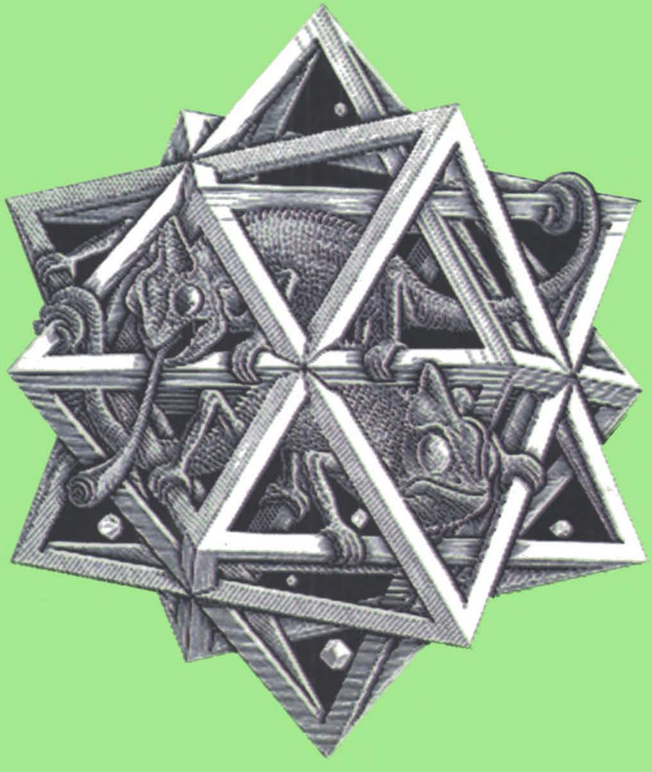
В. КЕССЕЛЬМАН

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА



**В. С. Кессельман**

# Занимательная
# МАТЕМАТИКА

**АСТ • Астрель**
**Москва**

УДК 51(09)
ББК 22.1г
К28

**Кессельман, В.С.**

**К28** **Занимательная МАТЕМАТИКА** / В.С. Кессельман. — М.: АСТ: Астрель, 2008. — 224 с.: ил.

ISBN 978-5-17- 050892-1
(ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271- 19736-9
(ООО «Издательство Астрель»)

**УДК 51(09)**
**ББК 22.1г**

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953000 – книги, брошюры

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.007027.06.07 от 20.06.2007 г.

Подписано в печать 15.03.2008. Формат 84x108 1/32.
Усл. печ. л. 11,48. Тираж 5 000 экз. Заказ № 8242.

**ISBN 978-5-17-050892-1 (ООО «Издательство АСТ»)**
**ISBN 978-5-271-19736-9 (ООО «Издательство Астрель»)**

## НУЖНА ЛИ МАТЕМАТИКА НЕМАТЕМАТИКУ?

*Я нашел у него (учителя математики) Эйлера и его задачу о числе яиц, которые крестьянка несла на рынок... Это было для меня открытием. Я понял, что значит пользоваться орудием, называемым алгеброй. Но, черт возьми, никто мне об этом не говорил...*

*Стендаль. Автобиография*

Во все времена математика была основой научно-технического и экономического развития народов. Она является ключом к познанию окружающего мира и важной компонентой развития личности. Математика всегда была неотъемлемой составной частью человеческой культуры. Математика встречается и используется в повседневной жизни, поэтому определенные математические навыки нужны каждому человеку. Всем нам приходится в жизни считать (например, деньги), мы часто используем (даже не замечая этого) знания о величинах, характеризующих протяженности, площади, объемы, промежутки времени, скорости и многое другое. Все это мы получили на уроках арифметики, алгебры и геометрии в школе. И все это сгодилось нам в дальнейшей жизни. Ныне математические знания необходимы не только ученому и инженеру, но также врачу и лингвисту, историку и практически людям большинства профессий. Физики шутят: «Математика – царица всех наук, но служанка физики». Так пошутить могут и музыканты, и биологи, и психологи и др. Кроме того, математика участвует в формировании духовного мира человека, равно как и искусство. И потому каждому человеку полезно знать некоторые фрагменты истории этой науки, имена ее творцов, их вклад в развитие математических знаний.

*«Кто хочет ограничиться настоящим, без знания прошлого, тот никогда его не поймет...» (Лейбниц).*

История математики обладает огромным воспитательным воздействием на подрастающее поколение. Она формирует, в частности, высокую нравственность, развитие научного любопытства, т. е. желание не только приобретать знания, но и преумножать их. Самое главное в том, что история науки приучает, а потом заставляет быть закономерным, самостоятельно добывать знания. Математика – наука особенная. В ней немного слов, но много символов! Часто мы используем эти символы, не задумываясь. Еще задолго до того, как математика стала наукой, задолго до первых шагов в арифметике, которые каждый из нас проделывает в первом классе, мы знакомы с символами «плюс» и «минус», знаем цифры.

Математический язык, так уж получилось, оперирует непохожими на обычные, используемые в повседневной жизни буквы и знаки. Математические сочинения постоянно переплетаются с формулами, заполняющими порой целые страницы, и состоят из букв и непонятных знаков. *«В глазах непосвященного математические символы словно вражеские штандарты, развивающиеся над, казалось бы, неприступной цитаделью», – писал известный американский математик Морис Клайн*. Однако именно из этих букв, больших и малых, латинских и греческих, и строится все здание математики.

Большинство слов современной научной лексики восходит к латинскому или еще к более древнему – греческому языку. А к словам на этих языках в математике добавляются различные символы и знаки. Знак и символ представляют собой соглашение (явное или неявное) о приписывании чему-либо какого-либо определенного смысла. Понятие «знак» и «символ» часто используются в одном и том же смысловом контексте (что мы и будем делать в этой книге). У разных народов могут быть различные психологические особенности, а вот математика – одна на всех! И все это – за счет универсального языка математических символов.

Покажите иностранцу, не знакомому с русским языком, запись «Вася + Лена = любовь», и он наверняка поймет два символа – «+» и «=». Так же и мы узнаем эти символы в японском эквиваленте.

Впрочем, не только эти, но и остальные математические знаки вполне интернациональны и практически не зависят от языка, используемого в той или иной стране. Математика – это всечеловеческая наука, а математический язык – всечеловечен; и математическая истина не имеет национальных границ! И в этом смысле не имеет абсолютно никакого принципиального значения, каким именно видом письма и какими именно символами записана информация. «Математическая истина, независимо от того, в Париже или Тулузе, одна и та же», – писал Паскаль. Качественная сторона математики подчеркивается и в известном высказывании А. Пуанкаре: «Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». А все-таки, когда и как возникли современные символы математики? Начать следует с самого простого – с истории чисел. Мир знаков сложнее мира чисел.

*Глава первая*
# ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ. ЧИСЛА

*Все вещи – суть числа.*
*Пифагор*

Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами и цифрами: мы запоминаем номера автобусов и телефонов, подсчитываем стоимость покупок, ведем семейный бюджет в рублях, копейках (сотых долях рубля), пересчитываем российские рубли в доллары и евро, и наоборот, и т. п. Числа, цифры – они с нами повсюду. А что знал человек о цифрах раньше? Первоначальные представления о числе человек имел еще в самом древнем периоде каменного века – палеолите.

Считать человек начал до того, как он научился писать, поэтому не сохранилось никаких письменных документов, свидетельствующих о тех словах, которые в древности означали числа. Историки доказали, что и 5000 лет назад люди могли записывать числа и производить над ними простейшие арифметические действия. Но записывали они их совсем не так, как мы сегодня. Первоначальными средствами запоминания чисел были пальцы рук, зарубки на дереве, плетение узелков на веревках, связка прутьев, куча раковин, камней и пр. В 1937 г. в раскопках около деревни Дольни-Вестонице в Моравии (Чехия) была обнаружена лучевая кость молодого волка с отметинами. Эта кость – старейшая из найденных записей числа (кость относится к XXX в. до н. э.). Кость имеет длину 18 см, на которой высечено 55 глубоких зарубок – параллельных черточек. Возможно, кость служила для записи трофеев первобытных охотников.

Зарубки, обозначающие долги на бирках, раскалывающихся на две половины, одна из которых хранится у должника, а другая у кредитора, использовались в Западной Европе даже в XIX в.

Инки записывали свои долговые обязательства с помощью узелков на цветных веревках – перуанских квипу. Близкие аналоги квипу можно было встретить в некоторых районах Китая и Японии даже в XX в. Можно уверенно утверждать, что римские цифры I, II, III воспроизводят скорописную запись одной, двух, трех черточек. Римская буквенная нумерация применялась в Западной Европе в официальных документах вплоть до XVIII в. Она использовала всего семь цифр: I – 1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000. Число также записывалось в виде последовательности цифр, но из эстетических соображений запрещалось четырехкратное повторение одной и той же цифры. Так что числа 4, 9, 40, 90, 400, 900 обозначались соответственно как IV, IX, XL, XC, CD, CM – меньшая по значению цифра оказывалась левее большей (хотя часовщики упорно писали на циферблатах IIII, чтобы не путать с шестеркой – VI). Римские цифры используются до сих пор в обозначениях дат и в порядковых номерах. Примеры: 31. XII, сонет CCLXIX, папа Иоанн XXIII.

В математике принято символы, участвующие в записи числа, называть цифрами. Но что же люди понимали под словом «число» в глубокой древности? Первоначально понятие отвлеченного числа отсутствовало. Число было «привязано» к тем предметам, которые пересчитывали. Отвлеченное понятие числа появилось лишь с развитием письменности, когда произошел переход к оседлому образу жизни, в период образования земледельческих обществ.

Первое научное определение числа дал *Эвклид* в своих «Началах», которое он, очевидно, унаследовал от своего соотечественника *Эвдокса Книдского* (ок. 408 – ок. 355 до н. э.): ***«Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц»***. Числовые термины тяжело зарождались и медленно входили в употребление. Древнему человеку было далеко до абстрактного мышления, хватало того, что он придумал числа «один» и «два». Остальные количества для него оставались неопределенными и объединялись в понятие «много». С течением времени росло производство пищи, добавлялись объемы, которые требовалось учитывать в повседневной жизни. Поэтому придумывались новые числа: «три», «четыре»... Долгое время пределом познания было число «семь». О непонятном говорили, что эта книжка «за семью печатями».

Первые цифры появились у египтян и вавилонян. Вавилонские тексты дошли до нас в виде глиняных табличек, обычно примерно размера ладони. Они написаны клинописью – клинообразным алфавитом, имевшим такую форму благодаря стилосу (заостренной палочке), который использовался для письма. С помощью стилоса выдавливали на еще сырой глине этих табличек клинообразные знаки и для лучшей сохранности табличек их обжигали на огне: тогда они приобретали прочность камня. Тяжело приходилось древним математикам, которые жили 5000 лет назад в Месопотамии или Египте. Например, чтобы написать цифру 9, нужно было выдавить на глиняной табличке значок «v» девять раз. А сколько нужно было места, чтобы написать всего лишь цифру 29. Египтяне для изображения цифр, бóльших 10, придумали специальные значки. Не проще обстояли дела у китайцев и майя.

Дело пошло вперед после появления алфавита. После того как иероглифы стали буквами, от жителей Синая алфавит получили финикийцы, а от них греки. Греки познакомились с финикийским алфавитом в IX в. до н. э. У многих народов (древних греков, финикийцев, евреев, сирийцев) цифрами служили буквы алфавита.

Интересно, что в России привычные нам цифры появились только при Петре I, до этого же каждой цифре соответствовала своя буква алфавита.

Первые математические знаки-цифры, которые оказались наиболее удобными, были известные теперь всем нам цифры 1, 2, и т. д. Эти цифры мы называем арабскими. Арабские цифры происходят от индийских символов для записи чисел. Арабские цифры были изображениями индийских цифр, приспособленными к арабскому письму. Впервые индийскую систему использовал арабский ученый Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (т. е. родом из Хорезма – с берегов Сыр-Дарьи), автор знаменитой «Китаб аль Джебр ва-ль-Мукабаля», от названия которой произошел термин «алгебра» (от имени ***Аль-Хорезми*** происходит и слово (понятие) ***алгоритм***). Он работал в первой половине IX в. и был любимцем ученейшего из халифов – Маамуна (сына знаменитого Гаруна ар-Рашида). От арабского слова «сыфр» («нуль», «пустышка») ведет происхождение слово «цифра».

Арабские цифры стали известны европейцам в X–XIII вв. благодаря их изображениям на косточках абака. Абак (лат. abacus – доска) – счетная доска, применявшаяся для арифметических вычислений приблизительно с IV в. до н. э. в Древней Греции, Древнем Риме. Эта доска была разделена линиями на полосы, счет на ней осуществлялся с помощью размещенных на полосах камней или других подобных предметах. Места цифры на абаке изображались боком. Поэтому цифры 2 и 3 приобрели ту форму, которую мы знаем. Европейское изображение происходит из сокращенной записи латинского слова «octo» («восемь»).

Само название «арабские цифры» скорее дань исторической роли арабской культуры в популяризации десятичной позиционной системы (см. Приложение 1).

Многие века абак был фактически единственным средством для практических вычислений, которым пользовались все: и купцы, и менялы, и ученые. Интересно, что слово «банк» по-немецки означает «скамья». Абак в форме скамьи был очень распространен в торговых кругах Германии в XV–XVI вв. В каждой меняльной лавке или банковской конторе обязательно находилась счетная скамья. Естественно, что скамья стала синонимом банка. Достоинства вычислений на счетной доске разъяснял в своих сочинениях такой выдающийся мыслитель, как Герберт Аврилакский (938–1003), французский монах из Орильяка, первый профессиональный ученый католической Европы, ставший в 999 г. папой римским под именем Сильвестра II. Герберт родился в самой середине X в. (точная дата неизвестна) где-то в Центральной Франции и в раннем подростковом возрасте поступил на служение в строгий бенедиктинский монастырь в местечке Орильяк. Юноша проявлял то ли рвение к наукам, то ли строптивый нрав – во всяком случае, когда в монастырь заехал барселонский граф Боррелл, аббат попросил, чтобы он взял юношу с собой для дальнейшего обучения. Он поселился в Барселоне, выучил арабский язык и начал беседовать с учеными иноверцами обо всем на свете. Астрономия и арифметика, изготовление бумаги и музыкальных инструментов – во всем этом жители Андалузии превосходили лучших мастеров Франции или Италии, и все это Герберт старался перенять. В частности, он усвоил арабско-индийские цифры и впоследствии поражал современников вычислениями в уме. Через пять лет он сделал очередной шаг: направился в центр Андалузии Кордову и три года учился у местных мудрецов. Ему не раз предлагали принять ислам и стать цивилизованным человеком. Но Герберта интересовало только второе из этих предложений. Соединить арабскую мудрость, ученость древних греков и римлян с христианским богословием, сделать этот сплав достоянием всех католиков – такую цель поставил перед собою отважный и упорный Герберт из Орильяка. В Испании Герберт познакомился с абаком, первой вычислительной машиной в мире, и впоследствии написал об этом инструменте трактат. Однако после нескольких лет Герберт почувствовал, что ему самому нужно еще набраться знаний и с разрешения императора отправился получать дополнительное образование в одну из самых знаменитых соборных школ Европы – в город Реймс во Франции. В Реймсе Герберт задержался надолго (поэтому его нередко называют Гербертом Реймсским); именно там он строил орган и устраивал гигантский абак в одной из пристроек кафедрального собора. Церковная карьера Герберта шла успешно, и на рубеже тысячелетий, в 999 г., он был избран папой, став первым французом на престоле Св. Петра. Ученость, в том числе восточная, сделала Герберта популярным персонажем легенд и снискала ему дурную славу чернокнижника. Легенды окутывают и посмертную судьбу Сильвестра II. Он похоронен в римской церкви Св. Иоанна на Латеранском холме, и на его мраморном надгробии написаны дурные латинские стихи. Новое с огромным трудом пробивало себе дорогу. В историю математики вошло упорное противостояние лагерей абацистов и алгорисмиков (их иногда еще называли гербекистами), пропагандировавших использование для вычислений вместо абака арабских цифр. Интересно, что известный французский математик Никола Шюке (1445–1488), который еще неоднократно встретится нам на страницах книги, в реестр налогоплательщиков города Лиона был вписан как алгорисмик (algoriste). Но прошло не одно столетие, прежде чем новый способ счета окончательно утвердился, столько времени потребовалось, чтобы выработать общепризнанные обозначения, усовершенствовать и приспособить к записи на бумаге методы вычислений. В Западной Европе учителей арифметики вплоть до XVII в. продолжали называть магистрами абака, как, например, математика Никколо Тарталью (1500–1557). В России счеты (аналог абака) появились в XVI в. и в некоторых местах применяются до сих пор, хотя и быстро вытесняются широким распространением калькуляторов. В заключение хочется привести слова великого Гете: «Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир».

**Биография «пустого места», или Удивительная история нуля**

В математике нуль обладает чудодейственной силой. Без нуля не было бы всего здания математики. Без нуля не существовала бы современная компьютерная техника. А представить себе современную жизнь без компьютера уже так же трудно, как и то, что когда-то наши предки испытывали ужас перед цифрой 0. История нуля длинная и запутанная. След нуля найден в вычислениях китайцев II в. н. э. и еще раньше у майя (он обозначался у них спиралью). Но это еще не «наш» нуль. Некоторые исследователи предполагают, что нуль был заимствован у греков, которые ввели в качестве нуля букву «о». Первое использование символа нуля (0), каковым он является в наши дни, находим у греческих астрономов. Существует множество версий, почему было выбрано именно такое обозначение. Некоторые историки склоняются к тому, что это омикрон, т. е. первая буква греческого слова *ничто – ouden*. Однако не все соглашаются с этим объяснением, так как греки уже использовали омикрон для записи числа 70 (греческая числовая система основывалась на алфавите). Согласно другим версиям, жизнь символу нуля дало слово «обол» (монета, почти не имеющая ценности). Или же этот символ возникал, когда вели подсчеты, используя песочную доску. Предполагается, что оставался отпечаток в виде нуля после того, как монеты удалялись из песка. Другие, наоборот, считают, что нуль пришел в Индию из Китая. Обнаружены более ранние надписи от 683 и 686 гг. в нынешней Камбодже и Индонезии, где нуль изображен в виде точки и маленького кружка. Однако *«лишь у индийцев впервые в истории человечества появляется нуль как математический символ, используемый в счетных операциях»*. Так считает немецкий историк Эберхард Кноблох. Первые достоверные свидетельства о записи нуля относятся к 876 г.; в настенной надписи из Гвалиора (Индия) имеется число 270. Прежде чем нуль попал на Запад, он проделал долгий, окольный путь. В 711 г. арабы вторглись в Испанию и завоевали почти всю ее территорию. В 712 г. они захватили часть Индии и покорили Синд – земли в низовьях Инда. Там они познакомились с принятой индийцами системой счисления и переняли ее; с тех пор стали говорить (и говорят) об «арабских цифрах».

Персидский математик аль-Хорезми (787 – ок. 850) первым из арабов описал в своем трактате «Числа индийцев» эту новую систему счисления. Он посоветовал своим читателям ставить в расчетах пустой кружок на то место, где должно помещаться «ничто». Так на страницах арабских рукописей появился привычный нам нуль. С первого взгляда нуль – это ничто. Если прибавить или вычесть нуль из любого числа, это не приведет ни к каким переменам. Но приписать эту скромную цифру справа от единицы – получится число в десять раз больше исходного. И напротив, умножьте любое, хоть миллиард, число на нуль и миллиард «съежится» и сам превратиться в ничто, в нуль. Значение введения знака нуль трудно переоценить. Профессор Хостед так подчеркивал важнейшее значение изобретения нуля: «...эта способность дать пустому ничто не только место, имя, образ, символ, но также и практическое значение типично для народа Индии, страны, из которой все это пришло... Ни одно математическое изобретение не имело такого значения для общего прогресса разума и могущества». Леонардо Фибоначчи (1180–1240) арабское слово «нуль» («as-sifr») передал словом «zephirum», представляющее собой транслитерацию санскритского «sunya», т е. «пустое», которое служило названием нуля. Слово «zephirum» дало начало французскому слову «zero» (нуль). С другой стороны, от арабского слова «as-sifr» произошло русское слово «цифра». Вплоть до середины XVII в. это слово употреблялось специально для обозначения нуля. Например, в «Арифметике» Магницкого цифрой называется только нуль. Латинское nullus (никакой) вошло в обиход для обозначения нуля только в XVI в. Лишь в 1600 г. нуль получил широкое распространение в Европе, но все еще сталкивался с сопротивлением. *«...Нуль часто ненавидели, издавна боялись, а то и запрещали»*, – пишет американский математик *Чарлз Сейф*, автор книги «Биография цифры нуль». Еще недавно, в конце XIX в., турецкий султан Абдул-Хамид II (1876–1909) велел своим цензорам вычеркнуть из всех учебников химии формулу воды $H_2O$, принимая букву «О» за нуль и не желая допускать, чтобы в школах его инициалы порочились соседством с презренным нулем. Существует бесчисленное множество пословиц, поговорок, крылатых выражений, связанных с нулем. Вот, например: *«нуль без палочки»* – ничего не стоящий, не значащий человек; *«нуль внимания»* – полное равнодушие, безразличие со стороны кого-либо или чего-либо; *«абсолютный нуль, круглый нуль»* – человек ничтожный, совершенно бесполезный в каком-либо деле; свести к нулю – лишить всякого смысла, значения. Проблемы, связанные с нулем, до сих пор дают о себе знать. 1 января 2000 г. миллиарды людей встретили новое тысячелетие. Но очевидно же, что отмечали пришествие 1999 лет назад, со дня утверждения календаря: нулевого года не существовало! Удивительно, как большинство людей не понимает, что третье тысячелетие и XXI век начинаются 1 января 2001 г.! Нуль все еще усложняет нашу жизнь.

### Натуральный ряд чисел

Убежденным сторонником новой нумерации в Европе был Фибоначчи (1180–1240). Знаменитый итальянский математик родился в Пизе. Начальное образование получил в Бугие (Алжир); под руководством местного учителя овладел арифметикой и алгеброй. Посетил многие страны Европы и Востока, неустанно пополняя свои знания по математике. «Девять индусских знаков, – писал он в своем сочинении «Liber abaci»

(1202), – суть следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 и нуль». Эти числа получили название натуральных. В предисловии к книге он писал, что предпринял этот труд, дабы «род латинян» не пребывал более в незнании излагаемых в нем вещей. Но «Книга абака» оказалась по плечу лишь немногим ученым-современникам Фибоначчи. «Книга абака» была одним из источников проникновения индийско-арабской нумерации в Западную Европу. Позднее Фибоначчи написал учебник «Практическая геометрия» и «Книгу квадратов». В них впервые были изложены (на латыни) правила действий с нулем и отрицательными числами, а также появились знаменитые числа Фибоначчи. Натуральные числа возникают естественным образом при счете предметов: 1, 2, 3... Натуральные потому, что ими обозначались (моделировались) реальные неделимые объекты: люди, животные, вещи... Понятие натурального числа возникло, как мы видели, еще в доисторические времена. Натуральные числа имеют две основные функции: первая – характеристики количества предметов, а вторая – характеристики порядка предметов, размещенных в ряд. В соответствии с этими функциями возникли понятия *порядкового числа* (первый, второй и т. д.) и *количественного числа* (один, два и т. д.). Долго и трудно человечество добиралось до первого уровня обобщения чисел. Сто веков понадобилось, чтобы выстроить ряд самых коротких натуральных чисел от единицы до бесконечности: 1, 2, ... ∞. Важную роль натуральных чисел отмечал еще греческий математик *Никомах из Геразы*. Он говорил о натуральном, т. е. природном ряде чисел: *«С помощью этих знаков можно написать какое угодно число»*. Никомах из Герасы (Nikomachos) (ок. 100 н. э.) – древнегреческий математик и философ неопифагорейской школы. Как автор труда «Введение в арифметику» он пользовался чрезвычайно широкой известностью. Его сочинение было переведено на латинский и арабский языки. Множество комментариев и переделок арифметики Никомаха появлялось в греческой, римской, арабской и средневековой западно-европейской литературе. После «Элементов» Эвклида «Арифметика» Никомаха самое распространенное из произведений математической литературы древней Греции. Первое ее печатное издание вышло в Париже в 1538 г., а последнее в 1866 г. в Лейпциге. Но беда в том, что у эллинов не было удачной системы обозначений даже для натуральных чисел. Вместо цифр греки пользовались буквами; позиционной системы для записи больших чисел они не знали. Поэтому даже обычная (для нас) таблица умножения в Элладе имела вид довольно толстого свитка. А работать с числами, когда они изображены буквами, очень не просто! Системы счисления, основанные на позиционном принципе (значение каждой цифры определяется ее местом в числе) возникли независимо одна от другой в древнем Междуречье (Вавилоне), у племени майя и, наконец, в Индии, т. е. возникновение позиционного принципа не было случайностью. В позиционной системе счисления мы пользуемся девятью значащими цифрами и нулем. Это дает нам возможность подсчитать число камешков в совке ребенка, микробов в пробирке и звезд на небе (см. подробнее Приложение 1).

**Считается, что термин «натуральное число» впервые применил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике и теории музыки Аниций Манлий Торкват Северин Боэций** (480–524). Будучи приближенным к королю остготов Теодориху, захватившему в 493 г. Северную Италию, Боэций занимал различные государственные посты, стал консулом в Равенне. Но это возвышение закончилось падением. После ложного обвинения в предательстве (возможно, в связях с Византией) он был заключен в тюрьму и обезглавлен в Риме. В ожидании казни написал свое главное сочинение «Об утешении философией» («De consolatione philosophiae»), которое стало одной из популярнейших книг Средневековья (переведена на русский язык в 1794 г.) и оказало сильное влияние на европейскую литературу. Боэций является автором классических учебников по арифметике, музыке, геометрии и астрономии.

Понятием *натуральное число* в современном его понимании последовательно пользовался выдающийся французский математик, философ-просветитель Д'Аламбер (1717–1783).

Формальное определение натуральных чисел в XIX в. дал итальянский математик, профессор Туринского университета Джузеппе Пеано (1858–1932). В 1889 г. он впервые сформулировал аксиомы арифметики, казавшиеся до смешного очевидными (существует нуль; за каждым числом следует еще число и т. д.), но на самом деле абсолютно исчерпывающие. Аксиомы* Пеано позволили формализовать арифметику. После введения аксиом стали возможны доказательства основных свойств натуральных и целых чисел. Они играли ту же роль, что и постулаты великого Евклида в геометрии. Исходя из подобных утверждений, с помощью логического рассуждения можно было получить основные арифметические теоремы.

Мир чисел разнообразен, он не ограничивается лишь целыми положительными числами. Давайте перейдем к истории различного вида чисел. Но перед тем, как мы покинем такой понятный и уютный мир натуральных чисел, приведем одно высказывание немецкого математика *Кронекера* (1823–1891): *«Бог создал натуральные числа, все остальное – дело рук человеческих»*.

**В мире дробных чисел**

С возникновением представлений о целых числах возникали представления и о частях единицы, точнее о частях целого конкретного предмета. С появлением натурального числа $n$ возникло понятие о дроби вида $^1/_n$. Чтобы выяснить вопрос о происхождении дроби, надо остановиться не на счете, а на другом процессе, который возник со стародавних времен, – на измерении. Исторически дроби возникли в процессе измерения. Измерять начали с давних пор. Так, в частности, археологи доказали, что древние шумеры (сумерийцы), жившие более 5000 лет тому назад в Южной Вавилонии до появления там семитов, не только применяли меры длины, площади, объема, веса, времени и ценностей, но и впервые связали эти меры в определенную систему. И с каждым годом роль и значение измерений повышались. Дроби естественно возникли при решении задач о разделе имущества, измерении земельных участков, исчислении времени и т. п. Как только человек начал строить жилища, изготовлять орудия, посуду, ему пона-

* Аксиома – отправное, исходное положение научной теории, принимаемое без доказательства.

добилось прибегнуть к математике, чтобы точно измерить и пересчитать свое имущество. Потребность в измерениях стала особенно насущной с развитием обмена. Однако первоначально люди не знали точного определения размеров и количеств. Измерения были самыми примитивными, приблизительными, и касались они объема, тяжести, протяжения. Тяжесть измерялась мерами веса, вместимость – мерами объема, протяжение – мерами длины; в основе всех этих мер лежала прямая линия. У всех народов использовались части человеческого тела в качестве мер длины, о чем свидетельствуют уже сами названия: фут – ступня, дюйм – палец. Единицами измерений протяжения на первых этапах развития человеческого общества служили локоть, пядь (расстояние между концами растянутых пальцев руки – большого и указательного); мерить также можно было и при помощи простейших физических действий, например шагами. Большие расстояния измерялись днями пути – пешими и конными, а также днями «судового хода». Мерой объема и тяжести служили количества, которые человек может захватить или унести своими руками (горсть, ноша, охапка). В быту такие определения количеств сохранились до настоящего времени. В период, когда основными мерами были размеры человеческой руки или расстояние, которое может пройти человек за день, и т. д., конечно, еще не было точного определения размеров. Точные размеры появляются лишь с развитием и усложнением хозяйственной жизни, развитием торговли, ростом культуры. Так постепенно создаются единицы измерения, стоящие в точном математическом отношении друг к другу: когда меры веса, объема, длины дробятся, делятся на части в правильной соразмерности, тогда измерение приобретает математический характер. Дроби встречаются уже в самых древних, дошедших до нас письменных источниках – вавилонских глиняных табличках и египетских папирусах. Шестидесятиричные дроби используются и поныне в делении углового и дугового градуса (а также часа) на 60 минут и минуты на 60 секунд (см. Приложение 1). Более мелкой единице меры, как следствие раздробления, давали индивидуальные названия, и величины измеряли этой уже более мелкой единицей. В древнем Риме была интересная система дробей. Она основывалась на делении древнеримской единицы массы – асса. Асс делили на 12 равных частей. Двенадцатую часть асса называли унцией. В ходу было всего 18 различных дробей:

- СИМИС – половина асса;
- СЕКСТАНС – шестая его доля;
- СЕСКУНЦИЯ – восьмая;
- ТРИЕНС – треть асса;
- БЕС – две трети;
- УНЦИЯ – двенадцатая часть асса;
- СЕМИУНЦИЯ – пол-унции.

Кстати, люди иногда говорят: «Он скрупулезно изучил этот вопрос». Это значит, что вопрос изучен до конца, что ни одной самой малой неясности не осталось. А происходит странное слово «скрупулезно» от римского названия $^1/_{288}$ асса – «скрупулус». Чтобы работать с дробями, надо было для этих дробей помнить и таблицу сложения, и таблицу умножения. Поэтому римские купцы твердо знали, что при сложении триенса ($^1/_3$ асса) и секстанса получается семис, а при умножении беса ($^2/_3$ асса) на сескунцию ($^3/_2$ унции, т. е. $^1/_8$ асса) получается унция. Для облегчения работы составлялись специальные таблицы, некоторые из них дошли до нас.

В произведении знаменитого римского поэта Горация (I в. до н. э.) так описана беседа учителя с учеником в одной из римских школ этой эпохи:

Учитель:

– Пусть скажет сын Альбина, сколько останется, если от пяти унций отнять одну унцию?

Ученик:

– Одна треть.

Учитель:

– Правильно. Ты сумеешь беречь свое имущество.

В русских рукописных арифметиках XVII в. дроби называли долями, позднее «ломаными числами». В старых руководствах можно найти следующие названия дробей на Руси: $^1/_2$ – половина, полтина; $^1/_4$ – четь, $^1/_5$ – пятина и т. п. Славянская нумерация употреблялась в России до XVII в., затем в страну начала постепенно проникать десятичная позиционная система счисления. Она окончательно вытеснила славянскую нумерацию при Петре I. Гораздо позже **названиями этих конкретных дробей начали обозначать аналогичные части других величин, а потом и абстрактные дроби.** Запись дробей с помощью числителя и знаменателя появилась в Древней Греции, только греки знаменатель записывали сверху, а числитель снизу. Сами термины «числитель» и «знаменатель» появились в конце XII в. у Максима Планудa (в миру – Мануила) (1260–1310), греческого монаха и ученого-математика. Дроби в привычном для нас виде впервые стали записывать индусы около 1500 лет назад, но они не использовали черту между числителем и знаменателем. Черта стала общеупотребительной лишь с XVI в. Простая дробь – это отношение двух чисел. Поэтому неудивительно, что знак деления двоеточие (:) для дроби был использован англичанином Джонсоном в одной книге в 1633 г. В дальнейшем было замечено, что самыми удобными для вычислений являются **десятичные дроби**. Уже несколько тысячелетий человечество пользуется дробными числами, а вот записывать их удобными десятичными знаками оно додумалось значительно позже. Со временем практика измерений и вычислений показала, что проще и удобнее пользоваться такими мерами, у которых отношение двух ближайших единиц длины было бы *постоянным* и равнялось бы именно *десяти* – основанию нумерации. Однако следует отметить, что европейцы не первые, кто пришел к необходимости использовать *десятичные* дроби в математике. Зарождение и развитие *десятичных* дробей в некоторых странах Азии было тесно связано с метрологией (учением о мерах). Уже во II в. до н. э. там существовала *десятичная* система мер длины. Примерно в III в. н. э. десятичный счет распространился на меры массы и объема. Тогда и было создано понятие о *десятичной* дроби, сохранившей, однако, метрологическую форму. Например, в Китае в X в. существовали следующие меры массы: 1 лан = 10 цянь = $10^2$ фэнь = $10^3$ ли = $10^4$ хао = $10^5$ сы = $10^6$ хо. Если вначале *десятичные* дроби выступали в качестве метрологических, конкретных дробей, т. е. десятых, сотых и т. д. частей более крупных мер, то позже они по существу стали все более приобретать характер *отвлеченных десятичных* дробей. Целую часть стали отделять от дробной особым иероглифом «дянь» (точка). Однако в Китае как в древние, так и в средние века *десятичные* дроби не имели полной самостоятельности, оставаясь в той или иной мере связанными с метрологией. Более полную и систематическую трактовку получают *десятичные* дроби в трудах среднеазиатского ученого аль-Каши в XV в. Аль-Каши работал в первой половине XV в. в обсерватории Улугбека, что близ Самарканда. Среднеазиатский город Самарканд был в это время богатым культурным центром. Делом жизни Мухаммеда Улугбека и окружавших его ученых было создание большой обсерватории для составления планетных таблиц. В 1417 г. в Самарканде были собраны крупнейшие астрономы, которые выбрали место для обсерватории и наметили программу работ. Строительство было завершено около 1425 г. (обсерватория представляла трехъярусное круглое здание высотой 30,4 м). Возглавляли строительство аль-Каши и Салах ад-Дин. В работе «Ключ арифметики» аль-Каши показал запись дроби в одну строку числами в десятичной системе и дал правила действия с ними. Ученый пользовался несколькими способами написания дроби: то он применял вертикальную черту, то чернила черного и красного цвета. Такими десятичными дробями он пользовался для повышения точности извлечения корней. Независимо от него в 80-х гг. XVI в. *десятичные* дроби были «открыты» заново в Европе нидерландским математиком *Стевином* (1548–1620). Это произошло в 1585 г. Симон Стевин был нидерландский (фламандский) инженер и ученый. О своем важном открытии он написал в книге «Десятая». Это маленькая работа (всего 7 страниц) содержала объяснение записи и правил действия с десятичными дробями. Стевин еще не пользовался запятой, но писал дробные знаки в одну строку с цифрами целого числа. При этом он нумеровал десятичный знак, вписывая порядковые номера в окружности рядом с цифрой или над цифрой. Например, число 12,761 он записывал так: $\overset{0123}{12761}$ или так: 12(0)7(1)6(2)1(3). Во втором примере вместо запятой стоит нуль в кружке, десятые доли обозначены знаком (1), сотые – (2) и т. д. В первом примере цифры в верхней строке указывают, сколько нулей содержит десятичный знак (семь десятых, две сотых, шесть сотых, одна тысячная).

В своей книге «Десятая» он не только излагает теорию десятичных дробей, но и старается убедить людей пользоваться ими, говоря, что при их использовании *«изживаются трудности, распри, ошибки, потери и прочие случайности, обычные спутники расчетов». «Астрологам, земледельцам, мерильщикам объемов, проверщикам емкостей бочек, стереометрам вообще, монетным мастерам и всему купечеству — Симона Стевина привет»*, — так обращается к своим читателям изобретатель десятичных дробей. Стевин был скромным человеком. Вот как он пишет о себе и своем изобретении: *«Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой клад, не применяя никакой учености! Такой именно случай имел место здесь»*, т. е. в его книге. На самом деле Симон Стевин, конечно же, был человеком незаурядным: иначе он не сумел бы так доходчиво и убедительно изложить свою «случайную» находку. С начала XVII в. начинается интенсивное проникновение десятичных дробей в науку и практику. В Англии в качестве знака, отделяющего целую часть от дробной, была введена точка. **Запятая, как и точка, в качестве разделительного знака была предложена в 1617 г. математиком Джоном Непером.** Еще ранее, в 1592 г. итальянский математематик Джованни Маджини ввел запятую. По другим данным ставить запятую предложил немецкий ученый Иоганн Кеплер (1571—1630), а десятичную точку германский математик Христофор Клавиус (1537—1612).

Известно, какое важное значение имеет запятая в русском языке. От неправильной расстановки запятых смысл предложения может резко измениться. Вспомним известный пример:

*«Казнить, нельзя помиловать».*
*«Казнить нельзя, помиловать».*

В математике от положения запятой зависит верность или неверность ответа. В англоязычных странах (Англия, США, Канада и др.) и сейчас вместо запятой пишут точку, например «2.3», и читают: «два точка три».

Развитие промышленности и торговли, науки и техники требовали все более громоздких вычислений, которые с помощью десятичных дробей легче было выполнять. Широкое применение десятичные дроби получили в XIX в. после введения тесно связанной с ними метрической системы мер и весов. Она возникла во Франции как одно из следствий буржуазной революции. Во Франции за основную меру длины приняли одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана и назвали ее *метром* (от греческого слова «метрон», означающего «мера»). Число 10 легло в основу подразделений метра. Вот почему метрическая система мер, применяемая ныне в большинстве стран мира, оказалась тесно связанной с *десятичной* системой счисления и с *десятичными* дробями. В России учение о десятичных дробях изложил *Леонтий Филиппович Магницкий* в 1703 г. в «Арифметике».

Леонтий Магницкий (1669–1739) – математик, преподаватель Московской школы математических и навигацких наук; в 1703 г. он опубликовал книгу «Арифметика» – первое в России полноценное введение в математику. Наряду с вопросами нумерации, изложением техники вычисления с целыми числами и дробями (в т. ч. и десятичными) и соответствующими задачами в этом руководстве содержатся и элементы алгебры, геометрии и тригонометрии, а также ряд практических сведений, относящихся к коммерческим расчетам и задачам навигации. Любопытна терминология учебника, удержавшаяся в отечественных учебниках до конца XVIII в. Все числа первого десятка названы перстами, круглые числа – суставами, а все остальные числа – сочинениями. Однако до сих пор сохранились известные со школьной скамьи термины – делимое, делитель, частное. Они появились в учебнике Магницкого. Занимательным задачам был отведен целый раздел учебника – «Об утешных некиих действах, чрез арифметику употребляемых». В последующие 50 лет «Арифметика» оставалась основным российским математическим трудом. О Магницком не забывали на протяжении двух столетий, но вот русский парадокс – о его личности известно совсем немного. Неизвестна даже фамилия, под которой он прибыл в Москву и учился здесь. Ведь Магницкий – это псевдоним, который придумал для него Петр I и повелел всегда использовать вместо фамилии.

В то время Петр I был занят созданием Навигацкой школы – первого в России технического учебного заведения и пришел в восторг от разговора со своим молодым соотечественником, он сравнил его с магнитом, притягивающим разнообразные знания и нужных людей: *«Как магнит притягивает к себе железо, так он природными и самообразованными способностями обратил внимание на себя»*. Псевдоним, вытеснивший настоящую фамилию, звучал с польским оттенком, и Магницкий счел нужным отметить в своих стихах, что он «природнорусский, а не немчин» (т. е. не иноземец, не «немой» среди русских). Очень высоко оценил «Арифметику» Михаил Васильевич Ломоносов (он знал ее наизусть!). Магницкий дает принципиально новое определение арифметики, характеризуя ее как искусство: *«Арифметика, или числительница, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков изобретенное и изложенное»*.

Теперь добавим несколько слов о частном виде десятичных дробей – **проценте**. Из-за того что в двенадцатеричной системе нет дробей со знаменателями 10 или 100, римляне затруднялись делить на 10, 100 и т. д. При делении 1001 асса на 100 один римский математик сначала получил 10 ассов, потом раздробил асс на унции и т. д. Но от остатка он не избавился. Чтобы не иметь дела с такими вычислениями, римляне стали использовать проценты. Они брали с должника лихву (т. е. деньги сверх того, что было дано в долг). При этом говорили: не *«лихва составит 16 сотых суммы долга»*, а *«на каждые 100 сестерциев долга заплатишь 16 сестерциев лихвы»*. И сказано то же самое, и дробей использовать не пришлось! А так как слова «на сто» звучали по-латыни «pro centum», то сотую часть и стали называть процентом. И хотя теперь дроби, а особенно десятичные, известны всем, проценты все равно применяются и в финансовых расчетах, и в планировании – т. е. в различных областях человеческой деятельности. Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они выражают части целых чисел в сотых долях. Это дает возможность упрощать расчеты и легко сравнивать части между собой и с целым. Проценты были особенно распространены в Древнем Риме. Затем процентами стали пользоваться и другие народы Европы. Ныне процент – это частный вид *десятичных* дробей, сотая доля целого (принимаемого за единицу). В некоторых вопросах иногда применяют и более мелкие, тысячные доли, так называемые *промилле* (от латинского «pro mille» – «на тысячу»), обозначаемые знаком ‰ по аналогии со знаком процента – %. Однако на практике в большинстве случаев тысячные – слишком мелкие доли, десятые же – слишком крупные. Поэтому больше всего удобны сотые доли, иначе говоря, проценты.

**Трудная история отрицательных чисел**

Из истории известно, что отрицательные числа не пользовались у людей популярностью: они были непонятны. Вот с положительным числом все всегда ясно! Положительное число долго трактовалось как «прибыль», а отрицательное – как «долг», «убыток»: кому же это будет приятно? Лишь в Древней Индии и Китае догадались вместо слов «долг в 10 юаней» писать просто: «10 юаней», но рисовать эти иероглифы... черной тушью. А знаков «+» и «–» в древности не знали ни для чисел, ни для действий. А что знаменитые греки? Они тоже поначалу знаков не использовали, пока в III в. **Диофант Александрийский** не стал обозначать вычитание знаком «↑». История сохранила нам мало сведений о замечательном математике древнего мира – Диофанте. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице. Эта надпись составлена в форме математической задачи: *«Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать могут, о чудо, сколь долго был век его жизни. Часть шестую*

*его представляло прекрасное детство. Двенадцатая часть протекла его жизни — покрылся пухом тогда подбородок. Седьмую в бедном браке провел Диофант. Прошло пятилетие: он был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца-сына, кому рок половину лишь жизни прекрасной и светлой дал на земле по сравненью с отцом. И в печали глубокой старец земного удела конец воспринял, переживши года четыре с тех пор, как сына лишился. Скажи, сколько лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?»*

В книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра» показано, как, составив несложное алгебраическое уравнение, ответить на вопрос Диофанта: Диофант женился в 21 год, отцом стал в 38 лет, потерял сына на 80-м году жизни и умер в возрасте 84 лет. Диофант ввел новое алгебраическое направление в античной математике, которое никак не было связано с традиционной греческой геометрией. Он же первым предложил использовать новый, специфический язык для записи алгебраических выражений, и у него нет ничего похожего на знак «+», а тем более на знак «=». Если нужно сложить несколько чисел, он просто пишет их одно за другим, а затем словами говорит, что их нужно сложить. Это высший уровень алгебраизации, достигнутый к III в. н. э. Любопытно, что еще великие юристы I в. н. э. Сабин Мазурий и Прокул Лициний, основоположники римского права, задолго до Диофанта запросто использовали записи вида: «meum + tuum = mutuum». Отсюда произошло и название займа «mutuum», так как то, что мною тебе дано, из моего делается твоим (meum + tuum = mutuum). Правда, это не была математика...

В Италии ростовщики, давая деньги в долг, ставили перед именем должника сумму долга и черточку, вроде нашего минуса, а когда должник возвращал деньги, зачеркивали. Получалось что-то вроде нашего плюса. Действительно, ведь зачеркнутый минус, можно считать плюсом. «Нет долга — и слава богу!» — это хорошо (плюс). Знаки «+» и «—» встречаются уже в начале 80-х гг. XV в. в рукописях. Но в печати впервые появляются в 1489 г. в арифметике немецкого математика Яна Видмана (1460—1498), которая называется «Быстрый и красивый счет для всего купечества». Ян Видман (1460 – ок. 1498) – математик, родился в чешском городе Хеба. Обучался в Лейпцигском университете, в нем же и преподавал. Первый начал чтение лекций по алгебре в этом университете. В упомянутой выше книге Видмана появляется таблица умножения (в печатном виде). Он также впервые ввел термин «обратная дробь».

Чуть позднее Видмана немецкий ученый Михаэль Штифель (1487–1567) написал книгу «Полная Арифметика», которая была напечатана в 1544 г. (именно напечатана, а не написана от руки!). *Михаэль Штифель* хотя и называл отрицательные числа *«нелепыми числами»* (numeri obsurai), но уже представлял себе отрицательное число как «меньше, чем ничто» (ficti infra nihil). В его книге встречаются такие записи для чисел: 0 – 2; 0 + 2; 0 – 5; 0 + 7. Числа первого вида он называл *«меньше, чем ничего»* или *«ниже, чем ничего»*. Числа второго вида назвал *«больше, чем ничего» или «выше, чем ничего»*. Эти названия станут понятными, если знать, что «ничего» – это 0.

