МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УПРАВЛЕНИЯ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Одобрено
Президиумом НМС ГУУ

В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьёв,
В. И. Малыхин, А. П. Курочкин

Теория вероятностей в примерах и задачах

Учебное пособие
для студентов всех специальностей

МОСКВА – 2001

ББК 22.17я7
УДК 519.21 (075.8)
6Н1

Т 34 **Теория вероятностей в примерах и задачах**: Учебное пособие / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьёв и др.; ГУУ. – М., 2001. – 87 с.
ISBN 5-215-01281-4

Содержит задачи по теории вероятностей. По каждому разделу учебной программы приводятся необходимые теоретические сведения, типовые примеры с решениями и задачи для самостоятельного решения, сопровождающиеся ответами.

От других пособий отличается ориентацией на экономические приложения: большинство задач по каждой теме составлены специально для настоящего издания и иллюстрируют применение математических методов при исследовании экономических и социальных процессов, принятии управленческих решений, управлении рисками и т. д. Приводятся как элементарные задачи, доступные студентам всех специальностей, так и задачи повышенной сложности, рассчитанные на студентов, изучающих расширенный курс теории вероятностей и математической статистики.

Для студентов всех специальностей, аспирантов и преподавателей.

ББК 22.17я7
УДК 519.21 (075.8)

Ответственный редактор

заведующий кафедрой прикладной математики ГУУ,
доктор экономических наук, профессор
В. А. КОЛЕМАЕВ

Рецензенты

директор института статистики и эконометрики МЭСИ,
доктор экономических наук, профессор В. С. Мхитарян

заведующий кафедрой высшей математики ГУЗ,
доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Кислов

ISBN 5-215-01281-4

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей высших учебных заведений, изучающих курс теории вероятностей и математической статистики. В пособии представлены задачи, которые служат для усвоения материала всех разделов теории вероятностей на конкретных примерах, возникающих в практике управления экономическими, социальными и финансовыми системами. В процессе решения таких задач студент не только закрепляет и углубляет теоретические знания, полученные на лекциях, но и учится применять эти знания при постановке и решении реальных экономических задач. В предлагаемом пособии экономические, финансовые и социологические приложения методов теории вероятностей и математической статистики выходят на первый план, серьёзный акцент делается не только на методы решения задач, но и на построение математических моделей, анализ и экономическую интерпретацию полученных результатов. В результате использования учебного пособия студент знакомится с основными проблемами управления, экономики, финансов, социологии и других смежных областей, при решении которых полезно применение вероятностно-статистических методов, учится ориентироваться в математических методах и по экономической постановке задачи определять, в каком разделе математики искать средства для её решения, переходить от экономической постановки задачи к её математической модели, проводить по этой модели расчёты и получать числовые результаты, анализировать эти результаты и делать количественные и качественные выводы, необходимые для принятия решений в своей предметной области.

Учебное пособие отражает опыт преподавания теории вероятностей и математической статистики в Государственном университете управления (см. [1], [8], [9], [10], [11], [14], [20], [21], [23]) и полностью соответствует учебнику [1].

Задачи разбиты по главам и параграфам в соответствии со структурой действующих учебных программ и учебника [1]. В каждом параграфе предлагаются необходимые теоретические сведения, задачи с решениями, а также большое число задач для самостоятельной работы, сопровождающихся ответами. В решениях задач большое внимание уделяется не только методам и алгоритмам, но и переходу от экономической постановки проблемы к математической модели, экономическому анализу полученных результатов. Внутри параграфов сложность возрастает от простых задач, для решения которых необходимо использовать стандартные формулы и приёмы, до довольно сложных, рассчитанных на студентов, изучающих расширенный курс теории вероятностей и математической статистики, — решения этих задач содержат принципиально важные идеи либо требуют аккуратного проведения достаточно больших математических выкладок.

Чтобы облегчить студентам освоение сложной дисциплины, авторы стремились сделать задачи интересными и по форме, и по содержанию.

При подготовке пособия авторами был учтён опыт всех известных им задачников по теории вероятностей и математической статистике. Ряд задач заимствован из работ [1]-[25]. Большинство задач являются оригинальными и подготовлены авторами специально для данного издания.

Работа авторов над пособием распределилась следующим образом: предисловие и теоретические введения к параграфам написаны совместно д-ром экон. наук, проф. В. А. Колемаевым, канд. техн. наук, проф. В. Н. Калининой и канд. экон. наук В. И. Соловьёвым; задачи 13-18, 25-27, 39, 40, 51, 53, 72-75, 77, 90, 101, 103, 104, 106, 110-112, 139-143, 147, 148, 154-157, 170, 175, 176, 193, 198, 200, 201, 213, 224, 231, 232, 234, 247-249, 252, 253, 256, 260, 261, 264-267, 271, 272, 275, 283, 284, 301, 304, 309, 310, 314, 315, 317, 319, 321-323, 330, 343, 348, 358-360 (всего 83 задачи) предложены д-ром экон. наук, проф. В. А. Колемаевым, задачи 64-66, 70, 82, 83, 121, 122, 130, 158, 167, 168, 172, 179, 182-184, 189, 191, 199, 207, 225-229, 244-246, 255, 262-263, 268-270, 294, 296-299, 311, 316, 324, 351 (всего 44 задачи) предложены канд. техн. наук, проф. В. Н. Калининой, задачи 1-12, 19-24, 28-37, 41-46, 48, 52, 55, 57-63, 69, 71, 78-80, 84-88, 91-100, 102, 108, 109, 114-120, 123, 127-129, 131, 135-138, 146, 149-153, 159-160, 162, 165, 166, 169, 171, 174, 177, 178, 180, 185-188, 190, 192, 196, 197, 202, 204-206, 212, 214-216, 222, 223, 230, 235, 236, 239-243, 251, 254, 257-259, 273, 274, 276-282, 285-293, 295, 300, 302, 303, 305-308, 312, 313, 318, 320, 325-329, 331-342, 344-347, 352-357, 361-369 (всего 200 задач) предложены канд. экон. наук В. И. Соловьёвым, задачи 38, 47, 54, 56, 67, 68, 81, 89, 105, 107, 132-134, 144, 145, 161, 163, 164, 173, 181, 194, 203, 208-210, 217-220, 233, 250, 349, 350 (всего 33 задачи) предложены д-ром физ.-мат. наук, проф. В. И. Малыхиным, задачи 49, 50, 113, 126, 195, 211, 221, 237, 238 (всего 9 задач) предложены канд. техн. наук, доц. А. П. Курочкиным; решения всех задач, ответы и приложения подготовлены канд. экон. наук В. И. Соловьёвым.

Глава 1. Вероятностные пространства

§1.1. Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинато́рными, а раздел математики, занимающийся решением таких задач, — комбинато́рикой. Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. *Пусть требуется выполнить одно за другим какие-либо m действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то все m действий могут быть выполнены $n_1 n_2 \cdots n_m$ способами.*

Правило суммы. *Пусть требуется выполнить одно из каких-либо m действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами и так до m-го действия, которое можно выполнить n_m способами, то выполнить одно из этих m действий можно $(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ способами.*

Напомним понятие факториала, активно используемое в комбинаторике. *Факториалом натурального числа n* называется число

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{1.1}$$

По определению, *факториалом нуля* является единица:

$$0! = 1. \tag{1.2}$$

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из n *различных* элементов. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Назовём *множество*, состоящее из k элементов, *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причём различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k равно

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{1.3}$$

Перестановками из n элементов называются размещения из *n элементов по n*, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов равно

$$\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{1.4}$$

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{P}_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \tag{1.5}$$

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{\mathrm{A}}_n^k = n^k. \tag{1.6}$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{\mathrm{C}}_n^k = \mathrm{C}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}. \qquad (1.7)$$

Отметим, что формулы (1.4) – (1.7) сохраняют смысл и остаются справедливыми и при $k=0$.

Если во множестве S, состоящем из n элементов, есть только m *различных* элементов, то *перестановками с повторениями из n элементов* называются упорядоченные подмножества множества S, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m-го элемента, который входит n_m раз ($n_1+n_2+\cdots+n_m=n$).

Число перестановок с повторениями из n элементов, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m-го элемента, который входит n_m раз ($n_1+n_2+\cdots+n_m=n$), равно

$$\tilde{\mathrm{P}}_n(n_1,n_2,\ldots,n_m) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}. \qquad (1.8)$$

1. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию?

Решение. Петя может доехать до института $n_1=5$ различными способами (на одном из пяти автобусов), при этом Маше остаётся только $n_2=4$ способа (так как один из автобусов занят Петей). Таким образом, по правилу произведения у Пети и Маши есть $n_1 n_2 = 5\cdot 4 = 20$ различных способов добраться до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию. ❑

2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение. Начальник управления может отобрать одного аналитика $n_1=3$ способами, одного программиста — $n_2=10$ способами, а одного инженера — $n_3=20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить любого из своих сотрудников, согласно правилу суммы у него существует $n_1+n_2+n_3=3+10+20=33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы. ❑

3. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять десять охранников по десяти постам. В целях усиления безопасности одна и та же комбинация расстановки охранников по постам не может повторяться чаще одного раза в месяц. Чтобы оценить, возможно ли это, найти число различных комбинаций расстановки охранников.

Решение. Первый способ. На первый пост начальник службы безопасности может назначить любого из $n_1=10$ охранников, на второй пост — любого из оставшихся $n_2=9$ охранников и так до девятого поста, на который можно назначить любого из оставшихся $n_9=2$ охранников, при этом оставшийся $n_{10}=1$ охранник будет назначен на десятый пост. Поэтому, согласно правилу произведения, у начальника службы безопасности есть $n_1 n_2\cdots n_{10} = 10\cdot 9\cdots 2\cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$ способов расстановки охранников по постам. Поскольку количество дней в месяце не превышает 31, у начальника службы безопасности заведомо существует достаточное число способов расстановки своих подчинённых по постам.

Второй способ. Число способов расстановки десяти охранников по десяти постам, существующих у начальника службы безопасности, описывается числом перестановок из 10 элементов, т. е. $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$. ❑

4. Определить, сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга.

5. Новый президент банка должен назначить двух новых вице-президентов из числа десяти директоров. Сколько способов существует у президента, если: а) один из вице-президентов (первый) выше другого по должности; б) вице-президенты по должности равны между собой.

Решение. Первый способ. а) Первого вице-президента можно выбрать из $n_1 = 10$ претендентов, при этом на пост второго вице-президента будут претендовать $n_2 = 9$ оставшихся директоров. Поэтому, согласно правилу произведения, у нового президента банка есть $n_1 n_2 = 10 \cdot 9 = 90$ способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров. **б)** Пусть первое действие заключается в том, что президент отбирает двух человек на должности вице-президентов, а второе действие — в том, что президент говорит отобранным людям, кто из них является первым вице-президентом, а кто — вторым. Пусть первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие, очевидно, можно выполнить $n_2 = 2$ способами, и по правилу произведения число способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров составляет $n_1 n_2 = 2n_1$. С другой стороны, в пункте а) мы нашли это число, и оно оказалось равным 90, поэтому $n_1 = \frac{90}{2} = 45$.

Второй способ. а) Число способов выбора двух кандидатов на две различные должности из десяти претендентов описывается числом размещений из 10 элементов по 2, т. е. $A_{10}^2 = 90$. **б)** Число способов выбора двух кандидатов на две одинаковые должности из десяти претендентов описывается числом сочетаний из 10 элементов по 2, т. е. $C_{10}^2 = 45$. ❑

6. В кредитном отделе банка работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

7. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а другая 15. Определить, сколькими способами стороны могут обменять семерых военнопленных.

8. Петя и Маша коллекционируют видеокассеты. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши — 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя комедиями, двумя боевиками и одной мелодрамой?

9. В сессию в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать пять экзаменов. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если: а) запрещается сдавать два экзамена в один день; б) между двумя экзаменами должен пройти хотя бы один день для подготовки?

10. В банке девять учредителей. Регистрационные документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, и сколько ключей к ним нужно изготовить, чтобы доступ к содержимому сейфа был возможен только тогда, когда соберётся не менее шести учредителей?

11. Маша решила помириться с Петей и позвонить ему, но забыла две последних цифры его телефона и набирает их наудачу. Найти наибольшее возможное число неудачных попыток, которые сделает Маша, прежде чем дозвонится до Пети.

12. Сколько автомобилей в одном городе можно обеспечить государственными регистрационными знаками, если каждый регистрационный знак состоит из кода города, трёх букв, имеющих одинаковое начертание как в русском, так и в латинском алфавите («*А*», «*В*», «*Е*», «*К*», «*М*», «*Н*», «*О*», «*Р*», «*С*», «*Т*», «*У*», «*Х*»), и трёх цифр?

13. Доказать правило произведения.

14. Доказать правило суммы.

15. Доказать справедливость формул (1.3) – (1.5).

16. Доказать равенство: $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Решение. $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \mathrm{C}_n^{n-k}$. ❑

17. Равенство Паскаля. Доказать равенство: $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ $(0 \leqslant k < n)$.

18. Доказать равенство: $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.

19. Определить, сколько существует вариантов опроса группы из десяти студентов на одном занятии по теории вероятностей, если ни один из студентов не будет подвергнут опросу дважды, и на занятии может быть опрошено любое число студентов (в том числе, ни один)?

20. Доказать равенство: $(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + (\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n$.

21. Маша очень любит пирожные и ежедневно в булочной рядом с институтом покупает шесть пирожных (одинаковых или разных). Всего в булочной продаётся 11 сортов пирожных. Сколькими способами Маша может выбрать из них шесть штук?

Решение. Каждому набору пирожных, которые выберет Маша, будем ставить в соответствие последовательность нулей и единиц, определяемую по следующему правилу. Напишем подряд столько единиц, сколько пирожных первого вида выбрала Маша, далее поставим нуль и после него запишем количество отобранных пирожных второго вида и т. д. Например, комбинации «*одно пирожное второго вида, три пирожных пятого вида и одно пирожное восьмого вида*» соответствует такая последовательность: «010001110001000» (нули отделяют виды пирожных друг от друга, поэтому нуль после одиннадцатого вида не нужен). При этом каждому набору пирожных взаимно однозначным образом соответствует последовательность, построенная по описанному правилу. Все такие последовательности состоят, очевидно, из 16 знаков, причём 10 из них нули, которые могут занимать любое место. Поэтому количество способов выбора пирожных равно количеству всех таких последовательностей, т. е. числу размещений десяти нулей по 16 местам: $\mathrm{C}_{16}^{10} = 8\,008$. ❑

22. В конкурсе по трём номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

23. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*мама*»? Выписать все эти слова.

Решение. Число различных слов, которые можно составить, переставляя буквы в слове «*мама*», описывается числом перестановок с повторениями из $n = 4$ элементов (букв в слове «*мама*»), в которые первый элемент (буква «*м*») входит $n_1 = 2$ раза, а второй элемент (буква «*а*») — $n_2 = 2$ раза ($n_1 + n_2 = 4 = n$). Это число равно $\tilde{\mathrm{P}}_4(2,2) = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$. Шесть различных слов, получающиеся перестановками букв в слове «*мама*», таковы: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*». ❑

24. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*математика*»?

25. Доказать справедливость формул (1.6) – (1.8).

§1.2. Исчисление событий

Случайное событие A, *связанное с опытом* S, — это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта S, причём заранее, до проведения опыта, неизвестно, произойдёт оно или нет. Всюду в дальнейшем при рассмотрении случайных событий мы будем опускать слово «*случайное*». *Достоверным событием, связанным с опытом* S, называется такое событие Ω, которое обязательно произойдёт в результате опыта S. *Невозможным событием, связанным с опытом* S, называется такое событие $\varnothing$, которое обязательно не произойдёт в результате опыта S.

Над событиями A и B, связанными с одним и тем же опытом S, определены следующие операции.

С*обытие* A *влечёт за собой событие* B (или *событие* A *вложено в событие* B), если каждое появление события A сопровождается появлением события B. Это обозначается как $A \subseteq B$. *События* A и B называют *эквивалентными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эквивалентность обозначается как $A = B$.

Объединением (или *суммой*) *событий* A и B называется событие $A \cup B$ (или $A + B$), которое наступает всегда, когда наступает либо событие A, либо событие B.

Пересечением (или *произведением*) *событий* A и B называется событие $A \cap B$ (или AB), которое наступает всегда, когда события A и B наступают одновременно.

Дополнением события B *до события* A (или *разностью событий* A и B) называется событие $A \setminus B$, которое наступает всегда, когда наступает событие A, и при этом не наступает событие B.

Противоположным событию A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ (читается «*не* A»), которое наступает всегда, когда событие A не наступает.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$, т. е. если в результате опыта события A и B не могут наступить одновременно.

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing,\ \ i \neq j$) и их объединение эквивалентно достоверному событию ($H_1 \cup H_2 \cup \cup \cdots \cup H_n = \Omega$).

Случайное событие ω, связанное с опытом S, которое невозможно представить как объединение или пересечение более простых событий, связанных с тем же опытом, называется *элементарным событием.* Очевидно, достоверное событие $\Omega = \{\omega\}$ — это множество всех элементарных событий (поэтому Ω называют ещё *пространством элементарных событий*), а невозможное событие $\varnothing$ — это пустое множество. Любое событие, связанное с опытом S, можно представить как некоторое подмножество достоверного события Ω, т. е. как множество некоторых элементарных событий.

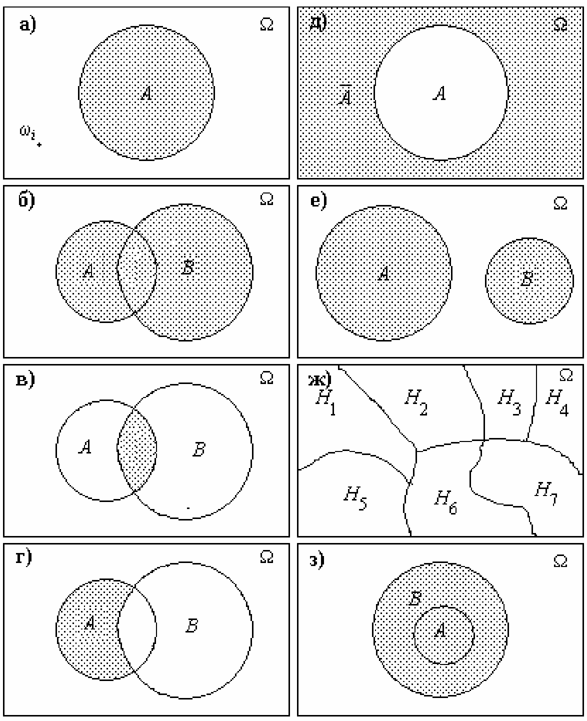


Рис. 1.1. *Диаграммы Вьенна – Эйлера*

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются *диаграммы Вьенна – Эйлера* (рис. 1.1). На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, элементарные события ω_i — точками внутри области, соответствующей Ω. При этом любому случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области, соответствующей Ω (рис. 1.1а). Объединение $A \cup B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий A и B (рис. 1.1б). Пересечение $A \cap B$ событий A и B состоит из всех элементарных событий, принадлежащих одновременно обоим событиям A и B (рис. 1.1в). Дополнение $A \setminus B$ события B до события A состоит из всех элементарных событий, принадлежащих событию A и при этом не принадлежащих событию B (рис. 1.1г). Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, состоит из всех элементарных событий, не принадлежащих событию A (рис. 1.1д). *Несовместные события* не имеют общих элементарных событий (рис. 1.1е). *Полная группа событий* представлена на рис. 1.1ж. *Событие A влечёт за собой событие B*, если все элементарные события, входящие в A, входят и в B (рис. 1.1з).

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

коммутативность объединения событий:

$$A \cup B = B \cup A\,, \tag{1.9}$$

ассоциативность объединения событий:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{1.10}$$

$$A \cup A = A, \tag{1.11}$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \tag{1.12}$$

$$A \cup \varnothing = A, \tag{1.13}$$

$$A \cup \Omega = \Omega, \tag{1.14}$$

коммутативность пересечения событий:

$$A \cap B = B \cap A, \tag{1.15}$$

ассоциативность пересечения событий:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{1.16}$$

дистрибутивность пересечения событий относительно объединения:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1.17}$$

$$A \cap A = A, \tag{1.18}$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \tag{1.19}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{1.20}$$

$$A \cap \Omega = A, \tag{1.21}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}, \tag{1.22}$$

$$\overline{\Omega} = \varnothing, \tag{1.23}$$

$$\overline{\varnothing} = \Omega, \tag{1.24}$$

правила де Морга́на:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.25}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.26}$$

26. Привести примеры противоположных случайных событий.

27. Привести примеры несовместных случайных событий.

28. Известно, что $A \subseteq B$. Найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

Решение. Событие $A \cup B$ заштриховано на рис. 1.2а, событие $A \cap B$ — на рис. 1.2б, откуда следует, очевидно, что $A \cup B = B$, $A \cap B = A$. ❑

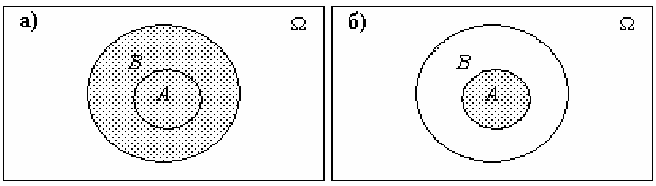


Рис. 1.2. *События* $A \cup B$ **(а)** *и* $A \cap B$ **(б)**, *когда* $A \subseteq B$

29. Установить, при каких условиях события A и $A \cap B$ являются эквивалентными.

30. Пусть A, B, C — произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) произошло только A; б) произошли A и B, но C не произошло; в) все три события произошли; г) произошло хотя бы одно из этих событий; д) произошло хотя бы два события; е) ни одно из событий A, B и C не произошло; ж) произошло не более двух из событий A, B и C; з) произошло ровно одно из этих событий; и) произошло ровно два из этих событий.

31. Пусть A, B, C — некоторые события, причём $A \subseteq B$. С помощью диаграмм Вьенна – Эйлера упростить выражения: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$.

32. Проверить справедливость следующих утверждений, сравнивая диаграммы Вьенна – Эйлера для событий, стоящих в левых и в правых частях: а) $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$; б) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$; в) $A \cup B \cup C = A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup \cup (C \backslash (A \cap C))$; г) $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup B$; д) $(A \cup B) \backslash A = B$; е) $\overline{(A \cup B \cup C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; ж) $\overline{(A \cup B)} \cap C = (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$; з) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$; и) $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \backslash (C \cap (A \cup B))$; к) $A \cap B \cap C \subseteq (B \cap C) \cup (C \cap A)$; л) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subseteq A \cup B \cup C$; м) $A \cap \overline{B} \cap C \subseteq A \cup B$.

33. С помощью диаграмм Вьенна – Эйлера убедиться в справедливости свойств (1.9) – (1.26) для произвольных событий A, B, C.

34. Проверить, являются ли события A и $\overline{A \cup B}$ (где A и B — произвольные события) несовместными.

Решение. $A \cap (\overline{A \cup B}) =$ {по правилу де Моргáна} $= A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) =$ {по свойству ассоциативности пересечения} $= (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \quad \cap \overline{B} = \quad$, значит, события A и $\overline{A \cup B}$ являются несовместными. ❑

35. Проверить, образуют ли события A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ полную группу (A и B — произвольные события).

§1.3. Классическое определение вероятности

Вероятность наступления события характеризует меру возможности наступления этого события при проведении опыта. Если множество элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ конечно, и все элементарные события одинаково возможны, то такая *вероятностная схема* носит название *классической*. В этом случае *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A, состоящего из M элементарных событий, входящих в Ω, определяется как отношение числа M элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу N элементарных событий. Эта формула носит название *классического определения вероятности*:

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{M}{N}. \tag{1.27}$$

В частности, согласно классическому определению вероятности,

$$\mathbf{P}\{\omega_i\} = \frac{1}{N}, \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.28}$$

$$\mathbf{P}\{\Omega\} = \frac{N}{N} = 1, \tag{1.29}$$

$$\mathbf{P}\{\varnothing\} = \frac{0}{N} = 0. \tag{1.30}$$

Частным случаем классической вероятностной схемы является *урновая схема*: в урне содержится $(K + L)$ шаров, среди которых K белых и L чёрных; из урны наугад без возвращения извлекаются $(k + l)$ шаров, тогда вероятность $\mathbf{P}_{K,L}(k,l)$ того, что в выборке содержится ровно k белых шаров и l чёрных, вычисляется по *формуле гипергеометрической вероятности*:

$$\mathbf{P}_{K,L}(k,l) = \frac{\mathrm{C}_K^k \mathrm{C}_L^l}{\mathrm{C}_{K+L}^{k+l}}. \tag{1.31}$$

В случае, когда множество элементарных событий бесконечно и даже несчётно (но эти события являются одинаково возможными), вероятность наступления события можно рассчитать, пользуясь *геометрическим определением вероятности*, которое состоит в следующем. Пусть множество элементарных событий Ω представляет собой некоторую область в d-мерном пространстве, имеющую ненулевой объём[1] $V(\Omega)$: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d,\ 0 < V(\Omega) < \infty$. При этом каждому элементарному событию соответствует точка $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, а каждое событие A представляет собой область, вложенную в Ω и имеющую объём $V(A)$: $A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d,\ 0 \leqslant V(A) < \infty$. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности, *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A можно рассчитать как отношение объёма $V(A)$ области A к объёму $V(\Omega)$ области Ω:

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \tag{1.32}$$

Если элементарные события не являются одинаково возможными, для приближённого вычисления вероятностей можно использовать относительные частоты. Пусть в результате n-кратного проведения опыта S событие A наступило m_n раз. Назовём *относительной частотой* $\hat{p}(A)$ *появления события* A *в серии из* n *опытов* S отношение числа m_n наступлений события A к общему числу n проведённых опытов:

$$\hat{p}(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.33}$$

При этом *вероятность* $\mathbf{P}\{A\}$ *наступления события* A будет равна пределу[2] относительной частоты наступления этого события в серии из n опытов при неограниченном увеличении числа опытов:

$$\frac{m_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \mathbf{P}\{A\} \tag{1.34}$$

(здесь «$\xrightarrow{\mathbf{P}}$» означает «*сходится по вероятности*», см. §4.2).

На практике в этом случае вероятность рассчитывают при помощи приближённого равенства

$$\mathbf{P}\{A\} \approx \hat{p}(A) = \frac{m_n}{n}. \tag{1.35}$$

Следует помнить, что данной формулой можно пользоваться лишь при выполнении трёх условий:

- *рассматриваемые события должны быть исходами только таких опытов, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий*;
- *события должны обладать устойчивостью относительных частот* (см. *теорему Бернулли* в §4.3);
- *число испытаний, по результатам которых вычисляется вероятность, должно быть достаточно велико*.

36. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынимают одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.

Решение. Пусть опытом будет извлечение яблока из корзины, а событие A состоит в том, что извлечённое из корзины яблоко окажется красным. Тогда общее число элементарных событий $n = 10$, из которых $m = 3$ элементарных события благоприятствуют наступлению события A. Согласно классическому определению вероятности $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. ❑

37. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынули одно яблоко и отложили в сторону. Это яблоко оказалось зелёным. После этого из корзины берут ещё одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.

38. Трое играют в карты. Каждому игроку сдано по десять карт и две оставлены в прикупе[3]. Один из игроков видит, что у него на руках шесть карт бубновой масти, а четыре — других мастей. Он сбрасывает две карты из этих четырёх и бе-

---

[1] Здесь под *объёмом* $V(A)$ *области* A понимается её длина в одномерном случае ($d = 1$), площадь в двумерном случае ($d = 2$), объём — в трёхмерном случае ($d = 3$) и т. д.

[2] В некотором смысле *сходимости по вероятности*, который будет пояснён ниже, §4.2-§4.3.

[3] Имеется в виду игра в *преферанс*, когда в колоде всего 32 карты, по 8 каждой масти.

рёт себе прикуп. Найти вероятность того, что в прикупе окажутся две бубновые карты.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в прикупе окажутся две бубновые карты. Из 32 карт игроку известны десять, а остальные 22 неизвестны. Взять две карты из прикупа — это то же самое, что взять их из 22 неизвестных карт, среди которых две бубновые. Поэтому общее число элементарных событий $n = \mathrm{C}_{22}^2$, из которых лишь $m = 1$ элементарное событие благоприятствует наступлению события A. Согласно классическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{1}{\mathrm{C}_{22}^2} = \frac{1}{231}$. ❑

39. В партии, состоящей из 1 000 изделий, четыре изделия имеют дефекты. Для контроля отбираются 100 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий не окажется бракованных.

Решение. По формуле гипергеометрической вероятности (1.31) $\mathbf{P}_{1000,4}(100,0) = \frac{\mathrm{C}_4^0\mathrm{C}_{996}^{100}}{\mathrm{C}_{1000}^{100}} =$

$$= \frac{\frac{4!}{0!4!}\cdot\frac{996!}{100!896!}}{\frac{1000!}{100!900!}} = \frac{\frac{4!}{1\cdot 4!}\cdot\frac{996!}{100!896!}}{\frac{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996!}{100!\cdot 900\cdot 899\cdot 898\cdot 897\cdot 896!}} = \frac{996!\cdot 100!\cdot 900\cdot 899\cdot 898\cdot 897\cdot 896!}{100!\cdot 896!\cdot 1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996!} = \frac{899\cdot 449\cdot 897}{10\cdot 111\cdot 499\cdot 997} \approx 0,656\ .$$ ❑

40. Доказать формулу гипергеометрической вероятности (1.31).

41. В 80-е гг. XX в. в СССР была популярна игра «*Спортлото*». Играющий отмечал на карточке пять чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства, если он угадал одно, два, три, четыре и пять чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятности следующих событий: не угадать ни одного числа из 36, угадать одно, два, три, четыре и пять чисел из 36.

42. На малом предприятии работают десять семейных пар. Чтобы никому не было обидно, на ежегодном собрании акционеров совет директоров, состоящий из восьми человек, выбирается случайным образом. Найти вероятности следующих событий: а) в совете директоров отсутствуют семейные пары; б) в совете директоров есть ровно одна семейная пара; в) в совете директоров есть ровно две семейных пары?

43. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырём игрокам первый из них получит ровно n пар «*туз и король одной масти*» ($n = 0, 1, 2, 3, 4$).

44. Двери лифта закрылись на первом этаже прямо перед Петей, который успел только заметить, что в лифт вошли шесть человек. В общежитии семь этажей, и лифт, если откроет на каком-либо из них двери, стоит там целую минуту. Петя живёт на седьмом этаже и очень не хочет идти по лестнице. Он размышляет, каковы вероятности следующих событий: а) все шестеро выйдут на одном этаже; б) все шестеро выйдут на разных этажах. Найти эти вероятности.

Решение. а) Опыт, за которым наблюдает Петя, состоит в том, что люди выходят из лифта произвольным образом: каждый из шести человек может выйти на любом из шести этажей (со второго по седьмой). Общее число исходов этого опыта $n = \widetilde{\mathrm{A}}_6^6 = 6^6$ (первый человек может выйти на любом из шести этажей, второй — также на любом из шести этажей и так до шестого человека; все эти шесть шестёрок перемножаются по правилу произведения). Пусть событие A состоит в том, что все шесть человек выйдут на одном и том же этаже, тогда число исходов описанного опыта, благоприятствующих наступлению события A, равно $m_A = 6$ (всего есть шесть этажей). Поэтому, согласно классическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{6^5} \approx 0,00013$. **б)** Рассмотрим тот же опыт, что и в п. а). Пусть событие B состоит в том, что все шесть человек выйдут на разных этажах, тогда число исходов опыта, благоприятствующих наступлению события B, равно $m_B = 6!$ (число перестановок шести людей по шести этажам). По классической формуле вероятности $\mathbf{P}\{B\} = \frac{6!}{6^6} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}}} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\overset{\cancel{2}}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{324}$. ❑

45. Петя и Маша приглашены на день рождения в компанию из десяти человек, включая их, но приходят на него порознь, причём, как и остальные гости, в случайное время. Найти вероятность того, что они будут сидеть за праздничным столом рядом, если хозяин рассаживает гостей случайным образом, а стол, имеющий прямоугольную форму: а) стоит в середине комнаты; б) придвинут к стене.

46. Во время грозы на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Считая, что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того, что обрыв расположен между 40-м и 45-м километрами.

47. На 200-километровом участке газопровода между компрессорными станциями А и В происходит утечка газа, которая одинаково возможна в любой точке газопровода. Найти вероятности следующих событий: а) утечка расположена не далее 20 км от А или В; б) утечка расположена ближе к А, чем к В.

48. Радар автоинспектора имеет точность 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и округляет свои показания в ближайшую сторону. Определить, что происходит чаще — радар округляет скорость «*в пользу водителя*» или «*в пользу ГИБДД*»?

49. При проведении инвентаризации для определения имеющегося на складе количества жидкого химического реактива используется измерительный прибор с ценой деления шкалы 0,2 л. Показания прибора округляются до ближайшего деления шкалы. Найти вероятность того, что ошибка округления не превысит 0,04 л.

