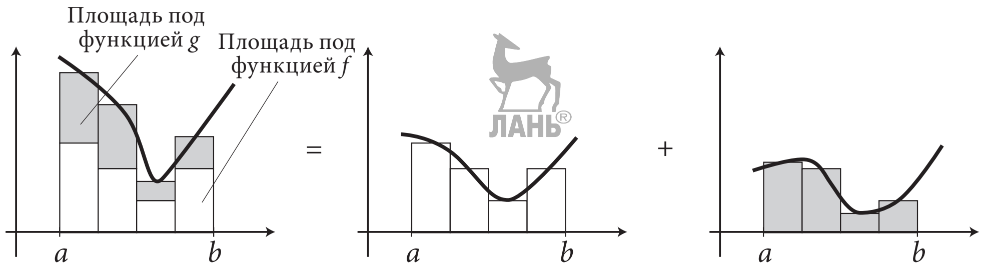
Постоянный множитель можно вынести за знак определённого интеграла.

Ниже приведены рисунки, позволяющие понять формулы (3.1), (3.2) и (3.3):

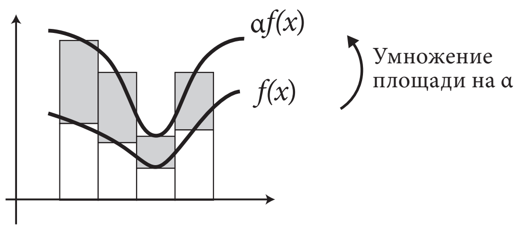
(3.1)

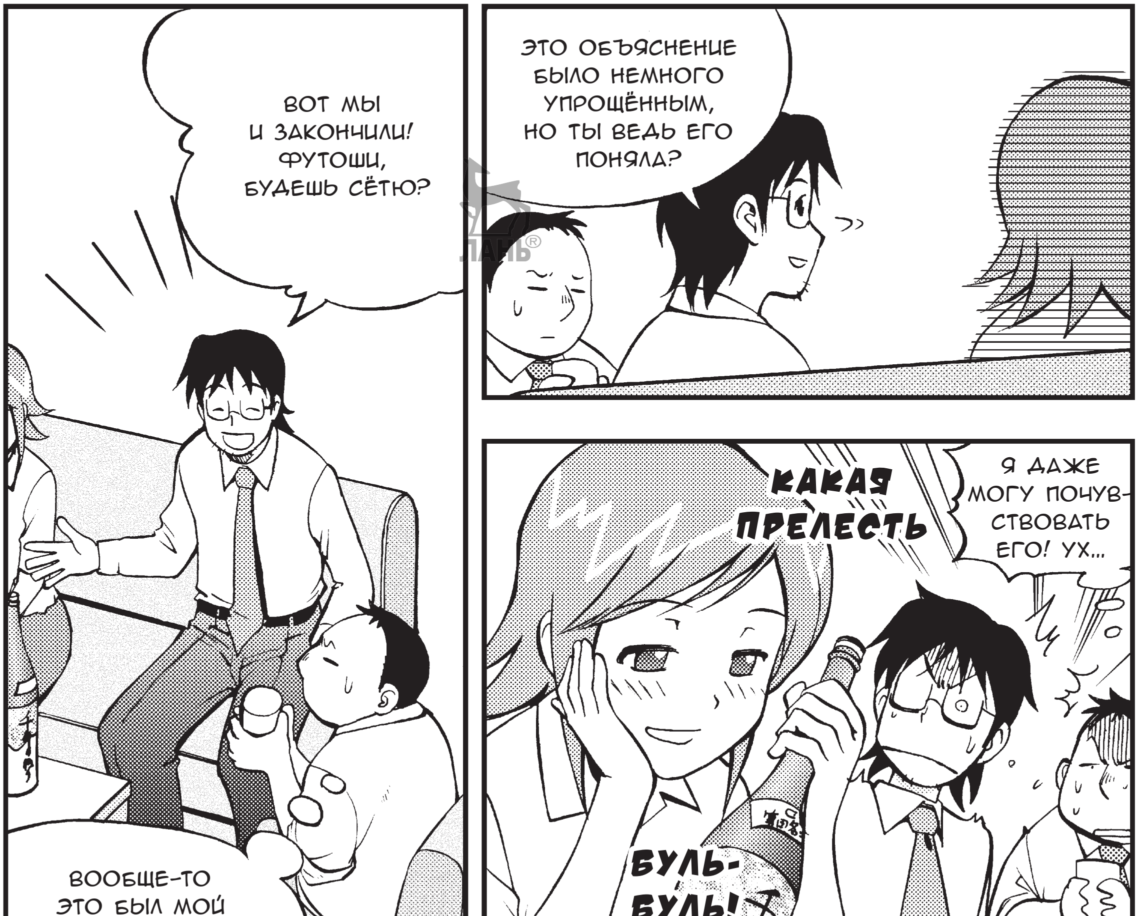


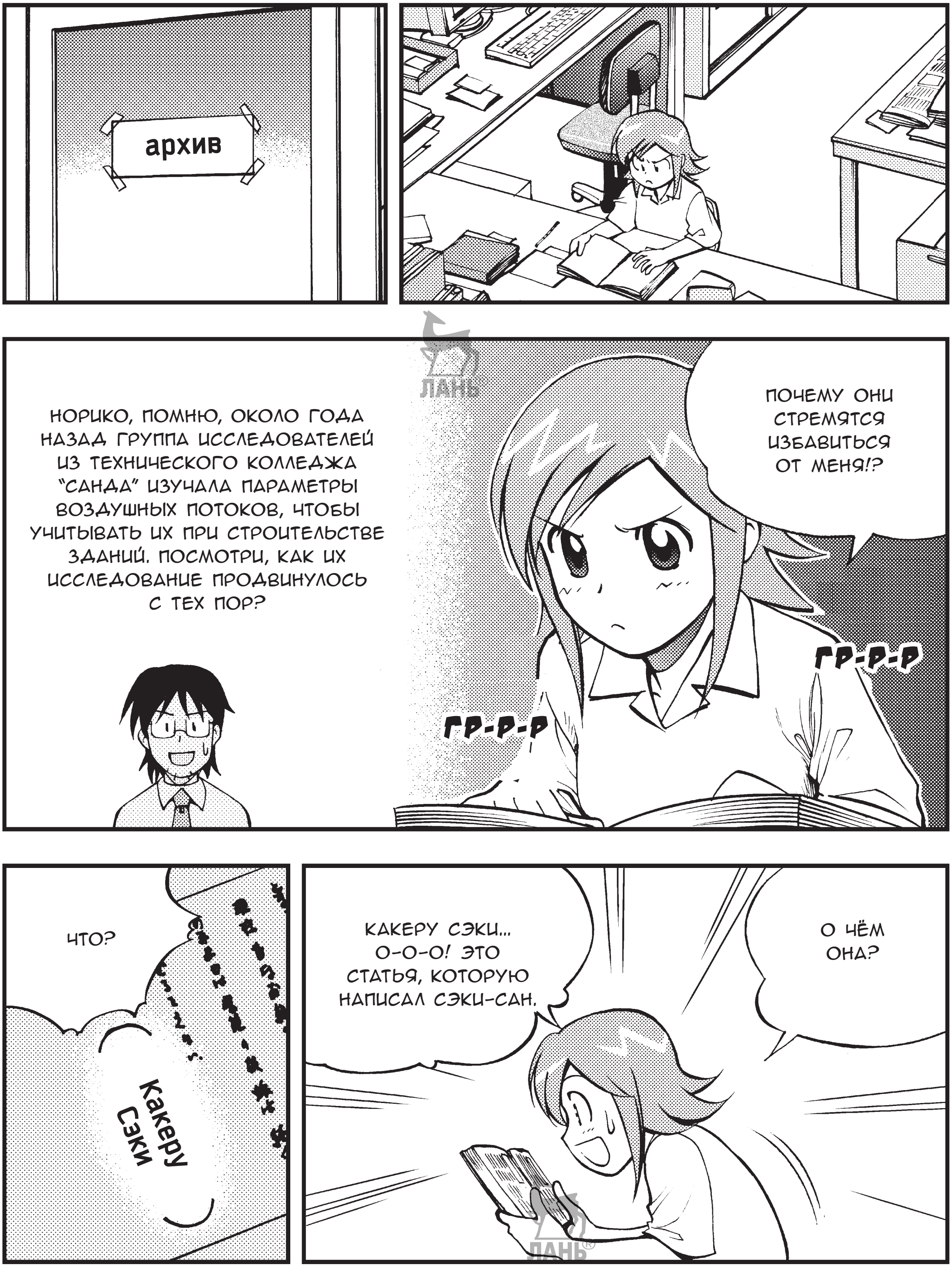
(3.2)



(3.3)

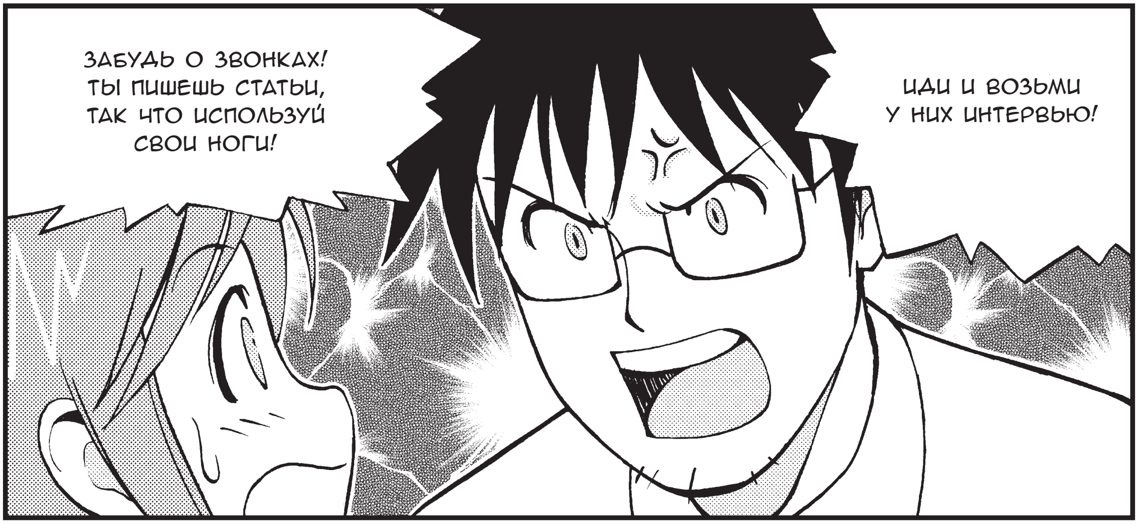


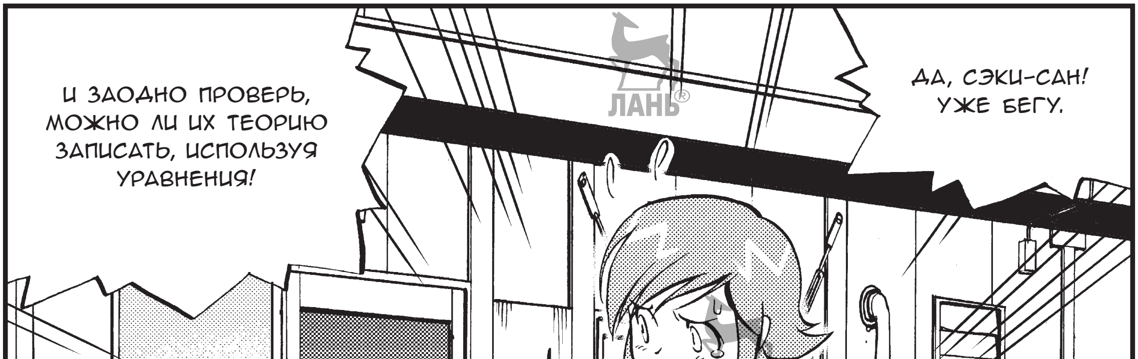

ВОТ МЫ И ЗАКОНЧИЛИ! ФУТОШИ, БУДЕШЬ СЁТЮ?
ВООБЩЕ-ТО ЭТО БЫЛ МОЙ СЁТЮ...
ЭТО ОБЪЯСНЕНИЕ БЫЛО НЕМНОГО УПРОЩЁННЫМ, НО ТЫ ВЕДЬ ЕГО ПОНЯЛА?
КАКАЯ ПРЕЛЕСТЬ
Я ДАЖЕ МОГУ ПОЧУВСТВОВАТЬ ЕГО! УХ...
БУЛЬ-БУЛЬ!
ДА, Я КАК РАЗ ВСПОМНИЛ ЗАДАНИЕ ДЛЯ ТЕБЯ. ПОЙДЁМ В ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ?
архив
ШУХ-ШУХ


архив
НОРИКО, ПОМНЮ, ОКОЛО ГОДА НАЗАД ГРУППА ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ ИЗ ТЕХНИЧЕСКОГО КОЛЛЕДЖА "САНДА" ИЗУЧАЛА ПАРАМЕТРЫ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ, ЧТОБЫ УЧИТЫВАТЬ ИХ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ЗДАНИЙ. ПОСМОТРИ, КАК ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДВИНУЛОСЬ С ТЕХ ПОР?
ПОЧЕМУ ОНИ СТРЕМЯТСЯ ИЗБАВИТЬСЯ ОТ МЕНЯ!?
ГР-Р-Р
ГР-Р-Р
ЧТО?
Какеру Сэки
КАКЕРУ СЭКИ... О-О-О! ЭТО СТАТЬЯ, КОТОРУЮ НАПИСАЛ СЭКИ-САН.
О ЧЁМ ОНА?


ЗАГРЯЗНЕНИЕ ВОДЫ В ЗАЛИВЕ
Причина – слив отходов производства компании «Бернем Кемикл»
"БЕРНЕМ"... ОДИН ИЗ СПОНСОРОВ "АСАГАКЭ ТАЙМС".
СЭКИ-САН НАПИСАЛ СТАТЬЮ, ОБВИНЯЮЩУЮ ИЗ ВСЕХ КОМПАНИЙ ЯПОНИИ ИМЕННО КОМПАНИЮ НАШЕГО КРУПНЕЙШЕГО РЕКЛАМОДАТЕЛЯ.
ВОТ ПОЧЕМУ ЕГО СЮДА ПЕРЕВЕЛИ.


ТЫ ЧТО-НИБУДЬ НАШЛА?
ЩЁЛК
ТУ-ТУМ
НЕТ... ЭМ... ОНИ ПРЕДЛАГАЛИ ИНТЕРЕСНЫЕ ИДЕИ,
НАПРИМЕР ТАКИЕ, КАК КОНСТРУИРОВАНИЕ ЗДАНИЙ, НАПРАВЛЯЮЩИХ ПОТОКИ ВОЗДУХА С ЦЕЛЬЮ УМЕНЬШЕНИЯ ЭФФЕКТА ТЕПЛОВОГО КУПОЛА, ТАК КАК ГОРОДСКИЕ РАЙОНЫ ЗАДЕРЖИВАЮТ БОЛЬШЕ ТЕПЛА, ЧЕМ СЕЛЬСКИЕ.
О, ЭТО ХОРОШО.
ЧТО Ж, КАКОЙ ТИП АРХИТЕКТУРЫ ОНИ ИСПОЛЬЗУЮТ?
Я НЕ... ЗНАЮ.
ТЦ...
ХОРОШО, Я... Я СЕЙЧАС ПОЗВОНЮ ИМ И СПРОШУ ОБ ЭТОМ. ОБЕЩАЮ.
ПОЗВОНИШЬ ИМ? **ПОЗВОНИШЬ ИМ?!**
ТРЕСК-ТРЕСК


Забудь о звонках! Ты пишешь статьи, так что используй свои ноги!
Иди и возьми у них интервью!


И заодно проверь, можно ли их теорию записать, используя уравнения!
Да, Сэки-сан! Уже бегу.

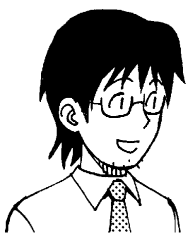
3.4. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Кривая предложения

Сначала рассмотрим, как компании достигают максимальной прибыли на абсолютно конкурентном рынке. Заодно получим кривую предложения.

Прибыль $P(x)$ при производстве x единиц товара задаётся следующей функцией:

$P(x)$	$=$	p	$\times$	x	$-$	$C(x)$
Прибыль		Цена единицы		Количество продукции		Себестоимость производства

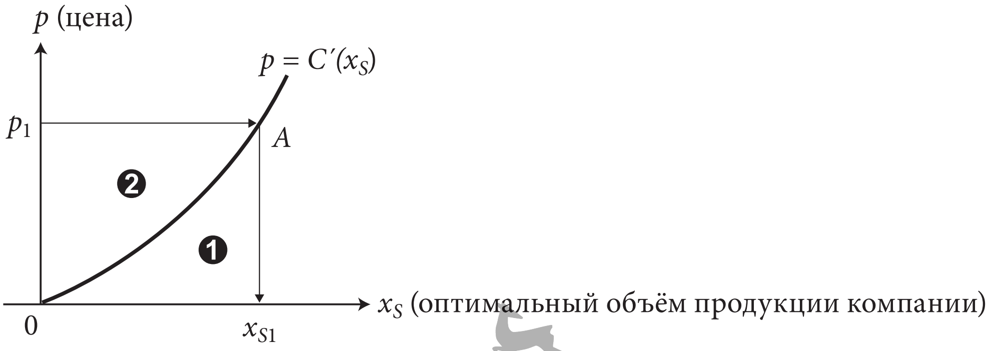


Обозначим значение количества продукции x, при котором достигается максимум прибыли $P(x)$, через x_S.

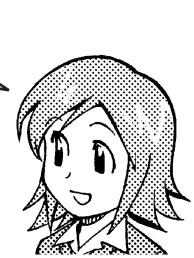
Компания хочет достичь максимальной прибыли. Вспомним, что для нахождения экстремума функции её производную надо приравнять к нулю. То есть максимальная прибыль компании достигается при

$$P'(x_S) = p - C'(x_S) = 0.$$

График функции $p = C'(x)$, соответствующей максимальной прибыли, называется **кривой предложения**!



На графике в точке A цена равна p_1. Этой цене соответствует оптимальной объём продукции x_{S1}.



Площадь прямоугольника, ограниченного точками (p_1, A, x_{S1}, 0), равна произведению цены на количество изготовленной и проданной продукции. Она равна общему доходу компании, до вычета затрат на производство. Но из графика видно, что площадь области ❶ как раз и соответствует производственным затратам, и мы можем её вычислить, используя интегрирование:

$$\underbrace{\int_0^{x_{S1}} C'(x_S)dx_S = C(x_{S1}) - C(0)}_{\text{Применяем основную теорему интегрирования}} \underbrace{= C(x_{S1})}_{\text{Для упрощения считаем } C(0) = 0} = \text{Себестоимость.}$$

Теперь можно легко найти прибыль компании, равную площади области ❷ на графике, вычтя из площади прямоугольника (p_1, A, x_{S1}, 0) площадь области ❶.

Кривая спроса

Теперь найдём максимальную выгоду покупки для потребителей.

Выгода $B(x)$, получаемая потребителями при покупке x единиц товара, задаётся следующим выражением

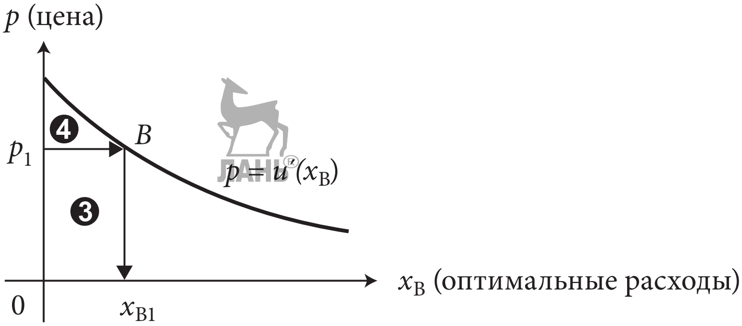
$$\underbrace{B(x)}_{\text{Выгода}} = \underbrace{u(x)}_{\text{Общие расходы}} - \underbrace{p}_{\text{Цена единицы}} \times \underbrace{x}_{\text{Количество продукции}},$$

где функция $u(x)$ описывает суммарную величину максимальных расходов, которые готовы понести потребители при покупке товара, суммарное количество которого равно x.

Больше всего товара потребители купят при максимальном значении $B(x)$.

Чтобы найти оптимальное количество товара x_B, при покупке которого будет достигаться максимальная выгода, надо решить следующее уравнение:

$$B'(x_B) = u'(x_B) - p = 0.$$

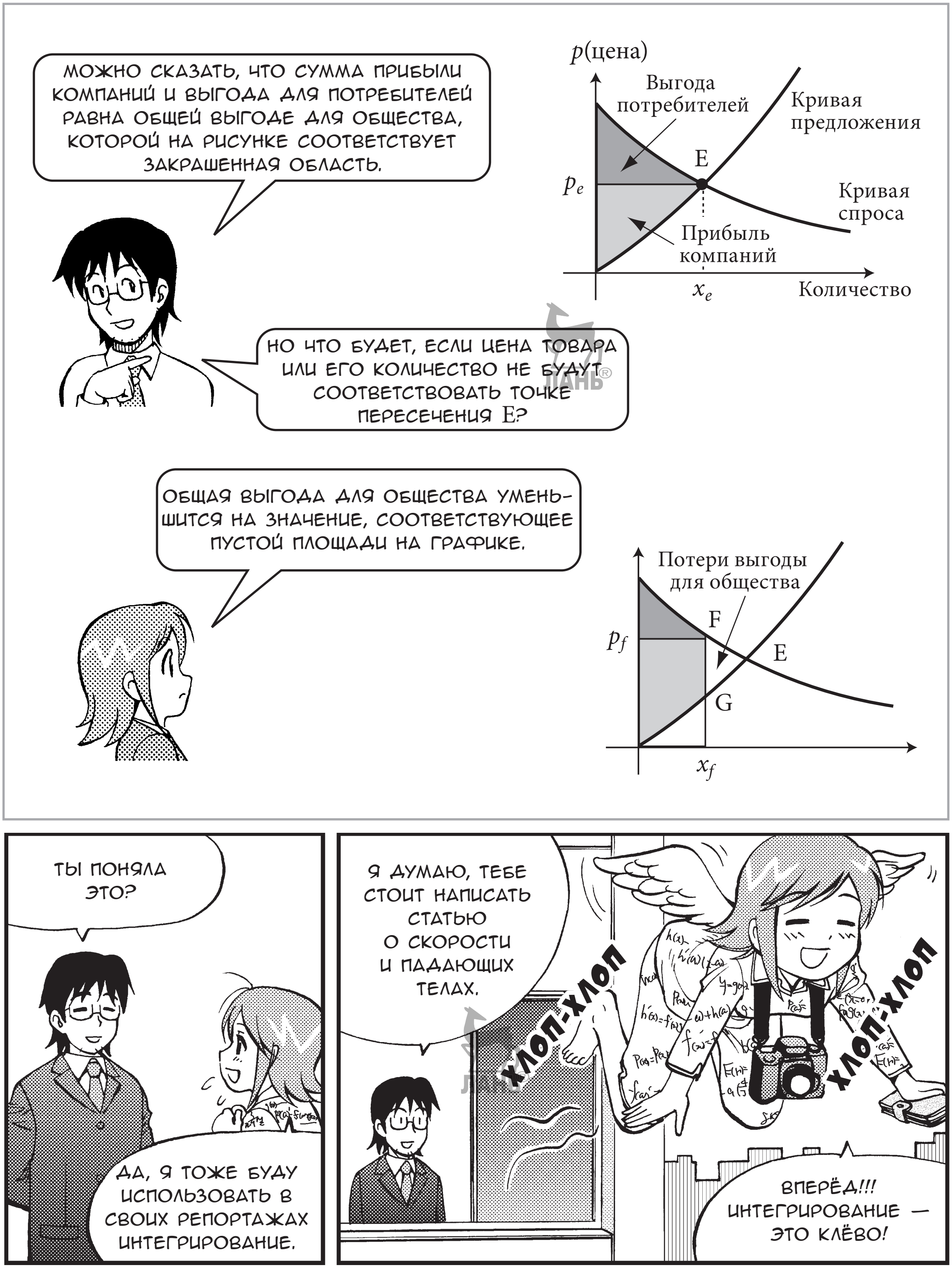


Рассмотрим площадь прямоугольника ❸. Она равна произведению цены и количества купленных товаров и представляет собой общую стоимость купленных потребителями товаров.

Суммарную площадь областей ❸ и ❹ можно вычислить, применив интегрирование:

$$\underbrace{\int_0^{x_{B1}} u'(x_B)dx_B = u(x_{B1}) - u(0)}_{\text{Применяем основную теорему интегрирования}} \underbrace{= u(x_{B1})}_{\text{Для упрощения считаем } u(0) = 0} = \text{Общие расходы.}$$

Теперь мы можем найти площадь ❹, соответствующую выгоде для потребителей, вычтя площадь прямоугольника ❸ из полученного значения интеграла от 0 до x_{B1}.



Можно сказать, что сумма прибыли компаний и выгода для потребителей равна общей выгоде для общества, которой на рисунке соответствует закрашенная область.
p(цена)
Выгода потребителей
Кривая предложения
E
p_e
Кривая спроса
Прибыль компаний
x_e
Количество
Но что будет, если цена товара или его количество не будут соответствовать точке пересечения E?
Общая выгода для общества уменьшится на значение, соответствующее пустой площади на графике.
Потери выгоды для общества
F
p_f
E
G
x_f
Ты поняла это?
Да, я тоже буду использовать в своих репортажах интегрирование.
Я думаю, тебе стоит написать статью о скорости и падающих телах.
Хлоп-хлоп
Хлоп-хлоп
Вперёд!!! Интегрирование — это клёво!

ГАЗЕТА «ВЕЧЕРНИЙ ИНТЕГРАЛ» №1

Наш репортёр сообщает: Интеграл скорости – это расстояние!

Интеграл от скорости = **Разность крайних положений** = **Путь**

Усвоив эту формулу, мы сможем правильно находить путь, пройденный объектом, скорость которого непрерывно изменяется. Давайте проверим, так ли это? Наш многообещающий начинающий репортёр Норико Хикима убеждает нас в истинности этого утверждения в своём беспристрастном репортаже.

Читатели, возможно, помнят описанную ранее прогулку Футоши по движущейся дорожке. Не все, наверное, запомнили образ вспотевшего Футоши, но должны были запомнить, что производная пути — это скорость.

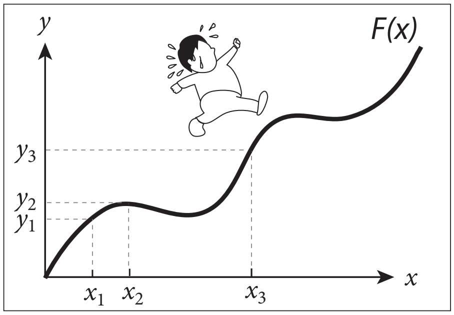


***Рис. 1.** График зависимости пройденного Футоши пути от времени. Он проходит точки y_1, y_2, y_3... в моменты времени x_1, x_2, x_3...*

На **Рис. 1** приведён график функции $y = F(x)$, описывающей изменение положения запыхавшегося Футоши во времени — за x секунд он перемещается в точку y.

Производная $F'(x)$ — это «мгновенная скорость» в момент времени x. Заменяя $F'(x)$ на привычное обозначение скорости $v(x)$ и используя **основную теорему интегрирования**, получаем равенство:

$$\int_a^b v(x)dx = F(b) - F(a).$$

Взглянем на график $v(x)$ на **Рис. 2, *а***, отражающий изменение скорости Футоши во времени. Закрашенная часть этого графика равна интегралу в левой части нашего равенства. Теперь, если мы посмотрим на **Рис. 2, *б***, то увидим, что пройденный путь, определяемый как разность положений, равен закрашенной области, то есть интегралу скорости!

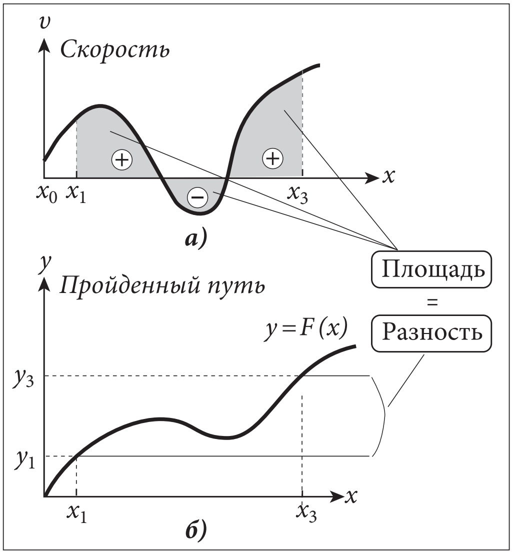


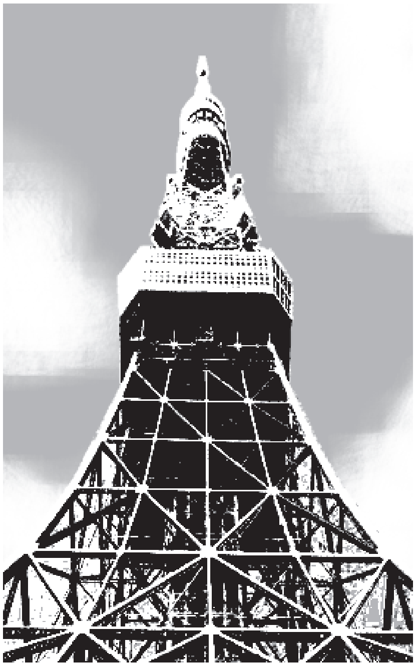
***Рис. 2.** Графики скорости и пути.*

Обратим также внимание на то, что пройденный путь увеличивается, когда скорость Футоши положительна, и уменьшается, когда отрицательна (то есть в это время Футоши возвращался).

ГАЗЕТА «ВЕЧЕРНИЙ ИНТЕГРАЛ» Вып. 1 Стр. 2

Сенсация: Свободное падение тела с Токийской башни

Сколько секунд до земли?



Мы знаем, что брошенное тело обязательно упадёт на землю. При этом оно будет ускоряться под действием силы притяжения к Земле, то есть его скорость будет постоянно меняться. Для описания этого движения воспользуемся интегрированием.

Для наглядности рассмотрим более масштабный бросок — с самого верха Токийской башни. Найдём, за сколько секунд тело достигнет земли. Для этого нам совсем не обязательно следовать совету Футоши: «Почему бы вам не пойти на Токийскую башню с секундомером и не измерить это время?»

Увеличение скорости при свободном падении тела вызвано ускорением свободного падения, равным 9,8 м/с^2. Другими словами, скорость тела каждую секунду увеличивается на 9,8 м/с. Не будем выяснять, откуда берётся именно это значение, просто воспользуемся им.

Мы знаем, что интеграл скорости — это разность положений (или пройденный телом путь). Воспользуемся основной теоремой интегрирования и запишем выражение для вычисления расстояния, которое пролетит тело за T секунд падения:

$$F(T) - F(0) = \int_0^T v(x)dx = \int_0^T 9{,}8x dx.$$

Интеграл от 0 до T равен закрашенной площади на **Рис. 3**, которая в свою очередь равна половине произведения *9,8t* на t, то есть $0.5 \times 9.8t \times t$.

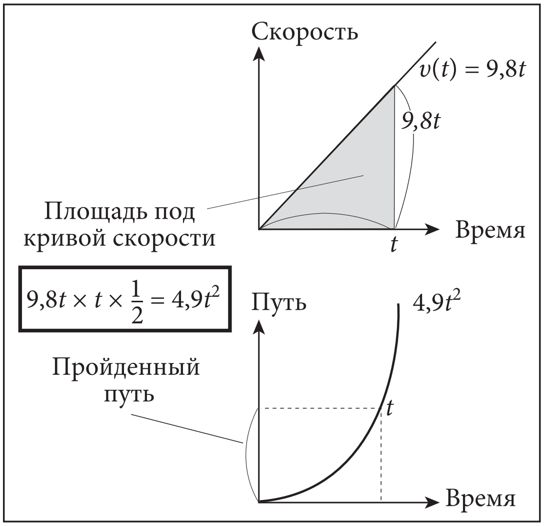


Рис. 3.

В результате получаем:

$$F(T) - F(0) = 4{,}9T^2 - 4{,}9 \times 0^2 = 4{,}9T^2.$$

Так как высота башни Токио 333 м, то:

$$333 = 4{,}9T^2 \to T = \sqrt{333/4{,}9} = 8{,}2 \text{ с}.$$

Тело достигнет земли через 8.2 с.

При решении мы пренебрегли для простоты сопротивлением воздуха.

ГАЗЕТА «ВЕЧЕРНИЙ ИНТЕГРАЛ» **Вып. 1** **Стр. 3**

Независимое расследование Норико Хикимы: Мечем кости!

Ещё одно применение основной теоремы интегрирования.

Многие, наверняка, играли в детстве в кости — кубики с цифрами от 1 до 6. С давних времен эти кубики путешествовали по всему миру, не только принося удачу в азартных играх, но и предсказывая судьбу.

С точки зрения математики кости — это компактный генератор случайных чисел. Воспользуемся этим и будем бросать кости, чтобы ещё раз проверить формулу интегрирования! На костях могут выпасть цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Вероятность выпадения любой цифры равна 1/6, что изображено в виде гистограммы на **Рис. 4** (по оси x — цифры, по оси y — вероятность).

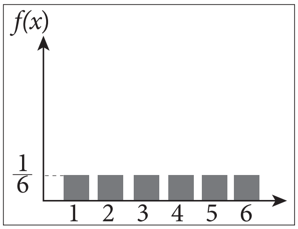


Рис. 4. *Функция плотности вероятности.*

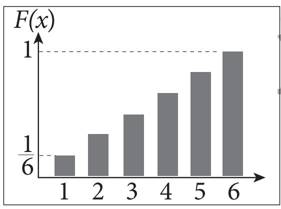


Рис. 5. *Функция распределения вероятности.*

Функция $f(x)$ равна вероятности выпадения цифры x, например $f(4) = 1/6$ (вероятность выпадения цифры 4 равна 1/6). На **Рис. 5** изображена функция распределения вероятности.

Рассмотрим её подробнее. Так как на костях нет цифр меньше 1, то в интервале от 0 до 1 вероятность равна нулю. В точке $x = 1$ происходит скачок до 1/6. В интервале от 1 до 2 вероятность не изменяется, а в точке $x = 2$ происходит очередной скачок на 1/6, увеличивая вероятность до 2/6. Продвигаясь далее по оси x, мы дойдём до вероятности 1 в точке $x = 6$. Другими словами, вероятность выпадения цифры меньше или равной 6 равна 1.

На **Рис. 6** показано, как можно графически найти вероятность выпадения чисел, больших 2 и меньших либо равных 5.

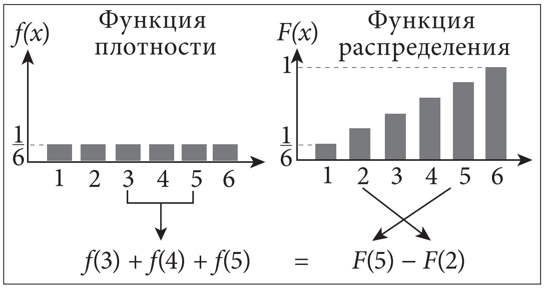
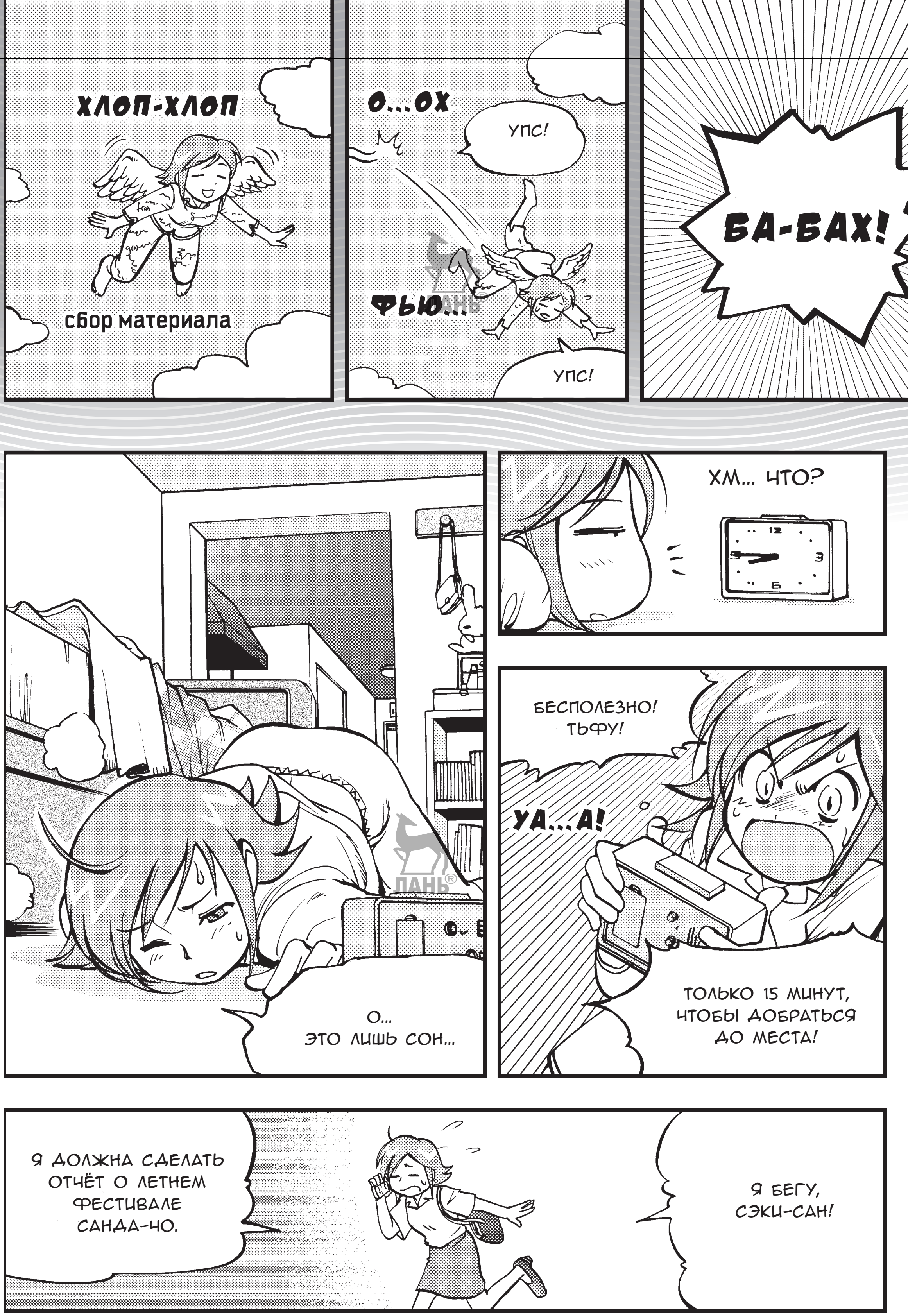


Рис. 6. *Производная функции распределения равна функции плотности вероятности $F'(x) = f(x)$.*

Из **Рис. 6** мы видим, что для нахождения вероятности выпадения x в интервале $a \le x \le b$ можно использовать формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Мы опять получили основную теорему интегрирования! И это означает, что $f(x)$ есть не что иное, как производная $F(x)$. Метание костей — великолепное занятие!


ХЛОП-ХЛОП
сбор материала
О...ОХ
УПС!
ФЬЮ...
УПС!
БА-БАХ!
ХМ... ЧТО?
О...
ЭТО ЛИШЬ СОН...
БЕСПОЛЕЗНО!
ТЬФУ!
УА...А!
ТОЛЬКО 15 МИНУТ,
ЧТОБЫ ДОБРАТЬСЯ
ДО МЕСТА!
Я ДОЛЖНА СДЕЛАТЬ
ОТЧЁТ О ЛЕТНЕМ
ФЕСТИВАЛЕ
САНДА-ЧО.
Я БЕГУ,
СЭКИ-САН!

3.5. СВОДКА ПО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если функция $f(x)$ — производная функции $F(x)$, то есть

$$F'(x) = f(x),$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

или

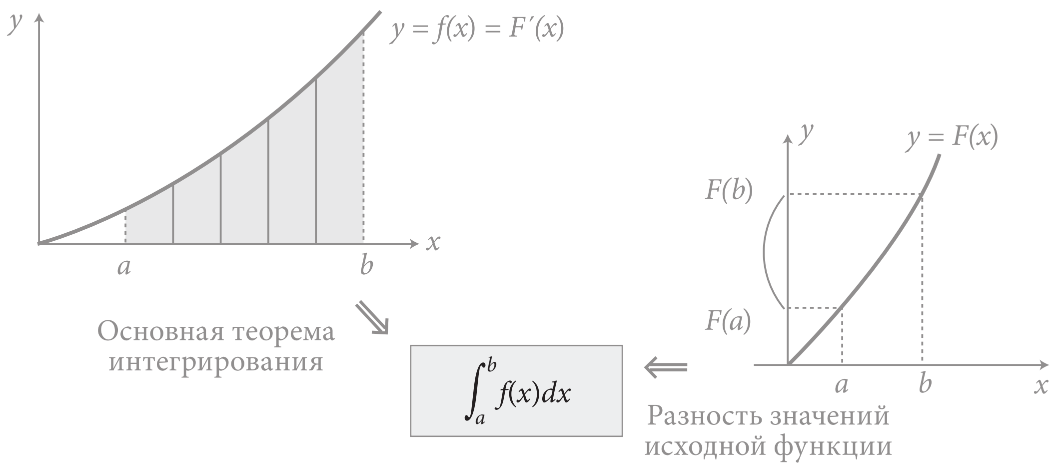
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эти формулы означают следующее:

Интеграл производной от исходной функции на отрезке от a до b	=	Разность между значениями исходной функции в точках b и a

Используя графический подход, это равенство можно записать так:

Площадь фигуры, образованной графиком производной от исходной функции, осью x и вертикальными отрезками, построенными из точек $x = a$ и $x = b$	=	Приращение значений исходной функции на отрезке от a до b



Интегрирование методом подстановки

Найдём, как изменится выражение для определённого интеграла по x

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

если вместо переменной x подставить функцию, выражающую x через переменную y

$$x = g(y).$$

Запишем формулу, выражающую определённый интеграл через сумму ступенчатой функции:

$$S \approx \sum_{k=0,1,\ldots,n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

Заменяя переменную x на $x = g(y)$, мы перейдём к новой переменной y и получим следующие значения точек разбиения

$$y_0 = \alpha, y_1, y_2, \ldots, y_n = \beta,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$a = g(\alpha), x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2), \ldots, b = g(\beta).$$

Используя приближённую линейную функцию, выразим приращение x через приращение y:

$$x_{k+1} - x_k = g(y_{k+1}) - g(y_k) \approx g'(y_k)(y_{k+1} - y_k)$$

и подставим его в выражение для S:

$$S \approx \sum_{k=0,1,\ldots,n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \approx \sum_{k=0,1,\ldots,n-1} f(g(y_k))g'(y_k)(y_{k+1} - y_k).$$

Переход от суммы к интегралу при бесконечном числе разбиений даст нам следующую формулу:

$$S = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy.$$

Таким образом, мы получили формулу для интегрирования методом подстановки.