С Михаэлем Штифелем связан забавный эпизод. В молодости Штифель поступил в один из католических монастырей, а затем примкнул к протестанскому движению, возглавляемому Мартином Лютером, и стал сельским пастором (священником). Он объявил днем конца света 3 октября 1533 г., произведя математический анализ Апокалипсиса. Незадолго до его наступления Штифель обошел окрестные селения, призывая жителей молиться об искуплении грехов. Те в ужасе начали продавать скот и имущество за бесценок. А когда «судный день закончился» без всяких последствий, он еле спасся от гнева разъяренных крестьян. В 1629 г. А. Жирар (о нем подробнее ниже) дал геометрическое истолкование отрицательных чисел. Он также первый применил двойной знак «±».

**Рациональные числа**

Древнегреческие математики классической эпохи пользовались только целыми и дробными положительными числами. Эти числа получили название рациональных. В Древней Греции рациональные числа вообще являлись символом гармонии окружающего мира и проявлением божественного начала, а все отрезки, до некоторого времени, считались соизмеримыми, т. е. отношения их длин обязаны были выражаться рациональным числом (иного боги не могли допустить!). Термин *рациональный* происходит от латинского «ratio» – отношение, по смыслу сходным с греческим словом «logos». Таким образом, исторически первым расширением понятия о числе является присоединение к множеству **натуральных** чисел множества всех **дробных** чисел. **Рациональные числа** называли также относительными, потому что любое их них можно представить отношением двух целых чисел. С помощью рациональных чисел можно осуществлять различные измерения (например, длины отрезка при выбранной единице масштаба) с любой точностью, т. е. совокупность рациональных чисел достаточна для удовлетворения большинства практических потребностей.

### Иррациональное – значит «уму непостижимое»

Иррациональные числа были открыты в пифагорейской школе при попытке соизмерить диагональ квадрата с его стороной. Достижения, приписывемые обычно Пифагору, относятся к трудам этой школы. Пифагорейская система знаний состояла из четырех разделов: арифметики (науки о числах), геометрии (учении о фигурах и их измерении), музыки (учении о гармонии) и астрономии (учении о строении Вселенной). Пифагорейцы приписывали числам божественную силу. *«Если бы ни* ***число*** *и его природа, ничто существующее нельзя было бы постичь ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам. Мощь* ***чисел*** *проявляется во всех деяниях и помыслах людей, во всех ремеслах и в музыке»*, – писал пифагореец *Филолай* в V в. до н. э. У пифагорейцев были «счастливые» (нечетные) и «несчастливые» (четные) числа. «Десятка», или тетрактис, считалась священным числом, к ней обращались с молитвой. Свой закон *«Все есть число» Пифагор* и его ученики распространяли повсюду, где это было возможно, в том числе и на строение Вселенной, которую они называли словом «космос», но оказалось, что диагональ квадрата со стороной 1 (квадрат ее длины, по теореме

Пифагора, равен 2) не выражалась отношением чисел (т. е. дробью)*.

$\sqrt{2}$ – это иррациональное число. С этим числом связано открытие так называемых «несоизмеримых отрезков» и история наиболее драматичного периода в античной математике, который привел к разработке теории иррациональностей и иррациональных чисел. Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (конец V в. до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из Кирены установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, ..., 17. Теэтет (начало IV в. до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей. Существует легенда, что один из учеников Пифагора Гиппас забавлялся с числом «корень квадратный из двух», пытаясь как раз найти ему эквивалент из простой дроби. И Гиппас внезапно понял, что такого эквивалента не существует. Открытие иррациональных чисел разрушало учение Пифагора о гармонии мира, а значит и сам Пифагор потерял смысл существования. Известнейший древнегреческий ученый не сумел опровергнуть аргументацию Гиппаса с помощью математической логики и приговорил своего ученика к смерти через утопление.

Открытие иррациональных чисел существенно повлияло на дальнейшее развитие математики и философии. Оно показало, что ложен основной принцип пифагорейцев: «Все есть число» (имеется ввиду натуральное число). Это открытие хранилось в страшной тайне. В это открытие посвящались наиболее психически устойчивые ученики, а истолковывалось оно как отвратительное явление, нарушающее гармонию мира.

---

* То, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, знали еще в древности. Доказательства этого можно найти в конце десятой книги «Начал» Евклида (оно приводится, правда, не во всех сохранившихся рукописях «Начал»). Его содержание сводится к следующему: пусть $ABCD$ – квадрат со стороной $\pi$ и длиной $q$, а $|AC|$ – его диагональ (у Евклида – «диаметр»). Отношение стороны $|AB|$ к диагонали $|AC|$ равно отношению двух целых чисел $\pi/q$, а по теореме Пифагора $q^2 = \pi^2 + \pi^2 = 2\pi^2$. Значит на основе делимости и само $q$ – четное число. Тогда $\pi$ должно быть нечетным. Но из того, что $q = 2k$ (т. е. четное число) следует, что и $q^2 = 4k^2 = 2\pi^2; \pi^2 = 2k^2$. Значит, и $\pi$ – четное. Полученное противоречие состоит в том, что $\pi$ должно быть одновременно и четным и нечетным.

В отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т. е. нерациональными (по-гречески *alogos*) правда, первоначально термины «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и, соответственно, несоизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми. Теодор Киренский, учитель Платона, называл эти числа симметричными и ассимметричными. В V–VI вв. римские авторы Марциан Капелла, автор популярной в Средние века энциклопедии семи свободных искусств, и Магн Аврелий Кассиодор (487–578(5)) переводили эти термины на латынь словами «rationalis» и «irrationalis». Особо отметим роль Кассиодора, благодаря которому произведения многих античных авторов дошли до нас. Некоторые из них хранятся в Российской национальной библиотеке в Санкт-Петербурге. Термин «соизмеримый» (*commensurabilis*) ввел в первой половине VI в. другой римский автор – Боэций. Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа. Греки называли иррациональную величину (например, корень квадратный из двух) словом «алогос» – невыразимое словами; позже европейские переводчики стали называть эту величину «surodus» – глухой. Термин «иррациональный» впервые появился в середине XII в., его ввел Герард Кремонский – известный переводчик математических произведений с арабского на латынь; затем его стал использовать итальянский математик Леонардо Фибоначчи, и спустя некоторое время термин стал популярен у других европейских математиков, вплоть до XVIII в. Но нужды войны заставили человечество учиться решать алгебраические уравнения в степени выше первой. Поэтому с существованием «алогичных» иррациональных чисел пришлось смириться, какими бы отвратительными они ни казались. В Европе в XVI в. отдельные ученые, в первую очередь итальянский математик Рафаэль Бомбелли и нидерландский математик Симон Стевин, считали понятие иррационального числа равноправным с понятием числа рационального. *Стевин* писал: *«Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных или глухих чисел, но среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью»*. Поскольку иррациональное число нельзя записать в виде конечного числа, то приходится ставить знаки «приближенно равно» (≈) или многоточия (...) и ограничиваться некоторым необходимым числом десятичных знаков (например, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ или $\sqrt{2} = 1{,}414...$).

Однако только во второй половине XIX в. немецкий ученый Рихард Дедекинд (1831–1916) дал одну из строгих теорий иррациональных чисел. После этого сомнений в их реальности не было.

*Глава 2*
# С ВОСТОКА НА ЗАПАД. ПРОБУЖДАЮЩАЯСЯ НАУКА ЕВРОПЫ

Усвоение арабами античного наследия способствовало развитию точных и естественных наук, особенно математики, астрономии, географии, медицины и химии. Арабская астрономия и математическая география основаны на трудах Птолемея – знаменитого александрийского астронома, математика и географа II в. н. э. **Клавдий Птолемей** – одна из крупнейших фигур в истории науки эпохи позднего эллинизма. В истории же астрономии Птолемею не было равных на протяжении целого тысячелетия – от Гиппарха (II в. до н. э.) до Бируни (X–XI вв. н. э.). Предположительные годы его жизни около 87–165. История довольно странным образом обошлась с личностью и трудами Птолемея. О его жизни и деятельности нет никаких упоминаний у историков той эпохи, когда он жил. В исторических работах первых веков нашей эры Клавдий Птолемей иногда связывался с династией Птолемеев, но современные историки полагают это ошибкой, возникшей из-за совпадения имен. Начиная с IX в. в ряде городов были созданы обсерватории. В конце VIII–IX в. появилось два арабских перевода главного астрономического труда Птолемея «Megiste Syntaxis» («Великое построение»), более известного в арабском переводе под названием «Аль-Маджисти». В геометрии и тригонометрии ряд важных открытий сделали аль-Батани (IX–X вв.) и Абу-аль-Вафа (X в.), автор астрономических таблиц.

Абу-ль-Вефа Мухаммад ибн Мухаммад ибн Яхья ибн Исмаил ибн ал-Аббасал-Бузджани (это полное имя) – арабский астроном и математик. Родился в Бузджане (Хорасан). С 960 г. проводил наблюдения в Багдадской обсерватории. В то время была широко распространена псевдонаука – астрология.

Однако не хватало широких контактов между католическим миром и исламским. Они начались только в эпоху Крестовых походов – в конце XI в., когда кастильские рыцари захватили половину Пиренейского полуострова и его древнюю столицу Толедо. Вскоре туда потянулись многие ученые, в том числе Аделяр из Бата (Англия) и Герардо из Кремоны (Италия). Они стремились перевести на общедоступную латынь с арабского или греческого языка труды древних ученых Эллады и Рима. Отметим, что по переводу Герардо с начатками птолемеевой астрономии познакомился Данте. (В «Божественной комедии» поэт спускается по всем сферам планет к центру, где находится Земля.) В Средние века арабский язык в мусульманских странах был языком науки, как латынь в Европе. И трактаты персидских ученых также написаны на арабском языке. Поэтому иногда период с IX по XV в. в истории математики называют арабским. Потому же и наши цифры мы называем арабскими, хотя они изобретены в Индии, но европейцы узнали о них из трактатов, написанных по-арабски. В Испании сформировался другой переводчик – Роберт из Честера (1110–1160), который в 1143 г. перевел впервые Коран, затем в 1144 г. алхимический трактат (его считают первым переводчиком алхимического сочинения с арабского языка на латинский. Это сочинение называлось «Книга композиции алхимии»), в 1145 г. «Алгебру» Аль-Хорезми, а также работы Аристотеля. Однако самым известным из переводчиков был Герардо из Кремоны (1114–1187), который, ознакомившись в Толедо с арабским языком и с научными сведениями испанских мавров, перевел большое число сочинений с арабского, в числе прочих «Альмагест» Птолемея. Длинное название книги Птолемея («Мегале Математике Синтаксис») арабы сократили до первого слова: получилось «Величие» – Аль-Магест. Новым европейцам понравилось второе слово – «Учение» (Математика). И вот с XII в. все европейцы называют так науку о числах и фигурах. Много лет Герардо преподавал в Толедо арабский язык, будучи сам христианином. Он предпринял первую попытку перевести «Начала» с арабского на латынь. Это был выдающийся переводчик своего времени: число трудов, переведенных им с арабского и греческого, приближается к девяноста. Он перевел сочинение о перспективе Альгазена, книгу «De scientiis» Альфарабиуса и проч. Ему приписывается сочинение «Algorisus magistri Gerardi in integris et minutiis» (т. е. о целых числах и дробях). С мудростью Эвклида начинает знакомиться Европа. Усвоение арабских математических знаний произошло в Западной Европе уже к началу XIII в. Первым с ними ознакомился Леонардо Пизанский, известный под прозвищем Фибоначчи. Чтобы понять, что написал после этого сам европейский ученый, потребовалось почти восемь столетий. В середине XIII в. в Италии было восемь университетов; один из них, Неаполитанский, был основан императором Фридрихом II, просвещенным монархом, который привлек к своему блистательному двору ученых Запада и Востока. При дворе императора в Палермо жил Леонардо Пизанский, который снова ввел забытые было десятичные цифры и научивший людей считать на счетах. Леонардо Пизанский уже записывает дроби, помещая в случае смешанного числа, целое число справа, но читает так, как принято у нас. Переводы произведений арабских математиков продолжались на протяжении нескольких веков. В 1482 г. в Венеции была впервые напечатана (на латыни) книга Евклида «Начала». С этого момента для математиков кончилось Средневековье и началось Новое время. Огромную работу в ознакомлении европейцев с наукой Востока и Эллады проделал Исаак Барроу (1630–1677) – английский математик, физик и богослов, известный многими научными трудами и тем, что был учителем бессмертного Ньютона. Исаак Барроу первоначальное воспитание получил в школе картезианского монастыря, в детстве обещал мало хорошего, так как не обнаруживал охоты к учебным занятиям и отличался буйным характером. Однако, когда на пятнадцатом году его перевели в College of Trinity (Троицкий колледж), в Барроу обнаружилась резкая перемена: он пристрастился к изучению древних языков, богословия и естественной философии, в которой тогда господствовали Бэкон, Декарт, Галилей. Занятия богословием привели его к необходимости заняться древней хронологией и побудили обратиться к изучению математики и астрономии древних. Барроу, благодаря знанию латинского, греческого и арабского языков, приобрел глубокие сведения в древней математике, издал впоследствии сочинения Евклида, Архимеда, Аполлония и Феодосия со своими комментариями. В 1675 г. назначен президентом Trinity-college. Для окончательной характеристики жизни Барроу прибавим, что он отличался необыкновенным трудолюбием: сокращал время своего отдыха и сна до крайних пределов. Таков был и его знаменитый ученик Ньютон, который сам, в свою очередь, приписывал свои успехи главным образом своему прилежанию. Барроу был чрезвычайно бескорыстен и до такой степени скромен, что не позволял списать с себя портрета, хотя это все-таки было впоследствии сделано его друзьями, но тайком и без его согласия. Вообще, Барроу был очень энергичным и храбрым человеком. Во время его путешествия на пути в Смирну корабль, на котором он находился, подвергся нападению пиратов. Из всех пассажиров один только Барроу вместе с экипажем судна участвовал в сражении, которое окончилось бегством неприятельского корабля. Подробная биография Барроу помещена Юзом (Hughes) при собрании его богословских сочинений. Трогательно описание последних часов его жизни, когда он якобы с радостью ожидает смерти и говорит друзьям, окружавшим его смертное ложе: «Наконец я узнаю разрешение многих геометрических и астрономических вопросов в лоне Божества. О Господи, какой ты геометр!». Барроу погребен в Вестминстерском аббатстве.

*Глава 3*
# КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ ЧИСЛА «ПИ»

*Все знают, что число π равно 3, 1415, но в Индиане значение числа π составляет 4. (Из закона американского штата.)*

*Собрание афоризмов Дэвида Кромби, мирового судьи Судейской коллегии Салисбери в Уилшире (Великобритания).*

Мало какому числу из всех известных нам чисел, использующихся в естественных науках (математике, физике, инженерном деле и т. д.) уделялось столько внимания, сколько уделяется числу π («пи»). В школе мы уяснили, что число «пи» – это отношение длины окружности к диаметру.

**Уильям Джонс (1675–1749) – английский британский (валлийский) математик, первый обозначил число «пи» греческой буквой π.** Несколько ранее, в 1647 г. английский математик Оутред (1574–1660) применил букву π для обозначения длины окружности. По-видимому, к этому обозначению его подвигла первая буква греческого слова «periferia» (что значит «окружность»). В 1737 г. это обозначение позаимствовал швейцарский математик Леонард Эйлер, и таким образом оно стало общепринятым. Возможно, к этому обозначению Эйлер пришел независимо от Джонса. Вопрос об истинной природе этого числа вообще мало кого интересовал до тех пор, пока люди вдоволь и безуспешно не нарешались древнегреческой задачи о квадратуре круга*, а само число π каким-то загадочным образом появилось в разных разделах математики и естествознания. В 1767 г. немецкий физик, философ и математик Иоган Генрих Ламберт (1728–1777) впервые доказал, что π является иррациональным числом.

---

* *Квадратура круга* – это задача о посторoении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу: пусть имеется круг, радиус которого равен единице; площадь этого круга π, тогда построение искомого квадрата сводится к построению отрезка длиной корень квадратный из числа π.

Математическое доказательство невозможности квадратуры круга не мешало многим «свободно мыслящим» ученым тратить годы на решение обратного доказательства. Тщетность исследований по решению задачи квадратуры круга перенесла этот оборот (в качестве метафоры) во многие другие области, где он попросту обозначает безнадежное и бессмысленное предприятие.

В 1844 г. французский математик Жозеф Лиувилль (1809–1882) установил, что существуют иррациональные числа, не являющиеся решением алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Эти числа получили название *трансцендентных*. 26 ноября 1882 г. немецкий математик профессор Карл Луиз Фердинанд Линдеман (1852–1939) наконец публично доказывает долгожданную трансцендентность числа $\pi$ и ставит крест на проблеме квадратуры круга. Однако трансцендентные числа не вызвали воодушевления у математиков: известно высказывание выдающегося математика XIX в. *Л. Кронекера*, который сказал Ф. Линдеману: *«Что толку от вашей прекрасной работы? Стоит ли браться за решение подобных проблем, если подобные иррациональные числа вообще не существуют?»*

Сведения о том, что окружность ровно втрое длиннее диаметра, находятся уже в клинописных табличках Древнего Междуречья. Такое же значение числа $\pi$ есть и в тексте *Библии: «И сделал литое из меди море, – от края до края его десять локтей, – совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом» (3 Цар. 7.23)*. Так же считали и в Древнем Китае. В священной книге джайнизма (одной из древнейших религий, существовавших в Индии, и возникшей в VI в. до н. э.) имеется одно указание, из которого следует, что число $\pi$ в то время принимали равным 3,162.

Но уже во втором тысячелетии до н. э. древние египтяне пользовались более точным значением числа $\pi$, которое получается из формулы для площади круга. Площадь круга диаметром $\boldsymbol{d}$ египетские математики определяли как $(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}/9)^2$ (эта запись дана здесь в современных символах). Из приведенного выражения можно заключить, что в то время число $\pi$ считали равным дроби $(16/9)^2$, или 256/81, т. е. $\pi = 3{,}160$.

Эти сведения были получены из так называемого «Математического папируса» Райнда, найденного в 1858 г., и названного так по имени его первого владельца – археолога X. А. Райнда. Известно, что этот папирус переписал писец Ахмес около 1650 г. до н. э.; автор же оригинала неизвестен – установлено только, что текст создавался во второй половине XIX в. до н. э. Этот документ остается основным источником информации из математики Древнего Египта. Он содержит чертежи треугольников с указаниями углов и формулами нахождения площадей, а также показывает деление числа 2 на нечетные числа от 3 до 101 в дробях и деление чисел от 1 до 9 на 10. В нем также имеется 87 задач на четыре действия арифметики, решение уравнений, прогрессии, вычисление объемов зернохранилищ, правило двух третей и т. д. Однако понять, каким образом египтяне получили саму формулу для расчета числа $\pi$, из контекста неясно. В так называемом «Московском папирусе», который был переписан неким учеником между 1800 и 1600 г. до н. э. с более древнего текста (примерно 1900 г. до н. э.), есть еще одна интересная задача о вычислении поверхности корзины «с отверстием $4^1/_2$». Неизвестно, какой формы была корзина, но все исследователи сходятся во мнении, что и здесь для числа $\pi$ берется то же самое приближенное значение $4(8/9)^2$. Приведем здесь значения числа «пи», полученные древними математиками:

16/9 = 3,1604 у египтян;
22/7 = 3,1428 у греков и 3,162 у индусов.

В III в. математик Лю Хуэй методом исчерпывания вычислил $\pi$ как 3,1416. Около 480 г. н. э. китайский математик Цзу Чунчжи (429–500), вписывая в окружность 12288- и 24576-угольник, получил значение $\pi$, находящееся в пределах между 3,1415926 и 3,1415927. Он также дал приближенное значение $\pi$, равное 22/7 и 355/113.

Чтобы понять, каким образом древние ученые получили тот или иной результат, нужно попытаться решить задачу, используя только знания и приемы вычислений того времени. Именно так поступают исследователи старинных текстов, хотя зачастую им удается найти нужное решение. Следует заметить, что на протяжении многих столетий математики разных стран и народов пытались выразить отношение длины окружности к диаметру рациональным числом. Точное же значение числа $\pi$ вычислить невозможно, так как это число иррациональное, т. е. его нельзя выразить в виде простой дроби. Это, однако, не удерживало многих известных математиков от утомительных попыток вычислить как можно больше значений числа $\pi$. Если мы познакомимся поближе с историей этого числа, то мы увидим, что история человечества предстанет перед нами, как череда усилий множества математиков по определению знаков этого числа и поискам способов для его вычисления. За этими знаками стоят тени величайших мыслителей Древнего мира и Средневековья, Нового и Новейшего времени. На протяжении всей истории изучения числа $\pi$, вплоть до наших дней, велась своеобразная погоня за десятичными знаками этого числа.

В 1220 г. Леонардо Фибоначчи определил три первых точных десятичных знака этого числа, а в XVI в. Андриан Антонис (фламандский математик) определил шесть знаков. Вычисляя периметры 1073741824-угольников, Антонис нашел число $\pi$ с пятнадцатью знаками после запятой. Такой метод вычисления $\pi$ – вписывание в круг правильного многоугольника и нахождение отношения его периметра (т. е., суммы длин всех его сторон) к радиусу – впервые начал использовать еще Архимед. Поэтому число $\pi$ часто называют числом Архимеда. Этот же метод использовал аль-Каши. В «Трактате об окружности» (ок. 1427) аль-Каши вычислил значение числа $\pi$ с семнадцатью верными десятичными знаками (в Европе такое же значение для «пи» найдено в 1597 г.); для этого ему пришлось вычислять сторону правильного 800335168-угольника. Рудольф ван Келен получил двадцать десятичных знаков, при этом он вычислял периметр 32512254720-угольников. В 1844 г. З. Дазе вычисляет 200 знаков после запятой, а в 1847 г. Т. Клаузен получает 248 знаков и т. д.

Об Иоганне Мартине Захарии Дазе стоит рассказать поподробнее. Он родился в Гамбурге в 1824 г., получил приличное образование и имел все возможности для развития своих способностей; однако кроме решения вопросов, связанных с числами и расчетами, он ни в чем не преуспел и при этом поражал зрителей своей вялой медлительностью. До конца своих дней Дазе так и не постиг геометрии; он также не знал ни одного языка, кроме немецкого. Он был просто исполнительным работником, занимая различные мелкие должности в Германии. Свои вычислительные способности Дазе демонстрировал в Германии, Австрии и Англии. Умер он в 1861 г. На «гастролях» в Вене в 1840 г. он познакомился с неким Страшницким, который уговаривал его использовать свой дар в научных целях, и Дазе охотно согласился. После этого состоялось его знакомство с Гауссом. Из числа его достижений в устном счете можно отметить только упоминания о том, как он быстро умел решать задачи на умножение. Например, когда ему предложили умножить 79532853 на 93758479, Дазе дал ответ через 54 секунды. Чтобы сосчитать произведение двух двадцатизначных чисел, ему понадобилось 6 минут; на перемножение двух сороказначных чисел он затратил 40 минут, а двух чисел, содержащих по 100 цифр, – 8 часов 45 минут. По мнению Гаусса, решение последнего вопроса на бумаге заняло бы у опытного вычислителя вдвое меньше времени. Однажды Дазе за 52 минуты извлек квадратный корень из числа, состоящего из 100 цифр. Это достижение, конечно, намного превосходит все другие подобные рекорды.

Как и другие чудо-вычислители, Дазе обладал великолепной памятью и через час-два после выступления мог повторить все упомянутые на нем числа. Он отличался еще одной интересной особенностью: с первого взгляда мог определить (с точностью, примерно, до 30) количество овец в стаде, число книг в шкафу и т. д., а также мог мысленно представлять и запоминать большое число предметов. Например, поглядев секунду на открытые кости домино, он назвал сумму очков на них (117); на вопрос о количестве букв в выбранной наугад строке на печатной странице большого формата он мгновенно дал правильный ответ (63). Другим достижением Дазе было вычисление семизначных натуральных логарифмов первых 1005000 чисел. Рекорд докомпьютерной эры, который продержался до середины прошлого века, – 707 знаков установил английский математик Уильям Шенкс. Люди радовались небывалым достижениям, как дети, и украшали свои дома цифрами вместо цветов: именно эти 707 цифр были размещены в виде гипсового фриза под потолком «цифирной палаты» в Доме занимательной науки в Ленинграде, организованном по инициативе выдающегося популяризатора науки Якова Перельмана. Их же в 1937 г. поместили на купол галереи парижского Дворца Открытий. Однако компьютерная революция сбила эту эйфорию: уже первые проверки на появившихся в 1945 г. ЭВМ показали, что Уильям Шенкс в своих расчетах ошибся. Начиная с 528-го знака весь последующий «хвост» из 180 знаков оказался неверным. Математика искренне жалели его коллеги: бедняга Шенкс потратил жизнь на то, что компьютер сделал за несколько секунд.

Темпы резко возросли: 1949 г. – 2037 знаков; 1958 – 10000; 1987 – 134217000 и т. д. Дальнейшие рекорды принадлежат японцу Тамуре Канада. Последний известный нам результат – 206158430000 десятичных знаков. Суперкомпьютер (проект YINTS-High-performance Numerical Tools Software) в сентябре 1999 г. работал для вычисления π почти четверо суток.

А теперь предлагаю рассмотреть первые 500 знаков числа π (*Hard'n'Soft. 2002. № 3. С. 88)*:

π = 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971
6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825
3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172
5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489
5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726
0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540
9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951
9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179
3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381
8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737.

В 1996 г. в Национальном научно-исследовательском вычислительном центре в Беркли Бэйлис с коллегами пришли к удивительному открытию, позволяющему вычислять любой знак числа π без получения информации о старших разрядах. Окрыленные успехом японские математики использовали предложенный способ вычислений для проверки миллионного знака числа π, а сформировавшаяся группа вскоре вычислила квадриллионный знак! Ежегодно во Всемирный день числа π (14 марта) фанаты легендарного числа собираются в

Интернете. Любой житель Земли может принять участие в глобальном проекте «Пi-HeX». На самом деле, это очень серьезный проект.

Вот что говорит рекордсмен мира по запоминанию числа π *Хидеаки Томойори* (его рекорд 40000 знаков): *«Конечно, мне не удалось бы запоминать такое огромное иррациональное число простой зубрежкой. Вместо этого я разбил его на короткие последовательности по десять цифр в каждой. Затем я проассоциировал звук каждого числа с конкретным словом. А из слов уже образовал предложения, которые смог запомнить как конкретные образы. Так, для каждой группы десяти цифр я сначала придумываю ключевое слово, таким образом, что это ключевое слово напоминает мне образ и все предложение, а затем уже звуки этого предложения напоминают мне точную последовательность чисел».*

В действительности нам столько знаков π знать не нужно. Ведь давно известно, что даже для расчета полета на край нашей Галактики с точностью, равной диаметру протона (невообразимо малая величина) достаточно 40 знаков. А уж в повседневных расчетах достаточно и очень ограниченное число десятичных знаков. И если вдруг у вас не оказалось под рукой математического справочника, можно воспользоваться *мнемоническим правилом*. Таких правил довольно много. Среди них пользуются популярностью, например, правила, основанные на подсчете букв в словах:

*«Что я знаю о кругах?» – 3,1416.*
*«Вот и знаю я число, именуемое π. – Молодец!» – 3,1415927.*

В этих примерах последняя цифра дана с округлением.
Приведем еще *стихотворение Сергея Боброва «π = 3,1415926»:*

*Гордый Рим трубил победу*
*Над твердыней Сиракуз,*
*Но трудами Архимеда*
*Много больше я горжусь.*
*Надо нынче нам заняться,*
*Оказать старинке честь,*

*Чтобы нам не ошибиться,*
*Чтоб окружность верно счесть.*
*Надо только постараться*
*И запомнить, все как есть:*
*Три – четырнадцать – пятнадцать –*
*Девяносто два и шесть!*

И еще немного об этом необычном числе. Число π – один из главных признаков нашей цивилизации и нам подобных. Это пароль разума, подобного нашему. Цивилизация, не знающая π, не имеет математики и радиотехники. Она не может сегодня вступить с нами в контакт, да с нею пока что нам, видимо, и не о чем говорить. Скорее всего, она развивалась настолько непохожим на нас путем, что на данном этапе мы просто можем не понять друг друга. Сегодня мы способны установить контакт только с π-цивилизациями.

*Глава 4*
# ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

*...Видите, Киса, как я страдаю, каким опасностям я подвергаюсь из-за ваших стульев. Эти арифметические знаки нанесены мне большой самопадающей ручкой с пером № 86.*

*И. Ильф, Е. Петров. Двенадцать стульев*

Создание современной математической символики, т. е. знакомой нам со школьной скамьи системы математических знаков, относится к XIV в. В это время в Италии появились первые великие поэты Нового времени: Данте Алигьери и Франческа Петрарка. Подобно Гомеру, они объявили своим современникам: *«Пришла пора строить новый мир, равняясь на античные образцы и стараясь их превзойти. Но путь к построению современного математического языка был долог и тернист».*

Как мы уже знаем, первыми математическими знаками, возникшими за 3,5 тысячи лет до н. э., были знаки для изображения чисел – цифры. В течение тысячелетий единственными математическими действиями были сложение и вычитание небольших чисел. Постепенно возникло умножение, сначала как удвоение, на что ясно указывает египетская математика, в которой умножение сводилось к сочетанию удвоения и сложения. Возникновение умножения было тесно связано с зарождением земледелия и складывающимися геометрическими представлениями. Вавилоняне, например, называли произведение «а-ша», что значит «площадь». Деление появилось значительно позже, чем умножение. Конечно, понятие 1/2 (половины) возникло сравнительно рано, но оно не связывалось с числом 2. Это не трудно проверить – ведь чуть ли не во всех языках, так же как и в русском, слова «половина» и «два» не происходят от одного корня. **Сама операция счета** долгое время представляла трудное, громоздкое и утомительное занятие. До сих пор некоторые народы, находящиеся на низких ступенях развития, производят счет больших чисел таким образом: один человек откладывает на пальцах обеих рук единицы, второй – десятки, третий – сотни...

Понятия «число» и «операция» не так просты, как это может показаться с первого взгляда. Ведь, пользуясь одними и теми же числами, мы персчитываем и овощи на рынке, и звезды на небе, т. е. мы приняли, что операции сложения, умножения всегда дают возможность пересчитать любые объекты, независимо от их числа. Подобными вопросами задавались уже древние греки.

Мы уже упоминали о замечательном математике древности Диофанте. Именно у него впервые появились особые знаки для арифметических операций, но они не похожи на те, которыми мы пользуемся сейчас. Удивительна судьба «Арифметики» Диофанта... После пожара Александрийской библиотеки «Арифметика» исчезла более чем на тысячелетие и считалась полностью утраченной. Лишь в 1464 г. немецкий ученый Региомонтан (см. далее) случайно обнаружил шесть из тринадцати книг «Арифметики». В первый раз она была напечатана на латыни в 1575 г. После издания 1621 г., подготовленного Баше де Мезириаком (он, кстати, написал одну из первых в Европе книг по занимательной математике), «Арифметика» Диофанта стала настольной для многих математиков, например для П. Ферма и Р. Декарта. Вплоть до XV в. в мире почти не было постоянных общепринятых арифметических знаков. В XV–XVI вв. употреблялись следующие символы: для знака сложения – латинская буква **p** (первая в слове «PLUS», означающем «БОЛЕЕ»), для вычитания – буква **m** (первая в слове «MINUS» – «МЕНЕЕ»).

Для сложения употреблялось также латинское **et** (обозначающее союз «И») которое, как полагают, постепенно превратилось в знак «+».

Первое употребление слова «минус» найдено в итальянской «Математике» XIV в. Никола Шюке (1445–1489) – французский математик, автор рукописного трактата по арифметике «Наука о числах», писал букву m (от лат. minus) для знака «–». О **появлении** знаков «+» и «–» мы уже упоминали выше.

За всю историю человечества было придумано много способов умножения. Только в конце XV – начале XVI в. Лука Пачиоли приводит восемь различных способов умножения – в своем трактате об арифметике.

Лука Пачиоли (1445–1514) – итальянский математик, магистр богословия, всю жизнь преподававший математику в различных городах Италии: Перуджии, Риме, Неаполе, Флоренции, Болонье, Венеции, в 1494 г. издал книгу под заглавием «Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita» (2-е изд. в 1523), в которой указывал на неразрешенность вопроса о решении кубических уравнений. Из этого сочинения видно, что в середине XV в. усвоение арабской математики в Италии, после почти трехвековых усилий, было наконец достигнуто. Книга состояла из письма к князю Гвидобальдо, герцогу Урбинскому, и двух частей, из которых первая посвящена арифметике и алгебре, а вторая – геометрии. Из девяти разделов арифметико-алгебраической части книги первый, посвященный теоретической арифметике, занимается изучением свойств чисел и числами квадратными; второй – изложением индусской системы счисления и четырьмя основными действиями над целыми числами; третий и четвертый – дробями и действиями над ними; пятый – тройными правилами и алгебраическим знакоположением; шестой – прогрессиями; седьмой – правилом ложных положений и правилами решения задач, приводящих к уравнениям первой степени; восьмой – изложением алгебры, состоящим из правила знаков, арифметических действий над иррациональными количествами в квадратных и биквадратных уравнениях; наконец, девятый – правилом товарищества, процентами, векселями, двойной бухгалтерией и сравнительной метрологией. Геометрическая часть книги состоит из восьми разделов. В 1496–1499 гг. он близко сошелся с Леонардо да Винчи, под влиянием взглядов которого написаны все последующие сочинения Пачиоли.

Сохранилось интересное портретное описание Луки Пачиоли того времени: «Красивый, энергичный молодой мужчина: поднятые и довольно широкие плечи обличают врожденную физическую силу, мощная шея и развитая челюсть, экспрессивное лицо и глаза, излучающие благородство и интеллект, подчеркивают силу характера. Такой профессор мог заставить слушать себя и уважать свой предмет». В 1510 г. Луке Пачиоли исполнилось 65 лет. Он устал, постарел. В библиотеке Болонского университета хранится рукопись неизданной работы *Л. Пачиоли «О силах и количествах»*, в предисловии которой он написал: *«...приближаются последние дни моей жизни»*. Он умер в 1515 г. и похоронен на кладбище своего родного города Сан-Сеполькоро. Но после 370-летнего забвения на его могиле поставили памятник с надписью: *«Луке Пачиоли, который был другом и советником Леонардо да Винчи и Леона Баттиста Альберти, который первый дал алгебре язык и структуру науки, который применил свое великое открытие к геометрии, изобрел двойную бухгалтерию и дал в математических трудах основы и неизменные нормы для последующих поколений»*.

**Знак умножения «косой крест» (×) впервые ввел английский математик Уильям Оутред (1575–1660).** Умножение столбиком, знакомое нам со школьной скамьи, – изобретение не столь уж далекого времени! (Его тоже придумал Оутред.) Его учениками были знаменитый Кристофер Рен – создатель собора Св. Павла в Лондоне и крупный математик Дж. Валлис. Другим замечательным изобретением Оутреда была также всем известная логарифмическая линейка (с помощью логарифмической линейки операции над числами заменяются операциями над логарифмами этих чисел, см. раздел «История логарифмов»), которую ввел в широкую инженерную практику создатель универсальной паровой машины Дж. Уатт на своем машиностроительном заводе в Сохо. **Позднее, в 1698 г. немецкий математик Г. Лейбниц ввел знак умножения «точка».** Делить числа люди научились гораздо позже, чем умножать. В Вавилоне деление при помощи таблиц обратных чисел сводилось к умножению, египтяне использовали специальную таблицу основных дробей. Европейский математик Герберт (род. в 950 г. в Аквитании) в своих сочинениях привел правила деления. Но они были слишком сложны и получили название «железного деления».

Позже в Европе появился арабский способ деления, которым мы пользуемся до сих пор. Он был намного проще, и поэтому его назвали «золотое деление». Самый старый знак деления скорее всего выглядел так: «/». Впервые его использовал английский математик Уильям Оутред в своем труде «Clavis Mathematicae» (1631, Лондон). Немецкий математик Йохан Ран ввел знак «÷» для умножения. Он появился в его книге «Deutsche Algebra» (1659). Знак Рана часто называют «английским знаком», потому что англичане первыми начали его использовать, хотя корни его лежат в Германии. **Немецкий математик Лейбниц предпочитал двоеточие «:» — этот символ он впервые использовал в 1684 г. в своем труде «Acta eruditorum»**. До Лейбница этот знак был использован англичанином Джонсоном в 1633 г. в одной книге, но как знак дроби, а не деления в узком смысле. В большинстве стран предпочитают двоеточие «:», в англоязычных странах и на клавишах микрокалькуляторов символ «÷». Для математических формул во всем мире отдают предпочтение знаку «/». Знаки математических действий отнюдь не сразу получили всеобщее признание. Как медленно самые элементарные символы входили в употребление, показывает следующий факт. В 1731 г. *Стевен Хельс* издает свои *«Этюды по статике»*, большой серьезный труд, адресованный автором в первую очередь сочленам по Лондонскому королевскому обществу и подписанный к печати президентом общества Исааком Ньютоном. В предисловии к этой книге автор пишет: *«Так как слышны жалобы о том, что употребляемые мной знаки многим непонятны (книга вышла вторым изданием), то я скажу: знак «+» — означает «больше» или «прибавить»; так на стр. 18, сторока 4: «6 унций + 240 гранов» означает то же, что сказать «к 6 унциям прибавить 240 гранов», а на строке 16 той же страницы знак «×» означает «умножить»; две короткие параллельные линии означают «равняется», так 1820 × 4 = 7280, это все равно, что 1820, умноженные на 4, дают (равны) 7280»*. (*Депман И. Я.* История арифметики. 1965).

В заключение отметим применение математических знаков в далеких друг от друга областях человеческой деятельности. Вот цитата из исторического для электротехники учебника физики *Иогана Христиана Эркслебена*, дополненного примечаниями Георга Лихтенберга (1742—1799): *«Весьма трудно определить, какое последует электричество, если данное тело натирать различными телами. Я приведу только некоторые* *случаи, означая для краткости стеклянное электричество символом +E, а смоляное −E».* Так в электротехнике появляются математические знаки «плюс» и «минус», а буквой *E* впоследствии стали обозначать электродвижущую силу. Между прочим, отвечая возможным противникам внедрения этих знаков, он пишет: *«Название положительное и отрицательное электричество не токмо весьма приличны, но даже могут, да и должны быть употреблены тогда, когда франклиновы представления найдутся неправильными. Названия сил служат к изъяснению и оправданию вышеупотребляемых мною знаков +E и −E».* Ученый оказался прав. Символы прижились и известны теперь даже школьникам. Между прочим, русский поэт и художник Давид Бурлюк (1882–1967) тоже использовал в своих стихах знаки «+», «−», а также знак «=».

**Нет ничего более параллельного, чем два параллельных отрезка**

Знак равенства «=» в математике и других точных науках пишут между двумя идентичными по своему размеру выражениями. Первым употребил знак равенства Диофант. Равенство он обозначал буквой **i** (от греч. *isos* – равный). В античной и средневековой математике равенство обозначалось словесно (например, *est egale*). Декарт (1596–1650) вместо знака равенства писал **æ** (от лат. *aequalis*). Знак равенства в современной форме создал математик *Роберт Рекорд* (1510–1558) в своем труде *«The Whetstone of Witte»* («Точильный камень остроумия», 1557). Он обосновал применение двух параллельных штрихов так: *«...because no two things can be more equal»* (потому что нет двух вещей, которые могут быть более одинаковыми). На самом деле, нововведение Рекорда, которое сейчас использует каждый школьник, ученый позаимствовал из средневековых манускриптов.

Рекорд родился в хорошей семье в городе Тэнби (Англия). Тэнби был главный средневековый порт на берегу Южного Уэльса. Рекорд окончил Кембриджский университет. Много времени он проводил в Оксфорде, куда был зачислен в штат сотрудников в 1531 г. Тюдоры покровительствовали Рекорду; он был врачом при дворе Эдварда VI, королевы Марии и королевы Елизаветы. Им ученый посвятил несколько своих книг. Во времена гонений на ведьм и колдунов Рекорд не был популярен и преследовался за занятие магией. Он был вынужден оставить преподавательскую должность, опасаясь королевских гонений. Это произошло в тот период, когда ученый достиг блестящих результатов, работая в старейшем университете мира. В 1547 г. Роберт Рекорд был практикующим врачом в Лондоне. К тому времени у него была большая семья: четыре сына и пять дочерей. За долги Рекорд был посажен в тюрьму. Он умер 28 июня 1558 г. в тюрьме Кингз Бенч, что в Саузворке, вскоре после того, как составил свое завещание. Рекорд написал огромное количество книг и вообще имел широкие научные интересы, включая историю и астрономию. Можно сказать, что Рекорд является основателем английской математической школы. Он был первым, кто написал на английском языке книги по арифметике, геометрии и астрономии, и первым, кто представил алгебру в Англии. Его книга по алгебре «Whetstone of Witte» вышла в свет в 1557 г. и была его самой известной работой. Рекорд прожил недолгую жизнь. На его могильной плите нет слов – просто вырезан знак «равно».

В континентальной Европе знак «=» был введен Лейбницем. Одним из важнейших элементов математического языка помимо равенства является тождество. Тождеством мы называем равенство, справедливое при всех значениях входящих в него букв. Простейшие примеры тождества показывают то свойство сложения и умножения натуральных чисел, которое в школе принято называть «переместительным законом». Соответствующие тождества записываются хорошо известными формулами:

$$x + y = y + x, xy = y \cdot x.$$

Имеется немало примеров важных тождеств в рамках школьной математики:

$$(x+ y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2, x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y).$$

Понятие тождества можно считать универсальным по «дистанции», охватываемой им в математике, – от самых начальных фактов, с которыми знакомятся ученики младших классов, до крупных научных достижений и открытий. Знак тождества в виде трех параллельных полосок «≡» впервые употребил немецкий математик **Георг Фридрих Бернхард Риман** в 1857 г.

Риман родился 17 сентября 1826 г. в деревне Брезеленц близ Ганновера. Учился в гимназии в Ганновере, где увлекся теорией чисел Лежандра. Затем учился в Гёттингенском и Берлинском университетах. В Гёттингене в 1849 г. сблизился с Вильгельмом Вебером (1804–1891), который пробудил в нем интерес к физике. В 1854 г. Риман прочитал известную лекцию *«О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии»* (*«Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen»*, 1854), в которой предложил идею неевклидовой геометрии. В 1859 г. стал профессором и директором Гёттингенской обсерватории. В последние годы жизни Риман получил признание и был избран членом различных научных обществ, в том числе Лондонского королевского общества и Французской Академии наук. Остаток жизни провел в Италии. Умер Риман в Селаске (на озере Лаго-Маджоре, Италия) 20 июля 1866 г.

### Буквенные обозначения и современная символика

*Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не была оживлена иксами и игреками.*

*У. Томсон (лорд Кельвин)*

Начатки буквенного изображения и счисления возникают в позднеэллинистическую эпоху в результате освобождения алгебры от геометрической формы. Ведь в Греции, начиная с V–IV вв. до н. э., величины (площади, объема, углов) изображались в виде отрезков, а произведение двух произвольных однородных величин – в виде прямоугольника, построенного на соответствующих отрезках. В «Началах» **Евклида** (III в. до н. э.) величины обозначались двумя буквами – начальной и конечной буквами соответствующего отрезка, а иногда и одной.

У Архимеда (III в. до н. э.) последний способ становится обычным. Подобное обозначение уже содержало в себе возможность буквенного исчисления. Более двух тысяч лет по книгампод общим названием «Начала» (или «Элементы»), составленным Евклидом, изучает геометрию вся Европа. «Начала» представляют большой труд, состоящий из тринадцати книг. Первые четыре содержат планиметрию, в них излагаются свойства плоских фигур (многоугольников и круга); книга пятая посвящена теории пропорций; в шестой рассматриваются вопросы подобия фигур. Основные вопросы арифметики – в седьмой и девятой книгах. В остальных – понятие о соизмеримых и несоизмеримых отрезках, стереометрия. «Начала» Евклида – одна из самых популярных книг в истории человечества. В период Средневековья «Начала» возродились в арабских переводах, и лишь в 1482 г. в Венеции вышло первое печатное издание «Начал» на латинском языке. К настоящему времени насчитывается более тысячи изданий «Начал». Влияние «Начал» испытали на себе многие выдающиеся ученые.

Однако в классической античной математике буквенного исчисления создано не было. Диофант в III в. использовал специальные знаки для записи неизвестной или ее степеней. При сложении Диофант приписывал слагаемые друг к другу, а для вычитания употреблял специальный знак. Равенство он обозначал буквой ἰ. Несколько веков спустя индийцы ввели различные знаки для нескольких неизвестных (сокращения наименований цветов, обозначавших неизвестные), квадрата, квадратного корня, вычитаемого числа. Так, уравнение

$$3x^2 + 10x - 8 = x^2 + 1$$

в записи Брахмагупты (VII в.) имело бы вид:

йа ва 3 йа 10 ру 8 йа ва 1 йа 0 ру 1 (*йа* – от йават – тават – неизвестное; *ва* – от варга – квадратное число; *ру* – от рупа –

монета рупия – свободный член; точка над числом – означает вычитаемое число).

Создание современной алгебраической символики относится к XIV–XVII вв.; оно определялось успехами практической арифметики и учения об уравнениях. В различных странах стихийно появляются математические знаки для некоторых действий и для степеней неизвестной величины. Проходят многие десятилетия и даже века, прежде чем вырабатывается тот или иной удобный символ. Еще в XVII в. можно насчитать около десятка математических знаков для действия умножения. Различны были и математические знаки неизвестной и ее степеней. В XVI – начале XVII в. конкурировало более десяти обозначений для одного только квадрата неизвестной, например *ce* (от «census» – латинского термина, служившего переводом греческого «dunami»), V, *Q* (от «quadratum»), A (2), Aii, *aa*, $a^2$ и др.