50. Ёмкость цистерны для хранения бензина на автозаправочной станции равна 50 т. Найти вероятности событий, состоящих в том, что при случайной проверке в цистерне будет обнаружено: а) менее 5 т бензина; б) более 20 т бензина; в) хотя бы 1 т бензина.

51. Маша тратит на дорогу в институт от 40 до 50 мин, причём любое время в этом промежутке является равновероятным. Найти вероятность того, что в день экзамена она потратит на дорогу от 45 до 50 мин.

52. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин, второго маршрута — с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин.

Решение. Выберем в качестве множества элементарных событий Ω прямоугольник со сторонами $T_1 = 18$ мин и $T_2 = 15$ мин (рис. 1.3). Событие A состоит в том, что время, которое Петя будет ждать автобуса, меньше $t = 10$ мин. Элементарные события, благоприятствующие наступлению события A, заштрихованы на рис. 1.3. Поэтому, согласно геометрическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{T_1T_2 - (T_1 - t)(T_2 - t)}{T_1T_2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T_1}\right)\left(1 - \frac{t}{T_2}\right)$.

При $T_1 = 18$, $T_2 = 15$, $t = 10$ $\mathbf{P}\{A\} = 1 - \left(1 - \frac{10}{18}\right)\left(1 - \frac{10}{15}\right) = \frac{23}{27}$. ❑

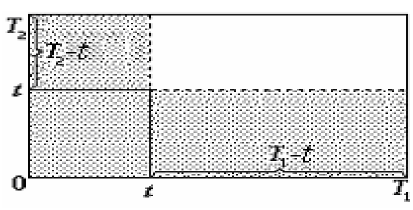


Рис. 1.3. *Множество элементарных событий в задаче 52*

53. Петя и Маша договорились встретиться с 12 до 13 ч на станции метро «*Выхино*» у последнего вагона поезда, идущего в центр города, однако ни один из них не смог точно указать время своего прихода. Они договорились ждать друг друга в течение 15 мин. Найти вероятность их встречи.

54. В условиях предыдущей задачи найти вероятность встречи Пети и Маши, если Петя ждёт уже 10 мин, а Маши всё ещё нет.

55. Петя, Маша и Вася договорились встретиться в большой перерыв, который длится час, около библиотеки. Никто из них не смог точно указать время своего прихода, поэтому они договорились ждать друг друга не более 10 мин. Найти вероятности следующих событий: а) они все встретятся; б) по крайней мере, двое из них встретятся.

56. Рыбаки поймали в пруду 100 рыб, окольцевали их и выпустили назад в воду. На следующий день они поймали 120 рыб, из которых 10 оказались окольцованными. Найти: а) вероятность того, что выловленная рыба окольцована; б) количество рыб в пруду.

Решение. Пусть n — число рыб в пруду, $m_n = 100$ — число окольцованных рыб в пруду, событие A состоит в том, что выловленная рыба окольцована. Тогда вероятность события A равна, согласно классическому определению, $\mathbf{P}\{A\} = \frac{100}{n}$. С другой стороны, поскольку из 120 выловленных рыб $m_{120} = 10$ оказались окольцованы, вероятность события A приближённо равна его относительной частоте: $\mathbf{P}\{A\} \approx \hat{p}_{120}(A) = \frac{m_{120}}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$. Отсюда $\frac{100}{n} \approx \frac{1}{12}$ или $n \approx 1\,200$. ❑

57. Известно, что в среднем из 1 000 выданных кредитов примерно 12 не возвращаются в срок. В текущем году банк выдал 3 000 кредитов. Найти количество кредитов, которые не будут возвращены в срок.

58. Привести примеры событий, для вычисления вероятностей которых неприменим способ расчёта с помощью относительных частот.

§1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Класс $\mathcal{S}$ подмножеств множества элементарных событий Ω называется *полем событий* (*алгеброй событий*), если он содержит достоверное событие ($\Omega \in \mathcal{S}$), а также замкнут относительно операций объединения (если $A, B \in \mathcal{S}$, то $A \cup B \in \mathcal{S}$), пересечения (если $A, B \in \mathcal{S}$, то $A \cap B \in \mathcal{S}$) и дополнения (если $A \in \mathcal{S}$, то $\overline{A} \in \mathcal{S}$). Поле событий $\mathcal{S}$ называется *σ-полем* (*σ-алгеброй*), если объединение и пересечение бесконечной (счётной) последовательности событий $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{S}$ также принадлежат полю $\mathcal{S}$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

При *аксиоматическом построении теории вероятностей* в каждом конкретном пространстве элементарных событий Ω выделяется σ-поле событий $\mathcal{S}$, и для каждого события $A \in \mathcal{S}$ задаётся вероятность — числовая функция, определённая на σ-поле событий $\mathcal{S}$ и удовлетворяющая следующим аксиомам.

Аксиома неотрицательности вероятности:

$$\textit{для всех } A \in \mathcal{S}: \mathbf{P}\{A\} \geqslant 0\,. \tag{1.36}$$

Аксиома нормированности вероятности:

$$\mathbf{P}\{\Omega\} = 1\,. \tag{1.37}$$

Аксиома аддитивности вероятности:

$$\textit{для всех } A, B \in \mathcal{S}\textit{, таких, что } A \cap B = \varnothing: \mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}. \tag{1.38}$$

Во многих случаях вместо аксиомы аддитивности вероятности требуется её расширенный вариант, называемый аксиомой счётной аддитивности вероятности.

Аксиома счётной аддитивности вероятности:

$$\text{для всех } A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}\text{, таких, что при } i \neq j \;\; A_i \cap A_j = \varnothing:\;\; \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_i\}. \qquad (1.39)$$

Каждая определённая *теоретико-вероятностная схема* задаётся тройкой $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$, где Ω — конкретное пространство элементарных событий, $\mathcal{S}$ — σ-поле событий, выделенное на Ω, $\mathbf{P}$ — вероятность, заданная на σ-поле $\mathcal{S}$. Тройка $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ называется *вероятностным пространством*.

Из аксиом (1.36) – (1.38) следуют следующие свойства вероятности:

ограниченность вероятности:

$$\text{для всех } A \in \mathcal{S}:\; 0 \leqslant \mathbf{P}\{A\} \leqslant 1; \qquad (1.40)$$

$$\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0; \qquad (1.41)$$

$$\text{для всех } A \in \mathcal{S}:\; \mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}; \qquad (1.42)$$

$$\text{для всех } A, B \in \mathcal{S}\text{, таких, что } A \subseteq B:\; \mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\{B\}; \qquad (1.43)$$

теорема сложения вероятностей:

$$\text{для всех } A, B \in \mathcal{S}:\; \mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}; \qquad (1.44)$$

неравенство треугольника:

$$\text{для всех } A, B \in \mathcal{S}:\; \mathbf{P}\{A \cup B\} \leqslant \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}; \qquad (1.45)$$

обобщённая теорема сложения вероятностей:

$$\text{для всех } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}:\; \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\} = \qquad (1.46)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i \cap A_j\} + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i \cap A_j \cap A_k\} - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\}.$$

В случае $n = 3$ обобщённая теорема сложения вероятностей имеет следующий вид:

$$\text{для всех } A, B, C \in \mathcal{S}:$$

$$\mathbf{P}\{A \cup B \cup C\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{C\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{B \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap C\} + \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\}. \qquad (1.47)$$

59. Известно, что курс евро к рублю может возрасти с вероятностью 0,55, а курс доллара к рублю может возрасти с вероятностью 0,35. Вероятность того, что возрастут оба курса, составляет 0,3. Найти вероятность того, что курс евро или доллара по отношению к рублю возрастёт.

Решение. Пусть событие $A_{Ђ}$ состоит в том, курс евро к рублю возрастёт, а событие $A_{\$}$ — в том, что курс доллара к рублю возрастёт. Тогда по условию $\mathbf{P}\{A_{Ђ}\} = 0,55$, $\mathbf{P}\{A_{\$}\} = 0,35$, $\mathbf{P}\{A_{Ђ} \cap A_{\$}\} = 0,3$. Вероятность того, что курс евро или доллара по отношению к рублю возрастёт, по теореме сложения вероятностей составляет $\mathbf{P}\{A_{Ђ} \cup A_{\$}\} = \mathbf{P}\{A_{Ђ}\} + \mathbf{P}\{A_{\$}\} - \mathbf{P}\{A_{Ђ} \cap A_{\$}\} = 0,55 + 0,35 - 0,3 = 0,6$. ❑

60. В партии 100 изделий, из которых шесть имеют дефекты. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Найти вероятности следующих событий: а) все бракованные изделия достанутся одному потребителю; б) бракованные изделия достанутся обоим потребителям поровну.

61. Петя ищет работу. Он побывал на собеседованиях в банке и страховой компании. Вероятность своего успеха в банке он оценивает в 0,5, а в страховой компании — в 0,6. Кроме того, он рассчитывает, что с вероятностью 0,3 ему поступят предложения от двух организаций сразу. Найти вероятность того, что Петя получит хотя бы одно предложение работы.

62. Менеджер по кадрам разместил в сети *Internet* объявление о том, что банку требуется начальник отдела долговых обязательств, и получил 300 резюме. Из про-

прошлого опыта известно, что вероятность того, что претендент имеет высшее экономическое образование, равна 0,3, вероятность того, что претендент имеет опыт руководящей работы в банке, — 0,7, а вероятность того, что претендент имеет и высшее экономическое образование, и опыт руководящей работы, — 0,2. Оценить количество претендентов, имеющих опыт руководящей работы или высшее экономическое образование. Построить соответствующую диаграмму Вьенна – Эйлера.

63. Событие A состоит в том, что потенциальный покупатель увидел рекламу товара по телевизору, а событие B — в том, что он увидел рекламу в газете. Известно, что $\mathbf{P}\{A\} > 0,8$, $\mathbf{P}\{B\} > 0,4$, Проверить справедливость следующих утверждений: а) A и B несовместны; б) A и B противоположны; в) $\mathbf{P}\{A \cap B\} > 0,2$.

64. Известны вероятности дополнительной потребности фирмы в инженерах на предстоящие два года:

Число инженеров	< 100	$100 - 199$	$200 - 299$	$300 - 399$	$400 - 499$	$\geqslant 500$
Вероятность	0,10	0,15	0,30	0,30	0,10	0,05

Найти вероятности следующих событий: а) на протяжении предстоящих двух лет фирме дополнительно потребуется не менее 400 инженеров; б) на протяжении предстоящих двух лет фирме дополнительно потребуется по меньшей мере 200, но не более 399 инженеров.

65. Результаты опроса 1 000 случайно отобранных молодых людей таковы:

работают	811 чел.,
учатся	518 чел.,
работают и учатся одновременно	356 чел.,
проживают в Москве	752 чел.,
из москвичей:	
работают	570 чел.,
учатся	348 чел.,
работают и учатся одновременно	297 чел.

Определить, содержится ли в этой информации ошибка.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный молодой человек работает, событие B — в том, что случайно выбранный молодой человек проживает в Москве, событие C — в том, что случайно выбранный молодой человек учится. Так как $n = 1000$ достаточно велико, можно воспользоваться статистическим определением вероятности: $\mathbf{P}\{A\} \approx 0,811$, $\mathbf{P}\{B\} \approx 0,752$, $\mathbf{P}\{C\} \approx 0,518$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} \approx 0,570$, $\mathbf{P}\{B \cap C\} \approx 0,348$, $\mathbf{P}\{A \cap C\} \approx 0,356$, $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} \approx 0,297$. По формуле (1.46) $\mathbf{P}\{A \cup B \cup C\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} + \mathbf{P}\{C\} - \mathbf{P}\{A \cap B\} - \mathbf{P}\{B \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap C\} - \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} \approx 1,104 > 1$. Но вероятность не может быть больше единицы, следовательно, в данной информации содержится ошибка. ❑

66. Петя — староста группы. Когда деканат попросил его подать сведения о студентах своей группы, Петя по памяти составил следующую записку: «*В группе 45 студентов, в том числе 25 юношей; 30 студентов учатся на “хорошо” и “отлично”, в том числе 16 юношей; 28 студентов занимаются спортом, в их числе 18 юношей и 17 студентов, успевающих на “хорошо” и “отлично”; 15 юношей учатся на “хорошо” и “отлично” и занимаются спортом*». Сотрудники деканата сразу определили, что Петя ошибся, и попросили его более аккуратно подойти к выполнению поручения. Как сотрудникам деканата удалось «*поймать*» Петю?

67. Пусть A, B, C — произвольные события. Расположить следующие события в порядке возрастания их вероятностей: $A\cup C, \varnothing, A\backslash B, A\backslash(B\backslash C), \Omega, A\cup B\cup C, A\backslash B\backslash C$.

68. Пусть $A\subseteq B\cup C$ и $B\cap C=\varnothing$. Проверить справедливость утверждений: а) $\mathbf{P}\{A\cup B\}=\mathbf{P}\{B\}$; б) $\mathbf{P}\{A\cup B\cup C\}=\mathbf{P}\{B\}+\mathbf{P}\{C\}$; в) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\geqslant\mathbf{P}\{\overline{B}\}$; г) $\mathbf{P}\{\overline{A}\}\geqslant\mathbf{P}\{\overline{B}\}+\mathbf{P}\{\overline{C}\}$.

69. В условиях задачи 41 найти вероятности следующих событий: а) угадать не менее трёх чисел; б) угадать хотя бы одно число.

70. Известно, что пять из сорока пассажиров самолёта замешаны в похищении крупной денежной суммы. В аэропорту к трапу самолёта подошёл инспектор уголовного розыска и заявил, что для обнаружения хотя бы одного преступника ему достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: трезвый расчёт или риск?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров есть хотя бы один преступник, событие $\overline{A}$ — в том, что среди шести случайно выбранных пассажиров нет ни одного преступника. Тогда, используя формулу гипергеометрической вероятности (1.31), в которой $n=40, m=5, l=6$, получим: $\mathbf{P}_{40;5}(6;k)=\dfrac{C_5^kC_{35}^{6-k}}{C_{40}^6}, k=0,1,2,3,4,5$, поэтому

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\}=\mathbf{P}_{40;5}(6;0)=\frac{C_5^0C_{35}^6}{C_{40}^6}=\frac{\frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot\frac{35!}{6!\cdot 29!}}{\frac{40!}{6!\cdot 34!}}=\frac{\overset{1}{\cancel{5!}}\cdot 35!\cdot\overset{1}{\cancel{6!}}\cdot 34!}{\underset{1}{\cancel{0!}}\cdot\underset{1}{\cancel{5!}}\cdot\underset{1}{\cancel{6!}}\cdot 29!\cdot 40!}=\frac{35!\cdot 34!}{29!\cdot 40!}=\frac{\overset{17}{\cancel{34}}\cdot\overset{11}{\cancel{33}}\cdot\overset{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{32}}\cdot 31\cdot\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{30}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{40}}\cdot 39\cdot\underset{19}{\cancel{38}}\cdot 37\cdot\underset{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{12}}}{\cancel{36}}}\approx 0,4229,$$

откуда $\mathbf{P}\{A\}=1-\mathbf{P}\{\overline{A}\}\approx 1-0,4229=0,5771>0,5$. Видимо, это и побудило инспектора назвать число «*шесть*», хотя, на взгляд авторов, инспектор, скорее, рискует «*пятьдесят на пятьдесят*». ❑

71. Доказать, что если класс $\mathcal{S}$ подмножеств множества элементарных событий Ω, замкнутый относительно операции дополнения, замкнут относительно операции объединения, то он замкнут и относительно операции пересечения.

Решение. По условию, если $A,B\in\mathcal{S}$, то $\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{S}$ (так как $\mathcal{S}$ замкнут относительно операции дополнения). Так как $\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{S}$, $\overline{A}\cup\overline{B}\in\mathcal{S}$ (так как $\mathcal{S}$ замкнут относительно операции объединения). Так как $\overline{A}\cup\overline{B}\in\mathcal{S}$, $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\mathcal{S}$ (так как $\mathcal{S}$ замкнут относительно операции дополнения). Но согласно правилу де Моргáна $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$, поэтому $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\mathcal{S}$, т. е. класс $\mathcal{S}$ замкнут относительно операции пересечения. ❑

72. Записать обобщённую теорему сложения вероятностей для случая четырёх событий.

73. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для классической вероятностной схемы.

74. Проверить выполнение аксиом вероятности (1.36) – (1.38) для геометрической вероятностной схемы.

75. Вывести из аксиом вероятности (1.36) – (1.38) свойства (1.40) – (1.47).

Глава 2. Условные вероятности. Последовательности испытаний

§2.1. Условные вероятности

Как уже было отмечено, говорить о вероятности наступления какого-либо события как о мере возможности наступления этого события можно лишь при выполнении определённого комплекса условий опыта. Так, если к комплексу условий, при которых изучалась вероятность наступления события A, добавить условие наступления события B, получим другое значение вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ — *вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло*[1] (или *условная вероятность события A при условии B*), которая равна по определению

$$\mathbf{P}\{A \mid B\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}. \tag{2.1}$$

Иногда вместо обозначения $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ используют обозначение $\mathbf{P}_B\{A\} = \mathbf{P}\{A \mid B\}$.

Вероятность $\mathbf{P}\{A\}$, в отличие от условной вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\}$, называется *безусловной*.

Из определения условной вероятности (2.1) следует *формула умножения вероятностей*

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B \mid A\}, \tag{2.2}$$

остающаяся справедливой и в случае, когда $\mathbf{P}\{A\} = 0$ или $\mathbf{P}\{B\} = 0$.

Говорят, что *события A и B* являются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}. \tag{2.3}$$

Формулу (2.3) для независимых событий A и B называют *теоремой умножения вероятностей*.

Очевидно, при $\mathbf{P}\{B\} > 0$ теорема умножения вероятностей (2.3) означает, что условная вероятность события A при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A:

$$\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A\}. \tag{2.4}$$

Формулу умножения вероятностей легко обобщить на случай произвольного конечного числа событий:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2|A_1\}\mathbf{P}\{A_3|A_1 \cap A_2\} \cdots \mathbf{P}\{A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}\}. \tag{2.5}$$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого их подмножества $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ вероятность одновременного наступления событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ равна произведению безусловных вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = \mathbf{P}\{A_{i_1}\}\mathbf{P}\{A_{i_2}\} \cdots \mathbf{P}\{A_{i_k}\} \ (k = 1, 2, \dots, n). \tag{2.6}$$

Если условие (2.6) выполняется только при $k = 2$, то *события $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются попарно независимыми*[2].

Следует обратить внимание на следующие факты:

- *из условия несовместности не следует условие независимости;*
- *из условия независимости не следует условие несовместности;*
- *из условия независимости в совокупности следует попарная независимость, но из попарной независимости не следует независимость в совокупности.*

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности, то из обобщённой теоремы сложения вероятностей следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} = \tag{2.7}$$

$$= 1 - (1 - \mathbf{P}\{A_1\})(1 - \mathbf{P}\{A_2\}) \cdots (1 - \mathbf{P}\{A_n\}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbf{P}\{A_i\}).$$

Если события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу, то для вычисления вероятности произвольного события A можно использовать *формулу полной вероятности*:

[1] Для корректности определения необходимо, чтобы событие B имело ненулевую вероятность: $\mathbf{P}\{B\} > 0$.

[2] Естественно, предполагается справедливость этого условия и при $k = 1$, т. е. выполнение тривиального равенства $\mathbf{P}\{A_i\} = \mathbf{P}\{A_i\}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A \mid H_1\}\mathbf{P}\{H_1\} + \mathbf{P}\{A \mid H_2\}\mathbf{P}\{H_2\} + \dots + \mathbf{P}\{A \mid H_n\}\mathbf{P}\{H_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\}, \quad (2.8)$$

в соответствии с которой вероятность наступления события A может быть представлена как сумма произведений условных вероятностей события A при условии наступления событий H_i на безусловные вероятности этих событий H_i. Поскольку среди событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, в результате опыта должно наступить одно и только одно, эти события H_i называют *гипотезами* ($i = 1, 2, \dots, n$).

Формула полной вероятности (2.8) остаётся справедливой и в случае, если условие, состоящее в том, что события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу, заменить более слабым: гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$), а их объединение содержит событие A ($A \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$).

Из формулы полной вероятности следует *формула Байеса*:

$$\mathbf{P}\{H_k \mid A\} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{\mathbf{P}\{A \mid H_k\}\mathbf{P}\{H_k\}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A \mid H_i\}\mathbf{P}\{H_i\}} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.9)$$

Вероятности $\mathbf{P}\{H_i\}$ гипотез H_i называют *априорными вероятностями* (вероятностями гипотез H_i до проведения опыта) в отличие от *апостериорных вероятностей* $\mathbf{P}\{H_i \mid A\}$ (вероятностей гипотез H_i, уточнённых в результате опыта, исходом которого стало событие A).

76. На автомобиле «*Мерседес*-600», принадлежащем президенту банка и представляющем огромнейший интерес для угонщиков, установлены электронная сигнализация и механическая блокировка рычага переключения передач. Вероятность того, что угонщик справится с сигнализацией, составляет 0,2, а вероятность того, что он сломает блокиратор, равна 0,1. Сегодня президент, рискнув, отправился в гости без водителя и охраны. Найти вероятности следующих событий: а) автомобиль будет угнан; б) угонщик справится только с одной системой защиты.

77. Известно, что $\mathbf{P}\{A\} > 0,8$, $\mathbf{P}\{B\} = 0,6$, $\mathbf{P}\{A \cup B\} = 0,9$. Найти $\mathbf{P}\{A \cap B\}$, $\mathbf{P}\{A \mid B\}$, $\mathbf{P}\{B \mid A\}$ и выяснить, зависимы ли события A и B.

Решение. По теореме сложения вероятностей $\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}$, откуда $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cup B\} = 0,8 + 0,6 - 0,9 = 0,5$. По определению условной вероятности $\mathbf{P}\{A \mid B\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$, $\mathbf{P}\{B \mid A\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{0,5}{0,8} = \frac{5}{8}$. Для того, чтобы события A и B были независимыми, необходимо выполнение теоремы умножения вероятностей: $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$. В нашем случае $\mathbf{P}\{A \cap B\} = 0,5$, $\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\} = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48 \neq 0,5$, т. е. теорема умножения вероятностей не выполняется, значит, события A и B являются зависимыми. ❑

78. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают сразу два яблока. Найти вероятность того, что оба они будут красными.

79. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков.

80. В группе из 1 000 человек 452 имеют текущие счета, 336 — депозитные счета, а 302 — и текущие, и депозитные. Определить, являются ли события «*обладание текущим счётом*» и «*обладание депозитным счётом*» независимыми?

81. Талантливый сантехник Миша обязательно раз в неделю напивается «*до чёртиков*» (только раз, но обязательно). Найти вероятности следующих событий: а) Миша напьётся во вторник, если он был трезв в понедельник; б) Миша будет трезв в среду и в четверг, если он не пил в понедельник и во вторник; в) Миша будет пьян в один день с электриком Колей, который ведёт себя так же, но независимо от Миши.

82. Жюри состоит из трёх судей, выносящих решение независимо друг от друга: двое из них, каждый с вероятностью 0,8, принимают правильное решение, а третий для вынесения решения подбрасывает монету. Окончательное решение принимается большинством голосов. Найти вероятность вынесения правильного решения.

83. Нефтедобывающая компания проводит буровые работы в трёх различных местах A, B и C. Вероятности успешного бурения в A, B и C равны соответственно 0,5, 0,4 и 0,1. Предположив, что события, заключающиеся в успешности бурения в местах A, B и C, независимы, вычислить вероятности следующих событий: а) хотя бы одно бурение окажется успешным; б) ровно одно бурение окажется успешным.

84. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают по очереди все яблоки. Найти вероятность того, что вторым по счёту будет вынуто красное яблоко.

85. Из корзины, содержащей три красных яблока и семь зелёных, вынимают одно за другим все яблоки, кроме одного. Найти вероятность того, что последнее оставшееся в корзине яблоко будет зелёным.

86. Петя знает не все вопросы программы. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет меньше: когда он тянет билет первым или последним?

87. Студенты считают, что из 50 экзаменационных билетов 10 являются «*хорошими*». Петя и Маша по очереди тянут по одному билету. Найти вероятности следующих событий: а) Пете достался «*хороший*» билет; б) Маше достался «*хороший*» билет; в) им обоим достались «*хорошие*» билеты.

88. Маша пришла на экзамен, зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задаёт три вопроса. Найти вероятности следующих событий: а) Маша ответит на все три вопроса; б) Маша ответит на два вопроса; в) Маша ответит на один вопрос; г) Маша ответит хотя бы на один вопрос; д) Маша не ответит ни на один вопрос.

89. Вероятность того, что кредитная карта находится в письменном столе, равна p, причём с равной вероятностью карта может находиться в любом из восьми ящиков стола. Её владелец осмотрел семь ящиков и пока не нашёл свою кредитную карту. Найти вероятность того, что она находится в восьмом ящике.

90. Доказать формулу (2.5).

91. Доказать, что из независимости событий A и B следует независимость событий: а) $\overline{A}$ и B; б) A и $\overline{B}$; в) $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

92. Привести пример событий, являющихся независимыми и при этом совместными.

93. Привести пример событий, являющихся несовместными, но не являющихся при этом независимыми.

94. Доказать формулу $\mathbf{P}\{A \mid B\} + \mathbf{P}\{\overline{A} \mid B\} = 1$.

95. Доказать, что равенства $\mathbf{P}\{A|B\} + \mathbf{P}\{A|\overline{B}\} = 1$ и $\mathbf{P}\{A|B\} + \mathbf{P}\{\overline{A}|\overline{B}\} = 1$ неверны.

96. Пусть события A, B и C попарно независимы, причём каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Проверить, могут ли события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ быть: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

Решение. а) Рассмотрим следующие события в условиях задачи 47: событие A, заключающееся в том, что утечка газа происходит ближе к станции А, чем к В, событие B, заключающееся в том, что утечка расположена между 50-м и 150-м километрами, и событие C, состоящее в том, что утечка расположена между отметками 12,5 км и 62,5 км либо между 112,5 км и 162,5 км. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности, $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B \cap C\} = \mathbf{P}\{A \cap C\} = \frac{1}{4}$, значит, события A, B и C попарно независимы. При этом, очевидно, $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \frac{1}{16}$, $\mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C)\} = \mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \frac{1}{16} = \mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2 \mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}\{A \cap B\}\mathbf{P}\{B \cap C\}$. Аналогично получаем равенства $\mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\} = \mathbf{P}\{A \cap B\}\mathbf{P}\{A \cap C\}$ и $\mathbf{P}\{B \cap C) \cap (A \cap C)\} = \mathbf{P}\{B \cap C\}\mathbf{P}\{A \cap C\}$, т. е. события A, B и C являются независимыми в совокупности. **б)** Независимость в совокупности означает, во-первых, что $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C)\} = \mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2 \mathbf{P}\{C\}$ и, во-вторых, что $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{(A \cap B) \cap (B \cap C) \cap (A \cap C)\} = [\mathbf{P}\{A\}]^2 [\mathbf{P}\{B\}]^2 [\mathbf{P}\{C\}]^2$. Поэтому $\mathbf{P}\{A\}[\mathbf{P}\{B\}]^2 \mathbf{P}\{C\} = [\mathbf{P}\{A\}]^2 [\mathbf{P}\{B\}]^2 [\mathbf{P}\{C\}]^2$, но это равенство невозможно, так как вероятности событий A, B и C отличны от нуля и единицы. Поэтому события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ не могут быть независимыми в совокупности. ❑

97. Пусть события A, B и C независимы в совокупности, причём каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Проверить, могут ли события $A \cap B$, $B \cap C$ и $A \cap C$ быть: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

98. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что на первой и второй костях выпало одинаковое число очков, событие B — в том, что на второй и третьей костях выпало одинаковое число очков, событие C — в том, что на первой и третьей костях выпало одинаковое число очков. Проверить, являются ли события A, B и C: а) попарно независимыми; б) независимыми в совокупности.

99. Привести пример попарно независимых событий, не являющихся при этом независимыми в совокупности.

100. Доказать, что из равенства $\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{C\}$ не следует попарная независимость событий A, B и C.

101. Доказать формулу (2.7).

102. Пусть A, B — произвольные события. Проверить, образуют ли события A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ полную группу.

103. Доказать формулу полной вероятности (2.8).

104. Доказать формулу Байеса (2.9).

105. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 20% — другие банки, остальные — физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза H_1 — в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза H_2 — в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза H_3 — в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют $\mathbf{P}\{H_1\}=0,1$, $\mathbf{P}\{H_2\}=0,2, \mathbf{P}\{H_3\}=1-\mathbf{P}\{H_1\}-\mathbf{P}\{H_2\}=0,7$. Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны $\mathbf{P}\{A|H_1\}=0,01$, $\mathbf{P}\{A|H_2\}=0,05, \mathbf{P}\{A|H_3\}=0,2$. По формуле полной вероятности $\mathbf{P}\{A\}=\mathbf{P}\{A|H_1\}\mathbf{P}\{H_1\}+\mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\}+\mathbf{P}\{A|H_3\}\mathbf{P}\{H_3\}=0,01\cdot 0,1+0,05\cdot 0,2+0,2\cdot 0,7=0,151$. ❑

106. Вероятность того, что недельный оборот торговца мороженым превысит 2 000 руб., при солнечной погоде равна 80%, при переменной облачности — 50%, а при дождливой погоде — 10%. Найти вероятность того, что на следующей неделе оборот превысит 2 000 руб., если вероятность солнечной погоды в данное время года составляет 20%, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды — по 40%.

107. В условиях задачи 105 начальнику кредитного отдела доложили, что получено факсимильное сообщение о неисполнении обязательств по возврату кредита, в котором очень плохо пропечаталось имя клиента. Найти вероятность того, что кредит не возвращает какой-либо банк.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза H_1 — в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза H_2 — в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза H_3 — в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют $\mathbf{P}\{H_1\}=0,1$, $\mathbf{P}\{H_2\}=0,2$, $\mathbf{P}\{H_3\}=1-\mathbf{P}\{H_1\}-\mathbf{P}\{H_2\}=0,7$. Апостериорные вероятности, в свою очередь, равны по условию $\mathbf{P}\{A\mid H_1\}=0,01$, $\mathbf{P}\{A\mid H_2\}=0,05$, $\mathbf{P}\{A\mid H_3\}=0,2$. По формуле Байеса $\mathbf{P}\{H_2\mid A\}=\dfrac{\mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\}}{\mathbf{P}\{A\}}=\dfrac{10}{151}\approx 0,066$, где вероятность $\mathbf{P}\{A\}=0,151$ была рассчитана по формуле полной вероятности в задаче 105. ❑

108. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынули одно яблоко и не глядя отложили в сторону. После этого из корзины достали ещё одно яблоко, которое оказалось зелёным. Найти вероятность того, что первое яблоко, отложенное в сторону, также было зелёным.

109. Для принятия решений о покупке ценных бумаг была разработана система анализа рынка. Из данных за прошлые периоды известно, что 5% всех ценных бумаг являются «*плохими*» — не подходящими для инвестирования. Предложенная система определяет 98% «*плохих*» ценных бумаг как потенциально «*плохие*», но при этом 15% ценных бумаг, пригодных для инвестиций, также определяет как потенциально «*плохие*». Найти вероятность того, что ценная бумага подходит для инвестирования, при условии, что данной системой анализа рынка она была определена как потенциально «*плохая*». На основе полученного результата прокомментировать пригодность системы для принятия инвестиционных решений.

110. Чтобы поддержать позиции фирмы при заключении правительственного контракта, необходимы значительные инвестиции в определение стоимости первоначальных исследований и разработок. Если фирма А сделает эти инвестиции, а её основной конкурент этого не сделает, то вероятность заключения договора с фирмой А составит 0,8. Однако если конкурент также проведёт предварительные исследования и разработки, то вероятность заключения договора с фирмой А уменьшается до 0,4. Аналитическая служба фирмы А оценивает вероятность проведения конкурентом изысканий по предстоящему проекту в 0,3. Вычислить вероятности следующих событий: а) правительство устроит цена, предложенная фирмой А (т. е. контракт будет заключен), при отсутствии информации о решении конкурента; б) правительство не устроит цена, предложенная фирмой А (т. е. контракт не будет заключен), при условии, что конкурент предложит свою цену; в) конкурент представит свою цену при условии, что цена, предложенная фирмой А, принимается правительством; г) конкурент представит свою цену при условии, что цена, предложенная фирмой А, не принимается правительством.

111. Если предприниматель планирует существенное изменение в образце товара, то с вероятностью 0,7 он начнёт вносить изменения в технологию производства до 1 сентября, если же он не планирует существенной переделки, то вероятность изменения технологии составит 0,2. На основании предыдущего опыта вероятность существенной переделки образца составляет 0,2. Вычислить вероятности следующих событий: а) в технологию будут внесены изменения до 1 сентября; б) образец товара претерпит существенные изменения, если изменения в технологию начинают вноситься до 1 сентября; в) образец товара претерпит существенные изменения, если 1 сентября уже прошло, а изменений в технологии не произошло.