Интегрирование методом подстановки		
Если $x = g(y)$, то	$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy.$	(3.4)

Пример

Вычислить

$$\int_0^1 10(2x+1)^4 dx.$$

Заменим переменную x на $y = 2x + 1$. Тогда $x = g(y) = 1/2\ (y - 1)$.

Дифференцируя правую и левую части уравнения $y = 2x + 1$, мы получим:

$$dy = 2dx,$$

или

$$dx = 1/2\ dy.$$

Перепишем теперь интеграл, используя новую переменную y и учитывая, что границы интегрирования изменились. Заменяем 0 на $2 \times 0 + 1 = 1$ и 1 на $2 \times 1 + 1 = 3$.

Тогда

$$\int_0^1 10(2x+1)^4 dx = \int_1^3 10y^4\ 1/2\ dy = \int_1^3 5y^4 dy = 3^5 - 1^5 = 242.$$

3.6. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Найдите определённый интеграл

1) $\int_2^3 3x^2 dx.$

2) $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2} dx.$

3) $\int_0^5 (x + (1 + x^2)^7) dx + \int_0^5 (x - (1 + x^2)^7) dx.$

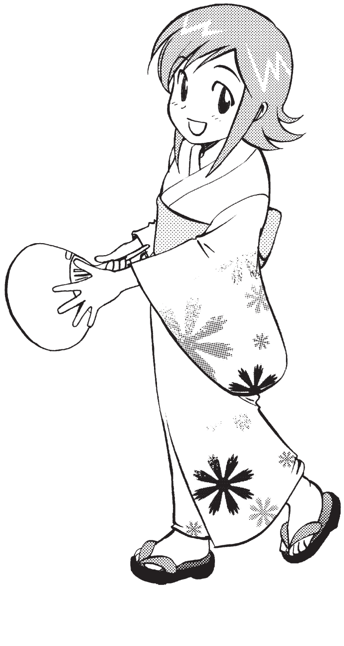
2. Ответьте на вопросы

1) Запишите выражение для определённого интеграла, равного площади фигуры, ограниченной кривой функции $y = f(x) = x^2 - 3x$ и осью x.

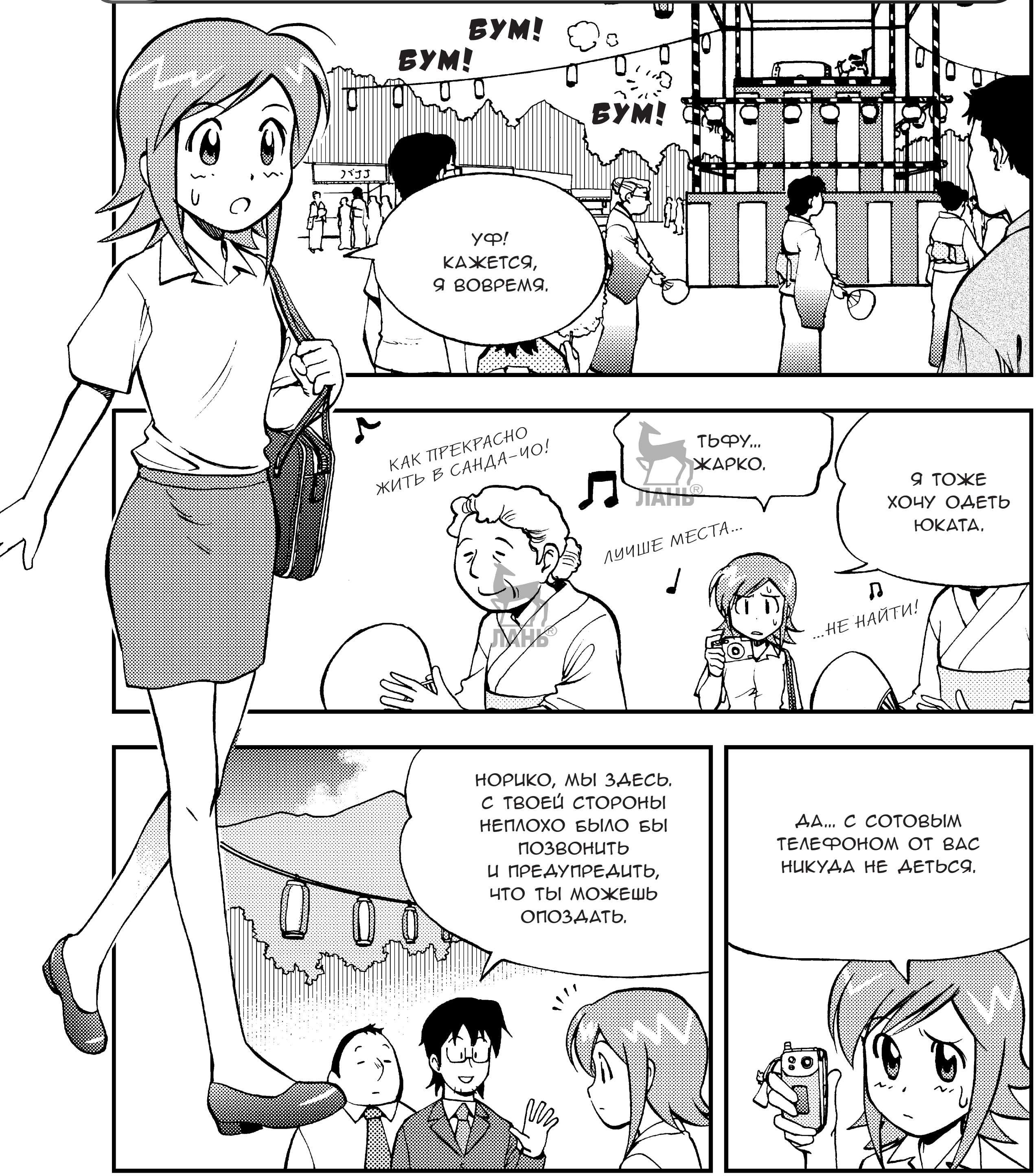
2) Найдите площадь фигуры из предыдущего задания.

4

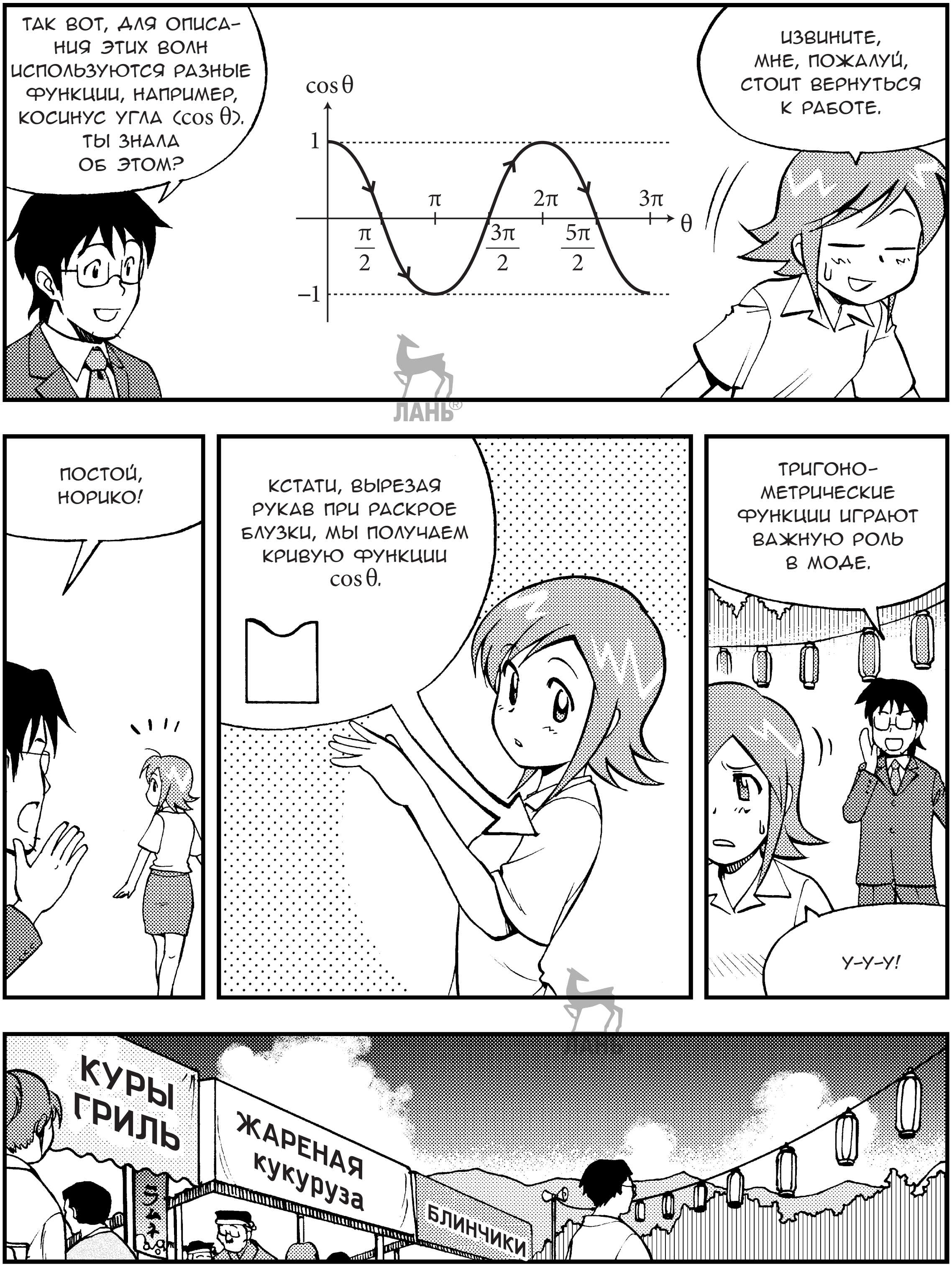
ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ!

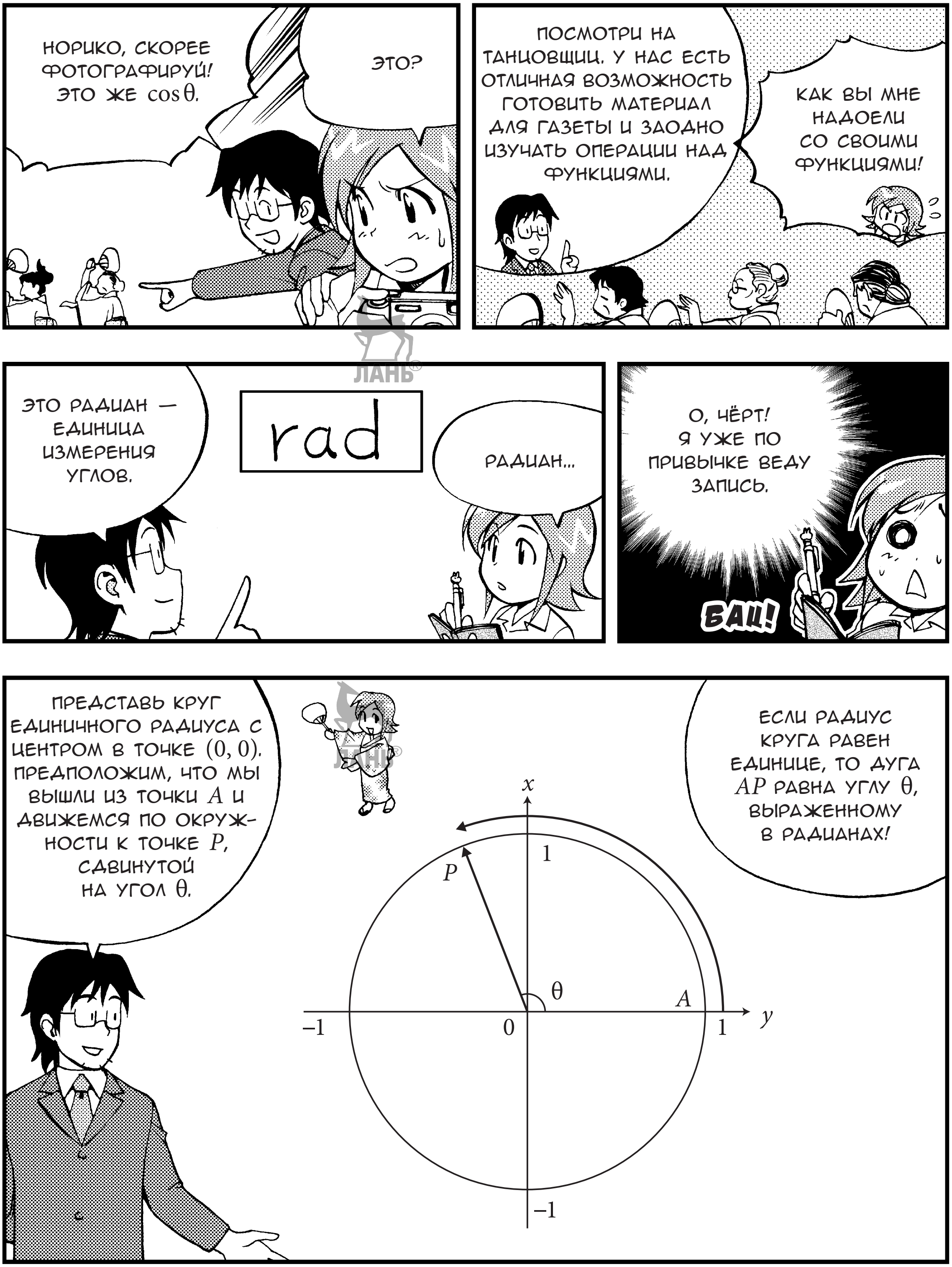


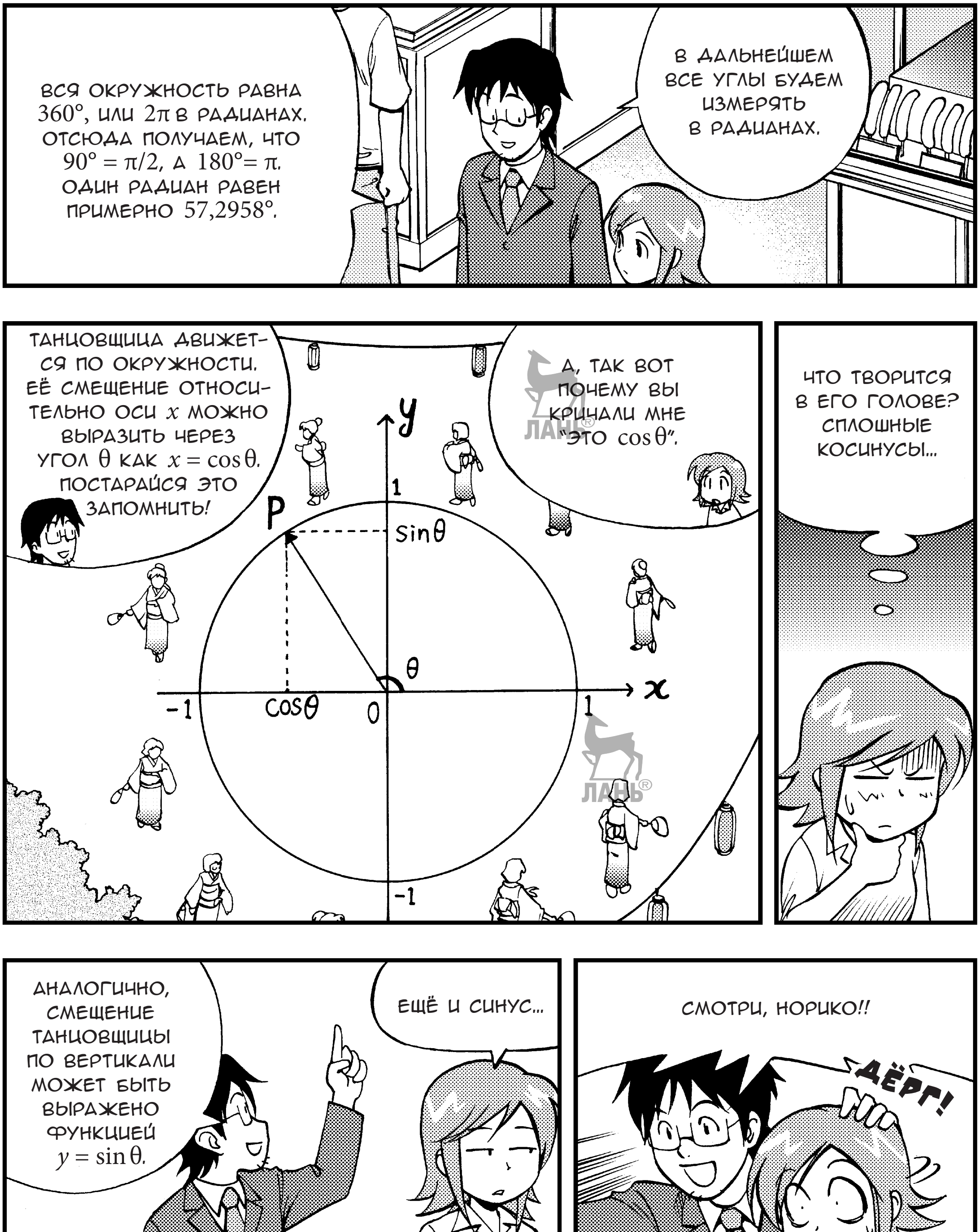
4.1. ТАНЦЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

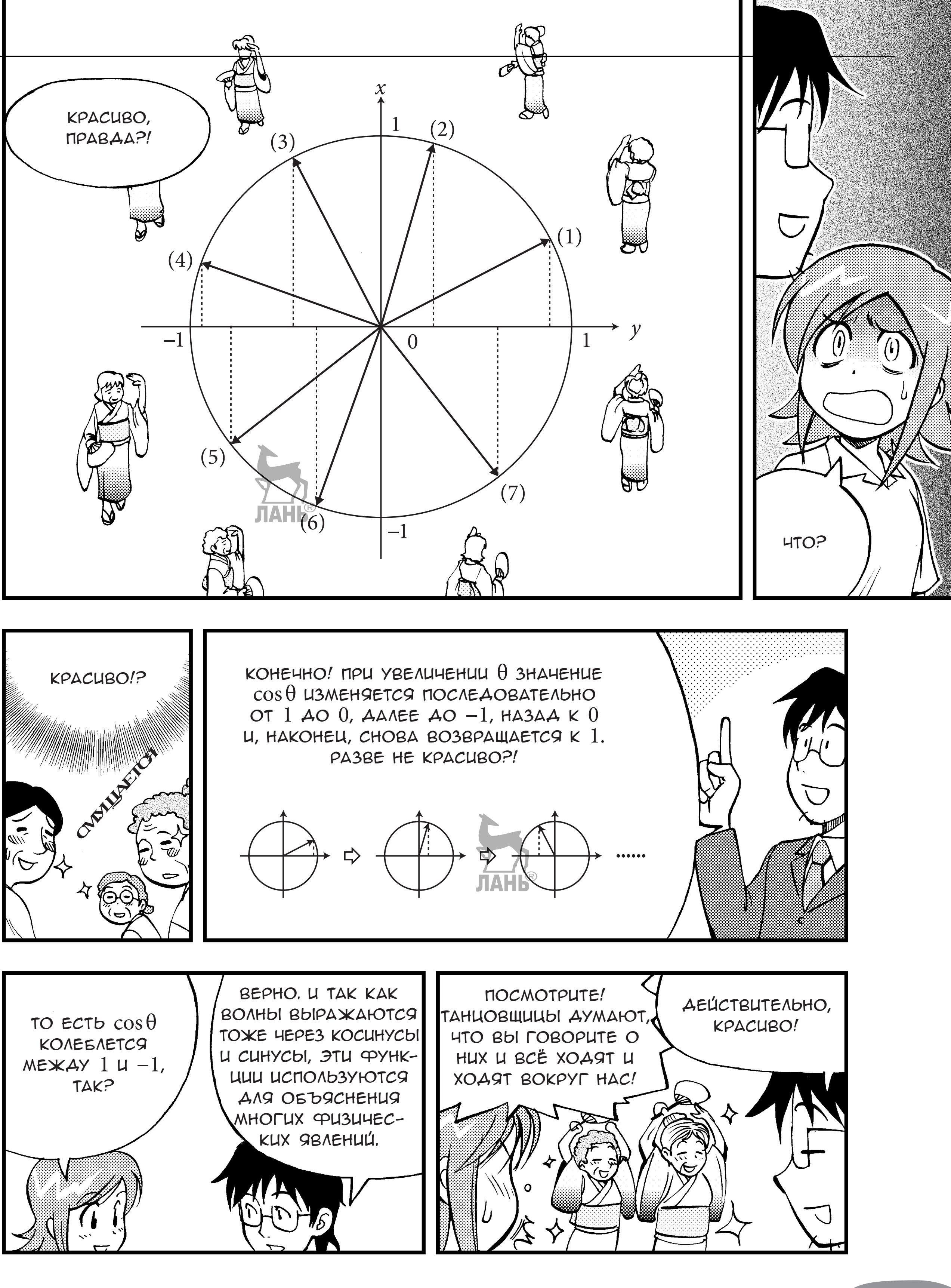



Да-а! А вот когда я был начинающим репортёром, таких удобств не было.
Когда подходил срок сдачи материалов в редакцию, мне часто приходилось использовать таксофон.
Слово за словом я читал свой отчёт моему ассистенту по телефону.
С ума сойти можно!
Теперь всё проще, спасибо радио-волнам.
Кстати знаешь ли ты, что в природе встречаются и другие виды волн?
Да! Океанские, сейсмические, звуковые волны... и даже свет.


Так вот, для описания этих волн используются разные функции, например, косинус угла (cos θ). Ты знала об этом?
cos θ
1
–1
π
2π
3π
θ
π/2
3π/2
5π/2
Извините, мне, пожалуй, стоит вернуться к работе.
Постой, Норико!
Кстати, вырезая рукав при раскрое блузки, мы получаем кривую функции cos θ.
Тригонометрические функции играют важную роль в моде.
У-у-у!
КУРЫ ГРИЛЬ
ЖАРЕНАЯ кукуруза
БЛИНЧИКИ

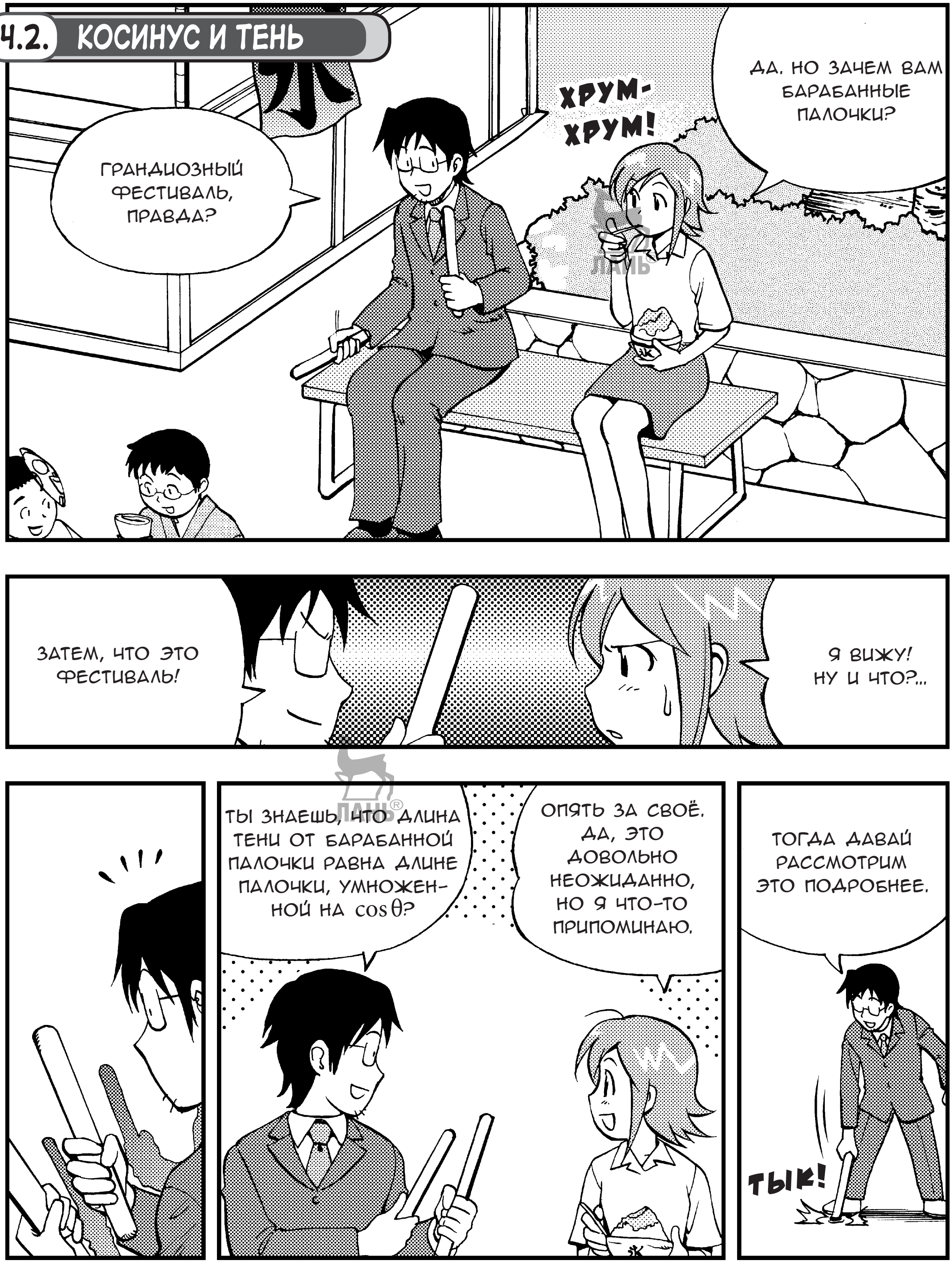

НОРИКО, СКОРЕЕ ФОТОГРАФИРУЙ! ЭТО ЖЕ $\cos\theta$.
ЭТО?
ПОСМОТРИ НА ТАНЦОВЩИЦ. У НАС ЕСТЬ ОТЛИЧНАЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ГОТОВИТЬ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ГАЗЕТЫ И ЗАОДНО ИЗУЧАТЬ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ.
КАК ВЫ МНЕ НАДОЕЛИ СО СВОИМИ ФУНКЦИЯМИ!
ЭТО РАДИАН — ЕДИНИЦА ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ.
rad
РАДИАН...
О, ЧЁРТ! Я УЖЕ ПО ПРИВЫЧКЕ ВЕДУ ЗАПИСЬ.
БАЦ!
ПРЕДСТАВЬ КРУГ ЕДИНИЧНОГО РАДИУСА С ЦЕНТРОМ В ТОЧКЕ $(0, 0)$. ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО МЫ ВЫШЛИ ИЗ ТОЧКИ A И ДВИЖЕМСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ К ТОЧКЕ P, СДВИНУТОЙ НА УГОЛ θ.
ЕСЛИ РАДИУС КРУГА РАВЕН ЕДИНИЦЕ, ТО ДУГА AP РАВНА УГЛУ θ, ВЫРАЖЕННОМУ В РАДИАНАХ!
x
1
P
θ
A
-1
0
1
y
-1

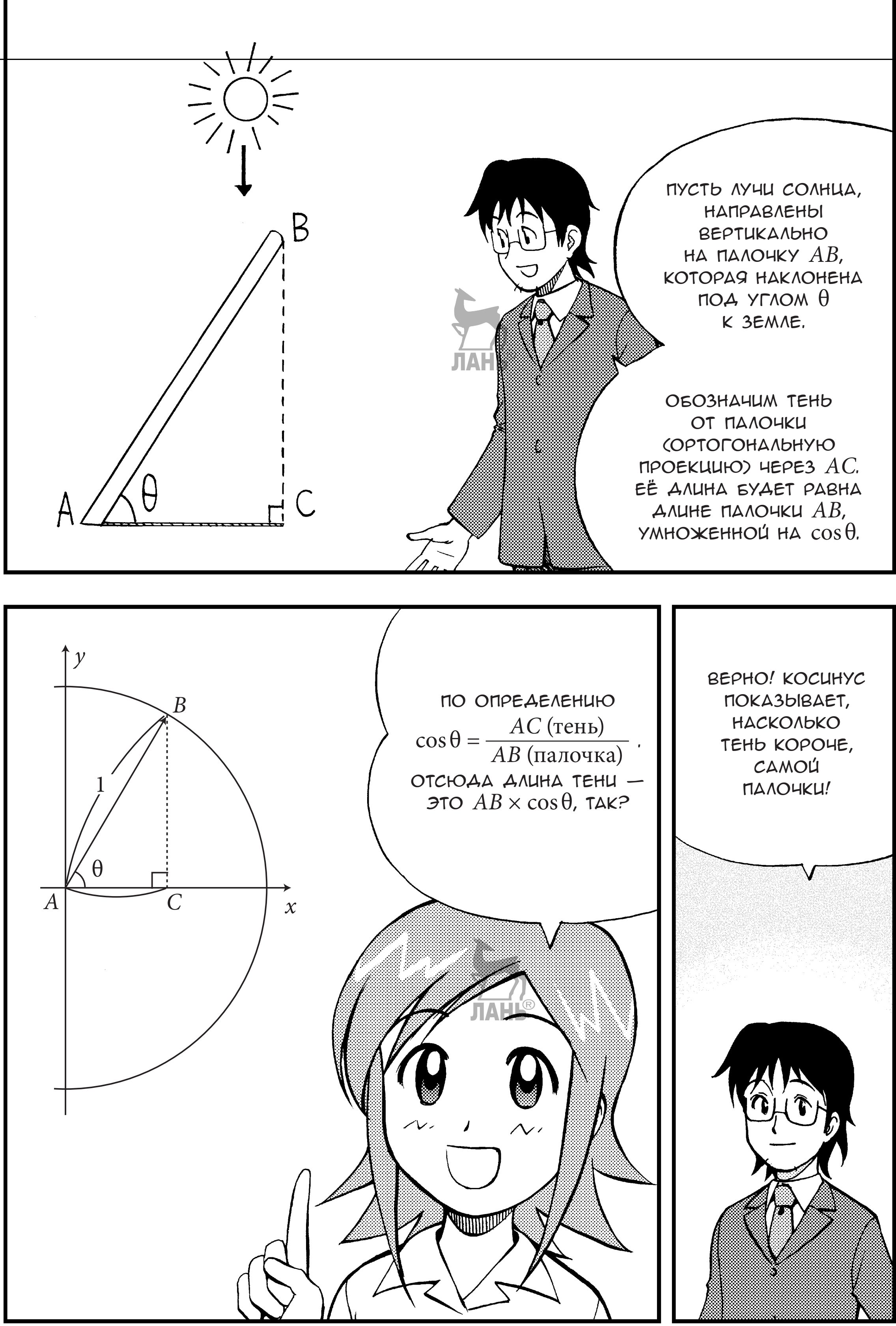

Вся окружность равна $360°$, или 2π в радианах. Отсюда получаем, что $90° = \pi/2$, а $180° = \pi$. Один радиан равен примерно $57{,}2958°$.
В дальнейшем все углы будем измерять в радианах.
Танцовщица движется по окружности. Её смещение относительно оси x можно выразить через угол θ как $x = \cos\theta$. Постарайся это запомнить!
А, так вот почему вы кричали мне "это $\cos\theta$".
y
1
P
$\sin\theta$
θ
x
–1
$\cos\theta$
0
1
–1
Что творится в его голове? Сплошные косинусы...
Аналогично, смещение танцовщицы по вертикали может быть выражено функцией $y = \sin\theta$.
Ещё и синус...
Смотри, Норико!!
Дёрг!



КРАСИВО, ПРАВДА?!
x
y
1
−1
0
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
ЧТО?
КРАСИВО!?
СМУЩАЕТСЯ
КОНЕЧНО! ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ θ ЗНАЧЕНИЕ $\cos\theta$ ИЗМЕНЯЕТСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ОТ 1 ДО 0, ДАЛЕЕ ДО −1, НАЗАД К 0 И, НАКОНЕЦ, СНОВА ВОЗВРАЩАЕТСЯ К 1. РАЗВЕ НЕ КРАСИВО?!
ТО ЕСТЬ $\cos\theta$ КОЛЕБЛЕТСЯ МЕЖДУ 1 И −1, ТАК?
ВЕРНО. И ТАК КАК ВОЛНЫ ВЫРАЖАЮТСЯ ТОЖЕ ЧЕРЕЗ КОСИНУСЫ И СИНУСЫ, ЭТИ ФУНКЦИИ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ ОБЪЯСНЕНИЯ МНОГИХ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ.
ПОСМОТРИТЕ! ТАНЦОВЩИЦЫ ДУМАЮТ, ЧТО ВЫ ГОВОРИТЕ О НИХ И ВСЁ ХОДЯТ И ХОДЯТ ВОКРУГ НАС!
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО, КРАСИВО!

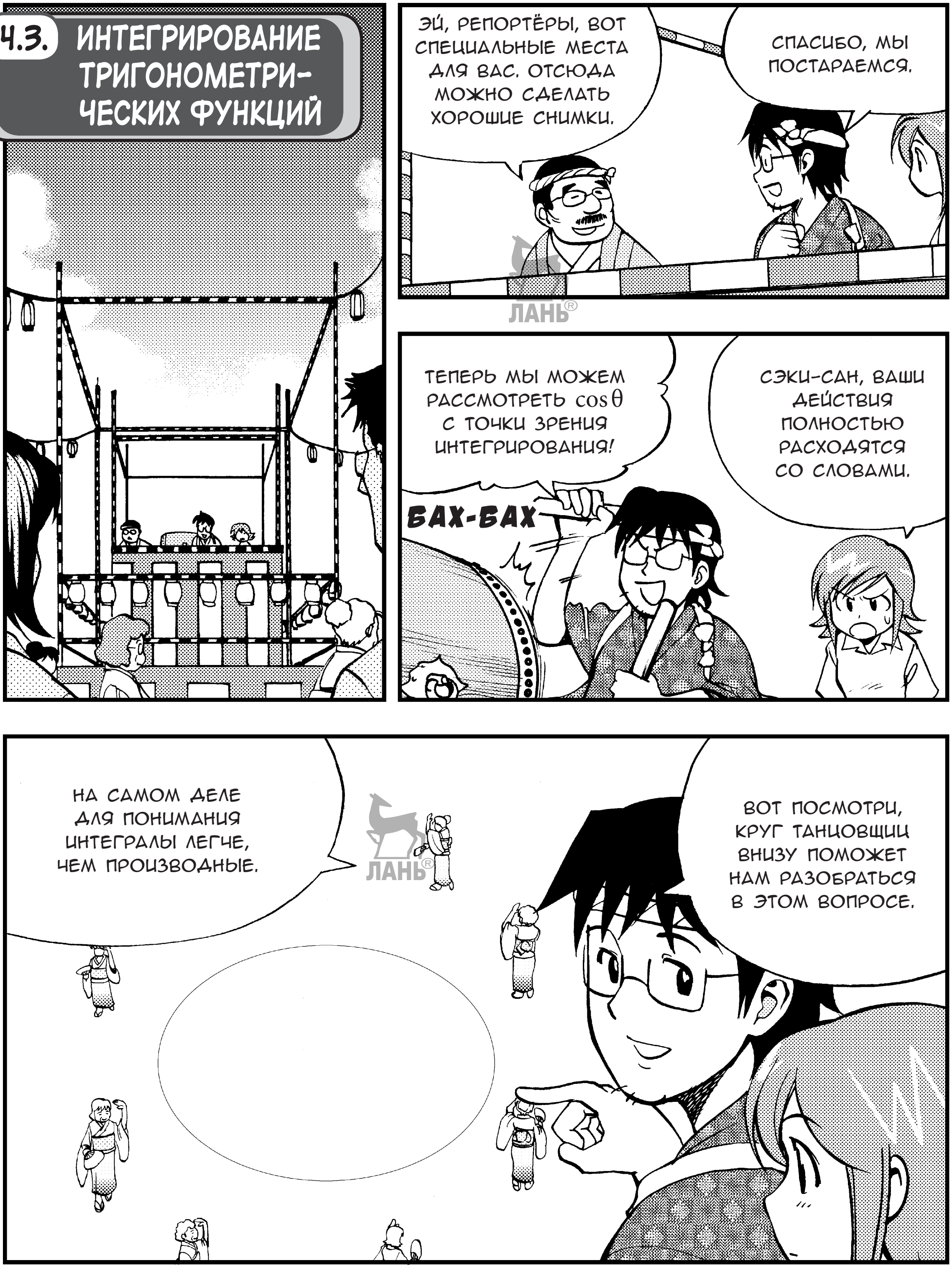
4.2. Косинус и тень

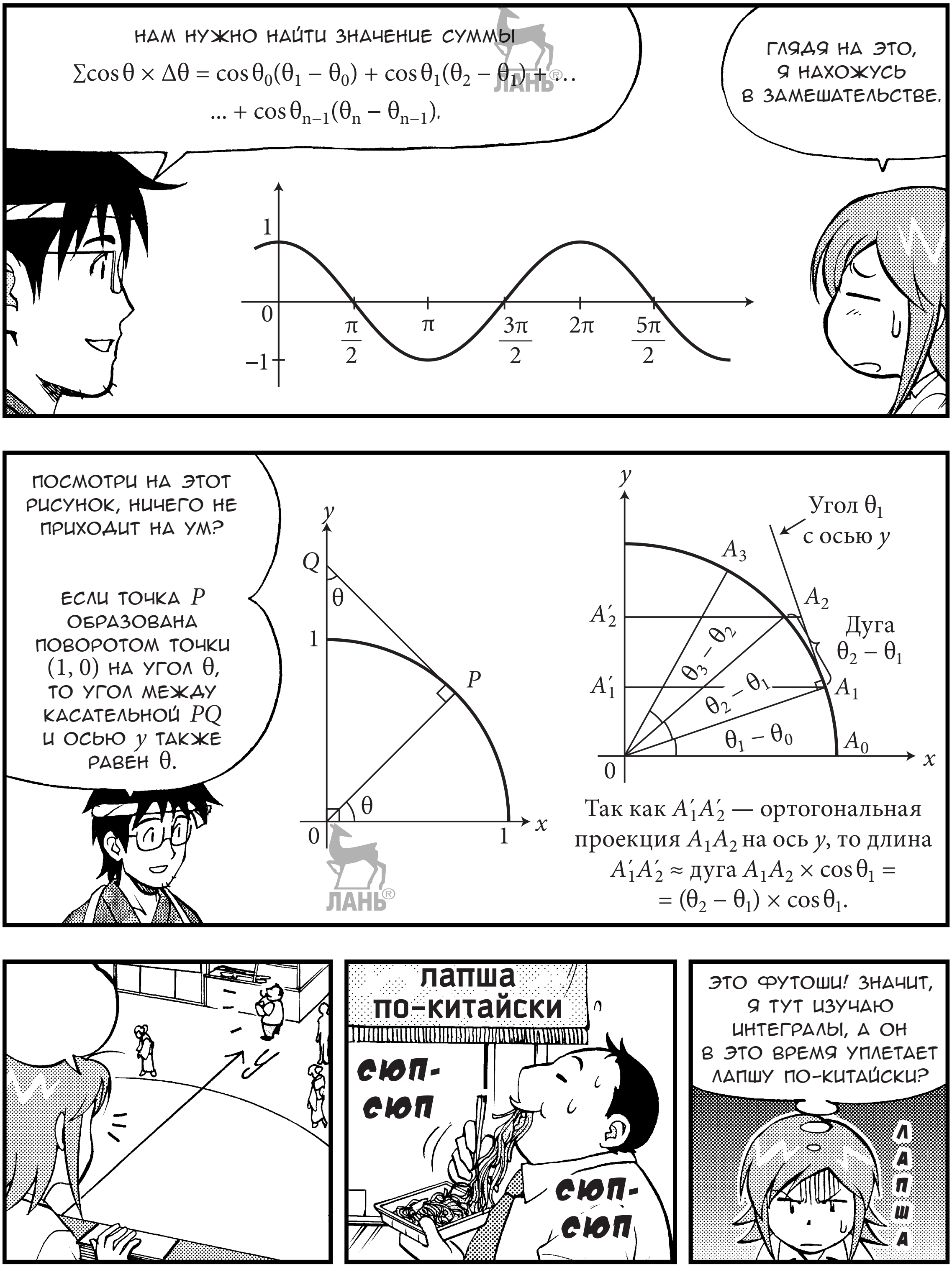


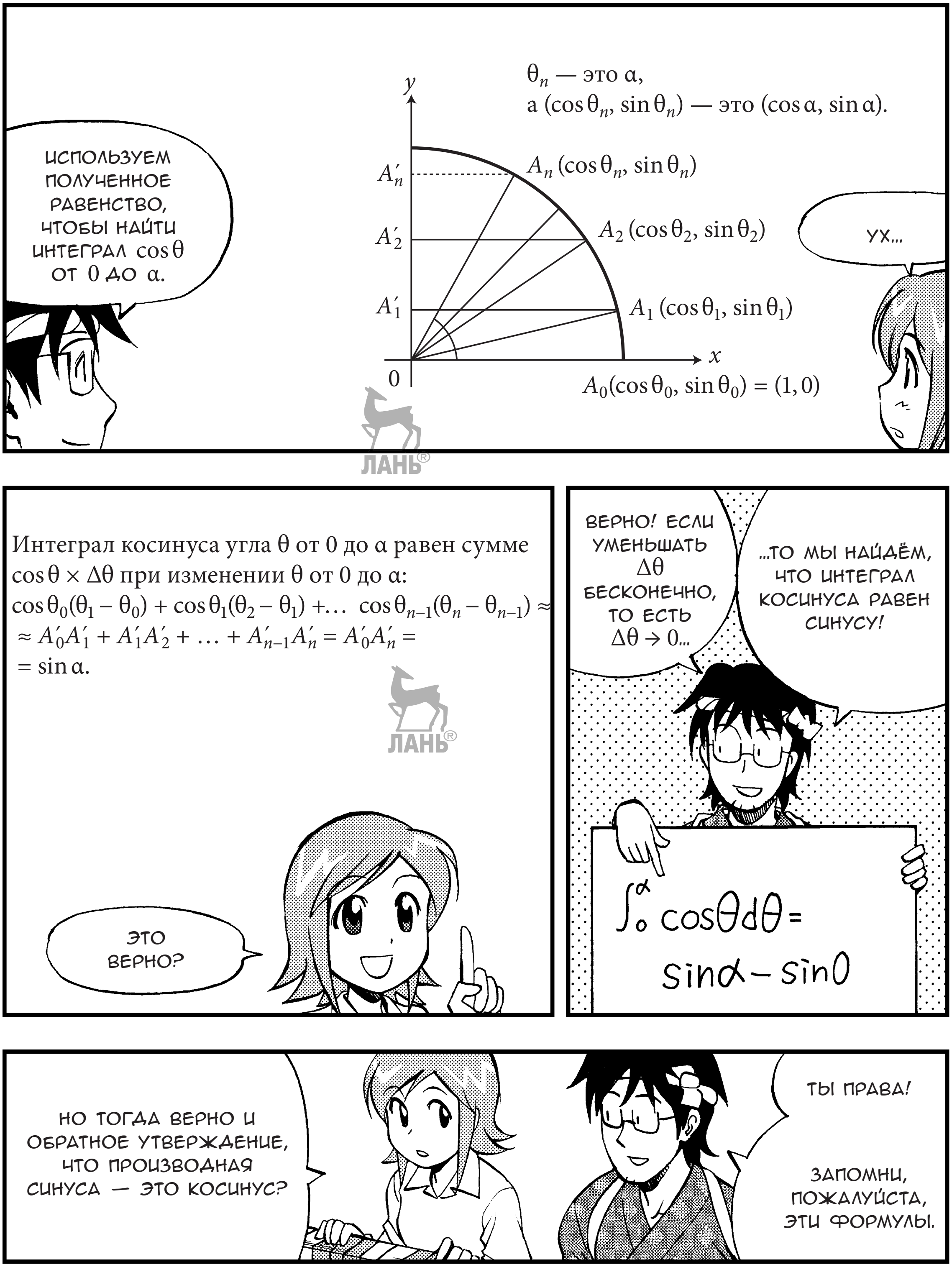

B
A
θ
C
ПУСТЬ ЛУЧИ СОЛНЦА, НАПРАВЛЕНЫ ВЕРТИКАЛЬНО НА ПАЛОЧКУ AB, КОТОРАЯ НАКЛОНЕНА ПОД УГЛОМ θ К ЗЕМЛЕ.
ОБОЗНАЧИМ ТЕНЬ ОТ ПАЛОЧКИ (ОРТОГОНАЛЬНУЮ ПРОЕКЦИЮ) ЧЕРЕЗ AC. ЕЁ ДЛИНА БУДЕТ РАВНА ДЛИНЕ ПАЛОЧКИ AB, УМНОЖЕННОЙ НА $\cos\theta$.
y
B
1
θ
A
C
x
ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ $\cos\theta = \dfrac{AC\text{ (тень)}}{AB\text{ (палочка)}}$. ОТСЮДА ДЛИНА ТЕНИ — ЭТО $AB \times \cos\theta$, ТАК?
ВЕРНО! КОСИНУС ПОКАЗЫВАЕТ, НАСКОЛЬКО ТЕНЬ КОРОЧЕ, САМОЙ ПАЛОЧКИ!