Значительным шагом вперед в развитии математической символики явилось введение *Виетом* (1591) математических знаков для произвольных постоянных величин в виде прописных согласных букв латинского алфавита **B**, **D**, что дало ему возможность впервые записывать алгебраические уравнения с произвольными коэффициентами и оперировать ими. Неизвестные Виет изображал гласными прописными буквами **A**, **E**, ... Острая алгебраическая мысль Виета широко распахнула перед математикой двери в новый мир современной алгебры. Виет показал, что, оперируя символами, можно получить результат, который применим к любым соответствующим величинам, т. е. решить задачу в общем виде. Стало возможным буквенное исчисление. Виет внес решающий вклад в создание буквенной алгебры. Поэтому Виета по праву называют творцом буквенного исчисления в алгебре.

Франсуа Виет родился в 1540 г. на юге Франции в небольшом городке Фантене-ле-Конт, что находится в 60 км от Ла-Рошели, бывшей в то время оплотом французских протестантов-гугенотов. Большую часть жизни он прожил рядом с виднейшими руководителями этого движения, хотя сам оставался католиком. По-видимому, религиозные разногласия ученого не волновали. Отец Виета был прокурором. По традиции сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1560 г. двадцатилетний адвокат начал свою карьеру в родном городе, но через три года перешел на службу в знатную гугенотскую семью де Партене. Он стал секретарем хозяина дома и учителем его дочери, двенадцатилетней Екатерины. Именно преподавание пробудило в молодом юристе интерес к математике. Когда ученица выросла и вышла замуж, Виет не расстался с ее семьей и переехал с нею в Париж, где ему было проще узнать о достижениях ведущих математиков Европы. С некоторыми учеными Виет познакомился лично. Так, он общался с видным профессором Сорбонны Пьером Рамусом де ла Рамэ (1515–1572), с крупнейшим математиком Италии Рафаэлем Бомбелли вел дружескую переписку. В 1671 г. Виет перешел на государственную службу, став советником парламента, а затем советником короля Франции Генриха III. В ночь на 24 августа 1672 г. в Париже произошла массовая резня гугенотов, так называемая Варфоломеевская ночь. В ту ночь вместе со многими гугенотами погибли муж Екатерины де Партене и математик Рамус. Во Франции началась гражданская война. Через несколько лет Екатерина де Партене снова вышла замуж. На сей раз ее избранником стал один из видных руководителей гугенотов – принц де Роган. По его ходатайству в 1580 г. Генрих III назначил Виета на важный государственный пост рекетмейстера, который давал право контролировать от имени короля выполнение распоряжений в стране и приостанавливать приказы крупных феодалов. Находясь на государственной службе, Виет оставался ученым. Но в эту же эпоху Франсуа Виет был вынужден то и дело отвлекаться от алгебраических исследований ради дешифровки очередной испанской тайнописи. Шла упорная религиозная война между католической Испанией и французскими протестантами (гугенотами). Королю-гугеноту Генриху IV хотелось вовремя узнавать коварные планы могучего короля-католика Филиппа II – и его придворный математик Франсуа Виет успешно справлялся с этой задачей! Среди испанцев он заслужил славу непобедимого колдуна; это очень похоже на репутацию Архимеда среди римлян, осаждавших Сиракузы! Виет прославился тем, что сумел расшифровать код перехваченной переписки короля Испании с его представителями в Нидерландах, благодаря чему король Франции был полностью в курсе действий своих противников. Код был сложным, содержал до 600 различных знаков, которые периодически менялись. Испанцы не могли поверить, что его расшифровали, и обвинили французского короля в связях с нечистой силой. К этому времени относятся свидетельства современников Виета о его огромной трудоспособности. Будучи чем-то увлечен, ученый мог работать по трое суток без сна. В 1584 г. по настоянию Гизов Виета отстранили от должности и выслали из Парижа. Именно на этот период приходится пик его творчества. Удался главный замысел ученого – началось преобразование алгебры в мощное математическое исчисление. Само название «алгебра» Виет в своих трудах заменил словами «аналитическое искусство». Он писал де Партене: *«Все математики знали, что под алгеброй и алмукабалой... скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти. Задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства...»* Основу своего подхода Виет называл «видовой логистикой». Следуя примеру древних, он четко разграничивал числа, величины и отношения, собрав их в некую систему «видов». В эту систему входили, например, переменные, их корни, квадраты, кубы и т. д., а также множество скаляров (скаляр – величина, каждое значение которой может быть выражено одним (действительным) числом), которым соответствовали реальные размеры – длина, площадь или объем. Для этих «видов» Виет дал специальную символику, обозначив их прописными буквами латинского алфавита. Для неизвестных величин применялись гласные буквы, для переменных – согласные. Виет показал, что, оперируя с символами, можно получить результат, который будет применим к любым соответствующим величинам, т. е. решить задачу в общем виде. Это положило начало коренному перелому в развитии алгебры – стало возможным буквенное исчисление. Демонстрируя силу своего метода, ученый привел в своих работах запас формул, которые могли быть использованы для решения конкретных задач. Знаменитая теорема, устанавливающая связь коэффициентов многочлена второй степени с его корнями, была обнародована в 1591 г. Теперь она носит имя Виета; сам автор сформулировал ее так:

*«Если B + D, умноженное на A, минус A в квадрате равно BD, то A равно B и равно D».*

Теорема Виета стала ныне самым знаменитым утверждением школьной алгебры. Теорема Виета достойна восхищения, тем более что ее можно обобщить для многочленов любой степени.

В 1589 г., после убийства Генриха Гиза по приказу короля, **Франсуа Виет** возвратился в Париж. Но в том же году сам Генрих III был убит монахом – приверженцем Гизов. Формально французская корона перешла к Генриху Наваррскому – главе гугенотов; в Париже его признали Генрихом IV только после того, как в 1593 г. новый король принял католичество. Так был положен конец кровавой и истребительной религиозной войне, долгое время оказывавшей влияние на жизнь каждого француза, даже вовсе не интересовавшегося ни политикой, ни религией. Подробности жизни Виета в тот период неизвестны, что само по себе говорит о его желании оставаться в стороне от кровавых дворцовых событий. Известно только, что он перешел на службу к Генриху IV, находился при дворе, был ответственным правительственным чиновником и пользовался огромным уважением как математик. В последние годы жизни Виет ушел с государственной службы, но продолжал интересоваться наукой. Известно, например, что он вступил в полемику по поводу введения нового, григорианского календаря в Европе, и даже хотел создать свой календарь. В мемуарах некоторых придворных Франции написано, что Виет был женат, что у него была дочь, единственная наследница имения, по которому Виет звался сеньором де ла Биготье. В придворных новостях маркиз *Л'Этуаль* писал: *«...14 февраля 1603 г. господин Виет, рекетмейстер, человек большого ума и рассуждения и один из самых ученых математиков века, умер... в Париже, имея, по общему мнению, 20 тысяч экю в изголовье. Ему было более 60 лет»*.

Непосредственно применение трудов Виета очень затруднялось тяжелым и громоздким изложением. Из-за этого они полностью не изданы до сих пор. Более или менее полное собрание трудов Виета было издано в 1646 г. в Лейдене нидерландским математиком ван Скутеном под названием «Математические сочинения Виета». Исследователь истории математики Г. Г. Цейтен (1839–1920) отмечал, что чтение работ Виета затрудняется несколько изысканной формой, в которой повсюду сквозит его большая эрудиция, и большим количеством изобретенных им и совершенно не привившихся греческих терминов. Потому влияние его, столь значительное по отношению ко всей последующей математике, распространялось сравнительно медленно. Правда, у самого Виета математическая запись алгебраических выражений все еще мала похожа на ту, что используем сейчас мы. Например, современную запись уравнения $x^3 + bx = d$ Виет записывал так: F cubus + D planum aequatur D solido. Здесь еще, как мы видим, довольно много слов. Но ясно, что они уже играют роль наших символов. Честь придать алгебре современный вид принадлежит Р Декарту (1596–1650). Декарт обозначил неизвестные последними буквами латинского алфавита ($x$, $y$, $z$), а произвольные данные величины – начальными ($a$, $b$, $c$).* Ему же принадлежит нынешняя запись степени.

---

* Откуда взялся икс? (версия Б. Подольского, автора известных словарей по иврииту). Алгебра зародилась, как известно, на Востоке. В арабских сочинениях было принято обозначать неизвестное словом ШАЙ (вещь, нечто), от которого писалась обычно лишь первая буква Ш. Переводы с арабского осуществлялись в средневековой Испании. Тогда в испанском языке был звук Ш, обозначавшийся буквой X. Не случайно Дон Кихот именовался на иврите Дон Кишот. Вместо арабской буквы Ш испанские переводчики естественно писали свою букву X, и это обозначение со временем вошло во все европейские языки.

**Рене Декарт** (латиниз. Картезий – Cartesius) родился в маленьком городке Лаэ провинции Турень, в не очень знатной, но зажиточной дворянской семье. В восемь лет Рене отдали на полное попечение в одну из лучших иезуитских коллегий под особым покровительством Генриха IV. Впоследствии Декарт с благодарностью вспоминал о заботах воспитателей коллегии. Парадоксально, но именно иезуиты, учителя Декарта, станут потом его заклятыми врагами. Декарта стали преследовать за его философское учение, и он был вынужден искать уединение в Голландии, где прожил в общей сложности около двадцати лет. Однако это не спасло Декарта. Его «Рассуждение о методе» сделались мишенью для яростных нападок церковников. Впоследствии произведения Декарта были присуждены к сожжению.

Как раз в это время Швецией правила двадцатилетняя королева Кристина Августа (1626–1689). Молодая правительница обладала незаурядными способностями. Особенно ее интересовала философия. И энергичная королева решила пригласить к себе Декарта. Она послала за ним корабль, который и доставил Декарта в 1649 г. в Стокгольм. Принятый с почетом Декарт должен был ежедневно заниматься с королевой философией. Несмотря на зимние холода, уроки начинались всякий раз в пять часов утра. Это было тяжело для Декарта. Однажды, направляясь во дворец, Декарт простудился, началось воспаление легких. Кровопускание, применявшееся в то время, не помогло, и 11 февраля 1650 г. Декарт умер. «Пора в путь, душа моя», – были последние слова Декарта. Необходимо отметить, что в 1980 г. в архиве Лейденского университета отыскалось письмо личного врача шведской королевы Кристины, которое показывает, что известный французский ученый Рене Декарт умер не от воспаления легких, как пишется во всех книгах, а был отравлен. Предполагают, что это сделали клерикалы, опасавшиеся влияния католика Декарта на протестантку Кристину. Тем не менее через четыре года после смерти ученого королева Кристина отреклась от престола, перешла в католичество и уехала в Италию. Спустя 330 лет после смерти (возможно!) была раскрыта тайна гибели великого Картезия. Ну, а что касается введенного Декартом способа записи в алгебре, то, обладая большим преимуществом по сравнению со всеми предыдущими, он вскоре получил всеобщее признание.

**Пятое действие математики. Степень и мир больших чисел**

Представление о возведении в степень как о самостоятельной операции у математиков сложилось не сразу, хотя задачи на вычисление степеней встречаются в самых древних математических текстах Древнего Египта и Междуречья. Дошедшие до нас глиняные плитки древних вавилонян содержат записи таблиц квадратов, кубов и их обратных значений. Первоначально под степенью понимали произведение нескольких одинаковых сомножителей.

Своеобразно описывает первые натуральные степени чисел Диофант Александрийский в своей знаменитой «Арифметике»: «Все числа... состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь до бесконечности. ...Среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя; это же число называется стороной квадрата; затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону; далее квадрато-квадраты – от умножения квадратов самих на себя; далее квадрато-кубы, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны; далее кубо-кубы – от умножения кубов самих на себя».

Способы записи степеней и связанных с ними обратных величин – корней из числа менялись с течением времени, пока не приняли современную форму.

Долгое время понятие степени относили только к неизвестным. В III в. Диофант стал применять сокращенное обозначение неизвестного и его степени. Он ввел свои термины для названия степеней и особые символы для их обозначения. Диофант называл вторую степень «дюнамис», третью- «кюбос», четвертую «дюнамо-дюнамис»; $x^2$ он обозначал $\Delta^{\text{г}}$, $x^3$ – $K^{\text{г}}$, $x^5$ – $\Delta K^{\text{г}}$ и т. д. Особыми знаками он обозначал и обратные значения неизвестной, т. е.:

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^6}.$$

Дальнейшее развитие науки вызвало необходимость расширения понятия степени. В XIV в. этим занялся французский епископ города Лизье в Нормандии Никола Орем (или Орезм, ок. 1323–1382). В 1349 г. он упоминается в документах Парижского университета в качестве члена нормандской университетской корпорации и магистра факультета искусств. Несколько позднее, в 50-х годах, вплоть до 1361 г., он преподает в Наваррской коллегии, причем с 1356 г. получает звание grand maitre. В 70-х годах по поручению короля Карла V Орем выполнил переводы с латинского на французский нескольких сочинений Аристотеля, снабдив их глоссами и комментариями. Орем впервые (с 1368 г.) стал заменять в отдельных случаях корни из чисел дробными показателями степени и ввел символические обозначения степени с дробными показателями. Например, так как $4^3 = 64 = 8^2$, он записывал 8 как

$$\left[1^{p}\frac{1}{2}\right]^4 \text{ или как } \left[\frac{p\cdot 1}{1\cdot 2}\right]^4, \text{ что обозначало } 4^{1\frac{1}{2}}.$$

У Ф. Виета в «Полной арифметике», вышедшей в 1544 г., использованы следующие символические записи: для первой степени – N (от первой буквы слова «Numeris» – «число»), для второй степени – Q («квадрат»), для третьей степени – С («куб»), для четвертой степени – QQ. Современная запись равенства $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ у Виета выглядела так: 1C – 8Q + 16N aequater 40. «Aequater» означает «=». Французский математик Эригон в «Курсе математики» обозначал степени буквы $a$ в виде $a2$, $a3$, $a4$ вместо современного $a^2$, $a^3$, $a^4$.

**И только Декарт в своей «Геометрии» ввел современные обозначения степени**, за исключением второй степени, которую он записывал как произведение двух множителей. Такую же запись сохранил и Гаусс, считая, по-видимому, что записи АА и $A^2$ равнозначны по своей сложности написания. Завершили введение современного изображения степени англичане Джон Валлис и Исаак Ньютон.

Джон Валлис (1616–1703) – английский математик; учился в Кембридже и избрал духовное поприще. В 1649 г. был приглашен занять в Оксфордском университете кафедру геометрии. Валлис был одним из основателей и первых членов Лондонского королевского общества. В 1665 г. впервые подробно рассмотрел вопрос о целесообразности употребления отрицательных и дробных показателей. Следует отметить, что помимо многочисленных работ по математике, физике, Валлис написал трактат о способе обучения глухонемых разговору. Джон Валлис уже в зрелом возрасте ради собственного удовольствия развил свои способности в устном счете. В качестве иллюстрации его достижений можно привести следующий пример. 22 декабря 1669 г., лежа в постели, он занялся вычислением (в уме) целой части квадратного корня из $3\times10^{40}$ и несколько часов спустя по памяти записал результат. Этот факт привлек внимание – через два месяца ему предложили извлечь квадратный корень из 53-значного числа. Он выполнил вычисление в уме, а через месяц продиктовал ответ, который до этого не записывал. И. Ньютон в одном из писем в 1676 г. указал: «Как алгебраисты вместо AA, AAA и т. д. пишут $A^2$, $A^3$ и т. д., так я ... вместо $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ пишу $a^{-1}$, $a^{-2}$, $a^{-3}$ и т. д.».

Постепенное расширение понятия степени в науке шло таким образом, чтобы новые понятия нулевой, дробной и отрицательной степени не противоречили ранее принятым определениям степени и действий со степенями, а были бы подчинены тем же правилам, которые были выведены с самого начала для степеней с натуральными показателями.

С понятием степени тесно связана проблема названий больших чисел. Хотя сами числа бесконечны, названий у них не так уж много. Так, например, числа 1 и 100 имеют соответственно названия «единица» и «сто», а название числа 101 уже составное (сто и один). В наборе чисел человечество наградило собственным именем избранное количество чисел. **История современной системы наименования больших чисел ведет начало с середины XV в., когда в Италии стали пользоваться**

**словом «миллион» для обозначения большой тысячи, т. е. тысячи тысяч**. Первоначально оно являлось названием конкретной меры – 10 бочонков с золотом. Об этой системе мы знаем благодаря французскому математику Николя Шюке (1450 – ок. 1500). В своем трактате «Наука о числах» («Triparty en la science des nombres», 1484) он развил эту идею, предложив дальше воспользоваться латинскими количественными числительными, добавляя их к окончанию «-иллион». Так, у Шюке появились биллион, триллион, а миллион в четвертой степени стал квадриллионом. В системе Шюке число $10^9$, находившееся между миллионом и биллионом, не имело собственного названия и называлось просто «тысяча миллионов», аналогично $10^{15}$ называлось «тысяча биллионов», $10^{21}$ – «тысяча триллионов» и т. д. Это было не очень удобно, и в 1549 г. французский писатель и ученый Жак Пелетье (1517–1582) предложил именовать такие «промежуточные» числа при помощи тех же латинских префиксов, но с окончанием «-иллиард».

Жак Пелетье дю Ман был не только математиком, но также поэтом, теоретиком поэзии, духовным наставником великого Ронсара. Вот одно из стихотворений Пелетье, которое можно рассматривать как оду математике:

***Тем, кто бранит математику***

*Чем чаще слышу я хулу*
*На эту дисциплину –*
*Тем громче ей пою хвалу...*
*Ее я не покину!*
*Числом любителей она*
*Не может похвалиться,*
*Хоть, как все редкое, должна*
*Людьми весьма цениться.*

*Наука эта с юных дней*
*Не будет сердцу милой,*
*Коль небо в вас наклонность к ней*
*С рожденья не вселило.*

*Но вы поймете, господа,*
*Ее очарованье,*
*Вступив на трудную всегда*
*Стезю образованья.*
*Узнав небесных тел пути,*
*Нам хочется, конечно,*
*Истоки их красы найти*
*Сияющей, извечной.*

*Всю подноготную понять*
*Механики небесной —*
*Ужели может ум занять*
*Загадка интересней?*

*Кто не учен — те лишены*
*Завидного уменья:*
*Светил — и солнца, и луны —*
*Предсказывать затменья,*

*Определять, когда назад*
*Воротится комета,*
*Иль вычислять объемов ряд...*
*Заманчиво все это!*

*Хвалить науку мне сию*
*Нет надобности, впрочем,*
*Хотя пример я подаю*
*До знанья неохочим.*
*Ведь толку от моих похвал*
*Наверное не будет:*
*Те, кто науку не познал,*
*О ней неверно судят.*

*Невежда пялится тупой*
*На сонмы звезд лучистых,*
*Не больше смысля, чем слепой —*
*В ландшафтах живописных.*

*А тот, кого влекут мечты,*
*Наукой умудренный,*
*На землю с горней высоты*
*Взирает восхищенно.*
*Сию науку небеса*
*Послали, очевидно,*
*Чтоб объяснить все чудеса*
*Махины шаровидной.*

*Величье Бога осознать*
*Наука та поможет,*
*А всем безбожникам – прогнать*
*Сомненье, что их гложет.*
(перевод В. Дмитриева)

Так, $10^9$ стало называться «миллиардом», $10^{15}$ – «биллиардом», $10^{21}$ – «триллиардом» и т. д. Система Шюке – Пелетье постепенно стала популярна, и ею стали пользоваться по всей Европе. Однако в XVII в. возникла неожиданная проблема. Оказалось, что некоторые ученые почему-то стали путаться и называть число $10^9$ не «миллиардом» или «тысячей миллионов», а «биллионом». Вскоре эта ошибка быстро распространилась, и возникла парадоксальная ситуация – «биллион» стал одновременно синонимом «миллиарда» ($10^9$) и «миллиона миллионов» ($10^{18}$). Эта путаница продолжалась достаточно долго и привела к тому, что в США создали свою систему наименования больших чисел. По американской системе названия чисел строятся так же, как в системе Шюке, – латинский префикс и окончание «-иллион». Однако величины этих чисел отличаются. Если в системе Шюке названия с окончанием «-иллион» получали числа, которые являлись степенями миллиона, то в американской системе окончание «-иллион» получили степени тысячи, т. е. тысяча миллионов ($1000^3 = 10^9$) стала называться «биллионом», $1000^4$ ($10^{12}$) – «триллионом», $1000^5$ ($10^{15}$) – «квадриллионом» и т. д. Старая же система наименования больших чисел продолжала использоваться в консервативной Великобритании и стала во всем мире называться «британской», несмотря на то что она была придумана французами Шюке и Пелетье.

На Руси до XVII в. применялась собственная система наименования чисел. Десятки тысяч назывались «тьмами», сотни тысяч – «легионами», миллионы – «леодрами», десятки миллионов – «воронами», а сотни миллионов – «колодами». Этот счет до сотен миллионов назывался «малым счетом», а в некоторых рукописях авторами рассматривался и «великий счет», в котором употреблялись те же названия для больших чисел, но уже с другим смыслом. Представляет интерес происхождение названий некоторых больших чисел.

Так, число $10^{100}$ имеет собственное название и придумал его девятилетний мальчик. А дело было так. В 1938 г. американский математик Эдвард Кэснер (1878–1955) гулял по парку с двумя своими племянниками и обсуждал с ними большие числа. В ходе разговора зашла речь о числе со ста нулями, у которого не было собственного названия. Один из племянников, девятилетний Милтон Сиротта, предложил назвать это число «гуголом» (googol). В 1940 г. Эдвард Кэснер совместно с Джеймсом Ньюманом написал научно-популярную книгу «Математика и воображение» о числе «гугол». Еще более широкую известность гугол получил в конце 1990-х благодаря названной в честь него поисковой системе Google. Название для еще большего числа, чем гугол, возникло в 1950 г. благодаря отцу информатики Клоду Шеннону (1916–2001). В своей статье «Программирование компьютера для игры в шахматы» он попытался оценить количество возможных вариантов шахматной игры. Согласно ему, каждая игра длится в среднем 40 ходов и на каждом ходе игрок делает выбор в среднем из 30 вариантов, что соответствует $900^{40}$ (примерно равно $10^{118}$) вариантам игры. Эта работа стала широко известной, и данное число называют «числом Шеннона». Интересно отметить, что в 1965 г. Шеннон присутствовал на инженерной конференции в СССР. Там, по его просьбе, он сыграл партию с многократным чемпионом мира по шахматам М. Ботвинником. Эту партию он проиграл на 42-м ходу. В известном буддийском трактате «Джайна-сутры», относящемся к 100 г. до н. э., встречается число «асанкхейя», равное $10^{140}$. Считается, что этому числу равно количество космических циклов, необходимых для обретения нирваны. Девятилетний Милтон Сиротта вошел в историю математики не только тем, что придумал число гугол, но и тем, что одновременно с ним предложил еще одно число – «гуголплекс», которое равно 10 в степени «гугол», т. е. единице с «гуголом» нулей. Еще два числа, большие, чем «гуголплекс», были предложены южноафриканским математиком Стэнли Скьюзом (1899–1988) при доказательстве гипотезы Римана. Самое большое «второе число Скьюза» составляет $10^{10^{10^{103}}}$. Очевидно, что чем больше в числе степеней в степенях, тем сложнее записывать числа и понимать их значение при чтении. Мало того, возможно придумать такие числа (и они, кстати, уже придуманы), когда степени степеней просто не помещаются на страницу. Да что на страницу! Они не уместятся даже в книгу размером со всю Вселенную! В таком случае встает вопрос: как же такие числа записывать? Проблема, к счастью, разрешима, и математики разработали несколько принципов для записи таких чисел. Правда, каждый математик, который задавался этой проблемой, придумывал свой способ записи, что привело к существованию нескольких не связанных друг с другом способов для записи больших чисел (см.: *Г. Штейнгауз.* Математический калейдоскоп.).

### Откуда взялись скобки

Скобки – это особые «знаки препинания» в математическом языке; они позволяют менять последовательность арифметических действий. Скобки входят в употребление в XVI – начале XVII в.

**Первыми появились квадратные скобки «[ ]», их ввел в 1550 г. Рафаэль Бомбелли (1530–1572),** итальянский математик и инженер-гидравлик. Работал в Болонье. В 1570 г. была издана его книга «Алгебра».

**Появлению круглых скобок «( )» мы обязаны известному итальянскому математику Тарталье.**

**Никколо Тарталья** (1500–1557) родился в бедной семье. Истинная фамилия его неизвестна, и может быть, он и сам не знал ее. Отца своего он звал по имени Micheletto, а на своем завещании подписался Fountana. Отец его умер рано, оставив

жену с тремя детьми. Когда мальчику было шесть лет, его родной город Брешию захватили французские войска. Люди спрятались в соборе, но стены храма не спасли их от кровавой бойни. Никколо повезло – он остался жив, но получил ранение: ему повредили горло, рассекли язык, и мальчик с трудом произносил слова. Поэтому его прозвали «тарталья» – «заика». В школе Никколо проучился лишь 15 дней: мать не смогла платить за учебу. Но мальчик обладал большой настойчивостью и терпением и научился читать сам. Как правило, денег на бумагу не хватало, и Тарталья каждый день ходил на кладбище и писал упражнения и задачи углем на мраморных надгробиях. Никколо так пристрастился к математике, что самостоятельно достиг небывалых высот; в дальнейшем он сам начал преподавать любимый предмет и стал выдающимся математиком своего времени. Преподавал он в Вероне, Брешии и Венеции. Тарталья вошел в историю науки под именем «человека, сделавшего самого себя». Тарталья написал несколько книг, самая важная из которых была издана в Венеции в 1556 г. под названием «Общие исследования чисел и мер». В ней он впервые применил круглые скобки. Впоследствии круглые скобки начал использовать уже знакомый нам математик М. Штифель. Первым стал применять скобки Ф. Виет, правда, у него они имели вид не скобок, а черты над многочленом. А вот фигурные скобки «{}» в математике появились именно благодаря Виету (в 1593 г.). Фигурные скобки чаще всего употребляются в математических формулах, где они обычно объединяют группу формул или охватывают выражение, в котором уже были использованы круглые или квадратные скобки. Однако широко фигурные скобки стали применяться позднее в работах Лейбница и Эйлера. Само название «скобки» придумал Эйлер (он использовал немецкое слово «klammer», от которого и произошел термин «скобка»). Скобки нашли применение не только в математике. Круглые скобки широко применяются в химии, языках программирования и проч. Всем знакомо использование квадратных скобок для транскрипции в фонетике. Фигурные скобки нашли применение в таких популярных языках программирования, как Си, Java, Паскаль (в комментариях).

**Шестое действие математики – извлечение корня**

Потребность в действиях возведения в степень и извлечении корня была вызвана практической необходимостью. С давних времен люди решали задачу: *«Найти длину стороны квадрата, если известна его площадь»*. Еще 4000 лет назад вавилонские ученые составляли таблицы квадратов чисел. При этом они умели находить приблизительные значения квадратного корня из любого целого числа. Но хозяйственные потребности издавна заставляли людей вычислять не только площади фигур, но и объемы различных тел. Одной из древнейших задач, вероятно, была задача: *«Какой должна быть длина ребра куба, для того чтобы его объем был равен $a$?»* Задача ведет к извлечению кубического корня из $a$. Среди знаменитых задач, которыми занимались древнегреческие ученые еще в V–IV вв до н. э., была задача *«об удвоении куба»: «Найти ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба»*. Приемы извлечения кубического и квадратного корня с помощью счетной доски и счетных палочек содержатся в китайском трактате XIII в. «Математика в девяти книгах». Греческий механик и математик Герон Александрийский (I в. н. э.), много сделавший для развития вычислительной и прикладной математики, дал схему для приближенного извлечения кубических корней.

Слово «корень» (квадратный или корень уравнения) пришло от арабов. Арабские ученые представляли себе квадрат числа, вырастающим из корня, – как растение; отсюда и название – корень (или радикс – от лат. radix). Кстати, «следы» этого слова еще можно найти в словах «редис», «редька».

Начиная с XIII в. итальянские и другие европейские математики обозначали корень латинским словом «radix» или сокращенно $R_x$. В XV в. Н. Шюке писал $R^2 12$ вместо $\sqrt{12}$. Современный знак корня произошел от обозначения, которое применяли немецкие математики XV–XVI вв., называвшие алгебру «косс», а алгебраистов «коссистами». Некоторые немецкие коссисты XV в. обозначали квадратный корень точкой впереди числа или выражения; корни высших степеней – несколькими точками. Из ставившихся перед подрадикальными числами точек, перешедших в скорописи в черточки, вероятно, возник знак корня V (без верхней черточки). Так, V4 означает $\sqrt{4}$. Этот знак (V) встречается впервые в немецкой алгебре «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры», изданной в 1525 г. в Страсбурге. Автором этой книги был уроженец Чехии, учитель математики в Вене, Кшитоф Рудольф из Явора. Книга пользовалась успехом и переиздавалась на протяжении XVI в. и вплоть до 1615 г. В 1626 г. голландский математик А. Жирар ввел обозначения V, VV, VVV для квадратного, кубического и корней большей степени. Если над этим знаком стояла цифра 2, то это означало корень квадратный, если 3 – кубический. Это обозначение стало вытеснять знак $R_x$.

**Альберт Жирар** (1595–1632) родился в Германии, но бо́льшую часть жизни провел в Голландии. Окончил Лейденский университет. Был учеником *С. Стевина*. Работал в Лейдене. Свои сочинения писал на французском языке. Главный труд Жирара «Новые открытия в алгебре» (Амстердам, 1629) содержал существенно новые результаты и отличался простотой изложения. Знаком корня пользовались в XVI в. М. Штифель, С. Стевин: VO с цифрой 2 в круге вместо $\sqrt{\ }$ и с цифрой 3 в круге вместо $\sqrt[3]{\ }$. Лишь в 1637 г. **Рене Декарт соединил знак корня с горизонтальной чертой, применив в своей «Геометрии» (1637) современный знак корня** $\sqrt{\ }$. Этот знак вошел во всеобщее употребление лишь в начале XVIII в. В XVIII в. было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательного числа квадратный корень извлекать нельзя. Последний факт привел к большим проблемам в математике. Но об этом мы поговорим в гл. 6.

## Непростые истории с корнями уравнений

Начиная с XII в., после перевода «Алгебры» аль-Хорезми на латинский язык, начинается развитие алгебры в европейских странах. Сперва под сильным влиянием науки восточных народов. Но существенного сдвига не было вплоть до XVI в. Одной из самых актуальных и жгучих проблем того времени было алгебраическое решение («решение в радикалах») кубических уравнений, т. е. нахождение общей формулы, выражающей корни любого уравнения третьей степени в зависимости от коэффициентов при помощи конечного числа алгебраических операций – сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней. Такая формула была давно известна для уравнения второй степени, а поэтому было естественно искать ее и для уравнения третьей степени, тем более что ученые мира до того времени такой формулы найти не могли. В первой трети XVI в. итальянцы дель Ферро и Тарталья нашли способ решения (нахождения корней) кубических уравнений. Это, как мы увидим в дальнейшем, имело большое значение для развития математики. Само появление результатов работы упомянутых выше математиков носило поистине драматический характер. И тут нам придется несколько отвлечься и рассказать немного об истории математических турниров того времени. Начиная с XIII в. в средневековой Европе возобновились математические турниры с легкой руки императора «Священной Римской империи Германской нации» Фридриха II Гогенштауфена. Его суровый дед Фридрих I Барбаросса предавался жестоким рыцарским турнирам, но внук был воспитан в традициях южной Италии, где удивительным образом переплелись элементы христианской и арабской культуры. Фридрих II задумал в противовес варварству вновь ввести в обычай турниры интеллектуальные. Правда, выглядели они иначе, чем во времена Евклида. Если в Александрии ученики соревновались в знании за первенство в глазах Евклида, то теперь – за должность при дворе. На таком турнире проявился талант первого европейского математика мирового уровня Леонардо Пизанского, или Фибоначчи («filius Bonacci» дословно – «сын Боначчи»). Фибоначчи выстоял в поединке с придворным математиком и секретарем короля. Участникам сражения были предложены три сложные алгебраические задачи. Фибоначчи решил их все, а соперник – ни одной.

Схватка не на жизнь, а на смерть разгорелась между лучшими итальянскими математиками XVI столетия Никколо Тартальей и Джироламо Кардано, и хотя они разными путями добивались признания, но в истории их имена разделить уже невозможно. О Никколо Тарталье мы уже рассказывали. Его соперник – **Джероламо Кардано** (1501(?)–1576) – снискал себе славу лучшего врача Европы, авторитетного математика, известного литератора, плодовитого ученого, но питавшего неодолимую страсть к авантюрам и азартным играм. Его биография напоминает авантюрный роман, а творческая деятельность полностью определялась влиянием мистического опыта. Неосторожные высказывания о религии и составленный гороскоп Иисуса Христа были расценены инквизицией как святотатство, и Кардано чуть не угодил в тюрьму. Лишь заступничество влиятельных людей, которых он весьма успешно лечил, мировая слава ученого и немалый залог позволили выйти Кардано на свободу. «Яблоком раздора» между

Никколо Тартальей и Джироламо Кардано стал приоритет в открытии формулы корней кубического уравнения. Великие математики, возможно, никогда бы и не узнали о существовании друг друга, если бы не Сципион дель Ферро – известный профессор математики Болонского университета. Он первым проник в тайну кубического уравнения и перед смертью поделился ею со своим учеником Антонио Фиоре, но того больше интересовала дочь профессора, а вовсе не наука. Тем не менее, получив такой волшебный подарок, Фиоре решает закрепить за собой славу первого математика и вызывает на дуэль знаменитого математика-самоучку Никколо Тарталью. Это было в конце 1534 г., Фиоре был глубоко убежден, что его учителю пришло «скорее божественное, чем человеческое» открытие и оно никому больше не под силу. Тарталья знал, что его соперник владеет секретом, подаренным профессором, но отступать было некуда. Благодаря «счастливой судьбе» и титаническим усилиям, он за 10 дней до дуэли сумел найти решение, не поддававшееся людям в течение нескольких тысячелетий.

Дуэль состоялась 12 февраля 1535 г. Соперники через нотариуса предложили друг другу по 30 задач. За два часа Тарталья справился со своими задачами, а Фиоре не решил ни одной задачи своего противника. Это объяснялось тем, что Фиоре надеялся добить соперника кубическими уравнениями, но они уже и не представляли сложности для Тартальи. Самоучка же решил погонять профессорского ученика по всем разделам математики, и тот не смог с ними справится. Так вот университетское образование явно уступило кладбищенскому... Победа была полной. По условиям поединка проигравший оплачивал обед победителю и его 29 друзьям, а также платил по 5 сольди за каждую решенную задачу. Известие об открытии Тартальи быстро распространилось по всей Италии. И когда запахло мировой славой, на арену вышел Джироламо Кардано, который решил выведать секрет Тартальи. Многие пытались это сделать: кто просьбами, кто угрозами, но их азарт быстро иссяк. А у Кардано это стало навязчивой идеей, он не мог жить спокойно, не разгадав тайны. Проявив фантастическую изобретательность и дав клятву неразглашения, Кардано в 1539 г. все-таки узнает секрет. В стихотворной форме из 25 строчек Тарталья сообщил ему правило решения кубического уравнения. В 1542 г. в Болонье Кардано познакомился с рукописями покойного профессора дель Ферро и все понял. Через шесть лет в своем трактате «Великое искусство, или О правилах алгебры» Кардано нарушил клятву, изложив тайный алгоритм. И хотя в предисловии он упомянул имя Тартальи, войны все же избежать не удалось. В этом труде впервые было опубликовано алгебраическое решение уравнений третьей степени. В книге Кардано также содержится алгебраическое решение уравнений четвертой степени – важнейшее открытие, сделанное одним из его учеников, – Лудовико Феррари (1522–1565).

После выхода в свет злополучной книги, взбешенный *Тарталья* написал Кардано: *«Вы вероломно украли у меня самое лучшее мое украшение...»* Кардано не удостоил ответа того, у кого еще недавно клянчил идею. Но за честь Кардано вдруг вступился его ученик Лудовико Феррари. Он написал Тарталье резкое письмо, в котором вызвал его на публичный диспут по всем мыслимым наукам, от математики до астрологии. Обязательным условием поединка стало место его проведения – Милан, родной город Феррари. Чтобы подстегнуть соперника, *Феррари* наговорил ему гадостей: *«Вы поистине человек-дьявол, желающий быть изобретателем и имеющий голову гадюки, которая ничего не может понять. Я думаю, что прошлые вызовы разбили ваш спинной хребет так основательно, что вы теперь способны лишь слегка покрутить хвостом...»* В том же духе ответил и Тарталья. Надеясь на честные правила поединка, веря в свои силы и правоту, Тарталья едет в логово соперника. Но «игра на выезде» имела свои подводные рифы, которые не дано было преодолеть даже самому большому таланту.

Милан, 10 августа 1548 г., 6 часов вечера. В церкви Св. Марии посмотреть на математическую дуэль непримиримых соперников собралось много горожан, военных, знатных синьоров, университетских преподавателей и студентов. Лудовико Феррари – «человек с лицом ангела и сердцем дьявола» – явился с огромной толпой своих друзей. Никколо Тарталья сопровождал лишь родной брат. Что же до «главного виновника» – Кардано, то, узнав о диспуте, он уехал из города. Состязание проходило в неравных условиях: Тарталье не давали говорить, оскорбляли, а Феррари нарочно длинными речами тянул время к ночи. Ощущая настроения толпы и предчувствуя, что в неизвестном городе диспут среди ночи может завершиться не научными результатами, а кинжалом наемных убийц, Тарталья прекратил поединок и покинул Милан.

Его соперники сочли себя победителями.

В родном городе Тарталью стали считать неудачником – ему отказали в работе и не уплатили даже за прочитанные лекции. Он прожил в бедности до самой смерти. А вот Феррари так называемая победа принесла славу: ему предлагали читать лекции в лучших университетах, обучать сына императора. В Болонье он возглавил кафедру математики, но... пишут, что его якобы отравили. Предполагают, что его отравила родная сестра. Итак, Феррари умер в 43 года. Не повезло и Кардано. Его старший сын Джамбаттиста втайне женился на девушке сомнительной репутации и дурного характера, которая всюду заявляла, что вышла замуж по расчету. Однажды в пылу гнева она назвала имена настоящих отцов их детей. Молодой муж не мог перенести такого позора. У аптекаря он раздобыл яд и уговорил слугу подсыпать его в праздничный торт, пообещав за это денег и одежду. Торт был испечен, жена – отравлена. Но убийц быстро нашли, и Джамбаттиста был «казнен отсечением головы». Смерть сына потрясла Кардано, он был близок к невменяемости. Как безумный, целыми днями он носился на коне по полям, ночами играл в азартные игры, пытаясь заглушить душевные страдания физической болью и голодом. Не успев отойти от первого потрясения, Кардано узнает, что его второй сын стал бродягой и вором. Кардано пытался остановить сына; однажды во время ссоры он отрубил ему ухо (так поступил человек, написавший десятки книг о методах гуманного воспитания и лечения!). В ответ сын ограбил отца, и Кардано обратился к властям за помощью. Через неделю сын снова грозится поджечь дом и убить отца. Альдо арестовали, судили и приговорили к пожизненному заключению, но Кардано добился смягчения: сын был осужден на изгнание из родного города Болоньи. Кардано покончил жизнь самоубийством. В конце жизненного пути он написал автобиографическую книгу «О моей жизни», в которой есть такие строчки: *«Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо*. Видимо, Кардано все-таки мучила совесть*.

---

* При написании этого раздела, а также истории борьбы за приоритет между Ньютоном и Лейбницем использованы материалы неопубликованной статьи Рэнуалла Коллинза «Пираты и политики в математике».

Но история науки оказалась к Кардано более благосклонной. Его именем была названа формула, идею которой он выманил у математика-самоучки. Лишь время примирило соперников: формулу для корней кубического уравнения в XXI в. называют формулой трех ученых: Сципиона дель Ферро – Никколо Тартальи – Джироламо Кардано... В наше время тоже существуют различные математические состязания. Однако путь дуэлей в нашем веке трансформировался в олимпиады и математические бои у школьников и студентов, брейн-ринги и разные увеселительные состязания.

### Седьмое действие математики. История логарифмов

*Потому-то, словно пена,*
*Опадают наши рифмы*
*И величие степенно*
*Отступает в логарифмы.*

*Борис Слуцкий*

На протяжении XVI в. быстро возрастало количество приближенных вычислений, прежде всего в астрономии. Совершенствование инструментов, исследование планетных движений и другие работы потребовали колоссальных, иногда многолетних расчетов, в которых астрономам грозила реальная опасность утонуть. Трудности возникали и в других областях, например, в финансовом и страховом деле нужны были таблицы сложных процентов для различных значений процента. Главную трудность представляли умножение и деление многозначных чисел, особенно тригонометрических величин.

Открытие логарифмов опиралось на хорошо известные к концу XVI в. свойства прогрессий. О связи между членами геометрической прогрессии $q$, $q^2$, $q^3$, ..., $q^n$ и арифметической прогрессией их показателей 1, 2, 3, ... , $n$ говорил еще в «Псалмите» Архимед. Другой предпосылкой было распространение понятия степени на отрицательные и дробные показатели. Многие математики замечали, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в геометрической прогрессии соответствуют в арифметической прогрессии (в том же порядке) сложение, вычитание, умножение и деление. Настоящим триумфом стало изобретение логарифма как показателя степени. **Логарифмы изобретены независимо друг от друга Непером и Бюрги в начале XVI в.** Основные свойства логарифмов позволяют заменить умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня более простыми действиями сложения, вычитания, умножения и деления. Надо заметить, что определение логарифма, которое дали Непер и Бюрги, несколько отличается от современного.

Первый изобретатель логарифмов – шотландец **Джон Непер**, барон Мерчистон (1550–1617). Род Неперов принадлежал к числу тех воинственных шотландских кланов, «этой эгоистичной, свирепой и беспринципной стаи гиен» (Т. Карлейль), которые всю жизнь воевали: друг против друга, против своих или чужих королей, вечно сбиваясь в шайки и клики. Совершенно необъяснимо, как в этой среде грубых и невежественных баронов, привыкших использовать пять пальцев руки для крепкого кулака, а отнюдь не для счета, появился такой великий математик! Ни Джаннет, ни Арчибальду Неперам не было еще и шестнадцати, когда в конце 1550 г. родился их первенец. Нелюдимый и замкнутый, слабого здоровья мальчик до тринадцати лет воспитывался дома, а затем был зачислен в один из колледжей университета Св. Андрея, где в течение примерно двух лет изучал грамматику, логику, теологию, каноническое и гражданское право, а также этику, физику и математику. Университет он не закончил, но продолжил образование на континенте, побывав во Франции, Италии и Дании. Вернувшись в Шотландию, Джон в феврале 1572 г. женился на дочери богатого землевладельца Элизабет Стирлинг. Молодые поселились в Гартнесе, в двадцати милях от Глазго, где на берегу полноводного Эндрика для них был выстроен просторный дом с садом и оранжереей. В Гартнесе Непер прожил без малого 35 лет. Здесь у него родились сын и дочь; здесь в конце 1579 г. умерла Элиза-

бет. Спустя несколько лет Джон женился на ее троюродной сестре Агнесс (этот брак принес семье Неперов пятерых дочерей и пятерых сыновей!).

В Гартнесе Непер вел жизнь «сельского джентльмена» и все свободное от присмотра за обширными земельными угодьями время отдавал занятию наукой – подозрительному и предосудительному, с точки зрения окружающих, делу. *«Он имел привычку часто разгуливать в ночном халате и колпаке. Это, наряду с некоторыми другими вещами, казавшимися простонародью довольно странными, утвердило за ним репутацию колдуна. Существовало мнение, что у него договор с дьяволом и что под предлогом занятий наукой он проводил время в изучении черной магии и беседах со Старым Ником»* (так в Шотландии называют черта). Спустя какое-то время Непер стал много времени посвящать богословию, он активно участвовал в теософских спорах, где, как настоящий шотландец, отличался истовостью. В 1593 г. он опубликовал «Простое изъяснение всего Откровения Иоанна Богослова» – первое толкование Священного Писания на шотландском языке, но притом Непер был отнюдь не чужд модным тогда наукам – астрологии и алхимии. Наряду с этими увлечениями, он также был и инженером: придумал целый ряд машин для обработки земли и водяных насосов для орошения. А еще он сделал несколько «секретных» изобретений: зеркало для поджигания вражеских кораблей, устройство для плавания под водой («акваланг»), повозку, не пробиваемую пулями («танк»), и нечто, напоминающее неуправляемый ракетный снаряд.

В предисловии к своему сочинению, посвященному логарифмическим таблицам, Непер писал: *«Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отделаться от скуки и трудности вычислений, докучность которых обыкновенно отпугивает многих от изучения математики»*. В 1614 г. он опубликовал свое «Описание удивительной таблицы логарифмов», содержавшее определение логарифмов (и их свойства), которые теперь мы называем Неперовыми логарифмами. Теоретические выводы и объяснение способа вычисления таблицы он изложил в другом труде, подготовленном, вероятно, до «Описания», но изданном посмертно, – в «Построении удивительной таблицы логарифмов» (1619), переизданном в 1620 г. его сыном Робертом Непером. Вот выдержка из этого издания: *«Таблица логарифмов – небольшая таблица, с помощью которой можно узнать посредством весьма легких вычислений все геометрические размеры и движения. Она по справедливости названа небольшой, ибо по объему превосходит таблицы синусов, весьма легкой, потому что с ее помощью избегают всех сложных умножений, делений и извлечений корня, и все вообще фигуры и движения измеряются посредством выполнения более легких сложения, вычитания и деления на два. Она составлена из чисел, следующих в непрерывной пропорции»*.

