

И. В. БАРАНОВА,
С. Е. ЛЯПИН

ЗАДАЧИ
НА ДОКАЗАТЕЛСТВО
ПО АЛГЕБРЕ



УЧПЕДГИЗ
1954

И. В. БАРАНОВА и С. Е. ЛЯПИН

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПО АЛГЕБРЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД-1954

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи на доказательство по алгебре, как и по геометрии, способствуют развитию логического мышления учащихся, углубленному усвоению теоретического материала и выработке более твердых практических навыков. В практике преподавания алгебры в средней школе этому виду работы не уделяется должного внимания. Одной из причин этого является почти полное отсутствие задач на доказательство в стабильных задачниках по алгебре. Пособие „Задачи на доказательство по алгебре“ имеет цель частично восполнить этот пробел.

Данное пособие содержит задачи на доказательство по основным разделам школьного курса алгебры. Задачи снабжены указаниями или подробными решениями. По трудности задачи весьма разнообразны, что позволяет использовать их при различных видах работы по алгебре. Более простые задачи могут быть использованы на уроке и в домашнем задании при первоначальном изучении того или иного раздела программы; часть задач может быть использована при повторении; часть материала может быть предложена для решения на внеклассных занятиях или дана наиболее сильным учащимся для самостоятельной работы.

При пользовании задачником необходимо иметь в виду следующее.

1) Материал задачника расположен по темам, а не по классам, поэтому в одной главе помещены задачи, которые могут быть даны в любом из классов средней школы. Некоторые задачи, близкие по содержанию, а иногда и совсем одинаковые, но решаемые различными методами, помещены в разных главах. В этом случае имеется указание, в какой главе можно найти иное решение этой же задачи.

2) Часть задач относится к вопросам, не включенным в государственную программу для средней школы (главным обра-

зом в разделах „Элементарные функции“, „Неравенства“, „Арифметическая и геометрическая прогрессии“), и может быть разобрана на математическом кружке. Эти задачи, а также и наиболее сложные из других разделов обычно отмечены особым значком (**), снабжены более подробными указаниями и некоторыми теоретическими пояснениями, а также ссылками на литературу, в которой можно найти более подробное разъяснение данного вопроса.

Подавляющее большинство задач предложено И. В. Барановой.

Авторы обращаются с просьбой ко всем читателям сообщить свои замечания по адресу: Ленинград, Невский пр., 28, Учебно-педагогическое издательство.

Авторы

ГЛАВА I

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Сложение, вычитание, умножение и деление целых одночленов и многочленов

1. Даны два числа a и b . Доказать, что если сложить сумму этих чисел с их разностью, то получится удвоенное первое число.

2. Доказать, что разность между суммой двух чисел и их разностью равна удвоенному второму числу.

Примечание. Если в такой формулировке задача затруднит учащихся, то следует дать ее по аналогии с задачей 1.

3. Доказать, что сумма двух нечетных чисел есть число четное.

4. Доказать, что сумма четного и нечетного чисел есть число нечетное.

5. Доказать, что если сумма трех чисел есть число нечетное, то хоть одно из слагаемых число нечетное.

Указание. Все три числа не могут быть четными, так как тогда и сумма их была бы числом четным. Рассмотреть случаи: одно число четное, два нечетные; два числа четные и одно нечетное; все три числа нечетные.

6. Доказать, что если сумма двух чисел — четное число, то их разность — число тоже четное.

Указание. Данные числа могут быть или одновременно оба четные или одновременно оба нечетные.

7. Доказать, что если сумма двух слагаемых — число нечетное, то разность — тоже число нечетное.

Указание. Одно из чисел должно быть четное, другое нечетное.

8. Доказать, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на три.

Указание. Три последовательные натуральные числа могут быть представлены в виде: n , $n + 1$, $n + 2$.

$$s = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1).$$

9. Доказать, что четное число, не делящееся на 4, не может равняться сумме двух последовательных нечетных чисел.

Указание. Найти сумму двух последовательных нечетных чисел и установить, может ли она делиться на 4.

10. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то их произведение будет число четное.

Указание. Если сумма двух чисел есть число нечетное, то одно из них — число четное, другое — нечетное, т. е. произведение их будет числом четным.

11. Доказать, что если произведение трех целых чисел есть число нечетное, то их сумма — число тоже нечетное.

Указание. Все три числа есть числа нечетные, так как если хотя бы одно из них было числом четным, то и все произведение было бы четным числом. Обозначив числа через $2a + 1$, $2p + 1$, $2k + 1$, найти их сумму.

12. Доказать, что каждое натуральное число можно представить в одном из трех видов: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$, где n — натуральное число или нуль.

Указание. Найдем остатки от деления любого натурального числа на 3. Остатки должны быть меньше делителя, следовательно, они могут быть числами 0, 1, 2. Тогда на основании зависимости между делимым, делителем, частным и остатком имеем: $A = 3n$, или $A = 3n + 1$, или $A = 3n + 2$.

13. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

Указание. Из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно число четное.

14. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

15. Доказать, что если n — целое число, то $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ — целое число.

Указание. См. задачи 13, 14.

16. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел делится на 4.

Примечание. Задачи 17 — 27 доказываются на основании положения теорий делимости. Во всех этих задачах под словом „число“ понимается целое положительное число, а под словом „делится“ — делится нацело.

17. Доказать, что если каждое слагаемое суммы делится на некоторое число, то и сумма разделится на это число.

18. Доказать, что если сумма двух чисел и одно из них делится на некоторое число n , то и второе число разделится на n .

19. Показать, что если сумма двух чисел делится на некоторое число, то отсюда не следует, что каждое слагаемое делится на это число.

20. Доказать, что если число a делится на число b и число c делится на число a , то число c делится на число b .

21. Доказать, что если в произведении двух или нескольких целых чисел одно делится на некоторое число, то и все произведение делится на это число.

22. Доказать, что если два числа при делении на третье число дают одинаковые остатки, то их разность делится на это третье число¹.

Указание. Пусть $a = bc + r$, $m = bk + r$, $a > m$, тогда

$$a - m = bc + r - bk - r = b(c - k)$$

делится на b .

23*. Доказать, что если разность двух чисел делится на третье число, то остатки от деления каждого из этих чисел на третье число равны между собой.

Указание. Пусть $(a - b)$ делится на k , a и b не делятся на k . Тогда

$$a = km + n, \quad b = kl + r \quad \text{или} \quad a - b = k(m - l) + (n - r), \\ a > b, \quad n < k, \quad r < k.$$

Значит, разность $n - r$ должна делиться на k , что возможно, если $n = r$.

24*. Доказать, что если делимое есть сумма нескольких чисел, то остаток от деления этой суммы на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить одно или несколько слагаемых на число, кратное делителю.

Указание. Пусть $S = AB + r$, где S — сумма нескольких слагаемых, A — делитель, r — остаток. Тогда:

$$S \pm AK = AB + r \pm AK = A(B \pm K) + r.$$

25*. Доказать, что если делимое есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число, кратное делителю.

Указание. См. задачу 24.

26*. Доказать, что делимое всегда больше двойного остатка.

Указание. Если a — делимое, b — делитель, c — частное и r — остаток, то $a = bc + r$. Но $b > r$, значит $a > rc + r = r(c + 1)$, $c \geq 1$. Значит $a > r(1 + 1)$ или $a > 2r$, ($a \neq 0$).

27*. Доказать, что если делимое и делитель умножить и разделить на одно и то же число, то частное не изменится, остаток же увеличится или уменьшится в число раз, равное этому числу.

Указание. Пусть $a = bq + r$. Умножим обе части данного равенства на k ; $ak = bkq + rk$. Но $rk < bk$, т. е. $r < b$. Следо-

¹ Алгебраическая запись деления с остатком имеет вид: $a = bc + r$, где a — делимое, b — делитель, c — частное, r — остаток, $r < b$. Если остаток r больше делителя b , то данная формула тоже справедлива, но она не выражает деление с остатком.

вательно, rk есть остаток от деления ak на bk . Но остаток rk в k раз больше остатка r .

Примечание. Решение большинства задач 28—37 основано на возможности записать любое многозначное число в виде:

$$A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + A_1 \cdot 10 + A_0,$$

где $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$ есть цифры от 0 до 9, причем $A_n \neq 0$. Кроме этого могут быть использованы выводы задач 17—27.

28. Дано трехзначное число, цифры которого последовательные натуральные числа. Составим новое трехзначное число, цифры которого взяты в обратном порядке. Доказать, что разность между большим и меньшим числом будет равна 198.

Указание. Пусть трехзначное число будет: $100n + 10(n+1) + (n+2)$. Второе число тогда будет: $100(n+2) + 10(n+1) + n$. Найти их разность.

29*. Доказать, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, выражается числом, средняя цифра которого 9, а сумма остальных цифр равна 9.

Указание. Пусть данное число есть: $A \cdot 100 + B \cdot 10 + C$, причем $A > C$. Тогда

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = (A - C)100 + (C - A).$$

Раздробим одну сотню в десятки, затем один десяток в единицы, получим:

$$(A - C - 1)100 + 9 \cdot 10 + (10 + C - A), \text{ но } (A - C - 1) + (10 + C - A) = 9.$$

30. Доказать, что всякое трехзначное число, написанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

Указание. Трехзначное число, написанное одинаковыми цифрами, имеет вид: $100A + 10A + A = 111A$, но 111 делится на 37, значит данное число делится на 37.

31*. Доказать, что если трехзначное число делится на 37, то имеются и другие трехзначные числа, составленные из цифр данного числа, которые делятся на 37.

Указание. Если трехзначное число делится на 37, то

$$100A + 10B + C = 37p,$$

где p — целое число. Составим другое трехзначное число из этих же цифр: $100B + 10C + A$. Из условия, что данное число делится на 37, имеем:

$$10B = 37p - 100A - C.$$

Значит,

$$100B + 10C + A = 370p - 1000A - 10C + 10C + A = 370p - 999A.$$

Уменьшаемое и вычитаемое делятся на 37, значит, и разность $100B + 10C + A$ делится на 37. Установить, какие перестановки цифр данного числа дают число, делящееся на 37.

32. Доказать, что если имеются два трехзначные числа, каждое из которых не делится на 37, а сумма их делится на 37, то шестизначное число, составленное из этих двух чисел, делится на 37.

Указание. Пусть A и B — трехзначные числа, не делящиеся на 37, но сумма их $A + B$ делится на 37. Составим шестизначное число из двух данных:

$$10^3A + B = 1000A + B = 999A + (A + B).$$

Каждое слагаемое делится на 37, значит и сумма делится на 37, т. е. $1000A + B$ делится на 37.

Примечание. Задачи 33 — 37 представляют собой обоснование некоторых приемов умножения.

33. Для того чтобы двузначное число, сумма цифр которого меньше 10, умножить на 11, нужно между цифрами десятков и единиц поставить сумму цифр десятков и единиц. Доказать.

Указание. Пусть двузначное число будет: $10A + B$. Умножив его на 11, получим:

$$(10A + B) \cdot 11 = 100A + 10(A + B) + B,$$

т. е. получили число, в котором число сотен A , десятков — $(A + B)$, единиц — B .

34. Доказать: для того чтобы двузначное число, сумма цифр которого больше или равна 10, умножить на 11, нужно между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать избыток суммы цифр над 10.

Указание. Если $10A + B$ — двузначное число, в котором $A + B = 10 + k$, то, умножив его на 11 и заменив $A + B$ через $10 + k$, получим:

$$(10A + B) \cdot 11 = 100A + 10(A + B) + B = 100(A + 1) + 10k + B.$$

35. Для того чтобы умножить двузначное число на 9, надо из данного числа вычесть число десятков, увеличенное на единицу, и к результату приписать дополнение числа единиц до 10.

Указание. Умножив двузначное число $10A + B$ на $9 = 10 - 1$, будем иметь

$$100A + 10B - 10A - B,$$

или

$$[(10A + B) - (A + 1)] \cdot 10 + (10 - B).$$

36. Для того чтобы умножить двузначное число на 99, надо уменьшить это число на единицу и к результату приписать дополнение числа до 100.

Указание. Взять двузначное число $10A + B$, умножить его на $99 = 100 - 1$ и, прибавив и вычтя по 100, полученное выражение преобразовать к виду:

$$100(10A + B - 1) + [100 - (10A + B)].$$

37. Для того чтобы вычислить произведение двух двузначных чисел, у которых: а) одинаковы цифры единиц или десятков, а сумма цифр десятков или единиц равна 10, б) цифры одного числа одинаковы, а сумма цифр другого числа равна 10, надо произведение цифр десятков сложить с повторяющейся цифрой и к результату приписать произведение цифр единиц.

Указание. Рассмотреть три случая.

- 1) Числа имеют вид: $10A + B$ и $10A + D$, причем $B + D = 10$;
- 2) Числа имеют вид: $10A + B$ и $10C + B$, причем $A + C = 10$;
- 3) Числа имеют вид: $10A + B$ и $10C + C$, причем $A + B = 10$.

Найти произведения этих чисел и преобразовать их: первое — к виду $100(A^2 + A) + BD$, второе — к виду $100(AC + B) + B^2$, третье — к виду $100(AC + C) + BC$.

38. Доказать, что сумма двузначного числа и числа, написанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.

Указание. Найти сумму чисел: $10A + B$ и $10B + A$.

39. Доказать, что произведение двух последовательных четных чисел всегда делится на 8.

Указание. Последовательные четные числа имеют вид: $2n$ и $2n + 2$. Найти их произведение.

40. Доказать, что если из двух натуральных чисел оба при делении на 3 дают остаток 1, то их произведение при делении на 3 дает тот же остаток.

Указание. Если числа при делении на 3 дают остаток, равный 1, то они имеют вид $3n + 1$ и $3p + 1$. Найти их произведение и установить, какой оно даст остаток при делении на 3.

41. Доказать, что если из двух натуральных чисел одно при делении на три дает остаток 1, другое — остаток 2, то их произведение при делении на 3 дает остаток, равный двум.

Указание. Данные числа имеют вид $3n + 1$ и $3p + 2$.

42. Доказать, что половина произведения двух последовательных целых чисел при делении на 3 может дать в остатке 0 или 1.

Указание. Пусть данные числа есть A и $A + 1$. Когда A четное число, т. е. $A = 2k$, то $\frac{A(A+1)}{2} = k(2k+1)$. Рассмотреть случаи, когда $k = 3p$, $k = 3p + 1$, $k = 3p + 2$. Аналогичные рассуждения провести, когда A — нечетное число.

43. Доказать, что какие бы ни были числа A и B , где $A > B$, одно из чисел A , B , $A + B$, $A - B$ делится на 3.

Указание. Число A может иметь один из видов: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$. Число B один из видов: $3p$, $3p + 1$, $3p + 2$. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от условий задачи.

44. Доказать, что какие бы ни были числа A и B , где $A > B$, одно из чисел A , B , $A + B$, $A - B$, $2A + B$, $2A - B$ делится на 5.

45. Доказать, что если A и B — целые положительные числа, то число $AB(A^2 + B^2)(A^2 - B^2)$ делится на 5.

46.* Пусть A , B , C , D означают соответственно единицы, десятки, сотни и тысячи некоторого числа. Доказать, что это число разделится на 4, если $A + 2B$ делится на 4; оно разделится на 8, если $A + 2B + 4C$ делится на 8, и разделится на 16, если $A + 2B + 4C + 8D$ делится на 16, и B — число четное.

Указание. Данное число имеет вид: $1000D + 100C + 10B + A$. Первые два слагаемых делятся на 4, второе слагаемое при делении на 4 дает остаток $2B$, таким образом, остаток будет $A + 2B$. Если это число делится на 4, то остаток будет равен 0 и число разделится на 4. Провести аналогичные рассуждения для остальных случаев.

47. Доказать, что если число делится на 8, то сумма цифр единиц с удвоенной цифрой десятков и с учетверенной цифрой сотен делится на 8 и обратно.

Указание. Всякое число можно представить в виде $1000a + 100b + 10c + d$. Первое слагаемое делится на 8, второе при делении на 8 дает в остатке $4b$, третье — дает в остатке $2c$. Значит, если сумма всех остатков и числа единиц делится на 8, то и все число делится на 8.

48. Доказать, что если число делится на 6, то сумма цифр единиц с учетверенными цифрами каждого из остальных разрядов числа делится на 6 и обратно.

Указание. Число 10 и его степени при делении на 6 дают в остатке 4.

49.* Двухзначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.

Указание. Пусть $N = 10a + b$. Тогда по условию задачи:

$$10a + b + 10b + a = 11(a + b) = k^2.$$

Значит k^2 делится на 11, k делится на 11, а тогда k^2 делится на 121. Отсюда $a + b = 11$. Значит, при $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, соответственно $b = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$, т. е. искомые числа есть: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

§ 2. Формулы сокращенного умножения и деления

50. Доказать, что произведение двух целых чисел, отличающихся друг от друга на 2, увеличенное на 1, дает квадрат суммы меньшего числа и единицы.

51. Доказать, что если к произведению двух последовательных целых чисел прибавить большее из них, то получим квадрат большего числа.

52. Доказать, что сумма квадрата разности двух чисел и учетверенного их произведения равна квадрату суммы этих же чисел.

53. Доказать, что разность между квадратом суммы двух чисел и учетверенным их произведением равна квадрату разности этих же чисел.

54. Найти, чему равна разность между квадратами двух последовательных четных чисел, двух последовательных нечетных чисел.

Указание. Последовательные четные числа имеют вид: $2n$ и $2n + 2$, последовательные нечетные числа: $2n + 1$, $2n + 3$. В первом случае ответ: учетверенное нечетное число, заключенное между двумя данными четными числами; во втором случае — учетверенное четное число, заключенное между данными нечетными числами.

55. Доказать, что разность квадратов двух последовательных четных чисел равна удвоенной сумме этих чисел¹.

56. Доказать, что сумма и разность квадратов двух последовательных натуральных чисел — всегда число нечетное.

Указание. Последовательные натуральные числа имеют вид n , $n + 1$. Полезно предложить учащимся доказать обратное положение: каждое нечетное число есть разность квадратов двух последовательных натуральных чисел.

57. Доказать, что разность между квадратами двух последовательных натуральных чисел равна сумме удвоенного меньшего числа и единицы.

Указание. См. задачу 56 и примечание к задаче 55.

58. Доказать тождество $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$ и сформулировать правило возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся пятью.

59. Доказать и сформулировать правило возведения в квадрат чисел вида $(a + \frac{1}{2})$.

60. Найти общий вид чисел, квадраты которых оканчиваются цифрой 9.

Указание. Числа, квадраты которых оканчиваются цифрой 9, на месте единиц имеют цифры 3 или 7, т. е. имеют вид:

$$10a + 7, 10a + 3; 10a + 7 = 5(2a + 1) + 2, 10a + 3 = 5(2a + 1) - 2,$$

значит эти числа имеют вид: $5(2a + 1) \pm 2$ или $10b \pm 3$.

61. Доказать: 1) что всякое число, не делящееся на 2 и на 3, может быть представлено в виде $6n + 1$ или $6n + 5$, где n — натуральное число или нуль; 2) что произведение двух чисел вида $6n + 1$ или вида $6n + 5$ есть число вида $6n + 1$;

¹ Задачи 54 (первый вопрос) и 55 показывают, что одно и то же выражение может быть представлено в разной алгебраической форме в зависимости от требования задачи. Такого рода сравнения полезно предлагать учащимся с тем, чтобы приучить их вникать в смысл поставленного вопроса.

3) что произведение числа вида $6n + 1$ и $6n + 5$ есть число вида $6n + 5$.

Указание. Натуральное число, не делящееся на 2 и на 3, не делится и на 6, т. е. может иметь один из видов:

$$6n + 1, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 4, 6n + 5,$$

причем, по условию задачи, могут иметь место только два вида: $6n + 1$ и $6n + 5$, так как остальные делятся или на 2 или на 3. Рассмотреть все случаи, указанные в задаче.

62. Доказать, что квадрат целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1.

Указание. Рассмотреть случаи, когда целое число четное и когда нечетное: $N = 2n$; $N = 2n + 1$.

63. Доказать, что число, представляющее полный квадрат, или делится на 3 или при делении на 3 дает в остатке 1.

Указание. Всякое целое число можно представить в одном из видов: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$, где n — любое натуральное число или нуль. Рассмотреть все случаи.

64*. Доказать, что если число не делится на 5, то его квадрат, увеличенный или уменьшенный на 1, делится на 5.

Указание. Число, не делящееся на 5, имеет один из видов: $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 4$, где n — любое натуральное число или нуль. Квадрат первого числа имеет вид:

$$(5n + 1)^2 = 25n^2 + 10n + 1 = 5k + 1.$$

Аналогично квадраты остальных чисел могут быть представлены в виде: $5a + 4$, $5b + 9$, $5c + 6$, т. е., будучи увеличены (2-й и 3-й случаи) или уменьшены (1-й и 4-й) на единицу, будут делиться на 5.

65*. Доказать, что если число не делится на 7, то его куб, увеличенный на 1 или уменьшенный на 1, делится на 7. Установить, в каком случае надо куб числа увеличить, а в каком уменьшить, чтобы деление нацело было возможно.

Указание. Числа, не делящиеся на 7, имеют один из видов:

$$7n + 1, 7n + 2, 7n + 3, 7n + 4, 7n + 5, 7n + 6$$

или

$$7k \pm 1, 7k \pm 2, 7k \pm 3,$$

так как

$$7n + 4 = 7n + 7 - 7 + 4 = 7k - 3,$$

аналогично

$$7n + 5 = 7k - 2.$$

$$7n + 6 = 7k - 1.$$

Куб такого числа равняется сумме чисел, делящихся на 7, и чисел вида: ± 1 , ± 8 , ± 27 , но два последние числа можно представить так: $\pm (7 + 1)$; $\pm (28 - 1)$.

66. Доказать, что если a — четное число, то a ($a^2 + 20$), a ($a^2 - 20$) и a ($a^2 - 4$) делятся на 8.

Указание. Преобразовать данные выражения, приняв во внимание, что четное число имеет вид $2n$.

67. Доказать, что если a — число нечетное, то выражение $a^4 + 9(9 - 2a^2)$ делится на 16.

Указание. Преобразовать данное выражение, представив a в виде $2n + 1$.

68. Доказать, что выражение $2a^2 + 2b^2$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

Указание. Представить каждое из выражений $2a^2$ и $2b^2$ в виде двух слагаемых, затем прибавить и отнять по $2ab$:

$$2a^2 + 2b^2 = a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

69. Доказать, что если число P есть сумма двух квадратов, то число $2P$ есть тоже сумма двух квадратов.

Указание. См. задачу 68.

70. Доказать, что сумма двух квадратов равна полусумме двух других квадратов.

Указание. $a^2 + b^2 = \frac{2a^2 + 2b^2}{2} = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$.

71. Доказать, что если нечетное число есть сумма двух квадратов разных чисел, то половина его есть также сумма двух квадратов.

Указание. $\frac{2n + 1}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$.

72. Доказать, что полусумма квадратов двух четных или двух нечетных чисел равна сумме квадратов двух целых чисел.

Указание. Если данные числа четные, то они имеют вид: $2a$ и $2b$, полусумма их квадратов есть

$$\frac{(2a)^2 + (2b)^2}{2} = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$$

(см. задачу 68). Если данные числа нечетные, то они имеют вид: $2a + 1$ и $2b + 1$, полусумма их квадратов есть

$$\begin{aligned} \frac{(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2}{2} &= 2a^2 + 2a + 2b^2 + 2b + 1 = \\ &= (a + b + 1)^2 + (a - b)^2. \end{aligned}$$

73. Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма двух квадратов, то их произведение тоже будет суммой двух квадратов.

Указание. Пусть данные числа будут $K = a^2 + b^2$, $P = n^2 + k^2$. Составить их произведение, прибавить и отнять по $2abnk$, получится $(an + bk)^2 + (ak - bn)^2$.

74. Представить произведение чисел a и b в виде разности квадратов.

Указание. $ab = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} +$
 $+ \frac{ab}{2} - \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$.

75*. Доказать, что квадрат трехчлена вида $a^2 + ab + b^2$ есть сумма трех квадратов.

Указание. Возвести данное выражение в квадрат, представить $2a^2b^2$ в виде суммы двух слагаемых. Тогда:

$$(a^2 + ab + b^2)^2 = (a^2 + ab)^2 + (b^2 + ab)^2 + a^2b^2.$$

76*. Доказать, что $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ есть сумма трех квадратов.

Указание. Представить $6x^2$ в виде суммы трех слагаемых: x^2 , x^2 , $4x^2$, тогда

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1 &= (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^2 - 2x + 1) + 4x^2 = \\ &= (x^2 - x)^2 + (x - 1)^2 + (2x)^2. \end{aligned}$$

77*. Доказать, что двучлен $3a^4 + 1$ есть сумма трех квадратов.

Указание. Прибавить и вычесть по $2a^3 + 2a^2$; $3a^4$ представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} 3a^4 + 1 &= (a^4 + 2a^3 + a^2) + (a^4 - 2a^3 + a^2) + (a^4 - 2a^2 + 1) = \\ &= (a^2 + a)^2 + (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

78*. Доказать, что сумма произведения четырех последовательных натуральных чисел и единицы есть точный квадрат.

Указание. $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 =$

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

79*. Найти условие, при котором многочлен $x^2 + px + q$ и многочлен $a^2x^2 + 2b^2xu + c^2u^2$ полные квадраты.

Указание. Полный квадрат имеет вид: $x^2 + 2ax + a^2$. Значит,

$$x^2 + px + q = x^2 + 2ax + a^2, \quad p = 2a, \quad q = a^2, \quad \text{т. е. } q = \frac{p^2}{4}.$$

Аналогично для второго многочлена: $b^2 = ac$.

80*. Найти условие, при котором многочлен $x^3 + px^2 + qx + n$ есть точный куб.

Указание. Сравнить коэффициенты данного многочлена с коэффициентами полного куба и установить зависимость между n , p , q ; $q = \frac{p^2}{3}$; $n = \frac{p^3}{27}$.

81*. Найти условие, при котором сумма полных квадратов n , p и k образует полный квадрат.

Указание. Сравнить сумму $n + p + k$ с полным квадратом $a^2 + 2ab + b^2$ и установить зависимость между n , p и k : $nk = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Пример. 4, 36, 81.

Примечание. В задачах 79—82 используется теорема о тождественности многочленов, которую можно привести учащимся без доказательства или разобрать на математическом кружке (см. С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, изд. „Советская Наука“, 1951, стр. 38—39).

82*. Найти значение x , при котором выражение

$$(a + b - x)^2 + (b + c - x)^2 + (c + a - x)^2$$

обратится в полный квадрат.

Указание. Обозначив $(a + b - x)^2 = A$, $(b + c - x)^2 = B$, $(c + a - x)^2 = C$, применив условие, полученное в предыдущей задаче, получим: $AC = \left(\frac{B}{2}\right)^2$. Подставить вместо A , B и C их значения и решить полученное уравнение относительно x :

$$x = 2a \pm \sqrt{(a - b)^2 + (a - c)^2}.$$

83*. Доказать, что $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$ есть полный квадрат.

Указание. См. решение задачи 78.

$$\begin{aligned} & (x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4 = \\ & = (x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) + a^4 = \end{aligned}$$

(перемножили множители: первый и четвертый, второй и третий)

$$\begin{aligned} & = (x^2 + 5ax)^2 + 10a^2(x^2 + 5ax) + 24a^4 + a^4 = \\ & = (x^2 + 5ax + 5a^2)^2. \end{aligned}$$

84*. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

Указание. Пусть $2n + 1$ и $2m + 1$ — два нечетных числа. Сумма их квадратов — число четное. Если она является квадратом целого числа, то это число может быть только четным, т. е. сама сумма должна быть кратна 4, чего быть не может, так как

$$\begin{aligned} (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = \\ &= 4(n^2 + m^2 + m + n) + 2 \end{aligned}$$

не делится на 4.

85*. Доказать, что при любом целом $n > 4$ выражение $n^2 - 3n$ не может быть квадратом натурального числа.

Указание. Преобразуем данное выражение: $n^2 - 3n = n(n - 3)$. Полученные сомножители n и $n - 3$ могут быть либо взаимно простыми, либо иметь общим множителем 3, так как общий множитель чисел n и $n - 3$ должен быть и общим множителем их разности: $n - (n - 3) = 3$. Рассмотрим оба случая.

1) Если числа n и $n - 3$ взаимно простые, то их произведение может быть точным квадратом, если каждое из них будет точным квадратом.

Пусть $n = a^2$, $n - 3 = b^2$, причем $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, откуда $a^2 - b^2 = 3$, т. е. $(a - b)(a + b) = 3$, что возможно, если $a + b = 3$, $a - b = 1$ или $b = 1$, $n = 4$, что противоречит условию задачи.

2) Пусть n и $n - 3$ имеют общим множителем 3, тогда $n = 3a^2$, $n - 3 = 3b^2$, откуда $3a^2 - 3 = 3b^2$ или $3(a^2 - 1) = 3b^2$, или $a^2 - 1 = b^2$. Но

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1,$$

откуда $a + b = 1$, $a - b = 1$, так как произведение двух целых чисел может быть равно единице, если каждый сомножитель его равен единице, значит $a = 1$, $b = 0$. Но если $a = 1$, то $n = 3a^2 = 3$, что также противоречит условию задачи.

Примечание. В задачах 86—88 устанавливается, какими целыми числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника. Эти задачи следует разобрать в VIII классе после изучения теоремы Пифагора и теоремы, ей обратной.

86*. Доказать, что если все стороны прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то одно из них или все три числа четные, нечетных чисел может быть только два.

Указание. Пусть a , b и c — числа, выражающие длины катетов и гипотенузы, тогда $a^2 + b^2 = c^2$. Известно, что квадрат четного числа есть число четное, квадрат нечетного числа — нечетное. Если a^2 и b^2 — одновременно числа четные, то и c^2 число четное, т. е. все три числа четные. Если a^2 и b^2 одновременно числа нечетные, то c^2 — число четное, значит два числа — нечетные. Если одно из чисел a^2 или b^2 число четное, а другое нечетное, то c^2 — число нечетное, т. е. c — число нечетное. Значит нечетных чисел может быть только два.

87*. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике стороны выражаются целыми числами, которые не все четные, то гипотенуза всегда будет числом нечетным, а из катетов один будет числом четным, другой — числом нечетным.

Указание. По условию данной задачи и по задаче 86 стороны треугольника могут быть выражены двумя нечетными числами и одним четным числом. Оба катета не могут быть выражены нечетными числами, так как сумма их квадратов не была бы квадратом целого числа (см. задачу 84). Следовательно, один из катетов должен быть выражен четным числом, другой — нечетным числом, а гипотенуза всегда выражена нечетным числом.

88. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике все стороны выражаются целыми числами, то площадь его выражается целым числом.

Указание. Из предыдущей задачи следует, что один из катетов есть четное число. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

§ 3. Разложение многочленов на множители

89. Доказать, что разность между квадратом натурального числа и самим числом делится на 2.

Указание. $a^2 - a = a(a - 1)$ — произведение двух последовательных целых чисел, из которых одно обязательно четное.