ЕСЛИ ПОВЕРНУТЬ ОСЬ x НА УГОЛ $\pi/2$, ТО ОНА СОВПАДЁТ С ОСЬЮ y. ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ФУНКЦИЯ $\sin\theta$, СОВПАДАЕТ С ФУНКЦИЕЙ $\cos\theta$, ЕСЛИ УЧЕСТЬ ЗАПАЗДЫВАНИЕ. НА $\pi/2$.
y
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
θ
x
$\cos\theta$
ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$
$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$
$\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$
$=-\sin\theta$
В ЧЁМ ДЕЛО?
А КОГДА ВЫ ВЕРНЁТЕ НАМ БАРАБАННЫЕ ПАЛОЧКИ?
ПРЕКРАСНО, ТЕПЕРЬ МЫ ГОТОВЫ К ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ЛЕТНЕГО ФЕСТИВАЛЯ САНДА!
УХ!

4.3. Интегрирование тригонометрических функций




Нам нужно найти значение суммы
$\sum \cos\theta \times \Delta\theta = \cos\theta_0(\theta_1 - \theta_0) + \cos\theta_1(\theta_2 - \theta_1) + \ldots$
$\ldots + \cos\theta_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1})$.
Глядя на это, я нахожусь в замешательстве.
1
0
−1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
Посмотри на этот рисунок, ничего не приходит на ум?
Если точка P образована поворотом точки $(1, 0)$ на угол θ, то угол между касательной PQ и осью y также равен θ.
y
Q
θ
1
P
θ
0
1
x
y
Угол θ_1 с осью y
A_3
A_2
A'_2
Дуга $\theta_2 - \theta_1$
$\theta_3 - \theta_2$
A'_1
$\theta_2 - \theta_1$
A_1
$\theta_1 - \theta_0$
A_0
0
x
Так как $A'_1A'_2$ — ортогональная проекция A_1A_2 на ось y, то длина $A'_1A'_2 \approx$ дуга $A_1A_2 \times \cos\theta_1 =$
$= (\theta_2 - \theta_1) \times \cos\theta_1$.
Лапша по-китайски
Сюп-сюп
Сюп-сюп
Это Футоши! Значит, я тут изучаю интегралы, а он в это время уплетает лапшу по-китайски?
Лапша


ИСПОЛЬЗУЕМ ПОЛУЧЕННОЕ РАВЕНСТВО, ЧТОБЫ НАЙТИ ИНТЕГРАЛ $\cos\theta$ ОТ 0 ДО α.
θ_n — это α,
а $(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$ — это $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.
y
x
0
A'_n
A'_2
A'_1
$A_n\,(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$
$A_2\,(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$
$A_1\,(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$
$A_0(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = (1, 0)$
УХ...
Интеграл косинуса угла θ от 0 до α равен сумме $\cos\theta \times \Delta\theta$ при изменении θ от 0 до α:
$\cos\theta_0(\theta_1 - \theta_0) + \cos\theta_1(\theta_2 - \theta_1) + \ldots\ \cos\theta_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}) \approx$
$\approx A'_0A'_1 + A'_1A'_2 + \ldots + A'_{n-1}A'_n = A'_0A'_n =$
$= \sin\alpha$.
ЭТО ВЕРНО?
ВЕРНО! ЕСЛИ УМЕНЬШАТЬ $\Delta\theta$ БЕСКОНЕЧНО, ТО ЕСТЬ $\Delta\theta \to 0$...
...ТО МЫ НАЙДЁМ, ЧТО ИНТЕГРАЛ КОСИНУСА РАВЕН СИНУСУ!
$\int_0^\alpha \cos\theta d\theta = \sin\alpha - \sin 0$
НО ТОГДА ВЕРНО И ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ, ЧТО ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА — ЭТО КОСИНУС?
ТЫ ПРАВА!
ЗАПОМНИ, ПОЖАЛУЙСТА, ЭТИ ФОРМУЛЫ.

Дифференцирование и интегрирование тригонометрических функций

$$\int_0^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = \sin\alpha - \sin 0. \tag{4.1}$$

Из формулы (4.1) следует, что

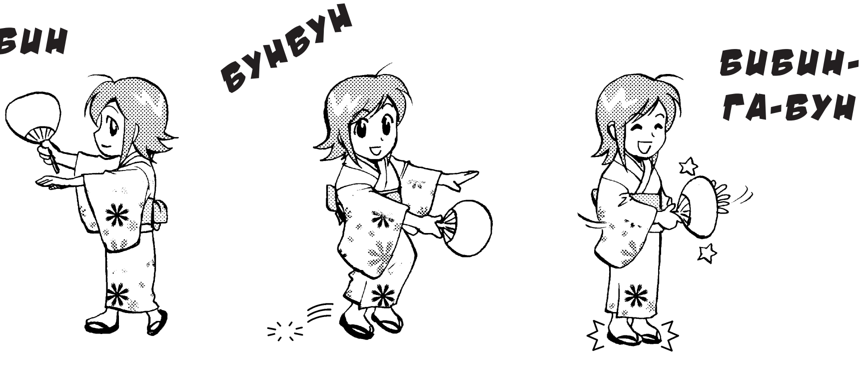
$$(\sin\theta)' = \cos\theta. \tag{4.2}$$

Заменяя в формуле (4.2) θ на $\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$, получаем $\left(\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$, откуда, согласно тождеству на стр. 122, следует формула

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta. \tag{4.3}$$

Танец интегрирования

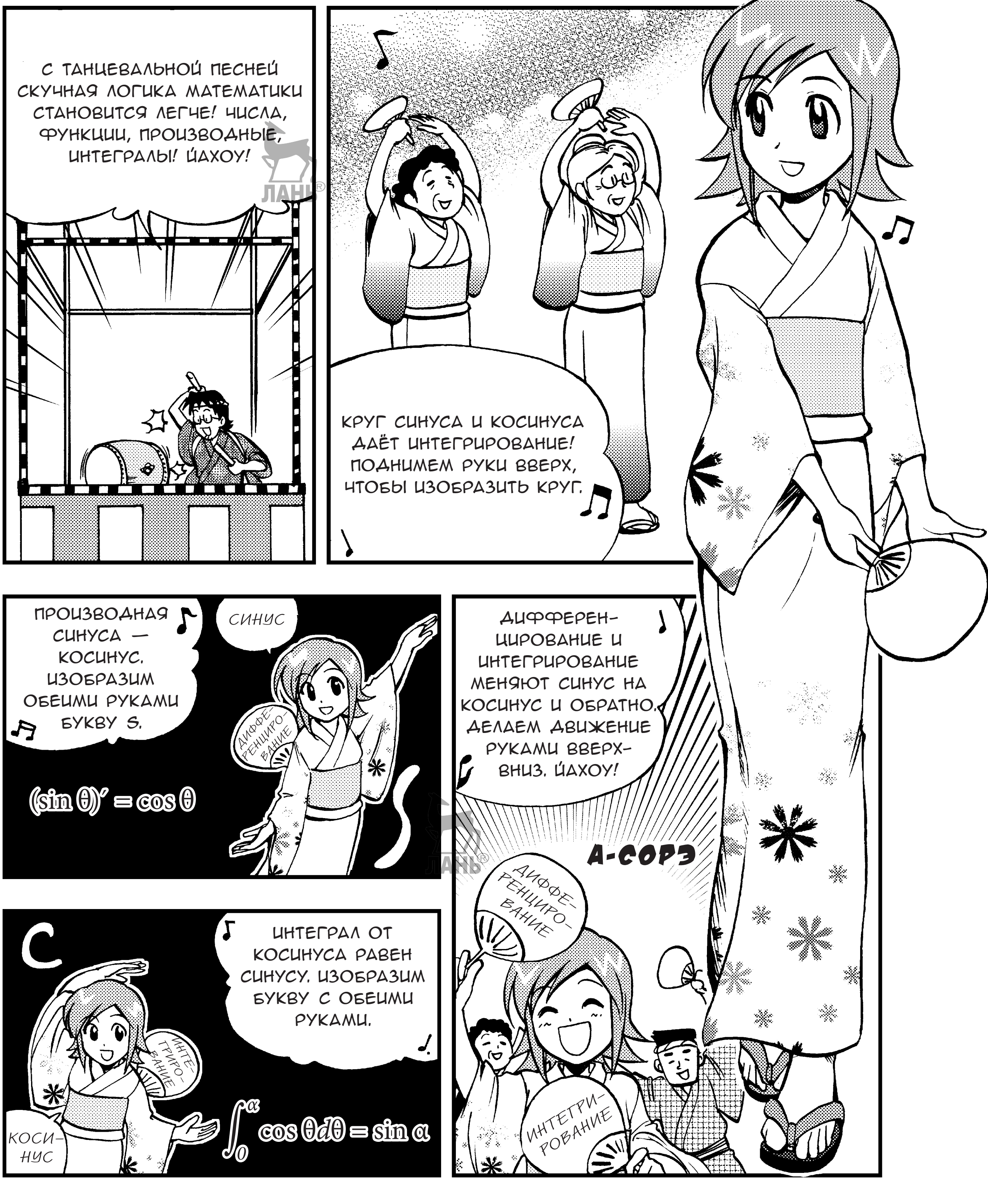
Тригонометрическая версия



Поднимаем обе руки прямо перед собой

Подпрыгиваем и разворачиваемся влево

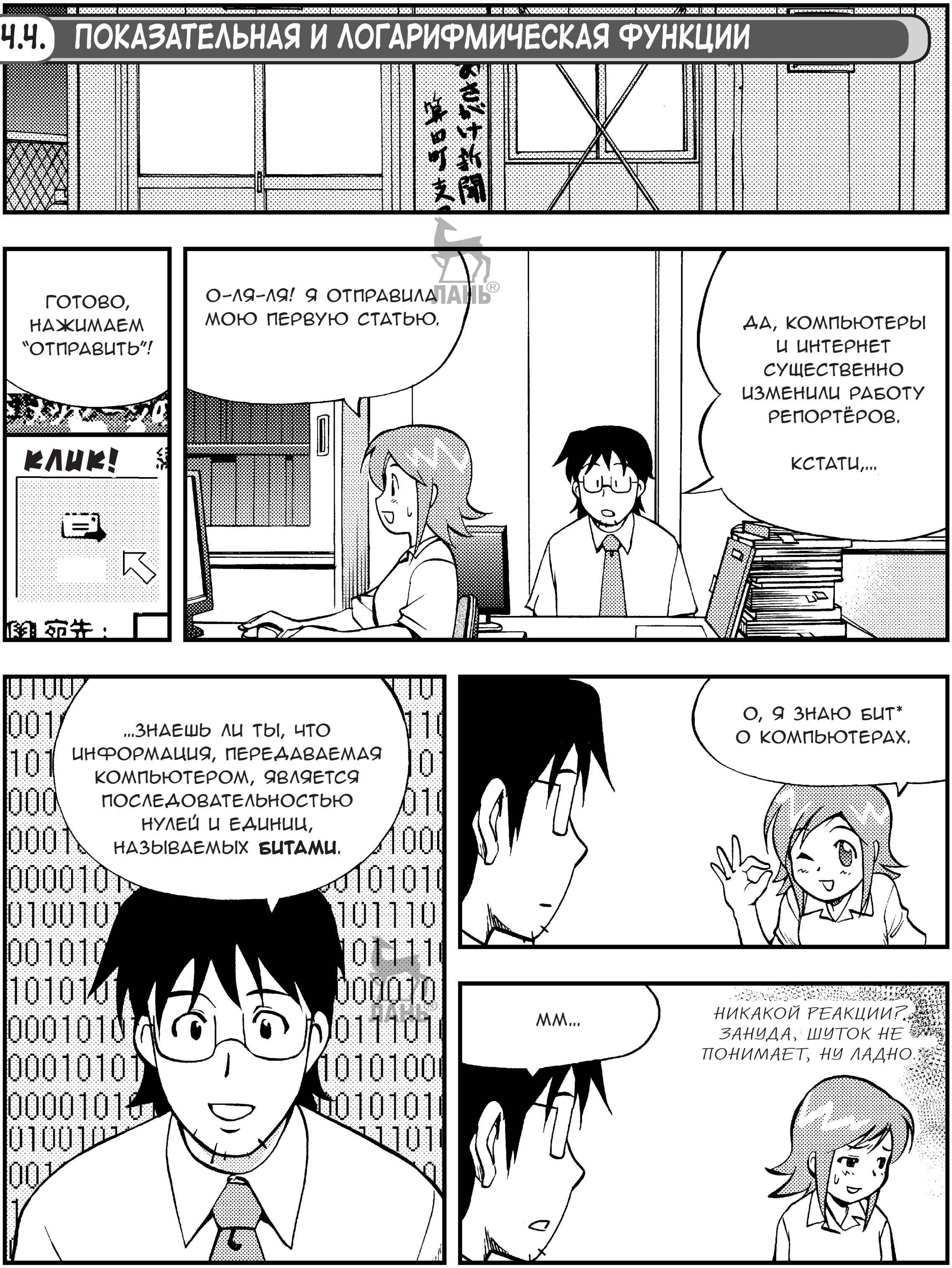
Подпрыгиваем ещё раз и дважды хлопаем в ладоши



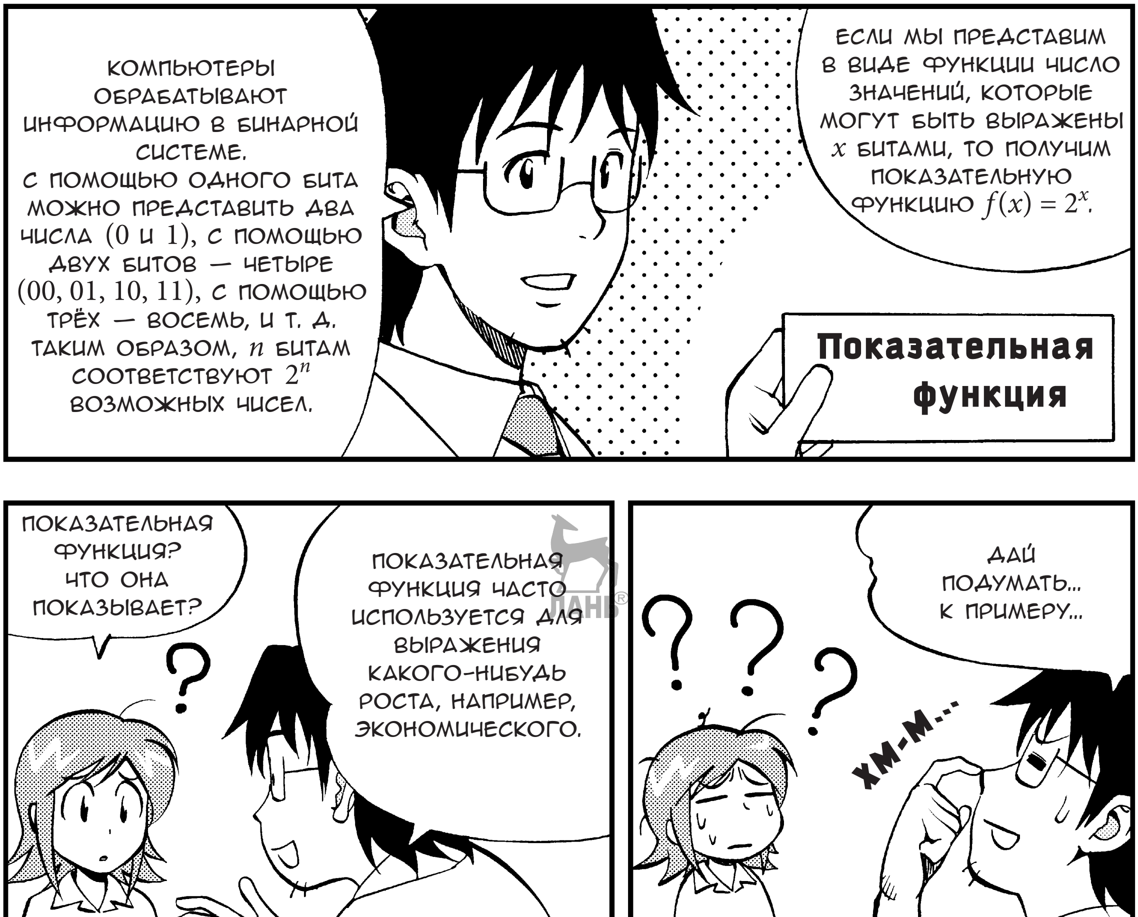
С танцевальной песней скучная логика математики становится легче! Числа, функции, производные, интегралы! Йахоу!
Круг синуса и косинуса даёт интегрирование! Поднимем руки вверх, чтобы изобразить круг.
Производная синуса — косинус. Изобразим обеими руками букву S.
синус
дифференцирование
(sin θ)′ = cos θ
Дифференцирование и интегрирование меняют синус на косинус и обратно. Делаем движение руками вверх-вниз. Йахоу!
А-сорэ
дифференцирование
C
Интеграл от косинуса равен синусу. Изобразим букву C обеими руками.
интегрирование
косинус
∫₀^α cos θdθ = sin α
интегрирование

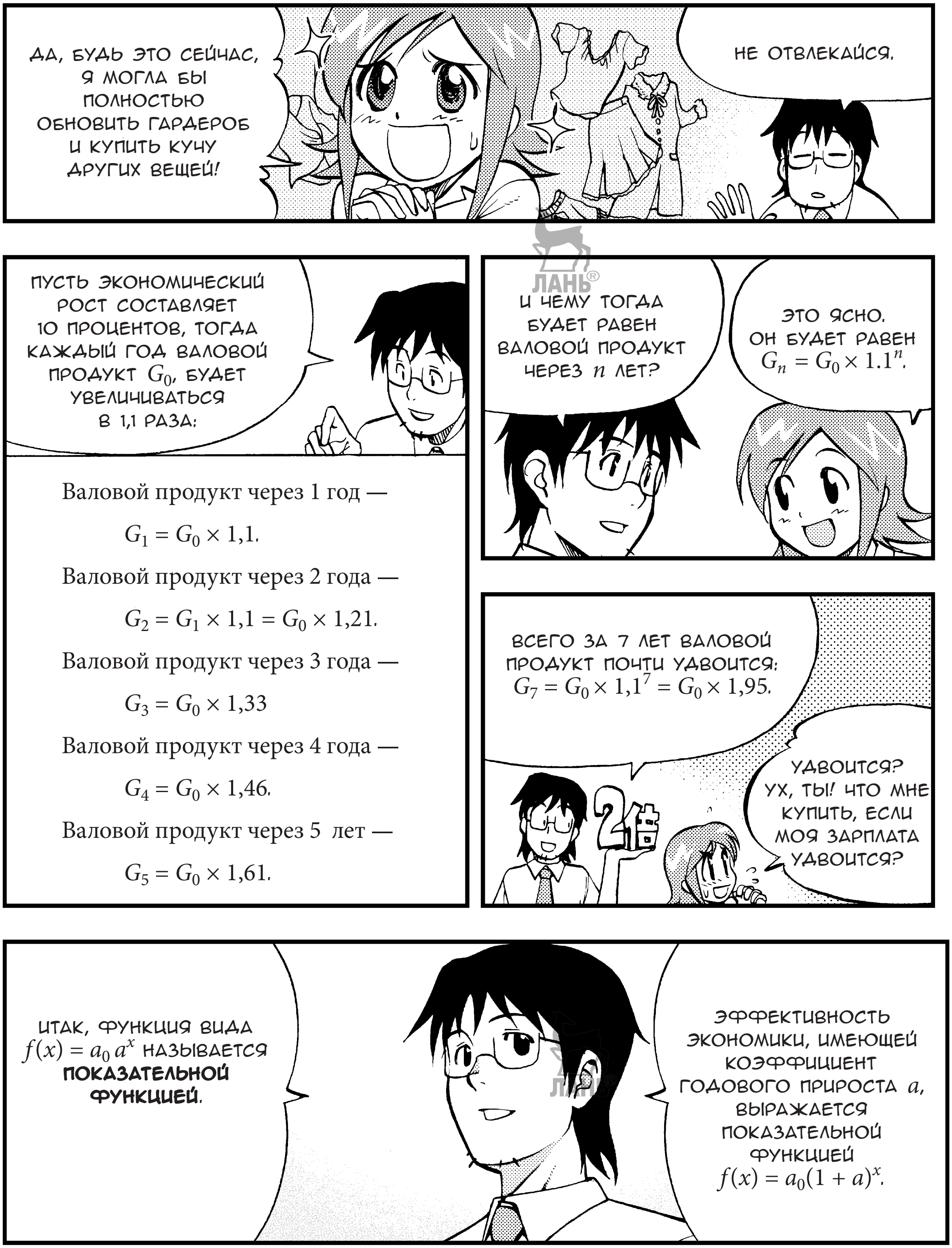

ФУТОШИ, ИДЁМ ТАНЦЕВАТЬ!
НЕТ, Я НЕ МОГУ. Я НЕ СЪЕЛ ЕЩЁ ДАЖЕ ПОЛОВИНЫ ЗАКАЗАННОЙ ЕДЫ...
МЫ ПРИШЛИ СЮДА, ЧТОБЫ ДЕЛАТЬ РЕПОРТАЖ!
АГА, И ДЛЯ ЭТОГО ТЫ НАДЕЛА ТАНЦЕВАЛЬНУЮ ОДЕЖДУ?!
ПРЕКРАТИТЕ! РЕПОРТАЖ ДОЛЖЕН БЫТЬ ГОТОВ К ЗАВТРАШНЕМУ УТРЕННЕМУ ВЫПУСКУ, А ВЫ ЕЩЁ ДАЖЕ НЕ ПРИСТУПАЛИ К РАБОТЕ!
О, НЕТ!
ВЫ СЛИШКОМ УВЛЕКЛИСЬ ФЕСТИВАЛЬНЫМИ РАЗВЛЕЧЕНИЯМИ!
БАХ!
ХЛОП!
А САМ-ТО...

4.4. Показательная и логарифмическая функции

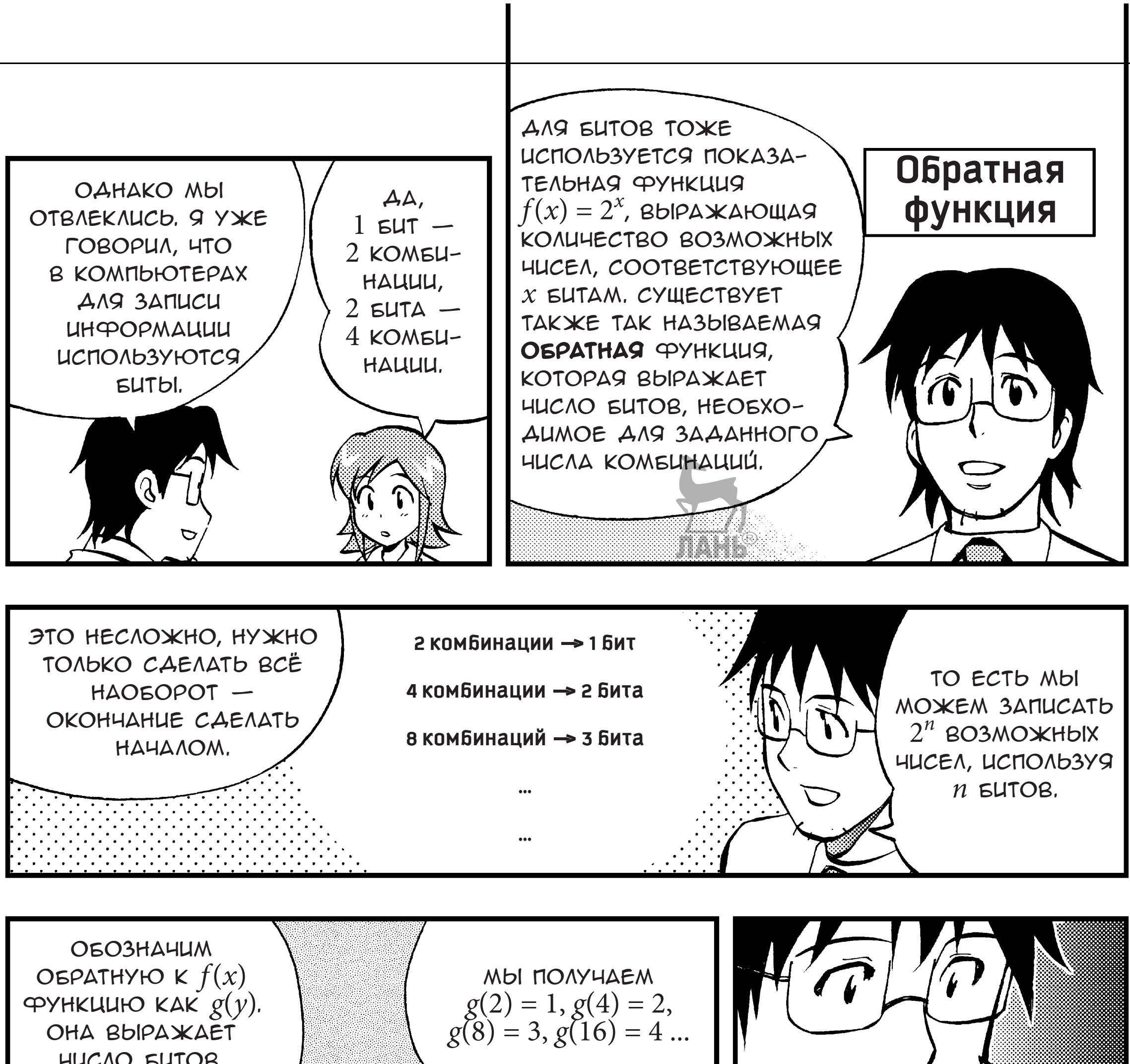


* Игра слов: «бит» имеет также значение «немного».


Компьютеры обрабатывают информацию в бинарной системе. С помощью одного бита можно представить два числа (0 и 1), с помощью двух битов — четыре ($00, 01, 10, 11$), с помощью трёх — восемь, и т. д. Таким образом, n битам соответствуют 2^n возможных чисел.
Если мы представим в виде функции число значений, которые могут быть выражены x битами, то получим показательную функцию $f(x) = 2^x$.
Показательная функция
Показательная функция? Что она показывает?
Показательная функция часто используется для выражения какого-нибудь роста, например, экономического.
Дай подумать... К примеру...
Хм-м...
...в 1950-х годах в Японии наблюдался высокий экономический рост — около 10 процентов в год.
Житель Японии с годовым доходом в 5 миллионов иен зарабатывал в следующем году 5.5 миллионов.
Его зарплата возрастала на 10 процентов, и благодаря этому он мог иметь больше товаров и услуг, чем в предыдущем году.

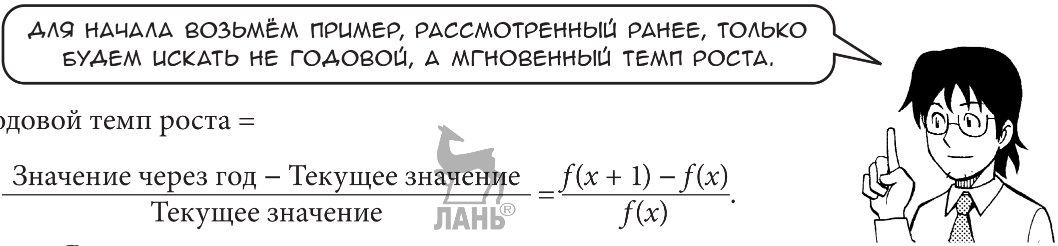


ДА, БУДЬ ЭТО СЕЙЧАС, Я МОГЛА БЫ ПОЛНОСТЬЮ ОБНОВИТЬ ГАРДЕРОБ И КУПИТЬ КУЧУ ДРУГИХ ВЕЩЕЙ!
НЕ ОТВЛЕКАЙСЯ.
ПУСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ СОСТАВЛЯЕТ 10 ПРОЦЕНТОВ, ТОГДА КАЖДЫЙ ГОД ВАЛОВОЙ ПРОДУКТ G_0, БУДЕТ УВЕЛИЧИВАТЬСЯ В 1,1 РАЗА:
Валовой продукт через 1 год —
$G_1 = G_0 \times 1{,}1.$
Валовой продукт через 2 года —
$G_2 = G_1 \times 1{,}1 = G_0 \times 1{,}21.$
Валовой продукт через 3 года —
$G_3 = G_0 \times 1{,}33$
Валовой продукт через 4 года —
$G_4 = G_0 \times 1{,}46.$
Валовой продукт через 5 лет —
$G_5 = G_0 \times 1{,}61.$
И ЧЕМУ ТОГДА БУДЕТ РАВЕН ВАЛОВОЙ ПРОДУКТ ЧЕРЕЗ n ЛЕТ?
ЭТО ЯСНО. ОН БУДЕТ РАВЕН $G_n = G_0 \times 1.1^n$.
ВСЕГО ЗА 7 ЛЕТ ВАЛОВОЙ ПРОДУКТ ПОЧТИ УДВОИТСЯ: $G_7 = G_0 \times 1{,}1^7 = G_0 \times 1{,}95.$
УДВОИТСЯ? УХ, ТЫ! ЧТО МНЕ КУПИТЬ, ЕСЛИ МОЯ ЗАРПЛАТА УДВОИТСЯ?
ИТАК, ФУНКЦИЯ ВИДА $f(x) = a_0 a^x$ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ**.
ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКОНОМИКИ, ИМЕЮЩЕЙ КОЭФФИЦИЕНТ ГОДОВОГО ПРИРОСТА a, ВЫРАЖАЕТСЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ $f(x) = a_0(1 + a)^x$.



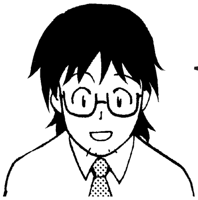
Однако мы отвлеклись. Я уже говорил, что в компьютерах для записи информации используются биты.
Да, 1 бит — 2 комбинации, 2 бита — 4 комбинации.
Для битов тоже используется показательная функция $f(x) = 2^x$, выражающая количество возможных чисел, соответствующее x битам. Существует также так называемая **обратная** функция, которая выражает число битов, необходимое для заданного числа комбинаций.
Обратная функция
Это несложно, нужно только сделать всё наоборот — окончание сделать началом.
2 комбинации → 1 бит
4 комбинации → 2 бита
8 комбинаций → 3 бита
...
...
То есть мы можем записать 2^n возможных чисел, используя n битов.
Обозначим обратную к $f(x)$ функцию как $g(y)$. Она выражает число битов, необходимое для записи y комбинаций.
Мы получаем $g(2) = 1, g(4) = 2, g(8) = 3, g(16) = 4$ ...
Взаимосвязь между функциями f и g можно записать следующим образом: $g(f(x)) = x$ и $f(g(y)) = y$.
Осталось запомнить, что функция, обратная к показательной называется **логарифмической** и обозначается символом log. Цифра внизу — основание логарифма.
$f(x) = 2^x$ — показательная функция
$g(y) = \log_2 y$ — логарифмическая функция
log
Для битов она записывается как $g(y) = \log_2 y$.
Тогда получаетя, что $\log_2 2 = 1, \log_2 4 = 2, \log_2 8 = 3, \log_2 16 = 4$...

4.5. Обобщение показательной и логарифмической функций



Годовой темп роста =

$$= \frac{\text{Значение через год} - \text{Текущее значение}}{\text{Текущее значение}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}.$$

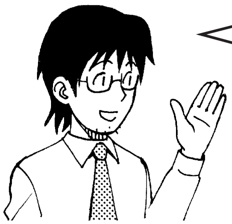


ПРЕОБРАЗУЕМ ЕГО В ВЫРАЖЕНИЕ
ДЛЯ МГНОВЕННОГО ТЕМПА РОСТА.

Мгновенный темп роста =

$$= \text{Предел}\left(\frac{\text{Значение чуть позднее} - \text{Исходное значение}}{\text{Исходное значение}} \times \frac{1}{\text{Приращение времени}}\right) =$$

$$= \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{f(x)}\,\frac{1}{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \to 0 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{f(x)}\,\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{f(x)}\,f'(x).$$



ТАКИМ ОБРАЗОМ, МГНОВЕННЫЙ
ТЕМП РОСТА ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КАК

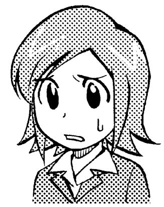
$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найдём функцию $f(x)$, которой соответствует постоянное значение мгновенного темпа роста:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c = \text{const}.$$

Если положить $c = 1$, то $f(x)$ должна удовлетворять условию $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$.

НО КАК НАЙТИ ТАКУЮ ФУНКЦИЮ $f(x)$?

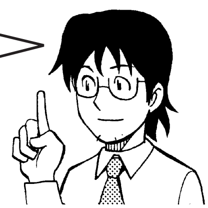


1 Предположим, что это показательная функция.

ИЗ УСЛОВИЯ $f'(x) = f(x)$ следует, что

$$f'(0) = f(0). \tag{1}$$

ВСПОМНИМ, ЧТО В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $h = 0$
МЫ МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ $f(h) \approx f(0) + f'(0)(h - 0)$.



Используя равенство (1), получаем

$$f(h) \approx f(0) + f(0)h = f(0)(1 + h). \qquad (2)$$

Теперь запишем приближенную формулу, если x достаточно близко к h:

$$f(x) \approx f(h) + f'(h)(x - h).$$

Заменим x на $2h$ и, используя условие $f'(h) = f(h)$, получим

$$f(2h) \approx f(h) + f(h)h = f(h)(1 + h).$$

Подставляя в это уравнение вместо $f(h)$ его приближённое значение из (2), получаем:

$$f(2h) \approx f(0)(1 + h)(1 + h),$$

$$f(2h) \approx f(0)(1 + h)^2.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $x = 3h, 4h, 5h, \ldots$.
В общем случае для mh будет справедливо выражение:

$$f(mh) \approx f(0)(1 + h)^m.$$

Если ввести условие $mh = 1$, то получим:

$$f(1) = f(mh) \approx f(0)(1 + h)^m.$$

Действуя таким же образом, получим:

$$f(2) = f(2mh) \approx f(0)(1 + h)^{2m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^2;$$

$$f(3) = f(3mh) \approx f(0)(1 + h)^{3m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^3.$$

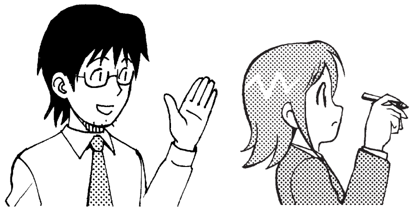
Для произвольного натурального числа n будем иметь:

$$f(n) \approx f(0) \times a^n, \text{ где } a = (1 + h)^m.$$

Полученное выражение является показательной функцией[1)]!

[1)] Так как $mh = 1$, то $h = 1/m$. Тогда $f(1) \approx f(0)\ (1 + 1/m)^m$. Если устремить m к бесконечности, то выражение $(1 + 1/m)^m$ будет стремиться к e — числу Эйлера, равному примерно 2.718. В результате получаем, что $f(1) = f(0) \times e$, что соответствует рассуждениям, которые будут приведены на стр. 139.

2 Теперь покажем, что функция $f(x)$ существует, и найдём её вид.



$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad (4.6)$$

← Эту формулу мы получили раньше*.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y}. \qquad (4.7)$$

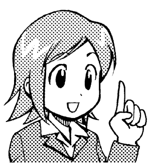
← Условие $f'(x) = f(x)$ однозначно определяет вид производной обратной функции.

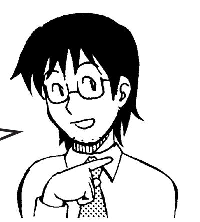
Теперь применим основную теорему интегрирования:

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{y}\, dy = g(\alpha) - g(1) \qquad (4.8)$$

← Чтобы найти значение функции $g(\alpha)$, нам надо проинтегрировать её производную $g'(y) = \dfrac{1}{y}$ на отрезке от 1 до α.

Если принять $g(1) = 0$ …





*Как было показано на стр. 75, если функция $x = g(y)$ является обратной к $y = f(x)$, то $f'(x)g'(y) = 1$.

Так как $g(1) = \int_1^1 \frac{1}{y}\, dy = 0$, то $\int_1^\alpha \frac{1}{y}\, dy = g(\alpha) - g(1)$, что соответствует формуле (5).

Итак, мы нашли обратную функцию $g(y)$ через площадь под кривой, используя для этого искомую функцию $f(x)$.

4.6. СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

1 Рассмотрим функцию темпа роста, имеющую вид $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2 Надо найти функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую условию $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$, то есть имеющую постоянный темп роста, равный 1.

Указанному условию удовлетворяет показательная функция, для которой

$$f'(x) = f(x).$$

3 Производная обратной по отношению к $y = f(x)$ функции $x = g(y)$ равна

$$g'(y) = \frac{1}{y}. \qquad (*)$$

4 Значения функции $g(\alpha)$ равны площади под графиком функции $h(y) = \frac{1}{y}$:

$$g(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{y}\,dy.$$

Обратная функция к $f(x)$ — это функция, удовлетворяющая условию (*) и для которой $g(1) = 0$.