112. Магазин получает товар от трёх поставщиков: 55% товара поступает от первого поставщика, 20% от второго и 25% от третьего. Продукция, поступающая от первого поставщика, содержит 5% брака, поступающая от второго поставщика — 6% брака, а поступающая от третьего поставщика — 8% брака. Покупатель оставил в книге пожеланий покупателя жалобу о низком качестве приобретённого товара. Найти вероятность того, что плохой товар, вызвавший нарекания покупателя, поступил от второго поставщика.

113. При расследовании преступления, совершённого на автозаправочной станции (АЗС), было установлено, что поток автомобилей, проезжающих мимо АЗС, состоит на 60% из грузовых и на 40% из легковых автомобилей. По показаниям свидетелей, во время совершения преступления на АЗС находился автомобиль. Известно, что вероятность заправки грузового автомобиля равна 0,1, легкового автомобиля — 0,3. Найти вероятность того, что во время совершения преступления на АЗС находился: а) грузовой автомобиль; б) легковой автомобиль.

114. В каждой из трёх корзин находится по семь красных яблок и три зелёных. Из первой корзины наудачу достали одно яблоко и переложили во вторую, затем из второй корзины наудачу достали яблоко и переложили в третью. Найти вероятность того, что яблоко, наудачу извлечённое после этих манипуляций из третьей корзины, окажется красным.

115. **Задача о разорении**[1]**.** Петя с папой играют в следующую игру. Петя бросает монету, предварительно сообщив папе, какая сторона, по его мнению, выпадет: «*герб*» или «*решётка*». Если Петя угадал, то папа платит Пете 1 руб., в противном случае Петя платит папе 1 руб. Начальный капитал Пети составляет $x = 100$

[1] Практическая интерпретация задач 115 – 118 состоит в следующем. Инвестиционная компания «*играет*» с рынком. Возможности рынка безграничны (чего нельзя сказать о возможностях компании). Компания пытается угадать, какие финансовые инструменты окажутся в будущем доходными, если угадывает — получает прибыль, иначе — несёт расходы. Если расходов становится много, то рано или поздно компания разоряется. Можно рассмотреть и случай, когда у противника финансовые возможности также ограничены, решение будет не сложнее. Предоставляем читателю самостоятельно поставить и решить соответствующие задачи.

руб. Игра продолжается до тех пор, пока Петя не наберёт заранее определённую сумму s, либо пока он не разорится, проиграв весь имеющийся капитал x. Найти вероятность того, что Петя разорится, так и не набрав желаемую сумму, если эта сумма s составляет: а) 110 руб; б) 1 000 руб.

Решение. Пусть $p(x)$ — вероятность того, что, имея x руб., Петя всё-таки разорится, событие A состоит в Петином разорении, гипотеза H_1 — в том, что Петя выиграл на первом шаге игры, гипотеза H_2 — в том, что Петя проиграл на первом шаге игры. При этом, очевидно, вероятность разорения при условии выигрыша на первом шаге составит $\mathbf{P}\{A|H_1\}=p(x+1)$, а вероятность разорения при условии проигрыша на первом шаге составит $\mathbf{P}\{A|H_2\}=p(x-1)$. Согласно классическому определению вероятности $\mathbf{P}\{H_1\}=\mathbf{P}\{H_2\}=\frac{1}{2}$. По формуле полной вероятности $p(x)=\mathbf{P}\{A\}=\mathbf{P}\{A|H_1\}\mathbf{P}\{H_1\}+\mathbf{P}\{A|H_2\}\mathbf{P}\{H_2\}=p(x+1)\cdot\frac{1}{2}+p(x-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}[p(x+1)+p(x-1)]$. При этом, очевидно, $p(0)=1$, а $p(s)=0$. Решением уравнения $p(x)=\frac{1}{2}\cdot[p(x+1)+p(x-1)]$ является линейная функция $p(x)=C_1x+C_2$, коэффициенты которой C_1 и C_2 найдём из условий $p(0)=C_2=1$ и $p(s)=C_1s+C_2=0$: $C_1=-\frac{1}{s}$, $C_2=1$. Таким образом, $p(x)=1-\frac{x}{s}$. В случае **а)** $x=100$, $s=110$, поэтому $p(100)=\frac{1}{11}\approx 0,091$, а в случае **б)** $x=100, s=1\ 000$, поэтому $p(100)=0,9$. ❑

116. В условиях предыдущей задачи папа играет нечестно: он дал Пете монету со смещённым центром тяжести, так что Петя (считая монету «*правильной*» и выбирая в среднем в половине случаев «*герб*» и в половине случаев — «*решётку*») выигрывает с вероятностью $\frac{2}{5}$ и проигрывает с вероятностью $\frac{3}{5}$. Начальный капитал Пети составляет, как и в предыдущей задаче, $x=100$ руб. Игра продолжается до тех пор, пока Петя не наберёт заранее определённую сумму s, либо пока он не разорится, проиграв весь имеющийся капитал x. Найти вероятность разорения Пети в общем случае (для произвольной суммы s) и в конкретных случаях $s=110$ руб. и $s=1\ 000$ руб.

117. Что произойдёт с вероятностью разорения Пети в условиях двух предыдущих задач, если ставка на каждом ходе будет равна не 1 руб., как раньше, а 2 руб.?

118. Найти среднюю продолжительность $m(x)$ игры , описанной в задаче 115.

119. **Задача о разборчивой невесте**[1]**.** У одной из Машиных подруг есть достаточно большое число женихов. Заранее она ничего о своих женихах не знает, кроме их числа n. Расположившись в очередь в случайном порядке, женихи представляются разборчивой невесте один за другим, так что встречая очередного жениха, она знает всех предшествующих. Представленный и отвергнутый жених больше не возвращается. Невеста решила избрать следующую стратегию выбора:

[1] Приведём и финансовую формулировку данной задачи. Пусть инвестор владеет некоторым активом, причём в течение определённого срока цена актива может изменяться, а по окончании срока — станет фиксированной (таким активом может быть облигация, рыночная котировка которой может изменяться до момента погашения, или какой-либо инвестиционный проект, пока он ещё не завершён). Стоимости актива в предыдущие дни известны, а в последующие — неизвестны. К предыдущему дню вернуться уже нельзя. Требуется определить момент продажи актива с наибольшей выгодой.

она просматривает первых m женихов, никого из них не выбирая, а затем останавливает свой выбор на первом из оставшихся $(n-m)$ женихов, который окажется лучше, чем любой из первых m женихов. Найти вероятность $\mathbf{P}_m(A)$ сделать наилучший выбор при такой стратегии. Определить такое число m_n, чтобы вероятность $\mathbf{P}_{m_n}(A)$ была максимальной среди всех $\mathbf{P}_m(A)$, $m = 0,1,2,\ldots,n$.

120. Шейх разгневался на звездочёта и приказал казнить его, но в последний момент передумал и решил дать звездочёту возможность спастись. Он взял два чёрных и два белых шара, отличающихся только цветом, и предложил звездочёту распределить их произвольным образом по двум одинаковым сундукам. Палач должен с завязанными глазами выбрать сундук и достать из него один шар. Если он достанет белый шар, шейх помилует звездочёта, в противном случае — казнит. Как звездочёт должен распределить шары по сундукам, чтобы иметь наибольшие шансы спастись?

§2.2. Последовательности испытаний

Пусть проводится конечное число n последовательных испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может либо наступить (такую ситуацию назовём *успехом*) либо не наступить (такую ситуацию назовём *неудачей*), причём эти испытания удовлетворяют следующим условиям:

- *каждое испытание случайно относительно события* A, т. е. до проведения испытания нельзя сказать, появится A или нет;
- *испытания проводятся в одинаковых, с вероятностной точки зрения, условиях*, т. е. вероятность успеха в каждом отдельно взятом испытании равна p и не меняется от испытания к испытанию;
- *испытания независимы*, т. е. события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где A_i состоит в успехе на i-м испытании ($i = 1,2,\ldots,n$), независимы в совокупности.

Такая последовательность испытаний называются *схемой Бернулли* или *биномиальной схемой*, а сами испытания — *испытаниями Бернулли*.

Вероятность $\mathbf{P}_n(k)$ того, что в серии из n испытаний Бернулли окажется ровно k успешных, рассчитывается по *формуле Бернулли*:

$$\mathbf{P}_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\ldots,n). \tag{2.10}$$

Наивероятнейшее число k^* успехов в серии из n испытаний Бернулли удовлетворяет неравенствам

$$np - (1-p) \leqslant k^* \leqslant np + p. \tag{2.11}$$

В случае, когда число n испытаний Бернулли велико, расчёты по формуле Бернулли становятся затруднительными. Если при этом вероятность p успеха в каждом испытании мала, так что можно считать, что $n \to \infty, np \to \lambda = \mathrm{const}$, для расчёта $\mathbf{P}_n(k)$ можно пользоваться приближённой формулой Пуассона:

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \mathbf{P}(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0,1,2,\ldots), \tag{2.12}$$

где $a = np$.

На практике формулой Пуассона пользуются в случае, когда число n испытаний Бернулли — несколько десятков или более, а произведение $a = np < 10$. В случае, когда n велико, а $a = np \geqslant 10$, формула Пуассона даёт очень грубое приближение, и для расчёта $\mathbf{P}_n(k)$ используют локальную и интегральную теоремы Муавра – Лапласа (см. §4.4).

От схемы последовательных независимых испытаний с двумя исходами (биномиальной схемы) можно перейти к *полиномиальной схеме*, т. е. схеме последовательных независимых испытаний, в каждом из которых возможно $m > 2$ исходов с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно

$(0 < p_i < 1 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1)$. В полиномиальной схеме вероятность $\mathbf{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ того, что в серии из n испытаний первый исход появится ровно k_1 раз, второй исход появится ровно k_2 раз и так до m-го исхода, который появится ровно k_m раз, рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \tilde{\mathrm{P}}_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m} \qquad (2.13)$$

$$(0 \leqslant k_i \leqslant n \ \ (i = 1, 2, \ldots, m), \sum_{i=1}^{m} k_i = n).$$

121. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение. Вероятность того, что наугад выбранный зритель данной телепрограммы смотрит и рекламные блоки, согласно статистическому определению вероятности, равна $p = 0{,}7$. Интерпретируя опрос трёх телезрителей как три испытания Бернулли и считая успехом ситуацию, когда телезритель смотрит рекламные блоки, найдём искомые вероятности по формуле Бернулли (2.10), в которой $n = 3,\ p = 0{,}7$: $\mathbf{P}_3(k) = \mathrm{C}_3^k 0{,}7^k 0{,}3^{3-k}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$; $\mathbf{P}_3(0) = \mathrm{C}_3^0 0{,}7^0 0{,}3^3 = 0{,}027$, $\mathbf{P}_3(1) = \mathrm{C}_3^1 0{,}7^1 0{,}3^2 = 0{,}189$, $\mathbf{P}_3(2) = \mathrm{C}_3^2 0{,}7^2 0{,}3^1 = 0{,}441$, $\mathbf{P}_3(3) = \mathrm{C}_3^3 0{,}7^3 0{,}3^0 = 0{,}343$. ❑

122. В условиях предыдущей задачи найти наивероятнейшее число лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение. Наивероятнейшее число k^* лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки, подчиняется неравенствам (2.11): $np - (1-p) \leqslant k^* < np + p$, в которых $n = 3,\ p = 0{,}7$, т. е. $3 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \leqslant k^* < 3 \cdot 0{,}7 - 0{,}7$ или $1{,}8 \leqslant k^* < 2{,}8$, откуда $k^* = 2$. Это подтверждается и решением предыдущей задачи. ❑

123. Стоимость проезда в автобусе равна 3 руб., месячный проездной билет на автобус стоит 120 руб., а штраф за безбилетный проезд составляет 10 руб. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

124. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).

125. Найти вероятность появления ровно 5 гербов при 10-кратном бросании монеты.

126. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.

127. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?

128. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

129. В течение месяца данная акция может подорожать на 1% с вероятностью 0,7 и подешеветь на 1% с вероятностью 0,3. Предполагая ежемесячные изменения цены независимыми, рассчитать вероятности того, что за три месяца цена акции возрастет: а) в $(1,01)^3$ раза; б) в $0,99 \cdot (1,01)^2$ раза.

130. Из 1 000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

Решение. Пусть численность группы равна n. Будем интерпретировать опрос группы из n человек как испытания Бернулли, считая успехом то, что случайно выбранный респондент поддерживает правительственную программу. Согласно статистическому определению вероятности, вероятность успеха равна $p = \frac{700}{1\,000} = 0,7$. Пусть событие A состоит в том, что в группе из n человек хотя бы один не поддерживает правительственную программу, тогда событие $\overline{A}$ означает, что в группе из n человек все n поддерживают эту программу. $\mathbf{P}\{A\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbf{P}_n(n) =$ $= \{\text{по формуле Бернулли}\} = 1 - \mathrm{C}_n^n p^n (1-p)^0 = 1 - p^n = 1 - 0,7^n$. По условию вероятность $\mathbf{P}\{A\}$ должна быть не меньше 0,9, поэтому $1 - (0,7)^n \geqslant 0,9$ или $(0,7)^n \leqslant 0,1$. Чтобы найти минимальное значение n, при котором выполняется это неравенство, будем последовательно подставлять в него числа 1, 2, 3 и т. д., пока неравенство не удовлетворится: $(0,7)^1{=}0,7; (0,7)^2{=}0,49; (0,7)^3{=}0,343;$ $(0,7)^4{=}0,240; (0,7)^5{=}0,168; (0,7)^6{=}0,118; (0,7)^7{=}0,082$. Видно, что неравенство $(0,7)^n \leqslant 0,1$ не выполняется при $n = 1, 2, \ldots, 6$, но выполняется при $n = 7$, поэтому минимальная численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу, равна 7 чел. ❑

131. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Найти минимальное число билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету.

132. В городе работают 1 000 коммерческих банков, из которых 330 допускают нарушения налогового законодательства. Определить число банков, которые должна отобрать для проверки налоговая инспекция, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среди них оказался хотя бы один нарушитель законодательства.

133. В условиях задачи 132 налоговая инспекция проводит проверку 12 банков, выбирая их случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в ходе этой проверки будет выявлен хотя бы один нарушитель налогового законодательства.

134. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

135. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.

136. **Задача о разделе ставки**[1]**.** Петя и Маша часто играют в бильярд друг с другом, причём Петя выигрывает в два раза чаще, чем Маша. Исходя из этого, они оценили свои вероятности победить как $\frac{2}{3}$ для Пети и $\frac{1}{3}$ для Маши и начали турнир на следующих условиях: каждый выигрыш приносит одно очко, Петя для победы должен набрать двенадцать очков, а Маша — шесть. После того, как Петя набрал восемь очков, а Маша — четыре, игру пришлось прекратить, и победу решили присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Определить, кому присудили победу в этом турнире.

Решение. Очевидно, максимальное количество партий, которое осталось сыграть Пете и Маше, равно пяти (либо Петя выиграет три раза, а Маша — два раза, либо Маша выиграет один раз, а Петя — четыре раза). Поэтому событие, заключающееся в выигрыше Пети (а значит, проигрыше Маши), состоит в том, что Маша из пяти партий не выиграет ни одной или выиграет всего одну. Поэтому вероятность выигрыша Пети равна вероятности того, что в пяти испытаниях Бернулли, в каждом из которых успех интерпретируется как выигрыш Машей очередной партии (т. е. вероятность успеха в каждом испытании составляет $p=\frac{1}{3}$), наступит 0 или 1 успех:

$\mathbf{P}\{\text{выигрыш Пети}\} = \mathbf{P}\{0 \text{ или } 1 \text{ выигрыш Маши из 5 партий}\} = \mathbf{P}_5(0)+\mathbf{P}_5(1) = C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{112}{243}$. При этом $\mathbf{P}\{\text{выигрыш Маши}\} = \mathbf{P}\{\overline{\text{выигрыш Пети}}\} = 1-\mathbf{P}\{\text{выигрыш Пети}\} = 1-\frac{112}{243} = \frac{131}{243}$. Поэтому в данном случае победу должны были присудить Маше. ❑

137. Петя играл с Васей (равносильным противником) в шахматы на приз в 100 руб.: каждый выигрыш приносил одно очко, ничьи не считались. Игра шла до 8 очков. Когда Петя выиграл пять партий, а Вася — три, внезапно погас свет, и игру пришлось прекратить. Как им разделить приз — 100 руб.?

138. **Задача Банаха.** Известный математик Стефан Банах всегда носил с собой две коробки спичек, в каждой из которых первоначально было n спичек. Каждый раз, когда он хотел зажечь спичку, Банах доставал наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он в первый раз вынимал пустую коробку, в другой коробке оказывалось ровно r спичек, где $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Спички брались всего $(2n-r)$ раз, причём n раз из коробки, оказавшейся пустой. Это соответствует n успехам в $(2n-r)$ независимых испытаниях, поэтому вероятность $\mathbf{P}\{A\} = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}$. ❑

139. Вывести формулу Бернулли (2.10).

140. Доказать формулу (2.11) для наивероятнейшего числа успехов в испытаниях Бернулли.

141. Доказать формулу Пуассона (2.12).

142. На лекции по теории вероятностей присутствует 200 человек. Вероятность того, что день рождения случайно выбранного студента приходится на определённый день года, составляет $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что один человек из присутствующих родился 1 января, и два человека родились 8 марта.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный студент родился 1 января, событие N — в том, что k человек из 200 родились 1 января. Тогда по условию $p = \mathbf{P}\{A\} = \frac{1}{365}$.

[1] Такая задача возникает при определении доли инвестора, который хочет «*выйти*» из незавершенного проекта.

Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, где успехом единичного испытания считается наступление события A. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np = \frac{200}{365} = 0,548 < 10$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{200}(k) = \frac{(0,548)^k}{k!} e^{-0,548}$ и при $k = 1$ получаем $\mathbf{P}_{200}(1) = 0,548 e^{-0,548} = 0,317$. Пусть событие M состоит в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $\mathbf{P}\{N \cap M\} = \mathbf{P}\{N\}\mathbf{P}\{M|N\}$, где $\mathbf{P}\{M \mid N\} = \mathbf{P}_{n-k}(m)$ — вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $n - k = 200 - 1 = 199$ велико, а $(n-k)p = \frac{198}{365} = 0,542 < 10$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона: $\mathbf{P}_{n-k}(m) = \frac{(0,542)^m}{m!} e^{-0,542}$. При $n = 200, k = 1, m = 2$ получаем: $\mathbf{P}\{M \mid N\} =$ $= \mathbf{P}_{199}(2) = \frac{(0,542)^2}{2} e^{-0,542} = 0,086$, поэтому искомая вероятность $\mathbf{P}\{N \cap M\} = 0,317 \cdot 0,086 = 0,027$. ❑

143. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

144. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко — вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2 000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

145. Один процент стодолларовых купюр составляют фальшивые, сделанные, однако, довольно искусно, так что операционист обменного пункта десятую их часть принимает за настоящие. Каждый день для обмена приносят примерно 200 стодолларовых купюр (всего — настоящих и фальшивых). Определить: а) вероятность того, что среди них есть хотя бы одна фальшивая; б) наиболее вероятное время, за которое оправдает себя детектор валюты, который стоит 100 долл. и определяет все фальшивые купюры как фальшивые.

146. На праздники Петя и Маша отправились в поход на байдарках. Известно, что при прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью 0,7, полностью ломается с вероятностью 0,1 или получает серьёзное повреждение с вероятностью 0,2. Два серьёзных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении 10 порогов байдарка не будет полностью сломана.

Глава 3. Случайные величины и их числовые характеристики

§3.1. Определение случайной величины и её функции распределения

Случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных событий Ω и измеримая[1] относительно σ-поля событий $\mathcal{S}$. Далее случайные величины

[1] Здесь под *измеримостью* относительно σ-поля $\mathcal{S}$ понимается следующее: для любого $x \in \mathbb{R} : \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}$.

будут обозначаться прописными латинскими буквами (например, X, Y, Z) или строчными греческими (например, ξ, η, ζ).

Законом распределения вероятностей случайной величины называется правило, устанавливающее соответствие между значениями этой случайной величины (или множествами значений) и вероятностями того, что случайная величина примет данное значение (или попадёт в соответствующее множество).

Функцией распределения вероятностей (или, короче, *функцией распределения*) *случайной величины* X называется функция[1]

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\},\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $F(x) \equiv F_X(x)$.

Как числовая функция от числового аргумента x, функция распределения $F(x)$ произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

$$\text{для любого } x \in \mathbb{R}:\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1\,; \tag{3.2}$$

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,; \tag{3.3}$$

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\,; \tag{3.4}$$

$F(x)$ *является неубывающей функцией, т. е. для любых* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *таких, что* $x_1 < x_2$:

$$F(x_1) \leqslant F(x_2)\,; \tag{3.5}$$

$$F(x) \text{ непрерывна слева, т. е. для любого } x \in \mathbb{R}: F(x) = F(x-0) = \lim_{\substack{z\to x\\ z<x}} F(z)\,. \tag{3.6}$$

Для любой случайной величины X и любых чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, таких, что $x_1 < x_2$, вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[x_1; x_2)$ можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)\,. \tag{3.7}$$

Две *случайные величины* X и Y называются *независимыми*, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\{(X < x) \cap (Y < y)\} = \mathbf{P}\{X < x\}\mathbf{P}\{Y < y\}\,, \tag{3.8}$$

т. е. если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.

147. Доказать свойства функции распределения (3.2) – (3.6).

Решение. Для любого $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \mathbf{P}\{X<x\} \in [0;1]$ по свойству ограниченности вероятности (1.40). $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{P}\{X<x\} = \mathbf{P}\{X<-\infty\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$ по свойству (1.40). $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{P}\{X<x\} = \mathbf{P}\{X<+\infty\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$ по аксиоме нормированности вероятности (1.37). Если $x_1 < x_2$, то $F(x_2) = \mathbf{P}\{X<x_2\} = \mathbf{P}\{(X<x_1) \cup (x_1 \leqslant X < x_2)\}$, но поскольку события $\{X < x_1\}$ и $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ несовместны, то по аксиоме аддитивности вероятности (1.38) $F(x_2) = \mathbf{P}\{X<x_1\} + \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} \geqslant F(x_1)$, так как $\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} \geqslant 0$ по аксиоме нормированности вероятности (1.37). $F(x-0) = \lim\limits_{\substack{z\to x\\ z<x}} F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{X < x - \dfrac{1}{n}\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(X < x - \dfrac{1}{n}\right)\right\} = \mathbf{P}\{X < x\} = F(x)$. Свойство (3.6) предлагаем читателю доказать самостоятельно. ❑

---

[1] Под $\{X < x\}$ понимается $\{\omega : X(\omega) < x\}$, т. е. событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение, меньшее чем число x.

148. Доказать формулу (3.7).

149. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ cx^2, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

Найти все возможные значения параметра c.

Решение. Из условия (3.2) следует, что $cx^2\geqslant 0,\ x\in(0;2]$, откуда $c\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Из условия (3.5) следует, что производная $F'(x)\geqslant 0$, значит, $2cx\geqslant 0,\ x\in(0;2]$, откуда $c\in[0;1]$. Условия (3.3), (3.4), (3.6), очевидно, выполнены. Поэтому $c\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. ❑

150. В условиях предыдущей задачи известно, что $F(x)$ непрерывна в точке $x=2$. Найти значение постоянной c, а также $\mathbf{P}\{X\geqslant 1\}$.

Решение. Из условия непрерывности функции $F(x)$ в точке $x=2$ следует, что $cx^2\big|_{x=2}=c\cdot 2^2=4c=1$, откуда $c=\frac{1}{4}$. $\mathbf{P}\{X\geqslant 1\}=1-\mathbf{P}\{X<1\}=1-F(1)=1-\frac{x^2}{4}\bigg|_{x=1}=\frac{3}{4}$. ❑

151. Функция распределения некоторой случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2,\\ (x-a)^2, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

Найти значение постоянной a, а также $\mathbf{P}\{1\leqslant X<2,5\}$.

152. Определить, может ли функция

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ 1-\frac{1}{x}, & x\in[0;1),\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

быть функцией распределения какой-либо случайной величины.

153. Пусть X и Y — независимые случайные величины, $g(x),\ x\in\mathbb{R}$ и $h(y),\ y\in\mathbb{R}$ — некоторые взаимно однозначные функции. Доказать, что случайные величины $U=g(X)$ и $V=h(Y)$ независимы.

§3.2. Дискретные случайные величины и их важнейшие числовые характеристики

Дискретная случайная величина X — это случайная величина, принимающая значения из конечного или счётного множества. Закон распределения дискретной случайной величины задаётся чаще всего не функцией распределения, а *рядом распределения*, т. е. таблицей

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots\\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{array}, \tag{3.9}$$

в которой $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ — расположенные по возрастанию значения дискретной случайной величины X, а $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ — отвечающие этим значениям вероятности. Число столбцов в этой таблице может быть конечным (если соответствующая случайная величина принимает конечное число значений) или бесконечным.

Очевидно,

$$\sum_i p_i = 1\,. \tag{3.10}$$

Кривой распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется при этом ломаная, соединяющая точки $(x_i;\, p_i)$ в порядке возрастания.

По ряду распределения дискретной случайной величины можно восстановить её функцию распределения, и наоборот.

Наиболее употребительной числовой характеристикой центра группирования значений случайной величины является математическое ожидание. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* X называется число

$$\mathbf{M}X = \sum_i x_i p_i\,, \tag{3.11}$$

равное средневзвешенному значению случайной величины с весами-вероятностями.

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими свойствами (здесь X, Y — дискретные случайные величины, а $c \in \mathbb{R}$ – произвольная (неслучайная) постоянная):

$$\mathbf{M}c = c\,; \tag{3.12}$$

$$\mathbf{M}(cX) = c\mathbf{M}X\,; \tag{3.13}$$

$$\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y\,; \tag{3.14}$$

для независимых случайных величин X *и* Y $\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y\,.$ (3.15)

Наиболее употребительной характеристикой степени вариации значений случайной величины (произвольной, не обязательно дискретной) вокруг центра группирования является дисперсия. *Дисперсией случайной величины* X называется число

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2, \tag{3.16}$$

равное математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Для вычисления дисперсии иногда проще использовать формулу

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2\,. \tag{3.17}$$

Для дискретных случайных величин формулы (3.16) и (3.17) принимают вид

$$\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i\,; \tag{3.18}$$

$$\mathbf{D}X = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}X)^2\,. \tag{3.19}$$

соответственно.

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами (как и раньше, X, Y — дискретные случайные величины, $c \in \mathbb{R}$ – неслучайная постоянная):

$$\mathbf{D}c = 0\,; \tag{3.20}$$

$$\mathbf{D}(cX) = c^2\mathbf{D}X\,; \tag{3.21}$$

для независимых случайных величин X *и* Y $\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y\,.$ (3.22)

Средним квадратичным отклонением (или *стандартным отклонением*) *случайной величины* X называется неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии:

$$\sigma_X = +\sqrt{\mathbf{D}X}\,. \tag{3.23}$$

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени (более строго, если вероятность того, что за время Δt наступит ровно k событий, не зависит от начала отсчёта промежутка Δt, а зависит только от его длины).

Поток событий называется *ординарным*, если за малый промежуток времени Δt наступление двух или более событий маловероятно (т. е. если вероятность наступления двух или более событий за малый промежуток времени Δt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события за этот промежуток).

Поток событий называется *потоком с отсутствием последействия*, если будущее наступление событий не зависит от того, как они наступали в прошлом (т. е. если вероятность наступления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, сколько событий уже наступило к началу этого промежутка, и в какие моменты времени они наступили).

Поток событий называется *простейшим*, если он обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия. *Интенсивностью потока* μ называется среднее число событий, наступающих в единицу времени.

Наиболее часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Формула закона распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
альтернативный	$X \sim \mathrm{A}(n;p)$	$X=1$ означает успех в единичном испытании (с вероятностью p), $X=0$ — неудачу (с вероятностью $(1-p)$)	$\mathbf{P}\{X=1\}=p$, $\mathbf{P}\{X=0\}=1-p$	$\mathbf{M}X=p$, $\mathbf{D}X=p(1-p)$
биномиальный	$X \sim \mathrm{Bi}(n;p)$	X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании	$\mathbf{P}\{X=x\}= =\mathrm{C}_n^x p^x(1-p)^{n-x}$, $x=0,1,2,\ldots,n$	$\mathbf{M}X=np$, $\mathbf{D}X=np(1-p)$
геометрический	$X \sim \mathrm{G}(p)$	X — число испытаний Бернулли, которые придётся произвести до первого успеха	$\mathbf{P}\{X=x\}= =p(1-p)^{x-1}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\frac{1}{p}$, $\mathbf{D}X=\frac{1-p}{p^2}$
Пуассона	$X \sim \Pi(\lambda)$	1. X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в единичном испытании, когда n велико (несколько десятков или более), а $\lambda=np<10$.	$\mathbf{P}\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=\lambda$
	$X \sim \Pi(\mu t)$	2. X — число наступлений события простейшего потока с интенсивностью μ за время t	$\mathbf{P}\{X=x\}=\frac{(\mu t)^x}{x!}e^{-\mu t}$, $x=0,1,2,\ldots$	$\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=\mu t$

Способы задания и числовые характеристики дискретных случайных величин

154. Дан ряд распределения (3.9) дискретной случайной величины X. Построить её функцию распределения.

155. Доказать, что функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой (кусочно-постоянной).

156. Дана функция распределения $F(X)$ дискретной случайной величины X. Построить её ряд распределения.

157. Доказать, что для дискретных случайных величин X и Y условие независимости (3.8) эквивалентно следующему условию:

$$\mathbf{P}\{(X = x) \cap (Y = y)\} = \mathbf{P}\{X = x\}\mathbf{P}\{Y = y\}.$$

158. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей. Количество и размеры выигрышей таковы:

Размер выигрыша, руб.	2 000	500	100
Количество билетов	1	4	10

Случайная величина X описывает размер выигрыша на один случайно выбранный билет. Составить ряд распределения случайной величины X. Построить кривую распределения вероятностей. Найти функцию распределения $F_X(x)$ и построить её график. Найти $\mathbf{P}\{X < 500\}$, $\mathbf{P}\{X < 2\,100\}$, $\mathbf{P}\{-100 < X \leqslant 1\,000\}$, средний выигрыш на один билет и дисперсию выигрыша.

159. В результате анализа счетов 400 инвесторов на фондовой бирже получена следующая информация о количестве сделок за последний месяц:

X, количество сделок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество инвесторов	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

Определить вероятности того, что случайно выбранный инвестор произвёл: а) ноль сделок; б) по крайней мере, одну сделку; в) более пяти сделок; г) менее шести сделок.

160. В условиях предыдущей задачи найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа сделок.

161. Банк выдал ссуду в 510 000 руб. под 10% годовых сроком на один год под залог дома клиента. В случае, если дом сгорит, разрушится и т. п. (т. е. произойдёт страховой случай), клиент ничего не вернёт банку, поэтому для уменьшения риска банк обязал клиента приобрести страховой полис на 500 000 руб., заплатив за него 10 000 руб. Дом был оценён экспертами страховой компании в 500 000 руб., а вероятность наступления страхового случая с таким домом в течение года — в 0,001. Составить ряды распределения дохода банка $X_{\text{б}}$ и дохода страховой компании $X_{\text{с/к}}$ за год. Найти ожидаемые доходы банка и страховой компании.

162. Клиент должен вернуть банку кредит до сегодняшнего дня. Неделю назад он отправил денежный перевод из другого города, который до сих пор не дошёл. Время T прибытия денег оценивается клиентом так:

T	1	2	3	4	5
p	$0,3$	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,1$

За каждый день опоздания возврата кредита клиент должен выплатить банку 3% от его суммы (проценты простые). Есть возможность обратиться к частному детективу, который обязуется за 5% от суммы разыскать её в течение дня. Определить, что клиенту выгоднее — обратиться к детективу или ждать прихода денег.

163. Вечером Пете понадобилось обменять валюту. Он знает, что из трёх пунктов обмена валюты, расположенных поблизости, в это время работает лишь один, но не помнит, какой именно. Составить ряд распределения числа N обменных пунктов, которые придётся посетить Пете, если считать, что каждый из пунктов может работать с вероятностью $\frac{1}{3}$. Оценить ожидаемое время T, которое Петя потратит на обмен валюты, если на каждое посещение уходит полчаса.

164. Инвестор рассматривает четыре операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	$0,1$	$0,2$	$0,5$	$0,2$

Q_2	-5	0	5
p	$0,1$	$0,4$	$0,5$

Q_3	-5	0	5	10
p	$0,4$	$0,1$	$0,1$	$0,4$

Q_4	-5	0	10
p	$0,1$	$0,7$	$0,2$

Найти *ожидаемые эффективности операций* $\bar{Q}_i = \mathbf{M}Q_i$ и *риски операций* $r_i = \sqrt{\mathbf{D}Q_i}$, $i = 1,2,3,4$. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето[1].

165. Инвестор рассматривает четыре операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с рядами распределения

Q_1	2	5	8	4
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Q_2	2	3	4	12
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Q_3	3	5	8	10
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Q_4	1	2	4	8
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найти ожидаемые эффективности и риски операций. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето.