90. Доказать, что разность между кубом натурального числа и самим числом делится на 6.

Указание. $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ — произведение трех последовательных целых чисел всегда делится на 6.

91. Доказать, что разность между кубом нечетного числа и самим числом делится на 24.

Указание. $(2n + 1)^3 - (2n + 1) = (2n + 1)2n(2n + 2)$ — произведение трех последовательных целых чисел делится на 6. Рассмотреть случаи, когда n — четно и n — нечетно.

92. Доказать, что разность между квадратом числа, не делящегося на 3, и единицей делится на 3.

Указание. Числа, не делящиеся на 3, имеют вид: $3n + 1$, $3n + 2$. Рассмотреть оба случая.

93. Доказать, что квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на единицу, делится на 8.

Указание. $(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1)$ делится на 8, так как $n(n + 1)$ делится на 2.

94. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

Указание. $(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = 8(n + 1)$.

95. Доказать, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

Указание. $(2n + 1)^2 - (2p + 1)^2 = 4(n - p)(n + p + 1)$. Рассмотреть случаи, когда n и p — оба четные числа, оба нечетные, одно — четное число, другое — нечетное.

96. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 3.

Указание. $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$.

97. Доказать, что сумма трех последовательных степеней числа 2 делится на 7.

Указание. $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^n$.

98. Доказать, что сумма двух последовательных степеней числа 2 делится на 6.

Указание. $2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot 3$, $n \neq 0$.

99. Доказать, что сумма двух последовательных степеней какого-нибудь числа a делится на произведение $a(a + 1)$.

Указание. $a^n + a^{n+1} = a^n(1 + a) = a^{n-1} \cdot a(a + 1)$.

100. Доказать, что произведение квадрата целого числа на целое число, предшествующее этому квадрату, всегда делится на 12.

Указание. $n^2(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)n$. Установить, почему это произведение будет делиться на 12.

101*. Доказать, что при всяком целом a выражение $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ делится на 24.

Указание. $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1 = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$.

102*. Доказать, что если n — простое число, отличное от 2 и 3, то $n^2 - 1$ делится на 24.

Указание. $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$, из трех последовательных целых чисел одно делится на 3, n — число простое, следовательно, $(n - 1)$ или $(n + 1)$ делится на 3. Если n — число простое, то $n - 1$ и $n + 1$ — последовательные четные числа, следовательно, одно делится на 2, другое — на 4.

103*. Доказать, что при всяком нечетном x выражение $x^3 + 3x^2 - x - 3$ делится на 48.

Указание. Разложить данный многочлен на множители:

$$A = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1).$$

Если x нечетно, то

$$x = 2n + 1 \text{ и } A = 8(n + 2)(n + 1)n,$$

но произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

104*. Доказать, что при всяком целом значении n числовая величина выражения $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ кратна 24.

Указание. $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) = n(n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ делится на 24.

105*. Доказать, что при всяком нечетном n выражение $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ делится на 512.

Указание. Разложим данный многочлен на множители:

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= (n^8 - 1)(n^4 - 1) = \\ &= (n^4 + 1)(n^2 + 1)^2(n + 1)^2(n - 1)^2. \end{aligned}$$

При n нечетном числе $n^4 + 1$ — число четное, т. е. делится на 2, $(n^2 + 1)^2$ делится на 4 как квадрат четного числа; одно из чисел $(n + 1)^2$ и $(n - 1)^2$ делится на 4, а другое на 16, как квадраты последовательных четных чисел. Значит, данный многочлен при нечетном n делится на произведение:

$$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 = 512.$$

Примечание. В задачах 106—114 доказываются алгебраические тождества. Доказательство сводится к разложению многочлена на множители.

106. Доказать, что если к произведению трех последовательных целых чисел прибавить среднее из них, то полученная сумма будет равна кубу среднего числа.

Указание. Пусть $n, n+1, n+2$ — три последовательные целые числа. Тогда по условию задачи:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) + (n+1) &= (n+1)(n^2 + 2n + 1) = \\ &= (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^3. \end{aligned}$$

107*. Доказать, что

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

Указание. Задача сводится к разложению на множители многочлена. Для доказательства тождества преобразуем данный многочлен:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + \\ &+ 3(a+b)c^2 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + \\ &+ 3(a+b)c^2 - (a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + \\ &+ 3ac + 3bc + 3c^2 - a^2 - ab - b^2) = (a+b)(3ab + 3ac + \\ &+ 3bc + 3c^2) = \underline{3(a+b)(b+c)(a+c)}. \end{aligned}$$

108*. Доказать, что $(a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (ac + bd)(ad + bc)$.

Указание. Доказательство сводится к разложению многочлена на множители. Преобразуем многочлен, стоящий в левой части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) &= \\ &= (a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) = \\ &= (a^2 - b^2)(ab + cd - ab) + ab(c^2 + d^2) = \\ &= (a^2 + b^2)cd + ab(c^2 + d^2) = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 = \\ &= ac(ad + bc) + bd(bc + ad) = \underline{(ad + bc)(ac + bd)}. \end{aligned}$$

109*. Доказать тождество:

$$(a+b+c)^3 + (b-a-c)^3 + (c-a-b)^3 + (a-b-c)^3 = 24abc.$$

Указание. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} A &= [(a+b+c)^3 + (b-a-c)^3] + [(c-a-b)^3 + \\ &+ (a-b-c)^3] = 2b(3a^2 + b^2 + 3c^2 + 6ac) - \\ &- 2b(3a^2 + b^2 + 3c^2 - 6ac) = 2b \cdot 12ac = \underline{24abc}. \end{aligned}$$

110*. Доказать тождество:

$$(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d).$$

Указание. Преобразуем многочлен, стоящий в левой части равенства:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 &= \\ &= [(a+b)^2 - (c+d)^2] + [(a+c)^2 - (b+d)^2] = (a+b + \\ &+ c+d)(a+b-c-d) + (a+c+b+d)(a+c-b-d) = \\ &= \underline{2(a-d)(a+b+c+d)}. \end{aligned}$$

111*. Доказать тождество: $(ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

Указание.

$$\begin{aligned}(ax - by)^2 + (bx + ay)^2 &= a^2x^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + a^2y^2 = \\ &= a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) = \underline{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

112*. Доказать, что если $P = \frac{a+b+c}{2}$, то

$$\begin{aligned}&[(P - a) + (P - b)]^3 = \\ &= (P - a)^3 + (P - b)^3 + 3(P - a)(P - b)c.\end{aligned}$$

Указание. Применим формулу:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + b^3 + 3(a + b)ab. \\ [(P - a) + (P - b)]^3 &= (P - a)^3 + (P - b)^3 + \\ &+ 3(P - a)(P - b)(P - a + P - b) = \\ &= (P - a)^3 + (P - b)^3 + 3(P - a)(P - b)(2P - a - b),\end{aligned}$$

но

$$P = \frac{a+b+c}{2},$$

значит,

$$2P - a - b = a + b + c - a - b = c,$$

т. е.

$$\underline{[(P - a) + (P - b)]^3 = (P - a)^3 + (P - b)^3 + 3(P - a)(P - b)c.}$$

113*. Доказать тождество:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, \text{ если } a + b + c = 0.$$

Указание.

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) = \\ &= (a + b + c) \cdot [(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b) = \\ &= -3ab(a + b) = 3abc,\end{aligned}$$

так как $a + b + c = 0$ и $a + b = -c$.

114*. Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Указание. Преобразуем левую часть равенства, пользуясь условием задачи

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = 2[a^4 + b^4 + (a + b)^4],$$

и разложим многочлен в скобках на множители. Для этого выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \\ &= [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 = (a + b)^4 - 4ab(a + b)^2 + 2a^2b^2, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + (a + b)^4 &= 2(a + b)^4 - 4ab(a + b)^2 + 2a^2b^2 = \\ &= 2(a^2 + b^2 + ab)^2; \quad 2[a^4 + b^4 + (a + b)^4] = \\ &= 4(a^2 + b^2 + ab)^2 = 4\left(\frac{2a^2 + 2b^2 + 2ab}{2}\right)^2 = \\ &= (2a^2 + 2b^2 + 2ab)^2 = \underline{(a^2 + b^2 + c^2)^2}. \end{aligned}$$

§ 4. Теорема Безу

115. Найти условие делимости $a^n - x^n$ на $a^p - x^p$.

Указание. Положить $a^p = y$, $x^p = b$, тогда

$$a^n = y^{\frac{n}{p}}, \quad x^n = b^{\frac{n}{p}}$$

и искомое условие будет: $\frac{n}{p} = k$, т. е. n должно быть кратно p .

116. Найти условие делимости $(a + 1)^n + (a - 1)^n$ на $2a$.

Указание. Представить делитель $2a$ в виде: $(a + 1) + (a - 1)$. Искомое условие: n — нечетное число.

117. Найти условие делимости $(x + 1)^n + (x - 1)^n$ на x .

Указание. Преобразовать делитель x к виду:

$$x = \frac{1}{2} [(x + 1) + (x - 1)].$$

118. Доказать, что $(ax + by)^3 + (bx + ay)^3$ делится на $(a + b)(x + y)$.

Указание. Преобразовать делитель:

$$\begin{aligned} (a + b)(x + y) &= ax + bx + ay + by = \\ &= (ax + by) + (bx + ay). \end{aligned}$$

119. Доказать, что $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$ делится на $2x^2 + 2y^2$.

Указание. Преобразовать делитель:

$$2x^2 + 2y^2 = (x^2 - xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2).$$

120. Доказать, что многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ делится на $x + y + z$.

Указание. Делитель представляет собой $x + (y + z)$. Вычислить остаток, положив $x = -y - z$.

121*. Найти условие делимости

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 \text{ на } x^p + x^{p-1} + \dots + x + 1.$$

Указание. Задача заключается в преобразовании делимого и делителя к виду, для которого вопрос о делимости можно решить с помощью уже разобранных задач. Умножим делимое и делитель на $(x-1)$, причем $x \neq 1$. Получим:

$$(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)(x-1) = x^{n+1} - 1,$$

$$(x^p + x^{p-1} + \dots + x + 1)(x-1) = x^{p+1} - 1.$$

По задаче 115, $x^{n+1} - 1$ будет делиться на $x^{p+1} - 1$ при $n+1 = k(p+1)$.

122*. Доказать, что произведение

$$(x^n - 1)(x^{n-1} - 1)(x^{n-2} - 1)$$

делится на произведение

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1).$$

Указание. Показатели степеней x представляют собой три последовательных целых числа: $n, n-1, n-2$. Среди них обязательно есть числа, кратные 2 и 3. Значит, один из множителей делимого должен делиться на $x^2 - 1$, другой — на $x^3 - 1$ и все множители делятся на $x - 1$.

Решение задач 123—132 основывается на тождестве:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

123. Доказать, что любая целая положительная степень любого целого положительного числа, уменьшенная на это число, есть число четное.

Указание. Преобразуем выражение:

$$a^n - a = a(a^{n-1} - 1) = a(a-1)(a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a + 1),$$

но $a(a-1)$ — число четное. Значит, при условиях задачи $a^n - a$ — число четное.

124. Доказать, что при всяком целом n выражение

$$3^{2n+2} - 2^{n+1}$$

делится на 7.

Указание. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} - 2^{n+1} &= 9^{n+1} - 2^{n+1} = (9-2)(9^n + 9^{n-1} \cdot 2 + \dots + 2^n) = \\ &= 7(9^n + 9^{n-1} \cdot 2 + \dots + 2^n), \end{aligned}$$

оно делится на 7.

125. Доказать, что при всяком целом n выражение

$$3^{4n+4} - 4^{3n+3}$$

делится на 17.

Указание. Преобразовать выражение к виду:

$$3^{4n+4} - 4^{3n+3} = 81^{n+1} - 64^{n+1}.$$

126. Доказать, что при всяком целом n выражение

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1}$$

делится на 11.

Указание. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} + 2^{6n+1} &= 9 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 8^{2n}; \quad 3^{2n} = (11 - 8)^{2n} = \\ &= 11^{2n} - 2n \cdot 11^{2n-1} \cdot 8 + \dots + 8^{2n}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 8^{2n} &= 9(11^{2n} - 2n \cdot 11^{2n-1} \cdot 8 + \dots + 8^{2n}) + 2 \cdot 8^{2n} = \\ &= 9 \cdot 11^{2n} - 18n \cdot 11^{2n-1} \cdot 8 + \dots + 11 \cdot 8^{2n} \end{aligned}$$

делится на 11, значит, данное выражение делится на 11.

127. Доказать, что при n целом и положительном выражение

$$A = 3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$$

делится на 117.

Указание. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} A &= 3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n} = 3^{2n+2} (5^{2n} - 3^n \cdot 2^{2n}) = \\ &= 9 \cdot 3^{2n} (25^n - 12^n) = 9 \cdot 13 \cdot 3^{2n} \cdot B = 117 \cdot 3^{2n} B, \end{aligned}$$

где

$$B = 25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 12 + \dots + 12^{n-1}.$$

128. Доказать, что при натуральном n , большем 1, выражение

$$7^{2n} - 4^{2n} - 297$$

делится на 264.

Указание. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} 7^{2n} - 4^{2n} - 297 &= (49^n - 16^n) - 33 - 264 = \\ &= 33(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 + \dots + 16^{n-1} - 1) - 264, \end{aligned}$$

но

$$49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 + \dots + 16^{n-1} - 1$$

делится на 8, так как все члены этого выражения, кроме первого и последнего, содержат множителем 16, а $49^{n-1} - 1 = (8 - 1)^{2n-2} - 1$ делится на 8. Значит, все выражение делится на 264, так как $8 \cdot 33 = 264$.

129. Доказать, что $5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ при n натуральном делится на 41.

Указание. $7^{2(n+1)} = 49^{n+1} = (41 + 8)^{n+1}$; $2^{3n} = 8^n$;

$$\begin{aligned} 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n} &= 5 \cdot (41 + 8)^{n+1} + 8^n = \\ &= 5 \cdot 41^{n+1} + (n+1) \cdot 5 \cdot 8 \cdot 41^n + \dots + (n+1) \cdot 5 \cdot 41 \cdot 8^n + \\ &+ 5 \cdot 8^{n+1} + 8^n \text{ делится на 41, так как} \end{aligned}$$

$$5 \cdot 8^{n+1} + 8^n = 8^n \cdot 41.$$

Примечание. В задачах 130—132 необходимо применить искусственное преобразование — прибавление и вычитание от данного выражения одного и того же количества.

130*. Доказать, что при всяком целом и положительном n число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

Указание. Задача сводится к такому преобразованию данной суммы, при котором было бы возможно определить делимость каждого слагаемого на 133. Преобразуем делимое:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n \cdot 11^2 + 12^{2n} \cdot 12 = 11^n \cdot 121 + 144^n \cdot 12 =$$

(чтобы первое слагаемое делилось на 133, прибавим и отнимем по $11^n \cdot 12$)

$$\begin{aligned} &= 11^n \cdot 121 + 11^n \cdot 12 + 144^n \cdot 12 - 11^n \cdot 12 = \\ &= 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n) = \end{aligned}$$

(второе слагаемое тоже можно преобразовать, используя тождество $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$)

$$\begin{aligned} &= 11^n \cdot 133 + 12(144 - 11)(144^{n-1} + 144^{n-2} \cdot 11 + \\ &+ \dots + 11^{n-1}) = 11^n \cdot 133 + 12 \cdot 133(144^{n-1} + \dots + 11^{n-1}). \end{aligned}$$

Оба слагаемых делятся на 133, значит и сумма будет делиться на 133.

131*. Доказать, что выражение $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ делится на 23.

Указание. Преобразовать делимое к виду: $5 \cdot 5^{2n} + 18 \cdot 2^n$. Прибавить и отнять по $5 \cdot 2^n$. Слагаемое $5(5^{2n} - 2^n)$ преобразовать к виду:

$$5 \cdot 23(25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 2 + \dots + 2^{n-1}).$$

132*. Доказать, что $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ при n целом и положительном делится на 19.

Указание. Преобразовать делимое к виду: $9 \cdot 27^n + 10 \cdot 8^n$. Прибавить и отнять по $9 \cdot 8^n$.

133. Доказать, что многочлен

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n + 1 - n^2 x^{n-1}$$

делится на $(x - 1)^3$.

Указание. Преобразуем многочлен к виду:

$(x^n - 1)^2 - n^2 x^{n-1} (x - 1)^2$, найдем, что он делится на $(x - 1)^2$. Произведя деление, получим частное:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right)^2 - n^2 x^{n-1} = \\ &= (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)^2 - n^2 x^{n-1}. \end{aligned}$$

Если в найденном частном положим $x = 1$, то оно обратится в $n^2 - n^2 = 0$. Следовательно, частное делится на $(x - 1)$, а все данное выражение делится на $(x - 1)^3$.

§ 5. Алгебраические дроби

134. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от уменьшения ее числителя и знаменателя на 1 обращается в $\frac{1}{2}$.

Указание. Пусть дробь $\frac{a}{b}$ — правильная дробь. По условию задачи, $\frac{a-1}{b-1} = \frac{1}{2}$ или $b = 2a - 1$. Искомые дроби будут: $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9} \dots$ и т. д.

135. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от увеличения ее числителя и знаменателя на 1 обращается в $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{a}{b} = \frac{1}{7}, \frac{2}{11}, \frac{3}{15}$ и т. д., $b = 4a + 3$.

136. Доказать, что от прибавления к числителю и знаменателю одного и того же натурального числа дробь, меньшая единицы, — увеличивается; дробь, большая единицы, — уменьшается.

Указание. Пусть $\frac{a}{b}$ — правильная дробь и n — натуральное число. Составим дробь $\frac{a+n}{b+n}$ и сравним ее с данной дробью, найдя их разность. Аналогично поступить, если $\frac{a}{b}$ — неправильная дробь, бóльшая 1.

137. Доказать, что при вычитании из числителя и знаменателя правильной дроби одного и того же натурального числа, меньшего числителя, получается дробь, меньшая данной.

Указание. $\frac{a}{b} - \frac{a-n}{b-n} = \frac{n(b-a)}{b(b-n)} > 0$, так как $b > a$, $b > n$.

138. Доказать, что при вычитании из числителя и знаменателя неправильной дроби, большей 1, одного и того же натурального числа, меньшего знаменателя, дробь увеличивается.

Указание. $\frac{a-n}{b-n} - \frac{a}{b} = \frac{n(a-b)}{b(b-n)} > 0$, так как $a > b$, $b > n$.

139*. Доказать, что если сумма двух дробей равна единице, то квадрат первой дроби, сложенный со второй дробью, равен квадрату второй дроби, сложенному с первой дробью.

Указание. По условию $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$. Пусть $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Тогда

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} - \frac{c}{d},$$

откуда

$$\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b} .}$$

140*. Показать, что ни при каком целом n дроби $\frac{n-6}{15}$ и $\frac{n-5}{24}$ одновременно не будут равны целым числам.

Указание. Предположим, что данные дроби могут быть одновременно равны целым числам, т. е.

$$\frac{n-6}{15} = A; \quad \frac{n-5}{24} = B,$$

где A и B — целые числа. Тогда $n-6=15A$ и $n-5=24B$, откуда $n=15A+6$ и $n=24B+5$, т. е. $15A+6=24B+5$ или $24B-15A=1$, или $3(8B-5A)=1$, чего при целых A и B быть не может.

141*. Доказать, что если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая ее до единицы, тоже несократима.

Доказательство. Пусть данная дробь $\frac{a}{b}$. Дробь, дополняющая ее до единицы, есть $\frac{b-a}{b}$. Допустим, что эта дробь сократима. Тогда b и $b-a$ должны иметь общий делитель, т. е. a и b должны иметь общий делитель, что противоречит условию задачи. Значит, предположение неверно и дробь $\frac{b-a}{b}$ несократима.

142*. Доказать, что сумма двух несократимых дробей только тогда может равняться целому числу, когда дроби имеют одинаковые знаменатели.

Указание. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две несократимые дроби и пусть $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = A$. Тогда $ad + bc = Abd$, т. е. bc делится на d^* , но c и d — числа взаимно простые по условию, значит b делится на d . Кроме того, ad должно делиться на b , так как bc и Abd делятся на b , что возможно лишь при условии, что d делится на b . Если b делится на d и d делится на b , то $d = b$, т. е. знаменатели данных дробей равны.

143*. Найти условие, при котором разность двух несократимых дробей равна их произведению.

Указание. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две несократимые дроби, причем $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, откуда $ad - bc = ac$, или $ad = c(a + b)$, или $bc = a(d - c)$. Имея в виду, что данные дроби несократимы, заключаем, что c есть делитель a и a есть делитель c , т. е. $a = c$ и $d = a + b$. Значит, дроби должны иметь вид: $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{a+b}$.

144. Доказать тождества:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{ac + ax + bx + bc}{ay + 2bx + 2ax + by} = \frac{x + c}{2x + y}; \\ 2) \quad & \frac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3} = \frac{x + z}{(1 - y)^2}; \\ 3) \quad & \frac{3a^3 + ab^3 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{1}{3a^2 - b^2} \end{aligned}$$

и установить область допустимых значений для входящих букв.

145. Доказать тождество:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

при $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

Указание. Привести данные дроби к общему знаменателю, сложить их и преобразовать числитель к виду:

$$(a-b)(a-c)(b-c).$$

146. Доказать, что сумма дробей $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ca}$, $\frac{a-b}{1+ab}$ равна их произведению. Указать область допустимых значений для входящих букв.

* До решения задач 142, 143 следует напомнить учащимся условие делимости суммы на некоторое число.

Указание. Найти сумму данных дробей и преобразовать числитель полученной дроби к виду:

$$(b - c)(a - b)(c - a).$$

147. Доказать, что выражение

$$\left(\frac{a^{3n}}{a^n - 1} + \frac{1}{a^n + 1} \right) - \left(\frac{a^{2n}}{a^n + 1} + \frac{1}{a^n - 1} \right)$$

есть число целое, если a — число целое, причем $n \neq 1$.

Указать область допустимых значений для a .

Указание. Выполнив действия, преобразовать числитель полученной дроби к виду:

$$(a^{2n} - 1)(a^{2n} + 2).$$

148. Доказать, что сумма дробей

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)+1} \text{ и } \frac{2(0,5-x)}{x(1-x)-1}$$

равна сумме их кубов. Указать область допустимых значений для x .

Указание. Найти сумму данных дробей и преобразовать ее к виду: $\frac{x^3 + 2x - 2}{x^2 - x + 1}$. Найти сумму кубов данных дробей и преобразовать ее к тому же виду.

149. Доказать, что

$$b^2 - x^2 = \frac{4}{c^2} [p(p-a)(p-b)(p-c)],$$

если

$$a + b + c = 2p, \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}; \quad c \neq 0.$$

Указание.

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= (b - x)(b + x) = \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) = \\ &= \frac{(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)(b + c + a)}{4c^2} = \\ &= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} = \frac{4}{c^2} [p(p - a)(p - b)(p - c)]. \end{aligned}$$

150*. Доказать, что если $a + b + c = 0$, то

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = \\ & = 1 + \frac{(b-c)c}{a(a-b)} + \frac{(c-a)c}{b(a-b)} + \frac{a(a-b)}{c(b-c)} + \\ & + 1 + \frac{(c-a)a}{b(b-c)} + \frac{b(a-b)}{c(c-a)} + \frac{(b-c)b}{a(c-a)} + 1 = \\ & = 3 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \right) + \frac{a}{b-c} \left(\frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{bc} \right) + \\ & + \frac{b}{c-a} \left(\frac{a^2 - ab + bc - c^2}{ac} \right) = 3 + 2 \left(\frac{c^2}{ab} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} \right), \end{aligned}$$

так как

$$\frac{c}{a-b} \left(\frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \right) = \frac{c(c-b-a)}{ab} = \frac{2c^2}{ab},$$

так как

$$a + b + c = 0, \quad c - b - a = 2c.$$

Аналогично:

$$\frac{a}{b-c} \left(\frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{bc} \right) = \frac{2a^2}{bc}; \quad \frac{b}{c-a} \left(\frac{a^2 - ab + bc - c^2}{ac} \right) = \frac{2b^2}{ac}.$$

Преобразуем выражение

$$\frac{c^2}{ab} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} = \frac{c^3 + a^3 + b^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

(см. задачу 113). Значит,

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 3 + 2 \cdot 3 = 9.$$

151*. Доказать, что если

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \\ & = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0). \end{aligned}$$

Указание. Исходя из условия, доказать, что

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 0,$$

т. е. либо $a = -b$, либо $a = -c$, либо $b = -c$. Преобразовать левую часть доказываемого равенства, используя каждую из полученных зависимостей. Пусть, например, $a = -b$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} &= \frac{1}{(-b)^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \\ &= \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{(-b)^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}. \end{aligned}$$

152*. Доказать, что если

то $ab + bc + ac = 1$,

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = \frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)},$$

причем $a \neq \pm 1$, $b \neq \pm 1$, $c \neq \pm 1$.

Указание. Преобразовать левую часть к виду:

$$\frac{a(1-ab-ac) + b(1-bc-ab) + c(1-ac-bc) + abc(bc+ac+ab)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

и принять во внимание, что

$$\begin{aligned} 1-ab-ac &= bc \text{ по условию задачи,} \\ 1-bc-ab &= ac \quad " \quad " \quad " \quad , \\ 1-ac-bc &= ab \quad " \quad " \quad " \quad . \end{aligned}$$

153**. Доказать, что

$$a^{14} + \frac{1}{a^{14}} = -1,$$

если $a^2 + a + 1 = 0$, $a \neq 0$.

Указание. Если $a^2 + a + 1 = 0$, то $a + \frac{1}{a} = -1$, так как $a \neq 0$. Кроме того,

$$a^3 + a^2 + a = 0 \text{ или } a^3 = -a^2 - a = 1.$$

Преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} a^{14} + \frac{1}{a^{14}} &= a^{12} \cdot a^2 + \frac{1}{a^{12} \cdot a^2} = (a^3)^4 \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^4 \cdot a^2} = \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1, \end{aligned}$$

так как $a^3 = 1$.

154*. Доказать, что

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z),$$

если

$$x = \frac{a-b}{a+b}, \quad y = \frac{b-c}{b+c}, \quad z = \frac{c-a}{c+a}$$

и

$$a \neq -b, \quad b \neq -c, \quad c \neq -a.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть, заменив x, y, z их значениями:

$$\begin{aligned}
 (1+x)(1+y)(1+z) &= \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) \left(1 + \frac{b-c}{b+c}\right) \left(1 + \frac{c-a}{c+a}\right) = \\
 &= \frac{a+b+a-b}{a+b} \cdot \frac{b+c+b-c}{b+c} + \\
 + \frac{c+a+c-a}{c+a} &= \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2b}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c} \cdot \frac{2c}{b+c} = \\
 &= \frac{b+a-a+b}{a+b} \cdot \frac{c+a+a-c}{a+c} + \\
 + \frac{c+b-b+c}{b+c} &= \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \left(1 - \frac{c-a}{c+a}\right) \left(1 - \frac{b-c}{b+c}\right) = \\
 &= \underline{(1-x)(1-y)(1-z)}.
 \end{aligned}$$

Примечание. Перестановка множителей в числителе и преобразование их облегчили решение задачи.

155*. Доказать тождество:

$$\begin{aligned}
 \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \\
 &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} \\
 (a \neq b, a \neq c, b \neq c).
 \end{aligned}$$

Указание. Преобразовать каждое слагаемое левой части равенства путем представления каждой дроби в виде суммы двух дробей более простого вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} &= \frac{(a-c) + (b-a)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}; \\
 \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} &= \frac{(b-a) + (c-b)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}; \\
 \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \frac{(c-b) + (a-c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}; \\
 \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} &= \\
 &= \underline{\underline{\frac{2}{a-b} + \frac{2}{c-a} + \frac{2}{b-c}}}.
 \end{aligned}$$

ГЛАВА II

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ОБЛАСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 6. Понятие иррационального числа. Действия над иррациональными числами

156. Доказать, что $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

Доказательство. Среди целых чисел не может быть числа, равного $\sqrt{2}$, так как $1 < \sqrt{2} < 2$. Допустим, что $\sqrt{2}$ есть рациональная дробь, т. е. $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$, причем $\frac{n}{p}$ — несократимая дробь. Тогда $2 = \frac{n^2}{p^2}$ или $2p^2 = n^2$, следовательно, n^2 и n числа четные, т. е. $n = 2k$. Если $n = 2k$, то $n^2 = 2p^2 = 4k^2$ или $p^2 = 2k^2$, т. е. p — число четное.

Получили, что у несократимой дроби и числитель и знаменатель — числа четные, что невозможно, значит, предположение неверно, и $\sqrt{2}$ не может быть рациональной дробью.

157. Доказать, что если корень целой степени из целого положительного числа не есть целое число, то он не может быть и числом дробным.

Доказательство. Допустим, что $\sqrt[k]{A} = \frac{n}{p}$, где A — целое положительное число, $\frac{n}{p}$ — несократимая дробь, причем $p > 1$. Тогда $A = \frac{n^k}{p^k}$, но $\frac{n}{p}$ — несократимая дробь, значит $\frac{n^k}{p^k}$ — тоже несократимая дробь, т. е. целое число A оказывается равным несократимой дроби.

Допущение привело к нелепости, значит, оно неверно, и положение, данное в задаче, доказано.

158. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель не равен нулю) двух рациональных чисел есть число рациональное.

Указание. Рассмотрим сумму двух рациональных чисел: $\frac{a}{b}$, $\frac{n}{p}$, где a , b , n , p — целые числа, причем, $b \neq 0$, $p \neq 0$. Сумма этих чисел

$$\frac{a}{b} + \frac{n}{p} = \frac{ap + bn}{bp}$$

число рациональное, так как $ap + bn$ — число целое (сумма произведений целых чисел есть число целое), bp — число целое, не равное нулю (произведение целых чисел есть число целое; произведение целых чисел равно нулю только в том случае, если хоть один из множителей равен нулю). Аналогично доказываются остальные положения.

159. Показать, что сумма рационального и иррационального чисел не может выражаться рациональным числом.

Указание. Сумма рационального и иррационального чисел не может выражаться рациональным числом, так как если сумма чисел рациональна, одно слагаемое рационально, то и второе слагаемое должно быть числом рациональным, так как разность рациональных чисел — число рациональное (см. предыдущую задачу).

160. Доказать, что при извлечении квадратного корня из двух рациональных положительных чисел, не являющихся точными квадратами, не могут получиться одинаковые последовательности десятичных знаков.

Доказательство. Пусть p и n — два рациональных положительных числа, не являющиеся точными квадратами. Предположим, что при извлечении из них квадратного корня получились одинаковые последовательности десятичных знаков. Тогда $\sqrt{p} - \sqrt{n} = k$; k — целое число, или $\sqrt{p} = \sqrt{n} + k$, откуда

$$p = n + k^2 + 2\sqrt{n} \cdot k.$$

Так как n не есть точный квадрат, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число, значит p — тоже иррациональное число, что противоречит условию. Значит предположение неверно и задача доказана.