5 Так как $f(x)$ — показательная функция, то, используя константу a_0, можно записать:

$$f(x) = a_0 a^x.$$

Так как по определению обратной функции $f(g(1)) = 1$, и в тоже время из условия $g(1) = 0$ следует, что $f(g(1)) = f(0) = a_0 a^0 = a_0$, получаем

$$f(g(1)) = 1 = a_0.$$

Отсюда следует, что

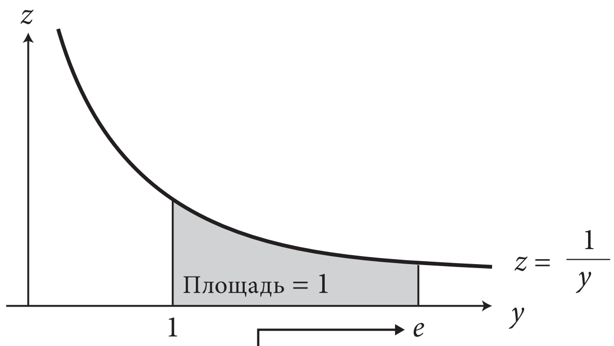
$$f(x) = a^x.$$

Рассуждая подобным образом, находим:

$f(g(e)) = f(1) = a^1$ и $f(g(e)) = e$, а значит

$e = a^1$, и в конечном итоге имеем

$$f(x) = e^x.$$



e — иррациональное число, равное примерно 2,7183.

Значение основания натурального логарифма e находится как число y, удовлетворяющее условию $g(y) = 1$. Другими словами, это число α, для которого площадь между кривой $1/y$ и осью y на отрезке от 1 до α равна единице.

Обратная к ней функция $g(y)$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln y = \log_e y$.

Перепишем шаги **2** … **4**, используя показательную функцию e^x и логарифмическую функцию $\ln y$.

6 $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (e^x)' = e^x.$

7 $g'(y) = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow (\ln y)' = \dfrac{1}{y}.$

8 $g(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{1}{y}\,dy \Leftrightarrow \ln y = \int_1^{y} \frac{1}{y}\,dy.$

9 Определим функцию 2^x для любого вещественного числа x. Для этого запишем её в виде

$$f(x) = e^{(\ln 2)x},$$

где x — любое вещественное число.

Записанное выше выражение следует из того, что e^x и $\ln y$ — взаимно обратные функции, для которых можно записать:

$$e^{\ln 2} = 2.$$

В результате для любого натурального числа x имеем

$$f(x) = (e^{\ln 2})^x = 2^x.$$

4.7. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Дифференцирование степенной функции

Степенная функция $f(x) = x^{\alpha}$ с отрицательным показателем степени может использоваться для записи таких функций, как

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1},\ y = \frac{1}{x^2} = x^{-2},\ y = \frac{1}{x^3} = x^{-3},\ \ldots$$

Для этих функций также справедлива найденная ранее формула.

Дифференцирование степенной функции		
$f(x) = x^{\alpha}.$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$	(4.4)

Примеры:

Если $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, то $f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}.$

Если $f(x) = \sqrt[4]{x}$, то $f'(x) = (x^{1/4})' = \dfrac{1}{4}x^{-3/4} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

Доказательство:

Выразим функцию $f(x) = x^{\alpha}$ через число e, используя равенство $e^{\ln x} = x$:

$$f(x) = x^{\alpha} = (\mathrm{e}^{\ln x})^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Из полученного равенства следует, что

$$\ln f(x) = \alpha \ln x.$$

Возьмём производные от левой и правой частей этого уравнения, учитывая, что производная $\ln w = \dfrac{1}{w}$, и, применяя цепное правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x}.$$

После несложных преобразований получаем

$$f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times f(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Интегрирование по частям

Из правила дифференцирования произведения двух функций следует, что если $h(x) = f(x)g(x)$, то:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Таким образом, произведение $f(x)g(x)$ является первообразной для функции $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Применяя основную теорему интегрирования, получаем

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Используя правило интегрирования суммы, получаем следующую формулу:

Интегрирование по частям
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad (4.5)$$

В качестве примера вычислим интеграл

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

Так как синус является производной от косинуса, выберем в качестве $f(x) = x$, а в качестве $g(x) = \cos x$. Тогда

$$\int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x (\cos x)' dx = f(x)g(x)\Big|_0^\pi = f(\pi)g(\pi) - f(0)g(0).$$

Подставляя выбранные нами функции вместо $f(x)$ и $g(x)$, получаем

$$\pi \cos \pi - 0 \cos 0 = \pi(-1) - 0 = -\pi.$$

После преобразований получаем

$$\int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x (\cos x)' dx = \int_0^\pi \cos x \, dx + \int_0^\pi x (-\sin x) \, dx =$$

$$= \int_0^\pi \cos x \, dx - \int_0^\pi x \sin x \, dx = -\pi.$$

Перепишем эту формулу относительно искомого интеграла:

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \int_0^\pi \cos x \, dx + \pi = \sin x\Big|_0^\pi + \pi = \sin \pi - \sin 0 + \pi = \pi.$$

4.8. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Найти производную $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

3. Найти значение x, при котором достигается минимум функции $f(x) = xe^x$.

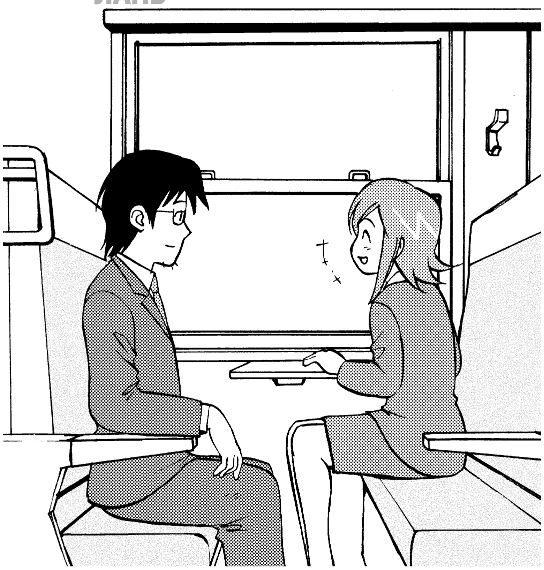
4. Вычислить

$$\int_1^e 2x \ln x \, dx.$$

Указание: возьмите функции $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, и воспользуйтесь интегрированием по частям.

5

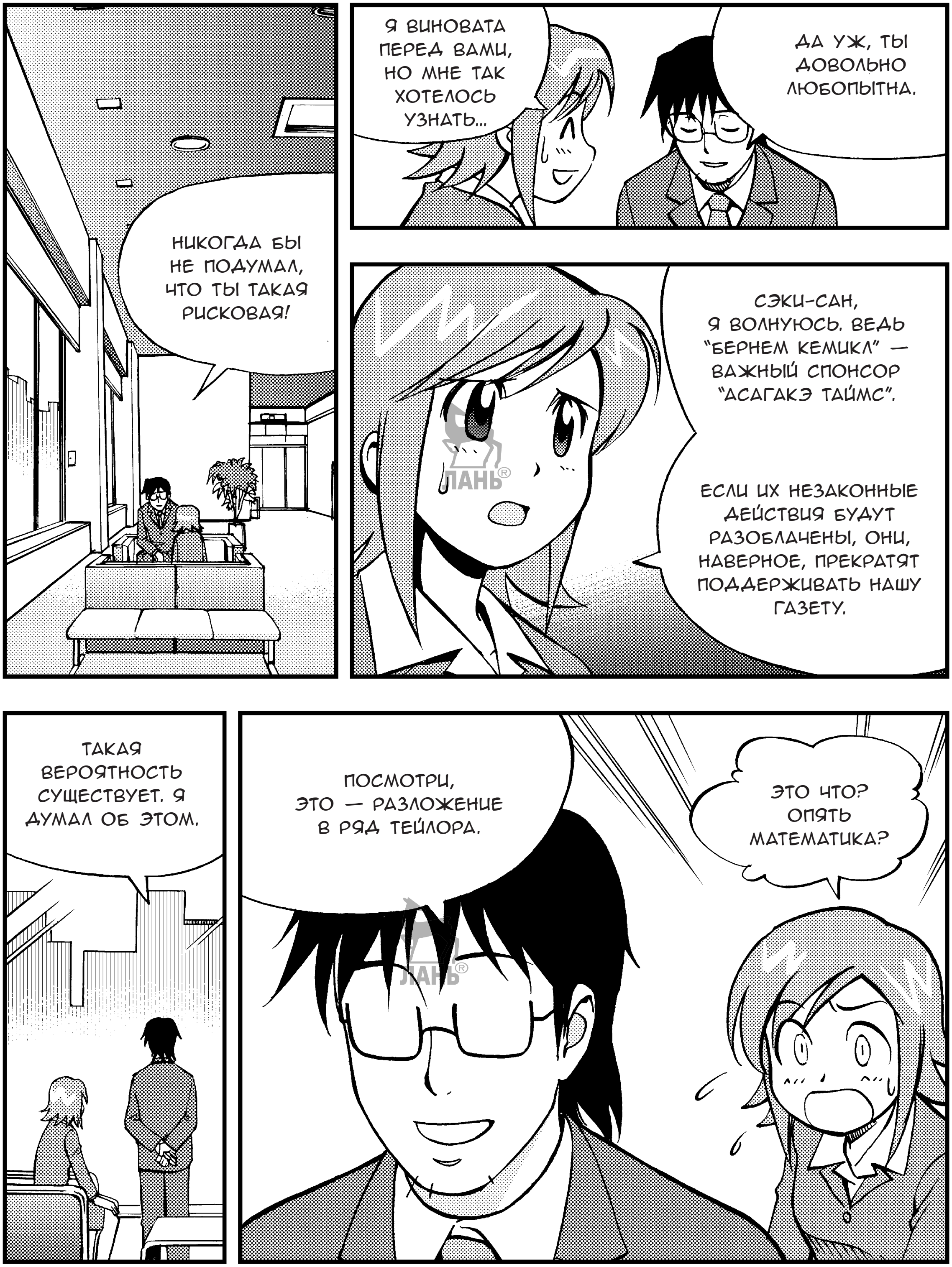
ИЗУЧАЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА!



5.1. Асагакэ таймс. Главный офис


РАД ВСТРЕЧЕ.
Я ТАК МНОГО СЛЫШАЛ О ВАС, СЭКИ-САН.
Я ХОЧУ, ЧТОБЫ ВЫ ПРОСМОТРЕЛИ ПОЛУЧЕННЫЕ НАМИ НОВЫЕ ДАННЫЕ.
ПРОШУ ПРОЩЕНИЯ.
О, СПАСИБО...
СТУК!
ТЫ?!
СПАСИБО.
ТА-ДАМ!

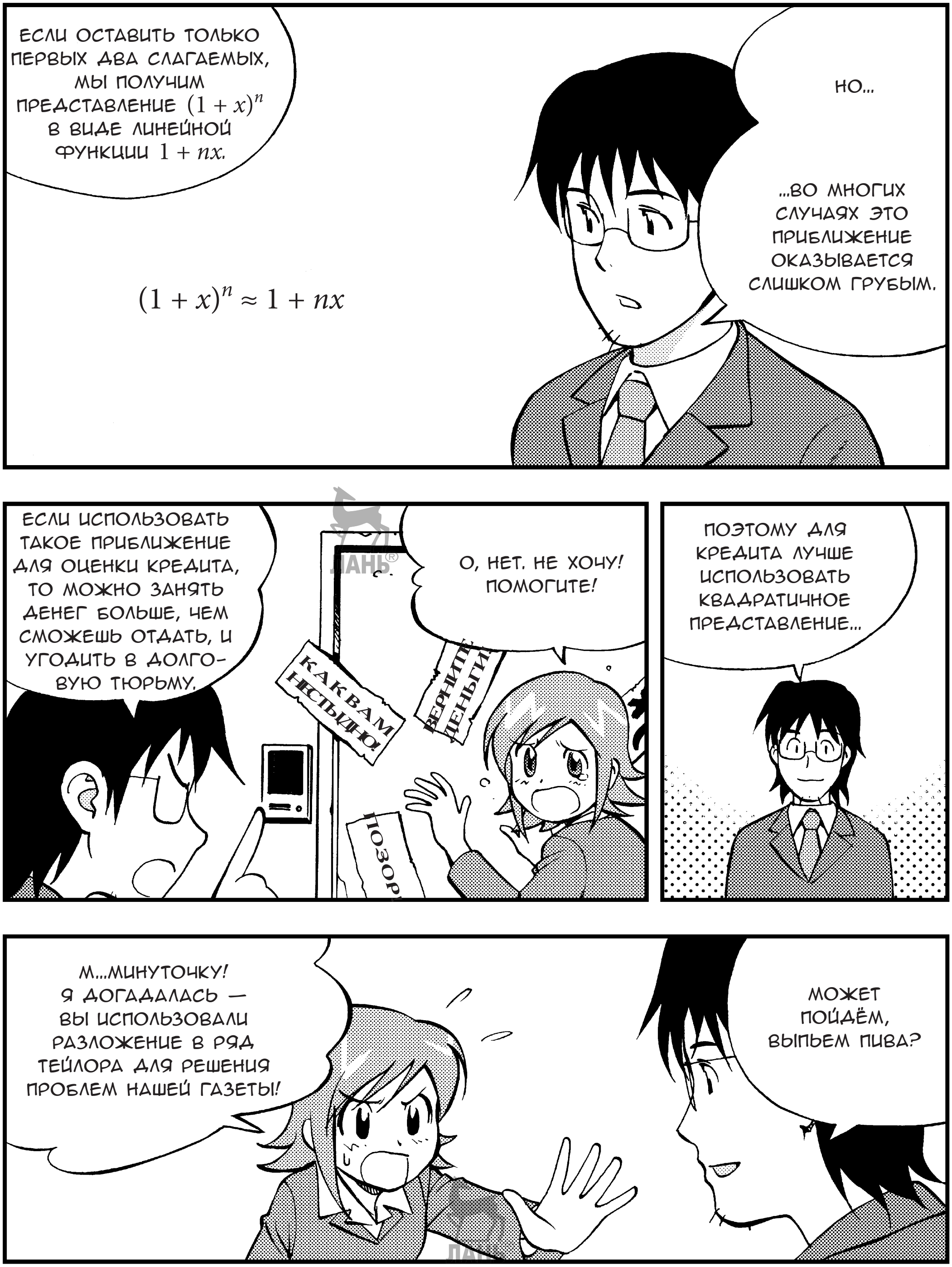

Норико, что ты делаешь? Твоё поведение может вызвать подозрение.
Как грязно! Хм...
ЖИГ-ЖИГ!
Эти новые данные совпадают с теми, которые вы привели в вашей статье, не так ли?
Они получены из компании "Бернем Кемикл". Нам их лично передал журналист, ведущий расследование.
Мы уже проверили их достоверность по другим каналам.
Э, да... но каковы источники этих данных?
Моя новая статья ещё не готова к публикации...
...но я передам вам все материалы, которые уже успел собрать.
Совпадения обнадёживающие.


НИКОГДА БЫ НЕ ПОДУМАЛ, ЧТО ТЫ ТАКАЯ РИСКОВАЯ!
Я ВИНОВАТА ПЕРЕД ВАМИ, НО МНЕ ТАК ХОТЕЛОСЬ УЗНАТЬ...
ДА УЖ, ТЫ ДОВОЛЬНО ЛЮБОПЫТНА.
СЭКИ-САН, Я ВОЛНУЮСЬ. ВЕДЬ "БЕРНЕМ КЕМИКЛ" — ВАЖНЫЙ СПОНСОР "АСАГАКЭ ТАЙМС".
ЕСЛИ ИХ НЕЗАКОННЫЕ ДЕЙСТВИЯ БУДУТ РАЗОБЛАЧЕНЫ, ОНИ, НАВЕРНОЕ, ПРЕКРАТЯТ ПОДДЕРЖИВАТЬ НАШУ ГАЗЕТУ.
ТАКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ СУЩЕСТВУЕТ. Я ДУМАЛ ОБ ЭТОМ.
ПОСМОТРИ, ЭТО — РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА.
ЭТО ЧТО? ОПЯТЬ МАТЕМАТИКА?

$$(1 + x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \ldots {}_nC_nx^n.$$

Это формула биномиального раложения, в которой ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$:

$${}_n\mathrm{C}_1 = n,\ {}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n-1)}{2},\ {}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},\ \ldots,\ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)\ldots\{n-(r-1)\}}{r!}.$$


Если оставить только первых два слагаемых, мы получим представление $(1 + x)^n$ в виде линейной функции $1 + nx$.
$(1 + x)^n \approx 1 + nx$
Но...
...во многих случаях это приближение оказывается слишком грубым.
Если использовать такое приближение для оценки кредита, то можно занять денег больше, чем сможешь отдать, и угодить в долговую тюрьму.
О, нет. Не хочу! Помогите!
КАК ВАМ НЕСТЫДНО!
ВЕРНИТЕ ДЕНЬГИ!
ПОЗОР
Поэтому для кредита лучше использовать квадратичное представление...
М...минуточку! Я догадалась — вы использовали разложение в ряд Тейлора для решения проблем нашей газеты!
Может пойдём, выпьем пива?

Формула квадратичного приближения

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \qquad (5.1)$$

Для любой пары n и x, удовлетворяющих условию $nx = 0{,}7$, получаем

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \approx 1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}nx^2}_{\text{Пренебрегаем в силу малости.}} \approx$$

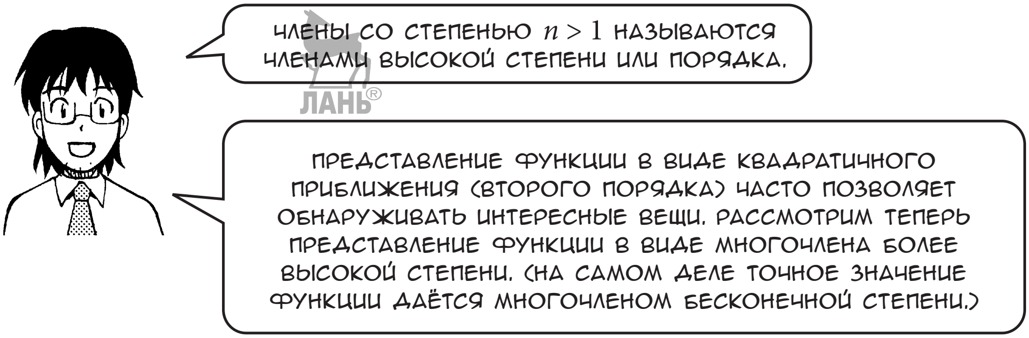
$$\approx 1 + 0{,}7 + \frac{1}{2} \times 0{,}7^2 = 1{,}945 \approx 2.$$

Таким образом, если $nx = 0{,}7$, то $(1 + x)^n$ близко к 2. Из этого можно сформулировать следующий закон.

Закон долговой ямы

Если Срок погашения кредита × Процентная ставка = 0,7,
то сумма долга увеличивается примерно вдвое, если

кредит взят
на 35 лет при 2%
на 7 лет при 10%
на 2 года при 35%



Например, если мы разложим функцию

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, то получим

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \text{ (и так до бесконечности)} \qquad (1)$$

Обрати внимание, здесь используется знак = вместо ≈ !

Пусть $x = 0{,}1$, тогда получаем

$$f(0{,}1) = \frac{1}{1-0{,}1} = \frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}.$$

Теперь попробуем рассчитать значение функции, представленной в виде многочлена,

$$\begin{aligned} f(0{,}1) &= 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 0{,}1^4 + \ldots = \\ &= 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots = \\ &= 1{,}1111111\ldots \end{aligned}$$

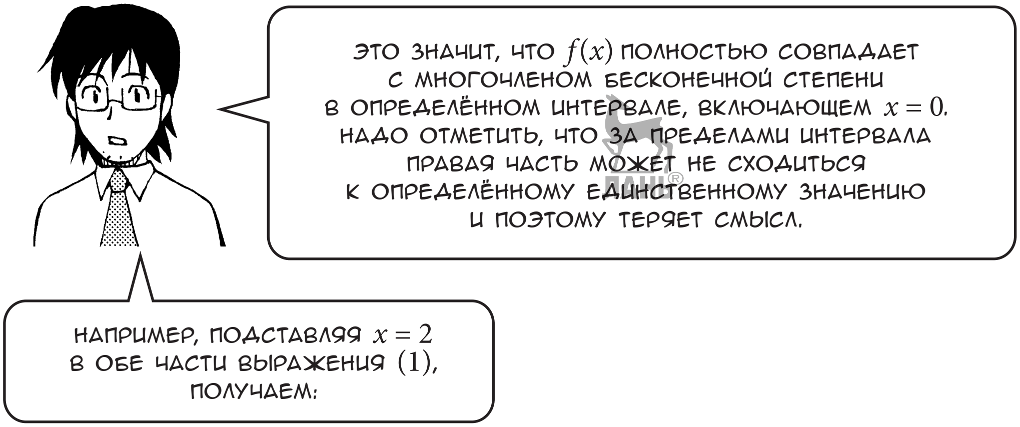
Если мы посчитаем 10/9 делением в столбик, то получим тот же результат.

$$\begin{array}{r|l} -10 & 9 \\ \underline{9} & 1{,}111\ldots \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ 10 & \\ \ldots & \\ \ldots & \end{array}$$

Если произвольная функция $f(x)$ (дифференцируемая бесконечное число раз) может быть выражена в виде бесконечного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

то правую часть этой формулы называют разложением $f(x)$ в *ряд Тейлора* (в окрестности точки $x = 0$).



$$\text{Левая часть} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$\text{Правая часть} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Оказывается, выражение (1) верно только для x, находящихся в интервале $-1 < x < 1$, внутри которого и допускается разложение в ряд Тейлора. Этот интервал $-1 < x < 1$ называется *кругом сходимости*.

5.2. КАК ПОЛУЧИТЬ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть имеется разложение

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots \quad (2)$$

Найдём значение коэффициента a_n.

Подставляя $x = 0$ в формулу (2), получаем $f(0) = a_0$, откуда следует, что коэффициент 0-го порядка a_0 равен $f(0)$.

Возьмём производную от обеих частей формулы (2):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots\ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \quad (3)$$

Подставляя $x = 0$ в формулу (3), получаем $f'(0) = a_1$, откуда следует, что коэффициент 1-го порядка a_1 равен $f'(0)$. Дифференцируя формулу (3) получаем:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots\ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots \quad (4)$$

Подставляя $x = 0$ в формулу (4), находим, что коэффициент 2-го порядка

$$a_2 = \frac{1}{2}f''(0).$$

Дифференцируя далее формулу (4), получаем

$$f'''(x) = 6a_3 + \ldots\ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \ldots,$$

откуда коэффициент 3-го порядка

$$a_3 = \frac{1}{6}f'''(0).$$

Повторяя операцию дифференцирования n раз, получаем

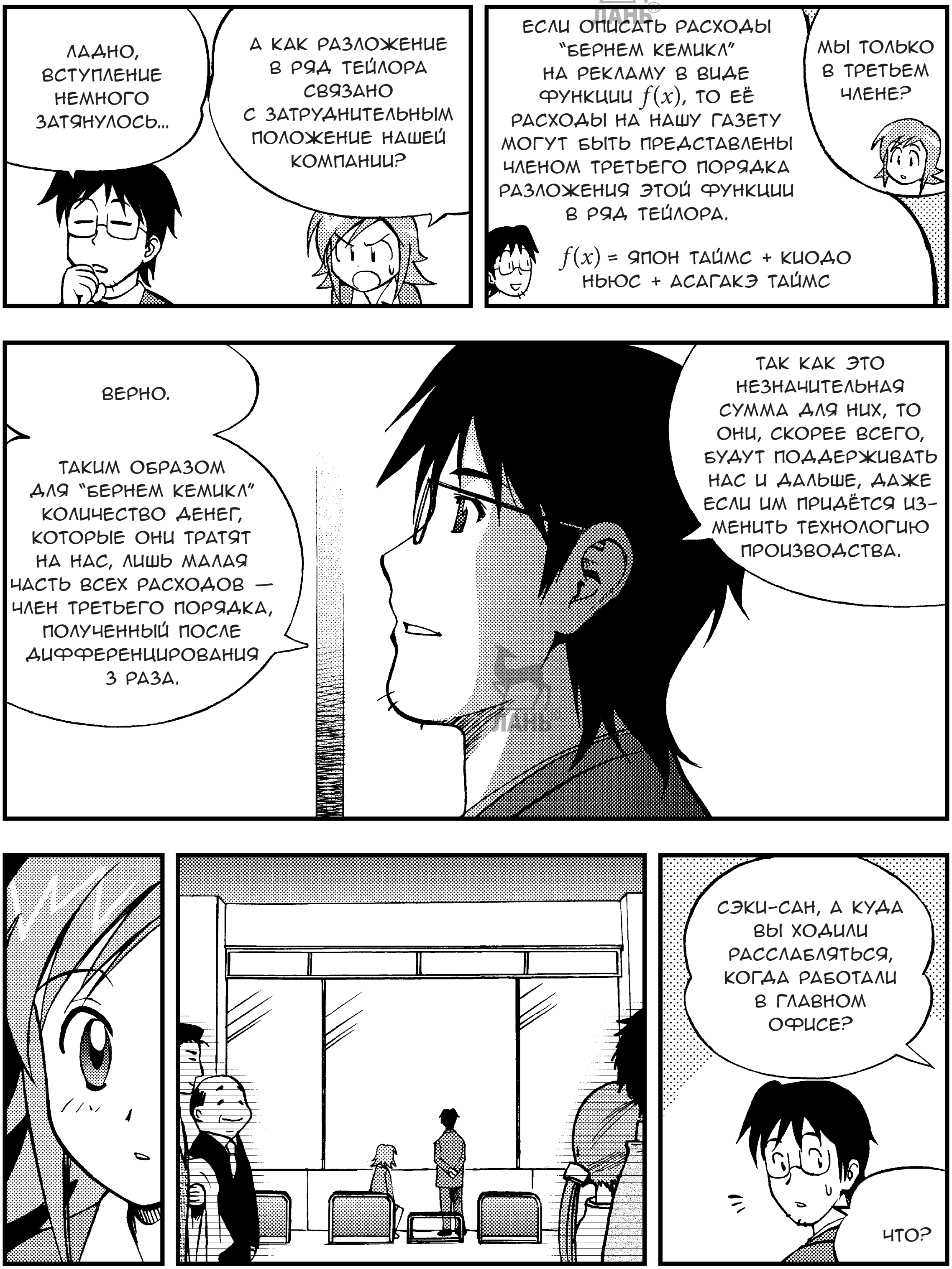
$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \times a_n + \ldots$$

где $f^{(n)}(x)$ обозначает дифференцирование функции $f(x)$ n раз.

Таким образом коэффициент n-го порядка равен

$$a_n = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0).$$

Выражение $n!$ читается как «n факториал» и соответствует выражению $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.


Ладно, вступление немного затянулось...
А как разложение в ряд Тейлора связано с затруднительным положение нашей компании?
Если описать расходы "Бернем Кемикл" на рекламу в виде функции $f(x)$, то её расходы на нашу газету могут быть представлены членом третьего порядка разложения этой функции в ряд Тейлора.
$f(x)$ = Япон Таймс + Киодо Ньюс + Асагакэ Таймс
Мы только в третьем члене?
Верно.
Таким образом для "Бернем Кемикл" количество денег, которые они тратят на нас, лишь малая часть всех расходов — член третьего порядка, полученный после дифференцирования 3 раза.
Так как это незначительная сумма для них, то они, скорее всего, будут поддерживать нас и дальше, даже если им придётся изменить технологию производства.
Сэки-сан, а куда вы ходили расслабляться, когда работали в главном офисе?
Что?

После работы мы с коллегами обычно шли в пивной бар, чтобы поговорить об удачных статьях и вообще...
Мы закончили здесь наши дела, так, может, пойдём выпьем?
Оу!
Ну, ты даёшь! Хорошо, пойдём.
Ура!
Клуб любителей пива
24 часа


БУ-БУ-БУ-БУ
ПРИЯТНАЯ АТМОСФЕРА, НЕ ТАК ЛИ?
ЭЙ, ЗДОРОВО!
УХ ТЫ. ВСЕ ЭТИ ЛЮДИ ЖУРНАЛИСТЫ?
КАК ЖИЗНЬ?!
СМОТРИ-КА, ЭТО ЖЕ ИШИЗУКА, ФОТОГРАФ, САМЫЙ МОЛОДОЙ ОБЛАДАТЕЛЬ ЯПОНСКОЙ НАГРАДЫ ФОТОГРАФОВ.
А ЭТО НАКАТА-САН, ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ДИЗАЙНЕР.
ОСТАЛЬНЫЕ РЕБЯТА ЗДЕСЬ — ИЗ САНДА СИТИ ПОСТ.
ИСЧИСЛЕНИЕ-САН!?
ЭЙ, ИСЧИСЛЕНИЕ-САН, ДАВНЕНЬКО ТЕБЯ НЕ ВИДЕЛИ. ПРИСОЕДИНЯЙСЯ.
КАКОЕ СТРАННОЕ ПРОЗВИЩЕ! НО ОНО ТОЧНО ПОДХОДИТ.
ИНТЕРЕСНО, СМОГУ ЛИ Я ПОНЯТЬ ИХ ПРОФЕССИОНАЛЬНУЮ БЕСЕДУ?
У БИТТЕРМЕНА НЕДАВНО ОБНАРУЖИЛИ ДИАБЕТ.
А СТЭК СЕЙЧАС В БОЛЬНИЦЕ ИЗ-ЗА ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ...
НАВЕРНОЕ, МНЕ ТОЖЕ СТОИТ ПРОЙТИ МЕДОСМОТР В БЛИЖАЙШЕЕ ВРЕМЯ.
ЭТО ВСЕГО ЛИШЬ ТРЁП МУЖЧИН СРЕДНЕГО ВОЗРАСТА!
НЕТ, СОВСЕМ НЕ ИНТЕРЕСНО

Формула разложения в ряд Тейлора

Функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$ по формуле

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^2 + \ldots, \qquad (5.2)$$

где

$f(0)$	член 0-го порядка (константа)	$a_0 = f(0)$;
$f'(0)\,x$	член 1-го порядка	$a_1 = f'(0)$;
$\frac{1}{2!}f''(0)\,x^2$	член 2-го порядка	$a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$;
$\frac{1}{3!}f'''(0)\,x^3$	член 3-го порядка	$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0)$.

Забудем на время про условия разложения в ряд Тейлора и про круг сходимости и, используя это разложение, проверим формулу (1) на стр. 151:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \ldots$$

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 2,\ f'''(0) = 6, \ldots,\ f^{(n)}(0) = n!, \ldots$$

Таким образом, имеем

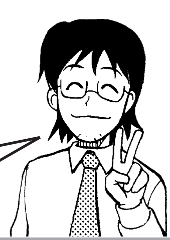
$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^2 + \ldots =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}\times 2x^2 + \frac{1}{3!}\times 6x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,n!x^n + \ldots =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n + \ldots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\,f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2!}\,f''(a)\,(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}\,f'''(a)\,(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \ldots$$



5.3. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(1+x)^{-3/2},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}, \ldots, f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8}x^3 + \ldots \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \ldots$$

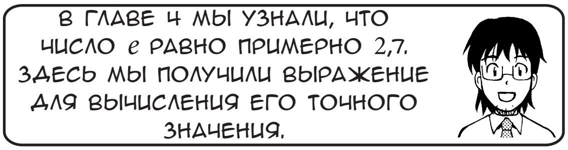
Разложение в ряд Тейлора показательной функции e^x

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Подставляя $x = 1$, получаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$



Разложение логарифмической функции $\ln(1+x)$

$$f(x) = \ln(1+x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3},$$
$$f''''(x) = -6(1+x)^{-4}, \ldots,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2!,\ f''''(0) = -3!, \ldots$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}\ 2!\,x^3 - \frac{1}{4!}\ 3!\,x^4 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \ldots$$

Разложение в ряд Тейлора тригонометрических функций

$$f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f''''(x) = \cos x, \ldots$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f''''(0) = 1, \ldots$$

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!}1x^2 + \frac{1}{3!}0x^3 + \frac{1}{4!}1x^4 + \ldots \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

Аналогично

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

5.4. ЧТО ДАЁТ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА ПОЗВОЛЯЕТ ЗАМЕНИТЬ СЛОЖНУЮ ФУНКЦИЮ МНОГОЧЛЕНОМ. ДОПУСТИМ, ТЕБЕ НАДО НАРИСОВАТЬ ГРАФИК $\ln(1+x)$, КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

ЧТОБЫ УЗНАТЬ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ, НАДО АППРОКСИМИРОВАТЬ ЕЁ БОЛЕЕ ПРОСТЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ТАК ВЕДЬ?

ЧТОБЫ ПОНЯТЬ, ЧТО НАМ ДАЁТ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА, ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ФОРМУЛОЙ ИЗ ПРИВЕДЁННОГО ВЫШЕ ПРИМЕРА

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Кубическое приближение

Линейное приближение

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

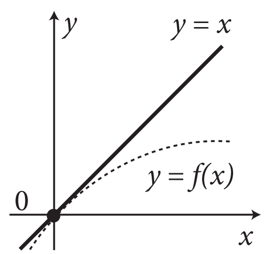
Приближение 0-го порядка

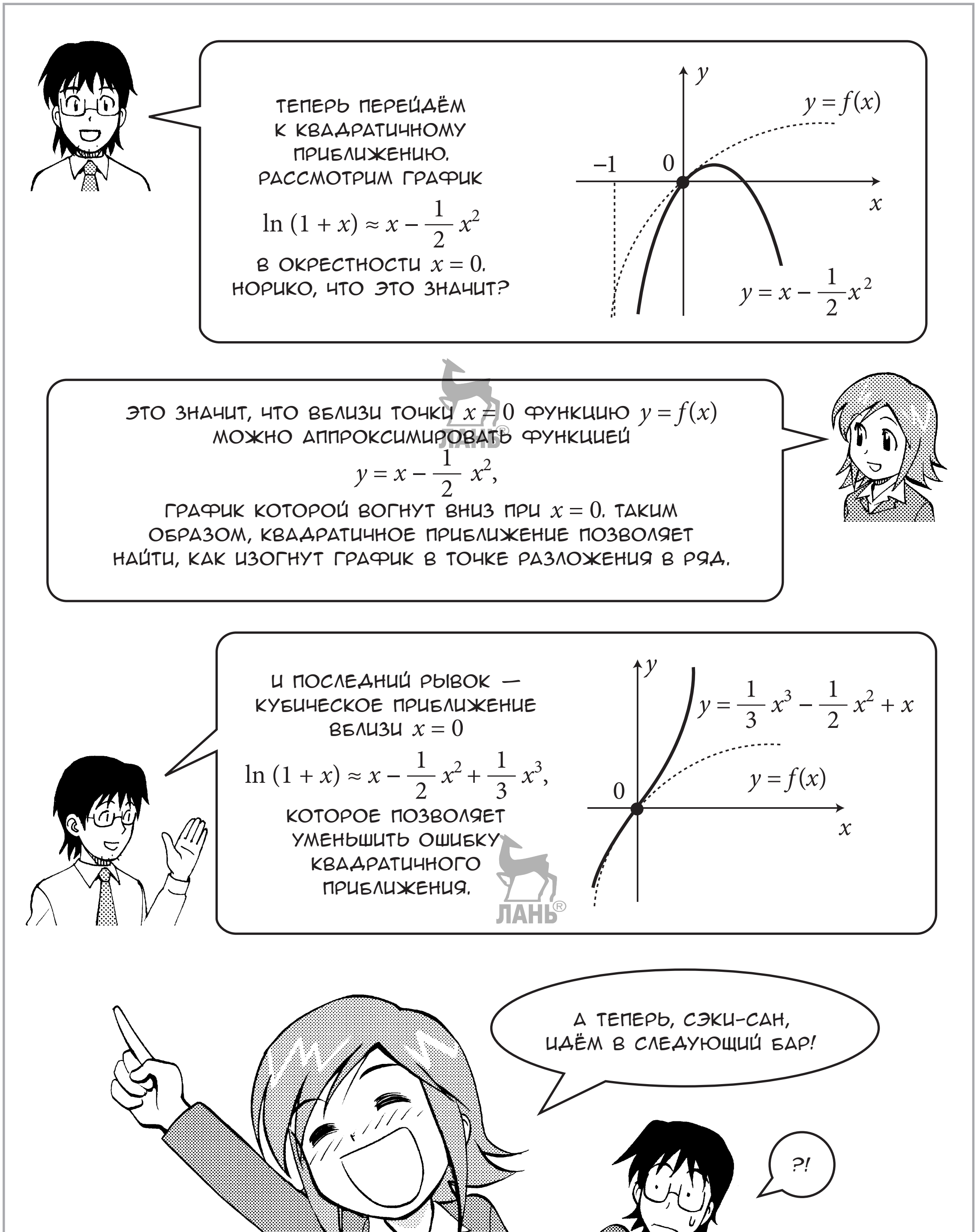
Квадратичное приближение

ВО-ПЕРВЫХ, ПРИБЛИЖЕНИЕ 0-ГО ПОРЯДКА ДАЁТ $\ln(1+x) \approx 0$ ВБЛИЗИ $x = 0$. ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?

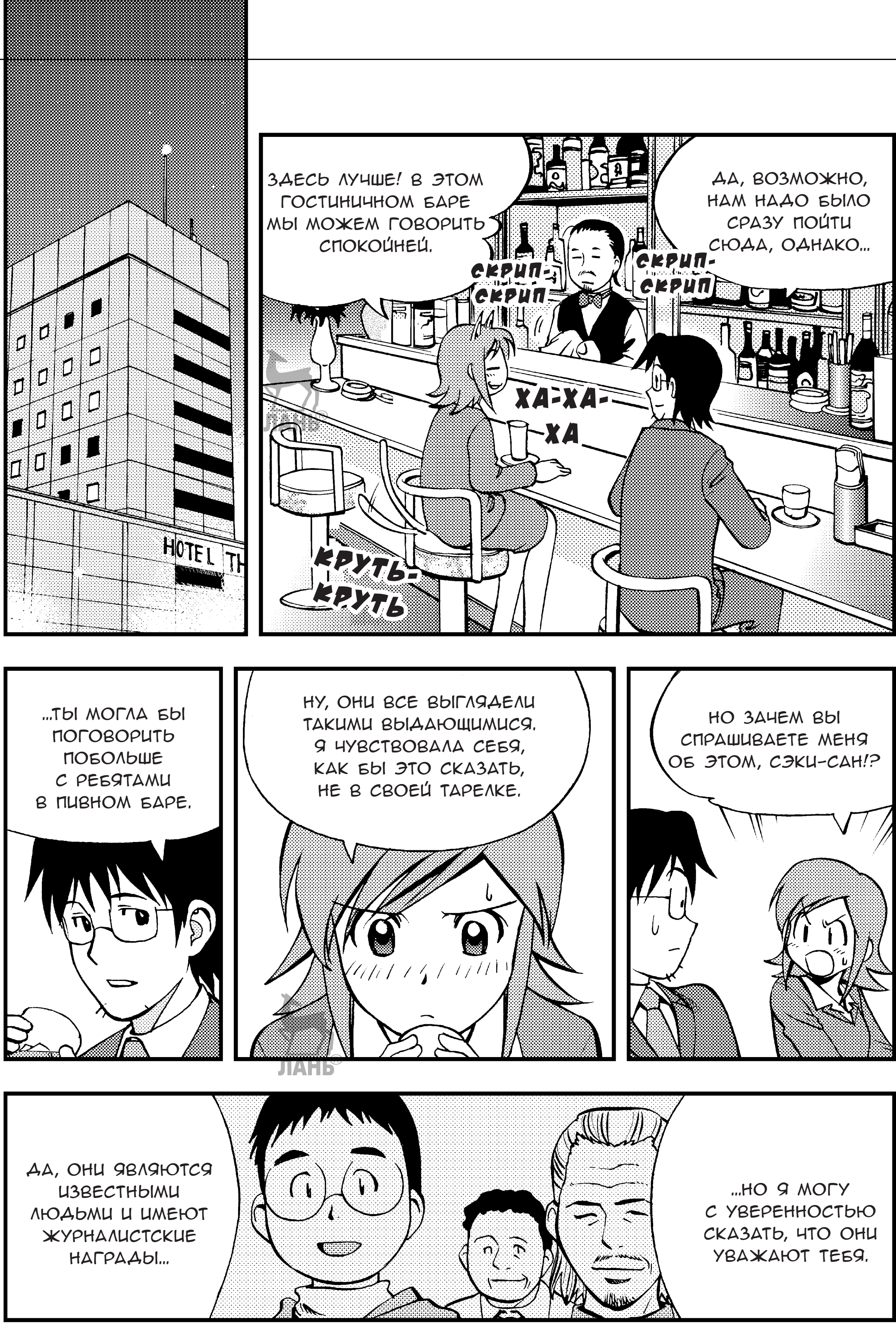
ММ..., НУ... ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ЗНАЧЕНИЕ $f(x)$ РАВНО 0 ПРИ $x = 0$ И ГРАФИК $f(x)$ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $(0, 0)$.

ВЕРНО. ДАЛЕЕ ИДЁТ ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. КАК ВИДИШЬ, ИССЛЕДУЕМАЯ ФУНКЦИЯ $y = f(x)$ ЧЕМ-ТО НАПОМИНАЕТ $y = x$ ВБЛИЗИ ТОЧКИ $x = 0$. ЗНАЧИТ, ФУНКЦИЯ ВОЗРАСТАЕТ ПРИ $x = 0$. КАК МЫ УЖЕ ЗНАЕМ, ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ КАСАТЕЛЬНОЙ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ТОЧКЕ.