В 1620 г. швейцарец Иост Бюрги (1552–1632) – высококвалифицированный механик и часовых дел мастер – опубликовал книгу «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий, вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всяческих вычислениях». Как писал сам Бюрги, он исходил из соображений о соответствии между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифметической. Задача состояла в выборе прогрессии со знаменателем, достаточно близким к единице, с тем чтобы ее члены следовали друг за другом с интервалами, достаточно малыми для практических вычислений. Однако таблицы Бюрги не получили значительного распространения. Они не могли конкурировать с таблицами Непера, более удобными и к тому времени уже широко известными.

Термин «логарифм» (logarithmus) принадлежит Неперу. Он возник из сочетания греческих слов: logos – «отношение» и arithmos – «число», т. е. означало *«число отношений»*. Первоначально Непер пользовался другим термином: numeri artificiales – «искусственные числа», в противоположность numeri naturalts – «естественные числа». Однако ни у Непера, ни у Бюрги не было, строго говоря, основания логарифмов, поскольку логарифм единицы отличается от нуля. Даже значительно позднее, когда уже перешли к десятичным и натуральным логарифмам, еще не было сформулировано определение логарифма как показателя степени данного основания. В руководствах оно появляется впервые, вероятно, у Уильяма Гардинера (1742). Впрочем, сам Гардинер использовал при этом бумаги преподавателя математики В. Джонса. Таблицы Непера, приспособленные к тригонометрическим вычислениям, были неудобны для действий с подобными числами. В 1615 г. Непер познакомился с Генри Бригсом (1561–1631) – профессором математики Грешем-колледжа, который тоже задумывался над тем, как усовершенствовать таблицы логарифмов. В ходе беседы с Бригсом Непер предложил составить таблицы логарифмов, приняв за логарифм единицы нуль, а за логарифм десяти – просто единицу, и таким образом устранить имевшиеся недостатки. Воплотить свои идеи в жизнь Непер не смог из-за пошатнувшегося здоровья, но он указал идею двух вычислительных приемов, развитых далее Бригсом.

Бригс опубликовал первые результаты своих кропотливых вычислений – *«Первую тысячу логарифмов»* – в 1617 г. – в год смерти Непера. В этих таблицах были даны восьмизначные десятичные логарифмы чисел от 1 до 1000. Большинство десятичных логарифмов простых чисел Бригс нашел с помощью извлечения квадратных корней. Позднее (в 1624 г.), уже после того как он стал профессором в Оксфорде, Бригс выпустил *«Логарифмическую арифметику»*. В книге содержались четырнадцатизначные логарифмы чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Оставшийся пробел был восполнен голландским книготорговцем и любителем математики Андрианом Флакком (1600–1667). Несколько ранее семизначные десятичные таблицы логарифмов синусов и тангенсов вычислил коллега Бригса по Грешем-колледжу, воспитанник Оксфордского университета – Эдмунд Гунтер (1581–1626). Свои таблицы Гунтер опубликовал в «Своде треугольников» в 1620 г. Логарифмы с основанием 10, в противоположность натуральным (Неперовым), стали называть Бригговыми логарифмами.

Сам термин «натуральный логарифм» в 1659 г. ввел Пьетро Менголи – итальянский математик, преподававший в Болонском университете. Несколько позднее, в 1668 г., этот же термин ввел и Герхард Меркатор (латинизированное имя Герарда Кремера; и латинская и германская фамилии означают «купец»), который больше известен, как автор картографической проекции, применяемой и в настоящее время для составления морских навигационных и аэронавигационных карт.

Знак **Log** был введен в 1624 г. Иоганном Кеплером (1571–1630), знаменитым немецким математиком, астрономом и оптиком, открывшим законы движения планет.

Опубликованное открытие Непера в первые же годы приобрело исключительно широкую известность. С **логарифмами** многие расчеты пошли в десятки раз скорее и легче. Недаром великий французский математик Пьер Симон Лаплас говорил, что «изобретение **логарифмов удлинило жизнь».** Составлением логарифмических таблиц и их совершенствованием занялись очень многие математики. Так, Кеплер в Марбурге в 1624–1625 гг. применил логарифмы к построению новых таблиц движений планет. В 1619 г. лондонский учитель математики Джон Спейделл издал таблицы натуральных логарифмов от 1 до 1000.

Следует отметить огромную работу, проделанную голландским математиком Андрианом Влакком. В 1628 г. он издал десятизначные таблицы логарифмов от 1 до 100000. Таблицы Влакка легли в основу большинства последующих таблиц, причем их авторы внесли много изменений в структуру логарифмических таблиц и поправок. У самого Влакка было 173 ошибки; у австрийского математика, морского офицера и артиллериста Георга Вега (1756–1802) в 1783 г. – уже пять. Первые безошибочные таблицы выпустил в 1857 г. немецкий математик К. Бремикер. В России таблицы логарифмов впервые были изданы в 1703 г. Л. Ф. Магницким.

За основание Бригговых логарифмов, как уже отмечалось, было взято число 10. В случае же Неперовых логарифмов сама констана (основание логарифмов) явно не определена, но присутствует в приложении к переводу на английский язык вышеупомянутой работы Непера, опубликованному в 1618 г. Предполагается, что автором таблицы был упоминавшийся ранее английский математик Уильям Оутред. Первое известное использование этой константы, где она обозначалась буквой $b$, встречается в письмах Готфрида Лейбница к Кристиану Гюйгенсу в 1690 и 1691 гг. Букву $e$ начал использовать Леонард Эйлер в 1727 г., а первой публикацией с использованием этой буквы была его работа «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» (1736). Соответственно, $e$ иногда называют *числом Эйлера*. Хотя впоследствии некоторые ученые использовали букву $c$, буква $e$ применялась чаще и в наши дни является стандартным обозначением. В 1874 г. французский математик Ш. Эрмит доказал, что основание натуральных логарифмов $e$ трансцендентно (как число $\pi$). Величина $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,49$. Поэтому число $e$ иногда называют «математическим аккомпанементом числа $\pi$». Число $e$ можно запомнить по следующему мнемоническому правилу: два и семь, далее два раза год рождения Льва Толстого (1828), а затем углы равнобедренного прямоугольного треугольника (*45*, *90* и *45* градусов). В другом варианте правила $e$ связывается с президентом США Эндрю Джексоном: 2 – столько раз избирался, 7 – он был седьмым президентом США, 1828 – год его избрания, повторяется дважды, поскольку Джексон дважды избирался; затем – опять-таки равнобедренный прямоугольный треугольник. А вот еще один оригинальный способ запоминания: предлагается запомнить число $e$ с точностью до трех знаков после запятой через «число дьявола»: нужно разделить 666 на число, составленное из цифр 6 – 4, 6 – 2, 6 – 1 (три шестерки, из которых в обратном порядке удаляются три первые степени двойки):

$$\frac{666}{245} \approx 2{,}718.$$

Совсем грубое (с точностью 0,01) приближение дается выражением $5 \cdot \pi - 13$. И наконец, число $e$ можно запомнить с помощью довольно глупого стихотворения:

*Мы порхали и блистали,*
*Но застряли в перевале –*
*Не признали наши крали авторалли.*

(Цифры равны числу букв в каждом отдельном слове.)

Однако, чем глупее фраза, тем легче она запоминается, верно?

В большинстве случаев, конечно, достаточно запомнить лишь приближенное значение $e = 2{,}718$. Число $e$ лежит в основании так называемой показательной функции, которая нашла широкое применение в самых различных областях науки и техники. Многообразные применения показательной, или, как еще ее называют, экспоненциальной, функции вдохновили английского поэта Элмера Брила на написание «Оды экспоненте». А теперь несколько курьезов, связанных с числом *e*.*

В IPO корпорации Google в 2004 г. было объявлено о намерении компании увеличить свою прибыль на 2 718 281 828 долларов, т. е. *e* миллиардов долларов с точностью до целого числа. 9 июля 2004 г. на шоссе в Силиконовой долине появился рекламный щит, на котором был только следующий текст: ***«{first 10-digit prime found in consecutive digit of e}.com»*** (что в переводе означает: ***«первое 10-значное простое число, найденное в последовательности цифр числа е»***). По смыслу, это был зашифрованный Интернет-адрес. Такое число достаточно просто найти, составив программу, – получится 7427466391. Зашедшим на сайт *«7427466391.com»* предлагалась более сложная задача, также связанная с числом *e*, решение которой надо было ввести в качестве пароля на сайте linux. com. Те, кому удавалось решить головоломку, попадали в конце концов на страницу www.google.com/lab-jobs, где сообщалось о вакансиях компании и предлагалось прислать резюме.

---

* Математическая константа – это такая величина, значение которой не меняется; в этом она противоположна переменной.

Константу, послужившую основанием натуральных логарифмов, впервые вывел швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705) при попытке вычислить значение следующего предела:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. В настоящее время этот предел обозначается буквой *e*.

*Глава 5*
# СИНУС И ДРУГИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Математиков в течение многих столетий интересовал вопрос решения треугольников (т. е. определение всех параметров сторон и углов треугольника, если заданы только часть из них). Это нужно было таким наукам, как астрономия, архитектура и геодезия. Из школьного курса математики мы знаем, что для этого используются тригонометрические функции. Тригонометрическими функциями пользовались еще в Древней Греции, в астрономии и геометрии. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые по существу и есть тригонометрические функции, встречаются уже в III в. до н. э. в работах математиков Древней Греции – Евклида, Аполония Пергского (одного из основателей математических наук в III столетии до н. э.) и др.

При разработке теорий Луны и Солнца древнегреческий астроном, географ и математик Гиппарх Никейский (ок. 190 до н. э. – ок. 120 до н. э.) использовал античный вариант тригонометрии. Главной заслугой Гиппарха считается то, что он привнес в греческие геометрические модели движения небесных тел предсказательную точность астрономии Древнего Вавилона. Возможно, он первым составил таблицу хорд, аналог современных таблиц тригонометрических функций.

Впоследствие развитие тригонометрии во многом связано с трудами арабских математиков. В частности, очень важен труд Абу-аль-Вафы, который ввел такие тригонометрические функции, как тангенс и котангенс, дал для них соответствующие формулы и построил таблицы; нашел с высокой точностью значение синуса одного градуса. Абу-аль-Вафа также является автором комментариев к математическим трудам аль-Хорезми, Диофанта и Гиппарха. Этот ученый приложил значительные усилия по распространению своих открытий среди мусульман. Открытие Абу-аль-Вафы, однако, прошло незамеченным и было оценено историками лишь многие века спустя. Широкую известность арабскому астроному принесло его большое сочинение по астрономии, которое принимали иногда за перевод «Альмагеста». Его имя присвоено кратеру на обратной стороне Луны. В Европе заслугу в решении задачи вычисления суммы углов приписывают Копернику (1478–1543). Он решил эту задачу довольно сложным методом, не зная о методе решения исламского математика Абу-аль-Вафы. Как самостоятельную научную дисциплину тригонометрию развивал азербайджанский ученый XIII столетия Насретдин ат-Туси (1201–1274).

В первой половине XV в. в обсерватории Улугбека, возле Самарканда, астроном и математик аль-Каши произвел уникальные расчеты, которые были нужны для составления таблиц синусов с шагом 1′. Эти таблицы сыграли важную роль в астрономии. По мере оформления представлений о тригонометрических функциях они превращались в самостоятельные объекты исследований, т. е. собственно в функции, объекты, обладающие самостоятельным значением и своими особыми свойствами.

**Одной из первых тригонометрических функций был известный нам со школьной скамьи синус.** Слово «синус» появилось в математике далеко не сразу. Этот термин имеет свою длительную (начиная с I–II вв.) и интересную историю. Волнообразная кривая линия, графически изображающая изменение синуса в зависимоти от изменения угла, у индийских математиков первоначально называлась «арха-джива» (полутетива), затем слово «арха» было отброшено и линию синуса стали называть просто «джива». Арабские переводчики не перевели слово «джива» (тетива по-арабски – «ватар»), обозначающим тетиву и хорду, а транскрибировали арабскими буквами и стали называть линию синуса «джиба». Так как в арабском языке краткие гласные не обозначаются, а долгое «и» в слове «джиба» обозначается так же, как полугласная «й», арабы стали произносить название линии синуса «джайб», что буквально в переводе означает «впадина» (пазуха). При переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики перевели слово «джайб» латинским словом «sinus», имеющим то же значение.

Австрийский математик и астроном Георг фон Пойербах (1423–1461) был одним из первых европейских ученых, который применил понятие синуса; он также составил таблицы значений синусов через каждые 10'. Эта работа была завершена его учеником Региомонтаном.

Региомонтан Кенигсбергский (1436–1476; настоящее имя – *Иоганн Мюллер*) – немецкий астроном и математик, живший на рубеже Средних веков и Нового времени, родился в городе Кенигсберге в Баварии. Уже в одиннадцать лет он стал студентом Лейпцигского университета, где и получил свой псевдоним: по-латыни Региомонтан означает Кенигсберг – родной город известного ученого. После Лейпцигского университета Мюллер поступил в Венский университет, в котором с 1458 г. стал сам читать лекции. В 1462–1464 гг. им было написано сочинение о треугольниках *«Пять книг о различного рода треугольниках»*, в котором многие задачи на построение треугольников были решены алгебраически, а не геометрически. В Европе это был первый труд, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельный раздел математики. Умер Региомонтан в Риме (1476).

Большой вклад в дальнейшее развитие тригонометрии внес выдающийся французский математик, астроном и физик Жиль Роберваль (1602–1675). Его настоящее имя было Жиль Персонье (Giles Personier или Personne); как и Региомонтан, Роберваль получил свой псевдоним по названию своей родной деревни. В 1631 г. Роберваль был назначен на кафедру философии в коллеже Жерве в Париже. В 1634 г. он перешел на кафедру математики в Коллеж-Руайяль. К занимающим высокую должность на кафедре этого учебного заведения предъявлялось особое требование: ставить математические задачи и решать их. Так продолжается до тех пор, пока не найдется человек, который способен лучше справиться с поставленной задачей, и тогда победитель занимает место проигравшего. Несмотя на это условие, Роберваль оставался на своей должности до самой смерти.

Роберваль общался с **Паскалем**, а также был близким другом его отца – Этьена Паскаля. В то время Паскаль работал над своим новым изобретением – вычислительной машиной, и Роберваль принимал в этом активное участие. Одну из первых удачных моделей своей машины Паскаль преподнес канцлеру Франции Пьеру Сегье. Покровительство Сегье помогло ученому получить королевскую привилегию, которая устанавливала его приоритет в изобретении и закрепляла за ним право производить и продавать созданные Паскалем машины – это было 22 мая 1649 г. С 1649 по 1652 г. Паскаль изготовил некоторое количество машин, часть из которых он продал (до наших дней сохранилось всего 8 машин). А вот роль маклера и демонстратора машин в Париже выполнял математик Роберваль.

**Роберваль был первым, кто построил синусоиду.** Произошло это в 1634 г.

А теперь перейдем к другим тригонометрическим функциям.

Дал строгое определение понятия таких тригонометрических функций, как тангенс, котангенс, а также секанс и косеканс, исходя из рассмотрения тригонометрического круга, арабский математик Абу-аль-Вафа. Современные названия этих функций были даны в период с XV по XVII в. европейскими учеными. **Так, термин «тангенс», с латинского «касательная», был введен в XV в. основателем тригонометрии в Европе Региомонтаном.** Определения тригонометрических функций, в которых они связываются со сторонами прямоугольного треугольника, а не с линиями круга, дал Ретик в 1551 г.

Ретик (настоящее имя которого Георг Иоахим фон Лаухен) (1514–1576) – немецкий астроном и математик, ученик и последователь Николая Коперника, в 1537–1542 гг. профессор Виттенбергского университета. Три года (1539–1541) Ретик жил во Фромборке, где изучал рукопись трактата Коперника «Об обращении небесных сфер». Он дал краткое изложение учения Коперника (*«О книгах... Николая Торуньского...»*, 1541) и настоял на том, чтобы Коперник опубликовал свой трактат. Всю свою жизнь Ретик был занят вычислением таблиц натуральных тригонометрических величин (теория логарифмов еще не существовала). Тригонометрия была еще совершенно не разработана, а потому вычисления Ретика составляют гигантский труд, сравнить который можно разве что только с вычислениями первых логарифмических таблиц. Несмотря на помощь нескольких вычислителей, которых он мог нанять благодаря щедрости правительства, Ретик не успел составить эти таблицы полностью. Тем не менее посмертно таблицы были изданы его учеником и ближайшим помощником Отто. В них даны синусы, косинусы и тангенсы от 10 до 10 секунд с десятью цифрами. Манускрипт Ретика, содержавший синусы с пятнадцатью цифрами и послуживший ему основанием для вычислений, считался утраченным, но был найден, исправлен, расширен и издан в 1613 г. немецким математиком и богословом Бартоломео Питиском (1561–1613). В заглавии его книги (1595) впервые встречается слово «тригонометрия».

**В XVI в. Томас Финк (1561–1658) вводит термин «секанс».** В это же время появляется *триангуляция* – метод косвенного измерения больших расстояний на поверхности земли путем построения так называемой *триангуляционной сети*. Триангуляционная сеть, в свою очередь, – это сеть треугольников, разбивающая искомое расстояние на ряд отрезков, постоянно вычисляемых на основе непосредственного измерения только одного отрезка, базиса и измерения углов, что можно сделать со значительно большей степенью точности, чем измерение каждого отрезка в отдельности. Триангуляцию впервые применил голландский ученый XVI в. В. Спеллиус.

Помощник изобретателя десятичных логарифмов Бригса ученый Гюнтер ввел термины **«косинус»** и **«котангенс».** Приставка «ко» обозначает дополнение. Термин «косинус» – это сокращение от латинского выражения *complementi sinus*, т. е. дословно «синус дополнения» (или иначе «синус дополнительной дуги»). Современные обозначения синуса и косинуса символами «sin $x$» и «cos $x$» впервые были введены в 1739 г. И. Бернулли. Новыми обозначениями Бернулли пользуется в письме к Леонарду Эйлеру, жившему тогда в Петебурге.

Иоганн Бернулли, младший брат Якоба Бернулли и отец Даниила Бернулли, – один из величайших математиков своего времени. После смерти брата Иоганн перешел на кафедру, в которой работал Якоб (в Базеле), и занимал ее до конца жизни. Вместе с братом Якобом он разрабатывал анализ бесконечно малых величин. Иоганну Бернулли принадлежит первое печатное систематическое изложение интегрального исчисления; он развил теорию показательной функции, вывел правило раскрытия неопределенности типа 0/0 (носящее имя Лопиталя), разработал методы интегрирования рациональных дробей и т. п. Полное собрание его ученых трудов появилось в Женеве (1742). К его портрету Вольтер написал четверостишие:

*Его ум видел истину,*
*Его сердце познало справедливость.*
*Он – гордость Швейцарии*
*И всего человечества!*

Л. Эйлер пришел к выводу, что обозначения, предложенные Бернулли, весьма удобны и стал употреблять их в своих математических работах. Кроме того, Эйлер вводит следующие сокращенные обозначения тригонометрических функций угла $x$: $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\, x$. Эйлер первым стал рассматривать тригонометрические линии как функции углов и дал правило для определения знаков функций в различных четвертях круга. Эйлер установил современную точку зрения на тригонометрические функции как на *функции числового аргумента*. С 1770 г. появился новый термин – *тригонометрические функции*. Его ввел Георг Симон Клюгель (1739–1812), воспитанник знаменитого Гёттингенского университета, в своей работе «Аналитическая тригонометрия» (1770). Он же ввел термин *средняя геометрическая* (1808). В это же время (1772) Ж. Лагранж вводит первую из шести обратных тригонометрических функций – *арксинус*. Каждая из этих функций выражает величину дуги (или угла), соответствующей данному значению $x$ тригонометрической функции, название которой получается отбрасыванием приставки «arkc». Например, arcsin $x$ обозначает дугу, синус которой равен $x$. Современные обозначения arcsin и arctg появляются в том же году в трудах австрийского физика и математика, профессора Венского университета Карла Шерфера. Справедливости ради надо отметить, что первым, кто использовал специальные символы для обозначения обратных тригонометричечких функций, был Бернулли (1736). В XVIII в. тригонометрические функции были включены в систему математического анализа в качестве одного из классов аналитических функций. До середины XIX в. большинство математиков, в том числе и Гаусс, квадрат синуса угла обозначали как $\sin \alpha^2$. Французский математик Камбли издал ряд книг, где пользовался обозначением $\sin^2 \alpha$, которое прочно вошло в математическую литературу. Таким же образом в дальнейшем стали записывать степени и остальных тригонометрических функций.

*Глава 6*

# ЕЩЕ БОЛЕЕ СТРАННЫЕ, ЧЕМ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ, – МНИМЫЕ ЧИСЛА

*Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетания бытия с небытием.*

*Г. Лейбниц*

Как мы уже знаем, издревле все числа считались *действительными*. Это связано с тем, что в первую очередь людей, конечно же, интересовали натуральные числа и арифметические операции над ними. В VIII в. было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения: положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя. И до этого открытия при решении квадратного уравнения $x^2 + q = px$, если приходилось сталкиваться со случаем, когда требовалось извлечь квадратный корень из $(p/2)^2 - q$, где величина $(p/2)^2$ была меньше, чем $q$, заключали, что уравнение не имеет решений. О введении новых (комплексных) чисел в то время не могло быть и мысли; даже отрицательные числа тогда считались *ложными*. В XVI в., в связи с изучением кубических уравнений, ученым понадобилось извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Итальянский алгебраист Джероламо Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения с числами отрицательными, находящимися под квадратным корнем. Кардано называл такие величины *«чисто отрицательными»* и даже *«софистически отрицательными»*, считал их бесполезными и старался не употреблять. Долгое время эти числа считали невозможными, несуществующими, воображаемыми. Лейбниц называл эти числа *«уродом из мира идей, сущностью, находящейся между бытием* *и небытием»*. И действительно: с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни само изменение. В 1572 г. вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли «Алгебра», в которой были установлены первые правила арифметических операций над подобными числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. В своих книгах Бомбелли вводит последовательную теорию мнимых и комплексных чисел. «Алгебру» Бомбелли читали многие: Лейбниц изучал по ней кубические уравнения, Эйлер цитирует Бомбелли в своей «Алгебре», в главе об уравнениях четвертой степени. Заинтересовался мнимыми числами и Валлис.

До того времени математики думали, что числа даны Богом раз и навсегда. Никто бы не стал обдумывать изобретение нового числа, до тех пор пока итальянские алгебраисты Джероламо Кардано и Рафаэль Бомбелли не решили извлечь квадратный корень из $-1$. Потребовалось около 400 лет, чтобы разобраться, что означала эта штука; 300 лет из них ушло на то, чтобы убедить математиков в том, что она слишком полезна, для того чтобы ее просто игнорировать. Со временем комплексные числа утратили свою сверхъестественность, хотя полное их признание произошло только в XIX столетии. Термин *«мнимые числа»* ввел в 1637 г. французский математик и философ Рене Декарт, а в 1777 г. Леонард **Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения мнимого числа (мнимой единицы).** Этот символ ($i$) вошел во всеобщее употребление благодаря Карлу-Фридриху Гауссу.

Таким образом, около 1800 г. изобретение Кардано и Бомбелли стало новым типом числа – *числа $i$*, квадрат которого равен $-1$. Благодаря этому числу были устранены недостатки в знаменитой формуле Виета. В течение XVII в. продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел и возможности дать им геометрическое обоснование. Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. В конце XVIII в. французский математик Жерар Луи Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины.

Термин «комплексные числа» был введен Гауссом в 1831 г. Слово «комплекс» произошло от латинского *complexus*, что означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений, образующих единое целое. В конце XVIII – начале XIX в. было дано геометрическое истолкование комплексных чисел. Для этого использовалась система координат, введенная ранее Декартом. Термин «координата» (от латинских слов *co* – с, вместе и *ordinatus* – упорядоченный) появился независимо в географии, астрономии, математике в различных формах. Древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э) условно разделил поверхность Земли параллелями и меридианами; таким образом возникли хорошо всем известные географические координаты – широта и долгота. В XIV в. французский ученый Оресле по аналогии с географическими координатами создал координатную плоскость. Он поместил на плоскость прямоугольную сетку и назвал широтой и долготой то, что сейчас мы называем абциссой и ординатой. Эти термины были введены в употребление Лейбницем в XVII в.: *абсцисса* – в 1665 г., *ордината* – в 1684 г, *координаты* – в 1692 г. Основная роль в создании метода координат принадлежит французскому ученому Рене Декарту. Трудно переоценить значение декартовой системы координат для дальнейшего развития математики и ее приложений, хотя координаты у Декарта были только положительными числами, а современные обозначения осей $x, y, z$ не были приняты сразу. Однако после систематического употребления этих обозначений французским геометром и художником Филиппом де Лагиром ($x, y, v$ – в 1679 г.), Пароком ($x, y, z$ – 1705 г.), Эйлером ($t, x, y$ – 1728 г.) и Бернулли ($x, y, z$ – в 1715 г.) декартова система координат стала одним из важнейших понятий в геометрии. Кстати, этой замечательной системой математики стали пользоваться лишь начиная с XVII в., хотя в музыке подобная система появилась на семь веков раньше (ее разработал Гвидо Аргентинский еще в XI в.). А ведь музыка в Средние века считалась одной из самых важных наук, наравне с математикой, алхимией, астрономией и т. д. Загляните на досуге в нотную тетрадь – и вы увидите не что иное, как самый настоящий график музыки: по вертикальной оси определяется высота звука, а по горизонтальной – момент его появления, т. е. время. Таким образом, два внепространственных параметра (частота колебаний и последовательность ее изменений) получили прекрасное отображение на плоскости в прямоугольной системе координат. Комплексные числа оставались для математиков лишь предметом отвлеченных манипуляций вплоть до XIX в., пока землемер Каспер Вессель (1745–1818) из Дании впервые не дал геометрическое представление о комплексных числах. Естественно, что кадровая наука в течение последующих ста лет с трудом, но убедила себя в правоте землемера. Затем швейцарский математик Жан Арган дал геометрическую интерпретацию комплексного числа на плоскости (1806) и ввел термин *модуль комплексного числа* (1814–1815). Большая роль в интерпетации комплексных чисел принадлежит немецкому математику Гауссу.

**Карл Фридрих Гаусс** родился 30 апреля 1777 г. Едва ли не трех лет от роду он уже умел считать и выполнять элементарные вычисления. Однажды в расчетах своего отца, который был водопроводным мастером, трехлетний Карл заметил ошибку в вычислениях. Расчет был проверен, и число, указанное мальчиком оказалось правильным. В 1784 г. Карл пошел в школу. В своем родном городке Брауншвейге мальчик вскоре превратился в местную знаменитость и благодаря нескольким дворянам-меценатам смог посещать школу, вполне успешно справляясь с разнообразными сложными заданиями.

Учитель очень заинтересовался маленьким Гауссом, и в 1786 г. он получил из Гамбурга специальный арифметический текст. В один прекрасный день учитель математики попросил Карла не утруждать себя посещением его уроков, потому что не мог научить мальчика ничему, чего бы тот еще не знал.

Когда Гауссу было четырнадцать лет, его пригласили ко двору великого князя Брунсвика; местная аристократия приходила в восторг от поразительной памяти юного математика и удивительной скорости нахождения ответа при сложнейших вычислениях.

Карл покинул родительский дом в 1788 г., когда поступил в школу следующей ступени. Гаусс не терял в новой школе времени даром: он хорошо выучил латынь, необходимую для дальнейшей учебы и карьеры. В 1791 г. Гаусс был представлен государю. Видимо, юноша произвел большое впечатление на герцога: Гауссу пожаловали стипендию – 10 талеров в год. В 1792–1795 гг. Гаусс был учеником новой гимназии – Коллегии Карла. Это была школа избранных, в которую Гаусс был принят благодаря своим успехам в учебе. Первый колоссальный успех пришел к Гауссу, когда ему не было еще и девятнадцати лет: он доказал, что можно построить правильный 17-угольник циркулем и линейкой. В 1795 г. Гаусс поступил в Гёттингенский университет. По не ясным причинам он покинул университет осенью 1798 г. и вернулся в родной город Брауншвейг. Герцог согласился продолжать выплачивать ему стипендию размером уже в 158 талеров в год. 16 июня 1799 г. Гаусс получил степень доктора философии. Личная жизнь Гаусса была непростой. Первая его жена, дочь дубельщика, скончалась от послеродовых осложнений, через месяц умер и новорожденный сын. Брак со второй женой Фредерикой, дочерью профессора права, был омрачен долгой болезнью жены и серьезными конфликтами с детьми. В 1830 г. его сын Евгений отплыл в Филадельфию. В 1831 г. умерла Фредерика. В 1832 г. другой его сын Вильгельм эмигрировал в Америку. Сам Гаусс скончался 23 февраля 1855 г.; его имя занесено на карту Луны.

Карл Гаусс первый предложил изображать комплексное число $z = a + ib$ точкой $M(a, b)$ на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой $M$, а в виде вектора $\overrightarrow{OM}$, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами. Вектор можно задавать не только его координатами $a$ и $b$, но так же длиной $r$ и углом $\varphi$, который он образует с положительным направлением оси абсцисс: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, где $z$ – так называемая тригонометрическая форма комплексного числа. Число $r$ называют модулем комплексного числа $z$ и обозначают $|z|$. Число $\varphi$ называют аргументом $z$ и обозначают $\arg z$. Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения.

Важное соотношение для комплексных чисел получил английский математик А. Муавр. Он вывел правила возведения в степень и извлечения корня $n$-й степени из комплексных чисел, которые широко применяются в тригонометрии (формулы Муавра). Английский математик Абрахам Муавр, член Лондонского королевского общества (1697), родился в городе Витри-ле-Франсуа, во Франции. Учился у французского математика Жака Озанама (1640–1717). Вскоре после отмены Нантского эдикта (1685) бежал в Англию, где прожил до конца жизни. Один из ближайших друзей Исаака Ньютона, Муавр часто выполнял его поручения и выступал от его имени, в частности во время спора о приоритете между Ньютоном и Лейбницем по поводу исчисления бесконечно малых (см. гл. 8).

В 1718 г. Муавр издал книгу «Теория случайностей», где предсказал день своей смерти. Он прожил долгую жизнь и под конец ее заметил, что нуждается во все большей продолжительности сна. В конце концов, каждый день он стал просыпаться на 15 минут позже, чем в предыдущий. Произведя несложный расчет, он назвал дату своей смерти. И действительно, если верить свидетелям, 27 ноября 1754 г. он проспал полные сутки без четверти часа и почти тут же снова погрузился в сон, после которого уже не проснулся. Мы живем в интересном мире, где, как отметил американский физик Юджин Вигнер, математика «непостижимо эффективна». Комплексные числа могут показаться странными, но они оказываются волшебным средством для понимания физики. Проблемы тепла, света, звука, колебания, упругости, гравитации, магнетизма, электричества и течения жидкости – все отступают перед этим комплексным оружием в двух измерениях.

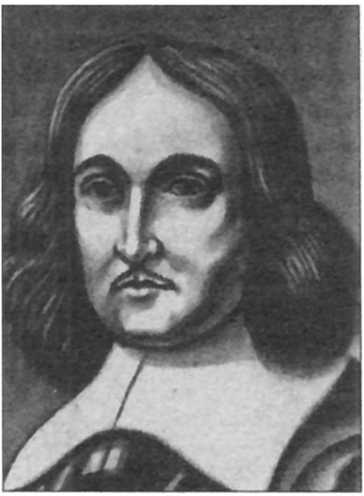
*Глава 7*
# СЛОВО О ФУНКЦИИ

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Как и остальные понятия математики, понятие функции сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития.

Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур.

Вавилонские ученые 4,5 тысячи лет назад вывели формулу для площади ($S$) круга с известным радиусом ($r$) : $S = 3r^2$, тем самым установив, пусть и не сознательно, что площадь круга является функцией от его радиуса. Таблицы квадратов и кубов чисел, также применявшиеся вавилонянами, представляют собой способ задания функции.

Другим примером могут служить тригонометрические таблицы, составление которых началось задолго до начала нашей эры. Однако явное и вполне сознательное применение понятия функции и систематическое изучение функциональной зависимости берут свое начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных. В «Геометрии» Декарта и работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило, по существу, интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых в зависимости от абсцисс ($x$); путь и скорость в зависимости от времени ($t$) и т. п.



Подробнее о деятельности Ньютона и Лейбница мы поговорим в следующем разделе, а пока расскажем немного о замечательном математике XVII в. **Пьере Ферма** (1601–1665), тем более что с его именем связана теорема, о которой слышали даже весьма далекие от математики люди. В начале XVII в. математика еще только оживала после мрачного Средневековья, и занятия этой наукой в глазах общественности ценились не очень высоко. Соответственно, отношение к математикам было лишено должного уважения, и многим математикам приходилось своими силами добывать средства, для того чтобы заниматься любимой наукой. Например, Галилей не смог изучать математику в Пизанском университете и был вынужден искать себе частного преподавателя. Единственное учебное заведение в Европе, где серьезно занимались математикой, был Оксфордский университет, учредивший в 1619 г. Савильянскую кафедру геометрии. По правде сказать, математики XVII в. в большинстве своем были любителями, но Ферма был особенным. Живя вдали от Парижа, он был изолирован даже от того небольшого математического сообщества которое тогда существовало (а в него входили такие люди, как Паскаль, Роберваль и др.). По профессии Ферма был юристом, с 1631 г. он становится советником парламента в Тулузе. Знаменитая теорема, так называемая Великая (или Последняя) теорема, носящая его имя, была сформулирована им в 1637 г. на полях книги Диофанта «Арифметика» с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его приводить на полях книги. Вероятнее всего, его доказательство не было верным, так как позднее он опубликовал доказательство только для частного случая. В 1994 г. английский математик Эндрю Уайлс (род. в 1953) нашел доказательство Великой теоремы. Оно содержит 129 страниц и опубликовано в журнале «Annals of Mathematics» в 1995 г. Проверка доказательства Уайлса завершена к 1996 г. Уайлс стал известен настолько, что его работа над Великой теоремой Ферма нашла отражение даже в мюзикле «Великое танго Ферма» Лесснера и Розенблума.

Четкого представления понятия функции в XVII в. еще не было, путь к первому такому определению проложил Декарт,

который систематически рассматривал в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения, т. е. формулы. Слово «функция» (от латинского *functio* – исполнение, совершение) Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле величины, выполняющей то или иное действие. Как термин, в нашем смысле, выражение «функция от икс» стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли начиная с 1698 г. Лейбниц ввел также термины «переменная» и «константа» (постоянная).

Точное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским математиком Иоганном Бернулли: *«Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянной»*. Новые шаги в развитии естествознания и математики в XIX в. вызвали и дальнейшее обобщение понятия функции. Большой вклад в решение спора Эйлера, Д'Аламбера, Д. Бернулли и других ученых XVIII в. по поводу того, что следует понимать под функцией, внес французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), занимавшийся в основном математической физикой.

Но здесь мы остановимся, отсылая читателей, интересующихся этой темой к специальной литературе.

История алгебры насчитывает не одну тысячу лет, и все открытия и достижения в этой области человеческого знания были получены только с помощью тяжелого умственного труда, не в последнюю очередь связанного с огромным объемом вычислений (например, логарифмов, тригонометрических функций), которые часто и неоднократно приходилось производить для получения желаемых результатов.

Многим известным математикам, от древности и вплоть до нашего века, приходилось содержать целый штат вычислителей, которые выполняли огромный объем второстепенных вычислений, тем самым давая возможность ученому заниматься непосредственно развитием математической науки. С развитием математических представлений об окружающем мире многие расчеты и вычисления многократно усложнились, и целые коллективы вычислителей тратили иногда не один месяц на выполнение каких-либо расчетов. К тому же, с усложнением вычислений неизбежно увеличивалось количество непроизвольно допущенных ошибок. Счастливым выходом из создавшегося положения явилось изобретение в 1943 г. первой электронно-вычислительной машины. Существовавшие до этого механические вычислители, которые могли выполнять только четыре арифметические операции, не шли ни в какое сравнение с этой, пусть еще несовершенной, вычислительной техникой! Уже в самом начале своего применения ЭВМ обеспечивали неслыханную по тем временам скорость вычислений – несколько тысяч операций в секунду. Это позволило многократно увеличить скорость и точность математических вычислений и подняло труд ученых на качественно новый уровень. Современные ЭВМ позволяют выполнять невероятно сложные расчеты в фантастически короткие сроки: то, над чем сотни вычислителей работали бы несколько месяцев, эти машины способны вычислить всего за несколько минут!

*Глава 8*
# СИМВОЛЫ «НОВОЙ МАТЕМАТИКИ»

*Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных!*

*Шарль Эрмит*

Принято считать, что вся современная наука оформилась в XVII в. Действительно, в конце этого столетия образовались первые академии наук и была создана первая научная картина мира, объединившая механику с астрономией. Основу такого синтеза первым угадал Галилей, заявивший около 1630 г.: «Природа говорит с нами на языке математики!» Вернее сказать, что природа обращается к нам сразу на многих диалектах единого математического языка. Мы называем эти диалекты арифметикой, геометрией, алгеброй или математическим анализом. Современный математический анализ (исчисление производных и интегралов от любых гладких функций) был создан в последней трети XVII в. и первой четверти XVIII в., хотя отдельные задачи об определении касательных к кривым и о нахождении максимальных и минимальных значений переменных величин были решены еще математиками Древней Греции. Эпохой создания дифференциального исчисления как самостоятельного раздела математики следует считать то время, когда было понято, что указанные специальные задачи вместе с рядом других (в особенности с задачей определения мгновенной скорости) решаются при помощи одного и того же математического аппарата – производных и дифференциалов. Это понимание было достигнуто И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Но англичанин Исаак Ньютон занимает среди них особое место. Он был на редкость талантлив, ему во многом повезло, и он с блеском использовал это везение. Не найти другого такого ученого, исследования которого оказали бы столь сильное влияние на историю мировой науки и культуры!

Из биографии **Исаака Ньютона** известно, что он родился в 1643 г., посещал сначала сельскую школу, а в двенадцать лет его отправили учиться в ближайший город. Директор школы

обратил внимание на способного мальчика и настоял, чтобы мать Ньютона отправила сына учиться в Кембриджский университет. Ньютона приняли в университет как бедного студента, обязанного прислуживать бакалаврам, магистрам и студентам старших курсов. Жизнь связала Ньютона с молодым блестящим ученым Исааком Барроу (см. выше), который занимал тогда кафедру математики в Кембридже. Он заинтересовался талантливым молодым человеком и скоро стал не только учителем, но и другом Ньютона, а спустя несколько лет уступил своему великому ученику кафедру математики. К этому времени Ньютон получил уже степени бакалавра и магистра. В 1665–1667 гг. Ньютон начал работать над созданием математического аппарата, с помощью которого можно было бы исследовать и выражать законы физики. Эти два года он провел в одиночестве, скрываясь в деревне от эпидемии чумы и неустанно размышляя о том, как описать законы природы с помощью исчисления сил, действующих между природными телами и вызывающих движения этих тел. Ньютон первым построил дифференциальное и интегральное исчисление, назвав его методом флюксий. Это дало возможность решать самые разнообразные математические и физические задачи. До Ньютона многие функции определяли только геометрически, и к ним невозможно было применять алгебру или новое исчисление флюксий. Основные задачи Ньютон формулировал в терминах механики: 1) определение скорости движения по известной зависимости пути от времени;

2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости. Непрерывную переменную Ньютон называл флюентой (текущей), ее скорость – флюксией. Таким образом, у Ньютона главными понятиями были производная (флюксия) и неопределенный интеграл как первообразная (флюента)*. Он стремился обосновать метод флюксий с помощью теории пределов, хотя последняя была им лишь намечена. Термин «предел» был введен Ньютоном, а употребляемый ныне символ **lim** (три первые буквы от limes) ввел швей-

---

* Производная – основное понятие дифференциального исчисления. Напомним читателю смысл понятия производной. Пусть требуется определить скорость прямолинейно движущейся материальной точки. Если движение равномерно, то пройденный точкой путь пропорционален времени движения; скорость такого движения можно определить как путь, пройденный за единицу времени, или как отношение пути, пройденного за некоторый промежуток времени, к длительности этого промежутка. Если же движение неравномерно, то пути, пройденные точкой в одинаковые по длительности промежутки времени, будут, вообще говоря, различными. Пример неравномерного движения дает тело, свободно падающее в пустоте. Закон движения такого тела выражается формулой $s = gt^2/2$, где $s$ – пройденный путь с начала падения (в метрах), $t$ – время падения (в секундах), $g$ – постоянная величина – ускорение свободного падения ($g \approx 9{,}81$ *м/сек*$^2$). За первую секунду падения тело пройдет около 4,9 м, за вторую – около 14,7 м, а за десятую – около 93,2 м, т. е. падение происходит неравномерно. Поэтому приведенное выше определение скорости здесь неприемлемо. В этом случае рассматривается средняя скорость движения за некоторый промежуток времени после (или до) фиксированного момента $t$; она определяется как отношение длины пути, пройденного за этот промежуток времени, к его длительности. Эта средняя скорость зависит не только от момента $t$, но и от выбора промежутка времени. В нашем примере средняя скорость падения за промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$ равна

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Это выражение при неограниченном уменьшении промежутка времени $\Delta t$ приближается к величине $gt$, которую называют скоростью движения в момент времени $t$. Таким образом, скорость движения в какой-либо момент времени определяется как предел средней скорости, когда промежуток времени неограниченно уменьшается, и записывают следующим образом:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Основное преимущество скорости в данный момент времени, или мгновенной скорости, перед средней скоростью состоит в том, что она, как и закон движения, является функцией времени $t$, а не функцией интервала $(t, t + \Delta t)$.

царский математик Симон Антуан Жан Люилье (1750–1840) в 1786 г. Выражение с помощью символа lim первым записал У амильтон в 1853 г. Когда Барроу услышал от Ньютона новое изложение основ математического анализа («метод флюент и флюксий»), он пришел в восторг и вскоре уступил своему ученику кафедру математики в Кембриджском университете (о чем уже было сказано), а сам занялся богословием.

К аналогичным идеям одновременно с Ньютоном пришел другой выдающийся ученый – **Готфрид Вильгельм Лейбниц**.