§ 7. Формула сложного радикала

Формула сложного радикала не предусмотрена программой по математике для средней школы, однако, познакомить с ней учащихся, хотя бы на математическом кружке, весьма полезно.

В задачах 161—172 выводится эта формула и показывается ее применение.

161*. Доказать тождество:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Доказательство. Положим

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = x.$$

Возведя в квадрат, получим:

$$x^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 - B},$$

откуда

$$x = \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 - B}},$$

и следовательно,

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

Аналогично:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Вычтя из равенства (1) равенство (2), получим:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Это тождество можно доказать иначе, преобразовав правую часть предполагаемого равенства путем возведения ее в квадрат при условии, что данные выражения всегда имеют смысл в области вещественных чисел, т. е. все подкоренные выражения есть числа положительные.

162*. Доказать, что если

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \text{ то } \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Указание. По условию $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Возведя

обе части данного равенства в квадрат, получим:

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

откуда

$$A = x + y, \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{xy}. *$$

* Если $A + \sqrt{B} = C + \sqrt{D}$, то $A = C$ и $\sqrt{B} = \sqrt{D}$. Действительно, предположим, что $A \neq C$ и $\sqrt{B} \neq \sqrt{D}$, тогда

$$A^2 + B - C^2 - D \neq 2C\sqrt{D} - 2A\sqrt{B},$$

что противоречит условию.

Вычитая второе из этих равенств из первого, получим:

$$A - \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{xy},$$

откуда

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

163*. Найти условие, при котором выражение $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ можно представить в виде двучлена $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, где x и y — рациональные числа.

Решение. Положим

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad (1)$$

тогда по предыдущей задаче

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \quad (2)$$

Перемножив равенства (1) и (2), получим:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} \cdot \sqrt{A - \sqrt{B}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

или

$$\sqrt{A^2 - B} = x - y. \quad (3)$$

Возведя в квадрат равенство (1), получим:

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

откуда

$$A = x + y. \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) представляют собой систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{A^2 - B} \\ x + y = A, \end{cases}$$

откуда

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2};$$

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Таким образом:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Значит, $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ всегда можно представить в виде суммы или разности двух корней вида $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$. Но, чтобы x и y были

к тому же рациональны, необходимо, чтобы выражение $A^2 - B$ представляло собой точный квадрат.

164. Доказать, что при $x \geq 1$ выражение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

равно 2, если $x \leq 2$; равно $2\sqrt{x-1}$, если $x > 2$.

Указание. Преобразовать данное выражение, применив формулу сложного радикала.

165. Доказать, что

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

Указание. Проверить, будут ли все подкоренные выражения положительны. Преобразовать знаменатели дробей к виду:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (3 + \sqrt{3});$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (3 - \sqrt{3}).$$

Выполнить преобразования, указанные в условии задачи.

§ 8. Доказательство тождеств, содержащих радикалы

166*. Доказать, что

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \times \\ & \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1. \end{aligned}$$

Указание. Проверить, будут ли все подкоренные выражения положительны. Рассмотреть произведение двух последних радикалов. Оно будет равно $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. Произведение этого и второго радикала будет равно $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Значит все произведение будет равно $\sqrt{4 - 3} = 1$.

167*. Доказать, что

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = b$$

при

$$x = \frac{2ab}{b^2 + 1}, \quad a > 0, \quad b > 1, \quad a > x.$$

Указание. Задача может быть решена путем преобразования данной дроби в дробь, не содержащую иррациональности в знаменателе, и последующей замены x его значением. Решение облегчается, если принять во внимание выражение для x . Действительно: если

$$x = \frac{2ab}{b^2 + 1},$$

то

$$\frac{x}{a} = \frac{2b}{b^2 + 1},$$

или

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2 + 1 + 2b}{b^2 + 1 - 2b},$$

или

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2}. \quad (1)$$

Преобразовав данную дробь и используя равенство (1), получим:

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} + 1}{\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} - 1} = \frac{\frac{b+1}{b-1} + 1}{\frac{b+1}{b-1} - 1} = b.$$

168*. Показать, что

$$\frac{(1-ax) \cdot \sqrt{1+bx}}{(1+ax) \cdot \sqrt{1-bx}} = 1$$

при

$$x = \frac{\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1}{a}, \quad 0 < a < b < 2a.$$

Указание. Решение значительно упрощается, если принять во внимание выражение для x :

$$ax = \frac{\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}},$$

откуда

$$\frac{1-ax}{1+ax} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{2a-b}}{\sqrt{b} + \sqrt{2a-b}}.$$

Имеем

$$bx = \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{a},$$

откуда

$$\frac{1+bx}{1-bx} = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a - \sqrt{2ab-b^2}},$$

или

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{a - \sqrt{2ab-b^2}}}.$$

Преобразуем выражение $\sqrt{a + \sqrt{2ab-b^2}}$ по формуле сложного радикала:

$$\begin{aligned}\sqrt{a + \sqrt{2ab-b^2}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\sqrt{a - \sqrt{2ab-b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}} = 1.$$

169*. Доказать, что

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = a + b$$

при

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \text{ и } a > 0, \quad b > 0.$$

Указание. Принять во внимание выражение для x , которое преобразовать к виду:

$$x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

170*. Доказать тождество:

$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x} \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right] = -1$$

при $0 < x < 1$.

Указание. Преобразовать знаменатель второй дроби в первой квадратной скобке к виду:

$$\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}).$$

171*. Доказать, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}} = \sqrt{1-k} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

при

$$x = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad 0 < k < 1.$$

Указание. Принять во внимание выражение для x и преобразовать

$$\sqrt{1-x^2}; \quad x^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}, \quad 1-x^2 = \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2},$$

откуда

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Затем подставить полученное выражение в левую часть доказываемого тождества.

172*. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}},$$

при $x = \sqrt{ab}$, причем $a > b > 0$.

Указание. Преобразовать для x выражение: $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$,

откуда

$$\frac{a-x}{a} = \frac{x-b}{x}; \quad \frac{(a-x)(x-b)}{ax} = \frac{(x-b)^2}{x^2};$$

$$\frac{(a+x)(x+b)}{ax} = \frac{(x+b)^2}{x^2}.$$

ГЛАВА III

МНИМЫЕ ЧИСЛА. ОБЛАСТЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

§ 9. Комплексные числа и правила действий с ними

173. Доказать, что при установленных определениях суммы и произведения комплексных чисел остаются справедливыми основные законы сложения и умножения.

Указание. Докажем справедливость переместительного закона сложения при принятом определении суммы двух комплексных чисел:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = ,$$

(по определению)

$$= (c + a) + (d + b)i =$$

(по переместительному закону сложения для действительных чисел)

$$= (c + di) + (a + bi)$$

(по определению суммы комплексных чисел), т. е.

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi).$$

Аналогично доказывается справедливость остальных законов сложения и умножения комплексных чисел.

174. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы сумма двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ была бы 1) числом действительным, 2) числом чисто мнимым.

Указание. 1) Сумма данных комплексных чисел выразится числом $(a + c) + (b + d)i$. Чтобы это комплексное число было действительным, должно соблюдаться равенство $b + d = 0$ или $b = -d$. Если же $b = -d$, то комплексное число будет действительным. Значит условие $b = -d$ является необходимым

и достаточным для того, чтобы сумма данных комплексных чисел была действительным числом.

2) Условия $a = -c$ и $b \neq -d$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы сумма данных комплексных чисел была чисто мнимым числом.

175. Найти необходимое и достаточное условие* для того, чтобы разность двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ была 1) числом действительным, 2) числом чисто мнимым.

Ответ. 1) $b = d$; 2) $a = c$, $b \neq d$.

176. Найти общий вид двух комплексных чисел, 1) произведение которых есть число действительное, 2) сумма и произведение которых есть число действительное.

Ответ. 1) $a + bi$ и $ak - bki$; 2) $a + bi$ и $a - bi$.

177. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы комплексное число $a + bi$ было 1) равно своему сопряженному, 2) равно обратному своего сопряженного, 3) равно противоположному своего сопряженного числа.

Указание. П. 2. Чтобы

$$a + bi = \frac{1}{a - bi}$$

или

$$(a + bi)(a - bi) = 1,$$

должно иметь место равенство: $a^2 + b^2 = 1$. И обратно, если $a^2 + b^2 = 1$, то $a + bi = \frac{1}{a - bi}$. Значит, $a^2 + b^2 = 1$ есть иско-
мое условие.

Ответ. 1) $b = 0$; 2) $a^2 + b^2 = 1$; 3) $a = 0$.

178. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы произведение двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ было 1) числом действительным, 2) числом чисто мнимым.

Ответ. 1) $bc + ad = 0$; 2) $ac = bd$; $bc \neq -ad$.

179. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы частное двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ было 1) числом действительным, 2) числом чисто мнимым ($c \neq 0$; если $c = 0$, то $d \neq 0$).

Ответ. 1) $bc - ad = 0$, 2) $ac + bd = 0$; $bc \neq ad$.

* О необходимых и достаточных условиях см. П. С. Моденов. Сборник задач по математике. „Советская наука“, 1953.

180. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы: 1) квадрат комплексного числа $a + bi$ был действительным числом, является условие $a = 0$ или $b = 0$; 2) квадрат комплексного числа $a + bi$ был чисто мнимым числом, являются условия: $a = \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

181. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы 1) куб комплексного числа $a + bi$ был действительным числом, является условие: $3a^2b - b^3 = 0$; 2) куб комплексного числа $a + bi$ был чисто мнимым числом, являются условия:

$$3a^2b - b^3 \neq 0, \quad a^3 - 3ab^2 = 0.$$

182. Доказать, что при возведении двух сопряженных комплексных чисел в квадрат и в куб снова получаются сопряженные комплексные числа.

Указание. Пусть $a + bi$ и $a - bi$ — сопряженные комплексные числа. Тогда

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi. \quad (1)$$

$$(a - bi)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi. \quad (2)$$

Комплексные числа (1) и (2) сопряженные. Аналогично доказывается второе утверждение.

183. Доказать, что всякая целая положительная степень комплексного числа есть также комплексное число.

Указание.

$$(a + bi)^n = a^n + na^{n-1}bi - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3i + \dots + b^n i^n.$$

Все члены, содержащие b с четным показателем степени, — действительные числа, а содержащие b в нечетной степени — мнимые числа. Взяв у всех мнимых чисел i за скобку и обозначив сумму действительных чисел через A , сумму коэффициентов при i через B , будем иметь: $(a + bi)^n = A + Bi$. Аналогично доказывается, что $(a - bi)^n = A - Bi$.

184. Доказать, что квадратный корень из мнимого числа есть тоже мнимое число.

Указание. Задача сводится к доказательству того, что $\sqrt{a + bi} = x + yi$, т. е. к нахождению для x и y таких действительных значений, которые будут удовлетворять доказываемому равенству. Дальнейшее рассуждение аналогично помещенному в стабильном учебнике алгебры.

§ 10. Тождественные преобразования выражений, содержащих комплексные числа, заданные в алгебраической или тригонометрической форме

185*. Доказать, что если

$$A = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad B = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

то

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) $A^3 = 1,$ | 4) $B^2 = A,$ |
| 2) $B^3 = 1,$ | 5) $A^{3n} = B^{3n} = 1,$ |
| 3) $A^2 = B.$ | 6) $A^{3n+1} = B^{3n+2} = A,$ |
| 7) $B^{3n+1} = A^{3n+2} = B.$ | |

186. Доказать, что

$$\frac{(1 - x^2 + xi\sqrt{3}) \cdot (1 - x^2 - xi\sqrt{3})}{1 - x^6} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| \neq 1.$$

Указание. Преобразовать числитель дроби в левой части равенства к виду: $x^4 + x^2 + 1$, а знаменатель к виду:

$$(1 - x^2)(x^4 + x^2 + 1), \quad x^4 + x^2 + 1 \neq 0, \quad |x| \neq 1.$$

187*. Доказать справедливость равенства:

$$\frac{a + \sqrt{b}}{\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \right)^2} = -i^{30}.$$

Указание. Знаменатель дроби в левой части есть $a + \sqrt{b}$ (см. задачу 161), значит, частное равно 1, но $-i^{30} = 1$.

188*. Доказать, что

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

равняется 2, когда n кратно 3, и равняется (-1) , когда n не кратно 3.

Указание. Если n кратно 3, то $n = 3k$, где k — любое натуральное число. Тогда

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} = 2,$$

так как

$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{-1 \pm 3i\sqrt{3} + 9 \mp 3i\sqrt{3}}{8} = 1, \quad 1^k = 1.$$

Если n не кратно 3, то $n = 3k + 1$ или $n = 3k + 2$. Пусть $n = 3k + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k+1} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k+1} = \\ &= \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{3k} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \frac{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{2} = -1, \end{aligned}$$

так как первые множители этих слагаемых равны 1. Аналогично доказывается справедливость этого утверждения для $n = 3k + 2$. Решение задачи облегчается, если воспользоваться тригонометрической формой комплексного числа. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n + \\ & \quad + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n = \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n + \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{2\pi n}{3} + \\ &+ \cos \frac{4\pi n}{3} + i \left(\sin \frac{2\pi n}{3} + \sin \frac{4\pi n}{3} \right) = 2 \cos \frac{6\pi n}{6} \cdot \cos \frac{2\pi n}{6} + \\ &+ 2i \sin \frac{6\pi n}{6} \cdot \cos \frac{2\pi n}{6} = (-1)^n \cdot 2 \cos \frac{\pi n}{3}. \end{aligned}$$

189*. Доказать, что корни двучленного уравнения $x^n - 1 = 0$ определяются формулой:

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Доказательство. Если $x^n - 1 = 0$, то $x^n = 1$, $x = \sqrt[n]{1}$. Но единицу можно представить в виде:

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi,$$

откуда

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Значит, корни двучленного уравнения $x^n - 1 = 0$ определяются формулой:

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

190*. Доказать, что сумма p -ых степеней корней уравнения $x^n - 1 = 0$, где p — целое положительное число, равна n , если p делится на n и равна 0, если p не делится на n .

Доказательство. Преобразовав формулу корней двучленного уравнения, полученную в предыдущей задаче, будем иметь:

$$x_k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k,$$

где

$$k = 0, 1, 2 \dots (n-1).$$

Тогда

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

и

$$x_k = (x_1)^k,$$

откуда

$$(x_k)^p = (x_1)^{pk},$$

или

$$(x_k)^p = (x_1^p)^k.$$

Но

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

значит,

$$x_1^p = \cos \frac{2\pi p}{n} + i \sin \frac{2\pi p}{n}.$$

Если p делится на n , то $x_1^p = 1$ и сумма p -ых степеней всех n корней будет равна n .

Если p не делится на n , то $x_1^p \neq 1$ и сумма всех n корней будет равна

$$s_n = 1 + x_1^p + x_1^{2p} + \dots + x_1^{(n-1)p} = \frac{x_1^{np} - 1}{x_1^p - 1} = 0,$$

так как $x_1^{np} = 1$.

Задачу 191 полезно решить при изучении теоремы Безу.

191*. Доказать, что многочлен

$$x^n \sin \alpha - p^{n-1} x \sin n\alpha + p^n \sin (n-1)\alpha$$

делится на

$$x^2 - 2px \cos \alpha + p^2.$$

Указание. Представить делитель в виде:

$$x^2 - 2px \cos \alpha + p^2 =$$

$$= (x - p \cos \alpha - pi \sin \alpha) \cdot (x - p \cos \alpha + pi \sin \alpha).$$

Обозначив делимое через $f(x)$, определить величину

$$f[p(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)].$$

Примечание. В задачах 192—197 с помощью тригонометрической формы комплексного числа и формулы Муавра устанавливаются некоторые зависимости, чрезвычайно важные для тригонометрии.

192*. Доказать тождества:

$$1) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$2) \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x.$$

Доказательство. Известно, что

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

При $n = 2$ имеем:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x. \quad (1)$$

С другой стороны:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x. \quad (2)$$

Сравнив равенства (1) и (2), получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

При $n = 3$ будем иметь:

$$\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x),$$

откуда

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \cdot \sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

193*. Доказать тождества:

$$1) \cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} \sin^4 x - \dots +$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n x & (n - \text{четное}), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos x \sin^{n-1} x & (n - \text{нечетное}). \end{cases}$$

$$2) \sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots +$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \cos x \sin^{n-1} x & (n - \text{четное}), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n x & (n - \text{нечетное}). \end{cases}$$

Указание. Комплексное число $\cos x + i \sin x$ возвести в n -ую степень, используя формулу Муавра и формулу бинома Нью-

$$\begin{aligned}
& + i \frac{\sin(nx + x - x) - \sin(n+1)x + \sin x}{4\sin^2 \frac{x}{2}} = \\
& = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x - 1 + \cos x}{4\sin^2 \frac{x}{2}} + \\
& + i \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{4\sin^2 \frac{x}{2}} = \\
& = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
\cos nx - \cos(n+1)x - 1 + \cos x &= [\cos nx - \cos(n+1)x] - \\
&- (\cos x + 1) = 2\sin \frac{nx + nx + x}{2} \cdot \sin \frac{nx + x - nx}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \\
= 2\sin \frac{2nx + x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} &= 2\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{2nx + x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = \\
&= 4\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}.
\end{aligned}$$

$$\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x = 4\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}.$$

Значит,

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Примечание. Эта задача позволяет сделать важный вывод, необходимый для тригонометрии, а именно: сумма n членов этой геометрической прогрессии будет представлять собой комплексное число, у которого действительной частью будет сумма косинусов аргументов $x, 2x, 3x$ и т. д.; коэффициентом при мнимой части — сумма синусов этих же аргументов. Из полученной формулы суммы n членов данной геометрической прогрессии можно получить следующие зависимости:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Примечание. Задача 195 является вспомогательной для решения задачи 196, которая дает выражение для суммы квадратов кратных дуг синуса и косинуса.

195*. Доказать, что если

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos \alpha,$$

то

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

Доказательство. Если $x + \frac{1}{x} = 2\cos \alpha$, то $x^2 - 2x\cos \alpha + 1 = 0$, т. е.

$$x = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}; \quad x = \cos \alpha \pm i \sin \alpha.$$

Откуда

$$x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha; \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}; \quad \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha = x^{-n}.$$

Значит,

$$\underline{x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.}$$

196*. Доказать тождества:

$$1) \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{\cos (n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x} + \frac{n}{2};$$

$$2) \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos (n+1)x \sin nx}{2\sin x}.$$

Доказательство. По предыдущей задаче можно найти такое y , что $y + \frac{1}{y} = 2\cos x$. Значит,

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x + 4\cos^2 2x + \dots + 4\cos^2 nx &= \\ &= \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2 + \dots + \left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)^2 = \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2} + 2\right) + \left(y^4 + \frac{1}{y^4} + 2\right) + \dots + \left(y^{2n} + \frac{1}{y^{2n}} + 2\right) = \\ &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + \dots + \left(y^{2n} + \frac{1}{y^{2n}}\right) + 2n = \\ &= 2\cos 2x + 2\cos 4x + \dots + 2\cos nx + 2n = \\ &= 2 \cdot \frac{\cos (n+1)x \sin nx}{\sin x} + 2n, \end{aligned}$$

(см. задачи 195 и 194).

Следовательно,

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2} + \frac{n}{2}.$$

Для доказательства второго тождества вспомним, что

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 2x + \sin^2 2x = \dots = \cos^2 nx + \sin^2 nx = 1.$$

Значит,

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2}.$$

197**. Доказать, что если $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$, то $x = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Доказательство. Если $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$, то $\frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{1}$.

$$\frac{x+i}{x-i} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

где $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ или

$$x+i = (x-i) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) i}{-1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}} = \frac{\left[1 + \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)^2\right] i}{-1 + \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)^2} = \\ &= \frac{2i \cos \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)}{2 \sin \frac{k\pi}{n} \left(i \cos \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ

§ 11. Уравнения первой степени, их системы. Исследование уравнений первой степени и их систем

198. Найти условия, которым должны удовлетворять параметры уравнения $ax + b = 0$, чтобы уравнение имело: 1) положительный корень, 2) отрицательный корень, 3) корень, равный нулю.

Указание. 1) Знаки параметров различны, 2) знаки параметров одинаковы, 3) $b = 0$; $a \neq 0$.

199. Найти условия, которым должны удовлетворять параметры a , b , c уравнения $ax = b - c$, чтобы уравнение имело: 1) положительный корень, 2) отрицательный корень, 3) корень, равный нулю.

Указание. 1) при $a > 0$, $b > c$ или при $a < 0$, $b < c$;
2) при $a > 0$, $b < c$ или при $a < 0$, $b > c$;
3) при $a \neq 0$, $b = c$.

200. Найти условия, которым должны удовлетворять параметры a и b уравнения $b + x = 4x + a$, чтобы уравнение имело: 1) положительный корень, 2) отрицательный корень, 3) корень, равный нулю.

Указание. 1) $b > a$, 2) $b < a$, 3) $b = a$.

201. Доказать, что из равенства $ax + by = 0$ и $cx + dy = 0$ при $ad - cb \neq 0$ следует, что $x = y = 0$.

Указание. Умножим первое из равенств на d , второе на b , получим:

$$adx + bdy = 0,$$

$$cbx + bdy = 0.$$

Вычтя почленно из одного равенства другое, будем иметь:

$$adx - cbx = 0 \quad \text{или} \quad (ad - cb)x = 0,$$

но $ad - cb \neq 0$ по условию, значит $x = 0$. Умножив первое из

данных равенств на c , второе на a и, вычтя одно из другого, получим:

$$y(ad - cb) = 0,$$

откуда $y = 0$.

202. Доказать, что условием совместности уравнений $ax + b = 0$ и $cx + d = 0$ является равенство: $ad - bc = 0$.

Указание. Из условия задачи имеем: $x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$, $x = -\frac{d}{c}$ при $c \neq 0$, откуда $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ или $ad - bc = 0$.

203. Найти условие совместности уравнений:

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2, \quad a_3x + b_3y = c_3.$$

Указание. Предположив, что данные уравнения совместны, преобразовать первые два к виду:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Определить вид значений для x и y в предположении, что $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, и подставить полученные выражения для x и y в третье уравнение. Искомое условие будет:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0.$$

204. Доказать, что условием совместности уравнений:

$$y + z = a, \quad x + y = b, \quad x + z = c, \quad x + y + z = d$$

является $a + b + c = 2d$.

Указание. Сложив первые три уравнения почленно, будем иметь:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c \quad \text{или} \quad 2(x + y + z) = a + b + c.$$

Четвертое уравнение по условию задачи есть $x + y + z = d$. Значит, для совместности данных уравнений должно быть:

$$a + b + c = 2d.$$

Примечание. В задачах 205 и 206 решаются вопросы о целых решениях одного уравнения с двумя неизвестными. Выводы этих задач могут послужить источником решения многих задач, сводящихся к неопределенным уравнениям.

205*. Найти общие формулы решения уравнения $ax + by = c$ при условии, что a и b — числа взаимно простые.

Указание. Предположим, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение x_1, y_1 , тогда $ax_1 + by_1 = c$. Вычтя из данного уравнения полученное равенство, будем иметь:

$$(x - x_1)a + (y - y_1)b = 0 \quad \text{или} \quad a(x - x_1) = -b(y - y_1).$$

Так как b не делится на a по условию, то $y - y_1$ должно делиться на a , т. е.

$$y - y_1 = at \quad \text{или} \quad y = y_1 + at,$$

где t — любое натуральное число.

Аналогично:

$$x = x_1 - bt$$

или

$$x = x_1 + bt, \quad y = y_1 - at,$$

т. е.

$$x = x_1 \pm bt; \quad y = y_1 \mp at.$$

206*. Дано уравнение $ax + by = c$, в котором a, b, c — целые положительные числа, причем a и b — взаимно простые числа и $x < b, y < a$. Доказать, что при указанных условиях для каждого из неизвестных существует только одно целое положительное решение.

Доказательство. Пусть для x и y найдено по одному целому и положительному решению x_1 и y_1 . Общее решение выразится формулами:

$$x = x_1 \pm bt, \quad y = y_1 \mp at$$

(см. задачу 205). Докажем, что при данных условиях целое положительное решение будет только одно, т. е. $t = 0$.

По условию задачи имеем:

$$\left. \begin{array}{l} x < b \\ y < a \end{array} \right\}, \text{ значит } \left. \begin{array}{l} x_1 - bt < b \\ y_1 + at < a \end{array} \right\},$$

откуда

$$\frac{x_1}{b} - t < 1; \quad \frac{y_1}{a} + t < 1 \quad \text{или} \quad t > \frac{x_1}{b} - 1 \quad \text{и} \quad t < 1 - \frac{y_1}{a},$$

но $\frac{x_1}{b}$ и $\frac{y_1}{a}$, по условию задачи, правильные дроби, значит, t , будучи больше правильной отрицательной дроби и меньше правильной положительной дроби, может быть равно только 0. Существует единственное целое положительное решение данного уравнения.

§ 12. Квадратные уравнения. Зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения

207. Вывести формулу для решения квадратного уравнения, $ax^2 + bx + c = 0$, выделив полный квадрат.

Указание. Умножив данное уравнение на $4a$ и прибавив к обеим его частям по b^2 , преобразовать к виду:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2,$$

откуда

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

или

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

или

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

208. Доказать, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не может иметь более двух различных корней.

Доказательство. Предположим, что данное уравнение имеет три различных корня: x_1, x_2, x_3 . Тогда будем иметь три тождества:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = 0.$$

Вычтя из первого тождества второе, а затем третье, получим:

$$(x_1 - x_2) \cdot [a(x_1 + x_2) + b] = 0,$$

$$(x_1 - x_3) \cdot [a(x_1 + x_3) + b] = 0.$$

Так как по предположению все корни различны, то $x_1 - x_2 \neq 0$, $x_1 - x_3 \neq 0$. Следовательно,

$$a(x_1 + x_2) + b = 0, \quad a(x_1 + x_3) + b = 0,$$

или $a(x_2 - x_3) = 0$. Но разность $x_2 - x_3$ не может быть равна нулю, следовательно, $a = 0$, что противоречит условию. Предположение не верно, и квадратное уравнение не может иметь более двух различных корней.

209. В уравнении $x^2 + px + q = 0$ с рациональными коэффициентами корни x_1 и x_2 не рациональны и $x_1 = x_2^3$.

Доказать, что уравнение имеет вид: $x^2 + 1 = 0$.

Доказательство. Если x_1, x_2 — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то пусть

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

По условию задачи, $x_1 = x_2^3$, т. е.

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \left(\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)^3,$$

или, после некоторых преобразований,

$$p^3 - p - 3pq + (1 + p^2 - q) \sqrt{p^2 - 4q} = 0^*,$$

откуда

$$p^3 - p - 3pq = 0 \quad \text{и} \quad p^2 + 1 - q = 0,$$

так как корни уравнения не рациональны и $\sqrt{p^2 - 4q} \neq 0$.

Если

$$p^3 - p(1 + 3q) = 0 \quad \text{и} \quad p^2 + (1 - q) = 0,$$

то $p = 0$, $q = 1$, т. е. уравнение имеет вид: $x^2 + 1 = 0$.

210. Если в квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ с рациональными коэффициентами корни x_1 и x_2 не рациональны и $x_1 = x_2^2$, то доказать, что уравнение имеет вид $x^2 + x + 1 = 0$.

Указание. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи.

211. Доказать, что сумма обратных значений корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна $-\frac{p}{q}$.

Указание. Если x_1 , x_2 — корни данного уравнения, то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Найдем

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{p}{q}.$$

212. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q, \quad x_1^2 - x_2^2 = \pm p \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Указание. Преобразовать сумму квадратов корней к виду:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q.$$

Из этого же равенства

$$(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 2q - 2x_1 x_2 = p^2 - 4q$$

или

$$x_1 - x_2 = \pm \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Значит,

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \pm p \sqrt{p^2 - 4q}.$$

213. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0,$$

то

$$x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3, \quad x_1^3 - x_2^3 = \pm (p^2 - q) \sqrt{p^2 - 4q}.$$

* См. примечание на стр. 35, т. е. если $A + B\sqrt{C} = 0$, где A , B — рациональные числа, $\sqrt{C}$ — иррациональное число, то $A = 0$ и $B = 0$.

Указание. Доказательство проводится так же, как в предыдущей задаче.

214. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \quad x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}.$$

Указание. См. задачи 212—213.

215. Дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Найти уравнение, корни которого: 1) отличались бы от корней данного уравнения только знаками, 2) были бы обратны корням данного уравнения.

Решение. Пусть корни данного уравнения будут x_1, x_2 , тогда, как известно,

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Если корни искомого уравнения будут $(-x_1)$ и $(-x_2)$, то

$$(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = -(-p) = p;$$

$$(-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = q.$$

Значит, искомое уравнение будет иметь вид: $x^2 - px + q = 0$.

Если корни искомого уравнения будут обратны корням данного квадратного уравнения, то они будут: $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$. Сумма и произведение этих корней выразятся:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{p}{q}; \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{q}.$$

Искомое уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0 \text{ или } qx^2 + px + 1 = 0.$$

216. Дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, корни которого x_1 и x_2 . Найти уравнение, у которого корни были бы: 1) $x_1 + \frac{1}{x_1}$ и $x_2 + \frac{1}{x_2}$, 2) $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$, 3) на $\frac{p}{2}$ больше корней данного уравнения.

Указание. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

Ответы: 1) $qx^2 + (q+1)x + p^2 + (q-1)^2 = 0$; 2) $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$; 3) $x^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$.

217. Доказать, что квадратное уравнение, корни которого в n раз больше корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, имеет вид:

$$ax^2 + nbx + n^2c = 0.$$

Указание. Если x_1 и x_2 есть корни данного уравнения, то, по условию задачи, корни второго уравнения будут: nx_1 и nx_2 . Значит,

$$nx_1 + nx_2 = n(x_1 + x_2) = n\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{nb}{a}; \quad nx_1 \cdot nx_2 = \frac{n^2c}{a},$$

т. е. уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2c}{a} = 0 \text{ или } ax^2 + nbx + n^2c = 0.$$

218. Не решая квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, составить новое уравнение с корнями, равными квадратам корней данного уравнения.

Решение. Пусть корни данного квадратного уравнения будут: x_1 и x_2 ; корни искомого уравнения: x_1^2 и x_2^2 . Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q; \quad x_1^2 \cdot x_2^2 = q^2.$$

Значит, искомое уравнение будет иметь вид:

$$x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0.$$

219. Не решая квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, составить новое уравнение, один из корней которого равнялся бы сумме кубов корней данного уравнения, а другой — кубу их суммы.

Указание. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

Ответ. $x^2 + p(2p^2 - 3q)x + (p^3 - 3q)p^4 = 0.$

220. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого x_1 и x_2 . Доказать, что уравнение, корни которого $x_1^2 + x_2^2$ и $2x_1x_2$, будет иметь вид:

$$a^3x^2 - ab^2x + 2c(b^2 - 2ac) = 0.$$

Указание. Решение сводится к составлению выражения для суммы и произведения корней нового уравнения, при использовании выражения суммы и произведения корней данного уравнения через его коэффициенты.

221. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, имеющее корни x_1 и x_2 . Доказать, что уравнение, корни которого есть $x_1 + 2x_2$ и $x_2 + 2x_1$, будет иметь вид:

$$a^2x^2 + 3abx + 2b^2 + ac = 0.$$

Указание. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущих задач.

222. Найти зависимость между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если сумма корней его вдвое больше их разности.

Указание. Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. Тогда $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. По условию задачи,

$$x_1 + x_2 = 2(x_1 - x_2),$$

откуда $x_1 = 3x_2$. Если $x_1 = 3x_2$, то

$$x_1 + x_2 = 4x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = 3x_2^2 = \frac{c}{a},$$

откуда $\frac{3b^2}{16a^2} = \frac{c}{a}$ или $3b^2 = 16ac$ — искомое условие.

223. Найти зависимость между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если отношение корней равно 2.

Решение. Пусть один корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ будет x_1 , тогда другой должен быть $2x_1$. Следовательно,

$$x_1 + 2x_1 = -\frac{b}{a}$$

или

$$3x_1 = -\frac{b}{a}; \tag{1}$$

$$2x_1 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

или

$$2x_1^2 = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получим искомую зависимость: $2b^2 = 9ac$.

224. В уравнении $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$ найти значение для k , при котором отношение корней уравнения было бы равно 2.

Решение. В уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ отношение корней равно 2, значит, между коэффициентами уравнения существует зависимость: $2b^2 = 9ac$ (см. задачу 223). Для данного уравнения эта зависимость примет вид:

$$2(3k - 1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3) \cdot 2$$

или

$$(3k - 1)^2 = 9(k^2 - 5k + 3). \tag{1}$$

Решив уравнение (1), получим, что $k = \frac{2}{3}$. К этому же уравнению можно было придти, не пользуясь выводом задачи 223, а использовав свойство корней квадратного уравнения и условие задачи.

225. Найти условие, при котором в уравнении $x^2 + px + q = 0$ разность корней была бы равна a .

Решение. Обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2 , тогда

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q, \quad x_1 - x_2 = a.$$

Из первого и третьего уравнений находим x_1 и x_2 и, подставив найденные значения для x_1 и x_2 во второе уравнение, будем иметь:

$$x_1 = \frac{a-p}{2}, \quad x_2 = -\frac{a+p}{2}$$

и

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2 - a^2}{4} = q,$$

т. е.

$$a^2 - p^2 = -4q.$$

226. Найти условие, при котором в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ разность квадратов корней равна $\frac{c^2}{a^2}$.

Указание. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

Ответ. $b^4 - c^4 = 4ab^2c$.

227. Уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $px + q^2 = 0$ имеют общий корень. Найти зависимость между p и q .

Указание. Уравнение $px + q^2 = 0$ имеет один корень $x_1 = -\frac{q^2}{p}$, ($p \neq 0$), который, по условию, должен быть также одним из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$. Обозначив второй корень квадратного уравнения через x_2 , будем иметь:

$$-\frac{q^2}{p} + x_2 = -p; \quad -\frac{q^2 x_2}{p} = q.$$

Исключив x_2 из обоих уравнений, найдем искомую зависимость:

$$q(p^2 - q^2) = p^2.$$

228*. Доказать, что если уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

и

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

имеют общий корень, причем вторые корни их различны, то

$$(Ac - Ca)^2 = (Ab - Ba)(Bc - Cb).$$

Указание. Если x_1 — общий корень данных уравнений, то будем иметь два тождества:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0, \quad Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0.$$

Исключив из этих тождеств x_1^2 , получим:

$$x_1 = - \frac{Ac - Ca}{Ab - Ba}. \quad (1)$$

Исключив из этих же тождеств свободный член, будем иметь:

$$x_1 = - \frac{Bc - Cb}{Ac - Ca}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получим:

$$(Ac - Ca)^2 = (Ab - Ba)(Bc - Cb).$$

Примечание. Задачу 228 можно решить другим способом, используя для этого зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Сравните, какой из способов более рационален.

229. Если значение одного из корней уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

обратно значению одного из корней уравнения

$$x^2 + tx + n = 0,$$

то существует зависимость

$$(pn - m)(qt - p) = (qn - 1)^2.$$

Доказать это.

Указание. Пусть x_1 — один из корней уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

тогда $\frac{1}{x_1}$ должен быть корнем уравнения

$$x^2 + tx + n = 0.$$

Имеем тождества:

$$\begin{aligned} x_1^2 + px_1 + q &= 0, \\ nx_1^2 + tx_1 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

По задаче 228 будем иметь:

$$(pn - m)(qt - p) = (qn - 1)^2,$$

так как

$$a = 1, \quad b = p, \quad c = q, \quad A = n, \quad B = m, \quad C = 1.$$

230. Даны два уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0.$$

Найти все значения для a , при которых эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

Указание. Из второго уравнения найдем a и подставим в первое:

$$a = -(x^2 + x), \quad x^2 - (x^2 + x)x + 1 = 0, \quad x^3 - 1 = 0$$

или

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 1 \text{ и } x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Но

$$a = -(x^2 + x),$$

следовательно,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2^*.$$

231. Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$, корни которого x_1 и x_2 . Если

$$x_2 = \frac{x_1 + 2}{2x_1 - 1},$$

то какому условию удовлетворяют коэффициенты p и q ?

Ответ. $2q + p = 2$.

232. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то, не решая уравнения, доказать, что

$$\sqrt[4]{x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4} = -\frac{b}{a}.$$

Указание.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4} &= \sqrt[4]{(x_1 + x_2)^4} = \\ &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

233. Если x_1 и x_2 есть корни уравнения

$$\frac{3a-b}{c}x^2 + \frac{c(3a+b)}{3a-b} = 0,$$

то, не решая его, найти $x_1^{117} + x_2^{117}$.

Решение.

$x_1^{117} + x_2^{117} = (x_1 + x_2)(x_1^{116} - x_1^{115}x_2 + \dots + x_2^{116})$, но $x_1 + x_2 = 0$, значит, $x_1^{117} + x_2^{117} = 0$.

Примечание. Задачу 233 полезно решить при повторении, после разбора равенства:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

* Задача может быть решена и при использовании задачи 228.

234. Доказать, что если x_1 и x_2 есть корни уравнения $x^2 + bx + b^2 + a = 0$, то имеет место следующее равенство:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a = 0.$$

Указание. Преобразовать левую часть доказываемого равенства к виду:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + a &= (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + a = \\ &= (-b)^2 - (b^2 + a) + a = 0. \end{aligned}$$

235. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

с рациональными коэффициентами. Доказать, что выражения:

$$x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 \text{ и } x_1^4x_2 + x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_1x_2^4$$

рациональны.

Указание. Преобразовать данные выражения так, чтобы они содержали сумму и произведение корней данного уравнения:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^2 [(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] + \\ &+ x_1^2x_2^2 = p^2(p^2 - 3q) + q^2 \end{aligned}$$

— выражение рациональное, так как по условию p и q рациональны. Подобным же образом второе выражение следует преобразовать к виду:

$$(x_1 + x_2)x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = -pq(p^2 - 2q)$$

— выражение рациональное.

236. Если корни уравнения $px^2 + nx + n = 0$ находятся в отношении $a:b$, то доказать, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{n}{p}} &= 0, \\ a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0. \end{aligned}$$

Указание. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $px^2 + nx + n = 0$, тогда,

$$x_1 + x_2 = -\frac{n}{p}, \quad x_1x_2 = \frac{n}{p}, \quad x_1 : x_2 = a : b,$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{\frac{na}{pb}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{nb}{pa}}.$$

Подставив полученные значения для x_1 и x_2 в уравнение

$$x_1 + x_2 = -\frac{n}{p},$$

получим:

$$\sqrt{\frac{na}{pb}} + \sqrt{\frac{nb}{pa}} + \frac{n}{p} = 0.$$

Разделив полученное равенство на $\sqrt{\frac{n}{p}}$, будем иметь:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{n}{p}} = 0.$$

237*. Доказать, что если $s_1, s_2, \dots, s_n$ обозначают соответственно суммы первых, вторых и т. д. n -ых степеней корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$as_2 + bs_1 + 2c = 0, \quad as_3 + bs_2 + cs_1 = 0,$$

$$\dots as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0.$$

Доказательство. Пусть корни данного уравнения есть x_1 и x_2 . Для s_1 имеем $s_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Чтобы найти s_2 , берем тождества:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0, \tag{1}$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0. \tag{2}$$

Сложив их, получим:

$$a(x_1^2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + 2c = 0$$

или

$$\underline{as_2 + bs_1 + 2c = 0},$$

откуда $s_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$. Чтобы выразить s_3 через найденные выражения для s_2 и s_1 , умножим тождество (1) на x_1 , тождество (2) на x_2 и, сложив их, получим:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0$$

$$ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0$$

или

$$a(x_1^3 + x_2^3) + b(x_1^2 + x_2^2) + c(x_1 + x_2) = 0,$$

откуда

$$as_3 + bs_2 + cs_1 = 0$$

или

$$s_3 = -\frac{bs_2 + cs_1}{a} = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}.$$

Чтобы выразить s_4 , умножим тождество (1) на x_1^2 , тождество (2) на x_2^2 и сложим их. Получим:

$$as_4 + bs_3 + cs_2 = 0$$

или

$$s_4 = -\frac{bs_3 + bs_2}{a} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}.$$

Продолжая дальше, можно таким путем выразить сумму любых степеней корней данного уравнения через суммы степеней на 1 и на 2 меньшие.

Чтобы выразить таким образом s_n , умножим тождество (1) на x_1^{n-2} , тождество (2) на x_2^{n-2} и, сложив полученные выражения почленно, получим:

$$as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0.$$

В последнем решении заключается общее решение задачи, так как, давая n любые целые значения, можно найти сумму любых степеней корней квадратного уравнения.

238.** Не решая квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

найти сумму одинаковых степеней выражений, обратных корням данного уравнения.

Решение. Обозначив искомую сумму через s_{-n} , будем иметь:

$$s_{-n} = \left(\frac{1}{x_1}\right)^n + \left(\frac{1}{x_2}\right)^n = \frac{x_1^n + x_2^n}{x_1^n x_2^n} = \frac{s_n}{\left(\frac{c}{a}\right)^n}$$

или

$$s_{-n} = \frac{a^n}{c^n} s_n,$$

где s_n известно из предыдущей задачи.

§ 13. Исследование квадратного уравнения

239. Показать, что если дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю, то левая часть этого уравнения есть полный квадрат.

Указание. $D = b^2 - 4ac = 0$ — по условию задачи, откуда $4ac = b^2$ и

$$c = \frac{b^2}{4a}. \quad (1)$$

Подставив в данное квадратное уравнение вместо c полученное для него выражение (1), будем иметь;

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0,$$

или

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0,$$

или

$$(2ax + b)^2 = 0,$$

т. е. левая часть уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при данном условии есть полный квадрат.

240. Доказать, что если квадратное уравнение с рациональными коэффициентами имеет иррациональный корень $a + \sqrt{b}$, то второй корень будет также иррациональным, сопряженным первому, т. е. $a - \sqrt{b}$.

Доказательство. Если коэффициенты квадратного уравнения рациональны, то сумма и произведение корней, выражающиеся через эти коэффициенты, тоже должны быть рациональны. Сумма и произведение двух выражений, из которых одно иррационально, может быть рациональным только в том случае, если второе выражение тоже иррационально и сопряжено первому, так как $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$ — выражение рациональное, $(a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b}) = 2a$ — выражение рациональное.

241. Доказать, что если квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет мнимый корень $a + bi$, то оно имеет и корень ему сопряженный, т. е. $a - bi$.

Указание. Если коэффициенты квадратного уравнения — действительные числа, то сумма и произведение корней этого уравнения также должны быть числами действительными. Сумма и произведение мнимых чисел может быть действительным числом лишь в том случае, если они сопряжены (см. задачу 176). Действительно,

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a; \quad (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

242. Доказать, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ всегда рациональны, когда $p = n + \frac{q}{n}$, где n — любое рациональное число, p, q — тоже рациональные числа.

Указание. Корни данного уравнения будут рациональны, если дискриминант уравнения будет представлять собой полный квадрат.

243. Доказать, что если p, q, n — рациональные числа, то корни уравнения

$$(p + q + n)x^2 - 2(p + q)x + p + q - n = 0$$

— рациональны.

Указание. Установить, что дискриминант уравнения представляет собой полный квадрат.

244. Доказать, что корни квадратного уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

действительны, когда a, b, c — действительные числа.

Указание. Дискриминант уравнения должен быть не отрицательным числом.

245. Доказать, что корни уравнения $x^2 - (q + n)x + (qn - p^2) = 0$ действительные и вообще различные числа. Найти условие, при котором корни этого уравнения будут равны.

Указание. $D = \left(\frac{q+n}{2}\right)^2 - (qn - p^2) = \frac{(q-n)^2 + 4p^2}{4} \geq 0$, значит, корни уравнения действительны. $D = 0$ при $q = n, p = 0$ — условия равенства корней уравнения.

246. Доказать, что уравнение $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$, где a и b действительные числа, не равные одновременно нулю, имеет действительные корни.

Указание. Предполагая, что $x \neq 1$, после преобразований будем иметь:

$$x^2 - x(a^2 + b^2 + 1) + a^2 = 0,$$

откуда устанавливаем, что $D > 0$.

247. Доказать, что уравнение

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0$$

не может иметь действительных корней, если a, b и c не равны между собой.

Указание. $D = (a + b + c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2) = -[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] < 0$, так как

$$\begin{aligned} a &\neq b, \quad a \neq c, \\ b &\neq c. \end{aligned}$$

Значит, данное уравнение при условиях задачи имеет мнимые корни.

248. Доказать, что корни уравнения

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2x(aa_1 + bb_1 + cc_1) + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0$$

мнимые, за исключением случая, когда

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1.$$

Указание. $D = -[(ab_1 - a_1b)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2] \leq 0$.

249*. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — целые числа, имеет рациональные корни, то эти корни могут быть только целыми числами, а не рациональными дробями.

Доказательство. Предположим, что корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$ является несократимая рациональная дробь $\frac{a}{b}$. Подставив значение корня в уравнение, будем иметь:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{ap}{b} + q = 0,$$

откуда

$$\frac{a^2}{b} = -pa - qb.$$

Но $(-pa - qb)$ есть целое число. Дробь $\frac{a}{b}$ по условию задачи несократимая, значит, дробь $\frac{a^2}{b}$ тоже несократимая. Несократимая же дробь не может быть равна целому числу. Таким образом, предположение привело к противоречивому равенству, значит, оно неверно, и корень данного уравнения не может быть рациональной дробью.

§ 14. Уравнения выше второй степени (третьей и четвертой), уравнения n -ой степени

250*. Доказать, что для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ между корнями и коэффициентами существует следующая зависимость:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Указание. Известно, что если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

или

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

то

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

или

$$x^3 + x^2(-x_1 - x_2 - x_3) + x(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) + (-x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = 0.$$

Значит *,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

251. Доказать, что сумма всех корней биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ равна нулю, а произведение корней равно q .

Указание. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей задачи.

252. Три различных числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют соотношениям:

$$x_1^3 + x_1 p + q = 0,$$

$$x_2^3 + x_2 p + q = 0,$$

$$x_3^3 + x_3 p + q = 0.$$

Доказать справедливость равенства:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Указание. Условия задачи показывают, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$, а значит, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, но при этом условии

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

(см. задачу 113).

253. Найти необходимое и достаточное условие, для того чтобы уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

приводилось к виду

$$(x^2 + m) \cdot (x + n) = 0,$$

и указать простейший способ получения корней уравнения.

* См. примечание на стр. 15.

Указание. Согласно условию задачи должно выполняться тождество:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 + m)(x + n)$$

или

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + mx + nx^2 + mn,$$

откуда

$$m = b, n = a, mn = c$$

или $c = ab$ — это и есть необходимое условие. Докажем, что это условие будет и достаточным: если $c = ab$, то

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$$

или

$$(x + a)(x^2 + b) = 0,$$

откуда

$$x_1 = -a, x_{2,3} = \pm \sqrt{-b}.$$

254*. Доказать, что если в кубическом уравнении

$$x^3 + px^2 + qx + n = 0$$

между коэффициентами существует зависимость $q^2 = 2np$, то сумма четвертых степеней корней его равняется квадрату суммы вторых степеней их.

Доказательство. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни кубического уравнения, тогда, по задаче 250,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, \quad (2)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -n. \quad (3)$$

Возведя равенство (1) в квадрат, получим:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = p^2$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = p^2,$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2q = p^2,$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q. \quad (4)$$

Возведя в квадрат равенство (2) и воспользовавшись условием задачи $q^2 = 2np$, получим:

$$(x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2 = 0. \quad (5)$$

Возведя в квадрат равенство (4) и воспользовавшись равенством (5), получим:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = (p^2 - 2q)^2,$$

откуда

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2.$$

255**. Найти условие, при котором корни уравнения

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$$

составляют: 1) арифметическую прогрессию, 2) геометрическую прогрессию.

Указание. 1) Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного кубического уравнения. По условию задачи,

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

или

$$2x_2 = x_1 + x_3. \quad (1)$$

Кроме этого, из задачи 250 известно, что между корнями этого уравнения существуют и следующие зависимости:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3a, \quad (2)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3b, \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3 = -c. \quad (4)$$

Из равенств (1) и (2) определяем, что $x_2 = -a$. Заменяя в равенстве (4) x_2 через найденное значение, определим $x_1x_3 = \frac{c}{a}$. Подставив в равенство (3) вместо x_1x_3 полученное выражение и заменив $x_1 + x_3$ через $(-2a)$, получим: $2a^3 - 3ab + c = 0$ — искомое условие.

2) Искомое условие: $a\sqrt[3]{c} = b$.

256. Доказать, что если уравнение n -ой степени с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

Доказательство. Пусть x_1 — корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

причем, x_1 — целое число. Тогда

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_1 = -a_n$$

или

$$x_1(a_0x_1^{n-1} + a_1x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = -a_n,$$

откуда

$$a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} = -\frac{a_n}{x_1}.$$

Но левая часть этого равенства есть целое число, значит a_n делится на корень уравнения x_1 , т. е. целочисленный корень данного уравнения является делителем свободного члена.

257. Доказать, что если возвратное уравнение имеет корень x_1 , то оно имеет также корень $\frac{1}{x_1}$.

Указание. Возвратное уравнение имеет вид:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0,$$

т. е. коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца уравнения, одинаковы. Пусть x_1 — корень данного уравнения, тогда, подставив в левую часть этого уравнения $\frac{1}{x_1}$ вместо x , будем иметь:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{1}{x_1^n} + b \cdot \frac{1}{x_1^{n-1}} + \dots + b \cdot \frac{1}{x_1} + a &= \\ &= \frac{a + bx_1 + \dots + bx_1^{n-1} + ax_1^n}{x_1^n}. \end{aligned}$$

Но, $x_1 \neq 0$, числитель же полученной дроби равен нулю, так как x_1 — корень данного уравнения. Значит, вся дробь равна нулю и $\frac{1}{x_1}$ — корень данного возвратного уравнения.

258. Доказать, что возвратное уравнение нечетной степени имеет корнем (-1) .

Указание. Пусть данное возвратное уравнение имеет вид:

$$ax^{2k+1} + bx^{2k} + \dots + bx + a = 0.$$

Тогда

$$a(x^{2k+1} + 1) + b(x^{2k-1} + 1)x + \dots + nx^k(x + 1) = 0.$$

Каждое слагаемое этой суммы содержит множителем сумму одинаковых нечетных степеней x и 1 , значит, каждое слагаемое и вся сумма делится на $(x + 1)$, т. е. $x = -1$ есть корень данного уравнения.

ГЛАВА V

НЕРАВЕНСТВА *

§ 15. Свойства неравенств

259. Показать, что если $|a| < b$, то $-b < a < b$.

Указание. По условию задачи, b — число положительное, число a может быть положительным, отрицательным, равным нулю. Если $a = 0$, то $-b < a < b$, так как нуль больше всякого отрицательного числа и меньше всякого положительного. Если $a > 0$, то $|a| = a$ и $a < b$, но $-b < a$, так как всякое отрицательное число меньше положительного. Значит, $-b < a < b$. Если $a < 0$, то $a < b$, так как отрицательное число меньше положительного и $-b < a$, так как из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше. Значит, опять $-b < a < b$.

260. Показать, что если $-b < a < b$, то $|a| < b$.

Указание. Рассуждения аналогичны проведенным в предыдущей задаче, следует только иметь в виду, что из условия задачи ($-b < b$) очевидно, что b число положительное.

261. Показать, что $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Указание. Пусть a и b — любые действительные числа. Тогда

$$-|a| \leq a \leq |a|; \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Складывая эти неравенства почленно, будем иметь:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

или (задача 260)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

262. Доказать, что $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Указание. Принять во внимание, что $a = a - b + b$ и использовать заключение задачи 260.

* Во всех задачах главы имеются в виду действительные числа, если нет специальной оговорки.

§ 16. Доказательство неравенств при использовании определения понятия неравенства

263. Доказать неравенство: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

Указание. Составим разность между частями неравенства. Будем иметь:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0,$$

так как сумма квадратов действительных чисел всегда положительна или равна 0.

264. Доказать, что

$$(a + b + c)^2 \geq a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c).$$

Указание. Составить разность между частями неравенства и определить ее знак: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$.

265. Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то

$$a^2(b + c) + a(b^2 + c^2 - bc) > 0.$$

Указание. Преобразовать выражение $b^2 + c^2 - bc$ к виду: $(b - c)^2 + bc$, тогда

$$a^2(b + c) + a[(b - c)^2 + bc]$$

будет всегда числом положительным, если a, b, c положительны.

266. Доказать, что $1 + 2x^4 \geq x^2 + 2x^3$.

Указание. Составим разность между частями данного неравенства и определим ее знак, для чего преобразуем эту разность к очевидному неравенству:

$$1 + 2x^4 - x^2 - 2x^3 = (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2.$$

Число не отрицательное, значит

$$1 + 2x^4 \geq x^2 + 2x^3;$$

знак равенства имеет место при $x = 1$.

267. Доказать, что при положительных a, b, c

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc.$$

Указание. Составить разность между частями доказываемого неравенства, преобразовать ее к виду:

$$b(a - c)^2 + a(b - c)^2 + c(b - a)^2.$$

Установить, что разность не отрицательна, значит левая часть неравенства не меньше правой части. Определить, когда они равны.

268. Доказать, что

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

Указание. $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = (a^2 - a)^2 + (a^2 - 1)^2 + (a - 1)^2$ — число не отрицательное.

269. Доказать неравенство:

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3; \quad a > 0; \quad b > 0.$$

Указание. $a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = a^3(a - b) - b^3(a - b) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2)$ — произведение не отрицательное. Значит, $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, причем знак равенства имеет место при $a = b$.

270. Доказать, что при n , большем (-1) , $n^3 + 1$ больше $n^2 + n$; при n , меньшем (-1) , $n^3 + 1$ меньше $n^2 + n$.

Указание. $(n^3 + 1) - (n^2 + n) = (n + 1)(n - 1)^2$. При n , меньшем (-1) , данное выражение отрицательно, значит $n^3 + 1$ меньше $n^2 + n$. При n , большем (-1) , полученная разность положительна, т. е. $n^3 + 1$ больше $n^2 + n$.

271. Доказать неравенство:

$$a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2,$$

где a и b одного знака.

Указание. $(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4) - 6a^2b^2 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + 2ab(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^2(a^2 + b^2 + 4ab)$, при условиях задачи — величина не отрицательная.

272. Доказать, что если $a < b < c$, то

$$a^2b + b^2c + c^2a < a^2c + b^2a + c^2b.$$

Указание. Составим разность

$$a^2b + b^2c + c^2a - a^2c - b^2a - c^2b.$$

Чтобы преобразовать ее в произведение, прибавим и отнимем по abc :

$$\begin{aligned} a^2(b - c) - ac(b - c) - ab(b - c) + bc(b - c) = \\ = (b - c)(a - b)(a - c). \end{aligned}$$

Получим величину отрицательную, так как $a < b < c$.

273. Доказать, что если $a + b$ положительное число, то $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ больше, чем $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Указание. $\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b}{a^2b^2} = \frac{(a + b)(a - b)^2}{a^2b^2}$. Полученное выражение не отрицательное при $a + b > 0$.

274. Доказать, что если a и b положительные числа, то

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3.$$

Указание. Преобразовать разность между частями неравенства к виду:

$$\frac{3(a + b) \cdot (a - b)^2}{8}.$$

275. Доказать, что при положительных a и b и при $a \geq b$

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^4.$$

Указание. Преобразовать разность между левой и правой частями доказываемого неравенства к виду:

$$\frac{(a - b)^2 [3(a + b)^2 + 4(a^2 + ab + b^2)]}{16}.$$

При условии задачи это выражение не отрицательное.

276. Доказать, что при положительных a и b

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Указание. Преобразовать разность между левой и правой частями доказываемого неравенства к виду:

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}.$$

277. Доказать, что при положительных a, b, c имеет место неравенство:

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) > (a + b)(b + c)(a + c).$$

Указание. Разложить левую часть неравенства на множители (см. задачу 107), составить разность между левой и правой частями неравенства. Полученное выражение

$$2(a + b)(b + c)(a + c)$$

при условиях задачи — число положительное.

278*. Доказать, что при любых положительных значениях x и y

$$x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4.$$

Указание. Преобразовать разность между правой и левой частями доказываемого неравенства к виду:

$$(x - y)^2 (x^2 + y^2) (x + y).$$

279*. Доказать, что при условии $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$ абсолютная величина одного из чисел a или b больше единицы, другого — меньше единицы.

Указание. Составим разность между частями неравенства, данного в условии, получим:

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a+b)^2} < 0.$$

Знаменатель данной дроби — число положительное при любых действительных значениях a и b . Значит, $(1-a^2)(1-b^2) < 0$. Полученное неравенство справедливо, если одновременно $1 > a^2$ и $1 < b^2$ или $1 < a^2$ и $1 > b^2$, что и доказывает утверждение задачи.

§ 17. Доказательство неравенств путем преобразования очевидного неравенства к виду доказываемого неравенства *

280. Доказать, что если a, b, c — целые положительные числа, то

$$ab + bc + ac \leq 3abc.$$

Указание. При условии задачи неравенства $abc \geq ab$, $abc \geq bc$, $abc \geq ac$ очевидны. Сложив их почленно, получим доказываемое неравенство.

281. Доказать, что сумма квадратов двух чисел не меньше (больше или равна) их удвоенного произведения.

Указание. Возьмем очевидное неравенство $(a-b)^2 \geq 0$, откуда

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \text{ и } a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Знак равенства имеет место при $a = b$.

282. Доказать, что при a положительном $\frac{2a}{1+a^2} \leq 1$.

Указание. $(1-a)^2 \geq 0$, значит, $1 + a^2 \geq 2a$.

283. Доказать, что если $a:b = b:c$, то $a^2 + c^2 \geq 2b^2$.

Указание. Из условия задачи следует, что $b^2 = ac$, значит, $2b^2 = 2ac$ и, взяв $(a-c)^2 \geq 0$, получаем:

$$a^2 + c^2 \geq 2b^2.$$

284. Доказать, что если $k > 0$, то $k + \frac{1}{k} \geq 2$.

Указание. Рассмотреть очевидное неравенство $(k-1)^2 \geq 0$. **

* Неравенства этого параграфа могут быть доказаны и иным методом, чем дан в указании. Это же замечание относится и к другим параграфам данной главы.

** После решения нескольких неравенств при помощи исходного неравенства $(a-b)^2 \geq 0$ можно уже использовать в качестве очевидного неравенства неравенство: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

285. Доказать, что сумма данной дроби с положительными членами и дроби, ей обратной, не меньше двух.

Указание. Рассмотреть неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, разделить обе его части на положительное число ab :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Этот вывод значительно облегчает доказательство неравенств задач 286—288.

286. Доказать, что если a, b, c положительные числа, то

$$\frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{abc} \geq 6.$$

Указание. Преобразовать левую часть доказываемого неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{abc} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \\ &= \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 6. \quad (\text{см. задачи 267, 285}). \end{aligned}$$

287. Доказать, что если a, b, c — положительные и неравные между собой числа, то $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9$.

Указание. Преобразовать левую часть доказываемого неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c) \cdot (bc+ac+ab)}{abc} &= \frac{3abc + a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 + ac^2 + ab^2}{abc} = \\ &= 3 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) > 9. \end{aligned}$$

288. Доказать, что если a, b, c — положительные и неравные между собой числа, то

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > a + b + c.$$

Указание. Рассмотреть выражение $2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) =$

$$= b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + a\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) > 2(a+b+c),$$

откуда

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} > a + b + c.$$

289. Доказать, что при действительных a, b, c имеет место неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Указание. Взять очевидные неравенства:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad a^2 + c^2 \geq 2ac, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc,$$

сложить их почленно.

290. Доказать, что

$$(a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 + (b + c - a)^2 \geq ab + bc + ac.$$

Указание. Преобразовать левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} & (a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 + (b + c - a)^2 = \\ & = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) \geq ab + bc + ac, \end{aligned}$$

так как по задаче 289

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

291. Доказать неравенство:

$$\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \geq \frac{ab + ac + bc}{3}.$$

Указание. Воспользуемся неравенством задачи 289

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Прибавим к обеим частям взятого неравенства по

$$2(ab + ac + bc),$$

получим:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc),$$

откуда

$$\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \geq \frac{ab + ac + bc}{3}.$$

292. Доказать, что при положительных x, y, z , удовлетворяющих условию: $x + y + z = 1$, имеет место неравенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 > \frac{1}{3}.$$

Указание. Воспользуемся неравенством задачи 289 и условием данной задачи: $x + y + z = 1$.

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 1$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(xy + yz + xz) > 1 - 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

откуда

$$3(x^2 + y^2 + z^2) > 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 > \frac{1}{3}.$$

293*. Доказать, что при положительных a, b, c имеет место неравенство: $abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$.