166. Инвестор рассматривает три операции со случайными эффективностями, описываемыми случайными величинами Q_1, Q_2, и Q_3 с рядами распределения

Q_1	-5	0	5	10
p	$0,1$	$0,2$	$0,5$	$0,2$

Q_2	-5	0	5	10
p	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,4$

Q_3	-5	0	5	10
p	$0,1$	$0,2$	$0,6$	$0,1$

Найти ожидаемые эффективности и риски операций. Нанести точки $(\bar{Q}_i;\ r_i)$ на единый рисунок. Определить операции, оптимальные по Парето. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q},\ r) = \gamma\bar{Q} - r$, в которой положить коэффициент склонности инвестора к риску $\gamma = 2$, определить лучшую и худшую операции[2]. Предложить какое-нибудь значение γ, при котором лучшая и худшая операции будут другими.

167. Независимые случайные величины X и Y имеют распределения

X	-1	0	1
p	$0,1$	$0,1$	?

Y	-2	2
p	?	$0,7$

где знаком «?» отмечены неизвестные вероятности.

[1] Операция Q_i *доминирует* операцию Q_j, если $\begin{cases} \bar{Q}_i > \bar{Q}_j, \\ \bar{Q}_i \leqslant \bar{Q}_j \end{cases}$ или $\begin{cases} \bar{Q}_i \geqslant \bar{Q}_j, \\ \bar{Q}_i < \bar{Q}_j. \end{cases}$ Операция Q_i называется *оптимальной по Парето*, если не существует операций, которые бы её доминировали.

[2] Операция Q_i *лучше* операции Q_j, если $E(\bar{Q}_i,\ r_i) > E(\bar{Q}_j,\ r_j)$.

Найти $\mathbf{M}X, \mathbf{M}Y, \mathbf{D}X, \mathbf{D}Y$. Составить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$, найти $\mathbf{M}Z$ и $\mathbf{D}Z$, убедиться в справедливости (3.14) и (3.22). Составить ряд распределения случайной величины $V = XY$, найти $\mathbf{M}V$ и $\mathbf{D}V$, убедиться в справедливости (3.15). Составить ряд распределения случайной величины $W = \min\{0, X\}$, найти $\mathbf{M}W$ и $\mathbf{D}W$.

168. Случайная величина X принимает значения 7; 9; 10; 11 и 13 (каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$), а случайная величина Y принимает значения 22; 24; 25; 26; 28 (также каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$). Найти $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{D}Y$, проверить, выполняется ли равенство $\mathbf{D}Y = \mathbf{D}X$.

169. Привести пример зависимых случайных величин, для которых формула (3.15) несправедлива.

170. Выразить $\mathbf{D}(XY)$ для независимых случайных величин X и Y через $\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$, $\mathbf{M}X^2$, $\mathbf{M}Y^2$.

171. Доказать, что для независимых случайных величин X и Y $\mathbf{D}(XY) \geqslant \mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y$.

172. Случайные величины X и Y распределены одинаково:

X, Y	-5	0	5	10
p	$0,1$	$0,2$	$0,5$	$0,2$

Составить ряды распределения случайных величин $Z = X^2$ и $V = XY$.

173. Начальный капитал торговца-«*челнока*» составляет 10 000 руб. Опытные коллеги сказали ему, что после каждой поездки капитал с вероятностью $\frac{1}{2}$ увеличивается в полтора раза, с вероятностью $\frac{1}{4}$ остаётся без изменений и с вероятностью $\frac{1}{4}$ уменьшается в полтора раза. Составить ряд распределения капитала торговца после двух поездок и найти его математическое ожидание.

174. Проект состоит из трёх этапов. Первый и второй этапы можно выполнять параллельно, а третий этап можно начинать только по завершении первых двух. Длительности этапов (в рабочих днях) описываются дискретными случайными величинами T_i $(i = 1, 2, 3)$ с рядами распределения

T_1	2	3	4
p	0,1	0,8	0,1

T_2	2	3	4
p	0,4	0,4	0,2

T_3	2	3	4
p	0,2	0,3	0,5

Найти вероятность того, что от начала работ по проекту до его завершения пройдёт более шести рабочих дней.

175. Доказать свойства математического ожидания (3.13) – (3.15) и свойства дисперсии (3.20) – (3.22) дискретной случайной величины.

176. Доказать формулы (3.18) – (3.19).

177. Петя поехал на каникулы на n дней и решил, что будет ежедневно тратить соответствующую часть денег: в первый день — $\frac{1}{n}$, во второй день — $\frac{1}{n-1}$ от остатка и т. д. Пусть X_i — часть от остатка денег, которая отделяется на расходы в i-й день $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Здраво понимая, что траты каждый день будут различными, Петя решил, что их можно описать независимыми случайными величинами X_i с математическими ожиданиями $\mathbf{M}X_i = \frac{1}{n-i+1}$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = (1-X_1)(1-X_2)\cdots(1-X_n)$, равной остатку денег к последнему дню.

178. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что $\mathbf{M}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X \geqslant k\}$.

179. Пусть X — дискретная случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \frac{X-\mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{M}\overset{\circ}{X} = 0$, $\mathbf{D}\overset{\circ}{X} = 1$.

180. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии альтернативной случайной величины (см. табл. 3.1).

Биномиальное распределение

181. Случайная величина $X \sim \mathrm{Bi}\left(n = 5; p = \frac{2}{3}\right)$. Составить ряд распределения этой случайной величины, найти её функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить график её функции распределения.

182. Построить ожидаемое распределение результатов испытаний, которое было бы получено для 256 абсолютно невежественных экзаменующихся, случайно угадывающих ответы на четыре вопроса с четырьмя возможными вариантами ответа на каждый вопрос (из которых один и только один верен).

Решение. Угадывание каждым экзаменующимся ответов на четыре вопроса можно интерпретировать как $n = 4$ испытания Бернулли. При этом, поскольку экзаменующийся невежествен, для него равновероятны все четыре ответа на каждый вопрос, т. е. вероятность успеха (правильного ответа на вопрос) равна $p = \frac{1}{4}$. Тогда число X угаданных одним экзаменующимся ответов на четыре вопроса представляет собой биномиальную случайную величину $X \sim \mathrm{Bi}\left(n = 4; p = \frac{1}{4}\right)$ и $\mathbf{P}\{X = x\} = \mathrm{C}_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \mathrm{C}_4^x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$, а ожидаемое распределение результатов для 256 экзаменующихся, учитывая их независимость друг от друга, будет иметь следующий вид:

Число правильных ответов, X	0	1	2	3	4	
Число экзаменующихся, $256\mathbf{P}\{X = x_i\}$	81	108	54	12	1	$\sum\limits_{i=0}^{4} 256\mathbf{P}\{X = x_i\} = 256$

❑

183. Абитуриент при поступлении в институт сдаёт четыре экзамена, вероятность успешно сдать каждый экзамен равна 0,8. Случайная величина X описывает число сданных абитуриентом экзаменов (в предположении, что различные экзамены представляют собой независимые испытания). Составить ряд распределения случайной величины X. Определить, каким будет ряд распределения, если место абитуриента займёт студент, сдающий четыре семестровых экзамена.

184. В группе из 16 человек 12 поддерживают некоторую правительственную программу. Из этой группы наудачу отбирают троих человек. Составить ряд распределения числа людей в выборке, поддерживающих программу, найти среднее число таких людей и дисперсию числа таких людей.

185. В банк поступило 30 авизо, среди которых пять фальшивых. Тщательной проверке (которая гарантированно выявляет фальшивые документы) подвергаются десять случайно выбранных авизо. Найти ожидаемое количество выявленных фальшивых авизо.

186. Финансовая операция *форвард* состоит в заключении сделки на продажу (или покупку) в будущем некоторого товара по цене, определяемой сторонами в настоящий момент времени. Фермер предполагает, что через месяц, когда он соберёт урожай, цена пшеницы в каждом из десяти регионов, куда он обычно её продаёт, может с вероятностью 0,9 понизиться и с вероятностью 0,1 повыситься. Поэтому он заключает с десятью мельниками в этих регионах десять форвардов на поставку им пшеницы через месяц по сегодняшней цене. Цены в регионах изменяются независимо. Найти математическое ожидание числа форвардов, которые окажутся выгодными для фермера и вероятность того, что все десять проданных форвардов окажутся для него выгодными (форвард окажется выгодным, если в данном регионе за месяц цена понизится).

187. *Европейским опционом «колл»* называется ценная бумага, дающая её владельцу право (но не обязанность) купить некоторую акцию в заранее определённый момент времени по заранее определённой цене, называемой терминальной стоимостью. Европейским опционом «*пут*» называется ценная бумага, дающая её владельцу право, но не обязанность продать некоторую акцию в заранее определённый момент времени по заранее определённой цене, называемой терминальной стоимостью. Определить рациональную стоимость годовых европейских опционов «*колл*» и «*пут*», если текущая цена акции, на которую выписаны опционы, равна 35, терминальные стоимости опционов совпадают и равны 40, годовая безрисковая процентная ставка составляет 10%, а годовая изменчивость доходности акции равна $\sigma = 20\%$. Расчёты провести по биномиальной модели ценообразования активов, разделяя срок жизни опциона на четыре периода. Составить ряд распределения дохода от исполнения опциона «*колл*».

Решение. Пусть на некоторую акцию, текущая цена которой $S = 35$, выписаны опцион «*колл*» и опцион «*пут*», терминальные стоимости опционов совпадают и равны $X = 40$, годовая безрисковая процентная ставка составляет $r_{\text{год}} = 10\%$ = 0,1, а годовая изменчивость доходности акции $\sigma =$ 20% = 0,2.

Проведем расчёты по биномиальной модели ценообразования опционов, разделяя год на $n = 4$ периода, в каждый из которых цена акции, на которую выписан опцион, может повыситься в u раз, либо понизиться в d раз.

Известно, что $u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$ (*докажите*!), где $T = 1$ г. — срок действия опциона, $n = 4$ — количество периодов в биномиальной модели, σ — годовая изменчивость акции. В случае четырёх периодов $u = u_{(4)} = e^{0,2\sqrt{1/4}} = e^{0,1} \approx 1,105$, $d = d_{(4)} = \dfrac{1}{u_{(4)}} \approx 0,905$.

Скорректируем годовую безрисковую процентную ставку в соответствии с более короткими периодами времени. Очевидно, ставка безрисковых вложений под сложные проценты на один из n периодов выражается через годовую ставку, как $r_{(n)} = (1 + r_{\text{год}})^{\frac{1}{n}} - 1$. Поэтому $r_{(4)} = (1 + r_{\text{год}})^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0,1)^{0,25} - 1 \approx 1,024 - 1 = 0,024$.

Пусть $R_{(4)} = 1 + r_{(4)} = 1,024$. Рассмотрим какой-либо из периодов. Если в его начале цена акции составляла $S_{(i)}$, то к концу периода акция может подорожать до $uS_{(i)}$ с вероятностью

$p_{(n)} = \frac{R_{(n)} - d}{u - d}$ (так как математическое ожидание увеличения цены акции $(1+u)p_{(n)} + (1 - p_{(n)})(1+d)$ должно совпадать с (безрисковым) увеличением суммы на банковском счёте $1 + R_{(n)}$, откуда $p_{(n)} + up_{(n)} + 1 - p_{(n)} + d - dp_{(n)} = 1 + R_{(n)}$ или $(u-d)p_{(n)} = R_{(n)} - d$) или подешеветь до $dS_{(i)}$ с вероятностью $(1 - p_{(n)})$. Для четырёх периодов $p_{(4)} = \frac{R_{(4)} - d}{u - d} = \frac{1{,}024 - 0{,}905}{1{,}105 - 0{,}905} \approx 0,595$.

Процесс изменения цены акции можно представить как последовательность n независимых испытаний, считая успехом повышение цены акции в u раз, а неудачей — её понижение в d раз. Если в течение n периодов цена акции поднималась k раз и опускалась $(n-k)$ раз, то её цена к концу последнего периода составит $S_{(n)} = Su^k d^{n-k}$. Вероятность наступления k повышений и $(n-k)$ понижений цены акции составит по формуле Бернулли $\mathbf{P}_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Составим ряд распределения цены акции к концу четвёртого периода:

$S_{(4)}$	23,478	28,667	35,002	42,737	52,182
p	0,027	0,158	0,348	0,341	0,126

Опцион «*колл*» имеет смысл *исполнять*, т. е. пользоваться заложенным в нём правом покупки акции по цене X, лишь в том случае, когда рыночная цена $S_{(n)}$ этой акции к моменту окончания срока действия опциона, т. е. к концу последнего периода, будет больше X. Если рыночная цена акции $S_{(n)}$ окажется больше X, держатель опциона, исполнив его, получит доход $S_{(n)} - X$. Если же рыночная цена акции $S_{(n)}$ окажется меньше X, держатель опциона просто не будет его исполнять и получит нулевой доход. Таким образом, если цена акции в момент исполнения опциона «*колл*» известна и равна $S_{(n)}$, то доход от исполнения такого опциона составит $\mathbb{C}_{(n)} = \max\{S_{(n)} - X;\ 0\}$. Поскольку цена акции $S_{(n)}$ является случайной величиной, доход от исполнения опциона «*колл*» также является случайной величиной, которая принимает значения $\mathbb{C}_{(n)} = \max\{Su^k d^{n-k} - X;\ 0\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) с вероятностями $\mathbf{P}_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Ряд распределения дохода от исполнения опциона при расчётах по четырехпериодной биномиальной модели имеет следующий вид:

$\mathbb{C}_{(4)}$	0	2,737	12,182
p	$0,027 + 0,158 + 0,348 = 0,533$	0,341	0,126

Ожидаемый доход от исполнения опциона «*колл*», равный математическому ожиданию случайной величины $\mathbb{C}_{(4)}$, составляет $\mathbf{M}\mathbb{C}_{(4)} = \sum_{k=0}^{n} \max\{Su^k d^{n-k} - X;\, 0\}\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 0 \cdot 0,027 + {}$ $+ 0 \cdot 0,158 + 2,737 \cdot 0,341 + 12,182 \cdot 0,126 = 2,468$.

Поскольку оценка опциона происходит перед началом первого периода, для получения его рациональной стоимости $\widehat{\mathbb{C}}_T$ достаточно дисконтировать ожидаемый доход от исполнения опциона на *n* периодов:

$$\widehat{\mathbb{C}}_T = \frac{1}{R_{(n)}^n} \mathbf{M}\mathbb{C}_{(n)} = \frac{1}{R_{(n)}^n} \sum_{k=0}^{n} \max\{Su^k d^{n-k} - X;\ 0\}\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Для четырёхпериодной модели получаем $\widehat{\mathbb{C}}_T = \frac{1}{(1{,}024)^4} \cdot 2,468 \approx 2,245$.

Рациональную стоимость $\widehat{\mathbb{P}}_T$ опциона «*пут*» можно вычислить, воспользовавшись *теоремой о паритете европейских опционов «колл» и «пут»*. Согласно этой теореме, $\widehat{\mathbb{P}}_T - \widehat{\mathbb{C}}_T = X - S$ (*докажите*!), поэтому $\widehat{\mathbb{P}}_T = X - S + \widehat{\mathbb{C}}_T = 40 - 35 + 2,245 = 7,245$. ❑

188. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения (см. табл. 3.1).

Решение. Биномиальную случайную величину $X \sim \mathrm{Bi}(n;p)$ можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределённых альтернативных случайных величин $X_i \sim \mathrm{A}(p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. При этом $\mathbf{M}X_i = p$, $\mathbf{D}X_i = p(1-p)$ (см. задачу 180). По свойству математического ожидания (3.14) $\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i = np$, по свойству дисперсии (3.22) $\mathbf{D}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i = np(1-p)$. ❑

Геометрическое распределение

189. В среднем левши составляют 1% всего населения. Сколько в среднем нужно опросить людей, чтобы набрать десятерых левшей?

Решение. При интерпретации опроса как последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 1\% = 0,01$ число X опрошенных до появления левши в первый раз (так же, как и число опрошенных после появления левши в i-й раз до появления левши в $(i+1)$-й раз) — это геометрическая случайная величина $X \sim \mathrm{G}(p = 0,01)$, и её среднее значение оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}X = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}01} = 100$. Для того, чтобы отобрать десять левшей, учитывая свойство аддитивности математических ожиданий (3.15), в среднем нужно опросить в 10 раз больше людей, т. е. 1 000 людей. ❑

190. Среди выпускаемых заводом автомобилей 80% некомплектны. Определить, сколько автомобилей должен в среднем осмотреть покупатель, чтобы выбрать комплектный автомобиль.

191. Петя захотел найти человека, день рождения которого совпадает с Петиным. Составить ряд распределения числа N незнакомцев, которых придётся опросить Пете, и найти среднее число опрошенных незнакомцев.

192. Заместитель председателя правления банка Аполлон Митрофанович очень любит ходить в казино, и если он туда зашёл, то не выходит, пока на рулетке не выпадет «*зеро*» (то есть число «*ноль*»). Каждый раз Аполлон Митрофанович ставит пять рублей на «*зеро*» и по одному рублю на «*двадцать девять*» и на «*тридцать два*». После этого крупье вращает колесо рулетки, и шарик указывает на одно из чисел от 0 до 36. В случае, когда шарик указывает на число, соответствующее некоторой ставке Аполлона Митрофановича, последний получает выигрыш, в 35 раз больший, чем эта ставка, а те ставки Аполлона Митрофановича, которые не соответствуют выпавшему числу, теряются. Сколько раз играет в среднем Аполлон Митрофанович? Каков его средний выигрыш?

193. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии геометрического распределения (см. табл. 3.1).

Распределение Пуассона

194. Случайная величина $X \sim \Pi(\lambda = 2)$. Определить вероятности $\mathbf{P}\{X = 2\}$, $\mathbf{P}\{X > 1\}$, $\mathbf{P}\{0 < X < 3\}$ и $\mathbf{P}\{X = 1 \mid X > 0\}$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, построить график её функции распределения.

195. Пивной завод отправил в магазин 400 ящиков пива. Вероятность того, что ящик будет разбит при транспортировке в данных условиях, равна 0,005. По приезде в магазин экспедитор, перевозивший груз, заявил, что семь ящиков с пивом были разбиты при транспортировке. Размышляя, можно ли доверять экспедитору, директор магазина хочет найти вероятность разбить семь ящиков, вероятность разбить не менее семи ящиков, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение количества ящиков, разбитых при транспортировке, чтобы оценить возможность потерь, заявленных экспедитором. Найти указанные величины.

196. В банк поступило 4 000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,0001. Найти: а) вероятность того, что при проверке будет обнаружен хотя бы один ошибочно укомплектованный пакет; б) вероятность того, что при проверке будет обнаружено не более трёх ошибочно укомплектованных пакетов; в) математическое ожидание и дисперсию числа ошибочно укомплектованных пакетов.

197. Для продвижения своей продукции на рынок фирма раскладывает по почтовым ящикам рекламные листки. Прежний опыт работы фирмы показывает, что примерно в одном случае из 2 000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 000 рекламных листков поступит хотя бы один заказ, среднее число поступивших заказов и дисперсию числа поступивших заказов.

198. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии распределения Пуассона (см. табл. 3.1).

199. Доказать, что число событий простейшего потока с интенсивностью μ, наступивших за время t, представляет собой случайную величину X, распределённую по закону Пуассона с параметром $\lambda = \mu t$.

200. В диспетчерскую таксопарка поступает простейший поток заказов такси с интенсивностью $\mu = 1{,}2\,\frac{\text{заказа}}{\text{мин}}$. Найти вероятности следующих событий: а) за две минуты не поступит ни одного заказа; б) за две минуты поступит ровно один заказ; в) за две минуты поступит хотя бы один заказ.

201. Магазин имеет два входа, потоки покупателей на этих входах независимы и являются простейшими. Через первый вход проходит в среднем $\mu_1 = 1{,}5\,\frac{\text{чел.}}{\text{мин}}$, а через второй вход – $\mu_2 = 0{,}5\,\frac{\text{чел.}}{\text{мин}}$. Определить вероятность того, что в наугад выбранную минуту хотя бы один человек посетит магазин.

202. Найти функцию распределения интервала времени T между двумя последовательными наступлениями события в простейшем потоке с интенсивностью μ.

§3.3. Непрерывные случайные величины и их важнейшие числовые характеристики

Случайная величина X называется *непрерывной*, если она принимает более, чем счётное число значений.

Случайная величина X называется *абсолютно непрерывной*, если её функция распределения может быть представлена в виде

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)dz\,. \qquad (3.24)$$

При этом функция $f_X(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (или, короче, *плотностью распределения*) *случайной величины* X. График плотности распределения случайной величины X называется *кривой распределения вероятностей* (или, короче, *кривой распределения*) случайной величины X. Всюду ниже в данном параграфе будут рассматриваться абсолютно непрерывные случайные величины, при этом слово «*абсолютно*» будет опускаться.

Как и раньше, если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $f(x) \equiv f_X(x)$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}: f(x) \geqslant 0; \tag{3.25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1; \tag{3.26}$$

$$\text{для всех точек } x \in \mathbb{R}, \text{ в которых существует производная } F'(x): f(x) = F'(x). \tag{3.27}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет конкретное числовое значение, равна нулю:

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}: \mathbf{P}\{X = x\} = 0. \tag{3.28}$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в числовой промежуток можно рассчитать по формуле

$$\text{для всех } c, d \in \mathbb{R}, \text{ таких, что } c < d: \tag{3.29}$$

$$\mathbf{P}\{c \leqslant X \leqslant d\} = \mathbf{P}\{c < X \leqslant d\} = \mathbf{P}\{c \leqslant X < d\} = \mathbf{P}\{c < X < d\} = F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)dx.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3.30}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами (3.12) – (3.15), что и математическое ожидание дискретной случайной величины.

Формулы (3.16) и (3.17) для вычисления *дисперсии непрерывных случайных величин* принимают вид

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 f(x)dx, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2. \tag{3.32}$$

соответственно.

Дисперсия непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами (3.20) – (3.22), что и дисперсия дискретной случайной величины.

Наиболее часто встречающиеся законы распределения непрерывных случайных величин приведены в табл. 3.2.

Способы задания и числовые характеристики непрерывных случайных величин

203. Распределение Парето. Годовой доход случайно выбранного налогоплательщика описывается случайной величиной X с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{c}{x^{3,5}}, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

Найти значение параметра c, функцию распределения годового дохода, средний годовой доход и среднее квадратичное отклонение годового дохода. Определить размер годового дохода $x_{\min}$, не ниже которого с вероятностью 0,5 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

Таблица 3.2

Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Название закона распределения	Краткое обозначение закона	Обозначение случайной величины, механизм её формирования и обозначения параметров закона	Функция и плотность распределения	Выражение математического ожидания и дисперсии через параметры закона
равномерный	$X \sim \mathrm{R}(a;b)$	X — случайная величина, принимающая значения только из некоторого отрезка $[a;b]$, причём с содержательной точки зрения все значения внутри этого отрезка одинаково возможны	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b],\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\mathbf{M}X=\frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}X=\frac{(b-a)^2}{12}$
показательный (экспоненциальный)	$X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$	X — интервал времени между двумя последовательными наступлениями события в простейшем потоке с интенсивностью μ	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \mu e^{-\mu x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\mu x}, & x\geqslant 0\end{cases}$	$\mathbf{M}X=\frac{1}{\mu}$, $\mathbf{D}X=\frac{1}{\mu^2}$
нормальный	$X \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$	$\mathcal{N}(a,\sigma)=X_1+X_2+\dots+X_N$, где $X_1,X_2,\dots,X_N$ — большое число независимых в совокупности случайных величин, воздействие каждой из которых на X равномерно незначительно и равновероятно по знаку (согласно центральной предельной теореме, см. §4.4)	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=$ $=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, $F(x)=$ $=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=$ $=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi_0(x)$ приведены в табл. П.1	$\mathbf{M}X=a$, $\mathbf{D}X=\sigma^2$
логнормальный	$X \sim \mathcal{LN}(a;\sigma)$	$\mathcal{LN}(a;\sigma)=\ln\mathcal{N}(a;\sigma)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma x}\varphi\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right)$, $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right)$	$\mathbf{M}X=ae^{\sigma^2/2}$, $\mathbf{D}X=ae^{\sigma^2/2}\left(e^{\sigma^2/2}-1\right)$
«Хи квадрат» с n степенями свободы	$X \sim \chi_n^2$	$\chi_n^2=\mathcal{N}_1^2(0;1)+\mathcal{N}_2^2(0;1)+\dots+$ $+\mathcal{N}_n^2(0;1)$, где $\mathcal{N}_1(0,1),\mathcal{N}_2(0,1),\dots,$ $\mathcal{N}_n(0;1)$ — независимые в совокупности случайные величины	при $n\leqslant 30$ значения $\chi^2_{n;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{\chi_n^2>\chi^2_{n;p}\}$, приведены в табл. П.2, при $n>30$ $\chi_n^2\approx\frac{\mathcal{N}^2(\sqrt{2n-1};1)}{2}$	$\mathbf{M}\chi_n^2=n$, $\mathbf{D}\chi_n^2=2n$
Стьюдента с n степенями свободы	$X \sim \mathrm{T}_n$	$\mathrm{T}_n=\frac{\mathcal{N}(0;1)}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$, где $\mathcal{N}(0;1)$ и χ_n^2 — независимые случайные величины	при $n\leqslant 30$ значения $t_{n;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{\lvert\mathrm{T}_n\rvert>t_{n;p}\}$, приведены в табл. П.3, при $n>30$ $\mathrm{T}_n\approx\mathcal{N}(0;1)$	$\mathbf{M}\mathrm{T}_n=0$, $\mathbf{D}\mathrm{T}_n=\frac{n}{n-2}$
Фишера с n_1 и n_2 степенями свободы	$X \sim \mathrm{F}_{n_1;n_2}$	$\mathrm{F}_{n_1;n_2}=\frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$, где $\chi^2_{n_1}$ и $\chi^2_{n_2}$ — независимые случайные величины	значения $f_{n_1;n_2;p}$, соответствующие вероятности $p=\mathbf{P}\{\mathrm{F}_{n_1;n_2}>f_{n_1;n_2;p}\}$, приведены в табл. П.4	$\mathbf{M}\mathrm{F}_{n_1n_2}=\frac{n_2}{n_2-2}$, $\mathbf{D}\mathrm{F}_{n_1n_2}=$ $=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$, $n_2>4$

Решение. Параметр c найдём из условия (3.26): $1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dx+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{c}{x^{3,5}}dx=$ $=-\frac{c}{2{,}5}\cdot\frac{1}{x^{2,5}}\Big|_1^{\infty}=\frac{c}{2{,}5}$, откуда $c=2,5$. Таким образом, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{2{,}5}{x^{3,5}}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

Функцию распределения найдем по формуле (3.24): $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dz=0$ при $x<1$,

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{1} f(z)dz+\int\limits_{1}^{x} f(z)dz=\int\limits_{1}^{x}\frac{2{,}5}{z^{3,5}}dt=-\frac{1}{t^{2,5}}\Big|_1^{x}=1-\frac{1}{x^{2,5}}$ при $x\geqslant 1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-\frac{1}{x^{2,5}}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$\mathbf{M}X=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_{1}^{\infty} x\frac{2{,}5}{x^{3,5}}dx=-\frac{2{,}5}{1{,}5}\cdot\frac{1}{x^{1,5}}\Big|_1^{\infty}=\frac{5}{3}$; $\mathbf{D}X=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(\mathbf{M}X)^2=\int\limits_{1}^{\infty} x^2\frac{2{,}5}{x^{3,5}}dx-\left(\frac{5}{3}\right)^2=$ $=-\frac{2{,}5}{0{,}5}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}\Big|_1^{\infty}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=5-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$; $\sigma_X=\frac{2\sqrt{5}}{3}\approx 1,49$.

По условию $\mathbf{P}\{X\geqslant x_{\min}\}=1-\mathbf{P}\{X<x_{\min}\}=1-F(x_{\min})=0,5$, откуда $F(x_{\min})=0,5$, т. е. $1-\frac{1}{x_{\min}^{2,5}}=0,5$ или $x_{\min}^{2,5}=2$, поэтому $\ln x_{\min}=\frac{\ln 2}{2{,}5}\approx\frac{0{,}693}{2{,}5}\approx 0,28$, значит, $x_{\min}\approx e^{0,28}\approx 1,32$. ❑

204. Годовой доход случайно выбранного налогоплательщика описывается случайной величиной X с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{c}{x^4}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

Найти значение параметра c, средний годовой доход и среднее квадратичное отклонение годового дохода. Определить размер годового дохода $x_{\min}$, не ниже которого с вероятностью 0,6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

205. Плотность распределения случайной величины X

$$f_X(x)=\begin{cases}ax, & x\in[0;2],\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$$

Найти значение параметра a, функцию распределения $F_X(x)$, $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$, построить графики функций $f_X(x)$ и $F_X(x)$. Вычислить $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<0,5\}$ двумя способами: используя $f_X(x)$ и $F_X(x)$, отметить эту вероятность на обоих графиках.

206. Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины с функцией распределения

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{x}{4}+0{,}5, & -2\leqslant x<2,\\ 1 & x\geqslant 2.\end{cases}$$

207. Пусть X — непрерывная случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{M}\overset{\circ}{X} = 0$, $\mathbf{D}\overset{\circ}{X} = 1$.

Равномерное распределение

208. Случайная величина $X \sim \mathrm{R}[0;100]$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X > 10\}$, $\mathbf{P}\{40 < X < 90\}$, $\mathbf{P}\{X = 50\}$ и $\mathbf{P}\{X > 50 \mid X < 80\}$, а также математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. $\mathbf{P}\{X > 10\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 10\} = 1 - F(10) = 1 - \frac{10-0}{100-0} = 0,9$; $\mathbf{P}\{40 < X < 90\} = F(90) - F(40) = \frac{90-0}{100-0} - \frac{40-0}{100-0} = 0,5$, $\mathbf{P}\{X = 50\} = 0$, $\mathbf{P}\{X > 50 \mid X < 80\} = \frac{3}{8}$; $\mathbf{M}X = \frac{0+100}{2} = 50$; $\mathbf{D}X = \frac{(100-0)^2}{12} = \frac{2500}{3}$. ❑

209. Найти вероятность того, что сумма значений случайной величины X, определённой в задаче 208, в двух независимо проведённых опытах превысит 80. Задачу решить графически.

210. Все значения равномерно распределённой случайной величины расположены на отрезке [2; 8]. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также вероятности её попадания на отрезок [6; 9] и в интервал (3; 5).

211. При выяснении причин недостачи драгоценных металлов в ювелирном магазине установлено, что их взвешивание производится на весах, цена деления которых равна 0,1 г, а показания весов округляются при взвешивании до ближайшего деления их шкалы, причём округления на любые значения от – 0,05 до 0,05 равновероятны. Оценить возможность возникновения ошибки более, чем на 0,03 г, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение потерь.

212. Решить задачи 47 – 56, пользуясь равномерным распределением вероятностей.

213. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии равномерного распределения (см. табл. 3.2).

Решение. $\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$; $\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2 = \int\limits_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2}{12} - \frac{3a^2-6ab+3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$. ❑

214. Правило трёх сигм. Случайная величина $X \sim \mathrm{R}(a;b)$. Найти $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 3\sigma_X\}$.

215. Случайные величины $X \sim \mathrm{R}(a;b)$ и $Y \sim \mathrm{R}(c;d)$ независимы. Найти $\mathbf{M}(XY)$ и $\mathbf{D}(XY)$.

Показательное распределение

216. Обычно папа ругает Петю за принесённую «*двойку*» около 6 мин. На этот раз нотация длится больше 6 мин. Найти математическое ожидание и дисперсию длительности нотации. Определить, с какой вероятностью папа закончит «*читать нотацию*» в течение ближайшей минуты?

Решение. Длительность нотации X можно считать распределённой по показательному закону. По условию обычная средняя длительность нотации (или её математическое ожидание) составляет $\mathbf{M}X = 6$ мин. Но для показательного распределения $\mathbf{M}X = \frac{1}{\mu}$, откуда $\mu = \frac{1}{\mathbf{M}X} = \frac{1}{6}$. Дисперсия длительности нотации при этом равна $\mathbf{D}X = \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{1/6}\right)^2 = 36$. Вероятность того, что папа закончит «*читать нотацию*» в течение ближайшей (седьмой) минуты при условии, что нотация длится больше 6 мин, равна $\mathbf{P}\{X<7\,|\,X>6\} = \frac{\mathbf{P}\{(X<7)\cap(X>6)\}}{\mathbf{P}\{X>6\}} = \frac{\mathbf{P}\{6<X<7\}}{\mathbf{P}\{X>6\}} = \frac{F(7)-F(6)}{1-F(6)} =$

$= \frac{1-e^{-7/6}-(1-e^{-6/6})}{1-(1-e^{-6/6})} = \frac{e^{-1}-e^{-7/6}}{e^{-1}} = 1-e^{-1/6} \approx 0{,}154.$ ❑

217. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu = 2)$. Определить вероятности $\mathbf{P}\{X > 1\}$, $\mathbf{P}\{X < 2\}$, $\mathbf{P}\{X > -1\}$, $\mathbf{P}\{X = 3\}$ и $\mathbf{P}\{X > 1 \mid X < 3\}$, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

218. Обычно брокер получает от своего клиента приказы об операциях на фондовой бирже раз в неделю. Найти вероятность того, что сегодня поступит приказ, если последний приказ поступил два дня назад. Поток приказов считать простейшим.