Лейбниц родился в Германии в городе Лейпциге в 1646 г. Любознательный мальчик уже шести лет вел интересные беседы по истории со своим отцом, профессором Лейпцигского университета. К двенадцати годам он изучил латинский язык и увлекся древнегреческим. Особенно его интересовали древние философы, и он любил подолгу размышлять о философских теориях Аристотеля, Демокрита. В пятнадцать лет Лейбниц поступил в Лейпцигский университет, где старательно изучал право и философию. Он очень много читал, его любимыми книгами были книги Р. Декарта, Г. Галилея, И. Кеплера и Д. Кампанеллы. Колоссальные знания по математике Лейбниц приобрел, как ни странно, самоучкой. Через три года, окончив университет, Лейбниц, обиженный отказом ученого совета университета присвоить ему степень доктора прав покинул Лейпциг. Отказ объяснили тем, что Лейбниц был... слишком молод! Так для молодого ученого началась жизнь, полная напряженного труда и далеких бесконечных путешествий. Нетрудно представить, как неудобно было путешествовать в неуклюжих каретах по тряским дорогам Европы тех времен. Но Лейбниц старался никогда не терять времени даром. Много удачных мыслей родилось в его талантливой голове именно во время этих продолжительных поездок. Лейбниц обладал исключительной способностью быстро вникать в задачу и решать ее наиболее общим способом. Размышляя над философскими и математическими вопросами, он убедился, что самым надежным средством искать и находить истину в науке может стать математика. Всю свою сознательную жизнь он стремился выразить законы мышления, человеческую способность думать в виде математического исчисления. Для этого необходимо, учил Лейбниц, уметь обозначать любые понятия или идеи определенными символами, комбинируя их в особые формулы, и сводить правила мышления к правилам в вычислениях по этим символическим формулам. Лейбниц стремился избавить наши рассуждения от любой неопределенности и возможности ошибиться самому или вводить в заблуждение других, заменяя общие слова четко определенными символами. Лейбниц мечтал, что если вдруг между людьми возникнут разногласия, то решаться они будут не в длинных и утомительных спорах, а так, как решаются задачи или доказываются теоремы. Спорщики возьмут в руки перья и, сказав: «Начнем вычислять», примутся за расчеты. В середине 70-х гг. XVII в. Г. Лейбниц разработал очень удобный алгоритм дифференциального исчисления. Основными понятиями у Лейбница явились дифференциал (аналог флюксий у Ньютона) как бесконечно малое приращение переменного и определенный интеграл (аналог флюент у Ньютона) как сумма бесконечно большого числа дифференциалов. Лейбницу принадлежат обозначения дифференциала $dx$ (1675) и ряд правил дифференцирования, удобная и гибкая символика и, наконец, сам термин «дифференциальное исчисление». Систематический очерк дифференциального исчисления был впервые опубликован в 1684 г., интегрального – в 1686 г. Дальнейшее развитие дифференциального исчисления шло сначала по пути, намеченному Лейбницем; большую роль на этом этапе сыграли работы братьев Я. и И. Бернулли, Брука Тейлора (1685–1731), Лагранжа. Лагранжу, в частности, принадлежит введение термина «производная» и обозначения $y'$ или $f'(x)$. **Интегральное исчисление** появилось во времена античного периода развития математической науки и началось с метода исчерпывания, который был разработан математиками Древней Греции, и представлял собой набор правил, выведенных Евдоксом Книдским (406–356 до н. э.), по которым вычисляли площади и объемы. Далее метод получил свое развитие в работах великого Евклида, работавшего в Александрии в III в. до н. э. Главный труд Евклида «Начала» («Elements») содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел и т. д. Этот труд оказывал огромное влияние на развитие математики вплоть до Новейшего времени. «Начала» переведены почти на все языки мира. Особым искусством и разнообразием применения метода исчерпывания прославился Архимед (ок. 287–212 до н. э.) – древнегреческий ученый родом из Сиракуз (Сицилия), который разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел. Известно, что кризис и упадок Древнего мира привел к забвению многих ценных научных достижений. Не повезло и методу исчерпывания – о нем вспомнили лишь в XVII в. Основанные на идеях, сформулированных в начале XVII в. великим математиком и астрономом Иоганом Кеплером, в конце XVII в. были разработаны основные понятия и теория интегрального и дифференциального исчислений, связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применение к решению прикладных задач. Известна следующая забавная история. В ноябре 1613 г. королевский математик и астролог австрийского двора И. Кеплер праздновал свадьбу. Для подготовки к ней ему нужно было приобрести несколько бочек виноградного вина. При их покупке Кеплер был удивлен тем, как продавец определял вместимость бочки, производя одно единственное действие – измеряя расстояние от наливного отверстия до самой дальней от него точки днища. Такое измерение совершенно не учитывало форму бочки! Кеплер сразу увлекся этой интереснейшей математической задачей – по нескольким измерениям вычислить вместимость бочки. Размышляя над ней, Кеплер вывел формулы не только для объема бочек, но и для объема самых различных тел: лимона, яблока, айвы и даже турецкой чалмы. Кеплер для каждого из изучаемых тел создавал новые, нередко очень хитроумные методы, что оказалось крайне неудобно. Позднее именно попытка найти общие простые методы нахождения площадей и объемов тел привели к созданию современной математики. Дальнейшее развитие интегрального исчисления связано с такими известными в математике именами, как Исаак Ньютон, Готфрид Лейбниц, Леонард Эйлер и ряда других выдающихся ученых. Они заложили основу современного математического анализа. Слово «интеграл» впервые употребил И. Бернулли в 1690 г. Возможно термин образован от латинского *integer* – «целый» по другому предположению, Бернулли произвел термин от латинского *integro* – «приводить в прежнее состояние», «восстанавливать». Термин был принят в 1696 г. Тогда же Бернулли предложил название «calculus integralis» (интегральное исчисление), сам Лейбниц называл его «calculus summatorius» (суммарное, суммирующее исчисление). В первой половине XVII в. в операцию интегрирования записывали словами «совокупность всех невидимых», а затем – «omnes lineas» (все линии). В механике Валлиса впервые встречаются сокращения вроде *omn w*, где *w* – означает неделимую. Ради сокращения записи Лейбниц в 1675 г. вместо *omn* вводит начальную букву слова «summa», которая по начертанию того времени писалась как наш знак интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y$ но уже через месяц он стал писать $\int ydx$ – это уже не сумма неделимых, а сумма площадей бесконечно малых прямоугольников. В печати современное обозначение появилось в 1686 г. В это же время Бернулли обозначал операцию интегрирования буквой «I» – по первой букве введеного им названия «интегральное исчисление». Впоследствии этот символ сохранился для обозначения конкретных интегралов – I1 I2 и т. д. Ньютон рассматривал интегрирование как задачу, потому у него не было ни названия для интеграла, ни последовательного обозначения, за исключением нескольких случаев, где он писал *f(t)*. Символ **определенного интеграла** появился впервые у Ж. Фурье в 1819–1822 гг. Попутно отметим, что знак суммы $\sum$ впервые появляется у Эйлера в 1755 г. «Новая математика» не сразу овладела умами ученых. Характерны два высказывания, относящиеся к XVIII столетию. Известный французский математик Мишель Ролль (1652–1719) писал, что новая наука есть коллекция гениальных ошибок. А великий французский мыслитель Вольтер заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано. Теория приобрела силу только после того, как Лейбниц доказал, что дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные операции. Об этом свойстве хорошо знал и Ньютон, но только Лейбниц увидел здесь ту замечательную возможность, которую открывает применение символического метода. Так любой человек, изучив небольшое число правил действия с символами, обозначающими операции дифференцирования и интегрирования, становится обладателем мощного математического метода. Лейбниц одновременно с Ньютоном, как уже отмечалось, и независимо от него открыл основные принципы дифференциального и интегрального исчислений. Однако, как и в предыдущие эпохи, дух соперничества продолжал играть важную роль в математике. В этот период наблюдается важное организационное изменение: развивается книгоиздательская индустрия. Если в XVI в. было опубликовано незначительное количество книг, целиком или хотя бы частично посвященных математике, то в XVII в. возникает гораздо более эффективная и специализированная структура обмена научной информацией. Еще в начале XVII в. роль неформальных «информационных центров» часто играли частные лица (такие как Мерсенн в Париже, а немного позже Генри Ольденбург и Джон Коллинз в Лондоне); поддерживая активную переписку с учеными и математиками в своих странах и за границей, они могли держать группу заинтересованных лиц в курсе текущих интеллектуальных достижений. Однако когда в 60–70-х гг. XVII в. августейшее покровительство науке трансформировалось в распределение официальных постов в академиях, неофициальные сети научной коммуникации стали замещаться первыми научными журналами. Эти две организационные перемены будут контекстом следующего математического конфликта, который мы рассмотрим. Как мы видели, во второй половине 1660-х гг. молодой кембриджский математик Исаак Ньютон разработал общий метод в области, которая известна нам ныне как математический анализ. Совершенно очевидно, что Ньютон не представлял себе всей важности своего исследования и пользовался неуклюжей и неустоявшейся терминологией. В 1669 г. Ньютон по просьбе Коллинза послал ему довольно темный трактат, посвященный этому предмету, а вскоре стал работать над пространным трактатом о «методе флюксий», который так и не был закончен ученым. В то время Ньютона гораздо больше интересовала возможность публикации в «Философских трудах Королевского общества» разработанной им теории оптики. Однако эта работа была раскритикована покровителями Ньютона, что заставило его на какое-то время отойти от научной деятельности и посвятить себя теологии и алхимии. В 1672 г. в Париж прибыл молодой германский дипломат Готфрид Лейбниц, получивший юридическое и философское образование. С математикой в то время Лейбниц бы практически незнаком. Однако, будучи чрезвычайно честолюбивым человеком, он уже тогда обдумывал проект реформирования всей структуры математики на базе универсальной логической символики. В тот период учреждение новой Академии в Париже возбудило огромный интерес к наукам. Оказавшись в столь благоприятной атмосфере, Лейбниц устанавливает личные связи с ведущими учеными и учится математике у Христиана Гюйгенса и других ученых. В 1673 г. он приезжает в Лондон как участник дипломатической миссии и быстро завязывает связи в научных кругах. За изобретение элементарной вычислительной машины Лейбница избирают членом Королевского общества. Однако непомерные амбиции Лейбница и, в частности, присвоение им авторства алгебраической последовательности для квадратуры круга, уже опубликованной несколькими математиками, создали ему плохую репутацию в ученых кругах. Эта дурная слава помешала его назначению на пост в Коллеж де Франс в 1675 г. Тем не менее Лейбниц все же стал одним из участников корреспондентской сети Ольденбурга и Коллинза и интересовался работой английских математиков. Через посредничество Ольденбурга и Коллинза Ньютон и Лейбниц обменивались письмами в 1676 и 1677 гг. В ходе переписки Лейбниц убедил Ньютона прислать ему описание работы о бесконечно малых величинах. Явно не доверяя Лейбницу, Ньютон упомянул флюксионный анализ в единственном зашифрованном предложении в форме анаграммы. Ту же стратегию, как мы помним, применил Тарталья в своем первоначальном ответе на просьбы Кардано выдать ему тайную формулу для кубических уравнений. Не получив от Ньютона сколько-нибудь конкретной информации, Лейбниц, тем не менее, быстро разрабатывает на основе циркулировавших в Европе английских математических идей свою собственную теорию, в которой использует более ясную нотацию, чем Ньютон. Закончив работу, Лейбниц описывает ее Ньютону, но тот не принимает ее всерьез. Возможно, Ньютон недооценил математические способности Лейбница, зная о том, что тот только начинает свою математическую карьеру. Через некоторое время Лейбниц покидает Париж, чтобы приступить к дипломатической службе при дворе германского герцога Брауншвейгского. В это же время он становится библиотекарем самой большой библиотеки Европы и мира – Придворной библиотеки в Вольфенбюттеле-резиденции герцогов брауншвейгских. И здесь он сумел воплотить в жизнь некоторые из своих представлений о сущности библиотеки и организации ее работы. Во время своих путешествий Лейбницу удалось установить важные контакты в набирающем силу прусском государстве, а также заручиться покровительством императоров России и Австрии. Лейбниц становится респектабельным и успешным политиком при нескольких дворах. Благодаря своим политическим связям, он мог беспрепятственно заниматься своей ученой деятельностью. В 1682 г. в Лейпциге выходит первый в Германии специализированный ученый журнал «Acta Eruditorum», основанный интеллектуалами из окружения Лейбница в противовес журналу «Memoires», издаваемому Французской академией наук, и «Философским трудам» Английского королевского общества. Получив контроль над изданием, не зависящим ни от английских, ни от французских влияний, Лейбниц опубликовал алгебраические последовательности, которыми он хвалился в Лондоне, без ссылок на каких-либо предшественников. В 1684 и 1686 гг. Лейбниц опубликовал краткое описание своего математического анализа, высказав предположение, что он может открыть новую эпоху в истории математики. Предложенное Лейбницем изложение было крайне сжатым, но давало представление о программном значении метода. Краткой публикации оказалось достаточно, чтобы этот метод обратил на себя внимание швейцарских математиков Якоба и Иоганна Бернулли (Якоб Бернулли занимал в то время пост профессора в Базеле). После серии работ, опубликованных в «Acta Eruditorum», новый метод математического анализа получает распространение в математических кругах континентальной Европы. Парижский аристократ маркиз Гийом Франсуа де Лопиталь (1661–1704) приглашает Иоганна Бернулли с просьбой обучить его новому методу математического анализа. В 1696 г. де Лопиталь публикует первый учебник по математическому анализу и становится лидером стремительно разраставшейся группы французских математиков. Сам Лейбниц опубликовал сравнительно небольшое количество математических трудов, но через переписку с обоими Бернулли, Лопиталем и многими другими учеными стал известен как один из ведущих математиков Европы. А благодаря своей обширной переписке с французским теологом и математиком Антуаном Арно (1612–1694), влиятельным французским мыслителем Пьером Бейлем (1647–1706) и другими ведущими интеллектуалами ему удается также создать себе репутацию в кругу философов. Фактически это происходит независимо от публикации его работ, большая часть которых была напечатана после 1710 г. На протяжении большей части этого времени Ньютон остается в тени. В этот период Кембридж перестает быть интеллектуальным центром, Ольденбург и Коллинз умирают, и Ньютон оказывается изолированным от научной жизни Лондона. Его репутация ученого начала возрождаться лишь после того, как он опубликовал свой знаменитый труд «Principia» (1687). Вскоре после этого Ньютон становится горячим защитником революции 1688 г. Он агитирует против католической реставрации и представляет Кембриджский университет в парламенте. В 1690 г., получив за свои заслуги пост главы Монетного двора, Ньютон покинул Кембридж. В течение следующего десятилетия, в годы создания конституционной монархии и парламентской партийной системы, популярность Ньютона как первого интеллектуала

Англии росла. В 1703 г. он стал пожизненным президентом Королевского общества. А в середине 1690-х гг. националистически настроенные последователи Ньютона озаботились его притязаниями на первенство в создании математического анализа и начали кампанию против Лейбница. Под давлением своих защитников Ньютон, наконец, опубликовал свою старую работу о флюксионном анализе в приложении к книге «Оптика» в 1704 г. и вторично в 1711 г. Когда нападки на него усилились, Лейбниц ответил анонимной рецензией на ньютоновскую «Оптику», опубликовав свой опус в журнале «Acta», который поддерживал его собственные притязания на первенство. Вслед за тем в «Acta» анонимно было опубликовано письмо Иоганна Бернулли, в котором Ньютон обвинялся в плагиате. Лейбниц и Бернулли проявляли вежливость по отношению к Ньютону в своих публичных заявлениях, но продолжали тайно нападать на него. Возможно, в этом споре присутствовали и политические мотивы. Порядок монархической преемственности, установленный в ходе переговоров между английскими партиями в 1701 г., сделал курфюрста Ганноверского (являвшегося покровителем Лейбница) претендентом на наследование английского трона, поэтому для Лейбница было важно не испортить отношений с английскими политическими кругами. И наоборот, нападки на Лейбница и континентальную научную верхушку со стороны поддерживающих Ньютона англичан усилились именно в то время, когда в Англии укрепились политические позиции этой группы. Должно быть, англичане усмотрели для себя угрозу в том, что хорошо организованная континентальная машина Лейбница может оказаться в Лондоне под королевским покровительством. Ссора Ньютона и Лейбница стала предметом официального расследования. В 1713 г. Ньютон добился благоприятного для себя заключения комиссии Королевского общества, в которую входили представители международных дипломатических кругов. Лейбниц и Ньютон обвиняли друг друга в плагиате, искажали факты и анонимно публиковали якобы беспристрастные статьи в свою защиту. Их сторонники вели себя еще хуже. Результатом этого противостояния стал крупный раскол между английской и континентальной наукой. Лейбниц не упускал ни одной возможности – ни организационной, ни политической, ни интеллектуальной – для утверждения своего приоритета. Однако нет никаких свидетельств того, что он занимался плагиатом. Ньютон, хотя и не проявлявший такого организаторского новаторства, как Лейбниц, тоже действовал вполне в духе дерзкого интеллектуального пиратства. Он вел себя тиранически на посту президента Королевского общества, лично контролируя членство ученых в Обществе и резко ограничивая дебаты. Ньютон нисколько не заботился о том, чтобы сделать свой метод общедоступным. Его символика введена им лишь для «внутреннего», личного потребления: он ее строго не придерживался.

Вот мнение известного математика А. Шибанова: «Склоняясь перед непререкаемым авторитетом своего великого соотечественника, английские ученые впоследствии канонизировали каждый штрих, каждую мельчайшую деталь его научной деятельности, даже введенные им для личного употребления математические знаки». «Над английской наукой тяготела традиция почитания Ньютона, и его обозначения, неуклюжие по сравнению с обозначениями Лейбница, затрудняли прогресс», – соглашается голландский ученый Д. Я. Стройк.

В письме, написанном в июне 1677 г., Лейбниц прямо раскрывал Ньютону свой метод дифференциального исчисления. Тот на письмо Лейбница не ответил. Ньютон считал, что открытие принадлежит ему навечно. При этом достаточно того, что оно было запрятано лишь в его голове. Ученый искренне считал: своевременная публикация не приносит никаких прав. Перед Богом первооткрывателем всегда останется тот, кто открыл первым. Ньютон, по обыкновению того времени, зашифровал свое «научное завещание» в латинской анаграмме. Единственная разумная расшифровка анаграммы выглядит примерно так: *«Полезно решать дифференциальные уравнения»*. Однако все сказанное нисколько не умаляет выдающегося вклада Ньютона в создание новой математики. Завершим этот раздел словами, начертанными на могиле И. Ньютона, похороненного в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве. На его могиле высечено:

*Здесь покоится*
*Сэр Исаак Ньютон,*
*Который почти божественной силой своего ума*
*Впервые объяснил*
*С помощью своего математического метода*
*Движения и формы планет,*
*Пути комет, приливы и отливы океана.*
*Он первый исследовал разнообразие световых лучей*
*И проистекающие отсюда особенности цветов,*
*Каких до того времени никто даже не подозревал.*
*Прилежный, проницательный и верный истолкователь*
*Природы, древностей и священного писания,*
*Он прославил в своем учении Всемогущего Творца.*
*Требуемую Евангелием простоту он доказал своей жизнью.*
*Пусть смертные радуются, что в их среде*
*Жило такое украшение человеческого рода.*
*Родился 25 декабря 1642 г. Умер 20 марта 1727 года.*

*Глава 9*
# И КОМБИНАТОРИКОЙ В ДРЕВНОСТИ ТОЖЕ ЗАНИМАЛИСЬ!

С задачами, в которых приходилось выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди прочих расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее положение охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы.

Комбинаторные навыки оказывались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника.

Комбинаторика как наука стала развиваться в XVIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитать число различных комбинаций элементов. Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II в. до н. э. Индийцы умели вычислять числа, которые сейчас называют «сочетаниями». В XII в. Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Предполагают, что индийские ученые изучали сочетания в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стиха, и поэтических произведениях. Например, в связи с подчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы из $n$ слогов. 2200 лет назад великий древнегреческий математик Архимед написал трактат под названием «Стомахион» («Stomachion»). В отличие от других текстов, принадлежащих перу Архимеда, содержание этого трактата и даже смысл самого названия в течение столетий были покрыты мраком. Историки математики Стэнфорда, разбирая записи на древнем пергаменте, который был подчищен и использован вторично в более поздние времена монахами (это так называемый *палимпсест*), а затем почти необратимо разрушен сыростью почвы, заявили, что способны все-таки пролить некоторый свет на тайну содержания этого трактата. В процессе изучения древнего палимпсеста открылось столько удивительного, что самое время кричать «Эврика!», подобно Архимеду, когда ему, согласно древней легенде, в ванне пришла в голову гениальная идея, как определить точный состав золотой царской короны. Доктор Ревил Нетз (Reviel Netz) считает, что этот трактат был посвящен ни много ни мало как комбинаторике, т. е. науке, о которой, как считалось ранее, древнегреческие ученые ничего еще не знали. Основной целью комбинаторики является изучение различных комбинаций для решения той или иной задачи. И обнаружение числа путей, которыми может быть решена проблема, изложенная в «Стомахионе», оказалось столь непростым, что доктор Нетз был вынужден попросить проверить решение группу из четырех экспертов по комбинаторике. На решение задачи современными средствами (!) потребовалось шесть недель. Доктор Нетз признает, что их результаты не могут быть доказаны с абсолютной уверенностью, однако заявляет, что представил эту работу вниманию собрания многих известных специалистов в Принстонском университете, и они согласились с его интерпретацией.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т. д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных. Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т. д.

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано (1501(?)–15762), Н. Тарталье (1499–1557), Г. Галилею (1564–1642) и французским ученым Б. Паскалю (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665). Как научная дисциплина комбинаторика сформировалась в XVII в. В это время французский математик Пьер Эригон независимо от Н. Тартальи получает формулу для числа сочетаний из $n$ элементов по $m$ (без повторений). В книге «Теория и практика арифметики» (1656) французский автор А. Таке посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу.

Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1665 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Но этим вклад Лейбница не ограничивается: ученый вводит специальные символы и термины для этой новой области математики, находит все $k$-сочетания из $n$ элементов, выводит свойства сочетаний, строит таблицы сочетаний, после чего рассуждает о приложении комбинаторики к логике, арифметике, и даже к проблемам стихосложения. Комбинаторике Лейбниц предрекал блестящее будущее и широкое применение. Изучением размещений впервые начал заниматься Якоб Бернулли во второй части своей книги «*Ars conjectandi*» («Искусство предугадывания») в 1713 г. **Современная символика сочетаний (сочетания, размещения, перестановки: $C_n^k$, $A_n^k$, $P_n$) была предложена разными авторами учебных руководств только в XIX в.** Значительный вклад в развитие комбинаторики внес Л. Эйлер.

В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика поднялась на новый уровень. В настоящее время в образовательный стандарт по математике включены основы комбинаторики, решение комбинаторных задач методом перебора, составлением дерева вариантов (еще его называют «деревом возможностей»). Современное прикладное значение комбинаторики можно видеть во многих областях. На комбинаторике основывается теория игр, применяющаяся не только для игры в рулетку и шахматы, но и для создания современных «разумных» систем наведения и слежения. Именно комбинаторными методами оценивается устойчивость ко взлому систем шифрования и аутентификации как в Интернете, так и в военных разработках. С комбинаторикой имеет общие задачи теория вероятности, а также статистика и базирующиеся на ней социальные науки. В современной комбинаторике и по сей день делаются новые открытия.

## *Глава 10*
## ЕЩЕ ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

*В математике нет символов для неясных мыслей.*
*Анри Пуанкаре*

В предыдущих главах мы описали историю возникновения математической символики от древности до конца XVIII в. Осталось еще несколько важных математических знаков, знакомых нам со школьной скамьи и возникших очень давно. Здесь в первую очередь следует остановиться на знаках отношений, или знаках неравенства. Знак отношения получает вполне определенное содержание, когда указано, между какими объектами отношение рассматривается. **Знаки «больше», «меньше» ввел английский ученый Томас Гарриот (1560–1621).** Они появились в его книге «Практика аналитического искусства», изданной посмертно в 1631 г. Он обосновал свое нововведение следующим образом: *«Если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в соотношении не параллельны, но пересекаются»*. Пересечение может быть справа (>) или слева (<). В типографиях использовали для неравенств уже имевшуюся букву V, так как самого наборного знака у них не было. Для характеристики личности Гарриота есть один любопытный факт: он был участником кружка Уолтера Ралея. Суровый солдат и придворный, не брезгливый в средствах, когда дело шло о личном продвижении, Уолтер Ралей вместе с тем был искренним поклонником литературы, любителем философии, проявлял горячий, неподдельный интерес к науке. Ралею приписывали создание тайной «Школы тьмы» – кружка друзей, которому его враги или просто суеверные горожане приписывали едва ли не характер сборища адептов черной магии и последователей дьявола. Глава английских иезуитов *Роберт Парсонс* со злобой писал, что в *«школе атеизма, основанной сэром Уолтером Ралеем... Моисей и наш Спаситель (Христос), Старый и Новый Завет подвергались осмеянию, и ученых обучают произносить имя господа наоборот»*. В кружок Ралея, по различным сведениям, входили помимо Томаса Гарриота, оксфордский ученый и мореплаватель Лоуренс Креймис, известный поэт Кристофер Марло и другие видные аристократы. Неравенства, о которых речь шла выше, называются строгими. Нестрогие неравенства (≤ ≥) ввел французский математик и физик Пьер Бугер (или Буге, 1698–1758). В 1734 г. Пьер Бугер стал первым ученым, определившим количество света, которое теряется при прохождении заданного расстояния в атмосфере. В 1735 г. он возглавил экспедицию по проведению градусных измерений в Перу с целью определения формы Земли, в результате которой была обнаружена сплюснутость Земли. В честь этого события была выбита медаль с изображением Бугера, опирающегося на земной шар и слегка его сплющивающего. Знаки «>>» и «<<» ( «много больше» и «много меньше») ввели в 1901 г. французские математики Эмиль Борель (1871–1956) и Анри Пуанкаре (1854–1912).

Теперь немного из истории геометрических обозначений и терминов.

Греческое слово «параллельность», означающее «рядом идущая», «друг подле друга проведенная», стало употребляться 2500 лет назад в школе Пифагора. **Евклид впервые употребил этот термин применительно к плоскостям. Знак «||» ввел Роберт Рекорд.**

Понятие угла было уже с древних времен введено в греческую математику. Современное понятие угла, принимающего различные значения – положительные и отрицательные, ввел Эйлер. **Знак «∠» ввел Пьер Эригон в 1634 г.** П. Эригон – французский математик, автор 6-томного «Курса математики» (1634–1637). В своей книге Эригон ввел весьма развитую математическую символику и, в частности, он также вводит знакомый нам знак перпендикулярности прямых (⊥). Обозначение угла, образованного двумя прямыми $a$ и $b$ ($a^\wedge b$), использовал впервые в 1813 г. французский математик Бине (1776–1856).

В XIX в. количество общепринятых математических символов растет. Появляются знакомые всем нам математические знаки, например знак абсолютной величины **|x|**, который ввел Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс в 1841 г. Он же сыграл значительную роль в судьбе первой русской женщины-профессора математика Софьи Ковалевской.

К. Вейерштрасс (1815–1897) родился в семье секретаря бургомистра городка Вестфалии Остенфельда Вильгельма Вейерштрасса. В детстве Карл интересовался лирикой, стремился изучать музыку, но у него был плохой слух. Уже в гимназические годы он увлекался математикой. Математика помогала вносить свой вклад в семейный бюджет: с пятнадцати лет он начал вести приходно-расходные книги у одной из торговок ветчиной и маслом. Карл окончил гимназию и, подчинившись воле отца, поступил на юридический факультет Боннского университета, хотя сам предпочел бы заняться математикой. Изучение юридических наук было скучным занятием для Вейерштрасса, поэтому он вскоре перестал ходить на лекции и начал самостоятельно изучать математические работы. Через четыре года после начала учебы, не подавая заявления о допуске к экзаменам, без свидетельства об окончании университета Карл покинул Бонн и появился в родительском доме. Продолжить дальнейшее обучение не позволяло материальное положение семьи. Карлу посоветовали подготовиться к сдаче экзаменов на звание учителя. После блестяще сданных экзаменов 25-летний Вейерштрасс получил право на преподавание в гимназиях. Учебная нагрузка была большой, и научными исследованиями Вейерштрасс занимался по ночам. Постоянные умственные перегрузки привели к тому, что Вейерштрасс в 1850 г. серьезно заболел. Отдыхая, он подготовил статью «К теории абелевых функций», и она была признана лучшей работой в этой области. Философский факультет Кенигсбергского университета присудил Вейерштрассу 31 марта 1854 г. степень почетного доктора без защиты диссертации. Имя Вейерштрасса становилось все более популярным. В 1861 г. его избрали членом Баварской академии наук. 16 декабря 1861 г. во время лекции у него был такой сильный приступ головокружения, что он был вынужден прервать ее. Больше никогда Вейерштрасс не мог читать лекции, стоя у доски. В 1870 г. у него появилась ученица из России – 20-летняя С. В. Ковалевская. В конце 1886 г. Парижская академия объявила конкурс на премию Бордена, которая в 1888 г. будет присуждена тому, кто усовершенствует в каком-нибудь важном пункте теорию движения твердого тела. В конкурсе решила принять участие Софья Васильевна. Она исследовала задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки. В декабре 1888 г. комиссия единодушно присудила премию Ковалевской. Ее победа очень обрадовала Вейерштрасса. 1889 г. был для ученого очень тяжелым. В феврале он сильно заболел, только лежа он не чувствовал недомогания. 10 февраля 1891 г. в возрасте 41 года С. В. Ковалевская умерла от воспаления легких. Вейерштрасс был так потрясен известием о кончине своей ученицы, что родные стали беспокоиться за жизнь его самого. Обычно он подавлял слушателей своим умственным превосходством, но живой пытливый ум юной Ковалевской потребовал от старого профессора больших усилий. Вейерштрассу нередко приходилось самому приниматься за решение разных проблем, чтобы достойно ответить на сложные вопросы ученицы. *«Мы должны быть благодарны Софье Ковалевской,* – говорили современники, – *за то, что она вывела Вейерштрасса из состояния замкнутости».* В период 1892–1896 гг. знаменитый немецкий математик занимался изданием своих трудов. В начале 1897 г. он заболел гриппом, который перешел в воспаление легких и 19 февраля 1897 г. он скончался.

**Знак вектора (→) ввел Огюстен Луи Коши в 1853 г.; само понятие «вектор» ввел Уильям Гамильтон**, он его образовал от латинского слова «vehere» («нести») в 1845 г. До Гамильтона такими словосочетаниями, как «rayon mobile», «rayon vecteure» пользовались и Коши (1821) и Гаусс (1809), правда у них эти слова имели смысл «подвижный радиус». Одно из первых обозначений ввел швейцарский математик Жан Робер Арган (1768–1806) в 1806 г., обозначая таким образом направляющий отрезок. Август Фердинанд Мебиус (1790–1868), немецкий математик и астроном-теоретик, обозначал вектор через $\overline{A}\overline{E}$, чтобы указать его начало и конец. Обозначение $|\overline{A}\overline{E}|$ для длины вектора ввел Ганс (1905). Широко использовал такое обозначение нидерландский физик Лоренц. Герман Грассман (1809–1877) называл векторы «отрезками», он ввел единичные векторы $e1$, $e2$, $e3$, направленные по координатным осям, и представление вектора в виде $xe1 + xe2 + xe3$. Общепринятые обозначения координат – $i, j, k$ ввел Гамильтон (1853).

Уильям Роуэн Гамильтон (1806–1865) – один из гениальнейших математиков XIX в. – родился в Дублине. Уже в детстве он проявил необыкновенные дарования. В 7 лет он знал еврейский язык; в 12 – под руководством своего дяди, хорошего лингвиста, выучил 12 языков и среди них персидский, арабский и малайский, хорошо считал в уме. В то время в Дублине показывали американского мальчика Кольбурна, быстро решавшего разные арифметические задачи, которому Гамильтон ничуть не уступал. За два года перед этим он случайно достал латинский перевод «Элементов геометрии» Эвклида и изучил это сочинение; в 13 лет он прочел «Arithmetica Universalis» Ньютона; в 16 лет – большую часть «Principia». Поступив в Тринити-колледж в Дублине, он показал столь блестящие способности, что в 22 года был назначен профессором астрономии в Дублинском университете. Его сочинения носят печать гениальности, и можно сказать, что он в них опередил своих современников. Гамильтон также занимался преподавательской деятельностью, в частности обучал молодого Дж. К. Максвелла. До последних лет своей жизни он занимался исследованиями и умер в 1865 г.

Остановимся еще на понятии факториала. Название происходит от слова «factor» (сомножитель). Термин ввел французский математик Луи-Франсуа-Антуан Арбогаст (1759–1803) в 1800 г. Обозначение «*n!*» встречается впервые у немецкого математика Кретьена Крампа (1760–1826) в 1808 г. Крамп использовал для обозначения факториала восклицательный знак, который впервые появился в «Катехизисе Эдуарда VI», напечатанного в Лондоне в 1553 г. Наряду с обозначением (!) употреблялись и другие символы, до тех пор пока в 1916 г. Совет Лондонского математического общества не решил принять за знак факториала «*n!*». В 1730 г. шотландский математик Джеймс Стирлинг (1692–1770) предложил очень удобную формулу для приближенного вычисления факториала (заметим, что 10! = 3628800). Факториал широко применяется в комбинаторике – разделе математики, занимающийся изучением числа комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, которые можно составить из заданного конечного множества (см. гл. 9).

В повседневной жизни мы сталкиваемся с применением комбинаторики, когда, например, открываем наборный замок. И еще следует сказать о введенном в 1841 г. английским математиком Артуром Кэли (1821–1895) знаке определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Кэли родился в Ричмонде 16 августа 1821 г. Вырос в Петербурге, где его отец занимался торговлей. Затем он окончил Тринити-колледж Кембриджского университета. С 1843 г. жил в Лондоне, работал адвокатом и занимался математикой. С 1863 г. в течение почти тридцати лет преподавал математику в Кембриджском университете. Кэли, наряду с Гамильтоном, впервые ввел понятие матрицы – математического объекта, записываемого в виде прямоугольной таблицы чисел и допускающего алгебраические операции (сложение, вычитание, умножение и др.) между ним и другими подобными объектами. Несколькими терминами, связанными с определителями, мы обязаны английскому математику Д. Сильвестру.

Джемс Джозеф Сильвестр (1814–1897) прославился своим остроумием и умением придумывать новые термины. Благодаря ему появились слова «дискриминант», «матрица», названия для определителей различных видов, введенных и изученных А. Кэли.

Огромная заслуга в создании символики современной математики принадлежит Л. Эйлеру (1707–1783).

Эйлер принадлежит к числу гениев, чьи труды стали достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, в котором их представил Эйлер. Студенты проходят высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера. Он был великим математиком, и он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. Трудно даже перечислить все отрасли, в которых трудился великий ученый. *«Читайте, читайте Эйлера, он – наш общий учитель!»*, – любил повторять *Лаплас*. Леонард Эйлер входит в первую пятерку величайших математиков всех времен и народов. Эйлер – первая скрипка в науке XVIII в.! Родился великий ученый в Базеле (Швейцария) 15 апреля 1707 г. в семье пастора и провел детство в близлежащем селении, где его отец получил приход. Здесь на лоне сельской природы, в благочестивой обстановке скромного пасторского дома Леонард получил начальное воспитание, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь и мировоззрение. Обучение в гимназии в те времена было непродолжительным. Осенью 1720 г. 13-летний Эйлер поступил в Базельский университет; через три года он окончил низший – философский – факультет и записался, по настоянию отца, на теологический факультет. Проявив свои математические таланты, Эйлер привлек к себе внимание Иоганна Бернулли. Профессор стал лично руководить самостоятельными занятиями юноши и вскоре публично признал, что от проницательности и остроты ума юного Эйлера он ожидает самых больших успехов. В 1725 г. Леонард Эйлер выразил желание сопровождать сыновей своего учителя в Россию, куда они были приглашены в открывавшуюся тогда – по воле Петра Великого – Петербургскую академию наук. На следующий год он получил приглашение и сам. Покинув Базель весной 1727 г., Эйлер прибыл в Петербург после семинедельного путешествия. Здесь он был зачислен сначала адъюнктом по кафедре высшей математики, а в 1731 г. стал академиком (профессором), получив кафедру теоретической и экспериментальной физики, затем (в 1733 г.) и кафедру высшей математики. Сразу же по приезде в Петербург он полностью погрузился в научную работу и уже тогда поразил всех плодотворностью своей деятельности. Многочисленные его статьи в академических ежегодниках, первоначально посвященные преимущественно задачам механики, скоро принесли ему всемирную известность, а позже способствовали и славе петербургских академических изданий в Западной Европе. Непрерывный поток сочинений Эйлера печатался с тех пор в трудах Академии в течение целого века. Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. В 1735 г. Академия получила задание выполнить срочное и очень громоздкое астрономическое вычисление. Группа академиков просила на эту работу 3 месяца, а Эйлер взялся выполнить работу за 3 дня — и справился самостоятельно. Однако перенапряжение не прошло бесследно: он заболел и потерял зрение на правый глаз. Однако ученый отнесся к несчастью с величайшим спокойствием: *«Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой»*, — философски заметил он. В сентябре 1783 г. ученый стал ощущать головные боли и слабость. 7 (18) сентября после обеда, проведенного в кругу семьи, беседуя с А. И. Лекселем о недавно открытой планете Уран и ее орбите (Андерс Иоган Лексель первый определил орбиту Урана), он внезапно почувствовал себя плохо. Эйлер успел произнести лишь: «Я умираю» — и потерял сознание. Через несколько часов, так и не приходя в сознание, он скончался от кровоизлияния в мозг. *«Эйлер перестал жить и вычислять»*. Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия». В 1955 г. прах великого математика и надгробный памятник перенесены в некрополь XVIII в. на Лазаревском кладбище Александро-Невской лавры.

*Глава 11*
# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ

*Какая плоская фигура краше всех? Конечно круг. В нем совершенство и успех. А из фигур объемных? Сфера или шар. Монада символ единицы – главный дар*.*

*Пифагор. Вопросы Семи Мудрецов*

Большинство геометрических терминов попали в русский язык из трудов греческих авторов – классиков геометрии, зачастую через их латинские переводы. Некоторые слова при этом были переведены на русский язык. Например, греческое слово **полигонон** стало **многоугольником**: «поли-» означает «много», «гониа» – угол (кстати, мы употребляем и само слово «полигон», и не только в математике!). Другие термины остались почти неизменными свое греческом звучании, например слово **симметрия** (в дословном переводе – соразмерность) или **параллелограмм** (греч. *parallelos* – параллельный и *gramma* – линия). Термин «параллелограмм» имеет греческое происхождение и, согласно Проклу, был введен Евклидом. Понятие параллелограмма и некоторые его свойства были известны еще пифагорейцам. Полная теория параллелограмма была разработана к концу Средних веков и появилась в учебниках лишь в XVII в. Все теоремы о параллелограммах основываются непосредственно или косвенно на аксиоме параллельности Евклида. Термин **диагональ** (греч. *diagonios* – идущий от угла к углу); вначале использовался у нас с латинским окончанием (diagonalis). До XVIII в. с тем же смыслом использовался другой термин – диаметр, которым первые геометры называли диагонали прямоугольника, так как представляли его вписанным в круг. Термин **гипотенуза** – (греч. *hypoteinusa* – тянущаяся под чем-либо) происходит, очевидно, от способа построения прямоугольных египетских треугольников с помощью натягивания веревки. Евклид вместо вышеупомянутого

* Монада (греч. *monas* – единица) – простейший элемент, неделимая частица бытия.

термина так и писал: *«Сторона, которая стягивает прямой угол»*. **Катет** (греч. *kathetos* – отвес; опущенный перпендикулярно) – в Средние века этим словом называли высоту прямоугольного треугольника, а его стороны – *гипотенузой* и *основанием*. В современном смысле термин «катет» используется с XVII в., в XVIII в. получил широкое распространение. Цепочку «предков» слова **квадрат** можно найти в латинских словах: «quadratum» – квадратное, «quadrum» – квадрат, «quattuor» – четыре. **Трапеция** (греч. *trapezion* – четырехугольник с неравными сторонами, столик; *trapeza* – стол; узнаете это слово? – состоит из слов «тра» – четыре и «пеза» – нога) – у Евклида этим термином назывался произвольный (отличный от параллелограмма) четырехугольник. Трапеция в современном смысле встречается впервые у древнегреческого математика Посидония. Термин **ромб** (греч. *rhombos*, производного от глагола «рембеин» – вертеть, вращать) – многие авторы до сих пор расходятся во мнениях о том, что он означал и с какой геометрической формой был связан. Одно из самых распространенных мнений – что так называли «гуделку», представлявшую собой раскручиваемый на веревке четырехугольный кусок дерева. Согласно другому источнику, этот корень входил в название таких вращающихся предметов, как веретено или волчок (сечение которых имеет форму ромба). Архимед использовал термин «телесный ромб» для объединения двух конусов с общим основанием. **Центр** (греч. *kentron* – палка с заостренным концом, которой погоняли быков, а позднее – острие циркуля) – до Евклида это слово употреблялось не только в математике, оно служило также для обозначения точки, важной по каким-либо соображениям. Евклид этим термином называл центр окружности и центр сферы, а Архимед – центр эллипса и эллипсоида. **Радиус** (лат. *radius* – спица колеса, луч) – это слово вошло в математический обиход лишь в конце XVII в. Во времена Евклида радиус еще называли «прямой из центра». Позднее стали пользоваться термином «полудиаметр». И лишь в 1569 г. слово «радиус» впервые употребил в своих работах французский ученый Петр Рамус, а несколькими годами позднее – Франсуа Виет. **Сегмент** (лат.

*segmentum* – отрезок, полоса, от seco – режу, рассекаю) – знаменитый греческий астроном Птолемей делил окружность круга на 360 равных частей. **Сектор** (лат. *sector* – букв. рассекатель) – Евклид использовал его для названия сегмента круга, цилиндра или конуса. Термин **хорда** греческого происхождения (*chorde*) и означает струна, тетива. Примерно так же (лук, тетива) называли хорду индийские математики. Затем появилась арабская обработка этих терминов, а в XII в. появляется и термин «хорда». Есть еще несколько плоских фигур, о которых стоит упомянуть. Конические сечения с древних времен привлекали к себе внимание ученых. Так, древнегреческий ученый Менехм (IV в. до н. э.) пользовался **параболой** и **гиперболой** в решении знаменитой задачи на удвоение куба. Свойства конических сечений исследовали Евклид (IV в. до н. э.) и Архимед (III в. до н. э.). Полное и систематическое учение об этих кривых было изложено Аполлонием Пергским (III–II вв. до н. э.) в восьмитомном труде «Конические сечения». Он впервые показал, как можно получить эти кривые, рассекая один и тот же конус под разными углами. Он же ввел термины **эллипс, парабола** и **гипербола** (греч. соответственно: *ellepsis* – недостаток, *parabole* – приложение и *hyperbole* – избыток) – происхождение этих названий связано с задачей построения прямоугольника с заданным основанием, равновеликого данному квадрату... Интерес к коническим сечениям особенно возрос после того, как Галилео Галилей (1564–1642) установил, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается по параболе, а Иоганн Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым они описывают эллипсы. Позднее было установлено, что кометы и другие небесные тела движутся по эллипсам, параболам или гиперболам в зависимости от их начальной скорости. Так как математики изучают не сами предметы, а их формы, то вместо предметов они рассматривают геометрические тела: цилиндр, шар, куб и т. д. Названия многих геометрических тел произошли от соответствующих предметов. Например, из Древней Греции пришли термины **конус** (греч. *konos* – предмет которым затыкали бочку), **цилиндр** (*kilindros* – валик). Термин **пира-**

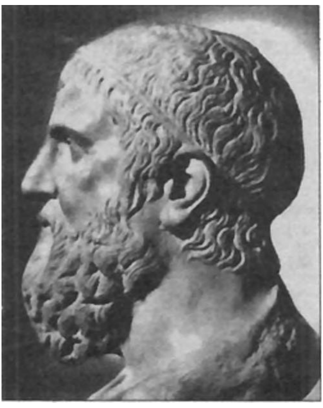
**мида** (греч. *pyramis*, родительный падеж *pyramidos*) – греки в свою очередь позаимствовали его, как полагают исследователи, из египетского языка. В папирусе Ахмеса (см. гл. 3) встречается слово *pyramis,* которым тот назвал ребро правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от формы хлебцев в Древней Греции («пирос» – рожь). В связи с тем что форма пламени иногда напоминает образ пирамиды, некоторые средневековые ученые считали, что термин происходит от греческого слова «пир» – огонь. Вот почему в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамида названа «огнеформным телом». В памятниках вавилонской и древнеегипетской архитектуры встречаются такие геометрические фигуры, как куб, параллелепипед, призма. Важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных фигур. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения. Термин **призма** – от греч. *prisma* – нечто распиленное. Термин **параллелепипед** – параллелепипедальное тело (греч. *parallelepipedon*, от *parallelos* – параллельный и *epipedon* – плоскость) встречается впервые у Евклида и означает дословно «параллельно плоскостное тело». Греческое слово «kybos» употребляется Евклидом в том же смысле, что и наше слово ***куб***; этот термин впервые встречался у пифагорейцев (VI–IV вв. до н. э.).

Термин **медиана** (лат. *mediana* – средняя) – встречается в различных областях знания. Широко используется в математике, медицине, теории вероятностей и математической статистике. Словом, везде, где речь идет о расположении какой-то части ближе к середине. Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны треугольника. **Медиана выборки** (термин был впервые введен Гальтоном, 1882) – это значение, которое разбивает выборку на две равные части. Половина наблюдений лежит ниже медианы, и половина наблюдений лежит выше медианы. Необходимо отметить, что Фрэнсису Гальтону мы обязаны не только появлением термина «медиана». Сейчас каждый знает, что по отпечаткам пальцев можно раскрыть преступление. Но так было далеко не всегда. В конце прошлого века в распоряжении сыщиков были лишь словесный портрет, следы, волосы, пепел и в лучшем случае – дедуктивный метод. Дактилоскопия стала на службу полиции в 1900 г., после того как было доказано, что отпечатки человеческих пальцев абсолютно точно идентифицируют личность. Это замечательное открытие сделал английский исследователь Фрэнсис Гальтон (1822–1911).

*Глава 12*
# ВЕЛИКИЕ ИМЕНА МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

**Математическая константа** – величина, значение которой не меняется. В отличие от физических констант, математические константы определены независимо от каких бы то ни было физических измерений. Мы уже встречались с двумя известными математическими константами – числом $\pi$ и основанием натурального логарифма $e$. Эти константы названы так в честь Архимеда и Пифагора. Термин «золотое сечение» был придуман неутомимым ученым-экспериментатором и гениальным художником Леонардо да Винчи. Многие математические константы названы именами ученых, даже не имевших прямого отношения к их происхождению. Например, квадратный корень из трех называется константой Теодоруса.

Более обоснованно называть **число «пи»** константой Архимеда, так как он один из первых предложил способ вычисления этой константы (см. гл. 3). Строго говоря, этот метод приближения $\pi$ не был новшеством: еще раньше вписывать многоугольники в окружность с возрастающим числом сторон предложил Антифон, а его современник Брисон из Гераклеи дополнительно ввел описанные многоугольники. Новшеством был выполненный Архимедом правильный расчет результата удвоения числа сторон как вписанного, так и описанного многоугольника. Тем самым он разработал процедуру, повторение которой достаточное число раз, в принципе, позволяет вычислить $\pi$ с любым количеством знаков (кстати, периметр правильного многоугольника легко вычисляется с помощью простых тригонометрических функций: синуса, косинуса и тангенса, однако во времена Архимеда, т. е. в III в. до н. э., эти функции еще не были полностью изучены и вычисление периметров было далеко не таким легким делом, как может сейчас показаться).



**Архимед** родился в 287 г. до н. э. в Сиракузах, на острове Сицилия. Сицилия была дальним западным форпостом греческой культуры. Здесь жил и умер Эмпедокл, сюда приезжал Платон осуществлять свои идеи об идеальной структуре рабовладельческого государства, в годы детства Архимеда эпирский царь Пирр вел здесь войну с римлянами и карфагенянами, пытаясь создать новое греческое государство. В этой войне отличился один из родственников Архимеда – Гиерон, ставший в 270 г. до н. э. правителем Сиракуз. Отец Архимеда, астроном Фидий, был одним из приближенных Гиерона, и это открыло ему возможность дать сыну хорошее образование. Но Архимед не поехал в Афины, а отправился в Александрию, где у него сложились дружеские отношения с астрономом Кононом, математиком и географом Эратосфеном; в дальнейшем он поддерживал с ними научную переписку. В Александрии в это время правители Египта Птолемеи собрали лучших греческих ученых и мыслителей, а также основали знаменитую библиотеку, заключавшую в себе, как утверждают, более семисот тысяч папирусных свитков. Греческий ученый Каллимах создал каталог книг, и Александрийская библиотека стала самым крупным культурным и научным центром античного мира.