Указание. Возьмем очевидные неравенства:

$$a^2 \geq a^2 - (b - c)^2, \quad b^2 \geq b^2 - (a - c)^2, \quad c^2 \geq c^2 - (a - b)^2.$$

Перемножив эти неравенства почленно, будем иметь:

$$a^2 b^2 c^2 \geq (a - b + c)(a + b - c)(b + a - c)(b - a + c)(c + a - b) \times \\ \times (c - a + b)$$

или

$$a^2 b^2 c^2 \geq (a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (a + c - b)^2,$$

откуда

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

294*. Доказать неравенство:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Указание. Воспользуемся очевидным неравенством:

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 + \dots + \\ + (a_{n-1} - a_n)^2 \geq 0,$$

преобразовав которое, получим:

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n),$$

откуда, прибавив к обеим частям неравенства по

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

получим:

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

295*. Доказать, что при всяком положительном a , большем 1, имеет место неравенство:

$$\frac{1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}}{a + a^3 + \dots + a^{2n-1}} > \frac{n+1}{n}.$$

Указание. Возьмем очевидные неравенства:

$$a^{2n}(a-1) > a-1.$$

$$a^{2n-1}(a^2-1) > a^2-1.$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a^{n+1}(a^n-1) > a^n-1.$$

Сложив взятые неравенства почленно, получим:

$$na^{2n+1} - (a^{2n} + a^{2n-1} + \dots + a^{n+1}) > a + a^2 + \dots + a^n - n$$

или

$$n(a^{2^n+1} + 1) > a + a^2 + \dots + a^{2^n}.$$

Разделив обе части неравенства на $(1 + a)$ — число положительное, получим:

$$n(1 - a + a^2 - \dots - a^{2^n-1} + a^{2^n}) > a + a^3 + \dots + a^{2^n-1},$$

или

$$n[(1 + a^2 + \dots + a^{2^n}) - (a + a^3 + \dots + a^{2^n-1})] > a + a^3 + \dots + a^{2^n-1},$$

или

$$n(1 + a^2 + \dots + a^{2^n}) > (n + 1)(a + a^3 + \dots + a^{2^n-1}),$$

или

$$\frac{1 + a^2 + \dots + a^{2^n}}{a + a^3 + \dots + a^{2^n-1}} > \frac{n + 1}{n}.$$

§ 18. Доказательство неравенств при помощи зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим n неотрицательных чисел

296. Доказать, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического их.

Указание. Возьмем очевидное неравенство: $(a - b)^2 \geq 0$, откуда

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \text{ или } a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab,$$

или

$$(a + b)^2 \geq 4ab, \text{ или } a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

или

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Примечание. Для доказательства можно составить разность между левой и правой частями неравенства и определить ее знак:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

297. Доказать неравенство:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac},$$

если a, b, c — положительные числа.

Указание. Имеем:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}.$$

Сложить эти неравенства и сократить на 2.

298. Доказать, что при положительных a, b, c имеет место неравенство:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Указание. Имеем:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}.$$

Перемножив эти неравенства почленно, получим неравенство:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

299. Доказать неравенство:

$$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) > 16abc \text{ при } a > 1, \quad b > 1, \quad c > 1.$$

Указание. Рассмотреть неравенства:

$$a + 1 > 2\sqrt{a}, \quad b + 1 > 2\sqrt{b}, \quad a + c > 2\sqrt{ac}, \quad b + c > 2\sqrt{bc}$$

и перемножить их почленно.

300. Доказать, что если $x + y + z = 1$, где x, y, z положительные числа, то

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 8xyz.$$

Указание. Рассмотрим неравенства:

$$x + y > 2\sqrt{xy}, \quad x + z > 2\sqrt{xz}, \quad y + z > 2\sqrt{yz}.$$

Приняв во внимание условие задачи, получим неравенства:

$$1 - z > 2\sqrt{xy}, \quad 1 - y > 2\sqrt{xz}, \quad 1 - x > 2\sqrt{yz},$$

перемножив которые почленно, получим доказываемое неравенство.

301. Доказать, что при положительных a, b, c имеет место неравенство: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Указание. Сложив почленно неравенства

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2, \quad b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2, \quad a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2,$$

преобразуем сумму к виду:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2).$$

Усилим это неравенство, подставив в правую часть его вместо $b^2 + c^2, a^2 + c^2, a^2 + b^2$ соответственно меньшие или равные величины: $2bc, 2ac, 2ab$. Получим:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2a^2bc + 2b^2ac + 2c^2ab$$

или

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq (a + b + c)abc.$$

302. Доказать, что если a, b, c — числа положительные, то $6abc \leq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

Указание. Из задачи 267

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc.$$

Из задачи 273

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \quad b^3 + c^3 \geq bc(b+c), \quad a^3 + c^3 \geq ac(a+c).$$

Сложив эти неравенства, будем иметь:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

или

$$6abc \leq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

303. Доказать неравенство $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2$ для положительных значений a и b .

Указание. Имеем: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Пусть

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \sqrt{ab}.$$

Тогда

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}$$

или

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \geq \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} \geq \sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}.$$

Возведя обе части неравенства в 4-ю степень, получим доказываемое неравенство.

Примечание. В задаче 304 зависимость между средним арифметическим и средним геометрическим доказывается для случая четырех отрицательных чисел. Результат, полученный в этой задаче, облегчает решение последующих задач.

304. Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, где a, b, c, d — положительные числа.

Указание. Перемножив почленно неравенства

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd},$$

получим:

$$\sqrt{abcd} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2},$$

но

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \leq \left(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \right)^2,$$

значит

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}.$$

305. Доказать, что среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Указание. Задача может быть решена путем преобразования выражения: $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3$. Однако, решение значительно упрощается, если воспользоваться результатом задачи 304. Рассмотрим четыре числа: $a, b, c, \frac{a+b+c}{3}$.

На основании задачи 304

$$abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \leq \left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \right)^4,$$

или
$$abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^4, \text{ или } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.*$$

306. Доказать, что при положительных a, b, c имеет место неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Указание. Из задачи 305

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3}, \text{ откуда } a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

307*. Доказать, что для любых положительных чисел a и b , $a \neq b$ имеет место неравенство:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}.$$

Указание.

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n} < \frac{a + \overbrace{b+b+\dots+b}^n}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}.$$

308*. Доказать, что $na_1 a_2 \dots a_n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n$, где n — натуральное число, a_i — положительные числа.

* Обобщение этой зависимости на случай n членов, т. е. доказательство неравенства

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \text{ где } a_i \geq 0$$

можно найти в ряде задачников по алгебре, например, в „Задачнике по алгебре“ В. А. Кречмара, ГТТИ, 1950. В последующих задачах это неравенство будет использовано как уже известное.

Указание. $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = \sqrt[n]{a_1^n \cdot a_2^n \dots a_n^n} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}$.

Знак равенства имеет место при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$.

Примечание. Из этой задачи следует, что удвоенное произведение двух положительных чисел не больше суммы их квадратов, утроенное произведение трех положительных чисел не больше суммы их кубов и т. д.

309. Доказать, что для любых положительных чисел

$$a_1, a_2 \dots a_n$$

имеет место неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} > n.$$

Указание. Среднее геометрическое слагаемых данной суммы равно единице.

310*. Доказать, что $1 \cdot 2 \dots n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, где n — любое натуральное число.

Указание. $\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \dots n}$. Но числитель дроби в левой части неравенства есть сумма n членов арифметической прогрессии и, значит, равен $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$.

311.** Доказать, что $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \dots n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Указание.

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots n^n \leq \left(\frac{1+2+2+3+3+3+\dots+n+\overbrace{n+n+\dots+n}^n}{1+2+3+\dots+n} \right)^{1+2+\dots+n}$$

или

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots n^n \leq \left(\frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+\dots+n} \right)^{1+2+\dots+n} =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)(2n+1) \cdot 2}{6(n+1)n} \right]^{\frac{(n+1)n}{2}} = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{\frac{(n+1)n}{2}},$$

так как

$$1+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1+2+\dots+n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

312*. Доказать, что для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и любых целых положительных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ имеет место неравенство:

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Указание. Используем неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

$$a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p_n} = \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1}_{p_1} \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_2}_{p_2} \cdot \dots \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_n}_{p_n}.$$

Пусть

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = m \text{ (множителей),}$$

тогда

$$\begin{aligned} & \underbrace{a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1}_{p_1} \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_2}_{p_2} \cdot \dots \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \dots \cdot a_n}_{p_n} \leq \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_m \\ & \leq \left(\frac{a_1 + a_1 + \dots + a_1 + \dots + a_n + a_n + \dots + a_n}{m} \right)^m = \\ & = \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}. \end{aligned}$$

313*. Доказать, что при $p > 0$ и при любом рациональном $k > 1$ имеет место неравенство: $(1 + p)^k > 1 + pk$ (неравенство Бернулли).

Указание. Пусть $k = \frac{a}{b}$, где $a > b$. Приняв во внимание зависимость между средним арифметическим и средним геометрическим, можно написать:

$$\sqrt[b]{(1 + pk)^b} < 1 + \frac{bpk}{a},$$

так как данное выражение можно рассматривать как утверждение: среднее геометрическое чисел

$$\underbrace{(1 + pk), (1 + pk), \dots, (1 + pk)}_b, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a-b}$$

меньше их среднего арифметического. Откуда

$$(1 + pk) < (1 + p)^{\frac{a}{b}}, \text{ т. е. } 1 + pk < (1 + p)^k.$$

Предельным переходом неравенство может быть доказано для любого действительного $k > 1$. При натуральном k неравенство Бернулли может быть доказано с помощью формулы бинома Ньютона:

$$(1 + p)^k = 1 + pk + C_k^2 p^2 + \dots + p^k.$$

Отбрасывая положительные слагаемые, начиная с третьего, получим:

$$(1 + p)^k > 1 + pk.$$

Аналогично можно доказать, что

$$(1+p)^k \leq 1+pk \text{ при } p \geq -1, 0 < k < 1.$$

314. Доказать, что для действительных a_1, b_1, a_2, b_2 имеет место неравенство:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

или

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Указание. Раскрывая скобки и перенося все члены в одну часть неравенств, получим очевидное неравенство:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0.$$

Это неравенство обращается в равенство при

$$a_1 = k b_1, \quad a_2 = k b_2.$$

315*. Доказать, что для любых $2n$ действительных чисел $a, b, \dots, k, A, B, \dots, K$ имеет место неравенство:

$$(aA + bB + \dots + kK)^2 \leq (a^2 + b^2 + \dots + k^2) \times \\ \times (A^2 + B^2 + \dots + K^2).$$

Знак равенства имеет место, когда числа этих последовательностей пропорциональны, т. е.

$$a = pA, \quad b = pB, \dots, k = pK \text{ (неравенство Буняковского-Коши).}$$

Указание. 1) В левой части доказываемого неравенства будем иметь сумму вида

$$a^2 A^2 + b^2 B^2 + \dots + k^2 K^2 + 2abAB + \dots + 2bkBK,$$

в правой части — сумму вида

$$a^2 A^2 + b^2 B^2 + \dots + k^2 K^2 + a^2 B^2 + \dots + b^2 K^2.$$

Но

$$2abAB \leq a^2 B^2 + b^2 A^2; \quad 2akAK \leq a^2 K^2 + k^2 A^2 \text{ и т. д.}$$

(по доказанному ранее), значит, левая часть неравенства не больше правой его части.

2) Рассмотрим очевидное неравенство

$$(a + pA)^2 + (b + pB)^2 + \dots + (k + pK)^2 > 0$$

при всех значениях p . Значит, корни квадратного трехчлена

$$(A^2 + B^2 + \dots + K^2)p^2 + 2(aA + bB + \dots + kK)p + \\ + a^2 + b^2 + \dots + k^2$$

мнимые или вещественные равные. А это возможно только тогда, когда дискриминант трехчлена не больше нуля, т. е.

$$(aA + bB + \dots + kK)^2 - (a^2 + b^2 + \dots + k^2)(A^2 + \dots + K^2) \leq 0.$$

Примечание. Задачи 316—320 решаются с помощью неравенства Буняковского-Коши и показывают, насколько упрощаются доказательства при использовании этого неравенства.

316*. Доказать, что если

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

где x, y, z не равны a, b, c , то

$$-1 < ax + by + cz < 1.$$

Указание. По предыдущей задаче

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) > (ax + by + cz)^2,$$

откуда

$$1 > (ax + by + cz)^2 \text{ или } -1 < ax + by + cz < 1$$

317*. Доказать, что при любых положительных числах a, b, c имеет место неравенство:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Указание. По неравенству Буняковского-Коши имеем:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &\geq \\ &\geq \left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 = 9. \end{aligned}$$

Знак равенства имеет место при $a = b = c$. Сравнить с доказательством этого неравенства в задаче 287. Аналогичным рассуждением может быть доказано более общее неравенство (см. задачу 318).

318*. Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет место неравенство:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Указание. См. решение задач 315, 317.

319. Доказать, что если $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ — положительные числа, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n} &\leq \\ &\leq \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \dots + y_n}. \end{aligned}$$

Указание. Положив в неравенстве Буняковского-Коши

$$a^2 = x_1, \quad b^2 = x_2, \quad \dots, \quad k^2 = x_n, \quad A^2 = y_1, \quad \dots, \quad K^2 = y_n$$

и извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим доказываемое неравенство.

320*. Доказать, что для любых трех положительных чисел a, b, c имеет место неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Указание. Преобразовать левую часть неравенства к виду:

$$\frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3,$$

затем применить неравенство Буняковского-Коши (см. задачу 317).

321**. Пусть x и y — положительные рациональные числа, в сумме равные единице: $x + y = 1$. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} & a_1^x \cdot b_1^y + a_2^x \cdot b_2^y + \dots + a_n^x \cdot b_n^y \leq \\ & \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^x \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^y. \end{aligned}$$

Примечание. При $x = y = \frac{1}{2}$ получаем неравенство задачи 319, являющееся следствием неравенства Буняковского-Коши.

Указание. Обозначив

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a; \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = b$$

и разделив доказываемое неравенство на $a^x b^y$, перейдем к неравенству, эквивалентному неравенству задачи:

$$\left(\frac{a_1}{a} \right)^x \left(\frac{b_1}{b} \right)^y + \left(\frac{a_2}{a} \right)^x \left(\frac{b_2}{b} \right)^y + \dots + \left(\frac{a_n}{a} \right)^x \left(\frac{b_n}{b} \right)^y \leq 1.$$

В силу обобщенного неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 312), имеем для каждого значения $k = 1, 2, \dots, n$ неравенства:

$$\left(\frac{a_k}{a} \right)^x \left(\frac{b_k}{b} \right)^y \leq \left(\frac{\frac{xa_k}{a} + \frac{yb_k}{b}}{x+y} \right)^{x+y} = \frac{xa_k}{a} + \frac{yb_k}{b}, \quad (x+y=1).$$

Складывая эти неравенства почленно для всех значений $k = 1, 2, \dots, n$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{a} \right)^x \left(\frac{b_1}{b} \right)^y + \left(\frac{a_2}{a} \right)^x \left(\frac{b_2}{b} \right)^y + \dots + \left(\frac{a_n}{a} \right)^x \left(\frac{b_n}{b} \right)^y \leq \\ & \leq \frac{xa_1}{a} + \frac{yb_1}{b} + \frac{xa_2}{a} + \frac{yb_2}{b} + \dots + \frac{xa_n}{a} + \frac{yb_n}{b} = \\ & = \frac{x}{a} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \frac{y}{b} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = x + y = 1. \end{aligned}$$

322*. Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, где p и q — рациональные числа. Доказать, что для любых положительных чисел: $a, b, \dots, k; A, B, \dots, K$ имеет место неравенство:

$$(aA + bB + \dots + kK) \leq (a^p + b^p + \dots + k^p)^{\frac{1}{p}} (A^q + B^q + \dots + K^q)^{\frac{1}{q}}$$

(неравенство Гёльдера).

Указание. Полагая в неравенстве задачи 321

$$x = \frac{1}{p}, \quad y = \frac{1}{q}, \quad a_1 = a^p, \quad a_2 = b^p, \dots, \quad a_n = k^p,$$

$$b_1 = A^q, \quad b_2 = B^q, \dots, \quad b_n = K^q,$$

получим требуемое неравенство.

323. Доказать неравенство

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \dots + a_n b_n c_n) \leq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) (b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3) (c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3),$$

где a_k, b_k, c_k — положительные числа.

Указание. Использовать задачи 321, 309.

§ 19. Разные задачи на доказательство неравенств

324*. Если a, b, c — стороны треугольника, то доказать, что имеет место неравенство:

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{9}{a+b+c}.$$

Доказательство. По условию задачи, $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$ и каждая из дробей в левой части предполагаемого неравенства есть положительное количество. Воспользуемся свойством среднего арифметического и среднего геометрического неотрицательных чисел:

$$\frac{\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}}{3} > \sqrt[3]{\frac{1}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[3]{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Преобразовав радикал в правой части неравенства, будем иметь

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[6]{(b+c-a)^2(b+a-c)^2(c+a-b)^2}},$$

или

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[6]{(b+c-a)(b-c+a)(a-b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}},$$

или

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[6]{[a^2-(b-c)^2][b^2-(c-a)^2][c^2-(a-b)^2]}}.$$

Отбрасывая в множителях подкоренного выражения квадраты разностей $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$, мы увеличим знаменатель дроби, благодаря чему дробь уменьшится, а неравенство только усилится, т. е.

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[6]{a^2b^2c^2}}$$

или

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Но так как

$$\sqrt[3]{abc} < \frac{a+b+c}{3},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} > \frac{3}{a+b+c}$$

и

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{9}{a+b+c}.$$

325*. Доказать, что во всяком треугольнике $h_a < \sqrt{p(p-a)}$, где: h_a — высота, опущенная на сторону a ; p — полупериметр треугольника.

Указание. По известной формуле геометрии

$$h_a = \sqrt{\frac{p(p-a)(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}}.$$

Задача сводится к доказательству того, что $\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}$ есть правильная дробь. Для этого преобразуем числитель данной дроби:

$$(a+b-c)(a+c-b) = [a-(b-c)][a+(b-c)] = a^2 - (b-c)^2.$$

Полученное выражение меньше a^2 , значит, данная дробь правильная и задача решена.

326*. Доказать, что всегда $\frac{\sqrt{2}}{2} k \leq c$, где k — сумма катетов произвольного прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза.

Указание. Обозначим через a и b катеты прямоугольного треугольника, будем иметь:

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad k = a + b.$$

Известно, что

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

или

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{c^2}{2} \geq \frac{k^2}{4}$$

или

$$c \geq \frac{\sqrt{2}}{2} k.$$

327. Доказать, что из всех прямоугольников с данным периметром p наибольшую площадь имеет квадрат.

Указание. Пусть a , b — стороны прямоугольника, тогда

$$p = 2(a+b); \quad S = ab,$$

где S — площадь прямоугольника. Известно, что

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{или} \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

откуда

$$S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad S \leq \frac{p^2}{16}.$$

Площадь будет наибольшей, когда неравенство обратится в равенство, что возможно при $a=b$, т. е. когда данный прямоугольник является квадратом.

328. Доказать, что из всех прямоугольников с данной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Указание. По аналогии с предыдущей задачей получаем, что $S \leq \frac{p^2}{16}$. Величина площади задана, периметр выбирается наименьшим, что достигается при $a = b$.

329. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Указание. По формуле Герона площадь треугольника со сторонами a, b, c равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$, но

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3,$$

(см. задачу 305) или

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3} \right)^3,$$

знак равенства будет иметь место только для равностороннего треугольника, так как тогда

$$a = b = c = \frac{2p}{3}$$

и

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \left(\frac{p}{3} \right)^3.$$

330. Пусть a, b, c — длины ребер, выходящих из вершины треугольной пирамиды с трехгранным прямым углом при вершине. Найти при каких a, b, c объем пирамиды будет наибольшим, если известно, что $a + b + c = p$.

Указание. Объем пирамиды равен $V = \frac{abc}{6}$. Известно, что $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$ или $abc \leq \frac{p^3}{27}$. Так как правая часть неравенства не зависит от a, b, c , то искомое условие будет

$$a = b = c = \frac{p}{3}.$$

331. Доказать, что при $p > n$ и $a > b > 0$

$$\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

Указание. Преобразовать обе части предполагаемого неравенства, разделив числитель и знаменатель дроби в левой части неравенства на a^p , дроби в правой части неравенства на a^n , и сравнить полученные выражения.

332. Показать, что почленное сложение ряда неравных дробей дает дробь, заключенную между наибольшей и наименьшей из данных дробей.

Указание. Пусть имеются неравные дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{x}{y}$, которые расположены в порядке убывания их величин. Обозначив наибольшую из данных дробей через A , будем иметь:

$$\frac{a}{b} = A, \quad a = A \cdot b,$$

$$\frac{c}{d} < A, \quad c < A \cdot d,$$

$$\frac{n}{p} < A, \quad n < A \cdot p,$$

$$\frac{x}{y} < A, \quad x < A \cdot y.$$

Сложив полученные неравенства и равенство, будем иметь:

$$a + c + n + x < A(b + d + p + y),$$

откуда

$$\frac{a + c + n + x}{b + d + p + y} < A,$$

т. е. меньше $\frac{a}{b}$. Точно так же, обозначив наименьшую из дробей через B , т. е. $\frac{x}{y} = B$, получим

$$\frac{x + c + n + a}{y + d + p + b} > B,$$

т. е. больше $\frac{x}{y}$.

333. Показать, что $\sqrt[n+p+x+y]{abcd}$ находится между наибольшим и наименьшим из количеств: $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[x]{c}$, $\sqrt[y]{d}$.

Указание. Пусть ряд корней расположен в убывающем порядке, т. е.

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[p]{b} > \sqrt[x]{c} > \sqrt[y]{d}.$$

Обозначим наибольший из данных корней $\sqrt[n]{a}$ через A , тогда:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= A \quad \text{и} \quad a = A^n, \\ \sqrt[p]{b} &< A \quad \text{и} \quad b < A^p, \\ \sqrt[x]{c} &< A \quad \text{и} \quad c < A^x, \\ \sqrt[y]{d} &< A \quad \text{и} \quad d < A^y. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Перемножив почленно выражения (1), получим:

$$abcd < A^{n+p+x+y},$$

откуда

$$\sqrt[n+p+x+y]{abcd} < A,$$

т. е.

$$\sqrt[n+p+x+y]{abcd} < \sqrt[n]{a}.$$

Аналогично рассуждая, получим:

$$\sqrt[n+p+x+y]{abcd} > \sqrt[y]{d}.$$

ГЛАВА VI

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§ 20. Арифметическая прогрессия. Формула любого члена арифметической прогрессии

334. Между членами a и $b > a$ вставить n средних арифметических, т. е. таких чисел, которые вместе с двумя данными составили бы арифметическую прогрессию.

335. Доказать, что если в арифметической прогрессии между каждыми двумя последовательными членами вставить одинаковое количество средних арифметических, то вся последовательность составит арифметическую прогрессию.

Указание. Пусть $a, b, \dots k$ — члены арифметической прогрессии, p — число средних арифметических, вставленных между каждыми двумя последовательными членами этой прогрессии. По предыдущей задаче числа a и b вместе с p средними арифметическими, вставленными между a и b , образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{b-a}{p+1}$; числа b и c вместе с p средними арифметическими, вставленными между ними, образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{c-b}{p+1}$ и т. д. Но по определению арифметической прогрессии разности $b-a$, $c-b$ и т. д. равны между собой, значит, вся последовательность составляет арифметическую прогрессию.

336. Найти условие, которым связаны три числа a, b, c , если они есть члены одной и той же арифметической прогрессии.

Указание. Предположим, что данные числа есть члены одной и той же арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d . Тогда

$$a = a_1 + dn, \quad b = a_1 + dk, \quad c = a_1 + dp,$$

где n, p, k — целые числа. Из этих равенств будем иметь

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{k-n}{p-k} = \frac{A}{B},$$

где A и B — целые числа.

337. Найти условие, при котором числа a, b, c были бы p -ым, n -ым, k -ым членами одной и той же арифметической прогрессии.

Указание. По предыдущей задаче, искомое условие будет:

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{n-p}{k-n}$$

или

$$a(n-k) + b(k-p) + c(p-n) = 0.$$

338. Доказать, что $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной и той же арифметической прогрессии.

Указание. Если данные числа являются членами одной и той же арифметической прогрессии, то

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{p}{k},$$

где p и k — целые числа (см. задачу 336), или

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{p}{k}(\sqrt{5}-\sqrt{3}),$$

или

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \frac{p}{k}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2}),$$

или

$$1 = \frac{p}{k}(\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 3),$$

что невозможно, так как сумма, стоящая в скобках, не может быть рациональным числом.

339. Доказать, что если второй член арифметической прогрессии есть среднее пропорциональное между 1-м и 4-м членами, то 6-й член будет средним пропорциональным между 4-м и 9-м членами.

Указание. По условию задачи, арифметическая прогрессия имеет вид:

$$a, 2a, 3a, 4a, \dots, na,$$

откуда

$$a_4 \cdot a_9 = 4a \cdot 9a = 36a^2 = (6a)^2 = (a_6)^2.$$

340. Если положительные числа x, y, z являются k -ым, p -ым и n -ым членами арифметической прогрессии, то доказать, что существует такая арифметическая прогрессия, в которой x -ый, y -ый и z -ый члены соответственно равны k, p и n и что произведение разностей этих прогрессий равно 1.

Указание. Согласно условию задачи, имеем:

$$x = a + d(k - 1), \quad y = a + d(p - 1), \quad z = a + d(n - 1).$$

Откуда

$$k = \frac{1}{d}(x - a + d) = \frac{1}{d}(x - 1 + d - a + 1) =$$

$$= \frac{d - a + 1}{d} + \frac{1}{d}(x - 1);$$

$$p = \frac{d - a + 1}{d} + \frac{1}{d}(y - 1);$$

$$n = \frac{d - a + 1}{d} + \frac{1}{d}(z - 1).$$

Полученные равенства показывают, что k , p , n есть соответственно x -ый, y -ый и z -ый члены арифметической прогрессии, у которой первый член есть $\frac{d - a + 1}{d}$, а разность прогрессии $\frac{1}{d}$. Произведение разностей данной прогрессии и полученной равно единице, так как $d \cdot \frac{1}{d} = 1$.

341. Найти условие, при котором сумма двух произвольных членов арифметической прогрессии представляет собой член той же прогрессии.

Указание. По условию задачи должны иметь:

$$(a + dn) + (a + dk) = a + dp,$$

где a — первый член прогрессии, d — разность прогрессии n , p , k — целые положительные числа. Тогда $a = d(p - k - n)$, т. е. первый член прогрессии должен быть кратен разности прогрессии.

Примечание. В задачах 342—346 следует использовать зависимость между тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

342. Доказать, что квадраты выражений

$$x^2 - 2x - 1, \quad x^2 + 1, \quad x^2 + 2x - 1$$

составляют три последовательных члена арифметической прогрессии.

Указание. Доказать, что квадрат среднего члена будет средним арифметическим квадратов двух других членов.

343. Доказать, что если a , b , c есть три последовательных члена арифметической прогрессии, то

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Указание. По условию задачи, $a + c = 2b$, откуда
 $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

344. Доказать, что если a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то

$$a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) = \frac{2}{9}(a + b + c)^2.$$

Указание. По условию задачи, $a + c = 2b$. Значит,
 $a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) = a^2b + a^2c + 2b^3 + ac^2 + bc^2 =$
 $= b(a^2 + c^2) + ac(a + c) + 2b^3 = b(4b^2 - 2ac) + 2abc + 2b^3 =$
 $= 4b^3 - 2abc + 2abc + 2b^3 = 6b^3 =$
 $= \frac{2}{9}(3b)^3 = \frac{2}{9}(2b + b)^3 = \frac{2}{9}(a + b + c)^3.$

345. Доказать, что если числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию, то

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2.$$

Указание. По условию задачи, $a + c = 2b$, значит

$$ac = 2ab - a^2 \quad \text{и} \quad a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &= 3(4b^2 - 2ac + b^2) = 6(2b^2 - ac) + 3b^2 = \\ &= 6(2b^2 - 2ab + a^2) + 3b^2 = 6(a - b)^2 + 9b^2 = \\ &= 6(a - b)^2 + (3b)^2 = 6(a - b)^2 + (2b + b)^2 = \\ &= \underline{6(a - b)^2 + (a + b + c)^2}. \end{aligned}$$

346. Доказать, что если $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ составляют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 тоже составляют арифметическую прогрессию.

Указание. Задача сводится к доказательству того, что

$$2b^2 - a^2 - c^2 = 0.$$

По условию задачи,

$$\frac{2}{c+a} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{b+a} = 0,$$

откуда

$$2(b + c)(b + a) - (c + a)(b + a) - (c + a)(b + c) = 0$$

или

$$\begin{aligned} [(b + a)(b + c) - (c + a)(b + a)] + [(a + b)(b + c) - (c + a)(b + c)] &= \\ = (b + a)(b - a) + (b + c)(b - c) &= b^2 - a^2 + b^2 - c^2 = \\ = 2b^2 - a^2 - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

§ 21. Сумма n членов арифметической прогрессии

347. Даны две прогрессии:

$$a, a + b, a + 2b, \dots, a + (n - 1)b;$$

$$a, a + c, a + 2c, \dots, a + (n - 1)c$$

такие, что p -ый член первой равен p^2 -ому члену второй. Доказать, что разность между суммами n членов этих прогрессий равна $\frac{1}{2} np(n - 1)c$.

Указание. По условию

$$a + b(p - 1) = a + c(p^2 - 1),$$

откуда $b = c(p + 1)$. Пусть

$$a + a + b + \dots + a + b(n - 1) = S_1,$$

$$a + a + c + \dots + a + c(n - 1) = S_2.$$

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \frac{2a + b(n - 1)}{2} \cdot n - \frac{2a + c(n - 1)}{2} \cdot n = \\ &= \frac{1}{2} cn(n - 1)p, \end{aligned}$$

так как $b = c(p + 1)$.

348. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии имеет место равенство:

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0.$$

Указание. Установить, что

$$S_p - S_n = (p - n) \left[a_1 + \frac{d(p + n - 1)}{2} \right].$$

349. Если S_p, S_n, S_k — суммы p, n, k членов арифметической прогрессии, то доказать, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{S_p}{p}(n - k) + \frac{S_n}{n}(k - p) + \frac{S_k}{k}(p - n) = 0.$$

Указание. Принять во внимание, что

$$\frac{S_n}{n} = \frac{a_n + a_1}{2}, \quad a_p - a_k = d(p - k).$$

350. Если разность арифметической прогрессии — величина отрицательная, удвоенный первый член ее положителен и делится на эту разность, то доказать, что сумма некоторого числа ее членов равна нулю.

Указание. По условию, задача $\frac{2a_1}{d} = -k$. Предположим, что S_p равно нулю, и определим p :

$$S_p = [2a_1 + d(p-1)] \cdot \frac{p}{2} = 0,$$

откуда

$$p = \frac{d-2a_1}{d} = \frac{d+dk}{d} = k+1.$$

Значит, сумма $k+1$ членов прогрессии равна нулю.

351. Найти общий вид натуральных чисел, которые могут быть представлены как сумма последовательных натуральных чисел, начиная с единицы.

Указание. Задача сводится к определению выражения для суммы n членов арифметической прогрессии, у которой первый член и разность равны единице, т. е.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит, искомые числа будут: 1, 3, 6, 10, 15, 21...

352. Найти натуральное число, равное сумме всех ему предшествующих натуральных чисел. Существует ли несколько таких чисел или оно одно?

Указание. Пусть n — искомое натуральное число; сумма чисел, предшествующих данному натуральному числу, выразится формулой

$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

По условию задачи, $\frac{n(n-1)}{2} = n$, откуда $n^2 - 3n = 0$ или $n_1 = 3$, $n_2 = 0$. Искомое число есть 3. Оно единственное, так как второй корень полученного уравнения (нуль) принимать в расчет нельзя, так как ему не предшествует никакое натуральное число.