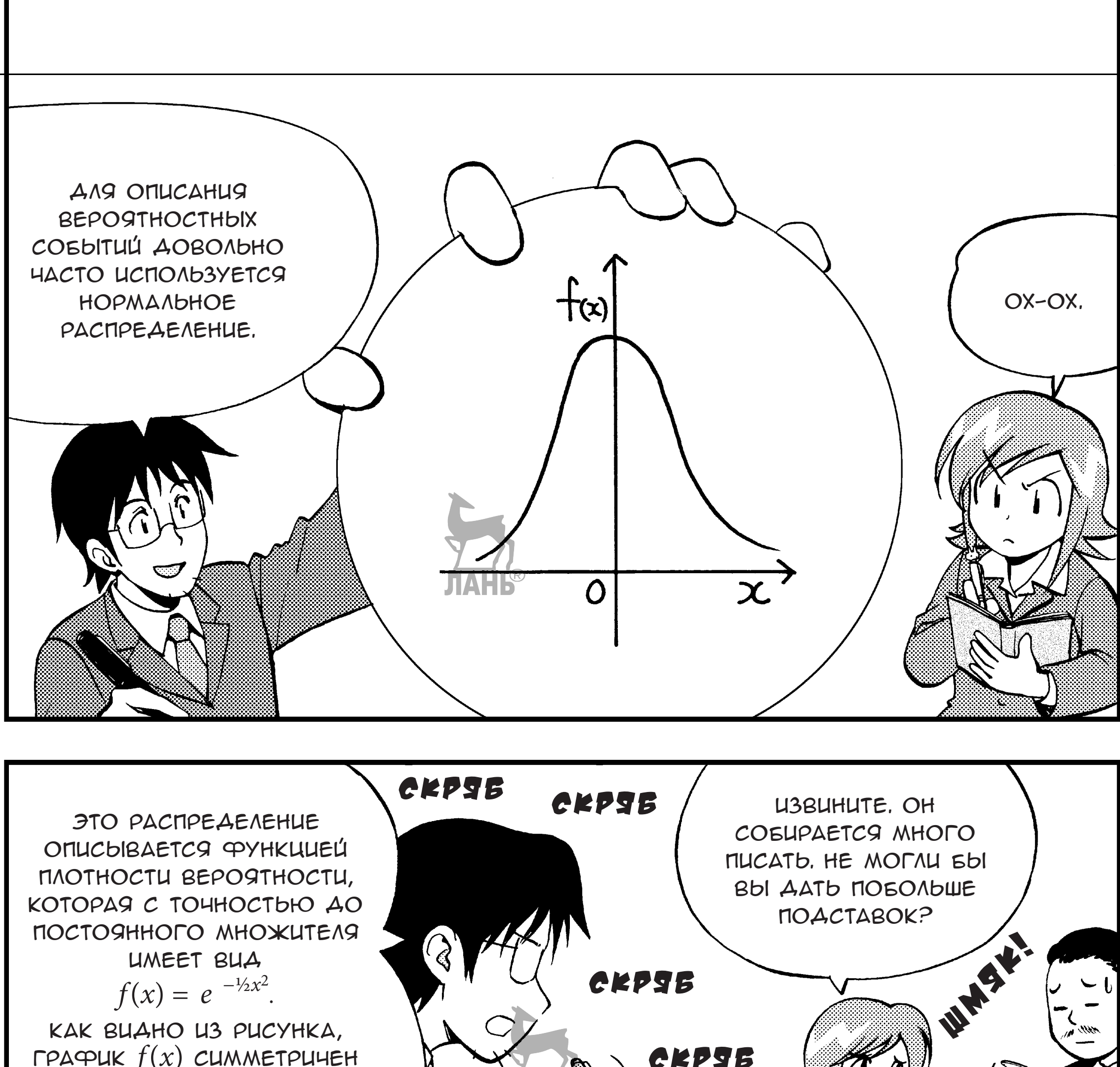
ТЕПЕРЬ ПЕРЕЙДЁМ К КВАДРАТИЧНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ. РАССМОТРИМ ГРАФИК $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$ В ОКРЕСТНОСТИ $x = 0$. НОРИКО, ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?
y
$y = f(x)$
-1
0
x
$y = x - \frac{1}{2}x^2$
ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ВБЛИЗИ ТОЧКИ $x = 0$ ФУНКЦИЮ $y = f(x)$ МОЖНО АППРОКСИМИРОВАТЬ ФУНКЦИЕЙ $y = x - \frac{1}{2}x^2$, ГРАФИК КОТОРОЙ ВОГНУТ ВНИЗ ПРИ $x = 0$. ТАКИМ ОБРАЗОМ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЗВОЛЯЕТ НАЙТИ, КАК ИЗОГНУТ ГРАФИК В ТОЧКЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД.
И ПОСЛЕДНИЙ РЫВОК — КУБИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ $x = 0$ $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, КОТОРОЕ ПОЗВОЛЯЕТ УМЕНЬШИТЬ ОШИБКУ КВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.
y
$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$
$y = f(x)$
0
x
А ТЕПЕРЬ, СЭКИ-САН, ИДЁМ В СЛЕДУЮЩИЙ БАР!
?!

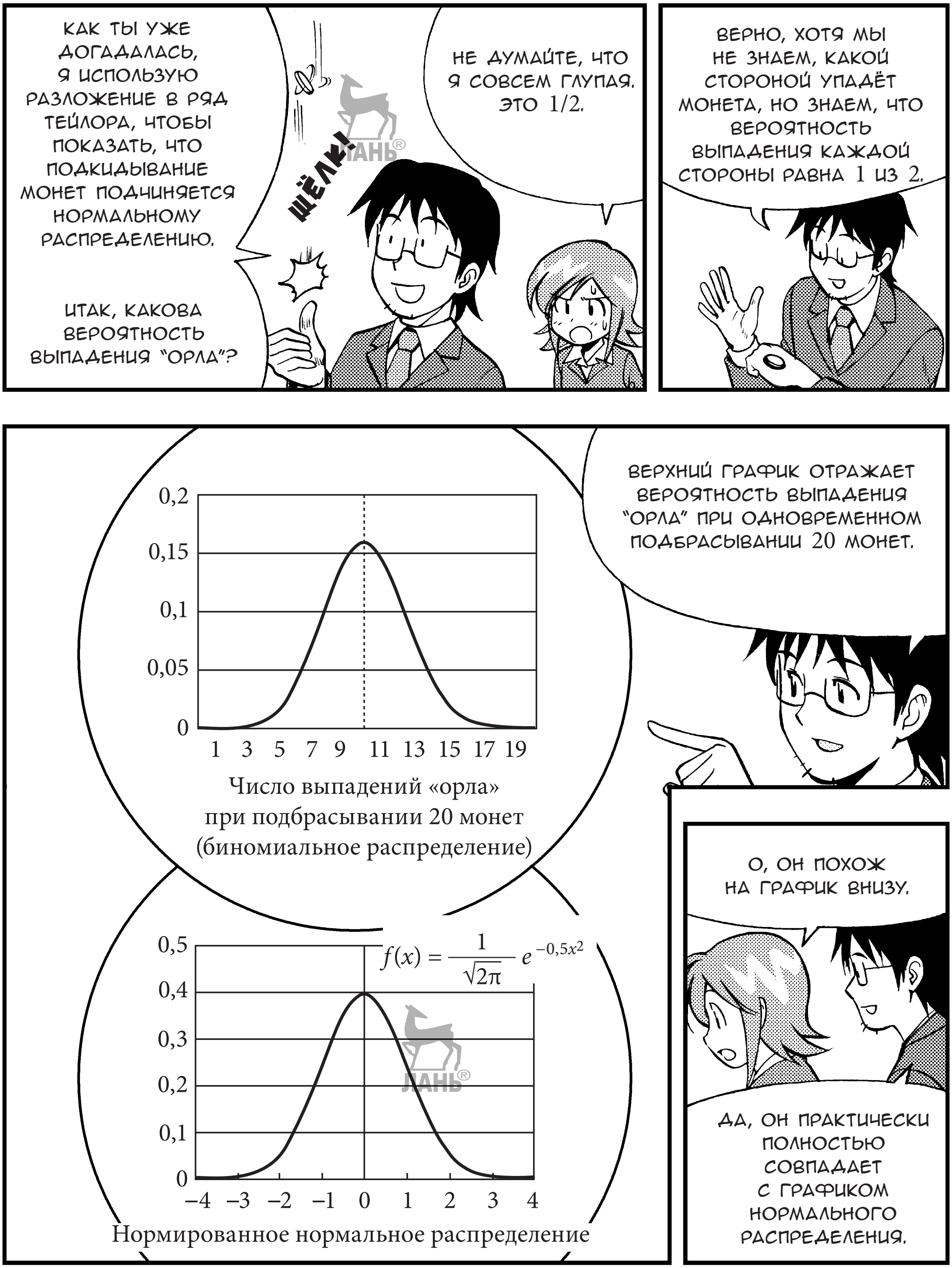


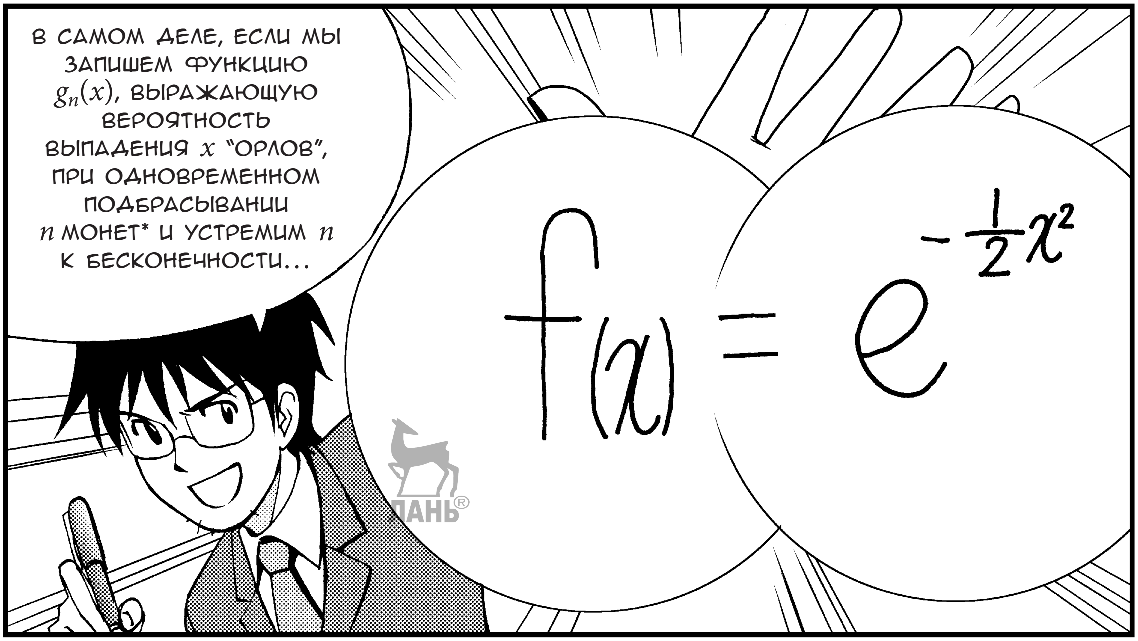
HOTEL TH
ЗДЕСЬ ЛУЧШЕ! В ЭТОМ ГОСТИНИЧНОМ БАРЕ МЫ МОЖЕМ ГОВОРИТЬ СПОКОЙНЕЙ.
ДА, ВОЗМОЖНО, НАМ НАДО БЫЛО СРАЗУ ПОЙТИ СЮДА, ОДНАКО...
СКРИП-СКРИП
СКРИП-СКРИП
ХА-ХА-ХА
КРУТЬ-КРУТЬ
...ТЫ МОГЛА БЫ ПОГОВОРИТЬ ПОБОЛЬШЕ С РЕБЯТАМИ В ПИВНОМ БАРЕ.
НУ, ОНИ ВСЕ ВЫГЛЯДЕЛИ ТАКИМИ ВЫДАЮЩИМИСЯ. Я ЧУВСТВОВАЛА СЕБЯ, КАК БЫ ЭТО СКАЗАТЬ, НЕ В СВОЕЙ ТАРЕЛКЕ.
НО ЗАЧЕМ ВЫ СПРАШИВАЕТЕ МЕНЯ ОБ ЭТОМ, СЭКИ-САН!?
ДА, ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ ИЗВЕСТНЫМИ ЛЮДЬМИ И ИМЕЮТ ЖУРНАЛИСТСКИЕ НАГРАДЫ...
...НО Я МОГУ С УВЕРЕННОСТЬЮ СКАЗАТЬ, ЧТО ОНИ УВАЖАЮТ ТЕБЯ.


КАК ВЫ МОЖЕТЕ БЫТЬ СЧАСТЛИВЫ, РАБОТАЯ В ЭТОМ ЗАБРОШЕННОМ ОТДЕЛЕНИИ?
ВАША РАБОТА СТАЛА ТАКОЙ НЕЗНАЧИТЕЛЬНОЙ!
ЕЙ БОЛЬШЕ НЕ НАЛИВАТЬ.
ИНТЕРЕСНО, КАКОВА ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО, ЧТО Я КОГДА-НИБУДЬ СТАНУ ТАКИМ ЖЕ ПЕРВОКЛАССНЫМ ЖУРНАЛИСТОМ, КАК ТЕ ЛЮДИ В ПИВНОЙ.
ЕСЛИ ВСЁ, ЧТО ТЕБЯ ВОЛНУЕТ, — ЭТО ВЕРОЯТНОСТЬ СТАТЬ ВЕЛИКОЙ, ТЫ НИКОГДА НИКЕМ НЕ СТАНЕШЬ. ТЫ НИЧЕГО НЕ ДОБЬЁШЬСЯ, ЕСЛИ БУДЕШЬ ПРОСТО ЧЕГО-ТО ДОЖИДАТЬСЯ.

ХОТЯ В БАРЕ ОНИ БОЛТАЛИ О ГЛУПЫХ ВЕЩАХ...
...НА САМОМ ДЕЛЕ ОНИ ПРИКЛАДЫВАЮТ НЕВЕРОЯТНЫЕ УСИЛИЯ, ЗАНИМАЯСЬ СВОЕЙ РАБОТОЙ.
ОНИ ПРОСТО ДЕЛАЮТ ТО, ЧТО ХОТЯТ ДЕЛАТЬ. НИКТО ИЗ НИХ НИКОГДА НЕ СДАСТСЯ НА ВОЛЮ СУДЬБЕ. И Я ТОЖЕ.
КАК ВСЁ ЭТО ГРУСТНО.
ВОТ ЧТО, ПОГОВОРИМ О ВЕРОЯТНОСТИ!
ЧТО? НЕУЖЕЛИ МЫ БУДЕМ УЧИТЬСЯ ДАЖЕ СЕЙЧАС?
КОНЕЧНО! Я ТВОЙ УЧИТЕЛЬ, А ТЫ — ВПОЛНЕ ПРОДВИНУТАЯ УЧЕНИЦА.


Для описания вероятностных событий довольно часто используется нормальное распределение.
f(x)
0
x
Ох-ох.
Это распределение описывается функцией плотности вероятности, которая с точностью до постоянного множителя имеет вид $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Как видно из рисунка, график $f(x)$ симметричен относительно оси y и похож на колокольчик.
СКРЯБ
СКРЯБ
СКРЯБ
СКРЯБ
Извините. Он собирается много писать. Не могли бы вы дать побольше подставок?
ШМЯК!
БУМ
Многие вероятностные явления описываются нормальным распределением, например, рост людей или животных.
Включая и погрешность измерений.
В финансах считается, что рентабельность капитала тоже имеет нормальное распределение.
Некоторые виды аттестации студентов тоже основаны на нормальном распределении, так как ему часто подчиняются результаты экзаменов.


Как ты уже догадалась, я использую разложение в ряд Тейлора, чтобы показать, что подкидывание монет подчиняется нормальному распределению.
Итак, какова вероятность выпадения "орла"?
ЩЁЛК!
Не думайте, что я совсем глупая. Это 1/2.
Верно, хотя мы не знаем, какой стороной упадёт монета, но знаем, что вероятность выпадения каждой стороны равна 1 из 2.
0,2
0,15
0,1
0,05
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
Число выпадений «орла» при подбрасывании 20 монет (биномиальное распределение)
Верхний график отражает вероятность выпадения "орла" при одновременном подбрасывании 20 монет.
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$
Нормированное нормальное распределение
О, он похож на график внизу.
Да, он практически полностью совпадает с графиком нормального распределения.



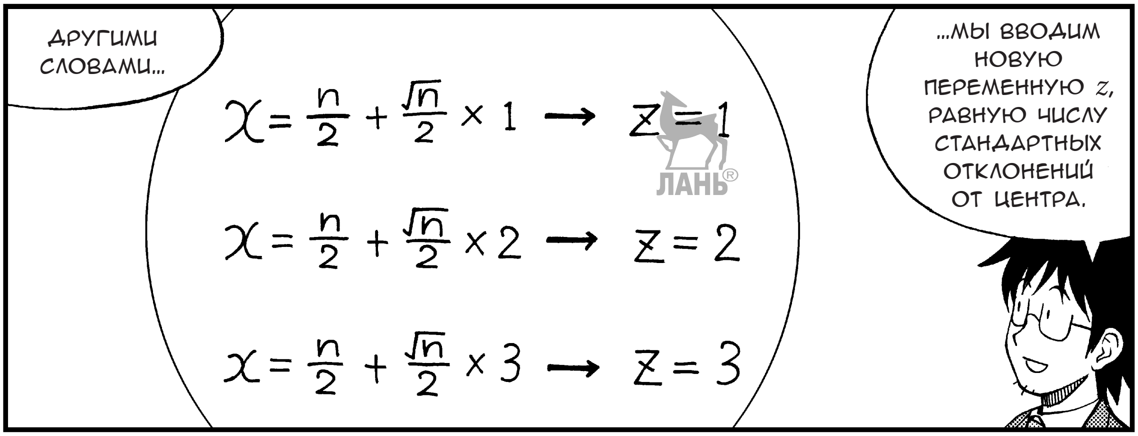
* Распределение вероятности выпадения x орлов при подбрасывании n монет подчиняется биномиальному распределению. Например, найдём вероятность выпадения 3 «орлов» при подбрасывании 5 монет. Вероятность выпадения комбинации ООРОР (О — «орлы», Р — «решки») равна

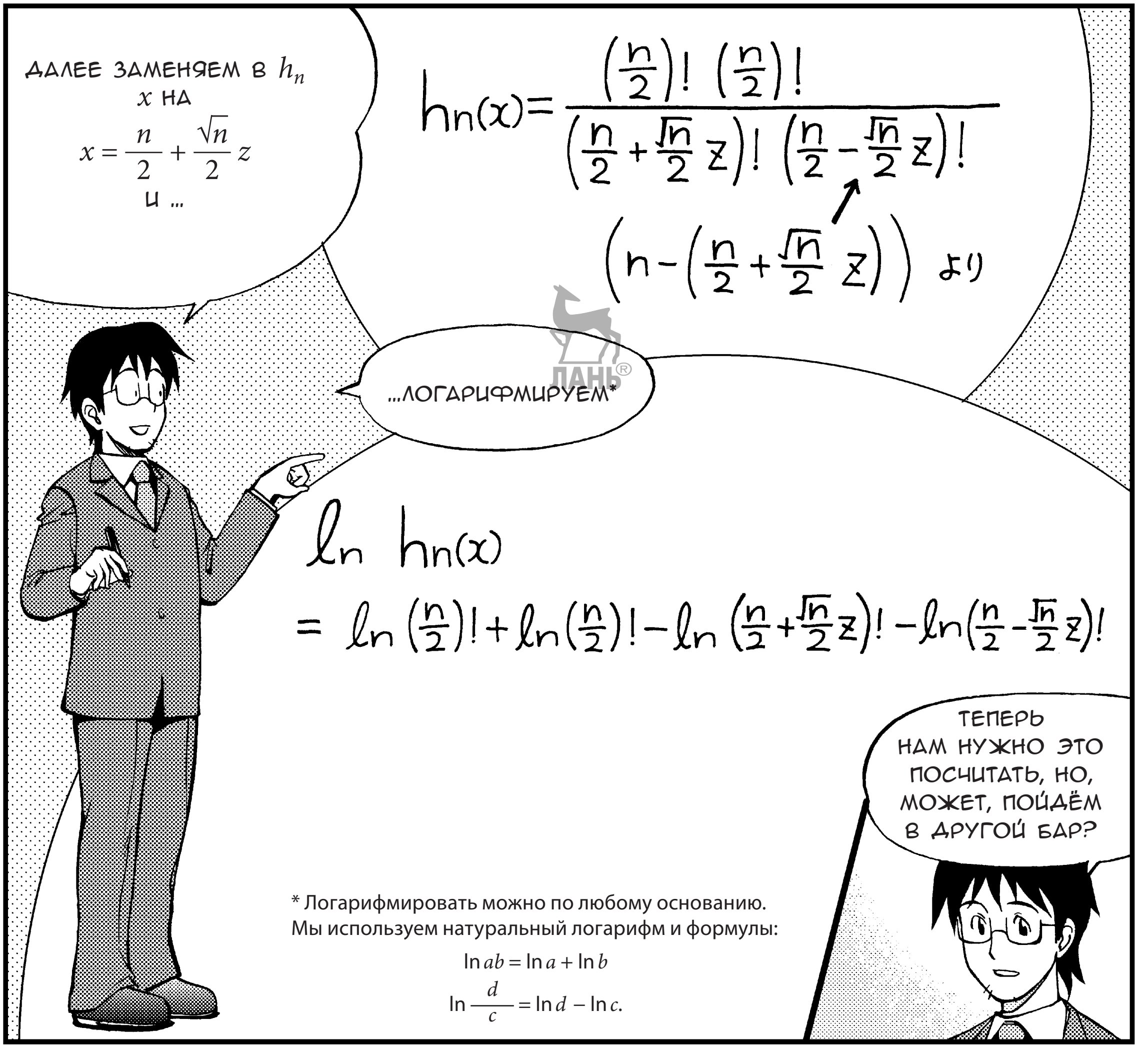
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Так как число комбинаций с 3 «орлами» и 2 «решками» равно ${}_5C_3$, то вероятность выпадения 3 «орлов» будет равна ${}_5C_3\,(1/2)^5$. В общем случае вероятность выпадения x «орлов» при подбрасывании n монет будет равна ${}_nC_x\,(1/2)^n$. Покажем, что если n велико, то биномиальное распределение стремится к нормальному распределению.


Используя биномиальное распределение...
$g_n(x) = {}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$
$= {}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$
можно записать $g_n(x)$ следующим образом.
Так как функция нормального распределения $f(x)$ симметрична относительно $x = 0$, а $g_n(x)$ — относительно $x=1/2$...
ЧИРК
ЧИРК
Как много подставок...
...используем для нормирования функцию $g_n\left(\frac{n}{2}\right)$.
Сначала...
$g_n\left(\frac{n}{2}\right) = {}_nC_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
...разделив $g_n(x)$ на $g_n(n/2)$...
$h_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_n\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{{}_nC_x}{{}_nC_{\frac{n}{2}}}$
получим нормированную функцию $h_n(x)$.
Далее, подставляя...
$g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{2}\right) \times h_n(x)$
...получаем выражение для ${}_nC_x$...
${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}, {}_nC_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$
и ${}_nC_{n/2}$.
$h_n(x) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{x!(n-x)!}$


Так много... испорченных подставок...
Ничего себе ...
ЗЫРК!
Теперь заменим единицу на $\frac{\sqrt{n}}{2}$, так как центр находится в точке $x = \frac{n}{2}$.
Им меня не жаль...
$\frac{\sqrt{n}}{2}$ — это стандартное отклонение. Если ты не знакома со статистикой, просто воспринимай это как магические слова!
Абракадабра!

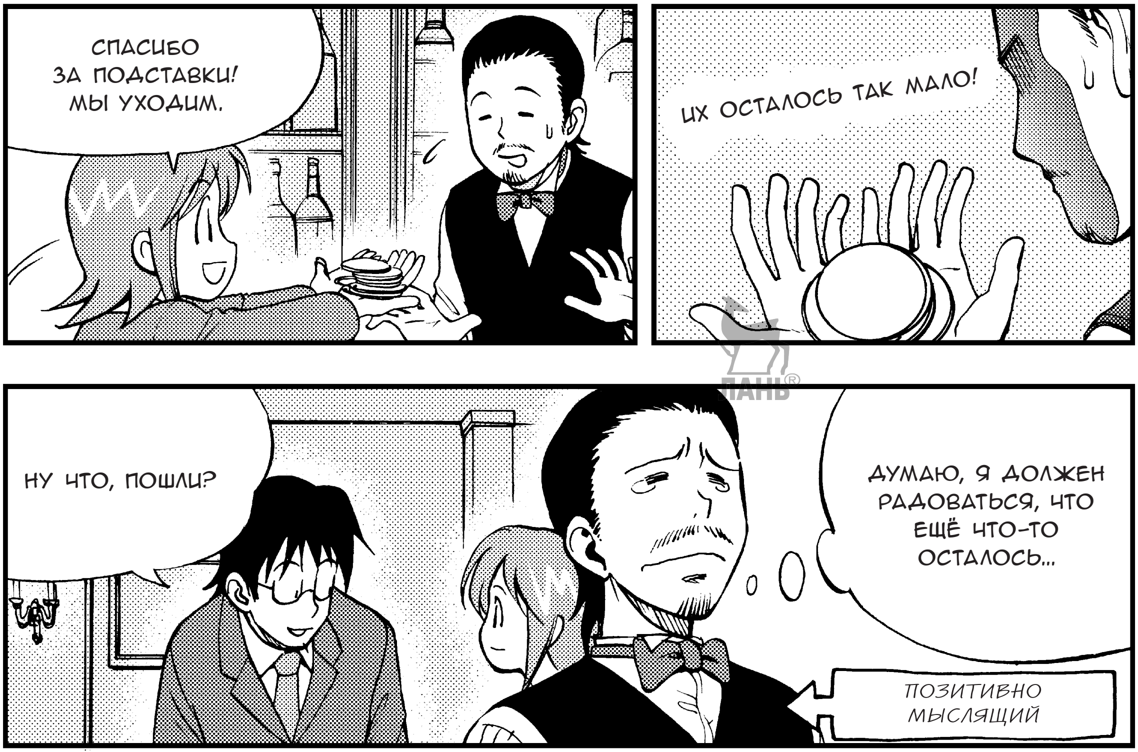




* Логарифмировать можно по любому основанию. Мы используем натуральный логарифм и формулы:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{d}{c} = \ln d - \ln c.$$

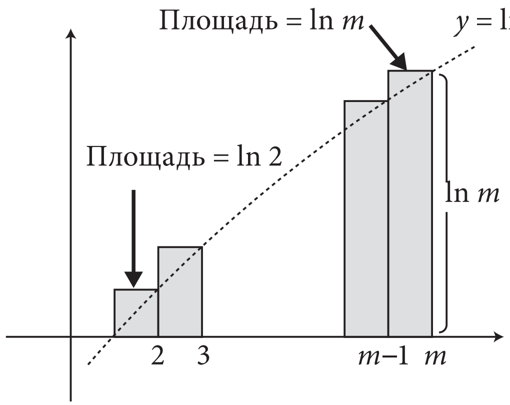


Найдём приближение для $\ln(m!)$:

$$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots\ldots + \ln m.$$

Если мы сложим площади закрашенных прямоугольников на графике $\ln x$, то получим

$$\ln 2 + \ldots + \ln m \approx \int_1^m \ln x dx.$$



Так как

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x,$$

то, используя основную теорему интегрирования, можно записать

$$\int_1^m \ln x dx = (m \ln m - m) - (1 \ln 1 - 1) =$$

$$= m \ln m - m + 1 = m(\ln m - 1) + 1.$$

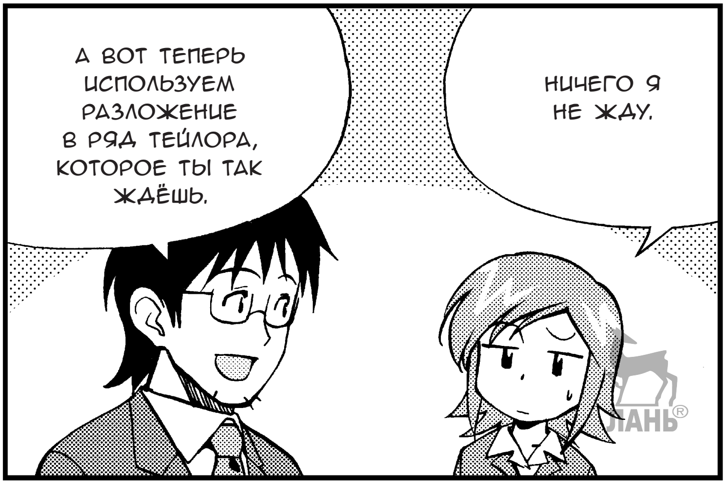
Нас интересуют большие значения m, для которых $\ln m >> 1$. Поэтому, пренебрегая 1, получаем следующую приближённую формулу:

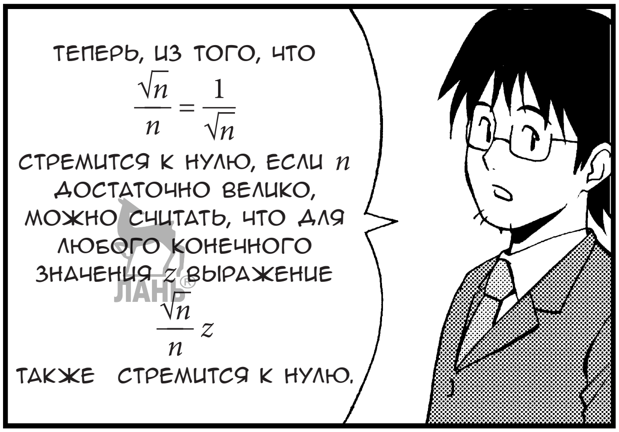
$$\ln m! \approx m \ln m.$$

$$\ln h_n(x) \sim \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right) - \left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)$$

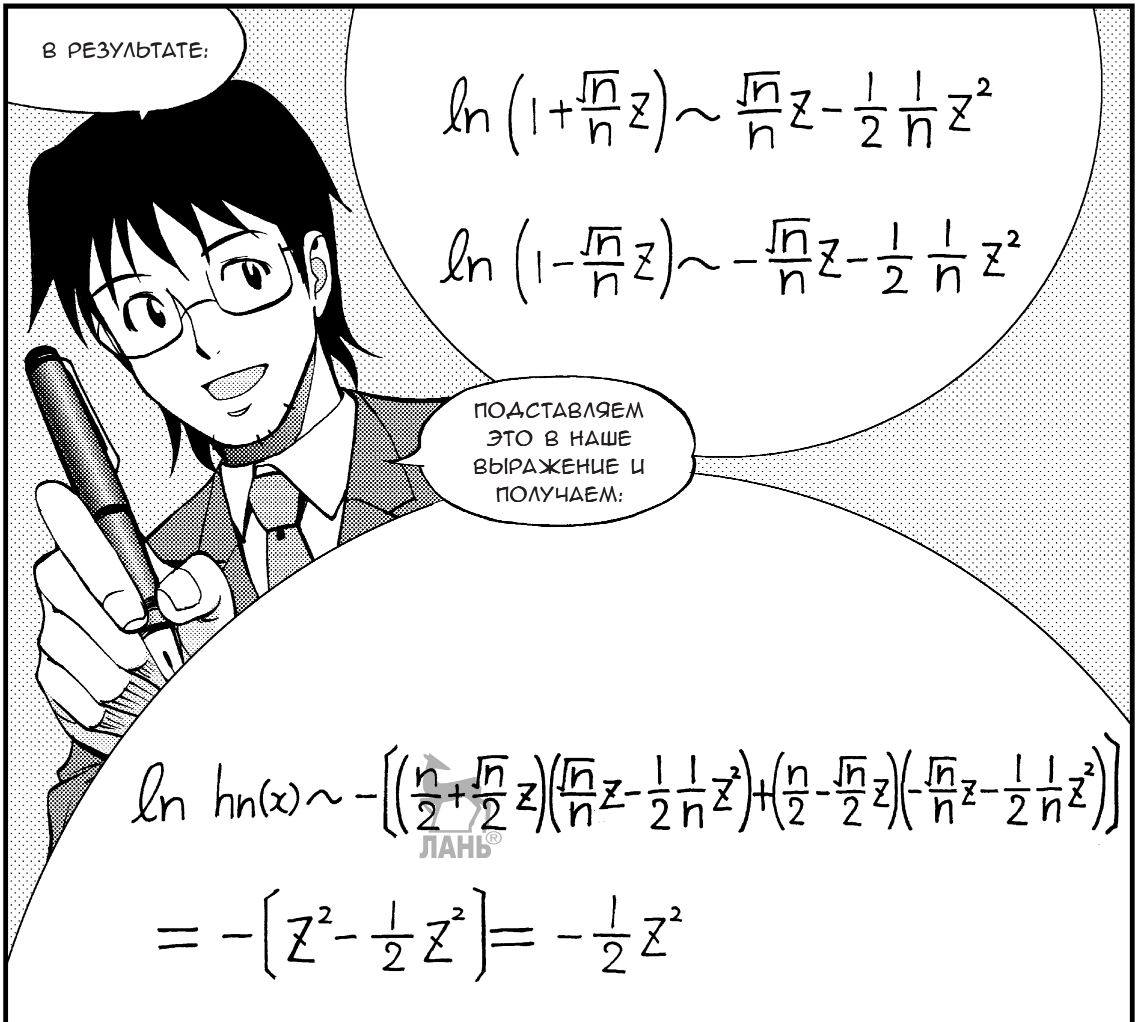
После замены $\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right) = \ln\left\{\frac{n}{2}\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\right\} = \ln\frac{n}{2} + \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)$ и тождественных преобразований получаем:

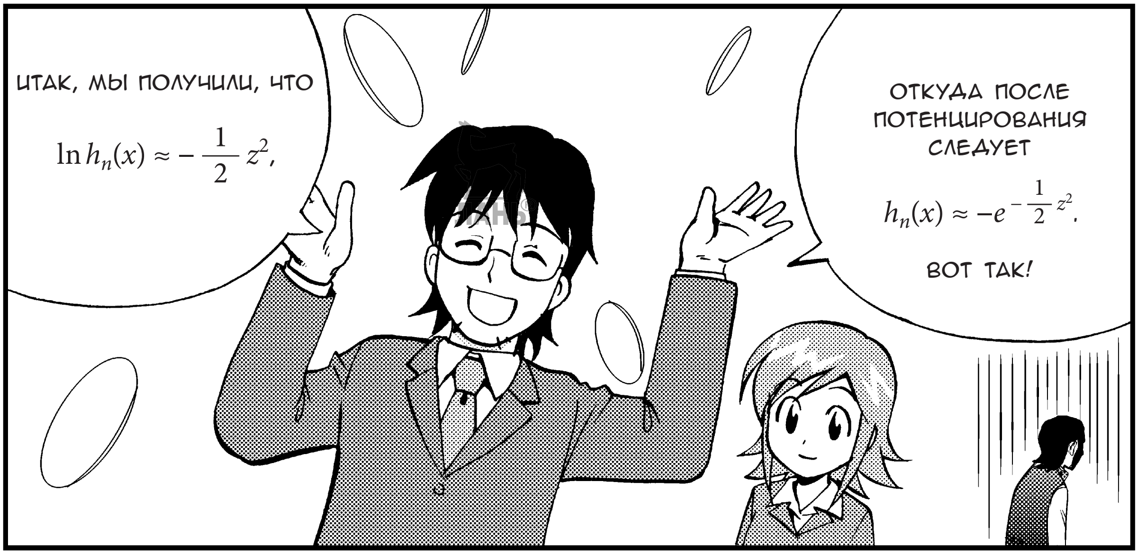
$$\ln h_n(x) \sim -\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right) + \left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\right]$$

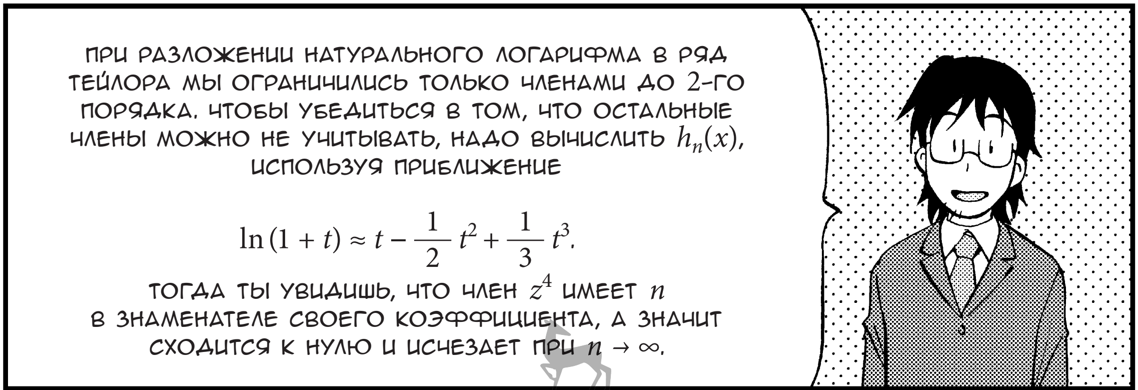


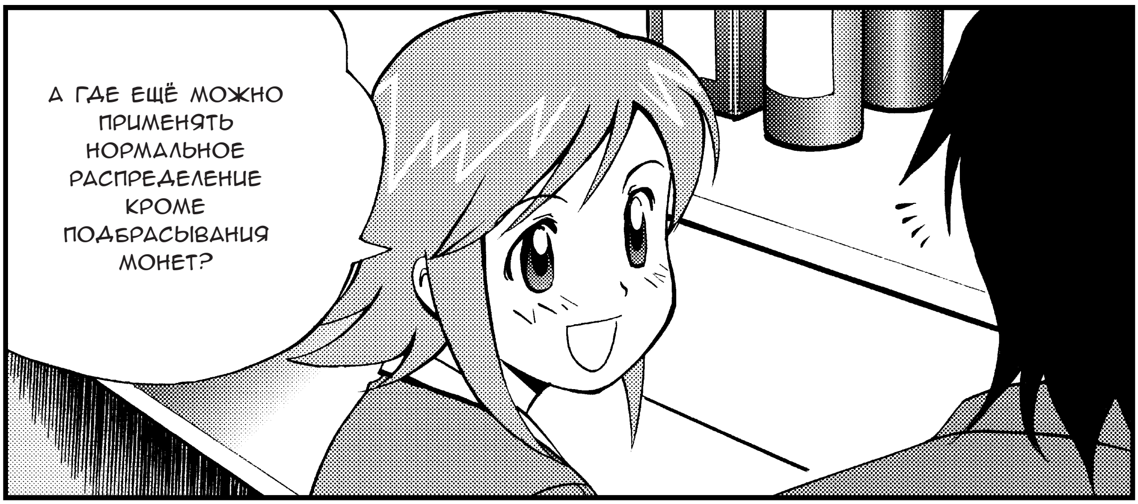


* Квадратичное приближение, см. стр. 159.

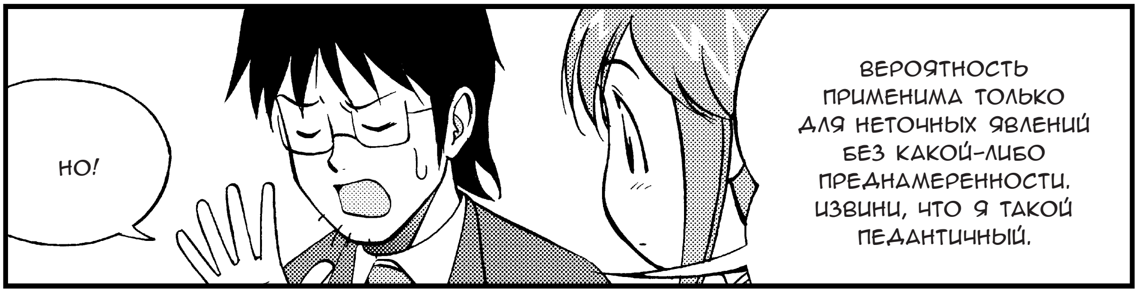


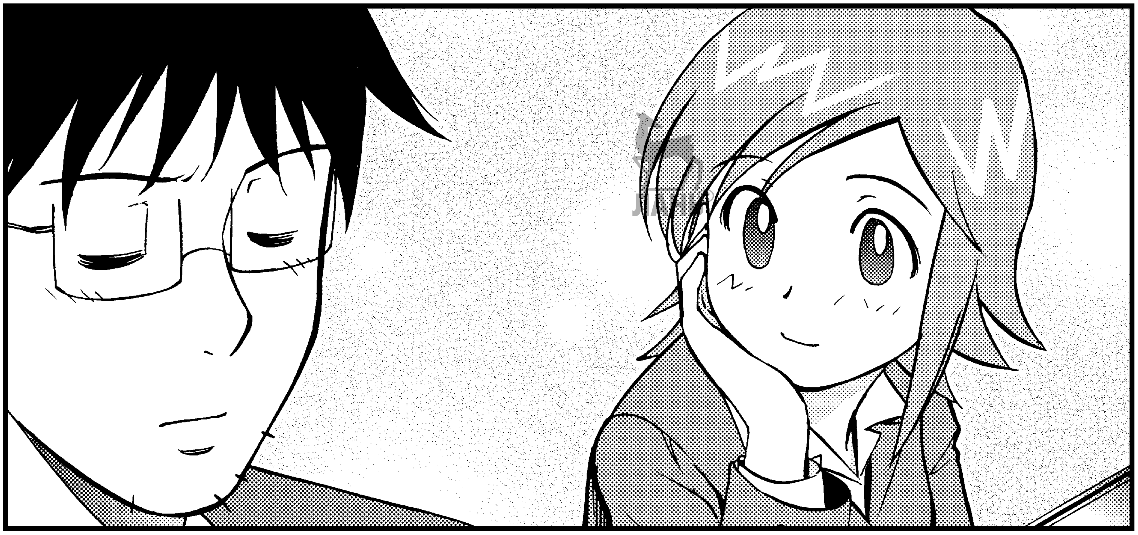

Итак, мы получили, что $\ln h_n(x) \approx -\frac{1}{2} z^2$,
Откуда после потенцирования следует $h_n(x) \approx -e^{-\frac{1}{2} z^2}$.
Вот так!