После учебы в Александрии Архимед вновь вернулся в Сиракузы и унаследовал должность своего отца. Основные работы Архимеда касались различных практических приложений математики (геометрии), физики, гидростатики и механики. В труде «Об измерении круга» Архимед впервые вычислил число «пи» – отношение длины окружности к диаметру – и доказал, что оно одинаково для любого круга. Мы до сих пор пользуемся придуманной Архимедом системой наименования целых чисел.

Великий ученый изучал силы, действующие на тела, среди их числа была и сила тяжести. Он является основателем двух разделов механики – статики и гидростатики. Первый закон, который открыл Архимед, – **закон Архимеда**, согласно которому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, равная весу вытесненной им жидкости. *«Однажды приподнявши ногу в воде, Архимед констатировал с удивлением, что в воде нога стала легче. – Эврика! Нашел! – воскликнул он, выходя* *из своей ванны»,* – анекдот занятный, но не правдивый. Знаменитое «Эврика!» было произнесено не в связи с открытием закона Архимеда, как это часто говорят, но по поводу закона удельного веса металлов – открытия,которое также принадлежит сиракузскому ученому и обстоятельные детали которого находим у Витрувия. Рассказывают, как однажды к Архимеду обратился Гиерон, правитель Сиракуз: он приказал проверить, соответствует ли вес золотой короны весу отпущенного на нее золота. Чтобы исполнить приказ Архимед сделал два слитка – один из золота, другой из серебра, каждый такого же веса, что и корона. Затем поочередно положил их в сосуд с водой и отметил, на сколько поднялся ее уровень. Опустив в сосуд корону, Архимед установил, что ее объем превышает объем слитка. Так и была доказана недобросовестность мастера. Архимед был не только математиком и механиком. Он был одним из крупнейших инженеров своего времени, конструктором машин и механических аппаратов. Он изобрел машину для поливки полей («улитку») и водоподъемный винт. Интересно, что усовершенствованный вариант водоподъемной машины можно было встретить в начале XX в. в монастыре, находившемся на Валааме, одном из северных российских островов. Сегодня же архимедов винт используется, к примеру, в обыкновенной мясорубке. Потом Архимед изобрел болт – еще одно нехитрое изобретение, сделанное из винта и гайки. Это был первый ученый, уделявший много внимания и сил военным задачам. К этому его побуждало политическое положение Сиракуз. Архимеду было двадцать три года, когда началась 1-я Пуническая война между Римом и Карфагеном, и шестьдесят девять лет, когда началась 2-я Пуническая война, во время которой он и погиб (212 г. до н. э.). Под руководством Архимеда сиракузяне построили множество военных машин различного назначения. Греческий историк Плутарх, автор биографии Марцелла, описал события, которые произошли после того, как римляне высадили в Сицилии сухопутное войско под предводительством Аппия Клавдия, а под стенами Сиракуз появился римский флот под командованием Марцелла: *«При двойной атаке римлян (т. е. с суши и с моря. – В. К.) сиракузцы онемели, пораженные ужасом. Что они могли* *противопоставить таким силам, такой могущественной рати? Архимед пустил в ход свои машины. Сухопутная армия была поражена градом метательных снарядов и громадных камней, бросаемых с великой стремительностью. Ничто не могло противостоять их удару, они все низвергали пред собой и вносили смятение в ряды. Что касается флота — то вдруг с высоты стен бревна опускались, вследствие своего веса и приданной скорости, на суда и топили их. То железные когти и клювы захватывали суда, поднимали их в воздух носом вверх, кормою вниз и потом погружали в воду. А то суда приводились во вращение и, кружась, попадали на подводные камни и утесы у подножия стен. Большая часть находящихся на судах погибала под ударом. Всякую минуту видели какое-нибудь судно поднятым в воздухе над морем. Страшное зрелище!..»* Попытка Марцелла противопоставить технике Архимеда римскую военную технику потерпела крах. Архимед разбил громадными камнями осадную машину «самбуку», и Марцеллу пришлось увести флот в безопасное место, дать приказ об отходе сухопутной армии и перейти к длительной осаде. Таким образом, Архимед вошел в историю как один из первых ученых, работавших на войну, и как первая жертва войны среди людей науки. Архимед был человеком, страстно увлеченным механикой. Он проверял и создавал теорию пяти механизмов (теория простых механизмов). Это — рычаг (*«Дайте мне точку опоры*, — говорил Архимед, — *и я сдвину Землю»*), клин, блок, бесконечный винт и лебедка. Впоследствии эти механизмы широко применялись во многих странах мира. Легенда гласит, что Архимед погиб во время осады Сиракуз: его убил римский воин в тот момент, когда ученый был поглощен поисками решения поставленной перед собой проблемы.

Любопытно, что, завоевав Сиракузы, римляне так и не стали обладателями трудов Архимеда. Только через много веков они были обнаружены европейскими учеными. Вот почему Плутарх, одним из первых описавший жизнь Архимеда, упомянул с сожалением, что ученый не оставил после себя ни одного сочинения. Плутарх пишет, что Архимед умер в глубокой старости. На его могиле была установлена плита с изображением шара и цилиндра. Ее видел Цицерон, посетивший Сицилию через

137 лет после смерти ученого. Только в XVI–XVII вв. европейские математики смогли, наконец, осознать значение того, что было сделано Архимедом за 2000 лет до них.

**Корень квадратный из двух часто называют константой Пифагора**. Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. Даже тот человек, который вовсе не интересуетя математикой, прекрасно знает, что такое «пифагоровы штаны». Причина такой популярности теоремы Пифагора ясна: это простота, красота, значимость. Теорема Пифагора издавна широко применялась в разных областях науки, техники и практической жизни.

О ней писали в своих произведениях римский архитектор и инженер Витрувий, греческий писатель-моралист Плутарх, греческий ученый III в. Диоген Лаэрций, математик V в. Прокл и многие другие. Легенду о том, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву быка или, как рассказывают другие, сотню быков, часто любили высмеивать многие писатели и поэты. Так, например, немецкий писатель-романист А.Шамиссо, который в начале XIX в. участвовал в кругосветном путешествии на русском корабле «Рюрик», написал такие строки:

*Пребудет вечной истина, как скоро*
*Ее познает слабый человек!*
*И ныне теорема Пифагора*
*Верна, как и в его далекий век.*

*Обильно было жертвоприношенье*
*Богам от Пифагора. Сто быков*
*Он отдал на закланье и сожженье*
*За света луч, пришедший с облаков.*

*Поэтому всегда с тех самых пор,*
*Чуть истина рождается на свет,*
*Быки ревут, ее почуя, вслед.*

*Они не в силах свету помешать,*
*А могут лишь, закрыв глаза, дрожать*
*От страха, что вселил в них Пифагор.*

Теорема Пифагора имеет огромное значение. Она применяется в геометрии буквально на каждом шагу. Существует около пятисот различных доказательств этой теоремы, что свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций, и не найти, пожалуй, никакой другой теоремы, заслужившей столько всевозможных сравнений. Во Франции и некоторых областях Германии в Средневековье теорему Пифагора почему-то называли «мостом ослов». У математиков арабского Востока эта теорема получила название «теоремы невесты». Дело в том, что в некоторых списках «Начал» Евклида эта теорема называлась «теоремой нимфы» – за сходство чертежа с пчелкой, бабочкой, что по-гречески называлось нимфой. Но словом этим греки называли еще некоторых богинь, а также вообще молодых женщин и невест. При переводе с греческого на арабский переводчик, не обратив внимания на чертеж, перевел слово «нимфа» как «невеста», а не «бабочка». Так появилось ласковое название знаменитой теоремы – «теорема невесты». В VI в. до н. э. средоточием греческой науки и искусства стала Иония – группа островов Эгейского моря, расположенных у берегов Малой Азии. Там в семье золотых дел мастера, резчика печатей и гравера Мнесарха родился сын. По преданию, в Дельфах, куда приехали Мнесарх с женой Парфенисой – то ли по делам, то ли в свадебное путешествие, оракул предрек им рождение сына, который прославится в веках своей мудростью, делами и красотой. Бог Аполлон, устами оракула, советует им плыть в Сирию. Пророчество чудесным образом сбывается – в Сидоне Парфениса родила мальчика. И тогда по древней традиции Парфениса принимает имя Пифиада, в честь Аполлона Пифийского, а сына нарекает Пифагором, т. е. предсказанным пифией. В легенде ничего не говорится о годе рождения Пифагора; исторические исследования датируют его появление на свет приблизительно 580 г. до н. э. Вернувшись из путешествия, счастливый отец воздвигает алтарь Аполлону и окружает юного Пифагора заботами, которые могли бы способствовать исполнению божественного пророчества. Возможности дать сыну хорошее воспитание и образование у Мнесарха были. Итак, примем, что Пифагор родился около 580 г. до н. э. на острове Самосе, расположенном у самых берегов Малой Азии. От путешественников и капитанов кораблей он узнавал о близких и далеких чудесных странах Египта и Вавилонии, мудрость жрецов которых изумляла молодого Пифагора и манила его. Будущий великий математик и философ уже в детстве обнаружил большие способности к наукам. У своего первого учителя Гермодамаса Пифагор получает знания основ музыки и живописи. Для упражнения памяти Гермодамас заставлял его учить песни из «Одиссеи» и «Илиады». Первый учитель прививал юному Пифагору любовь к природе и ее тайнам. Прошло несколько лет, и по совету своего учителя Пифагор решает продолжить образование в Египте. Учеба Пифагора в Египте способствует тому, что он сделался одним из самых образованных людей своего времени. В Египте, рассказывают, Пифагор попал в плен к Камбизу, персидскому завоевателю, и его увели в плен в Вавилон. Согласно старинным легендам, в плену в Вавилоне Пифагор встречался с персидскими магами, приобщился к восточной астрологии и мистике, познакомился с учением халдейских мудрецов. Халдеи познакомили Пифагора со знаниями, накопленными восточными народами в течение многих веков: астрономией и астрологией, медициной и арифметикой. 12 лет пробыл в вавилонском плену Пифагор, пока его не освободил персидский царь Дарий Гистасп, прослышавший о знаменитом греке. Пифагору было уже шестьдесят; он решает вернуться на родину, чтобы приобщить к накопленным знаниям свой народ.

С тех пор как Пифагор покинул Грецию, там произошли большие изменения. Лучшие умы, спасаясь от персидского ига, перебрались в Южную Италию, которую тогда называли Великой Грецией, и основали там города-колонии – Сиракузы, Агригент, Кротон. Здесь и задумывает Пифагор создать собственную философскую школу. Для этого были свои причины. После возвращения домой Пифагор попытался создать на родине свою школу (лучше сказать секту, общину), в основу которой положил аристократическую идеологию, резко противоречащую идеологии античной демократии, преобладавшей в то время на Самосе. Школа вызвала недовольство у жителей острова, и Пифагору пришлось покинуть родину. Он переселяется в южную Италию – колонию Греции – и здесь, в Кротоне, вновь основывает школу – пифагорейский союз, просуществовавший больше двух веков. Свою школу Пифагор создает как тайную организацию со строго ограниченным числом учеников из аристократии; попасть в нее было не просто! Претендент должен был выдержать ряд сложных испытаний; по утверждению некоторых историков, одним из таких испытаний являлся обет пятилетнего молчания, за время которого принятые в школу ученики могли слушать голос учителя лишь из-за занавеса, а увидеть его они могли только после того, как их *«души будут очищены музыкой и тайной гармонией чисел»*. Довольно быстро Пифагор завоевывает большую популярность среди жителей города, умело используя свои знания, полученные в странствиях по свету. Со временем ученый прекращает выступления в храмах и на улицах. В своем доме Пифагор учил медицине, принципам политической деятельности, астрономии, математике, музыке, этике и многому другому. Из его школы вышли выдающиеся политические и государственные деятели, историки, математики и астрономы. В школе Пифагора впервые высказана догадка о шарообразности Земли. Мысль о том, что движение небесных тел подчиняется определенным математическим соотношениям, идеи «гармонии мира» и «музыки сфер», впоследствии приведшие к революции в астрономии, впервые появились именно в школе Пифагора.

Многое сделал ученый и в геометрии. В школе Пифагора геометрия впервые оформляется в самостоятельную научную дисциплину. Именно Пифагор и его ученики первыми стали изучать геометрию систематически – как теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных рецептов по землемерию.

Важнейшей научной заслугой Пифагора считается систематическое введение доказательства в математику и, прежде всего, в геометрию. Строго говоря, только с этого момента математика и начинает существовать как наука, а не как собрание древнеегипетских и древневавилонских практических рецептов. С рождением же математики зарождается и наука вообще, ибо *«ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства» (Леонардо да Винчи)*. Прошло 20 лет. Слава о братстве разнеслась по всему миру. Однажды к Пифагору пришел Килон, человек богатый, но злой, желая спьяну вступить в братство. Получив отказ, Килон поджег дом Пифагора. При пожаре пифагорейцы спасли жизнь своему учителю, пожертвовав своими жизнями. Пифагор был сильно потрясен случившимся и вскоре покончил жизнь самоубийством. Пифагор умер в Метапонте (Южная Италия) около 500 г. до н. э.

Человек различает окружающие его предметы по форме. Еще в эпоху Возрождения художники открыли, что любая картина имеет определенные точки, невольно приковывающие наше внимание, – так называемые *зрительные центры*. При этом абсолютно неважно, какой формат имеет картина – горизонтальный или вертикальный. Таких точек всего четыре, и расположены они на расстоянии 3/8 и 5/8 от соответствующих краев плоскости. В математике **пропорцией** (лат. *proportio* – соотношение, соразмерность) называют равенство двух отношений: $a : b = c : d$ ($a$ так относится к $b$, как $c$ относится к $d$. **Золотое сечение** – *это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему* $a : в = в : c$.

Эту пропорцию принято обозначать греческой буквой $\varphi$ (встречается также обозначение $\tau$ – константа золотого сечения) в честь начальной буквы имени Фидий. Скульптор Фидий, живший в Афинах в V в. до н. э., считал золотое сечение самым гармоничным. Вычислим это значение. Примем длину отрезка, в котором надо найти золотое сечение, за 1. Его большую часть обозначим через $x$, тогда меньшая – это $1 - x$. По определению золотого сечения составим уравнение:

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}.$$

Решив его относительно $x$, получим

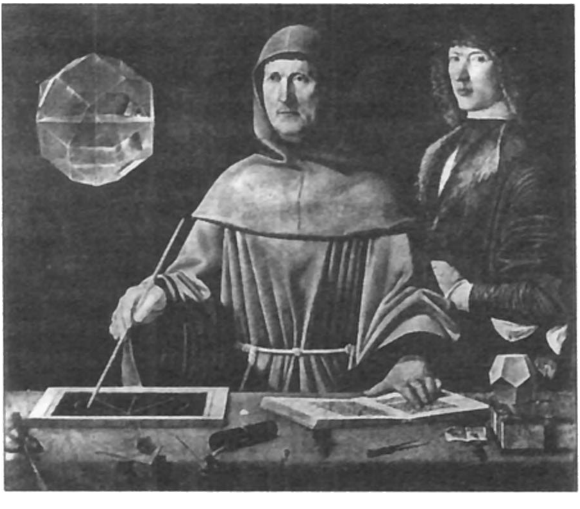
$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618.$$

Обратная величина дает для этой константы значение

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}61803398874989484...$$

Приближенно это отношение равно 5/3, точнее 8/5, 13/8 и т. д. Именно это постоянное число деления в Средние века было названо Божественной пропорцией, а в наши дни именуется золотым делением. Принято считать, что понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор. Есть предположение, что Пифагор свое знание о золотом делении позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют о том, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Французский архитектор Ле Корбюзье нашел, что в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления. Греки были искусными геометрами. В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках были обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления. В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н. э.), Папп (III в. н. э.) и др. В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.

В эпоху Возрождения интерес к золотому делению усиливается среди ученых и художников, его стали применeнять как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. **Лука Пачоли** прекрасно понимал значение науки для искусства. В 1496 г. по приглашению герцога Моро он приезжает в Милан, где читает лекции по математике. В Милане при дворе Моро в то время работал и Леонардо да Винчи. В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли «Божественная пропорция» с блестяще выполненными иллюстрациями, многие полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее «божественную суть» как выражение божественного триединства: Бога Сына, Бога Отца и Бога Духа



Святого (подразумевалось, что малый отрезок есть олицетворение Бога Сына, больший отрезок – Бога Отца, а весь отрезок – Бога Духа Святого).

Леонардо да Винчи также много внимания уделял изучению золотого деления. Он производил сечения стереометрического тела, образованного правильными пятиугольниками, и каждый раз получал прямоугольники с отношениями сторон в золотом делении. **Поэтому он дал этому делению название «золотое сечение»**. Так оно и держится до сих пор как самое популярное.

Леонардо (Лионардо) да Винчи (1452–1519) – знаменитый итальянский живописец, скульптор, архитектор и ученый; родился 15 апреля 1452 г. в городе Винчи, близ Флоренции; незаконный сын местного нотариуса сера Пьера Винчи и молодой крестьянки Катарины. Воспитывался в доме отца и вместе с ним переселился в 1469 г. (а может быть еще в 1466 г.) во Флоренцию. Впервые его имя упоминается в книге корпорации флорентинских художников от 1472 г. В 1469–1476 гг. (а может быть, и до 1478) Леонардо да Винчи работал в боттеге Верроккио, а в 1480 г. он уже имел собственную мастерскую. Первые свидетельства о самостоятельных работах: заказ на алтарный образ для капеллы Св. Бернарда во дворце Синьории (1478 г.; выполнен не был) и договор на «Поклонение волхвов» для монастыря Сан Донато а Скопето (1481; работа осталась незаконченной). В 1482–1499 гг. Леонардо да Винчи жил в Милане, где состоял на службе у герцога Лодовико Моро в качестве военного инженера, архитектора, скульптора и живописца. В апреле 1500 г. Леонардо возвращается во Флоренцию (через Мантую и Венецию). В 1502 г. около года служит у Чезаре Борджа, по поручению которого объезжает Романью, Умбрию и Тоскану. В 1503–1506 гг. во Флоренции работает над стенной росписью в зале Большого совета дворца Синьории («Битва при Ангиари»), в 1506 г. возвращается в Милан на службу к французскому наместнику Шарлю д'Амбуаз, где живет до 1513 г. (с перерывом для поездки во Флоренцию в 1507 г.). С конца 1513 г. Леонардо да Винчи жил в Риме, откуда в 1516 г. он был приглашен королем Франциском I во Францию на должность первого живописца, архитектора и механика короля. Умер Леонардо в замке Клу 2 мая 1519 г., завещав рукописное наследство ученику Франческо Мельци, сопровождавшему его во Францию. Леонардо да Винчи был гениальным ученым, занимавшимся не только искусством, но и математикой, механикой, физикой, астрономией, геологией, ботаникой, анатомией и физиологией человека и животных, последовательно применявшим принцип экспериментального исследования. В его рукописях встречаются схемы летательных машин, парашюта и вертолета, новых конструкций и винторезных станков, печатающих, деревообрабатывающих и других машин; отличающиеся точностью анатомические рисунки; мысли, относящиеся к математике, оптике, космологии (идея физической однородности вселенной) и другим наукам. Около семи тысяч страниц сохранившихся рукописей (написанных на итальянском языке в большинстве справа налево, зеркально) были позднее разъединены и хранятся теперь в библиотеках Лондона, Виндзора, Парижа, Милана и Турина. Леонардо да Винчи остался в истории символом эпохи, которая *«нуждалась в титанах и... породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености»*.

Леонардо да Винчи часто пользовался удивительными числами, которые были открыты итальянским математиком Средневековья Леонардо Пизанским (Фибоначчи). В этом можно убедиться, если, например, сравнить древнеегипетские пирамиды, картину Леонардо да Винчи «Мона Лиза», подсолнух, улитку, сосновую шишку и палец человека – оказывается, в них есть общая связующая нить – те самые удивительные числа. Гениальная суть последовательности чисел Фибоначчи состоит в том, что каждое число в этой последовательности получается из суммы двух предыдущих чисел. Два числа, образующие последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ... называются ***числами Фибоначчи***, а сама последовательность – ***последовательностью Фибоначчи***. В числах Фибоначчи существует одна очень интересная особенность: при делении любого числа из последовательности на число, стоящее перед ним в ряду, результатом всегда ***будет величина, колеблющаяся около***

***иррационального значения 1,61803398875...*** Более того, после 13-го числа последовательности этот результат деления становится постоянным до бесконечности ряда... равным константе золотого сечения. Пропорции различных частей нашего тела составляют число, очень близкое к золотому сечению. Если эти пропорции совпадают с формулой золотого сечения, то внешность или тело человека считается идеально сложенными.

Вот первый пример золотого сечения в строении тела человека:

если принять центром человеческого тела точку пупа, а расстояние между ступней человека и точкой пупа за единицу измерения, то рост человека эквивалентен числу 1,618. Кроме этого есть и еще несколько основных золотых пропорций нашего тела:

- отношение расстояний от кончиков пальцев до запястья и от запястья до локтя составляет 1:1,618
- отношение расстояний от уровня плеча до макушки головы и от подбородка до макушки головы составляет 1:1,618
- отношение расстояний от точки пупа до макушки головы и от уровня плеча до макушки головы составляет 1:1,618
- отношение расстояний от точки пупа до коленей и от коленей до ступней составляет 1:1,618
- отношение расстояний от кончика подбородка до кончика верхней губы и от кончика верхней губы до ноздрей составляет 1:1,618
- отношение расстояний от кончика подбородка до верхней линии бровей и от верхней линии бровей до макушки составляет 1:1,618

Черты лица человека также таят в себе множество примеров соотношений, приближающихся по значению к формуле золотого сечения. Однако не бросайтесь тотчас же за линейкой, чтобы обмерять лица всех людей! Потому что точные соответствия золотому сечению, по мнению ученых и людей искусства – художников и скульпторов, существуют только у идеальных людей, которых, если верить тем же ученым, в природе не существует. Собственно, считается, что точное соответствие черт лица человека золотой пропорции и есть идеал красоты для человеческого взора.

Ученые выяснили, что в расположении листьев на ветке, семян подсолнечника или шишек сосны со всей очевидностью проявляется ряд Фибоначчи, а стало быть проявляется закон золотого сечения. В ящерице с первого взгляда улавливаются приятные для нашего глаза пропорции: отношение длины ее хвоста к длине остального тела равно 62:38.

И в растительном и в животном мире настойчиво пробивается формообразующая тенденция природы – симметрия относительно направления роста и движения.

Природа поделила все на симметричные части и золотые пропорции. В частях проявляется повторение строения целого.

Иоганн Вольфганг Гете – поэт, естествоиспытатель и художник (он рисовал и писал акварелью) – мечтал о создании единого учения о форме, образовании и преобразовании органических тел. Это он ввел в научный обиход термин «морфология».

Между математикой и литературой тоже существует связь, и это не случайно, ведь каждой науке присуще стремление к стройности, соразмерности и гармонии. Природа совершенна, и у нее есть свои законы, выраженные с помощью математики и проявляющиеся во всех искусствах.

Всем известно, что Пушкину математика не давалась с детства, и поэтому он ее не любил. Но многие произведения Пушкина, например стихи, тесно связаны с математикой, а точнее – с числами Фибоначчи. Наиболее часто в творчестве поэта встречаются стихи с таким количеством строк, которые тяготеют именно к этой числовой последовательности: 5, 8, 13, 21, 34. Наиболее выдающиеся шедевры, состоящие из 8 строчек, – это «Я вас любил», «Пора, мой друг, пора! Покоя сердце просит». 13–14 строчек в стихах «Сонет», «Мадонна», «Няне». По 20 строчек – «Храни меня, мой талисман», «Во глубине сибирских руд», «К Чаадаеву», «Памятник».

То, что количество строк в стихах Пушкина соответствует числам Фибоначчи, вовсе не случайность и не слепая игра вероятности! Это закономерность творческого восприятия поэта, интуитивное чувство гармонии. Хотя сам поэт и признавал, что нельзя «алгеброй гармонию разъять», но математические законы действуют в его поэзии независимо от автора. Другое высказывание Пушкина сближает две далекие друг от друга науки: математику и литературу. Оно звучит так: *«Вдохновение нужно в поэзии, как в геометрии»*. Знаменитый роман в стихах «Евгений Онегин» состоит из 8 глав, в каждой главе в среднем 50 стихов (только в 7-й главе 55), каждый стих состоит из 14 строчек. Основная схема построения «Евгения Онегина» основана на близости к трем числам Фибоначчи: 8, 13, 55 (числа Фибоначчи: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55). Интуиция Пушкина была необычайно сильной и плодотворной. Это основа его гениальности.

В школьной геометрии до недавнего времени не было места для понятия золотого сечения. Однако еще Иоганн Кеплер (1571–1630) отмечал, что *«в геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем»*. Теперь же, если теорему Пифагора знает каждый школьник, то, очевидно, он должен так же хорошо знать и золотое сечение.

*Глава 13*
# БЕСКОНЕЧНОСТЬ

*Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиною еще большая, нет вещи столь малой, в которую бы не вместилась еще меньшая.*

*К. Прутков*

*Линия состоит из множества точек, плоскость — из бесконечного множества линий, книга — из бесконечного множества плоскостей, сверхкнига — из бесконечного множества книг.*

*Х. Л. Борхес. Книга песка*

Термин ***бесконечность*** соответствует нескольким различным понятиям, в зависимости от области применения, будь то математика, физика, философия, теология или повседневная жизнь. Бесконечность чужда нашему непосредственному опыту, и в большинстве культур появилась как абстрактное количественное обозначение чего-то непостижимо большого, в применении к сущностям без пространственных или временных границ. Также бесконечность неразрывно связана с обозначением беско́нечно малого, к примеру, еще Аристотель сказал: *«...всегда возможно придумать большее число, потому что количество частей, на которые можно разделить отрезок, не имеет предела. Поэтому бесконечность потенциальна, никогда не действительна; какое бы число делений ни задали, всегда потенциально можно поделить на большее число»*. (Физика III, 6)

Представить себе бесконечность можно, если попытаться посчитать число песчинок на пляже, число звезд на небе и т. д. Во всех подобных случаях, когда количество объектов необозримо большое, хочется сказать, что таких объектов бесконечно много. Тем не менее, хотя мы и не можем назвать точное число песчинок на данном пляже, мы понимаем, что это количество выражается очень большим, но все же конечным числом. Что же касается количества видимых звезд на небе (а есть еще и невидимые), то, согласно современным физическим представлениям, даже количество атомов во Вселенной не превышает числа 10 в десятой и еще раз в десятой степени. Таким образом, в реальном физическом мире мы не можем обнаружить бесконечность. Что же это означает? Какую роль играет понятие бесконечности в математике? Это означает только то, что если какому-либо понятию нет аналога в физической реальности, то и смотреть на него целесообразно лишь с точки зрения той пользы, которую оно приносит нашему мышлению. А здесь мы вслед за Гильбертом скажем, что *«идеальные бесконечно удаленные элементы приносят ту пользу, что они делают систему законов и знаний возможно более простой и обозримой»*. О бесконечности размышляли еще в глубокой древности. Майя использовали нуль в своей двадцатиричной системе счисления почти на тысячелетие раньше индийцев. Первая сохранившаяся стела с датой календаря майя датируется 36 г. до н. э. Любопытно, что тем же самым знаком (0) математики майя обозначали и бесконечность. Брахмагупта говорит, что любое число, умноженное на нуль, есть нуль, и делает отчаянную попытку ввести деление на нуль. Он утверждает, что *«нуль, разделенный на нуль – есть нуль»*. Это конечно ошибка с точки зрения нашей математики, но в этом есть настоящая математическая дерзость, настоящая энергия заблуждения, которая привела индийскую математику к совершенно удивительным открытиям. В частности, Бхаскара II в книге «Венец науки» («Сиддханта-сиромани»), написанной около 1150 г., делает еще одну попытку понять природу деления на нуль. Он пишет: *«Количество, деленное на нуль, становится дробью, знаменатель которой равен нулю. Эту дробь называют бесконечностью. Это количество неизменно, даже если многое будет прибавлено или отнято, поскольку нет изменений в бесконечном Боге, ничего не меняется в нем, если миры будут созданы или разрушены и бесчисленные существа рождены или уничтожены»*. т. е. связь нуля и бесконечности тоже была известна индийским математикам. Блестящая работа индийских математиков была воспринята арабскими математиками, благодаря которым она двинулась завоевывать Европу. Но, как это часто бывало, и здесь проблемы с бесконечностью были разрешены далеко не сразу. Показательно, что победитель конкурса швейцарский математик

С. Люилье, о котором мы упоминали выше, представил работу под девизом: *«Бесконечность – пучина, в которой тонут наши мысли»*.

И тем не менее бесконечность не была чужда европейским математикам. О том, что 1/0 есть именно число, а не предел функции, сказано еще в XVIII в. Эйлером! В исследовании бесконечных множеств преуспел чешский математик Бернард Больцано (1781–1848). В «Парадоксах бесконечности» (изданных в 1851 г.) Больцано явился предшественником знаменитого Георга Кантора, который внес огромный вклад в исследование бесконечности. Кантор был единственным математиком и философом, который считал, что бесконечность не только существует, но и в полном смысле постижима человеком, и постижение это будет поднимать математиков, а вслед за ними и теологов, все выше – ближе к Богу. Этой задаче он посвятил жизнь.

Семья Георга Кантора (1845–1918) переехала из России в Германию, когда он был еще ребенком. Именно там он начал изучать математику. Защитив в 1868 г. диссертацию по теории чисел, он получил степень доктора в Берлинском университете. Настойчивое стремление Кантора рассмотреть бесконечность как нечто актуально данное было для того времени большой новостью. Ученый твердо верил, что он избран Богом, чтобы совершить великий переворот в науке, и эта его вера поддерживалась мистическими видениями. Кантор тяжело переживал противоречия своей теории и сложности с ее принятием. С 1884 г. он страдал глубокой депрессией и через несколько лет отошел от научной деятельности. Последние 30 лет своей жизни Кантор почти каждый год ложился в психиатрическую клинику в Галле, в которой он и умер в 1918 г. от сердечной недостаточности. Там, как описывал он это в своих письмах друзьям, ему нередко являлась в видениях некая «муза», которая утешала его и убеждала твердо отстаивать истинность теории множеств... **Знакомый нам знак, обозначающий бесконечность «∞», ввел еще в 1655 г. английский математик Джон Валлис**. Этот знак использует каждый старшеклассник при записи области изменения функции, нахождении пределов и т. п.

Знак бесконечности постепенно стал привычен не только для математиков, но встречается и в повседневной жизни. Посмотрите, как доходчиво в одной поваренной книге описывается изготовление фондю по-швейцарски. После перечисления необходимых ингредиентов там сказано: *«Дальше начинается искусство перемешивания. Нельзя просто тупо мешать деревянной ложкой, движения должны напоминать математический знак бесконечности — лежачую восьмерку. В противном случае сыр быстро расплавится, и могут появиться нежелательные, «неправильные» комочки: масса же должна быть блистательно однородной»*. А вот еще пример. Визитной карточкой известного голландского дизайнера ван Дайка можно считать рекламный плакат голландского танцевального фестиваля, разработанный им в студии профессора Герта Думбара в 1995 г. По словам автора, любители балета и дизайна снимали афиши со стен еще до того, как на них успевал высохнуть клей. По словам критиков, Ван Дайк делает это изящно и просто, обходясь минимальным набором графических средств. Орнамент на заднем плане напоминает музыкальные ноты (выполнен в лаконичной стилистике ар-деко), ему пластически уподоблена фигура танцора. Поза танцора походит на математический символ, обозначающий бесконечность. Экспрессия жеста не доведена возможностями дизайна до предела, как могло произойти в работе представителя другой художественной школы.

*Глава 14*
# МАГИЯ ЧИСЕЛ

*Число есть слово неизреченное; оно есть волна и свет, хотя никто их не видит; оно есть ритм и музыка, хотя их никто не слышит. Оно неизменно, но вариации его безграничны. Любая форма жизни есть конкретное проявление Числа.*

*Морис Дрюон. Воспоминания Зевса*

С глубокой древности числа играют важную и многогранную роль в жизни человека. Идея о необычайно важной (магической) роли чисел была широко распространена у многих древних или «нецивилизованных» (в европейском смысле) народов. Древние люди приписывали им особые, сверхъестественные свойства; одним числа сулили счастье и успех, для других определенные числа предвещали удар судьбы. Люди открыли устрашающий смысл блистательной ясности чисел с тех самых пор, как научились считать. Их обаяние захватывало мыслителей каждой цивилизации – и, пожалуй, никого оно так не очаровывало как греческого мыслителя и математика Пифагора. Пифагор и его последователи далеко продвинули эту блестящую идею и доказали, что «все вещи – есть числа». Но за предложенными Пифагором основаниями гармонии лежала темная магия, которая уходила своими корнями в глубины истории человечества. В древности и в Китае и на Западе практически все люди верили в то, что определенные числа имеют мистическое или оккультное значение. Так, на Западе счастливыми числами считались **3** и **7**, так как 3 ассоциировалось со Святой Троицей, а 7 – с Семикнижием (первыми семью книгами Ветхого Завета). Семерку почитали еще за много столетий до нашей эры, в Средние века, почитают и теперь. Если обратиться к повседневной жизни, то и здесь можно встретить преобладание числа семь: 7 цветов радуги, 7 нот, 7 дней в неделе, 7 самураев, 7 чудес света и многое другое. С числом 7 связано множество загадок, притчей, пословиц, поговорок:

*«Семь пядей во лбу»,*

*«У семи нянек дитя без глазу»,*

*«Семь раз отмерь, один раз отрежь»,*
*«Один с сошкой, семеро с ложкой»,*
*«Для любимого дружка, семь верст не околица»,*
*«За семь верст киселя хлебать»,*
*«Семь бед – один ответ»,*
*«За семью морями»,*
*«Быть на седьмом небе»,*
*«Седьмая вода на киселе»,*
*«Семь футов под килем»,*
*«Видеть седьмой сон»,*
*«На семи ветрах»,*
*«Работать до седьмого пота»,*
*«Знать предков до седьмого колена»,*
*«За семью печатями»* и т. д.

Волшебное число 7 широко использовалось в сказках, мифах Древнего мира. У Атланта, подпиравшего плечами небесный свод, было семь дочерей-плеяд, которых Зевс превратил потом в созвездие. Одиссей семь лет был в плену у нимфы Калипсо. У вавилонян подземное царство окружено семью стенами. У мусульман небесный свод состоит из семи небес, и все угодные богу попадают на седьмое небо блаженства. У индусов есть обычай дарить на счастье семь слоников. Великий пост у христиан длится семь недель. В Библии повествуется о семи светильниках, семи ангелах, семи годах изобилия и семи – голода. В Древнем Вавилоне были известны семь планет, к которым причисляли тогда и Солнце и Луну. Все непонятные явления природы приписывали богам, и постепенно представление о богах соединилось и с семью планетами. По ним стали считать и время. Так родилась семидневная неделя. Названия дней связаны с именами богов. Во многих языках эти названия остались до сих пор: понедельник, например, у французов – «lundi» (день Луны), вторник – «марди» (день Марса); воскресенье у немцев – «sonntag» (день Солнца). Семь стало священным числом, его считают магическим. Возможно это объяснялось еще и тем, что человек воспринимает окружающий мир (свет, звуки, запахи, вкус) через семь отверстий в голове (2 глаза, 2 уха, 2 ноздри, рот). Рим и Киев были построены на семи холмах. Согласно индийским преданиям, Будда сидел под фиговым деревом с семью плодами. «Семиричность» мира проявлялась, как думали, и в семи возрастах человеческой жизни. Семь лет – младенчество, 14 лет – отрочество, двадцать один год – юношество, двадцать восемь лет – молодость, тридцать пять лет – зрелость и т д. Число 7 символизирует тайну, объединяет целостность 1 с идеальностью 6 и образует собственную симметрию, делающую его магическим числом. Семь – число таинственное, его сфера деятельности находится вне человеческого понимания. Семеро – это самое необычное сборище людей. Трудно иногда понять что их связывает, что разъединяет. От семи человек вообще не понятно, чего ожидать.

В христианском числовом символизме **8** является числом жизни после смерти. 8 символизирует жизнь после смерти из-за того, что стоит после 7. 7 – число жизни в этом мире (поскольку оно управляет основными ритмами земной жизни – рождением, изменением, смертью), а 8, следуя за 7, означает жизнь грядущего мира. В результате 8 является числом вечности и бесконечности, и математический символ бесконечности изображается, как восьмерка, которую «положили на бок». Число **13**, напротив, считалось несчастливым. В царской России, учитывая неизбежный суеверный страх у солдат, не формировали тринадцатый полк (хотя ужас охватывал и некоторых солдат четырнадцатого полка, когда они обнаруживали, что их полк на самом деле тринадцатый). Вообще, тринадцать – это «чертова дюжина»; во времена Рима – символ несчастья; несчастливое число у народов Севера; в картах Таро – самая зловещая карта. И в современном мире люди избегают этого числа: почти во всех европейских странах мест, вагонов № 13 нет. Профессор Кембриджского университета доктор Говард Тиллз утверждает, что нынешний ренессанс суеверий и предрассудков не имеет себе равного со времен Средневековья. Но причина этого только в ненадежности нашей эпохи и страхе перед столь же сомнительным завтрашним днем. А в Китае предпочтение отдавалось четным числам, потому что они, будучи делимы на 2, могли образовывать пары, воспринимавшиеся как добавочные противоположности, подтверждающие принцип инь/ян. Очень популярным в

Китае было число 64 – ведь оно замыкает нумерацию гексаграмм в Ицзин. Более того, оно делится на 2, как и его частные:

64 : 2 = 32, 32 : 2 = 16, 16 : 2 = 8, 8 : 2 = 4, 4 : 2 = 2, 2 : 2 = 1.

Ни одно из всех чисел не несет столь ярко выраженный негативный налет, как число **666**, потому что многовековая христианская «программа» заложила в наш мозг постулат, что это число – **число Антихриста**. Число 666 является скрытым обозначением имени Нерона, гонителя христианства, человека-зверя, который с крайней жестокостью расправлялся со своими политическими противниками и с ведома которого были убиты его мать, обе жены, философ Сенека и многие другие. Официальный титул Нерона был Nero Caesar – Неро Кесарь (в классической латыни «с» произносится как «к», в Средние века произношение изменилось на «ц»). В еврейском алфавите нет гласных букв; при написании слов гласные буквы или пропускаются, или обозначаются диакритическими знаками под или над согласными. Звук «о», например, обозначается буквой «в» (вав) с точкой над нею. Кто из евреев умел считать, тот, принимая буквы за цифры (соответствие букв числам характерен для той эпохи), мог подсчитать число императора Нерона. По азбуке/цифрам этот подсчет делался так: (нун) = 50; (реш) = 200; (вав) = 6; (коф) = 100; (самех) = 60; (реш) = 100. Таким образом, получаем 50 + 200 + 6 + 100 + 60 + 200 = 616. Так, 616, и было написано в первичном тексте Апокалипсиса. И первоначальные христиане из евреев хорошо знали, о ком идет речь в книге. Свои знания они передавали потом христианам из язычников (не евреев). Но в латинском языке «Nero» пишется только в именительном падеже. В остальных падежах к основе слова «Нерон» добавляются соответствующие окончания. А поэтому грекоязычные подданные Рима писали не «Неро Кесарь», а «Нерон Кесарь», таким образом к первоначально написанному слову добавилась буква «Н» (нун = 50).

С III столетия в списках Апокалипсиса в подсчетах числа зверя появляется цифра 666. Так это число и вошло в канонизованный в 692 г. текст Апокалипсиса («Warrax, Olegern, «ПО»). Впрочем, не только Нерон связан с числом 666. Как писал в своей книге «777. Каббала» Алистер Кроули, «имя Иисуса, Нерона, Наполеона, У. Е. Гладстона и любых личностей, которых вы невзлюбили, дают в сумме это число». И еще: если записать все римские цифры (кроме M) в порядке убывания, то получим число DCLXVI, равное 666.

### *Числа судьбы*

Некоторые считают, что судьба человека соотносится с определенным числом. Самый простой способ узнать число своей судьбы следующий.

Сложите дату и число месяца своего рождения.

Прибавьте год вашего рождения.

Сложите цифры, составляющие полученное число.

Допустим, человек родился 15 декабря 1934 года:

15 + 12 = 27

27 + 1934 = 1961

1 + 9 + 6 + 1 = 17 – это и есть число судьбы

Для рожденного 26 сентября 1984 года получим такой результат:

26 + 9 = 35

35 + 1984 = 2019

2 + 0 + 1 + 9 = 12 – число судьбы

Попросите европейца выбрать любое число между 1 и 12 и наверняка услышите: «7». Такое предпочтение семерки, возможно, объясняется религиозными поверьями. Но этому выбору есть и психологическое объяснение. Сознательно или бессознательно, но, угадывая что-то, люди отметают все, что логично, и стараются найти нелогичный ответ, хотя правильный выбор наугад невозможен без тщательного взвешивания возможных вариантов.

Китаец, оказавшийся перед таким выбором, не выберет 7. Он, скорее всего, будет размышлять следующим образом.

Исключаются крайние числа, остаются 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

Исключаются нечетные числа – они плохие! В итоге остаются 4, 6, 8 и 10.

Из оставшихся чисел только 4 и 8 кратны 4 – это хорошо. Остается выбрать 4 или 8. Число 8 ближе к середине заданного числового ряда, чем 4, и поэтому выбирается оно!

### *Магический квадрат*

Магический квадрат – это квадратная матрица чисел, располагающихся таким образом, что их суммы по диагоналям или в любом ряду по горизонтали и вертикали всегда составляют одно и тоже число. Арабы были знакомы с девятиклеточным магическим квадратом в VII в. В XII в. его описал в своих сочинениях испанский еврей Ибн Эзра, принявший мусульманство. Первое упоминание о магических квадратах в Западной Европе относится к XV в., когда в одном из геометрических сочинений был приведен квадрат из 25 клеточек. В 1514 г. Альбрехт Дюрер выпустил гравюру «Меланхолия», на которой нарисован квадрат из 16 клеточек. В 1654 г. Паскаль написал трактат о магических квадратах. Ниже приведен пример магического квадрата с суммой чисел по всем направлениям, равной 111.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 29 | 2 | 4 | 13 | 36 |
| 9 | 11 | 20 | 22 | 31 | 18 |
| 32 | 25 | 7 | 3 | 21 | 23 |
| 14 | 16 | 34 | 30 | 12 | 5 |
| 28 | 6 | 15 | 17 | 26 | 19 |
| 1 | 24 | 33 | 35 | 8 | 10 |

Страстно увлекался магическими квадратами знаменитый французский каббалист библиотекарь Ришелье Гаффарель. Он довел эту игру на сообразительность до уровня совершенной науки.

Для самых сообразительных существует и самый большой квадрат – квадрат девяти, или печать Габриеля. Он дает сумму 369 по всем вертикалям, всем горизонталям и по всем косым. В заключение отметим, что согласно одной гипотезе шахматы произошли из магических квадратов*.

---

* Сумма чисел в каждой строке, столбце и на диагоналях называется магической константой $M$. Магическая константа нормального волшебного квадрата зависит только от $n$ ($n$ – число клеток на стороне квадрата) и определяется формулой

$$M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Первые значения магических констант приведены в следующей таблице:

| **Порядок *n*** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***M* (*n*)** | 15 | 34 | 65 | 111 | 175 | 260 | 369 | 505 | 671 | 870 | 1105 |

### *Пифагоровы треугольники*

Среди бесконечного количества возможных прямоугольных треугольников особый интерес всегда вызывали так называемые «пифагоровы треугольники», стороны которых являются целыми числами. Несомненно, «пифагоровы треугольники» относятся к разряду «сокровищ геометрии», а поиски таких треугольников представляют одну из интереснейших страниц в истории математики. Наиболее широко известным из них является прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Он назывался также «священным» или «египетским», так как широко использовался в египетской культуре.

Для «египетского» треугольника теорема Пифагора принимает следующий числовой вид: $4^2 + 3^2 = 5^2$. После того как была открыта теорема Пифагора, возник вопрос, как отыскать все тройки натуральных чисел, которые могут быть сторонами прямоугольного треугольника. Какие-то общие методы отыскания таких троек чисел, например упомянутых выше (3, 4, 5) или (5, 12, 13), были известны еще вавилонянам. Одна из клинописных табличек содержит 15 троек. Среди них есть тройки, состоящие из настолько больших чисел, что не может быть и речи о нахождении их путем подбора. Такие тройки чисел называются Пифагоровыми. Для нахождения пифагоровых чисел известны формулы, которым уже две тысячи лет (см.: Математика : справ. школьника и студента. М.: Дрофа, 2000).

### *Лист*

Листы бумаги делаются в основном размером 21×29,5 см. А почему? На самом деле этот размер является «каноном» (пропорцией многих чисел), открытым Леонардо да Винчи. Он обладает удивительным свойством: если сложить лист бумаги упомянутого выше размера вдвое, длина превратится в ширину и пропорция останется прежней. И сколько бы вы ни складывали так листок, пропорция не нарушится. И только эта пропорция обладает таким свойством.

### *Лотереи*

Большинство лотерей, как государственных, так и проводимых различными благотворительными организациями, строятся по тому принципу, что выигрышный номер или набор номеров выбираются участниками наугад. Участвуя в национальных лотереях, многие люди выбирают числа судьбы или даты рождения, считая их «своими счастливыми»; другие умышленно отдают предпочтение выбору наугад, что обусловлено психологическими факторами. На самом же деле одно число ничем не лучше любого другого, а у комбинации из 1, 2, 3, 4, 5 и 6 столько же шансов, сколько и у 6, 8, 19, 23, 42 и 51.