353. Доказать, что сумма квадратов n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Указание. Рассмотрим тождества:

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1. \\ (n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1. \\ (n-2)^3 - (n-3)^3 &= 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1. \\ &\dots \dots \dots \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1.$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n.$$

Выражение $1 + 2 + \dots + n$ представляет собой сумму n членов арифметической прогрессии и поэтому равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

Значит,

$$3(1 + 2^2 + \dots + n^2) = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

или

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Эта задача может быть доказана и иначе (см. стабильный учебник алгебры и задачу 436 главы VIII данного задачника).

354. Найти выражения для сумм:

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2,$$

$$1 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2.$$

Решение. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + \dots + 4n^2 &= 4(1 + 2^2 + \dots + n^2) = \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Для определения суммы $1 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2$ рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots + (2n+1)^2 &= \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} \end{aligned}$$

(по задаче 353). Значит,

$$\begin{aligned} 1 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2 &= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}. \end{aligned}$$

355*. Вычислить сумму: $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$.

Решение. Рассмотрим разность:

$$(p+1)^{k+1} - p^{k+1} = C_{k+1}^1 p^k + C_{k+1}^2 p^{k-1} + \dots + 1.$$

Полагая последовательно $p = 0, 1, 2, \dots, n$, получим равенства:

$$\begin{aligned} 1^{k+1} &= 1. \\ 2^{k+1} - 1^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot 1^k + C_{k+1}^2 \cdot 1^{k-1} + \dots + 1. \\ 3^{k+1} - 2^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot 2^k + C_{k+1}^2 \cdot 2^{k-1} + \dots + 1. \\ \dots &\dots \\ (n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \dots + 1. \end{aligned}$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \dots + C_{k+1}^1 S_1 + n + 1,$$

где S_i — сумма i -ых степеней n натуральных чисел. Полагая $k = 1$, получим:

$$(n+1)^2 = 2S_1 + n + 1,$$

откуда

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Полагая $k = 2$, получим:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 3S_2 + 3S_1 + n + 1 = \\ &= 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1, \end{aligned}$$

откуда

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Полагая $k = 3$, получим:

$$(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n + 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{4} [(n+1)^4 - (n+1) - 6S_2 - 4S_1] = \\ &= \frac{1}{4} [(n+1)^4 - (n+1) - n(n+1) \cdot (2n+1) - \\ &\quad - 2n(n+1)] = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \end{aligned}$$

значит

$$1 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = S_1^2.$$

Таким образом, можно найти сумму любых целых положительных степеней n натуральных чисел.

356. Найти сумму всех произведений вида $1 \cdot 2, 1 \cdot 3, \dots, n(n-1)$, которые можно составить из чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

Решение. Возьмем сумму всех натуральных чисел до n включительно:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Возведем это равенство в квадрат:

$$S_1^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + 2[1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + n(n-1)].$$

Обозначим сумму всех двойных произведений через X , т. е.

$$X = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + n(n-1).$$

Тогда

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + 2X$$

или

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)^2}{4} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2X, \\ 2X &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 - n - 2) = \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(n-1)(3n+2). \end{aligned}$$

Откуда

$$X = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.$$

357. Доказать, что если через $S_1, S_2, \dots, S_p$ обозначить суммы членов p арифметических прогрессий, содержащих по n членов и имеющих соответственно первыми членами $1, 3, 5, \dots, (2p-1)$, а разностями числа $1, 3, 5, \dots, (2p-1)$, то

$$S_1 + S_2 + \dots + S_p = \frac{n(n+1)}{2} \cdot p^2.$$

358. Доказать, что если $S_1, S_2, \dots, S_p$ есть суммы членов p арифметических прогрессий, содержащих по n членов и имеющих первыми членами $1, 2, \dots, p$ и разностями $1, 3, 5, 7, \dots, (2p-1)$ соответственно ($p < n$), то

$$S_1 + S_2 + \dots + S_p = \frac{1}{2}(np+1)np.$$

§ 22. Разные задачи на арифметическую прогрессию

359. Доказать, что разность арифметической прогрессии равна разности квадратов первого и последнего членов ее, деленной на разность между удвоенной суммой всех членов и суммой первого и последнего членов.

Указание. Докажем вначале справедливость утверждения для возрастающей прогрессии, для чего преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2 - a_1^2}{2S_n - (a_1 + a_n)} &= \frac{a_n^2 - a_1^2}{(a_1 + a_n)n - (a_1 + a_n)} = \frac{a_n^2 - a_1^2}{(a_1 + a_n)(n-1)} = \\ &= \frac{a_n - a_1}{n-1} = d. \end{aligned}$$

Для случая убывающей прогрессии доказательство проводится аналогично, только рассматривается разность $a_1^2 - a_n^2$, и в результате получается $(-d)$.

360. Суммы членов каждой из арифметических прогрессий, имеющих по n членов, равны $n^2 + pn$ и $3n^2 - 2n$. Найти условие, при котором в этих прогрессиях n -ые члены будут равны.

Указание. По условию задачи,

$$S_1 = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n = n^2 + pn, \quad S_2 = \frac{b_n + b_1}{2} \cdot n = 3n^2 - 2n,$$

откуда

$$a_n + a_1 = 2(n + p), \quad b_n + b_1 = 2(3n - 2),$$

где a_i — члены первой прогрессии, b_i — члены второй прогрессии. При $n=1$, $a_1 = 1 + p$, $b_1 = 1$,

$$a_n = 2(n + p) - 1 - p, \quad b_n = 2(3n - 2) - 1.$$

Если $a_n = b_n$, то

$$2(n + p) - 1 - p = 2(3n - 2) - 1$$

или $p = 4(n - 1)$ — искомое условие.

361*. Доказать, что если в арифметической прогрессии сумма n первых членов равна n^2p и сумма k первых членов равна k^2p , то сумма p первых членов этой прогрессии будет равна p^3 .

Указание. По условию задачи,

$$\frac{a_n + a_1}{2} \cdot n = n^2p, \quad a_n + a_1 = 2np,$$

аналогично

$$a_k + a_1 = 2kp,$$

откуда

$$a_n - a_k = 2p(n - k).$$

Но

$$a_n - a_k = d(n - k),$$

значит,

$$d = 2p, \quad a_1 = p.$$

Тогда

$$S_p = \frac{2p + 2p(p-1)}{2} \cdot p = p^3.$$

362 *. Доказать, что если сумма k первых членов арифметической прогрессии равна n , а сумма n первых членов ее равна k , то сумма $k + n$ членов этой прогрессии равна $-(k + n)$, а сумма $k - n$ членов равна $(k - n)\left(1 + \frac{2n}{k}\right)$.

Указание. Определить

$$d = -\frac{2(k+n)}{kn},$$

затем

$$a_1 = \frac{(k+n)(k+n-1) - nk}{kn},$$

откуда

$$\begin{aligned} S_{k+n} &= \frac{2(k+n)(k+n-1) - 2nk - 2(k+n)(k+n-1)}{2nk} (k+n) = \\ &= -(k+n). \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что

$$S_{k-n} = (k-n)\left[1 + \frac{2n}{k}\right].$$

363 *. Найти арифметическую прогрессию, в которой отношение суммы np первых членов к сумме n первых членов не зависит от n .

Указание. Найти отношение S_{np} к S_n и преобразовать его.

$$\begin{aligned} S_{np} : S_n &= [2a + (np-1)d] np : [2a + (n-1)d] n = \\ &= \frac{2ap + dnp^2 - dp}{2a + dn - d} = \frac{p(2a + dn - d) + dnp^2 - pdn}{2a + dn - d} = p + \\ &+ \frac{pdn(p-1)}{2a + dn - d} = p + \frac{pd(p-1)}{\frac{1}{n}(2a - d) + d}. \end{aligned}$$

Полученное выражение не будет зависеть от n , если $2a = d$. В искомой прогрессии $d = 2a$, т. е. удвоенный первый член прогрессии должен быть равен ее разности.

364 *. Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма n первых членов равна квадрату числа членов, при любом $n \neq 1$.

Указание. Использовать формулу суммы членов арифметической прогрессии

$$S_n = \left[\frac{2a + d(n-1)}{2} \right] \cdot n = n^2,$$

откуда

$$d = \frac{2(n-a)}{n-1}.$$

Полученное выражение для d не будет зависеть от n при $a = 1$, значит, в искомой прогрессии $a = 1$, $d = 2$, и она будет иметь вид: 1, 3, 5, 7...

365 *. Найти зависимость между числом членов арифметической прогрессии, первым членом и разностью прогрессии, при которой сумма n первых членов арифметической прогрессии равнялась бы четвертой степени числа членов. Члены прогрессии — числа целые.

Указание. Пользуясь формулой суммы членов арифметической прогрессии и условием задачи, получим:

$$d = 2 \left(n^2 + n + 1 + \frac{1-a}{n-1} \right), \quad n \neq 1,$$

причем $\frac{2(1-a)}{n-1}$ — целое число. Если $a = 1$, то

$$d = \frac{(2n+1)^2 + 3}{2},$$

т. е. при $n = 2$, $d = 14$, при $n = 3$, $d = 26$; при $n = 4$, $d = 42$ и т. д. Если $a \neq 1$, то значение d будет зависеть не только от n , но и от a , причем должно соблюдаться условие: $\frac{2(1-a)}{n-1}$ — целое число, так как по условию задачи члены прогрессии — числа целые.

Например, при $a = 2$, n может иметь значение, равное только 2 и 3. При $n = 2$, $d = 12$, и прогрессия имеет вид: 2, 14. При $n = 3$, $d = 25$, и прогрессия имеет вид: 2, 27, 52. При $a = -2$, n может принимать значения, равные 3, 4, 7, так как при этих значениях n выражение

$$\frac{2(1-a)}{n-1} = \frac{2 \cdot 3}{n-1} = \frac{6}{n-1}$$

будет целым числом.

Таким образом, при $a = 1$ для любого n можно найти такое значение для d , что сумма n первых членов арифметической прогрессии равнялась бы четвертой степени числа ее членов.

При $a \neq 1$ только для некоторых n можно это сделать, причем n определяется из условия: выражение $\frac{2(1-a)}{n-1}$ должно быть целым числом.

§ 23. Геометрическая прогрессия.

Формула любого члена геометрической прогрессии

366. Найти вид p средних геометрических, которые вставлены между данными положительными числами a и b , причем $a < b$.

Указание. По условию задачи все числа образуют геометрическую прогрессию, и задача сводится к определению знаменателя прогрессии по первому ее члену a , последнему члену b и числу членов $p+2$ (два члена дано и p нужно вставить), т. е.

$$b = aq^{p+1}$$

или

$$q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}.$$

Последовательность будет иметь вид:

$$a, a \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}, a \sqrt[p+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \dots, b.$$

367. Доказать, что если между каждыми двумя последовательными членами геометрической прогрессии с положительными членами вставить одинаковое число n средних геометрических, то вся последовательность составит геометрическую прогрессию.

Указание. Пусть члены прогрессии есть $a, b, c \dots k$. По предыдущей задаче числа a и b вместе с n средними геометрическими, вставленными между ними, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$; числа b и c вместе с n средними геометрическими, вставленными между ними, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$ и т. д. Но, по условию задачи, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, значит вся последовательность составит геометрическую прогрессию со знамена-

телем $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n+1]{\frac{c}{b}} = \dots$

368. Доказать, что в геометрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов.

Указание. Имеем: $a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1^2 q^{n-1}$, $a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^{n-2} = a_1^2 q^{n-1}$, ... и т. д., т. е. каждое из произведений равно одной и той же величине $a_1^2 q^{n-1}$. Значит, все эти произведения равны между собой.

369. Доказать, что произведение n членов геометрической прогрессии равно $a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где a_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель.

Указание. По предыдущей задаче произведения членов, равноотстоящих от концов геометрической прогрессии, все равны между собой и равны $a_1^2 q^{n-1}$. В произведении n членов геометрической прогрессии таких парных членов будет $\frac{n}{2}$, значит, все произведение будет равно

$$(a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} \text{ или } a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

370. Доказать, что произведение n средних геометрических, вставленных между положительными числами a и c , равно $(ac)^{\frac{n}{2}}$.

Указание. См. задачи 366, 368.

371. Доказать, что во всякой геометрической прогрессии сумма 4-го, 5-го и 6-го членов есть среднее геометрическое между суммой 1-го, 2-го и 3-го членов и суммой 7-го, 8-го и 9-го членов.

Указание. Сумма 4-го, 5-го и 6-го членов геометрической прогрессии:

$$a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = a_1 q^3 (1 + q + q^2)$$

или

$$a_1^2 q^6 (1 + q + q^2)^2 = a_1 (1 + q + q^2) \cdot a_1 \cdot q^6 (1 + q + q^2),$$

но первые два множителя этого произведения есть сумма 1-го, 2-го и 3-го членов геометрической прогрессии, а остальные множители — сумма 7-го, 8-го и 9-го членов этой же прогрессии.

372. Найти условие, при котором числа a, b, c, d , взятые в любом порядке, образуют последовательные члены геометрической прогрессии.

Указание. Если числа a, b, c, d , взятые в любом порядке, образуют последовательные члены геометрической прогрессии, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$, откуда $\frac{a^2}{b^2} = 1$ и $a = \pm b$. Аналогично

$b = \pm c$, $c = \pm d$, т. е. все четыре числа должны быть равны по абсолютной величине.

373. Найти условие, при котором числа a , b , c представляют k -ый, n -ый и p -ый член одной и той же геометрической прогрессии.

Указание. По условию задачи,

$$\frac{a}{b} = q^{k-n}; \quad \frac{a}{c} = q^{k-p},$$

откуда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k-p} = q^{(k-n)(k-p)};$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{k-n} = q^{(k-p)(k-n)}$$

или

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k-p} = \left(\frac{a}{c}\right)^{k-n} \text{ — искомое условие.}$$

374. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной и той же геометрической прогрессии?

Указание. Предположим, что данные числа могут быть членами одной и той же геометрической прогрессии, тогда

$$11 = 10 \cdot q^p, \quad 12 = 10q^n,$$

где p и n — целые положительные числа, или

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{12}{10}\right)^p.$$

Но последнее равенство не может иметь места, так как

$$10^{p-n} \cdot 11^n \neq 12^p$$

потому, что 12 не делится на 11, а значит, 12^p не делится на 11^n . Значит, предположение неверно, и данные числа не могут быть членами одной и той же геометрической прогрессии.

375. Дана геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n$ с положительными членами. Доказать, что указанные ниже последовательности также являются геометрическими прогрессиями:

- 1) $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}$; 2) $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$;
- 3) $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_n$; 4) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}$;
- 5) $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$.

376. Доказать, что последовательность, образованная числами, обратными членам геометрической прогрессии, есть тоже геометрическая прогрессия.

377. Доказать, что если в геометрической прогрессии каждый член вычесть из следующего за ним, то последовательные разности также составят геометрическую прогрессию.

Указание. Общий член полученной последовательности будет $a_1 q^{n-1} (q - 1)$. Положив $n = 1, 2, \dots, k$, найдем члены этой последовательности:

$$a_1(q - 1), a_1 q(q - 1), a_1 q^2(q - 1), \dots, a_1 q^{k-1}(q - 1).$$

Она образует геометрическую прогрессию с первым членом $a_1(q - 1)$ и знаменателем q .

378. Найти условие, при котором произведение двух произвольных членов геометрической прогрессии составит член этой же прогрессии.

Указание. Пусть даны три члена геометрической прогрессии: aq^n, aq^p, aq^k . По условию задачи, должно быть:

$$aq^n aq^p = aq^k,$$

откуда

$$a = q^{k-n-p}.$$

Так как числа n, p, k — числа целые, то искомое условие заключается в том, чтобы первый член прогрессии был некоторой целой степенью знаменателя прогрессии.

379. Доказать, что если A, B, C есть соответственно n -ый, p -ый и k -ый члены одной и той же геометрической прогрессии, то $A^{p-k} \cdot B^{k-n} \cdot C^{n-p} = 1$.

Указание. По задаче 373, при условиях данной задачи имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-k} = \left(\frac{A}{C}\right)^{n-p},$$

откуда

$$A^{n-k} \cdot C^{n-p} = B^{n-k} \cdot A^{n-p}.$$

Разделив обе части равенства на выражение, стоящее в правой части, будем иметь:

$$A^{p-k} \cdot B^{k-n} \cdot C^{n-p} = 1;$$

имеется в виду, что $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$.

380. Если A и B есть $(p + k)$ -ый и $(p - k)$ -ый члены некоторой геометрической прогрессии, то доказать, что p -ый член ее равен $\sqrt{AB}$, k -ый член равен $A \sqrt[2k]{\left(\frac{B}{A}\right)^p}$.

Указание. Из условия задачи определим $q = \sqrt[2k]{\frac{A}{B}}$, затем a_p и a_k .

381. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказать, что каждый член ее, начиная со второго, равен разности двух соседних членов.

Указание. Если знаменатель прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то ее члены:

$$a_1, a_2 = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \dots, a_{n-2} = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-3},$$

$$a_{n-1} = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2}; \quad a_n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

Составить разность $a_n - a_{n-2}$, установить, что она равна

$$a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2}, \text{ т. е. } a_{n-1}.$$

382. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2.$$

Указание. По условию задачи, имеем:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = \\ & = (a^2 + a^2q^2 + a^2q^4)(a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6) = \\ & = a^2(1 + q^2 + q^4)a^2q^2(1 + q^2 + q^4) = a^4q^2(1 + q^2 + q^4)^2 = \\ & = (a^2q + a^2q^3 + a^2q^5)^2 = (ab + bc + cd)^2. \end{aligned}$$

383. Доказать, что если a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2.$$

Указание. По условию задачи, $c^2 = bd$, $b^2 = ac$, $ad = bc$. Тогда

$$\begin{aligned} & (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = \\ & = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = \\ & = a^2 - 2bc + d^2 + 2(c^2 + b^2 - ac - bd) = (a - d)^2, \end{aligned}$$

так как

$$2bc = 2ad, \quad c^2 + b^2 - ac - bd = 0.$$

(по условию задачи).

384. Доказать, что если три числа a, b, c составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Указание. Преобразуем левую часть доказываемого равенства:

$$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

так как

$$2ac = 2b^2.$$

385. Доказать, что если a, b, c означает соответственно n -ый, $2n$ -ый и $4n$ -ый член геометрической прогрессии, считая от первого, то

$$b(b^2 - a^2) = a^2(c - b).$$

Указание. По условию задачи,

$$\frac{b}{a} = q^n; \quad \frac{c}{b} = q^{2n}; \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{b},$$

значит

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{c}{b} \quad \text{или} \quad \frac{b^2 - a^2}{a^2} = \frac{c - b}{b},$$

откуда

$$b(b^2 - a^2) = a^2(c - b).$$

§ 24. Сумма n членов геометрической прогрессии

386. Вывести формулу суммы n членов геометрической прогрессии, пользуясь ее определением (знаменатель прогрессии не равен 1).

Указание. Пусть

$$S_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

Многочлен, стоящий в скобках, представляет собой частное от деления многочлена $q^n - 1$ на $q - 1$, т. е.

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}.$$

387. Доказать, что в геометрической прогрессии, имеющей $2n$ членов, отношение суммы членов четного порядка к сумме членов нечетного порядка равно знаменателю прогрессии.

Указание. Прогрессия, в которой $2n$ членов, имеет n членов четного порядка и n членов нечетного порядка.

388. Сумма $2n$ членов геометрической прогрессии, у которой первый член a и знаменатель q , равна сумме n членов геометрической прогрессии, у которой первый член b и знаменатель q^2 . Доказать, что b равняется сумме двух первых членов первой прогрессии.

Указание. Если $S_n = S_{2n}$, то

$$\frac{b(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a(q^{2n} - 1)}{q - 1},$$

откуда

$$b = a(1 + q) = a_1 + a_2.$$

389. Сумма $3n$ членов геометрической прогрессии, у которой первый член a и знаменатель q , равна сумме n членов другой прогрессии, у которой первый член b и знаменатель q^3 . Доказать, что b равно сумме трех первых членов первой прогрессии.

Указание. См. задачу 388.

390. Сумма pr членов геометрической прогрессии, у которой первый член a и знаменатель q , равна сумме n членов другой геометрической прогрессии, у которой первый член b и знаменатель q^p . Доказать, что b равно сумме p первых членов первой прогрессии.

Указание. Задача является обобщением задач 388 и 389 и доказывается аналогично.

391. Пусть a_n и S_n есть n -ый член и сумма n членов геометрической прогрессии $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$;

$$S'_n = a + aq^{-1} + aq^{-2} + \dots + aq^{-(n-1)}.$$

Доказать, что $aS_n = a_n S'_n$.

Указание. По условию задачи,

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{a(q^{-n} - 1)}{q^{-1} - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{q^{n-1}(1 - q)} = \\ &= \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}} = S_n \cdot \frac{a}{aq^{n-1}} = S_n \cdot \frac{a}{a_n}, \end{aligned}$$

откуда

$$\underline{aS_n = a_n S'_n}.$$

392. Пусть S_n и P есть сумма и произведение n последовательных членов данной геометрической прогрессии, S'_n — сумма обратных членов данной прогрессии. Доказать, что

$$P^2 (S'_n)^n = (S_n)^n.$$

Указание. По условию задачи,

$$S'_n = \frac{q^n - 1}{(q - 1) a q^{n-1}}, \quad P = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(см. задачу 369), откуда

$$P^2 (S'_n)^n = \frac{a^{2n} q^{n(n-1)} (q^n - 1)^n}{(q - 1)^n a^n q^{n^2 - n}} = \frac{a^n (q^n - 1)^n}{(q - 1)^n} = (S_n)^n.$$

393. Доказать, что сумма n членов геометрической прогрессии, в которой p -ый член равен $(-1)^p a^{4p}$, при всяком значении p равна

$$\frac{a^4}{a^4 + 1} \cdot [(-1)^n \cdot a^{4n} - 1].$$

Указание. Используя условие задачи, определить первый член прогрессии $(-a^4)$, знаменатель прогрессии $(-a^4)$ и n -ый член прогрессии $(-1)^n a^{4n}$.

394. Доказать, что если S_n, S_{2n}, S_{3n} есть суммы $n, 2n$ и $3n$ первых членов одной и той же геометрической прогрессии, то

$$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

Указание. Найти выражение для левой части доказываемого равенства и преобразовать его, имея в виду, что

$$\begin{aligned} q^{4n} - 2q^{3n} + q^{2n} &= (q^{2n} - 1)^2 + (q^n - 1)^2 - 2(q^{2n} - 1)(q^n - 1) = \\ &= (q^{2n} - q^n)^2. \end{aligned}$$

395. Доказать, что если S есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $1, a^p, a^{2p}, \dots$; S_1 — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, a^q, a^{2q}, \dots$, то

$$S^q (S_1 - 1)^p = (S_1)^p (S - 1)^q.$$

Указание. По условию задачи,

$$S = \frac{1}{1 - a^p}; \quad S_1 = \frac{1}{1 - a^q},$$

откуда

$$a^p = \frac{S - 1}{S}, \quad (1)$$

$$a^q = \frac{S_1 - 1}{S_1}. \quad (2)$$

Возведя первое равенство в степень q , второе — в степень p , получим

$$\left(\frac{S-1}{S}\right)^q = \left(\frac{S_1-1}{S_1}\right)^p$$

или

$$\underline{S^q (S_1 - 1)^p = S_1^p (S - 1)^q}.$$

§ 25. Арифметическая и геометрическая прогрессии

396. Доказать, что если x, y, z — последовательные члены арифметической прогрессии, то y, z и $(2y - x)$ — последовательные члены геометрической прогрессии.

Указание. По условию задачи,

$$y^2 - xy = z^2 - y^2,$$

откуда

$$z = \sqrt{2y^2 - xy} = \sqrt{(2y - x) \cdot y},$$

т. е. z есть среднее геометрическое между y и $(2y - x)$.

397. Найти условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Указание. Пусть $a, a + d, a + 2d$ — три последовательные члена арифметической прогрессии. Если квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a + d)^2 = \sqrt{a^2(a + 2d)^2}$$

или

$$(a + d)^2 = \pm a(a + 2d).$$

Если

$$(a + d)^2 = a(a + 2d),$$

то $d = 0$.

Если

$$(a + d)^2 = -a(a + 2d),$$

то

$$d = a(-2 \pm \sqrt{2}).$$

Найденные выражения для d и есть искомые условия.

398. Доказать, что если k -ый, n -ый и p -ый члены арифметической прогрессии составляют три последовательных члена геометрической прогрессии, то ее знаменатель есть $\frac{n-p}{k-n}$.

Указание. Пусть a_k, a_n, a_p есть k -ый, n -ый, p -ый члены арифметической прогрессии. Если эти же числа являются и последовательными членами геометрической прогрессии, то

$a_n = a_k q, a_p = a_n q$ или $a_n - a_p = q(a_k - a_n)$,
откуда

$$q = \frac{a_n - a_p}{a_k - a_n}.$$

Но

$$a_n - a_p = q(n - p), \quad a_k - a_n = q(k - n),$$

так как данные числа являются членами арифметической прогрессии. Значит,

$$q = \frac{a_n - a_p}{a_k - a_n} = \frac{n - p}{k - n}.$$

399*. Могут ли числа $2; \sqrt{6}; 4,5$ быть членами одной и той же арифметической или геометрической прогрессии?

Указание. Если бы данные числа были членами одной и той же арифметической прогрессии, то должно было соблюдаться равенство:

$$\frac{\sqrt{6} - 2}{4,5 - \sqrt{6}} = \frac{p}{k},$$

где p и k — целые числа (см. задачу 336),
или

$$\sqrt{6} - 2 = \frac{p}{k} (4,5 - \sqrt{6}),$$

$$6 - 4 = \frac{p}{k} (2,5\sqrt{6} + 3),$$

или

$$2 = \frac{p}{k} (2,5\sqrt{6} + 3),$$

чего быть не может. Значит, данные числа не могут образовывать арифметическую прогрессию.

Если данные числа образуют геометрическую прогрессию, то должны существовать такие целые числа r и m , что

$$(4,5 : 2)^r = (\sqrt{6} : 2)^m$$

(см. задачу 373).

При $r = 1$ и $m = 4$ это равенство соблюдается. Действительно, $\frac{9}{4} = \frac{36}{16}$. Значит, данные числа могут составлять геометрическую прогрессию.

400.** Могут ли цифры простого числа, не превышающего 10^4 , представлять собой арифметическую или геометрическую прогрессии? Если могут, то найти эти числа.

Решение. 1) Предположим, что цифры числа образуют арифметическую прогрессию.

а) Для трехзначного числа будем иметь цифры: x , $x + d$, $x + 2d$, где d — разность прогрессии, их сумма $x + (x + d) + (x + 2d)$ будет делиться на 3, т. е. число, образованное этими цифрами, делится на 3 и не может быть простым, что противоречит условию задачи.

б) Для четырехзначного числа будем иметь цифры: x , $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$. Сумма чисел, изображаемых этими цифрами, будет:

$$x + x + d + x + 2d + x + 3d = 2(2x + 3d).$$

x не может быть равен 3, так как тогда получим число, делящееся на 3, т. е. не простое. Далее, так как $x + 3d$ цифра числа, то $x + 3d \leq 9$ и d может быть равно 2 или 1.

Пусть $d = 2$. Тогда $x \leq 3$; $x = 3$ быть не может (п. б); $x = 2$ тоже быть не может, так как получим, что данное число четное; $x = 1$ быть может, тогда получим числа: 1357 и 7531, но оба эти числа составные.

Пусть $d = 1$. Получим числа: 1234, 4321, 2345, 5432, 3456, 6543, 4567.

Числа: 1234, 5432, 3456 — четные; 4321 делится на 29; 2345 делится на 5; 6543 делится на 3. Имеется одно простое число 4567.

2) Предположим, что цифры числа образуют геометрическую прогрессию, т. е. a , aq , aq^2 , aq^3 .

а) Для трехзначного числа $aq^2 \leq 9$, где q — знаменатель прогрессии, образующей цифры числа. Значит $q \leq 3$, и если цифра сотен равна 1, то получается единственная возможность — число 139.

Если цифра сотен не 1, то q не может быть целым числом, так как в этом случае данное число делилось бы на число, выраженное первой цифрой, и не было бы простым числом.

Пусть $q = \frac{p}{n}$, причем p и n не могут быть больше 3, и q может иметь значение: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$. Получим числа: 469, 964, 421, 842, 931. Из них только 421 число простое.

б) Для четырехзначного числа будем иметь: $aq^3 \leq 9$. Единственное значение для q — это $q = 2$ и $a = 1$. Получается число 8421, кратное 3.

Таким образом, могут быть только три числа, удовлетворяющие условию задачи: 4567 (арифметическая прогрессия), 139 и 421 (геометрическая прогрессия).

§ 26. Гармоническая пропорция и гармоническая прогрессия*

401. Доказать, что если три числа, не равные нулю, образуют арифметическую прогрессию, то числа, им обратные, составляют непрерывную гармоническую пропорцию (гармоническую прогрессию).

Доказательство. Пусть a, b, c — последовательные члены арифметической прогрессии, т. е.

$$b - a = c - b, \quad (1)$$

причем $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Пусть также

$$\frac{1}{a} = a_1, \quad \frac{1}{b} = b_1, \quad \frac{1}{c} = c_1$$

или

$$\frac{1}{a_1} = a, \quad \frac{1}{b_1} = b, \quad \frac{1}{c_1} = c.$$

Тогда

$$\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{b_1},$$

или

$$\frac{a_1 - b_1}{a_1 b_1} = \frac{b_1 - c_1}{b_1 c_1},$$

или

$$\frac{a_1 - b_1}{b_1 - c_1} = \frac{a_1}{c_1},$$

т. е., согласно определению, числа a_1, b_1, c_1 составляют гармоническую непрерывную пропорцию.

402. Если три числа составляют непрерывную гармоническую пропорцию, то числа, им обратные, составляют арифметическую прогрессию. Доказать.

Указание. Пусть a, b, c — числа, составляющие непрерывную гармоническую пропорцию, т. е. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$. Пусть a_1, b_1, c_1 — числа, им обратные, т. е.

$$a = \frac{1}{a_1}, \quad b = \frac{1}{b_1}, \quad c = \frac{1}{c_1}.$$

* Числа a, b, c, d образуют гармоническую пропорцию, если $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}$. Если $b = c$, то гармоническая пропорция называется непрерывной. Ряд чисел, из которых каждые три, стоящие рядом, удовлетворяют непрерывной гармонической пропорции, называется гармонической прогрессией.

Тогда

$$\frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}}{\frac{1}{b_1} - \frac{1}{c_1}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1}},$$

откуда

$$\frac{b_1 - a_1}{a_1 b_1} : \frac{c_1 - b_1}{c_1 b_1} = \frac{c_1}{a_1},$$
$$\frac{b_1 c_1 (b_1 - a_1)}{a_1 b_1 (c_1 - b_1)} = \frac{c_1}{a_1}, \quad \frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = 1$$

или

$$\underline{b_1 - a_1 = c_1 - b_1}.$$

403. Если

$$\frac{a + bx}{a - bx} = \frac{b + cy}{b - cy} = \frac{c + dz}{c - dz} \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0)$$

и $a^x = b^y = c^z$, то доказать, что числа a, b, c, d составляют геометрическую прогрессию, а числа x, y, z — гармоническую.