219. Обычно совещание длится час. На этот раз за час оно не закончилось. Какова вероятность того, что оно закончится в ближайшие 15 мин. Длительность совещания распределена по показательному закону.

220. Длительность междугородних телефонных разговоров распределена примерно по показательному закону, разговор продолжается в среднем 3 мин. Найти вероятность того, что очередной разговор будет продолжаться более 3 мин. Определить долю разговоров, которые длятся менее 1 мин. Найти вероятность того, что разговор, который длится уже 10 мин, закончится в течение ближайшей минуты, а также математическое ожидание и дисперсию длительности разговора.

221. Время, необходимое для оформления договора, является случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}3\ \frac{\text{договора}}{\text{ч}}$.
Найти вероятность того, что оформление договора займёт менее 7 ч. Найти среднее время оформления договора.

222. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Найти $\mathbf{P}\{a \leqslant X \leqslant b\}$.

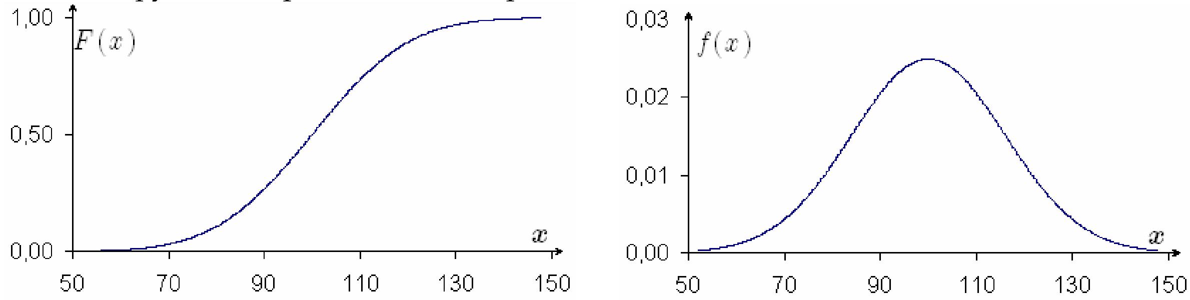
223. Случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. Найти: а) $\mathbf{P}\{0 \leqslant X \leqslant \tau\}$, б) $\mathbf{P}\{t \leqslant X \leqslant t+\tau \mid X \geqslant t\}$.

224. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии показательного распределения (см. табл. 3.2).

Нормальное распределение

225. Значения теста *IQ* (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Записать выражения для функции распределения коэффициента интеллекта и плотности его распределения. Построить графики этих функций.

Решение. $F(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-100)^2}{512}}dz=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-100}{16}\right)$, $f(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{512}}=\frac{1}{16}\varphi\left(\frac{x-100}{16}\right)$, графики этих функций представлены на рис. 3.1. ❑



а) б)

Рис. 3.1. *График функции распределения* **(а)** *и кривая распределения* **(б)** *в задаче 225*

226. В условиях задачи 225 найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта окажется: а) меньше 60; б) меньше 75; в) меньше 95; г) меньше 100; д) меньше 120; е) в пределах от 80 до 120.

227. В условиях задачи 225 найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта отклонится от 100 менее, чем на 48.

228. В условиях задачи 225 найти вероятность того, что из шести независимо отобранных человек у двоих коэффициент интеллекта будет выше 92.

229. Случайная величина $X\sim\mathcal{N}(a=0;\sigma=1)$. Построить кривую распределения этой случайной величины, график её функции распределения. Найти координаты плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ при $x=1;-1;2,25$. Вычислить и указать на обоих графиках следующие вероятности: $\mathbf{P}\{X<1\}$; $\mathbf{P}\{X>-1\}$; $\mathbf{P}\{|X|<1\}$; $\mathbf{P}\{|X|<3\}$; $\mathbf{P}\{0<X<3\}$.

230. Случайная величина $X\sim\mathcal{N}(a=1;\sigma=1)$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X>2\}$, $\mathbf{P}\{X<2\}$, $\mathbf{P}\{0<X<2\}$ и $\mathbf{P}\{X<2\mid X>0\}$.

231. Правило трёх сигм. Случайная величина $X\sim\mathcal{N}(a;\sigma)$. Найти $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}$.

232. Доказать, что для случайной величины $X\sim\mathcal{N}(a;\sigma)$ $\mathbf{P}\{\alpha<X<\beta\}=$
$=\mathbf{P}\{\alpha\leqslant X<\beta\}=\mathbf{P}\{\alpha<X\leqslant\beta\}=\mathbf{P}\{\alpha\leqslant X\leqslant\beta\}=\Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, $\mathbf{P}\{|X-a|<\Delta\}=2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$.

233. Случайная величина $X\sim\mathcal{N}(a=2;\sigma=3)$. Найти вероятности $\mathbf{P}\{X>1\}$, $\mathbf{P}\{-2<X\leqslant 2\}$, $\mathbf{P}\{X<2\}$ и $\mathbf{P}\{X<2\mid X>0\}$. Записать «*правило трёх сигм*» для этой случайной величины.

234. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии нормального распределения (см. табл. 3.2).

235. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб. и средним квадратичным отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятности того, что цена акции окажется: а) не ниже 15,50 руб.; б) не выше 15,00 руб.; в) между 15,10 руб. и 15,40 руб.; г) между 15,05 руб. и 15,10 руб.

236. Цена некоторой акции распределена нормально. В течение последнего года в 20% рабочих дней цена была меньше 20 руб., а в 75% рабочих дней она была больше 25 руб. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение цены этой акции.

237. Из данных, полученных от руководства цеха при его проверке, следует, что брак составляет 5% всей выпускаемой продукции. По данным, полученным из технической документации, установлено, что размер продукции представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 0,2 мм. Величина максимально допустимого отклонения размера детали от номинального, при котором деталь ещё считается годной, составляет 0,3 мм. Оценить с помощью вероятности достоверность информации, полученной от руководства цеха о качестве выпускаемой продукции.

238. При расследовании причин аварии было установлено, что она могла произойти из-за установки на автомобиль детали, размеры которой выходят за пределы допустимого интервала (15 мм; 25 мм). Известно, что размер деталей, поступающих на конвейер автозавода, представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 20 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 5 мм. Оценить вероятность того, что причиной аварии послужила установка на автомобиль детали нестандартного размера.

239. **Правило шести сигм.** Крупнейшие мировые корпорации при статистическом контроле качества продукции переходят в настоящее время на правило шести сигм. Напомним, что правило трёх сигм означает, что некачественная продукция (не попадающая в интервал $(\mathbf{M}X{-}3\sigma_X; \mathbf{M}X{+}3\sigma_X))$ составляет $100-99{,}73=0{,}27\%$, т. е. на каждые 10 000 единиц продукции допустимо изготовление не более, чем 27 некачественных. Пояснить, в чём заключается правило шести сигм: какова допустимая доля некачественной продукции?

Логнормальное распределение

240. Указать недостатки использования нормального распределения для приближения распределений цен активов. Объяснить, как логнормальное распределение используется для преодоления этих недостатков.

241. Вывести формулы для математического ожидания и дисперсии логнормального распределения (см. табл. 3.2).

242. Статистика по вкладам населения в некоторый банк говорит о том, что размер вклада случайно выбранного клиента распределён по логнормальному закону с параметрами $a = 1\,200$ ден. ед., $\sigma = 2$ ден. ед. Определить: а) средний размер вклада; б) долю клиентов, размер вклада которых составляет не менее 1 000 ден. ед.

243. Месячный доход случайно выбранной семьи из некоторой социальной группы описывается логнормальным законом распределения с математическим ожиданием 1 000 ден. ед. и средним квадратичным отклонением 600 ден. ед. Найти долю семей, имеющих доход менее 1 500 ден. ед.

Другие законы распределения

244. Вычислить: а) $\mathbf{P}\{\chi^2_{20}{>}10{,}9\}$; б) $\mathbf{P}\{\chi^2_{20} < 28{,}4\}$; в) $\mathbf{P}\{8{,}26 \leqslant \chi^2_{20} < 31{,}4\}$; г) $\mathbf{P}\{\chi^2_{40} > 10{,}9\}$; д) $\mathbf{P}\{\chi^2_{40} < 28{,}4\}$; е) $\mathbf{P}\{8{,}26 \leqslant \chi^2_{40} < 31{,}4\}$.

245. Найти: а) $\mathbf{P}\{|T_{10}|<2,23\}$; б) $\mathbf{P}\{-1,81<T_{10}<3,17\}$; в) $\mathbf{P}\{-1,81<T_{40}<3,17\}$.

246. Найти $\mathbf{P}\{|F_{3;16}|>3,24\}$.

247. Треугольное распределение (распределение Симпсона). Плотность распределения случайной величины X изображена на рис. 3.2. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

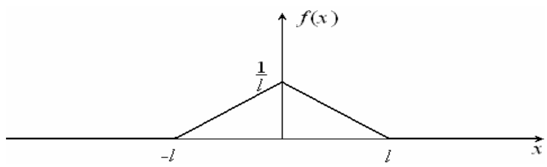


Рис. 3.2. *График плотности треугольного распределения*

248. Распределение Рэлея. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины X, плотность распределения которой имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Решение. Очевидно, $F(x)\equiv 0$ при $x<0$. При $x\geqslant 0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(r)dr=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dr+$

$$+\int\limits_0^x \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\int\limits_0^x e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}\frac{2r}{2\sigma^2}dr=-\int\limits_0^x e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}d\left[-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2\right]=-e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}\Big|_0^x=-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}+e^0=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\mathbf{M}X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} rf(r)dr=\int\limits_{-\infty}^{0} r\cdot 0dr+\int\limits_0^{+\infty} r\cdot\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}2\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2e^{-\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\left\{\text{замена}\quad t=\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}\right\}=$$

$$=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}2t^2e^{-t^2}dt=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}t\cdot 2te^{-t^2}dt=-\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}t\cdot e^{-t^2}d(-t^2)=-\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}t\cdot de^{-t^2}=\{\text{по частям}\}=$$

$$=-\sigma\sqrt{2}\left(t\cdot e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\{\text{замена } u=\sqrt{2}t\}=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}du=$$

$$=\sigma\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}du=\sigma\sqrt{2\pi}\Phi_0(+\infty)=\sigma\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\ \square$$

§3.4. Производящая функция, моменты, мода, медиана и квантили случайной величины

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени случайной величины X:

$$\nu_k(X)=\mathbf{M}(X^k),\ k=0,1,2\ldots. \tag{3.33}$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины X от своего математического ожидания:

$$\mu_k(X)=\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)^k],\ k=0,1,2,\ldots. \tag{3.34}$$

Справедливы следующие выражения для центральных моментов:

$$\mu_0(X)=\nu_0(X)=1; \tag{3.35}$$

$$\mu_1(X)=0; \tag{3.36}$$

$$\mu_2(X)=\nu_2(X)-\nu_1^2(X); \tag{3.37}$$

$$\mu_3(X) = \nu_3(X) - 3\nu_1(X)\nu_2(X) + 2\nu_1^3(X); \tag{3.38}$$

$$\mu_4(X) = \nu_4(X) - 4\nu_1(X)\nu_3(X) + 6\nu_1^2(X)\nu_2(X) - 3\nu_1^4(X). \tag{3.39}$$

Производящей функцией случайной величины X называется функция от параметра t (вообще говоря, комплексного), равная

$$m_X(t) = \mathbf{M}e^{tX}. \tag{3.40}$$

Как и раньше, если известно, о какой случайной величине идёт речь, то индекс, обозначающий эту случайную величину, опускается: $m(t) \equiv m_X(t)$.

Начальные моменты случайной величины X выражаются через производные её производящей функции[1]:

$$\textit{для всех } k = 0, 1, 2, \ldots: \ \nu_k(X) = m_X^{(k)}(0), \tag{3.41}$$

где $m_X^{(k)}(t)$ — k-я производная функции $m_X(t)$.

Если $t = iu$ (где $i = \sqrt{-1}$), то производящая функция переходит в *характеристическую функцию*, широко используемую в фундаментальной теории вероятностей и теории меры.

Производящая функция случайной величины обладает следующими свойствами:

$$m_{cX}(t) = m_X(ct); \tag{3.42}$$

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t) \tag{3.43}$$

(здесь X, Y — *независимые* случайные величины, c — неслучайная постоянная).

В качестве показателя центра группирования значений случайной величины, наряду с математическим ожиданием, используются также *медиана* и *мода*.

Медианой абсолютно непрерывной случайной величины X называется такое число $\mathbf{Me}X$, что

$$\mathbf{P}\{X < \mathbf{Me}X\} = P\{X > \mathbf{Me}X\} = 0{,}5. \tag{3.44}$$

Медиана $\mathbf{Me}X$ *дискретной случайной величины* X (заданной рядом распределения (3.9) — это любое число, которое находится на отрезке $[x_l; x_{l+1}]$, определяемом из условий

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \leqslant 0{,}5; \sum_{i=1}^{l+1} p_i > 0{,}5, \tag{3.45}$$

и называемом *медианным*. В качестве медианы $\mathbf{Me}X$ обычно используют значение, получаемое линейной аппроксимацией:

$$\mathbf{Me}X = x_l + \frac{x_{l+1} - x_l}{p_{l+1}}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{l} p_i\right). \tag{3.46}$$

Модой абсолютно непрерывной случайной величины X называется точка локального максимума плотности распределения:

$$f_X(\mathbf{Mo}X) = \max_{x\in\mathbb{R}} f_X(x). \tag{3.47}$$

Модой дискретной случайной величины X называется значение этой случайной величины, соответствующее наибольшей вероятности:

$$\mathbf{Mo}X = x_i, \text{ такое, что } p_i = \max_j p_j. \tag{3.48}$$

Распределения, имеющие одну моду, называются *одномодальными*.

Коэффициент асимметрии $\mathbf{A}_X$ *случайной величины* X характеризует скошенность кривой распределения этой случайной величины относительно её математического ожидания и вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}_X = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3}. \tag{3.49}$$

[1] Если эти производные существуют.

Обычно $|\mathbf{A}_X| < 2$. Для симметричных распределений $\mathbf{A}_X = 0$, если левая ветвь кривой распределения длиннее правой, то $\mathbf{A}_X < 0$, если же левая ветвь кривой распределения короче правой, то $\mathbf{A}_X > 0$.

Эксцесс $\mathbf{E}_X$ *случайной величины* X характеризует островершинность кривой распределения этой случайной величины по сравнению с кривой нормального распределения и вычисляется по формуле

$$\mathbf{E}_X = \frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4} - 3. \tag{3.50}$$

Обычно $-1 \leqslant \mathbf{E}_X \leqslant 6$. Для нормального распределения $\mathbf{E}_{\mathcal{N}(a;\sigma)} = 0$; если кривая распределения случайной величины X имеет менее острую вершину, чем кривая нормального распределения, то $\mathbf{E}_X < 0$; если кривая распределения случайной величины X имеет более острую вершину, чем кривая нормального распределения, то $\mathbf{E}_X > 0$.

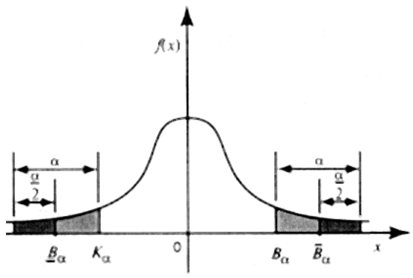


Рис. 3.3. *Критические границы*

Левосторонней критической границей (*или квантилью*) уровня α случайной величины X называется такое число K_α, что

$$F_X(K_\alpha) = \alpha, \tag{3.51}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X < K_\alpha\} = \alpha$.

Правосторонней критической границей уровня α случайной величины X называется такое число B_α, что

$$F_X(B_\alpha) = 1 - \alpha, \tag{3.52}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X \geqslant B_\alpha\} = \alpha$.

Левосторонняя и правосторонняя критические границы одного и того же уровня α связаны между собой соотношением

$$K_\alpha = B_{1-\alpha}. \tag{3.53}$$

Двусторонними критическими границами уровня α случайной величины X называются такие числа $\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha$, что

$$F_X(\underline{B}_\alpha) = \frac{\alpha}{2};\ F_X(\overline{B}_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \tag{3.54}$$

т. е. $\mathbf{P}\{X < \underline{B}_\alpha\} = \mathbf{P}\{X \geqslant \overline{B}_\alpha\} = \frac{\alpha}{2}$.

Между односторонними и двусторонними критическими границами случайной величины X существуют следующие соотношения

$$\underline{B}_\alpha = K_{\alpha/2} = B_{1-\alpha/2};\ \overline{B}_\alpha = K_{1-\alpha/2} = B_{\alpha/2}. \tag{3.55}$$

Для стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0;1)$ двусторонние критические границы уровня α симметричны и имеют специальные обозначения $\underline{B}_\alpha = -u_\alpha, \overline{B}_\alpha = u_\alpha$, при этом

$$\Phi_0(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}. \tag{3.56}$$

На рис. 3.3 указаны левосторонняя, правосторонняя и двусторонние критические границы для некоторого распределения.

249. Доказать формулы (3.35) – (3.39).

250. Случайная величина X имеет производящую функцию $m_X(t) = 0{,}2 + 0{,}3e^t + 0{,}1e^{2t} + 0{,}4e^{4t}$. Составить ряд распределения этой случайной величины, найти её математическое ожидание и дисперсию, а также производящую функцию случайной величины $Y = X^2$.

251. Найти производящую функцию случайной величины, заданной рядом распределения

X	-1	0	1
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

252. Доказать формулу (3.41).

253. Доказать свойства производящей функции (3.42) – (3.43).

254. Найти производящую функцию случайной величины, распределённой по нормальному закону.

Решение. $m_X(t) = \mathbf{M}e^{tX} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x(a+\sigma^2t)+a^2+2a\sigma^2t-2a\sigma^2t+\sigma^4t^2-\sigma^4t^2\right)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)^2} e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}} dx =$$

$$= e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)^2} dx = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left(\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{+\infty-a-\sigma^2t}{\sigma}\right)\right) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$ ❑

255. Найти четвёртый начальный момент случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Решение. Производящая функция $m_X(t) = e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$, её производные $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)' = te^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)'' = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(3)} = 3te^{\frac{t^2}{2}} + t^3e^{\frac{t^2}{2}}$, $\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(4)} = 3e^{\frac{t^2}{2}} + 6t^2e^{\frac{t^2}{2}} + t^4e^{\frac{t^2}{2}}$, поэтому четвёртый начальный момент $\nu_4(X) = \left.\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^{(4)}\right|_{t=0} = \left.\left(3e^{\frac{t^2}{2}} + 6t^2e^{\frac{t^2}{2}} + t^4e^{\frac{t^2}{2}}\right)\right|_{t=0} = 3$. ❑

256. Найти производящую функцию и с её помощью вычислить математическое ожидание для случайной величины $X \sim \mathrm{G}(p)$.

257. Найти производящую функцию для случайной величины $X \sim \mathrm{R}(a;b)$.

258. Найти производящую функцию, второй начальный и третий центральный моменты для случайной величины $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$.

259. Доказать, что величина $\mathbf{M}(X-c)^2$ достигает своего наименьшего значения при $c = \mathbf{M}X$.

260. Найти моду и медиану случайной величины $X \sim \mathrm{R}(a;b)$.

261. Найти моду и медиану случайной величины $X \sim \mathrm{Exp}(\mu)$.

262. Пусть X — некоторая случайная величина, $Y = aX + b$ (a и b — неслучайные постоянные, $a \neq 0$). Доказать, что $\mathbf{A}_Y = \begin{cases} \mathbf{A}_X, & a > 0, \\ -\mathbf{A}_X, & a < 0, \end{cases}$, $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_X$.

263. Пусть X — некоторая случайная величина, $\overset{\circ}{X} = \dfrac{X-\mathbf{M}X}{\sigma_X}$. Доказать, что $\mathbf{A}_{\overset{\circ}{X}} = \mathbf{A}_X$, $\mathbf{E}_{\overset{\circ}{X}} = \mathbf{E}_X$.

264. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$.

265. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim \Pi(\lambda)$.

266. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины $X \sim \mathrm{R}(a; b)$.

267. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины X, имеющей *распределение Лапласа* с плотностью $f(x) = \dfrac{\mu}{2} e^{-\mu|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

268. Найти для случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$: а) 2,5%-ную и 97,5%-ную квантили ; б) 5%-ную правостороннюю критическую точку.

269. Найти 5%-ную и 95%-ную квантили распределений: а) T_{10}; б) χ^2_{20}.

270. Найти 5%-ную и 95%-ную квантили распределения $\mathrm{F}_{2;3}$.

§3.5. Многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — это совокупность случайных величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве Ω.

Закон распределения вероятностей многомерной случайной величины задаётся её функцией распределения

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{(X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \cdots \cap (X_n < x_n)\},$$

которая является числовой функцией многих переменных и (как вероятность) принимает значения на отрезке $[0; 1]$.

Функция распределения многомерной случайной величины обладает следующими свойствами.

$$\text{для всех } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}: \ 0 \leqslant F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1; \qquad (3.57)$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ не убывает по каждому аргументу}; \qquad (3.58)$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ непрерывна слева по каждому аргументу}; \qquad (3.59)$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -\infty) = 0; \qquad (3.60)$$

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, +\infty) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \qquad (3.61)$$

В отличие от одномерного случая, выполнение свойств (3.57) – (3.61) для некоторой функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не гарантирует, что эта функция является функцией распределения некоторой многомерной случайной величины.

Многомерные случайные величины, так же, как и одномерные, могут быть *дискретными* (когда наборы возможных значений образуют конечное или счётное множество) или *непрерывными* (когда множество наборов возможных значений несчётно).

Всюду ниже в данном параграфе будут рассматриваться двумерные случайные величины.

Вероятность попадания двумерной случайной величины в полуоткрытый прямоугольник равна

$$\mathbf{P}\{(a_1 \leqslant X_1 < b_1) \cap (a_2 \leqslant X_1 < b_2)\} = \qquad (3.62)$$
$$= F_{X_1, X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(b_1, a_2) + F_{X_1, X_2}(a_1, a_2).$$

Если дополнительно к условиям (3.57) – (3.61) потребовать от функции $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неотрицательности величины

$$F_{X_1, X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1, X_2}(b_1, a_2) + F_{X_1, X_2}(a_1, a_2)$$

для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $b_1 \geqslant a_1, b_2 \geqslant a_2$, то тогда эта функция обязательно будет являться функцией распределения некоторой двумерной случайной величины.

Двумерные дискретные случайные величины удобно задавать с помощью таблиц распределения

$$\begin{array}{c|cccccc} Y \backslash X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline y_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ y_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_m & p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}. \tag{3.63}$$

В такой таблице заголовки столбцов x_j соответствуют всем возможным значениям первой компоненты X, а названия строк y_i — всем возможным значениям второй компоненты Y. При этом в клетку, находящуюся в i-й строке и в j-м столбце, записывается значение вероятности $p_{ij} = \mathbf{P}\{(X = x_j) \cap (Y = y_i)\}$. Естественно,

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1\,. \tag{3.64}$$

Функция распределения двумерной дискретной случайной величины равна

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_j < x} \sum_{y_i < y} p_{ij}\,. \tag{3.65}$$

Законы распределения каждой из компонент такой двумерной случайной величины (так называемые *маргинальные законы распределения*) восстанавливаются по таблице распределения (3.63) при помощи формул

$$\mathbf{P}\{X = x_j\} = \sum_i p_{ij},\ \mathbf{P}\{Y = y_i\} = \sum_j p_{ij}\,. \tag{3.66}$$

Двумерная случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если её функция распределения может быть представлена в виде

$$F_{XY}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x, y)dy \right) dx\,, \tag{3.67}$$

при этом функция $f_{XY}(x, y)$ называется *плотностью распределения двумерной случайной величины* $(X;Y)$.

Плотность распределения абсолютно непрерывной двумерной случайной величины обладает следующими свойствами:

$$\text{\textit{для всех} } x, y \in \mathbb{R}: f_{XY}(x, y) \geqslant 0\,; \tag{3.68}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy \right) dx = 1\,, \tag{3.69}$$

причём любая функция, обладающая этими свойствами (3.68) – (3.69), является плотностью распределения некоторой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины.

Если функция распределения абсолютно непрерывной двумерной случайной величины $(X;Y)$ имеет смешанную частную производную $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$, то плотность распределения $f_{XY}(x, y)$ равна этой частной производной:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)\,. \tag{3.70}$$

Если абсолютно непрерывная двумерная случайная величина $(X;Y)$ имеет плотность $f_{XY}(x,y)$, то одномерные случайные величины X и Y также являются абсолютно непрерывными, и их плотности можно рассчитать по формулам

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)dx\,. \tag{3.71}$$

Свойство (3.71) справедливо только для *двумерных* абсолютно непрерывных случайных величин. В случае $n > 2$ это свойство выглядит существенно иначе.

Напомним[1], что две *случайные величины* X и Y называются *независимыми*, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\{(X < x) \cap (Y < y)\} = \mathbf{P}\{X < x\}\mathbf{P}\{Y < y\}\,, \tag{3.72}$$

т. е. если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.

Для дискретных случайных величин X и Y условие независимости (3.8) эквивалентно условию

$$\mathbf{P}\{(X = x) \cap (Y = y)\} = \mathbf{P}\{X = x\}\mathbf{P}\{Y = y\}\,, \tag{3.73}$$

а для абсолютно непрерывных случайных величин — условию

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)\,. \tag{3.74}$$

Для измерения зависимости случайных величин вводится *ковариация* случайных величин X и Y

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)]\,. \tag{3.75}$$

Последняя формула легко преобразуется к виду

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y\,. \tag{3.76}$$

Ковариация случайных величин обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)\,,\ \operatorname{cov}(X,X) = \mathbf{D}X\,, \tag{3.77}$$

$$\operatorname{cov}(\alpha X,Y) = \alpha \operatorname{cov}(X,Y)\,,\ \operatorname{cov}(X+Y,Z) = \operatorname{cov}(X,Z) + \operatorname{cov}(Y,Z)\,, \tag{3.78}$$

$$\textit{для независимых случайных величин } X \textit{ и } Y \ \operatorname{cov}(X,Y) = 0\,. \tag{3.79}$$

Для случайных величин X и Y, имеющих тенденцию изменяться одновременно в одну и ту же сторону, $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$, для случайных величин X и Y, имеющих тенденцию изменяться одновременно в разные стороны, $\operatorname{cov}(X,Y) < 0$.

Дисперсия суммы произвольных (зависимых или независимых) случайных величин рассчитывается по формуле

$$\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\operatorname{cov}(X,Y)\,. \tag{3.80}$$

Ковариация может принимать произвольные вещественные значения, поэтому не вполне пригодна к использованию в качестве меры связи случайных величин. Для этого лучше подходит *коэффициент корреляции* случайных величин X и Y

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X \sigma_Y}\,. \tag{3.81}$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

$$\textit{для любых случайных величин } X \textit{ и } Y:\ -1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1\,; \tag{3.82}$$

$$\textit{для независимых случайных величин } X \textit{ и } Y:\ \rho(X,Y) = 0\,; \tag{3.83}$$

для линейно связанных случайных величин X *и* $Y = aX + b$ *(* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *) и только для них*:

$$|\rho(X,Y)| = 1\,. \tag{3.84}$$

Если коэффициент корреляции $\rho(X,Y) = 0$, то это не обязательно означает независимость случайных величин X, Y. В этом случае говорят, что данные случайные величины *некоррелированны*. Из независимости следует некоррелированность, но наоборот — не всегда.

---

[1] См. формулу (3.8) в §3.1.

Случайная величина, которая задаётся плотностью распределения

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}, \tag{3.85}$$

называется распределённой по *двумерному нормальному закону*.

При этом её компоненты X_1 и X_2 распределены по одномерным нормальным законам с математическими ожиданиями a_1 и a_2 соответственно и средними квадратичными отклонениями σ_1 и σ_2 соответственно, а параметр ρ равен коэффициенту корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

271. Доказать свойства функции распределения многомерной случайной величины (3.57) – (3.61).

272. Доказать формулу (3.62).

273. Доказать, что функция

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & x_1\leqslant 0,\ x_2\leqslant 0 \text{ или } x_1+x_1\leqslant 1,\\ 0, & \text{иначе, т. е. когда одновременно } x_1>0,\ x_2>0 \text{ и } x_1+x_1>1\end{cases}$$

удовлетворяет всем свойствам (3.57) – (3.61), но при этом не является функцией распределения случайной величины.

Решение. Предположим, что $F(x_1,x_2)$ описывает некоторую случайную величину (X_1,X_2). Вероятность $\mathbf{P}\{(0,1\leqslant X_1<1,1)\cap(0,1\leqslant X_1<1,1)\}=F(1,1;\,1,1)-F(0,1;\,1,1)-F(1,1;\,0,1)+F(0,1;\,0,1)=$ $=1-1-1+0=-1$, что противоречит аксиоме неотрицательности вероятности (1.36). Между тем справедливость свойств (3.57) – (3.61) легко проверить (предоставляем это читателю. ❑

274. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана функцией распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти $\mathbf{P}\left\{\left(0\leqslant X<\frac{\pi}{4}\right)\cap\left(\frac{\pi}{6}\leqslant Y<\frac{\pi}{3}\right)\right\}$.

275. Доказать формулу (3.66).

276. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;\,Y)$:

Y \ X	−1	0	1
0	0	0,1	0,4
1	0,2	0,2	0,1

Составить ряды распределения её компонент X и Y. Определить вероятность $\mathbf{P}\{X<Y\}$.

Решение. Вначале составим ряды распределения случайных величин X и Y. Случайная величина X принимает значения –1; 0 и 1 с вероятностями 0,2 = 0 + 0,2; 0,3 = 0,1 + 0,2 и 0,5 = 0,4 + 0,1 соответственно. Таким образом, эта случайная величина имеет ряд распределения

X	−1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Аналогично получаем ряд распределения случайной величины Y:

Y	0	1
p	0,5	0,5

Вероятность $\mathbf{P}\{X<Y\}=\mathbf{P}\{(X=-1)\cap(Y=0)\}+\mathbf{P}\{(X=-1)\cap(Y=1)\}+\mathbf{P}\{(X=0)\cap(Y=1)\}=0+0,2+0,2=0,4$. ❑

277. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана функцией распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}-2^{-x-y} & x\geqslant 0, y\geqslant 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины.

278. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{2}, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant y<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины.

279. Доказать, что плотность распределения любой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины обладает свойствами (3.68) – (3.69).

280. Доказать, что любая функция, обладающая свойствами (3.68) – (3.69), является плотностью распределения некоторой абсолютно непрерывной двумерной случайной величины.

281. Доказать формулу (3.70).

282. Доказать, что для любых абсолютно непрерывных двумерных случайных величин справедливо свойство (3.71).

Доказательство. По свойству (3.61) $F_X(x)=F_{XY}(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F_{XY}(x,y)=$ $=\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y}f_{XY}(u,v)dv\right)du=\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x}\underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(u,v)dv\right)}_{f_X(x)}du$, что и требовалось доказать. Вторая часть доказывается аналогично. ❑

283. Доказать условие независимости дискретных случайных величин (3.73).

284. Доказать условие независимости абсолютно непрерывных случайных величин (3.74).

285. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

Y \ X	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,3
2	0,1	0,05	0,1

Здесь случайная величина X описывает доход инвестиционной компании на рынке акций, а случайная величина Y — доход на рынке облигаций. Составить ряды распределения её компонент X и Y, а также условный закон распределения компоненты X при условии $Y=2$. Выяснить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти закон распределения суммарного дохода компании $X+Y$.

286. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения $f(x,y)=c\cdot e^{-x^2-2xy-4y^2}$. Найти неслучайную постоянную c, плотности распределения случайных величин X и Y, выяснить, зависимы ли маргинальные случайные величины X и Y.

287. Доказать формулу (3.76).

Доказательство. По свойствам математического ожидания $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)(Y-\mathbf{M}Y)]=$ $=\mathbf{M}(XY-Y\cdot\mathbf{M}X-X\cdot\mathbf{M}Y+\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}Y\cdot\mathbf{M}X-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y+\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y$. ❑

288. Доказать свойства ковариации (3.77) – (3.80).

Доказательство. $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}(YX)-\mathbf{M}Y\cdot\mathbf{M}X=\operatorname{cov}(Y,X)$; $\operatorname{cov}(X,X)=$ $=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2=\mathbf{D}X$; для независимых случайных величин X и Y $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-$ $-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=0$. ❑

289. В условиях задачи 276 найти ковариацию случайных величин X и Y.