При разложении натурального логарифма в ряд Тейлора мы ограничились только членами до 2-го порядка. Чтобы убедиться в том, что остальные члены можно не учитывать, надо вычислить $h_n(x)$, используя приближение
$\ln(1+t) \approx t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3$.
Тогда ты увидишь, что член z^4 имеет n в знаменателе своего коэффициента, а значит сходится к нулю и исчезает при $n \to \infty$.


А где ещё можно применять нормальное распределение кроме подбрасывания монет?


ТЫ ЧТО, ОПЯТЬ ХОЧЕШЬ ПРИМЕНИТЬ МАТЕМАТИКУ К ЛЮБВИ? ВЕРОЯТНОСТЬ МОЖЕТ ПРИМЕНЯТЬСЯ ТОЛЬКО К НЕПРЕДНАМЕРЕННЫМ И ЧИСТО СЛУЧАЙНЫМ ЯВЛЕНИЯМ.
КАК НАСЧЁТ СЛУЧАЯ НЕЧАЯННОЙ И ЧИСТОЙ ЛЮБВИ?
ЭТО НЕ ОБСУЖДАЕТСЯ!
СЛУШАЙ! ЕСЛИ МЫ ПОПРОБУЕМ ОЧЕНЬ ГРУБО ДОПУСТИТЬ, ЧТО ЯВЛЕНИЕ, КОГДА ДВОЕ ЛЮДЕЙ ВЛЮБЛЯЮТСЯ, ЭТО ЧТО-ТО ВРОДЕ НАБОРА РЕЗУЛЬТАТОВ ПОДКИДЫВАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА МОНЕТ...
...
ЧТО Ж, ТАК КАК МЫ ОПРЕДЕЛИЛИ, ЧТО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОДКИДЫВАНИЯ МОНЕТ ПРИБЛИЖЁННО РАВНО НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ, НЕТ НИЧЕГО УДИВИТЕЛЬНОГО, ЧТО НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЖНО ПРИМЕНИТЬ И В ВОПРОСАХ ЛЮБВИ.
ПРАВДА?


НО!
ВЕРОЯТНОСТЬ ПРИМЕНИМА ТОЛЬКО ДЛЯ НЕТОЧНЫХ ЯВЛЕНИЙ БЕЗ КАКОЙ-ЛИБО ПРЕДНАМЕРЕННОСТИ. ИЗВИНИ, ЧТО Я ТАКОЙ ПЕДАНТИЧНЫЙ.




НО, СЭКИ-САН, ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО ОДНА НЕВИННАЯ ДЕВУШКА...
ОПЯТЬ ТЫ ЗА СВОЁ! ПОЧЕМУ ТЫ НИЧЕГО НЕ СЛУШАЕШЬ?

5.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Найти разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = e^{-x}$ при $x = 0$.

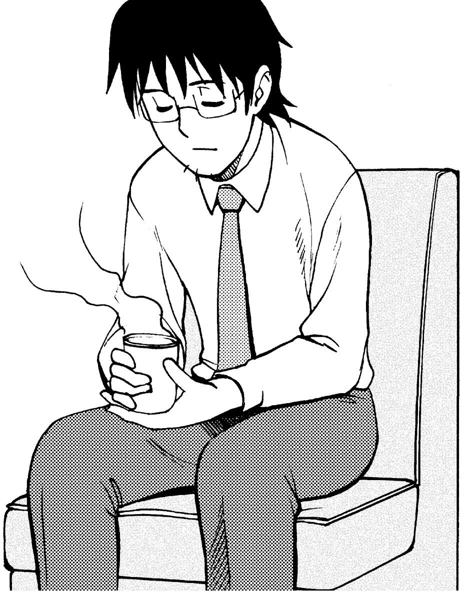
2. Найти квадратичное приближение $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ при $x = 0$.

3. Вывести формулу разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке $x = a$, которая приведена на стр. 157. Другими словами, надо найти значения коэффициентов a_n в формуле

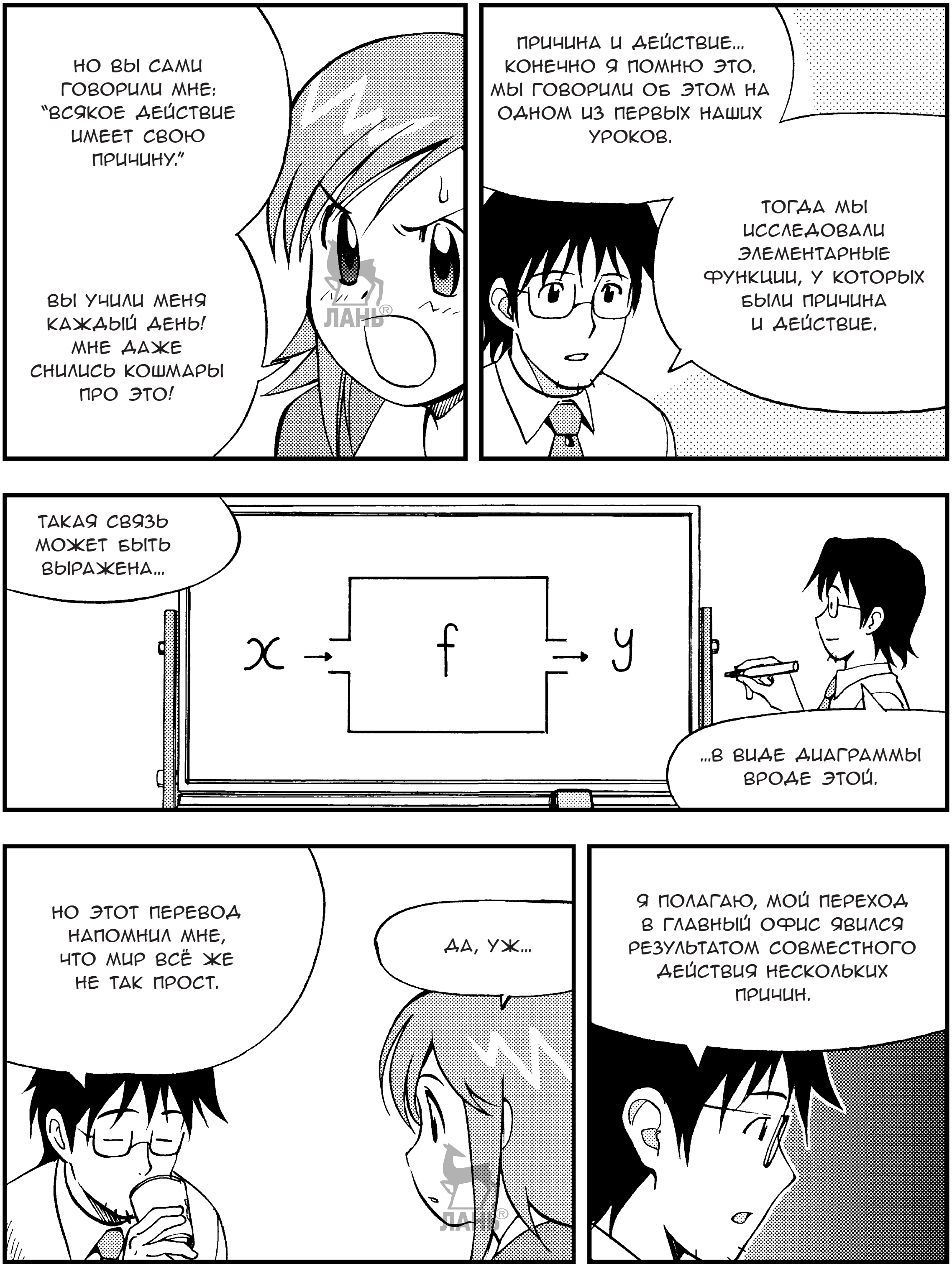
$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots\ldots + a_n(x - a)^n + \ldots$$

6

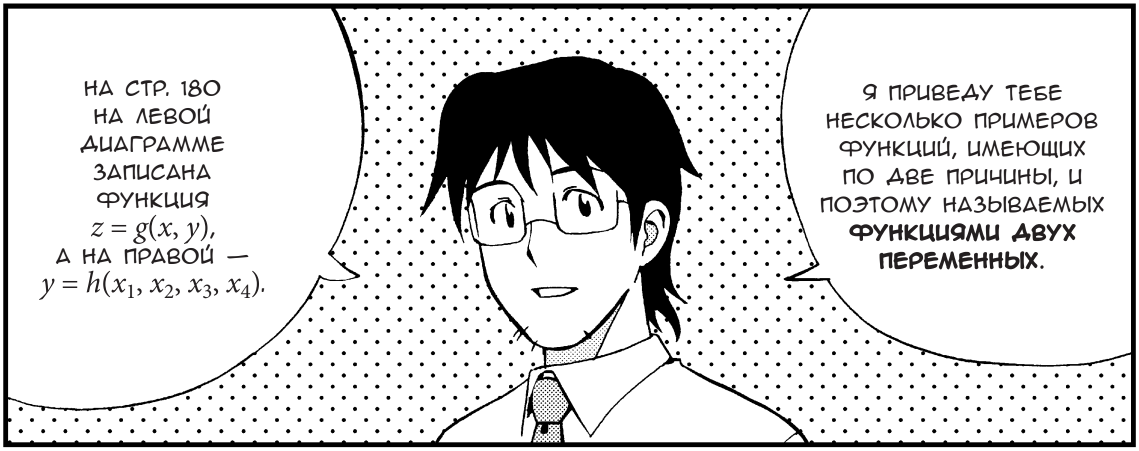
Изучаем частные производные!



6.1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ


НО ВЫ САМИ ГОВОРИЛИ МНЕ: "ВСЯКОЕ ДЕЙСТВИЕ ИМЕЕТ СВОЮ ПРИЧИНУ."
ВЫ УЧИЛИ МЕНЯ КАЖДЫЙ ДЕНЬ! МНЕ ДАЖЕ СНИЛИСЬ КОШМАРЫ ПРО ЭТО!
ПРИЧИНА И ДЕЙСТВИЕ... КОНЕЧНО Я ПОМНЮ ЭТО. МЫ ГОВОРИЛИ ОБ ЭТОМ НА ОДНОМ ИЗ ПЕРВЫХ НАШИХ УРОКОВ.
ТОГДА МЫ ИССЛЕДОВАЛИ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, У КОТОРЫХ БЫЛИ ПРИЧИНА И ДЕЙСТВИЕ.
ТАКАЯ СВЯЗЬ МОЖЕТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНА...
x
f
y
...В ВИДЕ ДИАГРАММЫ ВРОДЕ ЭТОЙ.
НО ЭТОТ ПЕРЕВОД НАПОМНИЛ МНЕ, ЧТО МИР ВСЁ ЖЕ НЕ ТАК ПРОСТ.
ДА, УЖ...
Я ПОЛАГАЮ, МОЙ ПЕРЕХОД В ГЛАВНЫЙ ОФИС ЯВИЛСЯ РЕЗУЛЬТАТОМ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПРИЧИН.


ЭТО МОЖЕТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНО...
x
y
g
z
...К ПРИМЕРУ...
x_1
x_2
x_3
x_4
h
y
...ВОТ ТАКИМИ ДИАГРАММАМИ.
В СЛУЧАЕ СЭКИ-САНА x — ЭТО ПИСАТЕЛЬСКИЙ ТАЛАНТ, y — БЕСПРИСТРАСТНЫЕ ОТЧЁТЫ, А z — ПЕРЕХОД В ГЛАВНЫЙ ОФИС. ТАК?
НУ, Я ЕЩЁ НЕ ЗНАЮ ПРИЧИН МОЕГО ПЕРЕВОДА.
В СЛУЧАЕ С НОРИКО x_1 — ОШИБКИ В ПРОШЛОМ МЕСЯЦЕ, x_2 — ОШИБКИ В ЭТОМ МЕСЯЦЕ, x_3 И x_4 — НЕДОСТАТОЧНЫЙ УХОД И ГИГИЕНА, КОТОРЫЕ ПРИВЕЛИ К y — ПОНИЖЕНИЮ ДО НАПИСАНИЯ НЕКРОЛОГОВ. ХА-ХА-ХА!
ЗЫРК
УА-А!
ЗАТКНИСЬ, МОЛЧАЛИВЫЙ БИЗОН!
TUCK
ЛАДНО, ХВАТИТ, НОРИКО. У НАС ОСТАЛОСЬ НЕ ТАК МНОГО ВРЕМЕНИ.
ДАВАЙ ПОБЫСТРЕЕ ЗАКОНЧИМ ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВ.



Пример 1

Высота тела, брошенного вверх со скоростью v, через время t задаётся функцией

$$h(v, t) = vt - 4{,}9t^2\ [м].$$

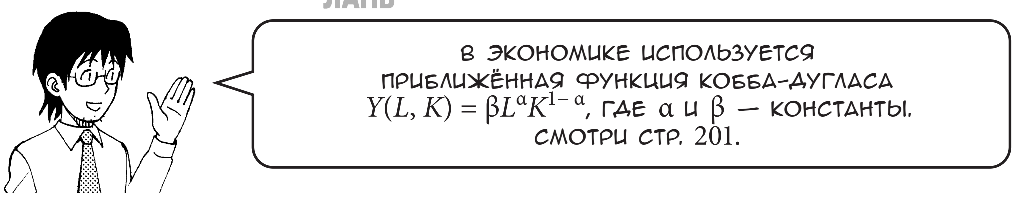
Пример 2

Концентрация сахарного сиропа, полученного растворением y граммов сахара в x граммах воды, задаётся функцией

$$f(x, y) = \frac{y}{x + y} \times 100.$$

Пример 3

Общее количество производимых товаров Y (ВВП — валовой внутренний продукт) является функцией общего количества оборудования и станков K (называемого капиталом) и количества рабочих L — $Y(L, K)$.

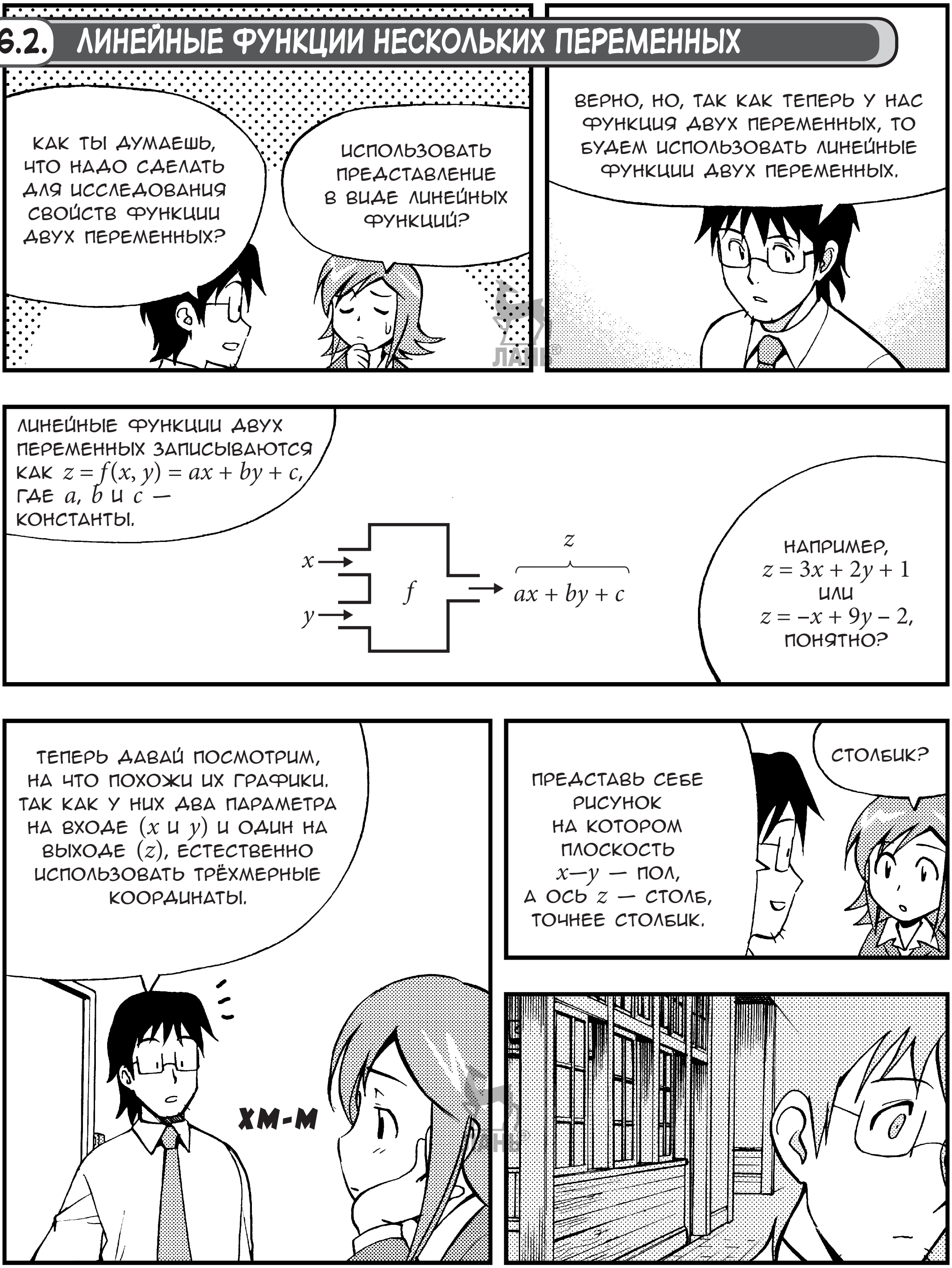


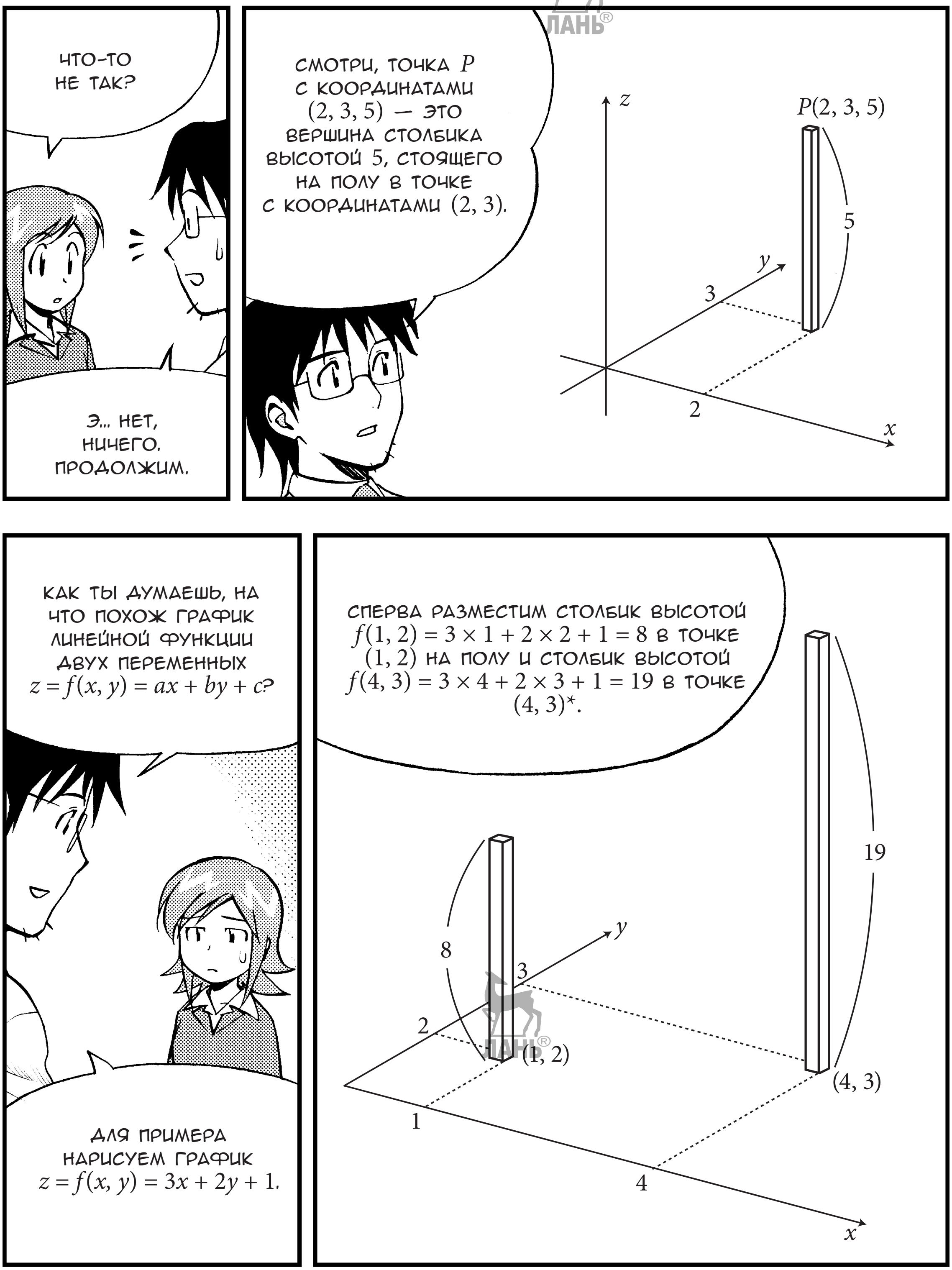
Пример 4

В физике давление идеального газа P, его объём V и температура T связаны между собой функцией

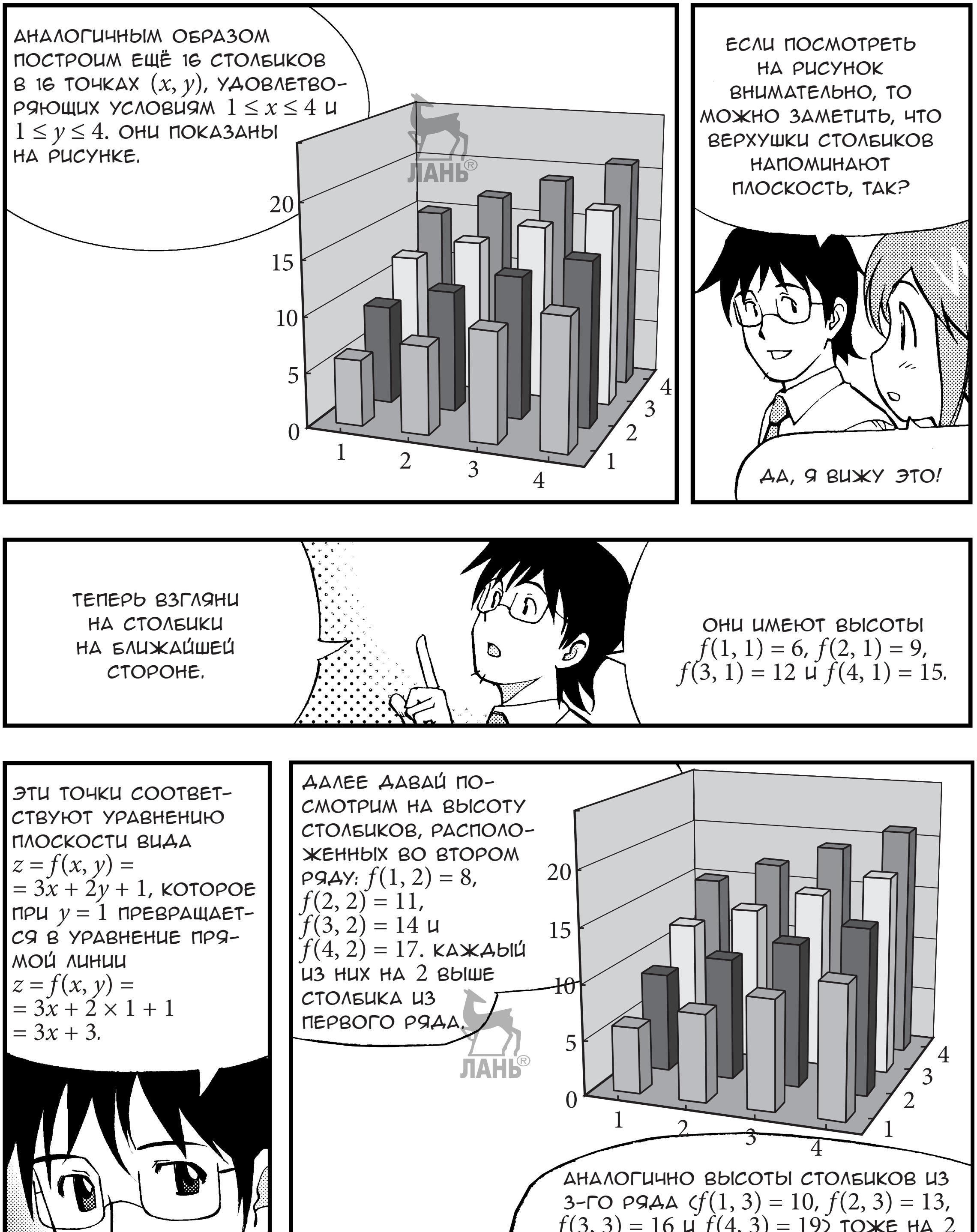
$$T(P, V) = \gamma PV.$$

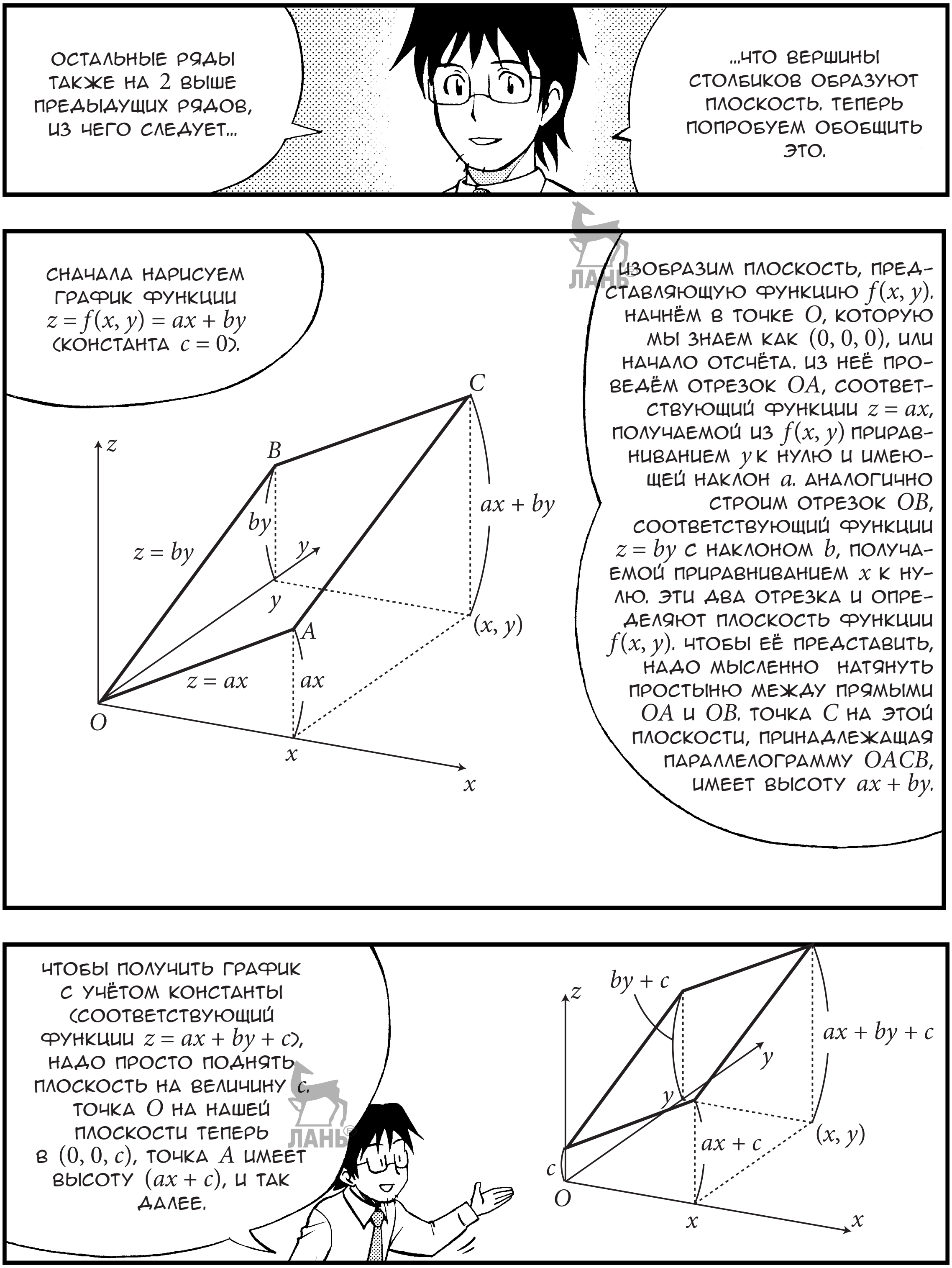
6.2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

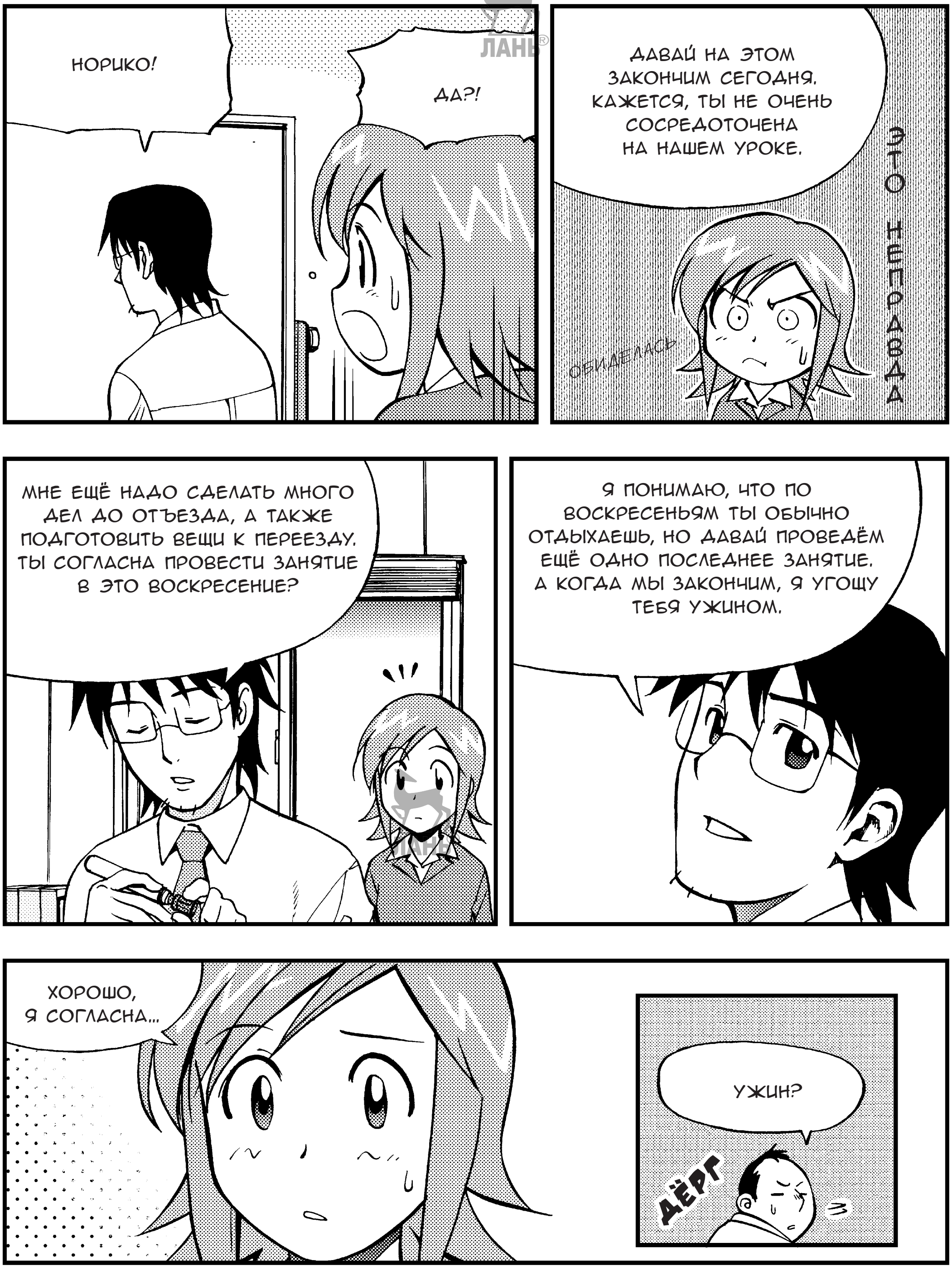




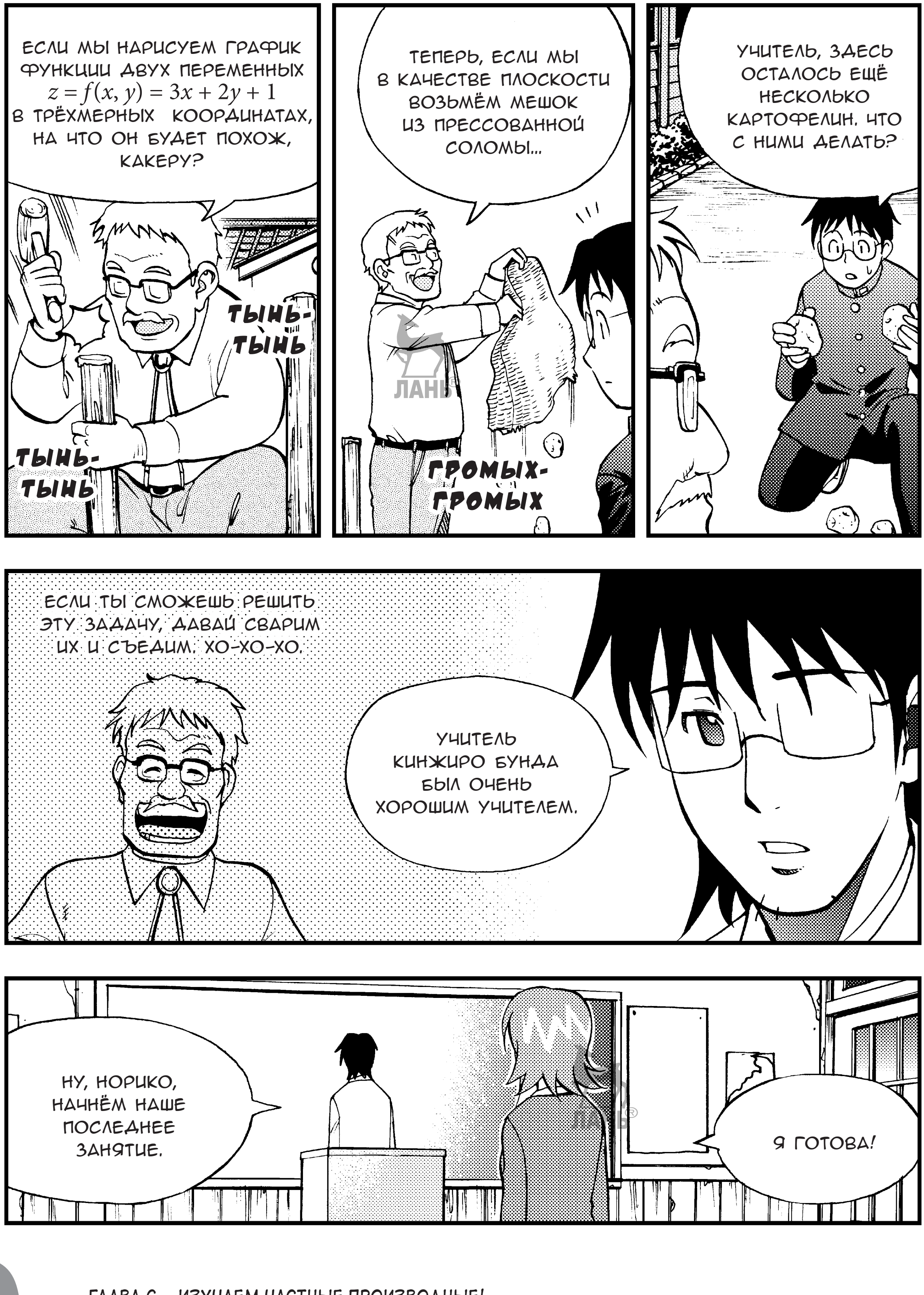
* Для упрощения здесь указываются двумерные координаты (4, 3) вместо трёхмерных (4, 3, 0).


Аналогичным образом построим ещё 16 столбиков в 16 точках (x, y), удовлетворяющих условиям $1 \le x \le 4$ и $1 \le y \le 4$. Они показаны на рисунке.
Если посмотреть на рисунок внимательно, то можно заметить, что верхушки столбиков напоминают плоскость, так?
Да, я вижу это!
Теперь взгляни на столбики на ближайшей стороне.
Они имеют высоты $f(1, 1) = 6$, $f(2, 1) = 9$, $f(3, 1) = 12$ и $f(4, 1) = 15$.
Эти точки соответствуют уравнению плоскости вида $z = f(x, y) = 3x + 2y + 1$, которое при $y = 1$ превращается в уравнение прямой линии $z = f(x, y) = 3x + 2 \times 1 + 1 = 3x + 3$.
Далее давай посмотрим на высоту столбиков, расположенных во втором ряду: $f(1, 2) = 8$, $f(2, 2) = 11$, $f(3, 2) = 14$ и $f(4, 2) = 17$. Каждый из них на 2 выше столбика из первого ряда.
Аналогично высоты столбиков из 3-го ряда ($f(1, 3) = 10$, $f(2, 3) = 13$, $f(3, 3) = 16$ и $f(4, 3) = 19$) тоже на 2 выше столбиков из предыдущего 2-го ряда.

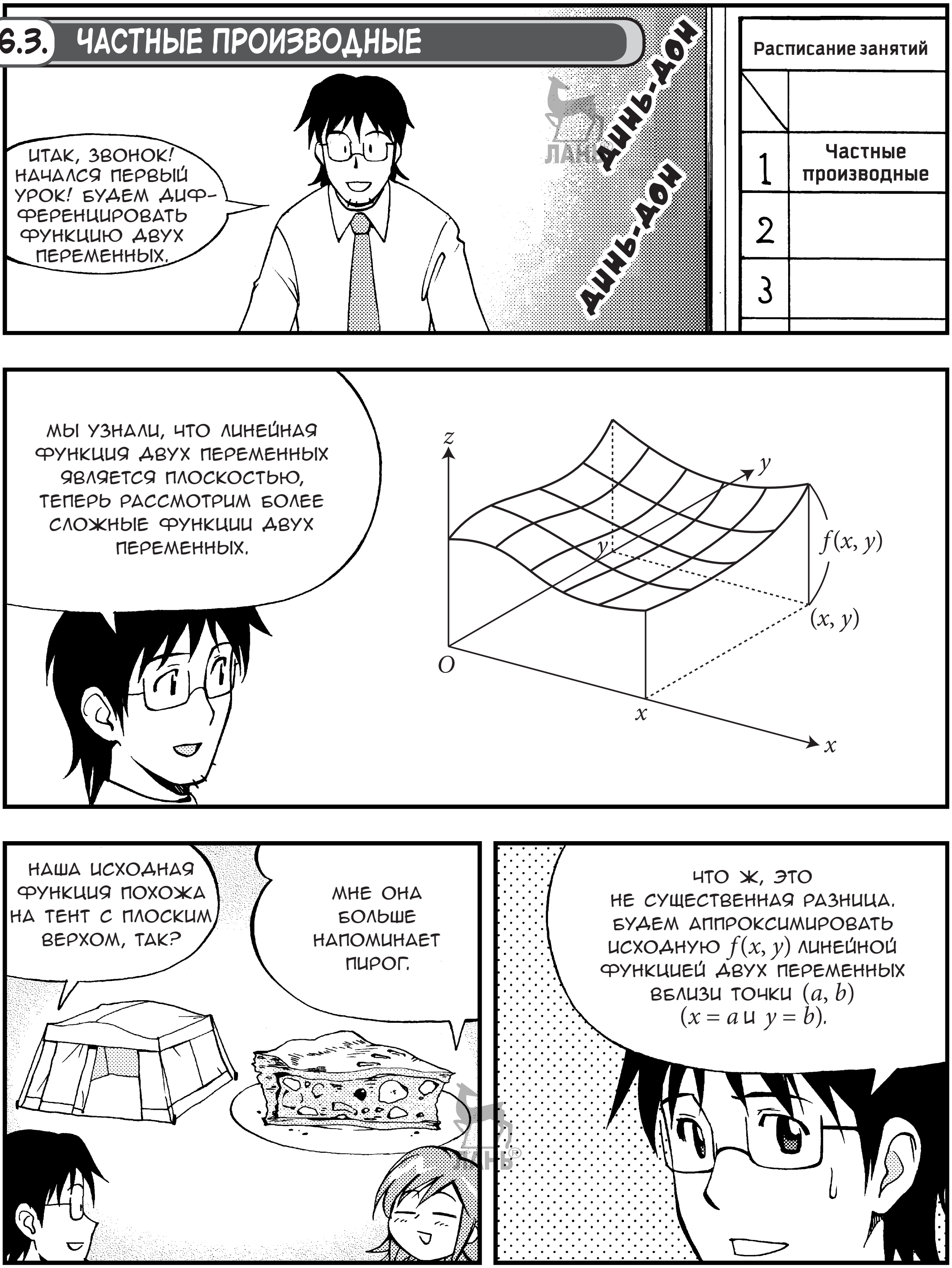

Остальные ряды также на 2 выше предыдущих рядов, из чего следует...
...что вершины столбиков образуют плоскость. Теперь попробуем обобщить это.
Сначала нарисуем график функции $z = f(x, y) = ax + by$ (константа $c = 0$).
Изобразим плоскость, представляющую функцию $f(x, y)$. Начнём в точке O, которую мы знаем как $(0, 0, 0)$, или начало отсчёта. Из неё проведём отрезок OA, соответствующий функции $z = ax$, получаемой из $f(x, y)$ приравниванием y к нулю и имеющей наклон a. Аналогично строим отрезок OB, соответствующий функции $z = by$ с наклоном b, получаемой приравниванием x к нулю. Эти два отрезка и определяют плоскость функции $f(x, y)$. Чтобы её представить, надо мысленно натянуть простыню между прямыми OA и OB. Точка C на этой плоскости, принадлежащая параллелограмму $OACB$, имеет высоту $ax + by$.
z
B
C
$ax + by$
by
y
$z = by$
y
(x, y)
A
$z = ax$
ax
O
x
x
Чтобы получить график с учётом константы (соответствующий функции $z = ax + by + c$), надо просто поднять плоскость на величину c. Точка O на нашей плоскости теперь в $(0, 0, c)$, точка A имеет высоту $(ax + c)$, и так далее.
z
$by + c$
$ax + by + c$
y
y
(x, y)
$ax + c$
c
O
x
x


НОРИКО!
ДА?!
ДАВАЙ НА ЭТОМ ЗАКОНЧИМ СЕГОДНЯ. КАЖЕТСЯ, ТЫ НЕ ОЧЕНЬ СОСРЕДОТОЧЕНА НА НАШЕМ УРОКЕ.
ЭТО НЕПРАВДА
ОБИДЕЛАСЬ
МНЕ ЕЩЁ НАДО СДЕЛАТЬ МНОГО ДЕЛ ДО ОТЪЕЗДА, А ТАКЖЕ ПОДГОТОВИТЬ ВЕЩИ К ПЕРЕЕЗДУ. ТЫ СОГЛАСНА ПРОВЕСТИ ЗАНЯТИЕ В ЭТО ВОСКРЕСЕНИЕ?
Я ПОНИМАЮ, ЧТО ПО ВОСКРЕСЕНЬЯМ ТЫ ОБЫЧНО ОТДЫХАЕШЬ, НО ДАВАЙ ПРОВЕДЁМ ЕЩЁ ОДНО ПОСЛЕДНЕЕ ЗАНЯТИЕ. А КОГДА МЫ ЗАКОНЧИМ, Я УГОЩУ ТЕБЯ УЖИНОМ.
ХОРОШО, Я СОГЛАСНА...
УЖИН?
ДЁРГ

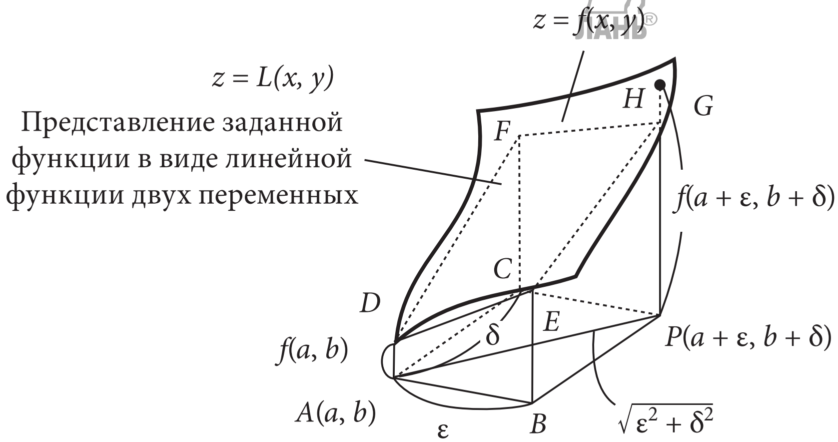

Школа Танака
Воскресение
кола Танака
Эта школа несколько лет назад была закрыта.
Нет, просто мне нравится это место. Здесь я изучал математику.
Вау!
Правда? И вы собираетесь написать об этом статью?
Вообще-то я родился в этом городе.
Это была маленькая школа, но здесь был учитель, который давал мне лучшие уроки в мире.