404. Доказать, что числа $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$ составляют гармоническую прогрессию, если числа a, b, c тоже составляют гармоническую прогрессию.

405*. Если x, y, z образуют гармоническую прогрессию, то доказать, что

$$\lg(x+z) + \lg(x-2y+z) = 2\lg(x-z).$$

Указание. По условию задачи, если x, y, z составляют гармоническую прогрессию, то $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ должны составлять арифметическую прогрессию, т. е.

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

или

$$2xz = y(x+z). \quad (1)$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \lg(x+z) + \lg(x-2y+z) &= \lg(x+z)(x-2y+z) = \\ &= \lg[(x+z)^2 - 2y(x+z)] = \lg[(x+z)^2 - 4xz] = \\ &= \lg(x-z)^2 = 2\lg(x-z), \end{aligned}$$

так как, принимая во внимание равенство (1), вместо $2y(x+z)$ имеем право написать $4xz$.

406.** Доказать, что если числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуют гармоническую прогрессию, то

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = (n-1) a_1 a_n.$$

Указание. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — числа, образующие гармоническую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = d, \quad (1)$$

или

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - a_3}{a_2 a_3} = \dots = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1} a_n} = d. \quad (2)$$

Из ряда отношений (1) составим производную пропорцию:

$$\frac{(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n} = d$$

или

$$\frac{a_1 - a_n}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n} = d. \quad (3)$$

Из соотношений (1)

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = d$$

будем иметь:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + d(n-1),$$

откуда

$$d = \frac{a_1 - a_n}{a_1 a_n (n-1)}. \quad (4)$$

Подставляя в равенство (3) вместо d его значение из равенства (4), получим:

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = (n-1) a_1 a_n.$$

ГЛАВА VII

ЛОГАРИФМЫ

§ 27. Тождество $a^{\log_a N} = N$

407. Доказать, пользуясь равенством $a^{\log_a N} = N$, что логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей.

Указание. Задача сводится к доказательству справедливости формулы

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

По определению логарифма:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y},$$

откуда

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

С другой стороны, по определению же:

$$xy = a^{\log_a xy},$$

следовательно:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Примечание. Оговорка о положительности сомножителей существенна, так как если $x < 0$, $y < 0$, то $xy > 0$ и $\log_a(xy)$ имеет вполне определенное значение, но $\log_a x$ и $\log_a y$ не имеют действительных значений, и равенство $a^{\log_a x} = x$ теряет смысл.

408. Пользуясь тождеством $a^{\log_a N} = N$, доказать справедливость следующих формул:

$$1) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad 2) \log_a x^y = y \log_a x,$$

$$3) \log_a \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \log_a x.$$

409. Доказать, что если числа a, b, c составляют геометрическую прогрессию, то их логарифмы составляют арифметическую прогрессию.

Указание. По условию задачи $b^2 = ac$. Логарифмируя это равенство по основанию k , где k — положительное число, не равное единице, получим:

$$\log_k b = \frac{\log_k a + \log_k c}{2}.$$

410. Доказать, что логарифмы последовательных членов геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной логарифму знаменателя данной геометрической прогрессии.

Указание. Пусть члены данной геометрической прогрессии будут: $a, aq, aq^2 \dots aq^n$. Составим последовательность из логарифмов последовательных членов данной геометрической прогрессии по некоторому основанию k , где $k > 0, k \neq 1$:

$$\log_k a, \log_k a + \log_k q, \log_k a + 2\log_k q, \dots, \log_k a + n \log_k q.$$

Полученная последовательность образует арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной $\log_k q$.

411. Доказать, что $\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}$.

Указание. По определению логарифма: $(a^k)^{\log_{a^k} a^n} = a^n$, откуда

$$k \log_{a^k} a^n = n \text{ и } \log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}.$$

412. Доказать, что логарифм $\sqrt[n]{a^m}$ при основании $a^{\frac{n}{m}}$ равен $\frac{m^2}{n^2}$.

Указание. Преобразовать данное выражение к виду

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

и использовать вывод предыдущей задачи.

413. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$, то

$$\log_k \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log_k a + \log_k b),$$

где

$$a > 0, b > 0, k > 0, k \neq 1.$$

Указание. Прибавим к обеим частям данного равенства по $2ab$, получим:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 9ab \text{ или } (a+b)^2 = 9ab,$$

откуда

$$\log_k \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log_k a + \log_k b).$$

414. Доказать, что $\lg \lg \lg 10^{10^{np}} = \lg np$.

Указание. $\lg \lg \lg 10^{10^{np}} = \lg \lg \lg (10^{10^{np}}) = \lg \lg (10^{np}) = \lg np$, так как $\lg 10 = 1$.

§ 28. Различные системы логарифмов

415. Доказать, что $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Указание. По определению логарифма: $b = a^{\log_a b}$. Прологарифмировав данное равенство по основанию b , получим: $\log_a b \log_b a = 1$.

416. Доказать, что логарифм числа N по „новому“ основанию b равен логарифму того же числа по „старому“ основанию a , деленному на логарифм нового основания по старому основанию.

Указание. По определению логарифма: $N = b^{\log_b N}$. Прологарифмировав это равенство по основанию a , получим:

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b$$

или

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Множитель $\frac{1}{\log_a b}$, полученный в задаче 416, называется модулем перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b .

417. Доказать, что отношение $\frac{\log_a P}{\log_a K}$ не зависит от основания логарифмов.

Указание. По задаче 416,

$$\frac{\log_a P}{\log_a K} = \frac{\log_b P}{\log_b a} : \frac{\log_b K}{\log_b a} = \frac{\log_b P}{\log_b K},$$

т. е. отношение не зависит от основания логарифмов a .

418. Доказать, что логарифмы чисел P и K , взятые при разных основаниях, пропорциональны.

Указание. Задача сводится к подтверждению справедливости тождества $\frac{\log_a P}{\log_b P} = \frac{\log_a K}{\log_b K}$, что легко сделать, используя вывод предыдущей задачи.

419. Доказать, что

$$\frac{\log_a P}{\log_{ab} P} = 1 + \log_a b$$

при

$$a > 0, b > 0, ab \neq 1, \\ a \neq 1.$$

Указание. По доказанному ранее:

$$\log_{ab} P = \frac{\log_a P}{\log_a ab} = \frac{\log_a P}{1 + \log_a b}.$$

420. Доказать, что при $a > 0, a \neq 1$

- 1) $\log_{a^2} P = \frac{\log_a P}{2}$;
- 2) $\log_{\sqrt{a}} P = 2 \log_a P$;
- 3) $\log_{\frac{1}{a}} P = -\log_a P$.

Указание. Использовать зависимость между логарифмами числа по разным основаниям.

421. Доказать, что

$$\log_{a^k} P = \frac{\log_a P}{k}$$

при

$$a > 0, a \neq 1.$$

Указание. Доказать справедливость данного равенства можно двумя способами:

1) $\log_{a^k} P = \frac{\log_a P}{\log_a a^k} = \frac{\log_a P}{k}.$

2) Имея в виду, что, по определению,

$$P = a^{\log_a P} \text{ и } P = (a^k)^{\log_{a^k} P},$$

откуда

$$\log_a P = k \log_{a^k} P$$

или

$$\log_{a^k} P = \frac{\log_a P}{k}.$$

422. Доказать, что

- 1) $\log_{bn} an = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$;
- 2) $\log_{ba^n} a^{n+1} = \frac{(n+1) \log_b a}{1 + n \log_b a}$;
- 3) $\log_{b^{n+1}} ab^n = \frac{\log_b a + n}{1 + n}$;
- 4) $\log_{b^n} a^n = \log_b a$.

Указание. Использовать зависимость между логарифмами числа по старому и новому основанию, приняв за „старое“ основание b .

423. Доказать, что если a, b, c — члены геометрической прогрессии, то

$$\frac{\log_a P - \log_b P}{\log_b P - \log_c P} = \frac{\log_a P}{\log_c P},$$

где $P > 0, a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$.

Указание. По условию задачи, $b = \sqrt{ac}$. По задаче 415,

$$\log_b P = \frac{1}{\log_P b} = \frac{1}{\log_P \sqrt{ac}} = \frac{2}{\log_P a + \log_P c} = \frac{2 \log_a P \cdot \log_c P}{\log_a P + \log_c P}.$$

Заменяв в левой части доказываемого равенства $\log_b P$ полученным выражением и выполнив несложные преобразования, докажем справедливость равенства.

424. Вычислить $\log_{abc \dots k} x$, зная

$$\log_a x, \log_b x, \dots, \log_k x, x \neq 1.$$

Указание. По задаче 415,

$$\begin{aligned} \log_{abc \dots k} x &= \frac{1}{\log_x (abc \dots k)} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \dots + \log_x k} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \dots + \frac{1}{\log_k x}}. \end{aligned}$$

425. Доказать тождество:

$$\begin{aligned} \log_a P \cdot \log_b P + \log_b P \cdot \log_c P + \log_a P \cdot \log_c P &= \\ &= \frac{\log_a P \cdot \log_b P \cdot \log_c P}{\log_{abc} P}. \end{aligned}$$

Указание. По задаче 415 и по предыдущей имеем:

$$\begin{aligned} \log_{abc} P &= \frac{1}{\frac{1}{\log_a P} + \frac{1}{\log_b P} + \frac{1}{\log_c P}} = \\ &= \frac{\log_a P \cdot \log_b P \cdot \log_c P}{\log_b P \cdot \log_c P + \log_a P \cdot \log_c P + \log_a P \cdot \log_b P}. \end{aligned}$$

426*. Доказать:

$$a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$$

и установить область допустимых значений для входящих букв.

Указание. По задаче 415, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, по определению логарифма $b^{\log_b a} = a$. Преобразуем левую часть доказываемого равенства, имея в виду эти два замечания:

$$\begin{aligned} a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} &= \left(a^{\frac{1}{\log_b a}} \right)^{\log_b (\log_b a)} = \\ &= (a^{\log_a b})^{\log_b (\log_b a)} = b^{\log_b (\log_b a)} = \log_b a. \end{aligned}$$

§ 29. Разные задачи

427. Доказать, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

при

$$a > 0, c > 0, b > 0, c > b.$$

Указание. По условию задачи, $a^2 = (c+b)(c-b)$. Логарифмируя это равенство сначала по основанию $c+b$, затем по основанию $c-b$, будем иметь:

$$2 \log_{c+b} a = 1 + \log_{c+b} (c-b), \quad (1)$$

$$2 \log_{c-b} a = 1 + \log_{c-b} (c+b). \quad (2)$$

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$\begin{aligned} 4 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a &= 1 + \log_{c+b} (c-b) + \log_{c-b} (c+b) + \\ &+ \log_{c-b} (c+b) \cdot \log_{c+b} (c-b). \end{aligned}$$

Используя задачу 415 и равенства 1 и 2, будем иметь:

$$\log_{c+b} (c-b) \cdot \log_{c-b} (c+b) = 1,$$

$$\log_{c-b} (c+b) = 2 \log_{c-b} a - 1,$$

$$\log_{c+b} (c-b) = 2 \log_{c+b} a - 1,$$

откуда

$$4 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = 2 \log_{c-b} a + 2 \log_{c+b} a$$

или

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

428. Доказать, что если $(ac)^{\log_a b} = c^2$, то числа $\log_a P$, $\log_b P$, $\log_c P$ образуют арифметическую прогрессию, где

$$a > 0, b > 0, c > 0, P > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1.$$

Указание. Прологарифмируем выражение, данное в задаче, по основанию c :

$$\log_a b (\log_c a + \log_c c) = 2 \log_c c$$

или

$$\log_a b \cdot \log_c a + \log_a b = 2.$$

Умножим на $\log_b P$:

$$\log_a b \cdot \log_c a \cdot \log_b P + \log_a b \cdot \log_b P = 2 \log_b P,$$

но

$$\begin{aligned} \log_a b \cdot \log_b P &= \log_a P, \quad \log_a b \cdot \log_c a \cdot \log_b P = \\ &= \log_c a \cdot \log_a P = \log_c P, \end{aligned}$$

откуда

$$\log_a P + \log_c P = 2 \log_b P.$$

429*. Доказать, что из равенства

$$\frac{x(y+z-x)}{\log_a x} = \frac{y(x+z-y)}{\log_a y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_a z}$$

следует

$$x^y \cdot y^x = z^x \cdot x^z = y^z \cdot z^y.$$

Указание. Пусть каждое из отношений, данных в условии задачи, равно $\frac{1}{n}$, тогда:

$$\log_a x = nx(y+z-x), \quad \log_a y = ny(x+z-y),$$

$$\log_a z = nz(x+y-z).$$

Преобразуем эти равенства, помножив обе части их на одно и то же число: первое — на y и z , второе — на x и на z , третье — на x и на y , и сложим равенства (1) с (3), (2) с (5), (4) с (6). Получим:

$$y \log_a x + x \log_a y = 2nxyz,$$

$$y \log_a z + z \log_a y = 2nxyz,$$

$$z \log_a x + x \log_a z = 2nxyz.$$

Полученные равенства позволяют сделать вывод о равенстве выражений, стоящих в левых частях, т. е.

$$y \log_a x + x \log_a y = y \log_a z + z \log_a y = z \log_a x + x \log_a z,$$

откуда

$$\log_a x^y y^x = \log_a z^y y^z = \log_a x^z z^x$$

или

$$x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x.$$

430. Доказать, что десятичные логарифмы целых положительных чисел, не равных целой степени 10, есть числа иррациональные.

Указание. Пусть число N не является целой степенью 10, но предположим, что оно является рациональной степенью 10, т. е. $\lg N = \frac{n}{p}$, где $\frac{n}{p}$ — несократимая рациональная дробь.

Тогда $10^{\frac{n}{p}} = N$ или $10^n = N^p$, что противоречит условию о том, что N не является целой степенью 10.

431*. Доказать, что если N есть число целых чисел, у которых логарифмы имеют характеристику n , а M — число целых чисел, обратные которым имеют характеристику $(-m)$, то

$$\lg N - \lg M = n - m + 1.$$

Указание. Все целые числа, имеющие характеристику n , должны заключаться между числами 10^n и 10^{n+1} , их число определится как

$$N = 10^{n+1} - 10^n = 9 \cdot 10^n. \quad (1)$$

Характеристику $(-m)$ имеют все дроби, заключенные между дробями: $\frac{1}{10^m}$ и $\frac{1}{10^{m-1}}$, а потому их количество определится как:

$$M = 10^m - 10^{m-1} = 9 \cdot 10^{m-1}. \quad (2)$$

Разделив равенство (1) на равенство (2), получим: $N:M = 10^{n-m+1}$, откуда, после логарифмирования по основанию 10, будем иметь: $\lg N - \lg M = n - m + 1$.

432*. Даны две прогрессии с положительными членами: геометрическая и арифметическая:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n,$$

$$\div b_1, b_2, \dots, b_n$$

(разность второй положительна). Доказать, что всегда существует система логарифмов, для которой:

$$\log_k a_n - b_n = \log_k a_1 - b_1.$$

Указание. По условию задачи имеем:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad b_n = b_1 + d(n-1),$$

$$\log_k a_n - b_n = \log_k a_1 + (n-1) \log_k q - b_1 - d(n-1),$$

где a_n — общий член данной геометрической прогрессии, q — ее знаменатель, b_n — общий член данной арифметической прогрессии, d — ее разность, k — положительное число, не равное единице. Если $a_n = a_1$ и $b_n = b_1$, то

$$\log_k a_1 - b_1 = \log_k a_1 + (n-1) \log_k q - b_1 - d(n-1),$$

т. е.

$$(n-1) \log_k q = (n-1) d,$$

откуда $k^d = q$ или $k = q^{\frac{1}{d}}$. Значит система логарифмов, удовлетворяющая условию задачи, существует и ее основание равно $k = q^{\frac{1}{d}}$.

433*. Доказать, не пользуясь логарифмическими таблицами, что

$$1) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2;$$

$$2) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2.$$

Указание. 1) Обозначим $\log_2 \pi = a$, $\log_5 \pi = b$. Из равенств $2^a = \pi$, $5^b = \pi$ получаем:

$$\pi^{\frac{1}{a}} = 2, \quad \pi^{\frac{1}{b}} = 5, \quad \pi^{\frac{1}{a}} \cdot \pi^{\frac{1}{b}} = 2 \cdot 5 = 10, \quad \pi^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 10.$$

Но $\pi^2 \approx 3,14^2 < 10$, откуда следует $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.

2) Второе неравенство доказывается аналогично: обозначив $\log_2 \pi = a$, $\log_\pi 2 = b$, получим $2^a = \pi$, $\pi^b = 2$; из второго равенства имеем $2^{\frac{1}{b}} = \pi$ или $b = \frac{1}{a}$. Доказываемое неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{a}} > 2, \quad \frac{a^2 + 1}{a} > 2$$

или

$$a^2 + 1 > 2a \quad \text{или} \quad (a-1)^2 > 0.$$

Последнее неравенство является очевидным.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§ 30. Применение метода математической индукции к доказательству свойств чисел натурального ряда

434. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство. 1) При $n=1$, $S_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ — формула верна.

2) Допустим, что формула справедлива для $n=k$, т. е. $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$, и докажем, что тогда она верна и для $n=k+1$, т. е.

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

3) Действительно, $S_{k+1} = S_k + (k+1)$, но $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ по предположению, значит,

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

4) Для случая $n=1$ формула верна, из предположения ее справедливости для $n=k$ получаем, что она справедлива и для $n=k+1$.

Значит данная формула справедлива для любого натурального n .

435. Доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна квадрату числа их.

Доказательство. 1) При $n=1$ имеем $S_1 = 1$, $n^2 = 1$, значит формула верна.

2) Предположим, что формула верна для $n=k$, т. е. $S_k = k^2$, и докажем, что тогда она верна и для $n=k+1$, т. е. $S_{k+1} = (k+1)^2$.

3) Действительно, $S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$, но $S_k = k^2$ по предположению, значит

$$S_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

4) Формула $S_n = n^2$ верна для $n = 1$, из предположения ее справедливости для $n = k$ следует ее справедливость для $n = k + 1$. Значит, формула верна для любого натурального n .

436. Доказать, что сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

437. Доказать, что

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

где n — любое натуральное число.

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} = \\ &= \frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}. \end{aligned}$$

438. Доказать, что

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2},$$

где n — любое натуральное число.

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + \\ &+ (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ &= (-1)^k \cdot \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

439. Доказать, что

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

где n — любое натуральное число.

Указание. $S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

440. Доказать тождество:

$$S_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

при любом натуральном n .

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{[k+1]^2[(k+1)+1]^2}{4}. \end{aligned}$$

441. Доказать, что для каждого натуральных n и p имеет место равенство:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 2 \dots p + 2 \cdot 3 \dots p(p+1) + \dots + n(n+1) \dots \\ &\dots (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+p)}{p+1}. \end{aligned}$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+2) \dots (k+p) = \frac{k(k+1) \dots (k+p)}{p+1} + \\ &+ (k+1)(k+2) \dots (k+p) = \frac{(k+1)(k+2) \dots (k+p+1)}{p+1}. \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $p=1$, $p=2$, $p=3$, получим:

$$1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

$$3) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

442. Доказать справедливость тождества

$$P_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1),$$

где n — любое натуральное число.

Указание.

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{P_k(2k+1)(2k+2)}{k+1} = \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)(2k+1)(2k+2)}{k+1} = \\ &= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1). \end{aligned}$$

443. Доказать, что $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, где n — любое натуральное число.

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = \\ &= (k+2)! - 1 = [(k+1) + 1]! - 1. \end{aligned}$$

Примечание. Следует иметь в виду, что даваемые нами „указания“ не могут считаться полными доказательствами, это только вспомогательные рассуждения для проведения этапа доказательства методом математической индукции. От учащихся необходимо требовать проведения полного доказательства предлагаемых задач.

444*. Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки данной таблицы равна квадрату количества чисел в ней:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5, 6, 7 \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ \dots \end{array}$$

Указание. Общий вид строк таблицы: $n, n+1, n+2, \dots, 3n-2$; всего $2n-1$ число.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k - k + (3k-1) + 3k + (3k+1) = (2k-1)^2 - k + \\ &+ (3k-1) + 3k + (3k+1) = (2k-1)^2 + 8k = (2k+1)^2 = \\ &= [2(k+1) - 1]^2. \end{aligned}$$

445. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

446. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{k+1}{3k+4} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}. \end{aligned}$$

447. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \\ &= \frac{k+1}{4k+5} = \frac{k+1}{4(k+1)+1}. \end{aligned}$$

448. Доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] + \\ &+ \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{[(k+1)+1] \cdot [(k+1)+2]} \right\}. \end{aligned}$$

449. Доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \\ = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{k(k+1)(2k+5) + 2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}. \end{aligned}$$

450. Доказать тождество

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}.$$

Указание.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \\ = \frac{k+1}{a(a+k+1)} = \frac{k+1}{a[a+(k+1)]}.$$

451. Доказать, что

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + px^p = \frac{x - (p+1)x^{p+1} + px^{p+2}}{(1-x)^2} \text{ при } x \neq 1.$$

Указание.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)x^{k+1} = \frac{x - (k+1)x^{k+1} + kx^{k+2}}{(1-x)^2} + \\ + (k+1)x^{k+1} = \frac{x - (k+2)x^{k+2} + (k+1)x^{k+3}}{(1-x)^2}.$$

452. Доказать тождество:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

при $x \neq 1$.

Указание.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{1-x} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \\ = \frac{1}{1-x} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

453. Доказать, что

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$

при $|x| \neq 1$.

Указание.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^k}}{1-x^{2^k}} + \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} = \\ = \frac{1}{1-x} \left[\frac{(x - x^{2^k})(1 + x^{2^k}) + x^{2^k}(1 - x)}{1 - x^{2^{k+1}}} \right] = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^{k+1}}}{1 - x^{2^{k+1}}}.$$

Примечание. Метод математической индукции может применяться и при решении вопросов другого характера. В задачах 454 — 459 с помощью этого метода решается вопрос о делимости некоторых многочленов. Многие из этих задач посильны учащимся IX и даже VIII классов.

454. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Указание.

$$S_{k+1} = (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + \\ + 9(k^2 + 3k + 3) = S_k + 9(k^2 + 3k + 3).$$

455. Доказать, что $n^3 + 5n$ делится на 6, где n — любое натуральное число.

Указание.

$$A_{k+1} = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6 = \\ = A_k + 3k(k+1) + 6.$$

456. Доказать, что выражение $m^3 + 11m$ делится на 6, где m — любое натуральное число.

Указание.

$$A_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 11k + 3k(k+1) + 12 = \\ = A_k + 3k(k+1) + 12.$$

457. Доказать, что если m — четное число, то $m^3 + 20m$ делится на 48.

Указание.

$$A_{2k+2} = (2k+2)^3 + 20(2k+2) = (2k)^3 + 20(2k) + \\ + 24(k+1)k + 48 = A_k + 24(k+1)k + 48.$$

458*. Доказать, что при любом целом a выражение $a^7 - a$ делится на 42.

Указание. Задача сводится к доказательству того, что данное выражение делится на 6 и на 7. Для доказательства его делимости на 6 следует преобразовать данное выражение к виду:

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = \\ = a(a-1)(a+1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1);$$

$a(a-1)(a+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел делится на 6. Для доказательства того, что $a^7 - a$ делится на 7, используем метод математической индукции:

$$(a+1)^7 - (a+1) = a^7 + 7a^6 + C_7^2 a^5 + C_7^3 a^4 + C_7^4 a^3 + \\ + C_7^5 a^2 + C_7^6 a + 1 - a - 1 = (a^7 - a) + (7a^6 + C_7^2 a^5 + \\ + C_7^3 a^4 + C_7^4 a^3 + C_7^5 a^2 + 7a),$$

$(a^7 - a)$ делится на 7 по предположению;

$7a^6 + C_7^2 a^5 + \dots + 7a$ делится на 7, так как каждое слагаемое этой суммы делится на 7.

459*. Доказать, что если p есть простое число, то при всяком целом a разность $a^p - a$ делится на p (малая теорема Ферма).

Доказательство. 1) При $a = 1$ данное утверждение очевидно, так как $a^p - a = 0$.

2) Предположим, что данное утверждение справедливо при $a = k$, т. е. что $k^p - k$ делится на p и докажем, что тогда $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p .

3) Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(k+1)^p - (k+1) &= k^p + C_p^1 k^{p-1} + \dots + pk + 1 - k - 1 = \\ &= (k^p - k) + pk^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \dots + pk.\end{aligned}$$

Но $k^p - k$ делится на p по предположению, pk делится на p , все биномиальные коэффициенты также делятся на p , так как числитель коэффициентов содержит p , а знаменатель такого множителя не содержит. Значит, $a^p - a$ делится на p , где a — любое целое число, p — простое число.

§ 31. Использование метода математической индукции для доказательства неравенств

460. Доказать, что при натуральном $n \geq 5$ справедливо неравенство:

$$2^n > n^2.$$

Указание. Условие задачи можно выразить несколько иначе: доказать, что $2^{n+4} > (n+4)^2$, где n — любое натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned}2^{(k+1)+4} &= 2^{k+5} = 2 \cdot 2^{k+4} > 2(k+4)^2 = \\ &= 2k^2 + 16k + 32 > \underline{(k+5)^2}.\end{aligned}$$

461. Доказать, что $2^n > 2n + 1$ при натуральном $n \geq 3$.

Указание. Задача сводится к доказательству неравенства:

$$2^{n+2} > 2(n+2) + 1 = 2n + 5,$$

где n — любое натуральное число.

462. Доказать, что $2^n > n^3$ для натуральных n , не меньших 10.

Указание. Представить условие задачи в виде неравенства:

$$2^{n+9} > (n+9)^3,$$

где n — любое натуральное число.

Примечание. При решении задач 463—465 следует обратить внимание на необходимость найти более простое доказательство справедливости утверждения для $n = k + 1$ при предположении его справедливости для $n = k$.

463*. Доказать, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},$$

где n — натуральное число, большее единицы.

Указание.

$$S_{k+1} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

или

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(2k+1)(k+1)} > 0,$$

т. е.

$$S_{k+1} > S_k,$$

но

$$S_k > \frac{13}{24},$$

значит,

$$S_{k+1} > \frac{13}{24}.$$

464*. Доказать, что

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

где n — любое натуральное число, большее единицы.

Указание. Проверить справедливость неравенства при $n = 2$, предположить справедливость его при $n = k$ и доказать справедливость неравенства для $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1}}{(k+1)+1} &= \frac{4^k \cdot 4(k+1)}{(k+1)(k+2)} < \frac{(2k)! \cdot 4(k+1)}{(k!)^2(k+2)} = \\ &= \frac{(2k)! \cdot 2(2k+1)(2k+2)}{(k!)^2(k+2)(2k+1)} = \frac{(2k+2)! \cdot 2}{(k!)^2(2k^2+5k+2)} < \frac{(2k+2)! \cdot 2}{(k!)^2(k+1)^2 \cdot 2} = \\ &= \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}. \end{aligned}$$

465*. Доказать, что

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

где n — любое натуральное число, большее единицы.

Указание.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \\ &= \sqrt{k+1} \cdot \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{k+1} > \sqrt{k+1}, \end{aligned}$$

так как

$$\sqrt{k(k+1)} > k \quad (k > 1).$$

466*. Доказать, что при $x > 0$ и натуральном n , большем 1, справедливо неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ (неравенство Бернулли).

Доказательство. 1) При $n=2$ имеем

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x,$$

так как

$$x > 0,$$

значит, неравенство справедливо.

2) Допустим, что

$$(1+x)^k > 1+kx, \quad (1)$$

и докажем, что тогда

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (1+k)x.$$

3) Для доказательства умножим обе части неравенства (1) на $1+x > 0$, получим:

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x),$$

или

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2,$$

или

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x,$$

так как

$$kx^2 > 0.$$

4) Значит, $(1+x)^n > 1+nx$ при любом натуральном n , большем 1, и $x > 0$.

467*. Доказать, что для любых целых положительных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Доказательство. 1) При $n = 2$ неравенство справедливо (см. задачу 285 главы „Неравенства“).

2) Предположим, что неравенство справедливо для $n = k - 1$,

т. е.
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_1} \geq k - 1, \quad (1)$$

и докажем его справедливость для $n = k$, т. е. для чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_k.$$

Пусть a_k — наименьшее из этих чисел, тогда $a_1 - a_k \geq 0$, $a_{k-1} \geq a_k$, следовательно,

$$a_{k-1}(a_1 - a_k) \geq a_k(a_1 - a_k)$$

или

$$a_1 a_{k-1} + a_k^2 - a_k a_{k-1} \geq a_k a_1.$$

3) Разделив это неравенство на $a_k a_1$, получим:

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_1} - \frac{a_{k-1}}{a_1} \geq 1. \quad (2)$$

4) Сложив неравенства (1) и (2), будем иметь:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_1} \geq k.$$

468*. Доказать, что

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

для любого целого положительного $k \leq n$.

Доказательство. 1) При $k = 1$ это неравенство очевидно.

2) Предположим его справедливость для некоторого k и докажем, что оно справедливо и для $k + 1$.

3) Будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n}, \end{aligned}$$

для любого целого положительного k .

4) Пусть теперь $k \leq n$, получим:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2 + 2k + 1}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} = 1 + \frac{k+1}{n} + \\ &+ \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}, \end{aligned}$$

так как

$$n(k+1) > k^2.$$

Значит,

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

для любого целого положительного $k \leq n$.

Примечание. Положив $k = n$, будем иметь:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Это неравенство имеет большое значение для решения ряда теоретических и практических вопросов математики, например, вопросов о натуральных логарифмах, т. е. логарифмах при основании e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828 \dots$$

469*. Доказать, что

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

для любого целого n , большего 6.

Доказательство. 1) Пусть данное неравенство справедливо для некоторого $n = k$, т. е.

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k > k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k.$$

2) Докажем справедливость данного неравенства для $n = k + 1$, т. е.

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > (k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

или

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > k!(k+1) > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

3) Учитывая предположение п. 1, доказательство сводится к проверке справедливости неравенства:

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{2}\right)^k \geq k+1 \geq \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{3}\right)^k.$$

4) Сократив это неравенство на $(k+1)$, приведем его к виду

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 1 \geq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

справедливость же этого неравенства вытекает из примечания к предыдущей задаче.

5) Если $n=6$, то

$$\left(\frac{6}{2}\right)^6 = 3^6 = 729, \quad 6! = 720,$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64,$$

т. е.

$$\left(\frac{6}{2}\right)^6 > 6! > \left(\frac{6}{3}\right)^6.$$

Значит, неравенство $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$ справедливо для любого целого n , большего 6.

ГЛАВА IX
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 32. Область определения функций

470. $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Доказать, что $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ ($x \neq 0$).

471. $F(x) = \frac{\sin x}{x}$. Доказать, что $F(-x) = F(x)$ ($x \neq 0$).