Решение. Чтобы найти $\mathbf{M}(XY)$, перемножим все возможные значения x_j, y_i и соответствующих вероятностей p_{ij} из таблицы распределения данной случайной величины и произведения сложим: $\mathbf{M}(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_jy_i\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_jy_ip_{ij}=0\cdot(-1)\cdot 0+0\cdot 0\cdot 0{,}1+$ $+0\cdot 1\cdot 0{,}4+1\cdot(-1)\cdot 0{,}2+1\cdot 0\cdot 0{,}2+1\cdot 1\cdot 0{,}1=0+0+0-0{,}2+0+0{,}1=-0{,}1$. $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$ найдём по рядам распределения случайных величин X и Y, полученным в задаче 276: $\mathbf{M}X=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5=0{,}3$, $\mathbf{M}Y=0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}5=0{,}5$. Поэтому $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=$ $=-0{,}1-0{,}3\cdot 0{,}5=-0{,}25$. ❑

290. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, если двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sin x\cdot\sin y, & 0\leqslant x<\pi,\ 0\leqslant y<\pi,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

291. Доказать свойства коэффициента корреляции (3.82) – (3.84).

Доказательство. Докажем последнее из названных свойств (справедливость первых двух читатель легко проверит самостоятельно). По свойствам математического ожидания и дисперсии

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathbf{M}[X(aX+b)]-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}(aX+b)}{\sigma_X\sigma_{aX+b}}=\frac{a(\mathbf{M}X^2)+b\mathbf{M}X-a(\mathbf{M}X)^2-b\cdot\mathbf{M}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{\mathbf{M}[(aX+b)^2]-(a\mathbf{M}X+b)^2}}=$$

$$=\frac{a\mathbf{D}X+b(\mathbf{M}X-\mathbf{M}X)}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{a^2\mathbf{M}(X^2)+2ab\mathbf{M}X+b^2-a^2(\mathbf{M}X)^2-2ab\mathbf{M}X-b^2}}=\frac{a\cdot\mathbf{D}X}{|a|\cdot|\mathbf{D}X|}=\begin{cases}-1, & a<0,\\ 1 & a>0,\end{cases}$$

поэтому $|\rho(X,Y)|=1$. ❑

292. В условиях задачи 276 найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

Решение. Найдём $\mathbf{M}(X^2)=(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}5=0{,}7$ и $\mathbf{M}(Y^2)=0^2\cdot 0{,}5+1^2\cdot 0{,}5=0{,}5$. Отсюда $\mathbf{D}X=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2=0{,}7-(0{,}3)^2=0{,}61$, $\mathbf{D}Y=\mathbf{M}(Y^2)-(\mathbf{M}Y)^2=0{,}5-(0{,}5)^2=0{,}25$ ($\mathbf{M}X=0{,}3$ и $\mathbf{M}Y=0{,}5$ были получены в задаче 289). Поэтому $\sigma_X=\sqrt{\mathbf{D}X}=\sqrt{0{,}61}\approx 0{,}78$, $\sigma_Y=\sqrt{\mathbf{D}Y}=\sqrt{0{,}25}\approx 0{,}5$. Окончательно получаем $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{-0{,}25}{0{,}78\cdot 0{,}5}\approx -0{,}64$. ❑

293. Пусть X, Y, Z — независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Проверить, могут ли случайные величины $X+Z$ и $Y+Z$ быть: а) зависимыми; б) независимыми.

294. Доказать, что если $\overset{\circ}{X} = \frac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$, $\overset{\circ}{Y} = \frac{Y - \mathbf{M}Y}{\sigma_Y}$ (где X и Y — некоторые случайные величины), то $\rho\left(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}\right) = \rho(X, Y)$.

295. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X; Y)$:

$Y \backslash X$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти ковариацию и коэффициент корреляции её компонент X и Y.

296. Петя вычислил ковариацию роста X спортсменов из институтской баскетбольной команды, измеренного в см, и скорости бега Y (тех же спортсменов), измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Маша для той же совокупности баскетболистов вычислила ковариацию роста X, измеренного в м, и скорости бега Y, измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить, в каком отношении находятся эти ковариации.

297. В условиях предыдущей задачи сравнить коэффициенты корреляции, полученные Петей и Машей.

298. Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y равны соответственно 5 и 4. Определить наибольшее возможное значение $\operatorname{cov}(X, Y)$.

299. Случайные величины X и Y — число появлений событий простейшего потока в интервалах времени $(0; t)$ и $(0; t+\tau)$ соответственно. Найти $\rho(X, Y)$.

Решение. Пусть случайная величина Z — число появлений событий простейшего потока в интервале $(t; t+\tau)$. Тогда $X \sim \Pi(\lambda t)$, $Y \sim \Pi(\lambda(t+\tau))$, $Z \sim \Pi(\lambda\tau)$, $\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = \lambda t$, $\mathbf{M}Y = \mathbf{D}Y = \lambda(t+\tau)$, $\mathbf{M}Z = \mathbf{D}Z = \lambda\tau$. Поэтому по формуле (3.17) $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{D}X + (\mathbf{M}X)^2 = \lambda t + (\lambda t)^2$. Учитывая, что в силу свойства отсутствия последействия простейшего потока случайные величины X, Y и Z независимы, поэтому по формуле (3.15) $\mathbf{M}(XZ) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Z = \lambda^2 t\tau$. Используя (3.81), (3.76) и (3.14), получаем, что $\rho(X,Y) = \frac{\mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}[X(X+Z)] - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}X^2 + \mathbf{M}(XZ) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y}{\sqrt{\mathbf{D}X} \cdot \sqrt{\mathbf{D}Y}} = \sqrt{\frac{t}{t+\tau}}$. ❑

300. Ожидаемая доходность первого актива равна 8% со средним квадратичным отклонением 7%, ожидаемая доходность второго актива равна 11% со средним квадратичным отклонением 10%. Коэффициент корреляции между этими активами составляет 0,7. Найти ожидаемую доходность и среднее квадратичное отклонение портфеля[1], состоящего на 35% из первого актива и на 65% — из второго.

301. Доказать, что компоненты X_1 и X_2 двумерной нормальной случайной величины (3.85) распределены по одномерным нормальным законам с математическими ожиданиями a_1 и a_2 соответственно и средними квадратичными отклонениями σ_1 и σ_2 соответственно, а параметр ρ равен коэффициенту корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

[1] *Портфелем* называется набор ценных бумаг, которым обладает инвестор.

302. Случайная величина $(X_1; X_2)$ задана плотностью распределения

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{1{,}28\pi}\,e^{-\frac{1}{5{,}12}\left[(x_1-3)^2-0{,}6(x_1-3)(x_2-5)+4(x_2-5)^2\right]}.$$

Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.

303. Привести пример зависимых, но некоррелированных случайных величин.

304. Доказать, что для нормально распределённых случайных величин условие независимости эквивалентно условию некоррелированности.

§3.6. Условные распределения

Пусть с помощью таблицы распределения (3.63) задана двумерная дискретная случайная величина $(X; Y)$. *Условная вероятность события* $\{Y = y_i\}$ *при условии* $\{X = x_j\}$ вычисляется, согласно определению условной вероятности (2.1), в соответствии с формулой

$$\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X=x_j\}=\frac{\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}}{\mathbf{P}\{X=x_j\}}=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_k p_{kj}}. \tag{3.86}$$

Таким образом, можно получить *условное распределение дискретной случайной величины* Y *при условии* $\{X = x_j\}$, оно будет задаваться рядом распределения

$$\begin{array}{c|ccccc} Y \mid X=x_j & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & \cdots \\ \hline p & \dfrac{p_{1j}}{\sum\limits_k p_{kj}} & \dfrac{p_{2j}}{\sum\limits_k p_{kj}} & \cdots & \dfrac{p_{mj}}{\sum\limits_k p_{kj}} & \cdots \end{array}. \tag{3.87}$$

Математическое ожидание случайной величины (3.87) называется *условным математическим ожиданием дискретной случайной величины* Y *при условии* $\{X = x_j\}$:

$$\mathbf{M}(Y \mid X=x_j)=\sum_i y_i\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X=x_j\}=\sum_i\frac{y_i\mathbf{P}\{(X=x_j)\cap(Y=y_i)\}}{\mathbf{P}\{X=x_j\}}=\frac{\sum\limits_i y_i p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}. \tag{3.88}$$

Для дискретных случайных величин X и Y *условные вероятности* $\mathbf{P}\{Y = y_i \mid X\}$ и *условные математические ожидания* $\mathbf{M}(Y \mid X)$ *при условии* X определяются как случайные величины, принимающие на множестве $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ значения (3.86) и (3.88) соответственно:

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{P}\{Y=y_i \mid X\} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline p & \dfrac{p_{i1}}{\sum\limits_k p_{k1}} & \dfrac{p_{i2}}{\sum\limits_k p_{k2}} & \cdots & \dfrac{p_{in}}{\sum\limits_k p_{km}} & \cdots \end{array}, \tag{3.89}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathbf{M}(Y \mid X) & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline p & \dfrac{\sum\limits_i y_i p_{i1}}{\sum\limits_i p_{i1}} & \dfrac{\sum\limits_i y_i p_{i2}}{\sum\limits_i p_{i2}} & \cdots & \dfrac{\sum\limits_i y_i p_{in}}{\sum\limits_i p_{in}} & \cdots \end{array}. \tag{3.90}$$

Аналогичным образом определяются условные плотности распределения и условные математические ожидания для абсолютно непрерывных случайных величин. *Условная плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины* Y *при условии* $\{X = x\}$ определяется формулой

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{XY}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy}, \tag{3.91}$$

а *условное математическое ожидание* — формулой

$$\mathbf{M}(Y \mid X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)dy=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy}. \qquad (3.92)$$

Рассматривая условную плотность $f_{Y|X}(y)$ как случайную величину, плотность распределения которой определяется при каждом y формулой (3.91), получим

$$\mathbf{M}(Y \mid X)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y)dy. \qquad (3.93)$$

Справедливы следующие результаты:

$$\mathbf{P}\{Y=y_i\}=\mathbf{M}(\mathbf{P}\{Y=y_i \mid X=x_j\}) \text{ (*для дискретных случайных величин*)}; \qquad (3.94)$$

$$f_Y(y)=\mathbf{M}f_{Y|X}(y) \text{ (*для абсолютно непрерывных случайных величин*)}; \qquad (3.95)$$

формула полного математического ожидания:

$$\mathbf{M}\,Y=\mathbf{M}[\mathbf{M}(Y \mid X)]. \qquad (3.96)$$

Справедлива также формула для дисперсии:

$$\mathbf{D}(Y)=\mathbf{M}[\mathbf{D}(Y \mid X)]+\mathbf{D}[\mathbf{M}(Y \mid X)], \qquad (3.97)$$

где *условная дисперсия* определяется формулой

$$\mathbf{D}(Y \mid X)=\mathbf{M}\left\{[Y-\mathbf{M}(Y \mid X)]^2 \mid X\right\}. \qquad (3.98)$$

305. В условиях задачи 276 найти условный закон распределения компоненты X при условии $Y=0$.

Решение. Условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=0$ получаем с помощью формулы условной вероятности: $\mathbf{P}\{X=x_i \mid Y=0\}=\frac{\mathbf{P}\{(X=x_i)\cap(Y=0)\}}{\mathbf{P}\{Y=0\}}$, т. е. $\mathbf{P}\{X=-1 \mid Y=0\}=\frac{\mathbf{P}\{(X=-1)\cap(Y=0)\}}{\mathbf{P}\{Y=0\}}=\frac{0}{0{,}5}=0$, $\mathbf{P}\{X=0|Y=0\}=\frac{\mathbf{P}\{(X=0)\cap(Y=0)\}}{\mathbf{P}\{Y=0\}}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=\frac{1}{5}$, $\mathbf{P}\{X=1|Y=0\}=$ $=\frac{\mathbf{P}\{(X=1)\cap(Y=0)\}}{\mathbf{P}\{Y=0\}}=\frac{0{,}4}{0{,}5}=\frac{4}{5}$. Таким образом, условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=0$ таков:

$X \mid Y=0$	-1	0	1
p	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

. ❑

306. В условиях задачи 276 найти условное математическое ожидание компоненты X при условии Y.

307. Доказать справедливость формул (3.94) – (3.97).

308. Расписать формулу полного математического ожидания (3.96) для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

§3.7. Функции от случайных величин

Пусть дана дискретная случайная величина X, заданная рядом распределения

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

, (3.99)

и монотонная функция $\varphi(x)$. Тогда различным значениям X соответствуют различные значения $Y=\varphi(X)$, причём вероятности соответствующих значений $X=x_i$ и $Y=\varphi(x_i)$ одинаковы.

Поэтому ряд распределения случайной величины $Y=\varphi(X)$ будет таким:

$$\begin{array}{c|ccccc} Y & \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \cdots & \varphi(x_n) & \cdots \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}. \qquad (3.100)$$

В случае же, когда функция $\varphi(x)$ немонотонна, различным значениям X могут, вообще говоря, соответствовать одинаковые значения $Y=\varphi(X)$, при этом для отыскания вероятностей возможных значений случайной величины $Y=\varphi(X)$ нужно сложить соответствующие вероятности тех возможных значений X, при которых $Y=\varphi(X)$ принимает одинаковые значения:

$$\begin{array}{c|ccccc} Y & y_1=\varphi(x_1) & y_2=\varphi(x_2) & \cdots & y_n=\varphi(x_n) & \cdots \\ \hline p & \sum\limits_{i:\,\varphi(x_i)=y_1} p_i & \sum\limits_{i:\,\varphi(x_i)=y_2} p_i & \cdots & \sum\limits_{i:\,\varphi(x_i)=y_n} p_i & \cdots \end{array}. \qquad (3.101)$$

Пусть теперь X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f_X(x)$. Если функция $y=\varphi(x)$ является строго монотонной и дифференцируемой (при этом существует обратная функция $x=\psi(y)$), то плотность распределения случайной величины X вычисляют по формуле

$$f_Y(y)=f_X(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|. \qquad (3.102)$$

Если же функция $y=\varphi(x)$ немонотонна, то область возможных значений случайной величины X разбивают на участки монотонности функции $\varphi(x)$, в каждом интервале по формуле (3.102) рассчитывается соответствующая функция $f_Y^{(i)}(y)=f_X(\psi_i(y))\cdot|\psi_i'(y)|$, а затем все они суммируются:

$$f_Y(y)=\sum_i f_Y^{(i)}(y). \qquad (3.103)$$

Для функции нескольких случайных величин удобнее искать не плотность распределения, а функцию распределения. Например, для функции двух аргументов $Z=\varphi(X,Y)$ функция распределения вычисляется по формуле

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\varphi(x,y)<z} f_{XY}(x,y)dxdy. \qquad (3.104)$$

В частности, функция распределения суммы двух случайных величин $Z=X+Y$ равна

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y<z} f_{XY}(x,y)dxdy=\{\text{замена } u=x+y, y=u-x\}=\int\limits_{-\infty}^{z}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,u-x)dx\right)du, \qquad (3.105)$$

поэтому

$$f_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,z-x)dx. \qquad (3.106)$$

Формула (3.106) называется *формулой композиции* или *формулой свёртки*.

309. Случайная величина $X\sim\mathrm{Exp}(\mu)$. Найти распределение случайной величины $Y=e^{-\mu X}$.

Решение. По определению функции распределения $F_Y(y)=\mathbf{P}\{Y<y\}=\mathbf{P}\{e^{-\mu X}<y\}=$
$=\begin{cases}0, & y<0,\\ \mathbf{P}\{-\mu X<\ln y\}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$ Учитывая, что $\mathbf{P}\{-\mu X<\ln y\}=\mathbf{P}\left\{X>-\frac{1}{\mu}\ln y\right\}=1-\mathbf{P}\left\{X\leqslant-\frac{1}{\mu}\ln y\right\}=1-\mathbf{P}\left\{X<-\frac{1}{\mu}\ln y\right\}=$
$=1-F_X\left(-\frac{1}{\mu}\ln y\right)=1-\left[1-e^{-\mu\cdot\left(-\frac{1}{\mu}\ln y\right)}\right]=y$, получаем окончательно $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ т. е. $Y\sim\mathrm{R}(0;1)$. ❑

310. Случайная величина X имеет строго возрастающую функцию распределения $F(x)$. Найти распределение случайной величины $Y = F(X)$.

311. Случайная величина $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$ (т. е. $Y \sim \chi_1^2$).

Решение. По определению функции распределения,

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{X^2 < y\} = \mathbf{P}\{\,|\,X\,| < \sqrt{y}\} = \mathbf{P}\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = \Phi_0\left(\frac{\sqrt{y}-0}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\sqrt{y}-0}{1}\right) =$$

$$= \Phi_0(\sqrt{y}) - \Phi_0(-\sqrt{y}) = 2\Phi_0(\sqrt{y}) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - 1.$$

При этом плотность распределения случайной величины Y по свойству (3.27) равна

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - 1\right)' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}. \ \square$$

312. Случайная величина X имеет плотность распределения $f_X(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |1 - X|$.

Решение. Решение сведём в таблицу:

$f_X(x)$	$f_X(x)$
$y = \varphi(x)$	$y = \|1 - x\|$
$x = \begin{cases}\psi_1(y), \\ \psi_2(y)\end{cases}$	$x_1 = 1 - y$ $x_2 = 1 + y$
$\|\psi_2(y)\| = \|\psi_2(y)\|$	1
$f_Y(y) = \sum\limits_i f_X(\psi_i(y)) \cdot \|\psi_i'(y)\|$	$f_Y(y) = f_X(1 - y) + f_X(1 + y),\ y \geqslant 0.$

При $y < 0$ $f_Y(y) = 0$, так как $Y = |1 - X| \geqslant 0$. $\square$

313. Случайная величина $X \sim \mathrm{R}\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

314. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0;1]$: $X_i \sim \mathrm{R}(0;1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Найти функцию распределения случайной величины $X = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Решение. $F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < x\} = \mathbf{P}\{(X_1 < x) \cap (X_2 < x) \cap \dots \cap (X_n < x)\} =$

$$= \{\text{независимость}\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{X_i < x\} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^n, & x \in [0;1], \\ 1, & x > 1. \ \square \end{cases}$$

315. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

316. Доказать, что $\mathrm{F}_{1k} = \mathrm{T}_k^2$.

317. Случайные величины $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2)$. Найти закон распределения случайной величины $X = X_1 + X_2$.

Решение. Математическое ожидание суммы $a = \mathbf{M}X = \mathbf{M}(X_1 + X_2) = \mathbf{M}X_1 + \mathbf{M}X_2 = a_1 + a_2$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Применим формулу композиции (3.106) к двумерной нормальной случайной величине (3.85):

$$f_X(x) = f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1X_2}(x_1, x - x_1)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x-x_1-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x-x_1-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}dx_1 .$$

При замене $u = x_1 - a_1$, $v = x - a$, $v{-}u{=}x{-}x_1{-}a_2$, а числитель показателя экспоненты (без знака «*минус*») запишется так: $\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-a_1)(x-x_1-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x-x_1-a_2}{\sigma_2}\right)^2 =$

$$= \frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{u}{\sigma_1}\cdot\frac{v-u}{\sigma_2} + \frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[u^2\sigma^2 - 2uv(\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2) + v^2\sigma_1^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2 - \frac{v^2\sigma_1^2(\rho\sigma_2+\sigma_1)^2}{\sigma^2} + v^2\sigma_1^2\right] = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2 - \frac{v^2}{\sigma^2}(1-\rho^2)\right].$$

Подставляя, получим: $f_X(x) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}} du$. Сделав новую замену переменных $t = \dfrac{u\sigma - \frac{v\sigma_1(\rho\sigma_2+\sigma_1)}{\sigma}}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, $dt = \dfrac{\sigma du}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, получаем окончательно

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{\substack{\|\\ 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$ где $a{=}a_1{+}a_2$,

$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$. ❑

318. Случайные величины X_i распределены по нормальному закону: $X_i \sim \mathcal{N}(a_i; \sigma_i)$, a_i — неслучайные постоянные $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти закон распределения случайной величины $X = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$.

319. Автомат заполняет банки кофе. Масса кофе и масса банки распределены нормально со средними 500 г, 50 г и средними квадратичными отклонениями 8 г, 6 г соответственно. Какова вероятность того, что масса готовой к продаже банки будет меньше 540 г?

320. Случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке $[1; 3]$, а случайная величина X_2 распределена равномерно на отрезке $[2; 6]$. Найти плотность распределения случайной величины $X = X_1 + X_2$.

321. Троллейбусы движутся с интервалом 8 мин, поезда метро — с интервалом 2 мин. Определить закон суммарного времени ожидания транспорта случайно выбранным пассажиром, пользующимся, чтобы добраться на работу, троллейбусом и метро (без пересадок в метро).

322. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

323. X и Y — независимые случайные величины, распределённые по равномерному закону на отрезке $[0;\ 4]$. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $t^2 + Xt + Y = 0$ (относительно t) имеет действительные корни.

Решение. Квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен. Чтобы найти требуемую вероятность, воспользуемся формулой (3.102):

$$\mathbf{P}\{X^2 - 4Y \geqslant 0\} = \mathbf{P}\left\{Y \leqslant \frac{X^2}{4}\right\} = \iint\limits_{\substack{y\leqslant \frac{x^2}{4},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant y\leqslant 4}} \frac{1}{16}\,dxdy = \frac{1}{16}\int\limits_0^4\int\limits_0^{\frac{x^2}{4}} dydx = \frac{1}{16}\int\limits_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{16\cdot 4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^4 = \frac{1}{3}. \ \square$$

324. Доказать, что если случайные величины $\chi^2_{k_1}$ и $\chi^2_{k_1}$ независимы, то $\chi^2_{k_1} + \chi^2_{k_2} = \chi^2_{k_1+k_2}$.

Глава 4. Предельные теоремы теории вероятностей

§4.1. Неравенства теории вероятностей

При доказательстве многих теорем теории вероятностей и математической статистики используется ряд вспомогательных неравенств[1].

Неравенство Маркова. *Если положительная случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{X \leqslant \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{M}X}{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Неравенство Чебышёва. *Если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{|\,X - \mathbf{M}X\,| \leqslant \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{4.2}$$

Неравенство Йенсена. *Для любой случайной величины X и любой выпуклой [вогнутой] функции $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}g(X) \leqslant g(\mathbf{M}X) \text{ [соответственно, } \mathbf{M}g(X) \geqslant g(\mathbf{M}X)\text{]}. \tag{4.3}$$

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. *Для любых случайных величин X, Y справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,|XY| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}X^2}\sqrt{\mathbf{M}Y^2}\,. \tag{4.4}$$

Неравенство Гёльдера. *Для любых случайных величин X, Y при $\alpha \in (0;1)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,|XY| \leqslant \left(\mathbf{M}\,|X|^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\mathbf{M}\,|Y|^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.5}$$

[1] Впрочем, эти неравенства используются не только в теории вероятностей и математической статистике, но и повсеместно в математике. Читатели наверняка знакомы с большинством из приводимых неравенств из курса математического анализа.

Неравенство Минковского. *Для любых случайных величин* X, Y *при* $r \geqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\left(\mathbf{M}\,|X+Y|^r\right)^{1/r} \leqslant \left(\mathbf{M}\,|X|^r\right)^{1/r} + \left(\mathbf{M}\,|Y|^r\right)^{1/r}. \tag{4.6}$$

325. Доказать неравенство Маркова (4.1).

326. Доказать неравенство Чебышёва (4.2).

Доказательство. Проведём доказательство для дискретных случайных величин. В выражении для дисперсии $\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i$ отбросим из суммы те слагаемые, для которых $|\,x_i - \mathbf{M}X\,| \leqslant \varepsilon$: $\mathbf{D}X = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i \geqslant \sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i$. $(x_i - \mathbf{M}X)^2 > \varepsilon^2$, т. е. $\mathbf{D}X \geqslant \sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i > \sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} p_i$.

Но $\sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} p_i = \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\}$, поэтому $\mathbf{D}X > \varepsilon^2 \sum\limits_{i:\,|x_i - \mathbf{M}X| > \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 \mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\}$, откуда $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| > \varepsilon\} < \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$. При этом $\mathbf{P}\{|\,X - \mathbf{M}X\,| \leqslant \varepsilon\} = 1 - \mathbf{P}\{|\,X - \mathbf{M}X\,| > \varepsilon\} > 1 - \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$, что и требовалось доказать. В случае непрерывных случайных величин все суммы заменяются интегралами. ❑

327. Доказать, что если случайная величина X имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\mathbf{P}\{|\,X - \mathbf{M}X\,| > \varepsilon\} \leqslant \dfrac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}$.

328. Правило трёх сигм. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}X| < 3\sigma_X\}$ для произвольной случайной величины с конечным математическим ожиданием и конечной дисперсией.

329. Для новогоднего праздника Петя должен сделать гирлянду из 400 электрических лампочек. Он решает включить их параллельно. Лампочки оказались очень низкого качества — вероятность того, что какая-либо из них погаснет во время праздника, составляет 0,5. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что число горящих лампочек будет заключено между 100 и 300.

330. Инвестор покупает ценные бумаги за счёт кредита, взятого с процентной ставкой r под залог своей недвижимости. Доходность ценных бумаг X представляет собой случайную величину с математическим ожиданием $a > r$ и средним квадратичным отклонением σ. Оценить вероятность того, что инвестор не сможет вернуть кредит: а) не имея никаких сведений о характере закона распределения случайной величины X, зная только, что она положительна; б) предполагая случайную величину X распределённой по нормальному закону.

331. Сумма всех вкладов в некотором банке составляет 2 000 000 ден. ед., а вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 ден. ед., равна 0,8. Оценить число вкладчиков банка.

Решение. Пусть n — число вкладчиков, а случайная величина X описывает размер случайно выбранного вклада. Тогда средний размер вклада $\mathbf{M}X = \dfrac{2\,000\,000}{n}$ ден. ед., и по неравенству Маркова $\mathbf{P}\{X \leqslant 10\,000\} \geqslant 1 - \dfrac{\mathbf{M}X}{10\,000}$ или $\mathbf{P}\{X \leqslant 10\,000\} \geqslant 1 - \dfrac{200}{n}$. Но по условию $\mathbf{P}\{X \leqslant 10\,000\} = 0,8$, откуда $1 - \dfrac{200}{n} \leqslant 0,8$ и, значит, $n \leqslant 1\,000$ человек. ❑

332. Средние ежедневные расходы на покупку канцелярских принадлежностей для офиса банка составляют 1 000 руб., а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 руб. Оценить вероятность того, что расходы на канцелярские принадлежности в любой наугад выбранный день не превысят 2 000 руб, используя: а) неравенство Маркова; б) неравенство Чебышёва.

333. По статистическим данным в среднем 87% новорождённых доживают до 50 лет (т. е. вероятность дожития до 50 лет равна 0,87). С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1 000 новорождённых доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности не более, чем на 0,04 (по модулю).

334. Доказать неравенство Йенсена (4.3).

Доказательство. Так как функция $g(x)$ выпукла, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ найдётся такое $\lambda = \lambda(x_0)$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geqslant g(x_0) + (x - x_0)\lambda(x_0)$. Подставляем $x_0 = \mathbf{M}x$: $g(x) \geqslant g(\mathbf{M}x) + (x - \mathbf{M}x)\lambda(\mathbf{M}x)$, откуда, учитывая, что величины $g(\mathbf{M}x)$ и $\lambda(\mathbf{M}x)$ не являются случайными, а $\mathbf{M}(x - \mathbf{M}x) = 0$, получаем $\mathbf{M}g(x) \geqslant g(\mathbf{M}x)$, что и требовалось. Для вогнутых функций доказательство аналогично. ❑

335. Пусть X — положительная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\dfrac{1}{\mathbf{M}X} \leqslant \mathbf{M}\dfrac{1}{X}$.

336. Доказать неравенство Коши – Буняковского – Шварца (4.4).

337. Доказать неравенство Гёльдера (4.5).

338. Доказать неравенство Минковского (4.6).

339. Доказать, что для любых случайных величин X, Y при $\alpha \leqslant 1$ справедливо неравенство $\mathbf{M}\,|X+Y|^{\alpha} \leqslant \mathbf{M}\,|X|^{\alpha} + \mathbf{M}\,|Y|^{\alpha}$.

§4.2. Виды сходимости последовательностей случайных величин

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится почти наверное к случайной величине* X, если

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1.$$

Сходимость почти наверное обозначается так: $X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится по вероятности к случайной величине* X, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{| X_n - X | \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Сходимость по вероятности обозначается так: $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *сходится по распределению* (или *слабо сходится*) *к случайной величине* X, если во всех точках x, в которых функция распределения $F_X(x)$ непрерывна,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Сходимость по распределению обозначается так: $X_n \Rightarrow X$ или $X_n \xrightarrow{\mathrm{D}} X$.

Примером сходимости по распределению является формула Пуассона (2.12).

Различные виды сходимости обладают следующими свойствами:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X,\ Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y, \text{ то } X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X + Y,\ X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \cdot Y; \tag{4.7}$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ и } \varphi(x) \text{ — непрерывная функция, то } \varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(X); \tag{4.8}$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x_0 \text{ и } \varphi(x) \text{ непрерывна в точке } x_0, \text{ то } \varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(x_0); \tag{4.9}$$

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x = \mathrm{const},\ Y_n \Rightarrow Y, \text{ то } X_n + Y_n \Rightarrow x + Y,\ X_n \cdot Y_n \Rightarrow x \cdot Y; \tag{4.10}$$

из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\text{п. н.}} X, \text{ то } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, \text{ но не наоборот!}; \tag{4.11}$$

из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению:

$$\text{если } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X, \text{ то } X_n \Rightarrow X; \tag{4.12}$$

из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности:

$$\text{если } X_n \Rightarrow x = \mathrm{const}, \text{ то } X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} x; \tag{4.13}$$

Отметим также, что из сходимости по вероятности *не следует* сходимость математических ожиданий, дисперсий и других характеристик.

340. Доказать свойства (4.7) – (4.13).

341. Привести пример такой последовательности случайных величин X_n $(n = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, чтобы она сходилась по вероятности к некоторой случайной величине X, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}X_n \neq \mathbf{M}X$.

342. Доказать, что из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, а обратное утверждение неверно.

§4.3. Теоремы закона больших чисел

Под *законом больших чисел* понимается обобщённое название группы теорем, утверждающих, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины сходятся (в каком-то из смыслов, рассмотренных в предыдущем параграфе) к некоторым постоянным. Наиболее общей из этих теорем является *теорема Чебышёва*, также называемая просто *законом больших чисел*:

Если дисперсии некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ограничены сверху числом* B, *то для произвольного сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} > 1 - \frac{B}{n\varepsilon^2} \tag{4.14}$$

и предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1, \tag{4.15}$$

т. е. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}$.

Законы больших чисел утверждают, что среднее арифметическое случайных величин при возрастании их числа обладает свойством *статистической устойчивости*, т. е. сходится по вероятности к неслучайной величине — среднему арифметическому математических ожиданий этих случайных величин. Практическое применение законов больших чисел состоит в том, что среднее арифметическое, вычисленное по достаточно большому числу результатов измерений какой-либо величины, будет сколь угодно близко к измеряемой величине.

Статистическая устойчивость относительной частоты появления успеха в серии независимых испытаний доказывается в *теореме Бернулли*:

Если вероятность успеха в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1, \tag{4.16}$$

где m — число успехов в серии из n испытаний.

Если для некоторой последовательности случайных величин вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное $\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right)$, то говорят, что такая последовательность удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*.

343. Доказать теорему Чебышёва (4.14) – (4.15).

Доказательство. Очевидно, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайные величины, то величина $\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ также является случайной, причём по свойствам математического ожидания и дисперсии $\mathbf{M}\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}$, $\mathbf{D}\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2}$. Применим к случайной величине $\overline{x}$ неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} = \mathbf{P}\{|\,\overline{x} - \mathbf{M}\overline{x}\,| \leqslant \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathbf{D}\overline{x}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2\varepsilon^2}.$$

Учитывая, что все $\mathbf{D}X_i < B$, получим, что $1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}{n^2\varepsilon^2} > 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{nB}{n^2\varepsilon^2}$, т. е. доказана справедливость неравенства (4.14). Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (4.15). ❑

344. Последовательность некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$ определяется по следующему правилу: случайная величина X_i принимает значения $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями $\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}$ соответственно. Доказать, что для этой последовательности выполняются условия теоремы Чебышёва.

Доказательство. Условия теоремы Чебышёва выполнены, поскольку $\mathbf{M}X_i = 0$, $\mathbf{D}X_i = 2$. ❑

345. Доказать, что для последовательности некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$, определяемых рядом распределения

X_i	$-a$	a
p	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

выполняется усиленный закон больших чисел.

346. Доказать, что для последовательности некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots$, таких, что $\mathbf{M}X_i = A$, $\mathbf{D}X_i \leqslant B$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, выполняется усиленный закон больших чисел.

347. Для определения среднего дохода налогоплательщиков города налоговой инспекцией была проведена проверка 250 жителей этого города, отобранных случайным образом. Оценить вероятность того, что средний годовой доход жителей города отклонится от среднего арифметического $\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{250} X_i}{250}$ годовых доходов выбранных 250 жителей не более, чем на 1 000 руб., если известно, что среднее квадратичное отклонение годового дохода не превышает 2 500 руб.