Математическую суть любой лотереи составляют шансы. Так, например, если продано какой-то организацией 1745 благотворительных билетов, нумерованных от 1 до 1745, и к розыгрышу выставляется только один приз, шансы на этот приз у человека, купившего только 1 билет, будут 1745 к 1. Если человек покупает 5 билетов, его шансы становятся 1745 к 5, т. е. 349 к 1.

В национальной лотерее шансы против выигрыша астрономически малы – миллионы к одному. Игроки, которые платят 100 рублей за 100 билетов, имеют больше шансов выиграть приз, чем те, кто заплатил всего лишь 1 рубль. Но, с другой стороны, у них возрастают и шансы просто потерять свои деньги. В лотереях таких масштабов шансы против выигрыша столь велики, что игрок, заплативший всего 1 рубль, находится примерно в тех же условиях, что и игрок, заплативший 100 рублей и более.

Азартному игроку всегда следовало бы задаваться вопросом: а каковы мои шансы?

### *А теперь кое-что любопытного из мира чисел*

#### **Простые числа**

Люди давно заметили, что числа бывают двух разных сортов. Например, число 12 можно без остатка разделить на 2, 3, 4 и 6. А следующее за ним число 13 делится без остатка только само на себя: 13/13 = 1. Кроме того, каждое число делится на 1.

Такие числа, как 12 или 15, которые можно разделить на какое-нибудь другое, меньшее число, называются составными. Те, которые делятся только сами на себя, например 7, 11, 13, называются простыми.

**Самое маленькое простое число – 2.** Первую таблицу простых чисел составил Эратосфен (так называемое «решето Эратосфена») и заметил, что многие простые числа группируются в пары близнецов: таковы 11 и 13, 29 и 31, 41 и 43. В 1876 г. Люка доказал, что число $(2^{127} - 1)$ – простое, и в течение 75 лет оно оставалось наибольшим из известных простых чисел, что не покажется удивительным, если взглянуть на него:

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727.$$

Только в 1951 г. – после возникновения электронных вычислительных устройств – нашли бóльшее простое число. Какое-то время рекордсменом являлось 6002-значное число $(2^{19937} - 1)$ (я бы не хотел его здесь записывать). Это число упомянуто в книге мировых рекордов Гиннесса. Самое большое простое число, $(391\,581 \cdot 2^{216193} - 1)$, было открыто 6 августа 1989 г. группой *Амдал-6*. Число, содержащее 65 087 знаков, было получено на суперкомпьютере «Амдал-1200» в Санта-Кларе, штат Калифорния, США. Группа также открыла самые большие парные простые числа: $(1\,706\,595 \cdot 2^{11235} - 1)$ и $(1\,706\,595 \cdot 2^{11235} + 1)$. Самым маленьким непростым, или составным, числом (кроме 1) является 4.

### Совершенные числа

Число является *совершенным*, если оно равно сумме своих делителей, отличных от самого числа, например $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Самое маленькое совершенное число: $6 = 1 + 2 + 3$. Рост этих чисел поразителен, скажем, 6-е по счету совершенное число мерится уже миллиардами (8 589 869 056). На сегодняшний день известно самое большое, 31-е по счету, число $(2^{216091} - 1) \cdot 2^{216090}$. Это число получено благодаря открытию в сентябре 1985 г. математиком Марсенном (США) числа $(2^{216091} - 1)$, которое в настоящее время известно как 2-е самое большое простое число. Многие поколения математиков сражались и сражаются с загадками совершенных чисел. Например, все обнаруженные до сих пор совершенные числа – четные; бесконечна ли последовательность таких чисел – неизвестно. И уж совсем неприступной оказалась проблема совершенных нечетных чисел. Никто не знает, существует ли *хотя бы одно* нечетное совершенное число.

**Случайные числа**

Вот, к примеру, задумали вы обновить пароль для доступа к компьютеру. Лучшее решение – набор случайно выбранных символов из какого-нибудь алфавита. Итак, тщательно, с хрустом и стуком, бросаем кости двадцать шесть раз – готов пароль. Или потребовался секретный ключ для криптографической системы, опять необходимы случайные, непредсказуемые числа. Ведь они чем хороши: появление каждого в последовательности равновероятно, наперед не рассчитаешь.

Кубическая игральная кость может выдавать случайные числа от 1 до 6. Бросая две игральных кости, можно получать 36 различных комбинаций. Традиционная игральная кость имеет кубическую форму со слегка закругленными углами, на каждой стороне которой отмечено число от 1 до 6, причем сумма очков на противоположных сторонах должна равняться семи. Кость редко можно застать в одиночестве, в играх они обычно используются парами. Кости кубической формы называют игральным кубиком. Игральные кости являются самыми древними игровыми инструментами известными человеку. Кости обладают длинной и богатой историей, хотя точное время и место их появление остаются загадкой. Кубические кости с разметкой, практически идентичной современной, были найдены в египетских (XX в. до н. э.) и китайских (VI в. до н. э.) захоронениях. Точки на гранях древних игральных костей часто изображались в виде стилизованного «птичьего глаза». Кости, до того как они стали принадлежностью азартных игр, были магическим инструментом, который использовался древними народами для предсказания судьбы. В древние времена счастливый результат броска игральной кости означал нечто большее, чем просто удачу. Считалось, что исход броска полностью зависит от воли богов, поэтому кубики часто использовались для выбора предводителей и как метод предсказания. Греки верили, что древняя богиня Фортуна, дочь Зевса (известная некоторым игрокам как Леди Удачи – *Lady Luck*), определяет результат броска.

Применений у случайных чисел много. Лишь бы эти числа действительно были случайными. А то найдется и на ваши кости, – ну, в смысле, на игральные кости, – специалист с датчиком, наподобие того, который оприходовал казино при помощи компьютера! После размышлений выясняется, что с генерированием истинно случайных чисел возникает проблема. Но ее, в какой-то степени, решили. И на сей момент ученые уже выявили способ генерирования совсем случайных чисел. Или, точнее говоря, случайных по представлениям современной физики. Пока случайных именно *теоретически*. Так что в скором времени, надо полагать, мы узнаем о практической реализации этого способа – стоит немного подождать!

### *Счет и сказка*

Известный французский писатель Бернард Вербер отмечает, что слова «счет» (compte) и «сказка» (conte) звучат по-французски одинаково. Это совпадение существует почти во всех языках: в английском «считать» – «to count», «рассказывать» – «to recount», в немецком «считать» – «zahlen», «рассказывать» – «erzahlen», на иврите «рассказывать» – «lesaper», «считать» – «lispor», в китайском «считать» – «shu», «рассказывать» – «shu». Цифры и буквы едины с тех давних пор, когда язык был еще лепетом.

### *Самая старая математическая задача*

Она датируется 1650 г. до н. э., в русской версии звучит следующим образом:

*По дороге на Дижон*
*Встретил я мужа и семь его жен.*
*У каждой жены по семь тюков,*
*В каждом тюке по семь котов.*
*Сколько котов, тюков и жен*
*Мирно двигались в Дижон?*

### *Самое большое претендовавшее на точность число в физике*

Английский астроном сэр Артур Эддингтон (1882–1944) заявил в 1938 г., что во Вселенной ровно 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 протонов и столько же электронов. К сожалению для Эддингтона, никто не согласился с его сверхточными подсчетами, которые в настоящее время всерьез не воспринимаются.

### *Числа Ферма*

Это числа вида:

$$F_n = 2^{2^n} + 1;$$

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3;$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5;$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

и т. д.

Пьер Ферма выдвинул гипотезу, что все числа этого вида простые. Эта гипотеза была опровергнута Леонардом Эйлером в 1732 г., он нашел разложение числа $F_5$:

$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$

На данный момент не известно ни одного простого числа Ферма больше, чем $F_4$. Известно, что $F_n$ являются составными при $5 \leq n \leq 32$.

20-е число Ферма + 1 было проверено на суперкомпьютере «Крэй-2» в 1986 г. с целью ответа на вопрос, является ли оно простым. После 10 дней вычислений был получен ответ – НЕТ. Это был самый длительный поиск ответа на вопрос «да» или «нет» на ЭВМ.

### *Самые древние единицы измерения*

Самой древней известной мерой веса является *бека* амратского периода египетской цивилизации (около 3800 г. до н. э.), найденная в Накаде, Египет. Гири были цилиндрической формы с закругленными концами. Они весили от 188,7 до 211,2 г. По-видимому, строители погребальных сооружений эпохи мегалита на северо-западе Европы (около 3500 г. до н. э.) пользовались мерой длины, равной 82,9 ± 0,09 см. К такому выводу пришел профессор Александр Том (1894–1985) в 1966 г.

***Необычная константа***

Шутливый рассказ. Польский математик С. Коваль рассказывает еще об одной интересной числовой постоянной. Это число делится на чертову дюжину и представляет собой наименьшее четырехзначное число, являющееся суммой двух кубов натуральных чисел. Число это – 1001. А чьим именем он предложил его назвать? Правильно, это – число Шехерезады.

## ПРОБЕЖКА ПО ИСТОРИИ

Мы подошли к концу книги. Я надеюсь, что даже те, кто не дружил с математикой в школе, многое вспомнили; почувствовали, что математика – это очень интересная и интригующая наука. Математика – это интересно! Математика – это как игра в классики или карты, которая содержит небольшое число правил, ограничивающих наше поведение. Занимаясь математикой, мы становимся в большей степени застрахованы от ошибок. В любом роде человеческой деятельности можно что-то забыть, что-то вообразить неправильно, т. е. сделать что-то не по *правилам*. В математике это сделать труднее. В математике это всегда будет заметно: забыл минус – и все пошло насмарку и т. п., все в мире взаимосвязано, и математика тому яркий пример. Итак, математика помогает избежать ошибок. По-видимому, впервые четко и ярко о математике как языке науки сказал почти четыреста лет назад великий *Галилео Галилей*: *«Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, – я говорю о природе! Но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее – математические формулы»*. Математика выработала собственный язык, очень экономный и очень точный, и он оказался исключительно эффективным не только внутри математики. Прекрасно сказал известный французский физик *Луи де Бройль*: *«...где можно применить математический подход к проблемам, наука вынуждена пользоваться особым языком, символическим языком, своего рода стенографией абстрактной мысли, формулы которой, когда они правильно записаны, по-видимому, не оставляют места ни для какой неопределенности, ни для какого неточного истолкования»*. В этом смысле можно назвать язык математики особым языком, особым потому, что этот язык кроме знаков (символов) содержит еще и логику! Известная мысль Михаила Ломоносова *«математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит!»* не потеряла и сейчас свою актуальность.

За тысячелетия своего существования математика прошла большой и сложный путь, на протяжении которого неоднократно изменялся ее характер, содержание и стиль изложения. От предметных представлений о целых числах в пределах первого десятка математика пришла к образованию многих новых понятий, позволивших описывать сложнейшие явления природы и технические процессы. Из примитивного искусства счета с помощью камешков, палочек и зарубок математика сформировалась в обширную научную дисциплину с собственным предметом изучения и специфическим методом исследования. Формирование идеи счета в пределах целых единиц относится к тому периоду истории человечества, от которого не сохранилось никаких письменных памятников. Это вполне естественно, так как речь, искусство счета, первичные навыки мышления относятся к временам гораздо более ранним, чем появление самой несовершенной письменности. Судить о развитии математических понятий на ранней стадии человеческого общества возможно лишь на основе косвенных данных – наблюдений над некоторыми племенами в XVI–XIX вв., изучения особенностей живых и мертвых языков, являющихся не только средством общения, но и памятником духовной культуры прошлого. Хозяйственные потребности вынуждали людей совершенствовать правила счета, измерения расстояний, а также расширять объем математических понятий. Однако в течение долгого времени накопленные сведения были в какой-то мере рецептурными и не осознавались как самостоятельная ветвь знаний. Интересно отметить, что на этой ступени развития математические сведения различных народов, даже не общавшихся между собой, поразительно близки по форме и по содержанию. Мы увидели, что цифры – это своеобразный язык, которым пользуются все. Правила вычисления площадей и объемов Древнего Вавилона и Древнего Египта весьма похожи на аналогичные правила Древнего Китая.

Так в течение тысячелетий многочисленными безвестными тружениками закладывался фундамент современной математики. Постепенно люди научились выполнять арифметические действия с целыми числами, а затем и с рациональными дробями, научились правильно вычислять площади довольно сложных фигур и объемы простейших тел. Уже в ту пору люди изобрели вспомогательные средства для упрощения взаимных расчетов. Пусть эти изобретения очень примитивны, но их создание стало важным элементом человеческой культуры. И если теперь человечество знает гораздо больше и мечтает о решении проблем, которые совсем недавно казались фантастическими, то в этом велика заслуга предшествующих поколений, на опыте которых базируются все наши знания. Предпосылки к новому бурному всплеску и последующему все возрастающему прогрессу математических знаний создала эпоха морских путешествий и развития мануфактурного производства. Эпоха Возрождения, давшая миру изумительный расцвет искусства, вызвала также развитие точных наук, в том числе и математики. XVIII–XIX вв. – время становления современной математической символики. XX в. резко изменил представления о математике. Если раньше в арсенал средств математики входили арифметика и элементы геометрии, то XVIII и XIX вв. добавили к ним мощные методы математического анализа. В наше время трудно указать хотя бы одну значительную ветвь современной математики, которая в той или иной мере не находила бы применений в великом океане прикладных проблем. Но есть еще одна исключительно важная роль математики. Математика открыла законы мироздания. Существует природа и существует ее описание на языке математики. Точнее говоря, существует природа, существует представление о природе (фантазии, модели) и существует описание этих представлений на языке математики. Так итальянский математик Леонардо Фибоначчи обнаружил числовой ряд, каждое последующее число которого являлось суммой двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8... Фибоначчи открыл один из законов мироздания!

Опираясь на этот числовой ряд, можно поделить рядом стоящие числа друг на друга. При делении большего числа на меньшее результат будет стремиться к 1,618 (***число «фи»***) или, если поделить наоборот, будет стремиться к 0,618. Обнаружилось, что эта закономерность проявляется во всем и везде, где приложила свою руку природа. Если в творении присутствует число «фи» (φ), то это творение радует глаз и душу. Наиболее интересно пропорция φ проявляется в спиральных структурах: в раковине улитки, цветке подсолнуха, сосновой шишке, в целой Галактике. Саморазвитие жизни происходит по спирали, которая стала символом эволюции. Как оказалось, вполне возможно, что события, которые повлияют на нашу жизнь, появляются только тогда, когда совпадут время и амплитуда, уготованная им числовым рядом Фибоначчи.

Математическая символика вырабатывалась и шлифовалась тысячелетиями и к нашему времени приобрела значение, далеко выходящее за рамки обычной системы условных обозначений. Хотя идеи и обозначения (нотация) не одно и то же, современная математическая мысль может быть материализована только с помощью мощного и совершенного аппарата, позволяющего в символьной форме передавать глубокие и зачастую крайне абстрактные понятия. Приведем слова великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1793–1856): *«Подобно тому как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков (алгебра) служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы человек мог передавать другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он постигнул, и зависимость, которую он открыл»*. С развитием математической символики вырабатывались и совершенствовались способы ее хранения и передачи. Например, математики Древнего Вавилона делали свои записи на глиняных табличках, в период позднего Средневековья появляются первые печатные книги, и наконец, современная эпоха характеризуется все возрастающим потоком электронных публикаций. Именно поиски адекватных методов оформления математических текстов в Интернете и привели к созданию языка специальной символики – языка MathML. Математика развивается, и мы еще будем свидетелями многих удивительных открытий! *«...Все свершения математики – это свершения человеческого разума. Математика вселила в людей смелость и уверенность, позволившие им вплотную взяться за разгадку ранее, казалось бы, неприступных тайн космоса, ле-*

*чение страшных болезней, количественный анализ проблем, относящихся к экономике и устройству человеческого общества, что позволяет надеяться на дальнейший прогресс человечества. В решении этих проблем математика может оказаться более эффективной или менее, но с ней мы связываем определенные надежды на успех»* (М. Клайн).

*Приложение 1*

# ЧТО ТАКОЕ ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Каждый человек на земном шаре, окончивший хотя бы несколько классов школы умеет использовать *десятичную систему счисления* для выполнения простейших арифметических операций. И эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики*, сделанном уже на заре ее истории.

Жюль Таннери (1848–1910), французский математик, член Парижской академии наук: *«Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и нуль и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма»*.

Надо не забывать, что первые проекты счетных приборов (абаков и арифмометров), прообразов современных компьютеров, появились задолго до возникновения алгебры, логики, теории алгоритмов – и главную роль при создании таких счетных приборов сыграли именно системы счисления и правила выполнения в них простейших арифметических операций. У многих народов широкое распространение получили так называемые *алфавитные* системы нумерации, когда буквам алфавита присваивались некоторые числовые значения. Так поступали древние греки, евреи и другие народы. С алфавитной нумерацией связано возникновение «звериного» числа 666.

Всем известна римская система нумерации, которая предшествовала появлению нашей позиционной системы счисления. Она использует специальные знаки для изображения «узловых» чисел (I, V, X, L, C, D, M). Крупнейшим недостатком римской нумерации является то, что она совершенно не приспособлена для производства арифметических действий в письменном виде. Римский способ записи чисел является примером *непозиционной системы счисления* (так в числе XXXV – тридцать пять – вес цифры X в любой позиции равен десяти), а арабский – это *позиционная система счисления*.

Мы используем для повседневных вычислений десятичную систему счисления. Принято считать, что в основе этой системы счисления лежит строение тела человека, а точнее, наличие десяти пальцев на руках. Мы к этому так привыкли, что трудно даже себе представить, как можно считать по-другому (пожалуй, это не относится к компьютерщикам, которые привыкли считать в двоичной, восьмеричной или шестнадцатеричной системах). Тем не менее в древности были люди, которые считали шестидесятками, а не десятками. Эти мудрецы жили в Вавилоне много тысячелетий назад. Важную роль в этой системе счисления играли и делители числа 60 – числа 6 и 12 (между прочим, до сих пор некоторые любят считать все в дюжинах!). Возможно, эта система счета взята не от человека, а от Солнца. Судите сами. Видимый угловой размер Солнца – половина углового градуса, т. е. 1/360 часть дуги полуокружности. Значит, в день равноденствий, делящих год на две равные части, когда Солнце восходит точно на востоке, а заходит на западе, диаметр солнечного диска $360 = 60 \times 6$ раз укладывается в видимом его пути по небу. Во всех древних календарях считалось, что год состоял из $360 = 60 \times 6$ дней, т. е. по представлениям древних, за одни сутки Солнце сдвигалось на небе относительно звезд на 1/360 своего годового пути – т. е. на один градус. Число 60 лежит в основе и более мелких угловых единиц – в одном градусе 60 угловых минут, а в минуте 60 угловых секунд. **Градус** – лат. *gradus* – ступень, шаг. Кроме градуса были введены такие единицы измерения, как **минута** (часть градуса) и **секунда** (часть минуты). Названия «минута» и «секунда» произошли соответственно от *partes minutae primae* – «части меньшие первых» и *partes minutae sekundae* – «части меньшие вторых». В истории науки эти единицы измерения сохранились благодаря Клавдию Птолемею, жившему во II в. Кроме того, до сих пор у нас 60 минут в часе и 60 секунд в минуте, так как уже в древние времена было известно, что единицы измерения пространства (в данном случае углов) тесно связаны с единицами измерения времени: один угловой градус по небу Солнце проходит за одни сутки по времени. m° для обозначения угловых градуса, минуты и секунды, соответсвенно, ввел Пелетье (1558) (см. разд. 4.3). В позиционных системах счисления один и тот же числовой знак в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места, где он расположен. Основанием системы счисления может быть любое число больше единицы. В современной десятичной системе счисления основание $n = 10$. Хорошо известно, что предшественницей десятичной системы счисления является индусская десятичная система, возникшая примерно в VIII в. Но следует отметить, что с самых ранних времен система счисления у китайцев была десятичной. На гадательных костях середины второго тысячелетия до н. э. встречаются числа, записанные с помощью девяти символов в позиционной системе. На десятичной позиционной системе счисления строилась традиционная система мер и весов. В Европу десятичная нумерация проникла из арабских стран. Наиболее ранние рукописи на арабском языке, содержащие индийскую позиционную запись чисел, относятся к IX в. Французский церковнослужитель и математик Герберт был одним из первых в Европе, кто понял преимущества новой нумерации; в 999 году он стал папой римским (папа Сильвестр II), был наставником только что взошедшего на трон Римской империи молодого Оттона III. Герберт пытался провести реформу в преподавании математики и ввести новую систему нумерации, но нововведение встретило яростный гнев со стороны инквизиции. Папу Сильвестра II обвинили в том, что он «продал душу сарацинским дьяволам». Реформу постарались провалить, а Герберт вскоре умер. Но и после смерти его не оставили в покое: несколько столетий подряд ходили слухи, что из мраморного саркофага папы непрерывно сочится серный дым и слышится шорох чертей.

Первые записи арабско-индийскими цифрами встречаются в испанских рукописях уже в X в., но десятичная система начинает использоваться в Европе только в XII в. Новая нумерация в Европе встретила ожесточенное сопротивление как со стороны официальной схоластической науки того времени, так и со стороны отдельных правительств. Так, например, в 1299 г. во Флоренции купцам запретили пользоваться новыми цифрами, в бухгалтерии приказано было применять либо римские цифры, либо писать числа словами.

В начале XVII в. новую нумерацию пытались ввести в России, но и православная церковь объявила новую нумерацию колдовской и безбожной. Закрепилась десятичная нумерация в России только после издания в 1703 г. знаменитой «Арифметики» Магницкого, в которой все вычисления в тексте производились исключительно с использованием десятичной системы счисления.

*«Мысль выражать все числа девятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой»* (Пьер Симон Лаплас).

С развитием компьютерной техники современные ученые-исследователи стали пользоваться двоичной системой счисления. Зачатки двоичной системы наблюдаются у многих народов. У древних египтян широкое распространение получили методы умножения и деления, основанные на принципе «удвоения». Изобретение двоичного способа нумерации приписывают китайскому императору Фо Ги, жизнь которого относится к четвертому тысячелетию до н. э. На самом деле правила выполнения арифметических операций в двоичной системе счисления изобрел известный немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716), который в 1697 г. разработал **двоичную арифметику**. Лейбниц настолько был восхищен этим своим открытием, что в его честь он выпустил специальную медаль, на которой были даны двоичные изображения начального ряда натуральных чисел. Тем не менее Лейбниц не рекомендовал двоичную нумерацию для практических вычислений вместо десятичной системы, но подчеркивал, что ***«вычисление с помощью двоек, т. е. 0 и 1, в вознаграждение его длиннот, является для науки основным и***

***порождает новые открытия, которые оказываются полезными впоследствии...»***

Блестящие предсказания Лейбница относительно роли двоичной системы счисления в современной науке сбылись, но только через два с половиной столетия, когда выдающийся американский ученый, физик и математик Джон фон Нейман (1903–1957) после тщательного анализа достоинств и недостатков первого в компьютерной истории электронного компьютера ЭНИАК отдал решительное предпочтение двоичной системе счисления в качестве универсального способа кодирования информации в электронных компьютерах.

В современных цифровых компьютерах основное место занимает двоичная система счисления (позиционная система с постоянным основанием, равным 2) и прямые ее производные (**восьмеричная и шестнадцатиричная системы**). А использовал все преимущества этой системы еще в первой половине XX в. немецкий инженер Конрад Цузе (1910–1995), сконструировавший первую электрическую вычислительную машину Z1, которая оперировала цифрами 1 и 0. Нуль означал, что ток в цепи отсутствует, единица – что ток есть.

Конрад Цузе родился 22 июня 1910 г. в Берлине. Цузе с детства любил изобретать и строить. Еще школьником он сконструировал действующую модель машины для размена монет. В 1935 г. окончил Берлинский политехнический институт. В 1936 г. он устроил в квартире у своих родителей «мастерскую», в которой через два года завершил постройку машины, занимавшую площадь 4 кв. м. Цузе назвал ее Z1. Это была полностью механически программируемая цифровая машина. Интересно, что первоначально изобретение Цузе должно было называться V1 («Фау-1»). Но, узнав о том, что «оружие возмездия» Вернера фон Брауна носит такое же название, конструктор переименовал свое детище. Правда, это произошло уже в 40-е гг. XX в. Биографы Цузе утверждают, что созданием вычислительных машин он занялся от скуки. Одно время молодой инженер работал на немецкую авиапромышленную компанию «Henshel», где рутинные расчеты отнимали большую часть рабочего времени. Тратить свою жизнь на однообразные математические операции Конраду не хотелось. Конрадом заинтересовались в ведомстве Геринга, отвечавшего за авиацию Третьего Рейха.

Интересно, что могли знать о позиционной системе счисления раньше? В Библии сказано: «*Ною было 500 лет, и родил Ной Сима, Хама и Иафета*» [Бытие 5, 32 ]. Таким образом, ответ на вопрос о возрасте капитана ковчега, казалось бы, предельно ясен, и тем не менее эта информация сильно расходится с нашими представлениями о продолжительности жизни человека. Более того, библейские тексты наводят на мысль, что возраст и других персонажей приводится в каком-то зашифрованном виде. Сопоставление приводимых в Библии сведений о возрасте ветхозаветных долгожителей с историей формирования у народов Месопотамии математических знаний может привести к любопытному выводу. Когда в III в. н. э. греки переводили Книгу Бытия с древнеарамейского на греческий язык, то толкователи древних манускриптов могли не учесть специфики принятой у шумеров позиционной системы счисления. Если это предположение окажется верным, то, следовательно, возраст библейских персонажей был завышен примерно на порядок. Применив современные знания о системах счисления древних народов, можно не только сделать достовернее даты многих библейских сведений, но и уточнить иные цифры, содержащиеся в книгах Ветхого Завета.

*Приложение 2*

## МАТЕМАТИКА В ПЕРВЫХ ПЕЧАТНЫХ КНИГАХ

С развитием математической символики вырабатывались и совершенствовались способы ее хранения и передачи. Математики Древнего Вавилона делали свои записи на глиняных табличках, в период позднего Средневековья появляются первые печатные книги, и наконец, современная эпоха характеризуется все возрастающим потоком электронных публикаций. Первые печатные книги создали информационное средство, находящееся в употреблении уже свыше 500 лет. Это средство надежно, компактно, портативно, легко транспортируемо, легко тиражируется, обладает нестираемой памятью в несколько десятков тысяч слов при удобном доступе, не требует от пользователя специальной подготовки, не потребляет энергии ни в процессе пользования, ни при хранении. Это информационное средство мы зовем книгой. Однако путь к современной книге был долгим. Издревле люди писали на самых разнообразных материалах: на скалах, на каменных плитах, на коре деревьев, на пальмовых листьях, на глиняных табличках, на табличках из бронзы, свинца, олова. Древние египтяне не только высекали надписи на камне. Гораздо чаще они писали на папирусе. Стебель тростника-папируса раскатывали, помещали под пресс и пропитывали специальным составом. Получались гладкие желтоватые листы для письма. Листы папируса склеивали, а затем сворачивали в свиток. Свиток являлся древней формой египетской книги. Писали и рисовали на папирусе кисточками или специальными палочками. У писца был мешочек с растворимыми красками и дощечка с углублением для чернил.

Другим материалом для письма в Древнем мире был **пергамент**, сделанный из шкур молодых животных – телят, коз, овец, кроликов. Этот материал для письма придуман и усовершенствован в древнем Пергаме в III в. до н. э. (современная Сирия). Пергамент люди ипользовали очень долго. Римский ученый и писатель Плиний Старший говорил, что изобретение пергамента стало результатом соперничества в собрании книг между царем Египта Птолемеем и царем Пергама Евменом II. Чтобы помешать своему сопернику, Птолемей запретил вывоз папируса – единственного писчего материала – из Египта. Правителю Пергама пришлось срочно искать другой материал для изготовления и переписывания книг, способный заменить привычный папирус. При нем и была создана библиотека, уступавшая по своим размерам только Александрийской. Способ изготовления пергамента был довольно сложен. Чтобы сделать пергамент, шкуру животных тщательно промывали и вымачивали в золе, затем очищали от остатков шерсти, жира, мяса; кожу растягивали на рамах, выглаживали пемзой, сушили и осторожно скоблили, придавали ей ровную поверхность (иногда для отбеливания применяли известь). Из шкур получался белый, тонкий чрезвычайно прочный материал – пергамент. Пергамент был дороже, чем папирус, но зато более универсален и долговечен. Вначале из пергамента приготовляли свитки, как из папируса. Но вскоре поняли, что в отличие от папируса, на пергаменте можно писать с двух сторон. Книги из пергамента стали похожи на современные. Еще перимущество пергамента заключалось в том, что с него (в отличие от папируса) можно было смыть текст, написанный растворимыми в воде чернилами, и нанести новый.

В Древнем Китае делали **бамбуковые книги**. Тонко выструганные пластинки бамбука скреплялись вместе металлическими скобами в виде современной раздвижной оконной шторы. На такой книге-шторке, так же как и на изобретенном позднее шелке, китайцы тушью рисовали иероглифы при помощи специальных кисточек. Бумагу китайцы первоначально делали также из бамбуковой массы. Очевидно, поэтому она получила свое название от исторических слов «бомбакка» и «бомбицинна». Первый лист бумаги сделал Цай Лунь в 105 г. методом, который лежит в основе принципа действия самых крупных и наиболее производительных машин по изготовлению бумаги наших дней. За минувшие почти 2000 лет радикальных изменений в производстве бумаги из растительных волокон не произошло. Цай Лунь создал свою первую бумагу из размоченных и раздробленных лоскутьев тканей, старых веревок и кусков древесной коры. Вероятно, древнейшая бумага датируется 264 г. Китайцы ревниво оберегали секрет выделки бумаги, и лишь около 600 г. н. э. он стал известен корейцам, а спустя еще лет 15 – и японцам. В 751 г. искусство производства бумаги достигло Самарканда, и через 40 лет после этого оно было освоено в Багдаде. Из Багдада оно дошло до Египта (ок. 900), затем до Феса в Марокко (ок. 1100) и вскоре после этого появилось в Европе. В 1150 г. испанцы производили бумагу в Хативе и Валенсии. В 1348 г. в городе Труа (Франция), а в 1494 г. в Хартфорде (Англия) были построены бумажные мельницы. Дешевизна материала позволила выпускать гораздо больше книг, например, только в Кордове, в Испании, ежегодно выпускали 16–18 тыс. книг. В XIV–XV вв. в Европе изготовление книг вышло за стены монастырей. Теперь книги делали ремесленники, а торговали ими купцы. Образование становилось более светским, увеличился интерес к естественным наукам. В середине XIII в. бумагу уже начали делать в Италии, в XIV в. – во Франции, а потом в Германии и Англии. Книги стали еще дешевле, когда их стали печатать с целых деревянных матриц.

Самым важным событием второго тысячелетия является изобретение книгопечатания, а самый выдающийся человек, живший в этот промежуток времени, – Иоганн Гутенберг.

Когда родился этот великий человек, точно неизвестно. В исторических хрониках можно найти любой год в промежутке от 1394 до 1399 г. или даже до 1406 г. Известно только, что родился он в Майнце (Германия) в богатой семье, которая принимала участие в управлении городом. Когда Иоганну было 20 лет, в Майнце возникли беспорядки: взбунтовавшиеся горожане выгнали своих правителей (в городе тогда происходило бурное противостояние патрицианских родов и ремесленных цехов). Семье пришлось переехать в Страсбург, и из богатого молодого человека Иоганн Гутенберг превратился в нищего. Чтобы добывать деньги на пропитание, Иоганн поступил на работу в ювелирную мастерскую. Он надеялся разбогатеть, изобретя новый способ шлифовки драгоценных камней. Затем юноша перешел на фабрику, изготовлявшую зеркала, где научился работать с металлом, – он мастерил металлические рамы.

Начало опытов Гутенберга по изобретению книгопечатания историки относят к 1440 г. В конце 50-х гг. вышла в свет великолепно изданная Библия, способная соперничать с лучшими образцами рукописной книги. Уже в 1460–1470 гг. ученики и подмастерья из первых гутенберговых типографий разносят новое искусство печатания книг по всем городам Германии и странам Европы. Способ печати текста и рисунков с рельефных деревянных досок был известен задолго до Гуттенберга: так, например, делали игральные карты. Первоначально колоды игральных карт рисовали вручную, затем их стали печатать при помощи трафаретных досок. Первые печатные колоды карт датируются 1300 г. Аналогичным образом печатали небольшие книжечки и рисунки религиозного содержания. Если книга была небольшая, скажем в десять страниц, то вырезали десять досок с текстом и рисунками, на которые затем наносили краску, и делали оттиски. (Между прочим, тиснение рисунков на тканях с трафаретных досок известно в Италии с XII в.!) К тому времени в связи с ростом городов, просвещения и культуры увеличилась потребность в массовой книжной продукции. Переписчики долго и кропотливо работали над каждой книгой и поэтому не могли справиться с постоянно растущим количеством заказов.

Великое изобретение Гутенберга включало в себя целый ряд технических новшеств: разборный шрифт, словолитный аппарат, специальный сплав для изготовления печатных литер, особый состав типографской краски и собственно печатный станок.

К концу XV в. книги массово начали печатать в Италии, Чехии, Голландии, Франции, Бельгии, Испании, Венгрии, Англии, Польше, Дании, Швеции и Португалии. В 1491 г. в городе Кракове была напечатана первая славянская книга. К концу XV в. в Европе работало больше 200 типографий в 69 городах, через несколько лет их число увеличилось до 1000 – уже в 246 городах. Некоторые из них издавали одну-две книги и закрывались на некоторое время, но были и мощные предприятия, в которых действовало до 24 печатных станков и работало более сотни рабочих – такой была знаменитая типография Антона Кобергера в Нюрнберге.

Всего за первые полстолетия книгопечатания вышло в свет около 40 тыс. изданий печатных книг, а их общий тираж превысил 12 млн экземпляров. Книги, изданные до 31 декабря 1500 г., называют инкунабулами («колыбельными» книгами) (от лат. *incunabula* – колыбель), внешне они похожи на рукописные книги. Шрифт вырезался по лучшим образцам рукописей специалистами-каллиграфами, переписчиками книг. Украшениями в первых книгах являлись заглавные буквы (инициалы), иллюстрации, красивые многоцветные заставки и концовки – сначала их не печатали, а дорисовывали от руки в отпечатанных книгах. Но постепенно рукописный инициал заменялся литым или гравированным, появились печатные иллюстрации – гравюры, которые вырезались на дереве, потом на меди.

У первых печатных книг, как и у рукописей, не было заглавного (титульного) листа. Все сведения: автор, название книги, место и год издания, имя печатника – указывались в конце книги, после текста. К концу XV в. все эти данные стали выносить на первую страницу. Среди первых печатных книг были произведения римских авторов: «География» Страбона, «Естественная история» Плиния, «География» Птолемея – включавшая карты всего известного тогда в Древней Греции мира. «Начала геометрии» древнегреческого математика Евклида издавались в разных странах по 6–7 раз ежегодно и на протяжении столетий оставались самым распространенным учебником. Печатались книги средневековых авторов. Среди них были составленные астрономом XV в. Иоганном Мюллером (Региомонтаном) вычисления положения небесных тел на 32 года. Эта книга служила ориентиром для мореплавателей – по ней они определяли долготу и широту, она сопровождала Колумба в его путешествиях. Первопечатные книги издавались в среднем по 300 экземпляров. Педагогический труд Пачиоли сочетает с научной работой: он начинает писать энциклопедический трактат по математике. В 1494 г., всего через два года после «открытия» Колумба, этот труд выходит в свет под названием «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях». Весь материал книги делится на две части, первая часть посвящена арифметике и алгебре, вторая – геометрии (см. гл. 4). Один из разделов книги посвящен вопросам применения математики в коммерческом деле, и в этой части его книга является продолжением знаменитой книги Фибоначчи «Liber abaci» (1202). По существу, это математическое сочинение Л. Пачиоли, написанное на закате XV в. подытоживает математические знания эпохи итальянского Возрождения. Монументальная печатная работа Л. Пачиоли, несомненно, способствовала его славе. Когда в 1496 г. в Милане – крупнейшем городе Италии – в университете открыли кафедру математики, занять ее был приглашен Лука Пачиоли. Трактат Пачиоли был вскоре издан печатным способом, и он так захватил все передовые умы Европы, что не выпускает их до сих пор. Книгопечатание быстро распространилось по Европе и через 100 лет достигло России. Сначала оно пришло в Чехию (1478), затем в Польшу (1491) и наконец в Белоруссию (1517).

Царь Иван Грозный, зная о печатании книг на Западе, повелел устроить на Москве Печатный двор. Создание первой русской типографии (Печатного двора) длилось 10 лет. 19 апреля 1563 г. Иван Федоров (ок. 1510–1583) и Петр Мстиславец (годы жизни неизвестны) стали набирать «Деяния апостольские, послания соборные и святого апостола Павла послания» и 1 марта 1564 г. выпустили в свет. Это была первая русская печатная книга. В ней было 267 страниц (25 строк на странице, по 30–32 буквы в каждой строке). Затем они напечатали два издания «Часовника».

Переписчики книг поняли, что книгопечатание лишит их работы и заработка. Они стали обвинять печатников в ереси и колдовстве. Охочая до беспорядка чернь разграбила и подожгла Печатный двор. Ивану Федорову и Петру Мстиславцу пришлось спасаться бегством. Они поселились в Литве, где их радушно принял гетман Г. А. Ходкевич, который в своем имении Забпудове (близ Белостока) основал типографию. Затем Федоров работал во Львове и в Остроге у князя К. К. Острожского. В 1581 г. он напечатал знаменитую Острожскую Библию – первую полную Библию на церковно-славянском языке. Затем Иван Федоров напечатал Новый завет, Псалтырь и другие книги. Так выдающееся изобретение второго тысячелетия н. э. пришло на Русь. В 1909 г. первопечатнику Ивану Федорову установлен памятник в Москве (скульптор С. М. Волнухин). В 1682 г. в Москве вышла книга «Считание удобное, которым всякий человек, купующий и продающий, зело удобно изыскати может число всякия вещи». Это была первая в России не рукописная, а напечатанная в типографии книга по математике, которая должна была помогать решению разных практических задач. Была в ней и таблица умножения (до 100×100), записанная славянскими цифрами. В 1703 г. выходит «Арифметика» Леонтия Магницкого – первое в России полноценное введение в математику. Как известно, Петр I всю жизнь проявлял огромный интерес к книгам. Находясь ли в России или путешествуя за границей, он всегда стремился приобретать нужную ему литературу, причем, экономный в других расходах царь никогда не жалел денег на покупку книг. По указанию Петра в Европе покупались книги по математике, анатомии и т. д. Довольно большое число книг в библиотеке Петра было по физико-математическим наукам. Здесь необходимо прежде всего отметить книгу Ньютона «Математические начала натуральной философии» (Амстердам, 1714), в которой рассматриваются вопросы математики, астрономии, физики. В книжном собрании Петра находились также труды С. Маролуа по геометрии и перспективе, Н. Малезье «Элементы геометрии герцога Бургундского», Ж. Ф. Нисéрона «Чудеса оптики», А. М. Малле «Практическая геометрия» (4 тома), «Арифметика» В. Бартьенса, таблицы тригонометрических функций, «Книга считания удобного...» и др.

*Приложение 3*
# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА И «НОВАЯ ХРОНОЛОГИЯ»

В XV–XVI вв. хронология рассматривалась как раздел математики, а затем перешла в ведение историков и стала рассматриваться как некая вспомогательная дисциплина. Принятая сегодня версия хронологии древности является созданием хронологов и историков XVI–XVII вв. В основных чертах и более или менее окончательно она была завершена известными средневековыми хронологами Иосифом Скалигером и Дионисием Петавиусом.

Иосиф Юстус Скалигер (1540–1609) – европейский гуманист-филолог, историк и воин, итальянец по происхождению, француз по рождению, голландец по месту проживания в наиболее плодотворные годы, один из основателей традиционной исторической хронологии, издатель и комментатор античных текстов, сын известного филолога Юлия Цезаря Скалигера. Одна из заслуг Иосифа Скалигера – создание традиционной научной хронологии. Его познания в языках и истории многих народов, в математике, астрономии, астрологии и теологии были изложены в «Исправлении хронологии» («De emendatione temporum», 1583), дополнения и поправки к которому Иосиф Скалигер опубликовал в «Сокровищнице времен» («Thesaurus temporum», Лейден, 1606; Амстердам, 1629). Здесь он определил системы исчисления времени, применявшиеся у разных народов (включая Восточную Азию и мексиканцев), и привел их в соответствие друг с другом. До Скалигера господствовали лишь средневековые способы летосчисления по церковному календарю, крайне недостаточные для исторической науки, а почти вся хронология имела узкослужебное назначение – определять дни церковных праздников: глобальная мировая хронология в те времена еще не существовала. В основу своей версии хронологии Иосиф Скалигер положил восстановленные им самим хронологические сочинения Евсевия, его предшественника Юлия Африканского, автора пяти томов «О хронологии», и его продолжателей Иеронима и Идация.

Дионисий Петавиус (Петавий) – французский католический богослов и историк, ученый-иезуит, один из основоположников современной хронологии. Дионисий Петавиус родился в Орлеане в 1593 г. (по иным данным в 1585 или 1583); в 19 лет стал профессором философии университета Буржа и позднее – каноником Орлеанского собора. В 1605 г. он вступил в общество иезуитов. В 1621 г. стал профессором позитивной теологии в Париже. Умер 1652 г. в своей келье коллежа Клермон. Петавиус известен своими историческими, астрономическими и хронологическими трудами. В честь него назван один из кратеров Луны. В области хронологии Петавиус дополнил труды протестантского хронолога И. Скалигера: в 1627 г. Дионисий Петавиус предложил расширить христианскую эру за счет лет до рождества Христова (AD – anno Domini) методом обратного отсчета времени назад от «рождества Христова», применив идею обратной нумерации так, как это делается на географических картах. Таким образом, благодаря изобретению Петавиуса любая дата оказывалась привязанной к современной обиходной хронологической системе, тогда как ранее в древней истории существовал собственный счет лет. Действительно, вплоть до конца XVIII в., когда система Петавиуса окончательно восторжествовала, в трудах по древней истории события датировались по древним же эрам (от основания Рима, по олимпиадам и т. д.), а также по введенной Ашшером эре «от сотворения мира» и юлианскому периоду Скалигера – так что для того чтобы досконально разобраться в древней хронологии, нужны были определенные специальные навыки. Реформа Петавиуса устранила эти неудобства и сделала хронологию простой и понятной любому школьнику.

В настоящее время группа ученых под руководством известного математика А. Т. Фоменко (см.: *Л. Шильник.* А был ли мальчик? М.: Изд-во «НЦ ЭНАС», 2006) пытается доказать, что эта версия хронологии и истории Древнего и Средневекового мира, по-видимому, неверна. Справедливости ради надо признать, что на это указывали и ранее многие выдающиеся ученые XVII–XX вв., например И. Ньютон, Э. Джонсон, а также ученый и революционер-народник

Н. А. Морозов (1854–1946). Известная нам сегодня версия древней и средневековой истории вещь далеко не самоочевидная. Как показал современный анализ, в работе средневековых хронологов содержатся серьезные ошибки. В то же время большинство из нас, воспитанных на школьном курсе истории, убеждены, что восстановление событий прошлого дело в принципе несложное. Достаточно, мол, взять летопись, прочесть ее и пересказать современным языком. А сложности могут возникнуть только при желании уточнить те или иные мелкие детали. К сожалению, это не так. Но построить новую, непротиворечивую концепцию истории оказалось очень сложной задачей. Например, скалигеровская история вынуждает нас относить математические труды «античных» авторов в глубокую древность. Это приводит к многочисленным и явным неточностям в истории математики. Так, возникают парадоксальные ситуации, когда достаточно сложные математические задачи решаются якобы на основе примитивных, чуть ли не «пещерных» обозначений и понятий. Такой разрыв между уровнем обозначений и сложностью решаемых задач иногда доходит до абсурда, как, например, в успешно решавшейся «древневавилонской» задаче о расчете и предсказании солнечных затмений при помощи якобы двух цифр-клинышков.

Новая и, по-видимому, окончательная в целом версия хронологии древней и средневековой истории была предложена группой А. Т. Фоменко в 1979 г. Эта группа ученых состоит из математиков и физиков в основном из Московского государственного университета. Новая концепция хронологии основывается, прежде всего, на анализе исторических источников методами современной математики и объемных компьютерных вычислениях. Целью научного проекта, который назван «новой хронологией», является создание надежных независимых методов датирования древних и средневековых событий. Это – сложная научная проблема, решение которой потребовало применения тонких методов современной математики и компьютерных вычислений. Проект «Новая хронология» еще далек от завершения и подвергается острой критике со стороны большинства ученых-историков.

Построенная математическими методами новая хронология во многих случаях сильно расходится с хронологией И. Скалигера и Д. Петавиуса, которой до сих пор пользуются историки. Правильность идей проекта «Новая хронология» еще далеко не очевидна.

*Приложение 4*

# ОТ АЛЬФЫ ДО ОМЕГИ

При изучении математики, разумеется, нужен еще и греческий алфавит. В IX в. до н. э. греки познакомились с финикийским алфавитом. Этот алфавит грекам понравился и они стали им пользоваться. Надо заметить, что в финикийском алфавите отсутствовали гласные буквы, греки ввели их – и тем самым создали первый *настоящий* алфавит. Они также ввели пять новых символов: Ω (омега), Υ (ипсилон), Φ (фи), Χ (хи) и Ψ (пси). Главные достоинства буквенного письма – компактность алфавита и абстрактность. Всего около сотни знаков (включая буквы, знаки препинания, математические и специальные символы). Вы наверняка уже знаете некоторые буквы греческого алфавита. Это те самые буквы, которые мы использовали в школе на уроках математики и физики.