472. Найти область определения следующих функций:

$$y = \frac{\lg x}{\lg(3-x)}, \quad y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}.$$

473. Построить графики функций:

$$1) \begin{cases} y = x^2, & x \geq 0, \\ y = -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x, & x \geq 0, \\ y = -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$4) y = E(x),$$

где $E(x)$ — целая часть x .

474. Доказать, что функция $y = -\frac{1}{x^2}$ ограничена сверху в промежутке $(-\infty, +\infty)$; $x \neq 0$.

475. Доказать, что функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ ограничена в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

476. Доказать, что функция $y = \frac{x}{x^2+1}$ ограничена в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

477. Доказать, что функция $y = \frac{x}{x-1}$ не ограничена в промежутке $(-\infty, +\infty)$, $x \neq 1$.

§ 33. Четные и нечетные функции

Перед тем как приступить к решению задач 478—490, необходимо повторить с учащимися определения четной и нечетной функций, обратив их внимание на то, что существуют функции, не принадлежащие ни к тому, ни к другому виду. Особенно надо подчеркнуть, что можно говорить о четности или нечетности только для тех функций, область определения которых есть промежуток, симметричный относительно начала координат. Учащиеся должны уметь записать в общем виде условия четности и нечетности функций: для четной функции $f(x) = f(-x)$, для нечетной функции $f(x) = -f(-x)$.

Далее необходимо показать, что график всякой четной функции симметричен относительно оси OY (а), график нечетной функции (б) симметричен относительно начала координат.

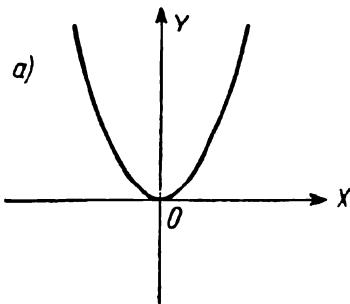


Рис. 1а

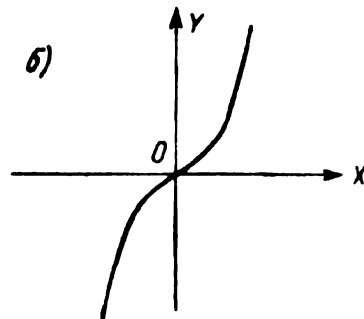


Рис. 1б

478. Функция $y = x^2$ задана в промежутке $(0,1)$. Можно ли сказать, что эта функция четная?

479. Если область определения функции $(-\infty \dots +\infty)$, то какие из следующих функций четные, какие нечетные: $y = x^2$; $y = x^4$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \cos x$?

480. Можно ли говорить о четности или нечетности функций $y = \lg x$, $y = \sqrt{x-1}$?

481. Четными или нечетными будут следующие функции, область определения которых $(-\infty \dots +\infty)$:

$$y = 2x - 1, y = x^2 - 3x + 2, y = x^3 - 4$$

Ответ. Эти функции не будут ни четными, ни нечетными.

482. Если известен график четной функции $f(x)$ в промежутке $(0 \dots +\infty)$, то как построить график этой функции для промежутка $(-\infty \dots 0)$? Как построить график данной функции для промежутка $(0 \dots +\infty)$, если известен график функции для промежутка $(-\infty \dots 0)$?

483. Доказать, что функция $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, заданная в промежутке $(-1, 1)$, является нечетной функцией.

484. Доказать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.

485. Доказать, что сумма и разность двух нечетных функций есть функция нечетная.

486. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

Указание. Пусть $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — четные функции. Тогда:

$$F(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x) = f(x) \cdot \varphi(x) = F(x).$$

487. Доказать, что произведение четной функции на нечетную функцию есть функция нечетная.

488. Доказать, что всякая функция $f(x)$, заданная на некоторой симметричной относительно начала координат области, может быть представлена (и при том однозначно) в виде суммы четной и нечетной функции на этой области.

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть функция, удовлетворяющая условию задачи. Составим функцию:

$$\varphi(x) = f(x) + f(-x).$$

Функция $\varphi(x)$ для этой области будет четной. Действительно,

$$\varphi(-x) = f(-x) + f(x) = \varphi(x).$$

Возьмем другую функцию: $\psi(x) = f(x) - f(-x)$. Эта функция будет нечетной, ибо:

$$\psi(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -\psi(x).$$

Выразим $f(x)$ и $f(-x)$ через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x); \quad f(x) - f(-x) = \psi(x).$$

Отсюда: $f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\psi(x)}{2}$. Но $\frac{\varphi(x)}{2}$ есть четная функция, а $\frac{\psi(x)}{2}$ нечетная, т. е. $f(x)$ представлена как сумма четной и нечетной функций. Легко доказать и единственность представления функции $f(x)$ в виде такой суммы.

489. Выяснить, является ли функция $f(x) = \text{const}$ четной или нечетной функцией.

490. Доказать, что функция $f(x) = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$ четная.

§ 34. Периодические функции.

Прежде чем приступить к решению задач 491—494, следует повторить определение периодической функции и наименьшего периода, выяснить, усвоена ли математическая запись свойства периодичности функции, т. е. $f(x + l) = f(x)$, где l — постоянное, отличное от 0 число, а x — любое значение аргумента, причем x и $x + l$ должны принадлежать области допустимых значений.

491. Показать, что если l есть период функции, то $2l$ и $3l$, вообще nl , где n — натуральное число, тоже являются периодами этой функции.

Примечание. В этой и последующих задачах предполагается, что все значения аргумента принадлежат области допустимых значений.

Указание. $f(x + 2l) = f[(x + l) + l] = f(x + l) = f(x)$ и т. д.

492. Показать, что если l есть период функции, то $(-kl)$, где k — натуральное число, тоже будет период функции.

493. Показать, что функция $f(x) = x - E(x)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, где $E(x)$ наибольшее целое число, не превосходящее x (например $E(3,5) = 3$; $E(2) = 2$; $E(-0,5) = -1$), есть периодическая, с периодом, равным 1. Начертить график данной функции.

Указание.

$$f(x + 1) = (x + 1) - E(x + 1) = x + 1 - [E(x) + 1] = x - E(x) = f(x)$$

и т. д. Надо показать, что никакое не целое число не есть период данной функции.

494. Определить наименьший период тригонометрических функций:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

§ 35. Возрастание и убывание функций

Вопрос о возрастании и убывании функций не следует относить к концу курса алгебры. При изучении некоторой функции одновременно следует затронуть и вопросы о возрастании и убывании данной функции. В конце курса возможно повторение вопроса о возрастании и убывании функций. Полезно все теоретические положения иллюстрировать примерами.

Учащиеся должны знать, что если для любых двух значений аргумента из области допустимых значений имеет место неравенство:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ если } x_2 > x_1 \text{ или}$$

$f(x_2) - f(x_1) < 0$, если $x_2 < x_1$, то функция называется возрастающей, т. е. если большему (меньшему) значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, то функция называется возрастающей.

Если $f(x_2) - f(x_1) < 0$ при $x_2 > x_1$ или $f(x_2) - f(x_1) > 0$ при $x_2 < x_1$, то функция называется убывающей, т. е. если большему (меньшему) значению аргумента соответствует меньшее (большее) значение функции, то функция называется убывающей.

Если дано понятие о приращении функции, то для возрастающей и убывающей функций можно дать следующее определение.

Для возрастающей функции приращение функции и приращение аргумента одного знака, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$; для убывающей функции приращение функции и приращение аргумента разных знаков, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

495. Показать, что функции: $y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 3$ и вообще $y = ax + b$, где $a > 0$, есть функции возрастающие.

496. Показать, что функции: $y = -2x + 2$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$ и вообще $y = ax + b$, где $a < 0$, есть функции убывающие.

497. Показать, что функции: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и вообще $y = ax^2$, где $a > 0$, есть функции возрастающие в промежутке $(0 \dots +\infty)$ и убывающие в промежутке $(-\infty \dots 0)$.

Указание. $y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

Если $x_2 > x_1$, $x_1 > 0$ и $a > 0$, то $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $y_2 - y_1 > 0$. Если $x_2 < 0$ и $x_2 > x_1$, то $x_2 + x_1 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$ и $a > 0$, следовательно, $y_2 - y_1 < 0$.

498. Показать, что функции: $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$ и вообще $y = ax^2$, где $a < 0$, есть функции возрастающие в промежутке $(-\infty \dots 0)$ и убывающие в промежутке $(0 \dots +\infty)$.

499. Показать, что функция $y = x^3$ есть функция возрастающая в промежутке $(-\infty \dots +\infty)$.

500. Показать, что функция $y = ax^3$ будет возрастающая в промежутке $(-\infty \dots +\infty)$ при $a > 0$ и убывающая при $a < 0$.

Указание. $y_2 - y_1 = ax_2^3 - ax_1^3 = a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)$. Если $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$, $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$ всегда больше нуля,

если x_1 и x_2 одного знака. Если x_1 и x_2 разных знаков, то $x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 > 0$. Следовательно, знак $y_2 - y_1$ зависит от a .

501. Показать, что функция $y = ax^4$ будет возрастающей в промежутке $(0 \dots +\infty)$ и убывающей в промежутке $(-\infty \dots 0)$ при $a > 0$, и убывающей в промежутке $(0 \dots +\infty)$, и возрастающей в промежутке $(-\infty \dots 0)$ при $a < 0$.

502. Рассмотреть вопрос о возрастании и убывании функции $y = x^n$, где n — четное натуральное число, n — нечетное натуральное число.

503. Рассмотреть вопрос о возрастании и убывании функции $y = ax^n$.

Указание. Рассмотреть случаи, когда n — четное натуральное число, нечетное натуральное число, когда $a > 0$ и $a < 0$.

504. Рассмотреть возрастание и убывание функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число.

Указание. Функция $y = x^{-n}$ задана для любого значения x за исключением $x = 0$, следовательно, $y = \frac{1}{x^n}$. Пусть n — четное число, но $y_1 = x^n$ возрастает в промежутке $(0 \dots +\infty)$. Следовательно, функция $y = \frac{1}{x^n}$ будет убывать в промежутке $(0 \dots +\infty)$. В промежутке $(-\infty \dots 0)$ функция $y = x^{-n}$ будет возрастать.

Если n — нечетное число, т. е. $n = 2k + 1$, то $y_1 = x^{2k+1}$ возрастает в промежутке $(0 \dots +\infty)$, значит $y = \frac{1}{x^{2k+1}}$ будет в этом промежутке убывать. В промежутке $(-\infty \dots 0)$ функция $y' = x^{2k+1}$ возрастает, следовательно $y = \frac{1}{x^{2k+1}}$ будет убывать.

505. Рассмотреть вопрос о возрастании и убывании функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где m и n — натуральные числа.

Доказательство. Возьмем два значения аргумента x_1 и x_2 , причем $x_2 > x_1$. Рассмотрим промежуток изменения функции от 0 до $+\infty$:

$$x_2^{\frac{m}{n}} - x_1^{\frac{m}{n}} = \left(x_2^{\frac{1}{n}} - x_1^{\frac{1}{n}}\right) \left(x_2^{\frac{m-1}{n}} + x_2^{\frac{m-2}{n}} x_1^{\frac{1}{n}} + \dots + x_1^{\frac{m-1}{n}}\right),$$

$$x_2 - x_1 = \left(x_2^{\frac{1}{n}} - x_1^{\frac{1}{n}}\right) \left(x_2^{\frac{n-1}{n}} + x_2^{\frac{n-2}{n}} \cdot x_1^{\frac{1}{n}} + \dots + x_1^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Все члены во вторых скобках в правых частях равенств положительны, следовательно, $x_2^{\frac{m}{n}} - x_1^{\frac{m}{n}}$, $x_2^{\frac{1}{n}} - x_1^{\frac{1}{n}}$, $x_2 - x_1$ одного знака, но $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $x_2^{\frac{m}{n}} - x_1^{\frac{m}{n}} > 0$, т. е. функ-

ция $y = x^{\frac{m}{n}}$ в промежутке $(0 \dots +\infty)$ есть функция возрастающая.

Рассмотрим область изменения функции от $-\infty$ до 0. Если $n = 2k + 1$ число нечетное, $m = 2l$ — число четное, то функция

$$y = \sqrt[2k+1]{x^{2l}}$$

задана и для промежутка $(-\infty \dots 0)$. Эта функция четная, следовательно, в промежутке $(-\infty \dots 0)$ она будет убывать.

Тогда функция $y = \sqrt[2k+1]{x^{2l}}$ в промежутке $(-\infty \dots 0)$ убывает, в промежутке $(0 \dots +\infty)$ возрастает.

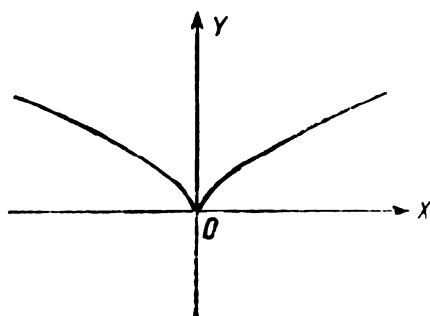


Рис. 2

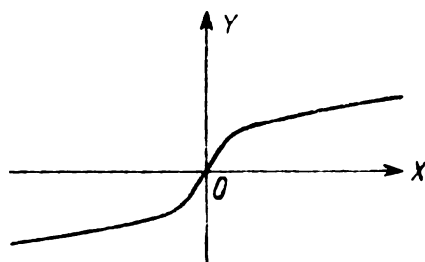


Рис. 3

Пример. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 2).

Если n — четное число, m — нечетное число, то функция $y = \sqrt[2k]{x^{2l+1}}$ для промежутка $(-\infty \dots 0)$ в области действительных чисел не задана. Если m и n — нечетные числа, т. е. $m = 2l + 1$, $n = 2k + 1$, то функция задана и для промежутка $(-\infty \dots 0)$. Эта функция нечетная, следовательно график ее есть кривая, симметричная относительно начала координат. Легко показать, что эта функция возрастает в промежутке $(-\infty \dots 0)$.

Пример. $y = \sqrt[3]{x}$ (см. рис. 3).

506. Показать, что функция $y = x^2$ возрастает неограниченно, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty.$$

Указание. Если x неограниченно возрастает, то x может сделаться больше любого наперед заданного положительного числа, следовательно, $x > M$, но тогда $x^2 > M^2$, откуда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty.$$

507. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = +\infty$.

508. Доказать, что если $a > 1$, то $a^n > 1$ и если $a < 1$, то $a^n < 1$, где n — натуральное число.

Доказательство. Так как $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. Тогда $a^n = (1 + \alpha)^n$ или $a^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots + \alpha^n$, но все члены в правой части данного равенства положительны, следовательно, $a^n > 1$. Если $a < 1$, то можно положить $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$, тогда $a^n = \frac{1}{b^n}$, но $b^n > 1$ по доказанному, следовательно $a^n < 1$.

509. Доказать, что если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и если $a < 1$, то $\sqrt[n]{a} < 1$ (n — натуральное число).

Доказательство. Пусть $a > 1$. Положим $\sqrt[n]{a} = x$, тогда $a = x^n$. Вычтем из обеих частей равенства по 1; $a - 1 = x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$, но все члены второй скобки положительны, следовательно, $(a - 1)$ и $(x - 1)$ одного знака, но $a - 1 > 0$, следовательно, $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$ или $\sqrt[n]{a} > 1$. Полагая $a = \frac{1}{b}$, если $a < 1$, получим $b > 1$. Следовательно, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$, но $\sqrt[n]{b} > 1$, значит $\sqrt[n]{a} < 1$.

510. Доказать, что $\sqrt[m]{a^m}$ больше 1, если $a > 1$ и меньше 1, если $a < 1$.

Доказательство. Положим $\sqrt[m]{a} = b$. По доказанному $b > 1$. Имеем

$$a^{\frac{m}{n}} - 1 = b^m - 1$$

или

$$a^{\frac{m}{n}} - 1 = (b - 1)(b^{m-1} + b^{m-2} + \dots + b + 1).$$

Но каждый член во второй скобке правой части положителен, следовательно, $a^{\frac{m}{n}} - 1$ и $b - 1$ одного знака. Так как $b - 1 > 0$, то $a^{\frac{m}{n}} - 1 > 0$. Если $a < 1$, то положим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда $\sqrt[n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{b^m}}$, но $\sqrt[n]{b^m} > 1$ по доказанному, следовательно, $\sqrt[n]{a^m} < 1$.

511. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

где n — натуральное число.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Возьмем

$$a - 1 = a^{\frac{n}{n}} - 1 = (a^{\frac{1}{n}} - 1)(a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + 1).$$

Любой член во второй скобке больше 1, за исключением последнего члена, который равен 1. Следовательно, $(a - 1) > (a^{\frac{1}{n}} - 1)n$, откуда $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}$. Но при неограниченном возрастании n , $\frac{a-1}{n}$ может быть сделано и останется меньше наперед заданного положительного числа ε . Следовательно, $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ при $n > N$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. Пусть теперь $a < 1$. Положим

$$a = \frac{1}{b}; \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

512. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1, \quad a > 0,$$

где x рациональное число.

Доказательство. Если x принимает значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, то предел равен 1 (см. предыдущую задачу). Пусть x принимает рациональное значение $\frac{p}{q}$. Согласно условию, $\frac{p}{q}$ стремится к 0, следовательно, можно найти такое число n , что

$$0 < \frac{p}{q} < \frac{1}{n},$$

но тогда

$$1 < a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{1}{n}}.$$

По доказанному

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} a^{\frac{p}{q}} = 1.$$

Если $a < 1$, то положим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} b^x} = 1.$$

Примечание. Полезно рассмотреть случай, когда x приближается к 0, принимая иррациональные значения.

513. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Указание. Применить метод доказательства от противного.

514. Доказать, что функция $y = a^x$ при $a > 1$ есть функция возрастающая, при $a < 1$ — функция убывающая.

Указание. Рассмотреть случаи $a > 1$, $a < 1$ и x — принимает рациональные значения.

515. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty,$$

если $a > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0,$$

если $a < 1$.

Доказательство. Пусть $a > 1$; x принимает целые положительные значения. Имеем $a^n - 1 > n(a - 1)$, или $a^n > 1 + n(a - 1)$, но $1 + n(a - 1)$ неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n . Следовательно, a^n может быть сделано больше любого наперед заданного положительного числа M , т. е. $a^n > M$, если $n > \frac{M-1}{a-1}$. Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

Легко доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0,$$

если $a < 1$. В этом случае следует положить $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$.

Пусть x принимает рациональные значения $\frac{p}{q}$. Возьмем два целых положительных числа таких, что

$$P < \frac{p}{q} < P + 1.$$

Тогда

$$a^P < a^{\frac{p}{q}} < a^{P+1}.$$

Но

$$\lim_{P \rightarrow \infty} a^P = +\infty, \quad \lim_{P \rightarrow \infty} a^{P+1} = +\infty.$$

Следовательно

$$\lim_{\frac{p}{q} \rightarrow \infty} a^{\frac{p}{q}} = +\infty.$$

Случай $a < 1$ следует предложить рассмотреть самим учащимся.

516. Показать, что логарифмическая функция есть функция возрастающая при основании, большем 1, и убывающая при основании, меньшем 1, но большем нуля.

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$. Тогда

$$x_2 - x_1 = a^{\log_a x_2} - a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_1} (a^{\log_a x_2 - \log_a x_1} - 1),$$

но $x_2 - x_1 > 0$ и $a^{\log_a x_1} > 0$, следовательно,

$$a^{\log_a x_2 - \log_a x_1} - 1 > 0,$$

или

$$a^{\log_a x_2 - \log_a x_1} > 1,$$

откуда: $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Пусть $a < 1$. Известно, что $\log_a N = -\log_{\frac{1}{a}} N$, следовательно,

$$\log_a x_2 - \log_a x_1 = -\log_{\frac{1}{a}} x_2 + \log_{\frac{1}{a}} x_1 = -(\log_{\frac{1}{a}} x_2 - \log_{\frac{1}{a}} x_1),$$

$\frac{1}{a} > 1$, следовательно,

$$\log_{\frac{1}{a}} x_2 - \log_{\frac{1}{a}} x_1 > 0,$$

но тогда

$$\log_a x_2 - \log_a x_1 < 0, \text{ т. е. } \log_a x_2 < \log_a x_1.$$

517. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \text{ при } a > 1$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = \infty \text{ при } a < 1.$$

Указание. Если $x \rightarrow \infty$, то можно найти такое значение x , которое может быть сделано и остается больше любого наперед заданного положительного числа $M = a^A$, т. е. $x > a^A$. Тогда

$$a^{\log_a x} > a^A.$$

Отсюда следует, что

$$\log_a x > A$$

или

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty.$$

Далее,

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x},$$

следовательно, если $x \rightarrow 0$, тогда $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$, значит

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\lim_{\frac{1}{x} \rightarrow \infty} \log_a \frac{1}{x} = -\infty.$$

Доказательство для случая $a < 1$ предоставляется провести читателю.

§ 36. Непрерывные функции

Задачи 518—523 посвящены вопросу о непрерывности элементарных функций. Учащиеся должны понимать и твердо знать условие непрерывности функций, т. е. функция называется непрерывной в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

или

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

когда

$$|x - a| < \delta.$$

Особое внимание следует обратить на область определения функции. Если функция непрерывна для каждой точки данной области, то она непрерывна для всей области.

518. Показать, что функции

$$y = kx + b, y = ax^2,$$

заданные для промежутка $(-\infty \dots +\infty)$, являются непрерывными для каждой точки данного промежутка.

519.* Показать, что функция $y = x^n$, где n — натуральное число, есть функция непрерывная для каждой точки области.

Доказательство. Пусть $a > 0$ любое значение x из области допустимых значений. Рассмотрим

$$\begin{aligned} |x^n - a^n| &= |x - a| |x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}| \leq \\ &\leq |x - a| \{ |x^{n-1}| + |x^{n-2}a| + \dots + |xa^{n-2}| + |a^{n-1}| \}. \end{aligned}$$

Выберем какое-нибудь положительное число A , которое по модулю больше модуля x и a , т. е.

$$|x| < A, |a| < A.$$

Тогда

$$|x^n - a^n| < |x - a| \{ A^{n-1} + A^{n-1} + \dots + A^{n-1} \}$$

или

$$|x^n - a^n| < |x - a| n A^{n-1}.$$

Так как x неограниченно приближается к a , то $x - a$ может быть сделано, начиная с некоторого значения x , меньше любого наперед заданного положительного числа, в частности меньше $\frac{\varepsilon}{n A^{n-1}}$. Тогда

$$|x^n - a^n| < \frac{\varepsilon n A^{n-1}}{n A^{n-1}}$$

или

$$|x^n - a^n| < \varepsilon.$$

520*. Показать, что функция $y = \sqrt[n]{x^k}$ есть функция непрерывная для каждой точки области допустимых значений.

Доказательство. Пусть $a > 0$ — любое значение аргумента из области допустимых значений. Пусть $x > 0$. Выберем два таких положительных числа B и A , что

$$B < x < A, \quad B < a < A.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| x^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right| &= \left| x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} \right| \cdot \left| x^{\frac{k-1}{n}} + x^{\frac{k-2}{n}} a^{\frac{1}{n}} + \dots + a^{\frac{k-1}{n}} \right|, \\ |x - a| &= \left| x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} \right| \cdot \left| x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} a^{\frac{1}{n}} + \dots + a^{\frac{n-1}{n}} \right|. \end{aligned}$$

Подставляя во второй множитель в правой части равенства вместо x и a в первом равенстве A , во втором равенстве B , получим:

$$\begin{aligned} \left| x^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right| &< \left| x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} \right| k \cdot A^{\frac{k-1}{n}}, \\ |x - a| &> \left| x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} \right| \cdot n B^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Разделим первое равенство на второе:

$$\frac{\left| x^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right|}{|x - a|} < \frac{k A^{\frac{k-1}{n}}}{n B^{\frac{n-1}{n}}}$$

или

$$\left| x^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right| < \frac{k A^{\frac{k-1}{n}}}{n B^{\frac{n-1}{n}}} \cdot |x - a|,$$

но $|x - a|$ может быть сделана меньше $\frac{n \cdot B^{\frac{n-1}{k-1}}}{kA^{\frac{n}{k-1}}} \varepsilon$, следовательно

но, $\left| x^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right| < \varepsilon$, коль скоро

$$|x - a| < \frac{nB^{\frac{n-1}{k-1}}}{kA^{\frac{n}{k-1}}} \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{k}{n}}.$$

Рассмотреть непрерывность функции $y = \sqrt[n]{x^k}$ в промежутке $(-\infty \dots 0)$. Рассмотреть все случаи, когда функция будет задана для этого промежутка.

521*. Показать, что показательная функция есть функция непрерывная, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} a^x = a^a (a > 0)$$

для каждой точки области допустимых значений.

Указание. Предположим, что x приближается к a , оставаясь больше a , причем $a > 1$. Тогда

$$|x - a| < \frac{1}{2 \cdot 10^k}$$

или

$$a - \frac{1}{2 \cdot 10^k} < x < a + \frac{1}{2 \cdot 10^k},$$

откуда

$$a^{a - \frac{1}{2 \cdot 10^k}} < a^a < a^x < a^{a + \frac{1}{2 \cdot 10^k}}.$$

Возьмем

$$a^x - a^a < a^{a + \frac{1}{2 \cdot 10^k}} - a^{a - \frac{1}{2 \cdot 10^k}},$$

или

$$a^x - a^a < a^{a - \frac{1}{2 \cdot 10^k}} \left(a^{\frac{1}{10^k}} - 1 \right),$$

или

$$a^x - a^a < a^a \left(a^{\frac{1}{10^k}} - 1 \right),$$

но $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{10^k}} = 1$, следовательно

$$a^{\frac{1}{10^k}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^a}.$$

Отсюда

$$a^x - a^a < \varepsilon$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} a^x = a^a.$$

Доказать для случая, когда x приближается к a , оставаясь меньше a . Обобщить оба случая, воспользовавшись абсолютной величиной. Рассмотреть случай, когда $a < 1$.

522*. Показать, что логарифмическая функция есть функция непрерывная для каждой точки промежутка $(0 \dots \infty)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_b x = \log_b a.$$

Указание. Пусть

$$\lim_{x_n \rightarrow a} x_n = a,$$

тогда

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \frac{x_n}{a} = 1.$$

Следовательно,

$$b^{\log_b \frac{x_n}{a}} = \frac{x_n}{a}, \quad \lim_{x_n \rightarrow a} b^{\log_b \frac{x_n}{a}} = \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{x_n}{a} = 1,$$

но тогда

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \log_b \frac{x_n}{a} = 0.$$

Возьмем:

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow a} \log_b x_n &= \lim_{x_n \rightarrow a} \log_b \frac{x_n}{a} + \log_b a = \lim_{x_n \rightarrow a} \left[\log_b \frac{x_n}{a} + \log_b a \right] = \\ &= \lim_{x_n \rightarrow a} \left[\log_b \frac{x_n}{a} + \log_b a \right] = 0 + \log_b a, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \log_b x_n = \log_b a$$

или

$$\lim_{x_n \rightarrow a} \log_b x_n = \log_b \lim_{x_n \rightarrow a} x_n.$$

523*. Доказать теоремы:

1) Сумма или разность конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

2) Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

3) Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, за исключением тех значений аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	Стр. 3
Г л а в а I	
Тождественные преобразования рациональных алгебраических выражений	
§ 1. Сложение, вычитание, умножение и деление целых одночленов и многочленов	5
§ 2. Формулы сокращенного умножения и деления	11
§ 3. Разложение многочленов на множители	18
§ 4. Теорема Безу	22
§ 5. Алгебраические дроби	26
Г л а в а II	
Иррациональные числа. Область действительных чисел	
§ 6. Понятие иррационального числа. Действия над иррациональными числами	33
§ 7. Формула сложного радикала	34
§ 8. Доказательство тождеств, содержащих радикалы	37
Г л а в а III	
Мнимые числа. Область комплексных чисел	
§ 9. Комплексные числа и правила действий с ними	41
§ 10. Тождественные преобразования выражений, содержащих комплексные числа, заданные в алгебраической или тригонометрической форме	44
Г л а в а IV	
Уравнения	
§ 11. Уравнения первой степени, их системы. Исследование уравнений первой степени и их систем	52
§ 12. Квадратные уравнения. Зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения	54
§ 13. Исследование квадратного уравнения	65
§ 14. Уравнения выше второй степени (третьей и четвертой). Уравнения n-ой степени	68
Г л а в а V	
Неравенства	
§ 15. Свойства неравенств	73
§ 16. Доказательство неравенств при использовании определения понятия неравенства	74
§ 17. Доказательство неравенств путем преобразования очевидного неравенства к виду доказываемого неравенства	77
	159

§ 18. Доказательство неравенств при помощи зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим n неотрицательных чисел	81
§ 19. Разные задачи на доказательство неравенств	90

Глава VI

Арифметическая и геометрическая прогрессии

§ 20. Арифметическая прогрессия. Формула любого члена арифметической прогрессии	96
§ 21. Сумма n членов арифметической прогрессии	100
§ 22. Разные задачи на арифметическую прогрессию	105
§ 23. Геометрическая прогрессия. Формула любого члена геометрической прогрессии	108
§ 24. Сумма n членов геометрической прогрессии	113
§ 25. Арифметическая и геометрическая прогрессии	116
§ 26. Гармоническая пропорция и гармоническая прогрессия	119

Глава VII

Логарифмы

§ 27. Тождество $a^{\log_a N} = N$	122
§ 28. Различные системы логарифмов	124
§ 29. Разные задачи	127

Глава VIII

Метод математической индукции

§ 30. Применение метода математической индукции к доказательству свойств чисел натурального ряда	131
§ 31. Использование метода математической индукции для доказательства неравенств	138

Глава IX

Элементарные функции

§ 32. Область определения функций	144
§ 33. Четные и нечетные функции	145
§ 34. Периодические функции	—
§ 35. Возрастание и убывание функций	—
§ 36. Непрерывные функции	155

И. В. Баранова и С. Е. Ляпин. Задачи на доказательство по алгебре
 Редактор *И. В. Барковский*. Техн. редактор *А. А. Кирнарская*. Корректоры: *А. А. Морозова*
 и *М. Г. Дешалыт*

Сдано в набор 7/V 1954 г. Подписано в печать 7/IX 1954 г. Формат бумаги 60×92¹/₁₆.

Печ. л. 10. Уч.-изд. л. 7,61. Тираж 75 000. М 45110.

Ленинградское отделение Учпедгиза. Ленинград, Невский пр., 28. Зак. № 5/1215

Типография № 3 Углетехиздата. Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54

Цена 2 р. 55 к.

З а м е ч е н н ы е о п е ч а т к и :

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
7	10-я снизу	умножить и разделить	умножить или разделить	автора
32	4-я, 5-я, 6-я и 7-я сверху	Знак сложения +	знак умножения ×	изд-ва
91	4-я сверху	$\sqrt{(b+c-a)^2(b+a-c)^2(c+a-b)^2}$	$\sqrt[6]{(b+c-a)^2(b+a-c)^2(c+a-b)^2}$	типогра- фии
142	8-я сверху	$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$	то же

Зак. 5/1215. И. В. Баранова, С. Е. Ляпин. Задачи на доказательство по алгебре.