Решение. Согласно неравенству (4.14), которым можно пользоваться, поскольку все $\mathbf{D}X_i \leqslant (2\ 500)^2$, $\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \leqslant 1\ 000\right\} > 1 - \frac{2\ 500 \cdot 2\ 500}{250 \cdot 1\ 000 \cdot 1\ 000} = 1 - \frac{25}{1000} = 0,975$. ❑

348. Доказать теорему Бернулли (4.16).

Доказательство. Рассмотрим альтернативные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, определяемые по следующему правилу: $X_i = \begin{cases} 0, & \text{не произошёл успех в } i\text{-м испытании (с вероятностью } p), \\ 1, & \text{произошёл успех в } i\text{-м испытании (с вероятностью } (1-p)). \end{cases}$

Тогда $\mathbf{M}X_i = p, \mathbf{D}X_i = p(1-p), m = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Поскольку $0 \leqslant p \leqslant 1$, дисперсии случайных величин X_i ограничены сверху единицей (так как $\mathbf{D}X_i = p(1-p) \leqslant 1$), и можно воспользоваться теоремой Чебышёва (4.15), согласно которой

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{np}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{M}X_i}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1,$$

что и требовалось доказать. ❑

§4.4. Центральная предельная теорема

Законы больших чисел устанавливают факт приближения среднего значения большого числа случайных величин к некоторым постоянным в виде сходимости последовательностей случайных величин по вероятности и почти наверное. Но этим не ограничиваются закономерности, возникающие в результате суммарного действия случайных величин. Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, утверждающих, что достаточно большая сумма сравнительно малых случайных величин распределена приближённо по нормальному закону.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых случайных величин, и пусть $\mathbf{M}X_i = a_i$, $\mathbf{D}X_i = \sigma_i^2$, $b_n = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$.

Говорят, что для этой последовательности случайных величин выполняется *условие Линдеберга*, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{|x_i - a_i| > \tau b_n} (x_i - a_i)^2 f_i(x_i) dx_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = 0. \tag{4.17}$$

Приведём строгую формулировку *теоремы Ляпунова*, одной из теорем, носящих название «*центральная предельная теорема*».

Если независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *удовлетворяют условию Линдеберга (4.17), то случайная величина*

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{M}X_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i}}$$

сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$Z \Rightarrow \mathcal{N}(0; 1). \tag{4.18}$$

В практических приложениях важно следующее *следствие из теоремы Ляпунова*:

Если независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеют одинаковое распределение с $\mathbf{M}X_i = a$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$, *то*

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0;1), \tag{4.19}$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{2} + \Phi_0(x). \tag{4.20}$$

Пусть $x = \frac{u-a}{\sigma / \sqrt{n}}$, тогда согласно следствию (4.20) из теоремы Ляпунова

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} < u\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - a}{\sigma / \sqrt{n}} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{u-a}{\sigma / \sqrt{n}}\right), \tag{4.21}$$

т. е. *среднее арифметическое* $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ *при* $n \to \infty$ *сходится по распределению к нормальной случайной величине с параметрами* $a = \mathbf{M}X_i$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В ряде задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда исследуемая случайная величина является суммой большого числа независимых слагаемых, влияние каждого из которых на сумму очень мало. Такими случайными величинами являются, например, капиталы банков и страховых компаний (доля каждого отдельно взятого вкладчика не зависит от доли других вкладчиков и относительно мала, но в сумме все эти доли весьма весомы), выручка торговых предприятий (покупатели действуют независимо друг от друга и покупают товары на относительно небольшие суммы) и др.

На основании центральной предельной теоремы часто можно до наблюдения того или иного явления сказать, что соответствующая случайная величина должна иметь нормальное распределение или близкое к нему.

Приведём также два следствия из центральной предельной теоремы, относящиеся к независимым испытаниям. *Локальная теорема Муавра – Лапласа* утверждает:

Если вероятность p успеха в каждом испытании отлична от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то для расчёта вероятности $\mathbf{P}_n(k)$ появления ровно k успехов в серии из n испытаний можно пользоваться приближённой формулой

$$\mathbf{P}_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(u) \;\; (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{4.22}$$

где $\varphi(u)$ – функция плотности нормального распределения (см. табл. П.1).

На практике, очевидно, вероятность появления любого конкретного числа успехов близка к нулю. Это имеет простое объяснение — ведь всего есть $(n+1)$ различных событий (может наступить $0, 1, 2, \dots, n$ успехов), и сумма вероятностей этих $(n+1)$ событий должна быть равна единице. Поэтому важно уметь вычислять вероятности $\mathbf{P}_n(k_1, k_2)$ того, что число успехов в серии из n испытаний будет заключено между числами k_1 и k_2. Для этого используется *интегральная теорема Муавра – Лапласа*:

Если вероятность p успеха в каждом испытании отлична от нуля и единицы, а число испытаний n достаточно велико, то для расчёта вероятности $\mathbf{P}_n(k_1, k_2)$ того, что число успехов в серии из n испытаний будет заключено в промежутке $[k_1; k_2)$, можно пользоваться приближённой формулой

$$\mathbf{P}_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0(u_2) - \Phi_0(u_1) \ (k_1 = 0,1,2,...; k_2 > k_1), \tag{4.23}$$

где $\Phi_0(u)$ *– функция Лапласа (см. табл. П.1).*

349. В районе десять универсамов. Суммарная суточная выручка в них равна в среднем 10 000 руб. и в 90% случаев отличается от 10 000 руб. не более, чем на 1 000 руб. Найти вероятность того, что очередная суммарная суточная выручка окажется в пределах от 8 000 до 12 000 руб.

Решение. Пусть X – суммарная суточная выручка. Как было отмечено выше, покупатели действуют независимо друг от друга и покупают товары на относительно небольшие суммы $X_i \ll X$, но покупателей в районе достаточно много, так что можно считать, что их количество $n \to \infty$. Поэтому суммарная выручка будет иметь нормальное распределение с некоторыми параметрами a и σ. Поскольку для нормального распределения $a = \mathbf{M}X$, то по условию $a = \mathbf{M}X = 10\,000$. Также в условии сказано, что $\mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} = 0,9$. Но $\mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} = \Phi_0\left(\frac{11\,000-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9\,000-a}{\sigma}\right) = \mathbf{P}\{9\,000 < X < 11\,000\} = \Phi_0\left(\frac{11\,000-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9\,000-a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1\,000}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right)$, откуда $\Phi_0\left(\frac{1\,000}{\sigma}\right) = 0,45$, и по таблице П.1 можно найти $\frac{1\,000}{\sigma} \approx 1,65$. Искомая вероятность $\mathbf{P}\{8\,000 < X < 12\,000\} = \Phi_0\left(\frac{12\,000-10\,000}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{8\,000-10\,000}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{2\,000}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(2 \cdot 1,65) = 2\Phi_0(3,3) = 2 \cdot 0,4995 = 0,999$. ❑

350. Банкомат выдаёт стандартные суммы в 500, 100 и 50 долл., причём первые составляют 10%, а последние – 60% всех выдач. В среднем банкомат производит 100 выдач в сутки. Определить размер денежной суммы, которую необходимо заложить в банкомат утром, чтобы этой суммы с вероятностью 0,9 хватило для выдачи наличности вкладчикам до следующего утра.

351. При составлении статистического отчёта нужно было сложить 10^4 чисел, каждое из которых было округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки, возникающие при округлении, независимы в совокупности и распределены равномерно на отрезке $[-0,5 \cdot 10^{-m}; 0,5 \cdot 10^{-m}]$, определить пределы, в которых с вероятностью, большей 0,987, будет лежать суммарная ошибка.

352. Торговец газетами ходит по вагонам электропоездов. В каждом из вагонов он может продать газету с вероятностью $\frac{1}{3}$. Случайная величина X – число вагонов, в которые заходил торговец прежде, чем продал первые 100 газет. Найти распределение случайной величины X.

Решение. Пусть Y_i – число вагонов, которые обошёл торговец за время от продажи $(i-1)$-й газеты до продажи i-й. Тогда все Y_i $(i = 1,2,\dots,n)$, $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Согласно центральной предельной теореме, при большом n X имеет нормальное распределение. Предоставляем читателю показать, что параметры этого распределения равны $a = 300, \sigma = 30$. ❑

353. Почему стоимость акции лучше описывается логнормальным распределением, чем нормальным?

Решение. *Спекулятивная операция*, состоящая в том, что в момент времени $(n-1)$ инвестор покупает некоторую акцию по цене S_{n-1}, а в момент n продаёт её по цене S_n, обеспечивает *доходность* $\rho_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$. Предположим, что доходности ρ_n в различные моменты времени $n = 1,2,3,\dots$ представляют собой независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием (*ожидаемой доходностью*) μ_n и средним квадратичным отклонением (*изменчивостью доходности* или *волатильностью*) σ_n. Пусть в начальный момент акция стоила S_0 ден. ед., тогда в момент n её стоимость составит $S_n = S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_n)$. Преобразуем эту формулу: $S_n = S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_n) = S_0 e^{\ln[(1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_n)]} = = S_0 e^{\ln(1+\rho_1)+\ln(1+\rho_2)+\cdots+\ln(1+\rho_n)} = S_0 e^{h_1+h_2+\cdots+h_n}$, где $h_i = \ln(1+\rho_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Разобьём отрезок $[0;t]$ на n частей и устремим n к бесконечности. Тогда, согласно центральной предельной теореме, сумма $H_t = \lim\limits_{n\to\infty}(h_1+h_2+\cdots+h_n)$ будет распределена по нормальному закону, значит, поскольку случайная величина $\ln S_t = H_t + \ln S_0$ также будет распределена по нормальному закону, S_t будет иметь логнормальное распределение. ❑

354. Построить на одном рисунке графики композиций двух, трёх, четырёх одинаковых равномерных распределений. На том же рисунке построить график плотности нормального распределения. Убедиться, что при увеличении числа слагаемых графики сближаются.

355. Построить на одном рисунке графики композиций двух, трёх, четырёх одинаковых показательных распределений. На том же рисунке построить график плотности нормального распределения. Убедиться, что при увеличении числа слагаемых графики сближаются.

356. В условиях задачи 333 найти вероятность того, что из 1 000 новорождённых доля (частость) доживших до 50 лет: а) будет заключена в пределах от 0,9 до 0,95; б) будет отличаться от вероятности не более, чем на 0,04 (по модулю).

357. Мера длины «*фут*», как видно из названия, имеет прямое отношение к ноге: это — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения так. В воскресный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин, сумма длин их левых ступней делилась на 16 — средняя длина и была «*правильным и законным футом*». Известно, что размер стопы взрослого мужчины того времени описывается случайной величиной с математическим ожиданием 262,5 мм и средним квадратичным отклонением 12 мм. Найти вероятность того, что два «*правильных и законных фута*», рассчитанных указанным способом в разные дни, отличаются друг от друга более, чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью, большей 0,99, средний размер их ступней отличался бы от 262,5 мм менее, чем на 0,5 мм?

358. Доказать локальную теорему Муавра – Лапласа (4.22).

359. Доказать интегральную теорему Муавра – Лапласа (4.23) как следствие из центральной предельной теоремы.

Доказательство. Пусть в серии из n испытаний Бернулли произошло X успехов. Тогда, согласно задаче 188, случайную величину X, распределённую по биномиальному закону с параметрами n, p, можно представить в виде суммы n независимых одинаково распределённых альтернативных случайных величин X_i с параметром p: $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. При этом по центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{X-n\mathbf{M}X}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mathbf{M}X}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\} = \frac{1}{2}+\Phi_0(x).$$

Но $\mathbf{M}X = np$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{X-np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k_1;k_2)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-$ $-\left[\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right]=\Phi_0\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, что и требовалось доказать. ❑

360. Доказать интегральную теорему Муавра – Лапласа (4.23), не пользуясь центральной предельной теоремой.

361. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

Решение. Данную ситуацию можно рассматривать как серию из $n = 100$ испытаний Бернулли, в которых успехом считается принятие банком решения о кредитовании. Вероятность успеха в единичном испытании равна по условию $p = 0,3$. Поскольку число испытаний n велико, а произведение $np = 30 > 10$, можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа (4.23):

$$\mathbf{P}_{100}(1) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot(1-0,3)}}\varphi\left(\frac{1-100\cdot 0,3}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot(1-0,3)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{1-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22\cdot\varphi(-6,33) = 0,22\cdot\varphi(6,33) \approx 0,22\cdot 0 = 0,$$

$$\mathbf{P}_{100}(15)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{15-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\cdot\varphi(-3,27)=0,22\cdot\varphi(3,27)=0,22\cdot 0,0020=0,00044,\ \mathbf{P}_{100}(30)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{30-30}{\sqrt{21}}\right)=$$

$$=0,22\cdot\varphi(0)=0,22\cdot 0,3989=0,088,\ \ \mathbf{P}_{100}(50)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{50-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\cdot\varphi(4,36)\approx 0,22\cdot 0=0.$$ ❑

362. Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит ровно 75 раз.

363. Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит от 70 до 100 раз.

364. В условиях задачи 361 найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) хотя бы один банк; б) более 15 банков; в) более 50 банков.

365. Вероятность смерти тридцатилетнего мужчины составляет 0,006. Страховая компания заключила 10 000 страховых контрактов с мужчинами в возрасте тридцати лет, согласно которым в случае смерти застрахованного лица в течение ближайшего года его наследникам выплачивается 100 000 руб. Стоимость одного контракта равна 1 200 руб. Найти вероятности следующих событий: а) к концу года страховая компания окажется в убытке; б) доход страховой компании превысит 4 000 000 руб.

Решение. Пусть за год наступило k страховых случаев, тогда доход страховой компании составит $\Pi = 10\ 000\cdot 1\ 200 - 100\ 000k = 100\ 000(120-k)$ руб. Поэтому компания окажется в убытке ($\Pi<0$), если за год наступит более 120 страховых случаев (т. е. от 121 до 10 000 страховых случаев). Доход страховой компании превысит 4 000 000 руб. ($\Pi > 4\ 000\ 000$), если за год наступит менее 80 страховых случаев. Вероятность наступления страхового случая $p = 0,006$. Всего проводится $n = 10\ 000$ испытаний. Поскольку число испытаний n велико, а произведение $np = 60 > 10$, можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра – Лапласа: $\mathbf{P}_{10\ 000}(121;10\ 000)\approx$

$$\approx\Phi_0\left(\frac{10\,000-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{121-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)=\Phi_0\left(\frac{9\,940}{\sqrt{59{,}64}}\right)-\Phi_0\left(\frac{61}{\sqrt{59{,}64}}\right)=\Phi_0\,(1287,56)-\Phi_0\,(7,90)\approx 0,5-0,5=0\,,$$

т. е. страховая компания окажется в убытке с нулевой вероятностью;

$$\mathbf{P}_{10\,000}(0;80)\approx\Phi_0\left(\frac{80-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-60}{\sqrt{60\cdot(1-0{,}006)}}\right)=\Phi_0\left(\frac{20}{\sqrt{59{,}64}}\right)-\Phi_0\left(-\frac{60}{\sqrt{59{,}64}}\right)=\Phi_0(2,589)-\Phi_0(-7,77)=$$

$=\Phi_0(2,589)+\Phi_0(7,77)\approx 0,495+0,5=0,995$, значит, доход страховой компании превысит 4 000 000 руб. с вероятностью, очень близкой к единице, т. е. почти наверное. ❑

366. В страховой компании 10 000 клиентов, взнос каждого из которых составляет 1 000 руб. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 100 000 руб. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 1 000 000 руб., с вероятностью 0,999.

367. Рассчитать в условиях задачи 187 рациональные цены европейских опционов «*колл*» и «*пут*», разделяя срок жизни опциона: а) на 100 периодов; б) на 1 000 периодов.

368. Во время каникул Петя работал в предвыборном штабе кандидата в депутаты, который проводил выборочный опрос избирателей. Примерное распределение голосов было известно: по 40% избирателей «*за*» и «*против*» кандидата, остальные воздержались. Сколько нужно опросить людей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, гарантировать отклонение процента голосов, отданных за кандидата при выборочном опросе, от истинного мнения избирателей не более, чем на 2% от всего электората?

369. В дачном посёлке 2 500 жителей, каждый из которых примерно шесть раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок случайным образом и независимо от других жителей. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

Ответы

Глава 1

1. 20. **2.** 33. **3.** $\mathrm{P}_{10} = 3\,628\,800$. **4.** $\mathrm{P}_8 = 8! = 40\,320$. **5.** а) $\mathrm{A}_{10}^2 = 90$; б) $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$. **6.** а) $\mathrm{C}_8^3 = 56$; б) $\mathrm{A}_8^3 = 336$. **7.** $\mathrm{C}_{12}^7\mathrm{C}_{15}^7 = 5\,096\,520$. **8.** $\mathrm{C}_{30}^3\mathrm{C}_{20}^3\mathrm{C}_{80}^2\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_{90}^1$ = 92 142 187 200 000. **9.** а) $\mathrm{A}_{20}^5 = 1\,860\,480$; б) $\mathrm{A}_{16}^5 = 524\,160$. **10.** $\mathrm{C}_9^5 = 126$ замков и $4\mathrm{C}_9^5 = 5\,040$ ключей. **11.** 99. **12.** $\tilde{\mathrm{A}}_{12}^3\tilde{\mathrm{A}}_{10}^3 = 12^3\cdot 10^3 = 1\,728\,000$. **19.** $\mathrm{C}_{10}^0+\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_{10}^2+\cdots+\mathrm{C}_{10}^{10}=2^{10}=1\,024$. **21.** $\mathrm{C}_{16}^{10} = 8\,008$. **22.** а) $\tilde{\mathrm{A}}_{10}^3=10^3=1\,000$; б) $\tilde{\mathrm{C}}_{10}^3 = \mathrm{C}_{10+3-1}^3 = 220$. **23.** 6 слов: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*». **24.** $\tilde{\mathrm{P}}_{10}(2,3,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200$. **26.** Выпадение чётного числа и выпадение нечётного числа при бросании игральной кости. **27.** Выпадение единицы и выпадение двойки при бросании игральной кости. **28.** а) B; б) A. **29.** При условии $A \subseteq B$. **30.** а) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; б) $A\cap B\cap\overline{C}$; в) $A\cap B\cap C$; г) $A\cup B\cup C$; д) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$; е) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; ж) $\overline{A\cap B\cap C}$; з) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$; и) $(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})=((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))\setminus(A\cap B\cap C)$. **31.** а) A; б) B; в) $A\cap C$; г) $B\cup C$. **32.** в), г), е), з), и), к), л), м) — верны, остальные неверны. **34.** Да. **35.** Да. **36.** 0,3. **37.** 3/9. **38.** $1/\mathrm{C}_{22}^2 = 1/231$. **39.** 0,656. **41.** Вероятность угадать i чисел из 36 $\mathbf{P}\{A_i\}=\mathrm{C}_5^i\mathrm{C}_{31}^{5-i}/\mathrm{C}_{36}^5, i=0,1,2,3,4,5$, поэтому искомые вероятности составляют 0,55; 0,42; 0,12; 0,012; 0,0004; $3\cdot 10^{-6}$. **42.** а) $2^8\mathrm{C}_{10}^8/\mathrm{C}_{20}^8 = 0{,}09145$; б) $10\cdot 2^6\mathrm{C}_9^6/\mathrm{C}_{20}^8 = 0{,}42677$; в) $2^4\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_8^4/\mathrm{C}_{20}^8 = 0{,}40010$. **43.** $\mathbf{P}\{A_n\} = \mathrm{C}_4^n\sum\limits_{k=0}^{4-n}2^k\mathrm{C}_{4-n}^k\mathrm{C}_{44}^{13-k-2n}/\mathrm{C}_{52}^{13}$. **44.** а) $1/6^5 \approx 0{,}00013$; б) $5/324$. **45.** а) $2/9$; б) $1/5$. **46.** $1/6$. **47.** а) $1/5$; б) $1/2$. **48.** Одинаково. **49.** $1/5$. **50.** а) 0,1; б) 0,6; в) 0,98. **51.** $1/2$. **52.** $23/27$. **53.** $7/16$. **54.** $19/288$. **55.** а) $2/27$; б) $83/108$. **56.** а) $1/12$; б) 1 200. **57.** 36. **58.** Такими примерами являются уникальные события, которые невозможно повторить в тех же самых условиях: возникновение войн, появление научных открытий и гениальных произведений искусства и т. п. **59.** 0,6. **60.** а) $(\mathrm{C}_{94}^{44}\mathrm{C}_6^6 + \mathrm{C}_{94}^{50}\mathrm{C}_6^0)/\mathrm{C}_{100}^{50} \approx 0{,}027$; б) $\mathrm{C}_{94}^{47}\mathrm{C}_6^3/\mathrm{C}_{100}^{50} \approx 0{,}322$. **61.** 0,8. **62.** 240. Диаграмма Вьенна – Эйлера представлена на рис. О.1. **63.** а) Неверно; б) неверно; в) верно. **64.** а) 0,15; б) 0,6. **65.** Да. **66.** Сотрудники деканата попытались вычислить по данным, представленным Петей, вероятность того, что случайно выбранный студент либо окажется юношей, либо занимается спортом, либо учится на «*хорошо*» и «*отлично*» и получили 46/45 > 1, а вероятность не может быть больше единицы. **67.** $\varnothing, A\setminus B\setminus C, A\setminus B, A\setminus(B\setminus C), A\cup C, A\cup B\cup C, \Omega$. **68.** а) Неверно; б) верно; в) неверно; г) неверно. **69.** а) 0,013; б) 0,45. **70.** Трезвый расчёт. **72.** $\mathbf{P}\{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\} = \mathbf{P}\{A_1\}+\mathbf{P}\{A_2\}+\mathbf{P}\{A_3\}+\mathbf{P}\{A_4\} - \mathbf{P}\{A_1\cap A_2\} - \mathbf{P}\{A_1\cap A_3\} - \mathbf{P}\{A_1\cap A_4\} - \mathbf{P}\{A_2\cap A_3\} - \mathbf{P}\{A_2\cap A_4\} - \mathbf{P}\{A_3\cap A_4\} + \mathbf{P}\{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\}$.

Глава 2

76. а) 0,02; б) 0,26. **77.** 0,5; 5/6; 5/8; события A и B зависимы. **78.** 1/15. **79.** 1/6. **80.** Не являются. **81.** а) 1/6; б) 3/5; в) 1/7. **82.** 0,8. **83.** а) 0,73; б) 0,48. **84.** 0,3. **85.** 0,7. **86.** Безразлично. **87.** а) 1/5; б) 1/5; в) 9/245. **88.** а) 57/115; б) 19/46; в) 2/23; г) 229/230; д) 1/230. **89.** p. **92.** Пусть в корзине находится 4 шара, на ощупь неразличимых: красный, жёлтый, зелёный и синий, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный или жёлтый шар, B — красный или зелёный, C — красный или синий. Тогда $\mathbf{P}\{A\}=\mathbf{P}\{B\}=\mathbf{P}\{C\}= 1/2$, $\mathbf{P}\{A\cap B\} = \mathbf{P}\{B\cap C\} = \mathbf{P}\{A\cap C\} = 1/4$. **93.** Пусть в корзине находится 2 шара, на ощупь неразличимых: красный и жёлтый, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный шар, B — жёлтый шар. Тогда $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = 1/2$, но, очевидно, $\mathbf{P}\{A\cap B\}=0\neq(1/2)^2$. **96.** а) Да; б) нет. **97.** а) Нет; б) нет. **98.** а) Да; б) нет. **99.** Пусть в корзине находится 4 шара, на ощупь неразличимых: красный, жёлтый, зелёный и синий, и из этой корзины наудачу извлекается один шар. Пусть событие A состоит в том, что извлечён красный или жёлтый шар, B — красный или зелёный, C — красный или синий. Тогда $\mathbf{P}\{A\}=\mathbf{P}\{B\}=\mathbf{P}\{C\}= 1/2$,

$\mathbf{P}\{A\cap B\}=\mathbf{P}\{B\cap C\}=\mathbf{P}\{A\cap C\}=1/4$, но $\mathbf{P}\{A\cap B\cap C\}=1/4\neq(1/2)^3$. **102.** Да. **105.** 0,151. **106.** 0,4. **107.** 0,066. **108.** 2/3. **109.** 0,744; данная система упускает значительное число привлекательных инвестиций. **110.** а) 0,68; б) 0,6; в) 3/17; г) 9/16. **111.** а) 0,3; б) 7/15; в) 3/35. **112.** 0,2. **113.** а) 1/3; б) 2/3. **114.** 0,7. **115.** а) 0,091; б) 0,9. **116.** Общее решение уравнения $p(x)=[2p(x+1)+3\,p(x-1)]/5$ имеет вид $p(x)=C_1\left(\frac{1-2/5}{2/5}\right)^x+C_2$, с учётом граничных условий $p(x)=\frac{(3/2)^x-(3/2)^s}{1-(3/2)^s}$. При $x=100$, $s=110$ $p(100)=\frac{(3/2)^{100}-(3/2)^{110}}{1-(3/2)^{110}}\approx 0,983$, а при $x=100, s=1\ 000$ $p(100)\approx 1$, т. е. Петя разорится почти наверняка. **117.** Вероятность разорения в задаче 115 не изменится, а в задаче 116 уменьшится: $p^{(2\text{ руб.})}(x)=\frac{1+(3/2)^s}{(3/2)^x+(3/2)^s}\,p^{(1\text{ руб.})}(x)<p^{(1\text{ руб.})}(x)$. **118.** $m(x)=x(s-x)$, при $x=100, s=110$ $m(100)=1000$, а при $x=100, s=1000$ $m(100)=90\ 000$. **119.** $\mathbf{P}_m(A)=\frac{m}{n}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}$; при $n\to\infty$ $m_n\approx\frac{n}{e}$, где $e=2,718281828\ldots$ — основание натурального логарифма. **120.** Первый сундук: 1 белый шар и 2 чёрных шара, второй сундук: 1 белый шар, тогда вероятность извлечения белого шара наибольшая и равна 2/3. **121.** $\mathbf{P}_3(0)=0,027$, $\mathbf{P}_3(1)=0,189$, $\mathbf{P}_3(2)=0,441$, $\mathbf{P}_3(3)=0,343$. **122.** 2 чел. **123.** Наиболее вероятная величина штрафа за 48 поездок равна 20 руб., что существенно меньше стоимости проездного билета. **124.** 125. **125.** 63/256. **126.** а) 0,034; б) 0,343. **127.** $\mathbf{P}_4(3)=1/4$, $\mathbf{P}_8(5)=7/32<\mathbf{P}_4(3)$, т. е. выиграть 3 партии из 4 вероятнее, чем 5 партий из 8. **128.** $\mathbf{P}_4(3)+\mathbf{P}_4(4)=5/16$, $\mathbf{P}_8(5)+\mathbf{P}_8(6)+\mathbf{P}_8(7)+\mathbf{P}_8(8)=93/256>\mathbf{P}_4(3)+\mathbf{P}_4(4)$, т. е. выиграть не менее 5 партий из 8 вероятнее, чем выиграть не менее 3 партий из 4. **129.** а) 0,343; б) 0,441. **130.** 7. **131.** 4. **132.** 12. **133.** 0,976. **134.** а) 0,31; б) 0,89; в) 0,4. **135.** $C_5^2(1/3)^2(2/3)^3$. **136.** Вероятность выигрыша Пети равна 112/243, вероятность выигрыша Маши равна 131/243, значит, выиграла Маша. **137.** Петя должен забрать 77 руб. 34 коп., а Вася 22 руб. 66 коп. **138.** $\mathbf{P}\{A_i\}=C_{2n-r}^n/2^{2n-r}$. **142.** 0,027. **143.** 0,2. **144.** а) 0,27; б) 0,865; в) 8. **145.** а) 0,107; б) за 5 дней. **146.** 0,637.

Глава 3

149. $c\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. **150.** $c=1/4$; $\mathbf{P}\{X\geqslant 1\}=3/4$. **151.** $a=2$; $\mathbf{P}\{1\leqslant X<2,5\}=0,25$. **152.** Нет. **154.** $F(X)=\mathbf{P}\{X<x\}=$

$$=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant x_1,\\ p_1, & x_1<x\leqslant x_2,\\ p_1+p_2, & x_2<x\leqslant x_3,\\ \ldots & \ldots\\ \sum\limits_{i=1}^{l}p_i, & x_l<x\leqslant x_{l+1},\\ \ldots & \ldots\\ 1, & x_n<x\leqslant+\infty.\end{cases}$$

156. $p_i=F(x_{i+1})-F(x_i)$. **158.**

X	0	100	500	2000
p	0,85	0,10	0,04	0,01

; кривая распределения представлена на рис. О.2; $F(X)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0,85, & 0<x\leqslant 1,\\ 0,95, & 1<x\leqslant 5,\\ 0,99, & 5<x\leqslant 20,\\ 1, & x>20;\end{cases}$ $\mathbf{P}\{X<500\}=0,95$; $\mathbf{P}\{X<2\ 100\}=1$; $\mathbf{P}\{-100<X\leqslant 1\ 000\}=0,99$; $\mathbf{M}X=0,5$; $\mathbf{D}X=4,85$. **159.** а) 0,635; б) 0,0425; в) 0,9575. **160.** $\mathbf{M}X=1,585$; $\sigma_X=1,838$. **161.**

$X_б$	−10 000	51 000
p	0,001	0,999

;

$X_{с/к}$	−500 000	10 000
p	0,001	0,999

; $\mathbf{M}X_б=50\ 939$; $\mathbf{M}X_{с/к}=9\ 500$. **162.** Выгоднее обратиться к детективу ($\mathbf{M}T=2,4$ дня). **163.**

N	1	2	3
p	1/3	2/9	4/9

; $\mathbf{M}T=1$ч 3 мин 20 с. **164.** $\bar{Q}_1=4$; $r_1=4,4$; $\bar{Q}_2=2$; $r_2=3,3$; $\bar{Q}_3=2,5$; $r_3=6,8$; $\bar{Q}_4=1,5$;

$r_4=4{,}5$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.3; оптимальной по Парето является 4-я операция. **165.** $\bar{Q}_1=4{,}81$; $r_1=1{,}77$; $\bar{Q}_2=4{,}16$; $r_2=3{,}57$; $\bar{Q}_3=7$; $r_3=2{,}30$; $\bar{Q}_4=2{,}81$; $r_4=2{,}54$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.4; оптимальными по Парето являются 1-я и 3-я операции. **166.** $\bar{Q}_1=4$; $r_1=4{,}36$; $\bar{Q}_2=3$; $r_2=6{,}40$; $\bar{Q}_3=3{,}5$; $r_3=3{,}90$; график «*риск – доходность*» представлен на рис. О.5; оптимальными по Парето являются 1-я и 3-я операции; лучшая операция — первая, худшая — вторая; при $\gamma=0{,}5$ лучшей операцией становится третья. **167.** $\mathbf{M}X=0{,}7$; $\mathbf{M}Y=0{,}8$; $\mathbf{D}X=0{,}41$; $\mathbf{D}Y=3{,}36$; $\begin{array}{c|cccccc} Z & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}24 & 0{,}56 \end{array}$; $\mathbf{M}Z=1{,}97$; $\mathbf{D}Z=2{,}77$; (3.14) и (3.22) справедливы; $\begin{array}{c|ccc} V & -2 & 0 & 2 \\ \hline p & 0{,}31 & 0{,}1 & 0{,}59 \end{array}$; $\mathbf{M}V=0{,}56$; $\mathbf{D}V=3{,}29$; (3.15) справедливо; $\begin{array}{c|cc} W & -1 & 0 \\ \hline p & 0{,}1 & 0{,}9 \end{array}$; $\mathbf{M}W=0{,}1$; $\mathbf{D}W=0{,}09$. **168.** $\mathbf{D}X=\mathbf{D}Y=4$. **169.** Пусть X задана рядом распределения $\begin{array}{c|cc} X & 1 & 2 \\ \hline p & 1/3 & 2/3 \end{array}$, $Y=X$, тогда X и Y будут зависимы, $\mathbf{M}X=\mathbf{M}Y=5/3$, $\mathbf{M}(XY)=3\neq(5/3)^2$. **170.** $\mathbf{D}(XY)=\mathbf{M}(X^2)\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2(\mathbf{M}Y)^2$. **172.** $\begin{array}{c|ccc} Z & 0 & 25 & 100 \\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{array}$, $\begin{array}{c|cccccc} V & -50 & -25 & 0 & 25 & 50 & 100 \\ \hline p & 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}36 & 0{,}26 & 0{,}2 & 0{,}04 \end{array}$.