Если мы нарисуем график функции двух переменных $z = f(x, y) = 3x + 2y + 1$ в трёхмерных координатах, на что он будет похож, Какеру?
Тынь-тынь
Тынь-тынь
Теперь, если мы в качестве плоскости возьмём мешок из прессованной соломы...
Громых-громых
Учитель, здесь осталось ещё несколько картофелин. Что с ними делать?
Если ты сможешь решить эту задачу, давай сварим их и съедим. Хо-хо-хо.
Учитель Кинжиро Бунда был очень хорошим учителем.
Ну, Норико, начнём наше последнее занятие.
Я готова!

6.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ



Строим линейную функцию двух переменных, которая в точке (a, b) имеет высоту $f(a, b)$ и описывается формулой $L(x, y) = p(x - a) + q(y - b) + f(a, b)$. Заменяя x на a и y на b, получаем $L(a, b) = f(a, b)$.



Значения функций $z = f(x, y)$ и аппроксимирующей её $z = L(x, y)$ в точке $P(a + \varepsilon, b + \delta)$, смещённой относительно точки $A(a, b)$, отличается на некоторую величину. Возникающая при этом погрешность равна:

$$f(a + \varepsilon, b + \delta) - L(a + \varepsilon, b + \delta) = f(a + \varepsilon, b + \delta) - f(a, b) - (p\varepsilon + q\delta),$$

а относительная погрешность (ОП) — отношению погрешности к длине AP:

$$\text{ОП} = \frac{f(a + \varepsilon, b + \delta) - f(a, b) - (p\varepsilon + q\delta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}}. \tag{1}$$

Найдём значения p и q, исходя из того, что разность между $f(x, y)$ и $L(x, y)$ стремится к нулю при приближении точки P к точке A. На графике коэффициент p равен тангенсу угла наклона DE, а коэффициент q — тангенсу угла наклона DF. Так как значения ε и δ могут быть любыми, приравняем $\delta = 0$ и найдём значение выражения (1):

$$\text{ОП} = \frac{f(a + \varepsilon, b + 0) - f(a, b) - (p\varepsilon + q \times 0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon} - p.$$

Утверждение «относительная погрешность → 0 при ε → 0» означает следующее:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon} = p, \qquad (2)$$

где p — тангенс угла наклона DE.

Заметим, что левая часть уравнения (2) означает не что иное, как дифференцирование функции одной переменной. Другими словами, если заменить y на постоянную b, то получим функцию $f(x, b)$ только переменной x. Левая часть уравнения (2) представляет расчёт производной этой функции при $x = a$.

Если записать найденное значение, используя стандартное обозначение $f'(a, b)$, то будет невозможно определить, относительно чего, x или y, мы дифференцируем. Поэтому для записи производной $f(x, y)$ при $x = a$ и фиксированном значении $y = b$ используют обозначение $f_x(a, b)$. Функция f_x называется *частной производной f по x*. Эта запись соответствует «штриху» в дифференцировании функции одной переменной. Также используется обозначение $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ вместо записи $\frac{df}{dx}$, используемой при записи производной одной переменной.

Подведём итог.

Производная f по x при $x = a$ и фиксированном значении $y = b$, может быть записана разными способами:

$$f_x(a, b);\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b);\ \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=a,\, y=b};\ \text{наклон } DE.$$

Аналогично для y — производная f по y при $y = b$ и фиксированном значении $x = a$ записывается:

$$f_y(a, b);\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b);\ \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=a,\, y=b};\ \text{наклон } DF.$$

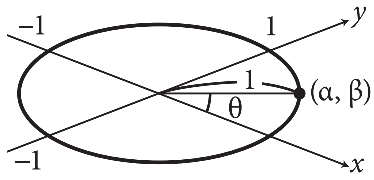
Итак, мы нашли следующее.

Если $z = f(x, y)$ имеет представление в виде линейной функции вблизи точки $(x, y) = (a, b)$, то можно записать:

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \qquad (3)$$

или $$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

Рассмотрим теперь произвольную точку (α, β) на круге с радиусом 1 и центром в начале координат плоскости x—y (пол). Имеем $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (или $\alpha = \cos\theta$ и $\beta = \sin\theta$). Найдём производную в направлении из точки $(0, 0)$ в точку (α, β). Перемещение на расстояние t в этом направлении записывается как $(a, b) \to (a + \alpha t, b + \beta t)$. Если мы положим $\varepsilon = \alpha t$ и $\delta = \beta t$ в (1), то получим



$$\text{ОП} = \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}} =$$

$$= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - p\alpha - q\beta = (\text{учитывая, что } \alpha^2 + \beta^2 = 1) =$$

$$= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - p\alpha - q\beta. \qquad (4)$$

Прибавляя и вычитая в формуле (4) вспомогательное слагаемое, а также делая замену $p = f_x(a, b)$ и $q = f_y(a, b)$, получаем:

$$\text{ОП} = \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t)}{t} + \frac{f(a, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta \qquad (5)$$

Используя производную по x функции $f(x, b + \beta t)$ для линейного приближения в точке $x = a$, можно записать, что

$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t) \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha t.$$

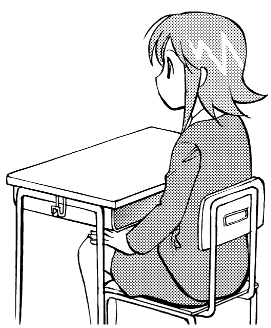
Аналогично для y получим

$$f(a, b + \beta t) - f(a, b) \approx f_y(a, b)\beta t.$$

Подставляем эти два приближения в формулу (5):

$$\text{ОП} \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha + f_y(a, b)\beta - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta =$$

$$= (f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b))\alpha.$$



Так как $f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b) \approx 0$, если t достаточно близко к 0, то и выражение (5), представляющее относительную погрешность, тоже близко к 0. Таким образом, мы показали, что относительная погрешность $\to 0$ при $AP \to 0$ для любого направления AP.

Надо отметить, что f_x должна быть гладкой (без изломов), чтобы можно было утверждать, что $f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b) \approx 0$ (при $t \approx 0$). При наличии изломов нельзя сказать, существует ли производная в любом направлении, даже если существуют производные f_x и f_y. Так как функции с изломами (кусочно-непрерывные) — явление довольно редкое, мы не будем рассматривать их в этой книге.

Пример 1

Рассмотрим функцию, приведённую в качестве примера 1 на стр. 181.

Найдём частную производную функции $h(v, t) = vt - 4{,}9t^2$ в точке $(v, t) = (100, 5)$.

Дифференцируя $h(v, 5) = 5v - 122{,}5$ в направлении v, получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial v}(v, 5) = 5.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(100, 5) = h_v(100, 5) = 5.$$

Теперь дифференцируем $h(100, t) = 100t - 4{,}9t^2$ в направлении t и получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, t) = 100 - 9{,}8t.$$

Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, 5) = h_t(100, 5) = 100 - 9.8 \times 5 = 51.$$

В итоге получаем представление $h(v, t)$ в виде линейной функции

$$L(x, y) = 5(v - 100) + 51(t - 5) - 377{,}5.$$

Для произвольных значений h и t частные производные будут равны:

$$\frac{\partial h}{\partial v} = t,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v - 9{,}8t.$$

Если теперь подставить эти частные производные в уравнение (3) на стр. 192, то вблизи точки $(v, t) = (v_0, t_0)$ можно записать:

$$h(v, t\ ) \approx t_0(v - v_0) + (v_0 - 9{,}8t_0)(t - t_0) + h(v_0, t_0).$$

Пример 2

В этом примере найдём линейное приближение для концентрации сахарного сиропа, полученного из y граммов сахара и x граммов воды.

$$f(x, y) = \frac{100y}{x + y}.$$

Дифференцируя по ∂x и ∂y , получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -\frac{100y}{(x + y)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{100(x + y) - 100y \times 1}{(x + y)^2} = \frac{100x}{(x + y)^2}.$$

Таким образом, вблизи точки $(x, y) = (a, b)$ имеем

$$f(x, y) \approx -\frac{100b}{(a + b)^2}(x - a) + \frac{100a}{(a + b)^2}(y - b) + \frac{100b}{a + b}.$$

Частное дифференцирование

Если $z = f(x, y)$ дифференцируема по x в любой точке пространства (x, y), то функция $f(x, y) \to f_x(x, y)$, связывающая точку (x, y) с её частной производной $f_x(x, y)$ по x в этой точке, называется *функцией частной производной по x* от функции $z = f(x, y)$ и обозначается

$$f_x, f_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично, если $z = f(x, y)$ дифференцируема по y в любой точке пространства (x, y), то функция $(x, y) \to f_x(x, y)$ называется *функцией частной производной по y* от функции $z = f(x, y)$ и обозначается

$$f_y, f_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y} \text{ или } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Нахождение частных производных функции называется её *частным дифференцированием*.

6.4. ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

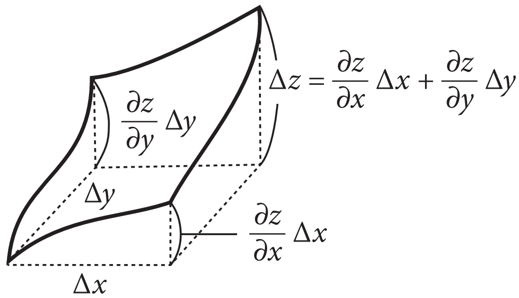
Мы нашли, что представление $z = f(x, y)$ линейной функцией в точке $(x, y) = (a, b)$ имеет вид

$$f(x, y) \approx f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

Перепишем это как

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b). \qquad (6)$$

Так как разность $f(x, y) - f(a, b)$ означает приращение $z = f(x, y)$ при переходе от точки (a, b) к точке (x, y), запишем её как Δz, как мы делали это для функции одной переменной. Соответственно, $(x - a) = \Delta x$ и $(y - b) = \Delta y$. Тогда выражение (6) можно записать в виде



$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (7)$$

Это выражение означает: если x увеличивается относительно a на Δx, а y — относительно b на Δy, то $z = f(x, y)$ увеличивается на

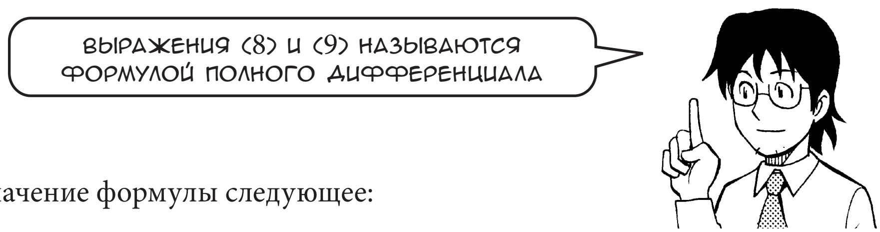
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ — это приращение z по x при $y = b$, а $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ — приращение z по y при $x = a$, то выражение (7) означает общее приращение $z = f(x, y)$ — сумму приращений по x и по y.

При стремлении приращений по x и y к нулю заменяем Δ на d и получаем следующую запись выражения (7):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \tag{8}$$

или $$df(x, y) = f_x dx + f_y dy. \tag{9}$$



Значение формулы следующее:

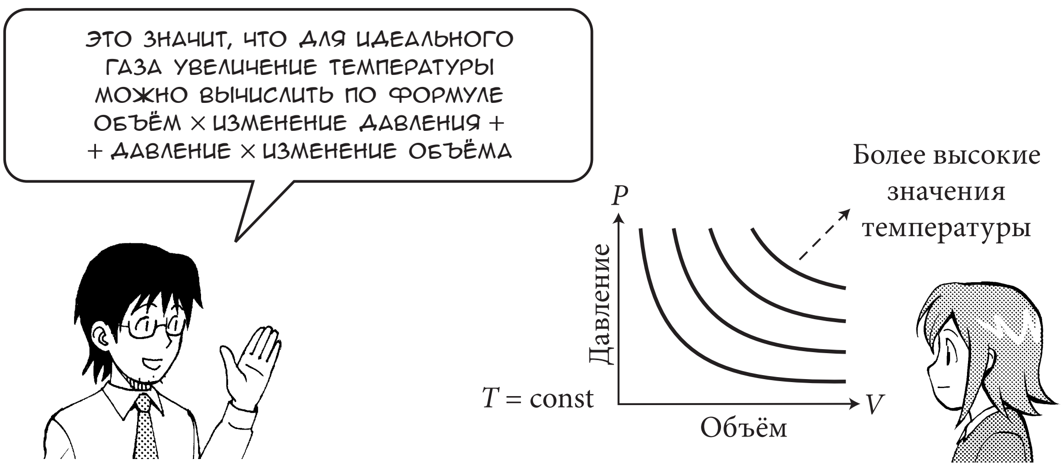
Приращение высоты криволинейной поверхности	=	Частная производная по x	×	Приращение по x	+	Частная производная по y	×	Приращение по y	.

Найдём выражение полного дифференциала для функции, приведённой в качестве примера 4 на стр. 181. Для качественного анализа перепишем уравнение зависимости температуры в упрощённом виде, то есть $T = PV$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial (PV)}{\partial P} = V \text{ и } \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial (PV)}{\partial V} = P.$$

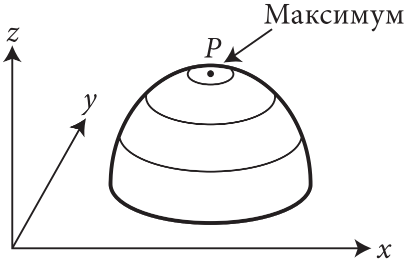
Таким образом, полный дифференциал можно записать в виде

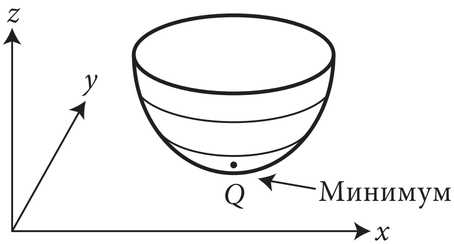
$dT = VdP + PdV$, или в приближенной форме $\Delta T \approx V\,\Delta P + P\,\Delta V$.

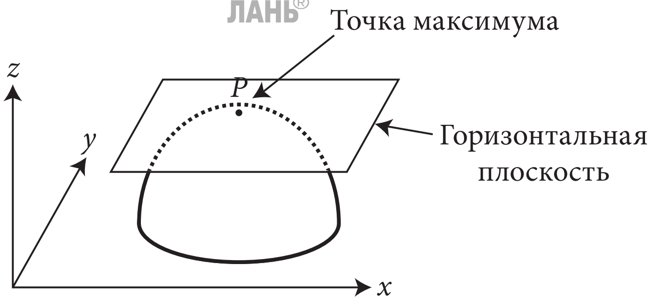


6.5. Условия существования экстремумов

Экстремумы функции двух переменных $f(x, y)$ на графике находятся либо на вершине, либо на дне.







Так как касательные плоскости к графику в точках P и Q параллельны плоскости x—y , то они описываются линейной функцией

$$f(x, y) \approx p(x - a) + q(y - b) + f(a, b),$$

у которой $p = q = 0$.

Так как

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \ (= f_x), \ \ q = \frac{\partial f}{\partial y} \ (= f_y),$$

то условие существования экстремумов будет следующим*: если $f(x, y)$ имеет экстремум в точке $(x, y) = (a, b)$, то можно записать

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

* Обратное неверно. То есть, даже если $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, существование экстремума в точке $(x, y) = (a, b)$ совсем не обязательно. Таким образом, это условие только возможности экстремумов.

Пример

Найдём минимум функции $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2$. Сначала найдём алгебраически.

Так как

$$(x - y)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0,$$

то

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2 \geq 0.$$

Подставим $x = y = 2$:

$$f(2, 2) = (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 0.$$

Отсюда $f(x, y) \geq f(2, 2)$ для всех (x, y). То есть, $f(x, y)$ имеет минимум, равный нулю, в точке $(x, y) = (2, 2)$.

С другой стороны,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x - y)(-1) + 2(y - 2) = -2x + 4y - 4.$$

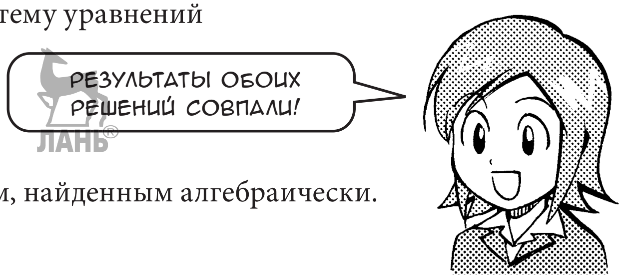
Приравнивая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

и решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0; \\ -2x + 4y - 4 = 0, \end{cases}$$

получим $(x, y) = (2, 2)$,
что совпадает с решением, найденным алгебраически.



6.6. Применение частных производных в экономике


Дуглас изучал разделение рабочей силы и капитала в Соединённых Штатах и обнаружил, что их соотношение было почти постоянным в течение 40 лет.
Около 70 процентов (0,7) ВВП распределялось в виде зарплаты рабочим, и 30 процентов (0,3) — в виде дивидендов в форме акций владельцам капитала.
Странно, что соотношение было постоянным, несмотря на то, что ситуация в экономике постоянно менялась.
Дуглас хотел получить функцию производства $f(L, K)$, объясняющую такие результаты.
Поэтому он попросил помощи у математика Чарльза Кобба.
Функция, которую они нашли — это известная **функция Кобба–Дугласа**, в которой L — зарплата рабочих, K — капитал, а β и α — константы.
$f(L,K)=\beta L^{\alpha} K^{1-\alpha}$
А что из неё можно узнать о моей зарплате?
Сейчас увидишь. Это хороший пример применения функции двух переменных.

Пусть производство в стране задаётся функцией производства $f(L, K)$, и будем измерять зарплату в единицах w, а капитал — в единицах r. Предположим, что экономическая политика страны направлена на получение максимальной прибыли, которая задаётся функцией вида:

$$\Pi = f(L, K) - wL - rK.$$

Так как, исходя из экономической политики, значения L и K должны соответствовать максимальной прибыли Π, то уравнение должно удовлетворять следующим условиям экстремумов:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0,$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\partial (wL)}{\partial L} - \frac{\partial (rK)}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - w \Rightarrow w = \frac{\partial f}{\partial L}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{\partial (wL)}{\partial K} - \frac{\partial (rK)}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - r \Rightarrow r = \frac{\partial f}{\partial K}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) означают следующее:

Единичная зарплата = Частная производная функции производства по L;
Единичный капитал = Частная производная функции производства по K.

Тогда выплаты, которые жители страны получают за работу, равны

Зарплата × Работа = wL.

Если на зарплату рабочим распределяется 70% от ВВП, имеем

$$wL = 0{,}7f(L, K). \quad (3)$$

Аналогично, выплаты владельцам капитала составят

$$rK = 0{,}3f(L, K). \quad (4)$$

Из (1) и (3) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial L} \times L = 0{,}7\, f(L, K), \quad (5)$$

а из (2) и (4) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial K} \times K = 0{,}3\, f(L, K). \quad (6)$$

Кобб нашёл функцию $f(L, K)$, удовлетворяющую этим уравнениям:

$$f(L, K) = \beta L^{0,7}\mathrm{K}^{0,3},$$

где β — положительный коэффициент, обозначающий уровень развития технологии.

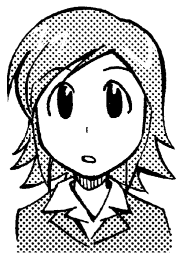
Проверим, удовлетворяет ли эта функция заданным условиям:

$$\frac{\partial f}{\partial L} \times L = \frac{\partial\,(\beta L^{0,7}\,K^{0,3})}{\partial L} \times L = 0{,}7\beta L^{(-0,3)}\mathrm{K}^{0,3} \times L^1 =$$
$$= 0{,}7\beta L^{0,7}\mathrm{K}^{0,3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial K} \times K = \frac{\partial\,(\beta L^{0,7}\,K^{0,3})}{\partial K} \times K = 0.3\beta L^{0,7}K^{(-0,7)} \times K^1 =$$
$$= 0{,}3\beta L^{0,7}\mathrm{K}^{0,3}.$$

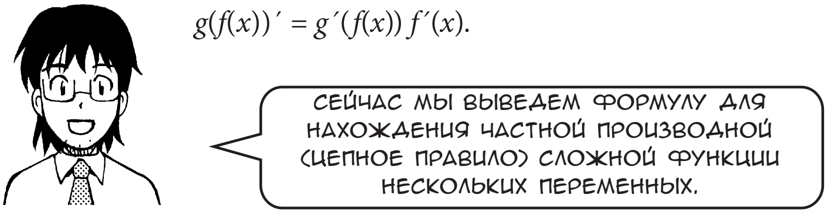
Действительно, функция $f(L, K) = \beta L^{0,7}\mathrm{K}^{0,3}$ удовлетворяет условиям (5) и (6).



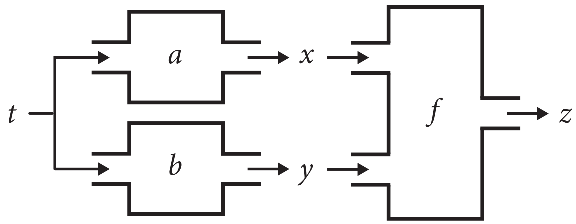
6.7. ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО

Производную сложной функции одной переменной мы рассматривали ранее на стр. 14.

$$y = f(x),\ z = g(y) \to z = g(f(x)),$$
$$g(f(x))' = g'(f(x))\, f'(x).$$



Пусть z — функция двух переменных x и y, имеющая вид $z = f(x, y)$, а x и y — функции одной переменной t, имеющие вид $x = a(t)$ и $y = b(t)$ соответственно. Тогда z можно представить в виде функции только переменной t, как показано на диаграмме.



Эту зависимость можно записать в следующем виде:

$$z = f(x, y) = f(a(t), b(t)).$$

Найдём частную производную $\dfrac{dz}{dt}$ этой функции.

Пусть при $t = t_0$

$$a(t_0) = x_0,\quad b(t_0) = y_0,\quad f(x_0, y_0) = f(a(t_0)),\quad b(t_0) = z_0.$$

Будем рассматривать поведение функций вблизи точек t_0, x_0, y_0 и z_0.

Если мы найдём значение α, удовлетворяющее уравнению

$$z - z_0 \approx \alpha \times (t - t_0), \qquad (1)$$

то это и будет $\dfrac{dz}{dt}(t_0)$.

Сперва используем линейное приближение для $x = a(t)$ и $y = b(t)$:

$$x - x_0 \approx \frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0); \tag{2}$$

$$y - y_0 \approx \frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0). \tag{3}$$

Далее запишем формулу полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$

$$z - z_0 \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4}$$

Подставляя (2) и (3) в (4), получаем:

$$z - z_0 \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{db}{dt}(t_0)\right)(t - t_0). \tag{5}$$

Сравнивая (1) и (5), можно записать следующее соотношение:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{db}{dt}(t_0).$$

Таким образом мы получили формулу для частной производной сложной функции!

Частная производная сложной функции (цепное правило)

Если $z = f(x, y)$, $x = a(t)$, $y = b(t)$,

то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{db}{dt}. \tag{6.1}$$


СЭКИ-САН, МОЖНО ДАЛЬШЕ ВЕСТИ УРОК БУДУ Я?
ОГО! НУ ЛАДНО... БУДЕТ ЗАБАВНО СНОВА СТАТЬ СТУДЕНТОМ.
ХОРОШО! ДАВАЙТЕ РАССМОТРИМ ФУНКЦИЮ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ...
ЗАЙМЁМСЯ ЭКОЛОГИЕЙ!
!
ИТАК, У НАС ЕСТЬ ФАБРИКА, СБРАСЫВАЮЩАЯ ОТХОДЫ СВОЕГО ПРОИЗВОДСТВА. ЭТИ ОТХОДЫ ЗАГРЯЗНЯЮТ МОРЕ, СОКРАЩАЯ УЛОВ МЕСТНЫХ РЫБАКОВ.
Фабрика
ВОЗДЕЙСТВИЯ, ПРОИЗВОДИМЫЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ДРУГИЕ ОБЛАСТИ, НО НЕ УЧИТЫВАЕМЫЕ В РЫНОЧНЫХ ОТНОШЕНИЯХ, КАК В НАШЕМ СЛУЧАЕ, НАЗЫВАЮТСЯ **ЭКСТЕРНАЛИЯМИ**. ОСОБЕННО ВРЕДНЫЕ ЭКСТЕРНАЛИИ, КАК, НАПРИМЕР, ЗАГРЯЗНЕНИЕ, НАЗЫВАЮТСЯ **ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭКСТЕРНАЛИЯМИ**.
Фабрика
ПУСТЬ ФУНКЦИЯ $f(x)$ ЗАДАЁТ КОЛИЧЕСТВО ТОВАРОВ, ПРОИЗВОДИМЫХ x РАБОЧИМИ НА ФАБРИКЕ. ИЗВЕСТНО, ЧТО ФАБРИКА СБРАСЫВАЕТ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ОТХОДЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА РЫБНЫЙ УЛОВ.
ПУСТЬ КОЛИЧЕСТВО ОТХОДОВ РАВНО $b = b(f(x))$. ДАЛЕЕ...

Будем считать, что рыбный улов зависит от численности рабочих y и количества отходов фабрики b и выражается функцией двух переменных $g(y, b)$.

Увеличение отходов b вызывает снижение улова, поэтому частная производная $g(y, b)$ по b — отрицательна.

Так как численность рабочих x содержится в функции $g(y, b) = g(y, b(f(x)))$, то производственная деятельность фабрики влияет на рыболовство, хотя и не учитывается при формировании рыночной цены. Это внешнее воздействие, называемое *экстерналиями*.

Сначала посмотрим, что будет, если фабрика и рыболовство будут действовать только в целях собственной выгоды. Пусть зарплата на обоих предприятиях равна w, цена товара, произведённого на фабрике — p, а цена выловленной рыбы — q. Тогда прибыль фабрики будет задаваться формулой

$$\Pi_1(x) = pf(x) - wx. \tag{1}$$

Фабрика стремится к максимальной прибыли, отсюда условие экстремума:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = pf'(x) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = w. \tag{2}$$

Пусть $x = x^*$ удовлетворяет этому условию, то есть

$$pf'(x^*) = w. \tag{3}$$

Здесь x^* — оптимальное количество рабочих на фабрике, а $f(x^*)$ — количество производимых фабрикой товаров. Тогда количество отходов будет

$$b^* = b(f(x^*)).$$

Прибыль от рыболовства Π_2 задаётся формулой

$$\Pi_2 = qg(y, b) - wy.$$

Так как количество отходов фабрики задаётся формулой $b^* = b(f(x^*))$ и не зависит от рыболовства, то прибыль от рыболовства практически становится функцией одной переменной y:

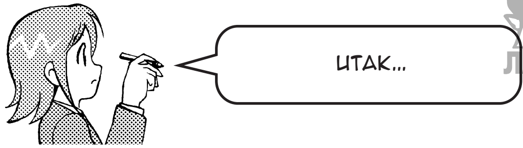
$$\Pi_2 = qg(y, b^*) - wy. \tag{4}$$

Поэтому, чтобы найти максимум Π_2, нам достаточно выполнить только одно условие экстремума функции двух переменных — для частной производной по y:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = q\,\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) - w = 0 \Leftrightarrow q\,\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) = w. \tag{5}$$

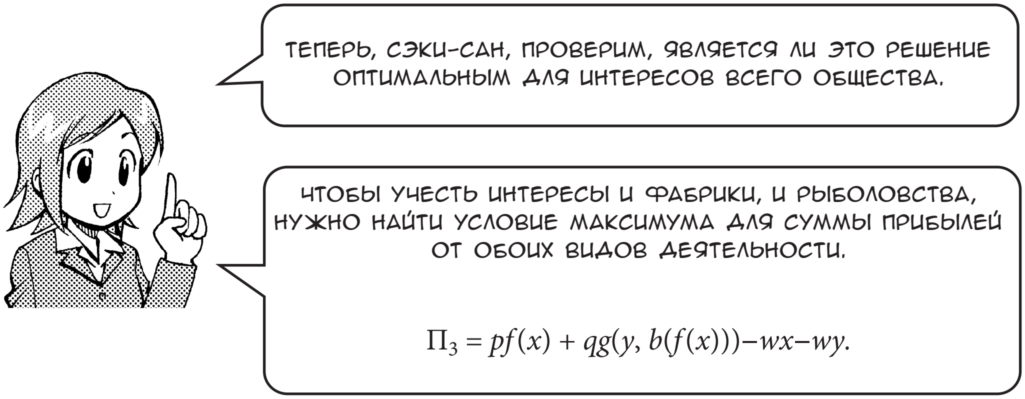
Отсюда оптимальное количество рыбаков y^* должно удовлетворять условию:

$$q\,\frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w. \tag{6}$$



Оптимальное количество товаров на фабрике и оптимальный улов рыбы, при условии их независимости друг от друга, определяются как $f(x^*)$ и $g(y^*, b^*)$ соответственно, где x^* и y^* удовлетворяют условиям (3) и (6):

$$pf'(x^*) = w, \qquad b^* = b(f(x^*)), \qquad q\frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w.$$



Так как Π_3 — функция двух переменных x и y, то условием экстремума является равенство:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_3}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим первую частную производную:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x} = pf'(x) + q\frac{\partial g(y, b(f(x)))}{\partial x} - w =$$

$$= pf'(x) + q\frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x)))b'(f(x))f'(x) - w.$$

Мы воспользовались здесь правилом дифференцирования функции от функции.

Таким образом:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \left(p + q\frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x)))b'(f(x))\right) f'(x) = w. \qquad (7)$$

Аналогичным образом получаем условие для второй частной производной:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow q\,\frac{\partial g}{\partial y}\Big(y,\, b\big(f(x)\big)\Big) = w. \tag{8}$$

Таким образом, с точки зрения общества оптимальные количества рабочих x^{**} — для фабрики и y^{**} — для рыболовства определяются из формул:

$$\left(p + q\,\frac{\partial g}{\partial b}(y^{**},\, b(f(x^{**})))b'(f(x^{**}))\right) f'(x^{**}) = w, \tag{9}$$

$$q\,\frac{\partial g}{\partial y}\Big(y^{**},\, b\big(f(x^{**})\big)\Big) = w. \tag{10}$$

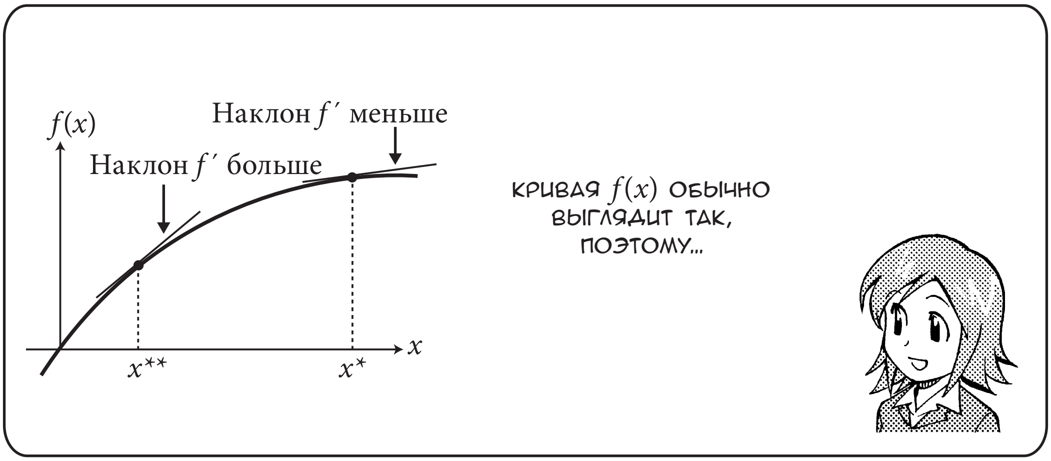
Хотя эти уравнения и выглядят громоздкими, это всего лишь система уравнений с двумя переменными. Сравнивая эти уравнения с (3) и (6), обнаруживаем, что (3) и (9) отличаются, а (6) и (10) — совпадают. Посмотрим, чем же отличаются уравнения (3) и (9):

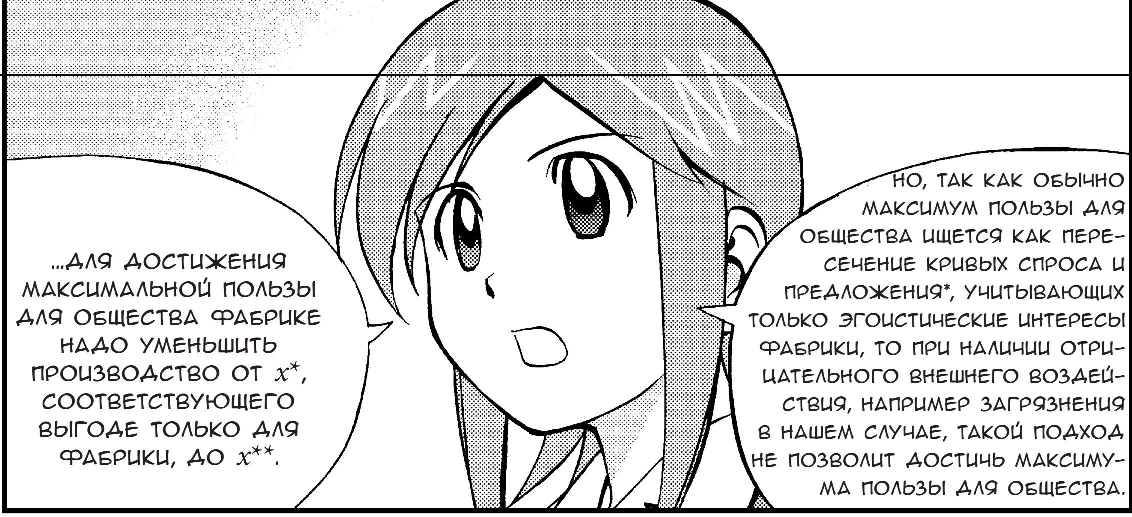
$$p \times f'(x^{*}) = w, \tag{3}$$

$$(p + \heartsuit) \times f'(x^{**}) = w. \tag{11}$$

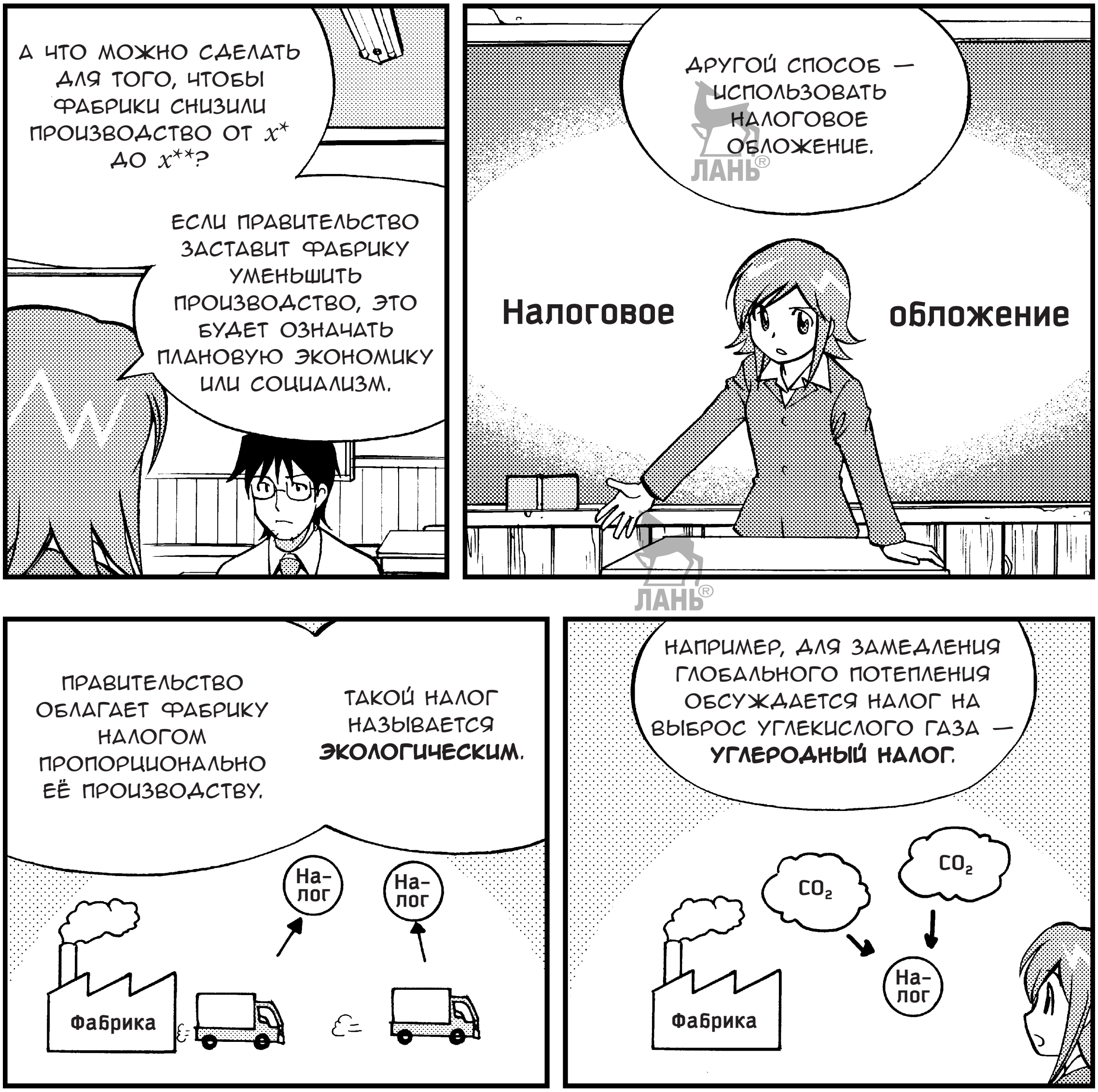
В уравнении (9) мы заменили второе слагаемое на значок $\heartsuit = q\,\dfrac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))$.