Α α – άλφα – [алфа]; Β β – βήτα – [вита]; Γ γ – γαμα – [гамма]; Δ δ – δέλτα – [дельта]; Ε ε – έψιλον – [ипсилон]; Ζ ζ – ζήτα – [зита]; Η η – ήτα – [ита]; Θ θ – θήτα – [фита]; Ι ι – γιώτα – [йота]; Κ κ – κάπα – [капа]; Λ λ – λάμδα – [ламда]; Μ μ – μι – [ми]; Ν ν – νι – [ни]; Ξ ξ – ξι – [кси]; Ο ο – όμικπον – [омикрон]; Π π – πι – [пи]; Ρ ρ – ρο – [ро]; Σ σ (в конце слова пишется ς) – σίγμα – [сигма]; Τ τ – ταυ – [таф]; Υ υ – ύψιλον – [ипсилон]; Φ φ – φι – [фи]; Χ χ – χι – [хи]; Ψ ψ – ψι – [пси]; Ω ω – ωμέγα – [омега]. Греческий язык близок к русскому, как по написанию букв, так и по произношению. Правила чтения в греческом языке соблюдаются практически все без исключений. Так что, для того чтобы не писать каждый раз транскрипцию слова, легче один раз выучить произношение букв и сочетаний и затем писать греческими буквами.

**Греческий алфавит**

| | |
|---|---|
| Α α – альфа | Η η – эта |
| Β β – бета | Θ θ – тета |
| Γ γ – гамма | Ι ι – йота |
| Δ δ – дельта | Κ κ – каппа |
| Ε ε – эпсилон | Λ λ – лямбда |
| Ζ ζ – дзета | Μ μ – мю (ми) |

| | |
|---|---|
| N ν – ню (ни) | Τ τ – тау |
| Ξ ξ – кси | Υ υ – ипсилон |
| Ο ο – омикрон | Φ φ – фи |
| Π π – пи | Χ χ – хи |
| Ρ ρ – ро | Ψ ψ – пси |
| Σ σ – сигма | Ω ω – омега |

Вообще, буквы греческого алфавита широко используются в математике. Но некоторые из букв получили особенно широкое распространение.

Φ, φ (фи) – двадцать первая буква греческого алфавита. В системе греческой алфавитной записи чисел имеет числовое значение 500. От буквы «фи» произошла кириллическая буква «Ф».

В древнейших вариантах греческого алфавита строчная буква «фи» отсутствовала. Строчной буквой φ обозначают: золотое сечение $\varphi = 1{,}618...$ в математике, искусстве и архитектуре; функцию Эйлера $\varphi(n)$ в теории чисел; угол, в особенности, аргумент комплексного числа; в полярной системе координат – угол с полярной осью; в сферических координатах – угол с осью $z$. В математике – это частое обозначение любой функции.

Π, π (пи) – шестнадцатая буква греческого алфавита. В системе греческой алфавитной записи чисел имеет числовое значение 80. Происходит от финикийской буквы «пе». От буквы «пи» произошли латинская буква «Р» и кириллическая «П». Прописная буква «пи» обозначает в математике произведение множителей **П** (аналогично букве $\sum$ (сигма), обозначающей сумму).

Строчная π обозначает математическую константу $\pi \approx 3{,}14159...$ – отношение длины окружности к ее диаметру в евклидовой геометрии, функцию $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих $x$. В Древней Греции она также иногда обозначала **периметр** (от греч. *perimetron* – окружность).

Γ, γ (гамма) – третья буква греческого алфавита. Гамма – функция – была введена Л. Эйлером для расширения понятия факториала на поле комплексных чисел в математике.

Δ, δ (де́льта) – четвертая буква греческого алфавита. В системе греческой алфавитной записи чисел имеет числовое значение 4. Происходит от финикийской буквы «далет», название которой означало «дверь» или «вход в палатку». От буквы «дельта» произошли латинская буква «D» и кириллическая «Д».

Прописная буква $\Delta$ используется как символ для обозначения: изменения или различия между значениями переменных (например, разности координат – $\Delta X$); макроскопического изменения в значении переменной в математике. Строчная буква $\delta$ используется для обозначения микроскопического изменения в значении переменной; символ Кронекера; дельта-функции Дирака.

Дельта реки получила свое название благодаря такой же треугольной форме, как у прописной буквы «дельта».

*Приложение 5*

# ТАБЛИЦА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

| **Знак** | **Его значение** | **Кто ввел** | **Когда знак введен** |
|---|---|---|---|
| + | Сложение | Я. Видман | Конец XV в. |
| – | Вычитание | Я. Видман | Конец XV в. |
| * | Умножение | У. Оутред | 1631 |
| · | Умножение | Г. Лейбниц | 1698 |
| : | Деление | Г. Лейбниц | 1684 |
| $a^2, a^3, \cdot\,. a^n$ | Степени | Р. Декарт | 1637 |
| $\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }\ldots$ | Корни | К. Рудольф,<br>А. Жирар | 1525<br>1629 |
| log | Логарифм | И. Кеплер<br>Б. Кавальери | 1624<br>1632 |
| sin | Синус | Л. Эйлер | 1748 |
| cos | Косинус | Л. Эйлер | 1748 |
| tg | Тангенс | Л. Эйлер | 1753 |
| $dx, \ldots d^2x$ | Дифференциал | Г. Лейбниц | 1675 |
| $\int ydx$ | Интеграл | Г. Лейбниц | 1675 |
| d/dx | Производная | Г. Лейбниц | 1675 |
| $\int_a^b f(x)dx$ | Опред. интеграл | Ж. Фурье | 1819–1822 |
| $\Sigma$ | Сумма | Л. Эйлер | 1755 |
| k! | Факториал | Х. Крамп | 1803 |
| lim | Предел | У. Гамильтон | 1853 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | Функция | И. Бернулли,<br>Л. Эйлер | 1718<br>1734 |
| $\infty$ | Бесконечность | Дж. Валлис | 1655 |
| $p$ | Отношение длины окружности к диаметру | У. Джонс,<br>Л. Эйлер | 1706<br>1736 |
| $i$ | Корень квадратный из $-1$ | Л. Эйлер | 1777 |
| $x, y, z$ | Неизвестные или переменные величины | Р. Декарт | 1637 |
| $\rightarrow$ | Вектор | О. Коши | 1853 |
| $=$ | Равенство | Р. Рекорд | 1557 |
| $> <$ | Больше, меньше | Т. Гарриот | 1631 |
| $\parallel$ | Параллельность | У. Оутред | 1677 |
| $\perp$ | Перпендикулярность | П. Эригон | 1634 |
| 1, 2, 3 и т.д. (арабские цифры) | Матем. знаки | Индийские математики | V в. |
| $\lvert x \rvert$ | Модуль | К. Вейерштрасс | 1841 |
| I, II, III и т. д. (римские цифры) | Матем. знаки | Римские математики | V в. до н. э. |
| $\leq \geq$ | Нестрогие неравенства | П. Буге | 1734 |
| [ ] | Квадратные скобки | Р. Бомбелли | 1550 |
| () | Круглые скобки | Н. Тарталья | 1556 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| { } | Фигурные скобки | Ф. Виет | 1593 |
| e | Основание натур. логарифмов | Л. Эйлер | 1736 |
| ≡ | Знак тождества | Б. Риман | 1857 |

## БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛЮДЯХ, УПОМЯНУТЫХ В КНИГЕ

***Абдул-Хаким II*** (1842–1918), османский султан. Вступил на престол в 1876 г. после своего сумасшедшего брата Мурада V, процарствовавшего 3 месяца. Провозгласил равноправие всех турецких подданных. Потерпел поражение в войне с Россией (1877–1878). Ввел конституцию, но вскоре распустил парламент, созванный на ее основе и установил деспотический режим. В результате младотурецкой революции 1908 г. был вынужден восстановить конституцию 1876 г. Низложен и арестован. До 1912 г. содержался под стражей в Салониках, затем переведен в Стамбул, где умер в заключении.

***Аделяр из Бата*** (1080–1150), английский ученый-монах и переводчик. В 1122 г., посетив Византию, занялся переводами греческих классиков с арабского языка на латынь. В первую очередь он перевел «Начала» Евклида и «Диалоги» Платона.

***Альберти Леон Баттиста*** (1404–1472), итальянский архитектор, скульптор, художник и писатель. Альберти был драматургом, музыкантом, математиком и спортсменом, воплотив в себе присущий эпохе Возрождения идеал «гармонической личности». Альберти был одним из крупнейших теоретиков искусства. В ряде трактатов обобщил опыт искусства своего времени, обогащенный достижениями науки.

***Арбогаст Луи Франсуа Антуан*** (1759–1803), французский математик. В 1789 г. написал «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимых от теорий бесконечно малых и пределов», где придерживался в основаниях анализа алгебраических принципов Ж. Лагранжа; рукопись не была опубликована. В 1800 г. опубликовал книгу «Об исчислении дериваций». Ввел термин «факториал».

***Аристотель Стагирит*** (384–322 до н. э.), величайший философ Древней Греции. Учился у Платона в Афинах, но не стал его последователем. Был учителем Александра Македонского. Создал понятийный аппарат, который до сих пор пронизывает философский лексикон и самый стиль научного мышления.

*Арно Антуан* (1612–1694), французский теолог, философ и математик. Вел постоянные споры с иезуитами, от которых потом был вынужден бежать в Нидерланды. Арно обладал сильным, в высшей степени последовательным умом и большими знаниями. В полемике он отличался необыкновенной смелостью, сильно разгорячившись, он часто оскорблял своих противников.

*Архит из Тирента* (ок. 435 – 355 до н. э.), древнегреческий философ, математик и государственный деятель. Ему приписывают решение многих геометрических и механических задач (например, удвоение куба).

*Ашшер Джеймс* (1581–1656), ирландец, протестантский богослов, историк и библеист. Вел борьбу с католиками, но он же внес немалый вклад в их примирение с протестантами. Во время католического переворота 1641 г. был отстранен от своего поста, переселился в Лондон и посвятил остаток дней научной работе. По распоряжению О. Кромвеля он был похоронен в Вестминстерском аббатстве. В библейской науке приобрел известность своим трудом «Летописи Ветхого и Нового Завета».

*Бейль Пьер* (1647–1706), французский философ, представитель свободомыслия и скептицизма. В главной работе «Исторический и критический словарь» показал, что Библия противоречит не только свидетельству современников, но и самой себе, что библейские чудеса так же невероятны, как и чудеса языческой религии.

*Борджа Чезаре* (ок. 1475–1507), правитель Романьи (Италия) с 1499 г. С помощью своего отца (Папы Римского Александра VI) создал в Средней Италии обширное государство, в котором пользовался абсолютной властью. После смерти Александра VI (1503) потерял Романью; с 1506 г. – кондотьер короля Наварры.

*Борхес Хорхе Луис* (1899–1986), аргентинский поэт и писатель. Представитель магического реализма, автор фантастической парадоксальной прозы.

*Ботвинник Михаил Моисеевич* (1911–1995), российский шахматист, 6-й чемпион мира по шахматам, чемпион СССР (семь раз в 1931–1952), международный гроссмейстер, доктор технических наук, профессор.

***Браун Вернер фон*** (1912–1977), немецкий ученый, конструктор ракетно-космической техники. С 1937 г. технический руководитель германского ракетного исследовательского центра и главный конструктор ракеты Фау-2, применявшейся во Второй мировой войне для обстрела городов Франции, Великобритании, Голландии и Бельгии. С сентября 1945 г. возглавил Службу проектирования и разработки вооружения армии США.

***Бурлюк Давид Давидович*** (1882–1967), русский поэт и художник, один из основателей русского футуризма. В 1920 г. уехал из России. Жил в США, где занимался преимущественно живописью.

***Бхаскара Агарья*** (1114–1185), крупнейший индийский математик XII в. Ему принадлежит трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»). Этот трактат состоит из четырех частей, из которых «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, а «Биждаганита» – алгебре. Остальные две части посвящены астрономии.

***Витрувий Поллион*** (2-я пол. I в. до н. э.) – римский архитектор и инженер второй половины 1 в. до н. э. Автор трактата «Десять книг об архитектуре», где рассмотрены градостроительные, инженерные и художественные вопросы, обобщен опыт греческого и римского зодчества.

***Волнухин Сергей Михайлович*** (1859–1921), русский скульптор. Был близок к передвижникам. Автор портретов П. М. Третьякова (бронза, 1899), А. М. Корина (гипс, 1902). Оба портрета находятся в Третьяковской галерее. Также Волнухин является автором памятника первопечатнику Ивану Федорову в Москве (бронза, открыт в 1909 г.). В 1918 г. участвовал в осуществлении плана монументальной пропаганды.

***Вольтер Мари Франсуа*** (1694–1718), французский писатель, философ, историк. Из-за острой сатиры, обличающей социальную несправедливость и зло политической системы, был вынужден скрываться и дважды сидел в тюрьме. Оказал большое влияние на развитие мировой, в том числе русской, философской мысли.

***Галилей Галилео*** (1564–1642), итальянский физик, механик и астроном, один из основателей естествознания. Был обвинен инквизицией в защите учения Коперника и принужден к отказу от него. Галилею приписывается восклицание: *«И все-таки она вертится!»* Создал основные принципы механики: первым выдвинул идею об относительности движения, открыл законы инерции, свободного падения и движения тел по наклонной плоскости. Построил телескоп, открыл горы на Луне, четыре спутника Юпитера и т. п.

***Гарун ар-Рашид*** (763 или 766 – 809), халиф, из династии Аббасидов. При нем в Халифате достигли значительного развития сельское хозяйство, ремесла и торговля. В его правление Багдад был центром искусств и наук. Роскошный двор Гарун ар-Рашида вдохновил неизвестных авторов на создание сказок «Тысяча и одна ночь».

***Гвидо Аретинский (Ареццо)*** (992–1050), итальянский музыкальный теоретик. Его реформа нотного письма (ввел 4-линейный нотный стан) стала основой современной нотации. Изобрел европейскую систему сольмизации (слоговые названия ступеней – до, ре, ми, фа, соль, ля, си). С 1952 в Ареццо проводятся Международный конкурс хоровых коллективов («Полифонико») и Международный конкурс композиторов его имени.

***Гвидобальдо де Монтефельтро, герцог Урбинский*** (1472–1508), один из самых известных кондотьеров (руководителей военных отрядов в Италии XIV–XVI вв.), известный покровитель литературы и искусств.

***Генрих III*** (1551–1589), французский король. Будучи очень умным и образованным человеком, он все же не смог овладеть политической обстановкой в стране и фанатично настроенными массами народа, возглавляемыми принцами, но смог создать великолепный двор, блеску которого завидовали все короли Европы. Трагически погиб от руки якобинского монаха-фанатика.

***Генрих IV Великий (Генрих Наваррский)*** (1553–1610), французский король, лидер гугенотов в конце Религиозных войн во Франции, основатель французской королевской династии Бурбонов.

***Гете Иоганн Вольфганг*** (1749–1832), немецкий писатель, поэт, исследователь, основоположник немецкой литературы

Нового времени. Итоговое философское сочинение – трагедия «Фауст».

***Гиз Франсуа*** (1519–1563) прославился обороной Меца от войск императора Карла V. Главный представитель французского аристократического рода Гизов, боковая ветвь Лотарингского герцогского дома. В начальный период Религиозных войн командовал войсками католиков. Генрих Гиз (1550–1588) – один из зачинщиков Варфоломеевской ночи. Был убит по приказу Генриха III.

***Гиппас*** (кон. VI – нач. V до н. э.), пифагорейский философ и ученый. Античная традиция часто объединяла учения о природе космоса Гиппаса и Гераклита. Гиппасу приписывали разглашение тайны иррациональности, присвоение себе открытия додекаэдра (хотя на самом деле он действительно был автором этих открытий). Вслед за Пифагором занимался теорией пропорций и проводил акустические эксперименты для объяснения высоты звука.

***Гипсикл Александрийский*** (род. 180(?) до н. э.), древнегреческий геометр, автор XIV книги евклидовых «Начал», разработал теорию расчета правильных прямоугольных лопат.

***Гладстон Уильям Эварт*** (1809–1898), английский государственный деятель и писатель. Четыре раза был премьер-министром Великобритании.

***Гораций (полн. имя Квинт Гораций Флакк)*** (65–8 до н. э.), римский поэт. Трактат «Наука поэзии» стал теоретической основой классицизма. Знаменитый «Памятник» Горация был примером для подражания у таких поэтов, как Г. Р. Державин, А. С. Пушкин и др.

***Грассман Герман Гюнтер*** (1809–1877), немецкий математик, занимавшийся также физикой и филологией. В сочинении «Учение о линейном протяжении» дал первое систематическое построение учения о многомерном евклидовом пространстве, способствовавшее развитию векторного и тензорного исчислений. Им установлены (1853) законы сложения цветов. Грассман составил (1875) полный словарь к гимнам Ригведы (памятнику древнеиндийской литературы).

***Гюйгенс Христиан*** (1629–1695), нидерландский ученый. В 1665–1681 гг. работал в Париже. Изобрел (1657) маятниковые часы со спусковым механизмом. Создал волновую теорию света. Открыл кольцо у Сатурна и его спутник Титан.

***Д'Аламбер Жан Лерон*** (1717–1783) получил свое имя по названию маленькой церкви, на ступенях которой он был оставлен матерью. Жена бедного стекольщика заменила ему мать. Несмотря на то что воспитатели Жана хотели, чтобы он был юристом или врачом, он стал математиком и философом. Став знаменитостью и гордостью французской науки, Д'Аламбер вознаградил стекольщика и его жену, следя за тем, чтобы они никогда ни в чем не нуждались, и всегда с гордостью называл их своими родителями. Он был одним из главных редакторов «Энциклопедии». С 1751 г. вместе с Д. Дидро участвовал в ее создании (1-й том вышел в 1751–1752 гг.); написал введение к ней, являющееся одним из самых блестящих образцов научного стиля.

***Данте Алигьери*** (1265–1321), итальянский поэт, создатель «Комедии» (позднее получившей эпитет «Божественной», введенный Бокаччо).

***Дарий Гистап*** (IV в. до н.э.), персидский царь. В 513 г. до н. э. предпринял поход против жителей Придунайского края, но, потеряв множество своих солдат, позорно бежал. Освободил Пифагора из Вавилонского плена.

***Дедекинд Юлиус Вильгельм Рихард*** (1831–1916), немецкий математик, известный работами по абстрактной алгебре и основаниям действительных чисел.

***Демокрит*** (род. ок. 470 или 460 до н. э.), один из первых представителей атомизма. Учил, что все происходящее представляет собой движение атомов, которые различаются по форме, величине и расположению.

***Дидро Дени*** (1713–1784), французский философ, писатель. Основатель и редактор «Энциклопедии, или толкового словаря наук, искусств и ремесел».

***Диоген Лаэртский*** (1-я пол. III в. н. э.), античный историк философии. Этим именем подписан эллинистический трактат, излагающий биографии и воззрения античных мыслителей, начиная с архаической эпохи и вплоть до рубежа нашей эры. Никаких данных о личности и биографии автора не сохранилось. Неизвестны даже даты его жизни; приблизительная биографическая датировка возможна лишь на основании его сочинения и предположительно указывает на конец II – начало III в. н.э.

***Дрюон Морис*** (род. 1918), французский писатель. Сын актера Лазаря Кесселя, выходца из Оренбурга, который вместе с семьей в 1908 г. покинул Россию и переехал в Ниццу, играл под актерским псевдонимом Сибер. Покончил с собой в возрасте 21 года. Морис принял фамилию своего отчима Р. Дрюона. Наиболее известен по своим остросюжетными историческими произведениями в традициях А. Дюма-отца «Проклятые короли».

***Дюрер Альбрехт*** (1471–1528), немецкий живописец и график, один из величайших мастеров западноевропейского искусства Ренессанса. Дюрер составил первый в Европе магический квадрат, изображенный на его гравюре «Меланхолия».

***Евмен II*** (197–159 до н. э.), царь пергамский, сын Аттала I, союзник римлян против сирийцев и македонян. Закончил постройку знаменитого пергамского алтаря.

***Евсевий Кесарийский*** (между 260 и 265 – 338 или 339), римский церковный писатель, епископ Кесарии (Палестина).

***Идаций или Идатий*** (ок. 400 – ок. 469), испанский хронист второй половины V в., был епископом. Написал «Chronicon» – в виде продолжения к хронике Иеронима, охватив период от 379 до 469 г., причем особое внимание обращено на историю Испании.

***Ибн Эзра*** (1092–1167), знаменитый средневековый еврейский философ, поэт, мыслитель, лингвист, астролог, астроном и математик. Ибн Эзра родился в Испании, однако вынужден был покинуть страну в 1140 г. в связи с гонениями на евреев. Он жил в Северной Африке, Египте, Палестине, Италии и Лондоне. Умер на юге Франции после долгих лет странствий и нищеты. Среди математических достижений ему принадлежат вычисления и свойства биномиальных коэффициентов.

***Иероним, Св.*** (ок. 340 – 420), один из великих отцов и учителей христианской церкви. Родился ок. 340 г. в Стридоне, на границе Паннонии и Далмации. В 386 г. Иероним поселился в Вифлееме, где завершил перевод Ветхого Завета с греческого языка, а затем написал новый его перевод, теперь уже с еврейского текста. Этот последний перевод, в совокупности со сделанным ранее переводом Нового Завета, известен под названием Вульгаты (канонический перевод Святого Писания, принятый Римско-католической церковью). Помимо библейских переводов, Иероним составил обширные комментарии к библейским книгам, записал предания древней церкви.

***Каллимах из Кирены*** (предположительно 310–240 до н. э.), глава Александрийской библиотеки, поэт и ученый. Обратил на себя внимание царя Птолемея II, был приглашен ко двору и назначен на один из высоких постов в Александрийской библиотеке. Каллимах проработал в ней более двадцати лет и, пользуясь ее материалами, написал более 800 научных сочинений по истории, грамматике.

***Кампанелла Томмазо*** (1568–1639), итальянский философ, поэт, политический деятель; создатель коммунистической утопии. Около двадцати семи лет провел в тюрьмах, где создал десятки сочинений по философии, политике, астрономии, медицине, в т. ч. «Город солнца» – об идеальном обществе будущего.

***Капелла Марциан*** (V в.), позднеантичный писатель и педагог. Автор энциклопедического труда «Сатирикон», в котором развил систему «семи свободных искусств», ставшую основой европейского образования в эпоху Средневековья и Возрождения.

***Карл V Мудрый*** (1338–1380), французский король, упорядочил налоговую систему, реорганизовал армию. В 1369 г. возобновил военные действия против англичан.

***Карлейль Томас*** (1795–1881), английский публицист, историк и философ. Выдвинул концепцию «культа героев», которые якобы являются единственными творцами истории.

***Кассиодор Марк Аврелий*** (ок. 487 – ок. 578), римлянин, приближенный короля остготов Теодориха в Италии. Автор «Истории готов».

***Кеплер Иоганн*** (1571–1630), немецкий астроном, один из создателей астрономии Нового времени. Открыл законы движения планет (законы Кеплера). Изобрел телескоп, в котором объектив и окуляр имели двояковыпуклые линзы.

***Кобергер Антон*** (1445–1513), нюрнбергский гуманист, типограф и издатель. В 70-х гг. XV в. основал типографию в Нюрнберге, где напечатал около 250 книг. Изданные им книги иллюстрировали А. Дюрер, М. Вольгемут и другие немецкие художники. Им напечатана «Всемирная хроника» Гартмана Шеделя, представляющая значительный интерес своими противоречиями с традиционной хронологией.

***Коперник Николай*** (1473–1543), польский астроном, создатель гелиоцентрической системы мира. Объяснил видимое движение небесных светил вращением Земли вокруг своей оси и обращением планет (в том числе Земли) вокруг Солнца.

***Коши Огюстен Луи*** (1789–1857), французский математик, один из основателей теории функций. Автор классических курсов математического анализа.

***Кроули Алистер*** (1875–1947), один из наиболее известных мистиков и магов XIX–XX вв. Автор известных оккультных текстов, в особенности «Книги Закона». Увлекался шахматами, альпинизмом, поэзией и астрологией.

***Лагранж Жозеф Луи*** (1736–1813), франзузский математик и механик. Труды по вариационному исчислению, теории чисел, математическому анализу. Основные труды по механике изложены в известном трактате «Аналитическая механика» (1788).

***Лаплас Пьер Симон*** (1749–1827), французский астроном, математик, физик. Автор классических трудов по теории вероятностей и небесной механике. Предложил (1796) космогоническую гипотезу (гипотеза Лапласа).

***Ле Корбюзье*** (1887–1965), урожденный Шарль Эдуар Жаннере-Гри, французский архитектор, теоретик архитектуры, живописец, дизайнер. Ле Корбюзье является одним из пионеров современной архитектуры; им заложены основы модернизма – современного течения в архитектуре, сменившего прежние архитектурные стили, традиционно опиравшиеся на ордерную систему античности.

***Леонардо да Винчи*** (1452–1519), итальянский живописец, скульптор, архитектор, ученый, инженер. Широко известны такие его произведения, как «Джоконда», роспись «Тайная вечеря» в Милане и многие другие. Автор многочисленных открытий, проектов, экспериментальных исследований в области математики, естественных наук, механики.

***Лихтенберг Георг Кристоф*** (1742–1799), немецкий ученый. Несчастный случай, сделавший его горбатым, обрек юношу на пожизненные страдания. Но воля и настойчивость молодого человека помогли ему закончить Гёттингенский университет и в 1769 г. стать профессором физики. Первым в своих работах использовал электротехнические символы и обосновал их практическое применение.

***Лобачевский Николай Иванович*** (1792–1856), русский математик, создатель геометрии Лобачевского, мыслитель-материалист, деятель университетского образования и народного просвещения.

***Лодовико Сфорца*** (1452–1508), герцог Милана из династии Сфорца, талантливый ренессансный деятель. В период его правления был завершен ряд культурных и художественных проектов. Кроме того, Лодовико уделял внимание и проблемам культуры (при его дворе были такие выдающиеся личности, как Лука Пачоли, Леонардо да Винчи), а также способствовал развитию печати. При дворе Сфорца большим уважением пользовались математические и естественные науки, вероятно, так сказывалась близость Павийского университета.

***Лоренц Хендрик Антон*** (1853–1928), выдающийся нидерландский физик-теоретик, создатель классической электронной теории, организатор и председатель многих Сольвеевских конгрессов по теоретической физике (1911–1927). Нобелевский лауреат по физике 1902 г.

***Люка Франсуа Эдуард Анатоль*** (1842–1891), французский математик, профессор. Родился в Амьене. Важнейшие работы Люка относятся к теории чисел. Люка считал, что с помощью машин или каких-либо приспособлений сложение удобнее производить в двоичной системе, чем в десятичной.

***Маджини Джованни Антонио*** (1555–1617), итальянский математик, астролог, астроном и картограф. Составил гороскопы почти всем правителям Европы. Составил атлас Италии. В его честь назван лунный кратер Maginus.

*Максвелл Джеймс Клерк* (1831–1879), английский физик, создатель классической электродинамики (уравнения Максвелла), один из основателей статистической физики.

*Марло Кристофер* (1564–1593), английский поэт, переводчик и драматург, один из наиболее выдающихся предшественников Шекспира. Марло был незаурядной личностью, чему свидетельствует его мощное поэтическое дарование и принадлежность к философскому кружку У. Ралея, члены которого, по-видимому, исповедовали весьма нетрадиционные для своего времени взгляды.

*Маролуа Самюэль* (1572(?) – 1627), голландский ученый в области фортификации и баллистики.

*Марцелл Марк Клавдий* (268–208 до н. э.), римский полководец. В 222 г. был избран консулом, вел войну против галлов на севере Италии. Вел войны против Ганнибала. Осматривая позиции противника и выбирая позиции для генерального сражения, Марцелл попал в засаду и был убит.

*Мебиус Август Фердинанд* (1790–1868), немецкий математик и астроном. Установил существование односторонних поверхностей (лист Мебиуса). Считается одним из основателей топологии.

*Мерсенн Марен* (1588–1648), французский ученый, первый измерил скорость звука в воздухе. Вел обширную переписку со многими учеными из разных стран, организуя их научное общение.

*Морозов Николай Александрович* (1854–1946), ученый, писатель. С начала 1870-х гг. участвовал в революционном движении. В 1878 г. вступил в народническую организацию «Земля и Воля». Участник покушения на императора Александра II. В 1882 г. приговорен к бессрочной каторге. Освобожден в октябре 1905 г. Известен трудами по химии, математике, астрономии, физике, истории. Воспоминания «Повести моей жизни» (1965).

*Мстиславец Петр Тимофеевич* (год рождения неизвестен – умер после 1577), восточнославянский типограф, соратник первопечатника Ивана Федорова. В 1564 г. вместе с Иваном Федоровым напечатал в Москве первую русскую печатную книгу – «Апостол», а в 1565 г. – два издания «Часовника».

***Наполеон Бонапарт*** (1769–1821), французский политический деятель, полководец, первый консул Французской республики. Совершил государственный переворот, став в 1804 г. императором. Значительно расширил территорию империи, поставил в зависимость от Франции большинство государств Западной Европы. Поражение наполеоновских войск в войне 1812 г. против России положило начало крушению империи. Последние годы жизни провел в изгнании на острове Св. Елены.

***Нерон Тиберий Клавдий Римский*** (37–68), пятый и последний римский император из династии Юлиев-Клавдиев. Известен в истории своей жестокостью и меценатством. Репрессиями и конфискациями он настроил против себя разные слои римского общества. Покончил жизнь самоубийством.

***Ольденбург Генри*** (между 1615 и 1620 – 1678), один из первых секретарей Лондонского Королевского общества развития знаний о природе. В 1653 г. был назначен посланником к Оливеру Кромвелю в Лондон. Был опытным координатором мирового обмена знаниями среди ученых.

***Орем Никола*** (до 1330–1382), один из наиболее известных французских естествоиспытателей и философов XIV в., епископ, математик, физик, астроном и экономист.

***Острожский Константин Константинович*** (1526–1608), князь, киевский воевода. Владения его находились в Подолии, Галиции и на Волыни; всего он имел порядка трехсот городов и несколько тысяч сел. Ревностно защищал православие во время введения унии; заботился о развитии просвещения, издавая книги, учреждая школы, покровительствуя малоросским ученым. Его постигли тяжелые семейные утраты: два старших сына перешли в католицизм, а младший был отравлен слугой.

***Папп Александрийский*** (?–?), древнегреческий математик второй половины III в. Важнейшим из сочинений Паппа является трактат «Собрание», излагающий содержание тех математических сочинений, которые особенно ценились его современниками. В *«Собрании»* имеется много извлечений из недошедших до нас произведений греческих авторов, поэтому оно является ценным источником по истории греческой математики эллинистической эпохи.

***Паскаль Блез*** (1623–1662), французский религиозный философ, писатель, математик и физик. Один из основоположников гидростатики. Сконструировал суммирующую машину. В «Мыслях» развивает представление о трагичности и хрупкости человека, находящегося между двумя безднами – бесконечностью и ничтожеством (человек – «мыслящий тростник»).

***Петр I Великий*** (1672–1725), последний царь московский и первый император всероссийский. Четырнадцатый ребенок царя Алексея Михайловича. Осуществил ряд важнейших преобразований, проявил дипломатические и военные способности во время Северной войны. В 1703 г. основал новую столицу – Санкт-Петербург.

***Пирр*** (319–273 до н. э.), царь Эпира, воевал против Рима. Одержал победу при Аускулуме ценой огромных потерь (так называемая пиррова победа).

***Платон*** (427 или 428 – 347), древнегреческий философ-идеалист, ученик Сократа. Основал в Афинах школу (Платоновскую Академию). Автор знаменитого сочинения «Апология Сократа».

***Плиний Старший*** (***Гай Плиний Секунд)*** (23–79), знаменитый римский писатель. Плиний был человек необыкновенного трудолюбия. Не было такого места, которое бы он считал неудобным для ученых занятий; не было такого времени, которым бы он не воспользовался для того, чтобы читать и делать заметки. Из всех сочинений Плиния дошла до нас только «Естественная история», представляющая собой энциклопедию всевозможных знаний, накопленных древним миром о природе и ее произведениях.

***Плутарх из Херонеи*** (ок. 45 – ок. 127), древнегреческий философ, биограф, моралист. Плутарх написал фундаментальный исторический труд «Сравнительные жизнеописания», в котором изложил биографии героев и правителей Древнего Рима и Древней Греции.

***Посидоний их Амапеи в Сирии*** (135–50 до н. э.), древнегреческий философ-стоик, математик и астроном, много лет прожил в Родосе. Был учителем Цицерона. Известен второй попыткой определить размеры земного шара (первая принадлежит Эратосфену).

***Прокл Диадох*** (412–495), греческий философ, глава школы неоплатонизма, великий схоласт античности, при котором неоплатонизм достиг своего последнего расцвета.

***Прутков Козьма***, литературная маска, под которой в журналах «Современник», «Искра» и др. выступали в 50–60-е гг. XIX в. поэты ***А. К. Толстой*** (наибольший в количественном исчислении вклад) и ***братья Жемчужниковы*** (Алексей, Владимир и Александр Михайловичи). Сатирические стихи, афоризмы Козьмы Пруткова и самый его образ высмеивали умственный застой, политическую «благонамеренность», пародировали литературное эпигонство.

***Пуанкаре Жюль Анри*** (1854–1912), французский математик, физик, философ и теоретик науки; один из величайших математиков всех времен, глава Французской академии (с 1908). Пуанкаре называют последним математиком-универсалом, человеком, способным охватить все математические результаты своего времени.

***Ралей (Рэли) Уолтер*** (ок. 1552–1618), английский мореплаватель, организатор пиратских экспедиций, поэт, драматург, историк. В 80-е гг. фаворит королевы Елизаветы I, безуспешно пытался основать английскую колонию в Северной Америке. Один из руководителей разгрома испанской Непобедимой Армады (1588). Его обвинили в заговоре против Якова I, после чего он был заключен в Тауэр (1604–1616). Казнен после неудачной экспедиции в Северную Америку.

***Ришелье Арман Жан дю Плесси*** (1585–1642), французский кардинал, аристократ и государственный деятель. Глава французского правительства при Людовике XIII. В основу своей политики Ришелье положил укрепление государства, его централизацию, обеспечение главенства светской власти над церковью и центра над провинциями. Он стремился утвердить абсолютизм во Франции.

***Ролль Мишель*** (1652–1719), французский математик. Деятельность Ролля ознаменовалась горячими и бурными нападками на дифференциальное исчисление и на анализ Декарта.

В 1705 г. Академия признала Ролля неправым, с чем позднее и он сам согласился. Написал несколько важных работ по математике, частью не замеченных современниками.

***Ронсар Пьер*** (1524–1585), французский поэт, глава «Плеяды», выразитель гуманистических идей Возрождения.

***Сабин Мазурий*** (I в. н. э.), римский юрист, один из представителей так называемой классической римской юриспруденции. Выражал интересы крупных собственников. Сторонники и последователи Сабина образовали одну из ведущих школ римских юристов – школу сабинианцев.

***Сегье Пьер*** (1588–1672), канцлер Франции с 1635 г. Проводил политику абсолютизма. Помогал Ришелье в основании Французской академии, став ее членом в 1635 г. Очень образованный человек, страстный библиофил и коллекционер рукописей. Часть рукописей и бумаг из его должностного архива хранится в Публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина в Санкт-Петербурге.

***Сенека Луций Анней*** (4 до н. э. – 65 н. э.), римский философ-стоик, поэт и государственный деятель; воспитатель Нерона и один из крупнейших представителей стоицизма; современник Иисуса Христа. Покончил жизнь самоубийством по приказу Нерона, чтобы избежать смертной казни.

***Скалигер Юлий Цезарь*** (1484–1558), французский филолог, критик, поэт. Настоящее имя – *Джулио Бордони* (Bordoni). Написал 15 книг – по числу детей, зарабатывая на жизнь медицинской практикой. Главный труд его жизни – трактат «*Поэтика*» (1561), где была окончательно разработана ренессансная система жанров.

***Слуцкий Борис Абрамович*** (1919–1986), русский советский поэт.

**Снеллиус Виллеброрд** (1580–1626), нидерландский астроном и математик. Разработал метод триангуляции. Установил закон преломления света, названный его именем.

***Стендаль (Анри Мари Бейль)*** (1783–1842), французский писатель. Из его романов наибольший интерес возбудил «Красное и черное». Умер от апоплексического удара прямо на улице. В завещании просил написать на могильной плите: «Арриго Бейль Миланец. Жил. Писал. Любил».

*Страбон* (ок. 64–63 до н. э. – ок. 23–24 н. э.), греческий историк и географ. Автор «Истории» (не сохранилась) и сохранившейся почти полностью «Географии» в 17 книгах, которая служит лучшим источником для изучения географии Древнего мира.

*Такке Андре* (1612–1660), французский математик, ученик бельгийского иезуита Григория Сен Венсана. Книга Такке «О цилиндрах и кольцах» (1651) оказала влияние на Паскаля.

*Таннери Жюль* (1848–1910), французский математик и философ. В сфере математики предметом его особых интересов была теория функций действительного переменного и теория множеств. Таннери подверг критике детерминизм, редукционизм и механицизм в науке, стремление ряда ученых и философов свести к механическому движению все физические или химические явления, даже жизнь и мысль.

*Тейлор Брук* (1685–1731), английский математик, именем которого называется найденная им известная формула дифференциального исчисления. Обладая большими математическими способностями, он в то же время был весьма хорошим музыкантом и успешно занимался живописью. Под конец жизни он предался исследованиям по вопросам религии и философии.

*Теодорих Великий* (454–526), король остготов с 493 г. При Теодорихе остготы завоевали Италию и основали свое королевство.

*Тэтет* (ок. 414–369 до н. э.), древнегреческий математик. Считается, что он первый создал классификацию иррациональностей и построение правильных многогранников (изложение в X и XIII книгах «Начал» Евклида).

*Томсон Уильям, лорд Кельвин* (1824–1907), один из величайших физиков. Необыкновенные заслуги Томсона в чистой и прикладной науке были вполне оценены его современниками. В 1866 г. Томсон возведен в дворянское достоинство, в 1892 г. королева Виктория пожаловала ему пэрство с титулом «лорд Кельвин».

*Уатт Джеймс* (1736–1819), английский изобретатель. Создатель универсального теплового двигателя. Изобрел паровую машину с цилиндром двойного действия, в которой применил центробежный регулятор.

***Улугбек Мухаммед Тарагай*** (1394–1449), среднеазиатский государственный деятель, ученый, просветитель, внук Тимура. С 1409 г. правитель Самарканда. Построил знаменитую обсерваторию. Убит по приказу сына Абдуллатифа.

***Фалес*** (625–547 до н. э.), древнегреческий философ, основатель милетской школы. Возводил все многообразие явлений и вещей к единой первостихии – воде.

***Ферекид*** (между VII–VI вв. до н. э.), древнегреческий философ, родился на небольшом острове Сирос. Путешествовал по Элладе и Египту. Прославился предсказанием падения города Мессения в войне, кораблекрушения и особенно землетрясения. Первым в Элладе стал писать прозой. Его труд назывался «Гептамихос». От этого произведения сохранились лишь небольшие фрагменты.

***Финк Томас*** (1561–1656), германский математик и врач. В 1591 г. занял кафедру профессора медицины в Копенгагенском университете, с 1601 г. там же стал профессором математики, а с 1603 г. – профессором риторики. Из его сочинений наиболее известным было «Geometriae rotundi libri XIV» (Basileae, 1583), в котором впервые появились в печати термины «тангенс» и «секанс».

***Франциск I*** (1494–1547), французский король, сын графа Ангулемского Карла, двоюродного брата короля Людовика XII и Луизы Савойской. Основатель Ангулемской ветви династии Валуа. Его царствование ознаменовано продолжительными войнами в Европе и расцветом французского Возрожденя.

***Фридрих Вильгельм I*** (1770–1840), король Пруссии. По Тильзитскому миру уступил Наполеону I половину территории Пруссии.

***Фридрих II*** (1712–1786), прусский король, крупный полководец, участвовавший в Семилетней войне.

***Ходкевич Григорий Александрович*** (?–1572), государственный деятель и военачальник Великого княжества Литовского. Происходил из известного рода магнатов. С середины XVI в. занимал различные высокие должности. Был сторонником самостоятельности Великого княжества Литовского. Протестуя против федеративного объединения с Польшей в Речь Посполитую, в 1569 г. отказался от всех государственных и административных должностей. В 1588 г. основал типографию при православном монастыре в местечке Заблудово Гродненского повята (ныне Белостокское воеводство в Польше), где продолжили свою деятельность московские первопечатники Иван Федоров и Петр Мстиславец, бежавшие от преследований из Москвы.

***Цай Лунь*** (50–121), китайский сановник, изобретатель бумаги. В 75 г. евнухом попал в императорский дворец. В 105 г. изобрел бумагу, за что император Хэ пожаловал ему высокий титул и богатство. Проиграв в дворцовой интриге при императоре Ане, покончил жизнь самоубийством, выпив яд.

***Цицерон Марк Туллий*** (106–43 до н. э.), древнеримский политик и философ, блестящий оратор. Работы Цицерона оказали сильное влияние на религиозных мыслителей, в частности на Св. Августина, представителей Возрождения и гуманизма (Петрарку, Эразма, Бокаччо), французских просветителей (Дидро, Вольтера, Руссо, Монтескье) и многих других.

***Шамиссо Адельберт фон*** (1781–1838), немецкий поэт и естествоиспытатель. В 1815 г. Шамиссо получил приглашение отправиться в кругосветное плавание в качестве ботаника на бриге «Рюрик», снаряженном графом Румянцевым, под командой русского капитана О. Е. Коцебу. Шамиссо принял предложение и за три года (1815–1818) объездил африканские острова, Южную Америку, часть Сибири, Северную Америку и Полинезийские острова. В 1819 г. он открыл явление метагенеза (способ размножения животных, при котором поколение, размножающееся половым путем, чередуется с бесполым).

***Шеннон Клод Элвуд*** (род. в 1916), американский математик и инженер, профессор Массачусетского технологического института. Один из основателей математической теории информации.

***Штейнгауз Гуго*** (1887–1972), польский математик, один из родоначальников польской математической школы, автор книг по занимательной математике.

***Эвдокс Книдский*** (ок. 408–355 до н. э.), математик, астроном и астролог-теоретик, географ и врач. Родился в Книде, затем отправился путешествовать по Греции и Египту, учился у Архита и Платона, после чего основал в родном городе школу математики и астрономии. Прославил свое имя теорией движения планет и выдвинул гипотезу подвижных небесных сфер. Ему же приписывается введение в Греции календаря с годом, равным 365, 25 суток. Эвдокс составил древнейшую карту звездного неба, на которой созвездия представлены фигурами различных животных и персонажами греческой мифологии. Землю он считал шарообразной и даже вычислил ее примерный объем.

***Эдвард VI*** (1537–1553), английский король с 1547 г. из династии Тюдоров.

***Эддингтон Артур Стэнли*** (1882–1944), английский астроном. Он впервые применил теорию лучистого равновесия к недрам звезд и разработал теорию равновесной газовой излучающей звезды. Обнаружил зависимость светимости звезд от их массы.

***Эмпедокл*** (ок. 490–430 до н. э.), древнегреческий философ, поэт, врач, политический деятель. Жил в Агригенте на Сицилии. Автор поэм «О природе» и «Очищение», из которых сохранились 450 стихов. Основал сицилийскую медицинскую школу. Образ Эмпедокла получил отражение в мировой литературе (Ф. Гелдерлин).

***Эратосфен Киренский*** (ок. 276 – 194 до н. э.), древнегреческий ученый; заложил основы математической географии; впервые измерил дугу меридиана. От сочинений Эратосфена до нас дошли лишь отрывки.

***Эркслебен Иоганн Христиан (Кристоф) Поликарп*** (1744–1777), немецкий естествоиспытатель, профессор физики в Гёттингене, автор «Начал естествознания» (Гёттинген, 1772).

***Эрмит Шарль*** (1822–1901), французский математик; еще школьником, разработал доказательство невозможности решения общего уравнения 5-й степени алгебраическим путем в радикалах. Написал большое число работ (около двухсот сочинений), относящихся к разнообразным предметам чистой и прикладной математики. Учебная деятельность Эрмита была весьма плодотворна. По свидетельству его учеников, ныне прославившихся математиков, никто не мог столь изящно и понятно излагать самые трудные теории как он.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

**Кессельман Владимир Самуилович**

**Занимательная МАТЕМАТИКА**

Редактор *А. Погосян*
Технический редактор *Т. Тимошина*
Корректор *И. Мокина*
Компьютерная верстка *Е. Илюшина*

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д.96

Наш электронный адрес: www.ast.ru
E-mail: astpub@aha.ru

**ОАО «Владимирская книжная типография»**
**600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7**
**Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов**

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Нужна ли математика не математику?

Конечно, нужна!

Математика – неотъемлемая составная часть человеческой культуры. Она встречается и используется в повседневной жизни. Всем нам приходится в жизни считать (например, деньги), мы часто используем (даже не замечая этого) знания о величинах, характеризующих протяженности, площади, объемы, промежутки времени, скорости и многое другое.

В этой книге есть не только «большие» истории маленьких знаков, но и весьма-весьма интересные истории о величайших («больших») людях мира (Архимеде, Пифагоре, Леонардо да Винчи, Фибоначчи, Ферма и многих других).

ISBN 978-5-17-050892-1

9785170508921