173. $\begin{array}{c|ccccc} X & 444{,}44 & 666{,}67 & 1000{,}00 & 1500{,}00 & 2250{,}00 \\ \hline p & 1/16 & 1/8 & 5/16 & 1/4 & 1/4 \end{array}$; $\mathbf{M}X=1361{,}11$. **174.** 0,564. **177.** $1/n$. **181.** $\begin{array}{c|cccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & \frac{1}{243} & \frac{10}{243} & \frac{40}{243} & \frac{80}{243} & \frac{80}{243} & \frac{32}{243} \end{array}$;

$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ 1/243, & 0<x\leqslant 1, \\ 11/243, & 1<x\leqslant 2, \\ 51/243, & 2<x\leqslant 3, \\ 131/243, & 3<x\leqslant 4, \\ 211/243, & 4<x\leqslant 5, \\ 1, & x>5; \end{cases}$ $\mathbf{M}X=10/3$; $\mathbf{D}X=10/9$; график функции распределения представлен на рис. О.6.

182. $\begin{array}{c|ccccc} \text{Число правильных ответов, } X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{Число экзаменующихся, } 256\mathbf{P}\{X=x_i\} & 81 & 108 & 54 & 12 & 1 \end{array}$. **183.** $\begin{array}{c|ccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & 0{,}0016 & 0{,}0256 & 0{,}1536 & 0{,}4096 & 0{,}4096 \end{array}$; таким же. **184.** $\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 1/64 & 9/64 & 27/64 & 27/64 \end{array}$; $\mathbf{M}X=9/4$; $\mathbf{D}X=9/16$. **185.** 5/3. **186.** $\mathbf{M}X=9$; $\mathbf{P}\{X=10\}=0{,}35$.

187. $\widehat{\mathbb{C}}_T=2{,}245$; $\widehat{\mathbb{P}}_T=7{,}245$; ряд распределения дохода от исполнения опциона «*колл*»: $\begin{array}{c|ccc} \mathbb{C}_{(4)} & 0 & 2{,}737 & 12{,}182 \\ \hline p & 0{,}533 & 0{,}341 & 0{,}126 \end{array}$. **189.** 1000. **190.** 5. **191.** $\begin{array}{c|cccccc} N & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \hline p & 1/365 & (364/365)(1/365) & \cdots & (364/365)^{k-1}(1/365) & \cdots \end{array}$; $\mathbf{M}N=365$.

192. Аполлон Митрофанович играет в среднем 37 раз, при этом его средний выигрыш за один раз равен - 7/37 руб., т. е. в среднем он каждый раз проигрывает 7/37 руб. и выходит из казино, оставив там 7 руб. **194.** $\mathbf{P}\{X=2\}=0{,}27$; $\mathbf{P}\{X>1\}=0{,}59$; $\mathbf{P}\{0<X<3\}=0{,}55$; $\mathbf{P}\{X=1|X>0\}=0{,}31$; график функции распределения представлен на рис. О.7. **195.** $\mathbf{P}\{X=7\}\approx 0{,}004$, $\mathbf{P}\{X\geqslant 7\}\approx 0{,}005$, $\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=2$, $\sigma_X\approx 1{,}41$. **196.** а) 0,33; б) 0,9992; в) $\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=0{,}4$. **197.** 0,993; $\mathbf{M}X=\mathbf{D}X=5$. **200.** а) 0,091; б) 0,218; в) 0,909. **201.** 0,865. **202.** $F_T(t)=1-e^{-\mu t}$. **203.** $c=2{,}5$; $\mathbf{M}X=5/3$; $\sigma_X=2\sqrt{5}/3\approx 1{,}49$; $x_{\min}\approx 1{,}32$. **204.** $c=3$; $\mathbf{M}X=1{,}5$; $\sigma_X=\sqrt{0{,}75}\approx 0{,}87$; $x_{\min}=\sqrt[3]{45}/3\approx 3{,}56$. **205.** $a=0{,}5$; $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0<X\leqslant 2, \\ 1 & X>2; \end{cases}$ $\mathbf{M}X=4/3$; $\mathbf{D}X=2/9$; $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<0{,}5\}=2/3$; графики $f_X(x)$ и $F_X(x)$ представлены на рис. О.8 и О.9. **206.** $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & x\in[-2;2], \\ 0, & x\notin[-2;2]; \end{cases}$ $\mathbf{M}X=0$; $\mathbf{D}X=4/3$. **208.** $\mathbf{P}\{X>10\}=0{,}9$; $\mathbf{P}\{40<X<90\}=0{,}5$; $\mathbf{P}\{X=50\}=0$; $\mathbf{P}\{X>50|X<80\}=3/8$; $\mathbf{M}X=50$; $\mathbf{D}X=2500/3$. **209.** 0,68. **210.** $\mathbf{M}X=5$; $\mathbf{D}X=3$; $\mathbf{P}\{6\leqslant X\leqslant 9\}=\mathbf{P}\{3<X<5\}=2/3$. **211.** $\mathbf{P}\{|X|>0{,}03\}=0{,}4$; $\mathbf{M}X=0$; $\mathbf{D}X=1/120$; $\sigma_X=1/(2\sqrt{30})\approx 0{,}09$.

214. $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}=\sqrt{3}/4\approx 0{,}866$. **215.** $\mathbf{M}(XY)=\frac{(a+b)(c+d)}{4}$; $\mathbf{D}(XY)=\frac{7(ac-bd)^2+7(ad-bc)^2+8abcd}{144}-$ $-\frac{2ab(c^2+d^2)+2cd(a^2+b^2)}{144}$. **216.** $\mathbf{M}X=6$ мин; $\mathbf{D}X=36$; $\mathbf{P}\{X<7|X>6\}\approx 0{,}154$. **217.** $\mathbf{P}\{X>1\}\approx 0{,}135$; $\mathbf{P}\{X<2\}\approx 0{,}982$; $\mathbf{P}\{X>-1\}=1$; $\mathbf{P}\{X=3\}=0$; $\mathbf{P}\{X>1|X<3\}\approx 0{,}319$; $\mathbf{M}X=0{,}5$; $\mathbf{D}X=0{,}25$. **218.** 0,133. **219.** 0,221. **220.** $\mathbf{P}\{X>3\}\approx 0{,}368$; $\mathbf{P}\{X<1\}\approx 0{,}283=28{,}3\%$; $\mathbf{P}\{X>10\mid X<11\}\approx 0{,}283$; $\mathbf{M}X=1/3$; $\mathbf{D}X=1/9$. **221.** $\mathbf{P}\{X<7\}\approx 0{,}877$; $\mathbf{M}X=10/3$. **222.** $e^{-\mu a}-e^{-\mu b}$. **223.** а) $1-e^{-\mu\tau}$; б) $1-e^{-\mu\tau}$. **225.** $F(x)=$ $=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-100)^2}{512}}dz=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-100}{16}\right)$, её график представлен на рис. 3.1а; $f(x)=\frac{1}{16\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-100)^2}{512}}=$ $=\frac{1}{16}\varphi\left(\frac{x-100}{16}\right)$, её график представлен на рис. 3.1б. **226.** а) 0,0062: б) 0,0594; в) 0,3783; г) 0,5; д) 0,8944; е) 0,7888. **227.** 0,9973. **228.** 0,326. **229.** Кривая распределения представлена на рис. О.10; график функции распределения представлен на рис. О.11; $f(1)=f(-1)=0{,}2420$; $f(2{,}25)=0{,}0317$; $F(1)=0{,}8413$; $F(-1)=0{,}1587$; $F(2{,}25)=0{,}9878$; $\mathbf{P}\{X<1\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{X>-1\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{|X|<1\}=0{,}6826$; $\mathbf{P}\{|X|<3\}=0{,}9973$; $\mathbf{P}\{0<X<3\}=0{,}49865$. **230.** $\mathbf{P}\{X>2\}=0{,}1587$; $\mathbf{P}\{X<2\}=0{,}8413$; $\mathbf{P}\{0<X<2\}=0{,}6826$; $\mathbf{P}\{X<2|X>0\}=0{,}8114$. **231.** $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}\approx 0{,}9973$. **233.** $\mathbf{P}\{X>1\}=0{,}6293$; $\mathbf{P}\{-2<X\leqslant 2\}=0{,}4082$; $\mathbf{P}\{X<2\}=0{,}5$; $\mathbf{P}\{X<2|X>0\}=0{,}3292$; правило трёх сигм: $\mathbf{P}\{|X-2|<9\}=\mathbf{P}\{-7<X<11\}\approx 0{,}9973$. **235.** а) 0,03; б) 0,01; в) 0,78; г) 0,04 **236.** $\mathbf{M}X\approx 50{,}6$; $\sigma_X\approx 36$. **237.** Информация недостоверна, на самом деле брак составляет 13,36% всей продукции. **238.** 0,3174. **239.** Правило шести сигм означает, что на каждый миллиард единиц выпущенной продукции допустимо не более двух некачественных. **240.** Цена актива при его моделировании с помощью нормального распределения может с положительной вероятностью принимать отрицательные значения, что противоречит здравому смыслу. Случайная величина, распределённая по логнормальному закону, может принимать с положительными вероятностями только неотрицательные значения. **242.** а) 8866,87 ден. ед.; б) 0,536. **243.** 0,844. **244.** а) 0,95; б) 0,9; в) 0,94; г) 0,02; д) 1; е) 0,735. **245.** а) 0,95; б) 0,945; в) 0,964. **246.** 0,05. **247.** $F(x)=\begin{cases}0, & x<-l,\\ \frac{(l+x)^2}{2l^2}, & -l\leqslant x<0,\\ 1-\frac{(l+x)^2}{2l^2}, & 0\leqslant x<l,\\ 1, & x\geqslant l,\end{cases}$ $\mathbf{M}X=0, \mathbf{D}X=l^2/6$. **248.** $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $\mathbf{M}X=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **250.** $\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 4\\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\end{array}$, $\mathbf{M}X=2{,}1$, $\mathbf{D}X=2{,}69$, $m_Y(t)=0{,}2+0{,}3e^t+0{,}1e^{4t}+0{,}4e^{16t}$. **251.** $m_X(t)=0{,}2e^{-t}+0{,}3+0{,}5e^t$. **254.** $m_X(t)=e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. **255.** $\nu_4(X)=\left(e^{t^2/2}\right)^{(4)}\Big|_{t=0}=\left(3e^{t^2/2}+6t^2e^{t^2/2}+t^4e^{t^2/2}\right)\Big|_{t=0}=3$. **256.** $m_X(t)=\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$, $\mathbf{M}X=p$. **257.** $m_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$. **258.** $m_X(t)=\frac{\mu}{\mu-t}$, $\nu_2(X)=\frac{2}{\mu^2}$, $\mu_3(X)=\frac{2}{\mu^3}$. **260.** Модой является любое число из полуинтервала $\mathbf{Mo}X\in[a;b)$, $\mathbf{Me}X=(a+b)/2$. **261.** $\mathbf{Mo}X=0$, $\mathbf{Me}X=\ln 2/\mu$. **264.** $\mathbf{A}_X=\mathbf{E}_X=0$. **265.** $\mathbf{A}_X=1/\sqrt{\lambda}, \mathbf{E}_X=1/\lambda$. **266.** $\mathbf{A}_X=0, \mathbf{E}_X=-1{,}2$. **267.** $\mathbf{A}_X=0, \mathbf{E}_X=3$ (*указание*: использовать интеграл $\int\limits_0^{+\infty}x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$). **268.** а) –1,96; 1,96; б) 1,65. **269.** а) –2,23; 2,23; б) 10,85; 31,41. **270.** 9,55; 0,05. **274.** 0,26. **276.** $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\end{array}$, $\begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}5 & 0{,}5\end{array}$, $\mathbf{P}\{X<Y\}=0{,}4$. **277.** $f(x,y)=\begin{cases}(\ln 2)^2\cdot 2^{-x-y}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$ **278.** $F(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x+\sin y-\sin(x+y)}{2}, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$ **285.** $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}4\end{array}$, $\begin{array}{c|cc} Y & 1 & 2\\ \hline p & 0{,}75 & 0{,}25\end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} X|Y=2 & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\end{array}$, X и Y зависимы, $\begin{array}{c|cccc} X+Y & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline p & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}1\end{array}$. **286.** $c=\sqrt{3}/\pi$, $f(x)=[\sqrt{3}/(2\sqrt{\pi})]e^{-0{,}75x^2}$, $f(y)=[\sqrt{3}/\sqrt{\pi}]e^{-3y^2}$, X и Y зависимы. **289.** –0,25. **290.** $\mathrm{cov}(X,Y)=\rho(X,Y)=0$. **292.** –0,64. **293.** а) Всегда; б) никогда (они могут быть независимыми только при $\mathbf{M}Z^2=(\mathbf{M}Z)^2$, т. е. при $\mathbf{D}Z=0$). **295.** $\mathrm{cov}(X,Y)=0{,}0725$, $\rho(X,Y)=0{,}044$.

296. Значение ковариации, полученное Машей, оказалось в 100 раз меньше значения, полученного Петей. **297.** Значения коэффициента корреляции, полученные Машей и Петей, оказались одинаковыми. **298.** 20. **299.** $\sqrt{t/(t+\tau)}$. **300.** $\mathbf{M}(0,35X+0,65Y)\approx 9,95\%$, $\sigma_{(0,35X+0,65Y)}=8,39\%$. **302.** 0,6. **303.** Компоненты двумерного равномерного распределения в круге радиусом r с центром в начале координат. **305.** $\begin{array}{c|ccc} X\mid Y=0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline p & 0 & 1/5 & 4/5 \end{array}$. **306.** $\begin{array}{c|cc} \mathbf{M}(X\mid Y) & -0,2 & 0,8 \\ \hline p & 0,5 & 0,5 \end{array}$. **309.** $Y\sim \mathrm{R}(0;1)$. **310.** $Y\sim \mathrm{R}(0;1)$. **311.** $f_Y(y)= \ =\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}$.

312. $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(1-y)+f_X(1+y), & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$ **313.** $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(0;1),\\ 0, & y\notin(0;1).\end{cases}$ **314.** $f_Y(y)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ x^n, & x\in[0;1],\\ 1, & x>1.\end{cases}$

315. $f_X(x)=\begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ **317.** $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$, где $a=a_1+a_2$, $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2$.

318. $X\sim\mathcal{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i;\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2\sigma_i^2}\right)$. **319.** 0,1687. **320.** $f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<3,\\ (x-3)/8, & 3\leqslant x<5,\\ 1/4, & 5\leqslant x<7,\\ (9-x)/8, & 7\leqslant x<9,\\ 0, & x\geqslant 9.\end{cases}$ **321.** $f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ x/16, & 0\leqslant x<2,\\ 1/8, & 2\leqslant x<8,\\ (10-x)/16, & 8\leqslant x<10,\\ 0, & x\geqslant 10.\end{cases}$

322. $\Pi(\lambda_1+\lambda_2)$. **323.** 1/3.

Глава 4

328. $\mathbf{P}\{|X-\mathbf{M}X|<3\sigma_X\}\geqslant\frac{8}{9}$. **329.** $\mathbf{P}\{100\leqslant X\leqslant 300\}>0,99$. **330.** а) Согласно неравенству Маркова $\mathbf{P}\{X<r\}\geqslant -c$, при этом $c=\frac{a-r}{r}>0$, т. е. неравенство Маркова не даёт никакой информации, поскольку вероятность любого события заведомо больше произвольного отрицательного числа; б) $\mathbf{P}\{X<r\}=\frac{1}{2}+\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. **331.** Число вкладчиков не превышает 1 000. **332.** а) $\mathbf{P}\{X\leqslant 2\ 000\}\geqslant 0,5$; б) $\mathbf{P}\{X\leqslant 2\ 000\}\geqslant 0,96$, т. е. неравенство Чебышёва даёт более точную оценку. **333.** $\mathbf{P}\{|\hat{p}-p|\leqslant 0,04\}\geqslant 0,929$. **341.** Пусть случайные величины X_n $(n=1,2,\ldots,n,\ldots)$ задаются с помощью ряда распределения $\begin{array}{c|cc} X & 0 & n \\ \hline p & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n}\end{array}$, при этом последовательность $X_n\xrightarrow{\mathbf{P}}X=0$ (действительно, зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$, тогда для всех n, начиная с некоторого $n_0>\varepsilon$, $\mathbf{P}\{|X_n-0|>\varepsilon\}=\{\text{так как } X_n>0\}=\mathbf{P}\{X_n>\varepsilon\}=\mathbf{P}\{X_n=n\}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$), однако при этом $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}X_n=1$, а $\mathbf{M}X=0$. **347.** 0,975. **349.** 0,999. **350.** 12 691 долл. **351.** $[-0,866\cdot 10^{2-m};0,866\cdot 10^{2-m}]$. **352.** $X\sim\mathcal{N}(300;30)$. **356.** а) $\mathbf{P}\{0,9\leqslant\hat{p}\leqslant 0,95\}=0,0024$; б) $\mathbf{P}\{|p-\hat{p}|\leqslant 0,04\}\geqslant 0,9998$, интегральная теорема Муавра – Лапласа даёт более точный результат, чем оценка с помощью неравенства Чебышёва. **357.** 0,24; 3840. **361.** а) 0; б) 0,00044; в) 0,088; г) 0. **362.** 0,05. **363.** 0,747. **364.** а) 0,999999999876; б) 0,0008; в) 0,000006. **365.** а) 0; б) 0,995. **366.** 3 359 145 руб.; 817 руб. 97 коп. **367.** а) 2,181 и 7,181; б) 2,210 и 7210. **368.** 6700. **369.** 547 чел.

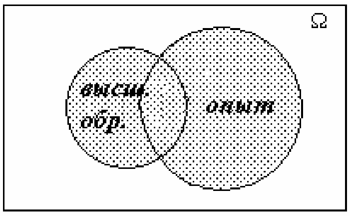


Рис. О.1. *Диаграмма Вьенна – Эйлера в задаче 63*

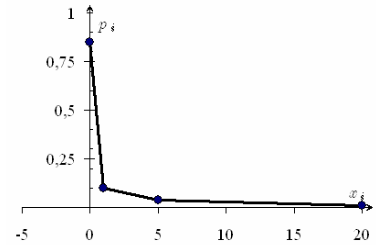


Рис. О.2. *Кривая распределения в задаче 158*

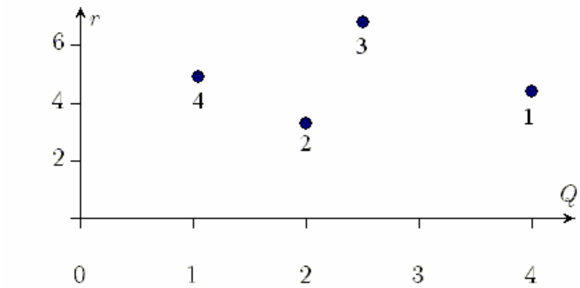


Рис. О.3. *График «риск – доходность» в задаче 164*

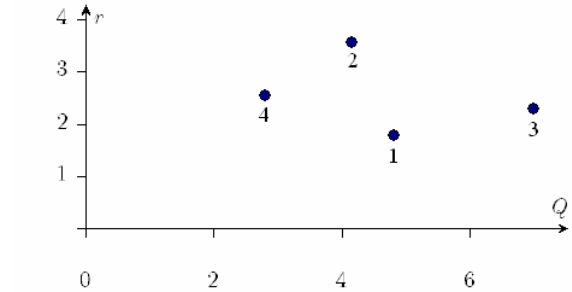


Рис. О.4. *График «риск – доходность» в задаче 165*

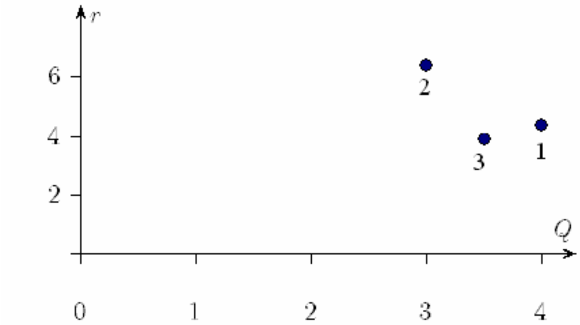


Рис. О.5. *График «риск – доходность» в задаче 166*

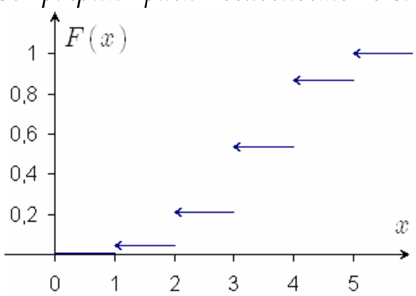


Рис. О.6. *График функции распределения в задаче 181*

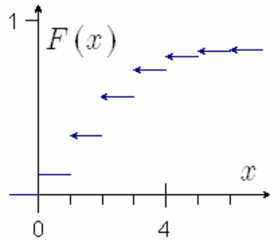


Рис. О.7. *График функции распределения в задаче 194*

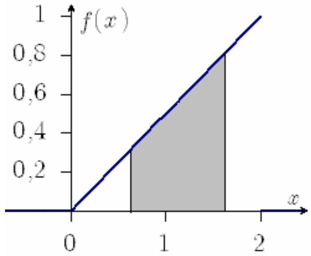


Рис. О.8. *График* $f_X(x)$ *в задаче 205*

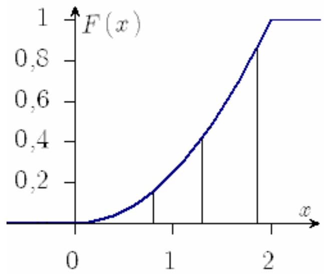


Рис. О.9. *График* $F_X(x)$ *в задаче 205*

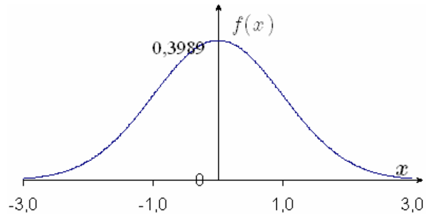


Рис. О.10. *Кривая распределения в задаче 226*

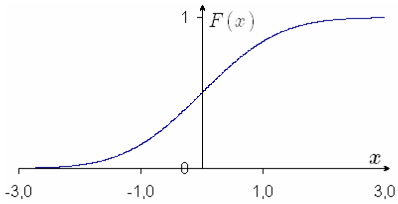


Рис. О.11. *График функции распределения в задаче 229*

Литература

1. *Колемаев В. А., Калинина В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ИНФРА–М, 2000.

2. *Агапов Г. И.* Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1986.

3. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998.

4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 2000.

5. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1998.

6. *Задачник по теории вероятностей для экономистов* / В. С. Мхитарян, Л. И. Трошин, В. А. Кошлякова, И. Г. Горбунов; МЭСИ. – М., 2000.

7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989.

8. *Калинина В. Н.* Математическая статистика в примерах и задачах / ГАУ. – М., 1996.

9. *Калинина В. Н.* Основы математической логики, вероятность и анализ данных в правоприменительной деятельности / ГУУ. – М., 2000.

10. *Калинина В. Н., Панкин В. Ф.* Математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2000.

11. *Карандаев И. С., Малыхин В. И., Соловьёв В. И.* Прикладная математика. – М.: Финстатинформ, 2001.

12. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: ФАЗИС, 1998.

13. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2000.

14. *Малыхин В. И.* Математика в экономике. – М.: ИНФРА–М, 2000.

15. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

16. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986.

17. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. – М.: Наука, 1989.

18. *Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика* / Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др. – М.: Наука, 1990.

19. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.

20. *Соловьёв В. И.* Стохастические методы в экономике и финансах / ГУУ. – М., 2000.

21. *Соловьёв В. И.* Стохастические модели математической экономики и финансовой математики / ГУУ. – М., 2001.

22. *Теория вероятностей: Сборник задач* / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – Киев: Вища школа, 1980.

23. *Теория вероятностей в примерах и задачах* / В. А. Колемаев, В. М. Громенко, В. Н. Калинина и др.; ГАУ. – М., 1993.

24. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* (*Watsham T. J., Parramore K.*) Quantitative methods in finance. – London, UK: International Thomson Business Press, 1996. (Рус. пер. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. – М.: ЮНИТИ, 1999).

25. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989.

Приложение. Статистические таблицы

Таблица П.1

Значения плотности стандартного нормального распределения $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$

и функции Лапласа $\Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^u e^{-t^2/2} dt$

u	$\varphi(u)$	$\Phi_0(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi_0(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi_0(u)$
0,00	0,3989	0,0000	1,40	0,1497	0,4192	2,80	0,0079	0,4974
0,05	0,3984	0,0199	1,45	0,1394	0,4265	2,85	0,0069	0,4978
0,10	0,3970	0,0398	1,50	0,1295	0,4332	2,90	0,0060	0,4981
0,15	0,3945	0,0596	1,55	0,1200	0,4394	2,95	0,0051	0,4984
0,20	0,3910	0,0793	1,60	0,1109	0,4452	3,00	0,0044	0,4987
0,25	0,3867	0,0987	1,65	0,1023	0,4505	3,05	0,0038	0,4989
0,30	0,3814	0,1179	1,70	0,0940	0,4554	3,10	0,0033	0,4990
0,35	0,3752	0,1368	1,75	0,0863	0,4599	3,15	0,0028	0,4992
0,40	0,3683	0,1554	1,80	0,0790	0,4641	3,20	0,0024	0,4993
0,45	0,3605	0,1736	1,85	0,0721	0,4678	3,25	0,0020	0,4994
0,50	0,3521	0,1915	1,90	0,0656	0,4713	3,30	0,0017	0,4995
0,55	0,3429	0,2088	1,95	0,0596	0,4744	3,35	0,0015	0,4996
0,60	0,3332	0,2257	2,00	0,0540	0,4772	3,40	0,0012	0,4997
0,65	0,3230	0,2422	2,05	0,0488	0,4798	3,45	0,0010	0,4997
0,70	0,3123	0,2580	2,10	0,0440	0,4821	3,50	0,0009	0,4998
0,75	0,3011	0,2734	2,15	0,0396	0,4842	3,55	0,0007	0,4998
0,80	0,2897	0,2881	2,20	0,0355	0,4861	3,60	0,0006	0,4998
0,85	0,2780	0,3023	2,25	0,0317	0,4878	3,65	0,0005	0,4999
0,90	0,2661	0,3159	2,30	0,0283	0,4893	3,70	0,0004	0,4999
0,95	0,2541	0,3289	2,35	0,0252	0,4906	3,75	0,0004	0,4999
1,00	0,2420	0,3413	2,40	0,0224	0,4918	3,80	0,0003	0,4999
1,05	0,2299	0,3531	2,45	0,0198	0,4929	3,85	0,0002	0,4999
1,10	0,2179	0,3643	2,50	0,0175	0,4938	3,90	0,000199	0,499952
1,15	0,2059	0,3749	2,55	0,0154	0,4946	3,95	0,000163	0,499961
1,20	0,1942	0,3849	2,60	0,0136	0,4953	4,00	0,000134	0,499968
1,25	0,1826	0,3944	2,65	0,0119	0,4960	4,25	0,000048	0,499989
1,30	0,1714	0,4032	2,70	0,0104	0,4965	4,50	0,000016	0,499997
1,35	0,1604	0,4115	2,75	0,0091	0,4970	5,00	0,0000015	0,4999997

Указание. При $u > 5$ $\varphi(u) \approx 0$, $\Phi_0(u) \approx 0,5$. Следует также обратить внимание на то, что функция $\varphi(u)$ чётная, т. е. $\varphi(-u) = \varphi(u)$, а функция $\Phi_0(u)$ — нечётная, т. е. $\Phi_0(-u) = -\Phi_0(u)$.

Таблица П.2

Значения $\chi^2_{n;p}$, *соответствующие вероятности* $p = \mathbf{P}\{\chi^2 < \chi^2_{n;p}\}$

$n \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99	$n \backslash p$	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99
1	0,0002	0,0039	0,02	2,71	3,84	6,63	18	7,01	9,39	10,86	25,99	28,87	34,81
2	0,02	0,10	0,21	4,61	5,99	9,21	19	7,63	10,12	11,65	27,20	30,14	36,19
3	0,11	0,35	0,58	6,25	7,81	11,34	20	8,26	10,85	12,44	28,41	31,41	37,57
4	0,30	0,71	1,06	7,78	9,49	13,28	21	8,90	11,59	13,24	29,62	32,67	38,93
5	0,55	1,15	1,61	9,24	11,07	15,09	22	9,54	12,34	14,04	30,81	33,92	40,29
6	0,87	1,64	2,20	10,64	12,59	16,81	23	10,20	13,09	14,85	32,01	35,17	41,64
7	1,24	2,17	2,83	12,02	14,07	18,48	24	10,86	13,85	15,66	33,20	36,42	42,98
8	1,65	2,73	3,49	13,36	15,51	20,09	25	11,52	14,61	16,47	34,38	37,65	44,31
9	2,09	3,33	4,17	14,68	16,92	21,67	26	12,20	15,38	17,29	35,56	38,89	45,64
10	2,56	3,94	4,87	15,99	18,31	23,21	27	12,88	16,15	18,11	36,74	40,11	46,96
11	3,05	4,57	5,58	17,28	19,68	24,73	28	13,56	16,93	18,94	37,92	41,34	48,28
12	3,57	5,23	6,30	18,55	21,03	26,22	29	14,26	17,71	19,77	39,09	42,56	49,59
13	4,11	5,89	7,04	19,81	22,36	27,69	30	14,95	18,49	20,60	40,26	43,77	50,89
14	4,66	6,57	7,79	21,06	23,68	29,14	40	22,16	26,51	29,05	51,81	55,76	63,69
15	5,23	7,26	8,55	22,31	25,00	30,58	50	29,71	34,76	37,69	63,17	67,50	76,15
16	5,81	7,96	9,31	23,54	26,30	32,00	100	70,06	77,93	82,36	118,50	124,34	135,81
17	6,41	8,67	10,09	24,77	27,59	33,41	150	112,67	122,69	128,28	172,58	179,58	193,21

Таблица П.3

Значения $t_{n;p}$, *соответствующие вероятности* $p = \mathbf{P}\{|T_n| < t_{n;p}\}$

$n \backslash p$	0,9	0,95	0,99	0,995	$n \backslash p$	0,9	0,95	0,99	0,995
1	6,31	12,71	63,66	127,32	14	1,76	2,14	2,98	3,33
2	2,92	4,30	9,92	14,09	15	1,75	2,13	2,95	3,29
3	2,35	3,18	5,84	7,45	16	1,75	2,12	2,92	3,25
4	2,13	2,78	4,60	5,60	17	1,74	2,11	2,90	3,22
5	2,02	2,57	4,03	4,77	18	1,73	2,10	2,88	3,20
6	1,94	2,45	3,71	4,32	19	1,73	2,09	2,86	3,17
7	1,89	2,36	3,50	4,03	20	1,72	2,09	2,85	3,15
8	1,86	2,31	3,36	3,83	25	1,71	2,06	2,79	3,08
9	1,83	2,26	3,25	3,69	30	1,70	2,04	2,75	3,03
10	1,81	2,23	3,17	3,58	40	1,68	2,02	2,70	2,97
11	1,80	2,20	3,11	3,50	60	1,67	2,00	2,66	2,91
12	1,78	2,18	3,05	3,43	120	1,66	1,98	2,62	2,86
13	1,77	2,16	3,01	3,37	∞	1,64	1,96	2,58	2,81

Таблица П.4

Значения $f_{n_1;n_2;p}$, *соответствующие вероятности* $p = \mathbf{P}\{F_{n_1;n_2;p} < f_{n_1;n_2;p}\}$

$p = 0,05$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	248,02	250,10	251,77	253,04
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,46	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,62	8,58	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,75	5,70	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,50	4,44	4,41
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,81	3,75	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,38	3,32	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,08	3,02	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,86	2,80	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,70	2,64	2,59
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	2,04	1,97	1,91
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,93	1,84	1,76	1,70
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,78	1,69	1,60	1,52
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,68	1,57	1,48	1,39

$p = 0,01$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6209	6260	6302	6334
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,45	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	26,69	26,50	26,35	26,24
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,02	13,84	13,69	13,58
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,55	9,38	9,24	9,13
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,40	7,23	7,09	6,99
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,16	5,99	5,86	5,75
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,36	5,20	5,07	4,96
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,81	4,65	4,52	4,41
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,41	4,25	4,12	4,01
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	2,94	2,78	2,64	2,54
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,55	2,39	2,25	2,13
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,27	2,10	1,95	1,82
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,07	1,89	1,74	1,60

Указание. Следует учитывать, что $f_{n_1;n_2;1-p} = \dfrac{1}{f_{n_2;n_1;p}}$.

Оглавление

Владимир Алексеевич КОЛЕМАЕВ
Вера Николаевна КАЛИНИНА
Владимир Игоревич СОЛОВЬЁВ
Вячеслав Иванович МАЛЫХИН
Анатолий Павлович КУРОЧКИН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор И. В. Мушкарина
Компьютерный дизайн, компьютерный набор, вёрстка, рисунки и техническое редактирование В. И. Соловьёв
Обложка А. В. Воуба

Тематический план изданий 2001 г.

ЛР № 020715 от 02.02.98 г.

Подп. в печ. 6.12.2001
Уч.-изд. л. 4,9.
Формат 60×90/16.
Изд. № 219/2001.
Объём 5,5 печ. л.
Тираж 250 экз.
Заказ №

Государственный университет управления
Издательский центр ГУУ
109542, Москва, Рязанский проспект, 99