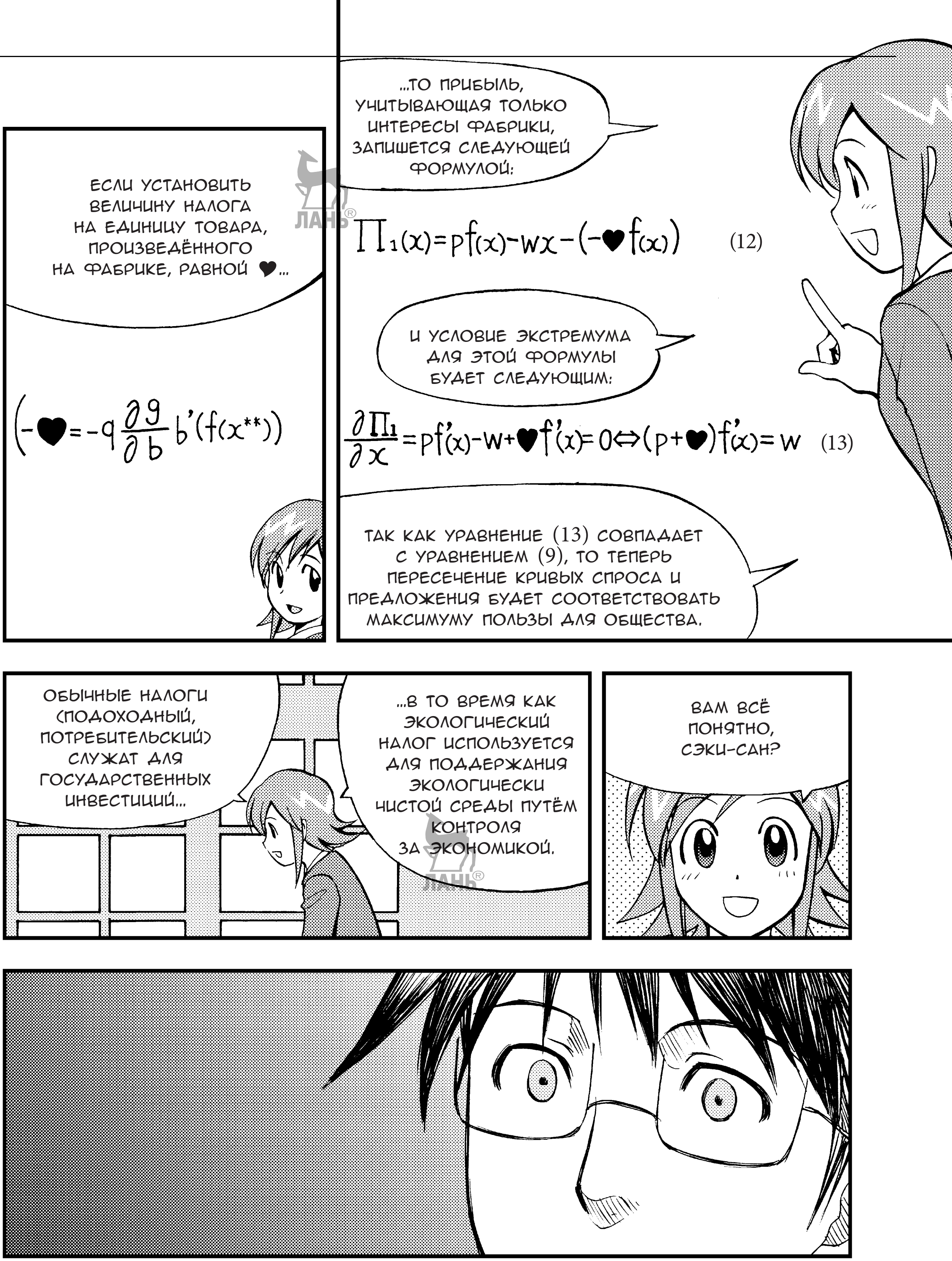
Так как $\heartsuit$ отрицательно, то $p + \heartsuit$ меньше p, а так как правые части (3) и (11) порознь равны w, то из того, что $p + \heartsuit < p$, следует, что $f'(x^{**})$ должно быть больше $f'(x^{*})$.

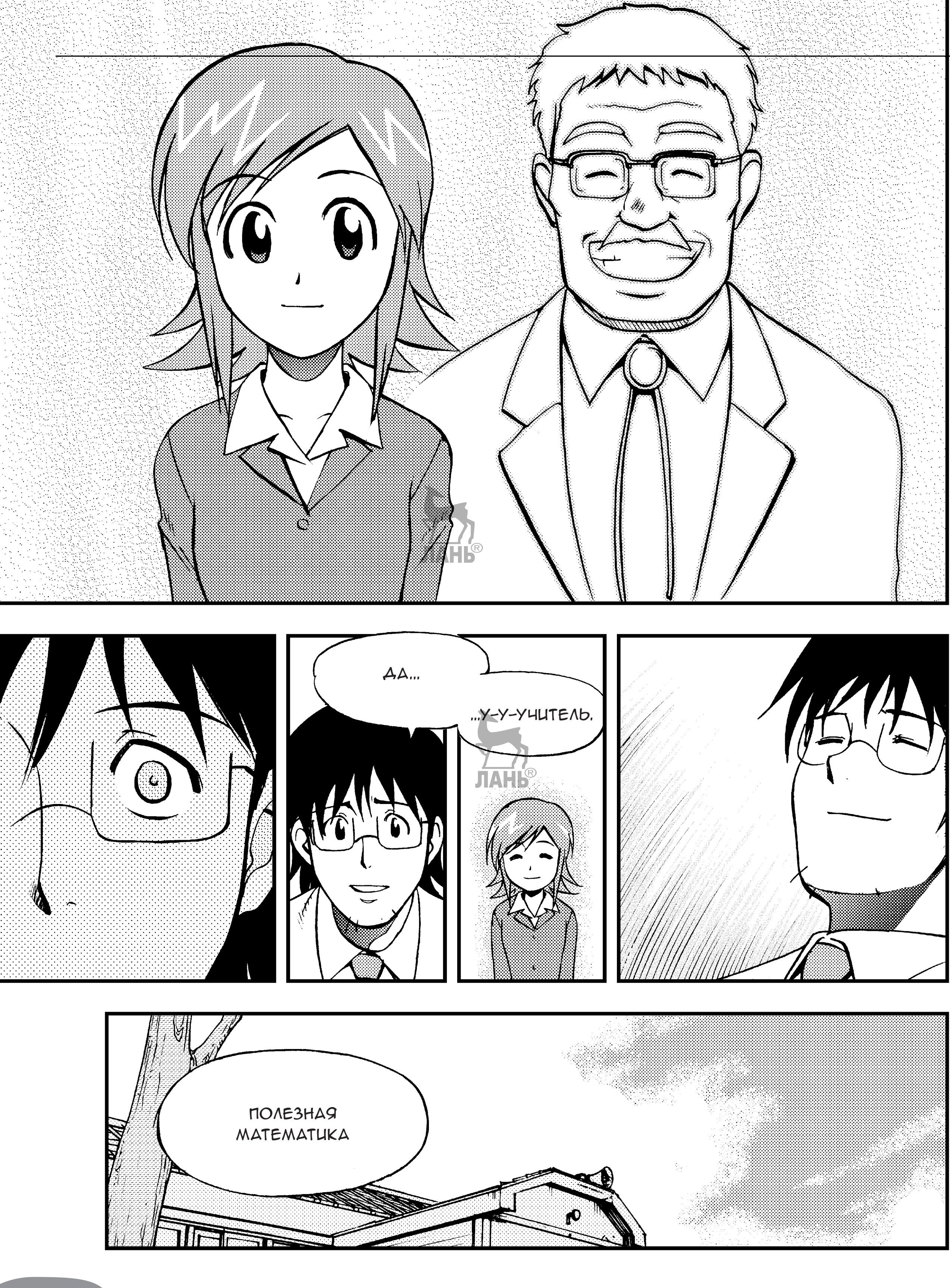




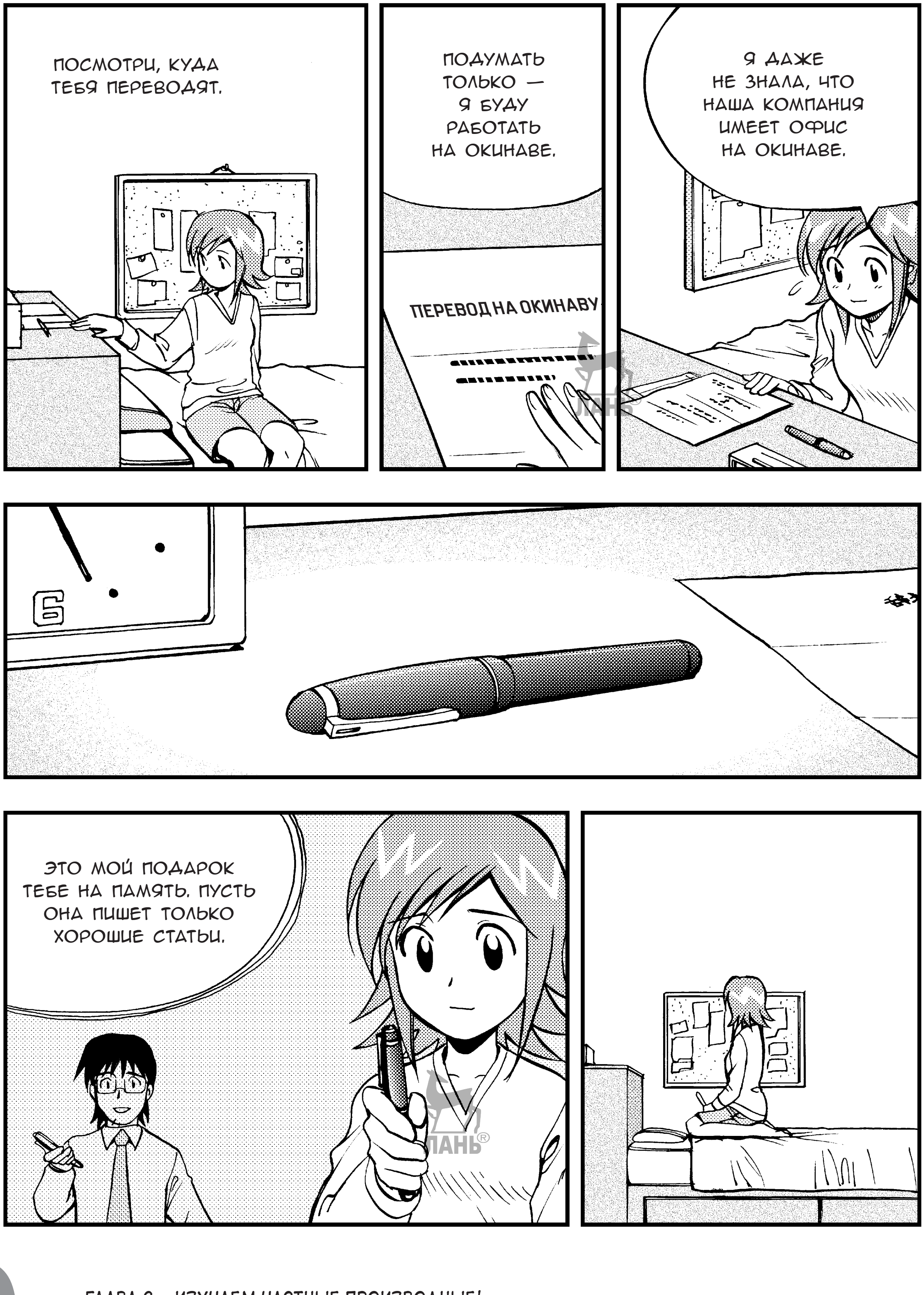
* Смотри стр. 105.

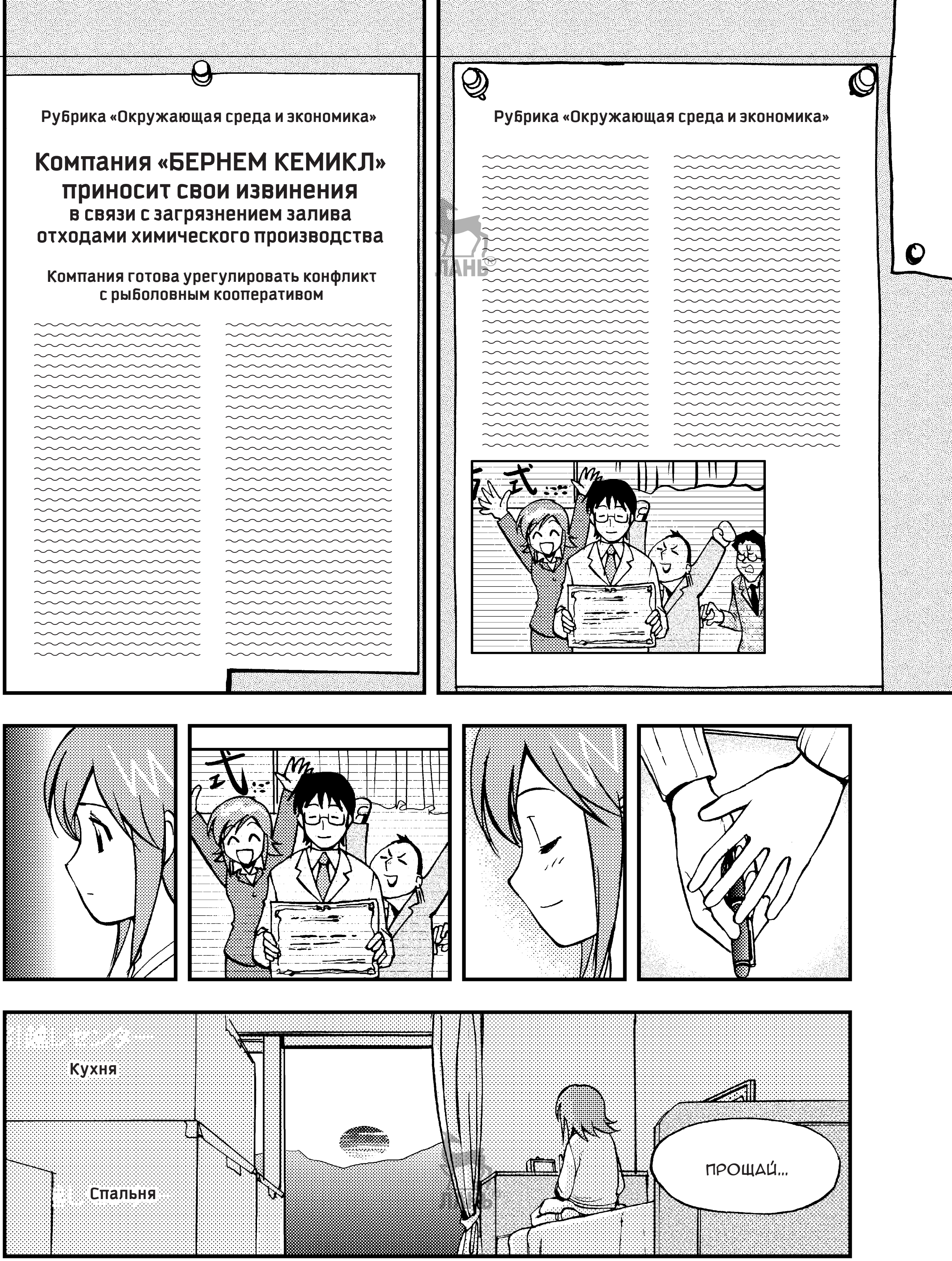



Если установить величину налога на единицу товара, произведённого на фабрике, равной ♥...
$(-\heartsuit = -q\frac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))$
...то прибыль, учитывающая только интересы фабрики, запишется следующей формулой:
$\Pi_1(x) = pf(x) - wx - (-\heartsuit f(x))$ (12)
И условие экстремума для этой формулы будет следующим:
$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = pf'(x) - w + \heartsuit f'(x) = 0 \Leftrightarrow (p + \heartsuit)f'(x) = w$ (13)
Так как уравнение (13) совпадает с уравнением (9), то теперь пересечение кривых спроса и предложения будет соответствовать максимуму пользы для общества.
Обычные налоги (подоходный, потребительский) служат для государственных инвестиций...
...в то время как экологический налог используется для поддержания экологически чистой среды путём контроля за экономикой.
Вам всё понятно, Сэки-сан?


ДА...
...У-У-УЧИТЕЛЬ.
ПОЛЕЗНАЯ МАТЕМАТИКА


Квартира Норико
несколько дней спустя.
УФ!
НУ ВОТ, Я ЗАКОНЧИЛА УПАКОВЫВАТЬ ВЕЩИ.
Гостиная
Спальня
НОРИКО, ВОТ, ПОСМОТРИ.
НАЗНАЧЕНИЕ
НАЗНАЧЕНИЕ... МНЕ? МЕНЯ ТОЖЕ ПЕРЕВОДЯТ?
И ФУТОШИ ТОЖЕ.
ВООБЩЕ-ТО ГАЗЕТА РЕШИЛА ЗАКРЫТЬ ОФИС САНДА-ЧО.
НУ ВОТ, НАСТАЛО ВРЕМЯ РАССТАВАТЬСЯ.


ПОСМОТРИ, КУДА ТЕБЯ ПЕРЕВОДЯТ.
ПОДУМАТЬ ТОЛЬКО — Я БУДУ РАБОТАТЬ НА ОКИНАВЕ.
ПЕРЕВОД НА ОКИНАВУ
Я ДАЖЕ НЕ ЗНАЛА, ЧТО НАША КОМПАНИЯ ИМЕЕТ ОФИС НА ОКИНАВЕ.
ЭТО МОЙ ПОДАРОК ТЕБЕ НА ПАМЯТЬ. ПУСТЬ ОНА ПИШЕТ ТОЛЬКО ХОРОШИЕ СТАТЬИ.


Рубрика «Окружающая среда и экономика»
Компания «БЕРНЕМ КЕМИКЛ» приносит свои извинения
в связи с загрязнением залива отходами химического производства
Компания готова урегулировать конфликт с рыболовным кооперативом
Рубрика «Окружающая среда и экономика»
Кухня
Спальня
ПРОЩАЙ...

Производная неявно заданной функции

Множество точек (x, y), в которых функция двух переменных $f(x, y)$ равна константе c, образуют график, удовлетворяющий условию $f(x, y) = c$. Если часть этого графика имеет вид функции одной переменной $y = h(x)$, то такая функция называется *неявно заданной функцией*, или *неявной функцией*. Неявная функция $h(x)$ удовлетворяет равенству $f(x, h(x)) = c$ для всех x в области определения. Найдём производную неявной функции $h(x)$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ записывается как $dz = f_x dx + f_y dy$. Если точка (x, y) перемещается по поверхности $f(x, y) = c$, то значение функции $f(x, y)$ не меняется, а значит и дифференциал dz тоже равен 0. Получаем $0 = f_x dx + f_y dy$. Считая, что $f_y \neq 0$, преобразуем это выражение к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Левая часть этого уравнения не что иное, как производная $h(x)$. Получаем:

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Пример

График функции $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ представляет собой окружность радиусом r с центром в начале координат. Считая, что $x^2 \neq r^2$, используем неявную функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$, чтобы найти производную явных функций $y = h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = h(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Используя формулу производной неявной функции получаем:

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}.$$

6.8. Упражнения к главе 6

1. Найти f_x и f_y для $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$.

2. Период колебаний T маятника длиной L под действием ускорения силы тяжести g задаётся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ускорение g зависит от высоты над уровнем моря.

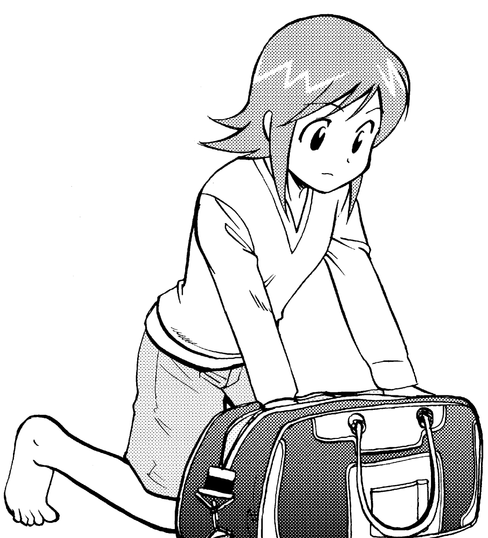
а) Найти выражение для полного дифференциала T.

б) Если L удлинить на 1 процент, g уменьшить на 2 процента, на сколько процентов увеличится T?

3. Вывести формулу производной $h(x)$ неявной функции $f(x, y) = c$, используя правило дифференцирования функции от функции.

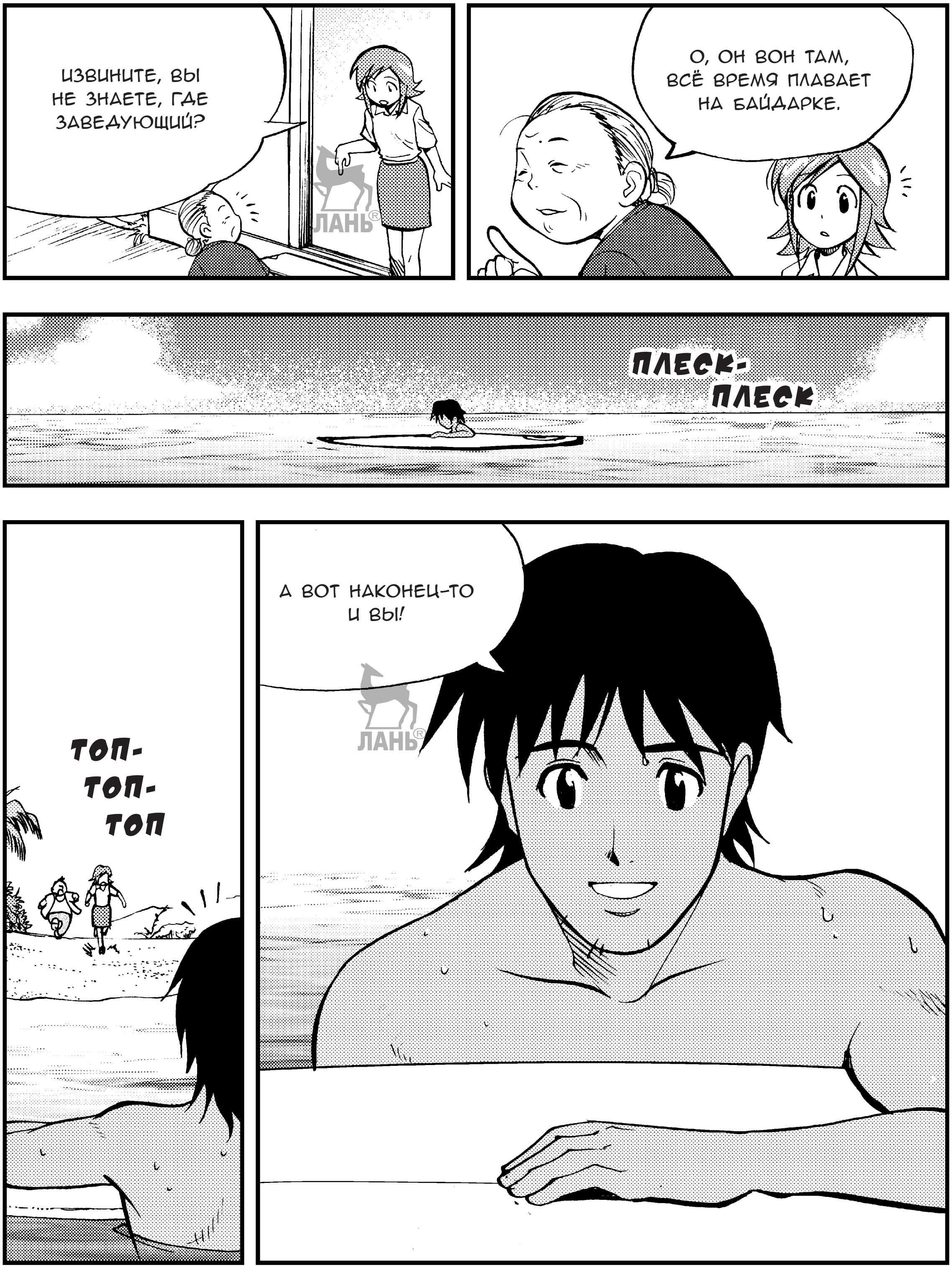
ЭПИЛОГ

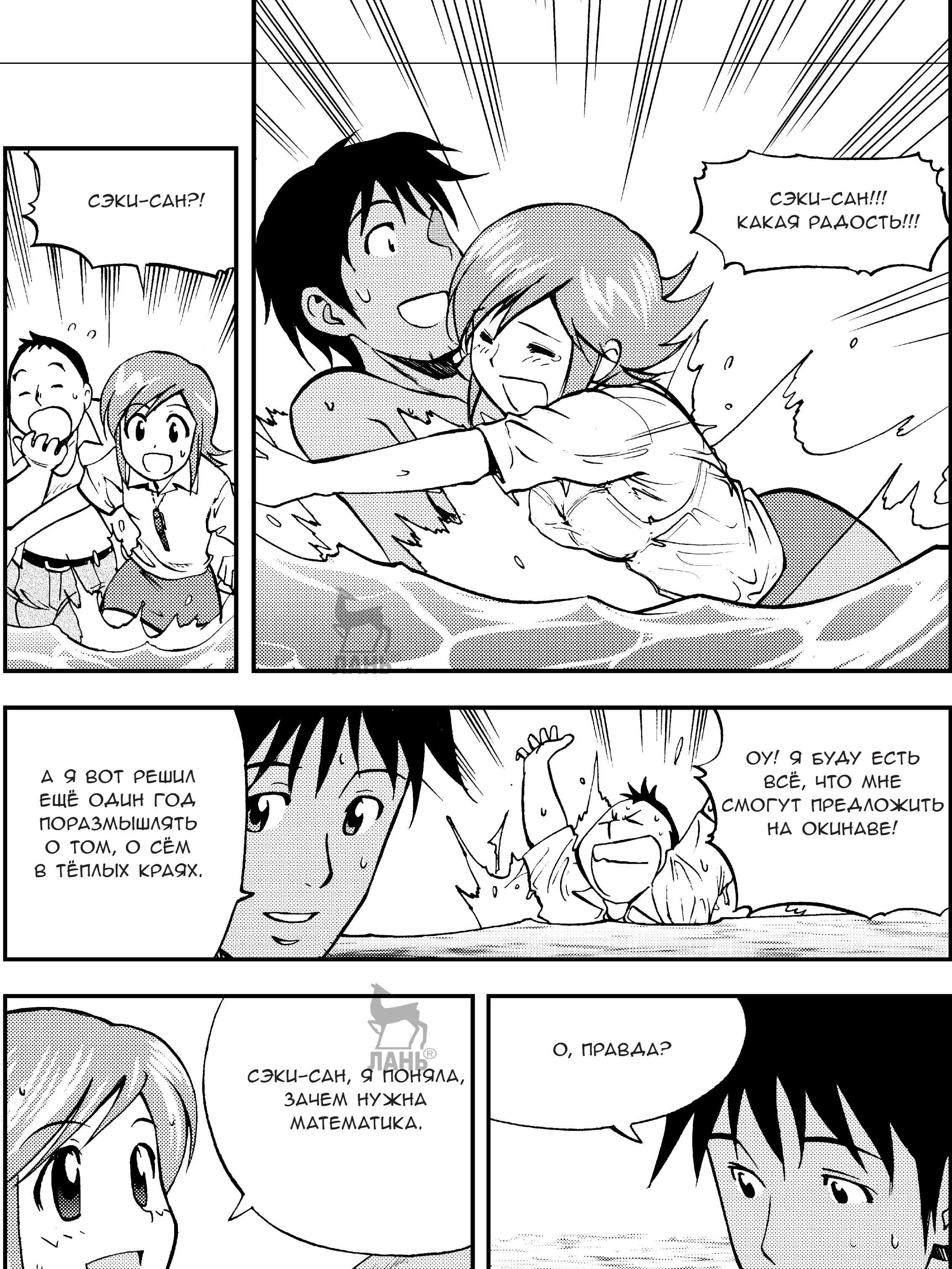
ЗАЧЕМ НУЖНА МАТЕМАТИКА?



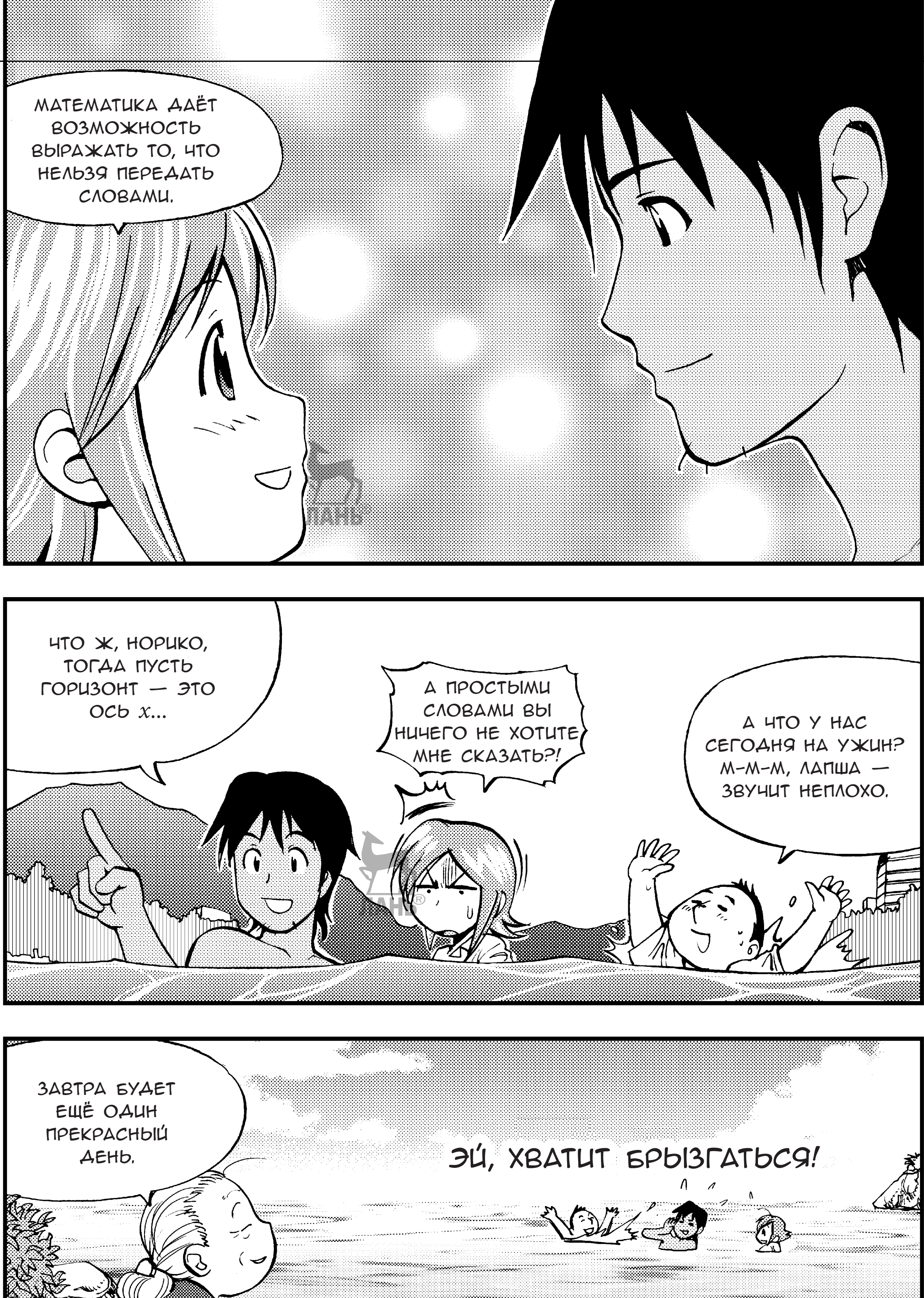

У-у-у-у
Уф, жарко!
Аэропорт «Наха»
Неважно, куда меня распределили, я буду стараться и я буду использовать все знания, полученные от Сэки-сана.
Что ж, пойдём искать офис Асагакэ Таймс на Окинаве?


Асагакэ таймс
Офис Окинава
ПОЧЕМУ-ТО ЭТО МЕСТО КАЖЕТСЯ МНЕ ОЧЕНЬ ЗНАКОМЫМ!
А-З-З
Я ТАК И ЗНАЛА!
ТЫ?!
НАДЕЮСЬ, НЕ ТЫ ВОЗГЛАВЛЯЕШЬ ЭТОТ ОФИС?
НЕТ! Я ТОЖЕ ТОЛЬКО ЧТО ПРИБЫЛ ИЗ АЭРОПОРТА.
О, ЭТО УЖЕ ЛУЧШЕ!
ОДНАКО! ТОЛЬКО ПРИЕХАЛ И СРАЗУ СПАТЬ?!
ХОРОШО БЫ УЗНАТЬ КТО ГЛАВНЫЙ В ЭТОМ ОФИСЕ?
ТОП-ТОП


Извините, вы не знаете, где заведующий?
О, он вон там, всё время плавает на байдарке.
ПЛЕСК-ПЛЕСК
ТОП-ТОП-ТОП
А вот наконец-то и вы!



СЭКИ-САН?!
СЭКИ-САН!!! КАКАЯ РАДОСТЬ!!!
А Я ВОТ РЕШИЛ ЕЩЁ ОДИН ГОД ПОРАЗМЫШЛЯТЬ О ТОМ, О СЁМ В ТЁПЛЫХ КРАЯХ.
ОУ! Я БУДУ ЕСТЬ ВСЁ, ЧТО МНЕ СМОГУТ ПРЕДЛОЖИТЬ НА ОКИНАВЕ!
СЭКИ-САН, Я ПОНЯЛА, ЗАЧЕМ НУЖНА МАТЕМАТИКА.
О, ПРАВДА?


Математика даёт возможность выражать то, что нельзя передать словами.
Что ж, Норико, тогда пусть горизонт — это ось x...
А простыми словами вы ничего не хотите мне сказать?!
А что у нас сегодня на ужин? М-м-м, лапша — звучит неплохо.
Завтра будет ещё один прекрасный день.
Эй, хватит брызгаться!

Приложения

П.1. РЕШЕНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Пролог

1.

Подставляя $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ в $z = 7y - 30$, получаем $z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$.

Глава 1

1.

1) $f(5) = g(5) = 50$, 2) $f'(5) = 8$.

2.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(a+\varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2) = 3a^2.$$

Таким образом, производная от $f(x)$ — это $f'(x) = 3x^2$

Глава 2

1.

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n-1}}.$$

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

$f'(x) > 0$ при $x < -2$, $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$. То есть при $x = -2$ имеем максимум $f(-2) = 16$, а при $x = 2$ имеем максимум $f(2) = -16$. Так как $f(x) = (1-x)^3$ — функция $g(h(x))$, состоящая из $g(x) = x^3$ и $h(x) = 1 - x$, то $f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$.

3.

Находим производную функции $g(x) = x^2(1-x)^3$:

$$g'(x) = (x^2)'(1-x)^3 + x^2((1-x)^3)' = 2x(1-x)^3 + x^2(-3(1-x)^2) =$$
$$= x(1-x)^2(2(1-x) - 3x) = x(1-x)^2(2-5x).$$

$g'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{5}$ и $x = 1$.

Так как $g(1) = 0$, то максимум достигается в точке

$x = \frac{2}{5}$ и равен $g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{108}{3125}$.

Глава 3

1.

1) $\int_1^3 3x^2 dx = x^3\Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26.$

2) $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2}\,dx = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_2^4 xdx + \int_2^4 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(4^2 - 2^2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{25}{4}.$

3) $\int_0^5 x + (1+x^2)^7 dx + \int_0^5 x - (1+x^2)^7 dx = \int_0^5 2xdx = x^2\Big|_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25.$

2.

1) Площадь между графиком $y = f(x) = x^2 - 3x$ и осью x равна $-\int_0^3 x^2 - 3xdx.$

2) $-\int_0^3 x^2 - 3xdx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3 = -\frac{1}{3}\,(3^3 - 0^3) + \frac{3}{2}\,(3^2 - 0^2) = \frac{9}{2}.$

Глава 4

1. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Так как $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1.$$

3. Вычисляем производную $f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Приравнивая к нулю, находим $f'(-1) = 0$, откуда минимум равен
$$f(-1) = \frac{1}{e}.$$

4. Вводим обозначения $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, и интегрируем по частям
$$\int_1^e (x^2)' \ln xdx + \int_1^e x^2(\ln x)'dx = e^2 \ln e - \ln 1$$
Таким образом,
$$\int_1^e 2x\ln xdx + \int_1^e x^2\,\frac{1}{x}\,dx = e^2,$$
$$\int_1^e 2x\ln xdx = -\int_1^e xdx + e^2 = -\frac{1}{2}\,(e^2-1)^2 + e^2 = \frac{1}{2}\,e^2 + \frac{1}{2}.$$

Глава 5

1. $f(x) = e^{-x}, f'(x) = -e^{-x}, f^{(2)}(x) = e^{-x}, f^{(3)}(x) = -e^{-x}$, 2 – 3.
   $f(x) = 1 - x + xx + \ldots$

2. Находим производные
   $f(x) = (\cos x)^{-1}$, $f'(x) = (\cos x)^{-2} \sin x$,
   $f^{(2)}(x) = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-2} \cos x = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-1}$,
   вычисляем $f(0) = 1, f'(0) = 0, f^{(2)}(0) = 1$ и получаем

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

3. Продолжать точно так же, как на стр. 153, повторно дифференцируя $f(x)$. Так как центр разложения находится в $x = a$, то, подставляя a, находим $c_n s$. Должно получиться $c_n = 1/n! f^{(n)}(a)$, как в формуле на стр. 157.

Глава 6

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $f_x = 2x + 2y$ и $f_y = 2x + 6y$.

2. Полный дифференциал функции

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\, g^{-1/2}L^{1/2} \text{ имеет вид}$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial g}dg + \frac{\partial T}{\partial L}dL = -\pi\, g^{-3/2}L^{1/2}dg + \pi\, g^{-1/2}L^{-1/2}dL, \text{ откуда}$$

$$\Delta T \approx -\pi\, g^{-3/2}L^{1/2}\Delta g + \pi\, g^{-1/2}L^{-1/2}\Delta L.$$

Подставляя $\Delta g = -0{,}02g$ и $\Delta L = 0{,}01L$, получаем

$$\Delta T \approx 0{,}02\pi\, g^{-3/2}L^{1/2}g + 0{,}01\pi\, g^{-1/2}L^{-1/2}L =$$

$$= 0{,}03\pi\, g^{-1/2}L^{1/2} = 0{,}03\frac{T}{2} = 0{,}015T$$

Таким образом, T увеличилась на 1,5%.

3. Пусть $y = h(x)$ является неявной функцией сложной функции $f(x, y) = c$. Тогда можно записать, что $f(x, h(x)) = c$ вблизи x. Используя цепное правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dx} = f_x + f_y h'(x) = 0, \text{ откуда}$$

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}.$$

П.2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ТЕОРЕМЫ И ФУНКЦИИ

Линейные уравнения (линейные функции)

Уравнение прямой линии с наклоном m, проходящей через точку (a, b)

$$y = m(x - a) + b.$$

Дифференцирование

Дифференциальные коэффициенты

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Определение производной

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Варианты обозначения производной

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x).$$

Производная функции, умноженной на константу

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x).$$

Производная степенной функций

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}.$$

Производная суммы функций

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x).$$

Производная произведения функций

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Производная деления функций

$$\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

Производная сложной функции (цепное правило)

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x).$$

Производная обратной функции

Если $y = f(x)$, а $x = g(x)$ то

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Условия экстремумов

Если $y = f(x)$ имеет минимум или максимум в точке $x = a$, то $f'(a) = 0$.

Если $y = f(x)$ возрастает в точке $x = a$, то $f'(a) > 0$.

Если $y = f(x)$ убывает в точке $x = a$, то $f'(a) < 0$.

Теорема о среднем

Для любых a, b $(a < b)$ найдётся c $(a < c < b)$, для которого: $f(b) = f'(c)(b - a) + f(a)$.

Производные основных функций

Тригонометрические функции

$$\{\cos\theta\}' = -\sin\theta,$$
$$\{\sin\theta\}' = \cos\theta.$$

Показательная функция

$$\{e^x\}' = e^x.$$

Логарифмические функции

$$\{\log x\}' = \frac{1}{x}.$$

Интегралы

Определённый интеграл

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Интеграл суммы функций

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Интеграл функции, умноженной на константу

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Интегрирование методом подстановки

Если $x = g(y)$, $b = g(\beta)$, $a = g(\alpha)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)dy.$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx =$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Связь интервалов определённых интегралов

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Разложение в ряд Тейлора

Формула разложения $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \ldots$$

Разложение различных функций в ряд Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \ldots$$

Частные производные

Определение частной производной

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x, y+\varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

Частная производная сложной функции (цепное правило)

Если $z = f(x, y)$, $x = a(t)$, $y = b(t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{db}{dt}.$$

Полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать в торгово-издательском холдинге

«Планета Альянс»наложенным платежом, выслав открытку или письмо по почтовому адресу:

115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть

Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.

Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: www.alians-kniga.ru.

Оптовые закупки: тел. (499) 782-38-89

Электронный адрес: books@alians-kniga.ru.

Хироюки Кодзима (автор), Син Тогами (художник)

Занимательная математика. Производные и интегралы. Манга

Издательство выражает благодарность *Панфилову В. О.*

Главный редактор *Д. А. Мовчан*
dmkpress@gmail.com
Научный редактор *И. А. Сенников*
Верстальщик *А. Ю. Анненков*

Формат 70×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объём 15 п. л. Усл. п. л. 17,5.
Тираж 200 экз.

Веб-сайт издательства ДМК Пресс: www.dmkpress.com